Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Dissertação de Mestrado

Dualidade bitopológica para reticulados distributivos e álgebras de Heyting

Emanuele Rose Romero de Santana

Salvador-Bahia
Março de 2012

Dualidade bitopológica para reticulados distributivos e álgebras de Heyting

Emanuele Rose Romero de Santana

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Andreas Bernhard Michael Brunner.

Salvador-Bahia

Março de 2012

Santana, Emanuele Rose Romero de.

Dualidade bitopológica para reticulados distributivos e álgebras de Heyting. / Emanuele Rose Romero de Santana. – Salvador: UFBA, 2012.

77 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Andreas Bernhard Michael Brunner.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2012.

Referências bibliográficas.

1. Topologia Geral. 2. Teoria dos Reticulados. 3. Teoria de Categorias. I. Brunner, Andreas Bernhard Michael. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 512.56

: 515.1

Dualidade bitopológica para reticulados distributivos e álgebras de Heyting.

Emanuele Rose Romero de Santana

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 08 de março de 2012.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Andreas Bernhard Michael Brunner(Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Hugo Luiz Mariano
USP

Prof. Dra. Valeria Correa Vaz de Paiva
Universidade de Birminghan

À minha família, à minha mãe, aos meus familiares e aos familiares do meu esposo.

Agradecimentos

"Elevo meus olhos aos montes, de onde me virá o socorro? O meu socorro vem do Senhor, que fez os céus e a terra". Agradeço ao meu Deus, porque em todas as minhas aflições Ele me ouve e socorre. "E em ti confiarão os que conhecem teu nome; porque tu, Senhor, nunca desamparaste os que te buscam." O caminho da Matemática é uma dualidade: as conquistas são muito prazerosas mas também te exigem muito; elas exigem tempo, dedicação quase exclusiva, saúde (os estômagos dos matemáticos que o digam), além de exigir que se tenha o lado emocional bastante equilibrado. Mas Ele sempre me manteve firme, todas as vezes que pensei em desistir. "Deus é o que me cinge de força e aperfeiçoa o meu caminho". E o que dizer quando a vida, ou pior, a violência deste mundo te reserva surpresas e traumas? Não fosse por meu Deus ter nos protegido, meu esposo, minha filha e eu não estaríamos mais aqui, após aquela tentativa de homicídio tão desesperadora que sofremos. Mas Ele nos livrou da morte. "O anjo do Senhor acampa-se ao redor dos que o temem, e os livra. Mil cairão ao teu lado e dez mil à tua direita, mas tu não serás atingido." Enfim, eu não sei viver sem este Deus maravilhoso, que tem um amor desmedido por mim, que cuida de mim e de minha família, que nos guarda e nos fortalece.

Agradeço ao meu esposo e amigo, Felipe Moscozo, por ser um excelente companheiro, um ombro amigo para todos os momentos e uma pessoa muito centrada, que me encoraja e incentiva muito. Agradeço a esta pessoa tão especial por ser o meu amor, o meu alicerce, por ter me escolhido como sua "auxiliadora" (esposa) e por ser um excelente pai. Agradeço a minha filha, Sofia Rose, por ser para mim como um pedacinho do céu, isto é, por ter a capacidade de me tirar deste mundo, me fazer esquecer os problemas e viver momentos de pura felicidade. Agradeço a ela por receber muito amor e carinho de mim, e por devolvê-los de maneira tão especial, todos os dias. Sofia, definitivamente, é o que existe de mais lindo neste planeta.

Agradeço a minha mãe querida, que sempre me incentivou e me fortaleceu, através de toda a sua força. Não conheço alguém mais guerreiro do que esta guerreira que é a minha mãe. Agradeço também pelo apoio incondicional que ela me dá, cuidando de minha filha com todo amor, em todos os muitos momentos que precisei (e preciso), e também pelo seu amor incondicional por mim. Usando do meu baianês que muito gosto: sem mainha, eu não teria chegado até aqui. Agradeço também ao meu pai, porque sempre me incentivou e por ter me feito gostar de matemática. Agradeço a ele por todo apoio e ajuda que sempre me deu. Agradeço ao meu avô, seu Manoel, pelo apoio e incentivo que ele sempre deu, tanto a mim quanto a minha família. Agradeço também aos meus irmãos pelo carinho, pela torcida e pelo apoio. Agradeço às minhas cunhadas, Priscilla e Rosângela, pelo carinho e pelo auxílio. Agradeço às minhas comadres, Priscilla e Juliana, pela amizade e carinho que têm por mim e por minha família. Agradeço aos meus lindos sobrinhos, por serem uma alegria em minha vida e pelo carinho que dou e recebo deles.

Agradeço aos meus sogros por terem me acolhido e ajudado em muitos momentos importantes da minha vida. Agradeço também pelo apoio e pelo incentivo. Agradeço aos meus cunhados, irmãos do meu esposo, por terem me acolhido, em especial a minha cunhada, Amanda, por seu carinho e amizade.

Agradeço ao meu orientador, Andreas Brunner, por toda a sua amizade, compreensão, paciência, disposição, por todo apoio e incentivo que sempre me deu, por sempre querer que eu siga adiante e por não me deixar esmorecer. Agradeço a ele por toda orientação que me deu, tanto acadêmica quanto na vida. Agradeço a Andreas por ter me apresentado a Lógica Matemática, a Teoria de Reticulados e a Teoria de Categorias, especialmente esta última porque me possibilita trabalhar com vários objetos matemáticos.

Agradeço a Samuel Silva, meu “co-orientador” no que diz respeito a algumas decisões acadêmicas. Samuel se tornou um amigo e torcedor e sempre me deu dicas e conselhos valorosos. Agradeço a ele também por ter me apresentado a Topologia, com a qual eu gosto muito de trabalhar.

Agradeço ao Prof. Hugo Luiz Mariano e à Profa. Valeria Vaz de Paiva por aceitarem participar da comissão julgadora de minha dissertação e me darem a honra de tê-los como membros da banca examinadora de minha defesa.

Não poderia esquecer de agradecer aos meus colegas queridos, que carinhosamente me adotaram como “mamãe” e eu a eles como “filhos” – do mais rebelde à mais amorosa, e mesmo àqueles que me fizeram sentir 20 anos mais velha, ao me avistarem de longe e gritarem "Mamãe!". Muito obrigada por toda a força e carinho que vocês me deram em muitos momentos difíceis.

Agradeço a todos os professores que contribuíram efetivamente para minha formação pessoal e acadêmica. Agradeço especialmente aos professores Carlos Loureiro e Margarete Rose Romero (meus pais e primeiros incentivadores à Matemática), Andreas Brunner, Samuel Silva (meu “padrinho”), Silvia Guimarães, Elinalva Vergasta (especialmente pelo imenso alto astral que ela transmite), Cristiana Valente, Eliana, Joseph Nee e José Nelson Barbosa, por todo o apoio e ajuda que me deram ou por terem sido, para mim, especiais como professores. Agradeço ainda aos professores Samuel Silva e Enaldo Vergasta por terem me dado um voto de confiança e, com ele, a oportunidade de fazer e concluir o mestrado em Matemática.

Finalmente, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro concedido a mim durante todo o meu mestrado.

"O mundo é um lugar perigoso de se viver, não por causa daqueles que fazem o mal, mas sim por causa daqueles que observam e deixam o mal acontecer."

Albert Einstein

"Não vos inquieteis pois pelo dia de amanhã, porque o dia de amanhã cuidará de si mesmo. Basta a cada dia o seu mal."

Jesus Cristo

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo principal apresentar a equivalência dual entre a categoria **DLat**, dos reticulados distributivos, e as categorias **Pries**, dos espaços Priestley, e **Spec**, dos espaços espectrais, por meio dos isomorfismos entre estas últimas e a categoria **PStone**, dos espaços pairwise Stone; também estabelecer a equivalência dual de **DLat** com **PStone**, obtendo com isso uma alternativa para o isomorfismo de Cornish. Estes isomorfismos e as equivalências duais entre as referidas categorias, possibilitaram as descrições duais de alguns conceitos algébricos importantes na Teoria de Reticulados, como filtros e ideais de um reticulado. Por fim, como alternativa para a dualidade de Esakia, são apresentadas dualidades bitopológicas para álgebras de Heyting.

Palavras-chave: Espaços pairwise Stone; espaços Priestley; espaços espectrais; espaços bitopológicos; espaços Esakia; dualidades; reticulados.

Abstract

This work aims to present the duality between the categories **DLat** of the distributive bounded lattices, and the categories **Pries** of the Priestley spaces and **Spec** of the spectral spaces, using isomorphisms between the last mentioned categories and the category **PStone** of the pairwise Stone spaces; also we establish the equivalence of **DLat** and **PStone**, receiving so an alternative for the Cornish isomorphism. These isomorphisms and the equivalencies between the above mentioned categories, make it possible to get dual descriptions of some important lattice theoretic notions, as filters and ideals of a lattice. Finally, to propose an alternative to the Esakia duality are shown bitopological dualities for Heyting algebras.

Keywords: Pairwise Stone spaces; Priestley spaces; spectral spaces; bitopological spaces; Esakia spaces; dualities; lattices.

Sumário

Introdução

Em meados de 1930, M. H. Stone deu início à teoria da dualidade com seu trabalho inovador no qual ele estabeleceu uma equivalência dual entre a categoria **Bool**, das álgebras Booleanas e homomorfismos de álgebras Booleanas, e a categoria **Stone**, dos espaços compactos Hausdorff zero-dimensionais, chamados espaços Stone, e funções contínuas. Em 1937, o próprio Stone estendeu a referida dualidade para uma equivalência dual entre as categorias **DLat**, dos reticulados distributivos e limitados e homomorfismos de reticulados limitados, e **Spec**, dos espaços espectrais e funções espectrais.

Uma dualidade entre categorias arbitrárias nos dá, em geral, uma caracterização de objetos matemáticos. No caso da dualidade de Stone, os reticulados distributivos são caracterizados através de certos espaços topológicos, os supracitados espaços espectrais. Estes últimos, entre outras coisas, são espaços compactos T_0 e generalizam os espaços de Stone.

Em 1970, Priestley construiu uma outra categoria dual à **DLat** por meio de "espaços Stone especialmente ordenados" – conhecidos como espaços Priestley – portanto, mostrando que **DLat** é também dualmente equivalente à categoria **Pries** dos espaços Priestley e funções contínuas preservando ordem. Como resultado, temos que **Pries** e **Spec** são equivalentes. Mais ainda: em 1975, Cornish mostrou que **Spec** e **Pries** são *isomorfas*.

Dado um espaço Priestley $(X, \tau, \leq)$, estão associadas a ele duas topologias naturais: a topologia crescente, τ_1, consistindo dos abertos crescentes de $(X, \tau, \leq)$, e a topologia decrescente, τ_2, consistindo dos abertos decrescentes de $(X, \tau, \leq)$. Dessa forma, (X, τ_1, τ_2) é um espaço bitopológico. Ademais, ambas as topologias τ_1 e τ_2 são espectrais. A topologia Priestley, τ, de fato, é gerada pela união de τ_1 e τ_2, e o espaço espectral associado com $(X, \tau, \leq)$ é obtido de (X, τ_1, τ_2) simplesmente esquecendo τ_2. Então, a representação dos espaços Priestley – consequentemente, dos espaços espectrais – através dos espaços bitopológicos é uma questão natural. De fato, Jung e Moshier demonstraram, em 2006, que os reticulados distributivos podem ser representados por meio dos espaços bitopológicos (cf.[JM06]). Em 2008, G. e N. Bezhanishvili, D. Gabelaia, A. Kurz fizeram, em [BBGK10], uma axiomatização explícita da classe dos espaços bitopológicos obtidos da

maneira descrita anteriormente – chamados por eles de espaços pairwise Stone – generalizando a definição dos espaços Stone para o contexto bitopológico. Como espaços pairwise Stone nos fornece uma maneira de se "mover" dos espaços Priestley para os espaços espectrais e vice-versa, o isomorfismo de Cornish para **Pries** e **Spec** pode ser estabelecido mais naturalmente, primeiro mostrando que **Pries** é isomorfa à **PStone** dos espaços pairwise Stone e funções bicontínuas, depois mostrando que **PStone** é isomorfa à **Spec**. A apresentação desse *isomorfismo* através dos *espaços bitopológicos* é o principal objetivo deste trabalho. Vale ressaltar que os espaços pairwise Stone carregam a simetria presente nos espaços Priestley (e reticulados distributivos) e oculta nos espaços espectrais.
Além disso, a prova de que **DLat** é dualmente equivalente à **PStone** é mais simples do que as provas existentes da equivalência dual de **DLat** com **Spec** e **Pries**.

Os espaços Priestley são mais utilizados na lógica, visto que eles possuem uma ordem e ordens são importantes para a lógica. Dessa forma, a dualidade de Priestley se tornou comum entre lógicos. Então, mais dualidades para reticulados distributivos têm sido realizadas em termos de espaços Priestley, como, por exemplo, a dualidade de Esakia. Neste texto, mencionaremos apenas uma alternativa para a dualidade de Esakia para álgebras de Heyting, introduzindo as subcategorias de **PStone** e **Spec**, que são isomorfas à **Esa** dos espaços de Esakia e dualmente equivalentes à categoria **Heyt** das álgebras de Heyting. Em particular, esta dualidade de Esakia é interessante, pois a lógica intuicionista de Brouwer e Heyting pode ser representada através da sua álgebra de Lindebaum-Tarski, que neste caso é uma álgebra de Heyting.

Capítulo 1

Noções de Topologia Geral, Teoria de Reticulados e Categorias

No presente capítulo, serão apresentados resultados e definições relevantes para o desenvolvimento deste trabalho. Por se tratar da construção de dualidades categoriais entre reticulados distributivos e espaços bitopológicos especiais, bem como da construção dos isomorfismos entre estes espaços bitopológicos, espaços topológicos especialmente ordenados e espaços espectrais, é preciso ter em mente conceitos topológicos básicos, bem como expor parte da teoria das ordens e de reticulados, englobando os conceitos de reticulados distributivos, inclusive as álgebras de Heyting. Por fim, serão esclarecidas noções básicas categoriais.

Ao longo do texto, $\mathcal{P}(X)$ será utilizado para denotar o conjunto das partes de um dado conjunto X e A^c, frequentemente, denotará o complementar do conjunto A. Também, $C \subseteq_f B$ significará que C é um subconjunto finito de B.

1.1 Noções de Topologia Geral

Espaços topológicos estão presentes em quase todos os ramos da matemática, sendo portanto uma ponte entre diversas teorias matemáticas, como será visto adiante. Nesta seção são descritos apenas os conceitos e propriedades, acerca de espaços topológicos, que serão utilizados nas demonstrações presentes neste trabalho e no entendimento do mesmo, tais como bases e sub-bases, fechos e aderência, continuidade e homeomorfismos, separação e compacidade. As demonstrações destas propriedades não são o foco deste trabalho, portanto serão omitidas. O leitor poderá encontrá-las em [AJPT].

Definição 1.1.1. *Um* **espaço topológico** *é um par* (X, τ)*, onde* X *é um conjunto e* τ *é uma coleção de subconjuntos de* X *satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) $\emptyset$ *e* X *pertencem a* τ*.*

(ii) A interseção finita (não-vazia) de elementos de τ *é um elemento de* τ*.*

(iii) A união qualquer de elementos de τ *é um elemento de* τ*.*

Neste caso, diz-se que τ é uma *topologia sobre* X (ou que X está *munido da topologia* τ). Os elementos de X são chamados de *pontos do espaço*. Os elementos de τ são chamados de *abertos de* X. Quando estiver claro, no contexto, qual é a topologia associada ao conjunto X em questão, denotar-se-á o espaço topológico apenas por X.

Como consequência da definição de topologia tem-se que o *conjunto vazio* e o *espaço todo* são conjuntos abertos, a *interseção finita* de abertos é um aberto, bem como a *união qualquer* de abertos.

Definição 1.1.2. *Seja* (X, τ) *um espaço topológico. Um subconjunto* F *de* X *é dito* **fechado** *se, e somente se,* $X \setminus F$ *é um conjunto aberto.*

Decorre das leis de De Morgan que o *espaço todo* e o *conjunto vazio* são fechados, a *união finita* de fechados é um conjunto fechado, bem como a *interseção qualquer* de fechados.

Definição 1.1.3. *Um subconjunto* A *de um espaço topológico* X *é dito* **aberto-fechado** *se, e somente se,* A *e* A^c *são abertos de* X*.*

Neste caso, A *e* A^c *são fechados de* X*. Além disso, união finita e interseção finita de abertos-fechados é um conjunto aberto-fechado.*

Exemplo 1.1.4. *Os exemplos mais simples de topologias são:*

(1) **Topologia discreta**. *Esta topologia é formada pela coleção de todos os subconjuntos de um dado conjunto* X*, i.e.,* $\tau := \mathcal{P}(X)$*. Diz-se então que* X *está munido da topologia discreta ou que* (X, τ) *é um espaço topológico discreto.*

(2) **Topologia caótica**. *Esta topologia é composta apenas pelo conjunto vazio e pelo espaço todo, i.e., dado um conjunto* X*,* $\tau := \{\emptyset, X\}$*.*

(3) *Um exemplo conhecido de espaço topológico é a* **reta real munida da topologia usual**. *Um subconjunto* A *deste espaço será aberto nesta topologia se, e somente se, para cada ponto* x *de* A *existe um* $\varepsilon > 0$ *tal que o intervalo aberto* $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ *está contido em* A*.*

Não é difícil verificar que, se (X, τ) é um espaço topológico e Y é um subconjunto de X, então a família $\mathcal{O} := \{Y \cap U | U \in \tau\}$ forma uma topologia sobre Y. Define-se então:

Definição 1.1.5. *Seja* (X, τ) *um espaço topológico e* Y *um subconjunto de* X. *Se* $\mathcal{O} = \{Y \cap U | U \in Y\}$, *diz-se então que* $(Y, \mathcal{O})$ *é um* **subespaço de X** *e que* $\mathcal{O}$ *é a* **topologia induzida por X**(*ou que* $\mathcal{O}$ *é a* **topologia de subespaço**).

1.1.1 Bases e sub-bases

Definição 1.1.6. *Seja* (X, τ) *um espaço topológico. Uma coleção* $\mathfrak{B} \subseteq \tau$ *é uma* ***base*** *para este espaço topológico se, e somente se, todo aberto de* X *pode ser escrito como a união de uma subcoleção de elementos de* $\mathfrak{B}$, *i.e., para todo* $V \in \tau$, *existe* $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$ *tal que* $V = \bigcup \mathfrak{B}'$.

O próximo resultado consiste de um método para saber quando uma dada coleção de abertos de uma topologia é uma base para o espaço topológico em questão.

Proposição 1.1.7. *Sejam* (X, τ) *espaço topológico e* $\mathfrak{B}$ *uma coleção de abertos de* X. *Então* $\mathfrak{B}$ *é uma base da topologia* τ *se e somente se, para todo aberto* V *e todo ponto* x *de* V, *existe* $U \in \mathfrak{B}$ *tal que* $x \in U \subseteq V$.

Demonstração: Seja $\mathfrak{B}$ uma coleção de abertos de X. Suponha que $\mathfrak{B}$ é uma base da topologia de X. Então, para todo aberto V de X, existe $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$ tal que $V = \bigcup\limits_{B \in \mathfrak{B}'} B$. Logo, para todo $x \in V$, existe $U \in \mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$ tal que $x \in U \subseteq \bigcup\limits_{B \in \mathfrak{B}'} B$, isto é, para todo $x \in V$, existe $U \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in U \subseteq V$. Reciprocamente, seja $U \subseteq X$ aberto. Por hipótese, para todo $x \in U$ existe $B_x \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq U$. Então, fazendo $\mathfrak{B}' := \{B_x | x \in U\}$, tem-se que $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$ e $U = \bigcup_{x \in U} B_x = \bigcup \mathfrak{B}'$.

Conforme a proposição acima, os intervalos abertos descritos no Exemplo 1.1.4(3) formam uma base para a topologia usual da reta.

Definição 1.1.8. *Seja* $\mathfrak{B}$ *uma coleção de subconjuntos de uma conjunto* X *e seja* $\mathfrak{B}^*$ *a coleção de todos os subconjuntos de* X *que são uniões de elementos de* $\mathfrak{B}$ *(inclusive a união vazia). Se* $\mathfrak{B}^*$ *é uma topologia sobre* X, *então* $\mathfrak{B}^*$ *é chamada de* **topologia gerada por** $\mathfrak{B}$, *e* $\mathfrak{B}$ *é uma base para a topologia* $\mathfrak{B}^*$.

Nem sempre uma coleção de subconjuntos de um dado conjunto X gera uma topologia. Um exemplo disto é a coleção $\mathfrak{B}$ de todos os intervalos fechados $[a, b]$, com $a < b$, da reta real. De fato, a Proposição 1.1.7 nos garante que $\mathfrak{B}^*$ não é uma topologia sobre $\mathbb{R}$. Para ver isto, suponha que $\mathfrak{B}^*$ seja uma topologia sobre $\mathbb{R}$ e fixe $z \in \mathbb{R}$. Então $[z, z+1]$ e $[z-1, z]$ são abertos de $\mathfrak{B}^*$. Logo, $[z-1, z] \cap [z, z+1] = \{z\}$ é aberto, pois é interseção finita de abertos. Porém, para $V := \{z\}$ e $z \in V$ não existe um elemento de $\mathfrak{B}$ que contenha z e esteja contido em V. Isto gera uma contradição.

Proposição 1.1.9. *Sejam X um conjunto e $\mathfrak{B}$ uma coleção de subconjuntos de X satisfazendo as seguintes propriedades:*

(1) *Para cada V_1, $V_2 \in \mathfrak{B}$ e cada $x \in V_1 \cap V_2$, existe $V \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in V \subseteq V_1 \cap V_2$.*

(2) *Para cada $x \in X$, existe $U \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in U$.*

Então, a coleção $\mathfrak{B}^*$, formada pelas uniões de subcoleções de $\mathfrak{B}$ é uma topologia sobre X e $\mathfrak{B}$ é uma base para o espaço topológico $(X, \mathfrak{B}^*)$.

Proposição 1.1.10. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{C}$ uma coleção de subconjuntos de X. Então $\mathcal{T} := \bigcap\{\tau : \tau$ é topologia sobre X e $\mathcal{C} \subseteq \tau\}$ é uma topologia sobre X.*

Demonstração:

(i) É claro que $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(ii) Seja $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ uma coleção qualquer. Vejamos que $\bigcup \mathcal{V} \in \mathcal{T}$. Temos que $\mathcal{V} \subseteq \tau$, para todo τ topologia que contém $\mathcal{C}$. Como τ é topologia e $\mathcal{V} \subseteq \tau$, temos que $\bigcup \mathcal{V} \in \tau$, para todo τ topologia contendo $\mathcal{C}$. Logo, $\bigcup \mathcal{V} \in \bigcap\{\tau : \tau$ é topologia sobre X e $\mathcal{C} \subseteq \tau\} = \mathcal{T}$.

(iii) Seja $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ uma coleção finita qualquer. Para verificar que $\bigcap \mathcal{V}$ pertence a $\mathcal{T}$, aplica-se um raciocínio análogo ao utilizado em (ii).

Definição 1.1.11. *Seja X espaço topológico e $\mathfrak{B} \subseteq \tau$. Dizemos que $\mathfrak{B}$ é uma **sub-base** de X se o conjunto das interseções finitas de elementos de $\mathfrak{B}$ forma uma base para X.*

Definição 1.1.12. *Um espaço topológico X é dito* **zero-dimensional** *se, e somente se, X possui uma base de conjuntos abertos-fechados.*

Para um conjunto X, o exemplo mais simples de espaço topológico zero-dimensional é $(X, \mathcal{P}(X))$, ou seja, X com a topologia discreta.

1.1.2 Fechos e pontos aderentes

Definição 1.1.13. *Seja (X, τ) espaço topológico. Um ponto $x \in A$ é dito um* **ponto interior** *de A se existe $V \in \tau$ tal que $x \in V \subseteq A$. Ao conjunto dos pontos interiores chama-se* **interior** *de A e denota-se por $Int(A)$.*

Não é difícil verificar que um subconjunto A de um espaço topológico X é aberto se, e somente se, todos os seus pontos são interiores, isto é, $A = Int(A)$.

Definição 1.1.14. *Sejam (X, τ) espaço topológico e $A \subseteq X$. Então define-se o* **fecho do conjunto** *A como a interseção de todos os fechados que contém A. O fecho de A será denotado por $Cl(A)$ ou por $\overline{A}$.*

Conclui-se então que, se F é um conjunto fechado, então $Cl(F) = F$.

Foi visto anteriormente que interseção qualquer de subconjuntos fechados de um espaço topológico, é um subconjunto fechado deste espaço. Segue então, da definição de fecho, a seguinte proposição:

Proposição 1.1.15. *Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Então:*

(i) *$\overline{A}$ é um conjunto fechado;*

(ii) *$A \subseteq \overline{A}$; e*

(iii) *$\overline{A}$ é o menor fechado contendo A.*

Definição 1.1.16. *Sejam (X, τ) espaço topológico e A subconjunto de X.*

(i) *Seja $x \in X$. Define-se por $\nu_x := \{U \in \tau : x \in U\}$ o conjunto das* ***vizinhanças abertas do ponto*** *x.*

(ii) *$x \in X$ é* ***ponto aderente*** *a A se toda vizinhança aberta U de x intersecta A.*

A seguinte caracterização de fecho é muito útil e relaciona fecho com pontos aderentes:

Proposição 1.1.17. *Sejam X espaço topológico, $A \subseteq X$ e $\mathfrak{B}$ base de X. São equivalentes:*

(i) *$x \in \overline{A}$.*

(ii) *Todo aberto básico $B \in \mathfrak{B}$, tal que $x \in B$, intersecta A.*

(iii) *Toda vizinhança aberta de x intersecta A.*

Corolário 1.1.18. *O fecho de um conjunto A é o conjunto dos pontos aderentes de A. Em símbolos, $\overline{A} = \{x \in X : x \text{ é aderente a } A\}$*

1.1.3 Funções contínuas e homeomorfismos

Definição 1.1.19. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função entre espaços topológicos.*

(i) *f é* ***contínua*** *se, e somente se, a imagem inversa de um aberto de Y é um aberto de X.*

(ii) *f é* ***aberta*** *se a imagem de todo subconjunto aberto de X é aberto em Y.*

(iii) *f é* ***fechada*** *se a imagem de todo subconjunto fechado de X é fechado em Y.*

(iv) *Uma função contínua é um* ***homeomorfismo*** *se ela é bijetiva e sua inversa é contínua.*

Observação 1.1.20. *Não é difícil verificar que a composição de funções contínuas é uma função contínua. Consequentemente, a composição de homeomorfismos é um homeomorfismo.*

Lema 1.1.21. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função contínua entre espaços topológicos. Se f é bijetiva, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *f é um homeomorfismo.* (2) *f é fechada.* (3) *f é aberta.*

A seguinte caracterização nos diz que, a fim de concluir que a função é contínua, é necessário testar a continuidade da mesma apenas para os abertos básicos, sendo muito útil em várias demonstrações.

Proposição 1.1.22. *Para uma função f de um espaço topológico X num espaço topológico Y, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) a função f é contínua;

(ii) a imagem inversa de cada aberto em uma base $\mathcal{B}$ de Y é um aberto de X;

(iii) a imagem inversa de cada fechado de Y é um fechado de X.

1.1.4 Axiomas de separação

Definição 1.1.23. *Um espaço topológico X é*

(i) T_0, se para cada dois pontos x, $y \in X$ distintos, existe um aberto que contém apenas um desses pontos.

(ii) T_1, se para cada dois pontos x, $y \in X$ distintos, existe um aberto que contém x e não contém y e um aberto que contém y e não contém x.

*(iii) T_2, ou **Hausdorff**, se para cada par de pontos distintos x, $y \in X$, existem abertos U e V tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.*

(iv) T_3, se para cada $x \in X$ e cada fechado $F \subseteq X$ tal que $x \notin F$ existem abertos disjuntos U contendo x e V contendo F.

(v) T_4, se para cada par de fechados disjuntos, F e G, existem abertos disjuntos, U e V, contendo F e G, respectivamente.

Observação 1.1.24. *É imediato da definição que $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$*

A proposição seguinte fornece uma caracterização de espaços T_0.

Proposição 1.1.25. *Um espaço topológico X é T_0 se, e somente se, $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$, sempre que $x \neq y$.*

1.1.5 Compacidade

Definição 1.1.26. *Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$ um subespaço de X. Seja $\mathcal{C}$ uma família de subconjuntos de X.*

(i) Dizemos que $\mathcal{C}$ é uma **cobertura** *de X (ou um recobrimento de X) se $X = \bigcup \mathcal{C}$.*

(ii) Dizemos que $\mathcal{C}$ é **cobertura aberta** *se seus elementos são abertos de X.*

(iii) Dizemos que uma subfamília $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ é uma **subcobertura** *de $\mathcal{C}$ se $\bigcup \mathcal{C}' = X$.*

(iv) Dizemos que $\mathcal{C}$ é uma **cobertura finita** *se $\mathcal{C}$ é uma cobertura contendo apenas um número finito de elementos.*

(v) Dizemos que uma coleção de abertos $\mathcal{C}$ **cobre** *A se $A \subseteq \bigcup \mathcal{C}$.*

Definição 1.1.27. *Um espaço topológico X é* **compacto** *se e somente se, toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura finita.*

Teorema 1.1.28. *Um subespaço $A \subseteq X$ é compacto se e somente se, toda família de abertos de X que cobre A possui uma subfamília finita que cobre A.*

Observe que, se X é um espaço topológico, então a união *finita* de subconjuntos compactos de X é um subconjunto compacto de X.

Teorema 1.1.29. *Todo subespaço fechado de um espaço compacto é compacto.*

Lema 1.1.30. *Seja X um espaço topológico e $\mathfrak{B}$ uma base de X. Então X é compacto se, e somente se, cada cobertura aberta $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{B}$ possui um sub-recobrimento finito.*

Lema 1.1.31. *(Alexander) Seja X um espaço topológico e $\mathfrak{B}$ uma sub-base de X. X é compacto se, e somente, todo recobrimento aberto de X, cujos elementos pertencem a $\mathfrak{B}$, admite um sub-recobrimento finito.*

Definição 1.1.32. *Dizemos que uma família $\mathfrak{F} = \{F_s : s \in S\}$ tem a* **propriedade da interseção finita** *(***pif***) se, para cada $S' \subseteq S$ finito, $\bigcap_{s \in S'} F_s$ é um conjunto não vazio.*

O teorema a seguir é muito útil e fornece uma caracterização de espaços compactos.

Teorema 1.1.33. *Um espaço X é compacto se, e somente se, toda família de conjuntos fechados com a pif tem interseção não vazia.*

Teorema 1.1.34. *Todo subespaço compacto de um espaço Hausdorff é fechado.*

1.2 Ordens

O conceito de ordem está presente não só na Matemática, como também em nosso cotidiano, sempre que fazemos comparações. Na Matemática, frequentemente comparamos objetos, como por exemplo elementos de um dado conjunto ("x é menor do que y"), que podem ser conjuntos, inclusive ("A está contido em B"). Por ser um assunto muito amplo e envolver diversos objetos matemáticos, a Teoria das Ordens foi formalizada e desenvolvida e possui aplicações em diversas áreas, especialmente na Teoria de Reticulados e na Lógica. Nesta seção estão presentes apenas conceitos básicos desta Teoria das Ordens. Um estudo mais aprofundado sobre ordens pode ser visto em [DP92].

1.2.1 Conceitos básicos sobre ordens

Definição 1.2.1. *Seja L um conjunto. Uma relação binária, $\leq$, em L é uma **pré-ordem** em L se, e somente se, para todos $a, b, c \in L$ tem-se*

(i) $a \leq a$ (reflexividade);

(ii) $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (transitividade).

Uma pré-ordem $\leq$ em L que satisfaz, para todos $a, b \in L$:

(iii) $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$ (antisimetria),

*é chamada **ordem parcial** em L. Diz-se então que $\langle L, \leq\rangle$ é um **conjunto parcialmente ordenado**.*

Uma ordem parcial $\leq$ em L é dita **linear** se todos os elementos de L podem ser comparados por esta ordem, ou seja, se para $a, b \in L$ vale $a \leq b$ ou $b \leq a$.

Exemplo 1.2.2.

(a) A divisão, $|$, em $\mathbb{Z}^*$ é uma pré-ordem, pois:

(i) $a|a$;

(ii) $a|b$ e $b|c \Rightarrow a|c$.
É claro que esta ordem não é antisimétrica.

(b) $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ é um conjunto parcialmente ordenado, pois para a relação $\leq$ usual em $\mathbb{N}$ valem reflexividade, transitividade e antisimetria.

(c) Seja (X, τ) um espaço topológico. É fácil ver que $\langle \tau, \subseteq\rangle$ é um conjunto parcialmente ordenado. Posteriormente, será visto que τ é uma álgebra de Heyting.

(d) Seja X um conjunto. Então, a ordem dada pela inclusão em $\mathcal{P}(X)$ é uma ordem parcial.

Para $\langle L, \leq \rangle$ conjunto parcialmente ordenado, 1 (ou $\top$) e 0 (ou $\perp$) sempre denotarão $max\ L$ e $min\ L$ (quando existirem), respectivamente.

Observação 1.2.3. *Seja $\langle L, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado. É fácil ver que $\langle L, \leq^{op} \rangle$ também é um conjunto parcialmente ordenado , onde*

$$\forall x, y \in L,\ \ x \leq^{op} y \ \ sse \ \ y \leq x.$$

Seja agora ψ uma afirmação formulada na linguagem das ordens. A afirmação dual de ψ, ψ^{op}, é dada por ψ, apenas substituindo cada ocorrência de $\leq$ por $\geq$.
O princípio da dualidade proclama o seguinte: Seja ψ uma afirmação formulada na linguagem das ordens parciais e válida em qualquer conjunto parcialmente ordenado, então a afirmação dual, ψ^{op}, também é válida em qualquer conjunto parcialmente ordenado. Em seguida será feito uso constante deste simples princípio, sem muitas explicações adicionais. Vale ressaltar que sua demonstração pode ser feita por Indução na Complexidade das Fórmulas.

1.2.2 Conjuntos crescentes e decrescentes

Para $\langle X, \leq \rangle$ um conjunto pré-ordenado (i.e., $\leq$ uma pré-ordem) e U um subconjunto de X, denotar-se-á:

$$\begin{cases} \uparrow U := \{x \in X | \exists y \in U (y \leq x)\} \\ \downarrow U := \{x \in X | \exists y \in U (x \leq y)\} \end{cases}$$

Definição 1.2.4. *Seja $\langle X, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado e U um subconjunto de X.*

(i) *Diz-se que U é **crescente** se, e somente se, $U = \uparrow U$.*

(ii) *Diz-se que U é **decrescente** se, e somente se, $U = \downarrow U$.*

Para $\{b\} \subseteq X$, será utilizada a notação $\uparrow b$ ($\downarrow b$) ao invés de $\uparrow \{b\}$ (respectivamente, $\downarrow \{b\}$).

Observe que $U \subseteq \uparrow U$ e $U \subseteq \downarrow U$ valem sempre. Dessa forma, para mostrar que um dado conjunto é crescente ou decrescente, é preciso verificar apenas uma inclusão.

Considerando a reta real com a ordem $\leq$ usual, como exemplos de conjuntos crescente e decrescente tem-se os subconjuntos $\mathbb{R}^+$, dos números reais não-negativos, e $\mathbb{R}^-$, dos números reais não-positivos, respectivamente.

Fato 1.2.5. *Sejam $(X, \leq)$ conjunto pré-ordenado e $A = \uparrow A$. Então*

$$X \backslash \uparrow A = \downarrow (X \backslash \uparrow A) = \downarrow (X \setminus A).$$

Em particular, se $(X, \leq)$ for ordem parcial, tem-se que o complementar de um subconjunto crescente de X é um subconjunto decrescente de X e vice-versa.

Prova:

Seja $U \subseteq X$ crescente, i.e., $U = \uparrow U$. Será mostrado que $X \setminus \uparrow U = \downarrow (X \setminus \uparrow U)$. Como sempre vale $A \subseteq \downarrow A$, para todo $A \subseteq X$, tem-se que $X \setminus \uparrow U \subseteq \downarrow (X \setminus \uparrow U)$. Vejamos a outra inclusão. Seja $x \in \downarrow (X \setminus \uparrow U)$. Logo, existe $z \in X \setminus \uparrow U$ tal que $x \leq z$. Portanto, $x \notin \uparrow U$, caso contrário, por definição, $z \in \uparrow U$. Assim, $x \in X \setminus \uparrow U$. Dessa forma, $\downarrow (X \setminus \uparrow U) \subseteq X \setminus \uparrow U$.

Proposição 1.2.6. *Seja $(X, \leq)$ conjunto parcialmente ordenado. Então,*

(i) *união de subconjuntos crescentes (decrescentes) de X é um subconjunto crescente (respectivamente, decrescente) de X;*

(ii) *interseção de subconjuntos crescentes (decrescentes) de X é um subconjunto crescente (respectivamente, decrescente) de X.*

Prova:

(i) Seja $\{U_i\}_{i \in I}$ família de subconjuntos crescentes de X.
$x \in \uparrow \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists y \in \bigcup_{i \in I} U_i$ tal que $y \leq x \Rightarrow \exists j \in I$ tal que $y \in U_j$ e $y \leq x \Rightarrow x \in U_j$, pois U_j é crescente $\Rightarrow x \in \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \uparrow \bigcup_{i \in I} U_i \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$
Portanto $\bigcup_{i \in I} U_i = \uparrow \bigcup_{i \in I} U_i$.

(ii) Este item é demonstrado de forma análoga ao anterior.

Para um conjunto parcialmente ordenado (X, τ), não é difícil mostrar que a aplicação $\uparrow : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, $A \mapsto \uparrow A$, satisfaz os axiomas de Tarski listados a seguir:

(i) $A \subseteq \uparrow A$;

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow \uparrow A \subseteq \uparrow B$;

(iii) $\uparrow\uparrow A = \uparrow A$.

O mesmo é válido para $\downarrow : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$. Sendo assim, $\uparrow, \downarrow$ são operadores de Tarski. Consequentemente, as coleções $\{A \subseteq X : A = \uparrow A\}$ e $\{A \subseteq X : A = \downarrow A\}$ são $\bigcap -$estruturas (veja [DP92]). O item (ii) da proposição acima é uma consequência imediata deste fato.

1.2.3 Funções que preservam ordem

Uma noção conhecida de função que preserva ordem é a de função monótona real, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Generalizando este conceito para uma ordem parcial qualquer, tem-se:

Definição 1.2.7. *Sejam $(X, \leq)$ e $(Y, \leq')$ ordens parciais. Diz-se que uma função $f : X \longrightarrow Y$* **preserva ordem** *se, e somente se, $\forall x, y \in X\ [(x \leq y) \to (f(x) \leq' f(y))]$.*

Proposição 1.2.8. *A composição de funções que preservam ordem é definida de maneira usual e novamente é uma função preservando ordem.*

Demonstração:

Sejam $(X, \leq)$, $(Y, \leq')$, $(Z, \leq'')$ conjuntos parcialmente ordenados e $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ funções preservando as respectivas ordens. Vejamos que $h := g \circ f$ preserva ordem. Sejam $x, y \in X$ tais que $x \leq y$. Como f preserva ordem, tem-se que $f(x) \leq' f(y)$. Visto que g também preserva ordem, tem-se que $h(x) = g(f(x)) \leq'' g(f(y)) = h(y)$, i.e., $h(x) \leq'' h(y)$. Portanto $h : X \longrightarrow Z$ preserva ordem.

A proposição seguinte caracteriza funções que preservam ordem através de subconjuntos crescentes e decrescentes.

Proposição 1.2.9. *Sejam $(X, \leq)$ e $(Y, \leq')$ ordens parciais. Uma função $f : X \longrightarrow Y$ preserva ordem se, e somente se, a imagem inversa de um subconjunto crescente de Y é um subconjunto crescente de X, valendo a mesma propriedade para um subconjunto decrescente de Y.*

Prova: Será verificado apenas o caso crescente, sendo o decrescente decorrente do Princípio da Dualidade.

$(\Rightarrow)$: Seja $U \subseteq Y$ crescente. Seja $x \in\uparrow f^{-1}(U)$, então existe $y \in f^{-1}(U)$ tal que $y \leq x$. Assim, $f(y) \in U$ e $f(y) \leq' f(x)$, pois f preserva ordem. Como U é crescente, $f(x) \in U$. Logo, $x \in f^{-1}(U)$. Portanto, $\uparrow f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(U)$.

$(\Leftarrow)$: Sejam $x, y \in X$ tais que $x \leq y$. Como $\uparrow f(x)$ é crescente em Y, tem-se que $f^{-1}(\uparrow f(x))$ é crescente em X, por hipótese. Em particular, $x \in f^{-1}(\uparrow f(x))$ e como $x \leq y$, tem-se que $y \in f^{-1}(\uparrow f(x))$. Logo, $f(y) \in\uparrow f(x)$, i.e., $f(x) \leq' f(y)$. Portanto, f preserva ordem.

1.2.4 Cotas e conjuntos direcionados

Definição 1.2.10. *Sejam* $(L, \leq)$ *um conjunto parcialmente ordenado,* S *um subconjunto de* L *e* a, b *elementos de* L.

(i) a *é uma* ***cota superior (inferior)*** *para* S *se* $\forall s \in S,\ s \leq a$ *(respectivamente,* $a \leq s$*).*

O conjunto das cotas superiores (inferiores) para S *é denotado por* $S^{\rightarrow}$ *(respectivamente,* $S^{\leftarrow}$*):*

$$\begin{cases} S^{\rightarrow} = \{x \in L\ : \forall s \in S,\ (s \leq x)\} \\ S^{\leftarrow} = \{x \in L\ : \forall s \in S,\ (x \leq s)\} \end{cases}$$

Quando $S = \{b\}$*, denota-se:*

$$\begin{cases} b^{\rightarrow} = \{x \in L\ :\ b \leq x\} \\ b^{\leftarrow} = \{x \in L\ :\ x \leq b\} \end{cases}$$

(ii) a *é a menor cota superior ou* ***supremo*** *de* S *se* $a = min\ S^{\rightarrow}$;

$$supS,\ \bigvee S\ \ ou\ \bigvee_{s \in S} s,$$

denotam o supremo de S *em* L *(quando ele existe).*

(iii) a *é a maior cota inferior ou* ***ínfimo*** *de* S *se* $a = max\ S^{\leftarrow}$;

$$infS,\ \bigwedge S\ \ ou\ \bigwedge_{s \in S} s,$$

denotam o ínfimo de S *em* L *(quando ele existe).*

Observe que $b^{\rightarrow} = \uparrow b$ e $b^{\leftarrow} = \downarrow b$.

Definição 1.2.11. *Seja* S *um subconjunto não-vazio de um conjunto parcialmente ordenado* L.

(i) S *é* ***dirigido para cima*** *(ou* ***direcionado para cima****) se*

$$\forall a, b \in S,\ \exists\, c \in S\ tal\ que\ a \leq c\ e\ b \leq c.$$

(ii) S *é* ***dirigido para baixo*** *(ou* ***direcionado para baixo****) se*

$$\forall a, b \in S,\ \exists\, c \in S\ tal\ que\ c \leq a\ e\ c \leq b.$$

1.3 Reticulados

A Teoria de Reticulados é muito utilizada nas lógicas Clássica e Intuicionista, por exemplo, em que cada um destes segmentos tem um correspondente reticulado como modelo. Tais reticulados são determinados através da construção das álgebras de Lindebaum-Tarski em cada caso. Por exemplo, as álgebras de Lindebaum-Tarski das lógicas Clássica e Intuicionista resultam em álgebra de Boole e álgebra de Heyting, respectivamente. Estas álgebras são reticulados distributivos especiais e serão definidas posteriormente. Sendo assim, determinar equivalências duais envolvendo reticulados distributivos nos fornece mais ferramentas para atacar problemas na Lógica Matemática, por exemplo.

Definição 1.3.1. *Seja* $\langle L, \leq \rangle$ *um conjunto parcialmente ordenado.*

(a) *Diz-se que* L *é um* ***reticulado*** *se, e somente se,* $\forall x, y \in L$, $\bigwedge\{x, y\}$ *e* $\bigvee\{x, y\}$ *existem em* L.

(b) *Um* ***subreticulado*** *de* L *é um subconjunto* P *de* L *tal que,* $\forall x, y \in P, \bigvee\{x, y\}$ *e* $\bigwedge\{x, y\}$, *calculados em* L, *estão em* P. *Portanto,* $\bigvee\{x, y\}$ *e* $\bigwedge\{x, y\}$ *existem em* P *e são idênticos aos* sup *e* inf *tomados em* L.

(c) L *é um* ***reticulado limitado*** *se, e somente se,* $\bot, \top \in L$.

(d) L *é um* ***reticulado completo*** *se, e somente se,* $\forall S \subseteq L$, $\bigvee S$ *e* $\bigwedge S$ *existem em* L.

Para L reticulado e $x, y \in L$, $x \wedge y$ e $x \vee y$ denotarão o $\bigwedge\{x, y\}$ e $\bigvee\{x, y\}$, respectivamente.

Fato 1.3.2. *Para* $\langle L, \leq \rangle$ *um conjunto parcialmente ordenado, tem-se* $\bigwedge \emptyset = \top$ *e* $\bigvee \emptyset = \bot$, *quando existirem.*

Prova: *Seja* $c = \bigwedge \emptyset$. *Então,* c *é a maior cota inferior para o conjunto vazio, isto é, para todo* $x \in \emptyset$, $c \leq x$ *e se existir* $d \in L$ *tal que* $d \leq x$, $\forall x \in \emptyset$, *então* $d \leq c$. *Mas, "*$d \leq x$, $\forall x \in \emptyset$*" vale para todo* $d \in L$, *por vacuidade. Logo,* $d \leq c$, $\forall d \in L$. *Portanto,* c *é o máximo de* L, *ou seja,* $c = \top$.
Analogamente mostra-se que $\bigvee \emptyset = \bot$.

Pode-se inferir de 1.3.2 que todo reticulado completo é limitado.

Exemplo 1.3.3. *Seja* (X, τ) *espaço topológico. Considere em* τ *a ordem dada pela inclusão. Então* $\langle \tau, \subseteq \rangle$ *é uma ordem parcial. Além disso,* $\top$ *e* $\bot$ *em* τ *são* X *e* $\emptyset$, *respectivamente. Para* $S \subseteq \tau$, *é fácil ver que*

$$\bigwedge S = int(\bigcap S) \text{ e } \bigvee S = \bigcup S,$$

são os supremo e ínfimo de S em τ. Dessa forma, tem-se que τ, com as definições de ínfimo e supremo acima, é um reticulado completo, pois para todo $S \subseteq \tau$, $\bigwedge S \in \tau$ e $\bigvee S \in \tau$, visto que $int(\bigcap S)$ e $\bigcup S$ são abertos.

Observe que, se S é um subconjunto finito de τ, $int(\bigcap S) = \bigcap S$, visto que interseção finita de abertos é aberto. Dessa forma, $\bigwedge S = \bigcap S$ em τ.

Definição 1.3.4. *Um reticulado L é* ***distributivo*** *se satisfaz as seguintes condições:*

$[\wedge, \vee]$: *Para todos $x, y, z \in L$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.*

$[\vee, \wedge]$: *Para todos $x, y, z \in L$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.*

Observação 1.3.5. *Pelo Príncípio da Dualidade, não é difícil ver que $[\wedge, \vee]$ e $[\vee, \wedge]$ da última definição são equivalentes. Assim, para um reticulado ser distributivo, basta valer uma das condições de 1.3.4.*

Exemplo 1.3.6. *Se X é um espaço topológico, o reticulado dos abertos de X, $\Omega(X)$, é um reticulado distributivo. Já foi visto que $\Omega(X)$ é reticulado, no Exemplo 1.3.3. Tendo em vista 1.3.5, basta provar, para A, B, C em $\Omega(X)$, que vale $[\wedge, \vee]$:*

$A \wedge (B \vee C) = int(A \cap (B \cup C)) = A \cap (B \cup C)$, pois a interseção finita de conjuntos abertos é um aberto. Por motivos análogos, $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) = int((A \cap B)) \cup int((A \cap C))) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Dessa forma, verificar $[\wedge, \vee]$ equivale a provar que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, que é de fácil verificação.

Definição 1.3.7. *Se L e K são reticulados, um* ***homomorfismo***, *$L \xrightarrow{f} K$, é uma função tal que, para todo $x, y \in L$,*

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \quad e \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

Observação 1.3.8. *Caso L e K sejam reticulados limitados, um morfismo $f : L \longrightarrow K$ satisfizendo a seguinte condição:*

$$f(0) = 0 \quad e \quad f(1) = 1,$$

é chamado de $\{0, 1\} - homomorfismo$.

Neste texto, em se tratando de reticulados limitados, os homomorfismos serão sempre considerados $\{0, 1\} - homomorfismos$.

1.3.1 Filtros e Ideais

O estudo de filtros e ideais de um reticulado é muito útil na construção dos espaços topológicos duais a um reticulado distributivo, como por exemplo os espaços Priestley e espectrais. O Teorema de Stone e Birkhoff para filtros primos (consequentemente ideais primos) constitui uma importante ferramenta utilizada em diversas demonstrações que envolvem Teoria de Reticulados.

Doravante, salvo menção em contrário, os reticulados serão considerados limitados.

Definição 1.3.9. *Seja $S \neq \emptyset$ um subconjunto de um reticulado L.*
(a) Dizemos que S é um ***filtro*** *em L se, e somente se,*

$[Fi1]$ $\forall a, b \in L\ (a \in S$ *e* $a \leq b \Rightarrow b \in S)$;

$[Fi2]$ $a, b \in S \Rightarrow a \wedge b \in S$.

(b) Dizemos que S é um ***ideal*** *em L se, e somente se, valem as afirmações duais de $[Fi1]$ e $[Fi2]$.*

Observação 1.3.10.

(1) *A partir das definições acima, pode-se inferir que $\{\top\}$ é um filtro trivial, contido em todo filtro, bem como $\{\bot\}$ é um ideal trivial, contido em todo ideal.*

(2) *Um filtro (ideal) $F \subset L$ é próprio se $F \neq L$. Nota-se que um filtro (ideal) é próprio se, e somente se, não contém $\bot$ (respectivamente, $\top$).*

(3) *Um ideal (filtro) é, em particular, um conjunto direcionado para cima (respectivamente, para baixo).*

Exemplo 1.3.11.

(1) *Seja (X, τ) espaço topológico. Então $\nu_x = \{U \in \tau : x \in U\}$ é um filtro em τ, chamado o* ***filtro das vizinhanças abertas*** *de x em X. Vejamos que ν_x é, de fato, um filtro:*

$[Fi1]$ *Sejam $V, W \in \nu_x$. Então, $x \in V \cap W$, que é um conjunto aberto. Logo, $x \in V \cap W = int(V \cap W) = V \wedge W$. Portanto $V \wedge W \in \nu_x$.*

$[Fi2]$ *Sejam $V, W \in \Omega(X)$, com $V \in \nu_x$ e $V \subseteq W$. Logo, $x \in W$ e $W \in \nu_x$.*

(2) *Para L reticulado e $b \in L$, é fácil ver que $b^{\rightarrow} = \uparrow b$ é filtro e $b^{\leftarrow} = \downarrow b$ é ideal.*

Infere-se de 1.3.10 que $\downarrow b$ é direcionado para cima e que $\uparrow b$ é direcionado para baixo.

Lema 1.3.12. *Se L é um reticulado, a interseção de uma família de filtros (ideais) em L é um filtro (respectivamente, ideal) em L.*

A demonstração desse resultado é simples, portanto será omitida.

Definição 1.3.13. *Sejam L um reticulado e S um subconjunto de L. O **filtro gerado por** S, $\mathfrak{f}(S)$, é definido como*

$$\mathfrak{f}(S) = \bigcap\{F \subseteq L : \ F \text{ é um filtro e } S \subseteq F\}$$

*Analogamente, o **ideal gerado por** S, $\mathfrak{i}(S)$, é dado por:*

$$\mathfrak{i}(S) = \bigcap\{I \subseteq L : \ I \text{ é um ideal e } S \subseteq I\}.$$

Note que $\mathfrak{f}(\emptyset) = \{\top\}$ e $\mathfrak{i}(\emptyset) = \{\bot\}$.

O resultado seguinte é uma ferramenta muito útil para trabalhar com filtros e ideais gerados, visto que nos fornece uma forma explícita para os conjuntos $\mathfrak{f}(S)$ e $\mathfrak{i}(S)$, além de relacionar filtros (ideais) próprios gerados e a *propriedade da interseção finita.*

Lema 1.3.14. *Sejam L um reticulado e S um subconjunto de L. com a notação acima,*

(a) $\mathfrak{f}(S) = \{x \in L : \text{ existe um } D \subseteq_f S, \text{ tal que } x \geq \bigwedge D\}$

(b) $\mathfrak{i}(S) = \{x \in L : \text{ existe um } D \subseteq_f S, \text{ tal que } x \leq \bigvee D\}$.

(c) *São equivalentes:*

(1) $\mathfrak{f}(S)$ *é um filtro próprio.*

(2) *Se $D \subseteq_f S$, então $\bigwedge D \neq \bot$. Nesse caso, diz-se que $\mathfrak{f}(S)$ possui a **propriedade da interseção finita (pif)**.*

Demonstração:

(a) Seja $A := \{x \in L : \text{existe um } D \subseteq_f S, \text{ tal que } x \geq \bigwedge D\}$. Como $D \subseteq_f S$ e $S \subseteq F$, tem-se $\bigwedge D \in F$, pois F é filtro e portanto fechado por inf, calculado em subconjuntos finitos de F. Como $x \in A$ implica em $x \geq \bigwedge D$, $\bigwedge D \in F$ e F é filtro, tem-se que $x \in F$. Portanto, $A \subseteq F$, $\forall F \subseteq L$ tal que $S \subseteq F \Rightarrow A \subseteq \bigcap\{F \subseteq L : \ F$ é um filtro e $S \subseteq F\} = \mathfrak{f}(S)$. Como $\mathfrak{f}(S)$ é o menor filtro contendo S, para ver que a igualdade acima (em (a)) é verdadeira, é suficiente mostrar que A é filtro contendo S.

$[Fi1]$ Sejam $x, y \in L$ com $x \in A$, tais que $x \leq y$. Como $x \in A$, $\exists D \subseteq_f S$, tal que $x \geq \bigwedge D$. Mas, $x \leq y \Rightarrow y \geq \bigwedge D \Rightarrow y \in A$.

$[Fi2]$ Sejam $x, y \in A$. Temos que $x \geq \bigwedge D_1$ e $y \geq \bigwedge D_2 \Rightarrow x \wedge y \geq (\bigwedge D_1) \wedge (\bigwedge D_2)$, pois $x \wedge y$ é a maior cota inferior de $\{x, y\}$. Não é difícil verificar que

$(\bigwedge D_1) \wedge (\bigwedge D_2) = \bigwedge(D_1 \cup D_2)$. Sendo assim, basta considerar $D := D_1 \cup D_2$ e então $x \wedge y \in A$.

Falta ver que $S \subseteq A$. Sejam $x \in S$ e $D = \{x\}$. É claro que $D \subseteq_f S$ e $x \geq \bigwedge D$. Logo, $x \in A$.

O item (b) é consequência do Princípio da Dualidade . O item (c) é trivial.

A versão do item (c) com $\mathfrak{i}(S)$ e $\bigvee D$, para $D \subseteq_f S$, também é válida, pelo Princípio da Dualidade.

Note que, para L reticulado e $b \in L$, $\uparrow b$ ($\downarrow b$) é o filtro (respectivamente, ideal) gerado por $\{b\}$.

Lema 1.3.15. *Seja $L \xrightarrow{f} K$ um morfismo de reticulados. Se F é um filtro em K, então $f^{-1}(F)$ é um filtro em L, que é próprio se F é próprio em K.*

Prova: É fácil verificar que $f^{-1}(F)$ é, de fato, um filtro em L. Agora, note que $\perp \in f^{-1}(F)$ implica em $f(\perp) = \perp \in F$.

Os conceitos de filtros e ideais primos são dos mais importantes dentro da Teoria de Reticulados e os resultados envolvendo tais conceitos são aplicados em Lógica, em Topologia Conjuntística, na construção de dualidades categoriais, entre outros.

Definição 1.3.16. *Seja L um reticulado distributivo.*

(a) *Um filtro próprio A é **primo** se, e somente se, para todos $x, y \in L$,*

$$x \vee y \in A \Rightarrow x \in A \text{ ou } y \in A.$$

(b) *Um ideal A é **primo** se, e somente se, para todos $x, y \in L$,*

$$x \wedge y \in A \Rightarrow x \in A \text{ ou } y \in A.$$

(c) *Um filtro (ideal) próprio A é **maximal** se, e somente se, para todo filtro (respectivamente, ideal) próprio G, $A \subseteq G \Rightarrow A = G$.*

O resultado abaixo nos diz que ultrafiltros (i.e., filtros maximais) são, em particular, filtros primos.

Lema 1.3.17. *Sejam L e K reticulados distributivos.*

(a) *Todo filtro maximal em L é primo.*

(b) *Se $L \xrightarrow{f} K$ é um homomorfismo, então a imagem inversa de um filtro primo é um filtro primo.*

Demonstração:

a) Seja $F \subseteq L$ um filtro maximal com $(x \vee y) \in F$. Considere os conjuntos $S = F \cup \{x\}$ e $T = F \cup \{y\}$. Note que se S ou T tem a pif, então eles geram um filtro próprio contendo F. Visto que F é maximal, obrigatoriamente tem-se que $x \in F$ ou $y \in F$. Supondo então que ambos, S e T, não tem a pif. Pode-se selecionar $s_1, s_2, ..., s_n$ e $t_1, t_2, ..., t_m$ em F tais que

$$x \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} s_i = \perp = y \wedge \bigwedge_{k=1}^{m} t_k$$

Visto que F é um filtro, F é fechado por ínfimo calculado em subconjuntos finitos de F, e então as equações acima são equivalentes à existência de $z, w \in F$ tais que $x \wedge z = \perp = y \wedge w$. Dessa forma, visto que $(z \wedge w)$ e $(x \vee y)$ pertencem a F, segue da distributividade do reticulado que

$$(x \vee y) \wedge (z \wedge w) = \perp.$$

Uma contradição, já que F é um filtro próprio.

b) Por 1.3.15, a imagem inversa de um filtro próprio é um filtro próprio. Seja F primo em K. Se $x, y \in L$ são tais que $x \vee y \in f^{-1}(F)$, então $f(x \vee y) = fx \vee fy \in F$, e então $fx \in F$ ou $fy \in F$. Portanto, $x \in f^{-1}(F)$ ou $y \in f^{-1}(F)$, e $f^{-1}(F)$ é primo em L.

O Teorema da Separação de Stone e Birkhoff, como foi dito anteriormente, é uma importante ferramenta para a Teoria de Reticulados. Vale ressaltar que tal teoria abrange muitos objetos matemáticos – dado um espaço topológico, sua topologia, ordenada pela inclusão, é um reticulado; o conjunto das partes de um dado conjunto, ordenado pela inclusão, é um reticulado; a reta real, ordenada por $\leq$ usual, é um reticulado (relembre que todo subconjunto não-vazio e limitado da reta possui ínfimo e supremo); etc.

Teorema 1.3.18. *(M. Stone e G. Birkhoff) Seja L um reticulado distributivo. Sejam F um filtro em L e S um subconjunto de L, dirigido para cima , tais que $F \cap S = \emptyset$. Então existe um filtro primo P em L tal que $F \subseteq P$ e $P \cap S = \emptyset$.*

Prova: Seja $\mathcal{V} = \{G \subseteq L :\ G$ é um filtro, $F \subseteq G$ e $G \cap S = \emptyset\}$, ordenado pela inclusão. Aplicando o Lema de Zorn para $\mathcal{V}$, mostra-se que este possui um elemento maximal P.

Afirmação: P é filtro primo em L.

Supondo que, para $x, y \in L$ tais que $x \vee y \in P$, $x \notin P$ e $y \notin P$, tem-se que os filtros gerados por $P \cup \{x\}$ e $P \cup \{y\}$ contém P propriamente e então têm interseção não-vazia com S (caso contrário, P não seria maximal em $\mathcal{V}$). Portanto, existem $z, t \in P$ e $u, v \in S$ tais que

$$(x \wedge t) \leq u \ \text{ e } \ (y \wedge z) \leq v.$$

Como S é direcionado para cima, $\exists w \in S$ tal que $u, v \leq w$. Como $(t \wedge z) \in P$, segue-se que

$$(x \vee y) \wedge (z \wedge t) \leq (x \wedge t) \vee (y \wedge z) \leq (u \vee v) \leq w.$$

Como $(x \vee y) \wedge (z \wedge t) \leq w$, $w \in P \cap S$. Absurdo, pois $P \cap S = \emptyset$.

O resultado acima nos diz, em particular, que todo filtro (ideal) próprio de um reticulado distributivo pode ser estendido a um filtro (ideal) primo. De fato, se $F \subseteq L$ é um filtro próprio, então existe um elemento a do reticulado L que não pertence a F. Sendo assim, $\downarrow a$ é dirigido para cima e tem interseção vazia com F. Aplicando-se 1.3.18, F pode ser estendido a um filtro primo.

A demonstração de 1.3.17(a) poderia ser feita da maneira descrita acima. De fato, dado um filtro maximal, M, ele pode ser estendido a um filtro primo, P. Como M é maximal e $M \subseteq P$, com P filtro próprio, tem-se $M = P$.

1.3.2 Reticulados distributivos especiais

Serão descritos abaixo dois tipos especiais de reticulados distributivos. Tais reticulados são as já citadas álgebras de Boole e de Heyting e tem destaque nas lógicas Clássica e Intuicionista, respectivamente, pois constituem modelos para as mesmas.
Estas álgebras também são utilizadas na Teoria de Representação, visto que são duais aos espaços Stone e Esakia, respectivamente.

Vale ressaltar que, numa álgebra Booleana, filtros primos e filtros maximais são o mesmo objeto.

Definição 1.3.19. *Seja L um reticulado distributivo. Um elemento $b \in L$ é dito* ***complementado*** *ou* ***aberto-fechado*** *se, e somente se, o sistema*

$$\begin{cases} x \wedge b = \bot \\ x \vee b = \top \end{cases}$$

tem alguma solução em L. Segue da distributividade de L que esta solução, sempre que existir, é única.

A solução deste sistema é denotada por $\neg b$ e chamada o ***complementar*** *de b em L.*
Uma ***álgebra Booleana*** *é um reticulado distributivo no qual todo elemento é complementado.*

Um exemplo simples de álgebra de Boole é $\langle\, \mathcal{P}(X), \subseteq \,\rangle$, para algum conjunto X.

Uma álgebra de Boole é dita *completa* se ela for um reticulado completo.

Definição 1.3.20. *Uma **álgebra de Heyting (aH)**, $\mathcal{H}$, é um reticulado tal que, para todos $x, y \in \mathcal{H}$,*

$$max\{z \in \mathcal{H} : z \wedge x \leq y\}$$

existe em $\mathcal{H}$. Esse elemento de $\mathcal{H}$ é denotado por $x \to y$. Não é difícil verificar que uma aH, $\mathcal{H}$, satisfaz, para todos $x, y, z \in \mathcal{H}$, adjunção:

$$[ad] \qquad x \wedge z \leq y \text{ se, e somente se, } z \leq (x \to y)$$

É possível mostrar que um reticulado com implicação, satisfazendo a adjunção, é distributivo. Assim, uma álgebra de Heyting é sempre distributiva.

Exemplo 1.3.21.

(a) *A álgebra dos abertos de um espaço topológico T, constitui um dos exemplos fundamentais de álgebras de Heyting. A operação $\to$ é dada por*

$$U \to V := int(T \setminus U) \cup V.$$

De fato, sabe-se que $\Omega(T)$, ordenado pela inclusão, é um reticulado distributivo, com $\bot = \emptyset$ e $\top = T$. Utilizando algumas propriedades topológicas, não é difícil mostrar que $\Omega(T)$ satisfaz também $[ad]$, logo é uma aH.

(b) *Seja X um conjunto e considere o conjunto das partes de X, $\mathcal{P}(X)$. Então, $\langle \mathcal{P}(X); \subseteq \rangle$ também tem estrutura de álgebra de Heyting, onde para $A, B \subseteq X$, define-se*

$$A \to B := (X \setminus A) \cup B.$$

(c) *Seja $\mathcal{B}$ uma aB. Definindo $a \to b := \neg a \vee b$, não é difícil ver que $\mathcal{B}$ é uma aH. A recíproca não vale.*

(d) *Uma ordem linear limitada é uma álgebra de Heyting, porém não é uma álgebra de Boole. Para uma ordem linear limitada $(L, \leq)$, se $x, y \in L$, então $x \leq y$ ou $y \leq x$. Se $x \leq y$, então $x \to y = \top$, pois para todo $z \in L$, tem-se $z \wedge x \leq x \leq y$. Se $y \leq x$, então para todo $z \in L$ tal que $z \geq x$, tem-se que $z \wedge x = x$. Como $y \leq x$, tem-se que nenhum $z \geq x$ pode ser $x \to y$. Também, se $y \leq z \leq x$, então $x \wedge z = z \geq y$. Sendo assim, $max\{z \in L | z \wedge x \leq y\} = y$, caso $y \leq x$.*

Uma álgebra de Heyting, $\mathcal{H}$, é dita *completa* (denotada por **aHc**) se, e somente se, $\mathcal{H}$ é um reticulado completo.

1.4 Teoria de Categorias

1.4.1 Noções básicas de Categorias

A teoria das categorias avançou bastante nos últimos anos, principalmente em lógica de topos. Tal teoria facilita bastante a formulação de certas noções matemáticas. Em seguida estão descritos somente alguns conceitos muito básicos, que são importantes para este trabalho.

Definição 1.4.1. *Uma **categoria** $\mathcal{C}$ contém:*

(i) A classe $Ob(\mathcal{C})$, cujos elementos são os objetos de $\mathcal{C}$.

(ii) A classe $M(\mathcal{C})$, cujos elementos são chamados de morfismos ou setas.

(iii) Operações que atribuem para cada morfismo f um objeto $domf$ (o "domínio" de f) e um objeto $codomf$ (o "contradomínio" de f). Se $A = domf$ e $B = codomf$, escreve-se:

$$f : A \longrightarrow B \text{ ou } A \xrightarrow{f} B.$$

A classe dos morfismos de A em B será denotado por $[A, B]_{\mathcal{C}}$. Quando estiver claro no contexto qual categoria está sendo referida, tais morfismos serão denotados apenas por $[A, B]$.

(iv) Para cada tripla de objetos de $\mathcal{C}$, $\langle A, B, C\rangle$, uma aplicação

$$[A, B] \times [B, C] \longrightarrow [A, C]$$

$$\langle f, g\rangle \mapsto g \circ f$$

chamada composição, que satisfaz as seguintes condições:

$[\circ\, 1]$ A composição, sempre que definida, é associativa.

$[\circ\, 2]$ Para $A \in Ob(\mathcal{C})$, existe id_A em $[A, A]$, tal que, para $B \in Ob(\mathcal{C})$, $f \in [A, B]$ e $g \in [B, A]$,

$$f \circ id_A = f \text{ e } id_A \circ g = g.$$

O morfismo id_A é único, sendo chamado a identidade do objeto A.

Exemplo 1.4.2.

- ***Set***, *cujos objetos são os conjuntos e os morfismos são as funções.*
- ***Top***, *a categoria dos espaços topológicos e das funções contínuas.*
- *$\mathcal{L}$, cujos objetos são os reticulados e os morfismos são os morfismos de reticulados.*
- *$\mathcal{D}$, a categoria dos reticulados distributivos e morfismos de reticulados.*

Definição 1.4.3. *Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ categorias. $\mathcal{B}$ é uma **sub-categoria** de $\mathcal{A}$ se, e somente se,*

- $Ob(\mathcal{B}) \subseteq Ob(\mathcal{A})$ *e*
- $\forall A, B \in Ob(\mathcal{B}),\ [A, B]_{\mathcal{B}} \subseteq [A, B]_{\mathcal{A}}$.

*$\mathcal{B}$ é uma **sub-categoria plena** de $\mathcal{A}$ se $[A, B]_{\mathcal{B}} = [A, B]_{\mathcal{A}}$, para todos A, B em $Ob(\mathcal{B})$.*

No Exemplo 1.4.2 acima, $\mathcal{D}$ é uma subcategoria de $\mathcal{L}$. Um outro exemplo de subcategoria será visto adiante com espaços Priestley e espaços Esakia.

Se $\mathcal{A}$ é uma categoria e $\mathbf{C}$ é uma coleção qualquer de $\mathcal{A}-$objetos, uma subcategoria plena $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ é obtida tomando como $\mathcal{C}-$morfismos todos os $\mathcal{A}-$morfismos entre membros de $\mathbf{C}$.

Definição 1.4.4. *Para toda categoria $\mathcal{C}$ corresponde uma **categoria dual** ou **oposta**, $\mathcal{C}^{op}$, definida como a seguir:*

(i) $Ob(\mathcal{C}^{op}) = Ob(\mathcal{C})$.

(ii) Para $A, B \in Ob(\mathcal{C}),\ [A, B]_{\mathcal{C}^{op}} = [B, A]_{\mathcal{C}}$.

(iii) A composta $f^{op} \circ g^{op}$ é definida precisamente quando $g \circ f$ é definida em $\mathcal{C}$ e tem-se:

$$C \xrightarrow{g^{op}} B \xrightarrow{f^{op}} A$$

$f^{op} \circ g^{op} = (g \circ f)^{op}$. *Note que* $dom f^{op} = codom f$, *e* $codom f^{op} = dom f$.

Definição 1.4.5. *Seja $f \in [A, B]$ um morfismo na categoria $\mathcal{C}$. Diz-se que f é um **isomorfismo**, se existe $B \xrightarrow{g} A$ tal que $f \circ g = id_B$ e $g \circ f = id_A$.*
Dizemos nesse caso que A é isomorfo a B e denotamos por $A \cong B$.

Os isomorfismos em **Top**, por exemplo, são os homeomorfismos entres seus objetos.

1.4.2 Funtores

Um funtor é uma transformação de uma categoria em outra, que "preserva" a estrutura categorial inicial, isto é, objetos são levados pelo funtor em objetos, e morfismos são levados em morfismos, preservando composições e identidades. O conceito de funtor é essencial para a construção de equivalências entre categorias. Estão descritos abaixo apenas os conceitos essenciais ao entendimento deste texto, sendo a Teoria de Categorias e Funtores muito mais amplos.

Definição 1.4.6. *Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ categorias. Um **funtor (covariante)**, $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, é uma regra que associa*

- *Para cada objeto A em $\mathcal{A}$, um objeto $F(A)$ em $\mathcal{B}$.*

- *Para cada morfismo $f \in [A,B]_{\mathcal{A}}$, um morfismo $F(f) \in [F(A),F(B)]_{\mathcal{B}}$, tal que*

$$(1)\ F(id_A) = id_{F(A)}; \qquad (2)\ F(f \circ g) = F(f) \circ F(g),$$

onde $A \in Ob(\mathcal{A})$ e f,g são morfismos com $codomg = domf$.

*Um **funtor contravariante**, $G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, é um funtor de $\mathcal{A}^{op}$ em $\mathcal{B}$.*

Note que, para um funtor contravariante, $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, e f,g morfismos em $\mathcal{A}$, $F((g \circ f)^{op}) = F(f^{op} \circ g^{op}) = F(f^{op}) \circ F(g^{op})$.

Se $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ e $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ são funtores, a composição deles é um funtor, $(G \circ F) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$, dado por

- Se $A \in Ob(\mathcal{A})$, $(G \circ F)(A) = G(F(A))$.
- Se $A \xrightarrow{f} B$, é um morfismo em $\mathcal{A}$, $(G \circ F)(f) = G(F(f))$.

Exemplo 1.4.7.

(1) *Se $\mathcal{A}$ é uma categoria, $Id_{\mathcal{A}}$ denotará o **funtor identidade** de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$. Tal funtor associa todo objeto e morfismo a si mesmos.*

(2) ***Funtores esquecimento**. Tais funtores deixam de lado alguma estrutura dos objetos da categoria inicial. Por exemplo, considerando o funtor esquecimento $\mathbf{F} : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$, que leva cada espaço topológico $(X,\tau) \in Ob(\mathbf{Top})$ apenas no conjunto $X \in Ob(\mathbf{Set})$, "esquecendo" a estrutura topológica, e cada **Top**-morfismo na função entre os conjuntos subjacentes.*

(3) *O funtor $\overline{\mathcal{P}} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, que leva cada conjunto A em $\mathcal{P}(A)$, e cada função $f : A \to B$ na função $\overline{\mathcal{P}}(f) : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$, a qual associa cada $X \subseteq B$ à sua imagem inversa $f^{-1}(X) \subseteq A$, é um funtor contravariante.*

Transformações entre funtores

Intuitivamente, podemos imaginar uma categoria **Cat**, cujos objetos são categorias e os morfismos são os funtores, sendo o morfismo identidade o funtor identidade do exemplo 1.4.7(1). Mas isto não é possível, por restrições da Teoria de Conjuntos. Dadas duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, podemos pensar ainda em construir uma categoria, denotada por $\mathcal{F}(\mathcal{C},\mathcal{D})$, na qual os objetos são funtores de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$. Precisaríamos então definir morfismos entre funtores. Considerando os funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, podemos pensar que F e G imprimem diferentes "gravuras" de $\mathcal{C}$ dentro de $\mathcal{D}$. Uma idéia intuitiva de transformação de F em G ocorre quando nos imaginamos tentando sobrepor a $F-$gravura sobre a $G-$gravura, i.e., usamos a estrutura em $\mathcal{D}$ para traduzir a última forma. Isto pode ser feito associando cada $\mathcal{C}-$objeto A a um morfismo em $\mathcal{D}$, da $\mathbf{F}-$imagem de A

na $\mathbf{G}-$imagem de A. Denotando este morfismo por η_A, tem-se $\eta_A : F(A) \to G(A)$. É razoável querer que este processo "preserve a estrutura". Com esta finalidade, exige-se que cada $\mathcal{C}-$morfismo $f : A \to B$ dê origem a um diagrama que comute. (R. Goldblatt, em [G84]).

Definição 1.4.8. *Sejam $F, G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ funtores de mesma variância (i.e., ambos covariantes ou ambos contravariantes). Uma **transformação natural**, $\eta : F \longrightarrow G$, é uma família de morfismos em $\mathcal{B}$,*

$$\eta = \{\eta_A \in [F(A), G(A)] : A \in Ob(A)\},$$

tal que para todos os morfismos $A \xrightarrow{f} B$ em $\mathcal{A}$, os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & G(B) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(B) \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "F(f^{op})"'] & G(B) \arrow[d, "G(f^{op})"] \\ F(A) \arrow[r, "\eta_A"'] & G(A) \end{tikzcd}$$

*onde o diagrama na direita é para o caso em que F e G são contravariantes. Quando η_A é um isomorfismo, para cada $A \in Ob(\mathcal{A})$, η é dita ser uma **equivalência natural**. A classe das transformações naturais de F em G será denotada por $[F, G]$.*

Definição 1.4.9. *Duas categorias, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, são equivalentes se existem funtores, $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ e $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$, juntos com as equivalências naturais*

$$\eta : (G \circ F) \longrightarrow Id_{\mathcal{A}} \quad e \quad \mu : (F \circ G) \longrightarrow Id_{\mathcal{B}}.$$

*O par (F, G) é chamado **equivalência** entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Uma equivalência contravariante é chamada **dualidade**.*

Definição 1.4.10. *Duas categorias $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ são **isomorfas** se, e somente se, existem funtores $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ tais que $F \circ G = Id_{\mathcal{B}}$ e $G \circ F = Id_{\mathcal{A}}$.*

Observação 1.4.11. *Note que, se $F \circ G = Id_{\mathcal{B}}$ e $G \circ F = Id_{\mathcal{A}}$, então podemos considerar η e μ como as famílias compostas pelos morfismos identidade, em cada caso. Claramente, essas famílias serão transformações naturais, em cada caso respectivo. Como os morfismos identidade são isomorfismos, essas transformações darão origem a uma equivalência.*

Capítulo 2

Isomorfismos e Equivalências Duais

Dado um espaço Priestley $(X, \tau, \leq)$, estão associadas a ele duas topologias naturais: a topologia crescente, τ_1, consistindo dos abertos crescentes de $(X, \tau, \leq)$, e a topologia decrescente, τ_2, consistindo dos abertos decrescentes de $(X, \tau, \leq)$. Dessa forma, (X, τ_1, τ_2) é um espaço bitopológico. Além disso, é possível mostrar que a topologia τ possui $\tau_1 \cup \tau_2$ como sub-base, isto é, em certo sentido τ é gerada por $\tau_1 \cup \tau_2$. Então, a representação dos espaços Priestley através dos espaços bitopológicos é uma questão natural. Neste capítulo encontra-se a axiomatização completa dos espaços bitopológicos obtidos da maneira descrita anteriormente – os chamados *espaços pairwise Stone* – bem como resultados relacionando espaços Priestley com estes espaços bitopológicos. Tal axiomatização foi feita por G. e N. Bezhanishvili, D. Gabelaia e A. Kurz, em [BBGK10]. Os conceitos e resultados aqui citados, possibilitarão a construção do isomorfismo entre a categoria **Pries**, que tem por objetos os espaços Priestley, e a categoria **PStone**, que tem por objetos os espaços pairwise Stone.

Dado um espaço Priestley $(X, \tau, \leq)$ e considerando seu espaço pairwise Stone correspondente, (X, τ_1, τ_2), pode-se obter espaços espectrais apenas esquecendo uma de suas topologias, ou seja, (X, τ_1) e (X, τ_2) são espaços espectrais. Reciprocamente, pode-se obter um espaço pairwise Stone a partir de um espaço espectral qualquer. Este processo será visto com detalhes neste capítulo, bem como o isomorfismo entre a categoria **Spec** dos espaços espectrais e funções espectrais, e a categoria **PStone** dos espaços pairwise Stone e funções bi-contínuas. Estas últimas são funções contínuas com respeito a ambas as topologias. Conclui-se então que **Pries**, **Spec** e **PStone** são isomorfas entre si.

Por fim, está aqui descrita com detalhes, a equivalência dual entre a categoria **DLat** dos reticulados distributivos e limitados e homomorfismos entre reticulados, e **PStone** – o que nos dá uma alternativa para a dualidade entre **Spec** e **Dlat**, bem como para a dualidade entre **Pries** e **DLat**.

Vale ressaltar que as demonstrações da proposição 2.1.1 e do lema 2.2.3 são originais, e também que a aplicação dos isomorfismos F e G, a qual se encontra no final da seção 3 deste capítulo, é devida a Hugo Luiz Mariano.

2.1 Espaços pairwise Stone

Um espaço topológico é dito *Stone* se, e somente se, ele for compacto, Hausdorff e zero-dimensional. Nesta seção, está descrita uma axiomatização completa dos espaços pairwise Stone, os quais fornecem uma espécie de generalização dos espaços Stone.

Se X é um conjunto e τ_1, τ_2 são topologias sobre X, diremos que:

(i) (X, τ_1, τ_2) é um **espaço bitopológico**;

(ii) $\tau_1 \vee \tau_2 := \bigcap\{\tau | \tau \text{ é topologia e } \tau_1 \cup \tau_2 \subseteq \tau\}$.

Por 1.1.10, $\tau_1 \vee \tau_2$ é uma topologia sobre X.

Proposição 2.1.1. *Seja X um conjunto, τ_1, τ_2 topologias sobre X e $\mathfrak{B}$ a coleção formada por interseções finitas de elementos de $\tau_1 \cup \tau_2$. Então $\mathfrak{B}$ gera uma topologia τ sobre X e $\tau = \tau_1 \vee \tau_2$. Em particular, $\tau_1 \cup \tau_2 \subseteq \tau$.*

Prova: Seja $\mathfrak{B}$ a coleção formada por interseções finitas de elementos de $\tau_1 \cup \tau_2$. Para ver que $\mathfrak{B}$ de fato gera uma topologia τ sobre X, basta mostrar que $\mathfrak{B}$ satisfaz 1.1.9. É claro que $\tau_1 \cup \tau_2$ satisfaz (2) de 1.1.9, pois τ_1 e τ_2 são topologias sobre X, e como $\tau_1 \cup \tau_2 \subseteq \mathfrak{B}$, este último também satisfaz a referida condição. Falta ver que $\mathfrak{B}$ satisfaz (1) de 1.1.9. Então, sejam $V_1, V_2 \in \mathfrak{B}$ e $x \in X$ tal que $x \in V_1 \cap V_2$. É preciso encontrar $V_3 \in \mathfrak{B}$ com $x \in V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$. Visto que $V_1, V_2 \in \mathfrak{B}$, eles são interseções finitas de elementos de $\tau_1 \cup \tau_2$. Logo, $V_1 \cap V_2$ continua sendo interseção finita de elementos de $\tau_1 \cup \tau_2$, consequentemente, $V_1 \cap V_2 \in \mathfrak{B}$. Agora, basta tomar $V_3 := V_1 \cap V_2$. Portanto, $\tau := \{\bigcup \mathfrak{B}' | \mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}\}$ é uma topologia sobre X. Falta verificar que $\tau = \tau_1 \vee \tau_2$. Como $\tau_1 \vee \tau_2$ é a menor topologia que contém $\tau_1 \cup \tau_2$, tem-se $\tau_1 \vee \tau_2 \subseteq \tau$. Seja $U \in \tau$, então U é uma união de interseções finitas de elementos de $\tau_1 \cup \tau_2$. Seja $\mathcal{T} := \{\tau' | \tau' \text{ é } \textit{topologia e } \tau_1 \cup \tau_2 \subseteq \tau'\}$, então para todo $\tau' \in \mathcal{T}$, $\tau_1 \cup \tau_2 \subseteq \tau'$. Como τ' é topologia, ela é fechada por interseções finitas. Logo, interseções finitas de elementos de $\tau_1 \cup \tau_2$ pertencem a τ'. Mas τ' também é fechado por uniões quaisquer. Assim, união de interseções finitas de elementos de $\tau_1 \cup \tau_2$ estão em τ'. Isso vale para todo $\tau' \in \mathcal{T}$. Ou seja, $U \in \tau'$ para todo $\tau' \in \mathcal{T}$, i.e., $U \in \bigcap \mathcal{T} = \tau_1 \vee \tau_2$. Dessa forma, $\tau = \tau_1 \vee \tau_2$.

Em outras palavras, o resultado acima garante que $\tau_1 \cup \tau_2$ é uma sub-base para $\tau_1 \vee \tau_2$.

Definição 2.1.2. *Sejam* (X, τ_1, τ_2) *um espaço bitopológico e* $\tau := \tau_1 \vee \tau_2$. *Para uma propriedade topológica* P, *diremos que:*

(i) (X, τ_1, τ_2) *é* $bi - P$ *se ambos,* (X, τ_1) *e* (X, τ_2) *são* P*;*

(ii) (X, τ_1, τ_2) *é join* P *se* (X, τ) *é* P.

Por exemplo, (X, τ_1, τ_2) é $bi - T_0$ se ambos, (X, τ_1) e (X, τ_2), são T_0 e (X, τ_1, τ_2) é join T_0 se (X, τ) é T_0.

A próxima definição é devida a Salbany (ver [S74]).

Definição 2.1.3. *Seja* (X, τ_1, τ_2) *um espaço bitopológico.*

(i) Diz-se que (X, τ_1, τ_2) *é* ***pairwise*** T_0 *se, e somente se, para quaisquer dois pontos distintos de* X, *existe* $U \in \tau_1 \cup \tau_2$ *contendo apenas um desses pontos.*

(ii) Diz-se que (X, τ_1, τ_2) *é* ***pairwise*** T_1 *se, e somente se, para quaisquer dois pontos distintos* $x, y \in X$, *existem* $U, V \in \tau_1 \cup \tau_2$ *tais que* $x \in U$ *e* $y \notin U$, *e* $y \in V$ *e* $x \notin V$.

(iii) Diz-se que (X, τ_1, τ_2) *é* ***pairwise*** T_2 *ou* ***pairwise Hausdorff*** *se para quaisquer dois pontos distintos* $x, y \in X$, *existem* $U \in \tau_1$ *e* $V \in \tau_2$ *disjuntos tais que* $x \in U$ *e* $y \in V$ *ou existem* $U \in \tau_2$ *e* $V \in \tau_1$ *disjuntos com a mesma propriedade.*

Observação 2.1.4. *Seguindo o raciocínio de 2.1.3(i) e (ii), o leitor poderia estar esperando que um espaço pairwise* T_2 *fosse definido como um espaço bitopológico satisfazendo a seguinte condição: para quaisquer dois pontos distintos* $x, y \in X$ *existem* $U, V \in \tau_1 \cup \tau_2$ *disjuntos tais que* $x \in U$ *e* $y \in V$. *Obviamente, se* (X, τ_1, τ_2) *é pairwise* T_2, *então satisfaz a condição anterior, mas a recíproca nem sempre é verdade. Contudo, será mostrado que, em se tratando de espaços pairwise zero-dimensionais, as duas condições são equivalentes.*

Para um espaço bitopológico (X, τ_1, τ_2), δ_1 denotará a coleção de subconjuntos fechados de X com relação a τ_1, e δ_2 a coleção de subconjuntos fechados de X com relação a τ_2.

Definição 2.1.5. *Diz-se que um espaço bitopológico* (X, τ_1, τ_2) *é* ***pairwise zero-dimensional*** *se abertos em* (X, τ_1) *fechados em* (X, τ_2) *formam uma base para* (X, τ_1) *e abertos em* (X, τ_2) *fechados em* (X, τ_1) *formam uma base para* (X, τ_2), *i.e.,* $\beta_1 := \tau_1 \cap \delta_2$ *é uma base para* τ_1 *e* $\beta_2 := \tau_2 \cap \delta_1$ *é uma base para* τ_2.

Observação 2.1.6. *Note que, com as notações acima,*

$$\beta_2 = \{U^c : U \in \beta_1\} \text{ e } \beta_1 = \{V^c : V \in \beta_2\}.$$

Mais ainda: ambos, β_1 *e* β_2, *contêm* $\emptyset$ *e* X, *e são fechados por uniões e interseções finitas.*

No Lema a seguir, a demonstração de que a afirmação (5) implica a (6) é original.

Lema 2.1.7. *Suponha que* (X, τ_1, τ_2) *é pairwise zero-dimensional. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(1) (X, τ_1) *é* T_0.

(2) (X, τ_2) *é* T_0.

(3) (X, τ_1, τ_2) *é pairwise* T_2.

(4) *Para quaisquer dois pontos distintos,* $x, y \in X$, *existem* $U, V \in \tau_1 \cup \tau_2$ *disjuntos tais que* $x \in U$ *e* $y \in V$.

(5) (X, τ_1, τ_2) *é join* T_2.

(6) (X, τ_1, τ_2) *é* $bi - T_0$.

Demonstração:
(1) $\Rightarrow$ (2): Suponha que (X, τ_1) é T_0 e sejam x, y dois pontos distintos de X. Então, existe $U \in \tau_1$ contendo apenas um desses pontos. Sem perda de generalidade, suponha que $x \in U$ e $y \notin U$. Visto que (X, τ_1, τ_2) é pairwise zero-dimensional, β_1 é uma base para τ_1. Logo, existe $V \in \beta_1$ tal que $x \in V \subseteq U$. Como $y \notin U$, $y \in U^c \subset V^c$ e $V^c \in \beta_2$ (por 2.1.6). Portanto, $W := V^c$ é um aberto tal que $W \in \beta_2 \subseteq \tau_2$, $y \in W$ e $x \notin W$, implicando que (X, τ_2) é T_0.
(2) $\Rightarrow$ (3): Suponha que (X, τ_2) é T_0 e sejam x, y dois pontos de X. Então, existe $U \in \tau_2$, sem perda de generalidade, contendo apenas x. Visto que (X, τ_1, τ_2) é zero dimensional, β_2 é uma base para τ_2. Logo, existe $V \in \beta_2$ tal que $x \in V \subseteq U$. Então, $x \in V \in \beta_2 \subseteq \tau_2$, $y \in V^c \in \beta_1 \subseteq \tau_1$, e V, V^c são disjuntos. Consequentemente, (X, τ_1, τ_2) é pairwise T_2.
(3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5): Óbvio.
(5) $\Rightarrow$ (6): Suponha que (X, τ_1, τ_2) é join T_2. Vejamos que (X, τ_1, τ_2) é $bi - T_0$. Sejam x, y pontos distintos de X. Visto que (X, τ_1, τ_2) é join T_2, temos que existem $U, V \in \tau_1 \vee \tau_2$ disjuntos tais que $x \in U$ e $y \in V$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $U, V \in \mathfrak{B}$, onde $\mathfrak{B}$ é base de τ conforme 2.1.1. Pela definição de $\mathfrak{B}$, $U = \bigcap_{f \in F} U_f$ e $V = \bigcap_{l \in L} V_l$, com F, L conjuntos finitos de índices, e $U_s, V_r \in \tau_1 \cup \tau_2$ para todo $s \in F$ e todo $r \in L$. Como $x \in U$ e $y \in V$ e U, V são disjuntos, existem $i \in F$ e $j \in L$ tais que $y \notin U_i$ e $x \notin V_j$. Se $U_i \in \tau_1$, como $x \in U_i$, então é claro que (X, τ_1) é T_0. Visto que (X, τ_1, τ_2) é pairwise zero-dimensional, tem-se que existe $U_1 \in \beta_1$ tal que $x \in U_1 \subseteq U_i$. Assim, $y \in U_1^c \in \beta_2 \subseteq \tau_2$ e, claramente, $x \notin U_1^c$. Logo, (X, τ_2) é T_0. Suponha agora que $U_i \in \tau_2$. Então, (X, τ_2) é T_0. Além disso, existe $U_2 \in \beta_2$ tal que $x \in U_2 \subseteq U_i$ e $y \notin U_2$. Dessa forma, $y \in U_2^c \in \beta_1 \subseteq \tau_1$ e $x \notin U_2^c$. Portanto, (X, τ_1) é T_0. Ou seja, em ambos os casos, conseguiu-se um aberto em cada topologia que continha apenas um dos dois pontos, x ou

y. Consequentemente, (X, τ_1, τ_2) é $bi - T_0$.
(6) $\Rightarrow$ (1): Óbvio.

Por outro lado, (X, τ_1, τ_2) pode ser pairwise zero-dimensional e pairwise T_2 sem que τ_1 ou τ_2 sejam T_1, como mostra o seguinte simples exemplo.

Exemplo 2.1.8. *Seja $X = \{0, 1\}$, $\tau_1 = \{\emptyset, \{1\}, X\}$ e $\tau_2 = \{\emptyset, \{0\}, X\}$. Então ambas, τ_1 e τ_2, são topologias T_0 sobre X – as chamadas topologias Sierpinski – mas não são T_1. Contudo, (X, τ_1, τ_2) é pairwise zero-dimensional e pairwise T_2.*

Definição 2.1.9. *Diz-se que um espaço bitopológico (X, τ_1, τ_2) é* ***pairwise compacto*** *se para cada cobertura $\{U_i | i \in I\}$ de X, com $U_i \in \tau_1 \cup \tau_2$, existe uma subcobertura finita.*

Observação 2.1.10. *Na definição acima, devida a Sergio Salbany, um espaço bitopológico (X, τ_1, τ_2) é pairwise compacto se (X, τ) é compacto, onde $\tau = \tau_1 \vee \tau_2$ (cf. [S74]). Com a terminologia que está sendo usada neste texto, isso significa que (X, τ_1, τ_2) é join compacto. Mas, como consequência de 1.1.31, tem-se que as duas noções, de pairwise compacto e join compacto, coincidem.*

É óbvio que se (X, τ_1, τ_2) é pairwise compacto, então ambos, (X, τ_1) e (X, τ_2), são compactos, i.e., (X, τ_1, τ_2) é bi-compacto. Por outro lado, foi observado em [S74] que a recíproca não é verdade em geral.

Doravante, serão utilizados os símbolos σ_1 e σ_2 para denotar as coleções de subconjuntos compactos de (X, τ_1) e (X, τ_2), respectivamente.

Proposição 2.1.11. *Um espaço bitopológico (X, τ_1, τ_2) é pairwise compacto se, e somente se, $\delta_1 \subseteq \sigma_2$ e $\delta_2 \subseteq \sigma_1$.*

Demonstração:
$\Rightarrow$: Suponha que (X, τ_1, τ_2) é pairwise compacto. Será mostrado que $\delta_1 \subseteq \sigma_2$. Sejam $A \in \delta_1$ e $\{U_i | i \in I\} \subseteq \tau_2$ tais que $A \subseteq \bigcup\{U_i | i \in I\}$. Então, a coleção $\{U_i | i \in I\} \cup \{A^c\}$ é uma cobertura de X. Como $A \in \delta_1$, A^c é aberto com relação a τ_1. Logo, $\{U_i | i \in I\} \cup \{A^c\}$ é cobertura de X por elementos de $\tau_1 \cup \tau_2$. Visto que (X, τ_1, τ_2) é pairwise compacto, existem $i_1, ..., i_n \in I$ tais que $U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_n} \cup A^c = X$. Portanto $A \subseteq U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_n}$, logo $A \in \sigma_2$. Assim, $\delta_1 \subseteq \sigma_2$. A prova de que $\delta_2 \subseteq \sigma_1$ é semelhante.
$\Leftarrow$: Suponha que $\delta_1 \subseteq \sigma_2$ e que $\delta_2 \subseteq \sigma_1$. Para mostrar que (X, τ_1, τ_2) é pairwise compacto, considere $\{U_i | i \in I\} \subseteq \tau_1$ e $\{V_j | j \in J\} \subseteq \tau_2$ com $(\bigcup\{U_i | i \in I\}) \cup (\bigcup\{V_j | j \in J\}) = X$. Seja $U := \bigcup\{U_i | i \in I\}$. Claramente, $U \in \tau_1$ e $U \cup \bigcup\{V_j | j \in J\} = X$. Logo $U^c \subseteq \bigcup\{V_j | j \in J\}$. Como $U^c \in \delta_1$ e $\delta_1 \subseteq \sigma_2$, tem-se que $U^c \in \sigma_2$. Portanto, como $\{V_j | j \in J\}$ cobre U^c, existem $j_1, ..., j_n \in J$ tais que $U^c \subseteq V_{j_1} \cup ... \cup V_{j_n}$. Agora, seja $V := V_{j_1} \cup ... \cup V_{j_n}$. Então, $U \cup V = X$. Logo, $V^c \subseteq U = \bigcup\{U_i | i \in I\}$. Visto que $V^c \in \delta_2$ e $\delta_2 \subseteq \sigma_1$, tem-se

que $V^c \in \sigma_1$. Por conseguinte, existem $i_1, ...i_m \in I$ tais que $V^c \subseteq U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_m}$. Está claro que $\{V_{j_1}, ..., V_{j_n}, U_{i_1}, ..., U_{i_m}\}$ é uma subfamília finita de $\{U_i | i \in I\} \cup \{V_j | j \in J\}$ e que é uma cobertura de X. Assim, X é pairwise compacto.

Finalmente, tendo visto todas as definições necessárias, o conceito de espaço Stone pode ser generalizado para o de espaço pairwise Stone.

Definição 2.1.12. *Diz-se que (X, τ_1, τ_2) é um espaço **pairwise Stone** se, e somente se, ele é pairwise compacto, pairwise Hausdorff e pairwise zero-dimensional.*

Observação 2.1.13. *Dadas as categorias **Top**, que tem por objetos os espaços topológicos e por morfismos as funções contínuas, e **Bi-Top**, que tem por objetos os espaços bitopológicos e por morfismos as funções bicontínuas, pode-se definir o funtor*

$$\partial \colon \textbf{\textit{Top}} \longrightarrow \textbf{\textit{Bi-Top}}$$
$$(X, \tau) \mapsto (X, \tau, \tau).$$
$$f \in [(X, \tau), (Y, \tau')] \mapsto f \in [(X, \tau, \tau), (Y, \tau', \tau')]$$

Não é difícil verificar que (X, τ) tem a propriedade P se, e somente se, $B(X, \tau)$ tem a propriedade pairwise P. Sendo assim, (X, τ) é um espaço Stone se, e somente se, (X, τ, τ) é um espaço pairwise Stone.

Na definição de espaços pairwise Stone, pairwise Hausdorff pode ser substituído por qualquer uma das condições equivalentes de 2.1.7, e pairwise compacto pode ser substituído por "$\delta_1 \subseteq \sigma_2$ e $\delta_2 \subseteq \sigma_1$", de acordo com 2.1.11.

Tendo em mãos o conceito de espaços pairwise Stone, pode-se considerar a categoria que tem por objetos tais espaços e por morfismos as funções bi-contínuas. Estas últimas são funções contínuas com respeito à ambas topologias. A referida categoria será denotada por **PStone**.

2.2 Espaços Priestley e espaços pairwise Stone

Nesta seção, estão descritos detalhadamente os resultados relacionando espaços Priestley com espaços pairwise Stone. Tais resultados são de fundamental importância no desenvolvimento dos funtores que determinam o isomorfismo entre as categorias que contém como objetos estes respectivos espaços.

Para $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado, nesta e nas demais seções, $Up(X)$ denotará o conjunto dos subconjuntos crescentes e $Do(X)$ denotará o conjunto dos subconjuntos decrescentes de $(X, \leq)$.

Sejam τ e $\leq$ uma topologia e uma ordem parcial para X, respectivamente. Diz-se então que $(X, \tau, \leq)$ é um *espaço topológico ordenado*.

Para $(X, \tau, \leq)$ espaço topológico ordenado, $OpUp(X, \tau, \leq)$ denotará o conjunto dos abertos crescentes, $ClUp(X, \tau, \leq)$ denotará o conjunto dos fechados crescentes e $CpUp(X, \tau, \leq)$ denotará o conjunto dos abertos-fechados crescentes de $(X, \tau, \leq)$. Analogamente, $OpDo(X, \tau, \leq)$ denotará o conjunto dos abertos decrescentes, $ClDo(X, \tau, \leq)$ denotará o conjunto dos fechados decrescentes e $CpDo(X, \tau, \leq)$ denotará o conjunto dos abertos-fechados decrescentes de $(X, \tau, \leq)$.

Definição 2.2.1. *Um espaço topológico ordenado, $(X, \tau, \leq)$, é um **espaço Priestley** se, e somente se, (X, τ) é compacto e, para $x, y \in X$, sempre que $x \not\leq y$, existe um aberto-fechado crescente $A \subseteq X$ tal que $x \in A$ e $y \notin A$.*

A segunda condição na definição acima é conhecida como *axioma de separação de Priestley*. Será usada a sigla **ASP** para se referir a este axioma.

Observação 2.2.2. *Por 1.2.5, temos que **ASP** em 2.2.1 é equivalente à seguinte afirmação:*

Para $x, y \in X$, se $x \not\leq y$ então existe aberto-fechado crescente, U, contendo x e aberto-fechado decrescente, V, contendo y tais que $U \cap V = \emptyset$.

Como foi dito anteriormente, cada espaço Priestley tem duas topologias associadas a ele: a topologia dos abertos crescentes e a dos abertos decrescentes de $(X, \tau, \leq)$. O lema a seguir afirma que um espaço Priestley é, em particular, um espaço Stone, além de dizer quais são as bases para estas topologias, dentre outras coisas. Veremos adiante que o referido lema será de fundamental importância na construção do isomorfismo supracitado. A demonstração desse resultado é original.

Lema 2.2.3. *Seja $(X, \tau, \leq)$ um espaço topológico ordenado.*

(1) *Se $(X, \tau, \leq)$ é um espaço Priestley, então (X, τ) é um espaço Stone.*

(2) *Se $(X, \tau, \leq)$ é um espaço Priestley, então $\uparrow F$ e $\downarrow F$ são fechados para cada subconjunto fechado, F, de X.*

(3) *Num espaço Priestley, todo aberto crescente é uma união de abertos-fechados crescentes e todo aberto decrescente é uma união de abertos-fechados decrescentes.*

(4) *Num espaço Priestley, todo fechado crescente é uma interseção de abertos-fechados crescentes e todo fechado decrescente é uma interseção de abertos-fechados decrescentes.*

(5) *Num espaço Priestley, abertos-fechados crescentes e abertos-fechados decrescentes formam uma sub-base para a topologia.*

(6) *$(X, \tau, \leq)$ é um espaço Priestley se, e somente se, (X, τ) é compacto e para subconjuntos fechados F e G de X, sempre que $\uparrow F \cap \downarrow G = \emptyset$, existe um aberto-fechado crescente A de X tal que $F \subseteq A$ e $G \subseteq A^c$.*

Prova:

(1) : Pela definição de espaço Priestley, (X,τ) é compacto. Falta verificar que (X,τ) é T_2 e zero dimensional. Sejam $x, y \in X$ distintos. Tem-se que $x \not\leq y$ ou $y \not\leq x$. Suponha, sem perda de generalidade, que $x \not\leq y$. Por **ASP**, existe um aberto-fechado crescente, A, tal que $x \in A$ e $y \notin A$. Logo, $y \in A^c$, que também é aberto-fechado. Portanto, $x \in A$ e $y \in A^c$ e, claramente, A, A^c são abertos disjuntos. Assim, (X,τ) é Hausdorff. Seja $x \in X$ e $U \subseteq X$ aberto tal que $x \in U$. Por 1.1.7, é preciso exibir um aberto-fechado A tal que $x \in A \subseteq U$. Para todo $y \in X \backslash U$, tem-se que $x \not\leq y$ ou $y \not\leq x$. Por **ASP**, para todo $y \in X \setminus U$ existe $V_y \subseteq X$ aberto-fechado crescente tal que $x \in V_y$ e $y \in X \setminus V_y$, caso $x \not\leq y$, ou $y \in V_y$ e $x \in X \setminus V_y$, caso $y \not\leq x$. Assim, $x \in \bigcap_{y \in X\backslash U} W_y$, onde $W_z = V_z$, se $x \not\leq y$, ou $W_z = X \setminus V_z$, se $y \not\leq x$, para todo $z \in X \backslash U$. Por construção, $z \notin W_z$, para todo $z \in X \backslash U$. Logo, $\bigcap_{y \in X\backslash U} W_y \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Dessa forma, $\bigcup_{y \in X\backslash U} (X \setminus W_y) \cup U = X \setminus (\bigcap_{y \in X\backslash U} W_y \cap (X \setminus U)) = X \setminus \emptyset = X$. Visto que cada W_z é clopen, temos que $\{X \setminus W_y : y \in X \setminus U\} \cup \{U\}$ é cobertura aberta de X. Como X é compacto, existem $y_1, ..., y_n \in X \setminus U$ tais que $\bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus W_{y_i}) \cup U = X$. Consequentemente, $X \setminus U \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} X \setminus W_{y_i}$. Passando ao complementar, tem-se que $\bigcap_{i=1}^{n} W_{y_i} \subseteq U$. Portanto, fazendo $A_x := \bigcap_{i=1}^{n} W_{y_i}$, tem-se que A_x é aberto-fechado, pois é interseção finita de abertos-fechados, e $x \in A_x \subseteq U$.

(2) : Seja $F \subseteq X$ fechado. Vejamos que $\uparrow F$ é fechado, sendo a demonstração de que $\downarrow F$ é fechado dual a esta. Seja então $x \in X \backslash \uparrow F$, ou seja, $x \notin \uparrow F$, i.e., $\forall y \in F\ [y \not\leq x]$. Por **ASP**, para todo $y \in F$ existe aberto-fechado $A_y = \uparrow A_y$, com $y \in A_y$ e $x \in X \setminus A_y$. Logo, $F \subseteq \bigcup_{y \in F} A_y$. Sendo F compacto, tem-se que $F \subseteq \bigcup_{y \in F'} A_y$, com $F' \subseteq_f F$. Seja $A := \bigcup_{y \in F'} A_y$. Agora, olhando para x, tem-se que $x \in \bigcap_{y \in F} X \setminus A_y = X \setminus \bigcup_{y \in F} A_y \subseteq X \setminus A$. Observe que, como A é aberto-fechado, $X \setminus A$ é aberto-fechado. A demonstração termina se $X \setminus A \subseteq X \backslash \uparrow F$, pois x será ponto interior de $X \backslash \uparrow F$. Como x é arbitrário, isso significa que $X \backslash \uparrow F$ é aberto, logo $\uparrow F$ é fechado. Suponha que $X \setminus A \not\subseteq X \backslash \uparrow F$, então existe $z \in X \setminus A$ tal que $z \notin X \backslash \uparrow F$. Assim, $z \notin A$ e $z \in \uparrow F$, ou seja, existe $w \in F$ tal que $w \leq z$. Como $z \notin A = \bigcup_{y \in F'} A_y$, para todo $y \in F'$ tem-se $z \notin A_y$. Visto que $F \subseteq A$ e $w \in F$, tem-se que existe $y_0 \in F'$ com $w \in A_{y_0}$. Mas A_{y_0} é upset e $w \leq z$, logo $z \in A_{y_0}$. Contradição. Portanto, $X \setminus A \subseteq X \backslash \uparrow F$.

(3) : Seja $U = \uparrow U$ aberto. Por 1.2.5, $X \setminus U = \downarrow (X \setminus U)$ é decrescente e fechado. Seja $x \in U$ fixado. Assim, para todo $z \in X \setminus U$, tem-se que $x \not\leq z$. Por **ASP**, para todo $z \in X \setminus U$, existe aberto-fechado crescente V_z^x tal que $x \in V_z^x$ e $z \in X \setminus V_z^x$. Dessa forma, $X \setminus U \subseteq \bigcup_{z \in X \setminus U} X \setminus V_z^x$. Como $X \setminus U$ é compacto (por 1.1.29), existe $I \subseteq_f X \setminus U$ tal que $X \setminus U \subseteq \bigcup_{i \in I} (X \setminus V_i^x) = X \setminus \bigcap_{i \in I} V_i^x$. Por construção, $x \in V^x := \bigcap_{i \in I} V_i^x$. Observe que V^x é aberto-fechado, pois é interseção finita de abertos fechados, e ainda crescente. Além disso, $V^x \subseteq U$. Isso pode ser feito para todo $x \in U$. Logo, $\bigcup_{x \in U} V^x = U$. Agora, seja V aberto decrescente, i.e., $V = \downarrow V$. Então $X \setminus V$ é fechado crescente. Fixado $x \in V$, tem-se que, para todo $z \in X \setminus V$, $z \not\leq x$. Por **ASP**, existe aberto-fechado crescente W_x^z tal que $z \in W_x^z$ e $x \in X \setminus W_x^z$. Assim, $X \setminus V \subseteq \bigcup_{z \in X \setminus V} W_x^z$. Como $X \setminus V$ é compacto, existe $I_x \subseteq_f X \setminus V$ tal que $X \setminus V \subseteq \bigcup_{i \in I_x} W_x^i$. Defina $W_x := \bigcup_{i \in I_x} W_x^i$. Assim, $X \setminus V \subseteq W_x$. Note que W_x é aberto-fechado crescente. Passando ao complementar, tem-se que $X \setminus W_x \subseteq V$. Além disso, $X \setminus W_x$ é aberto-fechado decrescente. Por construção, $x \in \bigcap_{i \in I_x} X \setminus W_x^i = X \setminus W_x$. Como x foi fixado arbitrariamente, tem-se que $V = \bigcup_{x \in V} (X \setminus W_x)$, ou seja,
V é união de abertos-fechados decrescentes.

(4) : Seja F fechado decrescente, i.e., $F = \downarrow F$. Então $U := X \setminus F$ é aberto e, por 1.2.5, crescente. Pelo que foi demonstrado acima, $U = \bigcup_{x \in U} V^x$. Isso implica em $F = X \setminus U = \bigcap_{x \in U} (X \setminus V^x) = \bigcap_{x \in X \setminus F} (X \setminus V^x)$. Visto que V^x é aberto-fechado e crescente, tem-se que $X \setminus V^x$ é aberto-fechado decrescente. Logo, F é interseção de abertos-fechados decrescentes. A segunda parte da demonstração deste item é feita de forma similar.

(5) : A prova deste item é um corolário da demonstração, feita no item (1), de que um espaço Priestley é zero-dimensional. Com as notações do item (1), qualquer família contendo $\{A_x\}_{x \in X}$ será uma base para τ. Além disso, A_x é interseção finita de abertos-fechados crescentes com abertos-fechados decrescentes, por construção. Isto quer dizer que a coleção composta por estes abertos-fechados crescentes e decrescentes, e pelo conjunto vazio – ou qualquer família de subconjuntos abertos de (X, τ) que os contenha – formam uma sub-base para τ.

(6) : Por definição, tem-se que (X, τ) é compacto. Sejam $F, G \subseteq X$ fechados. Suponha que $\uparrow F \cap \downarrow G = \emptyset$. Seja $x \in \uparrow F$ fixado, então $x \notin \downarrow G$, i.e., $\forall y \in G$ $(x \not\leq y)$. Assim, por **ASP**, existe A_y^x aberto-fechado crescente tal que $x \in A_y^x$ e $y \notin A_y^x$, para todo

$y \in G$. Logo, $\forall y \in G$ $(y \notin \bigcap_{y \in G} A^x_y)$. Portanto, $G \subseteq X \setminus \bigcap_{y \in G} A^x_y = \bigcup_{y \in G} X \setminus A^x_y$. Como G é compacto, existe $J^x \subseteq_f G$ tal que $G \subseteq \bigcup_{j \in J^x} X \setminus A^x_j = X \setminus \bigcap_{j \in J^x} A^x_j$. Fazendo $A^x := \bigcap_{j \in J^x} A^x_j$ temos que $G \subseteq X \setminus A^x$, que por construção, é aberto-fechado decrescente. Além disso, $x \in A^x$. Ora, isso pode ser feito para todo $x \in F$. Logo, como F é compacto, existe $F' \subseteq_f F$ tal que $F \subseteq \bigcup_{x \in F'} A^x := A$. Veja que A é aberto-fechado crescente. Também por construção, tem-se que $G \subseteq \bigcap_{x \in F} X \setminus A^x \subseteq \bigcap_{x \in F'} X \setminus A^x = X \setminus \bigcup_{x \in F'} A^x = X \setminus A$. Portanto, $F \subseteq A$ e $G \subseteq X \setminus A$, com A aberto-fechado crescente.

A condição (6) do lema anterior é conhecida como o *axioma de separação forte de Priestley* (abreviado por **ASFP**).

A partir do que foi visto, pode-se definir a categoria dos espaços Priestley e funções contínuas preservando ordem. Tal categoria será denotada por **Pries**. A verificação das propriedades descritas em 1.4.1 é simples, sendo deixada para o leitor. Note que, por 1.2.8 e por 1.1.20, a composição de funções contínuas preservando as respectivas ordens é uma função contínua preservando ordem.

Definição 2.2.4. *Seja (X, τ) espaço topológico. Define-se a* ***ordem da especialização*** *de (X, τ), denotada por $\leq$, da seguinte maneira:*

$$x \leq y \Leftrightarrow x \in \overline{\{y\}} \Leftrightarrow (\forall U \in \tau)(x \in U \textit{ implica } y \in U).$$

Fato 2.2.5. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $\leq$ sua ordem da especialização. Então todo aberto U em τ é da forma $\uparrow U$.*

Prova:

Seja $U \in \tau$. Sabemos que $U \subseteq \uparrow U$ vale sempre. Vejamos a outra inclusão:
Seja $x \in \uparrow U$. Então existe $y \in U$ tal que $y \leq x$. Assim todo aberto contendo y, também contém x. Em particular o aberto U. Logo, $\uparrow U \subseteq U$. Portanto, $U = \uparrow U$.

Por 1.2.5, para $F \subseteq X$ fechado, vale também que $F = \downarrow F$. Em particular, se $(X, \leq)$ for ordem parcial, tem-se que todo aberto em τ é $\leq$ −crescente – com isso, conclui-se que todo fechado é $\leq$−decrescente.

Lema 2.2.6. *Sejam (X, τ) espaço topológico e $\leq$ a ordem da especialização de (X, τ). Então $\leq$ é reflexiva e transitiva, e $\leq$ é antisimétrica se, e somente se, (X, τ) é T_0.*

Demonstração:

A verificação de que $\leq$ é reflexiva e transitiva é simples e será deixada para o leitor. Vejamos a segunda parte do lema:
Suponha que X é T_0. Sejam $x, y \in X$ tais que $x \leq y$ e $y \leq x$. Logo,

$$\forall U \in \tau(x \in U \rightarrow y \in U) \text{ e } \forall V \in \tau(y \in V \rightarrow x \in V). \qquad (\star)$$

Em outras palavras, temos que $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$ e $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}$, pois se $a \in \overline{\{x\}}$ então todo aberto contendo a intersecta $\{x\}$, i.e., todo aberto U tal que $a \in U$ contém x. Por $(\star)$, U contém também y, ou seja, todo aberto contendo a intersecta $\{y\}$. Assim $a \in \overline{\{y\}}$ e, portanto, $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$. A outra inclusão é análoga. Logo, $x = y$, por 1.1.25 e, então, $\leq$ é antisimétrica.

Agora, suponha que $\leq$ é antisimétrica. Sejam $x, y \in X$ distintos. Suponha que X não é T_0. Então, todo aberto U tal que $x \in U$ contém y e todo aberto V tal que $y \in V$ contém x. Pela definição de $\leq$, temos que $x \leq y$ e $y \leq x$, respectivamente. Logo, por antisimetria, $x = y$, contradizendo a hipótese de x, y serem distintos. Dessa forma, tem-se que X é T_0.

Portanto, por 2.2.5, se (X, τ) for T_0, tem-se que todo aberto de X é crescente na ordem da especialização de (X, τ).

O próximo resultado nos mostra, em particular, que os espaços pairwise Stone carregam consigo uma simetria com relação à ordem da especialização (consequentemente, com relação aos abertos das respectivas topologias).

Lema 2.2.7. *Seja (X, τ_1, τ_2) um espaço bitopológico, $\leq_1$ a ordem da especialização de (X, τ_1), e $\leq_2$ a ordem da especialização de (X, τ_2). Se (X, τ_1, τ_2) é pairwise zero-dimensional, então $\leq_1 = \geq_2$, onde $\geq_2 := {\leq_2}^{op}$.*

Demonstração:

Seja (X, τ_1, τ_2) pairwise zero-dimensional, isto é: $\beta_1 = \tau_1 \cap \delta_2$ é uma base para τ_1 e $\beta_2 = \tau_2 \cap \delta_1$ é uma base para τ_2. Então, lembrando que $\beta_2 = \{U^c : U \in \beta_1\}$, para cada $x, y \in X$, temos:

$$\begin{aligned}
x \leq_1 y &\Leftrightarrow (\forall U \in \tau_1)(x \in U \rightarrow y \in U) \\
&\Leftrightarrow (\forall U \in \beta_1)(x \in U \rightarrow y \in U) \\
&\Leftrightarrow (\forall U \in \beta_1)(y \in U^c \rightarrow x \in U^c) \\
&\Leftrightarrow (\forall V \in \beta_2)(y \in V \rightarrow x \in V) \\
&\Leftrightarrow (\forall V \in \tau_2)(y \in V \rightarrow x \in V) \\
&\Leftrightarrow y \leq_2 x.
\end{aligned}$$

Para um espaço pairwise Stone, (X, τ_1, τ_2), sejam $\tau = \tau_1 \vee \tau_2$ e $\leq = \leq_1$ a ordem da especialização de (X, τ_1).

Proposição 2.2.8. *Se (X, τ_1, τ_2) é um espaço pairwise Stone, então $(X, \tau, \leq)$ é um espaço Priestley. Mais ainda:*

(i) $CpUp(X, \tau, \leq) = \beta_1$.

(ii) $OpUp(X, \tau, \leq) = \tau_1$.

(iii) $ClUp(X, \tau, \leq) = \delta_2$.

(iv) $CpDo(X, \tau, \leq) = \beta_2$.

(v) $OpDo(X, \tau, \leq) = \tau_2$.

(vi) $ClDo(X, \tau, \leq) = \delta_1$.

Demonstração:

Visto que (X, τ_1, τ_2) é pairwise compacto e que $\tau_1 \cup \tau_2$ é sub-base para τ, pelo lema de Alexander, (X, τ_1, τ_2) é join compacto, i.e., (X, τ) é compacto. Também, como (X, τ_1, τ_2) é pairwise Hausdorff, segue do lema 2.1.7 que (X, τ_1) é T_0. Portanto, $\leq = \leq_1$ é uma ordem parcial. Verifiquemos que $(X, \tau, \leq)$ satisfaz **ASP**. Se $x \not\leq y$, então $x \not\leq_1 y$ e existe $U \in \tau_1$ tal que $x \in U$ e $y \notin U$. Como β_1 é base para τ_1, tem-se que existe $B \in \beta_1$ tal que $x \in B \subseteq U$ e $y \notin B$. Visto que $B \in \beta_1$, tem-se $B^c \in \beta_2 \subseteq \tau$. Logo, ambos B e B^c são abertos em (X, τ), e portanto B é aberto-fechado em (X, τ). Além disso, como $\leq_1$ é a ordem da especialização de (X, τ_1), por 2.2.5, B é um $\leq_1 -$*crescente*. Assim, B é aberto-fechado crescente de $(X, \tau, \leq_1) := (X, \tau, \leq)$, implicando que $(X, \tau, \leq)$ satisfaz **ASP**. Portanto, $(X, \tau, \leq)$ é um espaço Priestley.

(i) Serão verificadas as duas inclusões. Tem-se que $\beta_1 \subseteq \tau_1 \subseteq \tau$. Logo, por 2.2.5, $\beta_1 \subseteq OpUp(X, \tau, \leq)$. Também, sabe-se que $\beta_2 = \{U^c | U \in \beta_1\}$ e que $\beta_2 \subseteq \tau_2 \subseteq \tau$. Portanto, se $U \in \beta_1$, tem-se que U e U^c são abertos em (X, τ), i.e., U é aberto-fechado. Sendo assim, $\beta_1 \subseteq (OpUp(X, \tau, \leq) \cap CpUp(X, \tau, \leq)) = CpUp(X, \tau, \leq)$. Seja agora $A \in CpUp(X, \tau, \leq)$.

Afirmação: $A = \bigcup\{U \in \beta_1 | U \subseteq A\}$.

Justificativa: É óbvio que $\bigcup\{U \in \beta_1 | U \subseteq A\} \subseteq A$. Seja $x \in A$. Como A é crescente, para cada $y \in X \setminus A$, tem-se $x \not\leq y$. Portanto, $x \not\leq_1 y$ e, como β_1 é uma base para τ_1, existe $U_y \in \beta_1$ tal que $x \in U_y$ e $y \notin U_y$. Logo, $A^c \cap (\bigcap\{U_y | y \in A^c\}) = \emptyset$. Sendo assim, $X \setminus (A^c \cap (\bigcap\{U_y | y \in A^c\})) = X$, i.e., $\{A\} \cup \{X \setminus U_y | y \in A^c\}$ é cobertura aberta de X. Visto que (X, τ) é compacto, existem $U_{y_1}, ..., U_{y_n} \in \beta_1$ com $(X \setminus A) \cap U_{y_1} \cap ... \cap U_{y_n} = \emptyset$. Ou seja, $U_{y_1} \cap ... \cap U_{y_n} \subseteq A$. Por construção, $x \in U_{y_1} \cap ... \cap U_{y_n} \subseteq A$. Como β_1 é fechado por interseções finitas, fazendo $U :=$

$U_{y_1} \cap ... \cap U_{y_n}$, tem-se que existe $U \in \beta_1$ tal que $x \in U \subseteq A$. Isto implica em $x \in \bigcup\{U \in \beta_1 | U \subseteq A\}$. Agora, sendo A um subconjunto fechado de um conjunto compacto, tem-se que A é compacto, por 1.1.29. Logo, A é uma união finita de elementos de β_1, e portanto $A \in \beta_1$. Dessa forma, $CpUp(X, \tau, \leq) \subseteq \beta_1$.

(ii) $[\mathbf{OpUp}(\mathbf{X}, \tau, \leq) \subseteq \tau_\mathbf{1}]$: Seja U aberto crescente. Então, por 2.2.3(3), U é uma união de abertos-fechados crescentes. Ou seja: de acordo com o item anterior, U é uma união de elementos de β_1, que por sua vez é base para τ_1. Logo, $U \in \tau_1$.
$[\tau_\mathbf{1} \subseteq \mathbf{OpUp}(\mathbf{X}, \tau, \leq)]$: Seja $U \in \tau_1 \subseteq \tau = \tau_1 \vee \tau_2$, i.e., $U \in \tau$. Por 2.2.5, U é $\leq -crescente$. Portanto, $U \in OpUp(X, \tau, \leq)$.

(iii) $[\mathbf{ClUp}(\mathbf{X}, \tau, \leq) \subseteq \delta_\mathbf{2}]$: Seja $F \in ClUp(X, \tau, \leq)$. Por 2.2.3(4), fechados crescentes são interseções de abertos-fechados crescentes de $(X, \tau, \leq)$. Pelo item (i), abertos-fechados crescentes são elementos de $\beta_1 = \{U^c | \ U \in \beta_2\}$. Logo, F é formado por interseções de complementos de elementos de β_2. Como $\beta_2 \subseteq \tau_2$, conclui-se que F é formado por interseções de complementos de elementos de τ_2. Visto que complementos de elementos de τ_2 são elementos de δ_2, temos que F é obtido por interseções de elementos de δ_2. Mas δ_2 é fechado por interseção qualquer. Portanto $F \in \delta_2$ e, então $ClUp(X, \tau, \leq) \subseteq \delta_2$.
$[\delta_2 \subseteq ClUp(X, \tau \leq)]$: Seja $U \in \delta_2$, então $U = V^c$, com $V \in \tau_2$. Logo, $V = \bigcup_{B \in \beta_2'} B$, para algum $\beta_2' \subseteq \beta_2$. Consequentemente, $U = \bigcap_{B \in \beta_2'} B^c$. Visto que $B \in \beta_2$, tem-se que $B \in \delta_1$. Logo $B^c \in \tau_1$ e, pelo fato 2.2.5, B^c é crescente. Portanto, U é crescente. Além disso, U é fechado em (X, τ), pois seu complementar pertence a $\tau_2 \subseteq \tau$. Portanto, $U \in ClUp(X, \tau, \leq)$ e então $\delta_2 \subseteq ClUp(X, \tau \leq)$.

(iv) $U \in CpDo(X, \tau, \leq) \overset{1.2.5}{\Longleftrightarrow} U^c \in CpUp(X, \tau, \leq) \overset{(i)}{=} \beta_1 \Longleftrightarrow (U^c)^c \in \beta_2 \Longleftrightarrow U \in \beta_2$. Isso prova as duas inclusões.

(v) $U \in OpDo(X, \tau, \leq) \Longleftrightarrow U^c \in ClUp(X, \tau, \leq) = \delta_2 \Longleftrightarrow U \in \tau_2$.

(vi) $F \in ClDo(X, \tau, \leq) \Longleftrightarrow F^c \in OpUp(X, \tau, \leq) = \tau_1 \Longleftrightarrow F \in \delta_1$.

Note que os itens (iv), (v) e (vi) da proposição acima poderiam ser demonstrados de forma análoga aos itens (i), (ii) e (iii), respectivamente.

Proposição 2.2.9. *Suponha que (X, τ_1, τ_2) e (X', τ_1', τ_2') são espaço pairwise Stone. Se $f : (X, \tau_1, \tau_2) \longrightarrow (X', \tau_1', \tau_2')$ é bi-contínua, então $f : (X, \tau, \leq) \longrightarrow (X', \tau', \leq')$ é contínua e preserva ordem.*

Demonstração:

Visto que f é bi-contínua, tem-se que a imagem inversa de qualquer elemento de $\tau_1' \cup \tau_2'$ é um elemento de $\tau_1 \cup \tau_2$. Por 1.1.22, para mostrar que $f : (X, \tau, \leq) \longrightarrow (X', \tau', \leq')$ é contínua, basta verificar que a imagem inversa de qualquer aberto básico de (X', τ') é um aberto de (X, τ). Como $\tau_1' \cup \tau_2'$ é sub-base para $\tau' = \tau_1' \vee \tau_2'$, os abertos básicos de X' são interseções finitas de elementos de $\tau_1' \cup \tau_2'$. Seja então B um aberto básico de X', então existem $A_1, ..., A_n \in (\tau_1' \cup \tau_2')$ tais que $B = \bigcap_{i=1}^n A_i$. Assim, $f^{-1}(B) = f^{-1}(\bigcap_{i=1}^n A_i) = \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(A_i)$. Visto que $f^{-1}(A_j) \in \tau_1 \cup \tau_2$, para todo $1 \leq j \leq n$ e $\tau_1 \cup \tau_2$ é sub-base para τ, tem-se que $\bigcap_{i=1}^n f^{-1}(A_i)$ é um aberto básico de X, i.e. $f^{-1}(B)$ é um aberto básico de X. Portanto, f é contínua. Falta verificar que $f : (X, \tau, \leq) \longrightarrow (X', \tau', \leq')$ preserva ordem. Com essa finalidade, sejam $x, y \in X$ tais que $x \leq y$, i.e., para todo $U \in \tau_1$ tal que $x \in U$, tem-se que $y \in U$. Seja $V \in \tau_1'$ contendo $f(x)$. Como f é bi-contínua, $f^{-1}(V) \in \tau_1$, ou seja, $f^{-1}(V)$ é aberto em X e contém x. Isso implica que $f^{-1}(V)$ contém y. Logo, $f(y) \in V$. Dessa forma, todo aberto em τ_1' contendo $f(x)$, contém $f(y)$, ou seja, $f(x) \leq' f(y)$. Portanto, $f : (X, \tau, \leq) \longrightarrow (X', \tau', \leq')$ preserva ordem.

Tendo em vista as categorias **Pries** e **PStone**, bem como os resultados vistos acima, pode-se definir o funtor Φ: **PStone**$\longrightarrow$ **Pries**, como a seguir. Para (X, τ_1, τ_2) e (X', τ_1', τ_2') espaços pairwise Stone, e $f : (X, \tau_1, \tau_2) \longrightarrow (X', \tau_1', \tau_2')$ função bi-contínua, com as notações de 2.2.8, define-se:

$$\begin{cases} \Phi : \textbf{PStone} \longrightarrow \textbf{Pries} \\ (X, \tau_1, \tau_2) \mapsto \Phi(X, \tau_1, \tau_2) = (X, \tau, \leq) \\ f \in [(X, \tau_1, \tau_2), (X', \tau_1', \tau_2')] \mapsto f \in [(X, \tau, \leq), (X', \tau', \leq')] \end{cases}$$

Através das proposições 2.2.9 e 2.2.8, conclui-se que $\mathbf{\Phi}$ está bem definido.

Doravante, para $(X, \tau, \leq)$ um espaço Priestley, τ_1 denotará o conjunto $OpUp(X, \tau, \leq)$, dos abertos crescentes de $(X, \tau, \leq)$, e τ_2 o conjunto $OpDo(X, \tau, \leq)$, dos abertos decrescentes, salvo menção em contrário.

Lema 2.2.10. *Com as notações acima, τ_1 e τ_2 são topologias sobre X.*

Demonstração:

Deve-se verificar $(i) - -(iii)$ da Definição 1.1.1. Tem-se que união qualquer de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto de (X, τ) e interseção finita de abertos é um aberto de (X, τ). Além disso, $\emptyset$ e X, são crescentes, decrescentes e abertos. Então, tendo em vista 1.2.6, $\tau_1 = OpUp(X, \tau, \leq)$ e $\tau_2 = OpDo(X, \tau, \leq)$ contêm $\emptyset$ e X, e são fechados por união qualquer e interseção finita, logo são topologias sobre X.

Foi visto em 2.2.8 um método para obter espaços Priestley à partir de espaços pairwise Stone e que as topologias τ_1 e τ_2 em questão são exatamente $OpUp(X, \tau, \leq)$ e $OpDo(X, \tau, \leq)$, respectivamente. Além disso, foi visto em 2.2.9 como obter morfismos de **Pries** à partir de morfismos de **PStone**. Isto nos possibilitou a construção do funtor Φ. Os resultados à seguir nos fornecem o processo inverso.

Proposição 2.2.11. *Se $(X, \tau, \leq)$ é um espaço Priestley, então (X, τ_1, τ_2) é um espaço pairwise Stone. Além disso:*

(i) $\beta_1 = CpUp(X, \tau, \leq)$*;*

(ii) $\beta_2 = CpDo(X, \tau, \leq)$*;*

(iii) $\leq = \leq_1 = \geq_2$.

Demonstração:

Pelo Lema 2.2.10, tem-se que (X, τ_1, τ_2) é um espaço bitopológico. Visto que (X, τ) é compacto e $\tau_1 \cup \tau_2 \subseteq \tau$, segue que (X, τ_1, τ_2) é pairwise compacto. Para mostrar que (X, τ_1, τ_2) é pairwise Hausdorff, sejam x, y pontos distintos de X. Como $\leq$ é ordem parcial, tem-se que $x \nleq y$ ou $y \nleq x$. Em cada caso, por **ASP**, um dos pontos possui uma vizinhança aberta-fechada crescente U que não contém o outro ponto. Por 1.2.5, U^c é um aberto-fechado decrescente. Portanto, $U \in \tau_1$ e $U^c \in \tau_2$ separam x e y. Agora, lembrando que abertos crescentes são uniões de abertos-fechados crescentes, e abertos decrescentes são uniões de abertos-fechados decrescentes (conforme lema 2.2.3), conclui-se que $CpUp(X, \tau, \leq)$ e $CpDo(X, \tau, \leq)$ formam bases para τ_1 e τ_2, respectivamente. Então, assumindo (i),(ii), tem-se que (X, τ_1, τ_2) é pairwise zero-dimensional. Consequentemente, (X, τ_1, τ_2) é um espaço pairwise Stone.

(i) Para $U \subseteq X$, tem-se:

$$\begin{aligned} A \in \beta_1 &\Leftrightarrow A \in \tau_1 \text{ e } A^c \in \tau_2 \\ &\Leftrightarrow A \in OpUp(X, \tau, \leq) \text{ e } A^c \in OpDo(X, \tau, \leq) \\ &\Leftrightarrow A \in CpUp(X, \tau, \leq). \end{aligned}$$

Portanto, $\beta_1 = CpUp(X, \tau, \leq)$.

(ii) A demonstração deste item é análoga à de (i).

(iii) Sejam $x, y \in X$, por **ASP**, tem-se:

$$x \nleq y \Leftrightarrow \exists U \in CpUp(X, \tau, \leq) \text{ tal que } x \in U \text{ e } y \notin U.$$

Note que, acima, a recíproca de **ASP** é imediata da definição de subconjuntos crescentes. Então, por contraposição, tem-se:

$$\begin{aligned} x \leq y &\Leftrightarrow \forall U \in CpUp(X, \tau, \leq),\ x \notin U \text{ ou } y \in U \\ &\Leftrightarrow \forall U \in CpUp(X, \tau, \leq)(x \in U \to y \in U). \end{aligned}$$

Como $CpUp(X, \tau, \leq)$ é uma base para τ_1, por 1.1.7 conclui-se que

$$x \leq y \Leftrightarrow (\forall U \in OpUp(X, \tau, \leq))(x \in U \to y \in U) \Leftrightarrow x \leq_1 y,$$

Portanto, $\leq = \leq_1$. Pelo lema 2.2.7, tem-se que $\leq = \geq_2$.

Proposição 2.2.12. *Se $f : (X, \tau, \leq) \to (X', \tau', \leq')$ é contínua e preserva ordem, então $f : (X, \tau_1, \tau_2) \to (X', \tau_1', \tau_2')$ é bi-contínua.*

Demonstração:

Se f é contínua e preserva ordem, por 1.2.9 e pela continuidade da f, $U \in OpUp(X', \tau', \leq')$ implica em $f^{-1}(U) \in OpUp(X, \tau, \leq)$, e $V \in OpDo(X', \tau', \leq')$ implica em $f^{-1}(V) \in OpDo(X, \tau, \leq)$. Então, pela definição das topologias τ_i e τ_i', com $i \in \{1, 2\}$, conclui-se que $f : (X, \tau_1, \tau_2) \to (X', \tau_1', \tau_2')$ é bi-contínua.

De posse da construção feita acima, define-se o funtor Ψ : **Pries**$\longrightarrow$**PStone**, da seguinte maneira:

Para $(X, \tau, \leq)$ um espaço Priestley e $f : (X, \tau, \leq) \longrightarrow (X', \tau', \leq')$ função contínua e preservando ordem, com as notações de 2.2.11, define-se:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Psi} : \textbf{Pries} \longrightarrow \textbf{PStone} \\ (X, \tau, \leq) \mapsto \Psi(X, \tau, \leq) = (X, \tau_1, \tau_2) \\ f \in [(X, \tau, \leq), (X', \tau', \leq')] \mapsto f \in [(X, \tau_1, \tau_2), (X', \tau_1', \tau_2')] \end{cases}$$

Conclui-se de 2.2.11 e 2.2.12 que Ψ está bem definido.

Dado um espaço Priestley $(X, \tau, \leq)$, aplicando o método visto em 2.2.11, obtém-se um espaço pairwise Stone (X, τ_1, τ_2). Aplicando o método descrito em 2.2.8 para este espaço pairwise Stone, obtem-se o espaço Priestley $(X, \tau_1 \vee \tau_2, \leq_1)$. Uma questão natural é saber se $(X, \tau_1 \vee \tau_2, \leq_1)$ coincide com $(X, \tau, \leq)$, i.e., se ao fim do processo voltamos a ter o espaço Priestley original. De forma análoga, dado um espaço pairwise Stone (X, τ_1, τ_2) e aplicando os métodos em 2.2.8 e 2.2.11, respectivamente, o espaço pairwise Stone obtido ao fim do processo coincide com o original? O teorema seguinte, dentre outras coisas, responde estas questões.

Teorema 2.2.13. *Os funtores Φ e Ψ estabelecem um isomorfismo entre as categorias **PStone** e **Pries**.*

Demonstração:

Conforme 1.4.10, é preciso mostrar que $\Phi \circ \Psi = Id_{\mathbf{Pries}}$ e que $\Psi \circ \Phi = Id_{\mathbf{PStone}}$. Com as notações de 2.2.8, para cada espaço pairwise Stone (X, τ_1, τ_2), i.e., para cada objeto de **PStone**, tem-se:

$$\begin{aligned}\Psi \circ \Phi(X, \tau_1, \tau_2) &= \Psi(\Phi(X, \tau_1, \tau_2)) = \Psi(X, \tau, \leq) \\ &= (X, OpUp(X, \tau, \leq), OpDo(X, \tau, \leq)) \stackrel{2.2.8}{=} (X, \tau_1, \tau_2).\end{aligned}$$

Com as notações de 2.2.9, para $f \in [(X, \tau_1, \tau_2), (X', \tau_1', \tau_2')]$, tem-se que $\Psi \circ \Phi(f) = \Psi(\Phi(f)) = \Psi(f)$, com $f \in [(X, \tau, \leq), (X', \tau', \leq')]$. Pela definição de Ψ, tem-se $\Psi(f) = f$, com $f \in [(X, OpUp(X, \tau, \leq), OpDo(X, \tau, \leq)), (X', OpUp(X', \tau', \leq'), OpDo(X', \tau', \leq'))] \stackrel{2.2.8}{=} [(X, \tau_1, \tau_2), (X', \tau_1', \tau_2')]$, i.e., $\Psi \circ \Phi(f) = f$, para $f \in [(X, \tau_1, \tau_2), (X', \tau_1', \tau_2')]$.

De modo similar, com as notações de 2.2.11, para cada espaço Priestley $(X, \tau, \leq)$, tem-se:

$$\Phi(\Psi(X, \tau, \leq)) = \Phi(X, \tau_1, \tau_2) = (X, \tau_1 \vee \tau_2, \leq_1) \stackrel{2.2.11}{=} (X, \tau_1 \vee \tau_2, \leq)$$

Por 2.2.11, τ_1 é gerada por $CpUp(X, \tau, \leq)$ e τ_2 é gerada por $CpDo(X, \tau, \leq)$. Por 2.1.1, $\tau_1 \cup \tau_2$ é sub-base para $\tau_1 \vee \tau_2$. Por 2.2.3(5), $CpUp(X, \tau, \leq) \cup CpDo(x, \tau, \leq)$ formam uma sub-base para τ. Portanto, como $CpUp(X, \tau, \leq) \cup CpDo(X, \tau, \leq) \subseteq \tau_1 \cup \tau_2$, conclui-se que $\tau_1 \vee \tau_2$ coincide com τ. Sendo assim,

$$\Phi(\Psi(X, \tau, \leq)) = (X, \tau_1 \vee \tau_2, \leq) = (X, \tau, \leq).$$

De modo análogo ao que foi feito anteriormente, mostra-se que $\Phi(\Psi(f)) = f$, para $f \in [(X, \tau, \leq), (X', \tau', \leq')]$.

Dessa forma, $\Phi \circ \Psi$ associa todo objeto e morfismo de **Pries** a si mesmos, bem como $\Psi \circ \Phi$ associa todo objeto e morfismo de **PStone** a si mesmos.

2.3 Espaços pairwise Stone e espaços espectrais

Espaços espectrais são, entre outras coisas, espaços topológicos compactos, T_0 e com base de abertos compactos. Tais espaços são duais aos reticulados distributivos e limitados. Apesar dos espaços espectrais não serem Hausdorff, eles possuem propriedades topológicas boas, como por exemplo, eles são espaços de Baire. Relembre que um espaço topológico X é dito *Baire* se U_n, $n \geq 1$, é uma sequência de abertos densos em X, então $\bigcap\limits_{n \geq 1} U_n$ é um denso em X. Um exemplo de espaço espectral na Geometria Álgebrica é o espectro de Zariski de qualquer anel comutativo com unidade, obtido da seguinte maneira: dado um anel comutativo com unidade, R, define-se $Spec(R) := \{P |\ P$ é um ideal primo próprio em $R\}$, o qual é um espaço espectral, considerando a topologia gerada pela base $\{Z_r\}_{r\in R}$, em que $Z_r := \{P \in Spec(R)|\ r \notin P\}$. De modo análogo, o espaço dos filtros primos de qualquer reticulado distributivo e limitado também é um espaço espectral. (Para mais detalhes destas construções, veja [M02] e [S09]). Nesta seção, está feita a construção do já mencionado isomorfismo entre **PStone** e **Spec**.

Para um espaço topológico (X,τ), $\mathcal{E}(X,\tau)$ denotará o conjunto dos subconjuntos abertos compactos de (X,τ).

Definição 2.3.1. *Um espaço topológico (X,τ) é dito* ***coerente*** *se, e somente se, $\mathcal{E}(X,\tau)$ é fechado por interseções finitas e forma uma base para a topologia.*

Definição 2.3.2. *Seja (X,τ) espaço topológico.*

(*i*) *Um subconjunto A de X é* ***irredutível*** *se, e somente se, $A \neq \emptyset$ e $A = F \cup G$, com F e G fechados, implica em $A = F$ ou $A = G$.*

(*ii*) *(X,τ) é dito* ***sóbrio*** *se, e somente se, todo subconjunto fechado irredutível de (X,τ) é o fecho de um ponto de X.*

Definição 2.3.3. *Um espaço topológico (X,τ) é dito* ***espectral*** *se (X,τ) é compacto, T_0, coerente e sóbrio.*

Definição 2.3.4. *Sejam (X,τ) e (X',τ') espaços espectrais. Uma função $f:(X,\tau)\longrightarrow(X',\tau')$ é* ***espectral*** *se, e somente se, $U \in \mathcal{E}(X',\tau')$ implica $f^{-1}(U) \in \mathcal{E}(X,\tau)$.*

Observe que *toda função espectral é contínua*, pois a imagem inversa de todo aberto básico é um conjunto aberto.

Lema 2.3.5. *A composição de funções espectrais é uma função espectral.*

Demonstração: Sejam $f : (X,\tau) \longrightarrow (X',\tau')$ e $g : (X',\tau') \longrightarrow (X'',\tau'')$ funções espectrais. Considere $h := g \circ f : (X,\tau) \longrightarrow (X'',\tau'')$. Seja $U \in \mathcal{E}(X'',\tau'')$. Então, $h^{-1}(U) = (g\circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$. Como f, g são espectrais, tem-se que $g^{-1}(U) \in \mathcal{E}(X',\tau')$ e, então, $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{E}(X,\tau)$. Ou seja, $h^{-1}(U) \in \mathcal{E}(X,\tau)$. Logo, h é espectral.

De posse das informações acima, pode-se definir a categoria dos espaços espectrais e funções espectrais, a qual será denotada por **Spec**. Cornish demonstrou em [C75] que **Spec** é isomorfa à **Pries**. Portanto, pelo teorema 2.2.13, **Spec** é isomorfa à **PStone**. Contudo, será feita uma demonstração direta deste resultado visto que, por um lado, será destacada a necessidade da propriedade de ser sóbrio na definição de espaço espectral e, por outro lado, providencia uma prova mais natural do isomorfismo de Cornish, através dos isomorfismos intermediários de **Pries** e **PStone** – o qual já foi estabelecido – e de **PStone** e **Spec**.

Proposição 2.3.6. *Se (X,τ_1,τ_2) é um espaço pairwise Stone, então para cada $i \in \{1,2\}$ (X,τ_i) é um espaço espectral. Além disso, $\mathcal{E}(X,\tau_i) = \beta_i$.*

Demonstração:

Será verificado apenas o caso (X,τ_1), sendo o caso (X,τ_2) análogo. Visto que (X,τ_1,τ_2) é pairwise compacto, é imediato que (X,τ_1) é compacto. Como (X,τ_1,τ_2) é pairwise zero-dimensional e pairwise Hausdorff, tem-se pelo lema 2.1.7 que (X,τ_1) é T_0. Vejamos que $\beta_1 = \mathcal{E}(X,\tau_1)$. Pela proposição 2.1.11, $\beta_1 = \tau_1 \cap \delta_2 \subseteq \tau_1 \cap \sigma_1 = \mathcal{E}(X,\tau_1)$. Reciprocamente, suponha $U \in \mathcal{E}(X,\tau_1)$. Como β_1 é base para τ_1, temos que U é uma união de elementos de β_1. Visto que U é compacto, tem-se que U é uma união finita de elementos de β_1 e, portanto, pertence a β_1, pois β_1 é fechado por uniões finitas. Logo, $\mathcal{E}(X,\tau_1) \subseteq \beta_1$. Dessa forma, $\mathcal{E}(X,\tau_1) = \beta_1$. Consequentemente, tem-se que $\mathcal{E}(X,\tau_1)$ é fechado por interseções finitas e forma uma base para a topologia em questão. Assim, (X,τ_1) é coerente. Para mostrar que (X,τ_1) é sóbrio, seja F um fechado irredutível de (X,τ_1). Será mostrado que F é igual ao fecho em (X,τ_1) de um ponto de F. Suponha que não, i.e., para todo $x \in F$, existe $y \in F$ tal que $y \notin \overline{\{x\}}$. Portanto, existe um aberto $U_y \in \beta_1$ tal que $y \in U_y$ e $x \notin U_y$. Seja $U_x = U_y^c$. Então, $x \in U_x \in \beta_2$, $y \notin U_x$ e F é coberto pela família $\{U_x | x \in F\}$. Visto que $F \in \delta_1 \subseteq \sigma_2$, existem $x_1, ..., x_n \in F$ tais que $F \subseteq U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_n}$. Isso implica em $F = F \cap (U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_n}) = (F \cap U_{x_1}) \cup ... \cup (F \cap U_{x_n})$. Visto que, para cada i, $U_{x_i} \in \beta_2 \subseteq \delta_1$, tem-se $(F \cap U_{x_i}) \in \delta_1$. Como F é irredutível em (X,τ_1), existe k tal que $F = F \cap U_{x_k}$, i.e., $F \subseteq U_{x_k}$. Por outro lado, o y_k correspondente à x_k pertence à F e não pertence à U_{x_k}, o que gera uma contradição. Portanto, existe $x \in F$ tal que $F = \overline{\{x\}}$ em (X,τ_1). Dessa forma, (X,τ_1) é sóbrio. Logo, (X,τ_1) é um espaço espectral.

Proposição 2.3.7. *Sejam (X,τ_1,τ_2) e (X',τ_1',τ_2') dois espaços pairwise Stone. Se $f : (X,\tau_1,\tau_2) \longrightarrow (X',\tau_1',\tau_2')$ é bi-contínua, então $f : (X,\tau_i) \longrightarrow (X',\tau_i')$ é espectral, para cada $i \in \{1,2\}$.*

Prova:

Visto que f é bi-contínua, pela proposição 2.3.6, tem-se:

$$\begin{aligned} U \in \mathcal{E}(X',\tau_1') &\Rightarrow U \in \beta_1' \\ &\Rightarrow U \in \tau_1' \cap \delta_2' \\ &\Rightarrow f^{-1}(U) \in \tau_1 \cap \delta_2 \\ &\Rightarrow f^{-1}(U) \in \beta_1 \\ &\Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{E}(X,\tau_1). \end{aligned}$$

Portanto, f é espectral.

Define-se, então, o funtor **F**:**PStone**$\longrightarrow$**Spec** da maneira seguinte.

Para espaços pairwise Stone (X, τ_1, τ_2), (X', τ_1', τ_2') e para $f : (X, \tau_1, \tau_2) \longrightarrow (X', \tau_1', \tau_2')$ bi-contínua:

$$\begin{cases} F : \textbf{PStone} \longrightarrow \textbf{Spec} \\ (X, \tau_1, \tau_2) \mapsto F(X, \tau_1, \tau_2) = (X, \tau_1) \\ f \in [(X, \tau_1, \tau_2), (X', \tau_1', \tau_2')] \mapsto F(f) = f \in [(X, \tau_1), (X', \tau_1')] \end{cases}$$

Infere-se das proposições 2.3.6 e 2.3.7 que F está bem definido. Note que F é um funtor esquecimento, esquecendo a topologia τ_2.

Para (X, τ) um espaço espectral, seja $\tau_1 = \tau$ e τ_2 a topologia gerada pela base $\Delta(X, \tau) = \{U^c | U \in \mathcal{E}(X, \tau)\}$.

Observação 2.3.8. *$\Delta(X, \tau)$ de fato gera uma topologia sobre X. Para mostrar isso, tem-se que verificar* (1) *e* (2) *de 1.1.9.*

(1) *$\mathcal{E}(X, \tau)$ é fechado por uniões finitas, pois união finita de subconjuntos compactos de um espaço topológico qualquer é um subconjunto compacto deste espaço. Passando ao complementar tem-se que $\Delta(X, \tau)$ é fechado por interseções finitas.*

(2) *A condição* (2) *de 1.1.9 é claramente satisfeita, visto que $\emptyset, X \in \mathcal{E}(X, \tau)$, consequentemente $X, \emptyset \in \Delta(X, \tau)$.*

A demonstração do próximo resultado destaca a importância da propriedade de ser *sóbrio* na definição dos espaços espectrais, para se obter espaços pairwise Stone a partir dos espectrais. Em linhas gerais, para mostrar que o espaço bitopológico obtido a partir de (X, τ) é pairwise compacto, será utilizada a caracterização de compacto descrita em 1.1.33 da seguinte maneira: dada uma família K de fechados em $\tau_1 \cup \tau_2$ com a *pif*, K será estendida, via Lema de Zorn, a uma família maximal M com a *pif*. A partir de M, será definido um fechado C. Este fechado será tal que $M \cup \{C\}$ possui a *pif* e, como consequência da maximalidade de M, $C \in M$. Com isso, mostra-se que C é irredutível e utiliza-se a *sobriedade* dos espaços espectrais, para concluir que C possui um ponto genérico x. Por fim, será provado que $x \in \bigcap K$, o que implicará em X ser pairwise compacto. Vejamos em detalhes:

Proposição 2.3.9. *Se (X, τ) é um espaço espectral, então (X, τ_1, τ_2) é um espaço pairwise Stone. Além disso:*

(*i*) $\beta_1 = \mathcal{E}(X, \tau)$;

(*ii*) $\beta_2 = \Delta(X, \tau)$.

Demonstração:

Primeiro, será demonstrado que (X, τ_1, τ_2) é pairwise compacto. Para isto, é suficiente mostrar que qualquer coleção K de fechados em $\tau_1 \cup \tau_2$ com a **pif** tem interseção não vazia. Pelas definições das topologias τ_1 e τ_2, tem-se:

$$\begin{aligned} F \text{ é fechado em } \tau_1 &\Leftrightarrow F^c \text{ é aberto em } \tau_1 \\ &\Leftrightarrow F^c = \textstyle\bigcup_{i \in I} V_i, \text{ com } V_i \in \mathcal{E}(X, \tau) \\ &\Leftrightarrow F = \textstyle\bigcap_{i \in I} V_i^c, \text{ com } V_i \in \mathcal{E}(X, \tau) \\ W \text{ é fechado em } \tau_2 &\Leftrightarrow W^c = \textstyle\bigcup_{i \in J} V_i^c, \text{ com } V_i \in \mathcal{E}(X, \tau) \\ &\Leftrightarrow W = \textstyle\bigcap_{i \in J} V_i, \text{ com } V_j \in \mathcal{E}(X, \tau). \end{aligned}$$

Portanto, qualquer fechado F em $\tau_1 \cup \tau_2$ é interseção de $V_i \in \mathcal{E}(X, \tau)$ ou é interseção de V_j^c, com $V_j \in \mathcal{E}(X, \tau)$. Logo, para mostrar que (X, τ_1, τ_2) é pairwise compacto, basta provar que se $K \subseteq \mathcal{E}(X, \tau) \cup \Delta(X, \tau)$ tiver a **pif** então $\bigcap K \neq \emptyset$. Seja $\delta := \{F |\ F^c \in \tau\}$ os fechados em (X, τ). Observe que $\Delta(X, \tau) \subseteq \delta$ e portanto $K \subseteq \mathcal{E}(X, \tau) \cup \delta$. Estender-se-á K a um subconjunto maximal M de $\mathcal{E}(X, \tau) \cup \delta$ com a **pif**. Para tal, seja $\mathcal{A} := \{L |\ K \subseteq L,\ L \subseteq \mathcal{E}(X, \tau) \cup \delta \text{ e } L \text{ tem a } \textbf{pif}\}$. $(\mathcal{A}, \subseteq)$ é ordem parcial e $\mathcal{A} \neq \emptyset$, pois $K \in \mathcal{A}$. Seja $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ uma cadeia. Vejamos que $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{A}$. É claro que $K \subseteq \bigcup \mathcal{C}$ e que $\bigcup \mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}(X, \tau) \cup \delta$. Falta verificar que $\bigcup \mathcal{C}$ possui a **pif**. Seja $\mathcal{L}' \subseteq \bigcup \mathcal{C}$ subfamília finita. Então, $\bigcap \mathcal{L}' = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} G_i$, com $G_i \in \bigcup \mathcal{C}$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Mas para cada $G_i \in \bigcup \mathcal{C}$, existe $L_i \in \mathcal{C}$ tal que $G_i \in L_i$. Como $\mathcal{C}$ é cadeia e $\mathcal{L}'$ é finito, existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $L_i \subseteq L_j$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Logo, $G_i \in L_j$ para todo i. Como L_j tem a **pif** e $\{G_1, ..., G_n\}$ é subfamília finita de L_j, tem-se que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} G_i = \bigcap \mathcal{L}' \neq \emptyset$. Dessa forma, $\bigcup \mathcal{C}$ possui a **pif** e, portanto, $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{A}$. Pelo lema de Zorn, $\mathcal{A}$ possui algum elemento maximal M. Seja agora $C := \bigcap \{F |\ F \in M \cap \delta\}$, i.e., C é a interseção de todos os conjuntos de M que são $\tau - fechados$. Note que $\{F |\ F \in M \cap \delta\}$ é não-vazio. De fato, como $X \in \mathcal{E}(X, \tau) \cap \delta$, $K \cup \{X\}$ é família pertencente a $\mathcal{A}$. Como M é maximal estendendo K, $X \in M$ e então $X \in M \cap \delta$. Além disso, como (X, τ) é compacto e M tem a **pif**, $C \neq \emptyset$. Claramente $C \in \delta$. Vejamos que $M \cup \{C\}$ tem a **pif**. Suponha que não, i.e., existe $\{A_1, ..., A_n\} \subseteq M$ tal que $A_1 \cap ... \cap A_n \cap C = \emptyset$. Sem perda de generalidade, suponha $A_1, ..., A_k \in \mathcal{E}(X, \tau)$ e $A_{k+1}, ..., A_n \in \delta$. Observe que $A_{k+1} \cap ... \cap A_n \cap C = C$. Visto que foi suposto $A_1 \cap ... \cap A_n \cap C = \emptyset$, conclui-se que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} A_i \cap C = \emptyset$. Como $\mathcal{E}(X, \tau)$ é fechado por interseções finitas, tem-se que $A := \bigcap_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{E}(X, \tau)$. Note que $A \in M$, pois $M \cup \{A\}$ tem a **pif**; logo $M = M \cup \{A\}$ pela maximalidade de M, já que $M \cup \{A\} \in \mathcal{A}$. Visto que $A \cap C = \emptyset$, tem-se $A \subseteq X \setminus C = \bigcup \{X \setminus F |\ F \in M \cap \delta\}$.

Assim, $\{X \setminus F|\ F \in M \cap \delta\}$ é cobertura aberta de A. Como A é compacto, tem-se que $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} X \setminus F_j$, para $F_j \in M \cap \delta$. Portanto, $A \subseteq X \setminus \bigcap_{j=1}^{m} F_j$, i.e., $\bigcap_{j=1}^{m} F_j \subseteq X \setminus A$. Visto que $A \in M$, é necessário que $\bigcap_{j=1}^{m} F_j \notin M$, pois $A \cap (\bigcap_{j=1}^{m} F_j) = \emptyset$ e M possui a **pif**. Por outro lado, $F_1, ..., F_m \in M \cap \delta$ e então $\{F_1, ..., F_m\} \subseteq \{F|F \in M \cap \delta\}$. Isso implica em $C \subseteq \bigcap_{j=1}^{m} F_j$. Como $C \neq \emptyset$, tem-se que $\bigcap_{j=1}^{m} F_j \neq \emptyset$. Portanto, $\bigcap_{j=1}^{m} F_j \in M$, pois $M \cup \{\bigcap_{j=1}^{m} F_j\}$ tem a **pif**; logo $M = M \cup \{\bigcap_{j=1}^{m} F_j\}$ pela maximalidade de M, já que $M \cup \{\bigcap_{j=1}^{m} F_j\} \in \mathcal{A}$. Isso gera uma contradição. Assim, $M \cup \{C\}$ tem a **pif** e, então, $C \in M$.

Fato: C é irredutível.

Prova: Suponha que não, i.e., $C = A \cup B$ com $A, B \in \delta \setminus \{\emptyset\}$. Se $M \cup \{A\}$ e $M \cup \{B\}$ não tem a **pif**, então existem $A_1, ..., A_n \in M$, com $A_1 \cap ... \cap A_n \cap A = \emptyset$, e existem $B_1, ..., B_m \in M$, com $B_1 \cap ... \cap B_m \cap B = \emptyset$. Logo, $A_1 \cap ... \cap A_n \cap B_1 \cap ... \cap B_m \cap C = (A_1 \cap ... \cap A_n \cap B_1 \cap ... \cap B_m \cap A) \cup (A_1 \cap ... \cap A_n \cap B_1 \cap ... \cap B_m \cap B) = \emptyset$. Contradição. Assim, $M \cup \{A\}$ ou $M \cup \{B\}$ tem a **pif**. Como M é maximal com a **pif**, tem-se que $A \in M$ ou $B \in M$. Portanto, pela definição de C, $C \subseteq A$ ou $C \subseteq B$, mostrando que C é irredutível.

Visto que (X, τ) é sóbrio, existe $x \in X$ tal que $C = \overline{\{x\}}$. Como $x \in C$, tem-se que $x \in F$ para todo $F \in M \cap \delta$. Como M possui a **pif** e $C \in M$, para $U \in M \cap \mathcal{E}(X, \tau)$ tem-se que $\emptyset \neq U \cap C = U \cap \overline{\{x\}}$. Mas $U \in M \cap \mathcal{E}(X, \tau)$ implica em U ser aberto e assim $x \in U$ (por 1.1.17). Como $x \in \bigcap\{F|F \in M \cap \delta\}$ e $x \in \bigcap\{U|U \in M \cap \mathcal{E}(X, \tau)\}$, tem-se que $x \in \bigcap\{G|G \in M \cap \delta$ ou $G \in M \cap \mathcal{E}(X, \tau)\} = \bigcap\{G|G \in M \cap (\delta \cup \mathcal{E}(X, \tau))\}$. Mas $M \subseteq \mathcal{E}(X, \tau) \cup \delta$ e, então, $x \in \bigcap\{G|\ G \in M\} = \bigcap M$. Sendo $K \subseteq M$, tem-se que $\bigcap M \subseteq \bigcap K$. Portanto, $x \in \bigcap K$, i.e., $\bigcap K \neq \emptyset$.

Agora, será demonstrado que $\beta_1 = \mathcal{E}(X, \tau)$ e $\beta_2 = \Delta(X, \tau)$. Isso implica em (X, τ_1, τ_2) ser pairwise zero-dimensional. Visto que $\tau_1 := \tau$, tem-se que $\mathcal{E}(X, \tau) \subseteq \tau_1$. Pela definição de τ_2, tem-se $\mathcal{E}(X, \tau) \subseteq \delta_2$. Portanto, $\mathcal{E}(X, \tau) \subseteq \beta_1$. Reciprocamente, como (X, τ_1, τ_2) é pairwise compacto, pela proposição 2.1.11, tem-se $\beta_1 = \tau_1 \cap \delta_2 \subseteq \tau_1 \cap \sigma_1 = \mathcal{E}(X, \tau)$. Assim, $\beta_1 = \mathcal{E}(X, \tau)$. Além disso,

$$U \in \Delta(X, \tau) \Longleftrightarrow U^c \in \mathcal{E}(X, \tau) = \beta_1 = \tau_1 \cap \delta_2 \Longleftrightarrow U \in \delta_1 \cap \tau_2 = \beta_2.$$

Portanto, $\beta_2 = \Delta(X, \tau)$.

Finalmente, tem-se por hipótese que (X, τ_1) é T_0. Logo, pelo lema 2.1.7, (X, τ_1, τ_2) é pairwise T_2 e portanto um espaço pairwise Stone, o que conclui a prova.

Proposição 2.3.10. *Sejam (X,τ) e (X',τ') espaços espectrais. Se $f:(X,\tau)\longrightarrow(X',\tau')$ é uma função espectral, então $f:(X,\tau_1,\tau_2)\longrightarrow(X',\tau_1',\tau_2')$ é bi-contínua.*

Demonstração:

Visto que f é espectral, $f:(X,\tau_1)\longrightarrow(X',\tau_1')$ é contínua. Além disso, para $U\in\beta_2'$ tem-se que $U^c\in\beta_1'=\mathcal{E}(X',\tau')$. Pode-se escrever $f^{-1}(U)=f^{-1}((U^c)^c)=f^{-1}(U^c)^c$. Como f é espectral, $f^{-1}(U^c)\in\beta_1=\mathcal{E}(X,\tau)$. Logo, $f^{-1}(U^c)^c\in\beta_2$. Consequentemente, $f:(X,\tau_2)\longrightarrow(X',\tau_2')$ é contínua. Assim, $f:(X,\tau_1,\tau_2)\longrightarrow(X',\tau_1',\tau_2')$ é bi-contínua.

Agora, pode-se definir o funtor **G** :**Spec**$\longrightarrow$**PStone** da maneira seguinte. Para (X,τ) e (X',τ') espaços espectrais, e para $f:(X,\tau)\longrightarrow(X',\tau')$ função espectral, define-se:

$$\begin{cases} G:\mathbf{Spec}\longrightarrow\mathbf{PStone} \\ (X,\tau)\mapsto G(X,\tau)=(X,\tau_1,\tau_2) \\ f\in[(X,\tau),(X',\tau')]\mapsto G(f)=f\in[(X,\tau_1,\tau_2),(X',\tau_1',\tau_2')] \end{cases}$$

De acordo com as proposições 2.3.9 e 2.3.10, G está bem definido.

Teorema 2.3.11. *Os funtores F e G estabelecem um isomorfismo entre as categorias* **PStone** *e* **Spec**.

Demonstração:

Já foi verificado que F e G estão bem definidos. Com as notações de 2.3.6, para cada espaço pairwise Stone (X,τ_1,τ_2), tem-se $G(F(X,\tau_1,\tau_2))=G(X,\tau_1)$ Por 2.3.6, $\beta_1=\mathcal{E}(X,\tau_1)$. Logo, $\Delta(X,\tau_1)=\beta_2$, i.e., τ_2 é gerada por $\Delta(X,\tau_1)$. Consequentemente, $G(X,\tau_1)=(X,\tau_1,\tau_2)$. Ou seja:

$$G(F(X,\tau_1,\tau_2))=(X,\tau_1,\tau_2)$$

Com as notações de 2.3.7, para $f\in[(X,\tau_1,\tau_2),(X',\tau_1',\tau_2')]$, tem-se que $G(F(f))=G(f)$, com $f\in[(X,\tau_1),(X',\tau_1')]$.

Pela definição de G e por 2.3.6, tem-se $G(f)=f$, com $f\in[(X,\tau_1,\tau_2),(X',\tau_1',\tau_2')]$, i.e., $G\circ F(f)=f$, para $f\in[(X,\tau_1,\tau_2),(X',\tau_1',\tau_2')]$.

Também, com as notações de 2.3.9, para cada espaço espectral (X,τ), tem-se:

$$F(G(X,\tau))=F(X,\tau_1,\tau_2)=F(X,\tau,\tau_2)=(X,\tau)$$

onde τ_2 é a topologia gerada pela base $\Delta(X,\tau)$. De modo análogo ao que foi feito anteriormente, mostra-se que $F(G(f))=f$, para $f\in[(X,\tau),(X',\tau')]$.

Dessa forma, $F\circ G$ associa todo objeto e morfismo de **Spec** a si mesmos, bem como $G\circ F$ associa todo objeto e morfismo de **PStone** a si mesmos, sendo portanto funtores identidade.

Observação 2.3.12. *Conclui-se então, dos teoremas 2.2.13 e 2.3.11, que as categorias* **Pries**, **PStone** *e* **Spec** *são isomorfas.*

A aplicação a seguir é devida a Hugo Luiz Mariano.

Sabemos que qualquer espaço espectral pode ser "booleanizado" da seguinte maneira: seja (X, τ) um espaço espectral e sejam $U, V \in \mathcal{E}(X, \tau)$ abertos compactos, então podemos munir o espaço X com uma certa base para uma topologia sobre X, dada por

$$\mathcal{B} := \{U \cap (X \setminus V)|\ U, V \in \mathcal{E}(X, \tau)\}.$$

Com isso, pode-se mostrar que X_τ^{con}, o espaço X com esta nova topologia, é um espaço Stone (veja [M02]). Note que se $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ for uma função espectral, então $f^{con} : X_\tau^{con} \to Y_{\tau'}^{con}$, definida por $f^{con}(x) := f(x)$, para $x \in X$, será uma função contínua. Podemos então definir o funtor *Boole* da seguinte maneira:

$$\begin{cases} Boole : \mathbf{Spec} \longrightarrow \mathbf{Stone} \\ (X, \tau) \mapsto X_\tau^{con} \\ f \in [(X, \tau), (Y, \tau')] \mapsto f^{con} \in [(X_\tau^{con}, Y_{\tau'}^{con}] \end{cases}$$

Assim, tendo em vista os resultados demonstrados, obtém-se os seguintes diagramas de funtores entre categorias:

$$\begin{tikzcd} \text{Stone} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"'] & \text{Spec} \arrow[dl, "G"] \\ \text{PStone} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \text{Stone} \arrow[d, "\partial"'] & \text{Spec} \arrow[l, "\text{Boole}"'] \\ \text{PStone} \arrow[ur, "\text{F}"'] & \end{tikzcd}$$

Como consequência, podemos obter o funtor *Boole* como adjunto à direita do funtor inclusão $i : \mathbf{Stone} \longrightarrow \mathbf{Spec}$. Observe que $\partial = G \circ i$. Portanto, o funtor diagonal tem adjunto à direita $Boole \circ F$. (Para mais detalhes sobre adjunção de funtores, veja [M98] e [G84]).

2.4 Reticulados distributivos e espaços pairwise Stone

Visto que **PStone** é isomorfa à **Spec** e esta última é dualmente equivalente à **DLat**, conclui-se que **PStone** é também dualmente equivalente à **DLat**. Faremos uma prova explícita deste resultado, a qual nos permitirá concluir que, das equivalências duais entre a categoria **Dlat** e as categorias**Spec**, **Pries** e **PStone**, a equivalência dual entre

DLat e **PStone** é a mais simples de estabelecer. De fato, como será demonstrado abaixo, a prova da pairwise compacidade do espaço bitopológico dual de um reticulado distributivo e limitado L não requer o uso do lema de Alexander, sendo portanto mais simples do que o caso Priestley. Além disso, a prova complicada da sobriedade do espaço espectral dual de L é completamente evitada no setor bitopológico.

Seja L um reticulado distributivo e limitado, e $X = pf(L)$ o conjunto dos filtros primos de L. Define-se $\phi_+, \phi_- : L \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ por:

$$\phi_+(a) = \{x \in X |\ a \in x\} \ \text{ e } \ \phi_-(a) = \{x \in X |\ a \notin x\}$$

Lema 2.4.1. *Sejam $\phi_+, \phi_- : L \longrightarrow \mathcal{P}(X)$. Então, $\phi_+(a) = \phi_-(a)^c$ e valem as seguintes propriedades:*

$$\begin{array}{ll} 1_+ : \phi_+(\bot) = \emptyset, & 1_- : \phi_-(\bot) = X \\ 2_+ : \phi_+(\top) = X, & 2_- : \phi_-(\top) = \emptyset \\ 3_+ : \phi_+(a \wedge b) = \phi_+(a) \cap \phi_+(b), & 3_- : \phi_-(a \wedge b) = \phi_-(a) \cup \phi_-(b) \\ 4_+ : \phi_+(a \vee b) = \phi_+(a) \cup \phi_+(b), & 4_- : \phi_-(a \vee b) = \phi_-(a) \cap \phi_-(b) \end{array}$$

Prova:

É fácil verificar que $\phi_+(a) = \phi_-(a)^c$.

1_+ : $\phi_+(\bot) = \{x \in X | \bot \in x\} = \emptyset$, pois um filtro primo por definição é próprio e $\bot \in x$ implica necessariamente em $x = L$, i.e., $x \notin X$.

2_+ : $\phi_+(\top) = \{x \in X | \top \in x\} = X$, pois todo filtro de um reticulado limitado contém $\top$.

3_+ : $\phi_+(a \wedge b) = \{x \in X | a \wedge b \in x\}$.
Seja $x \in \phi_+$. Tem-se que $a \wedge b \leq a$ e $a \wedge b \leq b$. Como $a \wedge b \in x$ e x é filtro, tem-se que $a \in x$ e $b \in x$, i.e., $x \in \phi_+(a) \cap \phi_+(b)$. Reciprocamente, se $x \in \phi_+(a) \cap \phi_+(b)$, então $a \in x$ e $b \in x$. Como x é filtro, tem-se que $a \wedge b \in x$, i.e., $x \in \phi_+(a \wedge b)$.

4_+ : $\phi_+(a \vee b) = \{x \in X | a \vee b \in x\}$.
Se $x \in \phi_+(a)$ ou $x \in \phi_+(b)$, então $a \in x$ ou $b \in x$. Suponha, sem perda de generalidade, que $a \in x$. Isso implica em $a \vee b \in x$, pois $a \leq a \vee b$ e x é filtro. Logo, $x \in \phi_+(a \vee b)$. Reciprocamente, $a \vee b \in x$ implica em $a \in x$ ou $b \in x$, pois x é primo. Assim, $x \in \phi_+(a) \cup \phi_+(b)$.

Os casos $1_- - 4_-$ são consequências de $\phi_+(a) = \phi_-(a)^c$.

Lema 2.4.2. *Seja $\beta_+ = \phi_+[L] = \{\phi_+(a) | a \in L\}$, $\beta_- = \phi_-[L] = \{\phi_-(a) | a \in L\}$. Então β_+ e β_- geram topologias sobre X.*

Prova:

β_+ é base para uma topologia:

(1) Por 3_+, tem-se que β_+ é fechado por interseções finitas.

(2) Seja $x \in X$. Como x é filtro primo, $x \neq \emptyset$. Logo, existe $a \in L$ tal que $a \in x$, i.e., $x \in \phi_+(a)$.

β_- é base para uma topologia:

(1) Por 4_-, β_- é fechado por interseções finitas.

(2) Seja $x \in X$. Como x é primo, tem-se que x é próprio, i.e., $x \neq L$. Assim, existe $a \in L \setminus x$, ou seja, $x \in \phi_-(a)$.

Conforme o lema acima, seja τ_+ a topologia gerada por β_+ e τ_- a topologia gerada por β_-.

Proposição 2.4.3. *(X, τ_+, τ_-) é um espaço pairwise Stone.*

Demonstração:

- Pairwise Hausdorff:
  Suponha $x \neq y$. Então $x \not\subseteq y$ ou $y \not\subseteq x$. Suponha que $x \not\subseteq y$. Então, existe $a \in L$ com $a \in x$ e $a \notin y$. Portanto, $x \in \phi_+(a) \in \tau_+$ e $y \in \phi_-(a) \in \tau_-$. Visto que $\phi_+(a) = \phi_-(a)^c$, tem-se que $\phi_+(a)$ e $\phi_-(a)$ são disjuntos. O caso $y \not\subseteq x$ é similar. Logo, (X, τ_+, τ_-) é pairwise Hausdorff.

- Pairwise compacto:
  Como β_+ é base para τ_+ e β_- é base para τ_-, é suficiente mostrar que para cada cobertura de X, por elementos de $\beta_+ \cup \beta_-$, existe uma subcobertura finita (cf. 1.1.30). Suponha $X = \bigcup\{\phi_+(a_i) | i \in I\} \cup \bigcup\{\phi_-(b_j) | j \in J\}$, para $a_i, b_j \in L$. Seja Δ o ideal gerado por $\{a_i | i \in I\}$ e ∇ o filtro gerado por $\{b_j | j \in J\}$. Se $\Delta \cap \nabla = \emptyset$, como todo ideal é um conjunto direcionado para cima, pode-se aplicar o teorema 1.3.18, e então existe um filtro primo x de L tal que $\nabla \subseteq x$ e $x \cap \Delta = \emptyset$. Assim:

$$\nabla \subseteq x \Rightarrow \{b_j | j \in J\} \subseteq x \Rightarrow \forall j \in J(x \in \phi_+(b_j));$$
$$x \cap \Delta = \emptyset \Rightarrow \forall i \in I(a_i \notin x) \Rightarrow \forall i \in I(x \in \phi_-(a_i)).$$

  Portanto, $x \notin \phi_-(b_j)$ e $x \notin \phi_+(a_i)$, para cada $j \in J$ e cada $i \in I$. Contradição, pois $\bigcup\{\phi_+(a_i) | i \in I\} \cup \bigcup\{\phi_-(b_j) | j \in J\}$ é uma cobertura de X. Isso mostra que $\Delta \cap \nabla \neq \emptyset$, i.e.,existe $a \in \Delta \cap \nabla$. Logo, por 1.3.14, existem $b_{j_1}, ..., b_{j_n} \in \{b_j | j \in J\}$

e $a_{i_1}, ..., a_{i_m} \in \{a_i | i \in I\}$ tais que $b_{j_1} \wedge ... \wedge b_{j_n} \leq a \leq a_{i_1} \vee ... \vee a_{i_m}$. Seja y filtro. Note que se $b_{j_1} \wedge ... \wedge b_{j_n} \in y$, então $a \in y$, e que se $a \in y$, então $a_{i_1} \vee ... \vee a_{i_m} \in y$, ou seja, em particular $\phi_+(b_{j_1} \wedge ... \wedge b_{j_n}) \subseteq \phi_+(a) \subseteq \phi_+(a_{i_1} \vee ... \vee a_{i_m})$. Por 3_+ e 4_+, tem-se que $\phi_+(b_{j_1}) \cap ... \cap \phi_+(b_{j_n}) \subseteq \phi_+(a_{i_1}) \cup ... \cup \phi_+(a_{i_m}) \Rightarrow \phi_-(b_{j_1}) \cup ... \cup \phi_-(b_{j_n}) \supseteq \phi_-(a_{i_1}) \cap ... \cap \phi_-(a_{i_m})$. Portanto, $\phi_+(a_{i_1}) \cup ... \cup \phi_+(a_{i_m}) \cup (\phi_+(a_{i_1}) \cup ... \cup \phi_+(a_{i_m}))^c = X$, i.e., $X = \phi_+(a_{i_1}) \cup ... \cup \phi_+(a_{i_m}) \cup \phi_-(a_{i_1}) \cap ... \cap \phi_-(a_{i_m}) \subseteq \phi_-(b_{j_1}) \cup ... \cup \phi_-(b_{j_n}) \cup \phi_+(a_{i_1}) \cup ... \cup \phi_+(a_{i_m}) \subseteq X$. Logo, $\{\phi_+(a_{i_1}), ..., \phi_+(a_{i_m}), \phi_-(b_{j_1}), ..., \phi_-(b_{j_n})\}$ é uma subcobertura finita de $\{\phi_+(a_i) | i \in I\} \cup \{\phi_-(b_j) | j \in J\}$. Isso mostra que (X, τ_+, τ_-) é pairwise compacto.

- Pairwise zero-dimensional:
  De modo análogo ao que foi feito nas seções anteriores, Será utilizado δ_+ para denotar o conjunto dos subconjuntos fechados de (X, τ_+) e σ_+ para denotar o conjunto dos subconjuntos compactos de (X, τ_+), com δ_- e σ_- definidos analogamente. Vejamos que $\beta_+ = \tau_+ \cap \delta_-$, sendo o caso $\beta_- = \tau_- \cap \delta_+$ similar. Se $U \in \beta_+$, é claro que $U \in \tau_+$. Além disso, como $U = \phi_+(a)$, para algum $a \in L$, tem-se que $U^c = \phi_-(a)$. Portanto, $U^c \in \beta_- \subseteq \tau_-$. Assim, $(U^c)^c \in \delta_-$, i.e., $U \in \delta_-$. Logo, $U \in \tau_+ \cap \delta_-$ e então $\beta_+ \subseteq \tau_+ \cap \delta_-$. Reciprocamente, seja $U \in \tau_+ \cap \delta_-$. Visto que (X, τ_+, τ_-) é pairwise compacto, por 2.1.11, $U \in \tau_+ \cap \sigma_+$. Como β_+ é uma base para τ_+, tem-se que U é uma união de elementos de β_+. Assim, U pode ser escrito como uma união finita de elementos de β_+, pois U é compacto. Por 4_+, β_+ é fechado por uniões finitas. Logo, $U \in \beta_+$. Consequentemente, $\tau_+ \cap \delta_- \subseteq \beta_+$. Portanto, $\beta_+ = \tau_+ \cap \delta_-$. Dessa forma conclui-se que (X, τ_+, τ_-) é pairwise zero-dimensional.

Isso mostra que (X, τ_+, τ_-) é pairwise Stone.

Definição 2.4.4. *Para um homomorfismo de reticulados limitados,* $h : L \longrightarrow L'$, *seja* $f_h : pf(L') \longrightarrow pf(L)$ *dada por* $f_h(x) = h^{-1}(x)$.

Note que f_h está bem definida, pois a imagem inversa de um filtro primo em L', por h, é um filtro primo em L (cf. 1.3.17).

Será demonstrado a seguir que f_h é um morfismo de **PStone**, em particular.

Proposição 2.4.5. *A função* f_h *é bi-contínua.*

Demonstração:

Seja $a \in L$. Então valem as seguintes igualdades:

(i) $f_h^{-1}(\phi_+(a)) = \phi'_+(h(a))$;

(ii) $f_h^{-1}(\phi_-(a)) = \phi_-(h(a))$.

Justificativa:

$$
\begin{aligned}
(i)\ \ f_h^{-1}(\phi_+(a)) &= \{x \in pf(L') |\ f_h(x) \in \phi_+(a)\}\\
&= \{x \in pf(L') |\ h^{-1}(x) \in \phi_+(a)\}\\
&= \{x \in pf(L') |\ a \in h^{-1}(x)\}\\
&= \{x \in pf(L') |\ h(a) \in x\}\\
&= \phi'_+(h(a)).
\end{aligned}
$$

(ii) Análogo ao item (i).

Portanto, a imagem inversa de cada elemento de β_+ está em β'_+ e o mesmo é válido para β_- e β'_-. Sendo assim, por 1.1.22(ii), f_h é bi-contínua.

De posse das informações anteriores, pode-se definir o funtor contravariante $(-)_* : \mathbf{DLat} \longrightarrow \mathbf{PStone}$ como a seguir.

$$
\begin{cases}
(-)_* : \mathbf{DLat} \longrightarrow \mathbf{PStone}\\
L \mapsto L_* := (X, \tau_+, \tau_-), \text{ com X=pf(L)}\\
h \in [L, L'] \mapsto h_* := f_h \in [(X', \tau'_+, \tau'_-), (X, \tau_+, \tau_-)].
\end{cases}
$$

Observação 2.4.6. *Sabemos que se $g : K \to K'$ é uma função, então $g^{-1} : \mathcal{P}(K') \to \mathcal{P}(K)$ é a chamada função imagem inversa. Em particular, se $g : K \longrightarrow K$ é função identidade em K, então $g^{-1} : \mathcal{P}(K) \longrightarrow \mathcal{P}(K)$ é identidade em $\mathcal{P}(K)$. Note que se $g : K \longrightarrow K'$ é um homomorfismo de reticulados, então $g_* = g^{-1} \restriction pf(K')$. Sendo assim, para h, h' morfismos de **DLat**, como $(h' \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ h'^{-1}$, tem-se $(h' \circ h)_* = h_* \circ h'_*$. Além disso, $(id_L)_* = id_{pf(L)} = id_{L_*}$.*

Infere-se de 2.4.6 e das proposições 2.4.3 e 2.4.5 que o funtor $(-)_*$ está bem definido.

Para um espaço pairwise Stone, (X, τ_1, τ_2), é fácil ver que $(\beta_1, \cap, \cup, \emptyset, X)$ é um reticulado distributivo e limitado. De fato, $(\beta_1, \subseteq)$ é ordem parcial, fechado por interseções e por uniões finitas, e $\cap, \cup$ satisfazem $[\wedge,\ \vee]$ de 1.3.4. Logo, $(\beta_1, \cap, \cup, \emptyset, X)$ é reticulado distributivo, por 1.3.5. Além disso, $(\beta_1, \cap, \cup, \emptyset, X)$ é limitado, com $\bot = \emptyset$ e $\top = X$. (Note que $(\beta_2, \cap, \cup, \emptyset, X)$ também é um reticulado distributivo e limitado.)

Para (X, τ_1, τ_2) e (X', τ'_1, τ'_2) espaços pairwise Stone, seja $f : (X, \tau_1, \tau_2) \longrightarrow (X', \tau'_1, \tau'_2)$ bi-contínua. Para cada $U \in \beta'_1$ tem-se que $U \in \tau'_1 \cap \delta'_2$. Então, sendo f bi-contínua, $f^{-1}(U) \in \tau_1 \cap \delta_2$. Portanto, $f^{-1}(U) \in \beta_1$. Além disso, é fácil verificar que $f^{-1} : \beta'_1 \longrightarrow \beta_1$ é um homomorfismo de reticulados limitados.

Define-se o funtor contravariante $(-)^* : \mathbf{PStone} \longrightarrow \mathbf{DLat}$ da seguinte maneira:

$$\begin{cases} (-)^* : \textbf{PStone} \longrightarrow \textbf{DLat} \\ (X, \tau_1, \tau_2) \mapsto (X, \tau_1, \tau_2)^* = (\beta_1, \cap, \cup, \emptyset, X) \\ f \in [(X, \tau_1, \tau_2), (X', \tau_1', \tau_2')] \mapsto f^* := f^{-1} \in [\beta_1', \beta_1]. \end{cases}$$

Pelo que foi observado anteriormente, tem-se que o funtor $(-)^*$ está bem definido.

O próximo resultado mostra quais os isomorfismos de **DLat** e **PStone**, respectivamente, que irão compor as transformações naturais necessárias à demonstração da equivalência dual entre estas categorias. A demonstração de 2.4.7(i) é original.

Lema 2.4.7.

(i) *Seja L um reticulado distributivo e limitado. Então, $\mu_L : L \to {L_*}^*$, dada por*

$$\mu_L(a) := \phi_+(a),$$

é um isomorfismo de reticulados distributivos e limitados.

(ii) *Seja (X, τ_1, τ_2) um espaço pairwise Stone. Então $\psi_X : X \to {X^*}_*$, dada por*

$$\psi_X(x) = \{U \in X^* | x \in U\},$$

é um bi-homeomorfismo.

Prova:

(i) Note que ${L_*}^* = ((X, \tau_+, \tau_-))^* = \beta_+ = \phi_+[L] = \mu_L(L)$. Logo, μ_L é sobrejetora. Sejam $a, b \in L$.

$$\phi_+(a) = \phi_+(b) \Leftrightarrow \{x \in X | a \in x\} = \{y \in X | b \in y\} \Leftrightarrow \forall x \in X(a \in x \leftrightarrow b \in x). \tag{$\star$}$$

Por ($\star$), é fácil verificar que $\phi_+(a) \neq \phi_+(b)$ implica $a \neq b$, i.e., que μ_L está bem definida. Suponha que $a \neq b$ e que $a \nleq b$. Seja $\uparrow a$ o filtro gerado por $\{a\}$ e $\downarrow b$ o ideal gerado por $\{b\}$. Como $a \nleq b$, tem-se que $(\uparrow a) \cap (\downarrow b) = \emptyset$. Pelo teorema 1.3.18, existe $x \supseteq \uparrow a$ filtro primo tal que $x \cap \downarrow b = \emptyset$. Por ($\star$), tem-se que $\phi_+(a) \neq \phi_+(b)$. O caso $b \nleq a$ é análogo. Assim, μ_L é injetora. Por 2.4.1, μ_L é homomorfismo de reticulados. Portanto, μ_L é isomorfismo de reticulados distributivos e limitados.

(ii) Observe que $X^* = \beta_1$, que é um reticulado distributivo. Portanto, $\{U \in X^* | x \in U\} \subseteq \beta_1$. Falta verificar que $\{U \in X^* | x \in U\} \in pf(\beta_1) = {X^*}_*$. Com esta finalidade, deve-se verificar:

[Fi1]: Sejam $U \in \psi_X(x)$ e $V \in \beta_1$ tais que $U \subseteq V$. Então, como $x \in U$, tem-se que $x \in V$. Logo, $V \in \psi_X(x)$.

[Fi2]: Sejam $U, V \in \psi_X(x)$. Então, $x \in U \cap V$, i.e., $U \cap V \in \psi_X(x)$.

É claro que $\psi_X(x) \neq \emptyset$, pois β_1 é base para (X, τ_1). Portanto $\psi_X(x)$ é filtro em β_1. Também, $\psi_X(x)$ é próprio, pois $\emptyset \notin \psi_X(x)$. Além disso, se $U \cup V \in \psi_X(x)$, então $x \in U$ ou $x \in V$, ou seja, $U \in \psi_X(x)$ ou $V \in \psi_X(x)$. Dessa forma, $\psi_X(x)$ é filtro primo em β_1, i.e., $\psi_X(x) \in pf(\beta_1)$. Portanto ψ_X está bem definida. Agora será verificado que ψ_X é injetora. Para isto, sejam $x, y \in X$:

$$\psi_X(x) = \psi_X(y) \Leftrightarrow \{U \in \beta_1 | x \in U\} = \{V \in \beta_1 | y \in V\} \Leftrightarrow \forall W \in \beta_1 (x \in W \leftrightarrow y \in W) \qquad (\star\star)$$

Como X é pairwise zero-dimensional e pairwise Hausdorff, pelo Lema 2.1.7, tem-se que (X, τ_1) é T_0. Visto que β_1 é base para τ_1, por $(\star\star)$, tem-se que $\psi_X(x) = \psi_X(y)$ é equivalente à $x = y$. Portanto, ψ_X é injetora. Mais ainda:

- ψ_X **é sobrejetora**:
  Seja P um filtro primo de β_1 (ou seja, $P \in X^*{}_*$) e $Q = \{V \in \beta_2 | V^c \notin P\}$.

- **Afirmação 1:** Q é primo em β_2.

[Fi 1]: Sejam $U \in Q$ e $V \in \beta_2$ tais que $U \subseteq V \Rightarrow V^c \subseteq U^c \Rightarrow U^c \cup V^c = U^c \notin P$, pela definição de Q. Como $U^c \cup V^c \notin P$, tem-se que $V^c \notin P$, pois P é filtro. Logo, $V \in Q$.

[Fi 2]: Sejam $U, V \in Q$. Logo, $U^c, V^c \notin P$. Isso implica em $U^c \cup V^c \notin P$, pois P é primo, i.e., $(U \cap V)^c = U^c \cup V^c \notin P$. Logo, $U \cap V \in Q$.

Suponha que $U \cup V \in Q$. Então, $(U \cup V)^c \notin P$, i.e., $U^c \cap V^c \notin P$. Como P é filtro, tem-se que $U^c \notin P$ ou $V^c \notin P$. Portanto, Q é filtro primo.

- **Afirmação 2:** $P \cup Q$ tem a **pif**.

Seja $D \subseteq_f P \cup Q$. Suponha que $\bigcap D = \emptyset$. Seja $D = \{U_1, ..., U_n\} \cup \{V_1, ..., V_m\}$, com $U_1, ..., U_n \in P$ e $V_1, ..., V_m \in Q$. Tem-se então que $U_1 \cap ... \cap U_n \cap V_1 \cap ... \cap V_m = \emptyset$. Como P e Q são filtros, tem-se que $U := U_1 \cap ... \cap U_n \in P$ e $V := V_1 \cap ... \cap V_m \in Q$. Assim, $U \cap V = \emptyset$. Logo, $U \subseteq V^c$. Como $U \in P$, tem-se $V^c \in P$, pois P é filtro. Mas isso contradiz o fato de que $V \in Q$. Portanto, $\bigcap D \neq \emptyset$ e, então, $P \cup Q$ tem a **pif**.

Visto que X é pairwise compacto, tem-se $\bigcap(P \cup Q) \neq \emptyset$, caso contrário $\{X \setminus U | U \in P \cup Q\}$ seria cobertura de X por abertos de $\tau_1 \cup \tau_2$ e isto implicaria em existir uma subcobertura finita. Nesse caso, $\bigcap_{i=1}^{n} U_i = \emptyset$, com cada U_i pertencendo à subcobertura. Isso contradiria o fato de que $P \cup Q$ tem a **pif**.

- **Afirmação 3:** $\bigcap(P \cup Q) = \{x\}$.

  Seja $x \in \bigcap(P \cup Q)$. Então, $x \in U$ para todo $U \in P \cup Q$. Suponha que existe $y \neq x$ tal que $y \in \bigcap(P \cup Q)$. Como X é pairwise Hausdorff, existem $U_1 \in \beta_1$ e $U_2 \in \beta_2$ disjuntos tais que $x \in U_1$ e $y \in U_2$ ou existem $U_2 \in \beta_1$ e $U_1 \in \beta_2$ com a mesma propriedade.

  1) Se $U_1 \in \beta_1$ e $U_1 \notin P$, então $U_1^c \in Q$. Logo, $x, y \in U_1^c$. Contradição.
  2) Se $U_1 \in \beta_1$ e $U_1 \in P$, então $x, y \in U_1$. Contradição.
  3) Se $U_2 \in \beta_2$, então $U_2^c \in \beta_1$. Recai em um dos dois casos anteriores.
  4) Se $U_2 \in \beta_1$, recai em um dos dois primeiros casos.

     Portanto, $\bigcap(P \cup Q) = \{x\}$.

- **Afirmação 4:** $\psi_X(x) = P$.

  Pelo que foi visto acima, $P \subseteq \psi_X(x)$ (pois todo U tal que $U \in P$ contém x). Seja então $U \in \psi_X(x)$. Tem-se que $U \in \beta_1$. Logo, $U^c \in \beta_2$. Como $x \notin U^c$ e $x \in \bigcap(P \cup Q)$, tem-se que $U^c \notin Q$. Consequentemente, $U \in P$. Assim, $\psi_X(x) \subseteq P$.

  Portanto, ψ_X é sobrejetora.

Falta verificar que ψ_X é um bi-homeomorfismo. Para isso, será mostrado que ψ_X é bi-contínua e bi-aberta. Seja então $V \in \beta_+ = \{\phi_+(U) | U \in \beta_1\}$. Logo, existe $U \in \beta_1$ tal que $V = \phi_+(U)$. Assim:

$$\begin{aligned}\psi_X^{-1}(V) = \psi_X^{-1}(\phi_+(U)) &= \{x \in X | \psi_X(x) \in \phi_+(U)\} \\ &= \{x \in X | \psi_X(x) \in \{P \in pf(\beta_1) | U \in P\}\} \\ &= \{x \in X | U \in \psi_X(x)\} = \{x \in X | x \in U\} \\ &= U \in \beta_1.\end{aligned}$$

Seja agora $W \in \beta_-$. Então, existe $V \in \beta_1$ tal que $W = \phi_-(V) = \phi_+(V)^c$. Portanto,

$$\psi_X^{-1}(W) = \psi_X^{-1}(\phi_-(V)) = \psi_X^{-1}(\phi_+(V)^c) = [\psi_X^{-1}(\phi_+(V))]^c \in \beta_2.$$

Assim, tem-se que ψ_X é bi-contínua. Além disso, para $U \in \beta_1$, tem-se $\psi_X^{-1}(\phi_+(U)) = U$. Como ψ_X é bijeção, isto implica em $\psi_X(U) = \phi_+(U) \in \beta_+$. Para $V \in \beta_2$, tem-se que $V = U^c$, com $U \in \beta_1$ e como $\psi_X^{-1}(\phi_-(U)) = U^c$, tem-se que $\psi_X(V) = \psi_X(U^c) = \phi_-(U) \in \beta_-$. Logo, ψ_X é bi-aberta. Conclui-se então de 1.1.21 que ψ_X é um bi-homeomorfismo entre X e ${X^*}_*$.

Teorema 2.4.8. *Os funtores $(-)_*$ e $(-)^*$ estabelecem uma equivalência dual entre* **DLat** *e* **PStone**. *As equivalências naturais são dadas por $\mu : Id_{\mathbf{DLat}} \to (-)^* \circ (-)_*$ e $\psi : Id_{\mathbf{PStone}} \to (-)_* \circ (-)^*$. Mais detalhadamente, tem-se:*

[ret]: *Para $L \in Ob(\mathbf{DLat}), \mu_L := \phi_+ : L \to L_*^*$ é isomorfismo e o seguinte diagrama no lado esquerdo comuta para morfismos de reticulados $h : L \to L'$*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\mu_L"] \arrow[d, "h"'] & {L_*}^* \arrow[d, "{h_*}^*"] \\ L' \arrow[r, "\mu_{L'}"'] & {L'_*}^* \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi_X"] \arrow[d, "f"'] & {X^*}_* \arrow[d, "{f^*}_*"] \\ X' \arrow[r, "\psi_{X'}"'] & {X'^*}_* \end{tikzcd}$$

[pairwise]: *Para $X \in Ob(\mathbf{PStone}), \psi_X : X \to X_*^*$ é um bi-homeomorfismo e o diagrama acima à direita comuta para aplicações bi-contínuas $f : X \to X'$.*

Demonstração:

[ret]: Pelo lema anterior, cada μ_L na família de morfismos

$$\mu = \{\mu_L \in [Id_{\mathbf{DLat}}(L), L_*^*] : L \in Ob(\mathbf{DLat})\} = \{\mu_L \in [L, L_*^*] : L \in Ob(\mathbf{DLat})\},$$

é um isomorfismo. Vejamos que μ de fato é uma equivalência natural. Para isto, falta apenas verificar a comutatividade do diagrama correspondente. Seja então $a \in L$. Tem-se que:
$(h_*^* \circ \mu_L)(a) = h_*^*(\phi_+(a)) = f_h^{-1}(\phi_+(a)) \overset{2.4.5}{=} \phi'_+(h(a)) = \mu_{L'}(h(a)) = \mu_{L'} \circ h$.
Isso prova a comutatividade do diagrama supracitado.

[pairwise]: Novamente pelo lema anterior, tem-se que cada ψ_X na família de morfismos

$$\begin{aligned} \psi &= \{\psi_X \in [Id_{\mathbf{PStone}}(X), {X^*}_*] : X \in Ob(\mathbf{PStone})\} \\ &= \{\psi_X \in [X, {X^*}_*] : X \in Ob(\mathbf{PStone})\} \end{aligned}$$

é um isomorfismo. Vejamos a comutatividade do referente diagrama. Relembre que se $f : X \longrightarrow X'$, então $f^* : \beta_1' \longrightarrow \beta_1$ e $f^*_* : pf(\beta_1) \longrightarrow pf(\beta_1')$ são restrições das funções imagens inversas de f e de f^*, respectivamente. Seja $x \in X$ fixado. Então,

$$\begin{aligned} f^*{}_* \circ \psi_X(x) &= f_{f^*}(\psi_X(x)) = \{U \in \beta_1' | f^*(U) \in \psi_X(x)\} = \{U \in X'^* | x \in f^*(U)\} \\ &= \{U \in X'^* | x \in f^{-1}(U)\} = \{U \in X'^* | f(x) \in U\} = \psi_{X'}(f(x)) \\ &= \psi_{X'} \circ f(x). \end{aligned}$$

Portanto, **Spec**, **PStone**, **Pries** e **DLat** são dualmente equivalentes entre si.

Capítulo 3

Algumas Descrições Duais e a Dualidade de Esakia

Neste capítulo, será utilizado o isomorfismo entre **Pries**, **PStone** e **Spec**, e suas equivalências duais com **DLat** para obter as descrições duais de alguns conceitos algébricos que são importantes no estudo dos reticulados distributivos. São estas as descrições duais de filtros, ideais e imagens homomorfas. As descrições duais dos conceitos citados utilizando espaços Priestley é bastante conhecida e pode ser vista em [P84]. Alguns destes conceitos têm sido também descritos por meio de espaços espectrais, como será visto a seguir. Além disso, tais conceitos serão descritos por meio dos espaços pairwise Stone.

As referências utilizadas na construção deste capítulo foram [BBGK10], [H69], [DP92], [P84] e [D10]. As demosntrações dos resultados 3.1.5 e 3.1.14 são originais.

3.1 Filtros e ideais

Inicialmente, será apresentada a descrição dual de filtros, filtros primos e filtros maximais, bem como a de ideais, ideais primos e ideais maximais de reticulados distributivos e limitados, por meio de espaços Priestley. Os detalhes da construção da equivalência dual entre **Pries** e **DLat** podem ser vistos em [D10]. Aqui, daremos apenas uma breve visão geral desta construção.

Para cada reticulado distributivo e limitado L, associamos seu *espaço dual* $(X, \tau, \leq)$, onde X é o conjunto dos filtros primos em L, $\leq$ é a inclusão e τ é a topologia que tem como sub-base a coleção composta por $\{x \in X : \ a \notin x\}$ e $\{x \in X : \ a \in x\}$, para $a \in L$ (conforme [P84]). No capítulo 2, os elementos da sub-base foram denotados por $\phi_-(a)$ e $\phi_+(a)$, respectivamente. Neste capítulo, denotar-se-á $\{x \in X | a \in x\}$ por $\phi(a)$, ao invés de $\phi_+(a)$.

Priestley mostrou que o espaço dual de L é um espaço Priestley.

Observação 3.1.1. *Na verdade, em [P84], Priestley definiu X como sendo o conjunto dos ideais primos de L. Mas filtros e ideais são dualmente equivalentes, pelo Princípio da Dualidade. Logo, para ficar de acordo com o que foi feito no capítulo 2, iremos considerar X como o conjunto dos filtros primos de L.*

Vimos no capítulo 2, na construção da equivalência dual entre **DLat** e **PStone**, que $\phi_-[L]$ e $\phi_+[L]$ geram topologias sobre X, denotadas por τ_- e τ_+, respectivamente. Por 2.1.1, $\phi_+[L] \cup \phi_-[L]$ forma uma sub-base para $\tau_+ \vee \tau_-$. Logo, $\tau_+ \vee \tau_-$ coincide com τ de $(X, \tau, \leq)$.

Vale ressaltar ainda que podemos identificar o espaço dual de um reticulado distributivo e limitado L com $A := \{f | f : L \to 2 \text{ é morfismo }\}$, conforme o resultado seguinte.

Lema 3.1.2. *Existe uma correspondência 1-1 e sobrejetora entre filtros primos num reticulado distributivo e limitado L e morfismos $f : L \to 2$, dada por:*

(i) *Se $P \subseteq L$ for filtro primo em L, então*

$$f : L \to 2,\ a \mapsto f(a) := \begin{cases} 1, & se\ a \in P; \\ 0, & se\ a \notin P \end{cases}$$

é morfismo de reticulados.

(ii) *Se $f \in X$, então $f^{-1}(1)$ é um filtro primo em L.*

Dualmente:

Lema 3.1.3. *Existe uma correspondência 1-1 e sobrejetora entre ideais primos num reticulado distributivo e limitado L e morfismos $f : L \to 2$, dada por:*

(i) *Se $I \subseteq L$ for ideal primo em L, então*

$$f(a) := \begin{cases} 0, & se\ a \in I; \\ 1, & se\ a \notin I \end{cases}$$

é morfismo de reticulados.

(ii) *Se $f \in X$, então $f^{-1}(0)$ é um ideal primo em L.*

A demonstração do Lema 3.1.2 pode ser vista em [D10]. A demonstração de 3.1.3 decorre do Príncipio da Dualidade.

Para o espaço A supracitado, pode-se definir a seguinte relação binária, denotada por $\leq$:

$$\text{Dados } f, g \in X,\ f \leq g \text{ se, e somente se, } f(a) \leq g(a) \text{ para todo } a \in L.$$

Não é difícil verificar que $\leq$ é uma ordem parcial.

Considerando em A a topologia induzida do espaço produto 2^L, tem-se o seguinte resultado:

Para um reticulado distributivo e limitado L, conforme notação utilizada acima, tem-se que $(A, \tau, \leq)$ é um espaço Priestley.

Portanto, podemos fazer uso tanto da definição do espaço dual de um reticulado distributivo e limitado L, quanto da sua identificação com A.

Também, para $(X, \tau, \leq)$ espaço Priestley, pode-se definir o reticulado formado pelos abertos-fechados crescentes de $(X, \tau, \leq)$ e denotado por $(CpUp(X, \tau, \leq), \subseteq)$, o chamado *reticulado dual de X*. O *inf* e o *sup* de $(CpUp(X, \tau, \leq), \subseteq)$ são a interseção e a união, respectivamente.

O **Teorema da Representação de Priestley** diz, basicamente, que dado um reticulado distributivo e limitado L e seu espaço dual $(X, \tau, \leq)$, L é isomorfo ao reticulado formado pelos abertos-fechados crescentes de $(X, \tau, \leq)$, e este isomorfismo é dado por:

$$\begin{gathered} \phi : L \longrightarrow CpUp(X, \tau, \leq) \\ a \mapsto \phi(a) := \{x \in X | a \in x\} \end{gathered}$$

Vale ressaltar que $\phi(a)$ pode ser identificado com o conjunto $\{f \in A : \ f(a) = 1\}$, conforme 3.1.2.

Doravante, salvo menção em contrário, L denotará um reticulado distributivo e limitado.

Assumindo os resultados e conhecendo as definições acima, torna-se possível o entendimento das descrições duais que serão dadas a seguir.

Seja L um reticulado distributivo limitado e seja $(X, \tau, \leq)$ o espaço Priestley de L. Para cada filtro F de L, associa-se o fechado crescente $C_F := \bigcap\{\phi(a) | a \in F\}$ de X, e para cada fechado crescente C de X, associa-se o filtro $F_C := \{a \in L | C \subseteq \phi(a)\}$ de L.

Observação 3.1.4. *C_F de fato é um fechado crescente, visto que interseção qualquer de abertos-fechados é um subconjunto fechado e interseção de crescentes é um subconjunto crescente. Resta mostrar que F_C é filtro.*

(*i*) *Sejam* $a \in F_C$ *e* $b \in L$ *tais que* $a \leq b$. *Como* $a \in F_C$, *tem-se que* $C \subseteq \phi(a)$. *Devemos verificar que* $C \subseteq \phi(b)$. *Isso estará provado se mostrarmos que* $\phi(a) \subseteq \phi(b)$. *Seja então* $f \in \phi(a)$. *Isso implica em* $f(a) = 1$. *Visto que* $a \leq b$, *tem-se* $a \wedge b = a$. *Logo,* $1 = f(a) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) = 1 \wedge f(b) = f(b)$. *Assim,* $f(b) = 1$ *e então* $f \in \phi(b)$.

(*ii*) *Sejam* $a, b \in F_C$. *Então,* $C \subseteq \phi(a) \cap \phi(b) = \phi(a \wedge b)$, *pois* ϕ *é morfismo. Logo,* $a \wedge b \in F_C$.

Portanto, F_C *é filtro.*

Lema 3.1.5. *Seja* L *reticulado distributivo e* $(X, \tau, \leq)$ *seu espaço de Priestley. Sejam* F, G *filtros de* L *e* C *um fechado crescente de* X. *Então,*

(*i*) $F \subseteq G$ *se, e somente se,* $C_F \supseteq C_G$;

(*ii*) $F_{C_F} = F$ *e* $C_{F_C} = C$.

Demonstração:

(*i*) $(\Rightarrow)$: Trivial.
$(\Leftarrow)$: Seja $a \in F$ fixado. Suponha que $a \notin G$. Então, $\downarrow a \cap G = \emptyset$. Por 1.3.18, G pode ser estendido a um filtro primo P tal que $\downarrow a \cap P = \emptyset$. Dessa forma, considerando f conforme 3.1.2, tem-se que $f \in C_G$. Logo, $f \in C_F$, i.e., $f(b) = 1$, para todo $b \in F$. Em particular, $f(a) = 1$. Então, pela definição da f, $a \in P$. Contradição, pois $a \in \downarrow a$ e $\downarrow a \cap P = \emptyset$.

(*ii*) Seja $F \subseteq L$ um filtro. Seja $a \in F_{C_F}$. Então, $C_F \subseteq \phi(a)$, i.e., $\bigcap\{\phi(b) | b \in F\} \subseteq \phi(a)$. Para $g \in C_F$, tem-se que, para todo $b \in F$, $g \in \phi(b)$, ou seja, para todo $b \in F$, $g(b) = 1$. Como $\bigcap\{\phi(b) | b \in F\} = C_F \subseteq \phi(a)$, tem-se que $g(a) = 1$. Suponha agora que $a \notin F$. Visto que F é filtro, tem-se que $\downarrow a \cap F = \emptyset$. Logo, existe filtro primo $P \subseteq L$ tal que $F \subseteq P$ e $P \cap \downarrow a = \emptyset$. Conforme 3.1.3, $f : L \to 2$ é morfismo tal que $f \in \bigcap\{\phi(b) | b \in F\}$, pois $F \subseteq P$. Pelo que foi observado anteriormente, $f(a) = 1$. Contradição, pois $a \notin P$. Portanto, $a \in F$. Reciprocamente, seja $a \in F$. É claro que $C_F \subseteq \phi(a)$ e então $a \in F_{C_F}$.
Seja $C \subseteq X$ um fechado crescente. Por 2.2.3, visto que os abertos-fechados crescentes são da forma $\phi(a)$ para $a \in L$, $C = \bigcap_{a \in L'} \phi(a)$, para algum $L' \subseteq L$. Então, $C \subseteq \phi(a)$, para todo $a \in L'$. Dessa forma, $L' \subseteq F_C$ e então $\bigcap_{a \in F_C} \phi(a) \subseteq \bigcap_{a \in L'} \phi(a)$, i.e., $C_{F_C} \subseteq C$. É claro que $C \subseteq C_{F_C}$, o que completa o resultado.

Portanto, sem mais detalhes, $(Fi(L), \supseteq)$ é isomorfo à $(ClUp(X, \tau, \leq), \subseteq)$. De forma análoga, para cada ideal I de L pode-se associar o aberto crescente $U_I := \bigcup\{\phi(a)|\ a \in I\}$ de X, e para cada aberto crescente U de X pode-se associar o ideal $I_U := \{a \in L|\phi(a) \subseteq U\}$ de L. Então $I \subseteq J$ se, e somente se, $U_I \subseteq U_J$, $I_{U_I} = I$ e $U_{I_U} = U$. Pelo Princípio da Dualidade, $(Id(L), \subseteq)$ é isomorfo à $(OpUp(X, \tau, \leq), \subseteq)$.

Seja (X, τ_1, τ_2) o espaço pairwise Stone correspondente a $(X, \tau, \leq)$. Tem-se que $\tau_1 = OpUp(X, \tau, \leq)$ e $\tau_2 = OpDo(X, \tau, \leq)$, e então $\delta_1 = ClDo(X, \tau, \leq)$ e $\delta_2 = ClUp(X, \tau, \leq)$. Logo, $(Fi(L), \supseteq)$ é isomorfo à $(\delta_2, \subseteq)$ e $(Id(L), \subseteq)$ é isomorfo à $(\tau_1, \subseteq)$. Agora, seja (X, τ_1) o espaço espectral correspondente a (X, τ_1, τ_2). Então, claramente, $(Id(L), \subseteq)$ é isomorfo ao conjunto parcialmente ordenado formado por $\tau_1 - abertos$. Para caracterizar $(Fi(L), \supseteq)$ em termos de (X, τ_1), faz-se necessária a seguinte definição:

Definição 3.1.6. *Seja A um subconjunto de um espaço topológico.*

(i) A é dito saturado se ele é uma interseção de subconjuntos abertos do espaço.

(ii) A é dito co-saturado se ele é uma união de subconjuntos fechados do espaço.

Será visto adiante que, para (X, τ) um espaço topológico T_0, dizer que um subconjunto de X é saturado equivale a dizer que o mesmo é um crescente de X na ordem da especialização. Relembremos então esta tal ordem.

Sejam $(X; \tau)$ um espaço toplógico e $x, y \in X$. Temos a seguinte pré-ordem, $\leq$, em X:

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}} \quad \Leftrightarrow \quad \forall U \in \tau(\ x \in U \rightarrow y \in U). \qquad (*)$$

Observação 3.1.7. *Sejam $(X; \tau)$ um espaço toplógico e $A \subseteq X$. Considere em $(X; \tau)$ a ordem da especialização definida em $(*)$. Se A é saturado então, $A = \uparrow A$.*

Prova: *Se $x \in \uparrow A$, então existe $y \in A$ tal que $y \leq x$, i.e., todo aberto $U \in \tau$ contendo y, contém x. Visto que A é saturado, existem abertos U_i, com $i \in I$, tais que $A = \bigcap_{i \in I} U_i$. Como $y \in A$, tem-se que $y \in U_j$, para todo $j \in I$. Consequentemente, $x \in U_j$ para todo $j \in I$, i.e., $x \in \bigcap_{i \in I} U_i = A$. Logo, $\uparrow A \subseteq A$ e, então, $A = \uparrow A$.*

Decorre do Princípio da Dualidade que se A é co-saturado, então $A = \downarrow A$.

Para um espaço topológico dado, nos resultados a seguir, sempre estará sendo considerada a ordem da especialização deste espaço.

Proposição 3.1.8. *Seja $(X; \tau)$ um espaço topológico e $x \in X$. Então, $\overline{\{x\}} = \downarrow x$.*

Demonstração:

Seja $y \in \overline{\{x\}}$, isto é, para qualquer $U \in \tau$, se $y \in U$ então $U \cap \{x\} \neq \emptyset$, ou seja, $x \in U$. Na ordem da especialização, isto significa que $y \leq x$, ou seja, $y \in \downarrow x$.

Reciprocamente, sendo $y \in \downarrow x$, tem-se que $y \leq x$ e por $(*)$, para todo $U \in \tau$, se $y \in U$ então $x \in U$. Logo, $y \in \overline{\{x\}}$.

Com isso, pode-se demonstrar a seguinte recíproca de 3.1.7:

Proposição 3.1.9. *Sejam $(X;\tau)$ um espaço topológico e $A \subseteq X$. Se $A = \uparrow A$, então A é saturado.*

Demonstração: Seja $A = \uparrow A$. Por 1.2.5, tem-se que $X \setminus \uparrow A = \downarrow (X \setminus \uparrow A)$. Observe que $\downarrow (X \setminus \uparrow A) = \bigcup_{x \in X \setminus \uparrow A} \downarrow x$. Para ver isto, seja $t \in \downarrow (X \setminus \uparrow A)$, i.e., $t \leq x$ para algum $x \in X \setminus \uparrow A$. Logo, $t \in \downarrow x$ e, consequentemente, $t \in \bigcup_{x \in X \setminus \uparrow A} \downarrow x$. Reciprocamente, seja $t \in \bigcup_{x \in X \setminus \uparrow A} \downarrow x$, tem-se que $t \in \downarrow x$, para algum $x \in X \setminus \uparrow A$. Assim, $t \leq x$ e então $t \in \downarrow (X \setminus \uparrow A)$. Com isso, conclui-se que $X \setminus A = \bigcup_{x \in X \setminus \uparrow A} \downarrow x$. Pela proposiçãoção 3.1.8, temos $X \setminus A$ é união de fechados. Assim, A é uma interseção de abertos.

Portanto, para um subconjunto A de um espaço topológico (X, τ), tem-se que $A = \uparrow A$ se, e somente se, A é um subconjunto saturado de (X, τ). Em particular, para um espaço topológico T_0, (X, τ), A é um crescente na ordem da especialização de (X, τ) se, e somente se, A é um subconjunto saturado de (X, τ). Esta caracterização de saturado – consequentemente de co-saturado – será frequentemente utilizada nos resultados a seguir.

Proposição 3.1.10. *Seja $(X, \tau, \leq)$ um espaço Priestley, (X, τ_1, τ_2) o espaço pairwise Stone correspondente e (X, τ_1) o espaço espectral correspondente. Então, para $A \subseteq X$, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) A é um crescente de $(X, \tau, \leq)$.

(ii) A é um subconjunto $\tau_1 -$ saturado de (X, τ_1, τ_2).

(iii) A é um subconjunto $\tau_2 -$ co $-$ saturado de (X, τ_1, τ_2).

(iv) A é um subconjunto saturado de (X, τ_1).

De modo análogo, para $B \subseteq X$, as seguintes condições são equivalentes:

(i) B é um decrescente de $(X, \tau, \leq)$.

(ii) B é um subconjunto $\tau_1 -$ co $-$ saturado de (X, τ_1, τ_2).

(iii) B é um subconjunto $\tau_2 -$ saturado de (X, τ_1, τ_2).

(iv) B é um subconjunto co-saturado de (X, τ_1).

A demonstração da proposição acima é uma consequência imediata da caracterização de subconjuntos saturados vista acima, bem como da proposição 2.2.11(iii).

Para um espaço pairwise Stone (X, τ_1, τ_2) e para $i \in \{1, 2\}$, $S_i(X)$ denotará o conjunto dos $\tau_i-saturados$ e $CS_i(X)$, denotará o conjunto dos $\tau_i-co-saturados$. Então, pelo que foi visto acima, $Up(X, \tau, \leq) = S_1(X) = CS_2(X)$ e $Do(X, \tau, \leq) = CS_1(X) = S_2(X)$. Isto nos dá a seguinte caracterização dos fechados crescentes e fechados decrescentes de $(X, \tau, \leq)$.

Teorema 3.1.11. *Seja $(X, \tau, \leq)$ um espaço Priestley, (X, τ_1, τ_2) o espaço pairwise Stone correspondente e (X, τ_1) o espaço espectral correspondente. Para $C \subseteq X$, as seguintes condições são equivalentes:*

(1) *C é um fechado crescente de $(X, \tau, \leq)$.*

(2) *C é um τ_2-fechado de (X, τ_1, τ_2).*

(3) *C é um compacto saturado de (X, τ_1).*

Prova:

$(2) \Leftrightarrow (1)$: C um $\tau_2 - fechado$ de $(X, \tau_1, \tau_2) \Leftrightarrow X \setminus C$ é $\tau_2 - aberto \Leftrightarrow X \setminus C$ é um aberto decrescente de $(X, \tau, \leq) \Leftrightarrow C$ é um fechado crescente de $(X, \tau, \leq)$.

$(1) \Rightarrow (3)$: Seja C um fechado crescente de $(X, \tau, \leq)$. Como C é crescente, por 3.1.10(iv), C é um saturado em (X, τ_1). Visto que C é τ-fechado e (X, τ) é compacto, tem-se que C é um subconjunto compacto de (X, τ). Portanto, C é também compacto em (X, τ_1), pois $\tau_1 := OpUp(X, \tau, \leq) \subseteq \tau$. Logo, C é compacto e saturado em (X, τ_1).

$(3) \Rightarrow (1)$: Seja C um subconjunto compacto e saturado de (X, τ_1). Visto que C é saturado em (X, τ_1), por 3.1.10, C é um $\leq -$crescente. Verifiquemos que C é um fechado de (X, τ). Seja $x \notin C$ fixado. Então, para cada $c \in C$, tem-se que $c \nleq x$. Logo, existe um aberto-fechado crescente U_c de $(X, \tau, \leq)$ tal que $c \in U_c$ e $x \notin U_c$. Portanto, $C \subseteq \bigcup\{U_c | c \in C\}$. Por 2.2.11, cada U_c pertence a β_1 e, por 2.3.6, $\beta_1 = \mathcal{E}(X, \tau_1)$, isto é, cada $U_c \in \mathcal{E}(X, \tau_1)$. Como C é compacto, existem $c_1, c_2, ..., c_n \in C$ tais que $C \subseteq U_{c_1} \cup U_{c_2} \cup ... \cup U_{c_n}$. Assim, $V := U_{c_1}^c \cap ... \cap U_{c_n}^c \subseteq X \setminus C$ é um aberto-fechado decrescente de $(X, \tau, \leq)$, contendo x e tendo interseção vazia com C. Isso significa que se $x \notin C$, então $x \notin Cl(C)$, ou seja, $Cl(C) \subseteq C$. Logo, C é um $\tau-$fechado.

Uma argumentação semelhante nos dá o teorema seguinte.

Teorema 3.1.12. *Seja $(X, \tau, \leq)$ um espaço Priestley, (X, τ_1, τ_2) o espaço pairwise Stone correspondente e (X, τ_1) o espaço espectral correspondente. Para $D \subseteq X$, as seguintes condições são equivalentes:*

(1) *D é um fechado decrescente de $(X, \tau, \leq)$.*

(2) *D é um τ_1-fechado de (X, τ_1, τ_2).*

(3) *D é um compacto saturado de (X, τ_2).*

Para um espaço pairwise Stone (X, τ_1, τ_2) e para $i \in \{1, 2\}$, $KS_i(X)$ irá denotar o conjunto dos subconjuntos compactos saturados de (X, τ_i). Então, a seguinte caracterização de filtros e ideais de um reticulado distributivo e limitado é uma consequência imediata do isomorfismo entre $(Fi(L), \supseteq)$ e $(ClUp(X, \tau, \leq), \subseteq)$, e entre $(Id(L), \subseteq)$ e $(OpUp(X, \tau, \leq)$, da definição de τ_1 e de τ_2, bem como dos resultados vistos acima.

Corolário 3.1.13. *Seja L um reticulado distributivo e limitado, $(X, \tau, \leq)$ seu espaço Priestley, (X, τ_1, τ_2) seu espaço Stone e (X, τ_1) seu espaço espectral. Então:*

(1) $(Fi(L), \supseteq) \cong (ClUp(X, \tau, \leq), \subseteq) = (\delta_2, \subseteq) = (KS_1(X), \subseteq)$.

(2) $(Id(L), \subseteq) \cong (OpUp(X, \tau, \leq), \subseteq) = (\tau_1, \subseteq)$.

3.1.1 Filtros e ideais primos

Com a finalidade de descrever dualmente filtros e ideais primos, há que se acrescentar o seguinte resultado:

Lema 3.1.14. *Sejam L um reticulado distributivo e limitado e $(X, \tau, \leq)$ o espaço Priestley de L. Então, as condições seguintes são válidas.*

(i) Um filtro F de L é primo se, e somente se, $C_F = \uparrow x$, para algum $x \in X$.

(ii) Um ideal I de L é primo se, e somente se, $U_I = (\downarrow x)^c$, para algum $x \in X$.

Demonstração:

(*i*) Seja $f : L \to 2$ definida como em 3.1.2, para um filtro primo $F \subseteq L$ qualquer. Seja $h \in C_F$. Então, $h \in \phi(a)$ para todo $a \in F$. Logo, $h(a) = 1$, para todo $a \in F$, ou seja, $f \leq h$. Assim, $h \in \uparrow f$. Reciprocamente, como $f \in C_F$ e C_F é crescente, tem-se que $\uparrow f \subseteq C_F$. Portanto, $\uparrow f = C_F$. Seja agora $F \subseteq L$ um filtro. Suponha que $C_F = \uparrow x$, para algum $x \in X$. Note que $0 \notin F$, pois senão $\phi(0) = \emptyset$ (cf. 2.4.1) e então $C_F = \emptyset$. Logo, F é filtro próprio. Suponha que $a \vee b \in F$. Se $a \notin F$ e $b \notin F$, então $\downarrow a \cap F = \downarrow b \cap F = \emptyset$. Por 1.3.18, existem filtros primos P_a, P_b estendendo F tal que , em particular, $a \notin P_a$ e $b \notin P_b$. Considere f_a, f_b definidas como em 3.1.2 para P_a e P_b, respectivamente. Então, $f_a, f_b \in C_F$. Além disso, pela definição de f_a e de f_b, $f_a(a) = 0$ e $f_b(b) = 0$. Visto que $f_a, f_b \in C_F$, tem-se que $x \leq f_a, f_b$. Assim, $x(a) = x(b) = 0$ e então $x(a \vee b) = x(a) \vee x(b) = 0$. Isso gera uma contradição, pois $a \vee b \in F$ e isso implica em $x(a \vee b) = 1$. Portanto, $a \in F$ ou $b \in F$, isto é, F é primo.

(*ii*) Para uma implicação, seja I um ideal primo de L e considere $f : L \to 2$ definida como em 3.1.3. Seja $h \in U_I$. Então, existe $a \in I$ tal que $h(a) = 1$. Logo, $h \not\leq f$, pois $f(a) := 0$. Portanto, $h \notin \downarrow f$, ou seja, $h \in (\downarrow f)^c$. Por outro lado, se $h \in (\downarrow f)^c$, então $h \not\leq f$. Então, existe $a \in L$ tal que $h(a) \not\leq f(a)$, isto é, $h(a) = 1$ e $f(a) = 0$. Logo, pela definição de f, $a \in I$ e então $h \in U_I$. Assim, $U_I = (\downarrow f)^c$. A implicação recíproca decorre do item (*i*) e do Princípio da Dualidade.

Serão dadas agora as descrições duais de filtros primos e ideais primos de L por meio dos espaços pairwise Stone e espectral de L.

Lema 3.1.15. *Seja $(X, \tau, \leq)$ um espaço Priestley, (X, τ_1, τ_2) o espaço pairwise Stone correspondente e (X, τ_1) o espaço espectral correspondente. Então, para cada $A \subseteq X$, tem-se:*

(*i*) $Cl_1(A) = \downarrow Cl(A)$.

(*ii*) $Cl_2(A) = \uparrow Cl(A)$.

Prova:

(*i*) Tem-se pela definição de fecho que $Cl_1(A) = \bigcap\{B \in \delta_1 | A \subseteq B\} = \bigcap\{B \in ClDo(X, \tau, \leq) | A \subseteq B\}$. Pelo lema 2.2.3, $\downarrow Cl(A)$ é um fechado decrescente, e claramente $A \subseteq \downarrow Cl(A)$. Portanto, $Cl_1(A) \subseteq \downarrow Cl(A)$. Reciprocamente, suponha que $x \notin Cl_1(A)$. Então existe $U \in \tau_1$ tal que $x \in U$ e $U \cap A = \emptyset$. Visto que $\tau_1 = OpUp(X, \tau, \leq)$, tem-se que U é um aberto crescente de (X, τ). Como U é $\tau-$aberto, infere-se de $U \cap A = \emptyset$ que $U \cap Cl(A) = \emptyset$. Como U é crescente, $U \cap Cl(A) = \emptyset$ implica em $U \cap \downarrow Cl(A) = \emptyset$. Portanto, $x \notin \downarrow Cl(A)$. Logo, $Cl_1(A) = \downarrow Cl(A)$.

(*ii*) Análogo ao item (*i*).

Seja (X, τ_1, τ_2) um espaço bitopológico. Para $A \subseteq X$ e $i \in \{1, 2\}$, define-se e denota-se a τ_i-saturação de A por:

$$Sat_i(A) := \bigcap\{U \in \tau_i | A \subseteq U\}.$$

Note que, como $U \in \tau_i$, U é um $\leq_i$ $-$crescente e assim $Sat_1(A) = \uparrow_1 A$ e $Sat_2(A) = \uparrow_2 A$. Isto, juntamente com o lema 2.2.7, nos dá o seguinte corolário do lema 3.1.15:

Corolário 3.1.16. *Seja $(X, \tau, \leq)$ um espaço Priestley, (X, τ_1, τ_2) o espaço pairwise Stone correspondente e (X, τ_1) o espaço espectral correspondente. Então, para cada subconjunto fechado A de (X, τ), tem-se:*

(1) $\downarrow A = Cl_1(A) = Sat_2(A)$.

(2) $\uparrow A = Cl_2(A) = Sat_1(A)$.

Em particular, para cada $x \in X$, tem-se:

(1) $\downarrow x = Cl_1(x) = Sat_2(x)$.

(2) $\uparrow x = Cl_2(x) = Sat_1(x)$.

Juntando todos esses resultados, tem-se as seguintes descrições duais de filtros e ideais primos de L.

Corolário 3.1.17. *Sejam L um reticulado distributivo,$(X, \tau, \leq)$ seu espaço Priestley, (X, τ_1, τ_2) seu espaço pairwise Stone e (X, τ_1) seu espaço espectral. Para um filtro F de L, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) F é um filtro primo de L.

(ii) $C_F = \uparrow x$ para algum $x \in X$.

(iii) $C_F = Cl_2(x)$ para algum $x \in X$.

(iv) $C_F = Sat_1(x)$ para algum $x \in X$.

Também, para um ideal I de L, as seguintes condições são equivalentes:

(i) I é um ideal primo de L.

(ii) $U_I = (\downarrow x)^c$ para algum $x \in X$.

(iii) $U_I = [Cl_1(x)]^c$ para algum $x \in X$.

(iv) $U_I = [Sat_2(x)]^c$ para algum $x \in X$.

3.1.2 Filtros e ideais maximais

Uma outra consequência dos resultados anteriores é a descrição dual de filtros maximais e ideais maximais de L. Para $(X, \tau, \leq)$ espaço dual de L, será usado $maxX$ e $minX$ para denotar os conjuntos de pontos maximais e minimais de X, respectivamente. O lema seguinte foi uma constatação, necessária como auxílio às descrições duais de filtros e ideais maximais.

Lema 3.1.18. *Sejam L um reticulado distributivo e $F \subseteq L$ um filtro maximal. Então, $f : L \to 2$ definida por:*

$$f(a) := \begin{cases} 1, \ se \ a \in F; \\ 0, \ se \ a \notin F \end{cases}$$

é maximal em $(X, \tau, \leq)$.

Demonstração:

Seja $g : L \to 2$ morfismo e suponha que $f \leq g$. Então, $f < g$ ou $f = g$. Se $f < g$, então $g(F) = \{1\}$ e existe $a \notin F$ tal que $g(a) = 1$. Portanto, $a \in g^{-1}(\{1\})$ e $F \cup \{a\} \subseteq g^{-1}(\{1\})$. Mas $G := g^{-1}(\{1\})$ é filtro próprio em L, com $F \subsetneq G$. Isso contradiz a hipótese de que F é maximal. Portanto, $f = g$, isto é, f é maximal.

Observe que, f é maximal (minimal) se, e somente se, $\uparrow f = \{f\}$ (respectivamente, $\downarrow f = \{f\}$).

Pelo princípio da Dualidade, um resultado análogo é válido para ideais maximais, conforme o lema seguinte.

Lema 3.1.19. *Sejam L um reticulado distributivo e $I \subseteq L$ um ideal maximal. Então, $f : L \to 2$ definida por:*

$$f(a) := \begin{cases} 0, & se\ a \in I; \\ 1, & se\ a \notin I \end{cases}$$

é minimal em $(X, \tau, \leq)$.

Num reticulado distributivo e limitado L, filtros maximais são primos (cf. 1.3.17) bem como ideais maximais são ideais primos. Então, pelos lemas anteriores, por 3.1.17 e pelo que foi observado acima, tem-se que um filtro F de L é maximal se, e somente se, $C_F = \{x\}(=\uparrow x)$, para algum $x \in maxX$. Também, um ideal I de L é maximal se, e somente se, $U_I = \{x\}^c$, para algum $x \in minX$. Isso, junto com resultados anteriores, nos dá imediatamente:

Corolário 3.1.20. *Sejam L um reticulado distributivo e limitado, $(X, \tau, \leq)$ seu espaço Priestley, (X, τ_1, τ_2) seu espaço pairwise Stone e (X, τ_1) seu espaço espectral. Para um filtro F de L, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) F é um filtro maximal de L.

(ii) $C_F = \{x\}$, para algum $x \in X$ com $\uparrow x = \{x\}$.

(iii) $C_F = \{x\}$, para algum $x \in X$ com $Cl_2(x) = \{x\}$.

(iv) $C_F = \{x\}$, para algum $x \in X$ com $Sat_1(x) = \{x\}$.

Também, para um ideal I de L, as seguintes condições são equivalentes:

(i) I é um ideal maximal de L.

(ii) $U_I = \{x\}^c$, para algum $x \in X$ com $\downarrow x = \{x\}$.

(iii) $U_I = \{x\}^c$, para algum $x \in X$ com $Cl_1(x) = \{x\}$.

(iv) $U_I = \{x\}$, para algum $x \in X$ com $Sat_2(x) = \{x\}$.

3.2 Imagens homomorfas

Serão feitas as descrições duais das imagens homomorfas de um reticulado distributivo e limitado L, em termos dos espaços pairwise Stone e espectral de L.

Lema 3.2.1. *Sejam $(X, \tau, \leq)$ um espaço Priestley e (X, τ_1, τ_2) o espaço pairwise Stone correspondente. Para $C \subseteq X$, as seguintes condições são equivalentes:*

(1) *C é fechado em $(X, \tau, \leq)$.*

(2) *C é compacto em $(X, \tau, \leq)$.*

(3) *C é pairwise compacto em (X, τ_1, τ_2).*

Prova:
(1) $\Leftrightarrow$ (2) : É uma consequência imediata de 1.1.29 e de 1.1.34, visto que (X, τ) é compacto e Hausdorff.
(2) $\Rightarrow$ (3) : É óbvio, visto que $\tau_1, \tau_2 \subseteq \tau$.
(3) $\Rightarrow$ (2) : Por hipótese, cada cobertura $\{U_i | i \in I\}$ de C, com $U_i \in \tau_1 \cup \tau_2$, para todo $i \in I$, possui uma subcobertura finita. Como $\tau = \tau_1 \vee \tau_2$ e $\tau_1 \cup \tau_2$ é uma sub-base para $\tau_1 \vee \tau_2$, tem-se pelo Lema de Alexander que C é compacto em (X, τ).

Para um espaço topológico (X, τ) e um subconjunto Y de X, τ^Y denotará a topologia de subespaço sobre Y, i.e., $\tau^Y := \{U \cap Y | U \in \tau\}$.

Definição 3.2.2. *Seja (X, τ) um espaço espectral. Um subconjunto Y de X é dito um* **subconjunto espectral** *de X se (Y, τ^Y) é um espaço espectral e $U \in \mathcal{E}(X, \tau)$ implica em $U \cap Y \in \mathcal{E}(Y, \tau^Y)$.*

Teorema 3.2.3. *Sejam (X, τ_1, τ_2) um espaço pairwise Stone e (X, τ_1) seu correspondente espaço espectral. Para $Y \subseteq X$, as seguintes condições são equivalentes:*

(1) *Y é pairwise compacto em (X, τ_1, τ_2).*

(2) *Y é um subconjunto espectral de (X, τ_1).*

Demonstração:
(1) $\Rightarrow$ (2) : Visto que Y é pairwise compacto, pelo lema 3.2.1, Y é fechado no espaço Priestley correspondente $(X, \tau, \leq) := (X, \tau_1 \vee \tau_2, \leq)$. Será utilizado $\leq^Y$ para denotar a restrição de $\leq$ a Y. Então, $(Y, \tau^Y, \leq^Y)$ é um espaço Priestley. Pela proposição 2.2.11, (Y, τ_1^Y, τ_2^Y) é pairwise Stone e, por 2.3.6, (Y, τ_1^Y) é um espaço espectral. Seja agora $U \in \mathcal{E}(X, \tau_1)$. Por 2.3.6, $U \in \beta_1$ e, por 2.2.11, $\beta_1 = CpUp(X, \tau, \leq)$. Logo, $U \in CpUp(X, \tau, \leq)$. Portanto, $U \cap Y \in CpUp(Y, \tau^Y, \leq^Y)$, ou seja, $U \cap Y \in \mathcal{E}(Y, \tau_1^Y)$. Assim, Y é um subconjunto espectral de (X, τ_1).
(2) $\Leftarrow$ (1) : Seja Y um subconjunto espectral de (X, τ_1) e:

$$\Delta(Y, \tau^Y) = \{Y \setminus U | U \in \mathcal{E}(Y, \tau^Y)\}.$$

Será mostrado que τ_2^Y é a topologia gerada por $\Delta(Y, \tau_1^Y)$. Para isto, é necessário provar que $\mathcal{E}(Y, \tau_1^Y) = \{U \cap Y | U \in \mathcal{E}(X, \tau_1)\}$. Visto que Y é um subconjunto espectral,

$$\{U \cap Y | U \in \mathcal{E}(X, \tau_1)\} \subseteq \mathcal{E}(Y, \tau_1^Y).$$

Reciprocamente, suponha $U \in \mathcal{E}(Y, \tau_1^Y)$. Então, existe $V \in \tau_1$ tal que $U = V \cap Y$. Como $V \in \tau_1$ e $\mathcal{E}(X, \tau_1)$ é base para τ_1, tem-se que $V = \bigcup\{V_i | i \in I\}$, para alguma família $\{V_i | i \in I\} \subseteq \mathcal{E}(X, \tau_1)$. Então,

$$U = \bigcup\{V_i | i \in I\} \cap Y = \bigcup\{V_i \cap Y | i \in I\}$$

Como U é compacto em (Y, τ_1^Y) e $V_i \cap Y$ é aberto em (Y, τ_1^Y), para todo $i \in I$, existem $i_1, ..., i_n \in I$ tais que $U = (V_{i_1} \cap Y) \cup ... \cup (V_{i_n} \cap Y) = (V_{i_1} \cup ... \cup V_{i_n}) \cap Y$. Seja $W := V_{i_1} \cup ... \cup V_{i_n}$. Visto que $\mathcal{E}(X, \tau)$ é fechado por uniões finitas, tem-se que $W \in \mathcal{E}(X, \tau)$. Portanto, $U = W \cap Y \in \mathcal{E}(Y, \tau^Y)$, para algum $W \in \mathcal{E}(X, \tau)$. Então, $\mathcal{E}(Y, \tau_1^Y) \subseteq \{U \cap Y | U \in \mathcal{E}(X, \tau_1)\}$. Logo, $\mathcal{E}(Y, \tau_1^Y) = \{U \cap Y | U \in \mathcal{E}(X, \tau_1)\}$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \Delta(Y, \tau_1^Y) &:= \{Y \setminus U | U \in \mathcal{E}(Y, \tau_1^Y)\} \\ &= \{Y \setminus (V \cap Y) | V \in \mathcal{E}(X, \tau_1)\} \\ &= \{Y \setminus V | V \in \mathcal{E}(X, \tau_1)\}. \end{aligned}$$

Assim, como τ_2^Y é a topologia gerada por $\{(X \setminus U) \cap Y | U \in \mathcal{E}(X, \tau_1)\} = \{Y \setminus U | U \in \mathcal{E}(X, \tau_1)\}$ e $\{Y \setminus U | U \in \mathcal{E}(X, \tau_1)\} = \Delta(Y, \tau_1^Y)$, tem-se o desejado. Pela proposição 2.3.9, (Y, τ_1^Y, τ_2^Y) é pairwise compacto. Tem-se então que Y é pairwise compacto em (X, τ_1, τ_2).

Juntando os resultados acima, tem-se a seguinte descrição dual das imagens homomorfas de L por meio de todos os três espaços duais de L:

Corolário 3.2.4. *Sejam L um reticulado distributivo e limitado, $(X, \tau, \leq)$ seu espaço Priestley, (X, τ_1, τ_2) seu espaço pairwise Stone e (X, τ_1) seu espaço espectral. Então existe uma correspondência 1-1 entre:*

(i) *imagens homomorfas;*

(ii) *subconjuntos fechados de $(X, \tau, \leq)$;*

(iii) *subconjuntos pairwise compactos de (X, τ_1, τ_2) e*

(iv) *subconjuntos espectrais de (X, τ_1).*

Prova:

De [P84] (Corolário 2.5), sabemos que imagens homomorfas de L estão em correspondência 1-1 com subconjuntos fechados de $(X, \tau, \leq)$. O lema 3.2.1 garante que subconjuntos fechados de $(X, \tau, \leq)$ estão em correspondência 1-1 com subconjuntos pairwise compactos de (X, τ_1, τ_2), que por sua vez estão em correspondência 1-1 com subconjuntos espectrais de (X, τ_1), conforme teorema 3.2.3.

3.3 Dualidades para álgebras de Heyting

Uma subclasse natural da clase dos reticulados distributivos, e que merece destaque, é a classe das álgebras de Heyting, as quais constituem uma importante ferramenta para resolver problemas da Lógica Intuicionista. A primeira dualidade para álgebras de Heyting foi desenvolvida por Esakia, em 1974. Ela é uma versão restrita da dualidade de Priestley. Nesta seção, estão descritas dualidades, que envolvem álgebras de Heyting, por meio dos espaços pairwise Stone e dos espaços espectrais, fornecendo portanto alternativas bitopológica e espectral para a dualidade de Esakia.

Será utilizado **Heyt** para denotar a categoria de álgebras de Heyting e homomorfismos de álgebras de Heyting. Também como notação, $Cp(X)$ se referirá ao conjunto formado pelos subconjuntos abertos-fechados de $(X, \tau, \leq)$, quando não houver risco de confusão.

Definição 3.3.1. *Seja $(X, \tau, \leq)$ um espaço Priestley. Diz-se que $(X, \tau, \leq)$ é um **espaço Esakia** se $A \in Cp(X)$ implica em $\downarrow A \in Cp(X)$.*

Definição 3.3.2.

(1) *Sejam $(X, \leq)$ e $(X', \leq')$ ordens parciais. Uma função $f : X \to X'$ é um **p-morfismo** se ela preserva ordem e:*

$$\forall x \in X \text{ e } \forall x' \in X', \text{ se } f(x) \leq' x' \text{ então } \exists y \in X \text{ tal que } x \leq y \text{ e } f(y) = x'.$$

(2) *Sejam $(X, \tau, \leq)$ e $(X', \tau', \leq')$ espaços Esakia. Uma função $f : X \to X'$ é dita um **morfismo Esakia** se ela é um p-morfismo contínuo.*

Não é difícil verificar que a composição de morfismos Esakia é um morfismo Esakia. Claramente, a identidade é um morfismo Esakia. Sendo assim, os espaços Esakia e os morfismos Esakia formam uma categoria, a qual será denotada por **Esa**.

Teorema 3.3.3. ***Heyt** é dualmente equivalente à **Esa**.*

De fato, os mesmos funtores que estabelecem a equivalência dual de **DLat** e **Pries**, restritos à **Heyt** e **Esa**, respectivamente, fornecem a requerida dualidade.

Com a finalidade de descrever os espaços pairwise Stone e espaços espectrais duais às álgebras de Heyting, é suficiente caracterizar quais os espaços pairwise Stone e espectrais que correspondem aos espaços Esakia. Como uma consequência imediata do Lema 3.2.1 e do Teorema 3.2.3, tem-se o lema seguinte.

Lema 3.3.4. *Seja $(X, \tau, \leq)$ um espaço Priestley, (X, τ_1, τ_2) o espaço pairwise Stone correspondente e (X, τ_1) o espaço espectral correspondente. Então, para $Y \subseteq X$, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) Y é aberto-fechado em $(X, \tau, \leq)$.

(ii) Y e Y^c são pairwise compacto em (X, τ_1, τ_2).

(iii) Y e Y^c são subconjuntos espectrais em (X, τ_1).

Definição 3.3.5. *Seja (X, τ_1, τ_2) um espaço pairwise Stone. $Y \subseteq X$ é dito **pairwise aberto-fechado** se ambos, Y e Y^c são pairwise compactos em (X, τ_1, τ_2). Será utilizado $PC(X)$ para denotar o conjunto dos subconjuntos pairwise abertos-fechados de (X, τ_1, τ_2).*

Definição 3.3.6. *Seja (X, τ_1, τ_2) um espaço pairwise Stone. Então (X, τ_1, τ_2) é dito um **espaço bitopológico Esakia** se $A \in PC(X)$ implica em $Cl_1(A) \in PC(X)$.*

Relembre que, para um espaço pairwise Stone (X, τ_1, τ_2) e para $i \in \{1, 2\}$, δ_i denota a coleção dos subconjuntos fechados de (X, τ_i), que $\beta_1 = \tau_1 \cap \delta_2$ e que $\beta_2 = \tau_2 \cap \delta_1$. O teorema seguinte nos fornece uma caracterização de espaços Esakia bitopológicos.

Teorema 3.3.7. *Seja (X, τ_1, τ_2) um espaço pairwise Stone. Então, (X, τ_1, τ_2) é um espaço bitopológico Esakia se, e somente se, para cada $A \in \beta_1$ e cada $B \in \beta_2$ tem-se $Cl_1(A \cap B) \in \beta_2$.*

Demonstração:

Seja $(X, \tau, \leq)$ o espaço Priestley correspondente a (X, τ_1, τ_2). Suponha que (X, τ_1, τ_2) é um espaço Esakia bitopológico. Sejam $A \in \beta_1$ e $B \in \beta_2$. Então, $A \in \delta_2$ e $A^c \in \delta_1$. Portanto, como $\tau_1 \cup \tau_2 \subseteq \tau$, ambos A e A^c são fechados em $(X, \tau, \leq)$. Um argumento similar mostra que B e B^c são fechados em $(X, \tau, \leq)$. Logo, $A \cap B$ e $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ são fechados em $(X, \tau, \leq)$. Pelo lema 3.2.1, ambos, $A \cap B$ e $(A \cap B)^c$, são pairwise compactos em (X, τ_1, τ_2), implicando que $A \cap B \in PC(X)$. Visto que (X, τ_1, τ_2) é Esakia bitopológico, tem-se que $Cl_1(A \cap B) \in PC(X)$. Pelo Lema 3.3.4, $Cl_1(A \cap B)$ é aberto-fechado em $(X, \tau, \leq)$. Além disso, como $\leq$ é a ordem de especialização de (X, τ_1), tem-se que $Cl_1(A \cap B)$ é um decrescente de $(X, \tau, \leq)$. Portanto, $Cl_1(A \cap B) \in CpDo(X)$. Pela proposição 2.2.8, $CpDo(X) = \beta_2$. Logo, $Cl_1(A \cap B) \in \beta_2$. Reciprocamente, suponha que (X, τ_1, τ_2) é pairwise Stone e que, se $A \in \beta_1$ e $B \in \beta_2$, tem-se $Cl_1(A \cap B) \in \beta_2$. Seja $A \in PC(X)$. Pelo Lema 3.3.4, A é aberto-fechado em $(X, \tau, \leq)$. Como A é fechado e (X, τ) é compacto, tem-se que A é compacto. Visto que $CpUp(X) \cup CpDo(X)$ é uma sub-base para τ e que A é aberto e compacto em (X, τ), tem-se que $A = (U_1 \cap V_1) \cup (U_2 \cap V_2) \cup ... \cup (U_n \cap V_n)$, com $U_1, U_2, ..., U_n \in CpUp(X)$ e $V_1, V_2, ..., V_n \in CpDo(X)$. Pela Proposição 2.2.8, $CpUp(X) = \beta_1$ e $CpDo(X) = \beta_2$. Portanto, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, tem-se $Cl_1(U_i \cap V_i) \in \beta_2$. Logo,

$$Cl_1(A) = Cl_1[(U_1 \cap V_1) \cup ... \cup (U_n \cap V_n)] = Cl_1(U_1 \cap V_1) \cup ... \cup Cl_1(U_n \cap V_n) \in \beta_2 = CpDo(X).$$

Isto mostra que $Cl_1(A)$ é aberto-fechado em $(X, \tau, \leq)$. Assim, pelo Lema 3.3.4, $Cl_1(A) \in PC(X)$ e então (X, τ_1, τ_2) é um espaço Esakia bitopológico.

De agora em diante, um espaço pairwise Stone será dito um espaço *Esakia bitopológico* se ele sastifizer a condição do Teorema 3.3.7.

O próximo resultado nos diz exatamente quais são os (já esperados) espaços pairwise Stone que correspondem aos espaços Esakia.

Teorema 3.3.8. *Seja $(X, \tau, \leq)$ um espaço Priestley e (X, τ_1, τ_2) o espaço pairwise Stone correspondente. Então $(X, \tau, \leq)$ é um espaço Esakia se, e somente se, (X, τ_1, τ_2) é um espaço Esakia bitopológico.*

Prova:

Conclui-se do Lema 3.3.4 que $Cp(X, \tau, \leq) = PC(X)$. Sendo assim:

$(\Rightarrow)$: $A \in PC(X) \Rightarrow A \in Cp(X) \Rightarrow \downarrow A \in Cp(X)$. Pelo corolário 3.1.16, $\downarrow A = Cl_1(A)$. Logo, $Cl_1(A) \in Cp(X) = PC(X)$ e então (X, τ_1, τ_2) é um espaço Esakia bitopológico.

$(\Leftarrow)$: $A \in Cp(X) = PC(X) \Rightarrow Cl_1(A) = \downarrow A \in PC(X) = Cp(X)$. Portanto, $(X, \tau, \leq)$ é um espaço Esakia.

Com a finalidade de caracterizar morfismos entre espaços Esakia bitopológicos, faz-se necessária a seguinte caracterização de morfismos entre espaços Esakia – os chamados p-morfismos:

Lema 3.3.9. *Dados dois conjuntos parcialmente ordenados, $(X, \leq)$ e $(X', \leq')$, e uma aplicação $f : X \to X'$, as seguintes condições são equivalentes:*

(1) *f é um p-morfismo.*

(2) *Para cada $x \in X$, tem-se $f(\uparrow x) = \uparrow f(x)$.*

(3) *Para cada $x' \in X'$, tem-se $f^{-1}(\downarrow x') = \downarrow f^{-1}(x')$.*

Demonstração:

$(1) \Rightarrow (2)$: Sejam $f : X \to X'$ um p-morfismo e $x \in X$. Seja $y \in f(\uparrow x)$. Então existe $a \in \uparrow x$ tal que $f(a) = y$. Como $a \in \uparrow x$, tem-se que $x \leq a$. Visto que f preserva ordem, tem-se $f(x) \leq' f(a) = y$. Logo, $y \in \uparrow f(x)$. Reciprocamente, seja $y \in \uparrow f(x)$. Tem-se $f(x) \leq' y$ e então, como f é p-morfismo, existe $a \in X$ tal que $x \leq a$ e $f(a) = y$. Mas $x \leq a$ implica em $a \in \uparrow x$. Logo, $f(a) \in f(\uparrow x)$, i.e., $y \in f(\uparrow x)$. Portanto, $\uparrow f(x) = f(\uparrow x)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Sejam $x, y \in X$ e suponha $x \leq y$. Logo, $\uparrow y \subseteq \uparrow x$ e então $f(\uparrow y) \subseteq f(\uparrow x)$, i.e., $\uparrow f(y) \subseteq \uparrow f(x)$. Em particular, $f(y) \in \uparrow f(x)$. Assim, $f(x) \leq' f(y)$ e f preserva ordem. Sejam $x \in X$ e $x' \in X'$ e suponha agora que $f(x) \leq' x'$. Isso implica em $\uparrow x' \subseteq \uparrow f(x) = f(\uparrow x)$. Em particular, $x' \in f(\uparrow x)$, ou seja, existe $a \in \uparrow x$ tal que $f(a) = x'$. Como $a \in \uparrow x$, tem-se que $x \leq a$ e $f(a) = x'$. Portanto, f é um p-morfismo.

(1) $\Rightarrow$ (3) : Seja $x \in f^{-1}(\downarrow x')$. Então, $f(x) \in \downarrow x'$, i.e., $f(x) \leq' x'$. Como f é p-morfismo, existe $y \in X$ tal que $x \leq y$ e $f(y) = x'$. Logo, $y \in f^{-1}(x')$ e então $x \in \downarrow f^{-1}(x')$. Reciprocamente, seja $x \in \downarrow f^{-1}(x')$. Então, existe $b \in f^{-1}(x')$ tal que $x \leq b$. Como f preserva ordem, tem-se que $f(x) \leq' f(b) = x'$ e então $f(x) \in \downarrow x'$, isto é, $x \in f^{-1}(\downarrow x')$.

(3) $\Rightarrow$ (1) : É feito de forma similar a "(2) $\Rightarrow$ (1)"

Observe que o Teorema 3.3.8 nos diz que, dado um espaço Esakia bitopológico, o espaço Priestley correspondente, $(X, \tau, \leq)$, é um espaço Esakia. Pelo Lema acima, um p-morfismo $f : X \to X'$ deve satisfazer $f(\uparrow x) = \uparrow f(x)$. De acordo com o Corolário 3.1.16, isso significa dizer que $f(Cl_2(x)) = Cl'_2(f(x))$. Dessa forma, a definição seguinte é feita de forma natural.

Definição 3.3.10. *Sejam (X, τ_1, τ_2) e (X', τ'_1, τ'_2) espaços Esakia bitopológicos. Diz-se que uma função $f : X \to X'$ é um morfismo Esakia bitopológico se f é bi-contínua e $f(Cl_2(x)) = Cl'_2(f(x))$, para todo $x \in X$.*

Conclui-se então do Lema 3.3.9 e do Corolário 3.1.16 que, dados dois espaços Esakia, $(X, \tau, \leq)$ e $(X', \tau', \leq')$, e seus correspondentes espaços Esakia bitopológicos, (X, τ_1, τ_2) e (X', τ'_1, τ'_2), dada $f : X \to X'$ função bi-contínua, f é um morfismo Esakia se, e somente se, f é um morfismo bitopológico Esakia se, e somente se, f é bi-contínua e $f^{-1}(Cl'_1(x')) = Cl_1(f^{-1}(x'))$.

Será usado **BEsa** para denotar a categoria dos espaços Esakia bitopológicos e morfismos Esakia bitopológicos. Obviamente, **BEsa** é uma subcategoria própria de **PStone**. Além disso, juntando os resultados anteriores, tem-se o teorema seguinte.

Teorema 3.3.11. *As categorias **Esa** e **BEsa** são isomorfas. Consequentemente, **Heyt** é dualmente equivalente à **BEsa**.*

De fato, os mesmos funtores Φ : **PStone** $\to$ **Pries** e Ψ : **Pries** $\to$ **PStone**, como definidos no capítulo 2, restritos à **BEsa** e **Esa**, respectivamente, estabelecem o isomorfismo.

Seja (X, τ) um espaço espectral. Um subconjunto Y de X é dito um *subconjunto duplamente espectral* de (X, τ) se ambos, Y e Y^c são subconjuntos espectrais de (X, τ). Será utilizado $DS(X)$ para denotar o conjunto dos subconjuntos duplamente espectrais de X.

Definição 3.3.12. *Seja (X, τ) um espaço espectral. Diz-se que (X, τ) é um espaço Esakia espectral se $A \in DS(X)$ implica em $Cl(A) \in DS(X)$.*

Teorema 3.3.13. *Sejam (X, τ_1, τ_2) um espaço pairwise Stone e (X, τ_1) o correspondente espaço espectral. Então (X, τ_1, τ_2) é um espaço Esakia bitopológico se, e somente se, (X, τ_1) é um espaço Esakia espectral.*

Demonstração:

De acordo com o Lema 3.3.4, $PC(X) = DS(X)$. Suponha que (X, τ_1, τ_2) é um espaço Esakia bitopológico. Dessa forma, $A \in DS(X) \Rightarrow A \in PC(X) \Rightarrow Cl_1(A) \in PC(X) \Rightarrow Cl_1(A) \in DS(X) \Rightarrow (X, \tau_1)$ é um espaço Esakia espectral. A recíproca é análoga.

Definição 3.3.14. *Dados dois espaços Esakia, (X, τ) e (X', τ'), a aplicação $f : X \to X'$ é dita um **morfismo Esakia espectral** se f é espectral e $f(Sat(x)) = Sat'(f(x))$.*

Sejam (X, τ_1, τ_2) e (X', τ_1', τ_2') espaços Esakia bitopológicos e (X, τ_1) e (X', τ_1') os correspondentes espaços Esakia espectrais. Pelo Corolário 3.1.16, para cada $x \in X$, tem-se $Cl_1(x) = Sat_2(x)$ e $Cl_2(x) = Sat_1(x)$. Além disso, pela Proposição 2.3.7, $f : (X, \tau_1) \to (X', \tau_1')$ é espectral. Portanto, uma função bi-contínua $f : X \to X'$ é um morfismo Esakia bitopológico se, e somente se, f é um morfismo Esakia espectral se, e somente se, f é espectral e $f^{-1}(Cl_1(x')) = Cl_1(f^{-1}(x'))$.

A categoria composta pelos espaços Esakia espectrais e morfismos Esakia espectrais será denotada por **SpecE**. Está claro que **SpecE** é uma subcategoria própria de **Spec**. Além disso, os resultados obtidos anteriormente nos dá o teorema seguinte.

Teorema 3.3.15. *As categorias **Esa**, **BEsa** e **SpecE** são isomorfas. Consequentemente, **Heyt** é também dualmente equivalente a **SpecE**.*

Os funtores F : **PStone** $\to$ **Spec** e G : **Spec** $\to$ **PStone**, restritos a **BEsa** e **SpecE**, respectivamente, juntamente com o Teorema 3.3.11, nos garante os isomorfismos acima.

Observação 3.3.16. *Em [BL11], os autores desenvolvem, entre outras coisas, uma dualidade entre as categorias de lógicas abstratas intuicionistas e de espaços espectrais com uma implicação. Não deve ser difícil de estabelecer tal dualidade entre álgebras de Heyting e espaços espectrais com implicação. Também acreditamos que as dualidades bitopológicas para a categoria dos reticulados distributivos podem ser desenvolvidas com ligeiras modificações para a categoria das lógicas abstratas com e sem implicação.*

Referências

[AJPT] Alas, O.; Junqueira, L.; Passos, M.; Tomita, A.. *Topologia geral.*

[BBGK10] Bezhanishvili, G.; Bezhanishvili, N.; Gabelaia, D. e Kurz, A.. *Bitopological duality for distributive lattices and Heyting algebras*, Math. Struct. in Comp. Science, v. **20**, pp. 359-393, Cambridge University Press, 2010.

[BL11] Brunner, A. e Lewitzka, S.. *A topological representation of intuitionistic and distributive abstract logics*, IM-UFBA, 2011.

[C75] Cornish, W.H..*On H. Priestley´s dual of the category of bounded distributive lattices*, Mat. Vesnik **12**, (27)(4), 1975, 329 – 332.

[D10] Pinto, D.. *Representação de reticulados distributivos através de espaços de Priestley*, Monografia, IM-UFBA, 2010.

[DP92] Davey, B.A. e Priestley, H.A.. *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge, 1992.

[G84] Goldblatt, R.. *Topoi the Categorial Analysis of logic*, 2. ed. Amsterdam: North-Holland, 1984.

[H69] Höchster, M.. *Prime Ideal Structure in Comutative Rings*, Transactions AMS,**142**, 1969, 43 - 60.

[JM06] Jung, A. e Moshier, M.A.. *On the bitopological nature of Stone Duality*, Technical Report, CSR-06-13, School of Computer Science, University of Birmingham, 2006.

[M98] Mac Lane, S..*Categories for the Working Mathematician*, Springer, 1998.

[M02] Miraglia, F. *An Introduction to Partially Ordered Structures and Sheaves*, Preprint, 2002. (Publicado em 2006, na Editora Polimetrica).

[P70] Priestley, H. A.. *Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces*, Bull. London Math. Soc., **2**, p. 186-190, 1970.

[P84] Priestley, H. A..*Ordered Sets and Duality for Distributive Lattices*, Oxford, 1984.

[S74] Salbany, S..*Bitopological spaces, compactifications and completions*, Mathematical Monographs of the University of Cape Town1, 1974.

[S09] Santana, E.. *Dualidade de Stone*, Monografia, IM-UFBA, 2009.

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA
CEP: 40170 -110
<http://www.pgmat.ufba.br>