INTRODUÇÃO AO EQUILÍBRIO GERAL : MODELO DE DOIS SETORES E DOIS FATORES.

Alberto R. Musalem.

Volume I.

PREFÁCIO

No ensino de equilíbrio geral, e em particular do modelo de equilíbrio geral de dois setores e dois fatores, tem-se enfrentado a dificuldade da falta de texto caracterizado por tratamento conjuntamente algébrico e gráfico, que permita a nível aceitável a acessibilidade da matéria a estudantes do primeiro estágio de pós-graduação.

Conseqüência direta da ausência desse texto é o farto dispêndio de tempo, gasto em aula em simples desenvolvimentos algébricos, o que necessariamente torna as aulas muito cansativas tanto para o professor como para os estudantes.

O presente texto procura oferecer subsídio ao ensino da matéria. Ele inicia-se com uma introdução ao equilíbrio geral, no capítulo I; aí simplesmente se procura localizar o leitor na problemática da análise, sem nenhuma pretensão de esgotar o tópico.

Imediatamente após, o texto concentra-se no estudo do modelo de equilíbrio geral de dois setores e dois fatores, com dada dotação de fatores. No capítulo II estuda-se o equilíbrio geral de produção com preço relativo dos bens exogenamente determinado. No capítulo III levanta-se essa restrição, porém de maneira simples, supondo-se a existência de dado mapa de indiferença social.

No capítulo IV introduz-se no modelo o progresso tecnológico, e estudam-se os impactos das suas diferentes caracterizações na estrutura de produção e preços relativos. Finalmente, o capítulo V analisa os efeitos da existência de distorções no mercado de fatores na estrutura de produção, curva de transformação e preços relativos.

O presente trabalho não apresenta contribuição original do autor; a matéria exposta encontra-se de algum modo inserida na bibliografia citada no final de cada capítulo.

Colaboraram como assistentes na realização deste texto os mestrandos ISAIAS COELHO e FLÁVIO BORGES BOTELHO FILHO, na fase final; na fase inicial colaborou o mestrando JOSÉ MURILO PHILIGRET DE OLIVEIRA BAPTISTA. O paciente trabalho de datilografia coube a ANTONIETA BORGES PAGANUCCI.

Meu reconhecimento à Fundação Rockefeller por ter financiado o presente projeto.

Salvador, novembro de 1976.

ALBERTO ROQUE MUSALEM
Professor Visitante.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO À TEORIA DO EQUILÍBRIO GERAL

1.1 INTRODUÇÃO

De acordo com a análise neoclássica o elemento fundamental na determinação do comportamento é a maximização ou otimização: o PRODUTOR maximiza o lucro, sujeito à restrição imposta pela função de produção; o CONSUMIDOR maximiza utilidade, sujeito à restrição orçamentária; a oferta de trabalho se origina da maximização de utilidade entre renda e lazer (ou, equivalentemente, de assinação do tempo disponível entre trabalho e lazer).

Se cada membro da sociedade procura alcançar seus objetivos individuais independentemente do comportamento dos demais, é possível que seja encontrada uma posição de equilíbrio para todos - isto é, com a ação individual chegaremos a uma posição onde todos estejam em equilíbrio? A resposta a esta pergunta é dada pela análise do equilíbrio geral estacionário.

1.2 MERCADO DE UM PRODUTO

Para entendimento do problema façamos uma colocação simples:

> Numa economia só existem duas pessoas, que se dedicam à cultura do milho. Cada uma possui uma quantidade fixa de terra e produz um só produto homogêneo (milho). O fator de produção variável é único: trabalho. Cada agricultor tem duas atividades:

Como empresário:

-emprega trabalho;
-paga salário de mercado, em termos do produto homogêneo;
-aufere renda.

Como consumidor

-consome produto da terra;
-pode ofertar trabalho ao salário de mercado (ao outro agricultor ou para si mesmo).

A renda total, em milho, de cada agricultor, consiste de renda da terra por ele possuída mais a renda salarial re recebida pelos serviços prestados para si mesmo ou para um outro agricultor.

Como estamos examinando situação estacionária a renda é integralmente gasta em consumo:

renda total = consumo; ou
produção líquida de milho = consumo; ou ainda
produção bruta de milho= consumo + reposição de semente.

O equilíbrio econômico geral resultará da ação de duas pessoas nas suas atividades conjugadas de empresários e consumidores. Antes, porém, devemos analisar separadamente as respectivas atividades.

1.2.1 O AGRICULTOR ENQUANTO EMPRESÁRIO

Coerentemente com o retroexposto faremos os seguintes supostos:

<u>1º suposto</u>: Como o trabalho é o único fator variável, e a terra é fator fixo, temos função de produção do tipo

$$q = f(L) \qquad (1.2.1)$$

q representando produto físico, L trabalho e f a relação funcional. Ademais, suporemos que cada produtor operará no setor relevante da função de produção, onde o produto marginal do insumo é positivo mas decrescente:

$f' > 0$ e $f'' < 0$, onde

$\underline{f}'$ e $\underline{f}''$ denotam respectivamente as derivadas primeira e segunda da função de produção.

2º suposto: Como competitivo que é, o empresário enfrenta preços dados no mercado. (Eventualmente poderia ser levantada a objeção de inviabilidade de concorrência perfeita, por existirem só dois agentes. Isto pode ser resolvido supondo que cada indivíduo atua como se o preço de mercado fosse dado, isto é, estivesse fora do seu controle; caso contrário teríamos o problema de indeterminação do equilíbrio, próprio do monopólio bilateral). Em nosso modelo milho pode ser trocado por trabalho ou vice-versa: temos mais de um elemento e assim conseguimos troca num mercado, e em consequência surge o problema de determinar um preço relativo.

Por simplicidade tomaremos como numerário o preço do milho: p=1. Daí resulta que o salário é o termo de troca de trabalho por milho, e portanto é definido em termos reais. Como só temos dois produtos envolvidos, e o preço de um é numerário, o salário w é o único preço relativo relevante.

3º suposto: Cada agricultor procurará maximizar seus lucros. A função de produção do agricultor 1 pode ser representada por

$$q_{S1} = f_1 (L_{D1}) \qquad (1.2.2)$$

onde q_{S1} é produção do agricultor 1 e L_{D1} é trabalho total empregado, próprio ou alheio, utilizado pelo agricultor 1 para obter aquela produção.

Sendo w_o o dado nível de salários, os custos totais serão

$$C = w_o \cdot L_{D1}$$

e a função a ser maximizada é

$$\pi = q_{S1} - w_o \cdot L_{D1} \qquad (1.2.3)$$

onde π é o lucro do empresário em termos de milho.

A primeira condição de máximo requer que a primeira derivada seja nula:

$$\frac{\partial \pi}{\partial L_{D1}} \equiv f_1' - w_o = 0$$

Então o elemento de controle do máximo lucro será a determinação do nível ótimo de emprego conseguido quando:

$$f'_1 = w_o \qquad (1.2.4.)$$

No gráfico (1.2.1) nós representamos a função de produção e a linha de gasto total. O salário é representado por tg $\hat{\alpha}$; no ponto A a curva q_{S1} tem inclinação igual a tg $\hat{\alpha}$ (cumprindo-se a condição acima de máximo lucro). A projeção de A sobre abcissa L_{D1} dá E, o nível de trabalho ótimo que será empregado. Empregando-se OE obtém-se o produto EA, com o qual se remunera o trabalho (EB) e ainda sobra a renda da terra AB para o agricultor empresário. Note-se que a distância AB é um máximo.

No gráfico inferior é representada a demanda de trabalho pelo agricultor 1, para o caso linear, identificada pela produtividade marginal do trabalho; também neste caso dado w_o e a relação funcional acha-se o emprego OE de equilíbrio, $OEJW_o$ é o pagamento total ao trabalho e W_oJH a renda da terra auferida pelo agricultor um equivalente a seu lucro.

Aplicando o mesmo procedimento ao agricultor 2 obtemos sua correspondente curva de demanda de trabalho ; agregando as duas curvas obtemos a curva de demanda de trabalho para toda a economia, como se vê no gráfico 1.2.2. Nele, o último diagrama mostra a demanda total de trabalho inversamente relacionada com o salário real.

1.2.2 O AGRICULTOR ENQUANTO CONSUMIDOR

Aqui também estabeleceremos três supostos:

<u>1º suposto</u>: o consumidor tem uma função de utilidade da forma

$$U_i = U_i \; (q_{Di} \; , \; L_{Si}) \qquad (1.2.5)$$

onde q_{Di} é quantidade consumida do bem e L_{Si} é oferta de trabalho pelo i-ésimo agricultor, trabalho comparecendo à função como um desbém.

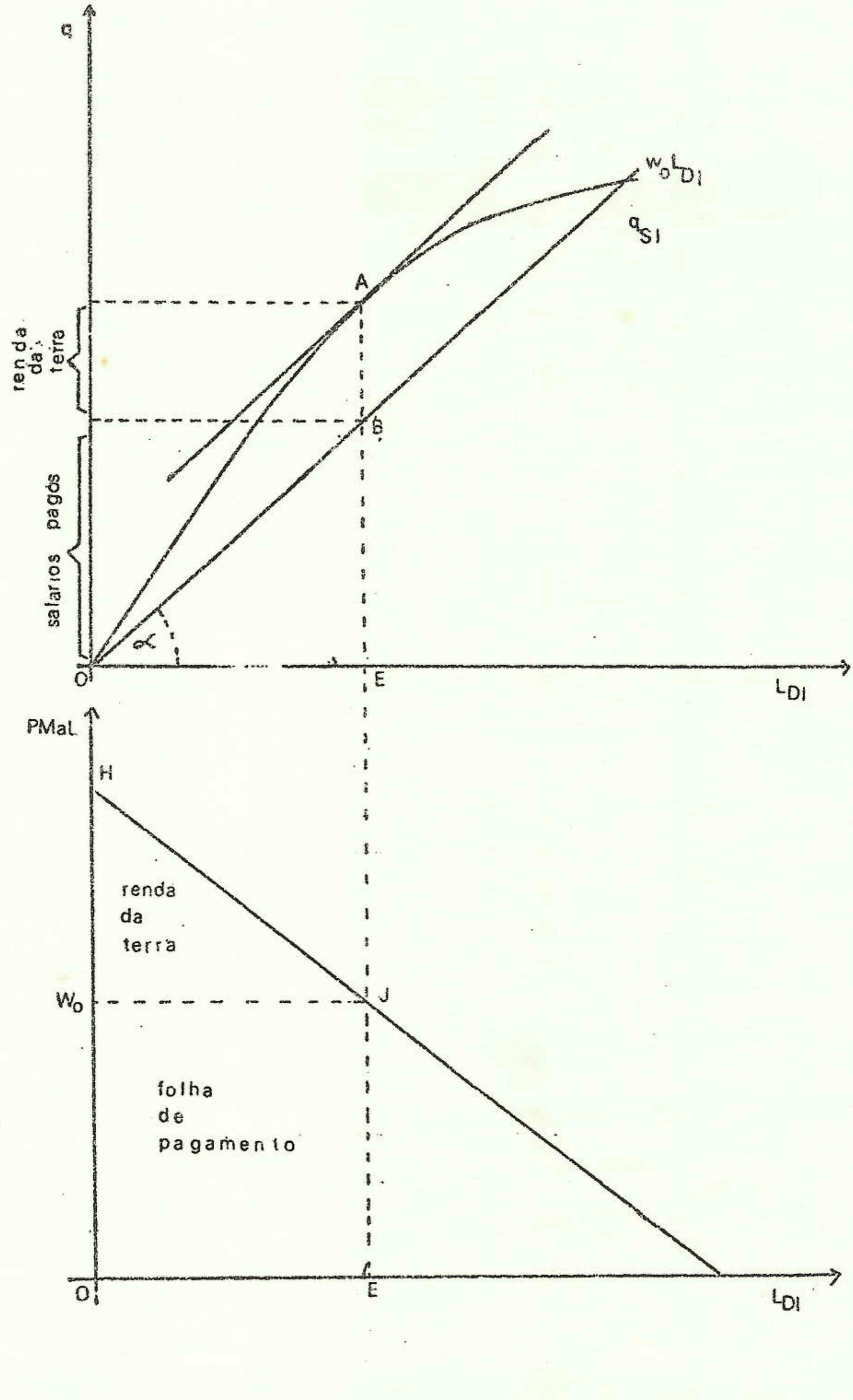

q
$w_o L_{DI}$
q_{SI}
A
B
renda da terra
salarios pagos
α
O
E
L_{DI}
PMaL
H
renda
da
terra
W_o
J
folha
de
pagamento
O
E
L_{DI}

Gráfico (1.2.1)

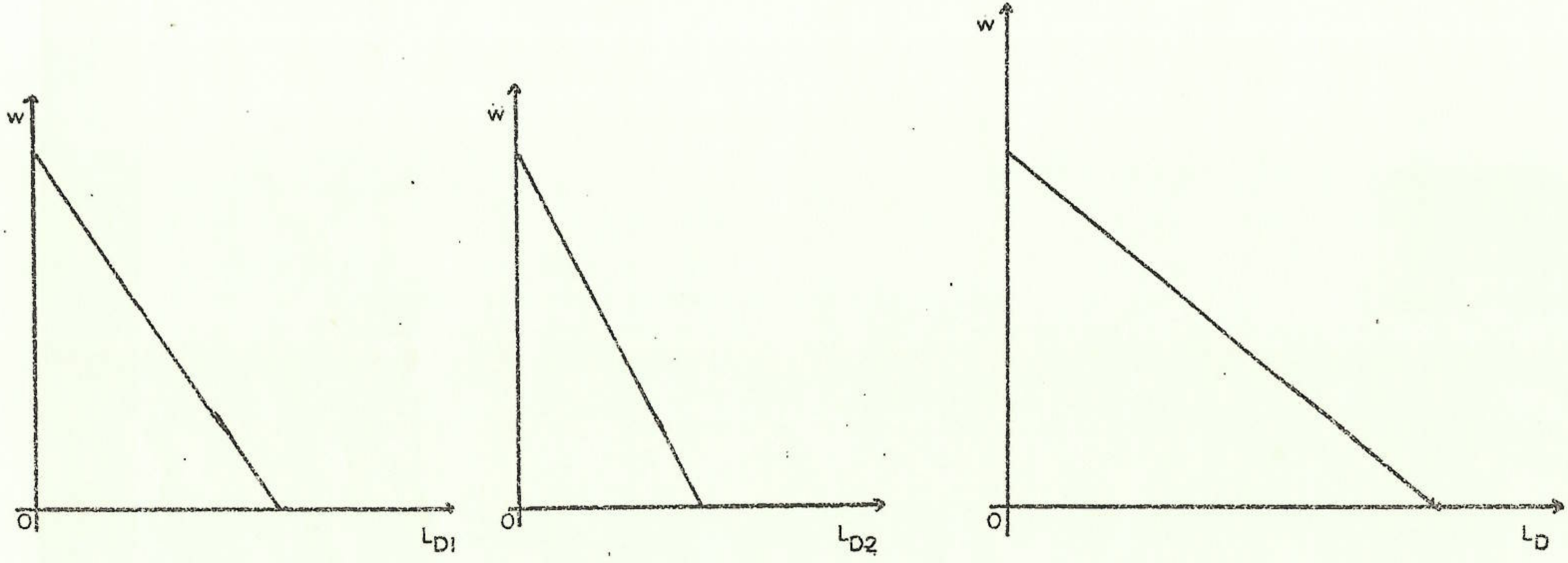


Gráfico (1.2.2)

O agricultor procura maximizar a utilidade, que é crescente com o consumo do bem e descrescente com a quantidade de trabalho:

$$U'_{q_D} > 0 \quad e \quad U'_{L_S} < 0$$

onde U'_{q_D} é a utilidade marginal auferida pelo consumo do milho e U'_{L_S} é a utilidade marginal do trabalho (desutilidade).

2º suposto: O consumidor está sujeito à restrição orçamentária

Receita Total = renda + receita salarial =

$$R_i(w) + w \, . \, L_{Si} \quad (w) \qquad (1.2.6)$$

Essa equação expressa a receita de cada agricultor como função do salário real; a renda R_i (w) é função inversa de w, mas o oposto ocorre, no caso normal de oferta de trabalho com inclinação positiva, com as receitas salariais,

$w \, L_{Si}$ (w).

3º suposto: Cada agricultor trabalha para si, para o outro, ou parte do tempo em cada terra. Vejamos como o agricultor 1, por exemplo, decide distribuir seu tempo disponível.

O consumidor 1 maximizará sua utilidade

$$U_1 = U_1 \, (q_{D1} \, , L_{S1}) \qquad (1.2.7)$$

sujeito à restrição orçamentária

$$q_{D1} = R_1 \, (w) + w \, . \, L_{S1} \, (w)$$

Pela técnica dos multiplicadores de Lagrange,

$$G = U_1 \, (q_{D1} \, , L_{S1}) - \lambda \left[R_1 \, (w) + w \, . \, L_{S1} \, (w) - q_{D1}\right] \qquad (1.2.8)$$

Sabemos que a utilidade máxima ocorrerá quando a taxa marginal de substituição entre os elementos de escolha (oferta de trabalho *versus* receita auferida) for igual ao salário:

$$\frac{\partial G}{\partial q_{D1}} = U'_{q_{D1}} + \lambda = 0 \quad e \quad \frac{\partial G}{\partial L_{S1}} = U'_{L_{S1}} - \lambda w = 0$$

$$\text{Assim :} \quad - U'_{q_{D1}} = \lambda \quad e \quad U'_{L_{S1}} = \lambda w$$

Dividindo membro a membro, conseguimos a condição, onde a taxa marginal de substituição entre trabalho e renda, TMS, é igual ao salário de mercado.

$$TMS = \frac{dq_{D1}}{dL_{S1}} = - \frac{U'_{L_{S1}}}{U'_{q_{D1}}} = w \qquad (1.2.9)$$

No gráfico (1.2.3), a taxa marginal de substituição (TMS) é positiva decorrente de estarmos relacionando, num mapa de indiferença, renda (bem com utilidade marginal positiva) e trabalho (com utilidade marginal negativa), o que nos dá curvas de indiferença positivamemte inclinadas. A tangente $\hat{\theta}$ indica o salário de mercado. O equilíbrio maximizador da utilidade ocorre no ponto H, onde a quantidade L_{S1} de trabalho é oferecida no mercado em troca da renda salarial wL_{S1}.

No gráfico (1.2.4) resumimos o processo global de otimização do agricultor. O agricultor 1 emprega L_{D1} de trabalho, do qual L_{S1} é a oferta de trabalho feita a si mesmo e $(L_{D1} - L_{S1})$ é quantidade de trabalho alheio. C é a folha de pagamento salarial (incluido o seu próprio salário) e aufere a máxima renda π como empresário. No mesmo gráfico, consideramos a sua posição como consumidor, transladando a origem do sistema de eixos de O para O'; como ele já dispõe da renda de sua terra, assim traçamos a partir do nível A' uma

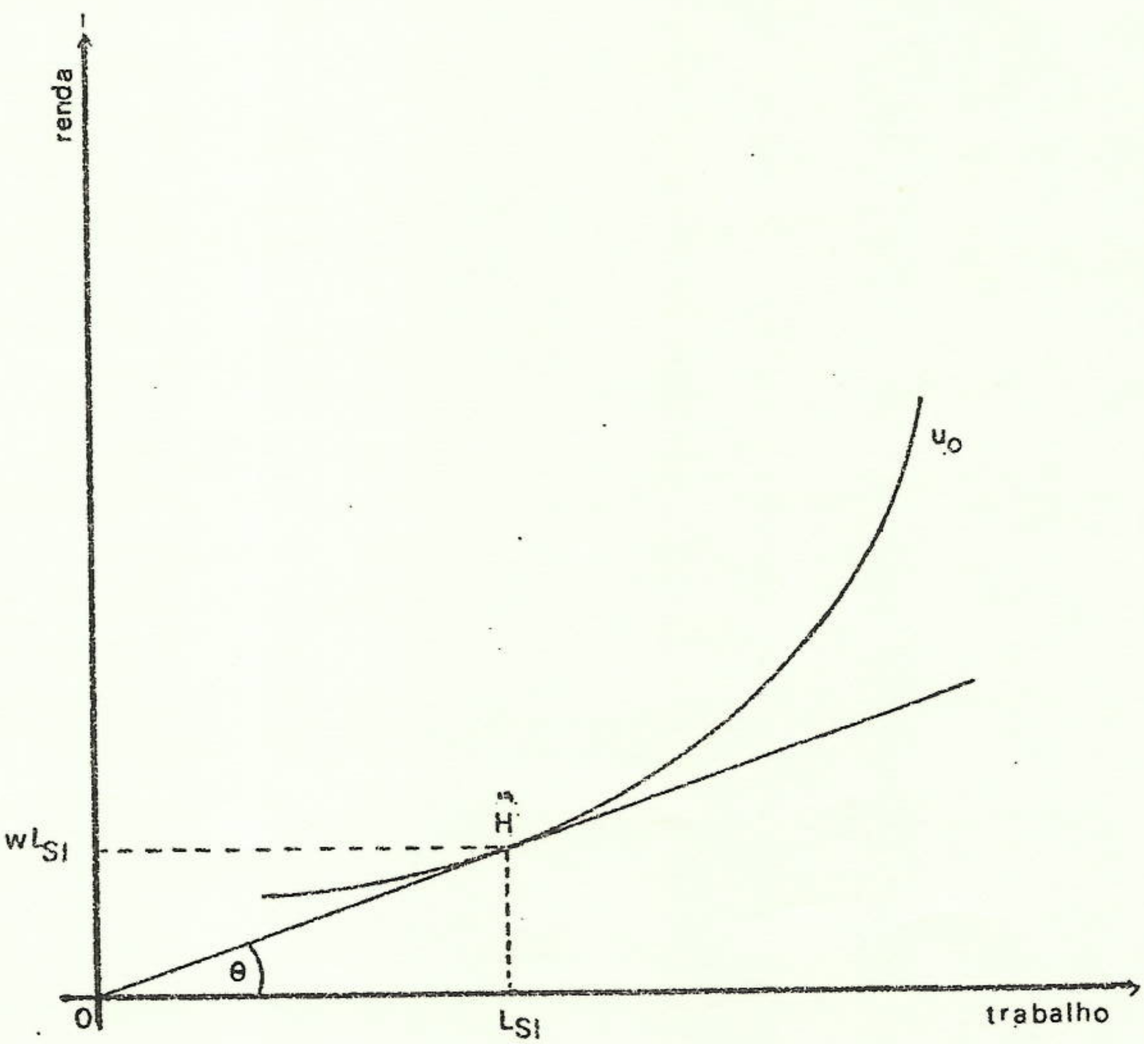


Gráfico (1.2.3)

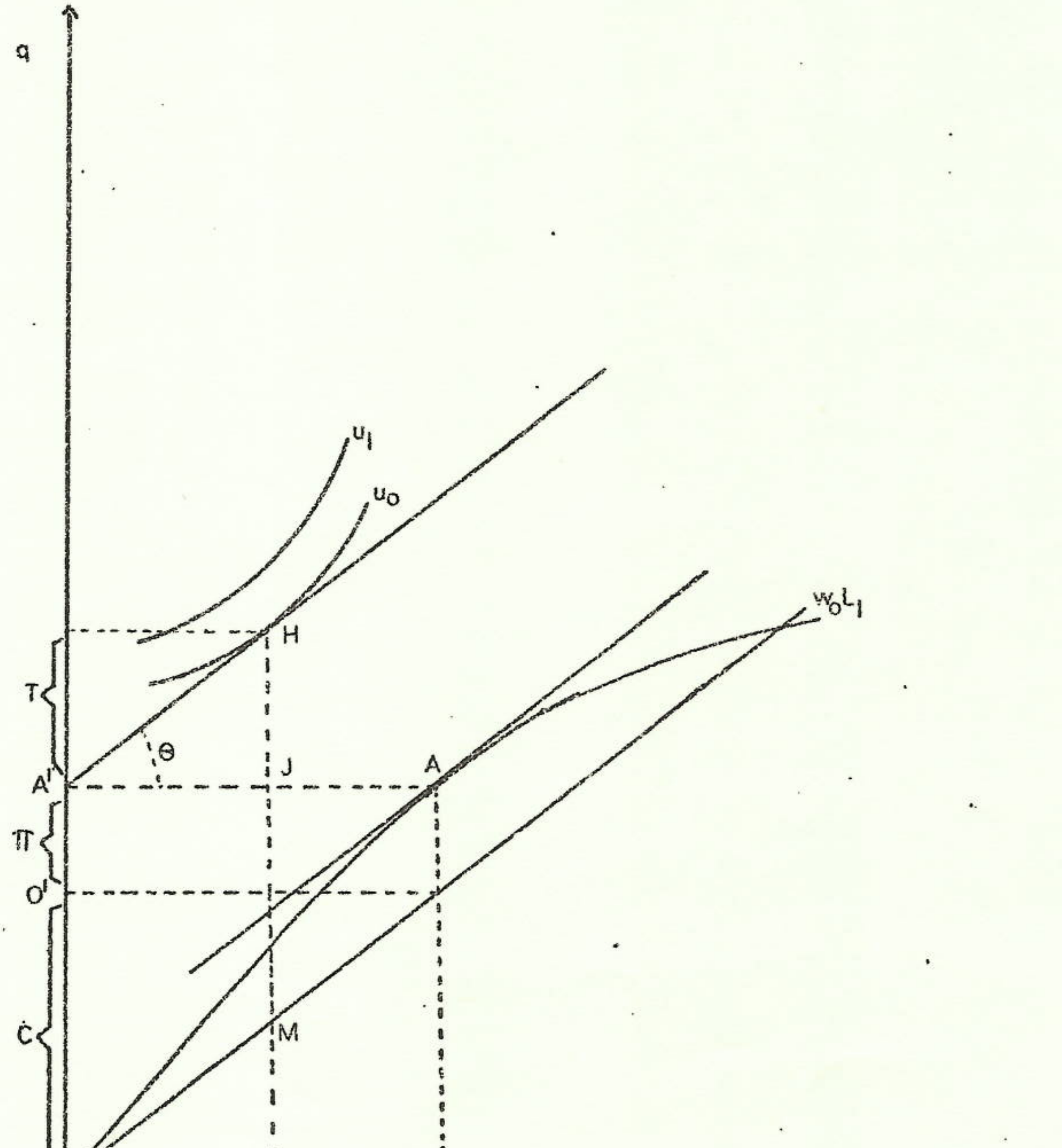


Gráfico (1.2.4)

linha com inclinação dada pelo salário de mercado. Sendo U_0 a sua curva de indiferença, oferecerá a quantidade L_{S1} de trabalho ao salário dado pela tangente $\hat{\theta}$; neste caso terá, além da renda π, o ganho salarial T, pelo seu trabalho na sua própria fazenda. O consumo do bem, milho, pelo agricultor que estamos analisando, será igual a $\pi + T$, igual à sua renda líquida total.

Fazendo variar a taxa de salário real (isto é, em termos de milho) encontramos a curva de oferta de trabalho de cada agricultor. A soma de ambas as curvas dará a oferta de trabalho no mercado, como esquematicamente se mostra no gráfico (1.2.5).

1.2.3. EQUILÍBRIO GERAL E A LEI DE WALRAS

O salário real e o emprego de equilíbrio serão dados pela oferta e demanda no mercado de trabalho.

Ao salário w^* determinado no mercado o agricultor 1 é demandante líquido, enquanto o agricultor 2 é oferente líquido de trabalho no mercado; a existência de equilíbrio no mercado impõe que os dois excessos (de procura e de oferta de trabalho individuais) sejam iguais (vide gráfico(1.2.6)).

No mercado, para haver equilíbrio estacionário,

$$L^*_{D1} - L^*_{S1} = L^*_{S2} - L^*_{D2} \qquad (1.2.10)$$

onde * denota situação de equilíbrio.

Isto decorre de que em equilíbrio a demanda total por trabalho deve ser igual à oferta total dele:

$$L^*_S = L^*_D$$

mas $L^*_S = L^*_{S1} + L^*_{S2}$ e $L^*_D = L^*_{D1} + L^*_{D2}$

e portanto $L^*_{S2} - L^*_{D2} = L^*_{D1} - L^*_{S1}$

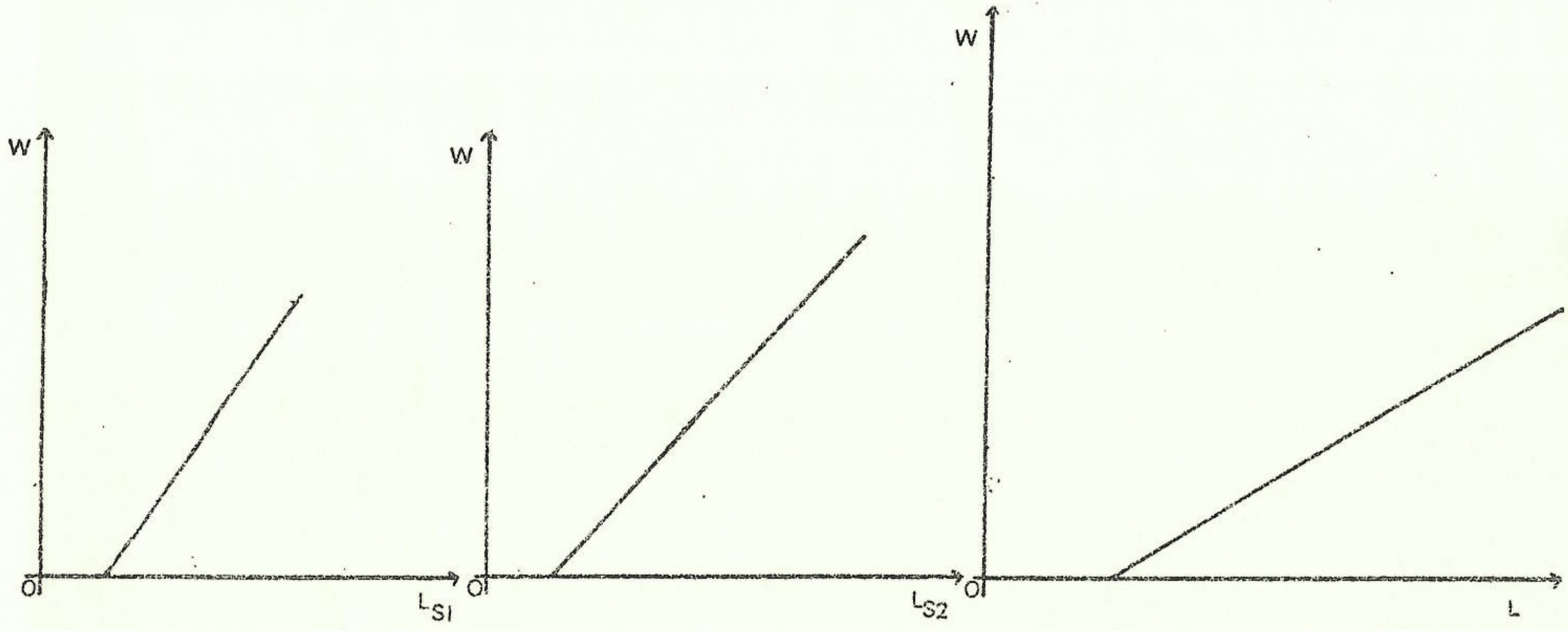


Gráfico (1.2.5)

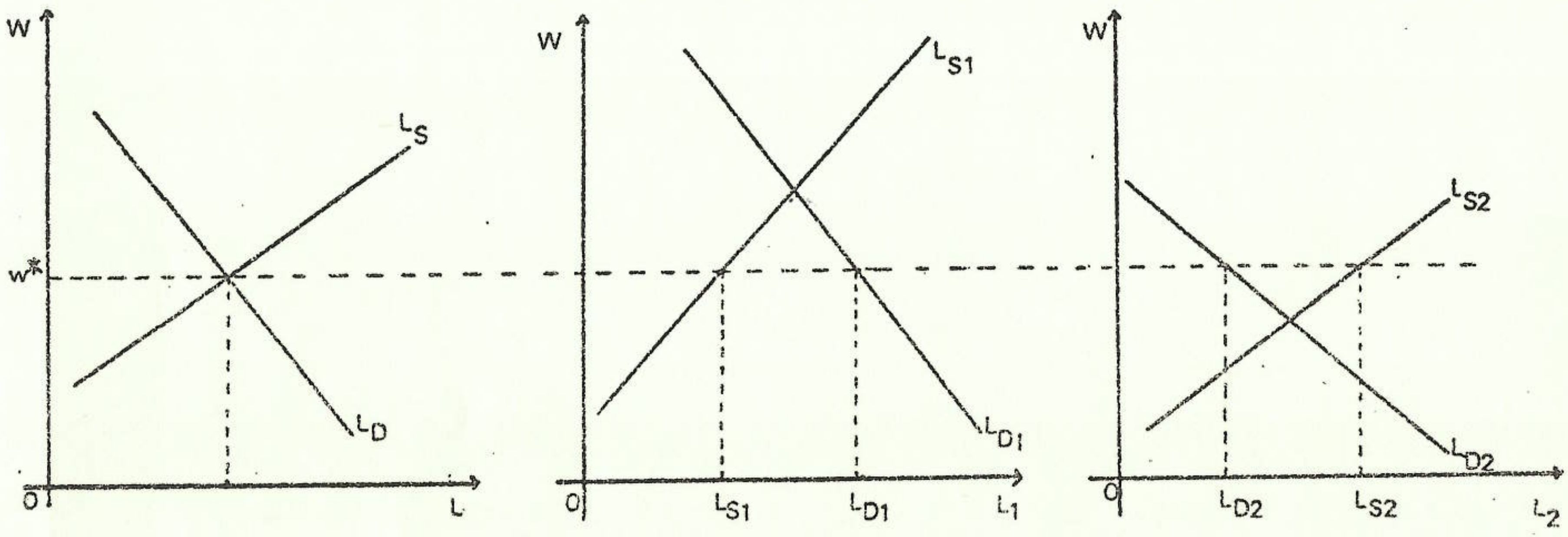


Gráfico (1.2.6)

Entretanto, nossa economia não tem um, mas dois produtos; portanto existirão dois mercados: de produto e de trabalho. Demonstremos que o equilíbrio num mercado implica em equilíbrio no outro; por exemplo, o equilíbrio no mercado de trabalho, ao salário w^*, necessariamente implica equilíbrio no mercado do produto.

As equações de ofertas individuais de produto são

$$q_{S1} = R_1 (w) + w \cdot L_{D1} (w)$$

$$q_{S2} = R_2 (w) + w \cdot L_{D2} (w)$$

em que (w) mostra dependência funcional, e onde se observa ter sido aplicado o teorema de Euler na função de produção homogênea linear (os pagamentos dos fatores esgotam o produto líquido).

A <u>oferta agregada</u> é

$$Q_S = q_{S1} + q_{S2}$$

$$= R_1 (w) + R_2 (w) + w \left[L_{D1} (w) + L_{D2} (w) \right]$$

$$Q_S = R_1 (w) + R_2 (w) + w \cdot L_D (w) \qquad (1.2.11)$$

Como a totalidade da renda é consumida, as demandas individuais são

$$q_{D1} = R_1 (w) + w \cdot L_{S1} (w)$$

$$q_{D2} = R_2 (w) + w \cdot L_{S2} (w)$$

A <u>demanda agregada</u> é

$$Q_D = q_{D1} + q_{D2}$$

$$= R_1 (w) + R_2 (w) + w \left[L_{S1} (w) + L_{S2} (w) \right]$$

$$Q_D = R_1 (w) + R_2 (w) + L_S (w) \cdot w \qquad (1.2.12)$$

O excesso de oferta no mercado de bens será

$$Q_S - Q_D = w \left[L_D (w) - L_S (w) \right] \qquad (1.2.13)$$

O equilíbrio no mercado do produto, obtido quando $Q_S = Q_D$, só ocorrerá quando (excetuando-se a solução trivial $w = 0$) :

$$L_D (w^*) = L_S (w^*)$$

isto é, quando ao salário real w^* for nula a expressão acolchetada em (1.2.13) a taxa salarial w^* é tal que permite igualar as quantidades oferecidas e demandadas de trabalho; daí, $Q_S = Q_D$ no mercado de bens.

Se ocorrer excesso de demanda (oferta) no mercado de trabalho necessariamente teremos excesso de oferta (demanda) no mercado do produto.

Estes elementos nos permitem estabelecer uma formulação simples da <u>Lei de WALRAS</u>:

> Numa economia com n mercados, equilíbrio em n-1 mercados implica em equilíbrio no n-ésimo mercado (numerário).

Alternativamente,a lei diz que em desequilíbrio o excesso de oferta eventualmente existente em algum mercado deve ser compensado por excesso de demanda no n-ésimo mercado (numerário).

O modelo demonstrou como as decisões individuais dos agentes econômicos gerou equilíbrio geral do sistema, mediante a determinação de quantidades e preços relativos compatíveis com todos os mercados; ele constitui o que costumeiramente se chama de "Teoria do Valor Neoclássico" ou então de "Teoria do Valor de WALRAS", o que passaremos a analisar de maneira mais complexa.

Porém,no modelo nada garante a existência do equilíbrio; isto é,é possível que no gráfico(1.2.6)não tenhamos equilíbrio não negativo.Ainda tendo equilíbrio não negativo,é possível que seja múltiplo.Havendo diferentes níveis de equilíbrio é necessário caracterizá-los quanto a sua estabilidade ou instabilidade.

1.3 MODELO DE EQUILÍBRIO GERAL DE WALRAS

No modelo estão presentes dois grupos de agentes econômicos: de um lado, os INDIVÍDUOS, pessoas físicas, que detêm a propriedade do conjunto de fatores de produção, inclusive do trabalho. Obtêm renda mediante a venda de fatores produtivos nos respectivos mercados, renda essa que utilizam na compra de bens de consumo, no mercado correspondente; de outro lado, existem as FIRMAS, agentes de transformação de insumos em produtos, que utilizam fatores para produzir bens.

São elementos exógenos ao modelo, e nele comparecerão como dados (conquanto necessários à resolução do sistema de equilíbrio geral):

1º - os gostos, que estão definidos nas funções de utilidade;

2º - a dotação de recursos de cada indivíduo;

3º - a tecnologia à disposição das firmas.

Nessa economia existe interação de pessoas e firmas. Nesta interação devem-se determinar as condições que se devem cumprir para que exista equilíbrio; e, existindo, em que condições o equilíbrio é único - situação na qual estamos particularmente interessados; ainda, se o equilíbrio é estável ou instável; e, finalmente, as questões de estática comparativa (impacto sobre o equilíbrio de mudanças nos parâmetros gostos, tecnologia etc.). Estes são os problemas centrais do equilíbrio geral, e podem ser classificados de acordo com a ênfase dada na literatura acadêmica:

- européia:
  1. existência do equilíbrio
  2. unicidade do equilíbrio;
- americana:
  3. estabilidade do equilíbrio;
  4. estática comparativa.

Walras não tratou desses problemas do equilíbrio geral (exceto quanto a estabilidade, que foi o primeiro a dis cutir); sua preocupação limitou-se à consistência do modelo, isto é, número de equações igual ao número de incógnitas. Mas, sabemos que a igualdade equações-incógnitas não é suficiente para resolução dos quatro problemas apontados.

A discussão dos citados problemas centrais é essencialmente matemática, utilizando, entre outros, os conceitos de topologia; pela sofisticação dos recursos matemáticos requeridos tal estudo não será abordado aquí[1] ; assim, limitar-nos-emos a examinar o enfoque de Walras, o qual apenas enumerou as condições que garantem equilíbrio de cada indivíduo e cada firma na economia, bem como a consistência através da contagem das equações e variáveis no sistema de equilíbrio geral.

1.3.1 O SISTEMA ECONÔMICO

Na económia existe concorrência perfeita, com todas as consequências desse fato, inclusive que cada indivíduo ou firma em particular enfrenta preços dados. Temos n bens e m fatores produtivos. O preço do bem j é p_j para

$$j = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

e o conjunto desses preços pode ser resumido no vetor-linha de preços dos bens:

$$p' = (p_1 , p_2, \ldots\ldots, p_n). \qquad (1.3.1)$$

A remuneração do fator i é w_i para

$$i = 1, 2, \ldots\ldots, m$$

e chamá-la-emos genericamente de salário ; o conjunto desses salários pode ser resumido no vetor-linha de salários de fatores:

[1]Para o leitor desejoso de estudar esses problemas são feitas referências bibliográficas no final do presente capítulo.

$$w' = (w_1, w_2, \ldots\ldots, w_m) \tag{1.3.2}$$

1.3.2 EQUILÍBRIO NO SETOR PRODUTIVO

Existem F firmas, competitivas. Cada firma adquire fatores nos respectivos mercados e com eles produz bens que são vendidos no mercado de bens, sendo:

r_i^f quantidade do insumo primário i adquirido e utilizado pela firma f;

C_j^f quantidade do bem j produzido e vendido pela firma f. O lucro da firma típica, π^f, será

$$\pi^f \equiv \underbrace{\sum_{j=1}^{n} p_j C_j^f}_{\substack{\text{receita}\\ \text{total}\\ \text{da firma f}}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{m} w_i r_i^f}_{\substack{\text{despesas em}\\ \text{fatores da}\\ \text{firma f}}} \quad (f = 1, 2, \ldots, F) \tag{1.3.3}$$

r^f o vetor-coluna das quantidades de insumo adquiridos pela firma f:

$$r^f = (r_1^f, r_2^f, \ldots, r_m^f)' \quad (f = 1, 2, \ldots, F)$$

C^f o vetor-coluna das quantidades de bens produzidos pela firma f:

$$C^f = (C_1^f, C_2^f, \ldots, C_n^f)' \quad (f = 1, 2, \ldots, F)$$

Então π^f pode ser escrito como

$$\pi^f \equiv p'C^f - w' r^f \quad (f = 1, 2, \ldots, F)$$

Cada firma maximiza seu lucro sujeita à restrição imposta pela função de produção, a qual pode ser escrita em sua forma implícita geral ϕ^f como

$$\phi^f (C_1^f, C_2^f, \ldots, C_n^f; r_1^f, r_2^f, \ldots, r_m^f) = \phi^f(C^f; r^f) = 0$$

ϕ^f indica a fronteira de possibilidades de transformação entre produtos para dadas quantidades de fatores, e a translação dessa fronteira por mudança na disponibilidade de fatores. A firma utilizará a quantidade de insumos e obterá uma combinação de produto final (respeitada a função de produção) que torne máximo o lucro. Encontremos esse máximo pelo multiplicador de Lagrange,

$$G^f = p'C^f - w'r^f + \lambda^f \left[\phi^f (C^f, r^f)\right] \quad , \quad (f=1,\ldots F) \qquad (1.3.4)$$

Supondo que a firma utiliza alguma quantidade positiva de cada fator e produz algo de cada bem, a condição necessária para a obtenção do lucro máximo é que a primeira derivada deva ser nula para cada incógnita:

$$\frac{\partial G^f}{\partial C^f} = p' + \lambda^f \frac{\partial \phi^f}{\partial C^f} = 0$$

$$\frac{\partial G^f}{\partial r^f} = - w' + \lambda^f \frac{\partial \phi^f}{\partial r^f} = 0 \qquad (1.3.5)$$

$$\frac{\partial G^f}{\partial \lambda^f} = \phi^f (C^f, r^f) = 0 \qquad (f = 1, \ldots F)$$

Assim obtemos o seguinte sistema de equações para cada firma, que resume o setor produtivo da economia, mantendo constante o nível de utilização de fatores:

$$\lambda^f \frac{\partial \phi^f}{\partial C^f} = - p' \qquad \text{n equações}$$

$\frac{\partial \phi^f}{\partial C^f}$ representa movimento ao longo da fronteira de possibilidades na produção de um bem; a diferencial resume n diferenciais parciais, pois C^f é um vetor. Se, com a mesma disponibilidade de fatores, aumentarmos a produção de um dos bens, necessariamente temos que reduzir a produção de outros bens. Na verdade a diferencial representa o custo marginal de produzir o bem em questão, traduzido em termos do que se perde em outros bens, ou custo de oportunidade. Quando consideramos o efeito de mudança nas disponibilidades de fatores temos:

$$\lambda^f \frac{\partial \phi^f}{\partial r^f} = w' \qquad \text{m equações}$$

$\frac{\partial \phi^f}{\partial r^f}$ revela o deslocamento na fronteira de possibilidades ao se verificar uma mudança na disponibilidade de fatores ; corresponde ao traslado da fronteira de possibilidades,ou ao "produto marginal global" de cada um dos fatores: cada uma das m diferenciais representa a mudança no nível de produção de cada bem decorrente da variação nos respectivos fatores.

$$\phi^f (C^f , r^f) = 0 \qquad \text{1 equação}$$

que é restrição dada pela função de produção.

No total temos para cada firma um montante de equações

$$n + m + 1$$

Para cada firma temos as seguintes incógnitas:

- as quantidades produzidas de cada bem:

$$C_1^f , C_2^f , \ldots, C_n^f \qquad \text{n incógnitas}$$

- as quantidades adquiridas de cada fator:

$$r_1^f , r_2^f , \ldots, r_m^f \qquad \text{m incógnitas}$$

- o multiplicador de Lagrange λ^f — 1 incógnita

e portanto, para cada firma considerada, encontramos um total de incógnitas $n + m + 1$

Para as F firmas em conjunto dispomos, destarte, de um número igual $\left[F(n+m+1)\right]$ de equações e incógnitas,com o que fica definido o equilíbrio das F firmas competitivas, desde que <u>dados os preços dos insumos e dos produtos</u>.

1.3.3 EQUILÍBRIO DOS INDIVÍDUOS

Existem H indivíduos. Estes desempenham duas atividades: são consumidores de bens e são ofertantes de recursos produtivos. O indivíduo possui renda de duas naturezas: a decorrente da posse dos fatores, cujos serviços são vendidos às firmas a dado salário; e a derivada da participação na propriedade das firmas (já que estas devem pertencer a alguém), que toma a forma de lucros. A renda total de cada indivíduo (salários + lucros) é completamente gasta na aquisição de bens, no mercado. Sejam

C_j^h quantidade adquirida do bem j pelo indivíduo h;

r_i^h quantidade vendida do fator i pelo indivíduo h.

A utilidade derivada pelo indivíduo típico h depende dos fatores oferecidos e dos bens consumidos:

$$U^h = U^h\,(C_1^h\ ,\ C_2^h\ ,\ \ldots,\ C_n^h\ ;\ r_1^h\ ,\ r_2^h\ ,\ \ldots,\ r_m^h)$$

ou simplesmente

$$U^h = U^h(C^h\ ,\ r^h) \qquad (1.3.6)$$

em que

C^h é o vetor-coluna dos bens consumidos pelo indivíduo h:

$$C^h = (C_1^h\ ,\ C_2^h\ ,\ \ldots,\ C_n^h)' \qquad (h = 1,\ 2,\ \ldots,\ H) \quad \text{e}$$

r^h é o vetor-coluna dos fatores ofertados por esse mesmo indivíduo:

$$r^h = (r_1^h\ ,\ r_2^h\ ,\ \ldots,\ r_m^h)' \qquad (h = 1,\ 2,\ \ldots,\ H).$$

A restrição orçamentária para o indivíduo h é constituída por:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{m} w_i r_i^h}_{\substack{\text{renda}\\ \text{salarial}}} + \underbrace{\sum_{f=1}^{F} s^{hf}\,\pi^f}_{\substack{\text{renda de propri}\\ \text{edade de firmas}}} \equiv \underbrace{\sum_{j=1}^{n} p_j C_j^h}_{\substack{\text{gastos totais}\\ \text{do indivíduo h}}}$$

expressão em que representamos por s^{hf} a participação que o h-ésimo indivíduo tem nos lucros da f-ésima firma. Definimos s'^h como o vetor-linha

$$s'^h = (s^{h1}, s^{h2}, \ldots, s^{hF}) \qquad (h = 1, 2, \ldots, H)$$

das participações na propriedade das F firmas por parte do h-ésimo indivíduo;os lucros são pagos proporcionalmente à participação no capital.

Os lucros de todas as firmas se resumem no vetor-coluna

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_F)'$$

Utilizando a notação matricial podemos colocar a restrição orçamentária como

$$w'r^h + s'^h\pi = p'C^h \tag{1.3.7}$$

Sujeito a essa restrição o indivíduo h procura maximizar a utilidade, com respeito à quantidade dos bens consumidos e dos fatores fornecidos. Utilizando os multiplicadores de Lagrange,

$$G^h = U^h(C^h, r^h) + \lambda^h(w'r^h + s'^h\pi - p'C^h) \tag{1.3.8}$$

Supondo que o indivíduo consuma algo de cada bem, assim como que ofereça algo de cada fator, a primeira condição de máxima utilidade (condicionada à restrição orçamentária) implica

$$\frac{\partial G^h}{\partial C^h} = \frac{\partial U^h}{\partial C^h} - \lambda^h p' = 0$$

$$\frac{\partial G^h}{\partial r^h} = \frac{\partial U^h}{\partial r^h} + \lambda^h w' = 0$$

$$\frac{\partial G^h}{\partial \lambda^h} = w'r^h + s'^h\pi - p'C^h = 0 \qquad (1.3.9)$$

de onde tiramos as equações que permitem obter o equilíbrio do consumidor h, e que são:

$$\frac{\partial U^h}{\partial C^h} = \lambda^h p' \qquad \text{n equações}$$

onde $\partial U^h / \partial C^h$ é a utilidade marginal no consumo de cada bem;

$$\frac{\partial U^h}{\partial r^h} = - \lambda^h w' \qquad \text{m equações}$$

onde $\partial U^h / \partial r^h$ é a desutilidade marginal da oferta de cada fator; e

$$W'r^h + s'^h\pi = p'C^h \qquad \text{1 equação}$$

é a restrição orçamentária.

Computamos, então, para cada indivíduo um total de equações

$$n + m + 1$$

Contemos agora as incógnitas para cada indivíduo; elas são:

- as quantidades consumidas de cada bem:

$$c_1^h, c_2^h, \ldots, c_n^h \qquad \text{n incógnitas}$$

- as quantidades oferecidas de cada fator:

$$r_1^h, r_2^h, \ldots, r_m^h \qquad \text{m incógnitas}$$

- o multiplicador de Lagrange λ^h — 1 incógnita

Obtivemos, assim, um total de incógnitas para cada indivíduo de

$$n + m + 1$$

Como a situação do indivíduo considerado é a mesma dos demais, para a totalidade deles temos um número igual de equações e de incógnitas, H (n+m+1), que resolve o problema do equilíbrio no setor dos indivíduos, desde que dados os preços dos fatores e dos bens.

1.3.4 O MERCADO

Agora devemos considerar a interação dos dois sistemas anteriores. A soma de todas as demandas por qualquer bem ou fator deve ser igual à soma de todas as ofertas desse bem ou fator.

No mercado de bens equilíbrio implica, para cada um dos n bens,

$$\underbrace{\sum_{h=1}^{H} C_j^h}_{\text{demanda do bem j pelos consumidores}} = \underbrace{\sum_{f=1}^{F} C_j^f}_{\text{oferta do bem j pelas firmas}} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad n \text{ equações}$$

No mercado de fatores deveremos ter para cada um dos fatores,

$$\underbrace{\sum_{h=1}^{H} r_i^h}_{\text{oferta do fator i pelos indivíduos}} = \underbrace{\sum_{f=1}^{F} r_i^f}_{\text{procura do fator i pelas firmas}} \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad m \text{ equações}$$

Geradas pelas condições de equilíbrio nos mercados de bens e fatores obtivemos, então, um total de equações n + m

As incógnitas para os mercados são os preços:

- os salários dos fatores (w') m incógnitas

- os preços dos bens (p') n incógnitas

o que nos dá um total de incógnitas $n + m$

1.3.5 DE NOVO O SISTEMA ECONÔMICO

Resumamos os resultados encontrados:

	Nº equacões	Nº incógnitas
--- do lado das firmas	F(n+m+1)	F(n+m+1)
--- do lado dos indivíduos	H(n+m+1)	H(n+m+1)
--- do mercado	(n+m)	(n+m)

Total de equações = Total de incógnitas = F(n+m+1)+H(n+m+1)+ (n+m) .Assim, o sistema fica determinado.

A <u>Lei de Walras</u> estabelece que o <u>valor total da demanda iguala o valor total da oferta a qualquer conjunto de preços</u>;isto implica que uma das equações não é independente das outras. Para encontrar essa Lei usaremos a restrição orçamentária dos indivíduos: somando a restrição orçamentária para todos eles, resulta

$$\underbrace{\sum_{h=1}^{H} \sum_{i=1}^{m} w_i r_i^h}_{\substack{\text{renda salarial de todos os indi}\\\text{víduos}}} + \underbrace{\sum_{f=1}^{F} \pi^f}_{\substack{\text{lucro total}\\\text{de todas}\\\text{as firmas}}} = \underbrace{\sum_{h}^{H} \sum_{j}^{n} p_j\, C_j^h}_{\substack{\text{valor total}\\\text{da produção}\\\text{de bens}}}$$

Em termos de contas nacionais,

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{remuneração dos fatores}} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{valor da produção}}$$

Substituindo π^f por sua definição (vide 1.3.2) resulta,

$$\sum_{h}^{H} \sum_{i}^{m} w_i r_i^h + \sum_{f}^{F} \Big(\underbrace{\sum_{j}^{n} p_j C_j^f}_{\substack{\text{receita}\\\text{de cada}\\\text{firma}}} - \underbrace{\sum_{i}^{m} w_i r_i^f}_{\substack{\text{gasto em fa}\\\text{tores de ca}\\\text{da firma}}} \Big) = \sum_{h}^{H} \sum_{j}^{n} p_j C_j^h$$

Ordenando,

$$\sum_{i}^{m} w_i \underbrace{\left(\sum_{h}^{H} r_i^h - \sum_{f}^{F} r_i^f \right)}_{A} = \sum_{j}^{n} p_j \underbrace{\left(\sum_{h}^{H} C_j^h - \sum_{f}^{F} C_j^f \right)}_{B} \qquad (1.3.10)$$

Os termos entre parênteses da equação (1.3.10) representam:

A: excedente de oferta(se for positivo) ou de procura (se for negativo) no mercado dos respectivos <u>fatores</u>;

B: excedente de oferta(se for negativo) ou de procura (caso seja positivo) no mercado dos respectivos <u>bens</u>;

* se o conteúdo entre parênteses não é zero os respectivos mercados estão desequilibrados.

1.3.6 UM GRAU DE LIBERDADE

Mostremos que uma das equações do equilíbrio geral não é independente das demais, mas é delas derivada. Suponhamos que todos os mercados, exceto o do fator m-ésimo, estejam em equilíbrio; indicamos equilíbrio nos m-1 mercados de fatores e nos n mercados de bens por

$$\sum_{h}^{H} C_j^h = \sum_{f}^{F} C_j^f \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

$$\sum_{h}^{H} r_i^h = \sum_{f}^{F} r_i^f \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-2, m-1)$$

Aplicando as condições de equilíbrio nos mercados, B=0 em (1.3.10), para todos os n mercados de bens e A = 0 para todos os m-1 mercados de fatores. De (1.3.10), resulta,

$$w_m \left(\sum_{h}^{H} r_m^h - \sum_{f}^{F} r_m^f \right) = 0 \qquad (1.3.11)$$

Para um salário $w_m \neq 0$ (solução não trivial) necessariamente deverá haver equilíbrio no mercado do m-ésimo fator.

A última equação, como vimos, foi derivada das outras, de que depende. Isto nos permite no sistema eliminar uma equação, e ficarmos com :

$$(F+H) \quad (n+m+1) \quad + \quad (n+m-1)$$

equações independentes.

Como nosso total de incógnitas continua sendo

$$(F+H) \quad (n+m+1) \quad + \quad (n+m)$$

temos, até este ponto, uma incógnita a mais que equações.

1.3.7 PREÇOS ABSOLUTOS, PREÇOS RELATIVOS

A existência de uma incógnita a mais que equações não é tudo. A maximização do lucro em cada firma, sujeita a restrição da função de produção, é feita por um vetor preço-salário (p', w'), mas também resulta a mesma solução com o vetor (ap', aw'), onde a é uma constante positiva qualquer, pois maximização de π^f é equivalente a maximização de $a\pi^f$. Isto é facilmente verificável, no sistema (1.3.5), considerando o caso de dois produtos e dois fatores, de que resultam as seguintes condições de otimização quando o bem um é considerado como numerário.

$$\frac{\partial c_1^f}{\partial c_2^f} = \frac{p_2}{p_1} \quad , \quad \frac{\partial c_1^f}{\partial r_1^f} = -\frac{w_1}{p_1} \quad \text{e} \quad \frac{\partial c_1^f}{\partial r_2^f} = -\frac{w_2}{p_1}$$

O que interessa para a firma são os preços relativos, não absolutos; um aumento equiproporcional em todos os preços não altera o equilíbrio.

Do mesmo modo, a restrição orçamentária (1.3.7) dos indivíduos é homogênea de grau zero nos preços absolutos: dado o vetor de preços (p', w') o equilíbrio não se altera se o substituimos por outro (ap', aw'), obtido da multiplicação do primeiro por um escalar positivo; também aqui o que importa são os preços relativos. Assim, todas as funções de oferta e procura são homogêneas de grau zero em todos os preços. Por causa disso podemos <u>normalizar</u> os preços, e.g., selecionando um insumo ou produto como "numerário" e medindo todos os outros preços em relação a ele. Tomemos o produto um como numerário; em assim sendo podemos fazer $a = \frac{1}{p_1}$ e aplicar ao vetor de preços, que se torna:

$$\left(\frac{p'}{p_1} ; \frac{w'}{p_1}\right) = \left(1, \frac{p_2}{p_1}, \frac{p_3}{p_1}, \ldots ; \frac{p_n}{p_1} ; \frac{w_1}{p_1} ; \frac{w_2}{p_1}, \ldots ; \frac{w_m}{p_1}\right),$$

o que nos deixa com (n+m-1) preços relativos [= nº incógnitas, vide final da seção anterior] . Agora coincidem o número de incógnitas e de equações independentes.

Inicialmente se pensava que para solução deste modelo matemárico bastava termos igual número de equações e de incógnitas: o sistema seria determinado. Hoje sabemos que essa condição não é necessária nem é suficiente para equilíbrio, e tampouco nos assegura que exista solução. Além disso é possível que, a existir solução, seja ela múltipla, não única; e mesmo assegurada solução única, nada nos garante que ela seja economicamente significativa, é dizer, que quantidades e preços de equilíbrio sejam não negativos. Ainda mais, existindo solução, precisamos saber se o equilíbrio é dinamicamente estável ou não.

1.4 ESTRUTURA DA DETERMINAÇÃO DE PREÇOS E UNICIDADE DO EQUILÍBRIO

Na análise do problema proposto consideraremos o sistema simplificado de Walras, utilizado por Cassel, considerando os seguintes supostos:

I. Os bens produzidos são utilizados exclusivamente para consumo;

II. Os fatores produtivos são originários: não temos bens intermediários;

III. Cada bem é produzido com coeficientes fixos de insumo-produto;

IV. A disponibilidade de fatores na economia é dada (é elemento exógeno ao modelo);

V. Não há produção conjunta; cada atividade produz um único bem.

Sejam as variáveis assim representadas:

V_i a quantidade disponível de cada fator $(i=1, 2, \ldots, m)$

X_j a quantidade produzida de cada bem $(j=1, 2, \ldots, n)$

V_{ij} a quantidade do fator i utilizada na produção do bem j

$a_{ij} = \dfrac{V_{ij}}{X_j}$ a quantidade do fator i utilizada por unidade de produto j

P_j o preço do bem j

r_i o preço do fator i

1.4.1 MERCADO DE FATORES

É condição de equilíbrio no mercado de fatores que a demanda iguale a oferta, para cada um e todos os fatores; isto se expressa por

$$\sum_{j}^{n} a_{ij} X_j = V_i \quad (i=1, 2, \ldots, m) \qquad (1.4.1)$$

Se expandimos o sistema implícito no somatório resulta

$$\begin{array}{l} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = V_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n = V_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n = V_m \end{array} \qquad (1.4.2)$$

onde estão presentes m (= nº de fatores) equações e n (=nº de bens) incógnitas.

Em termos matriciais, sendo,

$A_{(mxn)}$ a matriz dos coeficientes técnicos (matriz tecnológica) com m linhas e n colunas;

$X_{(nx1)}$ vetor-coluna de produção;

$V_{(mx1)}$ vetor-coluna de disponibilidade de insumos,

podemos reapresentar desta maneira a condição de equilíbrio no mercado de fatores (demanda = oferta):

$$A_{(mxn)} \quad X_{(nx1)} = V_{(mx1)} \tag{1.4.3}$$

1.4.2 CUSTO DE PRODUÇÃO

Se operamos sob condições de concorrência perfeita não existirão lucros puros no equilíbrio de longo prazo (apenas lucros normais); a condição de cada bem ser produzido com zero lucro se expressa por

$$\sum_{i}^{m} a_{ij} r_i = p_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{1.4.4}$$

Por exemplo, no caso do bem 1:

$$a_{11}r_1 + a_{21}r_2 \ldots + a_{m1}r_m = p_1$$

em que $a_{i1}\ r_i$ é a parcela de custos correspondente ao fator i no custo do bem um, e p_1 é o preço=custo do bem um.

O sistema completo é:

$$\begin{aligned} a_{11}r_1 + a_{21}r_2 + \ldots + a_{m1}r_m &= p_1 \\ a_{12}r_1 + a_{22}r_2 + \ldots + a_{m2}r_m &= p_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \quad \ldots \\ a_{1n}r_1 + a_{2n}r_2 + \ldots + a_{mn}r_m &= p_n \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

O sistema (1.4.5) pode ser resumido em termos matriciais:

$$r'_{(1xm)} \quad A_{(mxn)} = p'_{(1xn)} \tag{1.4.6}$$

onde

$r'_{(1xm)}$ é o vetor-linha de preços dos insumos;

$A_{(mxn)}$ é a matriz tecnológica já examinada;

$p'_{(1xn)}$ é o vetor-linha de preços dos bens.

n equações (= nº de bens); e m (= nº de preços de fatores) mais n (nº preços bens) incógnitas.

Os sistemas (1.4.3) e (1.4.6) têm conjuntamente (m+n) equações e (2n+m) incógnitas. Com mais incógnitas que equações nosso sistema ainda não está determinado; para completar o sistema devemos acrescentar as funções de demanda pelos bens.

1.4.3 FUNÇÕES DE DEMANDA

A renda total se define por

$$\sum_{i}^{m} V_i r_i$$

a demanda de cada bem é função dos respectivos preços e da renda total:

$$X_j = X_j \left(p_1 , p_2 , \ldots , p_n ; \sum_{i}^{m} V_i r_i\right) \qquad (1.4.7)$$

Essa expressão pode ser simplificada, pois os V_i são dados, portanto a demanda fica dependendo apenas do conjunto de preços (de bens e fatores):

$$X_j = X_j(p_1, p_2, \ldots, p_n; r_1, r_2, \ldots, r_m) \qquad (j=1,2,\ldots,n) \qquad (1.4.8)$$

Com isso adicionamos mais n equações ao modelo.

Considerando conjuntamente o que encontramos em(1.4.1), (1.4.4)e(1.4.8)nosso sistema passa a possuir

	Equações	Incógnitas
-- no mercado de fatores	m	n
-- no sistema custos produção	n	m + n
-- nas funções de demanda	n	
Total	2n + m	2n + m

e desta feita o sistema fica completo.

1.4.4 OBSERVAÇÕES AO MODELO

1a. Observação: O sistema (1.4.3) constitui por si só um sistema completo de equações, nas variáveis X_j (bens); em álgebra matricial, trata-se de resolução de equação simultâneas. Como os fatores são dados e temos coeficientes fixos de produção, resulta um sistema linear completo.

Representamos por $\rho(A)$ o posto da matriz do sistema; a matriz do sistema é, em outra terminologia, também chamada matriz incompleta, e em nosso caso corresponde à matriz tecnológica. Posto de uma matriz é a ordem da submatriz quadrada de maior ordem que se pode obter com determinante não nulo. O posto de uma matriz indica o número de colunas=filas linearmente independentes.

Chamamos $\rho\,(A \vdots V)$ o posto da matriz aumentada (em outra terminologia: da matriz completa) definida como,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & V_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & V_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & V_m \end{bmatrix} \qquad (1.4.9)$$

onde n é o número de variáveis (bens), e m é o número de equações (fatores).

Para que exista a possibilidade de solução do sistema precisamos $\rho\,(A) = \rho\,(A \vdots V)$ [2]. Além disso, somente com $\rho\,(A) \leq n$ teremos solução para o sistema:

Se $\rho\,(A) = n$ a solução é única,

se $\rho\,(A) < n$ há infinitas soluções.

[2] "se o posto da matriz do sistema e o da matriz aumentada forem iguais existirá sempre e no mínimo uma solução para o sistema" G. Hadley Linear Algebra AD. Wesley Publishing Co 1964 USA.

Figuremos um exemplo, em que $n < m$ (há menor número de bens que de fatores), seja

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = V_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = V_2 \qquad (1.4.10)$$

$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 = V_3 .$$

Neste caso $\rho(A) \leq 2$; mas podemos ter $\rho(A \vdots V) = 3$. Em geral, quando o número de bens é inferior ao número de fatores não encontramos solução para o sistema, pois o vetor V poderá ser linearmente independente das colunas de A e portanto não existirá nenhum x_j tal que

$$\Sigma\, x_j a_j = V_i$$

onde a_j representa as colunas de A. Isto é o mesmo que dizer que não existe solução para o sistema (1.4.10).

Se $\rho(A) = \rho(A \vdots V) = 2$ haverá uma única solução para o sistema (1.4.10). Se $\rho(A) = \rho(A \vdots V) = 1$, menor que o número de variáveis, haverá infinitas soluções.

Num exemplo inverso, em que $n > m$, seja

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = V_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = V_2 \qquad (1.4.11)$$

em geral sempre teremos solução, pois sempre poderá ocorrer que $\rho(A) = \rho(A \vdots V)$. Todavia não teremos solução única, e sim infinitas soluções, pois sempre $\rho(A) < n$. No máximo $\rho(A) = 2$, que é igual à $\rho(A \vdots V)$ menor que o número de variáveis ($n = 3$ bens).

<u>2a. Observação</u>: Existem alguns fatores que são livres: seu uso dá-se a custo = preço = zero. Por exemplo, a paisagem, o ar, etc., Tais fatores não entram no sistema Cassel.

Entretanto, a divisão de fatores entre escassos e livres não deveria ser estabelecida <u>a priori</u>. Para superar es sa limitação podemos definir ;

Um fator é livre quando sua utilização é menor que sua ofer ta. Em geral, o uso de um fator não pode exceder sua oferta; no modelo representaríamos esta colocação via substituição de (1.4.1) por

$$\sum_{j}^{n} a_{ij}X_j \leq V_i \quad (i=1, 2, \ldots, m) \qquad (1.4.12)$$

entendendo que se se cumpre a desigualdade estrita o preço do respectivo fator é zero:

$$r_i = 0 \quad (i=1, 2, \ldots, q) \text{ para q fatores livres.}$$

Sendo assim todos os fatores seriam incluídos no modelo, ca bendo ao sistema dizer quais dos fatores são livres.

Na linguagem de programação linear as igualdades são substituídas por desigualdades; dessa maneira introduzimos a noção vital de <u>complementary slackness</u> de quantidades e preços: se uma restrição é satisfeita no sistema com uma de sigualdade estrita a correspondente variável no dual é oti mamente zero. No caso específico,

$$\sum_{j}^{n} a_{ij}X_j < V_i \implies r_i = 0$$

para todos os q fatores livres.Como se vê no gráfico (1.4.1), se a oferta do fator i excede a demanda a todos os ní veis não negativos de salários, então o salário de equilí brio será zero.

Também no mercado de bens podemos utilizar o conceito de <u>complementary slackness</u> ; para isso em (1.4.4) substi tuimos a condição de "zero lucro" pela de "não lucro":

$$\sum_{i}^{m} a_{ij}r_i \geq P_j \quad (j=1, 2, \ldots, n) \qquad (1.4.13)$$

Nos casos em que se cumpre a desigualdade estrita o bem não será produzido: não se produzem bens que dão prejuízos. Assim :

$$\sum_{i}^{m} a_{ij}r_i > P_j \implies X_j = 0. \quad (j= 1, 2, \ldots, k)$$

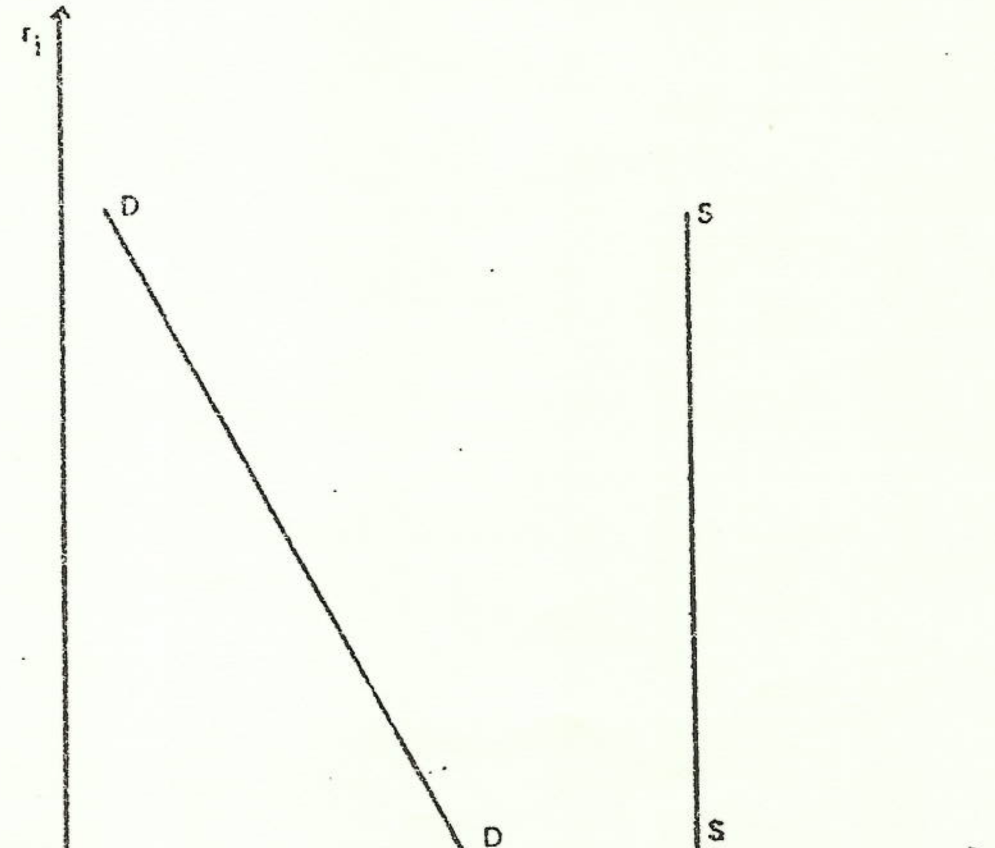


Gráfico (1.4.1)

A complementary slackness, pelo que vimos, não somente se aplica à definição de fatores escassos como nos revela porque alguns bens não são produzidos.

1.5 RELAÇÃO ENTRE PREÇOS DOS FATORES E PREÇOS DOS BENS PRODUZIDOS

Com os supostos de I a V do início da seção 1.4 e a condição de zero lucro para todos os processos geramos o sistema linear de equações

$r'_{(1xm)} \quad A_{(mxn)} = p'_{(1xn)}$, o qual relaciona de maneira simples os preços dos fatores e os preços dos produtos.

1.5.1 FATOR PRIMÁRIO ÚNICO

No caso em que utilizássemos um único fator primário os preços relativos de todos os bens estariam determinados só pelos coeficientes técnicos de produção fixos, independente da demanda; nestas circunstâncias r' deixará de ser vetor para tornar-se escalar, $r_{(1x1)}$.
Supondo que o primeiro fator primário seja o único disponível, nossa relação será

$$\begin{aligned} a_{11}r_1 &= p_1 \\ a_{12}r_1 &= p_2 \\ \ldots \quad & \quad \ldots \\ a_{1n}r_1 &= p_n \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

O sistema ficaria, desse modo, perfeitamente determinado.

Tomando o bem um como numerário ($p_1 = 1$) o preço do único fator será $r_1 = \dfrac{1}{a_{11}}$ e os preços dos demais bens serão

$$p_2 = \frac{a_{12}}{a_{11}} \; ; \; p_3 = \frac{a_{13}}{a_{11}} \; , \; \ldots\ldots\ldots , \; p_n = \frac{a_{1n}}{a_{11}} \; ,$$

onde os preços relativos se obtêm como razão de coeficientes técnicos de produção.

Sob tais supostos o sistema (1.4.1) ficaria reduzido a

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n = V_1 \qquad (1.5.2)$$

e o papel da demanda (equação(1.4.8)) seria unicamente determinar a alocação do fator entre as diferentes atividades produtivas.

1.5.2 MAIS DE UM FATOR PRIMÁRIO

Existindo mais de um fator originário a relação entre os preços dos fatores e os preços dos bens estará dada pelo sistema (1.4.6):

$$r'_{(1xm)} \quad A_{(mxn)} \quad = \quad p'_{(1xn)}$$

cabendo as seguintes considerações:

a) Se o número de fatores é menor ou igual que o número de bens produzidos, ou seja,
   m (= nº variáveis = nº de fatores) $\leq$ n (= nº equações = nº de bens)

e $\rho(A) = \rho(A \vdots p) = m$ haverá uma única solução para o vetor de preços dos fatores, dado o vetor de preços dos bens.

b) Se $\rho(A) = \rho(A \vdots p) = m = n$ podemos resolver pela regra de Cramer:

$$r' \ A = p'$$

$$r' \ A \ A^{-1} = p' \ A^{-1}$$

$$r' = p' \ A^{-1} \qquad (\text{pois } A.A^{-1} = I)$$

e, assim, a partir do vetor p' determinamos o vetor r'.

1.6 MODELO LINEAR DE LEONTIEF

Por esse nome é conhecido a ampliação do modelo de Cassel para o caso geral onde consideramos bens intermediários (bens utilizados como insumo na produção de outros bens).

Consideremos só bens produzidos em quantidades positivas; tal que a condição de zero lucro seja obtido em cada processo produtivo. O sistema (1.4.4) de produção será substituído pelo sistema (1.6.1) que passamos a descrever. Sejam

a_{ij} a quantidade do bem X_i produzido e utilizado na produção de uma unidade do bem X_j;

b_{kj} a quantidade do fator originário V_k utilizado na produção de uma unidade do bem X_j

A condição de zero lucro é que o preço do bem seja igual ao custo de produção:

$$p_j = \underbrace{\sum_{i}^{n} p_i a_{ij}}_{\text{soma das despesas feitas em ingredientes}} + \underbrace{\sum_{k}^{m} r_k b_{kj}}_{\text{despesas com fatores originais que entram na produção}} \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \qquad (1.6.1)$$

O sistema ampliado fica

$$\begin{array}{l}
p_1 = p_1 a_{11} + p_2 a_{21} \ldots p_n a_{n1} + r_1 b_{11} + r_2 b_{21} + \ldots + r_m b_{m1} \\
p_2 = p_1 a_{12} + p_2 a_{22} \ldots p_n a_{n2} + r_1 b_{12} + r_2 b_{22} + \ldots + r_m b_{m2} \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
p_n = p_1 a_{1n} + p_2 a_{2n} \ldots p_n a_{nn} + r_1 b_{1n} + r_2 b_{2n} + \ldots + r_m b_{mn}
\end{array}$$

Em termos matriciais,

$$p'_{(1xn)} = p'_{(1xn)}\ A_{(nxn)} + r'_{(1xm)}\ B_{(mxn)} \qquad (1.6.2)$$

onde os preços ficam dispostos em vetor-linha.

Podemos extrair o fator comum, e fazer o ordenamento:

$$p' \ (I - A) = r' \ B \tag{1.6.3}$$

sendo que I denota a matriz identidade.

Caso (I - A) seja não singular ela terá inversa, e nesse caso

$$p' = r' \ B \ (I - A)^{-1} \tag{1.6.4}$$

Segue-se que os preços dos bens estão determinados pelos preços dos fatores.

1.6.1 UM SÓ FATOR ORIGINÁRIO

Em particular, caso o sistema produtivo seja caracterizado por produção de bens com bens e tenha somente um fator originário voltaremos a concluir que os preços relativos dos bens produzidos estão completamente determinados pelos coeficientes técnicos de produção fixos, independentemente da procura:

Exemplo:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1 a_{11} + p_2 a_{21} + r_1 b_1 \\ p_2 &= p_1 a_{12} + p_2 a_{22} + r_1 b_2 \end{aligned} \tag{1.6.5}$$

, onde

X_j = quantidade produzida do bem j, ($j = 1, 2$);

b_j = quantidade do fator originário único utilizado por unidade de produto: j;

p_j = preço do bem j , ($j = 1, 2$); bem 1 é numerário: $p_1 = 1$;

r_1 = preço do fator originário um, que, à força de termos eleito o bem um como numerário, tornou-se salário em termos do bem um (os preços são agora relativos). Então

$$1 = a_{11} + p_2 a_{21} + r_1 b_1 \qquad (1.6.6)$$

$$p_2 = a_{12} + p_2 a_{22} + r_1 b_2$$

Em nosso modelo ambos os bens são utilizados como bens de consumo e como ingredientes no processo produtivo; portanto, há execedente de produção, $(1 - a_{jj}) > 0$, nos respectivos processos produtivos.

Temos duas equações e duas incógnitas, r_1 e p_2; o sistema tem solução. Resolvendo para r_1, temos :

$$r_1 b_1 + p_2 a_{21} = 1 - a_{11}$$

$$-r_1 b_2 + p_2(1-a_{22}) = a_{12}$$

Por regra de Cramer,

$$r_1 = \frac{\begin{vmatrix} (1-a_{11}) & a_{21} \\ a_{12} & (1-a_{22}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & a_{21} \\ -b_2 & (1-a_{22}) \end{vmatrix}}$$

fazendo as operações indicadas, resulta:

$$r_1 = \frac{(1 - a_{11})\ (1 - a_{22}) - a_{21}a_{12}}{b_1(1 - a_{22}) + a_{21}b_2} > 0 \qquad (1.6.7)$$

Vejamos porque o sinal de r_1 é positivo; já sabemos serem todos os coeficientes positivos, assim como $(1-a_{11})$ e $(1-a_{22})$. Então o denominador é positivo. Quanto ao numerador:

$$\underbrace{X_2}_{\text{produção de 2}} = \underbrace{C_2}_{\text{consumo de 2}} + \underbrace{a_{22}X_2}_{\text{o que precisamos de 2 para produzir 2}} + \underbrace{a_{21}X_1}_{\text{2 como bem intermediário na produção de } X_1}$$

Similarmente,

$$X_1 = C_1 + a_{12}X_1 + a_{11}X_1$$

Estas equações podem ser escritas como

$$\underbrace{X_2\ (1 - a_{22})}_{\substack{\text{excedente da produ}\\\text{ção de 2 sobre sua}\\\text{própria utilização}}} = C_2 + a_{21}X_1$$

Do mesmo modo,

$$X_1(1 - a_{11}) = C_1 + a_{12}X_2 \implies X_1 = \frac{C_1 + a_{12}X_2}{1 - a_{11}}$$

Substituindo este resultado em $X_2(1 - a_{22})$ encontramos

$$X_2(1 - a_{22}) = C_2 + \frac{a_{21}(C_1 + a_{12}X_2)}{1 - a_{11}}$$

Dividindo por X_2, e em seguida multiplicando por $(1 - a_{11})$,

$$(1 - a_{22})(1 - a_{11}) = \frac{C_2}{X_2}(1 - a_{11}) + a_{21}\frac{C_1}{X_2} + a_{21}a_{12},$$

resultado que admite a seguinte interpretação: basta que qualquer quantidade de um dos bens seja utilizada para consumo (i.e., $C_1 > 0$ ou $C_2 > 0$) para que o numerador de (1.6.7) seja positivo. No mundo de só dois bens pelo menos um será de consumo.

Uma vez visto que $r_1 > 0$ determinaremos agora o sinal de p_2.

$$p_2 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & (1 - a_{11}) \\ -b_2 & a_{12} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{b_1a_{12} + b_2(1 - a_{11})}{\Delta}$$

Por simples inspeção nos asseguramos de que $p_2 > 0$, desde que haja excedente de cada bem sobre sua própria utilização.

Concluimos, por conseguinte, que numa economia com só um fator originário e com bens intermediários os preços são determinados só por condições técnicas de produção, independentemente da procura. Observe que nas expressões de r_1 e p_2 só estão presentes coeficientes tecnológicos que são fixos.

Este é essencialmente o modelo clássico; só que consideramos produção instantânea, onde o tempo não participa de maneira essencial no processo produtivo.

1.6.2 SOLUÇÕES SIGNIFICATIVAS

Continuando com o caso geral, vemos que o sistema (1.5.3), se (I-A) é inversível, a (1.6.4) nos diz que os preços dos bens se relacionam com os dos fatores.

Caso ρ (B) = m $\leq$ n (número de fatores não maior que o número de variáveis) de (1.6.3) podemos dizer que existe solução única para os preços dos fatores, em função dos preços dos produtos.

No caso especial em que ρ (B) = m = n podemos fazer $p'(I - A) B^{-1} = r'$

Importa destacar que os preços dos bens determinados pela equação (1.6.4) são necessariamente não negativos: se os preços dos fatores o são, e se uma condição natural ou necessária da matriz A que deve ser satisfeita é existir excesso de produção sobre utilização, os preços relativos dos bens são mera decorrência. Especificamente isso se segue das definições de A e de B e do suposto de que não há produção conjunta, de tal modo que é certo serem os elementos de A e de B não negativos (o mínimo coeficiente técnico de produção é zero).

Suponhamos que o sistema seja produtivo, no sentido de que é possível uma quantidade positiva de cada bem, ignorando as limitações devidas a escassez de fatores. Ou seja, a produção de cada bem é superior ao requerimento do bem em todos os processos produtivos: o excedente de produção do bem (sobre o uso dele como bem intermediário) é destinado a consumo e algo é consumido de cada bem. Em símbolos existe um vetor- coluna não negativo de produção tal que

$$\underset{\text{requerimento como bem intermediário}}{A \quad x} \quad \ll \quad \underset{\text{produção}}{x} \qquad (1.6.8)$$

denotando o duplo sinal $\ll$ que cada componente de $A\ x$ é menor que o correspondente componente de x:

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \\ \cdots \\ \hat{X}_n \end{Bmatrix} \qquad (1.6.9)$$

$$\hat{X}_i < X_i \qquad (i=1,2,\ldots,n) \qquad (1.6.10)$$

O requerimento total do bem como intermediário no processo produtivo deve ser menor que a produção do próprio bem.

Cumprida a condição $A\ x \ll x$, e ainda assegurando que A e B são não negativos, aplicamos o teorema de Perron e Frobenius, em uma de suas várias formulações.

"Se se cumpre a condição $A\ x \ll x$ a matriz $(I - A)$ é não singular e os elementos da matriz são não negativos"[3].

Logo, em (1.6.4), para salários não negativos, teremos preços de bens não negativos. Nós testamos esta conclusão de maneira simples, resolvendo para um fator originário, e encontramos assim que os preços são não negativos. Neste caso especial a remuneração do fator original e os preços dos produtos dependerão só de condições técnicas.

[3] ARROW, K.J. e Hahn, F.H (1971) General Competitive Analysis, Holden-Day, Inc., San Francisco; Oliver & Boyd, Edinburgh; pag.371.

1.7 CONTRIBUIÇÃO RECENTE

Samuelson e Georgescu-Roegen[4], demostraram que quando temos métodos alternativos de produção (diversas matrizes tecnológicas) com só um fator primário de produção, continua a verificar-se que os preços relativos dos bens produzidos são determinados exclusivamente pelas condições de oferta (ou de produção, ou tecnológicas), independentemente das condições de demanda. Também sob condições de produção competitiva, e tendo como móvel a minimização de custos, a escolha da tecnologia independe da procura pelos produtos.

De certa maneira esses resultados são uma surpreendente ressuscitação da teoria clássica do valor.

Nos próximos capítulos concentrar-nos-emos no estudo do modelo casseliano com coeficientes variáveis para dois setores, muito utilizado, tanto em economia aplicada como em teoria pura do comércio internacional, finanças públicas, economia regional, etc.

---

[4] Samuelson, P.A. (8) e Georgescu-Roegen, N. (4)

BIBLIOGRAFIA

1. ARROW, K.A. "Economic Equilibrium" em International Encyclopedia of Social Sciences, pp. 380-388.
2. ARROW, K.A. e HAHN, F.H. General Competitive Analysis San Francisco: Holden-Day, 1971.
3. FERGUSON, C.E. e GOULD, J.P. Microeconomic Theory. 5a. edição. Homewood, Ill.: Irwin, 1975. Capítulo 15.
4. GEORGESCU-ROEGEN, N. "Some Properties of a Generalized Leontief Model" em KOOPMANS, T.C. (org.) Activity Analysis of Allocation and Production. New York: Wiley, 1951, Cap. X, pp.165-173. Reproduzido e ampliado em GEORGESCU-ROEGEN, N. Analytical Economics Cambridge, Mass.: Harvard Univ. Press, Cap. 9, pp.316-337.
5. INTRILIGATOR, M.D. Mathematical Optimization and Economic Theory. Engewood-Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1971. Capítulo 9.
6. KORNAI, J. Antiequilibrium. Amsterdam: North-Holland, 1971.
7. KUENE, R. Theory of General Equilibrium Systems. Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1963.
8. SAMUELSON, P.A. "Abstract of a Theorem Concerning Substitutability in Open Leontief Models", em KOOPMANS, T.C. (org.) Activity Analysis of Allocation and Production. New York: Wiley, 1951, Cap. VII, pp. 142-146. Reproduzido em SAMUELSON, P.A. The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson, Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1966, vol.I, pp.515-519.
9. SIMONSEN, M.H. Teoria Microeconômica. Rio de Janeiro: Fundação Getúlio Vargas, 1967. Capítulo 20.

CAPÍTULO II

MODELO DE EQUILÍBRIO GERAL DE PRODUÇÃO COM DOIS FATORES E DOIS PRODUTOS

Iremos considerar dois setores, X e Y, e só dois fatores originais, capital (K) e trabalho (L). Cada uma das duas indústrias especializa-se na produção de um único bem, utilizando só os dois fatores originais. Os bens finais são X e Y. Neste capítulo consideramos o preço relativo dos bens dados exogenamente.

2.1 OFERTA DOS FATORES

Supomos, primeiramente, fixas a oferta de capital e de trabalho, e que existe pleno emprego dos fatores de produção.

A disponibilidade de capital e trabalho é alocada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{K} &= K_x + K_y \\ \bar{L} &= L_x + L_y \end{aligned} \qquad (2.1.1)$$

O sistema acima nos dá a disponibilidade de fatores, distribuída entre os setores, no qual os índices x e y representam os bens X e Y respectivamente. Portanto, K_x é a quantidade de capital empregado no setor X, K_y é a quantidade de capital empregado no setor Y, e $\bar{K}$ é a disponibilidade de capital. $\bar{L}$ é a disponibilidade de trabalho, do qual, L_x está empregado no setor X e L_y no setor Y.

Chamaremos a razão entre os fatores empregados em cada setor de k_i.

$$k_i = \frac{K_i}{L_i} \qquad \text{para } i = x, y \qquad (2.1.2)$$

A segunda suposição é de que o setor X é mais intensivo no uso do fator capital que o setor Y. A qualquer preço relativo dos fatores teremos:

$$\frac{K_x}{L_x} = k_x > k_y = \frac{K_y}{L_y}$$

A dotação relativa de capital-trabalho na economia é dada pela razão:

$$k = \bar{K} / \bar{L} \qquad (2.1.3)$$

Tomando o sistema de equações (2.1.1) e dividindo a segunda equação por $\bar{L}$ teremos a seguinte relação:

$$\frac{\bar{L}}{\bar{L}} = \frac{L_x}{\bar{L}} + \frac{L_y}{\bar{L}}$$

$$1 = l_x + l_y \qquad (2.1.4)$$

onde l_x é a proporção da mão de obra empregada no setor X em relação à mão de obra empregada na economia e l_y a correspondente proporção para o setor Y. Generalizando podemos escrever:

$$l_i = \frac{L_i}{\bar{L}} \qquad \text{para } i = x\ ,\ y \qquad (2.1.5)$$

Se tomarmos a primeira equação do sistema (2.1.1) e dividirmos por $\bar{L}$ teremos:

$$\frac{\bar{K}}{\bar{L}} = \frac{K_x}{\bar{L}} + \frac{K_y}{\bar{L}}$$

Multiplicando, agora, o primeiro termo do lado direito da equação por L_x/L_x e o segundo termo por L_y/L_y teremos o seguinte:

$$\frac{\bar{K}}{\bar{L}} = \frac{K_x\ L_x}{L_x\ \bar{L}} + \frac{K_y L_y}{L_y \bar{L}}$$

que de (2.1.2) , (2.1.3) fica

$$k = k_x \; l_x + k_y \; l_y \tag{2.1.6}$$

A dotação relativa capital-trabalho na economia é a média das proporções capital-trabalho setoriais, ponderada pela respectiva proporção da força de trabalho absorvida em cada setor.

O sistema (2.1.1), após feitos os arranjos que conduziram a (2.1.4) e (2.1.6), transforma-se em:

$$\begin{aligned} l_x k_x \; + \; l_y k_y &= k \\ l_x \; + \; l_y &= 1 \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Ainda podemos escrever o sistema (2.1.7) na sua forma matricial

$$\begin{Bmatrix} k_x & k_y \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_x \\ l_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{2.1.8}$$

Resolvendo este sistema pela regra de Cramer para l_i teremos:

$$l_x = \frac{\begin{vmatrix} k & k_y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_x & k_y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{k - k_y}{k_x - k_y} \tag{2.1.9}$$

$$l_y = \frac{\begin{vmatrix} k_x & k \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_x & k_y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{k_x - k}{k_x - k_y} \tag{2.1.10}$$

Das relações (2.1.10) e (2.1.9) podemos concluir que a proporção de mão de obra total empregada em cada setor determinado (l_i) expressa-se em função das proporções de capital - trabalho empregados em cada setor e na economia (k_i e k) .

Do suposto que o setor X é mais intensivo no uso do fator capital teremos que:

$$k_x > k_y \quad \text{implica que} \quad (k_x - k_y) > 0 \qquad (2.1.11)$$

Daí serem os denominadores de (2.1.9) e (2.1.10) positivos. Sendo k uma média ponderada, ele será intermediário entre k_x e k_y.

$$k_x > k > k_y \quad \text{implica em} \quad (k_x - k) > 0 \qquad (2.1.12)$$

$$\text{e} \quad (k - k_y) > 0 \qquad (2.1.13)$$

Podemos então concluir que os l_i são positivos

$$l_x = \frac{k - k_y}{k_x - k_y} > 0 \quad \text{porém menor que um, pois:}$$

$$(k_x - k_y) > (k - k_y) > 0 \qquad (2.1.14)$$

$$l_y = \frac{k_x - k}{k_x - k_y} > 0 \quad \text{porém menor do que um, pois:}$$

$$(k_x - k_y) > (k_x - k) > 0 \qquad (2.1.15)$$

2.2 FUNÇÃO DE PRODUÇÃO SETORIAL

Supomos que as funções de produção setoriais sejam homogêneas lineares, contínuas e duplamente deriváveis.

Temos então:

$$X = g\ (K_x\ ,\ L_x) \qquad (2.2.1)$$

$$Y = h\ (K_y\ ,\ L_y) \qquad (2.2.2)$$

Generalizando temos o produto setorial como:

$$F_i = F_i \ (K_i \ , L_i) \qquad \text{para } i = x,y \qquad (2.2.3)$$

Que por ser homogênea linear, fica:

$$F_i = L_i \, F_i \ (K_i / L_i \ , \ L_i / L_i \ ) \quad \text{para } i = x,y$$

$$F_i = L_i \, F_i \ (k_i \ ; 1) = L_i \ f_i \ (k_i) \qquad (2.2.4)$$

O produto médio setorial do trabalho é,

$$f_i = f_i \ (k_i) \qquad (2.2.5)$$

Na equação (2.2.5) temos o produto setorial médio do trabalho (f_i) . Ele é função somente da relação capital-trabalho do respectivo setor (k_i).

O produto marginal do capital pode ser obtido derivando-se o produto setorial total (2.2.4) em relação ao capital empregado no respectivo setor; assim,

$$\frac{\partial F_i}{\partial K_i} = L_i \frac{\partial f_i}{\partial k_i} \frac{\partial k_i}{\partial K_i} = L_i \ f'_i \ (k_i) \ \frac{1}{L_i} = f'_i(k_i) \qquad (2.2.6)$$

para $i = x;y$

O produto marginal do trabalho é:

$$\frac{\partial F_i}{\partial L_i} = f_i \ (k_i) + L_i \ f'_i \ (k_i) \ (-K_i/L_i^2)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial L_i} = f_i(k_i) - k_i \ f'_i \ (k_i) \qquad \text{para } i = x, y \qquad (2.2.7)$$

Portanto, os produtos marginais dependem só das respectivas proporções entre os fatores de produção. Admitindo ainda que os produtos marginais são positivos, mas decrescentes:

$$f'_i \ (k_i) > 0 \ \text{ implica que } \frac{\partial F_i}{\partial K_i} > 0 \ \text{ e } \ \frac{\partial F_i}{\partial L_i} > 0 \qquad (2.2.8)$$

$$f''_i \ (k_i) < 0 \ \text{ implica que } \frac{\partial^2 F_i}{\partial K^2_i} < 0 \ \text{ e } \ \frac{\partial^2 F_i}{\partial L^2_i} < 0 \qquad (2.2.9)$$

No gráfico (2.2.1) poderemos ver melhor essas relacões. No gráfico superior temos o produto médio setorial do trabalho aumentando infinitamente, a taxas decrescentes, à medida que aumenta a razão capital-trabalho, o que implica em rendimentos médios e marginais positivos, mas decrescentes. No gráfico inferior vemos que o produto marginal do capital é positivo, mas decrescente, à medida que aumenta a razão capital-trabalho. O produto marginal do trabalho é positivo, mas crescente à medida que aumenta k_i, pois, $\frac{\partial PMa\ L_i}{\partial k_i} = - k_i\ f''_i > 0$ [1].

Ainda supomos que o produto médio:

$$1)\ \lim_{k_i \to 0} f_i\ (k_i) = 0 \qquad (2.2.10)$$

Isto é, não haverá produção quando a relação capital-trabalho for zero.

$$2)\ \lim_{k_i \to \infty} f_i\ (k_i) = \infty \qquad (2.2.11)$$

Ou, que a função é sempre crescente

$$3)\ \lim_{k_i \to 0} f'_i\ (k_i) = \infty \qquad (2.2.12)$$

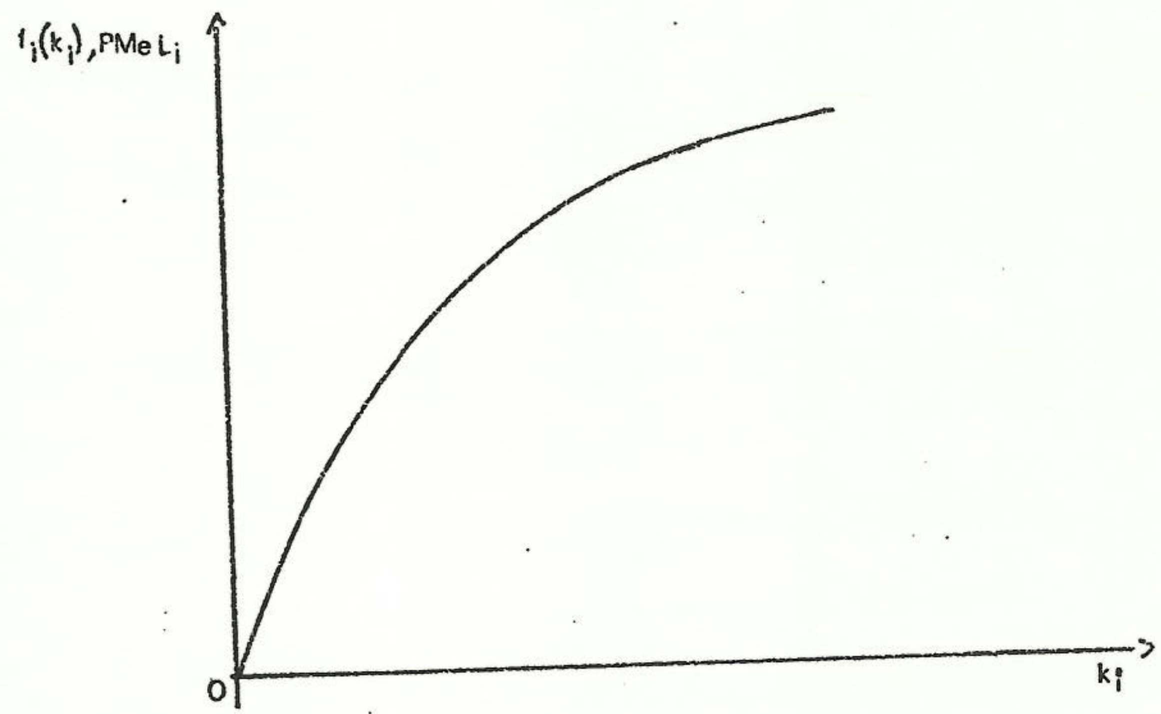
Que é o mesmo que dizer que, no gráfico (2.2.1) inferior, quando k_i tende para a origem, a ordenada tenderá a infinito. O PMa L_i é indeterminado, mas pela regra de L'Hospital resulta que o limite será igual a zero.[2]

---

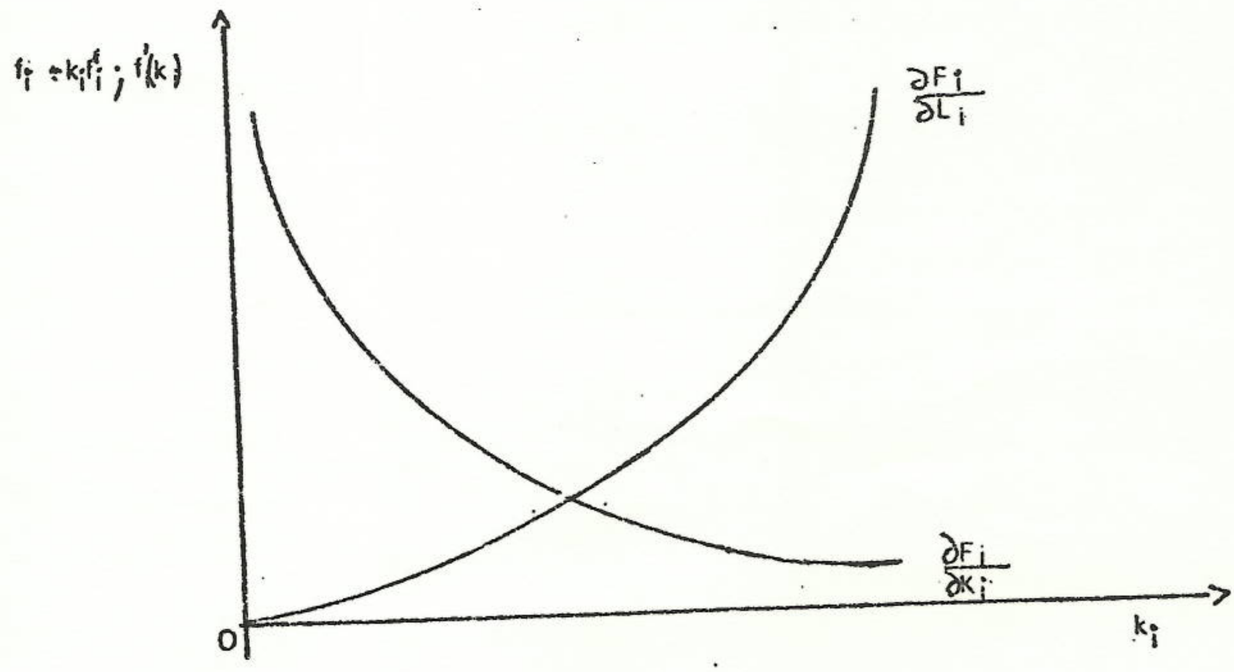
[1] O PMa L_i é decrescente da direita para a esquerda, isto é, em relação à origem do fator trabalho para dado K_i, Assim

$$\frac{\partial PMa\ L_i}{\partial L_i} = \frac{K_i^2}{L_1}\ f''_i < 0$$

[2] $\lim_{k_i \to 0} PMa\ L_i = 0 - 0\ \infty$, que é indeterminado, diferenciando-se $PMaL_i$ com relação a k_i, temos:



$f_i(k_i)$, PMe L_i
0
k_i



$f_i - k_i f_i'$; $f_i'(k_i)$
$\frac{\partial F_i}{\partial L_i}$
$\frac{\partial F_i}{\partial K_i}$
0
k_i

Gráfico (2.2.1)

$$4)\ \lim_{k_i \to \infty} f'(k_i) = 0 \qquad (2.2.13)$$

Isto é, quando k_i tende a infinito o produto marginal do capital é assintótico à abscissa. O $PMaL_i$ é indeterminado, mas pela regra de L'Hospital, teremos que o limite será igual a infinito.[2b]

Dividindo-se a equação (2.2.4) pela oferta total de trabalho, teremos o produto setorial per capita, que é igual à proporção de mão de obra empregada no respectivo setor (l_i) multiplicada pelo seu produto médio do trabalho $\left[f_i(k_i)\right]$, ou seja:

$$q_i = \frac{F_i}{L} = \frac{L_i}{L} f_i(k_i) \qquad (2.2.14)$$

Simplificando

$$q_i = l_i f_i(k_i) \qquad (2.2.15)$$

2.3 REMUNERAÇÃO DOS FATORES

Consideremos W como a notação de salário e R como a notação da remuneração do capital (aluguel). O salário e o aluguel são iguais aos respectivos valores de sua produtividade marginal em cada setor. O valor da produtividade marginal é igual ao preço do bem vezes a produtividade marginal do fator; assim,

$$W_i = P_i (f_i - k_i f'_i) \qquad \text{para } i = x,y$$

$$R_i = P_i f'_i$$

$$\frac{d\ PMa\ L_i}{d\ k_i} = f'_i - f'_i - k_i f''_i = -k_i f''_i$$

Tomando-se o limite quando k_i tende a zero, resulta que $PMa\ L_i$ é zero.

[2b] Considerando a expressão obtida no rodapé (2); tomando-se o limite quando k_i tende a infinito, resulta que $PM_a L_i$ tende a infinito.

Designaremos os salários e aluguéis reais por W_i^i e R_i^i, sendo que o índice inferior representa a remuneração no setor considerado e o índice superior representa o bem utilizado como numerário, isto é, em termos de que bem que definimos o poder aquisitivo das remunerações; a tabela seguinte resume as diferentes expressões que pode assumir o salário.

T A B E L A I

Salários Reais

	EM TERMOS DO BEM X	EM TERMOS DO BEM Y
SETOR X	$W_x^x = \frac{P_x}{P_x}(f_x - k_x f'_x) = f_x - k_x f'_x$	$W_x^y = \frac{P_x}{P_y}(f_x - k_x f'_x)$
SETOR Y	$W_y^x = \frac{P_y}{P_x}(f_y - k_y f'_y)$	$W_y^y = \frac{P_y}{P_y}(f_y - k_y f'_y) = f_y - k_y f'_y$

O preço relativo do bem Y em termos do bem X pode ser representado por:

$$P = \frac{P_y}{P_x} \tag{2.3.1}$$

Consideramos que o salário real na mesma unidade de medida deve ser o mesmo para os dois setores devido ao suposto de concorrência perfeita no mercado de fatores, assim

$$W_x^x = W_y^x$$

Substituindo

$$f_x - k_x f'_x = P (f_y - k_y f'_y)$$

temos

$$W_x^x = P (f_y - k_y f'_y)$$

Substituindo a expressão entre parênteses, conseguimos a fórmula que transforma o salário real em termos de Y para X, ou vice-versa:

$$W_x^x = P W_y^y \qquad (2.3.2)$$

T A B E L A II

Aluguéis Reais

	EM TERMOS DO BEM X	EM TERMOS DO BEM Y
SETOR X	$R_x^x = \frac{P_x}{P_x} f'_x = f'_x$	$R_x^y = \frac{P_x}{P_y} f'_x = \frac{1}{P} f'_x$
SETOR Y	$R_y^x = \frac{P_y}{P_x} f'_y = P f'_y$	$R_y^y = \frac{P_y}{P_y} f'_y = f'_y$

Como existe uma única remuneração real do fator capi - tal na economia em termos da mesma unidade, temos:

$$R_x^x = R_y^x \quad , \text{ isto é, } \quad f'_x = P\, f'_y$$

Mas,

$$R_x^x = P\, R_y^y \tag{2.3.3}$$

Portanto,conseguimos a relação que transforma o aluguel real em termos de Y para expressá-lo em termos de X, ou vice-versa.

A razão salários-aluguel, devido à concorrência e à perfeita mobilidade dos fatores será a mesma nos dois setores.

$$\theta = \frac{W_x^x}{R_x^x} = \frac{W_y^y\, P}{R_y^y\, P} = \frac{W_y^y}{R_y^y} \tag{2.3.4}$$

Portanto, θ será o mesmo qualquer que seja o numerário escolhido. Com esta condição satisfeita garante-se o equilíbrio no mercado de fatores.

Substituindo os valores de W_i^i e R_i^i encontrados nos quadros I e II, respectivamente, na relação (2.3.4), encontraremos:

$$\theta = \frac{f_x - k_x f'_x}{f'_x} = \frac{f_y - k_y f'_y}{f'_y}$$

Reordenando, temos:

$$\theta = \frac{f_x}{f'_x} - k_x = \frac{f_y}{f'_y} - k_y \tag{2.3.5}$$

Generalizando:

$$\theta = \frac{f_i}{f'_i} - k_i = \frac{f_i\ (k_i)}{f'_i\ (k_i)} - k_i \tag{2.3.6}$$

Isolando-se k_i , fica

$$k_i = \frac{f_i}{f'_i} - \theta = \frac{f_i\ (k_i)}{f'_i\ (k_i)} - \theta \tag{2.3.7}$$

A relação (2.3.6) indica que para qualquer razão salário-aluguel, Θ, obtém-se a determinação da ótima razão capital trabalho setorial, k_i. Isto decorre do fato de as funções de produção serem homogêneas lineares; conseqüentemente, os respectivos produtos médios e marginais são só função das respectivas razões capital-trabalho. No gráfico (2.4.1) pode-se apreciar que dado um valor de Θ representado por OS e a função do produto médio setorial do trabalho, a tangência nessa função duma linha que parte do ponto S define a razão ótima k_i. Assim, a equação (2.3.7) é só função de Θ, $k_i = k_i\ (\Theta)$.

Desta maneira os produtos médios e marginais setoriais para cada fator serão função de função de, Θ . Indicamos esta relação para o produto médio setorial do trabalho e o produto marginal setorial do capital respectivamente como:

$$\begin{aligned} f_i &= f_i \left[k_i\ (\Theta) \right] \\ f'_i &= f'_i \left[k_i\ (\Theta) \right] \end{aligned} \qquad (2.3.8)$$

2.4 DISTRIBUIÇÃO E PARTICIPAÇÃO DOS FATORES NA PRODUÇÃO

Segundo o Teorema de Euler nós podemos dizer que remunerando os fatores de acordo com as suas respectivas produtividades marginais será esgotado o produto. Podemos dizer que para cada setor teremos a seguinte divisão da produção:

$$F_i = PMaK_i \cdot K_i + PMaL_i \cdot L_i$$

Substituindo vem:

$$F_i = f'_i\ K_i + (\ f_i - f'_i\ k_i\ )\ L_i$$

O produto médio setorial do trabalho é conseguido dividindo ambos os membros por L_i; assim:

$$f_i = \frac{F_i}{L_i} = \frac{K_i}{L_i} f'_i + (\ f_i - k_i\ f'_i\ )\ \frac{L_i}{L_i}$$

$$f_i = k_i\ f'_i + (\ f_i - k_i\ f'_i\ )$$

Substituindo-se pelos aluguéis e salários reais, que nós temos nos quadros I e II, fica:

$$f_i = k_i\, R_i^i + W_i^i$$

onde o primeiro termo representa a participação do capital no produto médio setorial e o segundo a correspondente participação do trabalho ou salário real setorial. No gráfico (2.4.1), temos:

Dada a razão capital-trabalho (k_i) que representamos por OA = NH resulta:

Produto médio do trabalho no setor i é: $f_i = AH = ON$

Produto marginal do capital no setor i é: $f'_i = \frac{AH}{AS} = \frac{NM}{NH} = R_i^i$

Razão salários-aluguéis de (2.3.6) é: $\Theta = \frac{AH}{\frac{AH}{AS}} - OA = AS - OA = OS$

Participação do capital no produto médio do trabalho é:

$$k_i\, R_i^i = NH\, \frac{NM}{NH} = MN$$

Remuneração real do trabalho, ou participação do trabalho no produto médio do trabalho setorial é:

$$W_i^i = f_i - k_i\, R_i^i = ON - MN = OM$$

A participação do fator trabalho no produto setorial é definida:

$$a_i = \frac{\text{Remuneração global dos trabalhadores empregados no setor}}{\text{Produção Setorial}}$$

$$a_i = \frac{W_i^i \quad L_i^i}{F_i}$$

Substituindo F_i pelo resultado do teorema de Euler, vem:

$$a_i = \frac{W_i^i \quad L_i}{W_i^i \quad L_i^i + R_i^i\, K_i}$$

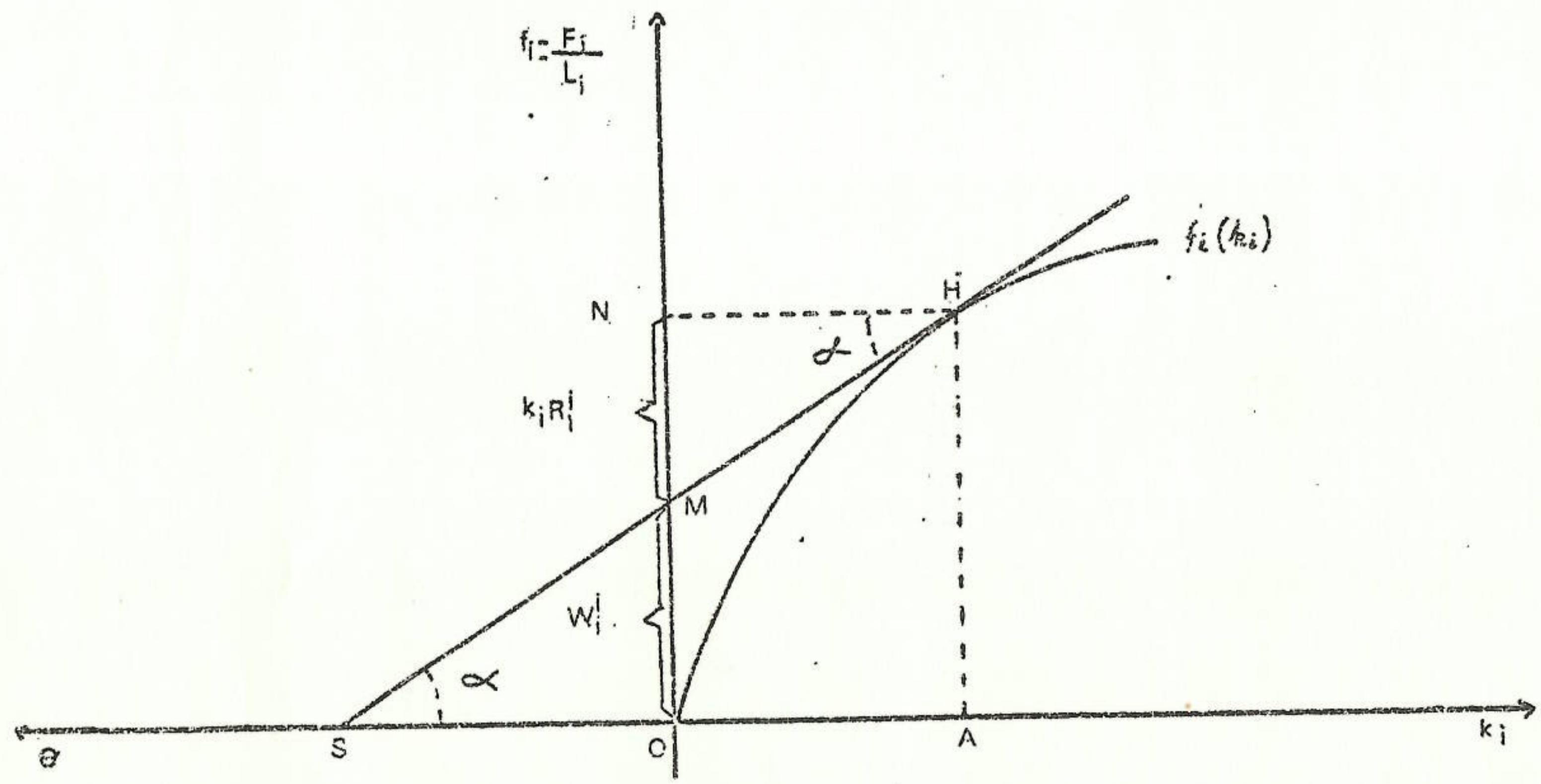


Gráfico (2.4.1)

Dividindo o denominador e o numerador por L_i R_i^i fica :

$$a_i = \frac{\theta}{\theta + k_i} \qquad \text{para } i = x, y \qquad (2.4.1)$$

Portanto, a participação relativa do fator trabalho é função da remuneração relativa dos fatores e da razão capital-trabalho no respectivo setor.

A parcela do produto setorial correspondente ao fator capital é,

$$(1 - a_i) = 1 - \frac{\theta}{\theta + k_i}$$

Ordenando,

$$(1 - a_i) = \frac{k_i}{\theta + k_i} \qquad (2.4.2)$$

2.5 ELASTICIDADE SUBSTITUIÇÃO SETORIAL ENTRE OS FATORES

Das equações (2.3.7) e (2.3.8) sabe-se:

$$k_i = \frac{f_i}{f'_i} - \theta$$

$$f_i = f_i\left[k_i(\theta)\right]$$

Derivando k_i em relação à θ temos:

$$\frac{d\,k_i}{d\,\theta} = \left[f'_i\, f'_i \frac{d\,k_i}{d\,\theta} - f_i\, f''_i \frac{d\,k_i}{d\,\theta}\right] \frac{1}{(f'_i)^2} - 1$$

Evidenciando $\frac{d\,k_i}{d\,\theta}$ e introduzindo no colchete $\frac{1}{(f'_i)^2}$ temos :

$$\frac{d\,k_i}{d\,\theta} = \frac{d\,k_i}{d\,\theta}\left[1 - \frac{f_i\, f''_i}{(f'_i)^2}\right] - 1$$

Ordenando :

$$1 = \frac{d\ k_i}{d\ \theta}\left[1 - \frac{f_i\ f''_i}{(f'_i)^2} - 1\right]$$

Simplificando :

$$1 = \frac{d\ k_i}{d\ \theta}\left[- \frac{f_i\ f''_i}{(f'_i)^2}\right]$$

Ordenando novamente:

$$\frac{d\ k_i}{d\ \theta} = - \frac{(f'_i)^2}{f_i\ f''_i} > 0 \qquad (2.5.1)$$

A equação (2.5.1) será sempre positiva, pois as derivadas segundas da função foram admitidas como negativas.

A proporção capital-trabalho setorial está diretamente relacionada com a remuneração relativa do trabalho, isto é, um aumento na remuneração relativa ao trabalho tornará os setores mais intensivos em capital. O inverso sucederá quando a remuneração relativa do trabalho diminua.(vide gráfico (2.4.1)).

Através de logaritmos podemos encontrar a elasticidade de substituição entre fatores em cada setor, que é definida como:

$$\frac{dLn\ k_i}{dLn\ \theta} = \frac{d\ k_i}{d\ \theta}\ \frac{\theta}{k_i} = \sigma_i \qquad (2.5.2)$$

De (2.5.1) e (2.5.2), vem:

$$\sigma_i = \frac{dLn\ k_i}{dLn\ \theta} = - \frac{(f'_i)^2}{f''_i\ f_i}\ \frac{\theta}{k_i} > 0 \qquad (2.5.3)$$

No gráfico (2.5.1) podemos ver que o encarecimento relativo do trabalho é representado pela mudança de θ_0 para θ_1, concomitantemente com o que ocorre um aumento na proporção capital-trabalho setorial.

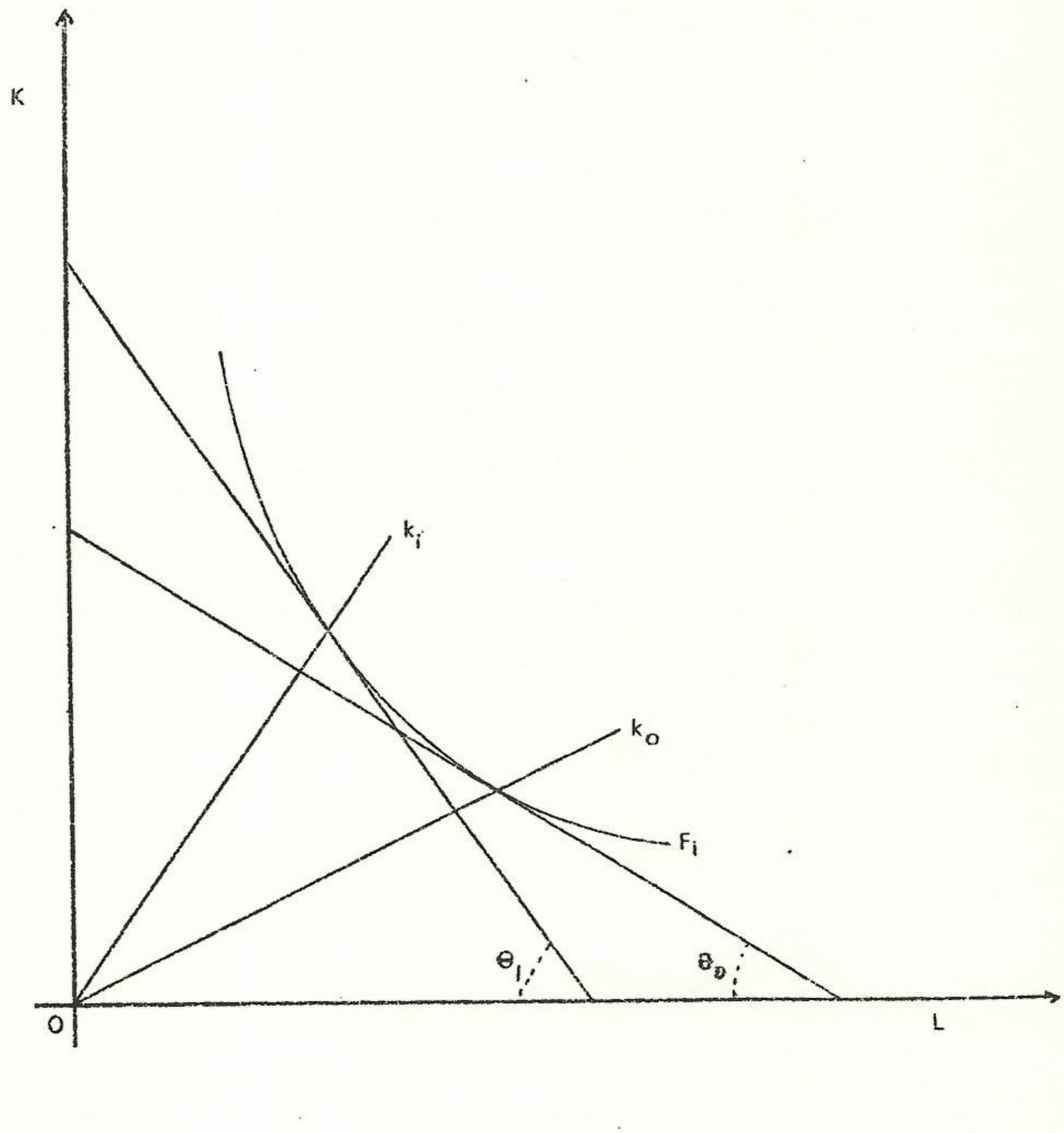


Gráfico (2.5.1)

2.6 A RELAÇÃO ENTRE O PREÇO RELATIVO DOS BENS E O PREÇO RELATIVO DOS FATORES

Quando não tivermos especialização na produção e houver plena mobilidade de fatores, a remuneração real de cada fator será a mesma em qualquer setor.

A remuneração real do capital em termos de X (do quadro I) é:

$$R^x = f'_x = P \cdot f'_y \tag{2.6.1}$$

Isto implica que o preço relativo dos bens pode ser expresso por:

$$P = \frac{P_y}{P_x} = \frac{f'_x}{f'_y} \tag{2.6.2}$$

Como sabemos, o produto médio e marginal setoriais (f_i e f'_i) são funções contínuas da respectiva relação capital-trabalho setorial, que, por sua vez, depende da remuneração relativa dos fatores (θ), isto é,

$$f_i = f_i \left[k_i (\theta)\right]$$
$$f'_i = f'_i \left[k_i (\theta)\right]$$

Então, o preço relativo dos bens será função da remuneração relativa dos fatores:

$$P = \frac{f'_x \left[k_x (\theta)\right]}{f'_y \left[k_y (\theta)\right]} \tag{2.6.3}$$

Representando de outra forma:

$$P = P (\theta) \tag{2.6.4}$$

o que demonstra a existência de uma relação entre o preço relativo de Y e a remuneração relativa do trabalho.

Aplicando-se logaritmos naturais a equação (2.6.2) vem,

$$\text{Ln } P = \text{Ln } f'_x - \text{Ln } f'_y \tag{2.6.5}$$

Derivando agora com relação à θ temos:

$$\frac{dLn\ P}{dLn\ \theta} = \frac{f''_x}{f'_x}\ \frac{dk_x}{dLn\theta} - \frac{f''_y}{f'_y}\ \frac{dk_y}{dLn\theta}$$

Mas como $dLn\ \theta = \frac{d\ \theta}{\theta}$, substituindo-se fica:

$$\frac{\partial Ln\ P}{dLn\ \theta} = \theta\ \frac{f''_x}{f'_x}\ \frac{dk_x}{d\ \theta} - \theta\ \frac{f''_y}{f'_y}\ \frac{dk_y}{d\ \theta} \qquad (2.6.6)$$

Substituindo a equação (2.5.1) na equação (2.6.6) teremos:

$$\frac{dLn\ P}{dLn\ \theta} = -\frac{\theta\ f''_x}{f'_x}\ \frac{(f'_x)^2}{f_x\ f''_x} + \frac{\theta\ f''_y}{f'_x}\ \frac{(f'_y)^2}{f_y\ f''_y}$$

Simplificando ,

$$\frac{dLn\ P}{dLn\ \theta} = -\frac{f'_x}{f_x}\ \theta + \frac{f'_y}{f_y}\ \theta \qquad (2.6.7)$$

Pelo Teorema de Euler, substituindo os denominadores da equação (2.6.7) por

$$f_i = R^i_i\ \ k_i + W^i_i = R^i_i\ \ (k_i + \theta\ )$$

resultará em:

$$\frac{dLn\ P}{dLn\ \theta} = -\theta\ \frac{f'_x}{R^x_x\ (k_x + \theta\ )} + \theta\ \frac{f'_y}{R^y_y\ (k_y + \theta\ )}$$

Simplificando, devido a $R^i_i = f'_i$, temos

$$\frac{dLn\ P}{dLn\ \theta} = \frac{-\ \theta}{k_x + \theta} + \frac{\theta}{k_y + \theta}$$

Substituindo o resultado de (2.4.1) na equação anterior, vem:

$$\eta_{P\theta} = \frac{dLn\ P}{dLn\ \theta} = a_y - a_x \qquad (2.6.8)$$

A equação (2.6.8) expressa a elasticidade do preço relativo de Y em relação à remuneração relativa do trabalho, que é igual à diferença entre as participações do fator trabalho em cada setor.

Caso tenhamos a mesma intensidade do uso dos fatores em ambos os setores ($k_x = k_y$), logo $a_y = a_x$, é claro que a elasticidade preço relativo dos bens em relação à remuneração relativa será igual à zero. Isto é, ambos os preços relativos são independentes.

Considerando que a utilização dos fatores nos dois processos produtivos seja diferente e respeitando o suposto inicial de que o setor X é mais intensivo em capital que o setor Y, temos:

$k_x > k_y$ implica que $a_x < a_y$ portanto :

$\eta_{P\theta} = a_y - a_x > 0$ e $0 < \eta_{P\theta} < 1$

Como sabemos que a_x e a_y são menores que a unidade, a elasticidade preço relativo dos bens com relação à remuneração relativa dos fatores não será somente positiva, mas também menor que a unidade.

O sinal de $\eta_{P\theta}$ dependerá de qual bem é intensivo no uso do fator trabalho. Podemos representar

Sinal de $\eta_{P\theta}$ = Sinal $(k_x - k_y)$

Portanto, um aumento na remuneração relativa do trabalho conduzirá a aumento menos que proporcional no preço relativo do bem relativamente mais intensivo em trabalho (no nosso suposto, Y).

Generalizando, um aumento na remuneração relativa de um fator implica em aumento menos que proporcional no preço relativo do bem que usa esse fator mais intensivamente.

No gráfico (2.6.1), que é o diagrama de Lerner-Pearce, nós admitimos, inicialmente, que ambos os bens tinham o mesmo custo de produção. Isto é possível através de uma conveniente

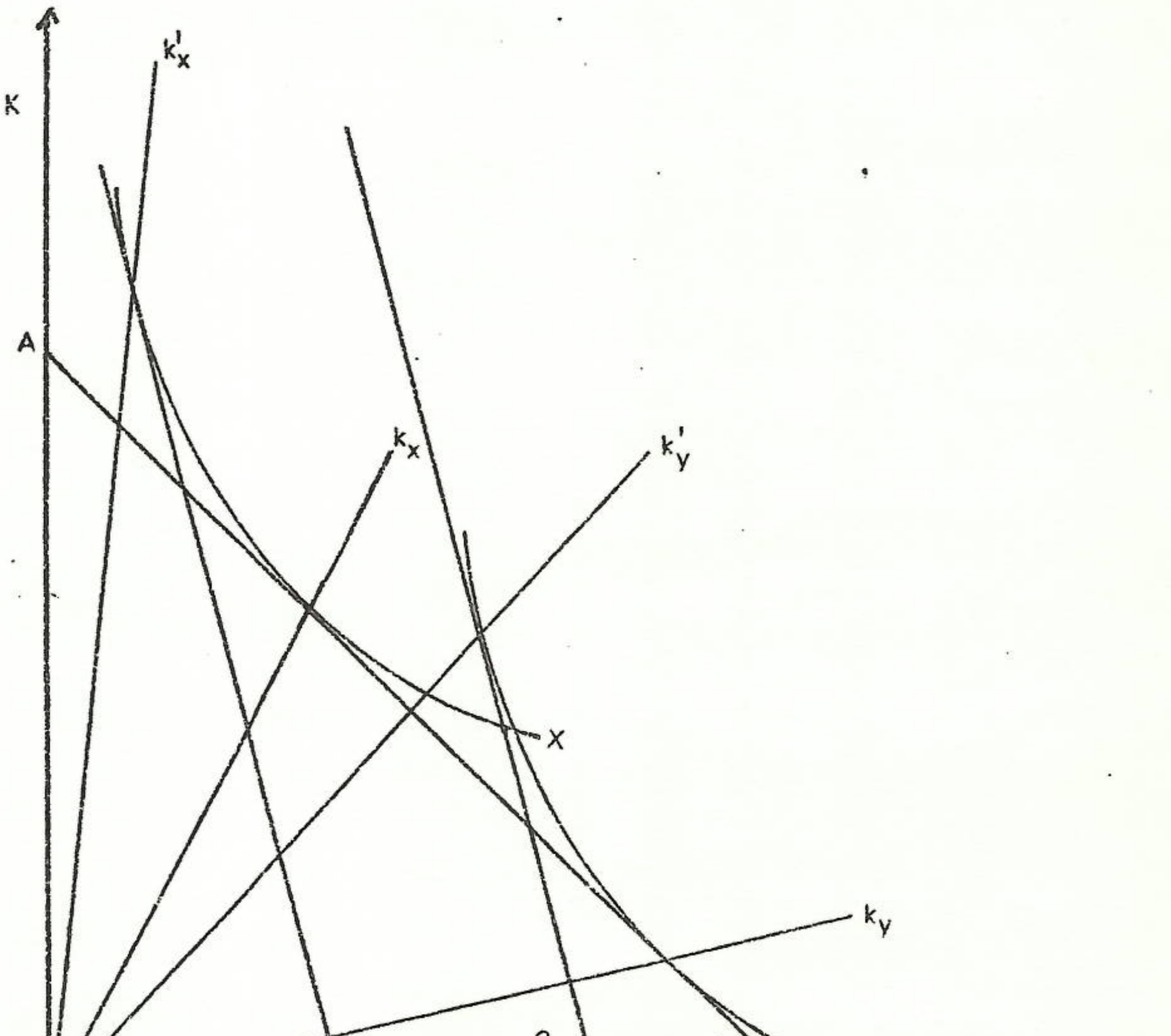


Gráfico (2.6.1)

definição de unidades de produto, representadas pelas isoquantas unitárias X e Y, que resumem os respectivos mapas de isoquantas pelo suposto de homogeneidade linear.

Inicialmente, a remuneração dos fatores é dada por θ_0, que é a inclinação da reta AB. Conseguimos também os correpondentes raios vetores (k_x e k_y), que indicam as proporções capital-trabalho setoriais.

O preço relativo dos bens inicialmente será igual a um, pois por suposição foram manipuladas as unidades de medida, tal que o custo de produção unitário de cada unidade de bens seja o mesmo. OB representa o custo de produção de cada bem em termos de trabalho, enquanto que OA é o custo de produção de cada bem em termos de capital.

Quando aumentamos a remuneração relativa do trabalho para θ_1 obtemos uma nova solução de tangência que determina as novas proporções capital-trabalho setoriais (k'_x e k'_y).

Agora, teremos o custo de Y maior que o de X, em termos de qualquer fator, isto é, o novo preço relativo de Y será maior que um.

Assim, após o aumento na remuneração relativa do trabalho ocorre um aumento no preço relativo do bem intensivo em trabalho (Y).

Veremos que a relação estudada entre os preços relativos de bens e fatores é independente da substituição entre fatores.

Isto é, ocorrendo uma alteração na remuneração relativa dos fatores, ocorrerá uma variação no preço relativo dos bens, mesmo que as relações capital-trabalho setoriais não se modifiquem. Para isto, supomos que proporções sejam mantidas constantes, ou melhor que k_i seja uma constante, e consequentemente ($k_x = a$ e $k_y = b$).

Esta relação está representada no gráfico (2.6.2) que mostra que quando a remuneração relativa do trabalho diminui e mantendo-se as relações capital-trabalho setoriais constantes, no caso $k_x = a$ e $k_y = b$, pode-se inferir que o preço relativo

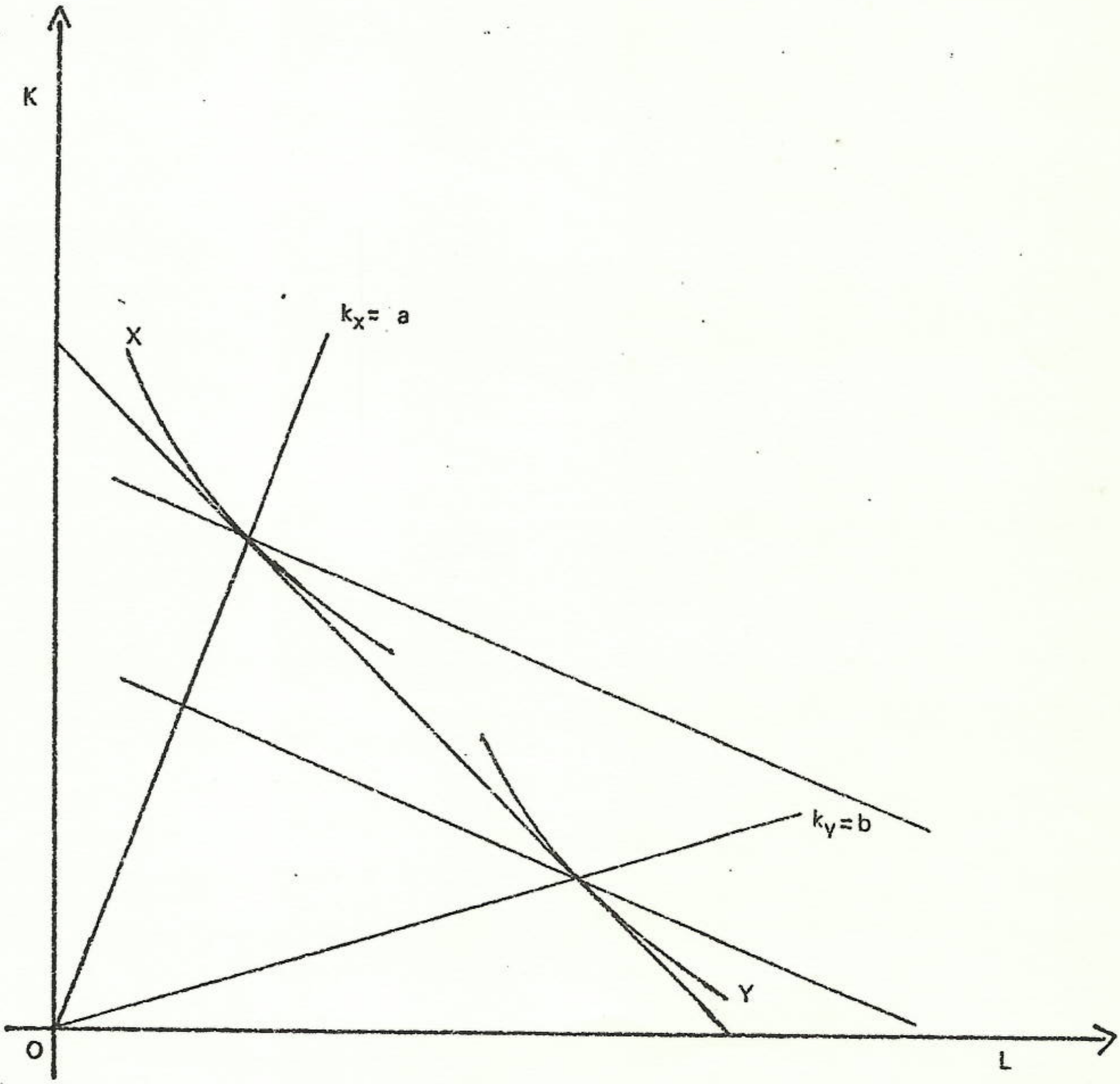


Gráfico (2.6.2)

de Y diminui, pois o custo unitário de produção de X, medido em termos de capital ou trabalho, será maior do que o custo unitário de Y..

Mostraremos algebricamente que a equação (2.6.8) ainda vigora no caso das proporcões k_i setoriais manterem-se constantes. De acordo com o Teorema de Euler, o valor da produção no setor Y é igual aos pagamentos efetuados aos respectivos fatores de produção nele empregado. (Notar que o setor Y remunera "seus" fatores em termos do bem produzido no setor X).

$$PY = W^x_y \; L_y + R^x_y \; K_y$$

Dividindo por $Y = L_y \; f_y$ temos:

$$\frac{PY}{Y} = \frac{W^x_y}{f_y} \frac{L_y}{L_y} + \frac{R^x_y}{f_y} \frac{K_y}{L_y}.$$

Ou, ainda,

$$P = \frac{W^x_y}{f_y} + \frac{R^x_y}{f_y} \; k_y$$

Diferenciando-se, lembrando que $dk_y = 0$, resulta

$$dP = \frac{f_y \; d \; W^x_y}{f^2_y} + \frac{f_y \; k_y \; d \; R^x_y}{f^2_y}$$

ou melhor:

$$dP = \frac{d \; W^x_y}{f_y} + \frac{k_y \; d \; R^x_y}{f_y}$$

$$\frac{dP}{P} = \hat{P} = \frac{d \; W^x_y}{P \; f_y} + \frac{d \; R^x_y}{P} \cdot \frac{k_y}{f_y}.$$

Multiplicando o primeiro termos por $\frac{W^x_y}{W^x_y}$ e o segundo termo do lado direito por $\frac{R^x_y}{R^x_y}$ temos :

$$\hat{P} = \hat{W}^x_y \cdot \frac{W^x_y}{Pf_y} + \hat{R}^x_y \frac{R^x_y k_y}{P \; f_y}$$

onde o circunflexo nas variáveis indica a variação relativa na respectiva variável, e $P f_y$ é igual ao valor do produto médio do trabalho medido em termos de X, no setor Y.

Substituindo f_y por $\frac{Y}{L_y}$ e k_y por $\frac{K_y}{L_y}$, temos

$$\hat{P} = \hat{W}^x_y \frac{W^x_y \; L_y}{P \, Y} + \hat{R}^x_y \frac{R^x_y \; K_y}{P \, Y}$$

como $\frac{W^x_y \; L_y}{P \, Y} = a_y$; $\frac{R^x_y \; K_y}{P \, . \, Y} = 1 - a_y$ temos

$$\hat{P} = \hat{W}^x_y \; a_y + \hat{R}^x_y \; (1 - a_y) \tag{2.6.9}$$

Portanto, a variação relativa no preço relativo de Y em termo de X é a média das variações relativas das remunerações dos respectivos fatores ponderadas pelas respectivas participações relativas.

Ordenando,

$$\hat{P} = a_y \; (\hat{W}^x_y - \hat{R}^x_y) + \hat{R}^x_y \tag{2.6.10}$$

Mas a expressão entre parênteses é igual à variação relativa na remuneração relativa do trabalho $\hat{\theta}$ [3], assim,

$$\hat{P} = a_y \; (\hat{\theta}) + \hat{R}^x_y \tag{2.6.11}$$

---

[3] temos $\theta = \frac{W^x_y}{R^x_y}$, aplicando logaritmos

$Ln \; \theta = Ln \; W^x_y - Ln \; R^x_y$ e diferenciando-se fica

$dLn \; \theta = dLn \; W^x_y - dLn \; R^x_y$

$\hat{\theta} = \hat{W}^x_y - \hat{R}^x_y$

Encontramos na Tabela II:

$$R_y^x = f'_x$$

Aplicando logaritmos,

$$Ln\ R_y^x = Ln\ f'_x$$

Diferenciando em relação a θ ,

$$\frac{\partial Ln\ R_y^x}{\partial \theta} = \frac{\partial Ln\ f'_x}{\partial \theta}$$

Mas como $f_x = f_x \left[k_x (\theta) \right]$ temos, [4] :

$$\frac{\partial LnR_y^x}{\partial \theta} = \frac{f''_x}{f'_x} \frac{\partial k_x}{\partial \theta} \quad (2.6.12)$$

Substituindo em (2.6.12) a expressão encontrada em (2.5.1) temos

$$\frac{\partial Ln\ R_y^x}{\partial \theta} = \frac{f''_x}{f'_x} \left[- \frac{(f'_x)^2}{f_x\ f''_x} \right]$$

Simplificando,

$$\frac{\partial Ln R_y^x}{\partial \theta} = - \frac{f'_x}{f_x}$$

Multiplicando ambos os lados por θ temos:

$$\frac{\partial Lm R_y^x}{\partial Ln\ \theta} = - \frac{f'_x}{f_x} \theta \quad (2.6.13)$$

---

[4] Aqui a expressão $\frac{\partial k_x}{\partial \theta}$ indica a inclinação para um dado k_x.

Substituindo Θ por $\frac{W_x^x}{R_y^x}$ e $f_x = \frac{X}{L_x}$ temos

$$\frac{dLn\ R_y^x}{dLn\ \Theta} = - \frac{W_x^x\ L_x}{X} \tag{2.6.14}$$

que é o mesmo que:

$$\frac{\hat{R}_y^x}{\hat{\Theta}} = - a_x \tag{2.6.15}$$

ou seja

$$\hat{R}_y^x = - a_x\ \hat{\Theta} \tag{2.6.16}$$

Substituindo em (2.6.11) o valor de $\hat{R}_y^x$ encontrado em (2.6.15) temos:

$$\hat{P} = a_y\ \hat{\Theta} - a_x\ \hat{\Theta}$$

$$\hat{P} = (\ a_y - a_x\ )\ \hat{\Theta} \tag{2.6.17}$$

ou então

$$\eta_{P\Theta} = \frac{dLn\ P}{dLn\ \Theta} = a_y - a_x \tag{2.6.18}$$

A expressão (2.6.18) corresponde ao suposto de propor ções entre fatores mantido constantes, é a mesma expressão encon trada caso tivéssemos o suposto de variação nas propor - ções por efeito substituição, isto é, a expressão (2.6.8).

Assim, a redução nos custos por efeito substituição é de segunda ordem de importância.

A relação inversa, isto é:

$$\eta_{\Theta P} = \frac{1}{\eta_{P\Theta}} = \frac{1}{a_y - a_x} > 1 \tag{2.6.19}$$

nos diz que um aumento no preço relativo de um bem está diretamente relacionado com o aumento na remuneração relativa do fator usado mais intensivamente neste bem. Esse aumento será mais do que proporcional.

No caso específico em que ($k_x > k_y$), um aumento no preço relativo de Y gera um aumento mais do que proporcional na remuneração relativa do trabalho; dado que temos um aumento mais do que proporcional, convencionou-se chamar esse efeito de "magnificação".

Recapitulação Gráfica.

Resumindo o que foi visto até agora e mantendo o suposto de que a indústria do bem X é mais intensiva em capital ($k_x > k_y$), no gráfico (2.6.3) nós representamos no eixo horizontal do lado direito as relações capital-trabalho, enquanto que do lado esquerdo está representado o preço relativo do bem Y. No eixo vertical representamos a remuneração relativa do trabalho.

As curvas k_x e k_y têm inclinação positiva devido à relação (2.5.1) referente ao efeito substituição entre fatores ocasionado por mudanças na remuneração relativa deles. A curva k_x se encontra a direita da correspondente a k_y devido ao suposto da intensidade de uso dos fatores. Isto é, a qualquer remuneração relativa dos fatores, sempre $k_x > k_y$.

No mesmo lado direito do gráfico representamos a disponibilidade relativa dos fatores na economia (k). No ponto em que a ordenada que representa k encontra a curva k_x teremos a especialização da economia na produção de X, pois empregam-se todos os fatores na indústria intensiva em capital ($k=k_x$).

Quando $k = k_y$, a especialização será na produção de Y. Nos casos em que não ocorre a especialização, observamos que a qualquer remuneração relativa dos fatores, teremos que k será um valor intermediário entre k_y e k_x, ($k_y < k < k_x$).

Sabemos que a remuneração relativa do trabalho (θ) é função do preço relativo dos bens; assim, podemos indicar a relação no lado esquerdo do gráfico. A reta deverá cortar o eixo

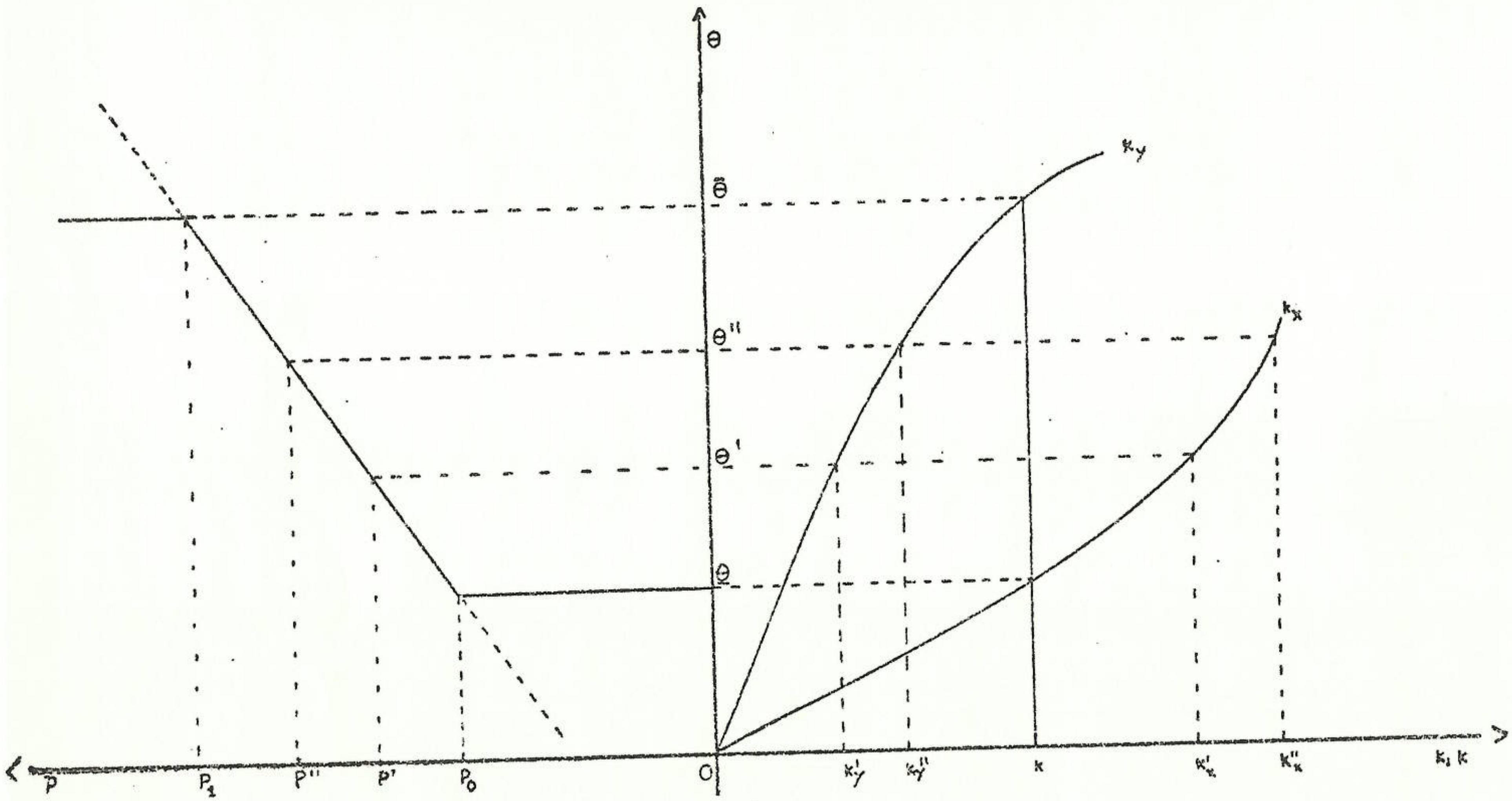


Gráfico (2.6.3)

do preço relativo dos bens (P), pois a elasticidade ($\eta_{P\theta}$) é maior do que um. Porém essa relação só se verifica no intervalo de não especialização na produção.

No caso de especialização em Y, ($k = k_y$), todos os fatores estarão empregados neste setor, sendo que a proporção em que se combinam corresponde à disponibilidade relativa dos fatores na economia. Como a remuneração relativa dos fatores (θ) é função das proporções em que eles se combinam neste ponto de especialização em Y atinge-se o máximo k_y possível, obtendo-se a máxima remuneração relativa do trabalho ($\bar{\theta}$). Aumentos posteriores no preço relativo dos bens (P) não mudarão a remuneração relativa dos fatores (θ). Isto é, ao atingir a especialização em Y a remuneração relativa dos fatores torna-se independente do preço relativo dos bens. As remunerações reais dos fatores em termos de Y ficam constantes, correspondendo ao máximo salário real e ao mínimo aluguel, porém elas aumentarão, em termos de X, por efeito preço relativo dos bens, exclusivamente. Mutatis mutandi no caso de especialização em X. Portanto, a relação entre o preço relativo dos bens e a remuneração relativa dos fatores torna-se horizontal para valores de P maiores que P_1 e menores que P_0.

Dado o valor de P' (nossa variável exógena) conseguimos determinar θ', através do conhecimento das características técnicas dos processos produtivos. Determinado θ' consegue se distribuir a disponibilidade de fatores entre os setores (k'_x e k'_y).

Se P passa de P' para P" podemos ver que θ' aumenta mais que proporcionalmente para θ'', sendo que ambos os setores passam a utilizar maior proporção de capital trabalho. As elasticidades das curvas k_i do gráfico (2.6.3) são as elasticidades substituição técnica entre os fatores no respectivo setor.

Para o caso em que a indústria de X seja intensiva em trabalho a representação gráfica sofre as seguintes alterações: a) as relações entre θ e k_i mudam de ordenamento, pois agora temos $k_x < k_y$; b) a relação entre P e θ passa a ser negativa, pois o aumento no preço relativo do bem intensivo em capital (Y) gera uma queda mais que proporcional na remuneração relativa do trabalho (Θ). Vide gráfico (2.6.4).

Utilizando-se o diagrama LERNER-PEARCE, (2.6.5), podemos representar a máxima e a mínima remuneração relativa do trabalho. Inicialmente, o preço relativo dos bens é igual a um, ao qual corresponde uma dada remuneração relativa ao trabalho indicada pela inclinação da linha AB, definindo as proporções em que se combinam os fatores em ambos os setores, (k_x e k_y). O vetor k define a disponibilidade relativa de capital-trabalho na economia.

A remuneração relativa do trabalho mínima é representada pela inclinação da linha A'B', tangente à isoquanta X no ponto H, definindo uma proporção de uso dos fatores no setor igual ao da economia, ($k_x = k$), isto é, temos completa especialização na produção do bem intensivo em capital (X). A máxima remuneração relativa ao trabalho é indicada pela inclinação de A"B", tangente à isoquanta Y no ponto J, isto é, quando a proporção de uso de fatores no setor intensivo em trabalho (Y) é igual à disponibilidade relativa na economia, ($k_y = k$); implica, portanto, na especialização na produção de Y.

2.7 REVERSÃO NO USO DOS FATORES

Até agora supusemos que qualquer que fosse a remuneração relativa dos fatores, permaneceria a mesma classificação setorial de acordo com a intensidade de uso dos fatores. Analisaremos a possibilidade que exista reversão na intensidade de uso dos fatores. Isto pode suceder devido a que:

(a) as elasticidades substituição entre os fatores, embora sejam constantes, difiram nos dois setores.

(b) as elasticidades substituição setorial entre fatores sejam diferentes e variáveis.

Consideremos o primeiro caso; suponhamos que a elasticidade substituição entre fatores no setor X seja menor que no setor Y ($\sigma_x < \sigma_y$). Isto é, ambas as isoquantas são convexas com relação à origem, mas a correspondente ao setor X terá uma curvatura maior.

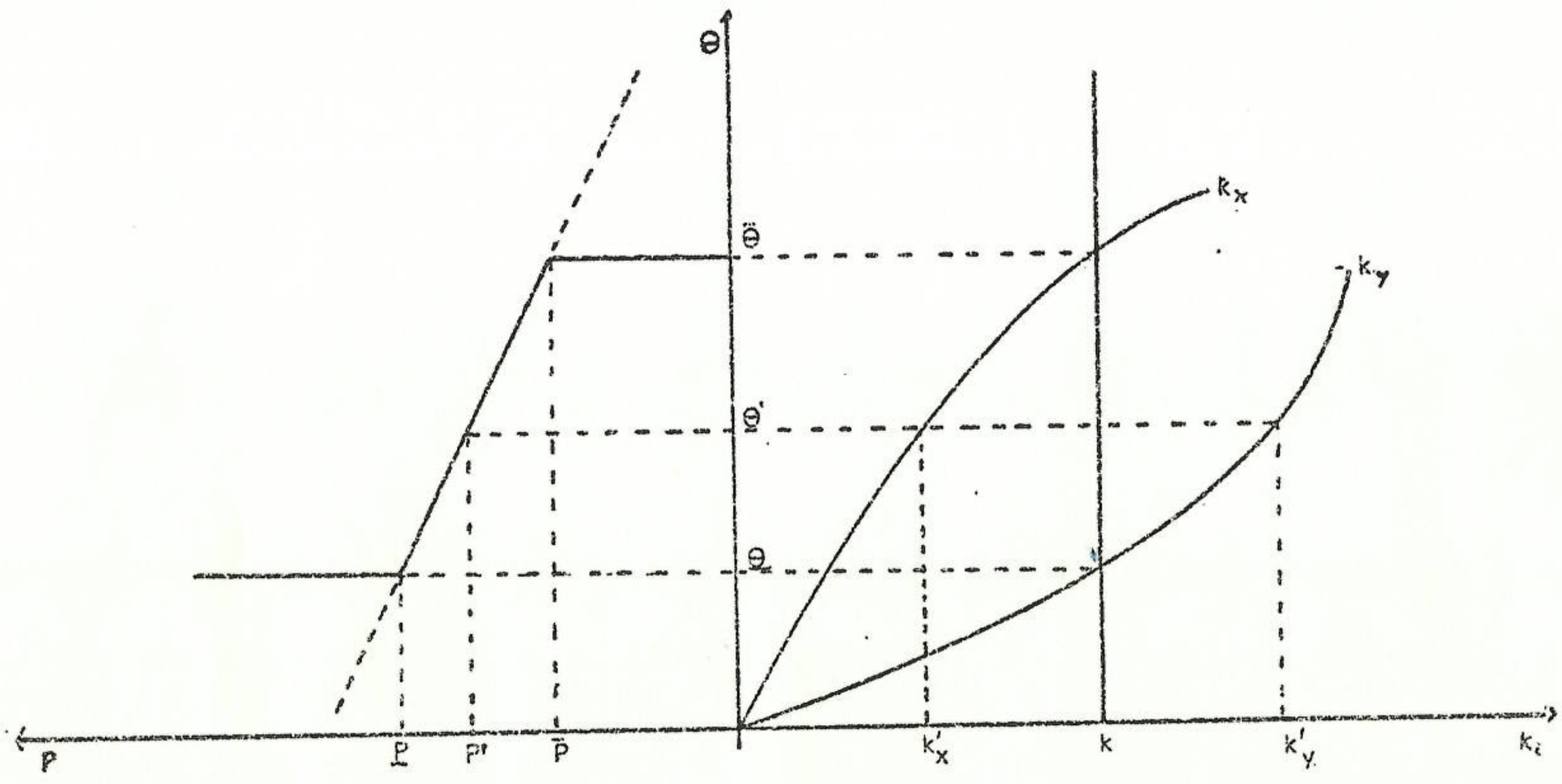


Gráfico (2.6.4)

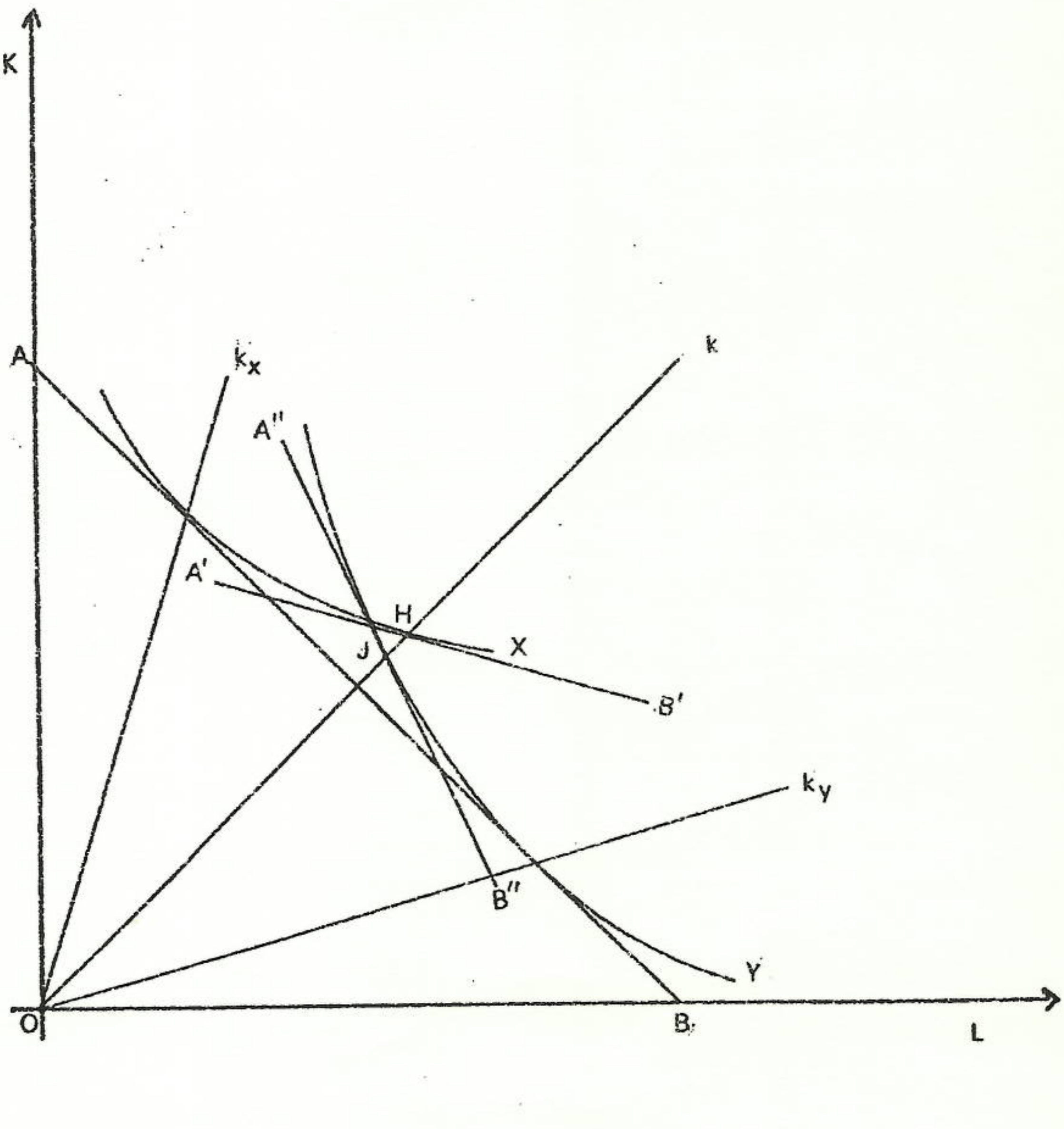


Gráfico (2.6.5)

No gráfico (2.7.1) podemos ver a representação do primeiro caso. A baixas remunerações relativas do trabalho temos que $k_x > k_y$. À medida que aumenta a remuneração relativa do fator trabalho, teremos que a divergência entre as intensidades diminui até chegar a um ponto correspondente a Θ_1 em que $k_x = k_y$. Aumentos posteriores na remuneração relativa do trabalho levam a que $k_x < k_y$.

No segundo caso a relação entre as elasticidades substituição dos fatores setoriais alternam-se em valor. No gráfico (2.7.2) temos que $\sigma_x < \sigma_y$ para baixas remunerações relativas do trabalho e que $\sigma_x > \sigma_y$ no intervalo de altas remunerações relativas do trabalho.Respeita-se a convexidade à origem.

Quando Θ é menor do que as tangentes às isoquantas no ponto A, isto implicará em que $k_x > k_y$; em A, k_x será igual a k_y; entre A e B, $k_x < k_y$; em B novamente teremos k_x igual a k_y; e acima de B teremos $k_x > k_y$.

A presença da reversão na intensidade do uso de fatores complica o relacionamento entre P e Θ; não teremos mais relação monotônica como a conseguida com o suposto de forte intensidade.

Como podemos ver no gráfico (2.7.3), quando consideramos a reversão de fatores poderemos ter para o mesmo preço relativo dos bens (P) diferentes remunerações relativas dos fatores. Existirão duas remunerações relativas para um dado P, quando for o caso (a), pois existirá somente uma reversão. No caso (b), teremos duas ou mais reversões, portanto poderemos para um dado P ter duas ou mais remunerações relativas dos fatores. Mas, dada a disponibilidade relativa capital-trabalho na economia, ela determinará um segmento relevante que implicará em uma relação unívoca entre P e Θ, que poderá ter inclinação positiva ou negativa nesse segmento.

No gráfico (2.7.3) vemos que para o preço relativo dos bens P temos as correspondentes remunerações relativas dos fatores Θ', Θ'', Θ'''. Vemos ainda, que para a disponibilidade de fatores na economia (k) determina-se uma relação unívoca entre P e Θ, negativa no segmento relevante.

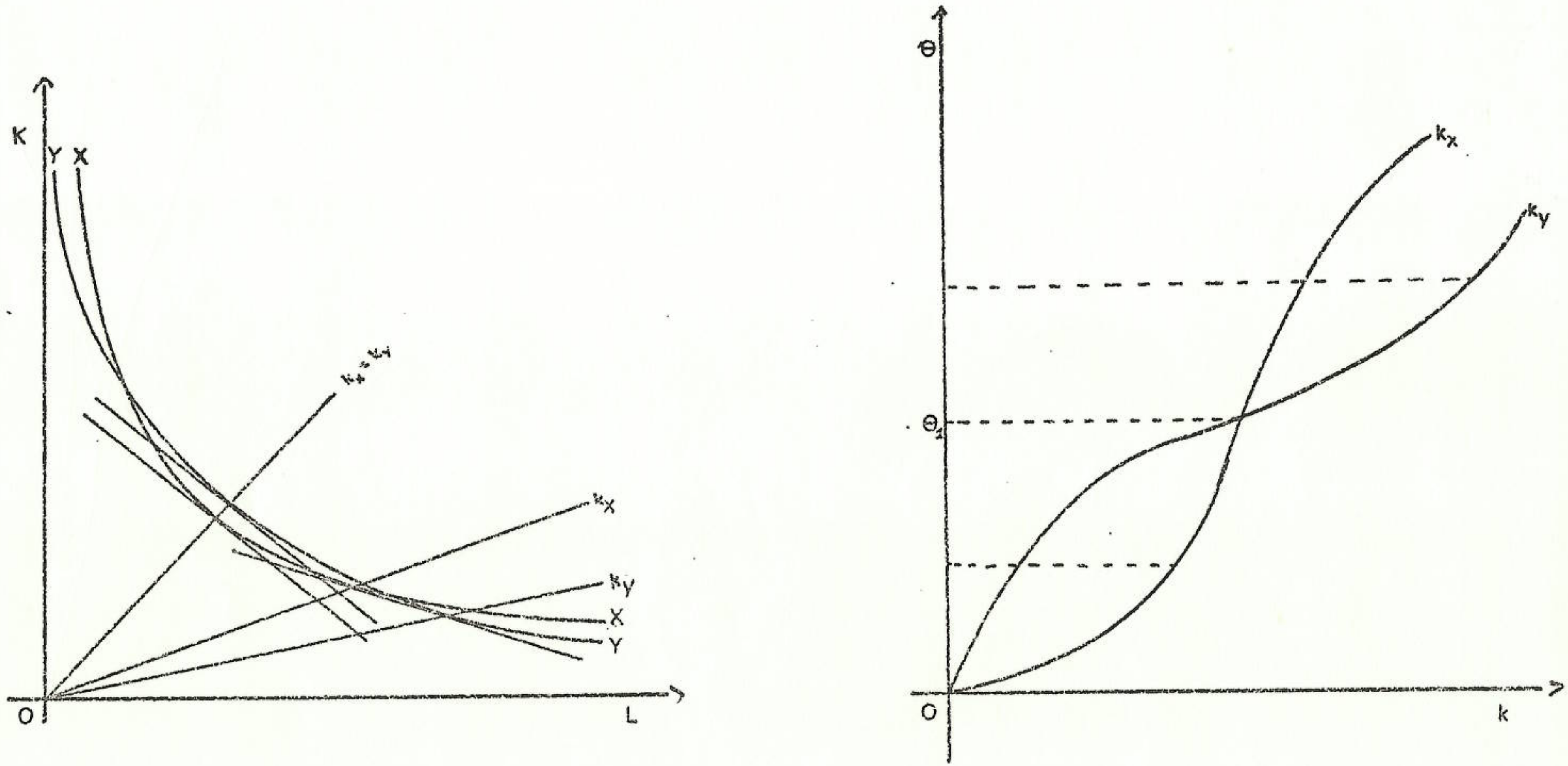


Gráfico (2.7.1)

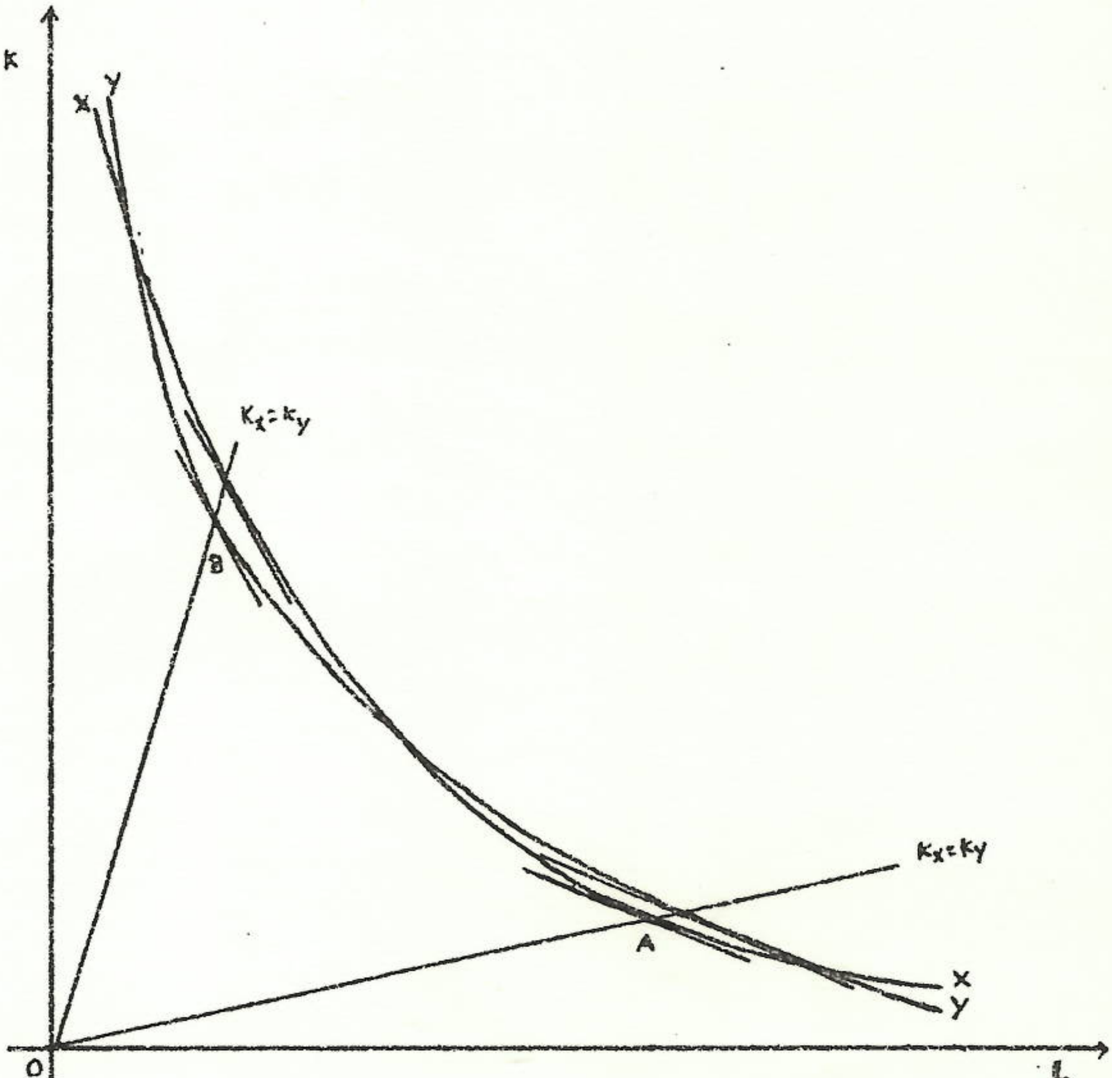


Gráfico (2.7.2)

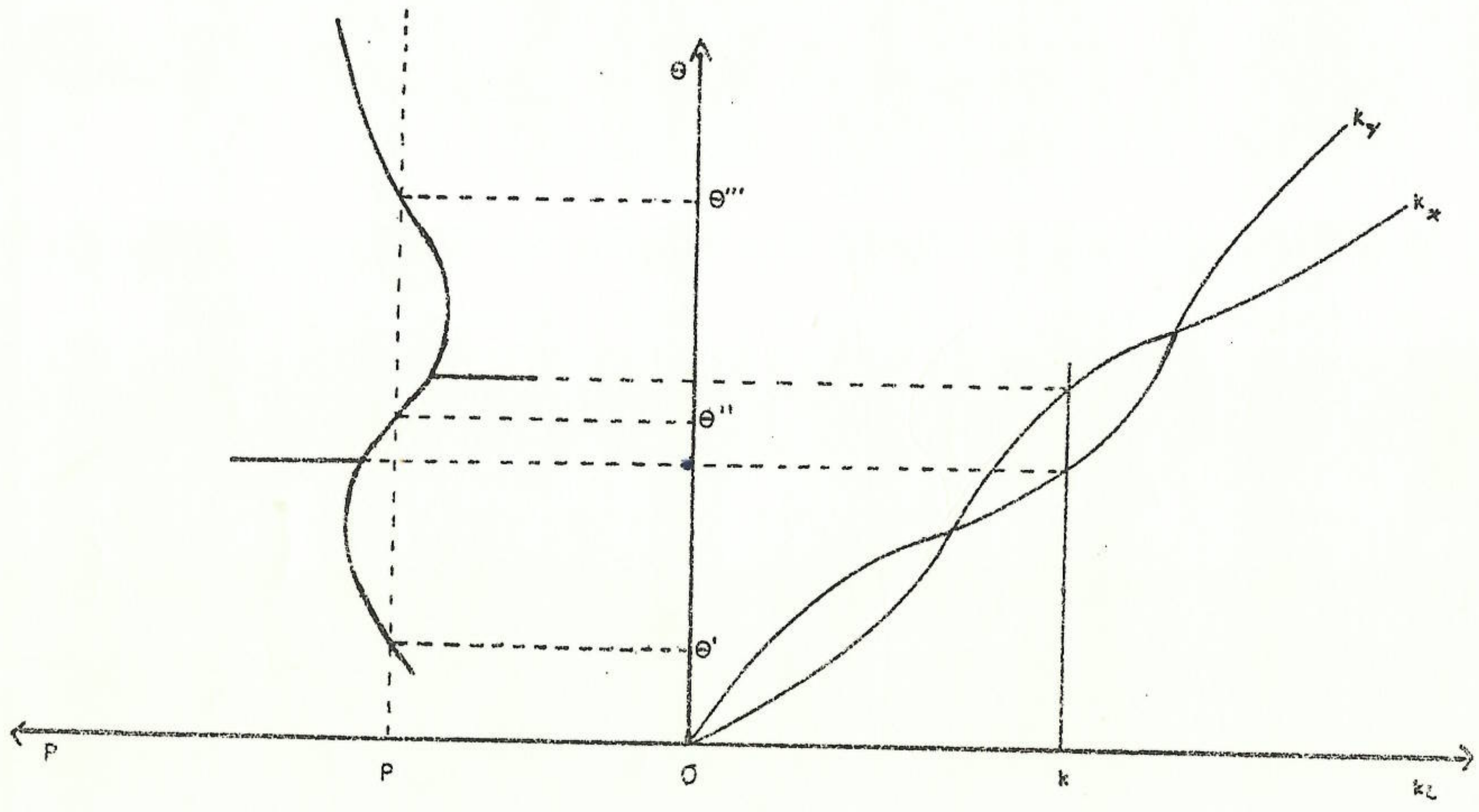


Gráfico (2.7.3)

2.8 TEOREMA STOLPER-SAMUELSON

Nesta seção analisaremos a relação entre a remuneração real dos fatores e o preço relativo dos bens; ou melhor, procuraremos demonstrar que um aumento no preço relativo de um bem (Y) aumenta a remuneração real, em termos de ambos os bens, do fator usado mais intensivamente neste bem (no caso, trabalho) e que diminui a remuneração real do outro fator (neste caso, K).

Do quadro II conhecemos a remuneração real do capital em termos de cada bem. Da condição de equilíbrio nos respectivos mercados de fatores tem-se a mesma remuneração para cada fator em termos de cada bem em ambos os setores; assim [5]:

$$R^x = f'_x = P\, f'_y \quad \text{e} \quad R^y = \frac{R^x}{P} \qquad (2.8.1)$$

No quadro I temos as mesmas relações para o salário real.

$$W^x = (f_x - f'_x\, k_x) = P\,(f_y - f'_y\, k_y) \;\text{e}\; W^y = \frac{W^x}{P} \qquad (2.8.2)$$

Aplicando logaritmos em (2.8.1) fica:

$$\text{Ln } R^x = \text{Ln } f'_x = \text{Ln } P + \text{Ln } f'_y$$

Diferenciando, temos:

$$d\text{Ln } R^x = d\text{Ln } P + \frac{f''_y}{f'_y}\;\frac{\partial k_i}{\partial \Theta}\;\frac{d\Theta}{\Theta}\;\Theta$$

Substituindo $\dfrac{\partial k_i}{\partial \Theta}$ pela expressão encontrada em (2.5.1) temos:

[5] Daqui em diante R^x representará o aluguel real em termos de X e W^x o salário real em termos de X, sendo que em termos de Y teremos respectivamente R^y e W^y.

$$dLnR^x = dLnP - \frac{f''_y}{f'_y} \frac{(f'_y)^2}{f_y \, f''_y} \frac{d\theta}{\theta} \theta$$

Simplificando:

$$dLnR^x = dLnP - \frac{f'_y \, d\theta}{f_y \quad \theta} \theta$$

Como sabemos que

$$\frac{dLn\theta}{dLnP} = \eta_{\theta P} \quad \text{ou} \quad dLn\theta = \eta_{\theta P} \; dLnP$$

Substituindo vem:

$$dLnR^x = dLnP - \frac{f'_y}{f_y} \theta \; \eta_{P\theta} \; dLnP \qquad (2.8.3)$$

Temos de (2.4.1) que

$$a_i = \frac{\theta}{\theta + k_i}$$

De (2.3.7) temos

$$k_i = \frac{f_i}{f'_i} - \theta$$

Substituindo k_i em a_i temos:

$$a_i = \frac{\theta}{\theta + \frac{f_i}{f'_i} - \theta}$$

$$a_i = \frac{f'_i}{f_i} \theta \qquad (2.8.4)$$

Substituindo o valor encontrado (2.8.4) na equação (2.8.3), temos:

$$dLnR^x = dLnP - a_y \, \eta_{\theta P} \; dLnP$$

Substituindo $\eta_{\theta P}$ pelo seu valor de (2.6.19), temos:

$$\frac{dLnR^x}{dLnP} = 1 - \frac{a_y}{(a_y - a_x)}$$

A elasticidade do aluguel real do capital, em termos de X, é assim definida:

$$\eta_{R^x,P} = \frac{dLn\ P^x}{dLn\ P} = - \frac{a_x}{a_y - a_x} < 0 \qquad (2.8.5)$$

Dado que o setor Y é intensivo em trabalho a elasticidade é negativa; ainda mais, a variação em R^x poderá ser mais ou menos que proporcional que a mudança em P, isto é,

$$\left| \eta_{R^x}, P \right| \gtrless 1$$

Caso o setor Y seja intensivo em capital $(a_y - a_x) < 0$, a elasticidade será positiva e maior que um.

Visto o que ocorre com o aluguel real em termos de X, passemos a estudá-lo quando está expresso em termos de Y.

$$R^y = \frac{R^x}{P}$$

Aplicando logaritmos e diferenciando, temos:

$$\frac{dLn\ R^y}{dLn\ P} = \frac{dLn\ R^x}{dLn\ P} - \frac{dLn\ P}{dLn\ P}$$

Substituindo o valor de $\frac{dLn\ P^x}{dLn\ P}$ encontrado em (2.8.5) resulta:

$$\frac{dLn\ R^y}{dLn\ P} = - \frac{a_x}{(a_y - a_x)} - 1$$

Temos, então,

$$\eta_{R^y\ P} = \frac{dLn\ R^y}{dLn\ P} = - \frac{a_y}{a_y - a_x} < 0 \qquad (2.8.6)$$

Sendo o setor Y intensivo em trabalho, a elasticidade da remuneração real do capital em termos de Y será negativa e maior que a unidade em termos absolutos. Quando o setor Y for intensivo em capital, a elasticidade será positiva, podendo ser maior ou menor que a unidade.

Comparando-se as magnitudes das duas elasticidades, em termos de cada bem, e mantendo-se o suposto de que o setor Y é intensivo em trabalho, temos:

$$\left| - \frac{a_y}{a_y - a_x} \right| > \left| - \frac{a_x}{a_y - a_x} \right| \quad \text{portanto} \quad \left| \eta_{R^y P} \right| > \left| \eta_{R^x P} \right| \qquad (2.8.7)$$

Portanto a retribuição do capital diminui (cresce) mais em termos de Y do que em termos de X quando o preço relativo de Y aumenta (diminui).

No caso em que o setor Y é intensivo em capital implica em que a remuneração real do capital aumenta (diminui) mais em termos de X do que em termos de Y, quando o preço relativo de Y aumenta (diminui).

$$\frac{a_y}{a_x - a_y} < \frac{a_x}{a_x - a_y} \quad \text{portanto} \quad \eta_{R^y P} < \eta_{R^x P} \qquad (2.8.9)$$

Veremos agora o que ocorre com a remuneração real do trabalho com relação à variação no preço relativo do bem Y.

Aplicando logaritmos naturais à equação (2.8.2) temos:

$$\text{Ln } W^x = \text{Ln } P + \text{Ln } (f_y - f'_y \, k_y)$$

Evidenciando f'_y:

$$\text{Ln } W^x = \text{Ln } P + \text{Ln} \left[f'_y \left(\frac{f_y}{f'_y} - k_y \right) \right]$$

Substituindo $\frac{f_y}{f'_y} - k_y$ pelo valor encontrado na equação (2.3.6) temos:

$$\text{Ln } W^x = \text{Ln } P + \text{Ln} (f'_y \, \theta)$$

Que é o mesmo que:

$$Ln\ W^x = Ln\ P + Ln\ f'_y + Ln\ \theta$$

Diferenciando-se

$$dLn\ W^x = dLn\ P + \frac{f''_y}{f'_y}\ \frac{d\ k_i}{d\theta}\ \frac{d\theta}{\theta}\ \theta + dLn\theta \qquad (2.8.10)$$

Substituindo (2.5.1) em (2.8.10)

$$dLn\ W^x = dLn\ P - \frac{f''_y}{f'_y}\ \frac{(f'_y)^2}{f_y\ f''_y}\ \frac{d\theta}{\theta}\ \theta + dLn\ \theta$$

Simplificando:

$$dLn\ W^x = dLn\ P - \frac{f'_y}{f_y}\ \theta\ \frac{d\theta}{\theta} + dLn\ \theta$$

Substituindo-se,

$$dLn\theta = \eta_{\theta p}\ dLn\ P = \frac{1}{a_y - a_x}\ dLn\ P$$

fica

$$dLn\ W^x = dLn\ P - \frac{f'_y}{f_y}\ \theta\ \frac{dLn\ P}{(a_y - a_x)} + \frac{dLn\ P}{(a_y - a_x)} \qquad (2.8.11)$$

Substituindo-se (2.8.4) em (2.8.11) fica

$$dLn\ W^x = dLn\ P - \frac{a_y}{(a_y - a_x)}\ dLn\ P + \frac{dLn\ P}{(a_y - a_x)}$$

Evidenciando e simplificando, temos:

$$\left| \eta_{W^x\ P} \right| = \frac{dLn\ W^x}{dLn\ P} = \frac{1 - a_x}{a_y - a_x} \qquad (2.8.12)$$

Caso o setor Y seja intensivo em trabalho, a elasticidade do salário real com relação ao preço relativo de Y, em termos de X, será positiva e maior do que um. Se o setor Y fosse intensivo em capital, a elasticidade seria negativa, podendo ser maior ou menor que a unidade em termos absolutos, $\left[\left| \eta_{W^x\ P} \right| \gtrless 1 \right]$.

Estudaremos a seguir a relação entre o salário real , em termos do bem Y, e o preço relativo do bem Y.

Diferenciando a relação (2.8.2) temos:

$$\frac{dLn\ W^Y}{dLn\ P} = \frac{dLn\ \frac{W^X}{P}}{dLn\ P} = \frac{dLn\ W^X}{dLn\ P} - 1 \qquad (2.8.13)$$

Substituindo em (2.8.13) o valor de (2.8.12) temos:

$$\frac{dLn\ W^Y}{dLn\ P} = \frac{1 - a_x}{a_y - a_x} - 1$$

Simplificando, vem:

$$\eta_{W^Y\ P} = \frac{dLn\ W^Y}{dLn\ P} = \frac{1 - a_y}{a_y - a_x} \qquad (2.8.14)$$

Caso o setor Y seja intensivo em trabalho, o salário real em termos de Y aumentará mais ou menos proporcionalmente a P. Caso o setor Y seja intensivo em capital, a elasticidade será negativa e maior que a unidade em termos absolutos, $\left[\left| \eta_{W^Y\ P} \right| > 1 \right]$.

Considerando-se que $a_x < a_y < 1$, isto é, $k_y < k_x$,

$$\frac{1 - a_x}{a_y - a_x} > \frac{1 - a_y}{a_y - a_x} \quad \text{e portanto}$$

$$\eta_{W^X\ P} > \eta_{W^Y\ P}$$

Isto é, quando o preço relativo de Y aumenta, a remuneração do trabalho em termos do bem X cresce mais do que em termos de Y.

Supondo-se um aumento no preço relativo do bem Y, isto é, um aumento em P, e que $k_x > k_y$, o que implica em que $(a_y - a_x) > 0$, teremos a seguinte cadeia de reações:

$$\hat{\theta} > \hat{W}^X > \hat{W}^Y > 0 > \hat{R}^X > \hat{R}^Y$$

$$\frac{1}{a_y-a_x} > \frac{1-a_x}{a_y-a_x} > \frac{1-a_y}{a_y-a_x} > 0 > \frac{-a_x}{a_y-a_x} > \frac{-a_y}{a_y-a_x}$$

Ou seja, um aumento no preço relativo de Y, supondo-se que ele seja intensivo em trabalho, aumenta mais que proporcionalmente a remuneração relativa do trabalho e o salário real em termos de X. O salário real em termos de Y aumentará, mais ou menos que proporcionalmente. O aluguel real do capital diminuirá em termos de qualquer bem. Ele diminuirá mais que proporcionalmente em termos do bem cujo preço aumentou, que neste caso é Y.

Uma das aplicações do Teorema Stolper-Samuelson em comércio internacional é a seguinte: considerando-se que um pequeno país encontre os preços internacionais dados; que seu setor agrícola seja intensivo em trabalho e seu setor industrial seja intensivo em capital. Esse país exporta bens agrícolas e importa industriais.

Se este país decide impor tarifas às importações, qual seria o efeito na remuneração aos fatores?

O preço relativo interno dos produtos industriais aumenta e provoca aumento da remuneração relativa do fator usado intensivamente na produção de importáveis, ou seja, a remuneração real ao capital aumentará em detrimento do salário real.

2.9 A FRONTEIRA DE REMUNERAÇÃO DOS FATORES

A fronteira de remuneração dos fatores ilustra de forma simples a relação entre as retribuições aos serviços produtivos de maneira reduzida. Para conseguir a elasticidade da fronteira das remunerações, em termos de X, dividamos as respectivas elasticidades das remunerações reais com relação ao preço relativo de Y, portanto:

$$\eta_R{}^x\, W^x = \frac{\eta_R{}^x\, p}{\eta_W{}^x\, p}$$

Substituindo a elasticidade do salário real e a do aluguel real do capital dados em (2.8.12) e (2.8.5), respectivamente, temos:

$$\eta_{R^x\,W^x} = \frac{\dfrac{-a_x}{a_y-a_x}}{\dfrac{1-a_x}{a_y-a_x}} = -\frac{a_x}{1-a_x} < 0 \qquad (2.9.1)$$

Ou seja, a elasticidade da remuneração real do capital em relação aos salários reais em termos de X é igual à razão entre a participação do trabalho empregado no setor X, dividida pela participação do capital empregado no mesmo setor. Independentemente da classificacão dos bens com relacão à intensidade de uso dos fatores a inclinação da fronteira das remunerações dos fatores será negativa. Do suposto que o bem Y é intensivo em trabalho teremos que a elasticidade da fronteira das remunerações será menor que a unidade em termos absolutos - o numerador é menor que o denominador em (2.9.1).

Da mesma forma teremos a elasticidade da remuneração real do capital em relação aos salários reais, em termos de Y:

$$\eta_{R^y\,W^y} = \frac{\eta_{R^y\,P}}{\eta_{W^y\,P}}$$

Substituindo acima as expressões, encontradas para $\eta_{R^y\,P}$ e $\eta_{W^y\,P}$ em (2.8.6) e (2.8.14), respectivamente, temos:

$$\eta_{R^y\,W^y} = \frac{-\dfrac{a_y}{a_y-a_x}}{\dfrac{1-a_y}{a_y-a_x}} = -\frac{a_y}{1-a_y} < 0 \qquad (2.9.2)$$

Isto é, a elasticidade da remuneracão real do capital em relacão aos salários reais, em termos de Y, é igual à participação do trabalho empregado no setor Y dividida pela participação do capital empregado no mesmo setor. A elasticidade sempre será negativa e em termos absolutos será maior ou menor que a unidade, dependendo do setor Y ser intensivo em trabalho ou em capital, respectivamente.

Para o caso em que o bem Y é intensivo em trabalho, podemos representar a relação entre os salários reais e o aluguel real do capital no gráfico (2.9.1).

Se traçarmos, no gráfico (2.9.1), uma linha a partir da origem que passe pelo ponto P e Q nós teremos que:

$$\frac{\text{Ln } R^x}{\text{Ln } W^x} = \frac{\text{Ln } R^y}{\text{Ln } W^y}$$

E portanto uma correspondência entre as relações ao longo de um mesmo raio vetor.

2.9.1 Uma Aplicação do Teorema Stolper-Samuelson: Análise do Impacto dos Impostos Indiretos Sobre a Remuneração Relativa dos Fatores.

Em uma economia na qual existem apenas dois fatores e dois setores, supondo que exista concorrência perfeita e ausência de impostos e subsídios, teremos que os preços a custo de fatores (recebidos pelas indústrias) correspondem aos preços de mercado; obviamente estamos ignorando os custos de transporte e comercialização:

Sendo

P_i^f = preço a custo de fatores (recebido pelas firmas), $i = x, y$

P_i^m = preço de mercado, $i = x, y$

P^f = preço relativo de Y a custo de fatores

P^m = preço relativo de Y no mercado

Sabemos que em concorrência quando não temos impostos indiretos:

$$P_y^m = P_y^f$$

$$P_x^m = P_x^f$$

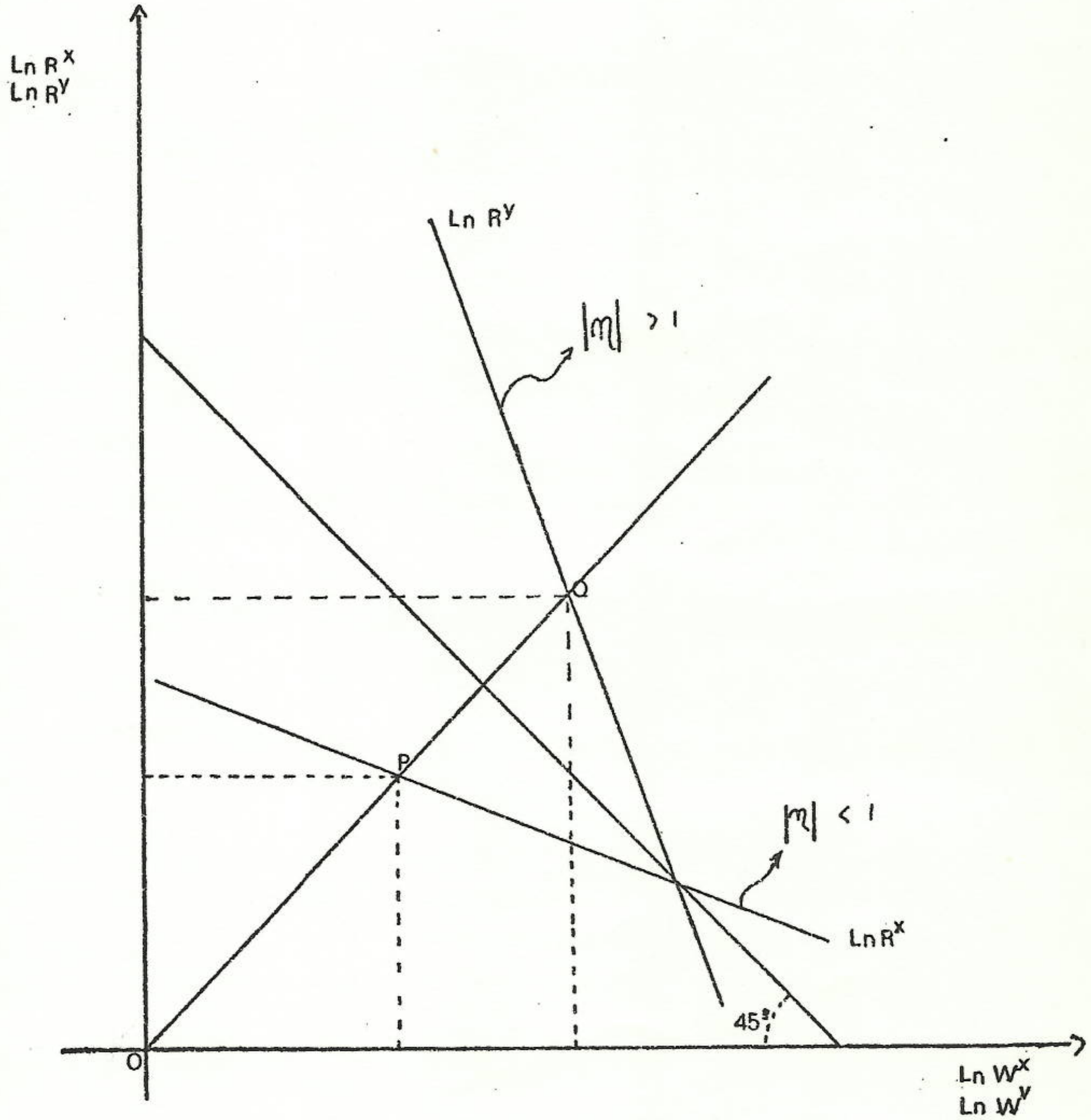


Gráfico (2.9.1)

$$P^f = \frac{P_y^f}{P_x^f} = \frac{P_y^m}{P_x^m} = P^m$$

Consideramos agora, a existência de um conjunto de impostos e subsídios <u>ad valorem</u> incidindo sobre os bens. Levaremos em conta só o efeito líquido desse conjunto de distorcões, pois o subsídio à produção do bem X equivale a um imposto sobre à produção do bem Y.

Suponhamos que esse efeito líquido do conjunto de distorções (impostos e subsídios) corresponde a um subsídio à produção de Y. Supomos, ainda, que os preços relativos de mercado são dados exogenamente.

Assim, temos:

$$P_y^f = P_y^m \ (1 + s) = P_y^m \ (S) \qquad e \qquad P_x^f = P_x^m \qquad (2.9.1.1)$$

onde $S = (1+s)$ e

s = taxa <u>ad valorem</u> como proporção do preco de mercado.

A relação entre preço relativo de mercado e a custo de fatores, agora é :

$$P^f = \frac{P_y^f}{P_x^f} = \frac{P_y^m}{P_x^m} S = P^m S \qquad (2.9.1.2)$$

Utilizando a definição de elasticidade de remuneração relativa com relação ao preço relativo dos bens (2.6.19) temos que:

$$dLn\theta = \frac{1}{a_y - a_x} \cdot dLn\ P^f \qquad (2.9.1.3)$$

Substituindo $dLn\ P^f$ de (2.9.1.2)

$$dLn\theta = \frac{1}{a_y - a_x} (dLn\ P^m + dLn\ S)$$

Como os preços de mercado são dados, então $dLn\ P^m = 0$, portanto:

$$\frac{dLn\ \theta}{dLn\ S} = \frac{1}{a_y - a_x} \tag{2.9.1.4}$$

Se o setor Y é intensivo em trabalho então (2.9.1.4) será positivo e maior que a unidade. Portanto, um subsídio concedido à produção do bem Y proporciona um aumento mais que proporcional na remuneração relativa do fator usado mais intensivamente neste setor, isto é, o trabalho.

O subsídio, quando os preços de mercado são constantes, é transferido ao fator usado mais intensivamente, por meio de uma maior remuneração relativa deste fator. O aumento na remuneração relativa do fator usado mais intensivamente é mais que proporcional.

Consideramos agora o caso em que o efeito líquido do conjunto das distorções no preço dos bens implique em um imposto sobre Y. O imposto é considerado como um percentual do custo dos fatores, daí vem:

$$P_y^m = P_y^f\ (1 + t) = P_y^f\ T$$

onde $T = (1 + t)$ e

t = taxa *ad valorem* do imposto como proporção do preço a custo de fatores.

$$P_y^f = \frac{P_y^m}{T}$$

$$P^f = \frac{P_y^f}{P_x^f} = \frac{P_y^m}{P_x^m} \cdot \frac{1}{T} = \frac{P^m}{T} \tag{2.9.1.5}$$

Utilizando novamente a expressão (2.6.19) temos:

$$dLn\theta = \frac{dLn\ P^f}{a_y - a_x}$$

Substituindo P^f, de (2.9.1.5), temos:

$$dLn\theta = \frac{dLn\ P^m - dLn\ T}{a_y - a_x}$$

daí, vem para um dado preço de mercado:

$$\frac{dLn\ \theta}{dLn\ T} = - \frac{1}{a_y - a_x} \qquad (2.9.1.6)$$

Portanto um aumento relativo no imposto que incide sobre o bem Y diminui mais que proporcionalmente a remuneração relativa do fator usado mais intensivamente na produção de Y, no caso trabalho.

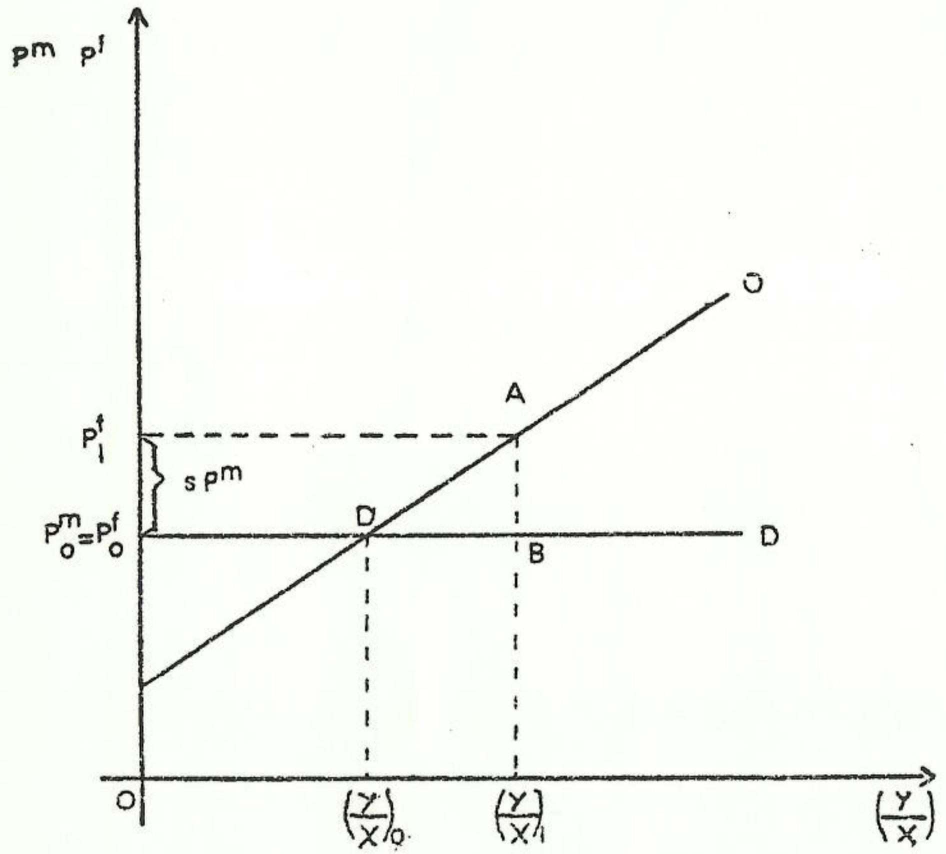
Representando-se no gráfico (2.9.2) os casos acima estudados (imposto e subsídios) temos que quando damos um subsídio à industria Y (imposto à indústria X) passamos de $(\frac{Y}{X})_o$ para $(\frac{Y}{X})_1$ e o P_o^f sobe para P_1^f, tornando-se P^f maior do que (P^m). No caso de imposto sobre Y (subsídio a X), a proporção de Y com relação a X diminui decorrente de uma queda no preço relativo de Y a custo de fatores.

O efeito magnificacão neste problema é conseqüência da estrutura básica do modelo, que considera o preço relativo de mercado dos bens fixos, isto é, dado exógenamente.

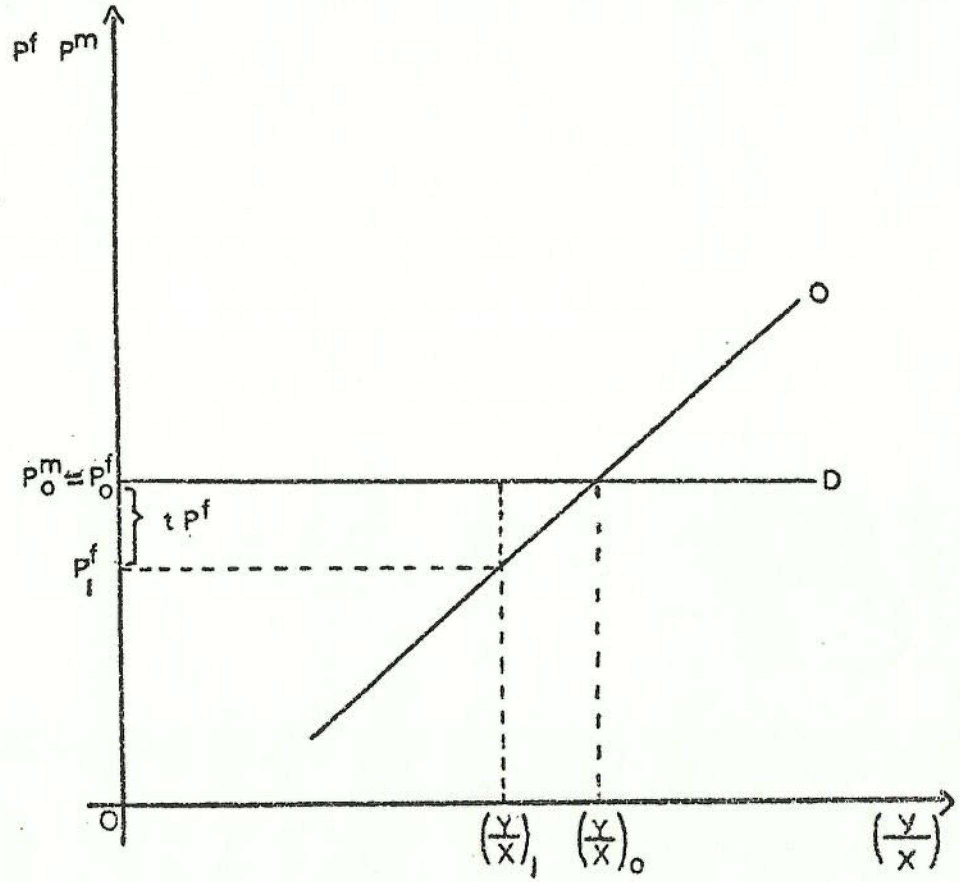
Quando se introduz a função da demanda, o preço relativo dos bens é determinado no modelo, ocorrendo portanto um ajustamento no preço relativo de mercado dos bens, decorrente de variações nos impostos ou subsídios. Com o preço dado exógenamente, somente os produtores sofrem o impacto dos impostos ou subsídios, daí o efeito magnificacão. Se a demanda fosse endógena o impacto do imposto, ou subsídio, seria compartilhado com os compradores, diminuindo o impacto na remuneração relativa dos fatores.

2.10 ELASTICIDADE DA OFERTA EM EQUILÍBRIO GERAL

Para saber qual é a variação relativa no produto setorial <u>per capita</u> quando ocorre uma variação relativa no preço relativo dos bens, é necessário calcular a elasticidade correspondente ($\varepsilon_{q_1\ p}$), no contexto do modelo de equilíbrio geral de produção.[1]



Subsídio a Y ou Imposto a X



Imposto a Y ou subsídio a X

Gráfico (2.9.2)

O produto setorial per capita é dado pela equação (2.2.15):

$$q_i = l_i \, f_i \, (k_i)$$

Por definição sabemos que elasticidade é

$$\varepsilon_{q_i \, P} = \frac{d\text{Ln } q_i}{d\text{Ln } P} = \frac{d\text{Ln } l_i}{d\text{Ln } P} + \frac{d\text{Ln } f_i}{d\text{Ln } P} \tag{2.10.1}$$

A elasticidade do produto setorial per capita em relação ao preço relativo do bem Y no setor Y é:

$$\varepsilon_{q_y \, P} = \frac{d\text{Ln } q_y}{d\text{Ln } P} = \frac{d\text{Ln } l_y}{d\text{Ln } P} + \frac{d\text{Ln } f_y}{d\text{Ln } P} \tag{2.10.2}$$

Da equação (2.1.10) temos

$$l_y = \frac{k_x - k}{k_x - k_y}$$

Aplicando logaritmos temos:

$$\text{Ln } l_y = \text{Ln } (k_x - k) - \text{Ln } (k_x - k_y)$$

diferenciando-se resulta

$$d\text{Ln } l_y = \frac{\left(\frac{\partial k_x}{\partial \theta} \; \frac{d\theta}{\theta} \; \theta \right)}{k_x - k} - \frac{\left(\frac{\partial k_x}{\partial \theta}\theta - \frac{\partial k_y}{\partial \theta} \; \theta \right)}{k_x - k_y} \; \frac{d\theta}{\theta}$$

Multiplicando e dividindo , do lado direito da equação, por k_x o numerador do primeiro termo; e no segundo termo por k_x e k_y os respectivos diferenciais parciais, temos:

$$d\text{Ln } l_y = \frac{\frac{\partial k_x}{\partial \theta} \; \frac{d\theta}{\theta} \; \frac{\theta}{k_x} \; k_x}{k_x - k} - \frac{\left(\frac{\partial k_x}{\partial \theta} \; \frac{\theta}{k_x} \; k_x - \frac{\partial k_y}{\partial \theta} \; \frac{\theta}{k_y} \; k_y\right)}{k_x - k_y} \; \frac{d\theta}{\theta}$$

Substituimos (2.5.3) na expressão acima. Na (2.5.3) temos as elasticidades substituição setoriais (σ_i), assim:

$$d\text{Ln } l_y = \frac{\sigma_x \, k_x}{k_x - k} \; \frac{d\theta}{\theta} - \frac{\sigma_x \, k_x - \sigma_v \, k_y}{k_x - k_y} \; \frac{d\theta}{\theta}$$

Substituindo $\frac{d\theta}{\theta}$ por (2.6.19) e ordenando:

$$\frac{d\text{Ln } l_y}{d\text{Ln } P} = \frac{1}{a_y - a_x} \left(\frac{\sigma_x \, k_x}{k_x - k} - \frac{\sigma_x \, k_x - \sigma_v \, k_y}{k_x - k_y} \right)$$

Multiplicando e dividindo o denominador do primeiro termo entre parênteses por $(k_x - k_y)$ temos:

$$\frac{d\text{Ln } l_v}{d\text{Ln } P} = \frac{1}{a_y - a_x} \left[\frac{\sigma_x \; k_x}{\frac{(k_x - k_y)(k_x - k)}{(k_x - k_y)}} - \frac{\sigma_x \, k_x}{k_x - k_y} + \frac{\sigma_y \, k_y}{k_x - k_y} \right]$$

Substituindo por l_y dado em (2.1.10) fica:

$$\frac{d\text{Ln } l_y}{d\text{Ln } P} = \frac{1}{a_y - a_x} \left[\frac{\sigma_x \, k_x}{k_x - k_y} \left(\frac{1}{l_y}\right) - \frac{k_x \, \sigma_x}{k_x - k_y} + \frac{\sigma_y \, k_y}{k_x - k_y} \right]$$

Ordenando:

$$\frac{d\text{Ln } l_y}{d\text{Ln } P} = \frac{1}{(a_y - a_x)} \left[\frac{\sigma_x \, k_x}{k_x - k_y} \left(\frac{1}{l_y} - 1 \right) + \frac{\sigma_y \, k_y}{k_x - k_y} \right]$$

Colocando $\frac{1}{l_y}$ em evidência e substituindo-se $1 - l_y = l_x$ temos:

$$\frac{d\text{Ln } l_y}{d\text{Ln } P} = \frac{1}{(a_y - a_x)} \; \frac{1}{l_y} \left[\frac{\sigma_x \, k_x \, l_x}{k_x - k_y} + \frac{\sigma_y \, k_v \, l_v}{k_x - k_y} \right] \qquad (2.10.3)$$

Fazendo as substituições correspondentes, conseguimos:

$$\frac{d\text{Ln } l_y}{d\text{Ln } P} = \frac{1}{(a_y - a_x)^2} \frac{1}{l_y} \left[\sigma_x \, l_x \, (1 - a_x) \, a_y + \sigma_y \, l_y \, (1 - a_y) \, a_x \right] \tag{2.10.4}$$

A expressão (2.10.4) é o primeiro termo da elasticidade do produto setorial *per capita* com relação ao preço relativo do bem Y referida em (2.10.2). Essa expressão dá a variação relativa da proporção da força de trabalho empregada no setor Y com relação à variação no preço relativo de Y, e é sempre positiva.[6]

Deduziremos agora o segundo termo da elasticidade do produto setorial *per capita* de Y com relação a seu preço relativo, isto é, a elasticidade do produto médio do trabalho no setor Y.

---

[6] Dividindo-se em (2.10.3) o numerador e denominador dos elementos entre colchetes por θ e somando e diminuindo θ em cada um dos denominadores temos:

$$\frac{d\text{Ln } l_y}{d\text{Ln } P} = \frac{1}{(a_y - a_x)} \frac{1}{l_y} \left[\frac{\sigma_x \, l_x \, \frac{k_x}{\theta}}{\frac{(\theta + k_x) - (k_y + \theta)}{\theta}} + \frac{\sigma_y \, l_y \, \frac{k_y}{\theta}}{\frac{(\theta + k_x) - (k_y + \theta)}{\theta}} \right]$$

Sabemos de (2.4.1) que

$$\frac{1}{a_i} = \frac{\theta + k_i}{\theta}$$

Substituindo na equação anterior temos:

$$\frac{d\text{Ln } l_y}{d\text{Ln } P} = \frac{1}{(a_y - a_x)} \frac{1}{l_y} \left[\frac{\sigma_x \, l_x \, \frac{1 - a_x}{a_x}}{\frac{1}{a_x} - \frac{1}{a_y}} + \sigma_y \, l_y \cdot \frac{\frac{1 - a_y}{a_y}}{\frac{1}{a_x} - \frac{1}{a_y}} \right]$$

Ordenando vem:

$$\frac{d\text{Ln } l_y}{d\text{Ln } P} = \frac{1}{a_y - a_x} \frac{1}{l_y} \left[\sigma_x \, l_x \, \frac{(1 - a_x) \, a_x \, a_y}{a_x \, (a_y - a_x)} + \sigma_y \, l_y \, \frac{(1 - a_y) \, a_y \, a_x}{a_y \, (a_y - a_x)} \right]$$

e simplificando-se resulta (2.10.4).

$$dLn\ f_y = \frac{f'_y}{f_y} \frac{\partial k_y}{\partial \theta} \theta \frac{d\theta}{\theta}$$

Multiplicando e dividindo por k_y temos:

$$dLn\ f_y = \frac{f'_y}{f_y} \frac{\partial k_y}{\partial \theta} \frac{\theta}{k_y} \frac{d\theta}{\theta} k_y$$

Substituindo na equação acima a expressão dada por (2.5.3), temos:

$$dLn\ f_y = \frac{f'_y}{f_y} \sigma_y k_y \frac{d\theta}{\theta}$$

Substituindo a variação relativa na remuneração relativa do trabalho pela relação dada em (2.6.19), temos:

$$dLn\ f_y = \frac{f'_y}{f_y} \frac{\sigma_y k_y}{(a_y - a_x)} dLn\ P$$

e como

$$\frac{f'_y k_y}{f_y} = (1 - a_y)$$

temos que:

$$\frac{dLn\ f_y}{dLn\ P} = \frac{(1 - a_y)}{(a_y - a_x)} \sigma_y \qquad (2.10.5)$$

Expressão essa que indica que a variação no produto médio do trabalho no setor Y está diretamente relacionado com o preço relativo de Y desde que este seja intensivo em trabalho. A expressão (2.10.5) é o segundo termo da elasticidade da produção setorial per capita no setor Y com relação ao preço relativo de Y.

Portanto substituindo (2.10.4) e (2.10.5) em (2.10.2) conseguimos a elasticidade de oferta do produto per capita de Y, isto é:

$$\frac{dLn\ q_y}{dLn\ P} = \frac{1}{l_y}\ \frac{1}{(a_y-a_x)^2}\left[\sigma_y\ l_y\ a_x(1-a_y)+\sigma_x\ l_x\ a_y(1-a_x)\right] + \frac{(1-a_y)}{(a_y-a_x)}\ \sigma_y$$

Introduzindo o segundo termo dentro do colchete:

$$\frac{dLn\ q_y}{dLn\ P} = \frac{1}{l_y}\ \frac{1}{(a_y-a_x)^2}\left[\sigma_y\ l_y\ a_x\ (1-a_y)\ +\ \sigma_x\ l_x\ a_y\ (1-a_x)\ +\ \sigma_y\ l_y\ (a_y-\ a_x)\ (1-\ a_y)\right]$$

Agrupando

$$\frac{dLn\ q_y}{dLn\ P} = \frac{1}{l_y}\ \frac{1}{(a_y-a_x)^2}\left[\sigma_y\ l_y\ \ a_y(1-a_y)\ +\ \sigma_x\ l_x\ a_y\ (1\ -\ a_x)\right]$$

Evidenciando, temos:

$$\varepsilon_{q_yP} = \frac{dLn\ q_y}{dLn\ P} = \frac{a_y}{l_y(a_y-a_x)^2}\left[\sigma_y\ l_y\ (1-a_y)\ +\ \sigma_x\ l_x\ (1-a_x)\right] \qquad (2.10.6)$$

Essa expressão nos dá a elasticidade do produto setorial per capita no setor Y em relação ao preço relativo de Y. Ela é positiva e independente da intensidade do uso dos fatores, pois o denominador é sempre positivo, exceto no caso de igual intensidade, o que implica custos constantes, isto é, a elasticidade será infinita.

Da mesma forma podemos conseguir a elasticidade da produção per capita no setor X com relação ao preço relativo de Y.

Definindo o produto per capita no setor X como:

$$q_x = l_x\ f_x\ (k_x)$$

Fazendo a diferencial do logaritmo do produto per capita no setor X temos:

$$\frac{dLn\ q_x}{dLn\ P} = \frac{dLn\ l_x}{dLn\ P} + \frac{dLn\ f_x}{dLn\ P} \qquad (2.10.7)$$

Consegue-se o primeiro termo da expressão acima da seguinte forma; toma-se a relação (2.1.9) e aplica-se o logaritmo natural:

$$\text{Ln } l_x = \text{Ln } (k - k_y) - \text{Ln } (k_x - k_y)$$

diferenciando-se

$$d\text{Ln } l_x = \frac{k_y \dfrac{\partial k_y}{\partial \theta} \dfrac{\theta}{k_y}}{k - k_y} \; \frac{d\,\theta}{\theta} - \frac{\left(k_x \dfrac{\partial k_x}{\partial \theta} \dfrac{\theta}{k_x} - \dfrac{\theta}{k_y} \dfrac{\partial k_y}{\partial \theta} k_y\right)}{k_x - k_y} \; \frac{d\,\theta}{\theta}$$

Substituindo-se $\frac{d\,\theta}{\theta}$ pela expressão dada em (2.6.1º) e a elasticidade substituição dada por (2.5.3) e multiplicando-se e dividindo-se o denominador do primeiro termo por $(k_x - k_y)$, usando (2.1.9), resulta:

$$\frac{d\text{Ln } l_x}{d\text{Ln } P} = \frac{1}{(a_y - a_x)} \left[- \frac{k_y \; \sigma_v}{l_x (k_x - k_y)} - \frac{k_x \; \sigma_x}{k_x - k_y} + \frac{\sigma_v \; k_v}{k_x - k_y} \right]$$

Reagrupando,

$$\frac{d\text{Ln } l_x}{d\text{Ln } P} = \frac{1}{(a_v - a_x)} \left[\frac{\sigma_v \; k_v}{(k_x - k_y)} \; \left(1 - \frac{1}{l_x}\right) - \frac{\sigma_x \; k_x}{k_x - k} \right]$$

Colocando em evidência $\frac{1}{l_x}$ e substituindo $l_x - 1 = - l_y$ temos:

$$\frac{d\text{Ln } l_x}{d\text{Ln } P} = \frac{1}{(a_y - a_x) \; l_x} \left[- \frac{\sigma_y \; l_v \; k_v}{k_x - k_y} - \frac{\sigma_x \; l_x \; k_x}{k_x - k_y} \right] \qquad (2.10.8)$$

Fazendo-se as substituições correspondentes no colchete, seguindo o procedimento indicado no rodapé seis e agrupando fica:

$$\frac{d\text{Ln } l_x}{d\text{Ln } P} = - \frac{1}{l_x (a_v - a_x)^2} \left[\sigma_y \; l_y \; a_x \; (1 - a_v) + \sigma_x \; l_x \; a_y (1 - a_x) \right] \qquad (2.10.9)$$

A expressão (2.10.9) é o primeiro termo da elasticidade. Ela será sempre negativa. Portanto um aumento no preço relativo do bem Y diminui a proporção da força de trabalho empregada no setor X.

A expressão do segundo termo da elasticidade do produto per capita de X com relação ao preço relativo de Y pode ser encontrada abaixo:

$$d\text{Ln } f_x = \frac{f'_x\, k_x \dfrac{\partial k_x}{\partial \theta}\dfrac{\theta}{k_x}}{f_x} \quad \frac{d\theta}{\theta} \qquad (2.10.10)$$

Introduzindo-se as substituições [7] correspondentes fica:

$$d\text{Ln } f_x = \frac{(1 - a_x)}{(a_y - a_x)} \quad \sigma_x \quad d\text{Ln } P \qquad (2.10.11)$$

Um aumento no preço de Y implica em que aumenta o produto médio do trabalho no setor X desde que o bem cujo preco relativo aumenta seja intensivo em trabalho.

---

[7] Usando a definição de elasticidade substituição entre fatores setoriais (2.5.3) e substituindo $\frac{d\theta}{\theta}$ pela relação encontrada em (2.6.19), temos:

$$d\text{Ln } f_x = \frac{f'_x\, k_x}{f_x} \quad \sigma_x \quad \frac{d\text{Ln } P}{a_y - a_x}$$

Mas, $\frac{f'_x\, k_x}{f_x} = \frac{f'_x\, K_x}{L_x\, f_x} = \frac{P^x\, K_x}{X} = (1 - a_x)$

Substituindo-se

$$\frac{d\text{Ln } f_x}{d\text{Ln } P} = \frac{(1 - a_x)}{(a_y - a_x)} \quad \sigma_x$$

que é (2.10.11).

Substituindo as expressões (2.10.8) e (2.10.10) na equação (2.10.6) temos:

$$\frac{d\mathrm{Ln}\ q_x}{d\mathrm{Ln}\ P} = -\frac{1}{l_x}\ \frac{1}{(a_y-a_x)^2}\left[\sigma_y\ l_y\ (1-a_x) + \sigma_x\ l_x\ (1-a_x)a_y - \right.$$

$$\left. - \sigma_x\ l_x\ (a_y-a_x)\ (1-a_x)\right]$$

Arrumando

$$\frac{d\mathrm{Ln}\ q_x}{d\mathrm{Ln}\ P} = -\frac{1}{l_x}\ \frac{1}{(a_y-a_x)^2}\left[\sigma_y\ l_y\ (1-a_y)\ a_x + \sigma_x\ l_x\ (1-a_x)\right.$$

$$\left.(a_y-a_y+ a_x)\right]$$

Simplificando e evidenciando a_x temos:

$$\varepsilon_{q_x\ P} = \frac{d\mathrm{Ln}\ q_x}{d\mathrm{Ln}\ P} = \frac{-\ a_x}{l_x\ (a_y-a_x)^2}\left[\sigma_y\ l_y\ (1-a_y) + \sigma_x\ l_x(1-a_x)\right] \tag{2.10.12}$$

Ou seja, um aumento no preço relativo de Y implica em uma diminuição da produção per capita de X. O produto per capita de X está inversamente relacionado com o preço relativo do bem Y, independentemente da intensidade de uso dos fatores nos dois setores. Porém, o produto per capita de X estará diretamente relacionado com o seu preço relativo, isto é;

$$\varepsilon_{q_x\ \frac{1}{P}} = \frac{d\mathrm{Ln}\ q_x}{d\mathrm{Ln}\,(\frac{1}{P})} = -\ \frac{d\mathrm{Ln}\ q_x}{d\mathrm{Ln}\ P} = -\ \varepsilon_{q_x\ P} > 0 \tag{2.10.13}$$

Portanto, a elasticidade da produção per capita de X com relação ao preço relativo de X, $(\frac{1}{P})$, é positiva.

No caso particular em que as intensidades de uso dos fatores forem iguais nos dois setores, a elasticidade do produto per capita setorial com relação ao preço relativo dos bens será infinita, que é o caso de custos constantes.

Podemos ver representados no gráfico (2.10.1) as curvas que representariam a relação entre o preço relativo dos

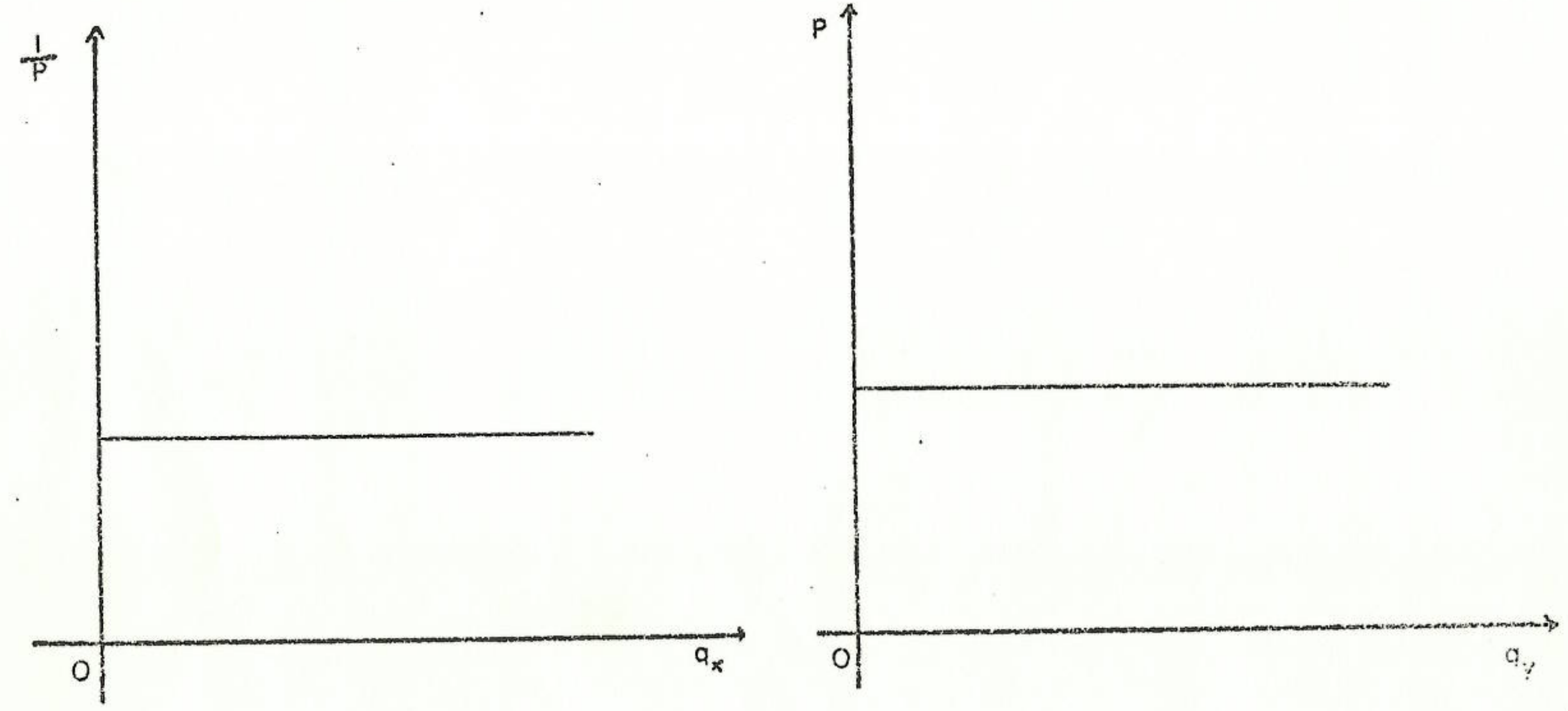


Gráfico (2.10.1)

bens e produto <u>per capita</u> de cada setor, para o caso em que ti vêssemos iguais intensidades de uso dos fatores em ambos os setores.

Caso a elasticidade substituição entre os fatores em ambos os setores sejam iguáis a zero, isto é, quando trabalhamos em condições de proporções de fatores fixas, teremos que, no caso em que exista pleno emprego dos fatores, as curvas de ofertas setoriais serão inelásticas, o que está repre - sentado graficamente em (2.10.2).

2.11 A RENDA PER CAPITA E TERMOS DE TROCA

A renda <u>per capita</u> da economia, em termos do bem X, é a soma dos produtos <u>per capita</u> setoriais em termos de X, isto é:

$$q = P_x q_x + P_y q_y$$

Fazendo P_x de numerário, temos:

$$\frac{q}{P_x} = \frac{P_x}{P_x} q_x + \frac{P_y}{P_x} q_y$$

ou, ainda,

$$\frac{q}{P_x} = q_x + P q_y$$

Nós nesta parte procuramos encontrar qual é a variação da renda <u>per capita</u> da economia quando o preço relativo do bem Y varia;

$$\frac{d\left(\frac{q}{P_x}\right)}{d P} = \frac{d q_x}{d P} + P \frac{d q_y}{d P} + q_y \qquad (2.11.1)$$

Queremos provar que a variação na renda <u>per capita</u> da economia é igual ao produto <u>per capita</u> de setor Y, para tanto é necessário provar que

$$\frac{d q_x}{d P} + P \frac{d q_y}{d P} = 0 \qquad (2.11.2)$$

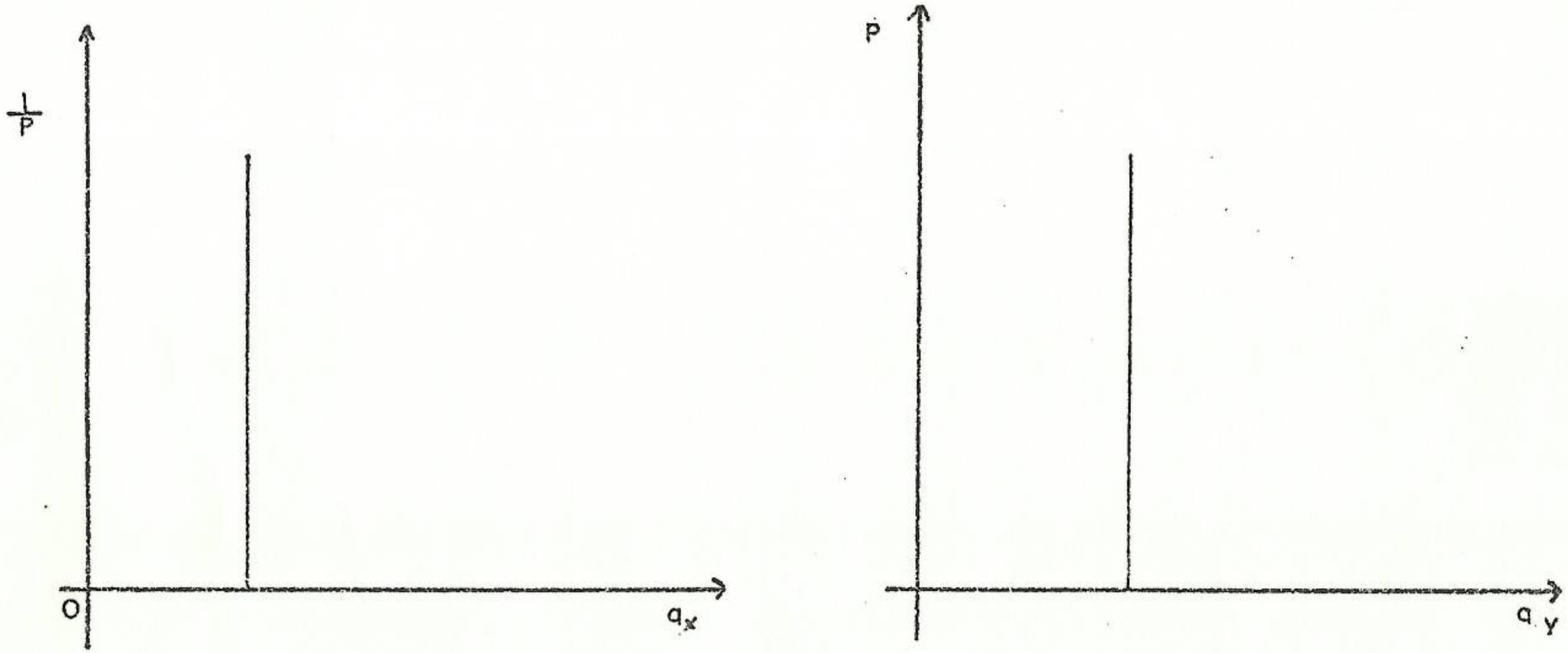


Gráfico (2.10.7)

Usando a relação (2.10.12) e reagrupando temos:

$$\frac{d\,q_x}{d\,P} = \varepsilon_{q_x\,P}\ \frac{q_x}{P} \qquad (2.11.3)$$

O mesmo pode ser para Y de (2.10.6):

$$\frac{d\,q_y}{d\,P} = \varepsilon_{q_y\,P}\ \frac{q_y}{P} \qquad (2.11.4)$$

De (2.6.2) sabemos que:

$$P = \frac{f'_x}{f'_y}$$

De (2.1.15) sabemos que:

$$q_i = l_i\ f_i$$

De (2.6.2) e (2.1.15) temos:

$$\frac{q_x}{P} = \frac{l_x\ f_x}{\dfrac{f'_x}{f'_y}} = \frac{l_x\ f_x\ f'_y}{f'_x} \qquad (2.11.5)$$

Substituindo em (2.11.3) os resultados encontrados em (2.11.5) e (2.10.5), temos:

$$\frac{d\,q_x}{d\,P} = -\ \frac{f_x\ f'_y\ a_x}{f'_x\ (a_y-a_x)^2}\ \left[\sigma_y\ l_y\ (1-a_y) + \sigma_x\ l_x\ (1-a_x)\right] \qquad (2.11.6)$$

Chamando a expressão

$$\frac{1}{(a_y-a_x)^2}\ \left[\sigma_y\ l_y\ (1-a_y) + \sigma_x\ l_x\ (1-a_x)\right] = A$$

temos que

$$\frac{d\,q_x}{d\,P} = -\,\frac{a_x\,f'_y\,f_x}{f'_x}\,(A) \qquad (2.11.7)$$

Para o setor Y, substituindo em (2.11.4) a relação encontrada em (2.10.6) temos:

$$\frac{d\,q_y}{d\,P} = \frac{a_y\,f_y\,f'_y}{f'_x\,(a_y-a_x)^2}\left[\,\sigma_x\,l_x\,(1-a_x) + \sigma_y\,l_y\,(1-a_y)\right]$$

Chamando a mesma expressão de A, temos

$$\frac{d\,q_y}{d\,P} = a_y\,\frac{f_y\,f'_y}{f'_x}\,(A) \qquad (2.11.8)$$

Somando (2.11.7) e (2.11.8) teremos que

$$\frac{d\,q_x}{d\,P} + \frac{P\,dq_y}{d\,P} = \frac{-\,a_x\,f'_y\,f_x}{f'_x}\,(A) + \frac{f'_x\,a_y\,f_y\,f'_y}{f'_y\,f'_x}\,(A)$$

Evidenciando A temos:

$$\frac{d\,q_x}{d\,P} + \frac{P\,d\,q_y}{d\,P} = A\left[a_y\,f_y - a_x\,\frac{f_x\,f'_y}{f'_x}\right]$$

Substituindo a participação do trabalho setorial temos:

$$\frac{d\,q_x}{d\,P} + \frac{P\,d\,q_y}{d\,P} = A\left[\frac{W_y^y}{L_y}\,\frac{L_y}{f_y}\,f_y - \frac{W_x^x\,L_x}{L_x\,f_x}\,\frac{f_x}{P}\right]$$

Simplificando

$$\frac{d\,q_x}{d\,P} + P\,\frac{d\,q_y}{d\,P} = A\,\left(W_y^y - \frac{W_x^x}{P}\right) = A\,\left(W_y^y - W_x^y\right)$$

A expressão entre parênteses indica a diferença entre os salários reais setoriais em termos do bem Y. Da condição de equilíbrio no mercado de fatores sabemos que encontraremos um só salário no mercado, logo:

$$\frac{d\,q_x}{d\,P} + P\,\frac{d\,q_y}{d\,P} = 0 \qquad (2.11.9)$$

De (2.11.9) temos que ,

$$\frac{d\left(\frac{q}{P_x}\right)}{d\,P} = q_y$$

Isto é, que a renda real *per capita* varia diretamente em proporção ao produto *per capita* do setor Y, quando o termo de troca desse bem varia.

Da equação (2.11.9) podemos deduzir a seguinte relação

$$\frac{d\,q_x}{d\,P} + P\,\frac{d\,q_y}{d\,P} = 0$$

$$-\frac{d\,q_x}{d\,P} = P\,\frac{d\,q_y}{d\,P}$$

Multiplicando-se ambos os membros por P, e multiplicando-se e dividindo-se por q_x do lado esquerdo e por q_y do lado direito, fica:

$$-q_x\,\frac{d\,q_x}{d\,P}\,\frac{P}{q_x} = \frac{d\,q_y}{d\,P}\,\frac{P}{q_y}\,q_y\,P$$

Substituindo

$$-q_x\,\varepsilon_{q_x P} = \varepsilon_{q_y P}\,q_y\,P$$

Usando a relação (2.10.3) temos

$$q_x\,\varepsilon_{q_x \frac{1}{P}} = \varepsilon_{q_y P}\,q_y\,P$$

Dividindo ambos os lados pelo produto *per capita* em termos de X, tem-se:

$$\alpha_x\,\varepsilon_{q_x \frac{1}{P}} = \varepsilon_{q_y P}\,\alpha_y \qquad (2.11.10)$$

onde α_i indica a proporção do produto do setor i no produto nacional.

A equação (2.11.10) nos dá uma relação prática para o cálculo da elasticidade preço da oferta de um determinado setor, a partir do conhecimento das participações setoriais e da elasticidade do outro setor.[8].

2.12 A CURVA DE TRANSFORMAÇÃO

Ela também é chamada de fronteira de possibilidades de produção, que é uma função implícita que relaciona os níveis de produção dos bens para uma dada dotação de fatores. Isto é, dada a dotação de fatores e a tecnologia, a curva de transformação indica a máxima produção de um bem para dado nível de produção do outro bem.

Mostraremos que a taxa marginal de substituição entre os bens corresponde ao preço relativo deles. Portanto iremos procurar a inclinação da curva de transformação dada a dotação de fatores. Ou seja:

$$\frac{d\, q_x}{d\, q_y} = \frac{dX}{dY}\,.^{9}$$

---

8 Exemplo:
Dados: $\varepsilon_{q_y, P} = 0{,}8$; $\alpha_y = 0{,}4$; $\alpha_x = 0{,}6$
Podemos através de simples cálculo determinar
$\varepsilon_{q_x \frac{1}{P}} = 0{,}53$

9
$$\frac{d\, q_x}{d\, q_y} = \frac{d\,(\frac{X}{L})}{d\,(\frac{Y}{L})} = \frac{\dfrac{L\, dX - Xd\, L}{L^2}}{\dfrac{L\, dY - Yd\, L}{L^2}} = \frac{L\, dX - Xd\, L}{L\, dY - Yd\, L}$$

Como supõem-se dotação dos fatores fixa, sendo portanto L uma constante, d L= 0, daí então:

$$\frac{d\, q_x}{d\, q_y} = \frac{dX}{dY}$$

Dividindo o denominador e o numerador da equação anterior por d P temos:

$$\frac{dX}{dY} = \frac{\dfrac{d\,q_x}{d\,P}}{\dfrac{d\,q_y}{d\,P}}$$

Substituindo na equação anterior as relações encontradas em (2.11.7) e (2.11.8) temos:

$$\frac{dX}{dY} = \frac{\dfrac{d\,q_x}{d\,P}}{\dfrac{d\,q_y}{d\,P}} = -\frac{A\,a_x\,f_x\,f'_y\,f'_x}{A\,f'_y\,f_y\,f'_x\,a_y}$$

Simplificando,

$$\frac{dX}{dY} = -\frac{a_x\,f_x}{a_y\,f_y} \qquad (2.12.1)$$

como

$$a_x = \frac{W^x\,L_x}{L_x\,f_x} = \frac{W^x}{f_x}\ , \quad e$$

$$a_y = \frac{W^x\,L_y}{P\,L_y\,f_y} = \frac{W^x}{P\,f_y}$$

Substituindo em (2.12.1), temos :

$$\frac{dX}{dY} = -\frac{W^x}{f_x}\,\frac{P\,f_y}{W^x}\,\frac{f_x}{f_y}$$

Simplificando, fica:

$$\frac{dX}{dY} = -P$$

Assim a taxa marginal de substituição de X por Y na produção é o preço relativo de Y.

$$TMST_{XY} = - \frac{dX}{dY} = P = \frac{f'_x}{f'_y}$$

Mas o preço relativo de Y corresponde à razão dos respectivos produtos marginais, por definição.

2.12.1 CURVATURA DA CURVA DE TRANSFORMAÇÃO

Sabemos que a a inclinação da curva de transformação entre X e Y é negativa. Ainda não sabemos qual é a forma da curva, isto é, se é côncava, convexa ou linear. Para conhecermos a sua curvatura precisamos obter a diferencial segunda,

$$\frac{d^2X}{dY^2} = - \frac{dP}{dY} = \frac{d\left(- \frac{f'_x}{f'_y}\right)}{dY} = \left[- f''_x \; f'_y \; \frac{\partial k_x}{\partial \Theta} \; \frac{d\Theta}{dP} \; \frac{dP}{dY} \right] \frac{1}{(f'_y)^2} + \left[f''_y \; f'_x \; \frac{\partial k_y}{\partial \Theta} \; \frac{d\Theta}{dP} \; \frac{dP}{dY} \right] \frac{1}{(f'_y)^2}$$

Substituindo $\frac{dk_i}{d\Theta}$ pelo valor de (2.5.1) e colocando em evidência, temos:

$$\frac{d^2X}{dY^2} = \frac{1}{(f'_y)^2} \; \frac{d\Theta}{dP} \; \frac{dP}{dY} \left\{ - f''_x \; f'_y \left[\frac{-(f'_x)^2}{f''_x \; f_x} \right] + f''_y \; f'_x \left[\frac{-(f'_y)^2}{f''_y \; f_y} \right] \right\}$$

Evidenciando-se $f'_x \; f'_y$ e simplificando

$$\frac{d^2X}{dY^2} = \frac{f'_x}{f'_y} \; \frac{d\Theta}{dP} \; \frac{dP}{dY} \left(\frac{f'_x}{f_x} - \frac{f'_y}{f_y} \right)$$

Multiplicando e dividindo por Θ, fica:

$$\frac{d^2X}{dY^2} = \frac{f'_x}{f'_y} \; \frac{d\Theta}{dP} \; \frac{dP}{dY} \; \frac{1}{\Theta} \left(\Theta \frac{f'_x}{f_x} - \Theta \frac{f'_y}{f_y} \right)$$

Como temos $P = \dfrac{f'_x}{f'_y}$ e $a_i = \theta \dfrac{f'_i}{f_i}$

Substituindo ,temos:

$$\frac{d^2X}{dY^2} = \frac{P}{\theta}\,\frac{d\theta}{dP}\,\frac{dP}{dY}\,(\,a_x - a_y\,)$$

De acordo com (2.6.19), temos:

$$\frac{d\mathrm{Ln}\,\theta}{d\mathrm{Ln}\,P} = \frac{d\theta}{dP}\,\frac{P}{\theta} = \frac{1}{a_y - a_x}$$

Substituindo ,temos:

$$\frac{d^2X}{dY^2} = \frac{(\,a_x - a_y\,)}{(\,a_y - a_x\,)}\,\frac{dP}{dY}$$

Ordenando, temos:

$$\frac{d^2X}{dY^2} = \frac{-\,(a_y - a_x)}{(\,a_y - a_x)}\,\frac{dP}{dY}$$

Simplificando temos:

$$\frac{d^2X}{dY^2} = -\,\frac{dP}{dY} \qquad (2.12.1.1)$$

Como a dotação de fatores é fixa temos:

$$\varepsilon_{q_y P} = \varepsilon_{YP} \quad \text{e} \quad \frac{dq_y}{dP} = \frac{dY}{dP}\,\frac{1}{L}$$

Assim, em (2.11.8) tínhamos:

$$\frac{d\,q_y}{d\,P} = \frac{dY}{LdP} = a_y\,\frac{f_y\,f'_y}{f'_x}\,(A) = a_y\,f_y\,\frac{(A)}{P}$$

Substituindo em (2.12.10.1), temos:

$$\frac{d^2X}{dY^2} = -\,\frac{dP}{dY} = \frac{-P}{a_y\,f_y\,(A)\,L} < 0$$

Substituindo o valor de A, temos:

$$\frac{d^2X}{dY^2} = - P \frac{(a_y - a_x)^2}{a_y \cdot f_y L} \cdot \left[\frac{1}{\sigma_x l_x (1-a_x) + \sigma_y l_y (1-a_y)} \right] < 0$$

(2.12.1.2)

Como a primeira e a segunda derivada são negativas, podemos dizer que a curva de transformação é côncava em relação à origem, independentemente da intensidade de uso dos fatores entre os setores. No caso em que as intensidades de uso dos fatores sejam iguais em ambos os setores a curva de transformação será linear.

O fato de ser côncava com relação à origem implica em que a taxa marginal de substituição, entre X e Y, é crescente, isto é, cada vez o sacrifício de X será maior para obter incrementos adicionais de Y, que é o mesmo que dizer que temos custos crescentes.

Graficamente representamos a curva de transformação em (2.12.1). Se tivermos o preço relativo dos bens (P) dado, nós teremos determinada a estrutura produtiva (X_o e Y_o) no ponto de tangência da reta que representa o preço relativo a custo de fatores com a curva de transformação implicando na igualação da taxa marginal de substituição técnica na produção com o preço relativo dos bens. Os pontos ao longo da curva de transformação indicam a máxima produção possível com uma dada tecnologia e dotação de fatores; qualquer ponto no interior da curva de transformação indica um ponto de ineficiência.

Podemos também representar as variações na estrutura de produção decorrente de mudança no preço relativo dos bens usando o diagrama Lerner-Pearce.

Inicialmente temos que o preço relativo dos bens é igual a um e corresponde à remuneração relativa dos fatores dada no gráfico (2.12.2) pela inclinação da reta II. A remuneração relativa determina as respectivas proporções setoriais de uso dos fatores dados pelos vetores k_x e k_y. Nós conhecemos a

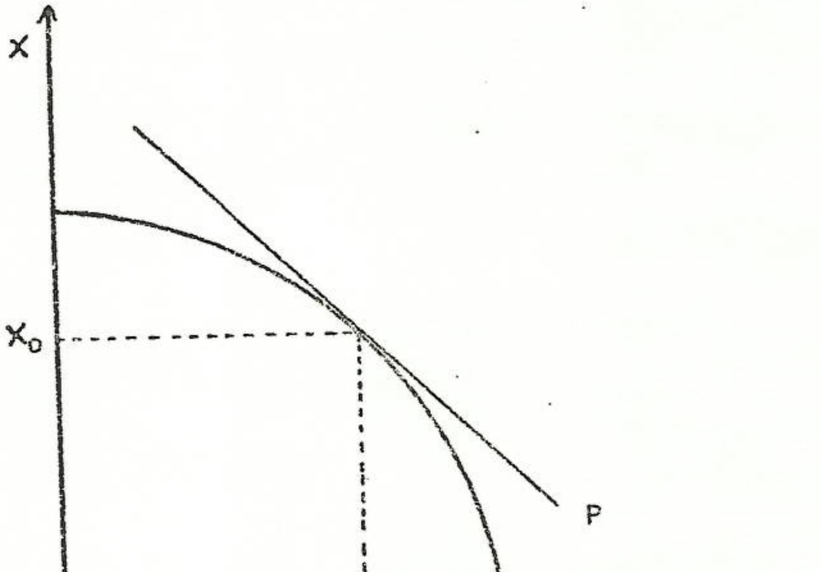


Gráfico (2.12.1)

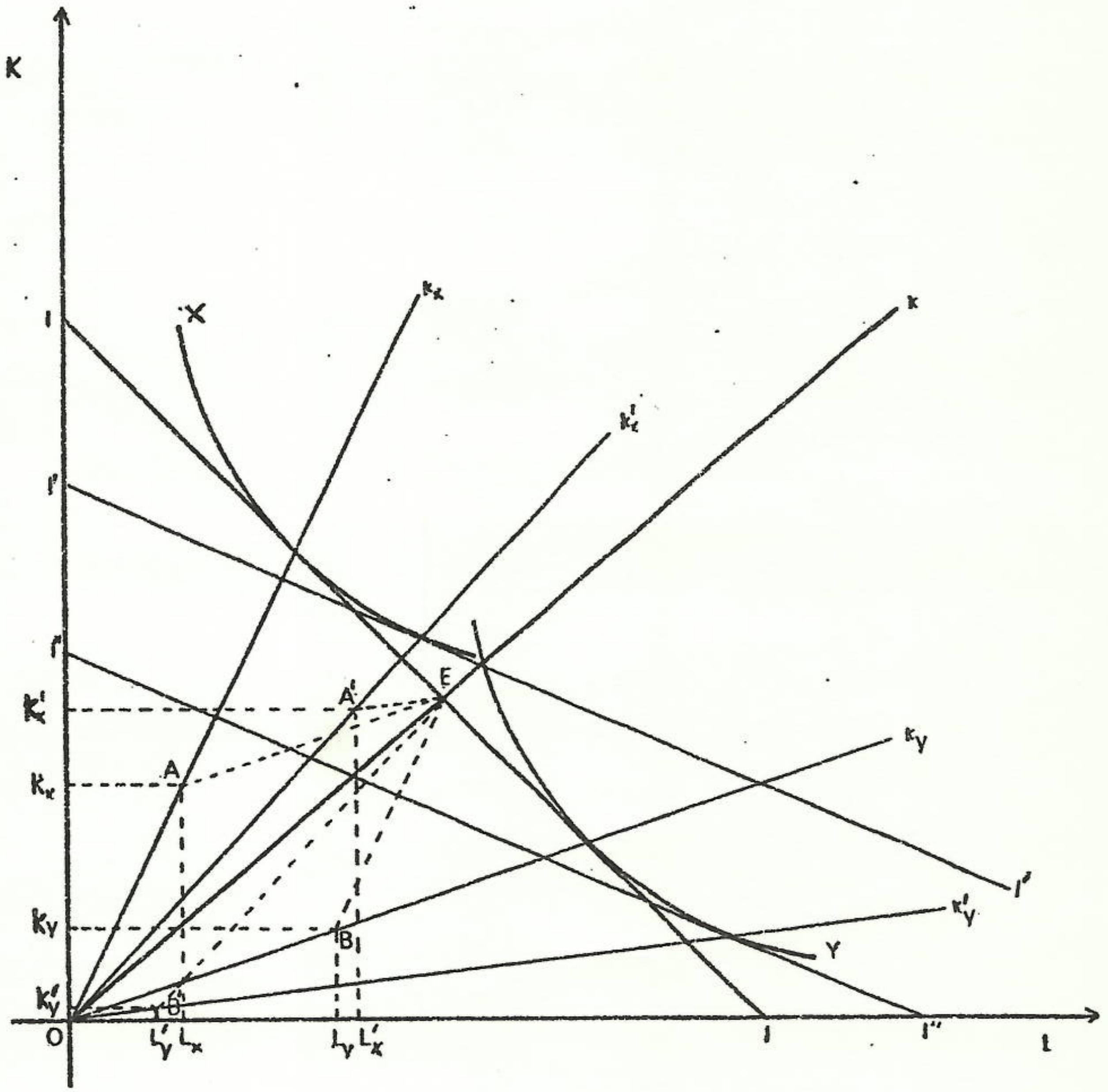


Gráfico (2.12.2)

dotação de fatores na economia, o vetor k, que pode ser obtido também através da lei do paralelogramo de adição de vetores. Somando-se, através desta lei os vetores setoriais encontramos o paralelogramo OBEA, que define a distribuição de fatores entre setores. As coordenadas do ponto B indicam respectivamente as quantidades de capital e trabalho empregados em Y e o ponto A indica o correspondente para a produção de X.

Aumentando-se o preço relativo do bem X teremos um aumento na remuneração relativa do capital, representada no gráfico (2.12.2) pelas inclinações das linhas I'I' e I"I", determinando-se as novas proporções de uso dos fatores setoriais.

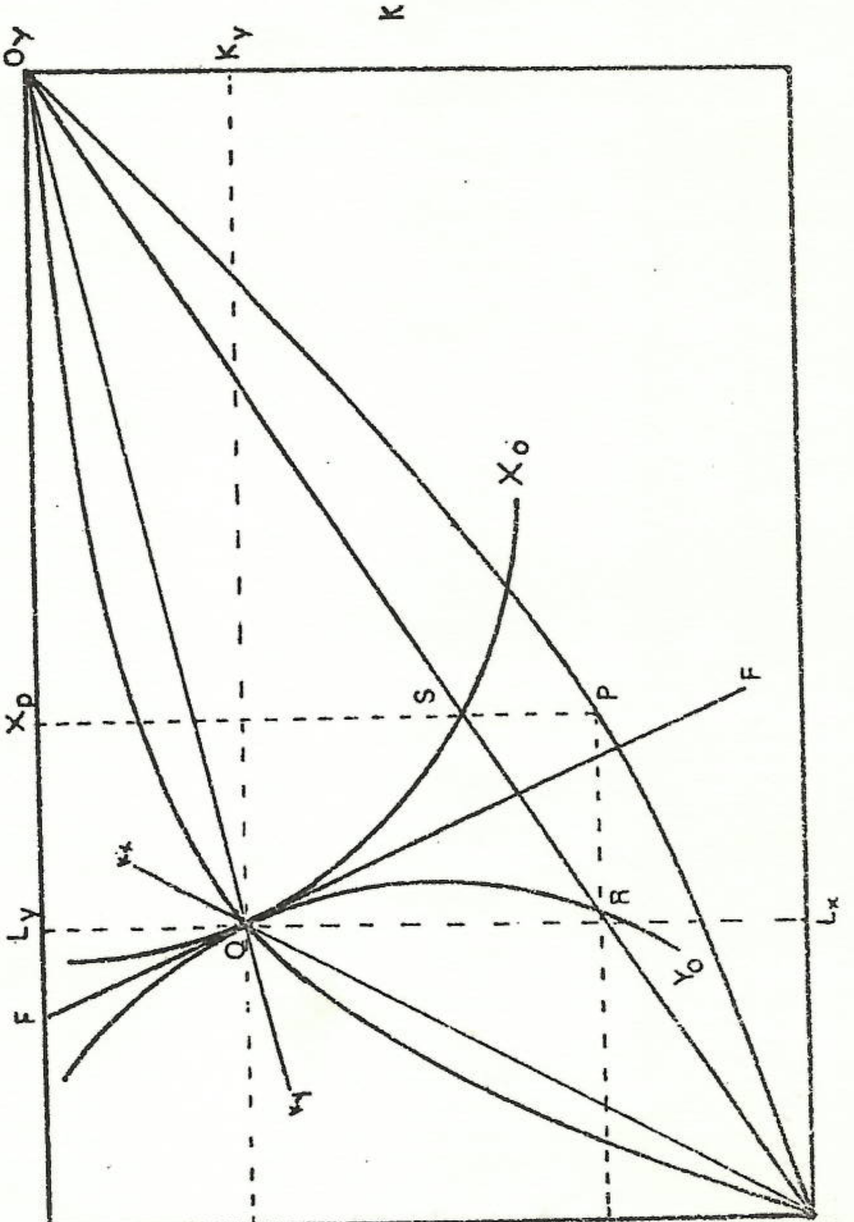
Refazendo-se o paralelogramo conseguiremos agora o ponto A', localizado a nordeste de A, que indica uma maior absorção de ambos os fatores no setor X, o que necessariamente implicará em uma maior produção nesse setor. O ponto B', ao contrário, localiza-se a sudoeste de B, implicando uma redução no uso de ambos os fatores em Y e conseqüentemente reduz-se a produção nesse setor.

2.13 A CAIXA DE EDGEWORTH-BOWLEY.

A caixa de Edgeworth-Bowley é um instrumento geométrico que resume o equilíbrio geral de produção no modelo de dois fatores e dois produtos.

O tamanho da caixa é definido pela dotação de capital e trabalho disponível na economia. A diagonal da caixa representa a disponibilidade relativa de fatores da economia, como podemos ver no gráfico (2.13.1).

Os pontos O_x e O_y são, respectivamente, as origens na produção para o setor X e Y. Considerando o nosso suposto de que $k_x > k_y$ teremos um mapa de isoquantas da produção de X e Y. As isoquantas de X e Y serão tangentes em determinados pontos. O lugar geométrico dos pontos de tangência das isoquantas de X e Y chama-se linha de contrato, ao longo da qual teremos taxas marginais de substituição técnicas de fatores iguais em ambos os setores. Os pontos da linha de contra-



O
K
L
O_y
K_y
K_x
X_p
L_y
L_x
Y_p
O_x
X_0
Y_0
F
F
S
P
R
Q

to serão os pontos de máxima eficiência na produção, e são representados pela trajetória O_x Q O_y.

Para melhor compreensão do significado da curva de contrato consideramos duas isoquantas quaisquer, X e Y, do mapa que representamos no gráfico (2.13.2), no ponto A de produção onde temos pleno emprego dos recursos produtivos. Mas, em A, as $TMST_{KL}$ são diferentes em ambos os setores. Existe, portanto, uma distorção na alocação dos recursos, isto é, a remuneração relativa do trabalho é menor em Y que em X. O ponto A não pertence à curva de contrato, pois com a mesma dotação relativa de fatores da economia é possível aumentar o volume de produção, assim :

a) Mantendo-se o mesmo nível de produção de Y, mas deslocando-se de X para X". O ponto H" pertence à curva de contrato, pois temos iguais taxas marginais de substituição técnica entre os fatores em ambos os setores. Portanto, com a mesma disponibilidade de fatores na economia obtivemos um aumento na produção de X, mantendo constante o nível de Y.

b) Aumentando a produção dos dois bens (X para X' e Y para Y') quando desloca-se para o ponto H'. Em termos da curva de transformação, o ponto A está no interior da fronteira de possibilidades de transformação, mesmo considerando o pleno emprego dos fatores, pois o ponto A tem uma ineficiente absorção de recursos.

c) Aumentando a produção de Y para Y", mantendo constante a produção de X, iremos ao ponto H.

Qualquer ponto da curva de transformação corresponde a um ponto da linha de contrato ; veremos que a linha de contrato é uma transformação da curva de possibilidades de produção, do espaço de bens para o espaço de fatores.

Ao longo da curva de contrato, à medida em que aumentamos a produção de X, isto é, que estamos nos deslocando de O_x até O_y, os setores X e Y, tornam-se mais intensivos em trabalho, aumentando por outro lado a remuneração relativa do capital.

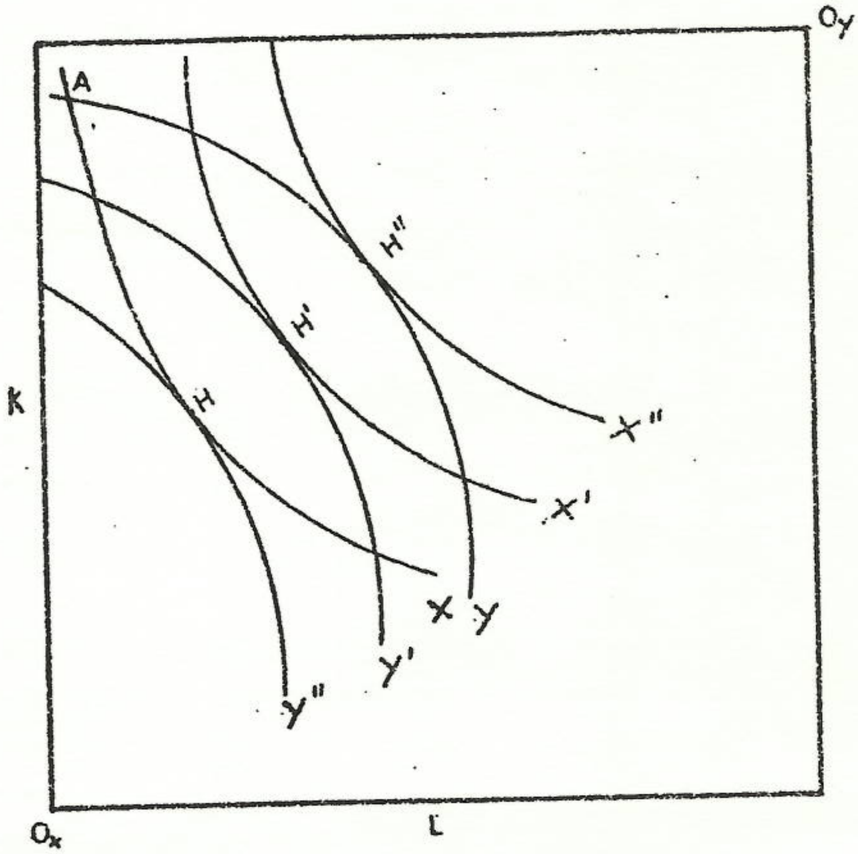


Gráfico (2.13.2)

Considerando o ponto Q sobre a linha de contrato (O_x Q O_y) e fazendo as respectivas projeções verticais e horizontais determinamos as demandas setoriais por fatores, dada a remuneração relativa do trabalho (igual à inclinação de FF).

Ao nível de produção dado pela isoquanta X_o, o setor X requer $O_x L_x$ de trabalho e $O_x K_x$ de capital; enquanto que o setor Y, produzindo ao nível Y_o, utiliza $O_y L_y$ de trabalho e $O_y K_y$ de capital, ocorrendo assim pleno emprego de fatores na economia.

Supondo-se a existência de rendimentos constantes de escala em ambos os setores, a quantidade do bem X pode ser medida, para qualquer ponto de produção localizado sobre a linha de contrato, pela distância ao longo de um raio entre a origem O_x e o ponto em que este raio cruza a isoquanta do bem X. Da mesma forma mede-se a quantidade produzida do bem Y com relação à origem O_y. A diagonal $O_x O_y$ é um raio conveniente e comum aos dois mapas de isoquantas, portanto a produção de X no ponto Q pode ser medida pela distância do raio $O_x S$, enquanto que a produção de Y em Q pode ser medida pela distância $O_y R$.

As razões $\dfrac{O_x S}{O_x O_y}$ e $\dfrac{O_y R}{O_y O_x}$ representam as proporções da produção máxima possível de X e Y, produzidas no ponto Q.

A distância $O_x O_y$ e $O_y O_x$ representam as produções máximas quando existe especialização em X, ou em Y, respectivamente.

Através de uma projeção vertical, o produto do setor X poderá ser medido na abscissa $O\, O_y$. Considerando o nível de produção X_o no ponto Q, temos que a projeção de sua produção será $O\, X_p$, pois por semelhança de triângulos temos que $\dfrac{O_x S}{O_x O_y} = \dfrac{O\, X_p}{O\, O_y}$.

O mesmo pode ser feito para o setor Y com relação à abscissa $O\, O_x$. A projeção horizontal de Y indica o nível de produção correspondente ao ponto Q, isto é, Y_o corresponde a O Y_p, pois por semelhança de triângulos temos $\frac{O_y R}{O_y O_x} = \frac{O Y_p}{O O_x}$.

As coordenadas do ponto P correspondem aos respectivos níveis de produção X_p e Y_p. O ponto P pertence à curva de transformação (que tem a origem no ponto O) e que corresponde ao ponto Q sobre a linha de contrato. Repetindo-se o exercício para cada ponto na linha de contrato conseguimos a curva de transformação O_x P O_y, que supomos côncava com relação à origem O. O que poderíamos na verdade afirmar a respeito da curva de transformação é que ela estará localizada a sudoeste da diagonal O_x O_y, devido ao suposto de forte intensidade no uso dos fatores setoriais.

Para provar graficamente a concavidade com relação à origem da curva de transformação, faremos a seguinte análise no gráfico (2.13.3). Seja o ponto inicial de produção Q na curva de contrato, ao qual corresponde uma remuneração relativa dos fatores dada pela inclinação de FF. Determina-se assim as proporções k_x e k_y. Supondo a remuneração relativa constante façamos deslocamentos equiproporcionais paralelos da linha FF para F'F' e F"F", isto é, as mesmas proporções capital-trabalho continuam vigorando. O deslocamento é feito na magnitude suficiente para conseguir iguais mudanças, em ambas as direções, nas respectivas produções, sendo que a produção de X aumenta em uma unidade em A e diminui na mesma quantidade em A', com relação a Q. A produção de Y diminui em B e aumenta em B' com relação a Q no mesmo volume não especificado.

Na situação de produção de X em A e Y em B ocorrerá desemprego de trabalho e excesso de procura por capital, temos desequilíbrio. O equilíbrio no mercado de fatores impõe um encarecimento na remuneração relativa do capital, o que representamos pela inclinação da linha JJ. Para manter o nível de produção de X igual ao de X_{+1} é preciso que a produção de Y diminua ainda mais para o nível Y'_- . O novo equilíbrio em produção fica estabelecido em Q'.

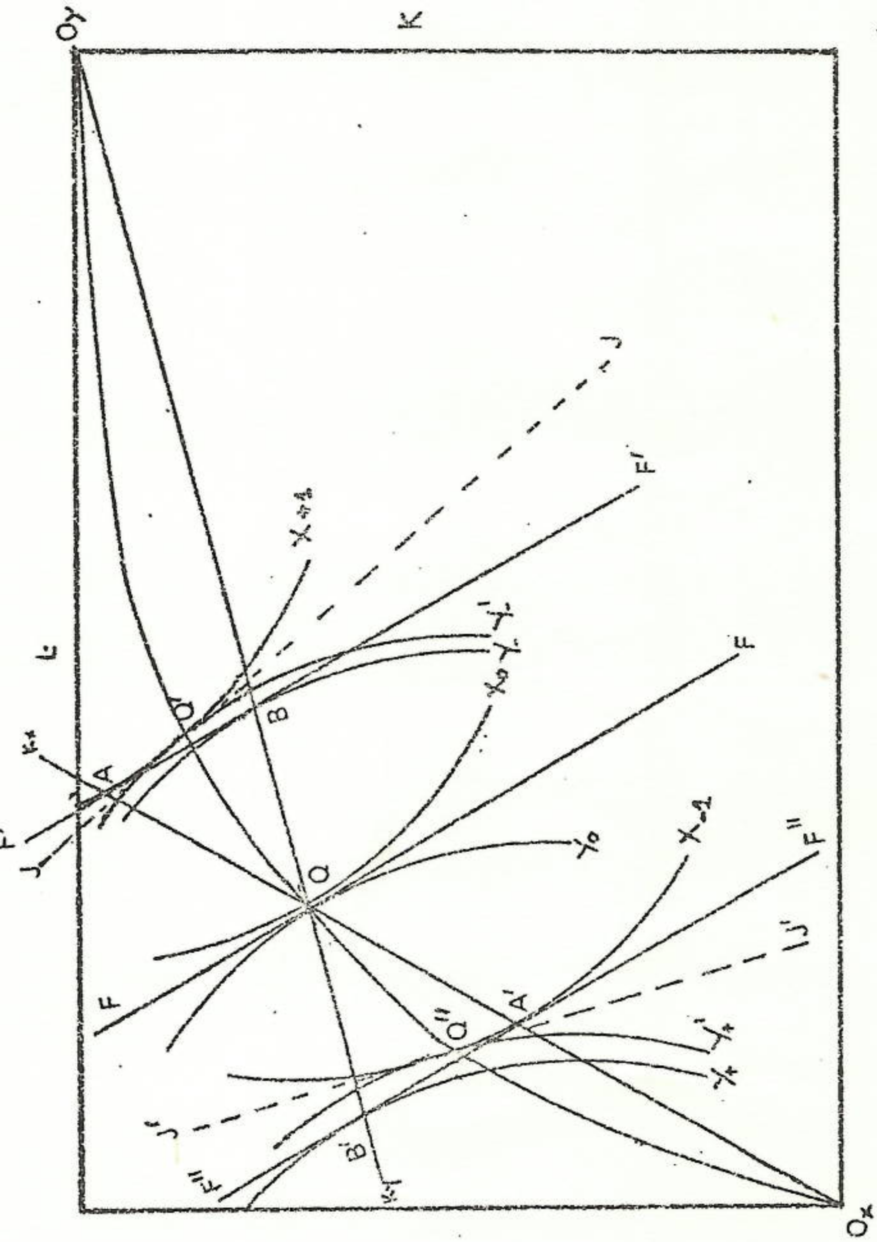


Gráfico (2.13.3)

A posição de produção de X em A' e Y em B' gera desemprego de capital e excesso de procura por trabalho, o que resultará em um aumento na remuneração relativa do trabalho, dado pela inclinação de J'J'. Para mantermos o nível de produção de X igual a X_{-1} será necessário que o nível de produção de Y não aumente na quantia indicada inicialmente, fixando-se em Y'_{+}. O novo equilíbrio em produção é determinado em Q".

Resumindo, ao aumentar a produção de X em uma unidade a partir de Q" para Q foi necessária uma dada contração na produção de Y. Continuando a aumentar a produção de X em mais uma unidade, ao passar de Q para Q',provocou uma queda ainda maior na produção de Y. Fica então demonstrado que temos custos crescentes, isto é, a curva de transformação é côncava com relação à origem, como podemos ver indicado no gráfico (2.13.4).

Também mostramos que, à medida que aumenta a produção de um bem a expensas de outro, aumenta a remuneração relativa do fator usado mais intensivamente na produção do bem em expansão. A máxima remuneração relativa do trabalho será conseguida quando nos especializamos em Y, isto é, quando o ponto de produção corresponde à origem O_x. A mínima remuneração relativa do trabalho ocorre no ponto O_y,correspondente à especialização na produção de X.

2.14 ELASTICIDADE SUBSTITUIÇÃO NA PRODUÇÃO

A mesma informação contida na curva de transformação pode ser representada num gráfico que relacione a estrutura da produção com o preço relativo dos bens, como vemos no gráfico (2.14.1).

Queremos saber a elasticidade da curva SS, mais conhecida como elasticidade substituição na produção, que é definida como:

$$\sigma_S = \frac{d\text{Ln}\left(\frac{q_Y}{q_X}\right)}{d\text{Ln } P} = \frac{d\text{Ln}\left(\frac{Y}{X}\right)}{d\text{Ln } P} = \frac{d\text{Ln } q_Y}{d\text{Ln } P} - \frac{d\text{Ln } q_X}{d\text{Ln } P} \qquad (2.14.1)$$

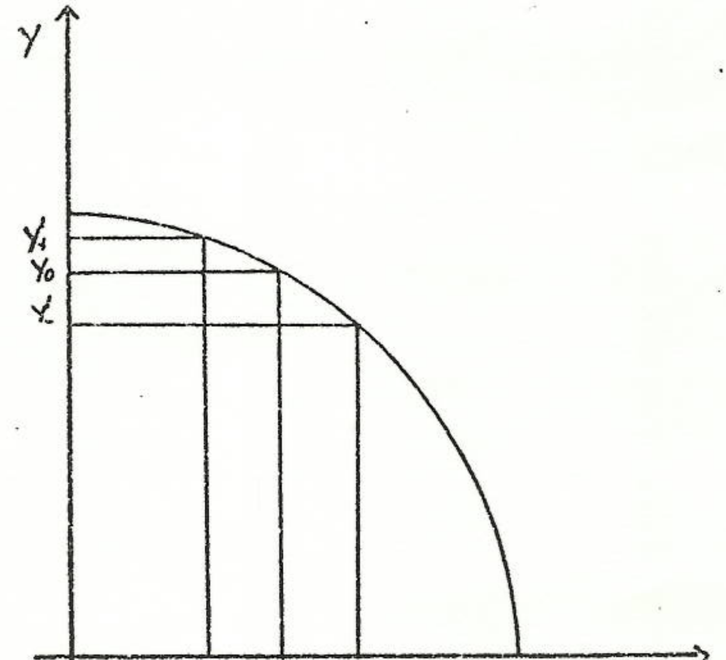


Gráfico (2.13.4)

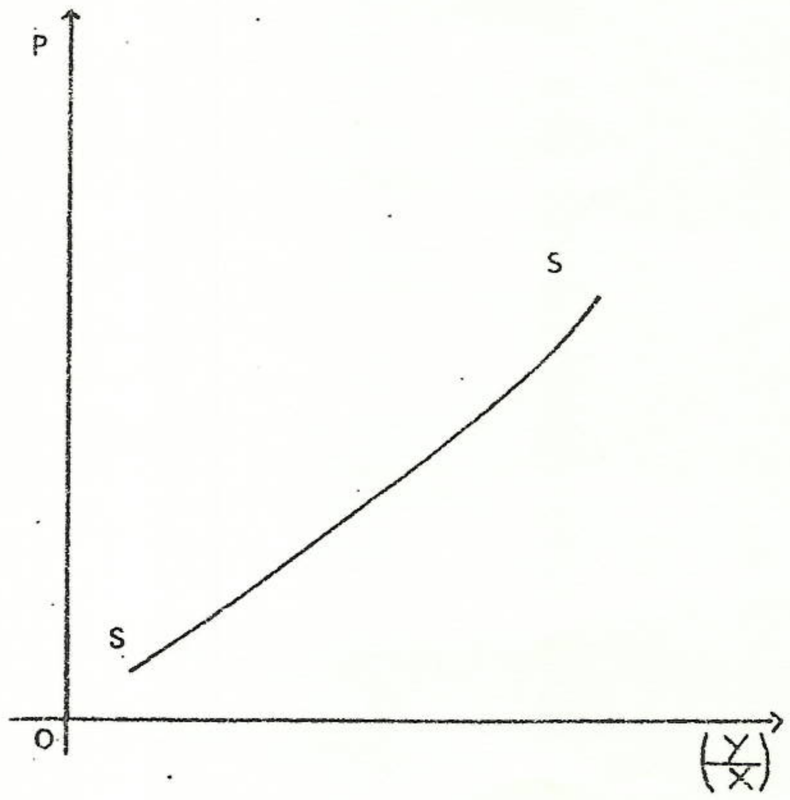


Gráfico (2.14.1)

Conhecemos os valores das respectivas elasticidades setoriais de produção com relação ao preço relativo de Y, de (2.10.6) e (2.10.12); substituindo em (2.14.1) temos:

$$\sigma_S = \frac{1}{(a_y - a_x)^2} \left[\sigma_y\, l_y\, (1-a_y) + \sigma_x\, l_x\, (1-a_x)\right] \left(\frac{a_y}{l_y} + \frac{a_x}{l_x}\right) \qquad (2.14.2)$$

Na equação (2.12.2), chamaremos de B a expressão entre parênteses. Nela as respectivas proporções da força de trabalho setorial podem ser expressas da seguinte forma.[10]

$$l_y = \frac{a_y\,(a - a_x)}{a\,(a_y - a_x)} \quad \text{e} \quad l_x = \frac{a_x\,(a_y - a)}{a\,(a_y - a_x)} \qquad (2.14.3)$$

Substituindo esses valores em B, temos:

$$B = \frac{a_y}{l_y} + \frac{a_x}{l_x} = \frac{a\,(a_y - a_x)}{(a - a_x)} + \frac{a\,(a_y - a_x)}{(a_y - a)}$$

$$B = \frac{a\,(a_y - a_x)\,(a_y - a + a - a_x)}{(a - a_x)\,(a_y - a)}$$

Simplificando

$$B = \frac{a\,(a_y - a_x)^2}{(a - a_x)\,(a_y - a)}$$

Substituindo B em (2.14.2) temos:

$$\sigma_S = \sigma_y \frac{l_y\, a\,(1 - a_y)}{(a - a_x)\,(a_y - a)} + \sigma_x \frac{l_x\,(1 - a_x)\, a}{(a - a_x)\,(a_y - a)}$$

Substituindo l_x e l_y pelos valores de (2.14.3), resulta:

$$\sigma_S = \sigma_y \frac{a_y\,(1 - a_y)}{(a_y - a)\,(a_y - a_x)} + \sigma_x \frac{a_x\,(1 - a_x)}{(a - a_x)\,(a_y - a_x)} \qquad (2.14.4)$$

---

10 De (2.1.10), temos:

Portanto no caso em que não temos funções de produção com proporções fixas a elasticidade terá sempre sinal positivo $\sigma_S > 0$, isto é, independentemente da intensidade de uso dos fatores, um aumento no preço relativo de Y aumentará a razão da sua produção com relação à do outro setor.

Quando ambos os setores usam a mesma proporção de fatores temos que $\sigma_S = \infty$. No caso de proporções fixas, no suposto de que ocorra pleno emprego, $\sigma_S = 0$.

2.14.1 COEFICIENTES FIXOS

Fazendo o suposto de pleno emprego e coeficientes fixos de produção resulta em que a curva de transformação se reduz a um ponto. As curvas de ofertas setoriais são inelásticas. Analisaremos aqui o caso no qual admite-se desemprego de algum fator, isto é, que o uso total de cada fator possa ser menor que a sua disponibilidade; em símbolos:

$$l_y = \frac{k_x - k}{k_x - k_y}$$

Somando-se, diminuindo-se e dividindo-se por θ o numerador e o denominador, fica:

$$l_y = \frac{\dfrac{k_x + \theta - (k+\theta)}{\theta}}{\dfrac{k_x + \theta - (k_y+\theta)}{\theta}} = \frac{\dfrac{k_x + \theta}{\theta} - \dfrac{k + \theta}{\theta}}{\dfrac{k_x + \theta}{\theta} - \dfrac{k_y + \theta}{\theta}}$$

Mas, de (2.4.1), temos que :

$$a_i = \frac{\theta}{\theta + k_i}$$

Substituindo,

$$l_y = \frac{\dfrac{1}{a_x} - \dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{a_x} - \dfrac{1}{a_y}} = \frac{a_y\,(a - a_x)}{a\,(a_y - a_x)}$$

onde a é a participação do trabalho no produto total.

Como

$$l_x = 1 - l_y = \frac{a\,(a_y - a_x) - a_y\,(a - a_x)}{a\,(a_y - a_x)} = \frac{a_x\,(a_y - a)}{a\,(a_y - a_x)}$$

$$L_x + L_y \leq L \qquad (2.14.1.1)$$
$$K_x + K_y \leq K$$

Sendo

$$L_x = b_x X \quad , \quad L_y = b_y Y$$
e $$(2.14.1.2)$$
$$K_x = h_x X \quad , \quad K_y = h_y Y$$

Onde b_i e h_i, para $i = x, y$, correspondem aos coeficientes fixos de produção setoriais de trabalho e capital respectivamente, substituindo (2.14.1.2) em (2.14.1.1) tem-se:

$$b_x X + b_y Y \leq L$$
$$h_x X + b_y Y \leq K$$

Isolando X, nas desigualdades, resulta:

$$X \leq \frac{L}{b_x} - \frac{b_y}{b_x} Y \qquad (2.14.1.3)$$

$$X \leq \frac{K}{h_x} - \frac{h_y}{h_x} Y \qquad (2.14.1.4)$$

(2.14.1.3) representa a restrição do trabalho na produção de X, para um dado nível de produção de Y; a desigualdade (2.14.1.4) corresponde a restrição do capital nas mesmas condições. A curva de transformação é representada pela função

$$X = \min \left(\frac{K}{h_x} - \frac{h_y}{h_x} Y; \frac{L}{b_x} - \frac{b_y}{b_x} Y \right) \text{, ou}$$

$$X = \min \left(\frac{K}{h_x} - J_k Y; \frac{L}{b_x} - J_L Y \right)$$

onde

$$J_k = \frac{h_y}{h_x} \quad \text{e} \quad J_L = \frac{b_y}{b_x}$$

A representação gráfica da fronteira de possibilidades dado o suposto que o bem X é intensivo em capital ($J_K < 1$ e $J_L > 1$), é indicada, no gráfico (2.14.1.1), pela linha quebrada B_K E A'_T , onde A_T E A'_T corresponde à restrição do trabalho e B_K E B'_K corresponde à restrição do capital, cada uma mostrando a máxima quantidade possível de X para cada nível de produção de Y, dadas as dotações de trabalho e capital, respectivamente.

Os pontos possíveis de produção que não violam nenhuma das restrições estão indicados pela área O A'_T E B_K. O ponto B_K corresponde a $\frac{K}{h_x}$ e a inclinação de B_K B'_K (representada pela tangente do ângulo α) corresponde a J_K. O ponto A_T corresponde a $\frac{L}{b_x}$ e a inclinação de A_T A'_T (dada pela tangente do ângulo γ) corresponde a J_L.

No intervalo O Y_o, de produção de Y, a produção de X está localizada ao longo de B_K E, pois opera a restrição do capital, é claro, ficando desempregada parte da força de trabalho, correspondendo a um salário igual a zero.

No intervalo Y_o A'_T, de produção de Y, a produção de X está localizada ao longo de A'_T E, operando então a restrição do trabalho, e é claro que o capital torna-se redundante e conseqüentemente a sua remuneração será zero. Só em E teremos pleno emprego de ambos os fatores.

Derivaremos agora as curvas de oferta setoriais. Quando a produção de Y encontra-se localizada no segmento Y_o A'_T a produção de X corresponderá ao segmento OX_o e o preço relativo de Y será dado pela inclinação da linha A_T A'_T, isto é,

$$P = J_L = \frac{b_y}{b_x} > 1$$

Quando o preço relativo de Y for maior que J_L teremos completa especialização em Y em A'_T. Se a produção de Y encontra-se na região de O Y_o, a produção de X corresponderá ao segmento X_o B_K, e o preço relativo de Y será dado pela inclinação de B_K B'_K, isto é,

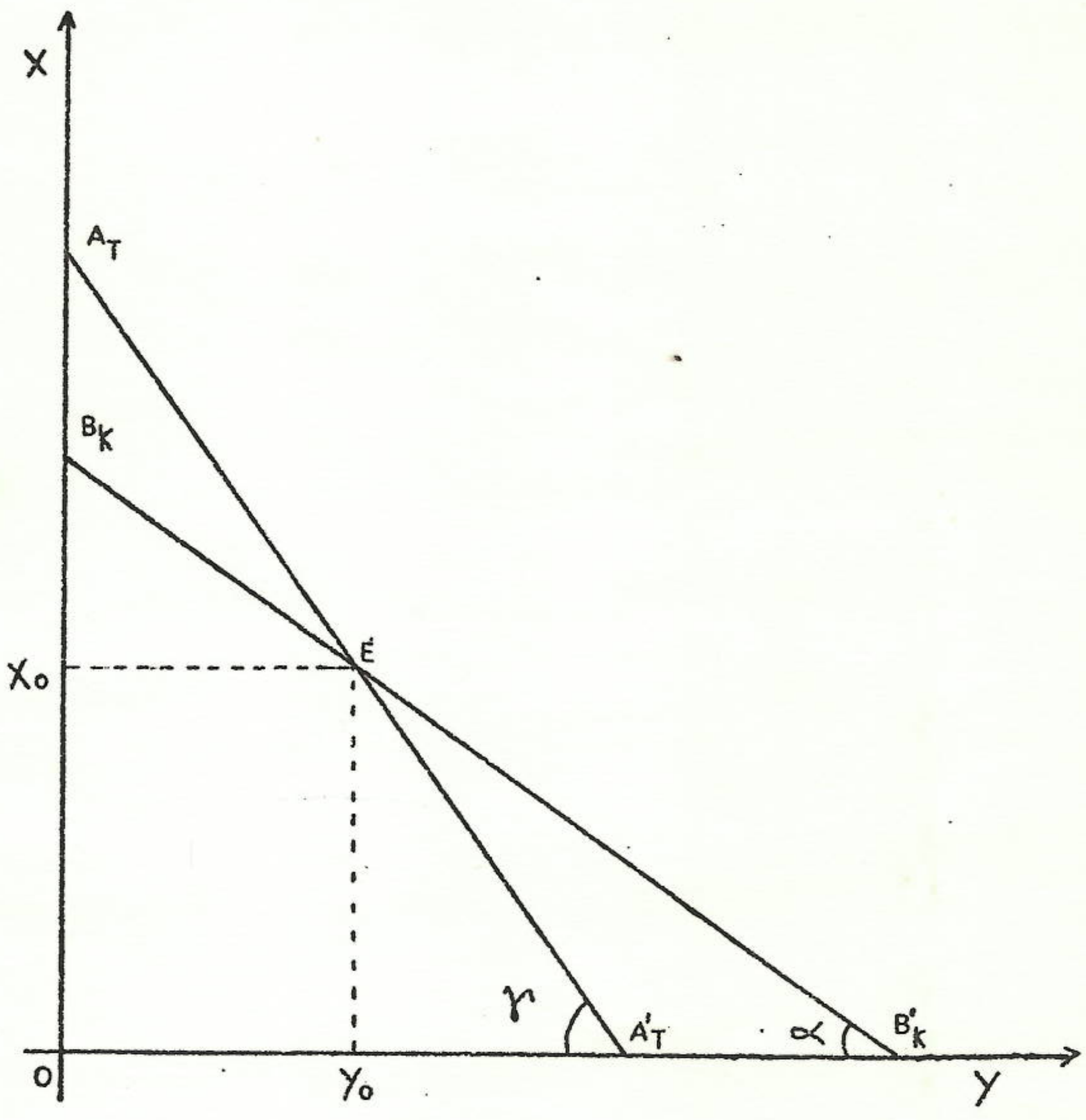


Gráfico (2.14.1.1)

$$P = J_K = \frac{h_Y}{h_X} < 1$$

Preços relativos de Y ainda menores causarão a comple ta especialização na produção de X ao nível B_K.

Nos gráficos (2.14.1.2 e 3) estão representadas as cur va de oferta de X, em função do preço relativo de Y, P, resultan do uma função escalonada decrescente, e em função de seu pró - prio preço relativo, resultando uma função escalonada crescente.

Também representamos a curva de oferta de Y em fun- ção de seu próprio preço relativo, gráfico (2.14.1.4).

2.15 TEOREMA DE SAMUELSON-RYBCZYNSKI

Nesta seção queremos avaliar o efeito da mudança na disponibilidade dos fatores sobre a oferta relativa de bens, mantendo-se constante o preço relativo dos bens e conseqüen- temente a remuneração relativa dos fatores. O teorema de Sa- muelson-Rybczynski nos responde a essa questão.

O produto setorial *per capita* é dado por:

$$q_i = l_i f_i \tag{2.15.1}$$

Substituindo os valores de l_i dados em (2.1.8) e (2.1.10) na equação (2.15.1) resulta em que a produção seto- rial per capita fica:

$$q_y = \frac{k_x - k}{k_x - k_y} f_y \tag{2.15.2}$$

$$q_x = \frac{k - k_y}{k_x - k_y} f_x \tag{2.15.3}$$

Recordemos que, por suposição, o setor X é intensi- vo no uso do fator capital, a qualquer preço relativo dos fa tores.

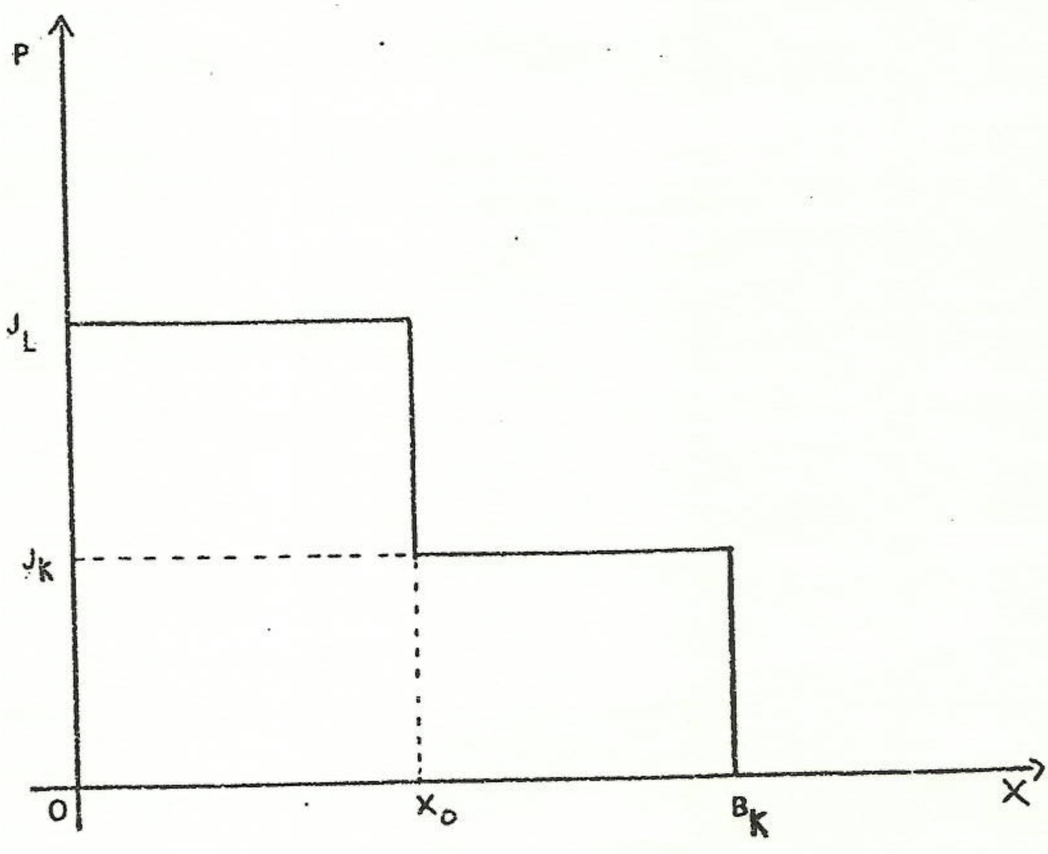


Gráfico (2.14.1.2)

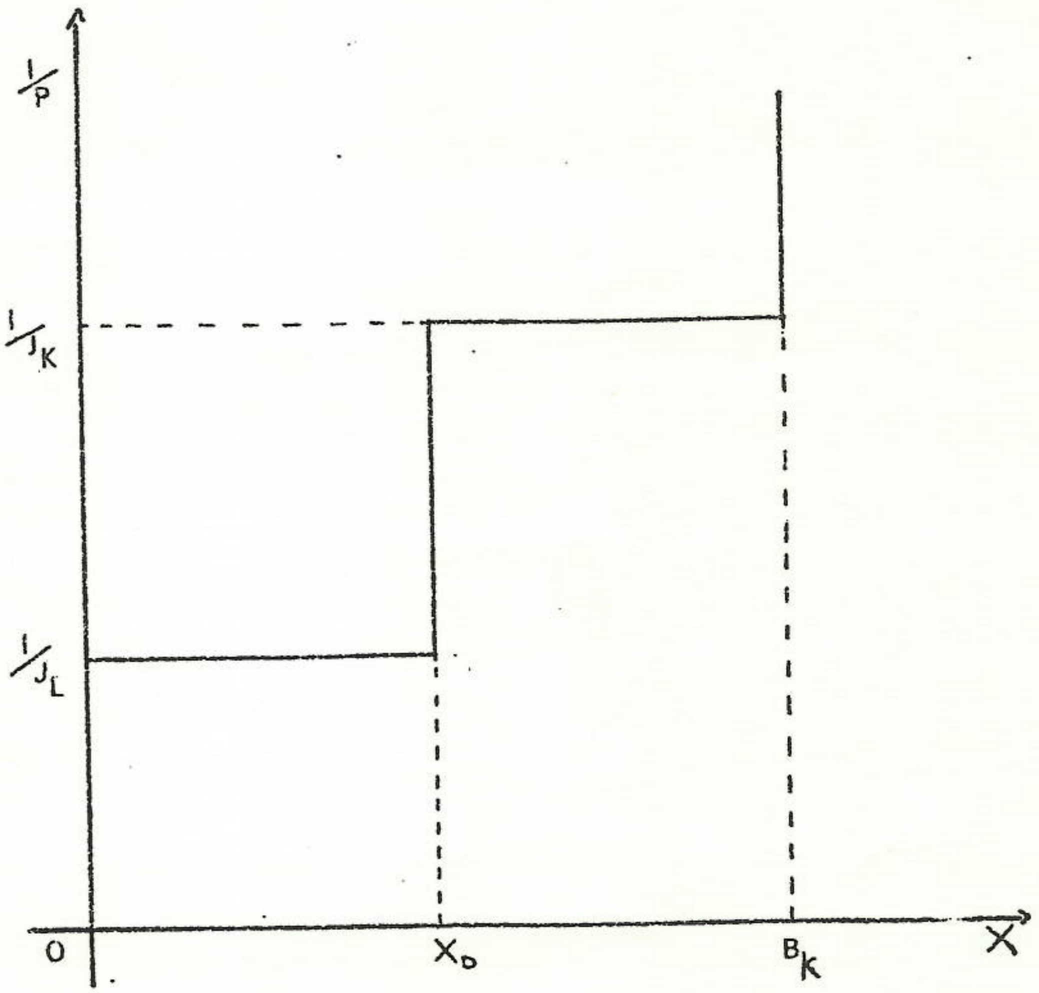


Gráfico (2.14.1.3)

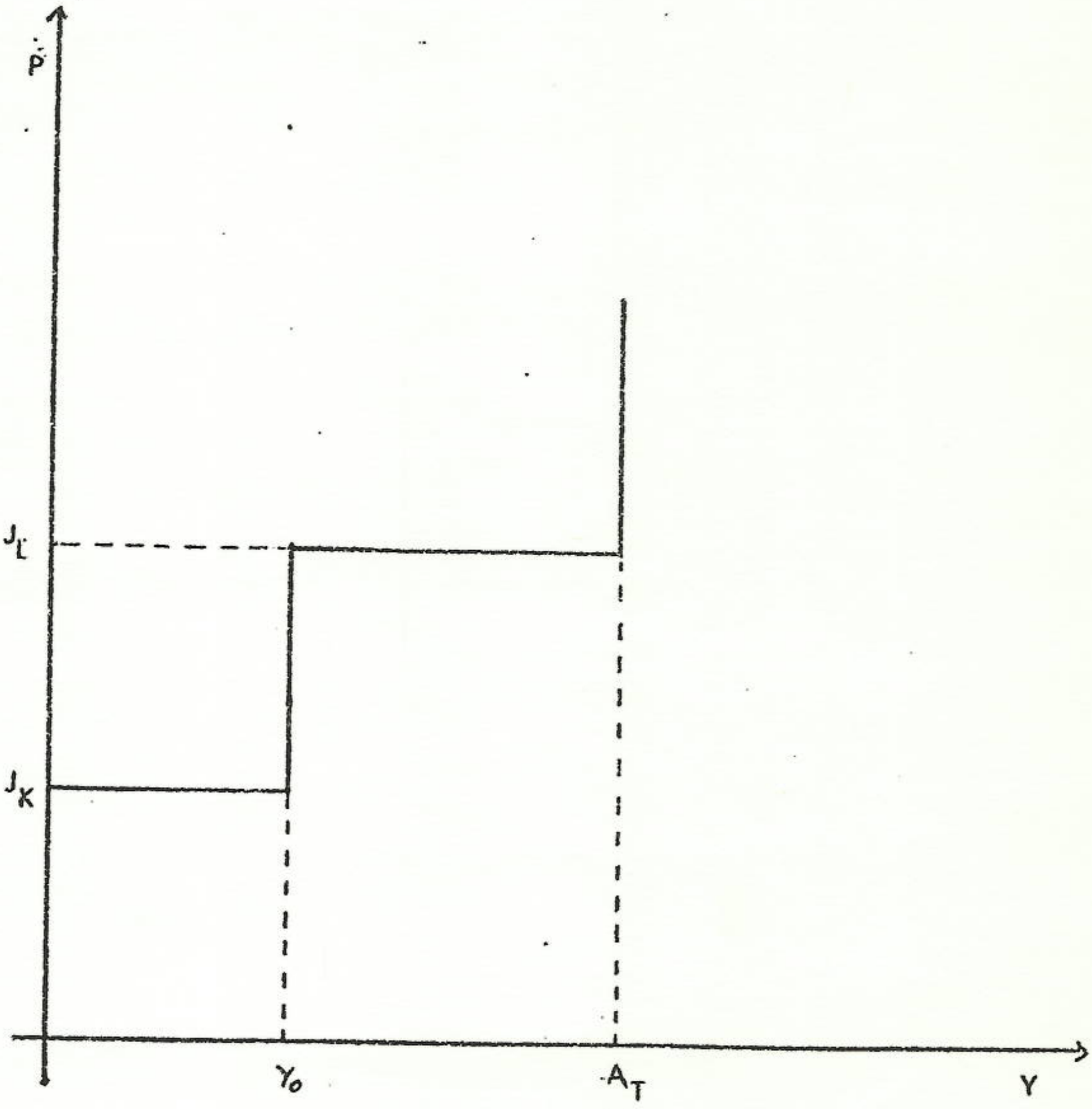


Gráfico (2.14.1.4)

Observando as equações (2.15.2) e (2.15.3) vemos que as produções setoriais são funções das proporções em que se combinam os fatores de produção e da disponibilidade relativa dos fatores na economia; como nós mantemos o preço relativo dos fatores constante , as proporções em que se combinam os fatores em ambos os setores também serão constantes, daí os produtos *per capita* setoriais serem só função da dotação dos fatores na economia.

Em primeiro lugar, suporemos que a alteração na disponibilidade relativa dos fatores na economia (dk) decorre de um aumento na dotação do fator capital. As conseqüentes variações ocorridas nos produtos setoriais *per capita* são indicados por:

$$\frac{dq_y}{d\,k} = -\frac{(k_x - k_y)}{(k_x - k_y)^2} \qquad f_y = \frac{-f_y}{(k_x - k_y)} < 0 \qquad (2.15.4)$$

$$\frac{dq_x}{d\,k} = \frac{(k_x - k_y)}{(k_x - k_y)^2} \qquad f_x = \frac{f_x}{(k_x - k_y)} > 0 \qquad (2.15.5)$$

De (2.15.4) e (2.15.5) temos que um aumento na dotação relativa de capital, com o preço relativo constante, aumenta a produção *per-capita* do setor mais intensivo em capital e diminui a produção *per-capita* do setor intensivo em trabalho, mas supondo-se que dL = 0, vem:

$$\frac{dq_y}{d\,k} = \frac{d\,(\frac{Y}{L})}{d\,(\frac{K}{L})} = \frac{\frac{L\,dY - Y dL}{L^2}}{\frac{L\,dK - K\,dL}{L^2}} = \frac{dY}{dK}$$

Que implica:

$$\frac{dq_y}{d\,k} = \frac{dY}{dK} < 0 \qquad (2.15.6)$$

Da mesma forma:

$$\frac{dq_x}{d\,k} = \frac{dX}{dK} > 0 \qquad (2.15.7)$$

Como $(k_x - k_y) > 0$, o aumento na disponibilidade do fator capital, mantendo-se constante o preço relativo, causa uma diminuição na produção do bem intensivo no uso do fator trabalho, e eleva a produção do bem intensivo em capital.

Agora passemos a analisar o caso em que a variação na disponibilidade relativa dos fatores na economia (k) é devida ao aumento da dotação do fator trabalho.

Os produtos setoriais são expressos da seguinte maneira:

$$Y = \frac{k_x - k}{k_x - k_y} L\ f_y = \frac{k_x\ L - K}{k_x - k_y} f_y \qquad (2.15.8)$$

$$X = \frac{k - k_y}{k_x - k_y} L\ f_x = \frac{K - k_y\ L}{k_x - k_y} f_x \qquad (2.15.9)$$

A variação no produto setorial quando varia a disponibilidade total de trabalho é dada por:

$$\frac{dY}{dL} = \frac{k_x}{k_x - k_y} f_y > 0 \qquad (2.15.10)$$

$$\frac{dX}{dL} = \frac{-\,k_y}{k_x - k_y} f_x < 0 \qquad (2.15.11)$$

Ou seja, quando a disponibilidade do fator trabalho aumenta (supondo-se que $k_x > k_y$) a produção do bem intensivo no uso de mão de obra (no caso Y) aumenta e a produção do bem intensivo no uso do fator capital (no caso X) diminui.

De acordo com o teorema de Samuelson-Rybczynski, mantendo-se constante o preço relativo dos bens (e também dos fatores) um aumento na dotação de um dos fatores causará o aumento na pro do bem que utiliza esse fator intensivamente, e reduzirá a produção do outro bem.

Iremos agora procurar a elasticidade da oferta a respeito da disponibilidade dos fatores na economia. Suponhamos que a mudança na disponibilidade global decorre de um aumento na dotação do fator capital, mantendo-se constante a quantidade existente do fator trabalho. Em (2.15.6) e (2.15.7) encontramos que a reação observada na produção *per capita* setorial é igual à variação na produção setorial em relação à dotação de capital:

$$\frac{dq_y}{d\,k} = \frac{dY}{dK} \quad \text{e} \quad \frac{dq_x}{d\,k} = \frac{dX}{dK} \qquad (2.15.12)$$

Multiplicando-se ambos os membros das duas equações por K e dividindo-se ambos os membros da primeira expressão por Y e da segunda por X, resulta em:

$$\frac{\frac{K}{L}\,dq_y}{\frac{Y}{L}\,dk} = \frac{dY}{dK}\,\frac{K}{Y} \quad \text{e} \quad \frac{\frac{K}{L}\,dq_x}{\frac{X}{L}\,dk} = \frac{dX}{dK}\,\frac{K}{X}$$

Que fica:

$$\varepsilon_{q_i k} = \varepsilon_{F_i k} \qquad \text{para } i = x,y \qquad (2.15.13)$$

Para o setor X, observa-se:

$$\varepsilon_{q_x k} = \varepsilon_{XK} = \frac{f_x}{(k_x - k_y)} \cdot \frac{K}{L_x\ f_x}$$

Simplificando e dividindo o numerador e o denominador por L temos:

$$\varepsilon_{XK} = \frac{\frac{K}{L}}{(k_x - k_y)\,\frac{L_x}{L}} = \frac{k}{(k_x - k_y)\,l_x}$$

Substituindo l_x pelo valor de (2.1.9) temos

$$\varepsilon_{XK} = \frac{k}{(k_x - k_y)\,\frac{(k - k_y)}{(k_x - k_y)}}$$

Simplificando-se:

$$\varepsilon_{XK} = \frac{k}{k - k_y} > 1 \qquad (2.15.14)$$

Portanto um aumento na dotação de capital, mantendo-se o preço relativo constante, gera um aumento mais que proporcional na produção do bem intensivo em capital.

No setor Y, temos:

$$\varepsilon_{q_y k} = \varepsilon_{YK} = \frac{-f_y \quad K}{(k_x - k_y)\ L_y\ f_y} = \frac{-k}{(k_x - k_y)\ l_y}$$

$$\varepsilon_{YK} = - \frac{k}{k_x - k} = \frac{k}{k - k_x} < 0 \qquad (2.15.15)$$

Essa elasticidade é negativa, mas em termos absolutos ela poderá ser maior ou menor que a unidade. Isto é, um aumento na dotação do fator capital, mantendo-se o preço relativo constante, causa uma queda na produção do bem intensivo no uso do fator trabalho, porém a diminuição pode ser mais ou menos que proporcional, isto é:

$$\left| \varepsilon_{YK} \right| \lesseqgtr 1 \qquad (2.15.16)$$

Agora encontraremos a elasticidade do produto setorial com respeito ao trabalho substituindo a expressão dada em (2.15.11):

$$\varepsilon_{XL} = \frac{dX}{dL}\ \frac{L}{X} = \frac{-k_y\ f_x}{(k_x - k_y)}\ \frac{L}{X}$$

Substituindo X por $L_x\ f_x$ temos:

$$\varepsilon_{XL} = \frac{-k_y\ f_x\ \ L}{(k_x - k_y)\ L_x\ f_x} = \frac{-k_y}{(k_x - k_y)\ l_x}$$

Substituindo l_x pelo valor de (2.1.9), temos:

$$\varepsilon_{XL} = \frac{-k_y\ \ (k_x - k_y)}{(k_x - k_y)\ \ (k - k_y)}$$

Simplificando, temos:

$$\varepsilon_{XL} = - \frac{k_y}{(k.- k_y)} < 0 \qquad (2.15.17)$$

$$e \quad \left|\varepsilon_{XL}\right| \gtrless 1 \qquad (2.15.18)$$

Para o setor Y, temos:

$$\varepsilon_{YL} = \frac{dY}{dL} \cdot \frac{L}{Y}$$

Substituindo $\frac{dY}{dL}$ pelo valor dado em (2.15.11) e Y por $L_y \cdot f_y$ temos:

$$\varepsilon_{YL} = \frac{k_x \; f_y \; L}{(k_x - k_y) \; L_y \; f_y} = \frac{k_x}{(k_x - k_y) \; l_y}$$

Substituindo o valor de l_y pelo dado em (2.1.10)e simplificando, temos:

$$\varepsilon_{YL} = \frac{k_x}{(k_x - k)} > 1 \qquad (2.15.19)$$

Portanto, um aumento na dotação do trabalho, mantendo-se o preço relativo dos bens constantes, produzirá um aumento mais que proporcional na produção do bem que usa intensivamente o fator trabalho (no caso Y) e diminuirá a produção do outro bem (no caso X), mais ou menos que proporcionalmente.

Podemos concluir que um aumento na dotação de um fator, mantendo-se o preço relativo constante, implica em um aumento mais que proporcional na produção do bem em que esse fator é usado intensivamente (efeito magnificação). Ele diminuirá mais ou menos que proporcionalmente a produção do bem que utiliza esse fator menos intensivamente.

Mostraremos agora a representação gráfica do teorema de Samuelson-Rybczynski através do diagrama de Lerner-Pearce. Admitimos que o preço relativo dos fatores é constante, o que implica em que a relação capital-trabalho em ambos os setores não se altera quando varia a disponibilidade relativa global dos fatores na economia.

Inicialmente, temos a disponibilidade relativa dos fatores na economia dada pelo vetor k_o. O equilíbrio em produção é conseguido, dada a remuneração relativa dos fatores (θ) pela inclinação da reta I I, no ponto A para X e em B para Y. Um aumento na dotação do fator capital, que é indicado no gráfico (2.15.1) pela mudança de K_o para K_1, implicará em que o vetor k_o passe para k_1. Observa-se também aumento na produção do setor X, dado que A passa para A' e queda na produção do setor Y, pois B passa para B'.

No gráfico (2.15.2) representamos o caso em que temos um aumento na quantidade do fator trabalho na economia de L_o para L_1. A relação capital-trabalho na economia passa de k_o para k_1 quando ocorre o aumento na força de trabalho. Verifica-se também que ocorre um aumento de produção no setor Y, pois B' está a nordeste de B, e uma queda no nível de produção no setor X, pois A' está a sudoeste de A.

Utilizaremos agora a caixa de Edgeworth-Bowley, para mostrar o teorema de Samuelson-Rybczynski. Começaremos pelo caso em que aumenta a dotação de trabalho na economia. Inicialmente, as origens na produção setorial são O_x e O_y, determinadas pela disponibilidade dos fatores. Dada a remuneração relativa dos fatores, indicada pela inclinação da reta F F no gráfico (2.15.3), o equilíbrio na produção fica determinado em Q, estabelecendo-se as proporções k_x e k_y e também os correspondentes níveis de produção de X e Y.

Quando aumentamos a quantidade de trabalho, a base da caixa aumenta, mudando a origem de X de O_x para O'_x (como no gráfico (2.15.3)), ou, alternativamente, muda-se a origem de O_y para a direita. Mantendo-se constante a remuneração relativa, o novo equilíbrio é conseguido mediante o deslocamento paralelo do raio k_x para k'_x. Na nova posição Q' a produção de Y aumenta claramente de Q O_y para Q' O_y, porém a produção de X diminui de O_x Q para O'_x Q'. A produção de Y aumenta mais que proporcionalmente em relação ao aumento observado na dotação do fator trabalho.

O incremento relativo na produção de Y é dado por:

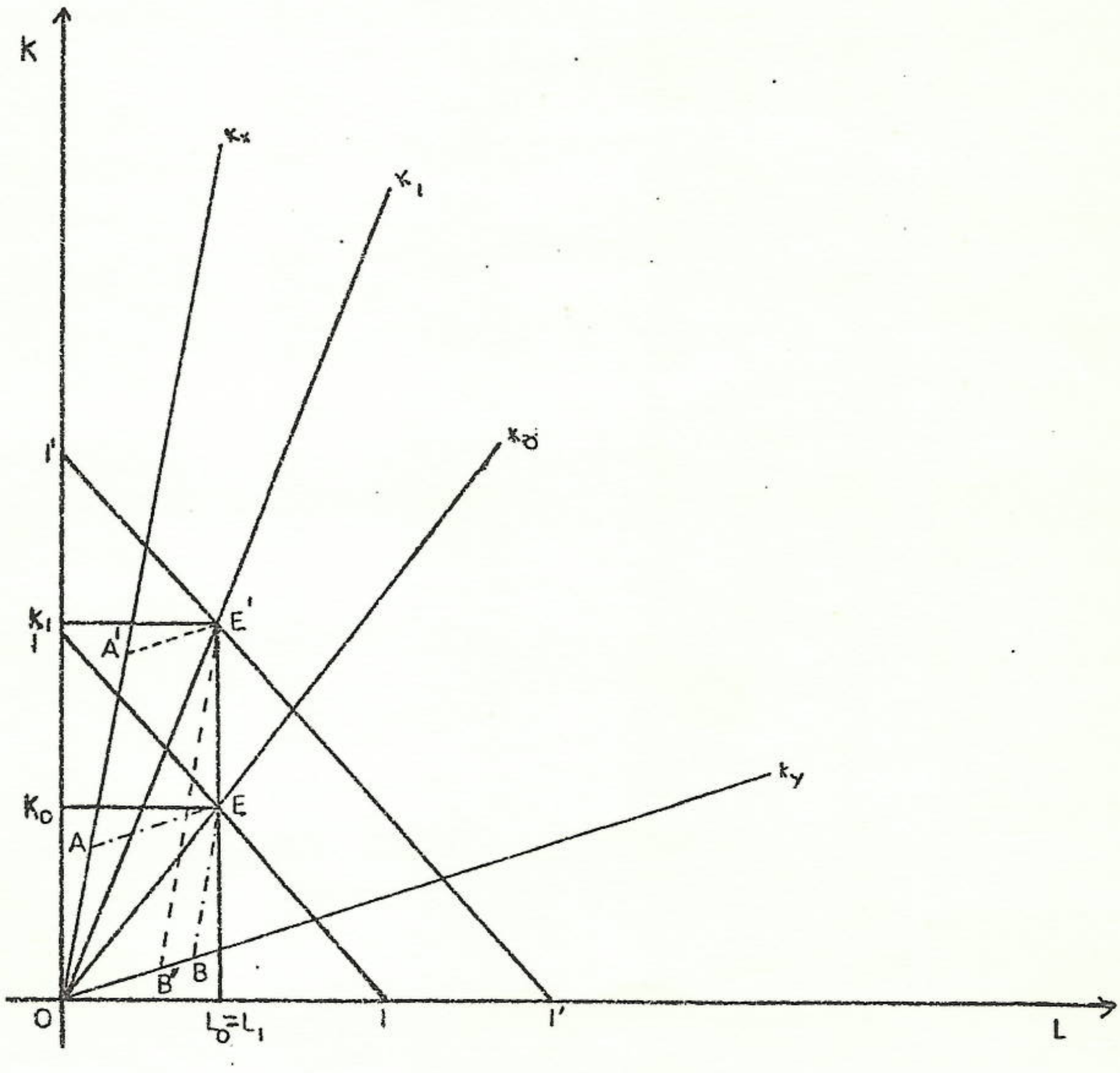


Gráfico (2.15.1)

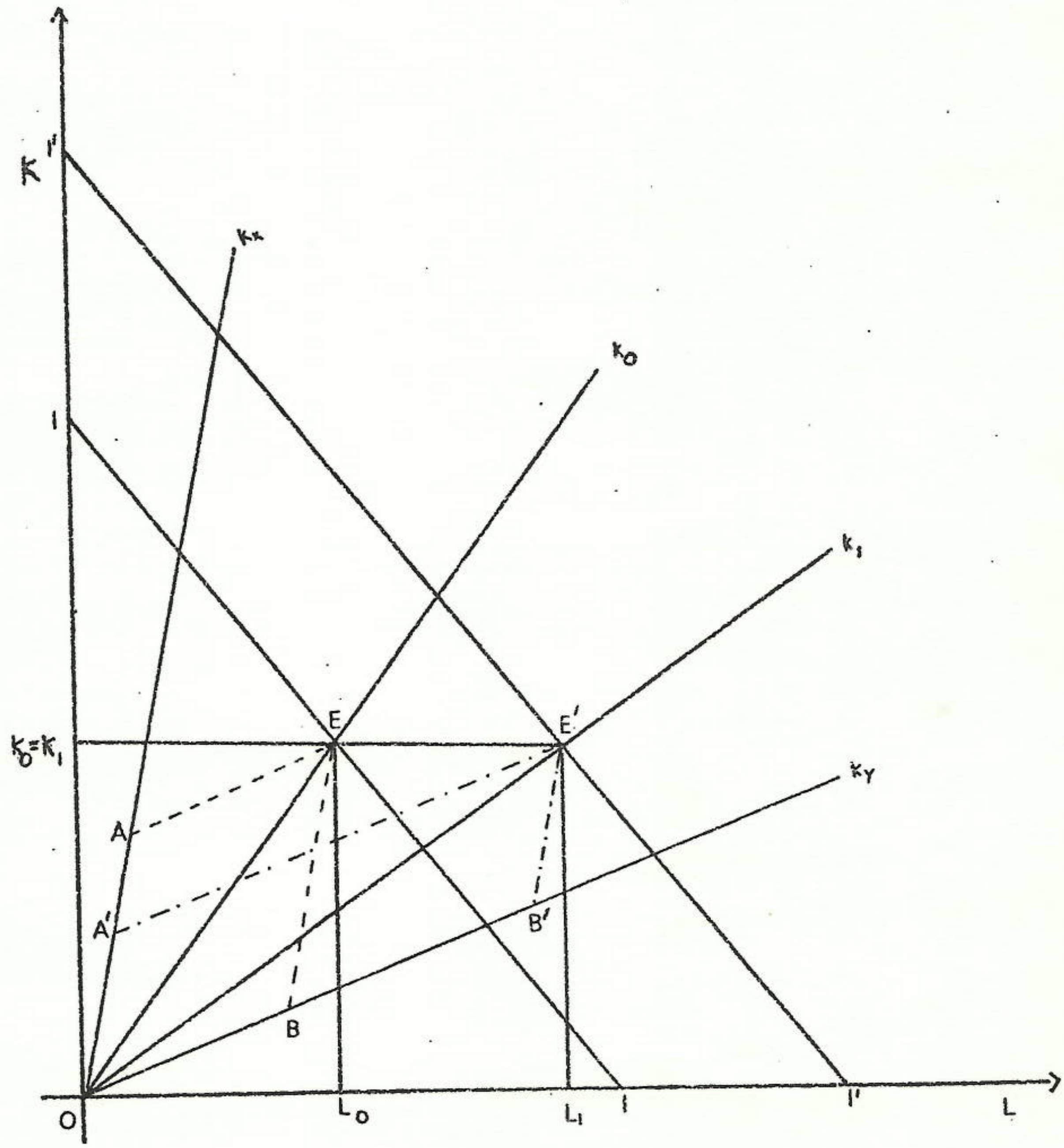


Gráfico (2.15.2)

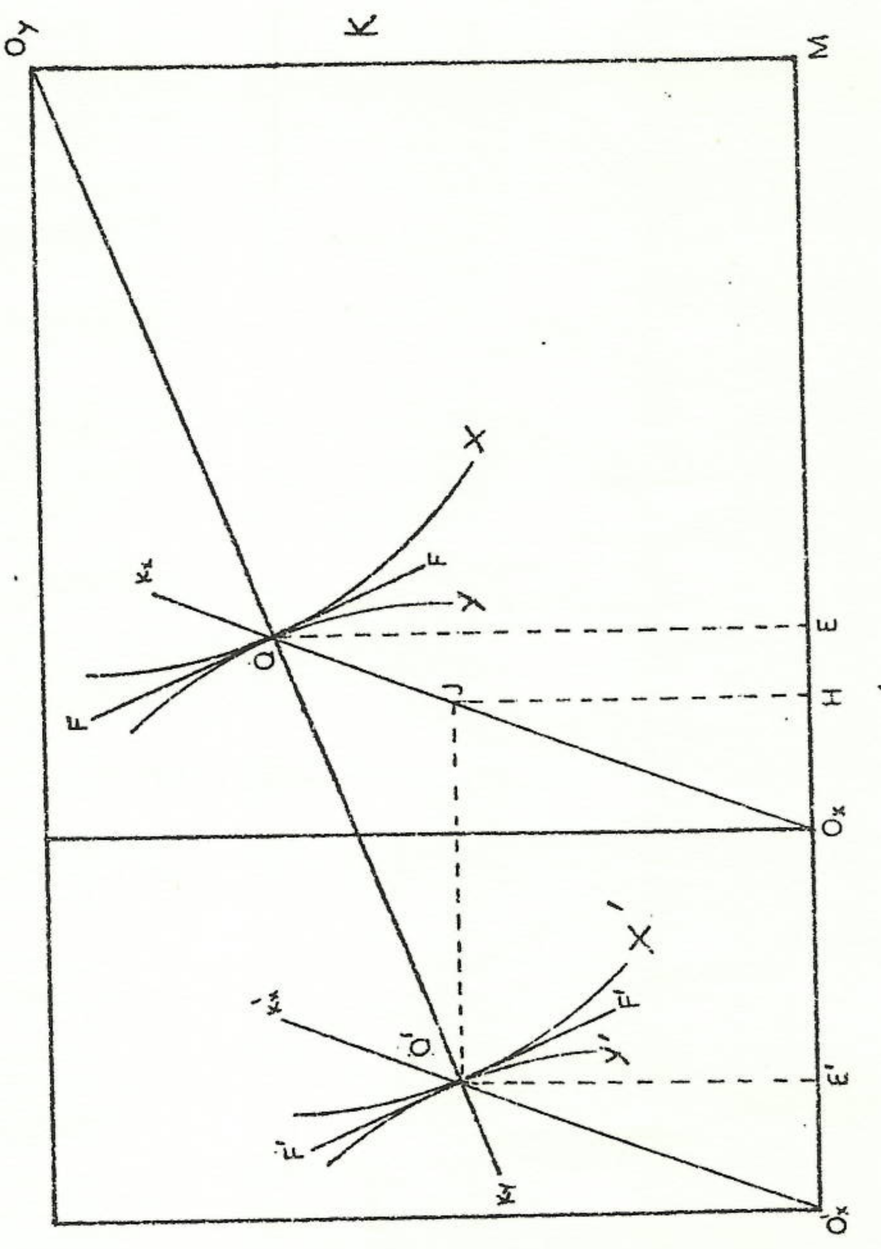


Gráfico (2.15.3)

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{Q'\,Q}{O_y\,Q} = \frac{E'\,E}{E\,M}$$

O incremento relativo na disponibilidade do fator trabalho é dado por:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{O_x\,O'_x}{O_x\,M}$$

O numerador da variação relativa de Y é maior que o numerador da variação relativa em trabalho, porém os denominadores tem relação inversa, assim:

$Q'\,J = O_x\,O'_x$, por construção

$Q'\,J = E'\,H$, por projeção; segue-se então

$E'\,E > E'\,H = O_x\,O'_x$

e graficamente temos:

$E\,M < O_x\,M$

Conclui-se então que:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{E'E}{EM} > \frac{E'H}{O_x M} = \frac{\Delta L}{L}$$

ou, ainda melhor,

$$\epsilon_{YK} = \frac{\frac{\Delta Y}{Y}}{\frac{\Delta L}{L}} > 1$$

Aumentos sucessivos na oferta de trabalho na economia leva à especialização na produção de Y. Aumentos posteriores na oferta de trabalho alterarão a relação capital-tabalho e, conseqüentemente, a remuneração relativa do fator trabalho diminuirá.

Como vemos no gráfico (2.15.4) no ponto O''_x obtemos a especialização em Y ; se continuarmos aumentando a disponibilidade de trabalho e mantendo o pleno emprego, teremos que intensificar mais ainda o uso de trabalho em Y, deteriorando a remuneração relativa do trabalho e modificando a razão capital-trabalho.

Passemos agora a estudar essas mudanças através da curva de transformação. No gráfico (2.15.5) encontramos a curva T T que representa a curva de transformação para uma dada disponibilidade de fatores. O preço relativo dos bens, dado pela inclinação da reta P_o P_o, determina em sua tangência com a curva de transformação o ponto A de produção. Se a dotação relativa do fator trabalho na economia aumenta, a curva de transformação desloca-se assimetricamente, transformando-se na curva T' T'. Mantendo constante o preço relativo dos bens, teremos um novo ponto A' que determina a produção. Neste ponto a produção de Y será maior e a de X menor. De A e A' podemos obter a reta R R que é chamada linha de expansão de Rybczynski.

Analisemos agora a variação relativa na composição relativa do produto setorial em relação à disponibilidade relativa dos fatores, ou seja:

$$\varepsilon_{(\frac{q_y}{q_x}, k)} = \frac{\dfrac{\Delta(\frac{q_x}{q_y})}{\frac{q_x}{q_y}}}{\dfrac{\Delta k}{k}} = \frac{d\ln \frac{q_y}{q_x}}{d\ln k} = \frac{d\ln q_y}{d\ln k} - \frac{d\ln q_x}{d\ln k} \quad (2.15.20)$$

Substituindo em (2.15.20) os valores de $\varepsilon_{q_y k}$ e $\varepsilon_{q_x k}$ encontrados em (2.15.15) e (2.15.14) temos:

$$\varepsilon_{(\frac{q_y}{q_x}, k)} = \frac{k}{k - k_x} - \frac{k}{k - k_y} = \frac{k^2 - k\,k_y - k^2 + k\,k_x}{(k - k_x)\ (k - k_y)}$$

Ordenando e substituindo [11] temos:

[11] A mudança da elasticidade em termos de proporções para par-

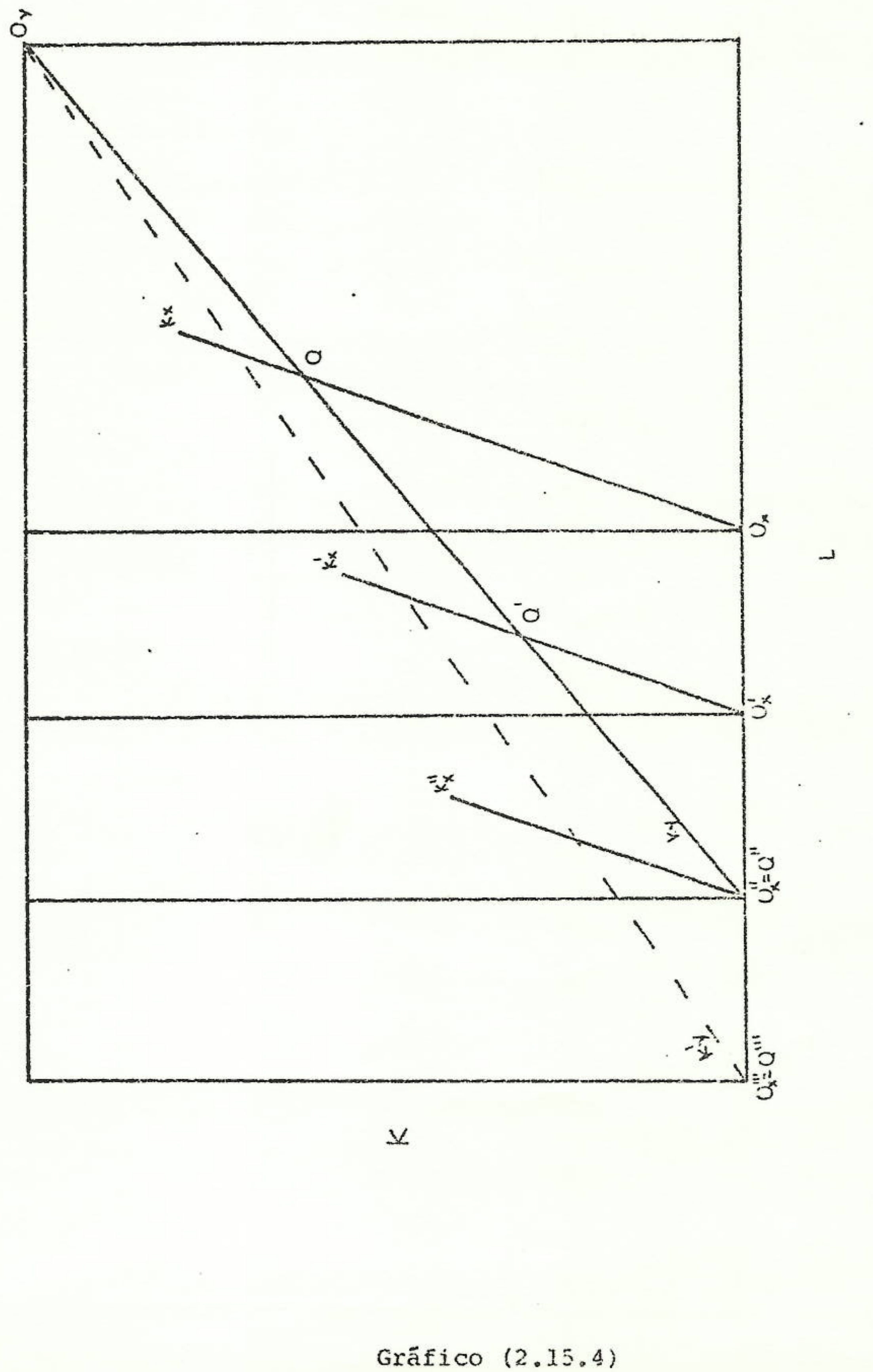


Gráfico (2.15.4)

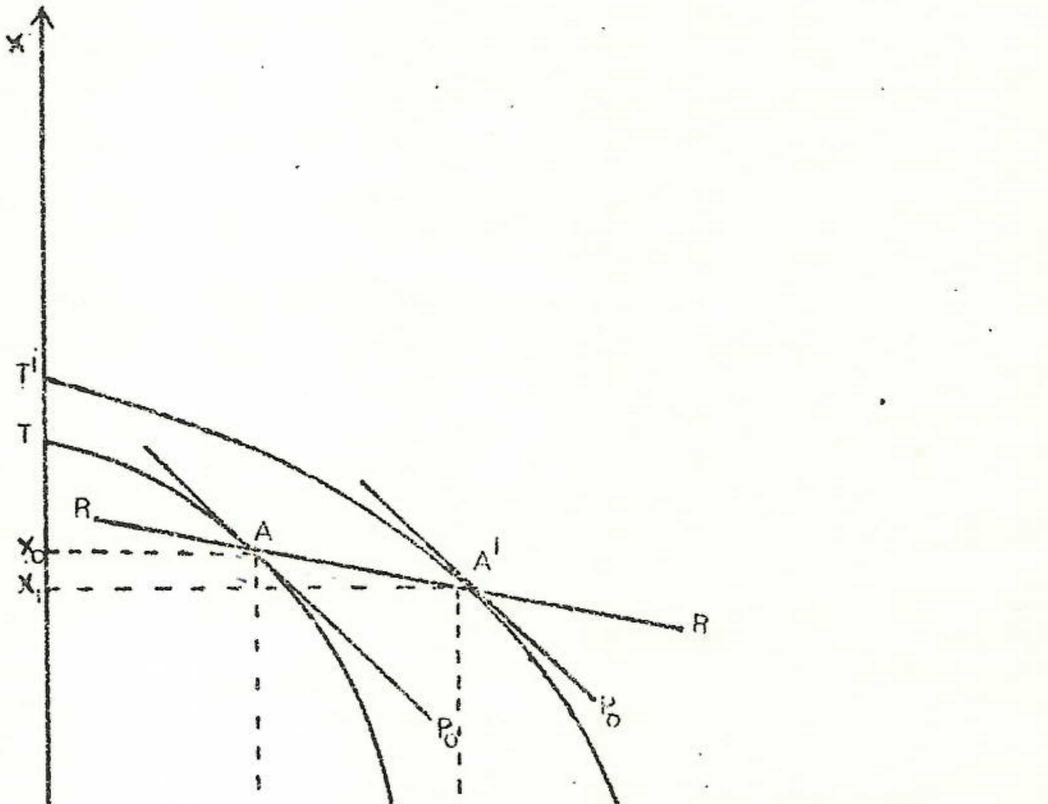


Gráfico (2.15.5)

$$\varepsilon\left(\frac{q_y}{q_x}, k\right) = \frac{k\,(k_x - k_y)}{(k-k_x)(k-k_y)} = -\frac{(1-a)\,a\,(a_y - a_x)}{(a_y - a)\,(a - a_x)} < 0 \qquad (2.15.21)$$

Podemos dizer alguma coisa a mais em relação à expressão (2.15.21): o valor absoluto desta elasticidade é maior do que um, pois:

$k > (k-k_x)$ e $(k_x - k_y) > (k - k_y)$, ficando portanto

$$\left|\varepsilon\left(\frac{q_y}{q_x}, k\right)\right| > 1 \qquad (2.15.22)$$

Da expressão (2.15.22) sabemos que, quando o setor X é intensivo em capital, um aumento na disponibilidade relativa do capital gera uma redução mais que proporcional na produção relativa de Y.

No gráfico (2.15.6) podemos ver que a um dado preço relativo, um aumento na disponibilidade relativa do capital implica em uma redução na proporção $(\frac{Y}{X})$. Isto é, quando a disponibilidade relativa do capital aumenta de k_o para k_1, a proporção da produção cai de $(\frac{Y}{X})_o$ para $(\frac{Y}{X})_{-1}$.

---

ticipações, pode ser conseguida dividindo ambos os membros por θ e somando e diminuindo θ em cada parênteses, assim:

$$\frac{\frac{k}{\theta}\left(\frac{k_x + \theta}{\theta} - \frac{k_y + \theta}{\theta}\right)}{\left(\frac{k + \theta}{\theta} - \frac{k_x + \theta}{\theta}\right)\left(\frac{k + \theta}{\theta} - \frac{k_y + \theta}{\theta}\right)}$$

como $\frac{1}{a_i} = \frac{\theta + k_i}{\theta}$ e $a = \frac{\theta}{k + \theta}$

Substituindo encontramos a expressão desejada.

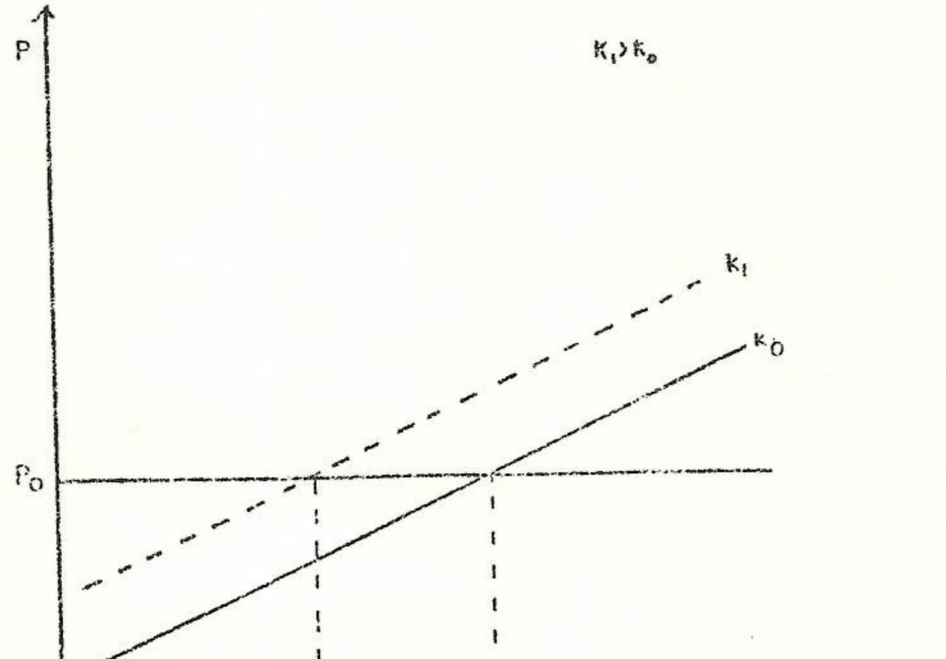


Gráfico (2.15.6)

Agora procuraremos a elasticidade da estrutura de produção ($\frac{Y}{X}$) com relação à proporção trabalho-capital,

$$\varepsilon\left(\frac{q_y}{q_x}, \frac{1}{k}\right) = \frac{d\ln\left(\frac{q_y}{q_x}\right)}{d\ln\left(\frac{1}{k}\right)} = \frac{d\ln q_y - d\ln q_x}{-\,d\ln k} = \frac{d\ln q_x}{d\ln k} - \frac{d\ln q_y}{d\ln k}$$

Ordenando e substituindo, temos:

$$\varepsilon\left(\frac{q_y}{q_x}, \frac{1}{k}\right) = \frac{k\ (k_x - k_y)}{(k_x - k_y)\,(k - k_y)} = \frac{(1-a)\ a\ (a_y - a_x)}{(a_y - a)\ (a - a_x)} > 1 \quad (2.15.23)$$

Isto é, um aumento na disponibilidade relativa de trabalho na economia, mantido constante o preço relativo dos bens, gerará um aumento mais que proporcional na produção do bem intensivo no uso do fator trabalho. No gráfico (2.15.6) podemos ver a representação do aumento da disponibilidade relativa de trabalho quando k diminui de k_1 para k_o e a respectiva mudança na produção relativa.

Se aumentarmos a dotação absoluta dos fatores, mantendo a mesma dotação relativa, isto é, ambos os fatores devem aumentar na mesma proporção, só ocorrerá um aumento na produção absoluta, pois a fronteira de possibilidades de produção se desloca paralelamente, como podemos ver no gráfico (2.15.7). Ao mesmo preço relativo de bens, mudamos a produção, do ponto A para A'. A produção absoluta de cada um aumentou na mesma proporção, isto é, a composição relativa da produção não mudou.

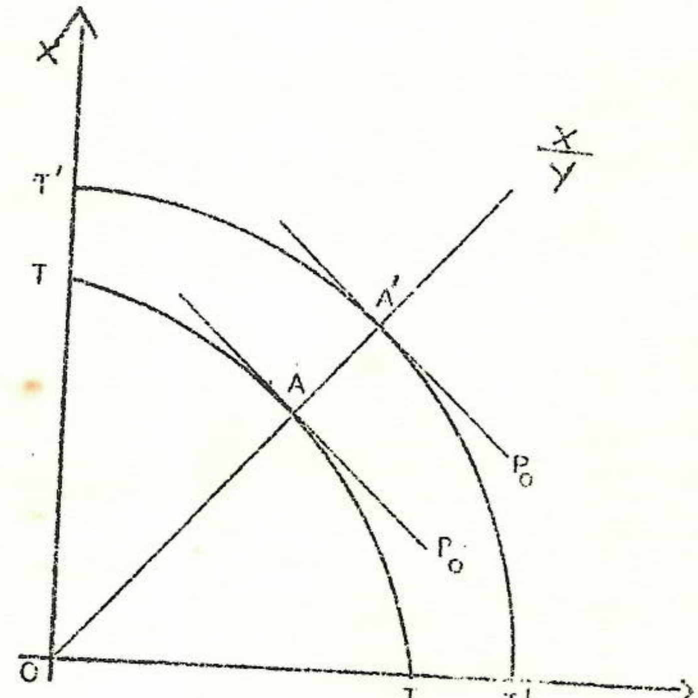


Gráfico (2.15.7)

BIBLIOGRAFIA

1. FERGUSON, C. E. e J. P. GOULD. Microeconomic Theory. 4a edição. Homewood, Ill.: Irwin, 1975. Capítulo 15.

2. JOHSON, H. G. The Two-Sector Model of General Equilibrium. Chicago: Aldine-Atherton, 1971.

3. JONES, R. W. "The Structure of Simple General Equilibrium Models". Journal of Political Economy LXXIII (6): 557-572. Dezembro 1965.

4. KEMP, M. C. The Pure Theory of International Trade and Investment. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1969. Capítulo 1.

5. RYBCZYNSKI, T. N. "Factor Endowments and Relative Commodity Prices" Economica, nova série, XXII (4): 336-341. Novembro 1955. Reimpresso em R. E. CAVES e H. G. JOHNSON (orgs. para A.E.A.) Readings in International Economics. Homewood, Ill.: Irwin, 1968. Pp. 72-77.

6. SAVOSNICK, K. M. "The Box Diagram and the Production Possibility Curve". Ekonomisk Tidskrift 60 (3): 183-197. Setembro 1958.

7. STOLPER, W. F. e P. A. SAMUELSON. "Protection and Real Wages". Review of Economic Studies IX (1): 58-73. Novembro 1941. Reimpresso em H. S. ELLIS e L. A. METZLER (orgs. para A.E.A.) Readings in the Theory of International Trade. Philadelphia: Blakiston, 1949.