UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
CURSO DE MESTRADO EM ECONOMIA

O MODELO DE SRAFFA

JOSE CARRERA FERNANDEZ

O MODELO DE SRAFFA

José Carrera Fernandez

JOSÉ CARRERA FERNANDEZ

O MODELO DE SRAFFA

Tese de Mestrado encaminhada à Comissão Examinadora do Mestrado em Economia da UFBA.

Salvador, Bahia, Brasil, Janeiro, 1981

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

AGRADECIMENTOS

O tema deste trabalho que ora se apresenta, foi honrosamente sugerido pelo Prof. Alberto R. Musalem, quando da apresentação de um seminário sobre o tema, na cadeira de Teoria Econômica Pura II do curso de Mestrado em Economia. A ele portanto deve-se todo o apoio e orientação dedicada ao desenvolvimento deste trabalho, como também pela liberação de outros afazeres acadêmicos neste mesmo período. Fica também um agradecimento todo especial pelos conhecimentos adquiridos durante todo o curso de Mestrado. Portanto, sem sua generosa ajuda e seu estímulo constante, este trabalho não teria sido possível.

Manifesto ainda agradecimentos especiais ao colega e amigo Dionisio Gomes do Carmo Neto, por algumas críticas e observações, e principalmente pela sua presteza em por a meu alcance obras importantíssimas da literatura econômica, indispensáveis à elaboracão deste trabalho. Sou também grato à meu irmão, Agostinho Carrera Fernandez, que pacientemente leu todos os rascunhos, corrigiu erros e deu requinte à redação. Agradeço carinhosamente a Rita Cássia, que leu o original e fez valiosas sugestões.

A meus pais, Agustín Carrera e Maria del Carmen Fernandez, por toda a educação, compreensão e incentivo dados ao longo da minha vida, fica um eterno agradecimento.

José Carrera Fernandez

Fevereiro, 1981

APRESENTAÇÃO

A não disponibilidade de trabalhos na língua portuguesa, que abordem o modelo sraffiano de producão de mercadorias por meio de mercadorias, de uma forma sistemática e rigorosa, aliado à importância que esse modelo representa na Teoria Econômica; fizeram com que um dos objetivos primordiais deste trabalho fosse a formação de um texto a nível de pós-graduação.

Este trabalho aborda o modelo proposto por Piero Sraffa, publicado em 1960 cuja obra intitula-se Producão de Mercadorias por meio de Mercadorias - Prelúdio a uma Crítica da Teoria Econômica, fruto de 4º longos anos de pesquisas. E está exclusivamente voltado para a primeira parte do seu livro, por ser a menos complexa, concernente a indústrias que produzem uma só mercadoria e fazem uso apenas de capital circulante.

Embora seja objetivo deste trabalho não disvirtuar o propósito de Sraffa, no que se refere ao instrumental matemático utilizado, (ou seja a Algebra Elementar), que tanto ele insistiu em manter, embora admitisse que em alguns aspectos estivesse aberta a críticas; o instrumental matemático aqui utilizado está baseado principalmente na Algebra Matricial. A razão básica para adocão do mesmo deve-se à facilidade e eficiência que a notação matricial compacta proporciona na manipulação de um grande número de equações lineares e não-lineares. Portanto, se requer, para acompanhamento deste trabalho, noções de Algebra Matricial Elementar. Entretanto, quando for requerido conhecimento mais aprofundado, é feita uma revisão prévia no próprio texto, facilitando assim o acompanhamento do leitor.

A experiência tem mostrado que o uso da notação matricial compacta, em trabalhos de cunho teórico, é motivo de grande confusão, tornando-se uma "barreira" à compreensão do texto e fazendo com que o leitor o abandone posteriormente. É visando suprir essas dificuldades, que se adotará paralelamente desenhos esquemáticos explicativos das dimensões resultantes das operações com matrizes nas várias equações que aparecem no desenvolvimento do texto.

Após o aparecimento de Piero Sraffa (1960), alguns trabalhos foram feitos tentando-se explicar a natureza da produção do sistema proposto por Sraffa, utilizando-se principalmente a Algebra Matricial como instrumental matemático, com destaque especial para Lectures on the Theory of Production de L. Pasinetti. Tanto este quanto os outros autores, abordam apenas a primeira parte de seu livro. A diferença fundamental que existe entre este trabalho e o apresentado por Luigi L. Pasinetti (1977), no que se refere à abordagem matemática, está no uso da matriz de quantidades físicas $\underline{Q}$ e da matriz de coeficientes técnicos de produção $\underline{A}$, respectivamente. Consequentemente, ao se trabalhar com a matriz $\underline{A}$, como fez L. Pasinetti, resultante de uma transformação algébrica (mostrado no desenvolvimento deste trabalho); o sistema de produção sraffiano é abordado sob dois prismas independentes: ou através do sistema de quantidades físicas, ou através do sistema de preços. Entretanto, ao se utilizar neste trabalho a matriz $\underline{Q}$, o sistema de produção proposto por Sraffa, é analisado simultaneamente sob o aspecto de quantidades físicas e de preços.

O uso da matriz de quantidades físicas $\underline{Q}$, neste trabalho, além de propiciar ao leitor facilidade no acompanhamento paralelo do livro de Sraffa; proporciona a possibilidade de uma análise do seu modelo, do modo pelo qual foi concebido por seu autor.

Este trabalho destina-se essencialmente ao Economista. Em primeiro lugar, ao estudante de Pós-Graduação, como material didático ou mesmo como uma leitura complementar. Já para o estudante de Graduação acredita-se que deva ser útil no sentido de tomar conhecimento das críticas que se fazem à Teoria Econômica com base no modelo desenvolvido por Sraffa.

O trabalho ora apresentado é composto de quatro capítulos. O Capítulo I tem por objetivo primordial apresentar formalmente e descrever o sistema geral de produção, imaginado por Sraffa. No capítulo seguinte, faz-se um ensaio da causa dos movimentos de preços relativos quando muda a distribuição da renda entre lucros e salários, ao tempo em que mostra-se para os diversos níveis de renda a formação dos preços relativos. O Capítulo III é destinado inteiramente ao estudo da "mercadoria composta padrão" proposta por Sraffa, para servir de "padrão" invariável de valor, capaz de isolar as variações de preços relativos que se seguem após uma mudança na distribuição da renda entre lucros e salários. Finalmente, o quarto e último Capítulo tem por objetivo mostrar de forma mais ampla a possibilidade apresentada por Sraffa de se reduzir preços em termos de quantidades datadas de trabalho.

Este trabalho compõe-se ainda de uma parte complementar onde são apresentadas nossas conclusões que não poderiam passar omissas. E para finalizar consta de um breve apêndice, com a finalidade precípua de dirimir dúvidas, caso existam: O Apêndice A redefine as várias matrizes utilizadas na forma literal; e o Apêndice B apresenta as principais operações e resultados obtidos com matrizes na forma literal, utilizadas no decorrer de todo este trabalho.

INTRODUÇÃO

Com o surgimento do denominado "método marginal" na Teoria Econômica, alguns conceitos elaborados no período do "pensamento clássico", ficaram postergados. Críticas e debates se desenvolveram: de um lado; os defensores de certos pontos de vista, sugeridos por economistas clássicos, como por exemplo a produção numa dada situação e o processo produtivo circular (em que a mesma espécie de mercadoria figura entre os "meios de produção" e entre os produtos); do outro lado, os defensores ferrenhos da abordagem "marginal", que contrariamente aos primeiros, consideravam variações no produto e nas proporções dos "fatores" e tratavam a produção como um processo "linear", começando com "fatores de produção" e terminando com os produtos.

A publicação em 1960 da obra <u>Produção de Mercadorias por meio de Mercadorias: Prelúdio a uma Crítica da Teoria Econômica</u> de Piero Sraffa fornece subsídios para o término definitivo dessa polêmica, à medida em que, recorrendo a certos conceitos "clássicos", mostra de maneira inteligente e com um fabuloso lastro teórico a possibilidade de se considerar a produção como um processo circular numa dada situação.

Piero Sraffa (1960), solve ainda um grande problema levantado por Adam Smith: "A Teoria do Valor". Este problema, na verdade, foi também objeto de estudo de muitos, tais como: David Ricardo, Karl Marx, e tantos outros.

De modo geral, Piero Sraffa (1960), é uma contribuição importante para o fortalecimento de todo o pensamento econômico "clássico" , pois, à medida em que, fazendo resurgir conceitos "clássicos" desde Adam Smith até Marx, tais como: "Mercadorias Básicas", "Medida Padrão de Valor", "Taxa Máxima de Lucro" e tantos outros; conecta-se fortemente com as teorias dos antigos economistas "clássicos". E dá lugar a formação da escola de pensamento econômico denominada de "Neoricardiana".

Capítulo I

O SISTEMA DE PRODUÇÃO

1. Introdução

Este capítulo tem o principal objetivo de apresentar o sistema de produção de Piero Sraffa, desenvolvido em seu trabalho clássico de 1960; *Produção de Mercadorias por meio de Mercadorias: Prelúdio a uma Crítica da Teoria Econômica*. A Seção 2 apresenta-o formalmente e descreve alguns dos pressupostos do seu modelo. Na seção seguinte, será mostrado o sistema de produção para subsistência e o sistema com um excedente. A Seção 4 consta de um breve exemplo númerico dos sistemas apresentados na seção anterior. Na Seção 5 reformula-se o sistema de produção geral com a separação explícita das partes componentes do salário. Finalmente a última seção procura introduzir dois conceitos usados por Sraffa: "Mercadorias Básicas" e "Não-Básicas", que são de fundamental importância na compreensão do seu modelo.

2. Pressupostos iniciais

É conveniente que se explicite os pressupostos iniciais do modelo de Sraffa, para que se possa compreender os limites teóricos do seu sistema de produção. As suas pressuposições podem ser sumarizadas como segue:

(i) Cada indústria produz apenas uma mercadoria ou equivalentemente, as mercadorias são produzidas por indústrias separadas e independentes;

(ii) Qualquer das indústrias faz uso apenas de capital circulante 1/ para a sua produção, que é totalmente consumido durante o processo produtivo;

(iii) O ciclo de produção é anual, e as transações são feitas no final de cada período;

1/ Entende-se por "capital circulante" o conjunto de mercadorias utilizadas, parte para manter os trabalhadores e o restante como implementos de produção.

(iv) As indústrias que compõem o sistema econômico se encontram em estado auto-reprodutivo, isto é, a quantidade física produzida de cada mercadoria é pelo menos igual à quantidade física dessa mesma mercadoria, utilizada como meios de produção[2] por todas as indústrias; e

(v) Cada indústria utiliza apenas um método de produção que é imutavél durante o período de produção.

3. Caracterização do sistema de produção

No início do processo produtivo, as mercadorias se encontram distribuídas nas várias indústrias, algumas usadas para manter os trabalhadores e as outras como instrumentos de produção. E, no final do ciclo produtivo cada mercadoria encontrar-se-á inteiramente concentrada em cada indústria. Para que o ciclo produtivo tenha continuidade, é necessário que ao final do ano o mercado adote um certo conjunto de valores de troca, para restabelecer a distribuição original das mercadorias.

Sejam as indústrias $1,2,\ldots,n-1$ produzindo anualmente as quantidades físicas $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ das respectivas mercadorias. Sejam: $q_{11}, q_{21}, \ldots, q_{n-1,1}; q_{12}, q_{22}, \ldots, q_{n-1,2}; \ldots; q_{1,n-1}, q_{2,n-1}, \ldots, q_{n-1,n-1}$ as quantidades físicas anuais de cada indústria utilizadas como meios de produção. Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ os preços das várias mercadorias.

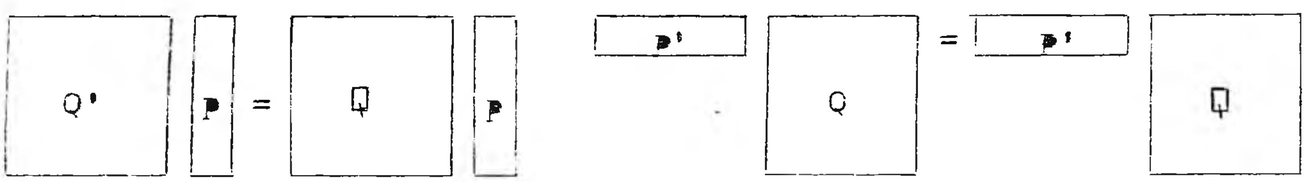
O sistema de produção pode ser agora representado pelo seguinte sistema de equações:

2/ "Meios de produção" é todo o conjunto de mercadorias que são utilizadas para produzir uma nova mercadoria.

$$\begin{cases} q_{11}p_1 + q_{21}p_2 + \cdots + q_{n-1,1}p_{n-1} = q_1p_1 \\ q_{12}p_1 + q_{22}p_2 + \cdots + q_{n-1,2}p_{n-1} = q_2p_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_{1,n-1}p_1 + q_{2,n-1}p_2 + \cdots + q_{n-1,n-1}p_{n-1} = q_{n-1}p_{n-1} \end{cases} \qquad (1.3.1)$$

O sistema (1.3.1), pode ser reescrito na forma matricial compacta da seguinte maneira:

$$Q'p = \mathbb{Q}p \qquad \text{ou} \qquad p'Q = p'\mathbb{Q} \qquad (1.3.2)$$



Onde: Q', é a matriz transposta da matriz $Q = (q_{ij})$ de dimensão $(n-1) X (n-1)$, de quantidades físicas de meios de produção da mercadoria $\underline{i}$ utilizada como meio de produção pela indústria $\underline{j}$ $(\forall i, j = 1,2,\ldots,n-1)$; $\mathbb{Q}$, a matriz de quantidades físicas de produção da mercadoria $\underline{i}$ ou indústria $\underline{j}$, definida pela matriz diagonal $\mathbb{Q} = (q_{i=j}\delta_{ij})$; onde δ_{ij} é o "Delta de Kronecker" 3/; e $\underline{p}$, o vetor coluna de preços da mercadoria $\underline{i}$, de dimensão $(n-1) X 1$, definido por $p = (p_1, p_2, \ldots, p_{n-1})'$ 4/

Deve-se observar que não foi necessário se supor que cada mercadoria entrava diretamente na produção de cada indústria. Isso equivale dizer que, algumas quantidades físicas de meios de produção podem ser zero, isto é, $q_{ij} \geq 0$ $(\forall i,j=1,2,\ldots,n-1)$. Portanto, a matriz Q' é não-negativa, isto é: $Q' \geqq 0$. Desde que a matriz Q' é não-negativa e pelo suposto de sistema auto-reprodutivo, a matriz $\mathbb{Q}$ é também não-negativa, isto é, $\mathbb{Q} \geqq 0$.

3/ O "Delta de Kronecker" é uma variavel que assume dois valores, ou seja:

$$\delta_{ij} = 1, \quad \text{se} \quad i=j$$

e

$$\delta_{ij} = 0, \quad \text{se} \quad i \neq j$$

4/ Maiores detalhes a respeito dessas matrizes, veja-se o Apêndice A.

Supondo-se que não há excedente econômico no final de cada ciclo, ou seja, que se trata de uma economia extremamente simples, que produz apenas o suficiente para se manter; as quantidades físicas encontradas como produto são as mesmas que as quantidades físicas dos meios de produção, isto é:

$$\sum_{j=1}^{n-1} q_{ij} = q_i \qquad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

Porém, se se admite que a economia produz mais que o mínimo necessário para sua reposição gerando consequentemente um excedente econômico, o sistema (1.3.1) teria que sofrer uma modificação, pois as quantidades físicas encontradas como produto seriam pelo menos iguais às quantidades físicas utilizadas como meios de produção, isto é:

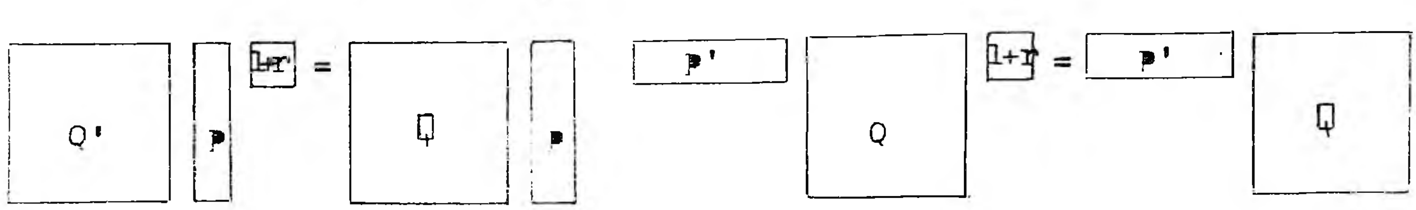
$$\sum_{j=1}^{n-1} q_{ij} \leqslant q_i \qquad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

portanto, dever-se-ia acrescentar a taxa de lucros r, que se supõe idêntica para todas as indústrias, a qual se encarregaria de distribuir o excedente econômico proporcionalmente aos meios de produção utilizados. O sistema de produção com excedente econômico, fica assim definido:

$$\begin{cases} (q_{11}p_1 + q_{21}p_2 + \ldots + q_{n-1,1}p_{n-1})(1+r) = q_1 p_1 \\ (q_{12}p_1 + q_{22}p_2 + \ldots + q_{n-1,2}p_{n-1})(1+r) = q_2 p_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (q_{1,n-1}p_1 + q_{2,n-1}p_2 + \ldots + q_{n-1,n-1}p_{n-1})(1+r) = q_{n-1}p_{n-1} \end{cases} \qquad (1.3.3)$$

ou na forma matricial compacta:

$$Q'p(1+r) = \hat{Q}p \quad \text{ou} \quad p'Q(1+r) = p'\hat{Q} \qquad (1.3.4)$$



O sistema (1.3.4) contém (n-1) equações e n incógnitas ((n-1) preços e a taxa de lucros, r). Porém, se uma das mercadorias é tomada como padrão de valor, e seu preço é igualado à unidade, os preços das outras mercadorias tornariam-se relativos ao preço da mercado - ria escolhida como numerário; e o sistema ficaria com (n-1) incógnitas ((n-2) preços e r). Portanto fica determinado, necessitando apenas de algumas transformações algébricas. Transpondo-se o primeiro membro, obtem-se:

$$Qp - Q'p(1+r) = 0$$

colocando p em evidência tem-se:

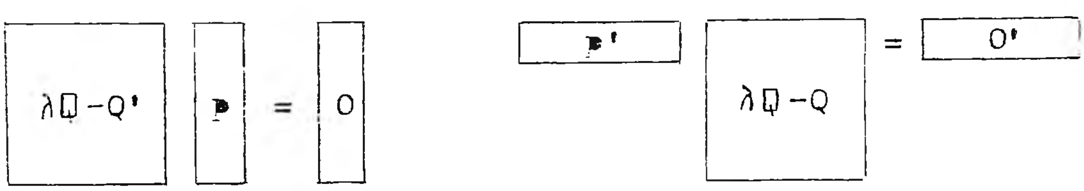
$$\left(Q - Q'(1+r)\right) p = 0$$

dividindo ambos os membros por (1+r), resulta:

$$\left(\frac{1}{1+r} Q - Q'\right) p = 0$$

fazendo $\lambda = 1/(1+r)$, obtem-se finalmente:

$$\left(\lambda Q - Q'\right) p = 0 \qquad \text{ou} \qquad p'\left(\lambda Q - Q\right) = 0' \qquad (1.3.5)$$



O sistema (1.3.5) é homogêneo linear e determina os (n-1) valores de λ. Cada valor de λ é um <u>auto-valor</u>, que corresponde a um <u>auto-vetor</u>, que é a solução desse sistema. A solução trivial, p=0, sempre existe. Mas para que existam soluções não-triviais, pois é o que se tenta buscar, é necessário e suficiente que o determinante da matriz $(\lambda Q - Q')$ seja zero, isto é:

$$|\lambda \mathbb{Q} - Q'| = 0 \qquad (1.3.6)$$

A equação (1.3.6), é a <u>equação característica</u> da matriz $(\mathbb{Q}^{-1}Q')$, [5/] e resulta em um polinômio de grau (n-1) em λ (<u>polinômio característico</u>). As raízes desse polinômio são os <u>auto-valores</u> da matriz $(\mathbb{Q}^{-1}Q')$. Pelo primeiro "Teorema de Perron-Frobenius" [6/], desde que as matrizes Q' e $\mathbb{Q}^{-1}$ são não-negativas, apenas um dos (n-1) <u>auto-valores</u>, que corresponde ao máximo <u>auto-valor</u>, representado por λ_m, gera uma solução para o vetor de preços $\underline{p}$ positivo, pois é o único que tem significação econômica.

Substituindo λ_m em (1.3.5), e tomando arbitráriamente uma das mercadorias como padrão (e igualando seu preço à unidade), obtem-se o vetor solução de preços relativos, representados por $\hat{p}$, com a característica de ser positivo. E finalmente, a última incógnita (a taxa de lucros, r), determinar-se-ia pela relação:

$$\lambda_m = \frac{1}{1+r} \qquad (\lambda_m \leq 1) \qquad (1.3.7)$$

isto é:

$$r = \frac{1}{\lambda_m} - 1 \qquad (r \geq 0) \qquad (1.3.8)$$

5/ Deve-se observar que a matriz $\mathbb{Q}^{-1}Q'$ é a matriz de coeficientes técnicos de produção $\underline{A}'$, definida no Apêndice A.

6/ Em verdade, o primeiro "Teorema de Perron-Frobenius" adaptado para o caso dessas matrizes, deveria ser enunciado da seguinte forma: se λ_m é o máximo <u>auto-valor</u> de $\mathbb{Q}^{-1}Q'$, ele está associado a um <u>auto-vetor</u> $\underline{p}$ positivo, isto é:

$$\mathbb{Q}^{-1}Q'p = \lambda_m p$$

ou, pré-multiplicando-se ambos os membros por $\mathbb{Q}$:

$$Q'p = \lambda_m \mathbb{Q} p$$

Portanto:

$$(\lambda_m \mathbb{Q} - Q')\, p = 0$$

é o sistema homogêneo linear que garante solução positiva para o vetor de preços $\underline{p}$.

Como não poderia deixar de ser, a solução do sistema (1.3.2) é uma solução particular do sistema (1.3.5), correspondente a uma taxa de lucros r=0, equivalente ao máximo <u>auto-valor</u> $\lambda_m=1$. Portanto, a matriz daquele sistema $(Q - Q')$ possui determinante zero, assegurando de imediato a única solução com significação econômica.

4. <u>Exemplos numéricos</u>

Admitindo-se inicialmente uma economia extremamente simples que produz apenas o suficiente para se manter, e que apenas três mercadorias são produzidas: trigo, ferro e porcos. Supondo-se que a indústria do trigo produz anualmente 450 arrobas e necessita nesse mesmo período 240 arrobas de trigo, 12 toneladas de ferro e 18 porcos; como meios de produção. A indústria do ferro, para produzir 21 toneladas de ferro anuais, requer 90 arrobas de trigo, 6 toneladas de ferro e 12 porcos. Já a indústria de porcos; 120 arrobas de trigo, 3 toneladas de ferro e 30 porcos, são requeridos para produzir anualmente 60 porcos, isto é:

$$\begin{array}{rlrlrll}
240 & \text{arr. trigo} + & 12 & \text{tn. ferro} + & 18 & \text{porcos} & \rightarrow 450 \text{ arr. trigo} \\
90 & \text{arr. trigo} + & 6 & \text{tn. ferro} + & 12 & \text{porcos} & \rightarrow 21 \text{ tn. ferro} \\
\underline{120} & \text{arr. trigo} + & \underline{3} & \text{tn. ferro} + & \underline{30} & \text{porcos} & \rightarrow 60 \text{ porcos} \\
450 & & 21 & & 60 & &
\end{array}$$

As matrizes de quantidades físicas de meios de produção Q', e produção Q, para o sistema descrito acima, seria :

$$Q' = \begin{pmatrix} 240 & 12 & 18 \\ 90 & 6 & 12 \\ 120 & 3 & 30 \end{pmatrix} \quad e \quad Q = \begin{pmatrix} 450 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{pmatrix}$$

o sistema (1.3.2), fica :

$$\begin{pmatrix} 210 & -12 & -18 \\ -90 & 15 & -12 \\ -120 & -3 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvendo-se o produto matricial de (1.3.2), obtem-se um sistema de três equações homogeneas lineares e três incógnitas, isto é:

$$\begin{cases} 210p_1 - 12p_2 - 18p_3 = 0 & \text{(i)} \\ -90p_1 + 15p_2 - 12p_3 = 0 & \text{(ii)} \\ -120p_1 - 3p_2 + 30p_3 = 0 & \text{(iii)} \end{cases}$$

Isolando-se o valor de p_2 na equação (i), obtém-se:

$$p_2 = (35/2)p_1 - (3/2)p_3 \qquad \text{(iv)}$$

substituindo-se (iv) na (ii), obtém-se p_3 em função de p_1, ou seja:

$$p_3 = 5p_1 \qquad \text{(v)}$$

Finalmente, substituindo-se (v) na (iv), obtém-se p_2 em função de p_1, isto é:

$$p_2 = 10p_1 \qquad \text{(vi)}$$

Portanto, a solução para o vetor de precos $\underline{p}$ é:

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ 10p_1 \\ 5p_1 \end{pmatrix}$$

Se o preço da mercadoria 1 é escolhida como numerário, e o seu preço é igualado à unidade, os preços em relação à mercadoria 1, são: $\hat{p}_1=1$, $\hat{p}_2=10$ e $\hat{p}_3=5$. Portanto, 10 arrobas de trigo são trocadas por 1 tonelada de ferro ou por 2 porcos.

Imaginando-se agora que esta economia produz mais que o mínimo necessário para reposição, gerando conseqüentemente um excedente econômico. Admitindo-se por simplicidade que apenas duas mercadorias são produzidas, trigo e ferro; e que apenas a indústria do trigo gera excedente, conforme o esquema de produção anual a seguir:

$$280 \text{ arr. trigo} + 12 \text{ tn. ferro} \longrightarrow 575 \text{ arr. trigo}$$
$$120 \text{ arr. trigo} + 8 \text{ tn. ferro} \longrightarrow 20 \text{ tn. ferro}$$

As matrizes Q' e Q agora, são:

$$Q' = \begin{bmatrix} 280 & 12 \\ 120 & 8 \end{bmatrix} \quad e \quad Q = \begin{bmatrix} 575 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$

A equação característica desse sistema (1.3.6), fica assim definida:

$$\begin{vmatrix} 575\lambda-280 & -12 \\ -120 & 20\lambda-8 \end{vmatrix} = 0$$

ou:

$$115\,\lambda^2 - 102\lambda - 8 = 0$$

cujas raízes são: $\lambda_1=0,8$ e $\lambda_2=0,08696$. Portanto o maior auto-valor corresponde a $\lambda_m=0,8$. Substituindo-se este valor em (1.3.5), obtem-se:

$$\begin{bmatrix} 180 & -12 \\ -120 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução $\hat{p}$ é:

$$\hat{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ 15p_1 \end{bmatrix}$$

Do mesmo modo, adotando-se como numerário a mercadoria 1, isto é, fazendo-se $p_1=1$, obtem-se: $\hat{p}_1=1$ e $\hat{p}_2=15$. O que significa que 15 arrobas de trigo poderiam ser trocadas por 1 tonelada de ferro. A taxa de lucros r, conforme a relação (1.3.8), seria então igual a 25%.

5. Uma reformulação convencional

Devido ao duplo caráter do salário (pois, além de incluir uma parcela correspondente ao elemento de subsistência, inclui também uma parte do excedente econômico), seria conveniente representar explicitamente a quantidade física empregada em cada indústria, isto é, não mais sendo representada exclusivamente como quantidades físicas de meios de subsistência, como até agora vinha sendo considerada; mas também considerando a parcela que apropria o excedente econômico.

Sejam: $q_{n1}, q_{n2}, \ldots, q_{n,n-1}$ as quantidades físicas anuais de trabalho empregadas nas respectivas indústrias; que serão definidas como frações do trabalho anual total da economia, q_n^* (o qual se tomará como unidade), isto é:

$$\sum_{i=1}^{n-1} q_{ni} = q_n^* = 1 \qquad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

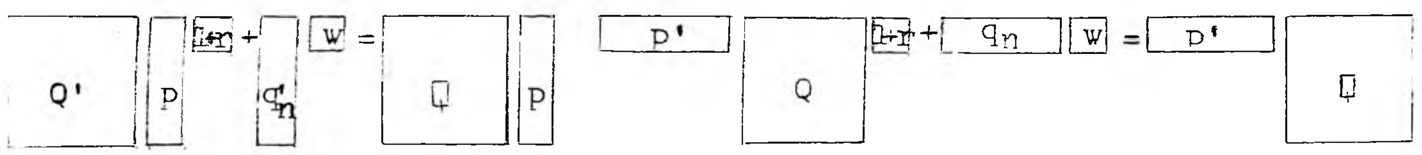
Supõe-se uniformidade na qualidade do trabalho, ou que qualquer diferença na qualidade é reduzida a diferenças equivalentes na quantidade, de modo tal que cada unidade de trabalho recebe o mesmo salário, $\underline{w}$. Supõe-se ainda que, o salário é pago <u>post factum</u> como uma parcela do produto anual, diferentemente da concepção clássica de salário "adiantado" a partir do capital.

Após terem sido feitas tais considerações, as equações de produção do sistema (1.3.3) serão reformuladas e expressas da seguinte maneira:

$$\begin{cases} (q_{11}p_1 + q_{21}p_2 + \dots + q_{n-1,1}p_{n-1})(1+r) + q_{n1}w = q_1p_1 \\ (q_{12}p_1 + q_{22}p_2 + \dots + q_{n-1,2}p_{n-1})(1+r) + q_{n2}w = q_2p_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (q_{1,n-1}p_1 + q_{2,n-1}p_2 + \dots + q_{n-1,n-1}p_{n-1})(1+r) + q_{n,n-1}w = q_{n-1}p_{n-1} \end{cases} \qquad (1.5.1)$$

Reescrevendo o sistema (1.5.1), na forma matricial compacta, tem-se:

$$Q'p(1+r) + q_n'w = \hat{Q}p \qquad \text{ou} \qquad p'Q(1+r) + q_n w = p'\hat{Q} \qquad (1.5.2)$$

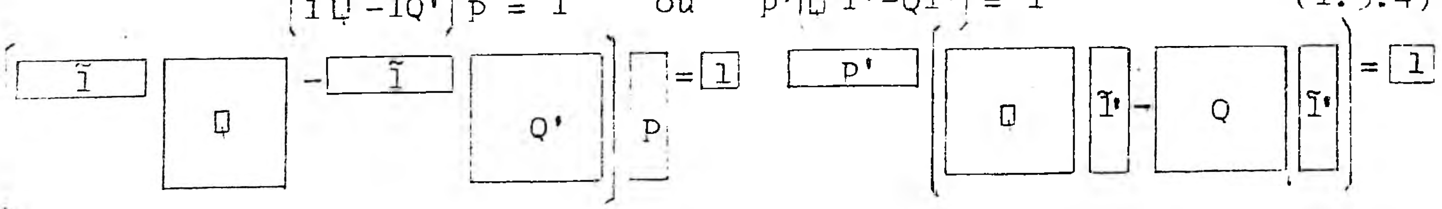


onde q_n', é o vetor transposto do vetor de quantidades físicas de trabalho direto, definido por: $q_n = (q_{n1}, q_{n2}, \dots, q_{n,n-1})$. No sistema (1.5.1) ou em (1.5.2), o padrão no qual se expressarão os preços e o salário que toma o lugar da mercadoria simples arbitráriamente escolhida, é definido como sendo o conjunto de mercadorias que sobram quando, do Produto Nacional Bruto (ou somatório dos segundos membros de todas as equações do sistema (1.5.1)) deduz-se as mercadorias que irão repor os meios de produção utilizados em todas as indústrias. A esse conjunto de mercadorias, que constitui a Renda Nacional, foi o que Sraffa denominou "mercadoria composta". Igualando-se tal mercadoria à unidade, obtem-se a equação adicional que representa o padrão de valor, ou seja:

$$\left(q_i - \sum_{j=1}^{n-1} q_{ij}\right)p_i = 1 \qquad (i=1,2,\dots,n-1) \qquad (1.5.3)$$

ou na forma matricial reduzida:

$$\left(\tilde{I}\hat{Q} - \tilde{I}Q'\right)p = 1 \qquad \text{ou} \qquad p'\left(\hat{Q}\tilde{I}' - Q\tilde{I}'\right) = 1 \qquad (1.5.4)$$



onde: $\bar{1}$, é o vetor soma em linha de (n-1) componentes.

O sistema de producão reformulado, representado pelas equações (1.5.1) e (1.5.3) ou por (1.5.2) e (1.5.4), contém ao todo $\underline{n}$ equacões contra as (n+1) incógnitas ((n-1) precos, $\underline{r}$ e $\underline{w}$); deixando assim um grau de liberdade. E para que o sistema fique determinado é necessário fixar-se uma das váriaveis ou obter-se uma relação adicional entre duas ou mais váriaveis. Esta última alternativa será preferida, e as razões para tal escolha serão vistas no Capítulo III.

6. Definicão de mercadorias "Básicas" e "Não-Básicas"

Como foi visto na Seção 3, algumas das quantidades físicas dos meios de produção poderiam ser zero, pois não havia necessidade de se supor que cada mercadoria entrava diretamente na produção das outras. É baseado nesse fato que se pode definir mercadorias "Básicas" e mercadorias "Não-Básicas".

literalmente, entende-se por mercadorias "Básicas", aquelas que entram na produção de todas as outras mercadorias, quer como instrumentos de produção ou como meios de subsistência. Tais mercadorias participam diretamente da determinação do sistema de produção, isto é, dos (n-1) preços, da taxa de lucros $\underline{r}$ e do salário $\underline{w}$. Por outro lado, as mercadorias que não entram na produção de pelo menos uma mercadoria "Básica", são denominadas de "Não-Básicas"; e portanto não participam da determinação do sistema produtivo, como será visto adiante.

Em termos matemáticos, as mercadorias "Básicas" e "Não-Básicas", podem ser ainda definidas através do conceito de matrizes irredutíveis e matrizes redutíveis respectivamente[7/]. Se a matriz Q' é uma matriz irredutivel, então todas as

---

7/ Entende-se por matriz redutível, aquela matriz que mudando-se a posição de linhas ou colunas, obtem-se uma partição do tipo:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & Q_{22} \end{bmatrix}$$

onde Q_{11} e Q_{22} são matrizes quadradas. Se Q_{11} e Q_{22} ainda são redutíveis, pode-se decompô-las ainda, ate obter a forma diagonal em bloco da matriz Q, isto é: (segue) mercadorias do sistema econômico são mercadorias "Básicas"; entretanto se a matriz Q' é uma matriz redutivel, algumas dessas mercadorias são "Não-Básicas".

Pode-se demonstrar que as mercadorias "Não-Básicas" não participam da determinação do sistema de produção, adotando-se básicamente como procedimento a operação de partição de matrizes, como é visto a seguir.

Como na matriz Q' alguns de seus elementos podem ser zero, pode-se reduzí-la através de partições, de modo a se obter sub-matrizes com certas características. A matriz Q' de quantidades físicas, definida através da seguinte partição é:

$$Q' = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} Q'_{11} & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} \end{pmatrix}$$

onde: Q'_{11} de ordem $\underline{m}x\underline{m}$, Q'_{12} de ordem $\underline{m}x(n-1-m)$, Q'_{22} de ordem $(n-1-m)x(n-1-m)$ e $\underline{0}$ de dimensão $(n-1-m)x\underline{m}$ são sub-matrizes particionadas da matriz Q'; de modo que Q'_{11} é uma matriz irredutível, o que implica que as $\underline{m}$ primeiras indústrias produzem mercadorias "Básicas" e as $(n-1-m)$ restantes, mercadorias "Não-Básicas". Analogamente, a matriz de quantidades físicas de produto, Q, pode ser também particionada de modo a obter-se sub-matrizes de mesma ordem que as matrizes particionadas de Q', isto é:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1,n-1} \\ 0 & Q_{22} & \cdots & Q_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

onde $Q_{11}, Q_{22}, \ldots, Q_{n-1,n-1}$, são matrizes irredutíveis não necessáriamente de mesma ordem.

onde, Q_{11} e Q_{22} são sub-matrizes diagonais de mesma ordem que Q'_{11} e Q'_{22}, e indica a produção das m primeiras mercadorias "Básicas" e (n-1-m) mercadorias "Não-Básicas", respectivamente. Procedendo-se de igual modo com os vetores p e q'_n, de modo a obter-se sempre os m primeiros componentes mercadorias "Básicas" e os (n-1-m) restantes mercadorias "Não-Básicas", obtém-se:

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad e \quad q'_n = \begin{bmatrix} q'_{n1} \\ q'_{n2} \end{bmatrix}$$

Introduzindo no sistema (1.5.2) as matrizes e vetores particionados definidos anteriormente, resulta:

$$\begin{bmatrix} Q'_{11} & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} (1+r) + \begin{bmatrix} q'_{n1} \\ q'_{n2} \end{bmatrix} w = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

fazendo-se algumas transformações algébricas e operando obtém-se:

$$\left\{ \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q'_{11} & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} \end{bmatrix} (1+r) \right\} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q'_{n1} \\ q'_{n2} \end{bmatrix} w$$

ou:

$$\begin{bmatrix} Q_{11} - Q'_{11}(1+r) & 0 \\ -Q'_{12}(1+r) & Q_{22} - Q'_{22}(1+r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q'_{n1} \\ q'_{n2} \end{bmatrix} w$$

pré-multiplicando-se ambos os membros pela matriz inversa encontra-se:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} - Q'_{11}(1+r) & 0 \\ -Q'_{12}(1+r) & Q_{22} - Q'_{22}(1+r) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} q'_{n1} \\ q'_{n2} \end{bmatrix} w$$

reescrevendo a matriz inversa de forma alternativa, conseguida através da propriedade de uma <u>matriz particionada em bloco inferior</u> [8/], obtém-se finalmente:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[Q_{11} - Q'_{11}(1-r)\right]^{-1} & 0 \\ \left[Q_{11}-Q'_{22}(1-r)\right]^{-1}\left[Q'_{12}(1-r)\right]\left[Q_{11}-Q'_{11}(1-r)\right]^{-1} & \left[Q_{22}-Q'_{22}(1-r)\right]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q'_{n1} \\ q'_{n2} \end{bmatrix} w$$

Portanto:

$$p_1 = \left[Q_{11} - Q'_{11}(1-r)\right]^{-1} q'_{n1} w \qquad (1.6.1)$$

e

$$p_2 = \left[Q_{22}-Q'_{22}(1-r)\right]^{-1}\left[Q'_{12}(1-r)\right]\left[Q_{11}-Q'_{11}(1-r)\right]^{-1} q'_{n1} w - \left[Q_{22}-Q'_{22}(1-r)\right]^{-1} q'_{n2} w \qquad (1.6.2)$$

Conclui-se, através de (1.5.5), que o vetor de preços de mercadorias "Básicas", p_1, depende apenas das <u>sub-matrizes</u> Q'_{11} e Q_{11} de mercadorias "Básicas"; enquanto que de (1.6.2) conclui-se que, o vetor de preços de mercadorias "Não-Básicas", p_2, depende conjuntamente das <u>sub-matrizes</u> Q'_{11}, Q_{11} e Q'_{12}, Q'_{22}, Q_{22} de mercadorias "Básicas" e "Não-Básicas" respectivamente. Portanto, fica provado que as mercadorias "Não-Básicas" não participam da determinação do sistema de pro-

---

8/ Dada a matriz M, particionada em bloco inferior, definida por:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

A inversa M^{-1}, representada por:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$$

é a matriz tal que:

$$M^{-1}M = I$$

Logo:

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 \\ 0 & I_{22} \end{bmatrix}$$

(segue)

dução. Portanto, se um avanço tecnológico reduzisse à metade a quantidade física de cada um dos meios de produção, necessários para produzir uma unidade de uma mercadoria "Não-Básica", o preço de tal mercadoria seria também reduzido à metade; mas não causaria mudanças nas relações de preços das outras mercadorias, na taxa de lucros ou no salário. Entretanto, se tal mudança fôsse numa mercadoria "Básica", todos os preços, a taxa de lucros e o salário seriam alterados.

Portanto:

$$X_{12} = 0\ ,$$
$$X_{11} = M_{11}^{-1},$$
$$X_{22} = M_{22}^{-1} \text{ e}$$
$$X_{21} = -M_{22}^{-1} M_{21} M_{11}^{-1}$$

Capítulo II

MOVIMENTO DE PREÇOS RELATIVOS VERSUS MUDANÇA NA DISTRIBUIÇÃO DA RENDA

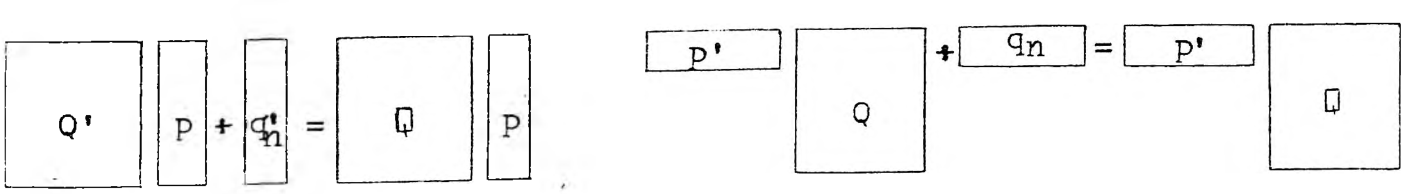
1. Introdução

O objetivo básico desse capítulo é mostrar os efeitos que, mudanças na distribuição da renda entre lucros e salários, tem sobre os preços relativos das mercadorias. A técnica para tal observação é feita variando-se a participação do salário na renda nacional de 1 até 0; tomando-se como padrão de valor, em termos do qual são expressos os (n-1) preços e o salário, o produto líquido do sistema de produção. Na Seção 2 se analisa os precos relativos quando toda a renda nacional é absorvida pelos salários. A seção seguinte, mostra o efeito sobre esses mesmos preços, quando a renda nacional está distribuída entre lucros e salários; e se estuda o movimento de preços relativos que se dá após uma mudança na distribuíção da renda. Finalmente, a última seção mostra os preços relativos quando a totalidade da renda nacional é absorvida pelos lucros.

2. Salários absorvendo a totalidade da renda nacional

Ao se fazer $\underline{w}=1$ no sistema (1.5.2), isto é, destinando-se aos salários toda a renda nacional; a taxa de lucros torna-se nula ($\underline{r}=0$). E o sistema aparece da seguinte forma:

$$Q'p + q'_n = \mathbb{Q}p \qquad \text{ou} \qquad p'Q + q_n = p'\mathbb{Q} \qquad (2.2.1)$$



Na realidade, o sistema (2.2.1) é idêntico ao (1.3.2), com excessão de que as quantidades físicas de trabalho são agora apresentadas explicitamente, ao invés de serem representadas por quantidades físicas de meios de subsistência.

Transpondo-se de membro $Q'p$ e colocando-se em evidência o vetor de preços $\underline{p}$, em (2.2.1), obtém-se:

$$\left(\hat{Q} - Q'\right) p = q'_n$$

como a matriz $\left(\hat{Q} - Q'\right)$ é não singular, isto é, seu determinante é diferente de zero; ela admite inversa. Portanto, pre-multiplicando ambos os membros pela sua inversa, obtém-se finalmente:

$$p = \hat{p} = \left(\hat{Q} - Q'\right)^{-1} q'_n \qquad \text{ou} \qquad p' = \hat{p}' = q_n \left(\hat{Q} - Q\right)^{-1} \tag{2.2.2}$$

$$\boxed{p} = \boxed{\hat{p}} = \boxed{\left(\hat{Q} - Q'\right)^{-1}} \boxed{q'} \qquad \boxed{p'} = \boxed{\hat{p}'} = \boxed{q_n} \boxed{\left(\hat{Q} - Q\right)^{-1}}$$

A esse nível de distribuição, os preços relativos das mercadorias são iguais aos seus custos em termos de trabalho que direta ou indiretamente entraram em sua produção[9]. Cada componente do vetor $\underline{p}$ representa a soma de duas parcelas: uma representando quantidades físicas de trabalho requerida diretamente para produção da mercadoria; e a outra, quantidades físicas de trabalho que indiretamente entraram na produção das outras mercadorias, utilizadas como meios de produção.

3. Renda nacional distribuída entre lucros e salários

Reduzindo-se agora a participação do salário na renda nacional, de modo que $0 < (w = \bar{w}) < 1$; surgiria uma taxa de lucros, isto é, $r > 0$. Substituindo-se $w = \bar{w}$ em (1.5.2), e fazendo-se algumas transforma-

9/ Veja-se capítulo IV para maiores detalhes.

ções algébricas obtém-se:

$$\left[Q - Q'(1+r)\right] p = q'_n \bar{w}$$

pré-multiplicando ambos os membros pela inversa da matriz $\left[Q - Q'(1+r)\right]$, obtém-se o vetor de preços relativos $p=\hat{p}$, ou seja:

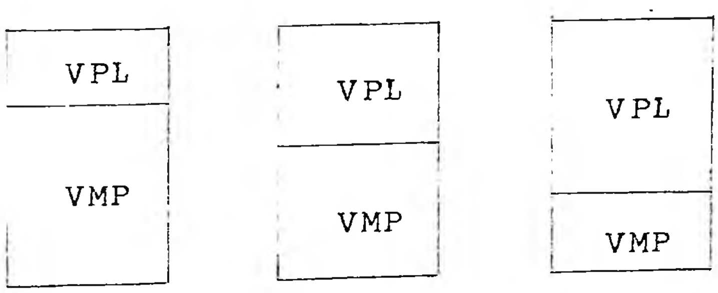
$$p=\hat{p}= \left[Q - Q'(1+r)\right]^{-1} q'_n \bar{w} \qquad \text{ou} \qquad p'=\hat{p}'= \bar{w} q_n \left[Q - Q(1+r)\right]^{-1} \qquad (2.3.1)$$

$$\boxed{p} = \boxed{\hat{p}} = \boxed{\left[Q-Q'(1-r)\right]^{-1}} \boxed{q'_n} \boxed{w} \qquad \boxed{p'} = \boxed{\hat{p}'} = \boxed{w} \boxed{q_n} \boxed{\left[Q-Q(1-r)\right]^{-1}}$$

Ao se reduzir a participação do salário na renda nacional de $w=1$ até $w=\bar{w}$, existe em consequência, uma variação nos preços relativos das mercadorias. Variação essa, que restabelece o equilíbrio em cada uma das indústrias. A razão básica desse movimento de preços relativos está na desigualdade das proporções entre o "valor do produto líquido" e o "valor dos meios de produção" em cada indústria.

Para se compreender o movimento de preços relativos, que se dá após uma mudança na distribuição da renda, é necessário se ter em mente três tipos de indústrias: indústrias com uma <u>baixa</u> proporção entre o valor do produto líquido (VPL) e o valor dos meios de produção (VMP); indústrias com uma <u>proporção equilibrada</u> entre o VPL e o VMP; e finalmente, indústrias com uma <u>alta</u> proporção entre o VPL e o VMP. A Figura I, caracteriza de forma esquemática esses três tipos de indústrias.

Figura I



(1) (2) (3)

As relações de desigualdade que especificam os três tipos de indústrias quanto às proporções entre o VPL e o VMP, são as seguintes:

$$\left(\frac{VPL}{VMP}\right)_1 < \left(\frac{VPL}{VMP}\right)_2 < \left(\frac{VPL}{VMP}\right)_3 \qquad (2.3.2)$$

Substituindo-se o VPL e o VMP, em (2.2.4), pelas suas expressões algébricas, obtém-se:

$$\frac{r\sum_{j=1}^{n-1} q_{j1}p_j - q_{n1}w}{\sum_{j=1}^{n-1} q_{j1}p_j} < \frac{r\sum_{j=1}^{n-1} q_{j2}p_j - q_{n2}w}{\sum_{j=1}^{n-1} q_{j2}p_j} < \frac{r\sum_{j=1}^{n-1} q_{j3}p_j - q_{n3}w}{\sum_{j=1}^{n-1} q_{j3}p_j} \qquad (2.3.2)_a$$

simplificando-se as primeiras parcelas das desigualdades, resulta:

$$r - \frac{q_{n1}w}{\sum_{j=1}^{n-1} q_{j1}p_j} < r - \frac{q_{n2}w}{\sum_{j=1}^{n-1} q_{j2}p_j} < r - \frac{q_{n3}w}{\sum_{j=1}^{n-1} q_{j3}p_j}$$

como r e w são uniformes para todas as indústrias, poder-se-ia eliminá-las das desigualdades que não alterariam as relações, isto é:

$$\frac{q_{n1}}{\sum_{j=1}^{n-1} q_{j1}p_j} < \frac{q_{n2}}{\sum_{j=1}^{n-1} q_{j2}p_j} < \frac{q_{n3}}{\sum_{j=1}^{n-1} q_{j3}p_j} \qquad (2.3.3)$$

A relação (2.3.3), obtida através dessas transformações, é o que Sraffa chamou de "proporção híbrida entre quantidades físicas de trabalho e valor dos meios de produção"; que é equivalente à relação (2.3.2).

Em qualquer indústria, a renda nacional que vai para salários é proporcional à quantidade física de trabalho empregado; enquanto que, a distribuída com lucros, é proporcional ao valor dos meios de produção adiantados em cada indústria. Portanto, o que seria poupado na indústria 1, com a redução da participação do salário na renda nacional de $w=1$ para $w=\overline{w}$, seria menor que o valor necessário para pagar os lucros à uma taxa uniforme, isto é:

$$q_{n1}(1-w) - r_{(\overline{w})}\sum_{j=1}^{n-1} q_{j1}p_j < 0 \qquad (2.3.4)$$

consequentemente, essa indústria teria um <u>deficit</u>. Já a indústria 3, teria um <u>superavit</u> ao se reduzir o salário, pois o que seria poupado com tal redução, seria superior ao valor necessário para pagar lucros, isto é:

$$q_{n3}(1-w) - r_{(\overline{w})}\sum_{j=1}^{n-1} q_{j3}p_j > 0 \qquad (2.3.5)$$

A indústria 2, por possuir a exata proporção equilibradora, seu balanço aparecerá equilibrado; pois o valor correspondente à redução da participação do salário na renda nacional, seria exatamente igual ao valor necessário para pagamento de lucros, isto é:

$$q_{n2}(1-w) - r_{(\overline{w})}\sum_{j=1}^{n-1} q_{j2}p_j = 0 \qquad (2.3.6)$$

Pode-se concluir que, ao se reduzir a participação do salário na renda nacional nas indústrias com <u>deficit</u> ou <u>superavit</u>, são necessárias mudanças de preços relativos, para restabelecer o equilíbrio nessas indústrias. Analogamente conclui-se que, nas indústrias em que a exata proporção equilibrada entre o VPL e o VMP se verifica, não haveriam mudanças de preços relativos, pois o equilíbrio estaria de fato.

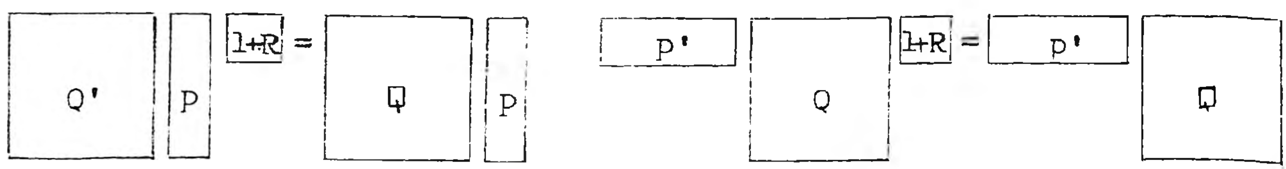
Observa-se que nas indústrias com <u>deficit</u> (2.3.4), um aumento nos preços das mercadorias (p_j) em relação ao padrão de valor adotado, ajudaria a eliminar esse <u>deficit</u>. Por analogia, nas indústrias com <u>superavit</u> (2.3.5), uma redução nos preços das mercadorias relativamente ao padrão, reduziria o <u>superavit</u>. Entretanto, não se poderia concluir que o preço de uma mercadoria em uma indústria de baixa proporção (ou <u>deficit</u>), subiria necessariamente com uma redução na participação do salário na renda nacional. Ele tanto poderia subir quanto cair. Cairia se os meios de produção empregados por essa indústria fossem produzidos com uma proporção mais baixa, e os meios de produção desses meios de produção com proporção ainda mais baixa; e assim por diante até se atingir os escalões mais baixos de produção. Análogamente, o preço de uma mercadoria produzida em uma indústria com uma alta proporção (ou <u>superavit</u>), poderia cair ou subir. O que não seria possível com as mercadorias produzidas nessas indústrias é a estabilidade de preços, pois essa é uma característica das mercadorias produzidas nas indústrias com a exata proporção equilibradora.

4. <u>Totalidade da renda nacional absorvida por lucros</u>

Reduzindo-se ainda mais a participação do salário na renda nacional, até se atingir o caso extremo, isto é, $w=0$ <u>10/</u>; toda renda nacional vai para lucros, e a taxa de lucros atinge o seu nível máximo, que se representará por <u>R</u>.

Substituindo-se $w=0$ e $r=R$ no sistema (1.5.2), obtém-se o seguinte sistema:

$$Q'p(1+R) = \mathbb{Q}p \quad \text{ou} \quad p'Q(1+R) = p'\mathbb{Q} \qquad (2.4.1)$$



<u>10/</u> w=0, representa apenas a parcela de excedente econômico que vai para salários igual a zero, pois os bens excenciais à subsistência dos traba-

Dividindo-se ambos os membros por $(1+R)$ e transpondo-se posteriormente o primeiro membro, obtém-se:

$$\left(\frac{1}{1+R}\,\mathbb{Q} - Q'\right)p = 0$$

fazendo-se $\rho = 1/(1+R)$, obtém-se o sistema homogêneo linear seguinte:

$$\left(\rho\,\mathbb{Q} - Q'\right)p = 0 \tag{2.4.2}$$

Para se evitar a solução trivial, isto é, componentes do vetor $\underline{p}$ todos nulos, condiciona-se que o determinante da matriz $\left(\rho\,\mathbb{Q} - Q'\right)$ seja zero, ou equivalentemente, que a característica dessa matriz seja menor que $(n-1)$. Portanto:

$$\left|\rho\,\mathbb{Q} - Q'\right| = 0 \tag{2.4.3}$$

Resolvendo-se a <u>equação característica</u> (2.4.3), obtém-se o <u>polinômio característico</u> de $(n-1)$ graus em ρ, cujas raízes são os $(n-1)$ <u>auto-valores</u>. Apenas um desses $(n-1)$ <u>auto-valores</u>, que corresponde ao máximo, gera um <u>auto-vetor</u> com significação econômica, isto é, solução positiva para o vetor de preços $\underline{p}$. Representando-se o máximo <u>auto-valor</u> encontrado por ρ_m, obtém-se:

$$\rho_m = \frac{1}{1+R} \tag{2.4.4}$$

Substituindo-se (2.4.4) em (2.4.2), e adotando-se o produto líquido do sistema como numerário, obtém-se a solução $p=\hat{p}$, de preços relativos.

---

lhadores, já estão incluídos na matriz de meios de produção.

Quando toda a renda nacional é absorvida por lucros, os preços relativos das mercadorias são proporcionais aos custos dos meios de produção.

Ao nível de distribuição w=0, a razão entre o valor do produto líquido (VPL) e o valor dos meios de produção (VMP), que em geral é diferente em cada indústria, coincide em todas as indústrias; e é igual à taxa máxima de lucros R, isto é:

$$\left(\frac{VPL}{VMP}\right)_i = \frac{q_i - \sum_{j=1}^{n-1} q_{ji} P_j}{\sum_{j=1}^{n-1} q_{ji} P_j} = \frac{R \sum_{j=1}^{n-1} q_{ji} P_j}{\sum_{j=1}^{n-1} q_{ji} P_j} = R \qquad (\forall i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

A Esta razão foi o que Sraffa chamou de "razão equilibradora entre o valor do produto líquido e o valor dos meios de produção", que coincidentemente com a taxa máxima de lucros, será também representada por R.

Capítulo III

A MERCADORIA COMPOSTA PADRÃO

1. Introdução

Este capítulo tem por objetivo apresentar formalmente a mercadoria composta padrão, proposta por Sraffa para servir de medida invariante de valor, capaz de isolar as variações de precos que se seguem após uma mudança na distribuição da renda entre lucros e salários. A Seção 2 mostra as implicações teóricas da mercadoria composta padrão, bem como a mecânica de construção dessa mercadoria. Na secão seguinte será abordada a razão entre o produto líquido e meios de produção no sistema que dá origem à mercadoria composta padrão (ou sistema padrão). Na Seção 4 será mostrada a relação que existe entre **w** e **r** no sistema padrão; e na seção seguinte será estendida a qualquer sistema econômico real. A Seção 6 consta de um exemplo numérico abordando todos os itens descritos nas seções anteriores. Finalmente, na última seção será mostrado que as mercadorias "Não-Básicas" são excluídas do sistema padrão.

2. Construção da mercadoria composta padrão

Ao se expressar o preço de uma certa mercadoria em relacão a outra escolhida arbitráriamente como padrão, não se pode afirmar que as variações de preços que acompanham uma mudanca na distribuição da renda, deriva da mercadoria que está sendo medida ou da mercadoria escolhida como padrão, para medir.

A mercadoria que se adotada como padrão de valor, não sofreria problemas desse tipo, seria a mercadoria produzida numa indústria que possuisse a exata proporção equilibradora entre o VPL e o VMP; e que essa mesma proporção fosse recorrente em todos os sucessivos escalões de produção. Tal mercadoria não mudaria de valor, por maiores que fossem as mudanças na distribuíção da renda. E poder-se-ia afirmar que, qualquer variação de preços se originaria da mercadoria que estaria sendo medida relativamente à mercadoria padrão.

A possibilidade de que uma mercadoria individual possuisse tal característica é descartada. Entretanto uma composição de mercadorias seria mais provável, pois poder-se-ia compô-la de modo a se obter a exata proporção equilibradora em todas as indústrias.

A perfeita mercadoria composta, seria aquela que tanto o produto quanto os meios de produção possuissem a mesma proporção entre o valor do produto líquido e o valor dos meios de produção; e composta das mesmas mercadorias que compõem o agregado dos seus próprios meios de produção.

O problema de construir uma mercadoria composta que sirva de padrão, capaz de isolar as variações de preços das outras mercadorias, quando mudasse a distribuíção da renda; consiste em encontrar um conjunto de (n-1) multiplicadores, que se aplicado ao sistema de produção, transformaria as mercadorias produzidas nas mesmas proporções, quer como produto quer como meios de produção. Isso implica dizer que a percentagem em que o produto excede os meios de produção é igual para todas as indústrias. Percentagem essa que se representará por <u>R</u>, a qual Sraffa denominou de "<u>razão padrão</u>" [11/].

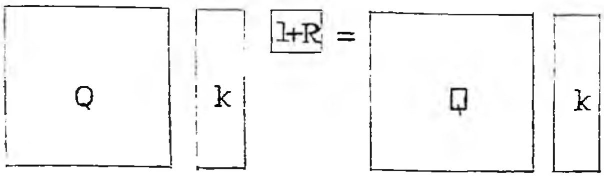
sejam: $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ os multiplicadores a serem aplicados às indústrias. O sistema de equações que possibilita encontrar os (n-1) multiplicadores com tal característica, é expresso da seguinte maneira:

<u>11</u>/ Com essa última denominação, <u>R</u> representa indistintamente: (i) taxa máxima de lucros; (ii) razão equilibradora entre o VPL e o VMP; e (iii) taxa de excedente do produto em relação aos meios de produção no <u>sistema padrão</u> ou razão entre o produto líquido e os meios de produção nesse mesmo sistema.

$$\begin{cases} (q_{11}k_1 + q_{12}k_2 + \cdots + q_{1,n-1}k_{n-1})(1+R) = q_1k_1 \\ (q_{21}k_1 + q_{22}k_2 + \cdots + q_{2,n-1}k_{n-1})(1+R) = q_2k_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (q_{n-1,1}k_1 + q_{n-1,2}k_2 + \cdots + q_{n-1,n-1}k_{n-1})(1+R) = q_{n-1}k_{n-1} \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Em termos matriciais, o sistema (3.2.1) pode ser reescrito na forma reduzida do seguinte modo:

$$Qk(1+R) = \bar{Q}k \quad (3.2.2)$$



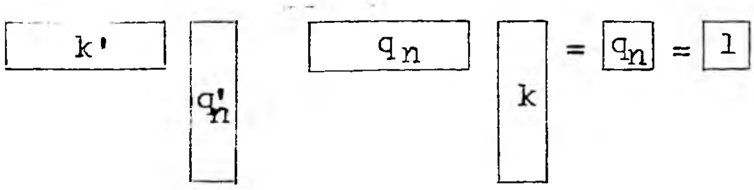
onde $\underline{k}$ é o vetor coluna de multiplicadores de $(n-1)$ componentes.

O sistema (3.2.1) ou (3.2.2), é composto de $(n-1)$ equações independentes e $\underline{n}$ incógnitas ($(n-1)$ multiplicadores e $\underline{R}$). Portanto, para que se torne determinado e ao mesmo tempo definir a unidade em que serão expressos os multiplicadores, garantindo-se assim que a quantidade física de trabalho empregada é igual à quantidade total do sistema; deveria-se adicionar a seguinte equação:

$$\sum_{i=1}^{n-1} q_{ni}k_i = q_n^* = 1 \quad (3.2.3)$$

ou na forma matricial compacta, compatível com a notação do sistema (3.2.2):

$$k'q_n' = q_nk = q_n^* = 1 \quad (3.2.4)$$



Fazendo-se as mesmas transformações que foram feitas no sistema (2.4.1), para o sistema (3.2.2), obtém-se o seguinte sistema homogêneo linear:

$$\left(\rho \mathrm{Q} - Q\right) k = 0 \qquad (3.2.5)$$

$$\boxed{\left(\rho \mathrm{Q} - Q\right)} \; \boxed{k} = \boxed{0}$$

Condicionando-se que:

$$\left|\rho \mathrm{Q} - Q\right| = 0 \qquad (3.2.6)$$

evita-se a solução trivial k=0. Resolvendo-se a <u>equação característica</u> (3.2.6), e selecionando-se o máximo <u>auto-valor</u> (ρ_m), obtém-se <u>R</u> através da seguinte relação:

$$R = \hat{R} = \frac{1}{\rho_m} - 1 \qquad (3.2.7)$$

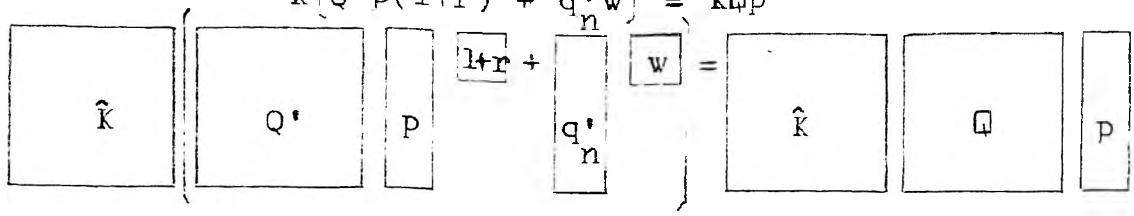
substituindo-se ρ_m em (3.2.5), ao tempo em que se acrescenta a equação (3.2.4), obtém-se o vetor solução $k=\hat{k}$ de multiplicadores não-negativos.

Aplicando-se o conjunto de multiplicadores $\hat{k}_i$ (i=1,2,...,n-1) ao sistema (1.5.2), transforma-o no <u>sistema padrão</u>, isto é:

$$\begin{cases} \hat{k}_1(q_{11}p_1 + q_{21}p_2 + \dots + q_{n-1,1}p_{n-1})(1+r) + q_{n1}w = \hat{k}_1 q_1 p_1 \\ \hat{k}_2(q_{12}p_1 + q_{22}p_2 + \dots + q_{n-1,2}p_{n-1})(1+r) + q_{n2}w = \hat{k}_2 q_2 p_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \hat{k}_{n-1}(q_{1,n-1}p_1 + q_{2,n-1}p_2 + \dots + q_{n-1,n-1}p_{n-1})(1+r) + q_{n,n-1}w = \hat{k}_{n-1} q_{n-1} p_{n-1} \end{cases} \qquad (3.2.8)$$

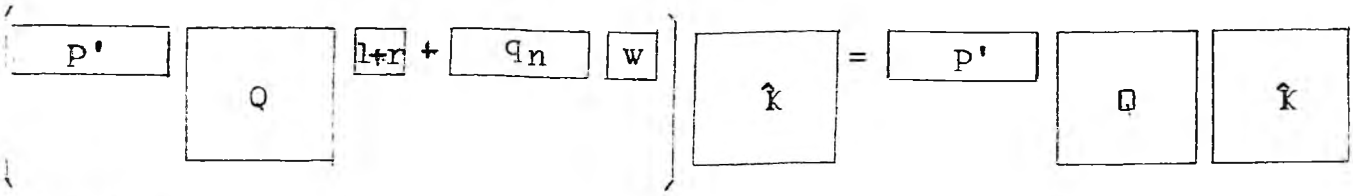
O sistema padrão (3.2.8), reescrito na forma matricial compacta, aparece da seguinte maneira:

$$\hat{k}\{Q'p(1+r) + q'_n w\} = \hat{k}Qp \qquad (. \; . \; .)$$



ou, alternativamente, na forma transposta:

$$\{p'Q(1+r) + q_n w\}\hat{k} = p'Q\hat{k} \qquad (3.2.9)$$



onde $\hat{k}$, é a matriz de multiplicadores da mercadoria i ou indústria j, definida pela matriz diagonal $\hat{k} = \{\hat{k}_{i=j}\delta_{ij}\}$.

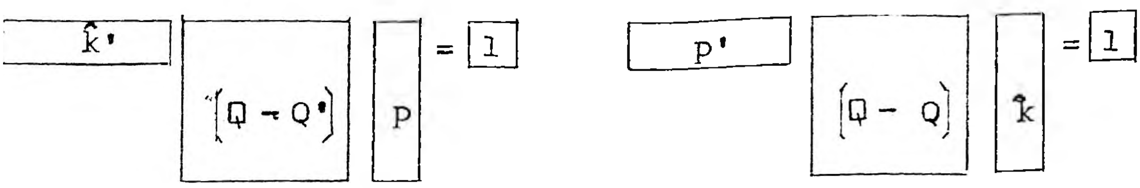
A equação adicional que tornará o sistema padrão determinado e servirá de padrão, em termos da qual serão expressos os (n-1) preços e o salário; é mostrada a seguir:

$$\hat{k}_1 q_1 - \Big(\sum_{j=1}^{n-1} \hat{k}_j q_{1j}\Big)p_1 + \hat{k}_2 q_2 - \Big(\sum_{j=1}^{n-1} \hat{k}_j q_{2j}\Big)p_2 + \dots + \hat{k}_{n-1} q_{n-1} - \Big(\sum_{j=1}^{n-1} \hat{k}_j q_{n-1;1}\Big)p_{n-1} = 1$$

(3.2.10)

ou na forma matricial compacta:

$$\hat{k}'\{Q - Q'\}p = 1 \quad \text{ou} \quad p'\{Q - Q\}\hat{k} = 1 \qquad (3.2.11)$$



3. Razão entre produto líquido e meios de produção no sistema padrão

No sistema padrão, a percentagem, R, em que o produto de cada indústria excede os seus meios de produção, isto é:

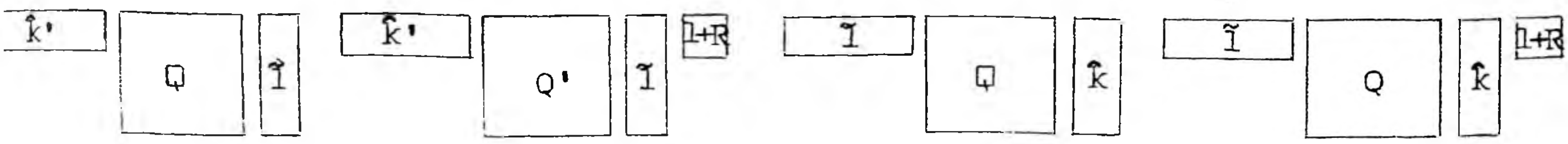
$$\hat{k}_i q_i = (1+R)\hat{k}_i \sum_{j=1}^{n-1} q_{ji} \qquad (i=1,2,\ldots,n-1) \qquad (3.3.1)$$

também é a percentagem em que o produto total do sistema excede seus meios de produção agregados, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \hat{k}_i q_i = (1+R)\sum_{i=1}^{n-1} \hat{k}_i \sum_{j=1}^{n-1} q_{ji} \qquad (3.3.2)$$

ou na forma matricial compacta:

$$\hat{k}'\mathbb{Q}\tilde{1}' = \hat{k}'Q'\tilde{1}'(1+R) \quad \text{ou} \quad \tilde{1}\mathbb{Q}\hat{k} = \tilde{1}Q\hat{k}(1+R) \qquad (3.3.3)$$



Isolando-se R em (3.3.3). obtém-se:

$$R = \frac{\hat{k}'\mathbb{Q}\tilde{1}' - \hat{k}'Q'\tilde{1}'}{\hat{k}'Q'\tilde{1}'} = \frac{\hat{k}'(\mathbb{Q}-Q')\tilde{1}'}{\hat{k}'Q'\tilde{1}'} = \frac{PL}{MP} \qquad (3.3.4)$$

Através de (3.3.4), observa-se que no sistema padrão, R também representa a razão entre o produto líquido e os meios de producão em termos de quantidades físicas. Entretanto, essa razão não seria alterada caso se multiplicasse as mercadorias individuais pelos seus precos, isto é:

$$R = \frac{\hat{k}'(\mathbb{Q}-Q')p}{\hat{k}'Q'p} = \frac{VPL}{VMP} \qquad (3.3.5)$$

Portanto, no sistema padrão, a razão entre quantidades físicas de mercadorias que formam o produto líquido e os meios de producão é idêntica à razão entre os seus valores. A esta razão, foi o que Sraffa denominou "razão padrão". Assim, no sistema padrão, essa razão permanece constante quaisquer que sejam as variações de preços.

4. Relação entre w e r no sistema padrão

No sistema padrão, a razão padrão pode ser ainda representada da seguinte forma:

$$R = \frac{\hat{k}'Q'pr + \hat{k}'q_n'w}{\hat{k}'Q'p} \qquad (3.4.1)$$

Onde, as parcelas do numerador dessa razão, representam o valor do produto líquido padrão que vai para lucros e salários respectivamente.

Simplificando-se a primeira parcela e desde que na segunda parcela $\hat{k}'q_n'=1$ de (3.2.4), a razão (3.4.1) aparece da forma seguinte:

$$R = r + \frac{w}{\hat{k}'Q'p} \qquad (3.4.2)$$

Dividindo-se o valor do produto líquido padrão entre lucros e salários, e representando-se a parcela que vai para salários por:

$$w = VPL_{(\text{salários})} = \alpha\hat{k}'(\bar{Q} - Q')p \qquad (3.4.3)$$

Substituindo-se (3.4.3) em (3.4.2), obtem-se:

$$R = r + \alpha\frac{\hat{k}'(\bar{Q} - Q')p}{\hat{k}'Q'p} \qquad (3.4.4)$$

Observa-se que o segundo termo do lado direito da equação (3.4.4), é a expressão que define a razão padrão em (3.3.5). Portanto, substituindo-se tal resultado, obtém-se finalmente a seguinte relação:

$$R = r + \alpha R$$

ou:

$$r = R(1 - \alpha) \qquad (3.4.5)$$

onde α, mais uma vez, representa a parcela do produto líquido padrão que vai para salários.

Portanto, no sistema padrão, quando todo o valor do produto líquido vai para salários ($\alpha=1$); a taxa de lucros é igual a zero ($r=0$). Isso pode ser comprovado substituindo-se ($\alpha=1$) em (3.4.5). Reduzindo-se agora a participação do salário na renda nacional padrão (ou produto líquido padrão), de modo que ($\alpha=2/3$); a taxa de lucros seria igual a: ($r=1/3\ R$). Reduzindo-se ainda mais a participação do salário na renda nacional padrão, admitindo-se que apenas 1/3 do valor do produto líquido padrão destina-se a salários, isto é, ($\alpha=1/3$); a taxa de lucros seria: ($r=2/3\ R$). Finalmente, admitindo-se o outro caso extremo, ou seja, quando todo o valor do produto líquido padrão vai para lucros, isto é: ($\alpha=0$); a taxa de lucros atinge seu nível máximo ($r=R$). Estes últimos valores de r poderiam ser verificados, substituindo-se os diversos valores de α correspondentes, em (3.4.5).

No sistema padrão, estas mesmas conclusões poderiam ser tiradas caso substituisse o produto líquido padrão em termos de valor pelo seu equivalente em termos de quantidades físicas.

Generalizando, no sistema padrão, se w representa a proporção do produto líquido que vai para salários, a taxa de lucros será dada pela relação:

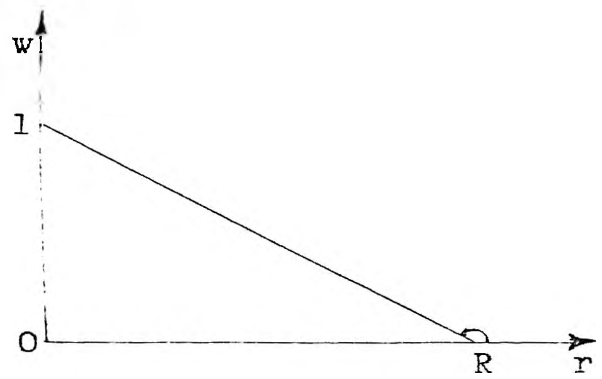
$$r = R(1-w) \qquad (3.4.6)$$

onde, $(1-w)$ representa a parcela do produto líquido padrão que vai para lucros.

A relação entre $\underline{r}$ e $\underline{w}$ no sistema padrão, equacionada em (3.4.6), pode ser representada gráficamente por uma reta, conforme mostra a Figura II; cuja inclinação é:

$$\frac{dr}{dw} = -R$$

Figura II



5. Relação entre $\underline{w}$ e $\underline{r}$ estendida a qualquer sistema

A relação entre $\underline{w}$ e $\underline{r}$ apenas terá interesse, se for possível mostrar que sua aplicação não se limita ao imaginário sistema padrão, mas pode ser estendida a qualquer sistema econômico real.

Retornando-se ao sistema econômico real, equacionado em (1.5.2), e pré-multiplicando-o pelo vetor de multiplicadores $\hat{k}'$, obtém-se:

$$\hat{k}'Q'p(1+r) + \hat{k}'q_n'w = \hat{k}'Q\,p$$

Isolando-se no primeiro membro o termo que contém $\underline{r}$, resulta:

$$\hat{k}'Q'pr = \hat{k}'\left(Q-Q'\right)p - \hat{k}'q_n'\,w$$

como $\hat{k}'\left(Q-Q'\right)p = 1$, de (3.2.11), e $\hat{k}'q_n' = 1$, de (3.2.4); a expressão anterior transforma-se em:

$$\hat{k}'Q'pr = 1 - w$$

multiplicando-se ambos os membros por R, obtém-se:

$$\hat{k}'Q'pRr = R(1-w) \tag{3.5.1}$$

Da equação (3.3.5), obtém-se:

$$\hat{k}'Q'pR = \hat{k}'(\bar{Q} - Q')p$$

mas como $\hat{k}'(\bar{Q} - Q')p = 1$, de (3.2.11), resulta:

$$\hat{k}'Q'pR = 1 \tag{3.5.2}$$

Substituindo-se (3.5.2) em (3.5.1), encontra-se finalmente a mesma relação entre w e r valida no sistema padrão, partindo-se exclusivamente do sistema real, isto é:

$$r = R(1-w) \tag{3.5.3}$$

Portanto, desde que o salário seja expresso em termos da mercadoria padrão, fica mostrado que a relação linear entre w e r não se limita apenas ao sistema padrão, mas é estendida a qualquer sistema econômico real. Porém, a taxa de lucros que no sistema padrão poderia ser obtida como uma razão entre quantidades físicas de mercadorias; no sistema real, resultará apenas de uma razão entre valores agregados. Pois, no sistema real, quando é pago ao salário o equivalente em mercadoria padrão, o valor do que sobra para lucros guarda a mesma razão em relação ao valor dos meios de produção; mas não guarda a mesma razão em termos de quantidades físicas, que no sistema padrão guardaria.

6. Exemplo numérico

Dado o sistema real composto apenas de "Indústrias Básicas", que produzem ferro, carvão e trigo do seguinte modo:

$$
\begin{array}{llllll}
90\text{tn. ferro} & + \ 120\text{tn. carvão} & + \ 60\text{arr. trigo} & + \ 3/16 \text{ trab.} & \longrightarrow & 180\text{tn. ferro} \\
50\text{tn. ferro} & + \ 125\text{tn. carvão} & + \ 150\text{arr. trigo} & + \ 5/16 \text{ trab.} & \longrightarrow & 450\text{tn. carvão} \\
\underline{40}\text{tn. ferro} & + \ \underline{40}\text{tn. carvão} & + \ \underline{200}\text{arr. trigo} & + \ \underline{8/16} \text{ trab.} & \longrightarrow & 480\text{arr. trigo} \\
180 & \quad 285 & \quad 400 & \quad 1 & &
\end{array}
$$

Observa-se claramente que apenas carvão e trigo comporão a renda nacional, pois o ferro está sendo produzido em quantidade suficiente apenas para reposição.

As matrizes de quantidades físicas Q e $\bar{Q}$ do o sistema econômico real, são:

$$
Q = \begin{pmatrix} 90 & 50 & 40 \\ 120 & 125 & 40 \\ 60 & 150 & 200 \end{pmatrix} \qquad \bar{Q} = \begin{pmatrix} 180 & 0 & 0 \\ 0 & 450 & 0 \\ 0 & 0 & 480 \end{pmatrix}
$$

O sistema (3.2.2) de multiplicadores, fica assim definido:

$$
\begin{pmatrix} 90 & 50 & 40 \\ 120 & 125 & 40 \\ 60 & 150 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} (1+R) = \begin{pmatrix} 180 & 0 & 0 \\ 0 & 450 & 0 \\ 0 & 0 & 480 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}
$$

Portanto, o sistema homogeneo linear (3.2.5), resulta:

$$
\begin{pmatrix} (180\rho - 90) & -50 & -40 \\ -120 & (450\rho - 125) & -40 \\ -60 & -150 & (480\rho - 200) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

A equação característica (3.2.6) que condiciona $|\rho Q-Q| = 0$, e evita a solução trivial, fica assim definida:

$$\begin{vmatrix} (180\rho - 90) & -50 & -40 \\ -120 & (450\rho - 125) & -40 \\ -60 & -150 & (480\rho - 200) \end{vmatrix} = 0$$

que após simplificada[12] e resolvida resulta no polinômio característico do terceiro grau em ρ, apresentado a seguir:

$$\rho^3 - 1,19445\,\rho^2 + 0,33333\,\rho - 0,02701 = 0$$

cujas raízes são: ρ_1=0,83333, ρ_2=0,19484 e ρ_3=0,16628. Portanto, o máximo auto-valor é ρ_m=0,83333.

O sistema homogêneo linear que determinará o vetor de multiplicadores, após substituido o máximo auto-valor, resulta:

$$\begin{bmatrix} 60 & -50 & -40 \\ -120 & 250 & -40 \\ -60 & -150 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A equação adicional que define a unidade em que são expressos os multiplicadores e garante que a quantidade física de trabalho emprega-

---

12/ A simplificação consiste na multiplicação da primeira coluna por 1/180, a segunda por 1/450 e a terceira por 1/480. De modo geral, essa simplificação consiste em se pós-multiplicar ambos os membros da equação (3.2.6) por $|Q^{-1}|$, isto é:

$$|\rho Q - Q|\,|Q^{-1}| = 0$$

ou:

$$|\rho Q Q^{-1} - Q Q^{-1}| = 0$$

resultando:

$$|\rho I - A| = 0$$

onde I, é a matriz identidade, e A a matriz de coeficientes técnicos, definida no Apêndice A.

da é igual à quantidade total do sistema real; equacionada em (3.2.4), fica assim expressa:

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/16 \\ 5/16 \\ 8/16 \end{bmatrix} = 1$$

Resolvendo-se o sistema, obtém-se o seguinte vetor solução de multiplicadores:

$$\hat{k} = \begin{Bmatrix} 4/3 \\ 4/5 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

e finalmente, de (3.2.7), obtém-se a <u>razão padrão</u>, ou seja:

$$\hat{R} = 1/0,83333 - 1 = 20\%$$

Aplicando-se o conjunto de multiplicadores encontrado às equações de produção do sistema real, conforme (3.2.8), transforma-se tal sistema no <u>sistema padrão</u>, isto é:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4/3 \left[(90p_1 + 120p_2 + 60p_3)(1+r) + 3/16w\right] = 4/3(180p_1) \\ 4/5 \left[(50p_1 + 125p_2 + 150p_3)(1+r) + 5/16w\right] = 4/5(450p_2) \\ \quad 1 \left[(40p_1 + 40p_2 + 200p_3)(1+r) + 8/16w\right] = 1(480p_3) \end{array} \right.$$

ou, efetuando-se os produtos:

$$\left\{ \begin{array}{lllll} (120p_1 & + 160p_2 & + \ 80p_3)(1+r) & - 4/16w & = 240p_1 \\ (\ 40p_1 & + 100p_2 & + 120p_3)(1+r) & - 4/16w & = 360p_2 \\ (\ 40p_1 & + \ 40p_2 & + 200p_3)(1+r) & - 8/16w & = 480p_3 \\ \hline \quad 200 & \quad 300 & \quad 400 & \quad 1 & \end{array} \right.$$

As proporções em que as mercadorias são produzidas no sistema padrão são:(240:360:480), ou dividindo-se todas elas por 240: (240/240::360/240:480/240); o que resulta: (1tn. ferro: 1,5tn. carvão: 2 arr. trigo).

As proporções em que as mercadorias entram no agregado dos meios de produção no mesmo sistema, são: (200:300:400), ou dividindo-se todas por 200: (200/200:300/200:400/200), resultando: (1tn. ferro: 1,5tn. carvão: 2 arr. trigo).

Portanto, como era de se esperar, no sistema padrão as proporções em que as mercadorias são produzidas, são iguais às proporções em que essas mesmas mercadorias entram no agregado dos meios de produção. Logo a mercadoria composta padrão, que constitui a renda nacional desse sistema, deve ser formada nas mesmas proporções, ou seja:

$$\left[240 - (120+40+40)\right] : \left[360 - (160+100+40)\right] : \left[480 - (80+120+200)\right]$$

o que resulta: (40:60:80). Dividindo-se todas por 40, obtém-se as proporções esperadas, isto é: (1tn. ferro: 1,5tn. carvão: 2 arr. trigo).

A taxa em que a quantidade produzida excede a quantidade utilizada como meios de produção, isto é, a razão padrão R; é a mesma para cada indústria. Isso pode ser verificado se se compara, para cada indústria, a quantidade produzida com a quantidade utilizada como meios de produção; como é feito a seguir:

$$\begin{aligned}
240 \text{ tn. ferro} &= (1+0,20)(120+40+40)\\
360 \text{ tn. carvão} &= (1+0,20)(160+100+40)\\
480 \text{ arr. trigo} &= (1+0,20)(80+90+150)
\end{aligned}$$

R=0,20, também é a taxa em que o produto total do sistema padrão excede os seus meios de produção (ou a razão padrão entre o produto líquido e os meios de produção), isto é:

$$R = \frac{40 + 60 + 80}{200 + 300 + 400} = 0{,}20$$

7. "Não-Básicos" excluídos do sistema padrão

Veremos a seguir, que as mercadorias "Não-Básicas" não participam do sistema padrão e portanto, são excluídas desse sistema. Precisa-se provar que o multiplicador para a equação de produção de uma mercadoria "Não-Básica", só pode ser zero.

Dadas as matrizes particionadas Q e $\bar{Q}$, definidas no Capítulo I-seção 5. Onde, as sub-matrizes Q_{11} e $\bar{Q}_{11}$ de dimensão mxm, representam respectivamente quantidades físicas de meios de produção e produto de mercadorias "Básicas"; a sub-matriz Q_{12} de dimensão $mx(n-1-m)$, representa as quantidades físicas de mercadorias "Básicas" que entram na produção das "Não-Básicas"; e as sub-matrizes Q_{22} e $\bar{Q}_{22}$ de dimensão $(n-1-m)x(n-1-m)$, dizem respeito às condições de produção das mercadorias "Não-Básicas". Substituindo-se tais matrizes no sistema de multiplicadores (3.2.2), obtém-se:

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} (1+R) = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \qquad (3.7.1)$$

Após terem sido feitas as transformações usuais, o sistema acima aparece sob a forma do sistema (3.2.5), como se segue:

$$\begin{pmatrix} \rho \bar{Q}_{11} - Q_{11} & -Q_{12} \\ 0 & \rho \bar{Q}_{22} - Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (3.7.2)$$

onde, $\rho = 1/(1+R)$.

A solução trivial ($k_1=0$ e $k_2=0$) sempre existe. Mas, para que existam soluções não-triviais, pois é o que se busca, condiciona-se que:

$$\begin{vmatrix} \rho Q_{11}-Q_{11} & -Q_{12} \\ 0 & \rho Q_{22}-Q_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.7.3)$$

Na equação característica (3.7.3), os auto-valores da matriz particionada triangular coincidem com os auto-valores das sub-matrizes da diagonal principal. Portanto, a equação (3.7.3) reduz-se à:

$$|(\rho Q_{11}-Q_{11})||(\rho Q_{22}-Q_{22})| = 0 \qquad (3.7.4)$$

onde, o primeiro determinante de (3.7.4) resulta num polinômio de grau m em ρ ; e o segundo, num de grau (n-1-m) em ρ .

Apenas um dos (n-1) auto-valores de (3.7.4), está associado a um vetor de multiplicadores não-negativo; que corresponde ao máximo auto-valor, representado por ρ_m. Portanto, substituindo-se ρ_m em (3.7.2) e efetuando-se o produto, obtém-se:

$$\left(\rho_m Q_{11}-Q_{11}\right) k_1 - Q_{12}k_2 = 0 \qquad (3.7.5)$$

e

$$\left(\rho_m Q_{22}-Q_{22}\right) k_2 = 0 \qquad (3.7.6)$$

Para que $k_1 > 0$, em (3.7.5), desde que $|\rho_m Q_{11}-Q_{11}|=0$, de (3.7.4); é necessário que: $Q_{12}k_2=0$. Mas, como por suposição Q_{22} é irredutível[13/], pelo menos um elemento de Q_{12} é positivo, isto é, a sub-matriz Q_{12} é semi-positiva. Portanto, k_2 tem que ser zero.

13/ Revêja-se seção 5 - Capítulo I.

Fica provado que, as mercadorias "Não-Básicas" que figuram nos meios de produção de algumas mercadorias "Básicas", possuem multiplicador zero, isto é, $k_2=0$. As outras mercadorias "Não-Básicas" que, embora não figurem nos meios de producão das mercadorias em geral, são usadas apenas na produção de "Não-Básicas", conforme mostra o sistema (3.7.6); são determinadas exclusivamente por suas equações de produção, não se relacionando com ρ_m e consequentemente com R, sendo incompatível com o <u>sistema padrão</u>.

Conclui-se então que, para determinação do <u>sistema padrão</u>, todas as mercadorias "Não-Básicas" podem ser eliminadas desde o início do sistema de equações, considerando-se apenas as mercadorias "Básicas".

Capítulo IV

REDUÇÃO A QUANTIDADES DATADAS DE TRABALHO

1. Introdução

Este capítulo objetiva apresentar de forma generica a operação de redução a quantidades datadas de trabalho, proposta por Sraffa. Na Seção 2, define-se e analisa-se algumas particularidades da operação de redução dos diversos meios de produção por quantidades datadas de trabalho. Na seção seguinte, ensaia-se um estudo de preços em termos de quantidades de trabalho, quando se muda a distribuição da renda entre lucros e salários. Finalmente, a última seção analisa a variação de tessimo termo trabalho quando muda a distribuição da renda.

2. Definição de redução

Define-se redução a quantidades datadas de trabalho, à operação pela qual na equação de produção de uma mercadoria, substitui-se os diversos meios de produção por uma série de quantidades de trabalho, cada qual na sua respectiva data; ou de maneira genérica, a operação de se substituir no sistema de produção a matriz de quantidades físicas de meios de produção por uma série de vetores representando quantidades físicas de trabalho, nas suas respectivas datas.

Tomando-se o sistema de produção (1.5.2), e substituindo-se as mercadorias que compõem os meios de produção desse sistema, por seus próprios meios de produção e quantidades de trabalho, isto é, substituindo-se a matriz de quantidades físicas de meios de produção pela sua própria matriz de meios de produção e pelo vetor de trabalho, este último multiplicado pelo fator de lucro (1+r) e o primeiro por $(1+r)^2$ por ser gasto um ano antes; obtém-se o seguinte sistema:

$$q'_n w + q'_{n(1)} w(1+r) + Q'_{(1)} p(1+r)^2 = Qp \qquad (4.2.1)_a$$

onde: $q'_{n(1)}$, é o vetor coluna de quantidades físicas de trabalho indireto aplicado na primeira redução; e $Q'_{(1)}$, a matriz de quantidades físicas de meios de produção após a primeira redução.

Por sua vêz, se substitui os últimos meios de produção por seus próprios meios de produção e trabalho, ambos multiplicados pelos seus apropriados fatores de lucro, isto é, a matriz de meios de produção por $(1+r)^3$ e o vetor trabalho por $(1+r)^2$; o sistema $(4.2.1)_a$, aparece da seguinte forma:

$$q'_n w + q'_{n(1)} w(1+r) + q'_{n(2)} w(1+r)^2 + Q'_{(2)} p(1+r)^3 = Qp \qquad (4.2.1)_b$$

onde: $q'_{n(2)}$, é o vetor coluna de quantidades físicas de trabalho indireto aplicado na segunda redução; e $Q'_{(2)}$, a matriz de quantidades físicas de meios de produção após a segunda redução.

Proseguindo-se com essa operação até a $t$éssima redução, obtém-se o sistema de produção reduzido a quantidades datadas de trabalho, mostrado a seguir:

$$q'_n w + q'_{n(1)} w(1+r) + q'_{n(2)} w(1+r)^2 + \ldots + q'_{n(t)} w(1+r)^k + Q'_{(t)} p(1+r)^{t+1} = Qp$$

(4.2.1)

onde: $q'_{n(t)}$, é o vetor coluna de quantidades físicas de trabalho indireto aplicado na $\underline{t}$essima redução; e $Q'_{(t)}$, a matriz de quantidades físicas de meios de produção após a $\underline{t}$essima redução.

No primeiro membro do sistema (4.2.1), além dos vetores de trabalho direto e indireto, haverá sempre um "resíduo de mercadorias", representado pelo último termo, ou seja:

$$Q'_{(t)}p(1+r)^{t+1}$$

que consiste em uma fração mínima de cada mercadoria "Básica". Mas à medida que se leva a redução suficientemente longe, isto é, quando $\underline{t}$ é bastante grande, esse termo torna-se tão pequeno que, qualquer que seja a taxa de lucros, exceto a $r=R$ 14/, não influencia no vetor de preços $\underline{p}$, isto é:

$$\lim_{k \to \infty} Q'_{(t)}p(1+r)^{t+1} = 0 \qquad \forall\, r \in [0,R) \qquad (4.2.2)$$

3. Preços em termos de trabalho *versus* mudanças na distribuição da renda

Os preços agora, serão analisados sob a ótica de custos de produção, ou seja, preços determinados pela quantidade de trabalho que direta ou indiretamente entra na produção das mercadorias; à medida que

---

14/ Excepcionalmente, ao nível $r=R$, isto é, quando toda a renda nacional vai para lucros e $w=0$; o termo representando o "resíduo de mercadorias", torna-se muito importante, como a única determinante do preço das mercadorias. A esse nível de distribuição, o sistema . . (4.2.1) transformaria-se no seguinte sistema:

$$Q'_{(t)}p(1+R)^{t+1} = \mathbb{Q}p$$

se varia a distribuição da renda.

Ao nível de distribuição em que toda a renda nacional vai para salários, isto é, w=1; a taxa de lucros r=0. Introduzindo-se estes valores em (4.2.1) e desprezando-se o "resíduo de mercadorias", obtém-se:

$$q'_n + q'_{n(1)} + q'_{n(2)} +. . .+ q'_{n(t)} = \mathbb{Q}p \qquad (4.3.1)$$

Pré-multiplicando-se ambos os membros de (4.3.1) pela matriz inversa $\mathbb{Q}^{-1}$, obtém-se o seguinte vetor de preços:

$$p=\hat{p} = \mathbb{Q}^{-1}\left(q'_n + q'_{n(1)} + q'_{n(2)} +. . .+ q'_{n(t)}\right) \qquad (4.3.2)$$

A esse nível de distribuição, o vetor de precos $\underline{p}$ é igual aos seus custos em termos de trabalho que direta ou indiretamente entrou em sua produção.

Ao ser reduzida a participação do salário na renda nacional, de modo que $0 < w=\bar{w} < 1$, o sistema (4.2.1) transforma-se no seguinte sistema:

$$q'_n\bar{w}+q'_{n(1)}\bar{w}(1+r)+q'_{n(2)}\bar{w}(1+r)^2+. . .+q'_{n(t)}\bar{w}(1+r)^t = \mathbb{Q}p \qquad (4.3.3)$$

Pré-multiplicando-se ambos os lados de (4.3.3) pela matriz inversa $\mathbb{Q}^{-1}$, o vetor de preços fica assim determinado:

$$p=\hat{p} = \mathbb{Q}^{-1}\bar{w}\left[q'_n+q'_{n(1)}(1+r)+q'_{n(2)}(1+r)^2+. . .+q'_{n(t)}(1+r)^t\right] \qquad (4.3.4)$$

Nos níveis $0 < w=w < 1$, em que $0 < r < R$, os preços são proporcionais às quantidades de trabalho que direta ou indiretamente foram utili- utilizadas na produção das mercadorias; não sendo mais exatamente iguais como do caso anterior. Neste caso, os preços dependem ainda do nível particular da taxa de lucros.

4. Variação do tessimo termo quando muda a distribuição de renda

Para se concluir a respeito da variação de cada termo do sistema de redução, quando muda a distribuição da renda; toma-se primeiramente o tessimo termo desse sistema, isto é:

$$q'_{n(t)} w(1+r)^{t} \qquad t=(1,2,\ldots) \qquad (4.4.1)$$

A seguir, coloca-se a relação (3.4.6) na sua forma inversa, isto é:

$$w = 1 - \frac{r}{R} \qquad (4.4.2)$$

obtendo-se assim, a variação do salário quando muda a taxa de lucros.

Finalmente, substituindo-se (4.4.2) em (4.4.1), obtém-se a forma geral do tessimo termo trabalho:

$$q'_{n(t)} (1 - \frac{r}{R})(1+r)^{t} \qquad t=(1,2,\ldots) \qquad (4.4.3)$$

Diferenciando-se (4.4.3) em relação a r, obtém-se:

$$\frac{d\left[q'_{n(t)}(1-\frac{r}{R})(1+r)^{t}\right]}{dr} = q'_{n(t)}\left[t(1-\frac{r}{R})(1+r)^{t-1} - \frac{1}{R}(1+r)^{t}\right] \qquad (4.4.4)$$

Observa-se que, ao nível r=0, o tessimo termo trabalho depende exclusivamente de sua magnitude, não importando o valor assumido por t. Isso pode ser visto substituindo-se r=0 em (4.4.4).

À medida que $\underline{r}$ varia, no intervalo $(0,R)$, o $\underline{t}$essimo termo trabalho ou diminui imediatamente e permanece assim continuadamente ou aumenta inicialmente para diminuir posteriormente; a depender do valor assumido por $\underline{t}$.

Maximizando-se o termo trabalho, isto é, igualando-se a zero a expressão (4.4.4):

$$q'_{n(t)}\left[t(1-\frac{r}{R})(1+r)^{t-1} - \frac{1}{R}(1+r)^{t}\right] = 0$$

para que esse produto seja nulo, já que $q'_{n(t)}$ não pode ser zero, é necessário que:

$$t(1-\frac{r}{R})(1+r)^{t-1} - \frac{1}{R}(1+r)^{t} = 0$$

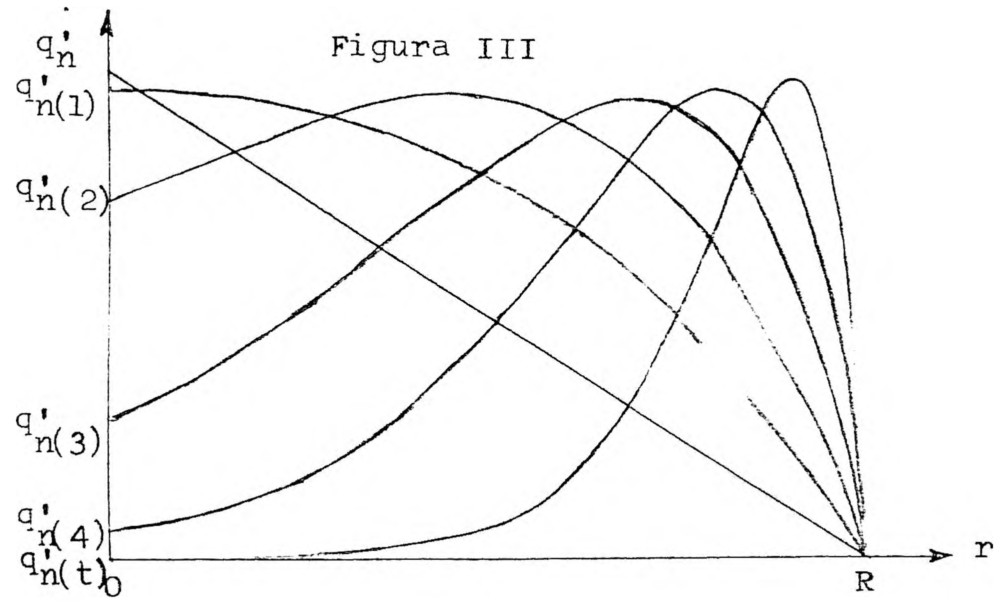
fazendo-se algumas simplificações, obtém-se a seguinte relação para $\underline{t}$:

$$t = \frac{1+r}{R-r} \qquad (4.4.5)$$

Existe um valor limite de $\underline{t}$ que separa os termos trabalho em dois grupos. O primeiro, aqueles termos que diminuem sempre de intensidade à medida que $\underline{r}$ aumenta, os quais Sraffa classificou-os no grupo de "datas recentes", E o segundo, aqueles termos que aumentam inicialmente para depois diminuirem, que formam o grupo das "datas remotas". Esse valor de $\underline{t}$ que se busca, é o $\underline{t}$essimo termo trabalho que tem seu máximo a $r=0$. Portanto, substituindo-se $r=0$ em (4.4.5), obtém-se: $t=1/R$. Logo, para $t \leq 1/R$, os termos trabalho formam o grupo das "datas recentes" e para $t > 1/R$, o grupo das "datas remotas".

As variações dos termos trabalho, quando muda a distribuição da renda, podem ser vistas na Figura III.

Figura III



CONCLUSÃO

Comprovadamente um dos aspectos que confirma o regresso de Sraffa a modos de pensamento mais antigos, foi a concepção de um sistema de produção circular, no qual as mesmas espécies de mercadorias figuram tanto entre os meios de produção quanto entre os produtos. Foi Quesnay em Tableau Economique, quem primeiro caracterizou um sistema produtivo representado como um processo circular.

Em Produção de Mercadorias por meio de Mercadorias, Sraffa fundamenta sua teoria em uma série de proposições teóricas e aborda a natureza da produção de um sistema econômico que não depende de mudanças na escala de produção, ou nas proporções dos fatores; à medida em que concebe o sistema produtivo como um processo circular. Sraffa procura sempre, dentro de uma linha comum de raciocínio, investigar os efeitos que mudanças na distribuição da renda podem ter sobre os preços relativos das mercadorias.

A não consideração de quaisquer mudanças no produto e nas proporções em que os meios de produção são usados por uma indústria, levaram Sraffa a se libertar da pressuposição de "retornos cons -

tantes de escala". A razão básica para que sua análise seja isenta de qualquer pressuposto desse tipo, reside no fato de que ele estava interessado em investigar um sistema econômico no qual nada muda exceto a distribuição do produto entre lucros e salários.

Sraffa desenvolve sua análise através de tres fases que se completam, partindo da mais simples para a mais complexa. Na primeira ele apresenta um processo produtivo para uma economia extremamente simples, que produz apenas o suficiente para subsistência, isto é, as quantidades físicas produzidas de cada mercadoria são exatamente iguais às quantidades físicas utilizadas como meios de produção, sendo estas quantidades físicas consideradas como dadas no processo produtivo. Nesse esquema de produção os preços relativos são determinados de modo muito simples, como aqueles preços que baseando-se na regra de igualdade entre valores da produção e valores dos custos, permitem restabelecer sempre a posição inicial do sistema.

Na segunda fase, Sraffa desenvolve um processo de produção caracterizado pela existência de um superavit. Nesse caso a economia produz mais que o mínimo necessário para sua reposição, e as quantidades físicas produzidas de cada mercadoria é maior ou igual que as quantidades físicas usadas como meios de produção. Consequentemente, o valor de produção agregado supera o valor dos custos em termos agregados. Nesta fase, o sistema de equações determina simultaneamente os preços relativos e a taxa de lucros, taxa cuja presença no sistema se deve ao fato de que o superavit (ou lucro) se distribui em cada indústria proporcionalmente ao valor dos meios de producão utilizados. Nessa fase, o trabalho não está presente de modo direto mas apenas através das mercadorias consumidas pelos trabalhadores, mercadorias consideradas como meios de produção conjuntamente com os outros meios técnicos.

Só na terceira fase é que Sraffa separa o trabalho dos outros meios de produção, distinguindo também o salário dos outros preços. Entretanto surge nesta fase, o fato de que o salário e a taxa de lucros não podem ser determinados simultaneamente pelo sistema de equações. Visto que o número de incógnitas supera em uma unidade o número de equações. Portanto uma destas duas variáveis deve ser determinada exogenamente, e a outra determinada em função da primeira. Neste ponto Sraffa segue a tradição clássica defendida por Ricardo, que consiste em determinar o salário com base em elementos externos ao sistema econômico (fixando-se o salário pelo seu nível de subsistência), de modo que a taxa de lucros seja definida em função do salário assim determinado.

Um dos aspectos característicos do modelo de Sraffa foi, partindo do sistema de produção por ele proposto, conseguir analisar os efeitos que modificações na distribuição da renda tem sobre os preços relativos das mercadorias, e mostrar categóricamente que o capital não pode ser tratado como uma grandeza dada e independente da distribuição - como postulavam os marginalistas. O capital é um estoque heterogêneo composto de meios de producão; a quantidade de capital consequentemente só pode ser expressa pelo preco total desses meios de produção, e os preços, por sua vez, só podem ser determinados uma vez fixada a divisão do produto em lucros e salários. Essa concepção opõe-se inteiramente à concepção marginalista de explicar a distribuição da renda, tratando a produção como um processo linear (começando por ser dada a dotacão relativa de fatores e terminando com a obtenção do produto).

Um outro aspecto que torna o modelo de Sraffa uma contribuição relevante à Teoria do Valor é a introdução de uma particular unidade de medida dos valores, em substituição à mercadoria simples escolhida arbitrariamente. Esse padrão de valor é constituído por uma composição de mercadorias cuja característica básica é resaltada pelo fato de que tanto as mercadorias que compõem o produto quanto as que fazem parte dos meios de produção, se encontram nas mesmas proporções. Nesta mercadoria, chamada de <u>mercadoria padrão</u>, existe homogeneidade física entre o produto líquido e os meios de produção, pois trata-se de dois agregados constituídos das mesmas mercadorias. Consequentemente o produto líquido medido na <u>mercadoria padrão</u> determina-se em termos físicos, independentemente dos preços. Esta unidade de medida, considerada por Sraffa, para servir de padrão de valor em termos do qual são expressos os preços e o salário, é constituída pelo produto líquido medido na <u>mercadoria padrão</u> utilizando-se para produzi-lo, todo o trabalho anual do sistema real. Se o salário é pago em termos do <u>produto líquido padrão</u> e considerando-se como unidade de medida do trabalho todo o trabalho anual do sistema, essa <u>mercadoria padrão</u> seria capaz de isolar as variações de preços das mercadorias, quando mudasse a distribuição da renda.

O ponto crucial na construção de Sraffa é no que se refere ao problema da Teoria do Valor. Sraffa consegue formar uma teoria que não sofre das contradições formais, as quais Smith , Ricardo e Marx não conseguiram fugir. Ele conduz sua análise completamente independente da teoria do "valor-trabalho". No modelo de Sraffa, os preços estão fundamentados essencialmente nas condições de produção das mercadorias. Dadas as quantidades físicas de cada mercadoria que compõem os meios de produção, e fixada exógenamente a taxa de salário, o preço relativo de cada mercadoria aparece como a soma dos preços de cada mercadoria utilizada como meios de produção, de trabalho, e de um lucro calculado de tal modo que a taxa de lucros é igual para todas as mercadorias. Assim a formação dos preços distribui entre as diversas indústrias, um excedente (ou lucro) cujo montante é uma função decrescente da taxa de salário. Além do carater explicativo da formação dos preços, a análise de Sraffa estabelece uma relação de proporcionalidade entre os preços e as quantidades de trabalho incorporadas nas mercadorias; embora o estabelecimento desse vínculo entre preços e valores não seja absolutamente necessário para que se compreenda como se determinam os próprios preços. Portanto, não existe a obrigatoriedade de partir de valores para obter como resultado os preços de produção.

APÊNDICE A: Redefinição das matrizes

A matriz $\underline{Q}$, de quantidades físicas de meios de produção, de dimensão (n-1)X(n-1), escrita na forma literal, é assim definida:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1,n-1} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n-1,1} & q_{n-1,2} & \cdots & q_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

Onde, o termo q_{ij} representa a quantidade física da mercadoria $\underline{i}$ requerida como meio de produção da indústria $\underline{j}$. Do mesmo modo, a matriz transposta $\underline{Q}'$, fica assim definida:

$$Q' = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} & \cdots & q_{n-1,1} \\ q_{12} & q_{22} & \cdots & q_{n-1,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{1,n-1} & q_{2,n-1} & \cdots & q_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

Onde, q_{ji} representa as quantidades físicas da indústria $\underline{j}$ cedidas como meios de produção para produzir a mercadoria $\underline{i}$.

A matriz diagonal $\underline{\hat{Q}}$, de quantidades físicas de produto, também de dimensão (n-1)X(n-1), é definida na sua forma literal da seguinte maneira:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{1=1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_{2=2} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & q_{n-1=n-1} \end{bmatrix}$$

Onde $q_{i=j}$, representa as quantidades físicas produzidas da mercadoria $\underline{i}$ ou indústria $\underline{j}$.

A matriz $\underline{A}$, de coeficientes técnicos de produção, definida através da transformação $Q\hat{Q}^{-1} = A$ (que pode ser vista no apêndice 3), é assim expressa literalmente:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_{11}}{q_{1=1}} & \frac{q_{12}}{q_{2=2}} & \cdots & \frac{q_{1,n-1}}{q_{n-1=n-1}} \\ \frac{q_{21}}{q_{1=1}} & \frac{q_{22}}{q_{2=2}} & \cdots & \frac{q_{2,n-1}}{q_{n-1=n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{q_{n-1,1}}{q_{1=1}} & \frac{q_{n-1,2}}{q_{2=2}} & \cdots & \frac{q_{n-1,n-1}}{q_{n-1=n-1}} \end{bmatrix}$$

Onde, a_{ij} representa a quantidade física requerida da mercadoria $\underline{i}$ para gerar uma unidade de produto da indústria $\underline{j}$. Análogamente, a matriz transposta $\underline{A'}$, definida pela transformação $\hat{Q}^{-1}Q' = A'$, é expressa a seguir na forma literal:

$$
A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n-1,1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n-1,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{q_{11}}{q_{1=1}} & \dfrac{q_{21}}{q_{1=1}} & \cdots & \dfrac{q_{n-1,1}}{q_{1=1}} \\ \dfrac{q_{12}}{q_{2=2}} & \dfrac{q_{22}}{q_{2=2}} & \cdots & \dfrac{q_{n-1,2}}{q_{2=2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{q_{1,n-1}}{q_{n-1=n-1}} & \dfrac{q_{2,n-1}}{q_{n-1=n-1}} & \cdots & \dfrac{q_{n-1,n-1}}{q_{n-1=n-1}} \end{pmatrix}
$$

Onde o termo a_{ji} representa a quantidade física da indústria $\underline{j}$ cedidas como meios de produção para produzir uma unidade da mercadoria $\underline{i}$.

APÊNDICE B: Principais operações e resultados obtidos com matrizes

A seguir serão mostradas na forma literal, os principais resultados obtidos nas operações com matrizes, encontrados no decorrer deste trabalho:

$$
Q'P = \begin{pmatrix}
q_{11} & q_{21} & \cdots & q_{n-1,1} \\
q_{12} & q_{22} & \cdots & q_{n-1,2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
q_{1,n-1} & q_{2,n-1} & & q_{n-1,n-1}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1}
\end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
q_{11}p_1 + q_{21}p_2 + \cdots + q_{n-1,1}p_{n-1} \\
q_{12}p_1 + q_{22}p_2 + \cdots + q_{n-1,2}p_{n-1} \\
\vdots \\
q_{1,n-1}p_1 + q_{2,n-1}p_2 + \cdots + q_{n-1,n-1}p_{n-1}
\end{pmatrix}
$$

$$
QP = \begin{pmatrix}
q_{1=1} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & q_{2=2} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & q_{n-1=n-1}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1}
\end{pmatrix} =
\begin{pmatrix}
q_{1=1}p_1 \\ q_{2=2}p_2 \\ \vdots \\ q_{n-1=n-1}p_{n-1}
\end{pmatrix}
$$

$$Q'p(1+r) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \cdots & q_{n-1,1} \\ q_{12} & q_{22} & \cdots & q_{n-1,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{1,n-1} & q_{2,n-1} & \cdots & q_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{n-1} \end{pmatrix} (1+r) =$$

$$= \begin{pmatrix} (q_{11}p_1 & + & q_{21}p_2 & + \cdots + & q_{n-1,1}p_{n-1})(1+r) \\ (q_{12}p_1 & + & q_{22}p_2 & + \cdots + & q_{n-1,2}p_{n-1})(1+r) \\ \cdot & & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdots & \cdot \\ (q_{1,n-1}p_1 & + & q_{2,n-1}p_2 & + \cdots + & q_{n-1,n-1}p_{n-1})(1+r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sum_{j=1}^{n-1} q_{j1}p_j)(1+r \\ (\sum_{j=1}^{n-1} q_{j2}p_j)(1+r \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (\sum_{j=1}^{n-1} q_{j,n-1}p_j)(1+r \end{pmatrix}$$

$$(\lambda Q - Q')p = \begin{pmatrix} (\lambda q_{1=1} - q_{11}) & -q_{21} & \cdots & -q_{n-1,1} \\ -q_{12} & (\lambda q_{2=2} - q_{22}) & \cdots & -q_{n-1,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -q_{1,n-1} & -q_{2,n-1} & \cdots & (\lambda q_{n-1=n-1} - q_{n-1,n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\lambda q_{1=1} - q_{11})p_1 & - & q_{21}p_2 & - \cdots - & q_{n-1,1}p_{n-1} \\ -q_{12}p_1 & + & (\lambda q_{2=2} - q_{22})p_2 & - \cdots - & q_{n-1,2}p_{n-1} \\ \cdot & & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdots & \cdot \\ -q_{1,n-1}p_1 & - & q_{2,n-1}p_2 & - \cdots + & (\lambda q_{n-1=n-1} - q_{n-1,n-1})p_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$Q Q^{-1} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1,n-1} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n-1,1} & q_{n-1,2} & \cdots & q_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/q_{1=1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/q_{2=2} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1/q_{n-1=n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} q_{11}/q_{1=1} & q_{12}/q_{2=2} & \cdots & q_{1,n-1}/q_{n-1=n-1} \\ q_{21}/q_{1=1} & q_{22}/q_{2=2} & \cdots & q_{2,n-1}/q_{n-1=n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n-1,1}/q_{1=1} & q_{n-1,2}/q_{2=2} & \cdots & q_{n-1,n-1}/q_{n-1=n-1} \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} Q' = \begin{pmatrix} 1/q_{1=1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/q_{2=2} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1/q_{n-1=n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \cdots & q_{n-1,1} \\ q_{12} & q_{22} & \cdots & q_{n-1,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{1,n-1} & q_{2,n-1} & \cdots & q_{n-1,n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} q_{11}/q_{1=1} & q_{21}/q_{1=1} & \cdots & q_{n-1,1}/q_{1=1} \\ q_{12}/q_{2=2} & q_{22}/q_{2=2} & \cdots & q_{n-1,2}/q_{2=2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{1,n-1}/q_{n-1=n-1} & q_{2,n-1}/q_{n-1=n-1} & \cdots & q_{n-1,n-1}/q_{n-1=n-1} \end{pmatrix}$$

$$q_n' w = \begin{pmatrix} q_{n1} \\ q_{n2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{n,n-1} \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} q_{n1} w \\ q_{n2} w \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{n,n-1} w \end{pmatrix}$$

$$\tilde{1}Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{1=1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_{2=2} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & q_{n-1=n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{1=1} & q_{2=2} & \cdots & q_{n-1=n-1} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{1}Q' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} & \cdots & q_{n-1,1} \\ q_{12} & q_{22} & \cdots & q_{n-1,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{1,n-1} & q_{2,n-1} & \cdots & q_{n-1,n-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} q_{11}+q_{12}+\ldots+q_{1,n-1} & q_{21}+q_{22}+\ldots+q_{2,n-1} & \cdots & q_{n-1,1}+q_{n-1,2}+\ldots+q_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{1}Q - \tilde{1}Q' \end{bmatrix} p = (q_{1=1} - \sum_{i=1}^{n-1} q_{1i}) p_1 + (q_{2=2} - \sum_{i=1}^{n-1} q_{2i}) p_2 + \ldots + (q_{n-1=n-1} - \sum_{i=1}^{n-1} q_{n-1,i}) p_{n-1}$$

$$Qk(1+R) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1,n-1} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n-1,1} & q_{n-1,2} & \cdots & q_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ k_{n-1} \end{pmatrix} (1+R) =$$

$$= \begin{pmatrix} (q_{11}k_1 & + q_{12}k_2 & + \cdots & + q_{1,n-1}k_{n-1})(1+R) \\ (q_{21}k_1 & + q_{22}k_2 & + \cdots & + q_{2,n-1}k_{n-1})(1+R) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \quad \cdot \\ (q_{n-1,1}k_1 & + q_{n-1,2}k_2 & + \cdots & + q_{n-1,n-1}k_{n-1})(1+R) \end{pmatrix}$$

$$\hat{Q}k = \begin{pmatrix} q_{1=1} & 0 & \cdots & 0 & k_1 \\ 0 & q_{2=2} & \cdots & 0 & k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & q_{n-1=n-1} & k_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{1=1}k_1 \\ q_{2=2}k_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{n-1=n-1}k_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$(\rho\hat{Q} - Q)k = \begin{pmatrix} (\rho q_{1=1} - q_{11}) & -q_{12} & \cdots & -q_{1,n-1} \\ -q_{21} & (\rho q_{2=2} - q_{22}) & \cdots & -q_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -q_{n-1,1} & -q_{n-1,2} & \cdots & (\rho q_{n-1=n-1} - q_{n-1,n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ k_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$
= \begin{pmatrix}
(q_{1=1} - q_{11})k_1 - q_{12}k_2 - \cdots - q_{1,n-1}k_{n-1} \\
-q_{21}k_1 + (q_{2=2} - q_{22})k_2 - \cdots - q_{2,n-1}k_{n-1} \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \cdots \qquad \vdots \\
-q_{n-1,1}k_1 - q_{n-1,2}k_2 - \cdots + (q_{n-1=n-1} - q_{n-1,n-1})k_{n-1}
\end{pmatrix}
$$

$$
\hat{k}\left\{Q'p(1-r) + q_n' w\right\} = \begin{pmatrix}
\hat{k}_{1=1} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \hat{k}_{2=2} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \hat{k}_{n-1=n-1}
\end{pmatrix}
\left\{
\begin{pmatrix}
(\sum_{j=1}^{n-1} q_{j1}p_j)(1+r) \\
(\sum_{j=1}^{n-1} q_{j2}p_j)(1+r) \\
\vdots \\
(\sum_{j=1}^{n-1} q_{jn-1}p_j)(1+r)
\end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix}
q_{n1}w \\
q_{n2}w \\
\vdots \\
q_{n,n-1}w
\end{pmatrix}
\right\} =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
\hat{k}_{1=1}\left\{(\sum_{j=1}^{n-1} q_{j1}p_j)(1+r) + q_{n1}w\right\} \\
\hat{k}_{2=2}\left\{(\sum_{j=1}^{n-1} q_{j2}p_j)(1+r) + q_{n2}w\right\} \\
\vdots \\
\hat{k}_{n-1,n-1}\left\{(\sum_{j=1}^{n-1} q_{jn-1}p_j)(1+r) + q_{n,n-1}w\right\}
\end{pmatrix}
$$

$$
\hat{k}\,\Box\,p = \begin{pmatrix}
\hat{k}_{1=1} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \hat{k}_{2=2} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \hat{k}_{n-1=n-1}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
q_{1=1} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & q_{2=2} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & q_{n-1=n-1}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
p_1 \\
p_2 \\
\vdots \\
p_{n-1}
\end{pmatrix} =
$$

$$\hat{k}'(Q-Q')p = \begin{pmatrix} \hat{k}_1 & \hat{k}_2 & \dots & \hat{k}_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{1=1}-q_{11} & -q_{21} & \dots & -q_{n-1,1} \\ -q_{12} & q_{2=2}-q_{22} & \dots & -q_{n-1,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -q_{1,n-1} & -q_{2,n-1} & \dots & q_{n-1=n-1}-q_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\hat{k}_1 q_{1=1} - \left(\sum_{j=1}^{n-1} \hat{k}_j q_{1j}\right)\right) p_1 + \left(\hat{k}_2 q_{2=2} - \left(\sum_{j=1}^{n-1} \hat{k}_j q_{2j}\right)\right) p_2 + \dots + \left(\hat{k}_{n-1} q_{n-1=n-1} - \left(\sum_{j=1}^{n-1} \hat{k}_j q_{n-1}\right)\right) p_{n-1}$$

$$\hat{k}'Q\bar{1} = \begin{pmatrix} \hat{k}_1 & \hat{k}_2 & \dots & \hat{k}_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{1=1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_{2=2} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & q_{n-1=n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \hat{k}_1 q_{1=1} + \hat{k}_2 q_{2=2} + \dots + \hat{k}_{n-1} q_{n-1=n-1} = \sum_{i=j=1}^{n-1} \hat{k}_j q_{i=j}$$

$$\hat{k}'Q'\bar{1} = \begin{pmatrix} \hat{k}_1 & \hat{k}_2 & \dots & \hat{k}_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \dots & q_{n-1,1} \\ q_{12} & q_{22} & \dots & q_{n-1,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{1,n-1} & q_{2,n-1} & \dots & q_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \hat{k}_1(q_{11}+q_{21}+\dots+q_{n-1,1}) + \hat{k}_2(q_{12}+q_{22}+\dots+q_{n-1,2}) + \dots +$$
$$+ \hat{k}_{n-1}(q_{1,n-1}+q_{2,n-1}+\dots+q_{n-1,n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \hat{k}_i \cdot \sum_{j=1}^{n-1} q_{ji}$$

$$w\hat{k}'q'_n = w\begin{bmatrix}\hat{k}_1 & \hat{k}_2 & \cdots & \hat{k}_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_{n1}\\ q_{n2}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ q_{n,n-1}\end{bmatrix} = w\hat{k}_1q_{n1} + w\hat{k}_2q_{n2} + \cdots + w\hat{k}_{n-1}q_{n,n-1}$$

$$= w\sum_{i=1}^{n-1}\hat{k}_i q_{ni}$$

$$\hat{k}'Q'p = \begin{bmatrix}\hat{k}_1 & \hat{k}_2 & \cdots & \hat{k}_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_{11} & q_{21} & \cdots & q_{n-1,1}\\ q_{12} & q_{22} & \cdots & q_{n-1,2}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ q_{1,n-1} & q_{2,n-1} & \cdots & q_{n-1,n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1\\ p_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ p_{n-1}\end{bmatrix} =$$

$$= \hat{k}_1(q_{11}p_1 + q_{21}p_2 + \cdots + q_{n-1,1}p_{n-1}) + \hat{k}_2(q_{12}p_1 + q_{22}p_2 + \cdots + q_{n-1,2}p_{n-1})$$

$$+ \cdots + \hat{k}_{n-1}(q_{1,n-1}p_1 + q_{2,n-1}p_2 + \cdots + q_{n-1,n-1}p_{n-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\hat{k}_i \cdot \sum_{j=1}^{n-1} q_{ji}p_j$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

01. BACHA, Edmar Lisboa; CARNEIRO NETTO, Dionisio; TAYLOR, Lance, Sraffa's Standard System: An Invariant Measure of Value - Sraffa and Classical Economics; Fundamental Equilibrium Relationships, Textos para Discussão, Universidade de Brasilia, 1973.

02. PASINETTI, Luigi L., Lectures on the Theory of Production, Columbia University Press, New York, 1977.

03. SRAFFA, Piero, Produção de Mercadorias por meio de Mercadorias - Prelúdio a uma Crítica da Teoria Econômica, Zahar Editores, Rio de Janeiro, 1977.