UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS

CURSO DE MESTRADO EM ECONOMIA

TEXTO PARA DISCUSSÃO Nº 17

EXERCÍCIOS COM O SETOR VERTICALMENTE INTEGRADO

JEAN LUC ROSINGER

1983

JEAN-LUC ROSINGER
CURSO DE MESTRADO EM ECONOMIA/UFBa.

"EXERCÍCIOS COM O SETOR VERTICALMENTE INTEGRADO"

TRABALHO APRESENTADO NO I ENTIP

SALVADOR/Ba.-09,10 e 11 DE JUNHO DE 1983

I 19 abril de 1993

VERSÃO PROVISÓRIA

Na tradição da economia política clássica, o valor das mercadorias constitui uma estrutura complexa, do trabalho necessário aos preços de mercados, através dos preços de produção. A investigação da relação entre quantidades de trabalho e preços de produção recebeu um poderoso impulso da obra de Piero-SRAFFA. Este último mostrou inequivocamente que o sistema dos preços de produção, articulado unicamente a partir da descrição dos processos produtivos e da estipulação de uma regra de repartição do produto líquido, permite obter os preços sem referência direta ao trabalho. Sraffa apontava, porém, para esta relação, através de dois tipos de operações possíveis: a redução dos preços a quantidade de trabalho datado e a construção de subsistemas.

O método dos subsistemas ficou relativamente esquecido na ampla literatura sobre os preços de produção, mas [redacted] foi retomado com brilhantes desenvolvimentos por Luigi Pasinetti, sob a forma dos setores verticalmente integrado. São as sugestões de Pasinetti que queremos apresentar e explorar. Cremos dispor aqui de uma construção lógica fornecendo notáveis esclarecimentos sobre o sistema dos preços clássicos, e , após apresentar os resultados de Pasinetti, ilustraremos a pertinência da construção considerando o caso da produção conjunta e temas ligados a "transformação" dos valores(no sentido de Marx) em preços de produção. É talvez oportuno, para honrar a excepcional criatividade de Marx, lembrar que o método de subsistemas foi de fato implicitamente introduzido por ele. Estudando, nos primeiros cadernos das Teorias sobre a Mais-Valia, o problema da circulação do valor do capital constante e o da formação e da circulação da renda, Marx propunha um modo de decomposição da circulação do valor entre esferas de produção substancialmente parecido com o método dos subsistemas.

01. SUBSISTEMAS, SETORES VERTICALMENTE INTEGRADOS: O CASO DA PRODUÇÃO SIMPLES

Consideremos inicialmente o caso mais simples, o de um sistema econômico onde cada processo de produção produz um só bem(indústrias com produto único) e utiliza unicamente capital circulante.

O período de produção de cada processo será também suposto uniforme.

Cada bem é produzido através de outros bens e de trabalho. Este sistema pode ser caracterizado a partir de:

- uma matriz quadrada $A \equiv [aij]$, $(i,j=1,2...n)$, tal que aij representa a quantidade do bem i necessária para produzir uma unidade do bem j. Naturalmente $aij \geqslant 0$.
- um vetor linha $l \equiv l_j$, $(j= 1,2 ...n)$, tal que l_j corresponde à quantidade de trabalho, suposta homogênea, para produzir uma unidade de bem j. Temos por hipótese $l_j > 0$.
- um vetor -coluna $X \equiv [x_i]$, $(i= 1,2 ...n)$, cujo elemento x_i corresponde à quantidade bruta produzida do bem i
- um vetor-coluna $Y = [yi]$, $(i= 1,2,...n)$, cujo elemento yi corresponde à quantidade líquida produzida do bem i
- um vetor-coluna $S \equiv [si]$, $(i= 1,2,...n)$, cujo elemento si corresponde à quantidade do bem i necessária como estoque de capital para obter o produto bruto X.

O sistema será suposto produtivo, isto é, suposto capaz de produzir um produto líquido positivo à partir de níveis não-negativos de atividade dos processos produtivos. (1)

As relações de quantidade do sistema econômico considerado podem ser então descritas a partir das seguintes equações:

(1) $X - AX = Y$

(2) $AX = S$

A descrição do sistema de preços correspondente necessi ta, por sua vez, da introdução de:

- um vetor-linha $p \equiv \left[p_i \right]$, $(i= 1,2,\ldots n)$ cujo elemento **p_i** representa o preço unitário do bem **i**
- **r**, escalar denotando a taxa de lucros, suposta uniforme (2)
- **w**, escalar denotando a taxa do salário unitário, suposta uniforme.

Podemos então escrever o sistema de preços unitários correspondendo à equi-remuneração do preço do capital investido em cada processo de produção, supondo que o salário é adiantado:

$$(3) \quad (pA + wl)\,(1+ r) = p$$

O sistema (3) é o dos preços naturais dos clássicos, ou ainda o sistema dos preços de produção de Marx.

Parece-nos oportuno, antes de definir os setores verticalmente integrados de Pasinetti, de considerar brevemente uma construção lógica proposta por Piero Sraffa (cf [10], Apêndice A p.89), denominada por ele de "sub-sistema". De fato, como o indica Pasinetti (cf. [6] p.20), o setor verticalmente integrado corresponde a uma caracterização particular do subsistema de Sraffa, singularizada pela introdução do conceito de " unidades de capacidade produtiva verticalmente integradas".

Sendo dado o sistema econômico produzindo o produto bruto X, Sraffa propõe de subdividí-lo em "sub-sistemas", cada um formando um novo sistema cujo produto líquido é composto de um único bem, escolhido entre os bens compondo o produto líquido do sistema original. Teremos assim o mesmo número de subsistemas que o dos diversos bens que integram o produto líquido do sistema original. A operação consiste portanto em construir, para o bem **i**, correspondendo a um dos bens do produto líquido original, um sistema constituído de frações dos processos produtivos do sistema original, tais que, neste "subsistema":

a totalidade de cada bem capital consumido para obter o produto líquido do subsistema corresponde ao produto bruto de cada bem capital produzido (isto é, cada processo produtivo produzindo um bem-capital utilizado no subsistema é considerado na proporção correspondendo à quantidade total deste bem utilizada no subsistema), exceção feita para o bem **i** se este for bem capital consumido no subsistema; o processo produtivo produzindo o bem **i** de referência é tomado na proporção correspondendo à obtenção de um produto líquido deste bem cuja quantidade é igual a quantidade líquida produzida no sistema original.

Formalmente, se consideramos o produto líquido Y, podemos constituir um vetor-coluna Yi cujos elementos são todos nulos, salvo o elemento da i^{ésima} linha, igual a yi , o i^{ésimo} elemento do vetor Y. O subsistema correspondente à dotenção do produto líquido Yi será tal que:

(4) $AXi + Yi = Xi$

se Xi é o vetor correspondente ao produto bruto necessário à produção de Yi. Portanto , a partir de (4) temos:

(5) $Xi = [I - A]^{-1} Yi$

se a inversa de $[I - A]$ existir. Como A é uma matriz não negativa produtiva, sabemos que $[I - A]^{-1}$ existe e é não negativa. (3) Podemos agora observar que o vetor Xi corresponde também a um vetor de níveis de atividades para os **n** processos produtivos que compõem o sistema original. Expresso de outra maneira, podemos dizer que Xi define um conjunto de multiplicadores permitindo construir o subsistema correspondente ao produto líquido Yi. O vetor Xi é certamente não nulo; se acrescentamos que existe pelo menos um bem básico (4) e se ficarmos atentos às relações entre bens básicos e não básicos do sistema, podemos melhor caracterizar o vetor Xi. De fato, observando que Xi, dada a natureza de vetor Yi, corresponde à i^{ésima} coluna de $[I - A]^{-1}$ multiplicada pelo escalar Yi, este vetor pode ser estudado a partir do exame da matriz $[I - A]^{-1}$. (5) Para este fim, temos que primeiro reorganizar a matriz A , decomponível no caso geral, através de permutações simultâneas das linhas e colunas adequadas, obtendo assim uma matriz cuja estrutura é:

$$(6)\qquad \begin{bmatrix} A_b & A_{b_1} & A_{b_2} & \dots & A_{bk} \\ 0 & A_{n1} & A_{n2_1} & \dots & A_{nk_1} \\ 0 & 0 & A_{n2} & \dots & A_{nk_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n_k} \end{bmatrix}$$

A diagonal principal é composta de matrizes quadradas indecomponíveis, a matriz A_b corresponde aos bens básicos, e as matrizes A_{n_i} ($i = 1,2,\dots k$) aos grupos de não básicos formados através da consideração da existência de bens não básicos tais que todos entram, direta ou indiretamente, na produção de todos (temos assim, neste caso hipotético, k grupos, um grupo podendo ser reduzido a um bem, e sendo possível, neste caso, que a matriz correspondente A_{n_i} seja nula). As matrizes A_{b_i} ($i=1,2,\dots k$), em geral retangulares, correspondem aos coeficientes dos bens básicos que entram na produção dos não básicos do grupo i; uma destas matrizes no mínimo é não nula. Enfim, as matrizes $A_{n_{i_j}}$ ($i= 2,\dots,k$), ($j= 1,2,\dots k-1$), também retangulares em geral, são matrizes correspondendo aos coeficientes dos não básicos do grupo i que entram na produção dos não-básicos do grupo j, matrizes em geral nulas na medida em que os bens não básicos formam grupos que não são interligados. Já que por hipótese existe um bem básico, temos também que, para cada coluna i ($i=1,2,\dots k$) da matriz (6), pelo menos uma das matrizes situadas acima da matriz A_{n_i} da diagonal principal é não nula.

Voltando agora à matriz $\left[I - A\right]^{-1}$, podemos ver que ela terá, em correspondência com a matriz (6), a forma:

$$\begin{bmatrix} A'_b & A'_{b_1} & A'_{b_2} & \dots & A'_{bk} \\ 0 & A'_{n_1} & A'_{n2_1} & \dots & A'_{nk_1} \\ 0 & 0 & A'_{n_2} & \dots & A'_{nk_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A'_{n_k} \end{bmatrix}$$

e sabemos(cf [1] p.257-260) que as matrizes A'_b , A'_{bi} (i= 1,2, ... k) e A'_{n_i} (i=1,2,...k) são matrizes positivas; enquanto que as matrizes $A'_{n_{ij}}$ (i=2,...k)(j=1,2..,k-1) são positivas(se, pelo menos, a produção de um dos bens não básicos do grupo j necessita pelo menos do consumo produtivo de um dos bens não básicos do grupo i) ou nulas.

Podemos assim concluir que o vetor Xi, correspondendo à coluna i da matriz $\left[I - A\right]^{-1}$ multiplicada pelo escalar yi, é tal que:

- se o índice i corresponde a um bem básico, os elementos de Xi correspondentes aos bens básicos são todos positivos; os outros elementos de Xi são nulos.

- se o índice i corresponde a um bem não-básico, os elementos de Xi correspondentes aos bens básicos, os que correspondem aos bens não básicos do mesmo grupo de não básicos que aquele do bem i, e os dos não básicos pertencendo a grupos de não-básicos que entram na produção do grupo de não-básicos ao qual pertence o bem i são todos positivos; os outros elementos de Xi são todos nulos.

Interpretando, como sugerido, os elementos de Xi como conjunto de multiplicadores permitindo de definir os subsistemas, temos assim a caracterização desejada dos subsistemas: sabemos quais são os processos produtivos que vão fazer parte de cada subsistema.

O vetor Xi permite ainda definir a quantidade total de trabalho do subsistema correspondente ao produto líquido Yi: ela será igual ao produto vetorial $L_i = lXi$. Enfim, o estoque de bens capitais necessários no subsistema considerado é evidentemente $S_i = AX_i$.

Resumindo, para a quantidade yi do bem i construímos um subsistema caracterizado pelo produto bruto Xi necessário à obtenção desta quantidade como produto líquido do subsistema; pela quantidade de trabalho Li e pelo estoque de bens-capitais Si. A intenção de Sraffa, nesta construção, é clara: como, com exceção do processo produtivo produzindo o bem i, todos os outros processos reproduzem simplesmente os bens capitais gastos no subsistema, " o trabalho total empregado pode ser considerado como indo, direta ou indiretamente, para produzir tal mercadoria"(isto é a mercadoria i[6].

Caberá a Pasinetti propor um novo olhar sobre o subsistema Sraffiano, e sugerir a construção de subsistemas de ordem superior.

Seguindo as definições de Pasinetti(cf [6] p.19-21), vamos considerar o vetor v tal que:

(7) $v \equiv \left[v_i\right] \equiv 1 \left[I - A\right]^{-1}$ $(i=1,2,\ldots n)$

e a matriz quadrada H assim construída:

(8) $H \equiv \left[h_i\right] \equiv A \left[I - A\right]^{-1}$ $(i= 1,2,\ldots n)$

sendo que h_i corresponde à $i^{ésima}$ coluna de H.

Se e'_i é o vetor coluna unitário cujo $i^{ésimo}$ elemento é igual a 1, todos os outros sendo nulos, então podemos reescrever:

$v_i = 1 \left[I - A\right]^{-1} e'_i$

$h_i = A \left[I - A\right]^{-1} e'_i$

Nossos desenvolvimento anteriores a respeito dos subsistemas permitem agora interpretar v_i como sendo a quantidade total de trabalho necessária, direta e indiretamente, para obter uma unidade de produto líquido do bem i no subsistema correspondente. Pasinetti chama o coeficiente v_i de "coeficiente de trabalho verticalmente integrado" para o bem i $(i = 1,2,..n)$. Da mesma maneira, h_i aparece agora como o conjunto dos bens capitais, isto é, um bem composto, necessários direta e indiretamente como estoques para obter uma unidade de produto líquido do bem i . Pasinetti propõe chamar este bem-composto de "unidade de capacidade produtiva verticalmente integrada" para o bem i$(i=1,2,\ldots n)$.[7] O sector verticalmente integrado para produzir o bem i enquanto único bem final(isto é , enquanto único produto líquido do subsistema correspondente) é definido pelo escalar v_i e pelo vetor h_i. O nosso sistema econômico, composto de n processos produtivos pro duzindo m bens, permite definir n setores verticalmente integrados. Parafraseando Pasinetti, podemos declarar que, através do conceito de setor verticalmente integrado, estaríamos reclassificando a quantidade total de trabalho utilizada e a quantidade total de estoques de bens-capitais disponíveis na economia, o critério de reclassificação sendo o de passar dos processos produtivos (as indústrias, objetos reais) aos setores verticalmente integrados (construção lógica, integração vertical ou ainda definição de subsistemas). Nós temos de fato:

$$L = 1X \qquad S = AX$$

se L é a quantidade total de trabalho utilizada na economia. Utilizando os setores verticalmente integrado definidos a partir de (7) e (8) podemos então escrever:

$$L = 1\left[I - A\right]^{-1} Y = vY$$
$$S = A\left[I - A\right]^{-1} Y = HY$$

ou ainda, visto que $\sum_{i}^{n} Yi = Y$ por construção:

$$L = \sum_{i}^{n} vi\ Yi \qquad S = \sum_{i}^{n} h^{i}\ Yi$$

expressões que descrevem a reclassificação aludida.

Da mesma maneira que caracterizamos as colunas da matriz $\left[I - A\right]^{-1}$ podemos enfim caracterizar as colunas da matriz H, as unidades de capacidade produtiva verticalmente integrada : basta considerar o produto de matrizes $A\left[I - A\right]^{-1}$. É facil mostrar (cf. a forma da matriz (6)) que a $i^{ésima}$ coluna h^{i} da matriz H será em geral semi-positiva: os coeficientes correspondentes aos bens básicos serão sempre positivos assim como os que correspondem aos grupos de não básicos que entram na produção dos não básicos do mesmo grupo; os coeficientes dos outros não-básicos serão positivos ou nulos. Este resultado era esperado : temos de fato(8):

$$H = A\left[I - A\right]^{-1} = A\left[I + A + A^2 + \ldots\right] = A + A^2 + A^3 + \ldots$$

isto é, h^{i}, a capacidade produtiva verticalmente integrada necessária à obtenção de uma unidade líquida de de bem i corresponde aos estoques de bens -capitais j(j= 1,2, ...n) direta e indiretamente necessários à obtenção de i.

Os coeficientes de trabalho verticalmente integrados, por sua vez, são todos positivos(dada nossa hipótese que o trabalho é necessário para a produção de cada bem, é que existe pelo menos um bem básico).

O cenário está agora pronto para uma abstração teórica de ordem superior. A nosso ver, a grande contribuição teórica de Pasinetti reside em propor uma nova integração vertical, a do setor verticalmente integrado obtido supra.(9) Consideramos o vetor V_k tal que:

(9) $V_k \equiv \left[V_{k_i} \right] \equiv VH$ (i= 1,2,...n)

e a matriz H^2

(10) $H^2 \equiv \left[h_{2i} \right] \equiv H.H = A \left[I - A \right]^{-1} H$ (i= 1,2,...n)

sendo que V_{k_i} é o i^esimo elemento de V_k enquanto que h_{2i} é a i^ésima coluna de H^2. Qual é a significação desta construção? A familiaridade que tentamos desenvolver com o conceito de subsistema não deveria agora deixar margem à estranheza. O elemento V_{k_i} do vetor corresponde à quantidade de trabalho direta e indiretamente necessária para obter uma unidade líquida da nossa unidade de capacidade produtiva verticalmente integrada definida supra; quantidade que chamaremos, com Pasinetti , de coeficiente de trabalho verticalmente integrado de segunda ordem. Paralelamente, o vetor h_{2_i} constitui uma nova unidade de capacidade produtiva verticalmente integrada, isto é, o que podemos chamar de unidade de capacidade produtiva de segunda ordem para obter uma unidade de capacidade produtiva de primeira ordem h_i (esta última permitindo por sua vez obter uma unidade líquida de bem i).(10) Teremos assim n novos subsistemas aparecendo como n coeficientes de trabalho verticalmente integrado do vetor V_k e n capacidades produtivas verticalmente integrada da matriz H^2(isto é, as n colunas h_{2_i} de H^2) . Poderiamos de novo caracterizar estas unidades com respeito aos coeficientes dos bens básicos e dos não básicos -

cos; nos parece inútil reutilizar um raciocínio agora familiar. É porém importante observar que o vetor V_k é positivo: de fato, o vetor **v** sendo positivo e dada a matriz H que já descrevemos, V_k é um vetor positivo.

Doravante, uma sequência lógica impõe-se. Temos que construir sucessivamente setores verticalmente integrados de ordem superior. Os **n** setores verticalmente integrados de ordem **s** corresponderão ao vetor.

(11) $V_k s-1 \equiv V.H^{s-1} = V_k s-2\ H$ e à matriz

(12) $H^s = H^{s-1} \cdot H$

isto é, o vetor $V_K s-1$ representa os **n** coeficientes de trabalho verticalmente integrado de ordem **s** , e a matriz H^s as **n** unidades de capacidade produtiva verticalmente integradas de ordem **s**. Claramente, o vetor $V_K s-1$ é positivo.

É tempo agora de considerar o sistema dos preços à luz dos setores verticalmente integrados. Uma notável expressão nos aguarda.

02. SETORES VERTICALMENTE INTEGRADOS E PREÇOS (CASO DA PRODUÇÃO SIMPLES)

Vamos sucessivamente estudar o sistema dos preços utilizando primeiro, os setores verticalmente integrados da primeira ordem e, segundo, a série completa dos setores verticalmente integrados de todas as ordens.

A expressão (3) dos preços de produção de Marx (dos preços naturais clássicos) pode ser facilmente manipulada de maneira a obter os setores verticalmente integrado de primeira ordem:

$$p = pA\ (1+r) + wl\,(1+r)$$

$$p(I - A) = rpA + wl(1+r)$$

$$p = rpA\ \left[I - A\right]^{-1} + wl\ \left[I - A\right]^{-1}(1+r)$$

e relembrando as expressões (7) e (8):

(13) $p = rpH + wv(1 + r)$

Portanto, o preço **pi** do bem **i** aparece como sendo a soma dos salários e dos lucros sobre os salários cor respondentes ao coeficiente de trabalho verticalmente in tegrado do setor i; e dos lucros sobre o preço da unidade de capacidade produtiva verticalmente integrada:

$$p_i \equiv r p h_i + w v_i \ (1+r) \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

A expressão é notável: a operação de integração vertical torna transparente a proposição de Adam Smith segunda a qual o preço reduz-se à soma dos salários, dos lucros e da renda da terra (não considerada no nosso sistema). Quando a taxa de lucro é nula, os preços se tornam proporcionais às quantidades de trabalho direta e indiretamente necessárias à obtenção de uma unidade de produto líquido i. Medidas em termos de trabalho comendado, os preços são então iguais aos valores de Marx[11]. Quando a taxa dos salários é nula, a taxa de lucro é máxima.

Exprimindo a taxa de lucro máxima por R temos:

$$p \equiv RpH$$

$$p\ (I - RH) = 0$$

e sabemos que o vetor não negativo dos preços p é o autovetor a esquerda da matriz H associado à raiz de Frobenius λ (H) desta matriz, única raiz característica fornecendo resultados economicamente significativos[12]. Portanto temos:

$$R = \frac{1}{\lambda(H)}$$

Enfim, quando $o < r < R$, nossa hipótese que cada processo produtivo utiliza trabalho garante que os preços são positivos. Temos a partir de (13):

(14) $p \equiv wv\ (I - rH)^{-1}\ (1+r)$

e como v é positivo os preços são positivos.[13] Se medirmos os preços em termos de trabalho comendado (w=1), temos na expressão (14) o operador linear que transforma os valores v em preços de produção medidos em trabalho comandado. Podemos observar que nesta transformação, as unidades de capacidade produtiva verticalmente integradas têm um papel fundamental (isto é, a transformação depende das colunas de H). Uma possível relação entre o "problema" da transformação e a construção lógica de setores verticalmente integradas afigura-se. Voltaremos ao assunto.

Podemos porém utilizar um procedimento mais sugestivo para obter o vetor dos preços **p**; basta recorrer às integrações verticais de ordem superior (cf. [6] p.29-31). Vimos (equação (13)) que os preços são a soma dos salários, e dos lucros sobre o preço das unidades de capadade produtiva verticalmente integrada. Vamos examinar mais de perto os lucros sobre os bens-capitais.

O produto pH é um vetor, cujos elementos são os preços das **n** unidades de capacidade produtiva verticalmente integrada de primeira ordem. Escrevemos, seguindo Pasinetti:

$$Pk \equiv [pki] \equiv pH$$

e $$pki \equiv ph_i \qquad (i= 1,2,...n)$$

Ora, utilizando (13) obtemos:

$$Pk = rpH^2 + wvH(1+r)$$

e a partir de (9):

$$(15) \quad pk = rpH^2 + wv_k(1+r)$$

O vetor pk aparece assim, por sua vez, como soma de salários e lucros, mais exatamente como soma dos salários e lucros sobre os salários correspondentes aos coeficientes de trabalho verticalmente integrado de segunda ordem, e dos lucros sobre o preço das unidades de capacidade integrada de segunda ordem. Portanto, a expressão (13) pode ser reescrita agora como (utilizando (15)):

$$p= r^2 \, p \, H^2 + rwv_k(1+r) + wv(1+r)$$

O produto pH^2, vetor dos preços das unidades de capacidade produtiva verticalmente integrada de segunda ordem, pode ser sua vez decomposto de novo em salários e lucros.

Escrevendo: $pk_2 = pH^2 = pk \cdot H$

Temos a partir de (15):

$Pk_2 = rpH^3 + wv_kH(1+r)$ e o vetor dos preços **p** pode ser agora escrito como sendo:

$$p= r^3pH^3 + r^2 \, wv_{k2} \, (1 + r) + rwv_k(1+r)+wv(1+r)$$

já que (cf. equação (11)) $V_k\, H = V_{k2}$.

Estamos agora lidando com a integração vertical de terceira ordem (isto é, colunas de H^3 e os coeficientes que são os elementos de V_{k2}). Repetindo a operação de decomposição dos preços das unidades de capacidade produtiva verticalmente integrada, chegaremos a uma expressão dos preços do tipo:

$$p = r^{s+1}\, pH^{s+1} + \left[w(1+r)(v + rv_k + \ldots + r^s v_{k^s})\right]$$

onde figuram um "resíduo", os lucros sobre o preço das unidades de capacidade produtiva de ordem (s+1), e os salários e lucros sobre os salários de uma soma de coeficientes de trabalho verticalmente integrado ponderados pela taxa de lucro. Ora, como o indica Pasinetti, o resíduo pode ser eliminado: basta operar a decomposição dos preços das unidades de capacidade produtiva verticalmente integrada em salários e lucros até o infinito.(14)
Finalmente teremos:

$$(16)\quad p = w(1+r)(v + rv_k + r^2 V_{k2} + \ldots)$$

e todos os coeficientes de trabalho verticalmente integrado contribuem ao cálculo dos preços. Medidos em trabalho comandado, os preços são iguais à soma infinita dos coeficientes de trabalho verticalmente integrado ponderados pela taxa de lucro (se r é menor que a taxa máxima de lucro R, cf. nota (14)), isto é, à quantidade de trabalho incorporado ponderadas(15).

Temos ainda que provar que a soma infinita $(v + rv_k + r^2 v_{k2} + \ldots)$ é convergente, o que imediato: basta observar que:

$$v + rv_k + r^2\, v_{k2} + \ldots = v(\,I + rH + r^2\, H^2 + \ldots)$$

e que para $r < R$ (isto é, $r < \frac{1}{\lambda(H)}$), temos:

$(I + rH + r^2\, H^2 + \ldots)$ converge para $(I - rH)^{-1}$.(16)

Portanto a expressão (16) corresponde à expressão (14).
Resumindo: através da construção dos setores verticalmente integrados, Pasinetti chega à notável propriedade de que os preços em trabalho comandado são iguais a uma soma de quantidades de trabalho incorporado ponderadas pela taxa de lucro (se esta última for menor que a taxa de lucro máxima R), e mais exatamente, à soma dos coe -

ficientes de trabalho verticalmente integrado de todas as ordens ponderados pela taxa de lucro.

Esta expressão promete uma fértil aplicação ao problema da transformação dos valores em preços de produção. Porém, antes de abordar o assunto, gostaríamos de examinar rapidamente a extensão ao caso da produção com capital fixo.

03. SETORES VERTICALMENTE INTEGRADO: CASO DA PRODUÇÃO CONJUNTA

Desenvolvemos até agora os conceitos de subsistema e de setor verticalmente integrado com referência ao caso da produção simples, envolvendo unicamente capital circulante. Esta situação é evidentemente irrealista: temos que procurar investigar, ainda que brevemente, se a construção conserva sua legitimidade no caso da produção utilizando capital fixo. E se não for o caso, temos que indicar porquê.

E sabido que esta situação deve ser abordada no âmbito da produção conjunta (cf. [10] p.63,§ 73). Os bens capitais duráveis são então considerados como bens do mesmo tipo que os constituindo o capital circulante, dando lugar, porém, no final do período de produção, a um novo tipo de bem, aparecendo como produto conjuntamente com os bens que são o objeto próprio do processo de produção; mais exatamente, reaparecem os mesmos bens-capitais duráveis, porém de idade diferente, considerados como bens específicos. A descrição dos processos produtivos deve então incluir, além da matriz A - incluindo todos os bens capitais, circulantes e fixos — e do vetor l, uma nova matriz, a matriz:

$$B = \left[b_{ij} \right] \qquad (i,j=1,2,...n)$$

cujo coeficiente b_{ij} denota a quantidade do bem i produzida pelo processo j. Devemos também neste caso escolher uma procedura de normalização dos coeficientes de A,B,e l;

para conservar as nossas definições adotadas no caso da produção simples, suporemos que todos os coeficientes de cada processo (as colunas de A,B e de l) se referem à unidade produzida do bem i=j (i,j = 1,2,...n). Neste caso, as expressões (1),(2) e (3) tornam-se as seguintes:

(17) $(B - A) X = Y$

(18) $AX = S$

(19) $(pA + wl)(1+r) = pB$

A decomposição em subsistemas à la Sraffa não será formalmente afetada neste caso mais complexo. De fato, podemos sempre reagrupar fracções de processos de maneira a obter o produto líquido **Yi** composto unicamente da quantidade **yi** do bem **i**, parte do produto líquido original do sistema. Escrevemos:

$$AXi + Yi = BXi$$

e o vetor Xi dos níveis de atividade necessárias para obter Yi será:

$$Xi = \left[B-A\right]^{-1} Yi$$

se a matriz $\left[B - A\right]$ for inversível.(17) Analogamente ao caso da produção simples, a estrutura dos multiplicadores para obter o subsistema correspondente ao bem **i** é dada pela coluna **i** de $\left[B - A\right]^{-1}$. Porém, nada garante que este vetor-coluna será não negativo. A interpretação deste resultado é direta: não podemos obter o bem **i** como único produto líquido do sistema se a coluna **i** da matriz $\left[B - A\right]^{-1}$ não for não-negativa. Mas isto não acarreta que seja impossível obter o bem **i** como produto líquido; podemos eventualmente produzir produtos líquidos incluindo o bem **i**. É de observar que se é possível obter o bem **i** como único produto líquido (isto é, se a coluna **i** de $\left[B - A\right]^{-1}$ for semi-positiva ou positiva), então diremos que **i** é separadamente produtível (18). Evidentemente, se $\left[B - A\right]^{-1}$ for não-negativa, então será possível obter qualquer produto líquido com níveis positivos de atividade.

A caracterização do subsistema como setor verticalmente integrado é também direta, e não acarreta dificuldades formais. Vamos redefinir (7) e (8), o vetor dos coeficientes de trabalho verticalmente integrado e a matriz das unidades de capacidade produtiva verticalmente integrada, como sendo:

(20) $v \equiv l \left[B - A\right]^{-1}$

(21) $H \equiv A \left[B - A\right]^{-1}$

Sabemos — por causa da eventual não não-negatividade de $\left[B - A\right]^{-1}$ — que tanto **v** como a matriz H podem incluir coeficientes negativos. É porém interessante notar que se todos os bens do sistema são separadamente produtíveis, então **v** será um vetor positivo. Mas como interpretar um coeficiente de trabalho verticalmente integrado negativo? Para este fim, é esclarecedor realizar uma pequena manipulação a partir de (20):

$$v \equiv l\left[B - A\right]^{-1} = l\left[B - A\right]^{-1}\left[B - A\right]\left[B - A\right]^{-1}$$

$$v \equiv vB\left[B - A\right]^{-1} - vA\left[B - A\right]^{-1}$$

(22) $v_i = vB\left[B - A\right]^{-1} e_i' - vA\left[B - A\right]^{-1} e_i'$

Ora, v_i é a quantidade de trabalho direta e indiretamente necessária para obter uma unidade líquida do bem **i**, como o conceito de subsistema o deixa claro; a matriz $A\left[B - A\right]^{-1}$ tem a mesma significação que no caso de produção simples, e a sua coluna **i** corresponde às quantidades de bens capitais necessárias para obter uma unidade líquida de **i**; enfim a matriz $B\left[B - A\right]^{-1}$ é tal que sua coluna **i** indica as quantidades brutas a serem produzidas para obter uma unidade líquida de **i**. A conclusão é portanto que se v_i for negativo na expressão (22), então a quantidade direta e indireta de trabalho para obter uma unidade líquida de **i** suplementar diminui [19]. Este resultado não é de surpreender no caso da produção conjunta: as combinações das quantidades produzidas nos diversos processos podem ser tais que a produção de uma unidade a mais de produto líquido **i** implique diminuição da quantidade de trabalho direta e indiretamente necessária. Gostaríamos aqui de sublinhar a grande transparência proporcionada pelo método dos subsistemas(ou ainda dos setores verticalmente integrado) para a compreenção da produção conjunta. Como Sraffa o mencionou (cf [10] p.56-55 , enquanto que a redução a quantidades de trabalho datadas é impossível, o método aqui empregado é límpido.

Quanto à matriz H, a presença de elementos negativos nas suas colunas(as unidades de capacidade produtiva verticalmente integrada) não destrói a sua significação. Retomando a nossa discussão da matriz $[B - A]^{-1}$, podemos dizer simplesmente que alguns produtos líquidos, implicando uma capacidade produtiva verticalmente integrada não não-negativa, serão impossíveis, porquê necessitando de níveis negativos de atividade. Da fato, se a $i^{ésima}$ coluna de H inclui elementos negativos, isto é necessariamente consequência da presença de elementos negativos na $i^{ésima}$ coluna de $[B - A]^{-1}$, já que A é não negativa.

Continuando o processo de construção de setores verticalmente integrados, o setor de ordem s seria caracterizado pelo vetor V_k s - 1 e a matriz H^s seguintes:

(22) $V_k s-1 \equiv 1[B - A]^{-1} H^{s-1} = 1[B-A]^{-1}H^{s-2}\ H = V_k s-2\ H$

(23) $H^s \equiv \left[A[B - A]^{-1}\right]^s$

equivalentes às expressões(11) e (12) no caso da produção simples. É claro que o sistema dos preços(19), do seu lado, pode ser rescrito:

$$p[B - A] = rpA + (1 + r)\ wl$$
$$p = rp\ A\ [B - A]^{-1} + (1+ r)\ wl\,[B - A]^{-1}$$

(24) $p = rpH + (1+ r)wr$

A utilização dos setores verticalmente integrado de todas as ordens permite escrever analogamente à expressão(16);

(25) $p = w(1 + r)\ (v + rv_k + r^2\ v_k{}^2 + \ldots)$

De fato, a convergência da expressão $(v + rv_k + r^2 v_k{}^2 + \ldots)$ é independente da não negatividade ou não da matriz H. A única condição a ser respeitada continuada sendo $r < \frac{1}{|\lambda(H)|}$ (20), e o resíduo $p(rH)^{s+1}$ desaparece com $s \rightarrow \infty$

nestas condições. Como sublinhado por Pasinetti (cf. [6] p.37), este é um resultado notável: os preços medidos em trabalho comandado continuam a ser iguais a uma soma de quantidades de trabalho incorporado ponderadas pela taxa de lucro. Porém, podem surgir preços negativos: os coeficientes de trabalho verticalmente integrado, de fato, podem ser negativas, como foi visto. No entanto, se os bens i são todos separadamente produtiveis (caso da matriz $[B - A]^{-1}$ não não-negativa), a possibilidade de preços negativos é descartada.

A explicação da possibilidade de preços negativos está fornecida por Sraffa(cf. [10] §69 p.59): para uma taxa de lucro dada, um preço pode tornar-se negativo se o preço de um produto conjuntamente produzido é tal que o preço agragado dos dois produtos continua maior que o dos seus meios de produção na proporção requerida pela taxa de lucro.

É claro que os valores também podem ser negativos: com r=0 e w=1, se o vetor v não é não negativo, concluímos que temos valores negativos. A significação deste resultado já foi esclarecida supra.

Devemos concluir que, apesar da construção de setores verticalmente integrado ser um procedimento de maior generalidade que a redução à quantidades de trabalho datado, é necessário investigar as condições de produção suscetíveis de fornecer resultados economicamente significativos no caso da produção conjunta com o maior cuidado. Não parece que para esta tarefa a construção de Pasinetti seja a mais indicada[21]. No entanto , como indicado por Sraffa, este método fornece meios potentes de explicar alguns resultados a priori singulares da produção conjunta.

N O T A S

(1) Um sistema econômico é chamado produtivo se existe um vetor $x \geqq 0$ de níveis de atividade dos processos produtivos tal que, para a matriz A não-negativa, $x > Ax$. Neste caso $\lambda(A)$, a raiz de módulo máximo da equação característica $[\lambda I-A]$, que chamaremos raiz de Frobenius, é menor que 1. Esta propriedade equivale a supor que a matriz A verifica as bem conhecidas condições de Hawkins - Simons, e o sistema é capaz de produzir qualquer produto líquido não-negativo.

Para uma apresentação completa destas propriedades, ver [5] p. 7-23 e p.107-154.

(2) A hipótese da uniformidade da taxa de lucros pode ser evidentemente substituída pela da existência de uma estrutura constante das taxas de lucros próprias à cada processo de produção. Neste caso, utilizaríamos em vez de r, a expressão $r.\hat{R}$, produto do escalar r pela matriz diagonal $\hat{R}$ descrevendo a estrutura das taxas de lucros, sem prejuízo dos resultados a serem obtidos infra.

(3) Propriedade das matrizes não negativas, já que $\lambda(A) < 1$. cf [5] teor. 17.1 p.118.

(4) Relembramos que são chamados básicos os bens que entram na produção, direta ou indiretamente, de todos os outros bens produzidos no sistema. A hipótese da existência de pelo menos um bem básico assegura que a matriz A não é totalmente decomponível, caso no qual não poderíamos mais falar da existência de "um" sistema econômico. O artigo de referência a respeito destes problemas no caso da produção simples é VARRI P.(1979), Basic and Non-basic commodities in Mr. SRAFFA'S price system, Metroeconomica 31(1) p.55-72.

(5) Retomamos aqui observações feitas por Eurico ZAGHINI em [11]. Zaghini discute também no seu artigo um caso de impossibilidade de definição do vetor X_i, isto é, quando a inversa de

$[I - A]$ inexiste.. Este caso foi por nós excluído quando supomos que A é uma matriz produtiva.

(6) Citamos aqui a tradução de [10], São Paulo, Abril Cultural (1983), p. 251. Evidentemente, o preço do produto líquido do subsistema é igual à soma dos salários pagos no subsistema, do lucro sobre estes salários — já que consideramos aqui o salário como adiantado— e do lucro sobre o preço dos bens capitais. Quando a taxa de lucro é nula, o preço do produto líquido torna-se proporcional à quantidade de trabalho do subsistema.

(7) Vimos de fato que $Xi = [I - A]^{-1}\, Yi$ no subsistema **i** para produzir o bem **i** como produto líquido. Tomando yi=1, temos:

$$Xi = [I - A]^{-1}\, e'_i$$

$$Li = lXi = l\,[I - A]^{-1}\, e'_i = ve'_i = vi$$

$$Si = AXi = A\,[I - A]^{-1}\, e'_i = He'_i = hi$$

(8) A matriz A sendo produtiva por hipótese, sabemos que a soma:

$I + A + A^2 + \ldots$

converge em $[I - A]^{-1}$. cf. [5] teor. 19.1 p.129

(9) cf. [6] p. 25 - 26: "Vertically integrated sectors for investment goods expressed in physical units of vertically integrated productive capacity".

(10) Temos: $V_{k_i}\, e'_i = vH\, e'_i = vh_i$

(e h_i é a unidade de capacidade produtiva verticalmente integrada para obter uma unidade líquida do bem **i**)

Também: $h_{2i} = H^2\, e'_i = H \,.\, H\, e'_i = H.\, h_i$

(11) Sabemos que o sistema dos valores de Marx (aqui identificados a quantidades de trabalho incorporado, sem esquecer que a identificação é problemática) é dado pelo sistema:

$$vA + wl = v$$

colocando w = 1 (isto é, escolhendo como unidade de medição a unidade de trabalho homogêneo). Neste caso, os preços medidos em trabalho comandado quando r = 0:

$$pA + 1 = p$$

são iguais aos valores de Marx (mais exatamente, às quantidades de trabalho incorporado, aqui identificadas aos valores).

(12) Estamos aqui fazendo implicitamente a hipótese que, para a matriz H, a sua raiz de Frobenius é a raiz de Frobenius da matriz positiva situada em cima da diagonal principal da sua forma normal. Podemos declarar então, neste caso, que a única solução economicamente significativa é associada à raiz de Frobenius $\lambda(H)$ de H. Mais: um teorema nos garante que neste caso todos os preços (autovetor à esquerda de H associado a $\lambda(H)$) são positivos, incluindo os dos bens não-básicos. cf. F.R. GANTMACHER (1960), The theory of Matrices, vol. 2 (New York: Chelsea), teor. 6 p.77.

Podemos observar, por sinal, que esta propriedade corresponde efetivamente à hipótese de Sraffa mencionada por Pasinetti ([6] p.23 nota 8) segunda a qual a taxa de reprodução interna dos bens não-básicos é maior que a dos básicos. É fácil mostrar que existe de fato uma relação entre $\lambda(A)$ e $\lambda(H)$; mais exatamente:

$$\lambda(A) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\lambda(H)}}$$

e nossa hipótese a respeito de $\lambda(H)$ corresponde à hipótese que $\lambda(A)$ é raiz de Frobenius da única matriz isolada da forma normal (6) de A.

(13) Quando $0 < r < R$, $[I - rH]^{-1}$ é uma matriz não negativa cuja forma pode ser estudada a partir de nossas indicações supra sobre a forma de matriz H.

cf. [5] teor. 17.1 p.118 (teorema de Frobenius)

(14) Quando $s \to \infty$ a expressão $r^s\, p\, H^s = pr^s H^s$ tende a zero, para valores de $r < R$, taxa máxima de lucro.

De fato, se p e um vetor finito, é suficiente que $(rH)^s$ tenda a zero para verificar nossa asserção. Sabemos que isto é o caso si $r < \dfrac{1}{|\lambda(H)|}$, isto é se $r < R$.

cf. para uma prova [7], Appêndice Matematica, p.309.

É portanto importante observar que a expressão(16) só é válida se r, a taxa de lucro, é inferior à taxa máxima de lucro R.

(15) De fato, o vetor V_{ks}, sendo igual a VH^s, pode ser interpretado como sendo o vetor dos valores das unidades de capacidade produtiva verticalmente integrada de ordem s, isto é, como vetor de quantidades de trabalho incorporado.

(16) cf. [5] teor. 19.1 p.129

(17) A inversibilidade da matriz $[B - A]$ equivale a supor que os n processos produtivos são linearmente independentes, como requerido por Sraffa (cf. [10] p. 43 nota 2). Isto é facilmente verificado através da utilização de transformações elementares sobre a matriz $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ de tamanho(2n,n): posto$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ = posto $\begin{bmatrix} A \\ B-A \end{bmatrix}$.

(18) cf. terminologia adotada por B. Shefold(1980), Fixed Capital as a joint-product and the Analysis of accumulation with difrerent forms of technical progress" p.141,in Pasinetti(ed.), Essays on the theory of joint production.

(19) Resultados similares são apontados por Paola Potestio in [8].

(20) Deve ser ressaltado que a raiz característica de maior módulo em valor absoluto da matriz H perde no entanto sua significação no caso da produção conjunta: nada autoriza, em geral, a

considerar que ela é associada a vetores próprios não negativos(isto é: a preços economicamente significativos) . Além disso, o intervalo de variação da taxa de lucro fornecendo resultados economicamente significativos não é necessariamente limitado por λ(H).

Essas observações enfraquecem bastante a significação do intervalo garantido a convergência.

(21) A nosso conhecimento, os trabalhos que mais avançaram nesta direção são os de Bertram Schefold(cf. em particular o trabalho citado na nota 18). Os notáveis resultados obtidos por Schefold correspondem, para o caso específico dos bens capitais fixos, a um método diferente do dos setores verticalmente integrados. Trata-se de construir o equivalente a um sistema de produção simples, porém com coeficientes de trabalho e coeficientes da matriz A que se tornam funções da distribuição. O procedimento é parecido ao da redução a quantidades de trabalho datado no caso da produção com capital circulante.

B I B L I O G R A F I A

(1) DORFMAN R., SAMUELSON P.A., SOLOW R.M. (1958): Linear Programming and Economic Activity (New York: MAC GRAW-HILL)

(2) GAREGNANI P. (1960): Il Capitale nelle Teorie della Distribuzione (Milano: A.Giuffrè Editore)

(3) GAREGNANI P. (1974): Sobre a Teoria da Distribuição e do Valor em Marx e nos Economistas Clássicos, in Progresso Técnico e Teoria Econômica (São Paulo: Editora Hucitec 1980)

(4) LIPIETZ A. (1982): The so-called "Transformations Problem" revisited , Journal of Economic Theory 26 (1) p.59-88.

(5) NIKAIDO H. (1970): Introduction to Sets and Mappings in Modern Economics Amsterdam: North -Holland)

(6) PASINETTI L. (1973): The notion of vertical integration in Economic Analysis, Metroeconomica 25 (1) p. 1-29. Reimpresso em Pasinetti L. (ed.) (1980), Essays on the theory of joint Production (New York: Colombia University Press)

(7) PASINETTI L. (1975): Lezioni di Teoria della Produzione (Bologna: il Mulino)

(8) POTESTIO P. (1980): Some Remarks on Vertically integrated Sectors, Metroeconomica 32 (1) p. 63-75.

(9) ROSINGER J.L. (1982): Um reexame do Problema da Transformação: A "solução" Duménil-Lipietz, Anais do IV Encontro Brasileiro de Econometria (SBE, Brasília) p. 313 - 336.

(10) SRAFFA P. (1960): Production of Commodities by means of Commodities (Cambridge University Press)

(11) ZAGHINI E. (1967): Una nota sui subsistemi di Sraffa, Studi Economici 22 p.290-305. Reimpresso e traduzido em Faccarello G. e de Lavergne P. (ed) (1977), Une nouvelle Approche en Economie Politique? Essais sur Sraffa (Paris: Economica).