Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Tese de Doutorado

Contribuições para o estudo do operador de transferência, linear response formula e análise multifractal

Thiago Bomfim São Luiz Nunes

Salvador-Bahia
Outubro de 2014

Contribuições para o estudo do operador de transferência, linear response formula e análise multifractal

Thiago Bomfim São Luiz Nunes

Tese de Doutorado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática UFBA/UFAL como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Augusto Armando de Castro Jr.

Salvador-Bahia

Outubro de 2014

Nunes, Thiago Bomfim São Luiz.

Contribuições para o estudo do operador de transferência, linear response formula e análise multifractal / Thiago Bomfim São Luiz Nunes. – Salvador: UFBA, 2014.

171 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Augusto Armando de Castro Jr.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2014.

Referências bibliográficas.

1. Sistemas Dinâmicos. 2. Teoria Ergódica 3. Formalismo Termodinâmico. I. Castro, Augusto Armando de Jr. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 517.938

: 519.218.84

Contribuições para o estudo do operador de transferência, linear response formula e análise multifractal

Thiago Bomfim São Luiz Nunes

Tese de Doutorado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática UFBA/UFAL como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática, aprovada em 30 de outubro de 2014.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Augusto Armando de Castro Jr (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro
UFBA

Prof. Dr. Vitor Domingos Martins de Araújo
UFBA

Prof. Dr. Welington Celso de Melo
IMPA

Prof. Dr. Daniel Smania Brandão
USP-São carlos

A minha esposa e a todos que de algum modo contribuíram com esse trabalho.

Agradecimentos

Agradeço a todos aqueles que de alguma forma colaboraram com essa parte da minha vida acadêmica:

em especial à Adeline que é e sempre será a parte mais importante e bela da minha vida, muito obrigado pela sua paciência em ter de ceder maior parte do nosso tempo a esses anos de estudo, prometo daqui para frente consertar essa balança (se eu não fizer isso basta me mostrar esses agradecimentos);

ao meu orientador professor Augusto Armando de Castro Jr. por ter sido um grande pai na minha vida acadêmica, você sempre ocupará esse cargo;

ao professor Paulo Varandas por ser, além de um excelente matemático, um ombro amigo, um ótimo colaborador;

ao professor Vilton Pinheiro por ser mais uma vez uma das peças fundamentais na minha formação matemática;

ao professor Vitor Araújo, que apesar de eu não ter o prazer de cursar uma disciplina com o mesmo, por ter servido como uma inspiração de pesquisador;

aos professores Welington de Melo e Daniel Smania por terem me dado a honra e prazer de fazerem parte da minha banca;

aos meus colegas desses dois anos e oito meses de doutorado: Andrêssa, Roberto, Luiz, Teófilo, Kátia, Anderson, Morro, Wescley, Aubedir, Elen, Alejandra, (estarei na defesa de vocês);

à secretaria da pós-graduação da UFBA por sempre ter me atendido profissionalmente e gentilmente, em especial a Solange, Davilene, Gustavo, Márcio;

ao Departamento de Matemática da UFBA por, apesar de minha função como professor de tal Departamento, ter sempre me apoiado na minha função de aluno do doutorado, em especial aos chefes de departamento Ana Lúcia e Evandro;

e por fim, à CAPES pelo indispensável apoio financeiro.

"Faça as coisas o mais simples que você puder, porém não se restrinja às mais simples."

(Albert Einstein)

Resumo

Nesta tese estudamos classes robustas de sistemas dinâmicos não-uniformemente expansores. Inicialmente provamos a diferenciabilidade da pressão topológica e de estados de equilíbrio e suas densidades com respeito ao sistema dinâmico, obtendo fórmulas precisas para as derivadas. Tais resultados, que decorrem da uniformidade do gap espectral dos respectivos operadores de transferência obtida a partir da técnica de cones e métricas projetivas, têm fortes consequências nas propriedades estatísticas do sistema dinâmico. De fato, provamos que a média e a variância obtidos do teorema central do limite variam diferenciavelmente com a dinâmica e também que vale um princípio de grandes desvios cuja função taxa varia diferenciavelmente com a dinâmica. Mais ainda, obtemos que a função taxa de decaimento de correlações em tempo-n para a medida de máxima entropia é diferenciável com respeito ao sistema dinâmico com derivada assintótica a zero.

No estudo das propriedades ergódicas destas classes de sistemas dinâmicos foi incluída também uma descrição topológica sobre o formalismo multifractal associado a médias de Birkhoff e sequências não necessariamente aditivas motivadas pelo estudo de expoentes de Lyapunov em dimensão alta. Para estados de equilíbrio que exibem a propriedade de Gibbs fraco, provamos que a pressão topológica do conjunto de pontos cuja média de Birkhoff está afastada da média espacial correspondente ao único estado de equilíbrio pode ser expressa em termos pressão topológica de todo sistema e da taxa grandes desvios. Extensões para sistemas dinâmicos com singularidades, fluxos e difeomorfismos hiperbólicos bem como conjuntos irregulares associados a medidas empíricas foram também obtidos.

Palavras-chave: Formalismo Termodinâmico, Operador de Transferência, Linear Response Formula, Princípios de Grandes Desvios, Análise Multifractal.

Abstract

In this thesis we study robust classes of non-uniformly expanding dynamical systems. We initially prove the differentiability of the topological pressure, equilibrium states and their densities with respect to the dynamical system, obtaining precise formulae for such derivatives. These results, which follow from the gap spectral uniformity of the respectives transfer operators obtained from cones and projective metrics techniques, have strong consequences on the regularity of the dynamical system statistical properties. Indeed, we prove that the mean and variance obtained from the central limit theorem vary differentially with respect to the dynamics, and also, there is a large deviations principle and its rate depend differentially on the dynamics. We also obtained asymptotic formulas for derivatives. In adition, we obtain that correlation function in time n with respect to maximal entropy measure is derivable with respect to the dynamics, and it tends to zero as n goes to infinity.

In the study of ergodic properties of these classes of dynamical systems we also include a topological description on the multifractal formalism associated to Birkhoff time averages and to subaditive sequences motivated by the Lyapunov exponent study in higher dimensions. For equilibrium states that exhibit the weak Gibbs property, we prove that the topological pressure of the set of points whose Birkhoff averages are far from the space averages corresponding to the unique equilibrium state can be expressed in terms of the topological pressure of the whole system and the large deviation rate function. Extensions for dynamical systems with sigularities, hyperbolic flows and diffeomorphisms, and irregular sets of empirical measures are also given.

Keywords: Thermodynamic formalism, Transfer Operator; Linear Response Formula; Large Deviation Principles; Multifractal Analysis.

Sumário

Introdução e descrição dos resultados

O Formalismo Termodinâmico da Mecânica Estatística foi introduzido em Sistemas Dinâmicos pelos trabalhos pioneiros de Sinai, Ruelle e Bowen ([Sin72, Bow75, BR75]), em meados da década de 70. De fato, a correspondência entre shifts e conjuntos hiperbólicos via partições de Markov permitiu definir medidas relevantes em Teoria Ergódica, tais como as medidas de *Gibbs* e de *estado de equilíbrio*.

Relembramos aqui o conceito dessas medidas, bem como os de entropia e pressão, e o princípio variacional a elas associadas. Consideremos f uma aplicação diferenciável definida, por simplicidade, em uma variedade Riemanniana compacta M. Para cada probabilidade $f-$invariante μ associamos a chamada *entropia métrica* $h_\mu(f)$ de μ que, pelo Teorema de Brin-Katok, é a taxa exponencial assintótica de decrescimento da medida de bolas dinâmicas de f. O princípio variacional para entropia nos diz que $\sup\{h_\mu(f) : \mu$ é uma probabilidade $f-$invariante $\}$ é a *entropia topológica* $h_{\text{top}}(f)$ de f, um invariante para qualquer sistema topologicamente conjugado a f. Quando adicionamos ao nosso problema um potencial contínuo $\phi : M \to \mathbb{R}$, que faz o papel de dar pesos a diferentes regiões do espaço M, temos um princípio variacional análogo para a *pressão topológica* de f, que é igual ao supremo das pressões métricas de medidas $f-$invariantes com respeito a ϕ:

$$P_{\text{top}}(f,\phi) = \sup\{h_\mu(f) + \int \phi d\mu : \mu \text{ é uma probabilidade } f - \text{invariante }\}.$$

Quando uma probabilidade $f-$invariante atinge o supremo acima, então dizemos que ela é um *estado de equilíbrio* para f com respeito a ϕ e, no caso particular de ϕ ser identicamente nulo, dizemos que ela é uma *medida de máxima entropia* para f. Os estados de equilíbrio, quando existem, são probabilidades invariantes importantes, pois carregam consigo informações topológicas e combinatórias do sistema dinâmico. Em Teoria Ergódica, o Formalismo Termodinâmico se ocupa da obtenção de estados de equilíbrio, e do estudo de suas *propriedades estatísticas* (decaimento exponencial de correlações, Teorema Central do Limite, Grandes Desvios) e de *regularidade* (estabilidade estatística, diferenciabilidade das medidas de estado de equilíbrio, e das taxas de decaimento de correlações e de Grandes Desvios com respeito ao potencial e à dinâmica).

No contexto clássico de sistemas uniformemente hiperbólicos e potenciais Hölder contínuos ϕ os estados de equilíbrio surgem como medidas absolutamente contínuas a *medidas de Gibbs* $\nu_{f,\phi}$, ou seja, medidas tais que para alguma constante uniforme K vale

$$K^{-1} \leq \frac{\nu_{f,\phi}(B(x,n,\varepsilon))}{e^{-nP_{\mathrm{top}}(f,\phi)+\sum_{j=0}^{n-1}\phi(f^j(x))}} \leq K$$

para todo ponto x e todo inteiro positivo n, onde $B(x,n,\varepsilon) = \{y \in X : d(f^j(x), f^j(y)) < \varepsilon \text{ para todo } 0 \leq j \leq n-1\}$. Estas medidas surgem naturalmente da física e atendem à intuição de que a medida dos pontos que acompanham o ponto é dada, a menos de constante, pela comparação entre a pressão topológica e as médias de Birkhoff do potencial ϕ ao longo das órbitas dos pontos.

No contexto hiperbólico, trabalhos pioneiros de Sinai, Ruelle e Bowen deram respostas positivas para as questões de existência e unicidade de estados de equilíbrio e suas propriedades estatísticas básicas. Todavia, apenas mais de duas décadas depois, Ruelle [Rue97], usando fortemente da estabilidade estrutural de sistemas *Axioma A*, e da existência de conjugações Hölder, também provou a diferenciabilidade das medidas de estado de equilíbrio nesse contexto. Foi a primeira contribuição relevante quanto a regularidade diferenciável de medidas de Estado de Equilíbrio e ainda assim, como enfatizamos, restrita ao contexto uniformemente hiperbólico.

Fora do contexto uniformemente hiperbólico e uniformemente expansor a teoria tem avançado nos últimos anos, mas está longe de uma completude. O principal objetivo desta tese é demonstrar a diferenciabilidade de medidas de estado de Equilíbrio, e de medidas de referência (de Gibbs) associadas, com respeito a uma classe robusta de dinâmicas não uniformemente expansoras. Esta classe de aplicações não-uniformemente expansoras estudadas inclui as paradigmáticas classes de aplicações de Maneville-Pommeau e aplicações derivadas-de-expansoras, tendo atraído a atenção de diversos autores como Alves, Bonatti, Castro, Oliveira, Varandas e Viana que obtiveram a construção de estados de equilíbrio neste contexto.

A diferenciabilidade de medidas com respeito ao potencial e a dinâmica, também conhecida como *linear response formula* consiste, em sua versão mais fraca, em fixado um observável suficientemente regular $\varphi : M \to \mathbb{R}$ provar a diferenciabilidade de:

$$(f,\phi) \mapsto \int_M \varphi d\mu_{f,\phi},$$

onde $\mu_{f,\phi}$ é a medida de estado de equilíbrio associada a dinâmica f e ao potencial ϕ. Demonstramos, de fato, uma versão ainda mais forte dessa diferenciabilidade, em que, em vez de fixar o observável, mostramos a diferenciabilidade da medida enquanto funcional linear atuando em algum espaço de Banach de observáveis suficientemente regulares (no mínimo, de classe $C^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$). Na próxima seção, enunciamos com mais detalhe esse, e os resultados que ora apresentamos nesses parágrafos.

Partindo da diferenciabilidade das medidas de estado de equilíbrio, não paramos por aí: demonstramos então a diferenciabilidade de diversas quantidades e de cotas para taxas de decaimento de correlações e Grandes Desvios, obtendo resultados até o momento desconhecidos inclusive no contexto de hiperbolicidade uniforme. Mais concretamente, para $f : M \to M$ uma dinâmica expansora e um potencial $\phi : M \to \mathbb{R}$, ambos suficientemente diferenciáveis (digamos, de classe C^2), provamos que:

1. Se $\mu_{f,\phi}$ é o único estado de equilíbrio de f com respeito a ϕ e $\psi : M \to \mathbb{R}$ é um observável suave não cohomólogo a uma constante então existe $I_{f,\phi,\psi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estritamente convexa de modo que, para todo $[a,b] \subset \mathbb{R}$,
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_{f,\phi} \left(x \in M : \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j(x) \in [a,b] \right) \leq - \inf_{s\in[a,b]} I_{f,\phi,\psi}(s)$$
e
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_{f,\phi} \left(x \in M : \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j(x) \in (a,b) \right) \geq - \inf_{s\in(a,b)} I_{f,\phi,\psi}(s).$$
Além disso, até nosso trabalho, não se sabia que $I_{f,\phi,\psi}$ varia diferenciavelmente em relação a dinâmica expansora f. De fato, provamos não apenas para esse caso uniformemente hiperbólico como para abertos mais gerais de sistemas não uniformemente expansores.

2. Definindo a correlação em tempo n de dois observáveis φ, ψ suaves por
$$C_{\varphi,\psi}(f,n) := \int \varphi \circ f^n \psi d\mu_{f,0} - \int \varphi d\mu_{f,0} \int \psi d\mu_{f,0},$$
onde $\mu_{f,0}$ é a medida de máxima entropia para f, também provamos que $C_{\varphi,\psi}(f,n)$ varia suavemente em relação à dinâmica expansora f, que $D_f C_{\varphi,\psi}(f,n)$ converge a 0 quando $n \to +\infty$ e que essa convergência pode ser tomada uniforme para dinâmicas expansoras suficientemente próximas de f.
Novamente, tal fato era desconhecido até nesse contexto uniformemente expansor, e o demonstramos com ainda maior generalidade, para uma ampla classe robusta de aplicações não uniformemente expansoras.

Aparentemente estanque desses problemas, estudamos ainda propriedades do Formalismo Multifractal sob o ponto de vista topológico. Nossa abordagem é nova e tem por base a conexão da teoria de grandes desvios e de formalismo multifractal. Dada uma sequência de funções contínuas $\psi_n : M \to \mathbb{R}$ uma *Análise Multifractal* dessa sequência consiste no estudo do ponto de vista topológico, dimensional ou ergódico dos conjuntos de nível da forma $X(J) := \{x \in M : \lim_{n\to\infty} \frac{\psi_n}{n}(x) \in J\}$, onde J é um intervalo na reta. Em sistemas dinâmicos, estamos particularmente interessados no caso em ψ_n é uma sequência aditiva, originada por médias de Birkhoff ou mais geralmente uma sequência subaditiva ou assintoticamente aditiva com respeito a dinâmica f. Veremos contudo, que os resultados de Grandes Desvios nos permitem provar estimativas para a pressão topológica de $X(J)$ quando ψ_n é uma sequência aditiva ou mais geralmente quando ψ_n é uma sequência quase aditiva. Em particular, para as classes de sistemas dinâmicos expansores e não-uniformemente expansores estudadas provamos que a pressão topológica de $X(J)$ varia suavemente em relação a dinâmica.

Para nossos objetivos, precisamos de um estudo não padrão do Espectro do chamado *operador de transferência* (ou *Perron-Frobënius*), formalmente dado por

$$\mathcal{L}_{f,\phi}g(x) := \sum_{y \in f^{-1}(x)} e^{\phi(y)}g(y), \forall x \in M.$$

Nos contextos não uniformemente expansores em nossa tese, provou-se em [CV13] que tal operador possui *gap espectral* quando atuando em espaços de observáveis com suficiente regularidade (pelo menos Lipschitz, mas também C^k, $k \geq 1$). Consequentemente, seu operador adjunto possui um autovalor dominante associado a uma autoprobabilidade de referência $\nu_{f,\phi}$. Também o operador de transferência possui (a menos de normalização) uma autofunção $h_{f,\phi}$ associada ao autovalor dominante. O estado de equilíbrio, neste caso, nada mais é que a medida $\mu_{f,\phi} = h_{f,\phi}\nu_{f,\phi}$.

Com respeito a ϕ, o operador de transferência é tipicamente diferenciável, desde que ϕ pertença a um espaço suficientemente regular. Todavia, conforme exemplo em [CV13], tal operador não é sequer contínuo com respeito a f, mesmo no caso expansor! Temos portanto, que seus autovalores dominantes e respectivos autoespaços, não tem por que variar sequer continuamente com a dinâmica em questão, muito menos, diferenciavelmente.

Na próxima seção, pormenorizaremos nossos principais resultados e as técnicas empregadas.

Principais enunciados e algumas ideias das provas

Descrevemos agora vários dos temas endereçados na tese, apresentando seus enunciados, dando uma idéia de sua organização e ideias da prova. Para um melhor entendimento, faremos a exposição em várias subseções.

Construção de estados de equilíbrio: operador de transferência e técnicas de Cones e Métricas projetivas

No início de nosso trabalho, revisitamos as técnicas usadas para construir medidas de estado de equilíbrio, especialmente como em [CV13]. Entretanto, nessa revisita, apresentamos as provas de maneira mais geral, de modo a servir tanto a nossos objetivos de estudos de diferenciabilidade de objetos do Formalismo Termodinâmico, como para o estudo de propriedades estatísticas em outros contextos, como os de transformações Markovianas de intervalos [LSV98].

Dependendo da escolha da dinâmica f e do potencial ϕ é de se esperar que os estados de equilíbrio estejam suportados em um conjunto de Cantor que tem medida de Lebesgue nula e assim não devemos esperar que o possível estado de equilíbrio seja absolutamente contínuo em relação a Lebesgue. Por outro lado, em muitos contextos não-uniformemente expansores (ver por exemplo [VV10]) é de se esperar que o estado de equilíbrio seja obtido a partir de médias de Birkhoff de uma medida conforme, que tem propriedades do tipo Gibbs, mas que não é invariante; em particular o estado de equilíbrio é absolutamente contínuo em relação a essa medida conforme.

Pelo que discutimos acima, uma questão natural que se impõe é a seguinte:

Questão: *Dada uma probabilidade ν sobre M, existe uma probabilidade μ que seja $f-$invariante e absolutamente contínua em relação a ν ?*

Isso nos conduz à definição da chamada *representação integral do operador de transferência*. Suponhamos que $(M, \mathcal{A})$ seja um espaço mensurável, $f : M \to M$ mensurável e ν uma probabilidade não singular, ou seja, $\nu(A) = 0 \Rightarrow \nu(f^{-1}(A)) = 0$. A *representação integral do operador de transferência* em relação a f e ν é o operador $P : \mathcal{L}^1(\nu) \to \mathcal{L}^1(\nu)$ definido por:

$$\int_A P(g) d\mu = \int_{f^{-1}(A)} g d\mu, \forall g \in L^1(\nu) \text{ e } A \in \mathcal{A}.$$

O operador de transferência será um operador contínuo que preserva as funções positivas. De fato, o operador de transferência é o operador cujo dual é exatamente o operador de Koopman (ou operador de composição), que aparece no teorema ergódico de Birkhoff. Através do operador de transferência podemos transformar a questão anterior em uma questão de encontrar um ponto fixo, pois uma probabilidade μ será $f-$invariante e absolutamente contínua em relação a ν se, e somente se, $\frac{d\mu}{d\nu} \geq 0$ e $P(\frac{d\mu}{d\nu}) = \frac{d\mu}{d\nu}$.

Note que se, por um lado, o fato de o operador de transferência estar definido no espaço L^1 pode nos ser útil (pois é um espaço grande), por outro, quando queremos estudar propriedades estatísticas finas de μ, tais como propriedades de mistura, grandes desvios, teoremas centrais do limite, estabilidade sobre pertubações determinísticas ou aleatórias, precisaremos estudar o espectro de tal operador: de fato, precisaremos que no círculo unitário só existam elementos do espectro discreto de P. Para isso é mais útil olhar o operador P definido sobre espaços contidos em L^1, pois podemos com isso retirar elementos do espectro essencial do círculo unitário; porém, ao mesmo tempo temos que tomar cuidado para não escolhermos um espaço em L^1 que não contenha os pontos fixos de P.

A representação integral do operador de transferência age em classes de funções, mas é possível dar uma descrição dele agindo em espaço de funções. Fixemos uma dinâmica $f : M \to M$ e um potencial $\phi : M \to \mathbb{R}$. Dada uma função $g : M \to \mathbb{R}$, definimos o *operador de transferência* (também chamado de operador de Ruelle-Perron-Frobenius) associado a f e ϕ agindo sobre g como a função sobre M definida por:

$$\mathcal{L}_{f,\phi} g(x) := \sum_{y \in f^{-1}(x)} e^{\phi(y)} g(y), \forall x \in M.$$

Ambas as definições do operador de transferência tem uma relação profunda a menos da escolha adequada de um Jacobiano. Por um lado, fixando uma probabilidade não singular ν e P a representação integral do operador de transferência associado a ν, se $f : M \to M$ é localmente injetiva e admite um Jacobiano $J_\nu f > 0$ então $P = \mathcal{L}_{-\log J_\nu f}$. Por outro lado, fixando uma dinâmica $f : M \to M$ e um potencial $\phi : M \to \mathbb{R}$, se ν é uma probabilidade pertencendo a $\ker(\mathcal{L}^*_{f,\phi} - \lambda I)$ então $J_\nu f = \lambda e^{-\phi}$ e assim $\mathcal{L}_{f,\phi} = \lambda P$, onde P é a representação integral do operador de transferência associado a ν.

Do ponto de vista do formalismo termodinâmico de certas aplicações não uniformemente expansoras, se queremos encontrar um estado de equilíbrio para uma dinâmica $f : M \to M$ e um potencial $\phi : M \to \mathbb{R}$, temos que procurar uma probabilidade da forma $\mu_{f,\phi} = h_{f,\phi}\nu_{f,\phi}$, onde $h_{f,\phi}$ é uma função positiva tal que $h_{f,\phi} \in \ker(\mathcal{L}_{f,\phi} - e^{P_{\text{top}}(f,\phi)} I)$ e $\nu_{f,\phi}$ é uma probabilidade tal que $\nu \in \ker(\mathcal{L}^*_{f,\phi} - e^{P_{\text{top}}} I)$. Desse modo, com vistas a discussão anterior, precisamos escolher o espaço de funções adequado e desenvolver técnicas para garantir que o raio espectral do operador de transferência $\mathcal{L}_{f,\phi}$ seja o logaritmo da pressão topológica de f com respeito a ϕ, e encontrar autofunções e automedidas associadas a esse raio espectral. Além disso queremos garantir que o operador de transferência tenha boas propriedades espectrais, como uma separação entre o raio espectral e o resto do espectro pois, como veremos adiante, isso resultará em propriedades dinâmicas para o candidato a estado de equilíbrio $\mu_{f,\phi} = h_{f,\phi}\nu_{f,\phi}$.

Uma das formas muito utilizadas de se obter autofunções de $\mathcal{L}_{f,\phi}$ associadas ao raio espectral e de se provar boas propriedades espectrais do operador de transferência é através da obtenção de certos cones convexos no espaço de funções positivas que são deixados estritamente invariantes por $\mathcal{L}_{f,\phi}$ (veja por exemplo [Li95], [CV13], [Bal00], [Vi97], [LSV98]).

Como um dos objetivos desse trabalho, provaremos que para uma certa classe de cones, englobando alguns dos cones utilizados na literatura (veja por exemplo os cones utilizados em [CV13] para estudar uma família de aplicações não uniformemente expansoras introduzida em [VV10]), que se nós temos invariância estrita do cone, nós obtemos que o operador de transferência tem a propriedade do gap espectral (veja Teorema 1.4). Lembremos a definição de tal propriedade: dado um espaço de Banach E e um operador linear e contínuo $A : E \to E$, dizemos que A tem a *propriedade do gap espectral* se o espectro de A se decompõe em $\Sigma \sqcup \{\lambda\}$ onde λ é um autovalor positivo simples e existe $0 < \lambda_0 < \lambda$ tal que $\Sigma \subset B(0, \lambda_0)$. De fato, tal teorema valerá para operadores que preservam o espaço de funções positivas. Ele implicará, em particular, o seguinte resultado: seja $F_i(\varphi) := \inf(\varphi)$ ou $\int \varphi d\nu$ e $C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$ um dos seguintes cones convexos,

$$\{\varphi \in \mathrm{BV}[0,1] : \varphi > 0 \text{ e } \frac{\text{variação}(\varphi)}{F_1(\varphi)} \leq \kappa_1\}$$

$$\{\varphi \in C^\alpha(M, \mathbb{R}) : \varphi > 0 \text{ e } \frac{|\varphi|_{\alpha,\delta}}{F_1(\varphi)} \leq \kappa_1\}$$

$$\{\varphi \in C^r(M, \mathbb{R}) : \varphi > 0 \text{ e } \frac{||D^1\varphi||_\infty}{F_1(\varphi)} \leq \kappa_1, \ldots, \frac{||D^r\varphi||_\infty}{F_r(\varphi)} \leq \kappa_r\}.$$

Teorema 0.1. *Se existe $0 < \rho < 1$ tal que:*

i. $\mathcal{L}_{f,\phi}(C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)) \subset C(\rho\kappa_1, \ldots, \rho\kappa_r)$;

ii. $\frac{1}{c} F_i(\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi) \leq \inf \mathcal{L}_{f,\phi}\varphi \leq \sup \mathcal{L}_{f,\phi}\varphi \leq cF_i(\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi)$, *para todo* $\varphi \in C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$.

Então, se λ é o raio espectral de $\mathcal{L}_{f,\phi}$:

i. $\mathcal{L}_{f,\phi}$ *tem a propriedade do gap espectral;*

ii. existe um único $\nu \in E^*$ *tal que* $\mathcal{L}^*_{f,\phi}(\nu) = \lambda\nu$ *e* $\nu(1) = 1$;

iii. existe um único $h \in C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$ *tal que* $\mathcal{L}_{f,\phi}(h) = \lambda h$ *e* $\nu(h) = 1$.

Em geral o funcional ν obtido no teorema anterior não precisa ser uma medida, porém iremos mostrar que, em contextos naturais, de fato ν é uma probabilidade (veja Teorema 1.11). Em particular, se a dinâmica $f : M \to M$ for um homeomorfismo local teremos que ν é uma probabilidade.

Também estudamos como a invariância estrita de cones pelo operador de transferência implica boas propriedades estatísticas para o candidato a estado de equilíbrio $\mu = h\nu$, onde h é um autovetor positivo do operador de transferência associado ao seu raio espectral e ν é uma automedida do dual do operador de transferência associada ao seu raio espectral, tais como decaimento exponencial de correlações, teorema central do limite e exatidão da medida, como pode ser visto na Proposição 1.10.

Outra técnica utilizada para se obter propriedades espectrais do operador de transferência quando já se sabe a priori da existência de uma medida conforme é através das desigualdades do tipo Lasota-Yorke e de alguma compacidade do espaço de funções estudado (veja por exemplo [LY73], [GL06], [Bal00],[Vi97], [Bow74], [PU10], [Rue89]). Desse modo, aplicando o Teorema de Hennion [He93] nós garantimos a quasi-compacidade do operador de transferência e se, adicionalmente, nós temos alguma propriedade de mistura do sistema dinâmico estudado, nós frequentemente conseguimos provar a propriedade do gap espectral do operador de transferência. Geralmente a técnica via Lasota-Yorke e a técnica via cones aparecem de maneira dissociada, mas elas estão vinculadas. De fato, os exemplos indicam que com uma desigualdade do tipo Lasota - Yorke, juntamente com uma hipótese de mistura forte da dinâmica, poderemos aplicar nosso resultado abstrato envolvendo a invariância estrita de cones. Isso daria de certo modo uma unificação entre essas duas técnicas em tal contexto, sendo que a técnica via cones não é dependente de se saber a priori da existência de uma probabilidade conforme.

Resultados de regularidade

Na prova do Teorema 1.4, sobre obtenção de propriedade do gap espectral através de cones deixados estritamente invariantes, descobriremos que se dois operadores de transferência preservam o mesmo cone e a invariância estrita ocorre na mesma taxa, então obtemos estimativas de convergência uniformes dos iterados do operador transferência, ou seja, gap espectral uniforme. Fazendo uso desse propriedade, provaremos resultados de estabilidade estatística quando temos uma família de dinâmicas (com uma topologia em que dinâmicas próximas implique ramos inversos próximos) e uma família de potenciais em que a propriedade do gap espectral ocorre de maneira uniforme (em particular quando ocorre a invariância estrita de um cone pelos respectivos operadores de transferência e tal invariância estrita ocorre na mesma taxa); vide Teorema 1.12. A saber, será provado que o raio espectral, o candidato a estado de equilíbrio, bem como sua densidade em relação à medida conforme associados aos respectivos operadores de transferência variam continuamente. Em particular, obteremos o seguinte resultado:

Suponhamos que $\mathcal{F}$ é um espaço de dinâmicas e potenciais (f, ϕ), onde as dinâmicas são difeomorfismos locais C^r e os potenciais são contínuos, e está dotado da topologia dada por $||\cdot||_r \times ||\cdot||_\infty$. Para cada $(f,\phi) \in \mathcal{F}$ suporemos que existem $\lambda_{f,\phi} > 0$, $\nu_{f,\phi}$ probabilidade e $h_{f,\phi} \in C^r(M,\mathbb{R})$ tais que:

1. $\displaystyle\int \mathcal{L}_{f,\phi} g d\nu_{f,\phi} = \int \lambda_{f,\phi} g d\nu_{f,\phi}$, para todo $g \in L^1(\nu_{f,\phi})$;

2. $\mathcal{L}_{f,\phi} h_{f,\phi} = \lambda_{f,\phi} h_{f,\phi}$, $\int h_{f,\phi} d\nu_{f,\phi} = 1$ e $h_{f,\phi} > 0$;

3. existem $k \geq 0$ e $\{a_n\}_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ não dependendo de (f,ϕ) tal que $a_n \to 0$ e para todo $\varphi \in C^r(M,\mathbb{R})$ temos que $\displaystyle\left|\left|\frac{\mathcal{L}^n_{f,\phi}\varphi}{\lambda^n_{f,\phi}} - h_{f,\phi} \cdot \int \varphi d\nu_{f,\phi}\right|\right|_\infty \leq k a_n ||\varphi||$;

4. $\displaystyle\sup_{(f,\phi)\in\mathcal{F}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\left|\frac{\mathcal{L}^n_{f,\phi} 1}{\lambda^n_{f,\phi}}\right|\right|_\infty < +\infty$.

Teorema 0.2. *As seguintes aplicações são contínuas,*

i. $\mathcal{F} \ni (f,\phi) \longmapsto \lambda_{f,\phi}$;

ii. $\mathcal{F} \ni (f,\phi) \mapsto h_{f,\phi}$, *se dotamos a imagem com a topologia* C^0;

iii. $\mathcal{F} \ni (f,\phi) \longmapsto \nu_{f,\phi}$, *se dotamos a imagem com a topologia fraca**;

iv. $\mathcal{F} \ni (f,\phi) \longmapsto \mu_{f,\phi}$; *se dotamos a imagem com a topologia fraca**.

Vale a pena ressaltar que esse resultado de estabilidade estatística não é uma fácil consequência da propriedade do gap espectral, pois um exemplo dado originalmente por [CV13], nos mostra que o operador de transferência em geral não varia continuamente com respeito nem a dinâmicas expansoras (veja exemplo 2.4). Desse modo, não podemos aplicar diretamente a teoria perturbativa de operadores na obtenção do resultado anterior.

Com vistas aos resultados de estabilidade estatística obtidos no Teorema 1.12, uma questão natural que se impõe é saber se, para uma certa classe de dinâmicas e potenciais ocorre invariância estrita do mesmo cone e na mesma taxa, podemos obter mais regularidade das funções que associam a cada dinâmica e potencial o raio espectral do operador de transferência, o candidato a estado de equilíbrio e sua densidade. De uma maneira mais abrangente, a questão que estamos interessados é:

Suponha que para cada par de dinâmica e potencial (f,ϕ) *podemos associar uma certa medida (SRB, estados de equilíbrio, a.c.i.p. e etc) e que a função que associa* (f,ϕ) *a essa medida, e ou uma quantidade como pressão topológica, é contínua. Será que essa função é diferenciável, mesmo que seja num sentido fraco ? Nesse caso gostaríamos de poder encontrar uma fórmula que expresse para pequenas perturbações de um certo tipo* *como essa função varia.*

Esse tipo de questão é chamada de **Linear response formula**. No contexto hiperbólico temos o seguinte resultado estabelecido por Ruelle [Rue97]:

Teorema: *Seja K_0 um atrator hiperbólico (i.e. axioma A) para um $\mathcal{C}^3$ difeomorfismo f_0, e suponha que $f_{0|K_0}$ é mixing. Se f é um elemento de uma pequena vizinhança de f_0, existe um atrator hiperbólico K_f para f, dependendo continuamente de f e uma única medida SRB ρ_f para f com suporte em K_f. Além disso,*

(a) existe uma $\mathcal{C}^3$ vizinhança $\mathcal{N}$ de f_0 tal que se $A : M \to \mathbb{R}$ é $\mathcal{C}^2$, então $f \mapsto \rho_f(A)$ é diferenciável em $\mathcal{N}$,

(b) a variação de 1ª-ordem $\delta\rho_f(A)$ quando f é trocado por $f + X \circ f$, é dada por $\delta\rho_f(A) = \Psi(1)$, onde a série de potências

$$\Psi(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \int \rho(dx)X(x) \cdot \nabla_x(A \circ f^n)$$

tem raio de convergência > 1.

Na prova desse resultado é utilizado fortemente a rígida estabilidade estrutural existente no contexto hiperbólico. Isso nos indica uma dificuldade de se obter resultados de Linear response formula no contexto não-uniforme. No contexto unidimensional existem trabalhos de V. Baladi e D. Smania (veja [BaS08] e [BaS10]) sobre a diferenciabilidade da medida S.R.B.. Vale ressaltar ainda o trabalho de [Dol04] sobre a diferenciabilidade do medida S.R.B. para certas perturbações de dinâmicas Anosov.

Um outro objetivo do presente trabalho é dar contribuições para questões do tipo Linear response formula, bem como aplicações dela, em particular respondendo a questão no caso não-uniformemente expansor estudado em [VV10], [CV13]. Além disso, descreveremos uma teoria mais ou menos geral, e deixando claro como pode ser usada e suas consequências, em um contexto que englobe invariância estrita e uniforme de cones e também quando não há propriedade do gap espectral em jogo, ou seja, o espectro essencial acumula no raio espectral.

O operador de transferência em geral depende analiticamente do potencial, logo, quando estudamos uma família de potenciais cujos operadores de transferência tem a propriedade do gap espectral sabemos que o raio espectral, o candidato a estado de equilíbrio e sua densidade variam analiticamente com relação ao potencial como consequência da teoria perturbativa de operadores clássica (veja Proposição 2.3). Por outro lado, pelo exemplo descrito originalmente em [CV13], vemos que o operador de transferência não varia continuamente em relação a dinâmica mesmo na topologia fraca de operadores. Assim não podemos esperar obter resultados simplesmente aplicando a teoria perturbativa de operadores clássica. A despeito do operador de transferência, como operador, não variar continuamente em relação a dinâmica, de fato, no mundo das dinâmicas que são difeomorfismos locais C^r, o operador de transferência varia C^k como operador agindo de C^r em C^{r-k} (vide Proposição 2.6). Desse modo, fazendo uso de um teorema perturbativo de operadores presente em [GL06] provaremos que se temos uma subvariedade de dinâmicas, que são difeomorfismos locais C^r, em que o raio espectral do operador de transferência varia continuamente com a dinâmica e os respectivos operadores de transferência possuem gap espectral uniforme em C^r e em C^{r-1} (em particular quando há invariância estrita de cones e na mesma taxa pelos operadores de transferência associados) então o raio espectral do operador de transferência, o candidato a estado de equilíbrio e sua densidade variam C^{r-1} em relação a dinâmica (veja Teorema 2.9).

Mais precisamente: sejam M uma variedade riemanniana compacta conexa, $\mathcal{F}^r \subset C^r(M, M)$ uma subvariedade contendo dinâmicas que são difeomorfismos locais, $r \geq 2$, e $\phi : M \to \mathbb{R}$ um potencial C^r. Suponhamos que para cada $f \in \mathcal{F}^r$ temos que $\mathcal{L}_{f,\phi|C^r}$ e $\mathcal{L}_{f,\phi|C^{r-1}}$ tem a propriedade do gap espectral. Além disso, suponhamos que existem $\lambda_{f,\phi} > 0$, $\nu_{f,\phi}$ probabilidade e $h_{f,\phi} \in C^r(M, \mathbb{R})$ tais que:

1. $\displaystyle\int \mathcal{L}_{f,\phi} g d\nu_{f,\phi} = \lambda_{f,\phi} \int g d\nu_{f,\phi}$, para todo $g \in C^r(M, \mathbb{R})$;

2. $\mathcal{L}_{f,\phi} h_{f,\phi} = \lambda_{f,\phi} h_{f,\phi}$ e $\int h_{f,\phi} d\nu_{f,\phi} = 1$;

3. existem $k \geq 0$ e $\tau \in (0, 1)$, não dependendo de f, tais que para todo $\varphi \in C^{r-1}$ temos

$$\left|\left| \frac{\mathcal{L}^n_{f,\phi}\varphi}{\lambda^n_{f,\phi}} - h_{f,\phi} \int \varphi d\nu_{f,\phi} \right|\right|_{r-1} \leq k\tau^n ||\varphi||_{r-1}.$$

Teorema 0.3. *Nas hipóteses descritas acima, se $\mathcal{F}^r \ni f \mapsto \lambda_{f,\phi}$ é contínuo em f_0, então as seguintes aplicações são C^{r-1} em uma vizinhança de f_0:*

i. $\mathcal{F}^r \ni f \mapsto \lambda_{f,\phi}$;

ii. $\mathcal{F}^r \ni f \mapsto h_{f,\phi} \in \mathcal{C}^{r-1}$;

iii. $\mathcal{F}^r \ni f \mapsto \nu_{f,\phi} \in (C^1)^*$;

iv. $\mathcal{F}^r \ni f \mapsto \mu_{f,\phi} \in (C^1)^*$.

Vale a pena ressaltar que o candidato à estado de equilíbrio varia C^{r-1} em relação a dinâmica como funcional em C^1, o que é mais forte do que os resultados de estabilidade clássicos. Isso nos garante, por exemplo, que os expoentes de Lyapunov extremais e a soma deles é diferenciável em relação à dinâmica (veja Corolário 2.32), e que a sua densidade em relação à medida conforme varia C^{r-1} com respeito à dinâmica como função em C^{r-1}, o que nos dá mais do que um resultado de estabilidade forte.

Diferenciabilidade de cotas de Grandes Desvios, Teorema Central de Limite e Correlações

Como consequência de nossos resultados de diferenciabilidade de medidas, provamos no mesmo contexto que não só vale o teorema central do limite, como a média e desvio padrão dados por ele são C^{r-1} em relação à dinâmica (veja Teorema 2.14). Em particular, obtemos que a propriedade de um observável não ser cohomólogo a uma constante é aberta em relação à dinâmica (veja Corolário 2.35). Também obteremos como consequência um princípio de grandes desvios para observáveis não cohomólogos a uma constante dado pela transformada de Legendre. De fato, o Teorema 2.22 nos garantirá não só um princípio de grandes desvios, como também a sua estabilidade, ou seja, a taxa de grandes desvios dada pela transformada de Legendre varia de maneira C^r com respeito ao potencial e à dinâmica. Em particular, tomando $\mathcal{F}^r$ como no Teorema anteriormente enunciado,

Teorema 0.4. *Sejam V uma variedade compacta e $\big((f_v,\phi,\psi)\big)_{v\in V}$ uma parametrização C^{r-1} de aplicações em $\mathcal{F}^r\times C^r(M,\mathbb{R})\times C^r(M,\mathbb{R})$. Se o observável ψ não é cohomólogo a uma constante no suporte de $\mu_{f_{v_*},\phi}$, para algum $v_*\in V$, então existe um intervalo $J\subset\mathbb{R}$ e uma vizinhança aberta U de v_* tal que, para todo $v\in\overline{U}$, existe $I_{f_v,\phi,\psi}:J\to\mathbb{R}$ estritamente convexa de modo que*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mu_{f_v,\phi}\left(x\in M:\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\psi\circ f_v^j(x)\in[a,b]\right)\le-\inf_{s\in[a,b]}I_{f_v,\phi,\psi}(s)$$

e

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mu_{f_v,\phi}\left(x\in M:\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\psi\circ f_v^j(x)\in(a,b)\right)\ge-\inf_{s\in(a,b)}I_{f_v,\phi,\psi}(s),$$

para todo $[a,b]\subset J$.

Além disso, $(s,v)\mapsto I_{f_v,\phi,\psi}(s)$ é C^{r-1}.

Quando estudamos dinâmicas e potenciais cujos estados de equilíbrio possuem decaimento de correlações mais lento que exponencial não obteremos a propriedade do gap espectral para o operador de transferência associado, logo não podemos aplicar os resultados anteriormente citados. Apesar disso, ainda conseguimos obter alguns resultados similares aos da seção anterior em contextos em que o espectro essencial do operador de transferência pode acumular no seu raio espectral, mas há uniformidade nesse acúmulo. O contexto estudado engloba o caso em que ocorre a propriedade do gap espectral uniforme já discutido. Mesmo esse caso corresponderá a uma importante contribuição pois obteremos as fórmulas explícitas para as derivadas supra citadas. Provaremos a diferenciabilidade do raio espectral do operador de transferência em relação à dinâmica e ao potencial, além de nos dar uma fórmula para as derivadas (veja Teoremas 2.25 e 2.28). Em relação à diferenciabilidade do candidato a estado de equilíbrio, obteremos a diferenciabilidade do candidato a medida de máxima entropia (ou seja, quando tomamos o potencial nulo) em relação à dinâmica, bem como uma fórmula para a sua derivada (veja Teorema 2.31). Como a diferenciabilidade do candidato a medida de máxima entropia se dá considerando-o como funcional em C^1, teremos como consequência a diferenciabilidade dos seus expoentes de Lyapunov extremais, bem como a soma, em relação à dinâmica. Ainda nesse contexto onde o espectro essencial pode acumular no raio espectral, mas de maneira uniforme, como consequência dos nossos resultados e das provas destes, também obteremos resultados de estabilidade das leis estatísticas similares ao caso onde o gap espectral ocorre de maneira uniforme. A saber, provaremos a diferenciabilidade da média e do desvio padrão dados pelo teorema central do limite, associado ao candidato a medida de máxima entropia, em relação a dinâmica e também provaremos que propriedade de um observável não ser cohomólogo a uma constante é aberta em relação à dinâmica (veja Teorema 2.34 e Corolário 2.35). Também obteremos consequências para correlação em tempo n associada ao candidato à medida de máxima entropia. Fixado um potencial $\phi \equiv 0$ e uma dinâmica $f \in \mathcal{F}^r$, onde $\mathcal{F}^r$ é tomado como no Teorema anteriormente enunciado, pelo que já foi exposto, temos que a correlação em tempo n de dois observáveis $\varphi, \psi \in C^r(M, \mathbb{R})$,

$$C_{\varphi,\psi}(f,n) := \int \varphi \circ f^n \psi d\mu_{f,\phi} - \int \varphi d\mu_{f,\phi} \int \psi d\mu_{f,\phi},$$

é diferenciável em relação à dinâmica. Porém garantiremos mais do que isso: a derivada da correlação em tempo n converge a zero quando n converge ao infinito e tal convergência é uniforme para dinâmicas suficientemente próximas (veja Corolário 2.33). Mais precisamente,

Corolário 0.5. *Dados $\varphi, \psi \in C^r(M, \mathbb{R})$. A aplicação $\mathcal{F}^r \ni f \mapsto C_{\varphi,\psi}(f,n)$ é C^1, além disso, $D_f C_{\varphi,\psi}(f,n)$ converge a 0 quando $n \to +\infty$ e essa convergência pode ser tomada uniforme numa vizinhança de f, de φ e de ψ.*

Análise Multifractal

Um outro objetivo do presente trabalho é estudar a pressão topológica de conjuntos associados ao chamado *conjunto irregular* para uma classe de sistemas cujo estado de equilíbrio tenha alguma propriedade do tipo Gibbs e possui estimativas de grandes desvios. Em particular, estamos interessados em aplicações não-uniformemente expansoras estudadas em [CV13], [VV10] e também dinâmicas expansoras definidas em conjuntos não necessariamente conexos. Vale a pena ressaltar que frequentemente os estados de equilíbrio surgem como probabilidades invariantes e absolutamente contínuas com respeito a alguma probabilidade que exibe alguma propriedade do tipo Gibbs. A princípio, tal objetivo parece não ter relações com os temas já abordados, porém como veremos os resultados obtidos anteriormente serão utilizados de maneira natural.

Dada uma sequência de funções $\psi_n : M \to \mathbb{R}$ uma *Análise Multifractal* dessa sequência significa o estudo da ponto de vista topológico, dimensional ou ergódico dos conjuntos de nível da forma $\{x \in M : \lim_{n\to\infty} \frac{\psi_n}{n}(x) \in J\}$, onde J é um intervalo na reta. Em sistemas dinâmicos estamos particularmente interessados no caso em ψ_n é uma sequência aditiva ou mais geralmente uma sequência subaditiva ou assintoticamente aditiva com respeito a f. Se f é uma dinâmica mensurável e μ é uma probabilidade $f-$invariante e $f-$ergódica, então o teorema ergódico de Birkhoff afirma que dado $\psi \in L^1(\mu)$ vale que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} \psi \circ f^i(x) \to \int \psi \, d\mu,$$

quando n tende ao infinito, para μ-quase todo ponto $x \in M$. Por outro lado, apesar de do ponto de vista métrico o conjunto de pontos cuja média de Birkhoff não converge é negligenciável, ele pode ser um conjunto topologicamente grande ou ter dimensão total. Para ilustrar esse fato mencionamos que se f é contínua e tem a *propriedade de especificação* então o conjunto de pontos onde a média de Birkhoff não converge é vazio ou tem pressão topológica total com respeito a qualquer potencial contínuo (para detalhes ver [Tho10]).

O estudo da pressão topológica ou dimensão dos conjuntos de pontos cuja média de Birkhoff converge para um valor pré-fixado remonta a Besicovitch e este tópico teve contribuições de muitos autores nos últimos anos (ver por exemplo [DK01, BG06, Cli10, FH10, GR, JR, PW97, PW01, PW99, Shu, T, TV99, Tho10, ZC13] e suas referências).

Muito comumente, dado um observável $\psi : M \to \mathbb{R}$ e a decomposição

$$M = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} M_\alpha \,\cup\, E_\psi$$

onde $M_\alpha = \{x \in M : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n\psi(x) = \alpha\}$ e o *conjunto irregular* E_ψ é o conjunto de pontos para os quais as médias de Birkhoff associadas a ψ não convergem, interessa descrever cada um dos conjuntos anteriores do ponto de vista topológico, dimensional ou ergódico.

Dado $\psi : M \to \mathbb{R}$ contínuo e $c > 0$ defina

$$\overline{X}_c = \overline{X}_{\mu,\psi,c} = \Big\{x \in M : \limsup_{n\to\infty} \Big|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \psi(f^j(x)) - \int \psi \, d\mu\Big| \geq c\Big\}$$

e

$$\underline{X}_c = \underline{X}_{\mu,\psi,c} = \Big\{x \in M : \liminf_{n\to\infty} \Big|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \psi(f^j(x)) - \int \psi \, d\mu\Big| \geq c\Big\}$$

onde μ é uma probabilidade $f-$invariante e $f-$ergódica. Note que temos a inclusão $\underline{X}_{\mu,\psi,c} \subset \overline{X}_{\mu,\psi,c}$. Segue do teorema ergódico de Birkhoff que $\mu(\overline{X}_{\mu,\psi,c}) = 0$, logo estes conjuntos são pequenos do ponto de vista ergódico. Por outro lado, se μ é uma medida S.R.B., o que significa que

$$\text{Leb}\left(x \in M \colon \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} \xrightarrow{w^*} \mu\right) > 0,$$

então Kleptsyn, Ryzhov e Minkov [KRM12] provam que a dimensão de Hausdorff de $\overline{X}_{\psi,c}$ é menor que a dimensão da variedade, desde que valha um princípio de grandes desvios para μ. Esse tipo de resultado é chamado de *Teorema Ergódico Especial.*

Motivados pelos resultados de Thompson [Tho10] e o teorema ergódico especial provado por Kleptsyn, Ryzhov e Minkov [KRM12], um dos objetivos do presente trabalho é obter uma descrição multifractal do conjunto irregular E_ψ. Para tal fim estudaremos os conjuntos $\underline{X}_{\mu,\psi,c}, \overline{X}_{\mu,\psi,c}$ do ponto de vista da pressão topológica (de fato, consideramos conjuntos mais gerais).

Uma primeira motivação é considerar a seguinte decomposição do conjunto de pontos cuja média temporal não converge para a média espacial

$$M \setminus \Big\{x \colon \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} \psi \circ f^i(x) \to \int \psi \, d\mu\Big\} = \bigcup_{c>0} \overline{X}_c = \bigcup_{c>0} \underline{X}_c$$

e estudar a continuidade, monotonicidade e concavidade da função pressão

$$c \mapsto P_{\overline{X}_c}(f,\phi) \quad \text{e} \quad c \mapsto P_{\underline{X}_c}(f,\phi),$$

onde $P_Z(f,\phi)$ denota a pressão do conjunto Z com relação a f e ϕ.

Se, por um lado, o conjunto irregular não esta contido em nenhum dos conjuntos anteriores para algum c fixado, por outro lado, é claro que nós temos a decomposição $E_\psi = \cup_{c>0}\overline{E}_{\mu,\psi,c}$ e $E_\psi = \cup_{c>0}\underline{E}_{\mu,\psi,c}$ com

$$\overline{E}_{\mu,\psi,c} = E_\psi \cap \overline{X}_{\mu,\psi,c} \quad \text{e} \quad \underline{E}_{\mu,\psi,c} = E_\psi \cap \underline{X}_{\mu,\psi,c}.$$

Em outras palavras, o conjunto $\underline{E}_{\mu,\psi,c}$ consiste dos pontos $x \in M$ cuja média de Birkhoff $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\psi(f^j(x))$ não só não converge, como está a uma distância maior que c da média espacial $\int \psi\, d\mu$ para todo n grande. Finalmente, o conjunto $\overline{E}_{\mu,\psi,c}$ consiste de pontos $x \in M$ cuja média de Birkhoff $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\psi(f^j(x))$ não converge e tem infinitos valores de n tais que $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\psi(f^j(x))$ está a uma distância maior que c da média espacial.

Nossos resultados, moralmente, nos garantem que se um dado sistema dinâmico f e um potencial ϕ admitem um único estado de equilíbrio μ (que tem alguma propriedade do tipo Gibbs fraco) com estimativas exponenciais de grandes desvios, então a pressão topológica dos conjuntos $\underline{X}_{\mu,\psi,c}$ e $\overline{X}_{\mu,\psi,c}$ é estritamente menor que a pressão topológica total do sistema para todo observável ψ. Mostraremos que, se temos uma dinâmica e um potencial admitindo um único estado de equilíbrio Gibbs, então a pressão topológica dos conjuntos $\underline{X}_{\mu,\psi,c}$ e $\overline{X}_{\mu,\psi,c}$ é estritamente menor que a pressão topológica total do sistema para todo observável ψ (veja Teorema 3.3).

Em particular, podemos aplicar tal resultado no caso de dinâmicas expansoras topologicamente mixing e potenciais Holder contínuos. Nesse caso, se o observável ψ não é cohomólogo a uma constante, então a pressão topológica dos conjuntos $\underline{X}_{\mu,\psi,c}$ e $\overline{X}_{\mu,\psi,c}$ é a mesma e pode ser expressa em termos da pressão topológica total do sistema e a transformada de Legendre. Devido aos resultados anteriormente citados, a pressão de tais conjuntos varia continuamente com a dinâmica, potencial, parâmetro c e observável ψ, e exigindo regularidade dos objetos envolvidos obtemos diferenciabilidade (veja Teorema 3.9 e Corolário 3.11). Em particular,

Teorema 0.6. *Sejam M um espaço métrico compacto, $f : M \to M$ uma dinâmica expansora topologicamente mixing, $\phi : M \to \mathbb{R}$ um potencial Holder contínuo e $\mu_{f,\phi}$ o único estado de equilíbrio para f com respeito a ϕ. Suponha que $\psi : M \to \mathbb{R}$ é um observável Holder contínuo, ψ não é cohomólogo a uma constante e $\int \psi\, d\mu_{f,\phi} = 0$. Se $c > 0$ então $\overline{X}_{\mu_{f,\phi},\psi,c} = \emptyset$ ou*

$$P_{\overline{X}_{\mu_{f,\phi},\psi,c}}(f,\phi) = P_{\underline{X}_{\mu_{f,\phi},\psi,c}}(f,\phi) = P_{X(c_*)}(f,\phi) = P_{\mathrm{top}}(f,\phi) - I_{f,\phi,\psi}(c_*),$$

onde $I_{f,\phi,\psi}$ é a transformada de Legendre, $I_{f,\phi,\psi}(c_*) = \min\{I_{f,\phi,\psi}(-c)\ ,\ I_{f,\phi,\psi}(c)\}$ e $X(c_*) = \{x \in M : \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\psi(f^i(x)) = c_*\}$. Em particular, $\mathbb{R}_0^+ \ni c \mapsto P_{\overline{X}_{\mu_{f,\phi},\psi,c}}(f,\phi)$ é derivável, concava e estritamente decrescente. Além disso, se M é uma variedade riemanniana e $\psi \in C^r$ então $P_{\overline{X}_{\mu_{f,\phi},\psi,c}}(f,\phi)$ varia C^{r-1} com a respeito à dinâmicas expansoras C^r sobre M.

Note que nesse contexto expansor temos a propriedade de especificação e por [Tho10] o conjunto irregular de ψ tem pressão topológica total logo, o nosso resultado significa que, apesar do conjunto de pontos irregulares ter pressão topológica total, os pontos que dão uma grande contribuição para a pressão topológica são aqueles cujas médias temporais estão infinitamente próximas da média espacial dada pelo único estado de equilíbrio.

Ainda no caso em que o único estado de equilíbrio é uma medida Gibbs, seguindo a mesma linha anterior, provaremos estimativas para conjuntos irregulares associados a medidas empíricas $\delta_{x,n} := \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i(x)}$, onde $\delta_{f^i(x)}$ é a delta de Dirac sobre o ponto $f^i(x)$, definidos por:

$$\overline{Y}_{\mu,c}=\{x\in M : \limsup_{n\to\infty} d(\delta_{x,n},\mu)\geq c\} \quad , \quad \underline{Y}_{\mu,c}=\{x\in M : \liminf_{n\to\infty} d(\delta_{x,n},\mu)\geq c\},$$

onde $d(\eta,\nu)$ é uma distância compatível com a topologia fraca* no espaço das medidas de probabilidade.

Provaremos que a pressão de ambos os conjuntos anteriores é estritamente menor que a pressão topológica total do sistema, desde que valha um princípio de grandes desvios de nível-2 (ou seja, um princípio de grandes desvios no espaço das medidas). E se o sistema dinâmico satisfaz as propriedades de $g-$quase produto (que é mais fraca que a propriedade de especificação) e separação uniforme (que é mais fraca que a propriedade de expansividade positiva), então de fato a pressão de ambos os conjuntos é a mesma e pode ser caracterizada em termos da pressão topológica do sistema e da função taxa de grandes desvios de nível-2 (veja Teorema 3.16). Em particular,

Teorema 0.7. *Sejam M um espaço métrico compacto, $f : M \to M$ expansora topologicamente mixing e $\phi : M \to \mathbb{R}$ um potencial Holder contínuo e $\mu = \mu_{f,\phi}$ o único estado de equilíbrio para f com respeito a ϕ. Dado $c > 0$, então $\overline{Y}_{\mu_{f,\phi},c} = \emptyset$ ou*

$$P_{\overline{Y}_{\mu,c}}(f,\phi) = P_{\underline{Y}_{\mu,c}}(f,\phi) = P_{Y(\partial B(\mu,c))}(f,\phi) = P_{\text{top}}(f,\phi) - \inf_{d(\eta,\mu)=c} Q(\eta),$$

onde $Y(\partial B(\mu,c)) = \{x\in M : d(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i(x)},\mu) = c\}$ e $Q(\eta) := P_{\text{top}}(f,\phi) - h_\eta(f) - \int \phi d\eta$.

Quando não temos hiperbolicidade uniforme, não é de se esperar que o estado de equilíbrio admita a propriedade Gibbs valendo em todos os pontos e para todos os tempos. O natural é que ela valha para quase todo ponto e que nos instantes de hiperbolicidade as estimativas sejam uniformes. Em um contexto mais amplo do que o discutido há pouco, provamos extensões dos resultados anteriores, com a única diferença que não conseguimos estimar a pressão dos conjuntos definidos em termos de lim sup e sim dos conjuntos definidos me termos de lim inf (veja os Teoremas 3.19 e 3.24).

Com vistas aos resultados anteriores, e com as ideias presentes nas provas, obteremos aplicações e extensões para o caso de dinâmicas de Manneville-Pomeau, aplicações quadráticas, aplicações multimodais, difeomorfismos hiperbólicos e fluxos hiperbólicos. Em particular:
Para cada $\alpha \in (0,1)$ seja $f_\alpha : [0,1] \to [0,1]$ dada por

$$f_\alpha := \begin{cases} x(1+2^\alpha x^\alpha), & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 2x-1, & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

uma aplicação do tipo Manneville-Pomeau. Para $t \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno denotemos o único estado de equilíbrio de f_α com respeito ao potencial $-t \log f'_\alpha$ por $\mu_{\alpha,t}$ e $\overline{X}_{\mu_{\alpha,t}, \log f'_\alpha, c}$ por $X_{\alpha,t,c}$. Logo,

Corolário 0.8. *Dado $\alpha_1 \in (0,1)$ existe um $\epsilon > 0$ tal que a seguinte função é contínua:*

$$[\alpha_1, 1) \times (-\epsilon, \epsilon) \times (0, \frac{\log 2}{2}] \ni (\alpha, t, c) \mapsto P_{X_{\alpha,t,c}}(f_\alpha, -t \log f'_\alpha).$$

Sejam $\mathcal{G}^r$ um aberto de aplicações não-uniformemente expansoras (difeos locais C^r) estudadas em [CV13] e μ_f a única medida de máxima entropia de $f \in \mathcal{G}^r$.

Corolário 0.9. *Existe $b > 0$ tal que*

$$\mathcal{G}^r \times (0,b) \ni (f,c) \mapsto h_{\overline{X}_{\mu_f,\psi,c}}(f)$$

é C^{r-1}, onde $h_Z(f,\phi)$ denota a pressão do conjunto Z com relação a f e ϕ.

Para cada parâmetro $a \in [0,2]$, seja $f_a(x) = 1 - ax^2$ uma aplicação quadrática.

Corolário 0.10. *Existe um conjunto $\Omega \subset [0,2]$ com medida de Lebesgue positiva tal que se $a \in \Omega$ e $\psi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ é contínuo então*

$$\mathbb{R}_0^+ \ni c \mapsto P_{\underline{X}_{\mu_a,\psi,c}}(f_a, -\log |f'_a|)$$

é concava.

Para o caso de difeomorfismos,

Corolário 0.11. *Sejam $f : M \to M$ um difeomorfismos e $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico para f com estrutura de produto local. Se $\phi : M \to \mathbb{R}$ é um potencial Holder contínuo e $\mu = \mu_\phi$ é o único estado de equilíbrio para $f_{|\Lambda}$ com respeito a ϕ; então, para todo observável contínuo $\psi : M \to \mathbb{R}$ e $c > 0$ vale que*

$$P_{\overline{X}_{\mu,\psi,c}}((f_{|\Lambda}, \phi) < P_{\text{top}}(f_{|\Lambda}, \phi).$$

Para o caso de fluxos,

Corolário 0.12. *Sejam $(X_t)_t$ um fluxo Axioma A, $\phi : M \to \mathbb{R}$ é um potencial Holder contínuo e $\mu = \mu_\phi$ o único estado de equilíbrio para $(X_t)_t$ com respeito a ϕ. Então, para todo observável contínuo $\psi : M \to \mathbb{R}$ e $c > 0$ vale que*

$$P_{\overline{X}_{\mu,\psi,c}}((X_t)_t, \phi) < P_{\text{top}}((X_t)_t, \phi).$$

Por fim, um exemplo de [DGR11, DG12] é dado ilustrando que um caso onde a função pressão dos conjuntos é descontínua e não estritamente decrescente, como também um exemplo onde a capacitância de Carathéodory dos conjuntos $\underline{X}_{\mu,\psi,c}$ e $\overline{X}_{\mu,\psi,c}$ é distinta.

Com vistas ao que foi discutido, gostaríamos também de responder as seguintes questões:

Questão 1: Seja $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ um subshift do tipo finito, μ_0 a medida de máxima entropia de σ, $[(i_1, \ldots, i_n)]$ o cilindro de comprimento n e $\psi_n(i_1, \ldots, i_n, \ldots) := -\log \mu_0\Big([i_1, \ldots, i_n]\Big)$. Dado $J \subset \mathbb{R}$, qual a entropia do conjunto $X_J := \{x \in \Sigma : \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\psi_n(x) \in J\}$?

Questão 2: Seja $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ a aplicação shift sobre o espaço $\Sigma = \{1, \ldots, \ell\}$ e Σ_n conjunto de cilindros de comprimento n. Denotemos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ por $\mathbb{F}$. Considere matrizes $M_1, \ldots, M_\ell \in \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{F})$ tal que esse conjunto de matrizes é irredutível sobre $\mathbb{F}^d$, isto é, não existe subespaço não-trivial $V \subset \mathbb{F}^d$ tal que $M_i(V) \subset V$ para todo $i = 1, \ldots, \ell$. Ademais, para toda probabilidade σ-invariante μ definimos o expoente de Lyapunov maximal de μ por

$$M_*(\mu) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\iota \in \sum_n} \mu([\iota]) \log ||M_\iota||.$$

Por [FK11], existe uma única probabilidade σ-invariante μ_0 tal que $M_*(\mu_0) + h(\mu_0) = \sup\{M_*(\mu) + h(\mu) : \mu \in \mathcal{M}_1(\sigma)\}$, onde $h(\mu)$ denota a entropia métrica de μ. Por fim, definamos $\psi_n(i_1, \ldots, i_n, \ldots) := -\log \mu_0\Big([i_1, \ldots, i_n]\Big)$, assim dado $J \subset \mathbb{R}$ qual a entropia do conjunto $X_J := \{x \in \Sigma : \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\psi_n(x) \in J\}$?

As sequências ψ_n definidas nas questões anteriores não são aditivas, ou seja, não podem ser dadas por uma soma de Birkhoff de alguma função. Porém, ψ_n é *quase-aditiva*, ou seja, $\psi_m + \psi_n \circ \sigma^m - C \leq \psi_{m+n} \leq \psi_m + \psi_n \circ \sigma^m + C$. Precisamos então fazer uso do formalismo não-aditivo.

De fato, podemos estender o problema anterior para o formalismo termodinâmico não-aditivo. A saber, podemos considerar uma dinâmica $f : M \to M$, sequências de potenciais $\Phi = \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ quase aditivos e sequências de observáveis $\Psi = \{\Psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ assintoticamente aditivos ou subaditivos, definir os conjuntos

$$\overline{X}_{\mu,\Psi,c} = \Big\{x \in M : \limsup_{n\to\infty} \Big|\frac{1}{n}\psi_n(x) - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int \psi_n \, d\mu\Big| \geq c\Big\}$$

e

$$\underline{X}_{\mu,\Psi,c} = \Big\{x \in M : \liminf_{n\to\infty} \Big|\frac{1}{n}\psi_n(x) - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int \psi_n \, d\mu\Big| \geq c\Big\},$$

onde μ é um único estado de equilíbrio de f com respeito a Φ, e estudar a pressão topológica desses conjuntos com respeito a f e Φ. Assim, obteremos resultados para esse problema que são extensões de alguns dos resultados anteriormente citados. Vale a pena ressaltar que sequências quase aditivas aparecem naturalmente no estudo de expoentes de Lyapunov para sistemas dinâmicos não-conformes. No estudo desse problema obtemos um método de obtenção da função taxa de grandes desvios através de aproximação de famílias de funções contínuas, isso nos permite obter regularidade da função taxa de grandes desvios. Em particular, podemos responder as duas questões anteriores do seguinte modo, denotando $\{x \in \Sigma : \lim_{n\to+\infty} \frac{\psi_n(x)}{n} = c\}$ por $X(c)$:

Teorema 0.13.

i. $\overline{X}_J = \emptyset$ *ou* $h_{\overline{X}_J}(\sigma) = h_{\underline{X}_J}(\sigma) = h_{X(c_*)}(\sigma)$*;*

ii. $\frac{1}{n}\psi_n(x)$ *converge uniformemente para uma constante ou* $\mathbb{R}_0^+ \ni c \mapsto h_{\overline{X}_{\mu_0,\{\psi_n\},c}}(\sigma)$ *é contínuo, estritamente decrescente e concava em uma vizinhança do zero.*

Sumarizando o que foi dito, o corpo da presente tese está dividido em três capítulos e três apêndices cujos conteúdos estão brevemente discriminados a seguir:

- **Capítulo 1:** Relação entre cones e propriedades espectrais de operadores positivos, bem como suas consequências dinâmicas e resultados de estabilidade estatística.
- **Capítulo 2:** Resultados de Linear response formula quando os operadores de transferência possuem gap espectral ocorrendo de maneira uniforme e também quando o seu espectro essencial pode acumular na raio espectral mas de maneira uniforme, bem como consequências desse resultados.
- **Capítulo 3:** Análise multifractal de certos conjuntos irregulares quando o estado de equilíbrio tem alguma propriedade do tipo Gibbs.
- **Apêndice A:** Uma breve apresentação da teoria de *Cones e Métricas Projetivas* apresentando conceitos básicos e resultados que nos serão necessários.

- **Apêndice B:** Apresentação de conceitos e resultados sobre esperança condicional, bem como do *Teorema de Gordin* que é extremamente útil na prova de teoremas centrais do limite.

- **Apêndice C:** Apresentação da definição dimensional da pressão topológica para conjuntos quaisquer, bem como resultados básicos.

Capítulo 1

Cones e propriedades espectrais

O objetivo central desse capítulo é demonstrar que, para uma certa classe de cones, a invariância estrita do cone pelo operador de transferência implica na propriedade do gap espectral do respectivo operador. A classe de cones considerada é relativamente geral e engloba muito do cones utilizados na literatura. De fato nossos resultados valem para operadores que preservam o espaço de funções positivas e estão contidos na seção 1.1. Também estudamos, na seção 1.2, como invariância estrita de cones pelo operador de transferência implica boas propriedades estatísticas para os candidatos a estados de equilíbrio construídos, tais como decaimento exponencial de correlações, teorema central do limite e exatidão. Por fim obtemos resultados de estabilidade, presentes na seção 1.3, quando lidamos com uma classe de dinâmicas em que ocorre a propriedade gap espectral do operador de transferência de maneira uniforme e tal classe de dinâmica está dotada de uma topologia em que dinâmicas próximas implique em ramos inversos próximos. Na seção 1.4, discutimos nossos resultados no contexto de aplicações monótonas por partes e também para uma classe de aplicações não-uniformemente expansoras introduzida em [VV10].

1.1 Cones e operadores positivos

Nesta seção descreveremos uma teoria, mais ou menos geral, de como usando cones podemos obter propriedades espectrais de operadores positivos.

Seja M um espaço métrico, E um subespaço do espaço de funções de M em $\mathbb{R}$ limitadas contendo as funções constantes. Sejam $|\cdot|_1, \ldots, |\cdot|_r$ seminormas sobre E tais que:

1. $|1|_i = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, onde 1 indica a função constante e igual a 1;

2. $||\cdot|| := \sum_{i=1}^{r} |\cdot|_i + ||\cdot||_\infty$ faz de E um espaço de Banach.

Seja $E_+ := \{\varphi \in E : \varphi > 0\}$, e sejam $F_1, \dots, F_r : E_+ \to \mathbb{R}_+^*$ que iremos supor satisfazendo:

1. $F_i(a\varphi_1 + \varphi_2) \geq aF_i(\varphi_1) + F_i(\varphi_2)$ para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in E_+$, $a > 0$ e $i \in \{1, \dots, r\}$; (superaditividade)
2. se $\varphi \in E$ e $\varphi > t$, para alguma constante $t > 0$, então $F_i(\varphi - t) \geq F_i(\varphi) - tF_i(1)$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$;
3. existe $c \geq 1$ tal que se φ e $t - \varphi \in E_+$, para alguma constante t, então $F_i(t - \varphi) \geq F_i(t) - F_i(\varphi) - c|\varphi|_i$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$;
4. se $\varphi_n, \varphi \in E_+$ e $||\varphi_n - \varphi|| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ então $F_i(\varphi_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_i(\varphi)$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$.

Ao longo desse seção comentaremos a importância de cada uma das hipóteses anteriores sobre F_i

Os próximos exemplos mostram que as hipóteses impostas sobre F_i são satisfeitas em contextos muito importantes.

Exemplo 1.1. *Tomemos E como o espaço de funções de M em $\mathbb{R}$ que são $\alpha-$Hölder, $r = 1$, $|\cdot|_1 = |\cdot|_{\alpha,\delta}$ e $F_1(\cdot) = \inf(\cdot)$, onde $|\cdot|_{\alpha,\delta}$ é a norma Holder local definida por*

$$|g|_{\alpha,\delta} := \sup_{0<d(x,y)<\delta} \left\{ \frac{|g(x) - g(y)|}{d(x,y)^\alpha} \right\}.$$

Exemplo 1.2. *Consideremos M como o intervalo $[0,1]$ ou o círculo S^1. Dada $\varphi : M \to \mathbb{R}$ definimos a variação de φ por*

$$var\,\varphi := \sup \sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_{i-1}) - \varphi(x_i)|,$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições finitas $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ de M. Tomemos $E = \{\varphi : M \to \mathbb{R};\ var\,\varphi < +\infty\}$, $r = 1$, $|\cdot|_1 = var(\cdot)$ e $F_1(\cdot) = \int \cdot\, d\nu$, onde ν é uma probabilidade boreliana.

Exemplo 1.3. *Consideremos M uma variedade riemanniana, tomemos E como o espaço das aplicações de M em $\mathbb{R}$ $k-$vezes derivável, $r = k$, $|\varphi|_i = \sup_{x\in M} ||(D^i\varphi)(x)||, \forall j \in \{1, \dots k\}$ e $F_1(\cdot) = \cdots = F_k(\cdot) = \inf(\cdot)$.*

Para cada $\kappa_1, \ldots, \kappa_r > 0$ definamos

$$C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r) := \{\varphi \in E_+ : |\varphi|_i \leq \kappa_i F_i(\varphi), \forall i = 1, \ldots, r\}.$$

Da hipótese 1. sobre F_i temos que $C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$ é um cone convexo, e como $E_+ \subset C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$ temos que $\overline{C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)} \cap (-\overline{C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)}) = \{0\}$ (para mais detalhes sobre cones convexos ver Apêndice A). Note ainda que a hipótese 4. sobre F_i significa que os cones $C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$ são fechados quando dotamos E_+ com a norma de E.

Nós iremos sempre assumir que $A : E \to E$ é um operador linear e contínuo, quando dotamos E da norma $|| \cdot ||$ e também assumiremos que A é positivo, ou seja, $A(E_+) \subset E_+$.

Nós fixaremos algumas notações: a métrica projetiva associada à $C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$ será $\Theta(\varphi, \psi) = \log \frac{\beta(\varphi,\psi)}{\alpha(\varphi,\psi)}$, onde $\alpha(\varphi, \psi) := \sup\{t > 0; \psi - t\varphi \in C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)\}$ e $\beta(\varphi, \psi) := \inf\{t > 0; t\varphi - \psi \in C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)\}$. O diâmetro de $A(C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r))$ em relação à Θ será Δ e por fim $\tau := 1 - e^{-\Delta}$. Nós denotaremos o raio espectral de A por λ e $\frac{A}{\lambda}$ por $\tilde{A}$.

Nesses termos podemos enunciar o principal resultado dessa seção.

Teorema 1.4. *Se existem $\kappa_1, \ldots, \kappa_r$ e $0 < \rho < 1$ tais que:*

i. $A(C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)) \subset C(\rho\kappa_1, \ldots, \rho\kappa_r)$*;*

ii. $\frac{1}{c} F_i(A\varphi) \leq \inf A\varphi \leq \sup A\varphi \leq cF_i(A\varphi)$*, para todo* $\varphi \in C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$ *e* $i \in \{1, \ldots, r\}$*.*

Então:

i. existe um único $\nu \in E^*$ *tal que* $A^*(\nu) = \lambda\nu$ *e* $\nu(1) = 1$*;*

ii. existe um único $h \in C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$ *tal que* $A(h) = \lambda h$ *e* $\nu(h) = 1$*;*

iii. (propriedade do gap espectral) se $E_0 := \left\{\varphi \in E : \tilde{A}^n(\varphi) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right\}$ *e* $E_1 := \{th : t \in \mathbb{R}\}$ *então* $E = E_0 \oplus E_1$ *e existe* $0 < r_0 < \lambda$ *tal que* $spec(A|E_0) \subset B(0, r_0)$*.*

A hipótese ii. relaciona diretamente F_i com a norma do sup e é fundamental entre outras coisas nas convergência na norma do sup. Essa hipótese a princípio parece não ser natural, mas lembremos que nos exemplos práticos F_i é tomado como sendo inf ou alguma probabilidade η. No caso de F_i ser o inf, basta provar a última das desigualdades e frequentemente a obtemos pela escolha da seminorma $| \cdot |_i$. No caso de F_i ser a alguma probabilidade η, vemos nos exemplos que a obtenção da hipótese ii. no caso de A ser o operador de transferência está associada a algum tipo de mistura forte do sistema dinâmico que dá origem ao operador de transferência, como por exemplo se a dinâmica for topologicamente exata.

Decorre da conclusão iii. do teorema anterior que, para todo $\varphi \in E$, nós temos que $\tilde{A}^n(\varphi) \xrightarrow[n\to\infty]{} \nu(\varphi) \cdot h$ e a convergência é exponencialmente rápida. De fato nós provamos que é da ordem de τ.

Para provar o teorema precisaremos de alguns resultados intermediários. Provemos inicialmente que $A(C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$ tem diâmetro finito em relação à métrica projetiva de $C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$. Nessa prova será fundamental usar as hipóteses 2. e 3. sobre F_i. Também será usado fortemente a hipótese ii. presente no Teorema 1.4 a ser provado. Devido ao teorema A.5, isso já nos garante certas convergências na métrica projetiva associada a E_+ .

Proposição 1.5. *$A(C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r))$ tem diâmetro finito com respeito à métrica projetiva de $C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$.*

Prova. Basta provarmos que $\Theta-$distância projetiva entre $A\varphi$ e 1 é uniformemente limitada para $\varphi \in C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$. Lembremos a definição de Θ:

$$\Theta(A\varphi, 1) = \log \frac{\beta(A\varphi, 1)}{\alpha(A\varphi, 1)}$$

onde

$$\alpha(A\varphi, 1) = \sup\{t > 0;\ A\varphi - t \in C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)\},$$

e

$$\beta(A\varphi, 1) = \inf\{t > 0;\ t - A\varphi \in C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)\}.$$

Logo, para $t \leq \min\left\{\inf A\varphi, \min_{i=1,\ldots r}\{\frac{\inf(A\varphi)(1-\rho)}{cF_i(1)}\}\right\}$ nós obtemos que $A\varphi - t \geq 0$ e

$$\frac{|A\varphi - t|_i}{F_i(A\varphi - t)} \leq \frac{|A\varphi|_i}{F_i(A\varphi) - tF_i(1)} \leq \frac{|A\varphi|_i}{F_i(A\varphi)\rho} \leq \kappa_i;\ \forall i \in \{1, \ldots, r\}.$$

Concluindo que $\alpha(\varphi, 1) \geq \min\left\{\inf A\varphi, \min_{i=1,\ldots r}\{\frac{\inf(A\varphi)(1-\rho)}{cF_i(1)}\}\right\}$. Analogamente, nós temos que para $t \geq \max\left\{\sup A\varphi, \max_{i=1,\ldots,r}\{\frac{c \sup A\varphi(\rho+1+c\kappa_i\rho)}{F_i(1)}\}\right\}$ obtemos que $t - A\varphi \geq 0$ e

$$\begin{aligned}
\frac{|t - A\varphi|_i}{F_i(t - A\varphi)} &\leq \frac{|A\varphi|_i}{tF_i(1) - F_i(A\varphi) - c|A\varphi|_i} \\
&\leq \frac{|A\varphi|_i}{tF_i(1) - F_i(A\varphi) - \rho c\kappa_i F_i(A\varphi)} \\
&\leq \frac{|A\varphi_i|}{\rho F_i(A\varphi)} \\
&\leq \kappa_i; \quad \forall i \in \{1, \ldots, r\}.
\end{aligned}$$

Isto implica que $\beta(A\varphi,1) \leq \max\Big\{\sup A\varphi, \max_{i=1,\ldots,r}\{\frac{c\sup A\varphi(\rho+1+c\kappa_i\rho)}{F_i(1)}\}\Big\}$. Assim, nós obtemos que

$$\Theta(A\varphi,1)=\Theta(\frac{A\varphi}{\inf A\varphi},1)\leq \log\max\Big\{c^3, \max_{i=1,\ldots,r}\{\frac{c^4(\rho+1+c\kappa_i\rho)}{F_i(1)}\}\Big\}-$$

$$\log\min\Big\{1, \min_{i=1,\ldots r}\{\frac{(1-\rho)}{cF_i(1)}\}\Big\},$$

utilizando a desigualdade triangular isso implica que $A(C(\kappa_1,\ldots,\kappa_r))$ tem $\Theta-$diâmetro finito. ■

Nosso próximo objetivo é estudar a relação entre convergência na métrica projetiva e na métrica uniforme.

Lema 1.6. *Sejam $(\varphi_n)_n$ e $(\psi_n)_n$ sequências em E_+ tal que $\Theta_+(\varphi_n,\psi_n)\to 0$. Suponha que para algum $y_0\in M$ existe $\lim_{n\to+\infty}\frac{\varphi_n(y_0)}{\psi_n(y_0)}=\lambda\neq 0$. Então, para todo $x\in M$, existe o limite uniforme $\lim_{n\to+\infty}\frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}=\lambda$.*

Prova. O fato que $\Theta_+(\varphi_n,\psi_n)\to 0$ é equivalente a $\sup_{x,y\in M}\{\frac{\varphi_n(x)\psi_n(y)}{\varphi_n(y)\psi_n(x)}\}\to 1$ quando $n\to\infty$. Então, dado $\epsilon>0$, existe n_0 tal que $\forall n\geq n_0$,

$$1-\frac{\epsilon}{2|\lambda|}<\frac{\varphi_n(x)\psi_n(y)}{\varphi_n(y)\psi_n(x)}<1+\frac{\epsilon}{2|\lambda|}, \forall x,y\in M.$$

Isto implica que para todo $n\geq n_0$,

$$(1-\epsilon/(2|\lambda|))\cdot\frac{\varphi_n(y)}{\varphi_n(x)}<\frac{\psi_n(y)}{\psi_n(x)}<(1+\epsilon/(2|\lambda|))\cdot\frac{\varphi_n(y)}{\varphi_n(x)}, \forall x,y\in M \Leftrightarrow$$

$$(1-\epsilon/(2|\lambda|))\cdot\frac{\varphi_n(y)}{\psi_n(y)}<\frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}<(1+\epsilon/(2|\lambda|))\cdot\frac{\varphi_n(y)}{\psi_n(y)}, \forall x,y\in M.$$

Tomando $y=y_0$ e $n_1\geq n_0$ tal que $\forall n\geq n_1$,

$$\Big|\frac{\varphi_n(y_0)}{\psi_n(y_0)}-\lambda\Big|<\frac{\epsilon}{2(1+\epsilon/2|\lambda|)}.$$

Decorre para $n\geq n_1$ que

$$\lambda-\epsilon<\frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}<\lambda+\epsilon, \forall x\in M.$$

■

Lema 1.7. *Sejam φ e $\psi\in E_+$. Escreva $\varphi_n:=A^n(\varphi)$ e $\psi_n:=A^n(\psi)$. Suponha que $\Theta_+(\varphi_n,\psi_n)\to 0$, então existe uma função constante $\lambda=\lambda(\varphi,\psi)$ tal que existe o limite uniforme*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_n}{\psi_n}=\lambda.$$

De fato,

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} \frac{||\varphi_n||_\infty}{||\psi_n||_\infty}.$$

Prova. Nós dividimos a prova em alguns itens que são interessantes por si sós.

1. Dados $\psi, \varphi \in E_+$, a sequência $\left(\frac{A^n(\varphi)}{A^n(\psi)}\right)$ é uniformemente limitada de ambos os lados.

   De fato; existem $c_\varphi, c_\psi > 1$ tal que $c_\varphi^{-1} < \varphi(x) < c_\varphi$ e $c_\psi^{-1} < \psi(x) < c_\psi$, $\forall x \in M$. Logo,

   $$\frac{c_\varphi^{-1}}{c_\psi} \le \frac{c_\varphi^{-1} A^n 1}{c_\psi A^n 1} \le \frac{\varphi_n}{\psi_n} \le \frac{c_\varphi A^n 1}{c_\psi^{-1} A^n 1} \le \frac{c_\varphi}{c_\psi^{-1}};\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Sejam $\varphi, \psi \in E_+$, e escreva φ_n, ψ_n para $A^n(\varphi)$, $A^n(\psi)$ respectivamente. Então existe uma constante positiva $\lambda = \lambda(\varphi, \psi)$ tal que

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\varphi_n}{\psi_n} = \lambda.$$

   De fato; fixemos $y_0 \in M$. Pelo item 1, a sequência $\eta_n(y_0) := (\varphi_n/\psi_n)(y_0)$ é limitada e então admite uma subsequência $(\eta_{n_j}(y_0))$, que é convergente para alguma constante $\lambda > 0$. Pelo lema 1.6, isto implica que $\eta_{n_j}(x) \to \lambda$, uniformemente para todo $x \in M$. O fato que $\Theta_+(\varphi_n, \psi_n) \to 0$ implica em particular que $\sup_{x,y}\{\frac{\varphi_{n_j}(x)\psi_n(y)}{\varphi_n(y)\psi_{n_j}(x)}\} \to 1$ quando $n \to \infty$. Desse modo, nós concluímos a convergência uniforme

   $$\frac{\psi_n(y)}{\varphi_n(y)} \to \lambda^{-1}, \forall y \in M,$$

   o que finaliza a prova deste item.

3. Sejam φ e $\psi \in E_+$, e escreva φ_n, ψ_n para $A^n(\varphi)$, $A^n(\psi)$ respectivamente. Então existe o limite

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{||\varphi_n||_\infty}{||\psi_n||_\infty} = \lambda.$$

   De fato; por um lado, basta tomar y_n tal que $|\psi_n(y_n)| \ge (1-\epsilon)||\psi_n||_\infty$. Como $\eta_n = \varphi_n/\psi_n$ converge uniformemente para λ,

   $$\frac{||\varphi_n||_\infty}{||\psi_n||_\infty} \ge \frac{|\varphi_n(y_n)|}{|\psi_n(y_n)|} \cdot (1-\epsilon) \Rightarrow \liminf \frac{||\varphi_n||_\infty}{||\psi_n||_\infty} \ge \lambda.$$

   Por outro lado, basta tomar $\hat{y}_n$ tal que $|\varphi_n(\hat{y}_n)| \ge (1+\epsilon)^{-1}||\varphi_n||_\infty$. Como $\eta_n = \varphi_n/\psi_n$ converge uniformemente para λ,

   $$\frac{||\varphi_n||_\infty}{||\psi_n||_\infty} \le (1+\epsilon) \cdot \frac{|\varphi_n(\hat{y}_n)|}{|\psi_n(\hat{y}_n)|} \Rightarrow \limsup \frac{||\varphi_n||_\infty}{||\psi_n||_\infty} \le \lambda.$$

■

Relembremos que denotamos a métrica projetiva associada a $C(\kappa_1,\ldots,\rho\kappa)$ por $\Theta(\varphi,\psi)=\log\frac{\beta(\varphi,\psi)}{\alpha(\varphi,\psi)}$, onde $\alpha(\varphi,\psi):=\sup\{t>0;\psi-t\varphi\in C(\kappa_1,\ldots,\rho\kappa)\}$ e $\beta(\varphi,\psi):=\inf\{t>0;t\varphi-\psi\in C(\kappa_1,\ldots,\rho\kappa_r)\}$.

Com o próximo lema começaremos a obter convergência na norma de E, a menos de uma normalização pela norma do sup.

Lema 1.8. *Se $\varphi\in C(\kappa_1,\ldots,\kappa_r)$ então existe $\hat{\varphi}\in C(\rho\kappa_1,\ldots,\rho\kappa_r)$ tal que $\frac{A^n\varphi}{||A^n\varphi||_\infty}\xrightarrow[n\to\infty]{}\hat{\varphi}$ na norma de E.*

Prova. Seja $\varphi\in C(\kappa_1,\ldots,\kappa_r)$. Escreva $\hat{\varphi}_n$ para $\frac{A^n\varphi}{||A^n\varphi||_\infty}$. Sejam $t_\alpha^{m,n}:=\alpha(\hat{\varphi}_m;\hat{\varphi}_n)$ e $t_\beta^{m,n}:=\beta(\hat{\varphi}_m;\hat{\varphi}_n)$. É fácil ver que $t_\alpha^{m,n}\le 1\le t_\beta^{m,n}$, pois $\alpha(\hat{\varphi}_m,\hat{\varphi}_n)=\sup\Big\{t>0:\hat{\varphi}_m-t\hat{\varphi}_n>0 \text{ e } |\hat{\varphi}_m-t\hat{\varphi}_n|_i\le\kappa_iF_i(\hat{\varphi}_m-t\hat{\varphi}_n), i\in\{1,\ldots,r\}\Big\}$. Desse modo $\hat{\varphi}_m-t\hat{\varphi}_n>0$ e implicando que $||\hat{\varphi}_m||_\infty\ge t||\hat{\varphi}_n||_\infty$. Como $||\hat{\varphi}_n||_\infty=1$, decorre que $t\le 1$ e assim $t_\alpha^{m,n}\le 1$. Analogamente, obtemos $1\le t_\beta^{m,n}$.

Afirmação: $\hat{\varphi}_n$ é uma sequência de Cauchy e relação a Θ.

De fato; pelo teorema A.5, para $n,k\ge 1$ temos:

$$\Theta\big(A^{n+k}(\varphi),A^n(\varphi)\big)\le\Delta\tau^{n-1},$$

logo $\hat{\varphi}_n$ é uma sequência de Cauchy em relação a Θ.

Por outro lado $\frac{t_\beta^{m,n}}{t_\alpha^{m,n}}\to 1$, uma vez que $\{\hat{\varphi}_n\}_n$ é uma sequência de Cauchy em relação a Θ. Nós podemos então concluir que $t_\alpha^{m,n}\to 1$. Sabemos também que, para $i\in\{1,\ldots,r\}$,

$$|\hat{\varphi}_m-\hat{\varphi}_n|_i\le|\hat{\varphi}_m-t_\alpha^{m-1,n-1}\hat{\varphi}_n|_i+|(t_\alpha^{m-1,n-1}-1)\hat{\varphi}_n|_i\le$$
$$\kappa_iF_i(\hat{\varphi}_m-t_\alpha^{m-1,n-1}\hat{\varphi}_n)+|t_\alpha^{m-1,n-1}-1|\cdot|\hat{\varphi}_n|_i\le$$
$$\kappa_ic\sup(\hat{\varphi}_m-t_\alpha^{m-1,n-1}\hat{\varphi}_n)+|t_\alpha^{m-1,n-1}-1|\kappa_iF_i(\hat{\varphi}_n)\le$$
$$\kappa_ic\sup(\hat{\varphi}_m-t_\alpha^{m-1,n-1}\hat{\varphi}_n)+|t_\alpha^{m-1,n-1}-1|\kappa_ic.$$

Como $\hat{\varphi}_n$ é uma sequência de Cauchy em relação a Θ e $\Theta^+\le\Theta$, onde Θ^+ é a métrica projetiva das funções estritamente positivas (veja Apêndice A para detalhes), nós temos que $\hat{\varphi}_n$ é uma sequência de Cauchy em relação a Θ^+, que é completa. Aplicando a proposição A.1 nós temos que $|\hat{\varphi}_m-\hat{\varphi}_n|_i\xrightarrow[m,n\to\infty]{}0$ para todo $i\in\{1,\ldots,r\}$ e assim $\{\hat{\varphi}_n\}_n$

é uma sequência de Cauchy na norma de E. Então existe $\hat{\varphi} \in E$ tal que $||\hat{\varphi}_n - \hat{\varphi}|| \to 0$. Nós temos também que, para $i \in \{1, \ldots, r\}$,

$$|\hat{\varphi}|_i \leq |\hat{\varphi}_n - \hat{\varphi}|_i + |\hat{\varphi}_n|_i \leq |\hat{\varphi}_n - \hat{\varphi}|_i + \kappa_i F_i(\hat{\varphi}_n) \Rightarrow |\hat{\varphi}|_i \leq \lim_{n\to\infty} |\hat{\varphi}_n - \hat{\varphi}|_i + \kappa_i F_i(\hat{\varphi}_n) = \kappa_i F_i(\hat{\varphi}),$$

onde a última igualdade decorre da hipótese 4. sobre F_i. E assim provamos o lema. ■

Prova do Teorema 1.4. Nós começaremos provando que existe um único semi-eixo invariante contido em $C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$. Esse semi-eixo provém de um autoespaço unidimensional, com um correspondente autovalor positivo.

Tome $\psi \in C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$, e considere $\varphi = A(\psi)$. Pelo item 2 no lema 1.7, existe uma constante positiva $\hat{\lambda} = \lambda(\varphi, \psi)$ tal que

$$\hat{\lambda} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{A(A^n(\psi))(x)}{||A^n(\psi)||_\infty} \cdot \frac{||A^n(\psi)||_\infty}{A^n(\psi)(x)}, \forall x \in M.$$

Escrevendo $\hat{\psi} = \lim_{n\to+\infty} \frac{A^n(\psi)(x)}{||A^n(\psi)||_\infty}$ e utilizando o último lema, nós obtemos que

$$\hat{\lambda} = \frac{A(\hat{\psi})(x)}{\hat{\psi}(x)},$$

ou seja, $\hat{\psi}$ é um autovetor para A, com correspondente autovalor $\hat{\lambda} > 0$.

Dado $\xi \in C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$, como $\lim_{n\to+\infty} \frac{A^n(\xi)}{A^n(\varphi)} = \tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(\xi, \psi)$ nós concluímos que

$$\tilde{\lambda} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\xi_n(x)}{\psi_n(x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{A^n(\xi)(x)}{||A^n(\xi)||_\infty} \cdot \frac{||A^n(\psi)||_\infty}{A^n(\psi)(x)} \cdot \frac{||A^n(\xi)||_\infty}{||A^n(\psi)||_\infty}$$

Isto implica que $\hat{\xi}(x) = \hat{\psi}(x)$. Então $\frac{A(\hat{\xi})}{\hat{\xi}} = \frac{A(\hat{\psi})}{\hat{\psi}} =: \lambda, \forall \xi, \psi \in C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$.

Afirmação 1: O único autovalor que é realizado por um elemento de $C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$ *é* λ.

De fato; seja $\varphi \in C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$ tal que $A(\varphi) = a\varphi$. Então $\frac{A^n(\varphi)}{||A^n(\varphi)||_\infty} = \frac{a^n \varphi}{|a|^n \cdot ||\varphi||_\infty}$. Nós sabemos, pelo lema 1.8 que existe $\lim \frac{A^n(\varphi)}{||A^n(\varphi)||_\infty}$, logo $a > 0$. Assim $\hat{\varphi} = \frac{\varphi}{||\varphi||_\infty}$, desse modo $a = \lambda$.

Afirmação 2: $\ker(A - \lambda I) \cap C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$ *é uma semi-reta.*

De fato; seja $\varphi_1, \varphi_2 \in \ker(A - \lambda I) \cap C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$. Pelo item 2 do lema 1.7 existe $\lambda(\varphi_1, \varphi_2)$ tal que $\varphi_1 = \lambda(\varphi_1, \varphi_2)\varphi_2$.

Agora, aplicando o item 3 do lema 1.7 para $\varphi \in C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$ e $\hat{\varphi} = \lim \varphi_n / ||\varphi_n||_\infty$, nós obtemos que

$$\lambda(\varphi, \hat{\varphi}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{||A^n(\varphi)||_\infty}{||A^n(\hat{\varphi})||_\infty} = \lim_{n\to+\infty} \frac{||A^n(\varphi)||_\infty}{\lambda^n}$$

e então

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A^n(\varphi)}{\lambda^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{A^n(\varphi)}{||A^n(\varphi)||_\infty} \cdot \frac{||A^n(\varphi)||_\infty}{\lambda^n} = \hat{\varphi} \cdot \lambda(\varphi, \hat{\varphi}).$$

Definindo $\lim \frac{A^n 1}{\lambda^n}$ por h, nós temos que dado $\varphi \in C(\kappa_1 \ldots, \kappa_r)$ existe $\nu(\varphi) > 0$ tal que $\lim \frac{A^n \varphi}{\lambda^n} = \nu(\varphi) \cdot h$, com $\nu(\varphi) := \lim \frac{A^n \varphi}{A^n 1}$.

Se $\varphi \in E$, então tomando

$$b := \max\Big\{1 + |\inf \varphi|, \max_{i=1,\ldots,r}\{\frac{|\varphi|_i - F_i(\varphi + 1 + |\inf \varphi|)}{\kappa_i F_i(1)}\}\Big\}$$

nós temos que $\varphi + b$ e b pertencem a $C(\kappa_1 \ldots, \kappa_r)$. Nesse momento estamos usando fortemente as hipóteses 2. e 3. sobre F_i. Logo existe $\nu(\varphi) \in \mathbb{R}$ tal que $\lim \frac{A^n \varphi}{\lambda^n} = \nu(\varphi) \cdot h$. Definindo então $\nu : E \xrightarrow[\varphi \to \nu(\varphi)]{} \mathbb{R}$ nós temos que $\nu \in E^*$ e é positivo.

Afirmação 3: $\ker(A - \lambda I)$ *é unidimensional.*

De fato; dado $\varphi \in \ker(A - \lambda I)$, nós temos que $\varphi = \lim_{n\to+\infty} \frac{A^n \varphi}{\lambda^n} = \nu(\varphi) h$.

Nós temos então que h é o único autovetor associado a λ tal que $\nu(h) = 1$.

Afirmação 4: Se $\varphi \in C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$ *então* $||\frac{A^n \varphi}{\lambda^n \varphi} - \nu(\varphi) h|| \leq c(2+c^2)e^\Delta \Delta \tau^{n-1} ||\varphi||_\infty \sum_{i=1}^r \kappa_i$,.

De fato; denote $\frac{A^n}{\lambda^n}$ por $\tilde{A}^n$, $\Delta := \sup\{\Theta(A\varphi_1, A\varphi_2) : \varphi_1, \varphi_2 \in C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)\}$ e $\tau := 1 - e^{-\Delta}$. Como $\nu(\tilde{A}^n \varphi) = \nu(\varphi)$ e ν é positivo, nós podemos aplicar a proposição A.1 na norma do sup e em ν. Logo,

$$\begin{aligned} ||\tilde{A}^n \varphi - \tilde{A}^{n+k} \varphi||_\infty &\leq (e^{\Theta^+(\tilde{A}^n \varphi, \tilde{A}^{n+k} \varphi)} - 1) ||\varphi||_\infty \\ &\leq \Theta^+(\tilde{A}^n \varphi, \tilde{A}^m \varphi) e^\Delta ||\varphi||_\infty \\ &\leq \Theta(\tilde{A}^n \varphi, \tilde{A}^{n+k} \varphi) e^\Delta ||\varphi||_\infty \\ &\leq \Delta e^\Delta \tau^{n-1} ||\varphi||_\infty. \end{aligned}$$

Isto implica que

$$||\tilde{A}^n \varphi - \nu(\varphi) h||_\infty \leq \Delta e^\Delta \tau^{n-1} ||\varphi||_\infty.$$

Escreva $\hat{\varphi}_n$ para $\tilde{A}^n \varphi$. Seja $t_\alpha^{m,n} := \alpha(\hat{\varphi}_m; \hat{\varphi}_n)$ e $t_\beta^{m,n} := \beta(\hat{\varphi}_m; \hat{\varphi}_n)$. É fácil ver que $t_\alpha^{m,n} \leq 1 \leq t_\beta^{m,n}$. Porque, $\alpha(\hat{\varphi}_m, \hat{\varphi}_n) = \sup\Big\{t > 0 : \hat{\varphi}_m - t\hat{\varphi}_n > 0$ e $|\hat{\varphi}_m - t\hat{\varphi}_n|_i \leq$

$\kappa_i F_i(\hat{\varphi}_m - t\hat{\varphi}_n), i \in \{1, \ldots, r\}\Big\}$. Logo $\hat{\varphi}_m - t\hat{\varphi}_n > 0$, implicando em $\nu(\hat{\varphi}_m) \geq t\nu(\hat{\varphi}_n)$. Como $\nu(\hat{\varphi}_m) = \nu(\hat{\varphi}_n)$ decorre que $t \leq 1$ e assim $t_\alpha^{m,n} \leq 1$. Analogamente, obtemos $1 \leq t_\beta^{m,n}$. Por outro lado $\frac{t_\beta^{m,n}}{t_\alpha^{m,n}} \to 1$, pois $\{\hat{\varphi}_n\}_n$ é uma sequência de Cauchy pela *Afirmação* do lema anterior. Nós podemos concluir que $t_\beta^{m,n} \to 1$. Sabemos também que, para $i \in \{1, \ldots, r\}$,

$$|\hat{\varphi}_n - \hat{\varphi}_{n+m}|_i \leq \kappa_i c \sup(t_\beta^{n-1,n+m-1}\hat{\varphi}_n - \hat{\varphi}_{n+m}) + |t_\beta^{n-1,n+m-1} - 1|\kappa_i c \inf \hat{\varphi}_n \leq$$

$$c\kappa_i\Big(||\hat{\varphi}_n - \hat{\varphi}_{n+m}||_\infty + |t_\beta^{n-1,n+m-1} - 1| \sup ||\hat{\varphi}_n||_\infty + |\frac{t_\beta^{n-1,n+m-1}}{t_\alpha^{n-1,n+m-1}} - 1| \cdot \nu(\inf \tilde{A}^n 1) \cdot ||\varphi||_\infty\Big) \leq$$

$$c\kappa_i\Big(\Delta e^\Delta \tau^{n-1}||\varphi||_\infty + |\frac{t_\beta^{n-1,n+m-1}}{t_\alpha^{n-1,n+m-1}} - 1|c^2 \inf \hat{\varphi}_n + |\frac{t_\beta^{n-1,n+m-1}}{t_\alpha^{n-1,n+m-1}} - 1| \cdot ||\varphi||_\infty\Big) \leq$$

$$c\kappa_i\Big(\Delta e^\Delta \tau^{n-1}||\varphi||_\infty + \Delta e^\Delta \tau^{n-1} c^2 \nu(\inf \tilde{A}^n 1)||\varphi||_\infty + \Delta e^\Delta \tau^{n-1} \cdot ||\varphi||_\infty\Big) \leq$$

$$c\kappa_i \Delta e^\Delta \tau^{n-1}||\varphi||_\infty(2 + c^2).$$

E assim obtemos a *Afirmação* pretendida.

Seja $E_1 := \ker(A - \lambda I)$ e $E_0 := \{\varphi \in E : \nu(\varphi) = 0\}$; já sabemos que $E_1 = \{t \cdot h : t \in \mathbb{R}\}$. Observemos que E_0, E_1 são $A-$invariantes e $E = E_1 \oplus E_0$.

Afirmação 5: spec$(\tilde{A}_{|E_0}) \subset B(0, \lambda_1)$*, onde* $0 < \lambda_1 < 1$.

De fato; nós dotamos E_0 da norma de E, com essa norma E_0 é um espaço de Banach. Nós tomamos $\varphi \in E_0$ com $||\varphi|| = 1$, então $\varphi + 2 + \Big(\min_{i=1,\ldots,r}\{\kappa_i F_i(1)\}\Big)^{-1} \in C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$. Logo:

$$||\tilde{A}^n(\varphi)|| = ||\tilde{A}^n\Big(\varphi + 2 + \Big(\min_{i=1,\ldots,r}\{\kappa_i F_i(1)\}\Big)^{-1}\Big) - \tilde{A}^n\Big(2 + \Big(\min_{i=1,\ldots,r}\{\kappa_i F_i(1)\}\Big)^{-1}\Big)|| \leq$$

$$||\tilde{A}^n\Big(\varphi + 2 + \Big(\min_{i=1,\ldots,r}\{\kappa_i F_i(1)\}\Big)^{-1}\Big) - \nu\Big(2 + \Big(\min_{i=1,\ldots,r}\{\kappa_i F_i(1)\}\Big)^{-1}\Big) \cdot h|| +$$

$$||\tilde{A}^n\Big(2 + \Big(\min_{i=1,\ldots,r}\{\kappa_i F_i(1)\}\Big)^{-1}\Big) - \nu\Big(2 + \Big(\min_{i=1,\ldots,r}\{\kappa_i F_i(1)\}\Big)^{-1}\Big) \cdot h|| \leq$$

$$||\tilde{A}^n\Big(\varphi + 2 + \Big(\min_{i=1,\ldots,r}\{\kappa_i F_i(1)\}\Big)^{-1}\Big) - \nu\Big(\varphi + 2 + \Big(\min_{i=1,\ldots,r}\{\kappa_i F_i(1)\}\Big)^{-1}\Big) \cdot h|| +$$

$$||\tilde{A}^n\Big(2 + \Big(\min_{i=1,\ldots,r}\{\kappa_i F_i(1)\}\Big)^{-1}\Big) - \nu\Big(2 + \Big(\min_{i=1,\ldots,r}\{\kappa_i F_i(1)\}\Big)^{-1}\Big) \cdot h|| \leq$$

$$\Big(5 + 2\big(\min_{i=1,\ldots,r}\{\kappa_i F_i(1)\}\big)^{-1}\Big)c(2 + c^2)\Delta e^\Delta \tau^{n-1} \sum_{i=1}^r \kappa_i.$$

Assim, utilizando a fórmula do raio espectral teremos que $\mathrm{spec}(\tilde{A}_{|E_0}) \subset B(0, \tau)$.

Afirmação 6: Existe um único $\nu \in \ker(A^* - \lambda I)$ *tal que* $\nu(1) = 1$.

De fato; $A^*\nu = \lambda\nu$ e $\nu(1) = 1$. Seja $\eta \in \ker(A^* - \lambda I)$ tal que $\eta(1) = 1$. Nós tomamos $\varphi \in E$, então $\varphi = h \cdot \eta(\varphi) + (\varphi - h \cdot \eta(\varphi)$. Pela decomposição do espectro já sabemos que $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{A}^n(\varphi) = h \cdot \nu(\varphi)$ e $\lim_{n\to+\infty} \tilde{A}^n(\varphi) = h \cdot \eta(\varphi)$; assim $\nu(\varphi) = \eta(\varphi)$.

Desse modo findamos a prova do teorema. ■

Vale ressaltar que quando sabemos a priori da existência de uma auto medida para o operador A associado ao seu raio espectral, a prova do teorema se dá de maneira mais simplificada, pois podemos usar essa medida como normalização dos iterados do operador e garantir as convergências necessárias. Isso ficará claro na seção sobre aplicações expansoras no caso do operador de transferência. Notemos ainda que, em geral, quando a dinâmica tem ramos inversos contínuos e o potencial é contínuo, utilizando a forma geométrica do Hahn-Banach é possível garantir a existência de uma auto-medida do operador de transferência associada ao seu raio espectral como operador agindo sobre C^0.

Além disso, pelas estimativas feitas na prova do Teorema 1.4, se temos dois operadores positivos A_1 e A_2 em que ocorre a invariância estrita do mesmo cone e com mesma taxa então as convergências se dão de maneira uniforme, mais precisamente,

Corolário 1.9. *Sejam* A_1, A_2 *operadores positivos. Suponhamos que existe* $\kappa_1, \ldots, \kappa_r > 0$ *e* $0 < \rho < 1$ *tal que, para* $j = 1$ *ou* 2*, nós temos:*

i. $A_j(C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)) \subset C(\rho\kappa_1, \ldots, \rho\kappa_r)$;

ii. $\frac{1}{c}F_i(A_j\varphi) \le \inf A_j\varphi \le \sup A_j\varphi \le cF_i(A_j\varphi)$, *para todo* $\varphi \in C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$ *e* $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Então, existe $k \ge 0$ *e* $\tau \in (0,1)$ *tal que, para* $j = 1$ *ou* 2*, nós temos:*

i. Se $\varphi \in C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$ *então* $||\tilde{A}_j^n\varphi - \nu_j(\varphi)h_j|| \le k\tau^n||\varphi||_\infty$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$;

ii. Se $\varphi \in E$ *então* $||\tilde{A}_j^n\varphi - \nu_j(\varphi)h_j|| \le k\tau^n||\varphi||$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

1.2 Operador de transferência e sistemas dinâmicos

Frequentemente quando estudamos os estados de equilíbrio de uma dinâmica $f : M \to M$ e um potencial $\phi : M \to \mathbb{R}$, bons candidatos são probabilidades da forma $\mu_{f,\phi} := h_{f,\phi}\nu_{f,\phi}$ onde $h_{f,\phi}$ é uma autofunção de $\mathcal{L}_{f,\phi}$ associado ao seu raio espectral $\lambda_{f,\phi}$

e $\nu_{f,\phi}$ é uma automedida do adjunto de $\mathcal{L}_{f,\phi}$ associada ao seu raio espectral, restringindo $\mathcal{L}_{f,\phi}$ a um espaço de Banach adequado. Ademais, $e^{\lambda_{f,\phi}}$ é o candidato a pressão topológica.

Como o operador de transferência é positivo, podemos analisá-lo considerando o Teorema 1.4. O funcional ν e a função h dados nesse teorema serão denotados por $\nu_{f,\phi}$ e $h_{f,\phi}$ respectivamente.

Suponhamos que escolhemos a dinâmica $f : M \to M$ e o potencial $\phi : M \to \mathbb{R}$ mensuráveis tal que nós podemos aplicar o Teorema 1.4 ao operador de transferência $\mathcal{L}_{f,\phi}$ restrito a E. Denotaremos o raio espectral de $\mathcal{L}_{f,\phi|E}$ por $\lambda_{f,\phi}$ e $\frac{\mathcal{L}_{f,\phi}}{\lambda_{f,\phi}}$ por $\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}$. A princípio $\nu_{f,\phi}$ não precisa ser uma medida, porém se o é, veremos que $\mu_{f,\phi} := h_{f,\phi}\nu_{f,\phi}$ é uma probabilidade com boas propriedades.

Proposição 1.10. *Além das hipóteses do Teorema 1.4 página 24, suponhamos que $\nu_{f,\phi}$ é uma probabilidade, que $\mathcal{L}_{f,\phi}$ é contínuo agindo sobre $L^1(\nu_{f,\phi})$, que $E \cdot h_{f,\phi} \subset E$, que todo elemento de E seja uma função mensurável e que E é denso em $L^1(\mu_{f,\phi})$. Então:*

i. $\mu_{f,\phi} := h_{f,\phi}\nu_{f,\phi}$ tem decaimento exponencial de correlações em E da ordem de τ;

ii. $\mu_{f,\phi}$ é $f-$invariante, mixing e exata;

iii. o Teorema Central do Limite é válido em E.

Prova. i.] Sejam $\varphi \in L^1(\mu_{f,\phi})$ e $\psi \in E$. Então

$$\begin{aligned}
C_{\varphi,\psi}(n) &= \Big| \int (\varphi \circ f^n)\psi d\mu_{f,\phi} - \int \varphi d\mu_{f,\phi} \int \psi d\mu_{f,\phi} \Big| \\
&= \Big| \int (\varphi \circ f^n)\psi \cdot h_{f,\phi} d\nu_{f,\phi} - \int \varphi \cdot h_{f,\phi} d\nu_{f,\phi} \int \psi d\mu_{f,\phi} \Big| \\
&= \Big| \int \varphi \cdot \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(\psi \cdot h_{f,\phi}) d\nu_{f,\phi} - \int \varphi \cdot h_{f,\phi} d\nu_{f,\phi} \int \psi d\mu_{f,\phi} \Big| \\
&= \Big| \int \varphi \cdot \Big(\frac{\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(\psi \cdot h_{f,\phi})}{h_{f,\phi}} - \int \psi d\mu_{f,\phi} \Big) d\mu_{f,\phi} \Big| \leq \\
&\leq \Big|\Big| \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(\psi \cdot h_{f,\phi}) - h_{f,\phi} \cdot \int \psi \cdot h_{f,\phi} d\nu_{f,\phi} \Big|\Big|_\infty \cdot \Big|\Big| \frac{1}{h_{f,\phi}} \Big|\Big|_\infty \int |\varphi| d\mu_{f,\phi} \\
&\leq \int |\varphi| d\mu_{f,\phi} \cdot \Big|\Big| \frac{1}{h_{f,\phi}} \Big|\Big|_\infty \cdot \tau^n e^{\Delta_2} \Delta_2 ||\psi \cdot h_{f,\phi}||_\infty \\
&= K(\varphi, \psi) \cdot \tau^n.
\end{aligned}$$

ii.] Decorre da dualidade que

$$\mu_{f,\phi}(f^{-1}(A)) = \int \chi_A \circ f h_{f,\phi} d\nu_{f,\phi} = \int \chi_A \tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}(h_{f,\phi}) d\nu_{f,\phi} = \mu_{f,\phi}(A).$$

Logo $\mu_{f,\phi}$ é $f-$invariante, decorre do item i) e da densidade que $\mu_{f,\phi}$ é mixing.

Seja $\mathcal{F}$ a $\sigma-$álgebra de Borel associada a M e $\varphi \in \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(\mathcal{F})\right) \cap L^1(\mu_{f,\phi})$. Pela proposição B.5, temos que $\varphi = \varphi_n \circ f^n$ para alguma φ_n mensurável, como $\mu_{f,\phi}$ é invariante temos que $\int |\varphi_n| d\mu_{f,\phi} = \int |\varphi| d\mu_{f,\phi} < +\infty$. Pelo item i), dada $\psi \in E$ e $n \geq 1$ temos

$$\Big|\int(\varphi - \int \varphi d\mu_{f,\phi})\psi d\mu_{f,\phi}\Big| = \Big|\int \varphi_n \circ f^n \cdot \psi d\mu_{f,\phi} - \int \varphi d\mu_{f,\phi} \int \psi d\mu_{f,\phi}\Big| \leq K(\varphi_n, \psi) \cdot \tau^n.$$

Sabemos que

$$K(\varphi_n, \psi) = \int |\varphi| d\mu_{f,\phi} \cdot \Big|\Big|\frac{1}{h_{f,\phi}}\Big|\Big|_\infty \cdot e^{\Delta_2}\Delta_2 ||\psi \cdot h_{f,\phi}||_\infty = K(\varphi, \psi),$$

logo $|\int(\varphi - \int \varphi d\mu_{f,\phi})\psi d\mu_{f,\phi}| = 0$. Pela densidade, temos que $\varphi = \int \varphi d\mu_{f,\phi}$ em $\mu_{f,\phi}-$q.t.p.. Decorre então que $\mu_{f,\phi}$ é exata.

iii.] A prova segue a técnica bastante utilizada de usar o decaimento de correlações somável para provar que valem as hipóteses do Teorema de Gordin (veja B.3 no Apêndice B) e assim obter o teorema central do limite.

Seja $\psi \in E$, tomemos $g := \psi - \int \psi d\mu_{f,\phi}$, como $1 \in E$ temos que $g \in E$. Pelo item i) sabemos que

$$C_{\varphi,g}(n) \leq \int |\varphi| d\mu_{f,\phi} \cdot \Big|\Big|\frac{1}{h_{f,\phi}}\Big|\Big|_\infty \cdot \prod_{j=3}^{n+1} \tau_j e^{\Delta_2}\Delta_2 ||g \cdot h_{f,\phi}||_\infty.$$

Seja $\mathcal{F}$ a $\sigma-$álgebra de Borel, $\mathcal{F}_n$ a sequência não-decrescente de $\sigma-$álgebras $\mathcal{F}_n = f^{-n}(\mathcal{F}), n \geq 0$ e dada $g \in L^1(M, \mathcal{F}, \mu)$ denotaremos a esperança condicional de g com respeito a sigma álgebra $\mathcal{F}_n$ por $\mathbb{E}(g|\mathcal{F}_n)$. Assim

$$\begin{aligned} ||\mathbb{E}(g|\mathcal{F}_n)||_2 &= \sup\Big\{\int \xi g d\mu_{f,\phi} : \xi \in L^2(M, \mathcal{F}_n, \mu_{f,\phi}), ||\xi||_2 = 1\Big\} \\ &= \sup\Big\{\int (\varphi \circ f^n) g d\mu_{f,\phi} : \varphi \in L^2(M, \mathcal{F}, \mu_{f,\phi}), ||\varphi||_2 = 1\Big\} \\ &= \sup\Big\{C_{\varphi,g}(n) : \varphi \in L^2(M, \mathcal{F}, \mu_{f,\phi}), ||\varphi||_2 = 1\Big\} \\ &\leq \Big|\Big|\frac{1}{h_{f,\phi}}\Big|\Big|_\infty \cdot \prod_{j=3}^{n+1} \tau_j e^{\Delta_2}\Delta_2 ||g \cdot h_{f,\phi}||_\infty; \end{aligned}$$

logo

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||\mathbb{E}(g|\mathcal{F}_n)||_2 < \infty.$$

Desse modo, basta aplicarmos o teorema de Gordin em g para findar a prova do item.

■

Após o resultado anterior uma questão que se impõe é garantir que $\nu_{f,\phi}$ é uma medida. Mostraremos que sob hipóteses comuns $\nu_{f,\phi}$ é uma medida, de fato provaremos um critério que vale em contextos bem gerais.

Teorema 1.11. *Suponhamos que M é um espaço métrico compacto, que todo elemento de E seja uma função mensurável, $f : M \to M$ seja mensurável e sobrejetiva, que $M = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} M_i$ onde $f_{|M_i}$ é injetiva, M_i e $f(M_i)$ são borelianos para todo $i \in \mathbb{N}$. Iremos supor também que dada $g \in \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ existe uma sequência g_n de funções em $E \cap \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ tal que g_n converge uniformemente para g. Se existem $\lambda > 0$ e $h \in E$ tais que:*

i. $0 < \inf h \leq \sup h < \infty$;

ii. *dado $\varphi \in E \cap \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ existe $P(\varphi) \in \mathbb{R}$ tal que $||\frac{\mathcal{L}^n_{f,\phi}\varphi}{\lambda^n} - P(\varphi)h_{f,\phi}|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ e $P(1) = 1$.*

Então existe uma probabilidade η tal que

i. *$\int \varphi d\eta = P(\varphi)$, para todo $\varphi \in E \cap \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$;*

ii. *$\int \mathcal{L}_{f,\phi} g \, d\eta = \lambda \cdot \int g d\eta$, para todo $g \in C(M;\mathbb{R})$.*

Ademais, suponha adicionalmente que M é uma variedade, que $M = \bigcup_{i=1}^{n} N_i$ onde N_i é uma subvariedade de M (possivelmente com bordo) tal que se N_i intersecta N_j para $i \neq j$ então a interseção só se dá no bordo das subvariedades, que f restrita a cada N_i menos o seu bordo é um homeomorfismo, que ϕ seja limitado inferiormente e que $e^{-\phi}g \in E$ para todo $g \in E \cap \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$. Então

iii. *$\int \mathcal{L}_{f,\phi} g \, d\eta = \lambda \cdot \int g d\eta$, para todo $g \in L^1(\eta)$.*

Prova. Denotaremos $\frac{\mathcal{L}_{f,\phi}}{\lambda_{f,\phi}}$ por $\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}$. Fixemos $a \in M$. Seja $\nu_n : \mathcal{C}(M;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ uma sequência definida por $\nu_n(g) := \dfrac{(\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi} g)(a)}{h(a)}$. Cada ν_n será um funcional linear e contínuo. Mostremos que a sequência $\{\nu_n\}_n$ converge pontualmente.

Afirmação 1: Dada $g \in \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ temos que $\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi} g$ é Cauchy na norma do sup.

De fato; observemos inicialmente como $||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi} 1 - h_{f,\phi}|| \to 0$ e $\inf h_{f,\phi} > 0$ teremos que $0 < \sup_{n\in\mathbb{N}} ||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi} 1||_\infty < \infty$. Dado $\epsilon > 0$, tomemos $g_i \in E \cap \mathcal{C}(M,\mathbb{R})$ tal que $||g_i - g||_\infty < \dfrac{\epsilon}{3 \sup_{n\in\mathbb{N}} ||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi} 1||_\infty}$. Como $||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi} g_i - P(g_i)h_{f,\phi}|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, teremos que $\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi} g_i$ é Cauchy em relação a n. Tomemos então $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}g_i - \tilde{\mathcal{L}}^m_{f,\phi}g_i||_\infty < \dfrac{\epsilon}{3}$, para todo $n, m \geq n_0$. Desse modo, para $n, m \geq n_0$ teremos:

$$\begin{aligned}
||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}g - \tilde{\mathcal{L}}^m g||_\infty &\leq ||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}g - \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}g_i||_\infty + ||\tilde{\mathcal{L}}^m_{f,\phi}g - \tilde{\mathcal{L}}^m_{f,\phi}g_i||_\infty + ||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}g_i - \tilde{\mathcal{L}}^m_{f,\phi}g_i||_\infty \\
&< \frac{\epsilon}{3\sup_{n\in\mathbb{N}} ||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}1||_\infty} \cdot ||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}1||_\infty + \frac{\epsilon}{3\sup_{n\in\mathbb{N}} ||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}1||_\infty} \cdot ||\tilde{\mathcal{L}}^m_{f,\phi}1||_\infty + \frac{\epsilon}{3} \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}$$

Decorre da afirmação anterior que se $g \in \mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ então existe $\lim\limits_{n\to+\infty} \nu_n(g)$, denotaremos tal limite por $\eta(g)$; como $\mathcal{C}(M;\mathbb{R})$ é um espaço de Banach na norma uniforme, aplicando o princípio da limitação uniforme, $\nu_{f,\phi}$ será um funcional linear e contínuo sobre $\mathcal{C}(M;\mathbb{R})$. Como para cada ν_n temos que $\nu_n(g) \geq \inf g \cdot \frac{(\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}1)(a)}{h(a)}$ então η será positivo, aplicando o teorema de representação de Riesz-Markov teremos que η é uma medida, ademais, η será uma probabilidade pela definição de ν_n. Notemos ainda que se $g \in \mathcal{C}(M;\mathbb{R}) \cap E$ teremos que $\nu_{f,\phi}(g) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\tilde{\mathcal{L}}^n g)(a)}{h(a)} = \dfrac{P(g)\cdot h(a)}{h(a)} = P(g)$ e $\eta(g) = \eta(\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}g)$. Mostremos agora que η é um ponto fixo de $\tilde{\mathcal{L}}^*_{f,\phi}$.

Afirmação 2: $\int \tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi} g d\eta = \int g d\eta$ *para todo* $g \in C(M;\mathbb{R})$.

De fato; seja $g \in C(M;\mathbb{R})$, por hipótese existe uma sequência $g_k \in \mathcal{C}(M;\mathbb{R}) \cap E$ tal que g_k converge uniformemente para g. Logo teremos que $\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}g_k$ converge uniformemente para $\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}g$. Assim, aplicando o teorema da convergência dominada, teremos que:

$$\int \tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi} g d\eta = \lim_{k\to\infty} \int \tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi} g_k d\eta = \lim_{k\to\infty} \int g_k d\eta = \int g d\eta.$$

Provemos agora o "ademais". Para isso precisaremos antes provar alguns fatos.

Afirmação 3: Dada $g \in L^1(\eta)$, *existe uma sequência* $g_k \in \mathcal{C}(M;\mathbb{R}) \cap E$ *tal que* $g_k(x)$ *converge para* $g(x)$ *em* $\eta-$*q.t.p.* x.

De fato; aplicando o teorema de densidade de funções contínuas, existe uma sequência $g_n \in \mathcal{C}(M;\mathbb{R}) \cap E$ tal que g_n converge em $L^1(\eta)$ para g, logo existe uma subsequência g_{n_k} que converge η-q.t.p. x para g.

Antes de enunciarmos e provarmos a próxima afirmação lembremos que o jacobiano de η em relação a f é uma função $J_\eta : M \to [0, +\infty)$ tal que $\eta(f(B)) = \int_B J_\eta f d\eta$, para qualquer boreliano $B \subset M$ com $f(B)$ boreliano e $f_{|B}$ injetiva.

Afirmação 4: $J_\eta f = \lambda e^{-\inf \phi}$.

De fato; seja B um boreliano tal que $f_{|B}$ é injetiva e $f(B)$ boreliano, então tomemos uma sequência $(g_n)_{n\geq 1}$ de funções contínuas tais que: $g_n(x) \xrightarrow{\eta-q.t.p.\ x} \chi_B(x)$, $\sup g_n \leq 2$ e o suporte de cada g_n não intersecte $f^{-1}(f(B)) \cap B^c$. Então:

$$\mathcal{L}_{f,\phi}(e^{-\phi} g_n)(x) = \sum_{y \in f^{-1}(x)} e^{\phi(y)} e^{-\phi(y)} g_n(y) = \sum_{y \in f^{-1}(x)} g_n(y) \xrightarrow{\eta-q.t.p.\ x} \chi_{f(B)}(x).$$

Logo, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue:

$$\int \lambda e^{-\phi} g_n d\eta = \int e^{-\phi} g_n d(\mathcal{L}^*_{f,\phi}\eta) = \int \mathcal{L}_{f,\phi}(e^{-\phi} g_n) d\eta \to \eta(f(B)),$$

e

$$\int \lambda e^{-\phi} g_n d\eta \to \int_B \lambda e^{-\phi} d\eta.$$

Sendo assim $\eta(f(B)) = \int_B \lambda e^{-\phi} d\eta$.

Afirmação 5: Se $g_k(x)$ converge para $g(x)$ em $\eta-q.t.p$ então $(\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi} g_k)(x) \to (\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi} g)(x)$ em $\eta-q.t.p$.

De fato; seja $A := \{x \in M : g_k(x) \to g(x)\}$, então se $x \in f(A) \setminus f(A^c)$ temos que $(\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi} g_k)(x) \to (\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi} g)(x)$, assim basta mostrarmos que $\eta(f(A) \setminus f(A^c)) = 1$. Notemos que

$$\begin{aligned}
\eta(f(A) \setminus f(A^c)) &\geq \eta(f(A)) - \eta(f(A^c)) \\
&= 1 - \eta(f(A)^c) - \eta(f(A^c)) \\
&\geq 1 - 2 \cdot \eta(f(A^c)) \\
&= 1 - 2 \sum_{i=1}^{N} \eta(f(A^c \cap M_i)) \\
&= 1 - 2 \sum_{i=1}^{N} \int_{A^c \cap M_i} \lambda e^{-\phi} d\eta \\
&\geq 1 - 2 \sum_{i=1}^{N} \lambda e^{-\inf \phi} \eta(A^c \cap M_i) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Afirmação 6: $\int \tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi} g d\eta = \int g d\eta$ *para todo* $g \in L^1(\eta)$.

De fato; seja $g \in L^1(\eta)$, pela *Afirmação 3* existe uma sequência $g_k \in \mathcal{C}(M; \mathbb{R}) \cap E$ tal que $g_k(x)$ converge para $g(x)$ em $\eta-$q.t.p. x. Pela *Afirmação 5* temos $(\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi} g_k)(x) \to (\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi} g)(x)$ para $\eta-$q.t.p. x. Assim, aplicando o teorema da convergência dominada, teremos que:

$$\int \tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi} g d\eta = \lim_{k\to\infty} \int \tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi} g_k d\eta = \lim_{k\to\infty} \int g_k d\eta = \int g d\eta.$$

■

Notemos que nas hipóteses do teorema 1.4 já garantimos que $\inf h_{f,\phi} > 0$ e que dado $\varphi \in E$ temos que $||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}\varphi - \nu_{f,\phi}(\varphi) h_{f,\phi}|| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Desse modo desde que tenhamos uma densidade de $E \cap \mathcal{C}(M, \mathbb{R})$ no espaço das funções contínuas, o que ocorre comumente na prática, teremos que $\nu_{f,\phi}$ é uma probabilidade e assim já garantimos pelo menos que $\mu_{f,\phi} := h_{f,\phi}\nu_{f,\phi}$ é $f-$invariante, mixing, exata e tem decaimento exponencial de correlações.

1.3 Estabilidade no contexto de dinâmicas contínuas

Estamos interessados em estudar a estabilidade dos objetos construídos na seção anterior em um contexto que englobe o caso quando a invariância estrita dos cones ocorre de maneira uniforme para um aberto de dinâmicas e potenciais.

Iremos supor que $\mathcal{F}$ é um espaço de dinâmicas e potenciais (f, ϕ) e está dotado da topologia dada por $\mathcal{T} \times || \cdot ||_\infty$, onde $\mathcal{T}$ é uma topologia que induz a seguinte propriedade: dados $(f, \phi) \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança $V_{n,\epsilon}$ de (f, ϕ) tal que, se $(\hat{f}, \hat{\phi}) \in V$ e $x \in M$ então $\#f^{-n}(x) = \#\hat{f}^{-n}(x)$ e, para cada $x_i \in f^{-n}(x)$, existe um $\hat{x}_i \in \hat{f}^{-n}(x)$ com $d(x_i, \hat{x}_i) < \epsilon$. Um exemplo natural onde isso ocorre é quando as dinâmicas são Lipschitz e dotamos o espaço das dinâmicas da topologia dada pelo sup da dinâmica mais a menor das constantes de Lipschitz.

Para cada $(f, \phi) \in \mathcal{F}$ suporemos que existem $\lambda_{f,\phi} > 0$, $\nu_{f,\phi}$ probabilidade e $h_{f,\phi} \in E$ tais que:

1. $\int \mathcal{L}_{f,\phi} g d\nu_{f,\phi} = \int \lambda_{f,\phi} g d\nu_{f,\phi}$, para todo $g \in L^1(\nu_{f,\phi})$;

2. $\mathcal{L}_{f,\phi} h_{f,\phi} = \lambda_{f,\phi} h_{f,\phi}$ e $\int h_{f,\phi} d\nu_{f,\phi} = 1$;

3. existem $k \geq 0$ e $\{a_n\}_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ não dependendo de (f, ϕ) tal que $a_n \to 0$ e para todo $\varphi \in E$ temos que $\left|\left|\frac{\mathcal{L}^n_{f,\phi}\varphi}{\lambda^n_{f,\phi}} - h_{f,\phi}\int \varphi d\nu_{f,\phi}\right|\right|_\infty \leq k a_n ||\varphi||$;

4. $\sup_{(f,\phi)\in\mathcal{F}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\left|(\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi} 1)\right|\right|_\infty < +\infty$, onde $\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi} = \frac{\mathcal{L}_{f,\phi}}{\lambda_{f,\phi}}$.

Teorema 1.12. *Seja* $(f_0, \phi_0) \in \mathcal{F}$ *tal que* ϕ_0 *é uniformemente contínua e* $\inf h_{f_0,\phi_0} > 0$. *Então:*

i. *A aplicação* $\mathcal{F} \ni (f, \phi) \longmapsto \lambda_{f,\phi}$ *é contínua em* (f_0, ϕ_0)*;*

ii. *a aplicação* $\mathcal{F} \ni (f, \phi) \mapsto h_{f,\phi}$ *é contínua em* (f_0, ϕ_0)*, quando dotamos a imagem com a* C^0-*topologia;*

iii. *dada* $g \in E$*, a aplicação* $\mathcal{F} \ni (f, \phi) \longmapsto \int g d\nu_{f,\phi}$ *é contínua em* (f_0, ϕ_0)*;*

iv. *dada* $g \in E$*, a aplicação* $\mathcal{F} \ni (f, \phi) \longmapsto \int g d\mu_{f,\phi}$ *é contínua em* (f_0, ϕ_0)*.*

Para provar o teorema comecemos com a prova de um lema que estuda a dependência do operador de Ruelle-Perron-Frobenius em relação à dinâmica e potencial.

Lema 1.13. *Seja* $(f_0, \phi_0) \in \mathcal{F}$ *com* ϕ_0 *uniformemente contínua. Dados* $g \in E$*,* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\epsilon > 0$ *existe uma vizinhança* $W_{n,\epsilon}$ *de* (f_0, ϕ_0) *tal que, se* $(f, \phi) \in W_{n,\epsilon}$ *então*

$$||\mathcal{L}^n_{f,\phi}(g) - \mathcal{L}^n_{f_0,\phi_0}(g)||_\infty < \epsilon.$$

Em particular, dado $n \in \mathbb{N}$*, a aplicação*

$$\mathcal{F} \ni (f, \phi) \mapsto ||\mathcal{L}^n_{f,\phi}(g) - \mathcal{L}^n_{f_0,\phi_0}(g)||_\infty$$

é contínua em (f_0, ϕ_0)*.*

Prova. Sabemos que existe $V_{n,\epsilon} \subset \mathcal{F}$ uma vizinhança de (f_0, ϕ_0) tal que, se $1 \leq j \leq n$, $f \in V_{n,\epsilon}$ e $x \in M$ então $\#\{f_0^{-j}(x)\} = \#\{f^{-j}(x)\}$ e para cada $x_{0,i} \in f_0^{-j}(x)$ existe um $x_{f,i} \in f^{-j}(x)$ com $d(x_{0,i}, x_{f,i}) < \epsilon$. Desse modo, usando que

$$|\mathcal{L}^n_{f,\phi}(g)(x) - \mathcal{L}^n_{f_0,\phi_0}(g)(x)| \leq \sum_{i=1}^{\deg(f_0)} |e^{\phi(x_{f,i})} g(x_{f,i}) - e^{\phi_0(x_{0,i})} g(x_{0,i})|$$

e a continuidade uniforme de ϕ_0 teremos o resultado pretendido. ■

Prova do teorema 1.12.

i)] Inicialmente provaremos que $(f, \phi) \longmapsto \log \lambda_{f,\phi}$ varia continuamente.

Como $1 \leq ||(\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi} 1)||_\infty \leq b$, para todo $(f, \phi) \in \mathcal{F}$ e $n \in \mathbb{N}$, temos que $\frac{1}{n} \log ||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1)||_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ de forma uniforme em relação a (f, ϕ), ou seja, $\frac{1}{n} \log ||\mathcal{L}^n_{f,\phi}(1)||_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} \log \lambda_{f,\phi}$ de forma uniforme em relação a (f, ϕ).

Tomemos $\epsilon > 0$; pela discussão anterior, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Big|\frac{1}{n_0}\log||\mathcal{L}^n_{f,\phi}(1)||_\infty - \log\lambda_{f,\phi}\Big| < \frac{\epsilon}{3}, \forall (f,\phi) \in \mathcal{F},$$

pelo lema anterior existe uma vizinhança V de (f_0, ϕ_0) tal que, se $(f, \phi) \in V$ então

$$\Big|\frac{1}{n_0}\log||\mathcal{L}^{n_0}_{f,\phi}(1)||_\infty - \frac{1}{n_0}\log||\mathcal{L}^{n_0}_{f_0,\phi_0}(1)||_\infty\Big| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Desse modo, para $(f, \phi) \in V$:

$$|\log\lambda_{f,\phi} \; - \; \log\lambda_{f_0,\phi_0}| \le \Big|\frac{1}{n_0}\log||\mathcal{L}^{n_0}_{f,\phi}(1)||_\infty \; - \; \log\lambda_{f,\phi}\Big| +$$

$$\Big|\frac{1}{n_0}\log||\mathcal{L}^{n_0}_{f_0,\phi_0}(1)||_\infty \; - \; \log\lambda_{f_0,\phi_0}\Big| \; + \; \Big|\frac{1}{n_0}\log||\mathcal{L}^{n_0}_{f,\phi}(1)||_\infty \; - \; \frac{1}{n_0}\log||\mathcal{L}^{n_0}_{f_0,\phi_0}(1)||_\infty\Big|$$
$$< \epsilon.$$

Assim o logaritmo de $\lambda_{f,\phi}$ é contínuo em (f_0, ϕ_0), desse modo $(f, \phi) \longmapsto \lambda_{f,\phi}$ é contínuo em (f_0, ϕ_0).

ii)] Tomemos $\epsilon > 0$; como existe $a_n \to 0$ tal que pelo item 3

$$||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}1 - h_{f,\phi}||_\infty \le k a_n ||1||, \forall (f,\phi) \in \mathcal{F},$$

existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||\tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_{f,\phi}(1) - h_{f,\phi}||_\infty < \frac{\epsilon}{3}, \forall (f,\phi) \in \mathcal{F}.$$

Pelo item i) e o lema anterior, existe uma vizinhança V de (f_0, ϕ_0) tal que: se $(f, \phi) \in V$ temos

$$||\tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_{f,\phi}(1) - \tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_{f_0,\phi_0}(1)||_\infty < \frac{\epsilon}{3}.$$

Sendo assim, para $(f, \phi) \in V$:

$$||h_{f,\phi} - h_{f_0,\phi_0}||_\infty \le ||h_{f,\phi} - \tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_{f,\phi}(1)||_\infty \; + \; ||\tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_{f,\phi}(1) - \tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_{f_0,\phi_0}(1)||_\infty$$

$$+||\tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_{f_0,\phi_0}(1) - h_{f_0,\phi_0}||_\infty < \epsilon.$$

iii)] Seja $g \in E$. Sabemos que $g = u_{f,\phi} + t_{f,\phi} h_{f,\phi}, \forall (f,\phi) \in \mathcal{F}$, com $\int u_{f,\phi} d\nu_{f,\phi} = 0$ e $t_{f,\phi} \in \mathbb{R}$. Logo $\mathcal{F} \ni (f,\phi) \mapsto \int g d\nu_{f,\phi}$ é contínua em (f_0, ϕ_0) se, e somente se, $\mathcal{F} \ni (f,\phi) \mapsto t_{f,\phi}$ for contínua em (f_0, ϕ_0).

Notemos que

$$|t_{f,\phi}| = |\int g d\nu_{f,\phi}| \le ||g||_\infty;$$

pelo item ii) existe uma vizinhança V de (f_0, ϕ_0) onde $0 < \alpha_1 \leq ||h_{f,\phi}||_\infty \leq \alpha_2$ para todo $(f, \phi) \in V$. Logo $||u_{f,\phi}|| \leq ||g|| + |t_{f,\phi}| \cdot \alpha_2$, para todo $(f, \phi) \in V$. Se $u_{f,\phi} = 0$ então $||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(g) - t_{f,\phi}h_{f,\phi}|| = 0$; se $u_{f,\phi} \neq 0$, teremos para $(f, \phi) \in V$:

$$||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(g) - t_{f,\phi}h_{f,\phi}||_\infty \leq ka_n||g||.$$

Assim:

$$|t_{f,\phi} - t_{f_0,\phi_0}| \leq \Big|\Big|\frac{\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(g)}{h_{f,\phi}} - t_{f,\phi}\Big|\Big|_\infty + \Big|\Big|\frac{\tilde{\mathcal{L}}^n_{f_0,\phi_0}(g)}{h_{f_0,\phi_0}} - t_{f_0,\phi_0}\Big|\Big|_\infty +$$

$$\Big|\Big|\frac{\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(g)}{h_{f,\phi}} - \frac{\tilde{\mathcal{L}}^n_{f_0,\phi_0}(g)}{h_{f_0,\phi_0}}\Big|\Big|_\infty \leq \Big|\Big|\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(g) - t_{f,\phi}h_{f,\phi}\Big|\Big|_\infty \cdot \Big|\Big|\frac{1}{h_{f,\phi}}\Big|\Big|_\infty +$$

$$\Big|\Big|\tilde{\mathcal{L}}^n_{f_0,\phi_0}(g) - t_{f_0,\phi_0}h_{f_0,\phi_0}\Big|\Big|_\infty \cdot \Big|\Big|\frac{1}{h_{f_0,\phi_0}}\Big|\Big|_\infty + \Big|\Big|\frac{\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(g)}{h_{f,\phi}} - \frac{\tilde{\mathcal{L}}^n_{f_0,\phi_0}(g)}{h_{f_0,\phi_0}}\Big|\Big|_\infty.$$

Pela discussão anterior, os item i), ii) e o lema anterior teremos que $\mathcal{F} \ni (f, \phi) \mapsto t_{f,\phi}$ é contínuo em (f_0, ϕ_0).

iv)] Seja $g \in E$. Pelos item ii) e iii), existe uma vizinhança V de (f_0, ϕ_0) tal que: se $(f, \phi) \in V$ temos

$$\Big|\Big|gh_{f,\phi} - gh_{f_0,\phi_0}\Big|\Big|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$\Big|\int gh_{f_0,\phi_0}d\nu_{f_0,\phi_0} - \int gh_{f_0,\phi_0}d\nu_{f,\phi}\Big| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim, se $(f, \phi) \in V$:

$$\Big|\int gd\mu_{f,\phi} - \int gd\mu_{f_0,\phi_0}\Big| \leq \Big|\int gh_{f,\phi}d\nu_{f,\phi} - \int gh_{f_0,\phi_0}d\nu_{f,\phi}\Big| + \Big|\int gh_{f_0,\phi_0}d\nu_{f_0,\phi_0} - \int gh_{f_0,\phi_0}d\nu_{f,\phi}\Big| <$$

$$< \int \frac{\epsilon}{2}d\nu_{f,\phi} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

■

Observação 1.14. *Decorre da prova do teorema anterior que se substituirmos a hipótese* $\sup_{(f,\phi)\in\mathcal{F}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big|\Big|(\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}1)\Big|\Big|_\infty < +\infty$ *pela hipótese de continuidade de* $\mathcal{F} \ni (f, \phi) \mapsto \lambda_{f,\phi}$, *ainda assim as conclusões do teorema são válidas.*

Como consequência direta do teorema anterior, temos que se, adicionalmente, as funções contínuas podem ser aproximadas por funções de E na norma do sup, as aplicações

iii. $\mathcal{F} \ni (f, \phi) \longmapsto \nu_{f,\phi}$ e

iv. $\mathcal{F} \ni (f, \phi) \longmapsto \mu_{f,\phi}$

são contínuas em in (f_0, ϕ_0), se dotarmos a imagem da topologia fraca*.

Além disso, os resultados são aplicáveis quando a invariância estrita do cone ocorre de maneira uniforme para um aberto de dinâmicas e potenciais.

Corolário 1.15. *Suponhamos que cada $(f,\phi) \in \mathcal{F}$ satisfaz as hipóteses do Teorema 1.4 página 24, para as mesmas constantes constantes $\kappa_1, \ldots, \kappa_r, \rho$ e c, e que $\nu_{f,\phi}$ é uma probabilidade. Então, as seguintes aplicações são contínuas:*

i. $\mathcal{F} \ni (f,\phi) \longmapsto \lambda_{f,\phi}$;

ii. $\mathcal{F} \ni (f,\phi) \longmapsto h_{f,\phi}$, *se dotarmos a imagem da norma do* sup;

iii. $\mathcal{F} \ni (f,\phi) \longmapsto \nu_{f,\phi}$, *se dotarmos a imagem da topologia fraca**;

iv. $\mathcal{F} \ni (f,\phi) \longmapsto \mu_{f,\phi}$, *se dotarmos a imagem da topologia fraca**.

Prova. Pelo corolário 1.9 sabemos que

$$||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}\varphi - h_{f,\phi}\int \varphi d\nu_{f,\phi}|| \leq k\tau^n||\varphi||,$$

para $\varphi \in E$ e $(f,\phi) \in \mathcal{F}$.

Sabemos também que $1 = \displaystyle\int \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1)d\nu_{f,\phi}, \forall n \in \mathbb{N}$ e $(f,\phi) \in \mathcal{F}$; logo $\inf \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1) \leq 1 \leq \sup \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $(f,\phi) \in \mathcal{F}$. Por outro lado, teremos

$$\sup \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1) \leq F_i(\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1)) \leq c^2 \inf \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1) \leq c^2,$$

desse modo

$$1 \leq \sup |\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1)| \leq c^2, \forall n \in \mathbb{N}, (f,\phi) \in \mathcal{F}.$$

As outras hipóteses necessárias a aplicação do teorema 1.12 são de verificação trivial. ■

1.4 Exemplos

Nessa seção apresentaremos contextos onde pode-se aplicar o Teorema 1.4.

1.4.1 Aplicações monótonas por partes

Nessa seção discutiremos acerca de uma classe de exemplos estudadas do ponto de vista de decaimento de correlações em [LSV98].

Seja $\tilde{X}$ um conjunto não-enumerável, totalmente ordenado e completo em relação a essa ordem (por exemplo $\tilde{X}$ pode ser $\mathbb{R}$). Dotemos $\tilde{X}$ da topologia induzida pelos intervalos, e iremos supor que com essa topologia $\tilde{X}$ é compacto. Iremos assumir que $T : \tilde{X} \to \tilde{X}$ é uma transformação monótona por partes, ou seja, existe uma partição finita ou enumerável infinita $\mathcal{P}$ de $\tilde{X}$ em intervalos I tal que $T(I)$ é um intervalo e $T : I \to T(I)$ é estritamente monótona e contínua. Denotaremos por $X \subset \tilde{X}$ o conjunto de pontos em que T é contínuo. Diremos que a função $\varphi : A \subset \tilde{X} \to \mathbb{R}$ é de variação limitada sobre A (ou $\varphi \in BV(A)$) se

$$\operatorname{var}_A \varphi := \sup \sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_{i-1}) - \varphi(x_i)| < \infty,$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições finitas de A em intervalos da forma $[x_{i-1}, x_i]$. Sobre o potencial $\phi : \tilde{X} \to \mathbb{R}\{-\infty\}$ iremos assumir que ele é contrativo, ou seja:

i. $e^{\phi} \in BV(\tilde{X})$;

ii. $\sum_{I \in \mathcal{P}} \sup_{x \in I} e^{\phi(x)} < \infty$;

iii. existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{x \in \tilde{X}} \exp(\phi(x) + \phi(T(x)) + \cdots + \phi(T^{n-1}(x))) < \inf_{x \in X} \mathcal{L}_{T,\phi}^{n_0} 1$.

Iremos assumir também que para cada intervalo aberto I existe um inteiro $n(I)$ e uma constante $C(I) > 0$ tal que $\inf_X \mathcal{L}_{T,\phi}^{N} \chi_I \le C(I)$. Essa hipótese anterior implica que para todo intervalo $I \subset X$ existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n I = X$, de fato se a partição $\mathcal{P}$ for finita de então elas são equivalentes.

Podemos dotar o espaço $BV(X)$ coma norma $||\cdot||_{BV} := \operatorname{var}_X(\cdot) + ||\cdot||_\infty$, com essa norma $BV(X)$ é um espaço de Banach e $\mathcal{L}_{T,\phi}$ é um operador contínuo sobre $BV(X)$. Dado $\varphi \in BV(X)$ em [LSV98] é provado que a quantidade $\nu(\varphi) := \lim_{n\to\infty} \inf_X \frac{\mathcal{L}_{T,\phi}^n \varphi}{\mathcal{L}_{T,\phi} 1}$ está bem definida e de fato ν satisfaz as hipóteses requeridas às funções F_i. Então sobre $BV(X)$ podemos tomar os cones $C(\kappa) := \{\varphi \in BV(X) : \varphi > 0, \sup_X \varphi \le \kappa\nu(\varphi)\}$. Desse modo, decorre do [LSV98, Lemma 4.4] que existe $n \in \mathbb{N}$ e $\kappa > 0$ tal que $\mathcal{L}_{T,\phi}^m C(\kappa) \subset C(\frac{\kappa}{2})$ para todo $m \ge n$. Já da prova do [LSV98, Lemma 4.7] extraímos que existe $c \le 1$ tal que $\frac{1}{c}\nu(\mathcal{L}_{T,\phi}^m \varphi) \le \inf \mathcal{L}_{T,\phi}^m \varphi \le \sup \mathcal{L}_{T,\phi}^m \varphi \le c\nu(\mathcal{L}_{T,\phi}^m \varphi)$ para todo $\varphi \in C(\kappa)$. Vale ressaltar que na obtenção dessa propriedade são usadas fortemente as hipóteses de recobrimento exigidas sobre T, que de fato significa que T é topologicamente exata. Assim, podemos aplicar o Teorema 1.4 obtendo gap espectral para T e, como ν é uma medida, obtemos em particular, assim como em [LSV98], decaimento exponencial de correlações para a medida $\mu := h\nu$, onde h é um autovetor para $\mathcal{L}_{T,\phi}$ com $\nu(h) = 1$.

1.4.2 Aplicações não-uniformemente expansoras

Nesta seção discutiremos acerca de uma classe de aplicações não-uniformemente expansoras, com prevalência de expansão, estudadas em [VV10] e [CV13].

Descreveremos agora essa classe de aplicações. Inicialmente suporemos que M é uma variedade riemanniana compacta conexa, $f : M \to M$ será um homeomorfismo local e assumiremos que existe uma função limitada $x \mapsto L(x)$ tal que, qualquer que seja $x \in X$ existe uma vizinhança aberta U_x de x com $f_x : U_x \to f(U_x)$ invertível e $d(f_x^{-1}(y), f_x^{-1}(z)) \leq L(x)d(y,z)$, para todo $y, z \in f(U_x)$.

Também assumiremos que existem constantes $\sigma > 1$ e $L \geq 1$, e uma região aberta $\mathcal{A} \subset M$ tal que:

(H1) $L(x) \leq L$ para todo $x \in \mathcal{A}$ e $L(x) \leq \sigma^{-1}$ para todo $x \in M \setminus \mathcal{A}$; além disso, L está próximo de 1.

(H2) Existe $k_0 \geq 1$ e uma cobertura $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_{k_0}\}$ de M por domínios de injetividade de f, tal que $\mathcal{A}$ pode ser coberto por $q < \deg(f)$ elementos de $\mathcal{P}$ (onde $\deg(f)$ é o número de pré-imagens de um ponto $x \in M$).

Sobre o potencial $\phi : M \to \mathbb{R}$ assumiremos que ϕ é $\alpha-$Hölder contínuo e com baixa variação, mais precisamente:

(P) $\sup \phi - \inf \phi < \log \deg(f) - \log q$.

A condição (H1) nos diz que pode ocorrer expansão e contração em M da seguinte forma: f é expande uniformemente fora de $\mathcal{A}$ e não contrai muito dentro de $\mathcal{A}$. A condição (H2) nos garante que todo ponto tem ao menos uma pré-imagem na região uniformemente expansora. Notemos que a condição (P) é uma condição aberta sobre ϕ, em relação a norma Hölder, e é satisfeita por funções constantes.

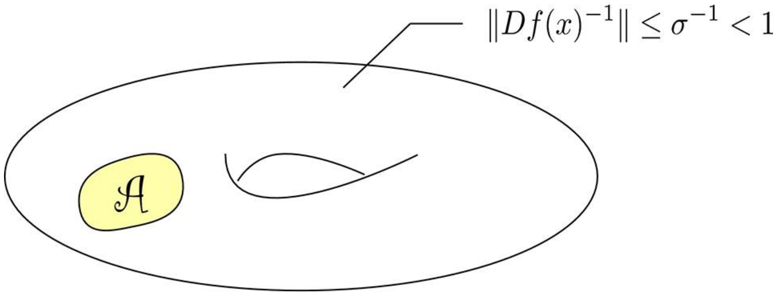

Figura 1.1: Região boa e má

Nesse contexto em [VV10] é provado que:

Teorema A: *Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo local com inversa Lips-*

chitz contínua e $\phi : M \to \mathbb{R}$ um potencial Hölder contínuo satisfazendo (H1), (H2) e (P). Então, há um número finito de estados de equilíbrio ergódicos $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ de f com respeito a ϕ e qualquer estado de equilíbrio é uma combinação linear convexa de $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$. Além disso, se a aplicação f for topologicamente exata, então o estado de equilíbrio é único e é uma probabilidade exata.

O L, limitante superior das constantes de Lipschitz, é precisado em [VV10] na página 562. A condição a qual ele está sujeito está relacionado à garantia da existência de infinitos tempos hiperbólicos. Nesse mesmo artigo é provado que a pressão topológica de f com respeito a ϕ é igual ao logaritmo do raio espectral de $\mathcal{L}_\phi$ como operador agindo sobre as funções contínuas. Também é provado que todos os estados de equilíbrio ergódicos μ_i são absolutamente contínuos em relação a uma medida conforme ν com propriedades "boas"(veja Teorema B de [VV10]). Essa medida é uma auto-medida do adjunto do operador de Ruelle-Perron-Frobenius associado ao raio espectral.

Já em [CV13], impondo um controle maior sobre f e ϕ, demonstram-se propriedades do estado de equilíbrio: decaimento de correlações, teorema central do limite, estabilidade estatística e estabilidade espectral.

Descreveremos agora o contexto [CV13]. Inicialmente definamos uma constante de Hölder local: se $g : M \to \mathbb{R}$ é $\alpha-$Hölder e $\beta > 0$ então

$$|g|_{\alpha,\beta} := \sup_{0<d(x,y)<\beta} \frac{|g(x) - g(y)|}{d(x,y)^\alpha},$$

ou seja, $|g|_{\alpha,\delta}$ é a menor constante $C \geq 0$ tal que $|g(x) - g(y)| \leq Cd(x,y)^\alpha$ para todos $x, y \in M$ com $d(x,y) < \beta$. A partir desse momento fixemos um $\delta > 0$ tal que se $d(x,y) < \delta$ então para cada $x_i \in f^{-1}(x)$ existe um único $y_i \in f^{-1}(y)$ com $x_i, y_i \in f(U_z)$, vizinhança aberta de algum $z \in M$, tal que $f_z : U_z \to f(U_z)$ invertível e $d(f_z^{-1}(a), f_z^{-1}(b)) \leq L(z)d(a,b), \forall a, b \in U_z$. Em relação a [VV10], em [CV13] é exigido adicionalmente um maior controle sobre a variação e a norma Holder do potencial. Sobre o potencial $\phi : M \to \mathbb{R}$ assumiremos que ϕ é $\alpha-$Hölder contínuo com variação baixa e norma Hölder local controlada, mais precisamente, existe um $\varepsilon(f) > 0$ tal que:

(P') $\sup \phi - \inf \phi < \varepsilon(f)$ *e* $|e^\phi|_{\alpha,\delta} < \varepsilon(f) e^{\inf \phi}$

Exemplo 1.16. *Uma forma de se obter exemplos de dinâmicas não triviais que satisfazem as hipóteses (H1) e (H2) (chamamos de trivial o caso em que a dinâmica é expansora, pois satisfaz por excelência as hipóteses) é através da bifurcação de dinâmicas expansoras. Seja $f_0 : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ uma aplicação linear expansora definida no toro de dimensão d.*

Fixemos uma cobertura $\mathcal{U}$ por domínios de injetividade de f_0 e algum $U_0 \in \mathcal{U}$ contendo um ponto fixo (ou periódico) p. Então deformamos f_0 em uma pequena vizinhança de p dentro de U_0 por uma bifurcação do tipo pitchfork fazendo com que p se torne uma sela para o difeomorfismo local perturbado f. Em particular, essa perturbação pode ser feita na topologia C^r, para todo $r > 0$. Por construção, f coincide com f_0 no complementar de U_0, onde a expansão uniforme vale. Observe que nós podemos fazer a deformação de modo que f não contraia muito em U_0, garantindo que as condições (H1) e (H2) sejam satisfeitas. Como essas condições são abertas podemos tomar uma vizinhança pequena de f satisfazendo (H1) e (H2).

Exemplo 1.17. *Seja M uma variedade unidimensional e $f_0 : M \to M$ expansora. Logo f é topologicamente transitiva e tem muitos pontos periódicos. A menos de tomar um iterado, podemos supor sem perda que f tem um ponto fixo p. Como tal ponto é hiperbólico, podemos tomar uma vizinhança dele que não intersecte nenhum outro ponto fixo. Sendo assim, podemos fazer uma perturbação $\mathcal{C}^r$ nessa vizinhança de modo a obtermos uma aplicação $f_1 : M \to M$ que em p tem derivada em módulo igual a 1 e fora de uma vizinhança é exatamente igual a f_0, ou seja, expansora. Se $Df_1(p) = 1$, usando uma bifurcação do tipo sela-nó obtemos um aberto de dinâmicas não-triviais $f : M \to M$ que satisfazem as hipóteses (H1) e (H2); se $Df_1(p) = -1$ usamos então uma bifurcação do tipo flip obtendo mais uma vez um aberto de dinâmicas não-triviais que satisfazem as hipóteses (H1) e (H2). Como $\phi \equiv 0$ satisfaz (P'), podemos tomar um aberto de potenciais próximos de ϕ tal que f e ϕ satisfazem (H1), (H2) e (P').*

Exemplo 1.18. *Um caso particular interessante do exemplo anterior é a aplicação de Manneville-Pomeau e a família de potenciais $\phi_t := -t \log |Df|$. Para cada $\alpha \in (0, 1)$, seja $f_\alpha : [0, 1] \to [0, 1]$ dado por*

$$f_\alpha := \begin{cases} x(1 + 2^\alpha x^\alpha), & \text{se } 0 \le x \le \frac{1}{2}; \\ 2x - 1, & \text{se } \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

f_α é um $\mathcal{C}^{1+\alpha}$−homeomorfismo local (desde que identifiquemos $[0, 1]$ com a variedade S^1) que satisfaz $Df_\alpha(x) > 1$ para todo $x \in (0, 1]$. Logo f_α expande em $(0, 1]$, já em 0 temos $f_\alpha(0) = 0$ e $Df_\alpha(0) = 1$ e assim f_α é um exemplo não-trivial de dinâmica que satisfaz (H1) e (H2'). A família $\phi_{\alpha,t} := -t \log |Df_\alpha|$ de potenciais $\mathcal{C}^\alpha$ satisfazem a hipótese (P') desde que tomemos t numa pequena vizinhança do 0. Aplicando uma bifurcação, como no exemplo anterior, teremos que existe um aberto de dinâmicas $f : [0, 1] \to [0, 1]$ que satisfazem as hipóteses (H1) e (H2) e para qual $\phi_{\alpha,t}$ satisfaz a hipótese (P') (desde que tomemos t próximo do 0).

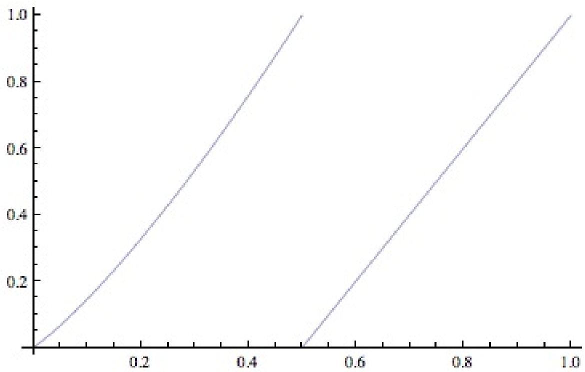

Figura 1.2: Manneville-Pomeau

Os resultados em [CV13] são obtidos através do estudo das propriedades espectrais do operador de Perron-Frobenius $\mathcal{L}_{f,\phi}$, e tais propriedades espectrais são obtidas através da técnica de cones. O cone utilizado é o seguinte:

$$\Lambda_{\kappa,\beta} := \{g \in \mathcal{C}^{\alpha}(M, \mathbb{R}) : g > 0 \text{ } e \text{ } \frac{|g|_{\alpha,\beta}}{\inf g} \leq \kappa\}.$$

Prova-se então que a invariância estrita do cone, ou seja, existe $0 < \hat{\lambda} < 1$ tal que $\mathcal{L}_{f,\phi}(\Lambda_{\kappa,\delta}) \subset \Lambda_{\hat{\lambda}\kappa,\delta}$, para todo $\kappa \geq 1$. Assim consegue-se provar que $\mathcal{L}_{f,\phi}$ tem a propriedade do gap espectral em $C^{\alpha}(M, \mathbb{R})$. Lembremos que $\log \lambda_{f,\phi} = P_{\text{top}}(f, \phi)$ (a pressão topológica de f em relação a ϕ).

Esse cone utilizado é abarcado pelos utilizados no Teorema 1.4, assim basta verificarmos se a hipótese iii. é satisfeita. Como a função F_i neste caso é igual ao inf, basta verificarmos que existe $c > 1$ tal que $\sup \mathcal{L}_{f,\phi}\varphi \leq c \inf \mathcal{L}_{f,\phi}\varphi$ para todo $\varphi \in \Lambda_{\kappa,\delta}$. Como M é compacta conexa existe m, que só depende de M e δ, tal que $|\cdot|_{\alpha} \leq m|\cdot|_{\alpha,\delta}$ desse modo

$$\sup \mathcal{L}_{f,\phi}\varphi \leq \inf \mathcal{L}_{f,\phi}\varphi + m|\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi|_{\alpha,\delta} \leq \inf(\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi) \cdot (1 + m\kappa),$$

para todo $\varphi \in \Lambda_{\kappa,\delta}$. Assim a hipótese iii. do Teorema 1.4 é satisfeita e podemos aplicá-lo. Notemos também que podemos aplicar o Teorema 1.11.

Decorre então que existe uma única probabilidade conforme $\nu_{f,\phi}$ de $\mathcal{L}^*_{f,\phi}$ associada ao seu raio espectral e assim o estado de equilíbrio de f e ϕ é único.

Em [CV13] também é provado que existe uma vizinhança $\mathcal{F}$ de (f, ϕ) tal que $\mathcal{L}_{\hat{f},\hat{\phi}}(\Lambda_{\kappa,\delta}) \subset \Lambda_{\hat{\lambda}\kappa,\delta}$ para todo $\hat{f}, \hat{\phi} \in \mathcal{F}$, ou seja, a invariância estrita ocorre de maneira uniforme. De acordo com o Teorema 1.12, assim como em [CV13], obtemos resultados de estabilidade estatística. Mais precisamente:

Tomando $\mathcal{G} := \{(f, \phi); f : M \to M$ e $\phi : M \to \mathbb{R}$ que satisfazem as hipóteses (H1) , (H2) e (P'), com o mesmo α e q, e f é Lipschitz $\}$ então temos

Teorema 1.19. *Tomando $\mathcal{G}$ como domínio e dotado da topologia Lip $\times \mathcal{C}^\alpha$, as seguintes funções variam continuamente:*

i) $(f,\phi) \longmapsto P_{top}(f,\phi)$.

ii) $(f,\phi) \longmapsto \frac{d\mu_{f,\phi}}{d\nu_{f,\phi}}$; *dotando a imagem da topologia* $\mathcal{C}^0$.

iii) $(f,\phi) \longmapsto \nu_{f,\phi}$; *dotando a imagem da topologia fraca**.

iv) $(f,\phi) \longmapsto \mu_{f,\phi}$; *dotando a imagem da topologia fraca**.

Exigindo mais regularidade, foram obtidos resultados espectrais e de estabilidade em $C^r(M,\mathbb{R})$. A saber, além das hipóteses (H1) e (H2) exige-se que $f : M \to M$ seja um difeomorfismo local $\mathcal{C}^r$ com $r \geq 1$. Sobre o potencial $\phi : M \to \mathbb{R}$ é assumido que $\phi \in \mathcal{C}^r(M,\mathbb{R})$ e satisfaz a seguinte versão diferenciável da hipótese (P'):

$$\text{(P'')}\ \sup\phi - \inf\phi < \varepsilon_\phi \quad e \quad \max_{1\leq s\leq r} ||D^s\phi||_0 < \varepsilon'_\phi,$$

para algum ε'_ϕ pequeno, dependendo somente de f e r. Além disso as constantes que envolvem (H1) e (H2') e (P'') devem cumprir uma certa relação que depende continuamente de f e ϕ na topologia $C^r(M,M) \times C^r(M,\mathbb{R})$.

Desse modo, mais uma vez, o caminho é a técnica de cones. Definem-se os cones:

$$\Lambda^r_\kappa := \left\{\varphi \in \mathcal{C}^r(M,\mathbb{R}) : \varphi > 0 \quad \text{e} \quad \frac{||D^s\varphi||_\infty}{\inf\varphi} \leq \kappa c^{r-s}_{r,s}, \quad \text{para} \quad s = 1,\dots,r\right\},$$

onde $c_{r,r} = 1$, desprezando o caso quando $r = s$ temos que $c_{r,s}$ só depende de s; $c_{r,s}$ são constantes suficientemente pequenas para que ocorra a invariância dos cones.

Então em [CV13] é provado que existe uma constante positiva κ_0 e $0 < \hat\lambda < 1$ tal que $\mathcal{L}_{f,\phi}(\Lambda^r_\kappa) \subset \Lambda^r_{\hat\lambda\kappa}$, para todo $\kappa \geq \kappa_0$. Sendo assim é provado que $\mathcal{L}_{f,\phi}$ tem a propriedade do gap espectral em $C^r(M,\mathbb{R})$. Esses cones Λ^r_κ também são abarcados pelo Teorema 1.4 e hipótese iii. será satisfeita por um argumento semelhante ao caso Holder.

Assim como no caso Holder, é provado em [CV13] invariância uniforme dos cones, ou seja, existe uma vizinhança V de (f,ϕ) tal que $\mathcal{L}_{f,\phi}(\Lambda_\kappa) \subset \Lambda_{\hat\lambda\kappa}$ para todo $(\hat f,\hat\phi) \in V$. Decorre então uma uniformidade do gap espectral. Assim, usando mais uma vez essa uniformidade, em [CV13] são obtidos resultados fortes de estabilidade. Mais precisamente, seja $\mathcal{G}^r := \{(f,\phi); f : M \to M$ e $\phi : M \to \mathbb{R}$ satisfazem as hipóteses (H1), (H2) e (P''), para o mesmo r e $q\}$ dotado da topologia $\mathcal{C}^r \times \mathcal{C}^r$, então a seguinte aplicação é contínua:

$$\mathcal{G}^r \ni (f,\phi) \longmapsto \frac{d\mu_{f,\phi}}{d\nu_{f,\phi}} \in \mathcal{C}^r(M,\mathbb{R}).$$

Veremos nas próximas seções que este resultado vale em contextos mais gerais, englobando o caso de gap espectral uniforme no espaço C^r.

Capítulo 2

Linear response formula

Com vistas aos resultados de estabilidade obtidos no Teorema 1.12, queremos nesse capítulo dar uma resposta à seguinte questão:

Suponha que para cada par (f, ϕ) podemos associar uma certa medida (SRB, estados de equilíbrio, a.c.i.p., etc) e que a função que associa (f, ϕ) a essa medida, e ou uma quantidade como pressão topológica, é contínua. Será que essa função é diferenciável, mesmo que seja num sentido fraco ? Nesse caso gostaríamos de poder encontrar uma fórmula que expresse para pequenas perturbações de um certo tipo como essa função varia.

Na seção 2.1, a despeito do fato de em geral o operador de transferência não depender continuamente da dinâmica, provamos que se temos uma subvariedade de dinâmicas que são difeomorfismos locais C^r com os seus respectivos operadores de transferência possuindo a propriedade do gap espectral em C^r e em C^{r-1}, e tal propriedade ocorre de maneira uniforme, então o raio espectral do operador de transferência, o candidato a estado de equilíbrio e sua densidade variam C^{r-1} com respeito à dinâmica. Como consequência, na seção 2.1.1 provamos um resultado de estabilidade do teorema central do limite. A saber, provamos que a média e o desvio padrão dados pelo teorema central do limite variam de maneira C^{r-1} com respeito à dinâmica. Já na seção 2.1.2 provamos um resultado de estabilidade do teorema de grandes desvios, a saber provamos não só que vale um princípio de grandes desvios dado pela transformada de Legendre, como também que tal transformada de Legendre varia C^{r-1} com a dinâmica.

Na seção 2.2, estendemos parte dos resultados obtido na seção anterior para o caso em que o espectro essencial dos operadores de transferência pode acumular no seu raio espectral, porém esse acúmulo num certo sentido é uniforme. Além disso, provamos que a derivada em relação à dinâmica da correlação em tempo n do candidato a medida de máxima entropia converge a zero quando n tende ao infinito, e essa convergência é uniforme para dinâmicas suficientemente próximas.

Na seção 2.3, aplicamos nossos resultados em dinâmicas que expandem uniformemente em conjuntos não-necessariamente conexos.

Na seção 2.4, aplicamos nosso resultado na classe de dinâmicas não-uniformemente expansoras estudada em [VV10], [CV13].

2.1 Gap espectral

Nessa seção estamos interessados em responder às questões vinculadas ao Linear response no contexto em que temos a propriedade do gap espectral.

Se queremos estudar a variação de $\lambda_{f,\phi}$ e $\mu_{f,\phi}$ basta estudarmos $\lambda_{f,\phi}$, $h_{f,\phi}$ e $\nu_{f,\phi}$. Notemos que esses elementos podem ser obtidos através da projeção espectral de $\mathcal{L}_{f,\phi}$ associada ao seu raio espectral. Desse modo, iremos discutir agora acerca da diferenciabilidade do ponto de vista da Teoria Espectral (para detalhes de Teoria Espectral ver [DS58], [Cas13] ou [K95]). Seja γ uma curva fechada C^1 de modo que a componente conexa limitada determinada por ela contém o raio espectral e a componente conexa ilimitada contém o resto do espectro de A. Pela semicontinuidade das componentes espectrais, existe um $\delta > 0$ tal que se $||A - \hat{A}|| < \delta$, então γ separa duas componentes espectrais de $\hat{A}$. Denotaremos a componente espectral de $\hat{A}$ que está na componente conexa limitada por $\Lambda_{\hat{A}}$. Se $P_{\hat{A}}$ é à projeção espectral associada ao operador $\hat{A}$ e a componente espectral $\Lambda_{\hat{A}}$, sabemos do Cálculo Funcional Holomorfo que $P_{\hat{A}} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (zI - \hat{A})^{-1}dz$. Como a curva γ está fixada, se queremos saber se $P_{\hat{A}}$ é diferenciável com respeito a $\hat{A}$, basta estudarmos a diferenciabilidade de $(zI - \hat{A})^{-1}$ com respeito a $\hat{A}$. Sabe-se de Teoria espectral que, de fato, $(zI - \hat{A})^{-1}$ é analítico com respeito a $\hat{A}$ (temos ainda uniformidade na convergência da série de Taylor quando olhamos z variando ao longo da curva γ) e portanto $P_{\hat{A}}$ é analítico com respeito a $\hat{A}$.

Voltemos agora ao caso do operador de transferência. Lembremos que por [Fr79], dada uma variedade riemanniana M, compacta e conexa, o espaço de aplicações $C^r(M, M)$ pode ser vista como variedade modelada pelo espaço de Banach $C^r(M, \mathbb{R}^{2\dim(M)})$ e que, dado $f \in C^r(M, M)$, o seu espaço tangente pode ser identificado como seções $\Gamma^r_f := \{\gamma \in C^r(M, TM) : \gamma(x) \in T_{f(x)}M, \forall x \in M\}$. Suponhamos que E é um subespaço de Banach do espaço de funções de M em $\mathbb{R}$ limitadas contendo as constantes, $\mathcal{F}^r \subset C^r(M, M)$ é uma subvariedade contendo dinâmicas que são difeomorfismos locais e $\mathcal{W} \subset E$ é um aberto de potenciais tais que $\mathcal{L}_{f,\phi|E}$ tem a propriedade do gap espectral para todo $(f, \phi) \in \mathcal{F}^r \times \mathcal{W}$. Então, para todo $(f, \phi) \in \mathcal{F}^r \times \mathcal{W}$,

1. $\lambda_{f,\phi} = \frac{\mathcal{L}_{f,\phi}(P_{\mathcal{L}_{f,\phi}}1)}{P_{\mathcal{L}_{f,\phi}}1}$;

2. $h_{f,\phi} = P_{\mathcal{L}_{f,\phi}} 1$;

3. $\nu_{f,\phi}(g) = \frac{P_{\mathcal{L}_{f,\phi}} g}{P_{\mathcal{L}_{f,\phi}} 1}, \forall g \in E$.

Observação 2.1. *Se estamos interessados em estudar a dependência em relação somente ao potencial, basta o espaço M ser um espaço métrico.*

Desse modo, a diferenciabilidade já discutida da projeção espectral deveria implicar a diferenciabilidade de $\lambda_{f,\phi}$ e $\mu_{f,\phi}$. Para isso, bastaria que o operador de transferência variasse diferenciavelmente em relação à dinâmica e ao potencial. Porém, como veremos, o operador de transferência em geral é analítico em relação ao potencial *mas não é sequer contínuo em relação à dinâmica.*

Estudemos agora a diferenciabilidade do operador de Perron em relação ao potencial.

Proposição 2.2. *A aplicação $\mathcal{W} \ni \phi \mapsto \mathcal{L}_\phi^n \in L(E) := \{T : E \to E;\ T$ é linear e contínuo$\}$ é analítica, logo C^∞. Ademais, para todas as funções $g, H \in E$, e todo $n \geq 1$, a derivada atuando em H é dada por*

$$(D_\phi \mathcal{L}_\phi^n(g))_{|\phi_0} \cdot H = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{\phi_0}^i (H \cdot \mathcal{L}_{\phi_0}^{n-i}(g)).$$

Prova. Note que

$$\mathcal{L}_{\phi+H}(g) = \mathcal{L}_\phi(e^H g) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_\phi \left(\frac{1}{i!} H^i g \right) = \mathcal{L}_\phi(g) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \mathcal{L}_\phi \left(H^i g \right).$$

Nós denotaremos por $L_s^i(E, E)$ o espaço de aplicações simétricas i-lineares com domínio em $[E]^i$ sobre E. Note também que as aplicações

$$\mathcal{W} \ni \phi \mapsto \Big(H \mapsto \mathcal{L}_\phi(H^i \cdot) \Big) \in \mathrm{Ł}_s^i(E, E)$$

são contínuas para todo $i \in \mathbb{N}$, e que a composição entre elas é também contínua em $\mathcal{W}$. Ademais, para $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\sup_{||g||=1} \frac{||\mathcal{L}_{\phi+H}(g) - \mathcal{L}_\phi(g) - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} \mathcal{L}_\phi \left(H^i g \right) ||}{||g|| \cdot ||H||^k} \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \sup_{||g||=1} \frac{|| \frac{1}{i!} \mathcal{L}_\phi \left(H^i g \right) ||}{||g|| \cdot ||H||^k}$$

que converge para 0 quando H converge a 0. Pelo teorema 1.4 em [Fr79], isto implica que $\phi \mapsto \mathcal{L}_\phi$ é C^k, para todo $k \in \mathbb{N}$, e sua k-ésima derivada aplicada em H é $\mathcal{L}_\phi \left(H^i \cdot \right)$. Note que isto também implica que $\phi \mapsto \mathcal{L}_\phi$ é analítica. Aplicando a regra da cadeia na composição $\phi \mapsto \mathcal{L}_\phi^n(g)$ nós finalizamos a prova da proposição. ■

Vale ressaltar que não usamos a propriedade do gap espectral na prova da proposição anterior, ela de fato vale em geral.

Pela análise feita anteriormente sobre Teoria Espectral e a proposição anterior temos:

Proposição 2.3. *Suponhamos que E é um espaço de funções contendo as constantes, $f : M \to M$ é uma dinâmica fixada e $\mathcal{W} \subset E$ é um aberto de potenciais tais que $\mathcal{L}_{f,\phi|E}$ tem a propriedade do gap espectral para todo $\phi \in \mathcal{W}$. Então, as seguintes aplicações variam analiticamente:*

i. $\mathcal{W} \ni \phi \mapsto \lambda_{f,\phi}$;

ii. $\mathcal{W} \ni \phi \mapsto h_{f,\phi} \in E$;

iii. $\mathcal{W} \ni \phi \mapsto \nu_{f,\phi} \in E^*$;

iv. $\mathcal{W} \ni \phi \mapsto \mu_{f,\phi} \in E^*$.

Já no caso da dependência em relação à dinâmica, o próximo exemplo, apresentado em [CV13], nos mostra que mesmo para dinâmicas expansoras o operador de transferência não varia continuamente em relação à dinâmica como operador (mas note que no lema 1.13 obtemos uma continuidade em um sentido fraco).

Exemplo 2.4. *Nós mostraremos que o operador de Perron-Frobenius $\mathcal{L}_{f,\phi} : C^\alpha(S^1,\mathbb{R}) \to C^\alpha(S^1,\mathbb{R})$ associado à aplicação duplicação do círculo $f : S^1 \to S^1$ é descontínuo tanto na norma do operador como na pontual. De fato, a menos de considerar a métrica $\tilde{d}(x,y) = d(x,y)^\alpha$, basta provarmos a descontinuidade do operador agindo sobre o espaço dos observáveis Lipschitz. A ideia chave é que o operador de composição $\varphi \to \varphi \circ g$ atuando no espaço das funções Lipschitz não varia continuamente com g, como iremos detalhar.*

Seja $S^1 \simeq \mathbb{R}/[-1/2,1/2)$ o círculo e considere a aplicação expansora no círculo $f_n(x) = 2(x + \frac{1}{10n})(\text{ mod } 1)$, $n \geq 1$. É claro que a sequência $(f_n)_n$ é convergente para a duplicação do círculo $f(x) = 2x(\text{ mod } 1)$ na topologia C^∞.

Agora, tomemos uma função Lipschitz φ no círculo tal que $\varphi(x) = |x|$ para $|x| \leq 1/8$ e $\varphi(x) = 0$ para $1/2 \geq |x| \geq 1/5$, e considere o potencial $\phi \equiv 0$. Desse modo, se $0 < x_n < y_n < 1/10n$, nós obtemos que

$$\begin{aligned}
Lip((\mathcal{L}_{f_n,\phi} - \mathcal{L}_{f,\phi})(\varphi)) &\geq \frac{|\mathcal{L}_{f_n,\phi}(\varphi)(y_n) - \mathcal{L}_{f_n,\phi}(\varphi)(x_n) + \mathcal{L}(\varphi)(x_n) - \mathcal{L}(\varphi)(y_n)|}{y_n - x_n} \\
&= \frac{||y_n/2 - 1/10n| - |x_n/2 - 1/10n| + |x_n/2| - |y_n/2||}{y_n - x_n} \\
&= \frac{|-y_n + x_n|}{y_n - x_n} = 1 = Lip(\varphi)
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Então a sequência de operadores $(\mathcal{L}_{f_n,\phi})_n$ não converge para $\mathcal{L}_{f,\phi}$, nem mesmo na topologia forte de operadores.

Devido ao exemplo anterior, vemos que as continuidades obtidas no corolário 1.15 não decorrem da teoria perturbativa de operadores. Porém, como veremos no próximo resultado, em geral o operador de transferência varia diferenciavelmente em relação à dinâmica num sentido um pouco mais fraco, ou seja, ele é diferenciável se consideremos uma menor regularidade no seu contra-domínio.

Estudemos a diferenciabilidade do operador de transferência em relação à dinâmica.

Lema 2.5. *(Diferenciabilidade dos ramos inversos locais) Seja $r \geq 1$, $0 \leq k \leq r$ e $f : M \to M$ um C^r-difeomorfismo local sobre uma variedade riemanniana compacta conexa M. Seja $B = B(x,\delta) \subset M$ uma bola tal que os ramos inversos $f_1, \ldots, f_s : B \to M$ estão bem definidos como difeomorfismos sobre a imagem. Então $C^r(M,M) \ni f \mapsto (f_1, \ldots, f_s) \in C^{r-k}$ é uma aplicação C^k.*

Prova. Seja $F : C^r(M,M) \times [C^{r-k}(B,M)]^s \to [C^{r-k}(B;M)]^s$ dado por

$$F(h, \underbrace{h_1, \ldots, h_s}_{:=\underline{h}}) = (h \circ h_1, \ldots, h \circ h_s).$$

Note que F é C^k. De fato, por um lado, $\partial_h F$ é C^∞ (em cartas adequadas, nós vemos ele como uma aplicação linear e contínua em h). Pelo Teorema 4.2 e Corolário 4.2 em [Fr79], a composição $h_i \mapsto h \circ h_i \in C^{r-k}$ é C^k e a expressão precisa para a derivada é dada. Em nosso contexto, para um incremento $H = (H_1, \ldots, H_s) \in T[C^{r-k}(B;M)]^s$, nós obtemos que $\partial_{h_j} F \cdot H_j = h' \circ h_j \cdot H_j$, que é claramente uma aplicação C^{k-1}.

Note que $F(f, f_1, \ldots, f_s) = (id, \ldots, id)$. Para o ponto $(f, f_1, \ldots, f_s)$, nós temos que $\partial_{\underline{h}} F(f, f_1, \ldots, f_s) \cdot H = (f' \circ f_1 \cdot H_1, \ldots, f' \circ f_s \cdot H_s)$ é um isomorfismo, pois f é um difeomorfismo local, e então $[f' \circ f_j(x)]$ é invertível, para todo $x \in M$. Sendo assim, pelo Teorema da Função Implícita, nós obtemos que a aplicação $G : C^r(M,M) \to [C^{r-k}(B,M)]^s$ dada por $f \mapsto (f_1, \ldots, f_s)$ é uma aplicação C^k, e sua derivada aplicada no incremento $h \in T[C^r(M,M)]$ é

$$(DG \cdot h)(x) = (-f_1'(x) \cdot h \circ f_1(x), \ldots, -f_s'(x) \cdot h \circ f_s(x))$$

Isto finaliza a prova do lema. ∎

Chamaremos $\partial_f f_i$ por $T_{i|f}$.

Utilizando a diferenciabilidade dos ramos inversos, nós podemos provar a diferenciabilidade do operador de transferência com respeito à dinâmica, como operador atuando de observáveis C^r para observáveis C^{r-1}. De fato, o operador de transferência varia diferenciavelmente na norma do operador do espaço $L(C^r(M,\mathbb{R}),C^{r-1}(M,\mathbb{R}))$ como detalharemos.

Proposição 2.6. *(Diferenciabilidade do operador de transferência) Seja $r \geq 1$, $0 \leq k \leq r$, $f : M \to M$ um C^r-difeomorfismo local sobre uma variedade riemanniana compacta conexa M e $\phi \in C^r(M,\mathbb{R})$ algum potencial fixado. A aplicação*

$$\begin{array}{ccc} \mathit{Diff}_{loc}^r(M) & \to & L(C^r(M,\mathbb{R}),C^{r-k}(M,\mathbb{R})) \\ f & \mapsto & \mathcal{L}_{f,\phi} \end{array}$$

é C^k.

Prova. Seja $\{\varphi_j : j = 1,\dots,l\}$ uma C^∞ partição da unidade associada a alguma cobertura finita $B_1,\dots B_l$ de M por bolas com raio menor ou igual a $\delta > 0$ e defina os operadores auxiliares $\mathcal{L}_j = \mathcal{L}_{j,f,\phi} := \mathcal{L}_{f,\phi} \cdot \varphi_j$. Em particular decorre que $\mathcal{L}_{f,\phi} = \sum_{j=1}^{l} \mathcal{L}_j$. Desse modo, tudo que precisamos provar é que os operadores auxiliares $\mathcal{L}_j$ são C^k.

Nosso primeiro objetivo é provar que $f \mapsto \mathcal{L}_j(g)$ é C^k, para todo $g \in C^r(M,\mathbb{R})$ fixado. Lembremos que φ_j anula-se fora da bola B_j. Nós escrevemos $f_1,\dots,f_s$ para os ramos inversos de f em B_j, e também $T_i = \partial_f f_i$, para $i = 1,\dots,s$. Sendo assim, uma vez que $\mathcal{L}_j(g)|_{\overline{B_j}^c} \equiv 0$ nós temos que

$$\mathcal{L}_j(g) = \sum_{i=1}^{s} g(f_i) \cdot e^{\phi}(f_i)\, \varphi_j,$$

o que implica que $\partial_f \mathcal{L}_j(g) \cdot H = \sum_{i=1}^{s} (g \cdot e^{\phi})' \circ f_i \cdot [T_i \cdot H] \cdot \varphi_j \in C^{k-1}$. Dado que $C^r(M,\mathbb{R}) \ni g \mapsto \partial_f \mathcal{L}_j(g) \in C^{r-1}(M,\mathbb{R})$ é linear, contínua e o resto da diferenciabilidade depende continuamente de g, isto finaliza a prova do lema. ∎

Observação 2.7. *Decorre das estimativas feitas na proposição anterior que, ao longo de vizinhanças pequenas, teremos que as aplicações derivada da aplicação $f \mapsto \mathcal{L}_{f,\phi}$ são limitadas.*

Assim, com a propriedade do gap espectral, $\lambda_{f,\phi}$ e $\mu_{f,\phi}$ variam analiticamente com o potencial ϕ, porém não podemos afirmar a priori nada sobre a diferenciabilidade com respeito à dinâmica f, pois a Teoria Espectral Clássica só nos garante a diferenciabilidade se tivéssemos a diferenciabilidade do operador de transferência como operador. A despeito disso, em [GL06] é provado um resultado de diferenciabilidade da projeção espectral, mesmo que perturbemos os operadores como operadores agindo em espaços distintos, isso já nos é suficiente pela proposição anterior. A partir de agora descreveremos esse resultado abstrato de [GL06].

Sejam $r \geq 2$, $\mathcal{B}^0 \supset \cdots \supset \mathcal{B}^r$ espaços de Banach, I uma variedade de Banach e $\{A_t\}_{t \in I}$ uma família operadores lineares agindo sobre os espaços de Banach citados $\mathcal{B}^i$ tal que $I \ni t \mapsto A_t \in L(\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^0)$ é contínuo. Ademais, assuma que

$$\exists M > 0, \forall t \in I, \forall g \in \mathcal{B}^0,\ ||A_t^n g||_{\mathcal{B}^0} \leq CM^n ||g||_{\mathcal{B}^0} \tag{2.1}$$

e

$$\exists \alpha < M, \forall t \in I,\ ||A_t^n g||_{\mathcal{B}^1} \leq C\alpha^n ||g||_{\mathcal{B}^1} + CM^n ||g||_{\mathcal{B}^0}. \tag{2.2}$$

Assuma também que para $j = 1, \ldots, r-1$ existe a $j-$ésima derivada da aplicação $I \ni t \mapsto A_t \in L(\mathcal{B}^r, \mathcal{B}^{r-j})$. Denotando a função $j-$ésima derivada que age de I em $L(\mathcal{B}^r, \mathcal{B}^{r-j})$ por Q_j, assumamos que para todo $i \in [j, r]$ temos que Q_i é limitada como aplicação de I em $L(\mathcal{B}^i, \mathcal{B}^{i-j})$. Nesses termos, o teorema 8.1 de [GL06] nos diz que:

Teorema 2.8. *Para $\varrho > \alpha$ e $\delta > 0$, denote por $V_{\varrho,\delta}$ o conjunto de números complexos z tais que $|z| \geq \varrho$ e, para todo $1 \leq k \leq r$, a distância de z ao espectro de $A_{t|\mathcal{B}^k}$ é $\geq \delta$. Então, a aplicação $I \times V_{\varrho,\delta} \ni (t,z) \in (z - A_t)^{-1} \in L(\mathcal{B}^r, \mathcal{B}^0)$ é C^{r-1} e fixado t a forma como os restos da $C^{r-1}-$diferenciabilidade vão a 0 é uniforme em relação a z.*

Fazendo então uso desse teorema, podemos provar um resultado de diferenciabilidade de $\lambda_{f,\phi}$ e $\mu_{f,\phi}$ com respeito à dinâmica que englobará o contexto de invariância uniforme do cone.

Iremos descrever agora as hipóteses. Sejam M uma variedade riemanniana compacta conexa, $\mathcal{F}^r \subset C^r(M, M)$ uma subvariedade contendo dinâmicas que são difeomorfismos locais, $r \geq 2$, e $\phi : M \to \mathbb{R}$ um potencial C^r. Suponhamos que para cada $f \in \mathcal{F}^r$ temos que $\mathcal{L}_{f,\phi|C^r}$ e $\mathcal{L}_{f,\phi|C^{r-1}}$ tem a propriedade do gap espectral. Além disso, suponhamos que existem $\lambda_{f,\phi} > 0$, $\nu_{f,\phi}$ probabilidade e $h_{f,\phi} \in C^r(M, \mathbb{R})$ tais que:

1. $\displaystyle\int \mathcal{L}_{f,\phi} g d\nu_{f,\phi} = \int \lambda_{f,\phi} g d\nu_{f,\phi}$, para todo $g \in C^r(M, \mathbb{R})$;
2. $\mathcal{L}_{f,\phi} h_{f,\phi} = \lambda_{f,\phi} h_{f,\phi}$ e $\int h_{f,\phi} d\nu_{f,\phi} = 1$;
3. existem $k \geq 0$ e $\tau \in (0,1)$, não dependendo de f, tais que para todo $\varphi \in C^{r-1}$ temos
$$\Big|\Big| \frac{\mathcal{L}^n_{f,\phi}\varphi}{\lambda^n_{f,\phi}} - h_{f,\phi} \int \varphi d\nu_{f,\phi} \Big|\Big|_{r-1} \leq k\tau^n ||\varphi||_{r-1}.$$

Teorema 2.9. *Nas hipóteses descritas acima, se $\mathcal{F}^r \ni f \mapsto \lambda_{f,\phi}$ é contínuo em f_0, então as seguintes aplicações são C^{r-1} em uma vizinhança de f_0:*

i. $\mathcal{F}^r \ni f \mapsto \lambda_{f,\phi}$;

ii. $\mathcal{F}^r \ni f \mapsto h_{f,\phi} \in \mathcal{C}^{r-1}$;

iii. $\mathcal{F}^r \ni f \mapsto \nu_{f,\phi} \in (C^1)^*$;

iv. $\mathcal{F}^r \ni f \mapsto \mu_{f,\phi} \in (C^1)^*$.

Antes de provar o teorema precisaremos de um resultado de estabilidade forte, a saber:

Proposição 2.10. *A aplicação* $\mathcal{F}^r \ni f \longmapsto h_f \in \mathcal{C}^{r-1}(M, \mathbb{R})$ *é contínua em* f_0.

Prova. Tomemos $\epsilon > 0$; como

$$||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}1 - h_{f,\phi}||_0 \leq k\tau^n, \forall f \in \mathcal{F}^r,$$

existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||\tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_{f,\phi}(1) - h_{f,\phi}|| < \frac{\epsilon}{3}, \forall f \in \mathcal{F}^r.$$

Como estamos assumindo que $f \mapsto \lambda_{f,\phi}$ é contínua em f_0, usando a proposição 2.6 existirá uma vizinhança V de f_0 tal que: se $f \in V$ temos

$$||\tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_{f,\phi}(1) - \tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_{f_0,\phi}(1)||_r < \frac{\epsilon}{3}.$$

Sendo assim, para $f \in V$:

$$||h_{f,\phi} - h_{f_0,\phi}||_{r-1} \leq ||h_{f,\phi} - \tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_{f,\phi}(1)||_{r-1} + ||\tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_{f,\phi}(1) - \tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_{f_0,\phi}(1)||_{r-1} + ||\tilde{\mathcal{L}}^{n_0}_{f_0,\phi}(1) - h_{f_0,\phi}||_{r-1} < \epsilon.$$

■

Prova do Teorema 2.9. Notemos inicialmente que $\mathcal{L}_{f,\phi|C^{r-1}}$ e $\mathcal{L}_{f,\phi|C^r}$ tem o mesmo raio espectral pois eles tem a propriedade do gap espectral por hipótese. Existe uma vizinhança U de f_0 tal que $\sup_{f\in U} ||\mathcal{L}_{f,\phi}1||_\infty < +\infty$. Por hipótese, o raio espectral é contínuo em em f_0 logo, a menos de diminuir a vizinhança U, podemos supor sem perda de generalidade $\sup_{f\in U} \lambda_{f,\phi} < +\infty$. Além disso, existe uma curva C^1 fechada γ de modo que a componente conexa limitada determinada por γ contém o raio espectral de $\mathcal{L}_{f,\phi|C^r}$ e a componente conexa ilimitada contém o resto do espectro para todo $f \in U$. Seja P_f a projeção espectral de $\mathcal{L}_{f,\phi|C^r}$ associada a seu raio espectral. Já vimos que $P_f = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (zI - \mathcal{L}_{f,\phi})^{-1}dz$ para todo $f \in U$. Usaremos o teorema anterior para provar que $U \times \gamma \ni (zI - \mathcal{L}_{f,\phi})^{-1} \in L(C^r, C^{r-1})$ é C^{r-1} e que a forma como os restos da $C^{r-1}-$diferenciabilidade vão a 0 são uniformes em relação a $z \in \gamma$ quando fixamos f. A prova desse fato é uma aplicação direta do Teorema 2.8 quando escolhemos seus elementos de maneira adequada. No teorema anterior tomemos $\mathcal{B}^0 = C^0(M, \mathbb{R})$, $\mathcal{B}^1 = C^{r-1}(M, \mathbb{R})$,

$\mathcal{B}^2 = C^r(M,\mathbb{R})$, $I = U$ e $A_t = \mathcal{L}_{t,\phi}$. Pela Proposição 2.6, para aplicarmos o Teorema 2.8 basta provarmos que são válidas as hipóteses (2.1) e (2.2). Por hipótese

$$||\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}g - \int g d\nu_{f,\phi} \cdot h_{f,\phi}||_{r-1} \leq k\tau^n, \forall g \in C^{r-1}(M,\mathbb{R}), \forall f \in U,$$

tomemos então $M = \sup_{f\in U} ||\mathcal{L}_{f,\phi}1||_\infty < +\infty$ e $\alpha = \sup_{f\in U} \lambda_{f,\phi}\cdot\tau$ e $C = \max\{k, \sup_{f\in U} ||h_{f,\phi}||_{r-1}\}$. Desse modo,

$$||\mathcal{L}^n_{f,\phi}g||_\infty \leq M^n||g||_\infty, \forall g \in C^0(M,\mathbb{R}), \forall f \in U,$$

e

$$\begin{aligned} ||\mathcal{L}^n_{f,\phi}g||_{r-1} &\leq k(\lambda_{f,\phi}\tau)^n + \lambda^n_{f,\phi}||g||_{r-1}\cdot||h_{f,\phi}||_{r-1} \\ &\leq k(\sup_{f\in U}\lambda_{f,\phi}\cdot\tau)^n + \sup_{f\in U}||h_{f,\phi}||_{r-1}\cdot\sup_{f\in U}||\mathcal{L}_{f,\phi}1||^n_\infty\cdot||g||_{r-1}. \end{aligned}$$

Sendo assim, podemos aplicar o teorema anterior e concluir que $U\times\gamma \ni (zI - \mathcal{L}_{f,\phi})^{-1} \in L(C^r, C^{r-1})$ é C^{r-1} e a forma como os restos da $C^{r-1}-$diferenciabilidade vão a 0 são uniformes em relação a $z \in \gamma$ quando fixamos f. Assim, $U \ni f \mapsto P_f \in L(C^r, C^{r-1})$ é C^{r-1} e pelos itens 1., 2. e 3., comentados no início da seção, teremos o resultado pretendido. ■

O teorema anterior é aplicável no caso de invariância uniforme dos cones.

Corolário 2.11. *Sejam M uma variedade riemanniana compacta conexa, $r \geq 2$, $\mathcal{F}^r \subset C^r(M,M)$ é uma subvariedade contendo dinâmicas que são difeomorfismos locais e $\phi : M \to \mathbb{R}$ um potencial C^r. Suponhamos que cada $f \in \mathcal{F}^r$ satisfaz as hipóteses do Teorema 1.4 página 24 para $E = C^{r-1}(M,\mathbb{R})$ e $E = C^r(M,\mathbb{R})$ e para as mesmas constantes $\kappa_1,\ldots,\kappa_r,\rho$ e c. Além disso, suponha que* $\sup_{f\in\mathcal{F}^r}||h_{f,\phi}||_{r-1} < +\infty$. *Então, as seguintes aplicações são C^{r-1}:*

i. $\mathcal{F}^r \ni f \mapsto \lambda_{f,\phi}$;

ii. $\mathcal{F}^r \ni f \mapsto h_{f,\phi} \in \mathcal{C}^{r-1}$;

iii. $\mathcal{F}^r \ni f \mapsto \nu_{f,\phi} \in C^1$;

iv. $\mathcal{F}^r \ni f \mapsto \mu_{f,\phi} \in C^1$.

Prova. Devido aos corolários 1.9 e 1.15, o resultado é uma aplicação direta do teorema anterior. ■

Nas hipóteses do teorema anterior, teremos que cada $\mu_{f,\phi}$ é $f-$invariante e pela proposição 1.10 teremos que $\mu_{f,\phi}$ é $f-$ergódica. Logo, para cada $f \in \mathcal{F}^r$, podemos associar os expoentes Lyapunov de $\mu_{f,\phi}$. Sabe-se que $\int \log ||Df(x)|| d\mu_{f,\phi}$ e $\int \log ||Df(x)^{-1}||^{-1} d\mu_{f,\phi}$ são os expoentes de Lyapunov extremais e além disso, $\int \log |\det Df(x)| d\mu_{f,\phi}$ é a soma dos expoentes de Lyapunov. Como decorrência da diferenciabilidade de μ_f como funcional teremos que:

Corolário 2.12. *Se $\mathcal{F}^r \ni f \mapsto g_f \in C^r(M, \mathbb{R})$ é diferenciável em f_0, então a aplicação $\mathcal{F}^r \ni f \mapsto \int g_f d\mu_f$ é diferenciável em f_0. Em particular, se $r \geq 3$ temos que*

$$\mathcal{F}^r \ni f \mapsto \int \log ||Df(x)|| \, d\mu_f \quad e \quad \mathcal{F}^r \ni f \mapsto \int \log ||Df(x)^{-1}||^{-1} \, d\mu_f$$

e

$$\mathcal{F}^r \ni f \mapsto \int \log |\det Df(x)| \, d\mu_f$$

são C^{r-2}.

2.1.1 Estabilidade de leis estatísticas

Uma outra aplicação dos resultados anteriores é a estabilidade do Teorema Central do Limite.

Iremos descrever agora as hipóteses. Sejam M um espaço métrico compacto, E um subespaço de Banach do espaço de funções limitadas de M sobre $\mathbb{R}$ contendo as funções constantes, $\mathcal{W} \subset E$ um aberto e $\mathcal{F}$ uma classe de dinâmicas de M sobre M. Suponhamos que para cada $(f, \phi) \in \mathcal{F} \times \mathcal{W}$ temos que $\mathcal{L}_{f,\phi|E}$ são operadores de transferência contínuos que possuem a propriedade do gap espectral. Além disso, suponhamos que existem $\lambda_{f,\phi} > 0$, $\nu_{f,\phi}$ probabilidade e $h_{f,\phi} \in E$ tais que:

1. $\displaystyle\int \mathcal{L}_{f,\phi} g d\nu_{f,\phi} = \int \lambda_{f,\phi} g d\nu_{f,\phi}$, para todo $g \in E$;
2. $\mathcal{L}_{f,\phi} h_{f,\phi} = \lambda_{f,\phi} h_{f,\phi}$, $\int h_{f,\phi} d\nu_{f,\phi} = 1$ e $h_{f,\phi} > 0$;
3. existem $k \geq 0$ e $\tau \in (0,1)$, não dependendo de (f, ϕ), tais que para todo $\varphi \in E$ temos que $\displaystyle\left|\left|\frac{\mathcal{L}^n_{f,\phi}\varphi}{\lambda^n_{f,\phi}} - h_{f,\phi} \int \varphi d\nu_{f,\phi}\right|\right| \leq k\tau^n ||\varphi||$;
4. $\mathcal{F} \times \mathcal{W} \ni (f, \phi) \mapsto \lambda_{f,\phi}$ é contínua.

Observação 2.13. *Como sempre, denotaremos $h_{f,\phi}\nu_{f,\phi}$ por $\mu_{f,\phi}$.*

Teorema 2.14. *Nas hipóteses descritas acima, seja $(f, \phi) \in \mathcal{F} \times \mathcal{W}$. Se $\psi \in E$ então:*

i. ou $\psi = u \circ f - u + \int \psi \, d\mu_{f,\phi}$ *para algum* $u \in L^2(\mu_f)$ *(nós dizemos que* ψ *é cohomóloga a uma constante em* $L^2(\mu_{f,\phi})$*)*

ii. ou a sequência de funções mensuráveis $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j$ *converge em distribuição para a distribuição normal de média* $m = m_{f,\phi}(\psi) = \int \psi \, d\mu_{f,\phi}$ *e variância* σ^2 *dada por*

$$\sigma^2 = \sigma^2_{f,\phi}(\psi) = \int \tilde{\psi}^2 \, d\mu_{f,\phi} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int \tilde{\psi}(\tilde{\psi} \circ f^n) \, d\mu_{f,\phi} > 0,$$

onde $\tilde{\psi} = \psi - \int \psi \, d\mu_{f,\phi}$ *é uma função com média 0 dependendo de* f *e* ϕ*. Ou seja, dado um intervalo* $A \subset \mathbb{R}$*:*

$$\mu_{f,\phi}(\{x \in M : \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \psi(f^j(x)) \in A\}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_A e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Ademais,

iii. as funções $\mathcal{W} \times E \ni (\phi, \psi) \mapsto m_{f,\phi}(\psi)$ *e* $\mathcal{W} \times E \ni (\phi, \psi) \mapsto \sigma^2_f(\psi)$ *são analíticas com respeito a* (ϕ, ψ)

iv. suponha adicionalmente que $\mathcal{F}$ *está dotada com uma topologia como na seção 1.3 (dinâmicas próximas implicam em ramos inversos correspondentes próximos). Então* $\mathcal{F} \times \mathcal{W} \times E \ni (f, \phi, \psi) \mapsto m_{f,\phi}(\psi)$ *e* $\mathcal{F} \times \mathcal{W} \times E \ni (f, \phi, \psi) \mapsto \sigma^2_{f,\phi}(\psi)$ *são contínuas com respeito a* (f, ϕ, ψ)*;*

v. suponha adicionalmente que M *é uma variedade riemanniana compacta conexa,* $r \geq 2$*,* $\mathcal{F} \subset C^r(M, M)$ *é uma subvariedade contendo dinâmicas que são difeomorfismos locais,* $\mathcal{W}$ *(ao invés de ser um aberto em* $C^{r-1}(M, \mathbb{R})$*) é um aberto em* $C^r(M, \mathbb{R})$ *e que, para cada* $(f, \phi) \in \mathcal{F} \times \mathcal{W}$*, temos que* $\mathcal{L}_{f,\phi|C^r}$ *tem a propriedade do gap espectral. Então* $\mathcal{F} \times \mathcal{W} \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi, \psi) \mapsto m_{f,\phi}(\psi)$ *e* $\mathcal{F} \times \mathcal{W} \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi, \psi) \mapsto \sigma^2_f(\psi)$ *são* C^{r-1}*.*

Prova. Todos os resultados até o item ii nada mais são do que o Teorema Central do Limite, que será válido pela mesma prova da proposição 1.10.

Provemos então os itens iii. e iv.. A analiticidade com respeito a (ϕ, ψ) decorre da proposição 2.3. Para continuidade, observarmos inicialmente que pela Observação 1.14 teremos que $\mathcal{F} \times \mathcal{W} \times E \ni (f, \phi, \psi) \mapsto m_{f,\phi}(\psi)$ é contínuo. Assim utilizando também a hipótese 3. provamos que $\mathcal{F} \times \mathcal{W} \times E \ni (f, \phi, \psi) \mapsto \sigma^2_f(\psi)$ é contínuo.

Provemos por fim o item v.. A regularidade de $\mathcal{F} \times \mathcal{W} \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi, \psi) \mapsto m_{f,\phi}(\psi)$ é uma aplicação direta do teorema 2.9. Por fim, fixemos $(f_0, \phi_0) \in \mathcal{F} \times \mathcal{W}$. Para cada $(f, \phi) \in \mathcal{F} \times \mathcal{W}$ definamos $E_{0,f,\phi} := \ker \nu_{f,\phi} \cap C^r(M, \mathbb{R})$, e $T_{f,\phi} g = (g - \int g d\mu_{f,\phi}) \cdot h_{f,\phi}$ para todo $g \in C^r(M, \mathbb{R})$. Temos que $T_{f,\phi}$ é um operador contínuo e restrito a E_{0,f_0,ϕ_0} é um isomorfismo linear sobre $E_{0,f,\phi}$, com $T_{f,\phi}^{-1}g = \frac{g}{h_{f,\phi}} - \int \frac{g}{h_{f,\phi}} d\nu_{f_0,\phi_0}$. Dada $\psi \in C^r(M,\mathbb{R})$ já sabemos que $\sigma_{f,\phi}^2(\psi) = \int \tilde{\psi}^2\, d\mu_{f,\phi} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \int \tilde{\psi}(\tilde{\psi}\circ f^n)\, d\mu_{f,\phi}$, onde $\tilde{\psi} = \psi - \int \psi\, d\mu_{f,\phi}$. Por simples computação temos

$$\int \tilde{\psi}(\tilde{\psi}\circ f^n)\, d\mu_{f,\phi} = \int \tilde{\psi}\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^n(\tilde{\psi}\cdot h_{f,\phi})\, d\nu_{f,\phi} = \int \tilde{\psi} T_{f,\phi}^{-1}\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^n T_{f,\phi} T_{f,\phi}^{-1}(\tilde{\psi}\cdot h_{f,\phi})\, d\mu_{f,\phi}.$$

Assim

$$\sigma_{f,\phi}^2(\psi) = -\int \tilde{\psi}^2\, d\mu_{f,\phi} + 2\int \tilde{\psi}(I - T_{f,\phi}^{-1}\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^n T_{f,\phi|E_{0,f_0,\phi_0}})^{-1} T_{f,\phi}^{-1}(\tilde{\psi}\cdot h_{f,\phi})\, d\mu_{f.\phi}.$$

Utilizando as mesmas ideias contidas na prova do Teorema 2.9, podemos aplicar o Teorema 2.8 e concluir que $\mathcal{F}\times\mathcal{W} \ni (f,\phi) \mapsto (I - T_{f,\phi}^{-1}\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^n T_{f,\phi|E_{0,f_0,\phi_0}})^{-1}$ é C^{r-1}. Isto é suficiente para finalizarmos a prova do teorema. ∎

Utilizando a continuidade da variância $\sigma_{f,\phi}^2(\psi)$ com respeito à dinâmica f, o potencial ϕ e o observável ψ, e a primeira parte do teorema anterior, nós obtemos consequências para a equação cohomológica.

Corolário 2.15. *Nas mesmas hipóteses do teorema anterior, se $\psi \in E$ não é cohomóloga a uma constante em $L^2(M,\mu_{f,\phi})$ para $(f,\phi)\in\mathcal{F}\times E$, então a mesma propriedade vale para todos $(\hat{f},\hat{\phi})$ suficientemente próximos de (f,ϕ). Como consequência, os conjuntos $\{(\hat{f},\hat{\phi}) \in \mathcal{F}\times E : \psi$ é cohomóloga a uma constante em $L^2(M,\mu_{\hat{f},\hat{\phi}})\}$ e $\{\hat{\psi} \in E : \hat{\psi}$ é cohomóloga a uma constante em $L^2(M,\mu_{f,\phi})\}$ são fechados.*

Prova. Se ψ não é cohomóloga a uma constante em $L^2(M,\mu_{f,\phi})$, então pelo teorema 2.14 temos $\sigma_{f,\phi}^2(\psi) > 0$. Usando a continuidade obtemos $\mathcal{U}\subset\mathcal{F}\times E\times E$ aberto tal que, para todo $(\tilde{f},\tilde{\phi},\tilde{\psi})\in\mathcal{U}$, temos $\sigma_{\tilde{f},\tilde{\phi}}^2(\tilde{\phi}) > 0$. Logo, pelo teorema 2.14, $\tilde{\psi}$ não é cohomóloga a uma constante em $L^2(M,\mu_{\tilde{f},\tilde{\phi}})$. ∎

Note que saber se os conjuntos anteriores são fechados é importante nas aplicações, pois significa que podemos substituir o problema de resolver uma equação cohomólogica (ou seja, dado um observável ψ encontrar uma função u tal que $\psi = u\circ f - u + \int \psi d\mu$) por resolver problemas aproximados.

2.1.2 Grandes desvios

A teoria de grandes desvios estuda, entre outras coisas, a taxa de convergência com que a média temporal de uma sequência de variáveis aleatórias converge para uma distribuição limite. Em Sistemas Dinâmicos essas ideias são úteis para estimar a velocidade com que as médias de pontos típicos de medidas invariantes ergódicas convergem para a respectiva média espacial. Nesses termos estamos interessados em estimar a medida dos conjuntos

$$\Big\{x \in M : \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) > c\Big\},$$

com respeito a uma medida invariante ergódica μ. Existem pelo menos três formas de se obter resultados de grandes desvios em sistemas dinâmicos, cada uma com suas vantagens. Uma primeira forma é utilizando do esquema de torres de Young para poder se obter um novo sistema, onde já se tem um razoável entendimento, e usar os grandes desvios desse para obter grandes desvios do original. Uma segunda forma é usar algum variante da chamada propriedade de especificação, tentando levar as propriedades de colagem de órbitas para o espaço de medidas invariantes. E uma terceira forma é utilizando a aproximação funcional e suas propriedades fortes para obter grandes desvios. Utilizando os resultados que temos, desenvolveremos a teoria de grandes desvios através da aproximação funcional. Para isso precisaremos estudar a função energia livre.

Iremos supor que estamos nas mesmas hipóteses descritas antes do Teorema 2.14 na seção anterior. Além disso, iremos supor que para todo $(f, \phi) \in \mathcal{F} \times \mathcal{W}$ temos $\log \lambda_{f,\phi} = P_{\text{top}}(f, \phi)$.

Função energia livre

Lembremos que um observável $\psi : M \to \mathbb{R}$ é *cohomólogo a uma constante* se existe $A \in \mathbb{R}$ e um observável $\tilde{\psi} : M \to \mathbb{R}$ tal que $\psi = \tilde{\psi} \circ f - \tilde{\psi} + A$. Quando $\tilde{\psi} \in L^2(\mu)$ para alguma medida μ e a igualdade anterior vale em $\mu-$q.t.p., diremos que ψ é cohomólogo a uma constante em $L^2(\mu)$.

Observação 2.16. *Dada uma função $\psi : M \to \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ denotaremos a enésima soma de Birkhoff de ψ por $S_n\psi$, ou seja, $S_n\psi := \sum_{i=0}^{n-1} \psi \circ f^i$.*

Proposição 2.17. *Seja $(f, \phi) \in \mathcal{F} \times \mathcal{W}$. Então, dado um observável $\psi \in E$ existe $t_{f,\phi,\psi} > 0$ tal que para todo $|t| \le t_{f,\phi,\psi}$ o seguinte limite existe*

$$\mathcal{E}_{f,\phi,\psi}(t) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int e^{tS_n\psi}\, d\mu_{f,\phi} = P_{top}(f, \phi + t\psi) - P_{top}(f, \phi).$$

Ademais, $(t, \phi, \psi) \mapsto \mathcal{E}_{f,\phi,\psi}(t)$ é contínua, e em relação a ϕ e ψ é analítica. Se ψ é cohomólogo a uma constante, então $t \mapsto \mathcal{E}_{f,\phi,\psi}(t)$ é afim; porém, se ψ não é cohomólogo a uma constante em E no suporte de $\mu_{f,\phi}$, então $t \mapsto \mathcal{E}_{f,\phi,\psi}(t)$ é analítica real e estritamente convexa. Além disso, *i. suponha adicionalmente que $\mathcal{F}$ está dotada com uma topologia como na seção 1.3 (dinâmcas próximas implica em ramos inversos próximos). Então $(t, f, \phi, \psi) \mapsto \mathcal{E}_{f,\phi,\psi}(t)$ é contínua;*

ii. suponha adicionalmente que M é uma variedade riemanniana compacta conexa, $r \geq 2$, $E = C^{r-1}(M, \mathbb{R})$, $\mathcal{F} \subset C^r(M, M)$ é uma subvariedade contendo dinâmicas que são difeomorfismos locais, $\mathcal{W}$ (ao invés de ser um aberto em $C^{r-1}(M, \mathbb{R})$) é um aberto em $C^r(M, \mathbb{R})$ e que, para cada $(f, \phi) \in \mathcal{F} \times \mathcal{W}$, temos que $\mathcal{L}_{f,\phi|C^r}$ tem a propriedade do gap espectral. Então as funções $\mathcal{F} \ni (t, f, \phi, \psi) \mapsto \mathcal{E}_{f,\phi,\psi}(t)$ e $\mathcal{F} \ni (t, f, \phi, \psi) \mapsto \mathcal{E}'_{f,\phi,\psi}(t)$ são C^{r-1}.

Prova. Observe inicialmente que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\int e^{tS_n\psi}\, d\mu_{f,\phi} = \int \lambda_{f,\phi}^{-n} \mathcal{L}_{f,\phi}^n(h_{f,\phi}e^{tS_n\psi})\, d\nu_{f,\phi} = \left(\frac{\lambda_{f,\phi+t\psi}}{\lambda_{f,\phi}}\right)^n \int \lambda_{f,\phi+t\psi}^{-n} \mathcal{L}_{f,\phi+t\psi}^n(h_{f,\phi})\, d\nu_{f,\phi}.$$

Como $\mathcal{W}$ é aberto, então para todo $|t| \leq t_{f,\phi,\psi}$ o potencial $\phi + t\psi \in \mathcal{W}$, desde que $t_{f,\phi,\psi}$ seja tomado suficientemente pequeno.

Como $0 < \inf h_{f,\phi} \leq \sup h_{f,\phi} < +\infty$, $\phi \mapsto h_{f,\phi}$ é contínua e $\lambda_{f,\phi+t\psi}^{-n} \mathcal{L}_{f,\phi+t\psi}^n(h_{f,\phi})$ é uniformemente convergente para $h_{f,\phi+t\psi} \cdot \int h_{f,\phi} d\nu_{f,\phi+t\psi}$, então $\lambda_{f,\phi+t\psi}^{-n} \mathcal{L}_{f,\phi+t\psi}^n(h_{f,\phi})$ é uniformemente afastado do 0 e do infinito em relação a n. Utilizando o teorema da convergência dominada

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int e^{tS_n\psi}\, d\mu_{f,\phi} = \log \lambda_{f,\phi+t\psi} - \log \lambda_{f,\phi} = P_{\text{top}}(f, \phi + t\psi) - P_{\text{top}}(f, \phi),$$

provando a primeira parte da proposição. Agora, assumamos primeiro que exista $A \in \mathbb{R}$ e um potencial $\tilde{\psi} : M \to \mathbb{R}$ tal que $\psi = \tilde{\psi} \circ f - \tilde{\psi} + A$. Utilizando o princípio variacional e a invariância,

$$\begin{aligned} P_{\text{top}}(f, \phi + t\psi) &= \sup_{\mu \in \mathcal{M}_1(f)} \left\{ h_\mu(f) + \int (\phi + t\psi)\, d\mu \right\} \\ &= tA + \sup_{\mu \in \mathcal{M}_1(f)} \left\{ h_\mu(f) + \int \phi\, d\mu \right\} \\ &= tA + P_{\text{top}}(f, \phi) \end{aligned}$$

e, consequentemente, $\mathcal{E}_{f,\phi,\psi}(t) = tA$ é afim.

Agora, nós provaremos que, se ψ não é cohomólogo a uma constante em E no suporte de $\mu_{f,\phi}$, então a função energia livre é estritamente convexa. Como $t \mapsto P_{\text{top}}(f, \phi + t\psi)$ é analítica real então, para provar que $t \mapsto \mathcal{E}_{f,\phi,\psi}(t)$ é estritamente convexa, basta mostrarmos que $\mathcal{E}''_{f,\phi,\psi}(t) > 0$ para todo t. Suponhamos que exista t tal que $\mathcal{E}''_{f,\phi,\psi}(t) = 0$. A menos de trocar ϕ pelo potencial $\tilde{\phi} = \phi + t\psi$, podemos assumir sem perda de generalidade que $t = 0$, ou seja, $\mathcal{E}''_{f,\phi,\psi}(0) = 0$. Sejam $\psi_0 := \psi - \int \psi d\mu_{f,\phi}$, $u_0 := \dfrac{\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{L}}^j_{f,\phi}(\psi_0 h_{f,\phi})}{h_{f,\phi}}$ e $g := \psi_0 - u_0 \circ f + u_0$. Definamos

$$\mathcal{E}_g(t) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int e^{tS_n g}\, d\mu_{f,\phi} = P_{\text{top}}(f, \phi + t\psi_0) - P_{\text{top}}(f, \phi) =$$

$$P_{\text{top}}(f, \phi + t\psi) - t\int \psi d\nu_{f,\phi} - P_{\text{top}}(f, \phi) = \mathcal{E}_{f,\phi,\psi}(t) - t\int \psi d\nu_{f,\phi}.$$

Logo $\mathcal{E}''_g(0) = \mathcal{E}''_{f,\phi,\psi}(0) = 0$. Além disso, temos que

$$\mathcal{E}''_g(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{\int (S_n g)^2\, e^{tS_n g} d\mu_{f,\phi}}{\int e^{tS_n g} d\mu_{f,\phi}} - \left(\frac{\int S_n g\, e^{tS_n g} d\mu_{f,\phi}}{\int e^{tS_n g} d\mu_{f,\phi}} \right)^2 \right].$$

Notemos ainda que $\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}(g h_{f,\phi}) = 0$, assim

$$0 = \mathcal{E}''_g(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} [\int (S_n g)^2\, d\mu_{f,\phi} - (\int S_n g\, d\mu_{f,\phi})^2] =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int g \circ f^j \cdot g \circ f^j d\mu_{f,\phi} = \int g^2 d\mu_{f,\phi},$$

então $\psi = \psi_0 - u_0 \circ f + u_0$ no suporte de $\mu_{f,\phi}$, ou seja, ψ é cohomólogo a uma constante no suporte de $\mu_{f,\phi}$. Então nós concluímos que $\mathcal{E}_{f,\phi,\psi}$ é uma função estritamente convexa.

Para provar o item i. basta utilizarmos a Observação 1.14. E por fim, provemos o item ii.. Para provar que $\mathcal{F} \ni (t, f, \phi, \psi) \mapsto \mathcal{E}_{f,\phi,\psi}(t)$ é C^{r-1} basta aplicarmos o Teorema 2.9. Para provar que $\mathcal{F} \ni (t, f, \phi, \psi) \mapsto \mathcal{E}'_{f,\phi,\psi}(t)$ é C^{r-1} observemos inicialmente que $\mathcal{E}'_{f,\phi,\psi}(t) = \int \psi d\mu_{f,\phi}$: de fato, veremos mais adiante pelo teorema 2.25 que, em contextos mais gerais, isso também vale. Assim basta então aplicarmos o Teorema 2.9. $\blacksquare$

Observação 2.18. *Pelo início da prova do teorema anterior, vemos que o domínio de $\mathcal{E}_{f,\phi,\psi}$ está associado ao raio da maior bola de centro em ϕ que ainda esta contida em $\mathcal{W}$. Em particular, se $\mathcal{W} = E$, teremos que $\mathcal{E}_{f,\phi,\psi}$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.*

A função $\mathcal{E}_{f,\phi,\psi}$ é chamada de energia livre. O próximo resultado ilustra algumas características do comportamento da função energia livre.

Corolário 2.19. *Para todo observável $\psi \in E$, tal que $\int \psi\, d\mu_{f,\phi} = 0$, a função energia livre $[-t_{f,\phi,\psi}, t_{f,\phi,\psi}] \ni t \to \mathcal{E}_{f,\phi,\psi}(t)$ satisfaz:*

1. *$\mathcal{E}_{f,\phi,\psi}(0) = 0$ e $\mathcal{E}_{f,\phi,\psi}(t) \geq 0$ para todo $t \in [-t_{f,\phi,\psi}, t_{f,\phi,\psi}]$;*

2. *$t \inf \psi \leq \mathcal{E}_{f,\phi,\psi}(t) \leq t \sup \psi$ para todo $t \in (0, t_{f,\phi,\psi}]$;*

3. $t \sup \psi \leq \mathcal{E}_{f,\phi,\psi}(t) \leq t \inf \psi$ *para todo* $t \in [-t_{f,\phi,\psi}, 0)$.

Prova. Por definição $\mathcal{E}_{f,\phi,\psi}(0) = 0$. Se ψ é cohomólogo a uma constante então, como $\int \psi d\mu_{f,\phi} = 0$, $\mathcal{E}_{f,\phi,\psi} \equiv 0$ e todos os itens do corolário são válidos. Suponhamos que ψ não é cohomólogo a uma constante. Pela proposição anterior anterior $\mathcal{E}''_{f,\phi,\psi}(t) > 0$, então $\mathcal{E}'_{f,\phi,\psi}$ é estritamente crescente. Utilizando que $\mathcal{E}'_{f,\phi,\psi}(0) = \int \psi \, d\mu_{\phi} = 0$, temos que $\mathcal{E}_{f,\phi,\psi}$ é estritamente crescente para $t \in (0, t_{\phi,\psi})$ e estritamente decrescente para $t \in (-t_{\phi,\psi}, 0)$, decorrendo então o item 1.

Como $\mathcal{E}'_{f,\phi,\psi}(t) = \int \psi \, d\mu_{\phi+t\psi}$, temos que $\inf \psi \leq \mathcal{E}'_{f,\phi,\psi}(t) \leq \sup \psi$. Utilizando o teorema do valor médio decorrem os itens 2 e 3. ■

Assumamos que ψ não é cohomólogo a uma constante no suporte de $\mu_{f,\phi}$ e que $m_{f,\phi} = \int \psi \, d\mu_{f,\phi} = 0$. Como a função $[-t_{f\phi,\psi}, t_{f\phi,\psi}] \ni t \to \mathcal{E}_{f,\phi,\psi}(t)$ é estritamente convexa, está bem definido a transformada de Legendre "local" $I_{f,\phi,\psi}$ dada por

$$I_{f,\phi,\psi}(s) := \sup_{-t_{f\phi,\psi} \leq t \leq t_{f\phi,\psi}} \big\{ st - \mathcal{E}_{f,\phi,\psi}(t) \big\}.$$

A transformada de Legendre é uma função convexa uma vez que é o supremo de funções afins e, utilizando que $\mathcal{E}_{f,\phi,\psi}$ é estritamente convexa e não-negativa, $I_{f,\phi,\psi} \geq 0$. Podemos definir a transformada de Legendre para ψ não cohomólogo a uma constante no suporte de $\mu_{f,\phi}$ mesmo se $\int \psi d\mu_{f,\phi} \neq 0$, por $I_{f,\phi,\psi}(t) := I_{f,\phi,\psi - \int \psi d\mu_{f,\phi}}(t - \int \psi d\mu_{f,\phi})$. Ademais, como $\mathcal{E}_{f,\phi,\psi+c}(t) = \mathcal{E}_{f,\phi,\psi}(t) + ct$ temos que $I_{f,\phi,\psi+c}(t) = I_{f,\phi,\psi}(t-c)$ para todo $c, t \in \mathbb{R}$.

Como a função energia livre é diferenciável e $\mathcal{E}''_{f,\phi,\psi} > 0$, vale a propriedade variacional

$$I_{f,\phi,\psi}(\mathcal{E}'_{f,\phi,\psi}(t)) = t\mathcal{E}'_{f,\phi,\psi}(t) - \mathcal{E}_{f,\phi,\psi}(t)$$

e o domínio de $I_{f,\phi,\psi}$ contém o intervalo $[\mathcal{E}'_{f,\psi}(-t_{\phi,\psi}), \mathcal{E}'_{f,\psi}(t_{\phi,\psi})]$. De fato, definindo $T(t) := st - \mathcal{E}_{f,\phi,\psi}(t)$ temos que $T'(t) = 0$ se, e somente se, $s = \mathcal{E}'_{f,\phi,\psi}(t)$ e além disso $T''(t) = -\mathcal{E}''_{f,\phi,\psi} < 0$; desse modo obtemos a propriedade variacional. Ademais, $I_{f,\phi,\psi}(s) = 0$ se, e somente se, $s = m_{f,\phi}$. Utilizando a convexidade estrita de $\mathcal{E}_{f,\phi,\psi}$ e sua diferenciabilidade temos que $[-t_{\phi,\psi}, t_{\phi,\psi}] \ni t \mapsto I_{f,\phi,\psi}(t)$ é estritamente convexa e diferenciável. De fato, pela propriedade variacional e pelo fato de $\mathcal{E}'_{f,\phi,\psi}(t)$ ser estritamente crescente, temos que $I_{f,\phi,\psi}(\mathcal{E}'_{f,\phi,\psi}(t)$ é analítico real, além disso $I''_{f,\phi,\psi}(\mathcal{E}'_{f,\phi,\psi}(t)) = \frac{1}{\mathcal{E}''_{f,\phi,\psi}(t)} > 0$ o que prova que $I_{f,\phi,\psi}(t)$ é estritamente convexa. Utilizando os resultados anteriores temos que:

Corolário 2.20. *Seja* $(f, \phi) \in \mathcal{F} \times \mathcal{W}$ *e* $\psi \in E$ *um observável não cohomólogo a uma constante no suporte de* $\mu_{f,\phi}$. *Então a transformada de Legendre* $I_{f,\phi,\psi}$ *satisfaz:*

1. *O domínio* $[\mathcal{E}'_{f,\psi}(-t_{f,\phi,\psi}), \mathcal{E}'_{f,\psi}(t_{f,\phi,\psi})]$ *contém* $m_{f,\phi} = \int \psi \, d\mu_{f,\phi}$;

2. $I_{f,\phi,\psi} \geq 0$ *é estritamente convexa e* $I_{f,\phi,\psi}(s) = 0$ *se e somente se* $s = \int \psi \, d\mu_{f,\phi}$*;*

3. $s \mapsto I_{f,\phi,\psi}(s)$ *é analítico real.*

Estimativas de desvios

Utilizando a função energia livre obteremos resultados de grandes desvios "locais". De fato, como consequência da diferenciabilidade da função energia livre podemos aplicar o teorema de Gartner-Ellis (veja por exemplo [DZ98, RY08, CRL98]) e assim temos:

Proposição 2.21. *Seja* $(f, \phi) \in \mathcal{F} \times \mathcal{W}$*. Dado um intervalo* $[a, b] \subset [\mathcal{E}'_{f,\psi}(-t_{f,\phi,\psi}), \mathcal{E}'_{f,\psi}(t_{f,\phi,\psi})]$ *vale que*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_{f,\phi} \left(x \in M : \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j(x) \in [a, b] \right) \leq - \inf_{s\in[a,b]} I_{f,\phi,\psi}(s)$$

e

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_{f,\phi} \left(x \in M : \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j(x) \in (a, b) \right) \geq - \inf_{s\in(a,b)} I_{f,\phi,\psi}(s)$$

Além de conseguir taxa grandes desvios, utilizando nossos resultados obtemos estabilidade da transformada de Legendre com respeito ao sistema dinâmico. Mais precisamente,

Teorema 2.22. *Seja* V *um espaço métrico compacto e* $\big((f_v, \phi_v, \psi_v)\big)_{v\in V}$ *uma família injetiva e parametrizada (contínua) de aplicações em* $\mathcal{F} \times \mathcal{W} \times X$*, onde* $X \subset E$*. Se o observável* ψ_{v_*} *não é cohomólogo a uma constante em* $L^2(\mu_{f_{v_*},\phi_{v_*}})$*, para algum* $v_* \in V$*, então existe um intervalo* $J \subset \mathbb{R}$ *e uma vizinhança aberta* U *de* v_* *tal que para todo* $v \in \overline{U}$ *e* $[a, b] \subset J$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_{f_v,\phi_v} \left(x \in M : \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi_v \circ f_v^j(x) \in [a, b] \right) \leq - \inf_{s\in[a,b]} I_{f_v,\phi_v,\psi_v}(s)$$

e

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_{f_v,\phi_v} \left(x \in M : \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi_v \circ f_v^j(x) \in (a, b) \right) \geq - \inf_{s\in(a,b)} I_{f_v,\phi_v,\psi_v}(s).$$

Além disso,

i. suponha adicionalmente que $\mathcal{F}$ *está dotada com uma topologia como na seção 1.3 (dinâmicas próximas implicam em ramos inversos próximos). Então, a transformada de Legendre* $(s, v) \mapsto I_{f_v,\phi_v,\psi_v}(s)$ *é contínua sobre* $J \times \overline{U}$*, na topologia* C^0*;*

ii. suponha adicionalmente que M é uma variedade riemanniana compacta conexa, $r \geq 2$, $E = C^{r-1}(M, \mathbb{R})$, $\mathcal{F} \subset C^r(M, M)$ é uma subvariedade contendo dinâmicas que são difeomorfismos locais, $\mathcal{W}$ (ao invés de ser um aberto em $C^{r-1}(M, \mathbb{R})$) é um aberto em $C^r(M, \mathbb{R})$ e que para cada $(f, \phi) \in \mathcal{F} \times \mathcal{W}$ temos que $\mathcal{L}_{f,\phi|C^r}$ tem a propriedade do gap espectral. Suponha também que V é uma variedade e a parametrização é C^{r-1}. Então a transformada de Legendre $(s, v) \mapsto I_{f_v,\phi_v,\psi_v}(s)$ é C^{r-1}.

Prova. Pelo corolário 2.35 sabemos que, a menos de tomar uma vizinhança de v_*, podemos supor sem perda de generalidade que ψ_v não é cohomólogo a uma constante em $L^2(\mu_{f_v,\phi_v})$ para todo $v \in V$. Podemos obter o princípio dos grandes desvios local, como no teorema anterior, no intervalo $[\mathcal{E}'_{f_{v_*},\phi_{v_*},\psi_{v_*}}(-t_{f_{v_*},\phi_{v_*},\psi_{v_*}}), \mathcal{E}'_{f_{v_*},\phi_{v_*},\psi_{v_*}}(t_{f_{v_*},\phi_{v_*},\psi_{v_*}})]$. Observemos que o intervalo $[\mathcal{E}'_{f,\phi,\psi}(-t_{f,\phi,\psi}), \mathcal{E}'_{f,\phi,\psi}(t_{f,\phi,\psi})]$ é não-degenerado e varia continuamente com respeito a f, ϕ e ψ. Logo, nós podemos tomar um intervalo não-degenerado J contido em todos os intervalos $[\mathcal{E}'_{f,\phi,\psi}(-t_{f,\phi,\psi}), \mathcal{E}'_{f,\phi,\psi}(t_{f,\phi,\psi})]$ para todo $(f, \phi, \psi) \in \mathcal{F} \times \mathcal{W} \times X$ suficientemente próximo de $(f_{v_*}, \phi_{v_*}, \psi_{v_*})$. Isto prova a primeira parte do teorema.

Provemos agora o item i. Usando a propriedade variacional da transformada de Legendre e que $\mathcal{E}''_{f_v,\phi_v,\psi_v}(t) > 0$, nós temos que para todo $s \in J$ existe um único $t = t(s, v)$ tal que $s = \mathcal{E}'_{f_v,\phi_v,\psi_v}(t)$ e

$$I_{f_v,\phi_v,\psi_v}(s) = s \cdot t(s, v) - \mathcal{E}_{f_v,\phi_v,\psi_v}(t(s, v)). \tag{2.3}$$

Consideremos agora o skew-product contínuo

$$\begin{array}{rcl} F : V \times J & \to & V \times \mathbb{R} \\ (v, t) & \mapsto & (v, \mathcal{E}'_{f_v,\phi_v,\psi_v}(t)). \end{array}$$

Ele é injetivo pois é estritamente crescente ao longo das fibras. Como $V \times J$ é um espaço métrico compacto, então F é um homeomorfismo sobre a imagem $F(V \times J)$. Em particular, isto mostra que para todo $(v, s) \in F(V \times J)$ existe um único $t = t(v, s)$, variando continuamente com (v, s), tal que $F(v, t(v, s)) = (v, s)$ e $s = \mathcal{E}'_{f_v,\phi_v,\psi_v}(t)$. Decorre então da relação (2.3) que $(s, v) \mapsto I_{f_v,\phi_v,\psi_v}(s)$ é contínuo sobre $J \times V$.

Por fim, para provar o item ii. basta observarmos que, nas hipóteses requeridas, o skew-product F definido na prova do item i. será C^{r-1}. Já vimos que F é homeomorfismo, e de fato será um difeomorfismo C^{r-1}, assim aplicando o teorema da função implícita e a relação (2.3) obtemos o resultado pretendido. ■

Observação 2.23. *Se fixarmos uma dinâmica e variamos somente o potencial e o observável obtemos, com a mesma prova, os mesmos resultados de regularidade do Teorema anterior.*

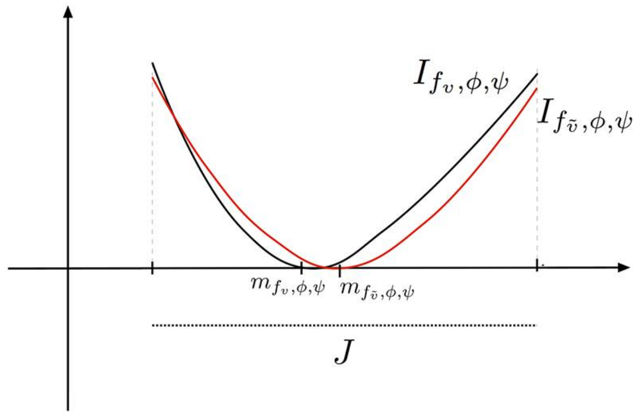

Figura 2.1: Continuidade das funções taxas

Vale mencionar que estimativas inferiores e superiores de grandes desvios foram obtidas em uma classe robusta de transformações, que engloba a que estamos estudando, e para observáveis contínuos em [AP06, Var12]. Porém a estabilidade dessas taxas não era conhecida.

2.2 Além do gap espectral

Quando estudamos dinâmicas e potenciais cujos estados de equilíbrio possuem decaimento de correlações mais lento que exponencial, não obteremos a propriedade do gap espectral para o operador de transferência associado. Essa seção tem por objetivo obter resultados similares aos da seção anterior em contextos em que o espectro essencial do operador de transferência pode acumular no seu raio espectral. O contexto que irá ser estudado irá englobar o caso em que ocorre a propriedade do gap espectral. Mesmo nesse caso corresponderá a uma importante contribuição, pois obteremos fórmulas explícitas para as derivadas.

Observação 2.24. *Afim de facilitar a leitura, dado um operador $T : E \to E$ e um vetor $H \in E$ denotaremos ao longo dessa seção T atuando sobre H também como $T \odot H$.*

2.2.1 Diferenciabilidade com respeito ao potencial

Seja M um espaço métrico, fixemos uma dinâmica $f : M \to M$ e iremos focar as questões de diferenciabilidade do raio espectral do operador de transferência quando variamos o potencial $\phi : M \to \mathbb{R}$. Seja E um subespaço do espaço de funções de M em $\mathbb{R}$

limitadas, contendo as funções constantes e $||\cdot||$ uma norma sobre E que o torna Banach e que $||\cdot||_0 \leq ||\cdot||$. Iremos sempre supor que $\varphi_1 \cdot \varphi_2 \in E$ para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in E$ e que $\mathcal{L}_{f,\phi} : (E, ||\cdot||) \to (E, ||\cdot||)$ é um operador limitado.

Seja $\mathcal{W}$ um aberto de E de modo que para cada $\phi \in \mathcal{W}$ existem $\lambda_\phi > 0$, ν_ϕ probabilidade e $h_\phi \in E$ tais que:

1. $\displaystyle\int \mathcal{L}_\phi g d\nu_\phi = \int \lambda_\phi g d\nu_\phi$, para todo $g \in E$;
2. $\mathcal{L}_\phi h_\phi = \lambda_\phi h_\phi$ e $\int h_\phi d\nu_\phi = 1$;
3. existem $k \geq 0$ e $\{a_n\}_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ não dependendo de ϕ tal que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ e para todo $\varphi \in E$ temos que $\left|\left|\frac{\mathcal{L}_\phi^n \varphi}{\lambda_\phi^n} - h_\phi \int \varphi d\nu_\phi\right|\right|_\infty \leq k a_n ||\varphi||$;
4. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{||\mathcal{L}_\phi^n 1||}{\lambda_\phi^n} \leq k$.

Teorema 2.25. *Seja $\phi_0 \in \mathcal{W}$ tal que $\phi \mapsto h_\phi \in C_b^0(M, \mathbb{R})$ é contínua em ϕ_0 e $\inf h_{\phi_0} > 0$. Então:*

$$\mathcal{W} \ni \phi \mapsto \lambda_\phi$$

é diferenciável em uma vizinhança de ϕ_0. Ademais,

$$D_\phi \lambda_{\phi\,|\phi_0} \odot H = \lambda_{\phi_0} \cdot \int h_{\phi_0} \cdot H \, d\nu_{\phi_0}.$$

Observação 2.26. *Se assumirmos que $\phi \mapsto \lambda_\phi$ é contínuo, então usando o item 3. e continuidade do operador de transferência em relação ao potencial, obtemos a continuidade de $\phi \mapsto h_\phi \in C_b^0(M, \mathbb{R})$ e a hipótese 4. presente no teorema anterior.*

Usamos uma propriedade fundamental: mostraremos que $(\tilde{\mathcal{L}}_\phi^n)^*\xi$ converge para ν_ϕ, com velocidade a_n, para toda probabilidade $\xi \in \mathcal{M}(M)$. Mais precisamente,

Proposição 2.27. *Para todo $\varphi \in E$ e toda probabilidade $\xi \in \mathcal{M}(M)$ temos que*

$$\left|\int \varphi \, d(\tilde{\mathcal{L}}_\phi^n)^*\xi - \int h_\phi \, d\xi \int \varphi \, d\nu_\phi\right| \leq k a_n ||\varphi||.$$

Prova. De fato,

$$\begin{aligned}
\left|\int \varphi \, d(\tilde{\mathcal{L}}_\phi^n)^*\xi - \int h_\phi d\xi \int \varphi d\nu_\phi\right| &\leq \int \left|\tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(\varphi) - h_\phi \int \varphi d\nu_\phi\right| d\xi \\
&\leq \left|\left|\tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(\varphi) - h_\phi \int \varphi d\nu_\phi\right|\right|_\infty \\
&\leq k a_n ||\varphi||.
\end{aligned}$$

■

Prova do Teorema 2.25. Usando que $\tilde{\mathcal{L}}_\phi^n 1 \to h_\phi$ uniformemente em relação a $\phi \in \mathcal{W}$, $\inf h_{\phi_0} > 0$ e a continuidade de $\phi \mapsto h_\phi$, existirá $K > 0$ e uma vizinhança W de ϕ_0 tal que $K^{-1} \leq \int \tilde{\mathcal{L}}_\phi^n 1 d\nu_{\phi_0} \leq K$ para todo $\phi \in W$ e $n \in \mathbb{N}$. Como consequência, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int \mathcal{L}_\phi^n 1 \; d\nu_{\phi_0} = \log \lambda_\phi$ uniformemente com respeito a $\phi \in W$. Logo, consideremos a sequência de funções $F_n : W \to \mathbb{R}$ dadas por

$$F_n(\phi) = \frac{1}{n} \log \int \mathcal{L}_\phi^n 1 \, d\nu_{\phi_0}.$$

Elas estão bem definidos e convergem para $\log \lambda_\phi$. Provaremos que as derivadas de F_n convergem uniformemente quando n tende ao infinito. Inicialmente pode-se escrever

$$D_\phi F_n(\phi) \odot H = \frac{\int D_\phi \mathcal{L}_\phi^n(1)_{|\phi} \odot H d\nu_{\phi_0}}{n \cdot \int \mathcal{L}_\phi^n(1) d\nu_{\phi_0}} = \frac{\int \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_\phi^i(\mathcal{L}_\phi^{n-i}(1) \cdot H) \, d\nu_\phi}{n \cdot \int \mathcal{L}_\phi^n(1) d\nu_{\phi_0}} = \frac{A_n(\phi) \odot H}{\int \tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(1) d\nu_{\phi_0}}, \tag{2.4}$$

onde A_n é definido por

$$A_n(\phi) \odot H := \frac{1}{n} \int \sum_{i=1}^n \tilde{\mathcal{L}}_\phi^i(\tilde{\mathcal{L}}_\phi^{n-i}(1) \cdot H) \; d\nu_{\phi_0}.$$

Fazendo uso da proposição 2.27 temos

$$|A_n(\phi) \odot H - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int \tilde{\mathcal{L}}_\phi^i(1) \cdot H d\nu_\phi \cdot \int h_\phi d\nu_{\phi_0}| \leq$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \int \tilde{\mathcal{L}}_\phi^{n-i}(1) \cdot H \; d(\tilde{\mathcal{L}}_\phi^{*i} \nu_{\phi_0}) - \int \tilde{\mathcal{L}}_\phi^{n-i}(1) \cdot H \; d\nu_\phi \cdot \int h_\phi d\nu_{\phi_0} \right| \leq$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k a_i \cdot ||\tilde{\mathcal{L}}_\phi^{n-i}(1) \cdot H|| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k a_i \cdot k \cdot ||H||,$$

que converge uniformemente a 0 com respeito a ϕ e $H \in E$, com $||H|| = 1$. Ademais,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int \tilde{\mathcal{L}}_\phi^i(1) \cdot H d\nu_\phi \cdot \int h_\phi d\nu_{\phi_0} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int h_\phi \cdot H d\nu_\phi \cdot \int h_\phi d\nu_{\phi_0}$$

e a convergência é uniforme com respeito a ϕ e H, com $||H|| = 1$. Como $\int \tilde{\mathcal{L}}_\phi^n 1 \, d\nu_{\phi_0}$ converge a $\int h_\phi d\nu_{\phi_0}$ uniformemente com respeito a ϕ, nós obtemos que

$$D_\phi F_n(\phi) \odot H = \frac{A_n(\phi) \cdot H}{\int \tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(1) d\nu_{\phi_0}} \to \int h_\phi \cdot H \; d\nu_\phi,$$

onde a convergência é uniforme com respeito a ϕ e $H \in E$ satisfazendo $||H|| = 1$. Logo, $e^{F_n(\phi)}$ é diferenciável e converge uniformemente a $\lambda_{f,\phi}$. Então, decorre da regra da cadeia que

$$D_\phi \lambda_{\phi \, |\phi_0} \odot H = \lambda_{\phi_0} \cdot \int h_{\phi_0} \cdot H \; d\nu_{\phi_0}.$$

Isto finaliza a prova da proposição. ■

2.2.2 Diferenciabilidade do raio espectral com respeito à dinâmica

Agora nós iremos focar sobre a diferenciabilidade com respeito a f.

Iremos supor que M é uma variedade compacta conexa e r é um inteiro maior que 1. Fixemos $\phi \in C^r(M, \mathbb{R})$, seja $\mathcal{F}^r \subset \mathcal{C}^r(M, M)$ um aberto de dinâmicas que são difeomorfismos locais $\mathcal{C}^r$ de modo que para cada $f \in \mathcal{F}^r$ suporemos que existem $\lambda_f > 0$, ν_f probabilidade e $h_f \in C^r(M, \mathbb{R})$ tais que:

1. $\displaystyle\int \mathcal{L}_f g d\nu_f = \int \lambda_f g d\nu_f$, para todo $g \in C^r(M, \mathbb{R})$;
2. $\mathcal{L}_f h_f = \lambda_f h_f$, $\int h_f d\nu_f = 1$;
3. existem $k \geq 0$, $\{a_n\}_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, com $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ e $k, \{a_n\}_n$ não dependendo de f, além de $1 \leq s < r$ tal que: para todo $\varphi \in \mathcal{C}^{r-1}(M, \mathbb{R})$ temos que $\displaystyle\Big|\Big|\frac{\mathcal{L}_f^n \varphi}{\lambda_f^n} - h_f \int \varphi d\nu_f\Big|\Big|_\infty \leq k a_n ||\varphi||_s$ e $\displaystyle\Big|\Big|\frac{\mathcal{L}_f^n 1}{\lambda_f^n}\Big|\Big|_{s+1} \leq k,.$

Teorema 2.28. *Se $h_{f_0} > 0$ então a aplicação $\mathcal{F}^r \ni f \mapsto \lambda_f$ é diferenciável em uma vizinhança de f_0. Ademais, dado $f_0 \in \mathcal{F}^r$ e $H \in \Gamma^r_{f_0}$ temos:*

$$\begin{aligned} D_f \lambda_{f,\phi\,|f_0,\phi} \odot H = & \sum_{j=1}^{\deg(f_0)} \int e^{\phi_0(f_{0,j}(\cdot))} D h_{f_0,\phi_0|f_{0,j}(\cdot)}[(T_{j|f_0} \odot H)(\cdot)]\, d\nu_{f_0,\phi_0} \\ & + \sum_{j=1}^{deg(f_0)} \int e^{\phi(f_{0,j}(\cdot))} h_{f_0,\phi}(f_{0,j}(\cdot)) D\phi_{|f_{0,j}(\cdot)}[(T_{j|f_0} \odot H)(f_{0,j}(\cdot))] d\nu_{f_0}. \end{aligned}$$

Antes de provar o teorema precisaremos de uma proposição análoga a 2.27.

Proposição 2.29. *Para todo $\varphi \in \mathcal{C}^{r-1}(M, \mathbb{R})$ e toda probabilidade $\xi \in \mathcal{M}(M)$ vale que*

$$\left| \int \varphi\, d(\tilde{\mathcal{L}}_f^n)^* \xi - \int h_f\, d\xi \int \varphi\, d\nu_f \right| \leq k a_n ||\varphi||_s.$$

Prova. De fato,

$$\begin{aligned} \left| \int \varphi\, d(\tilde{\mathcal{L}}_f^n)^* \xi - \int h_f d\xi \int \varphi d\nu_f \right| & \leq \int \left| \tilde{\mathcal{L}}_f^n(\varphi) - h_f \int \varphi d\nu_f \right| d\xi \\ & \leq \Big|\Big| \tilde{\mathcal{L}}_f^n(\varphi) - h_f \int \varphi d\nu_f \Big|\Big|_\infty \leq k a_n ||\varphi||_s. \end{aligned}$$

■

O próximo resultado nos dá algumas propriedades envolvendo a derivada do operador de transferência. Ele também nos será útil na próxima seção sobre diferenciabilidade do estado de equilíbrio.

Proposição 2.30. *Seja* $r \geq 1$ *e* $\phi \in C^r(M, \mathbb{R})$ *fixado. Dado* $H \in \Gamma_f^r$, g, g_1 *e* $g_2 \in C^r(M, \mathbb{R})$ *e* $t \in \mathbb{R}$ *temos*

i) $\big(D_f \mathcal{L}_{f,\phi}(g)_{|f_0} \odot H\big)(x) = \sum_{i=1}^{deg(f_0)} e^{\phi_0(f_i(x))} \cdot Dg_{|f_i(x)} \cdot [(T_{i|f_0} \odot H)(x)] + \sum_{i=1}^{deg(f_0)} e^{\phi_0(f_i(x))} \cdot g(f_i(x)) \cdot D\phi_{0|f_i(x)} \cdot [(T_{i|f_0} \odot H)((x))]$;

ii) $D_f(\mathcal{L}^n_{f,\phi}(g))_{|f_0} \odot H = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}^{i-1}_{f_0,\phi}(D_f \mathcal{L}_{f,\phi}(\mathcal{L}^{n-i}_{f_0,\phi}(g))_{|f_0} \odot H)$;

iii) Dado $0 \leq s < r$, *existe* $C \geq 0$, *que só depende de* s, *tal que*

$$||D_f \mathcal{L}_{f,\phi}(g)_{|f_0} \odot H||_s \leq C \cdot deg(f) \max_{i=1,\ldots,deg(f)} \{||T_{i|f}||_s\} ||g||_{s+1} \, ||H||_s;$$

iv) $D_f \mathcal{L}^n_{f,\phi}(g_1 + tg_2)_{|f_0} \odot H = D_f \mathcal{L}^n_{f,\phi}(g_1)_{|f_0} \odot H + t D_f \mathcal{L}^n_{f,\phi}(g_2)_{|f_0} \odot H$;

v) se $\phi \equiv 0$, *então* $D_f \mathcal{L}^n_f(1)_{|f_0} \odot H \equiv 0$.

Prova. Para simplificar a notação, façamos $\mathcal{L}_f = \mathcal{L}_{f,\phi}$. Então i) decorre da fórmula explícita da derivada presente na prova do Teorema 2.6. Já ii) é obtido por indução. Suponhamos que a fórmula é válida para n, então usando a hipótese de indução

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{n+1}_{f_0+H}(g) &= \mathcal{L}_{f_0}(\mathcal{L}^n_{f_0+H}(g)) + D_f \mathcal{L}_{f|f_0}(\mathcal{L}^n_{f_0+H}(g)) \odot H + o(H) \\
&= \mathcal{L}_{f_0}\Big(\mathcal{L}^n_{f_0}(g) + \sum_{i=1}^n \mathcal{L}^{i-1}_{f_0}(D_f \mathcal{L}_f(\mathcal{L}^{n-i}_{f_0}(g))_{|f_0} \odot H) + \hat{o}(H)\Big) \\
&+ D_f \mathcal{L}_{f|f_0}(\mathcal{L}^n_{f_0+H}(g)) \odot H + o(H) \\
&= \mathcal{L}_{f_0}\Big(\mathcal{L}^n_{f_0}(g) + \sum_{i=1}^n \mathcal{L}^{i-1}_{f_0}(D_f \mathcal{L}_f(\mathcal{L}^{n-i}_{f_0}(g))_{|f_0} \odot H) + \hat{o}(H)\Big) \\
&+ D_f \mathcal{L}_f|_{f_0}(\mathcal{L}^n_{f_0}(g)) \odot H + D_f \mathcal{L}_f|_{f_0}(D_f(\mathcal{L}^n_f(g))_{|f_0} \odot H + o(H)) \odot H + \hat{o}(H) \\
&= \mathcal{L}_{f_0}(\mathcal{L}^n_{f_0}(g) + \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{L}^{i-1}_{f_0}(D_f \mathcal{L}_f(\mathcal{L}^{(n+1)-i}_{f_0}(g))_{|f_0} \odot H) + \tilde{o}(H),
\end{aligned}$$

onde $o(H), \hat{o}(H), \tilde{o}(H)$ são termos que convergem a 0 mais rápido que $||H||_r$, e de maneira uniforme para $||g||_r = 1$. Isto finaliza a prova de ii). A parte iii) é obtida por cálculo direto, usando a fórmula dada pelo item i). Já a parte iv) decorre usando que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n_{f+H}(g_1+tg_2) &= \mathcal{L}^n_{f+H}(g_1)+t\mathcal{L}^n_{f+H}(g_2)\\ &= \mathcal{L}^n_f(g_1)+t\mathcal{L}^n_f(g_2)+D_f\mathcal{L}^n_f(g_1)\odot H\\ &+ tD_f\mathcal{L}^n_f(g_2)\odot H+r_1(H)+r_2(H)\end{aligned}$$

para $r_1(H), r_2(H)$ tendendo a 0 quando H converge a 0. Finalmente, a parte v) decorre imediatamente do fato de $\mathcal{L}^n_f(1)\equiv \deg(f)^n$ e que $\deg(f)$ é localmente constante. Isto finaliza a prova. ■

Prova do teorema 2.28. Usando que $\tilde{\mathcal{L}}^n_f 1\to h_f$ uniformemente em relação a $f\in\mathcal{F}^r$, $\inf h_{f_0}>0$ e o teorema 1.12, existirá $K>0$ e uma vizinhança W de f_0 tal que $K^{-1}\le \int\tilde{\mathcal{L}}^n_f 1 d\nu_f\le K$ para todo $f\in W$ e $n\in\mathbb{N}$. Como consequência, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\int\mathcal{L}^n_f 1\, d\nu_{f_0}=\log\lambda_f$ uniformemente com respeito a $f\in W$. Logo, nós consideraremos a família de aplicações $P_n: W\to\mathbb{R}$ dada por

$$P_n(f)=\frac{1}{n}\log\int\mathcal{L}^n_f 1\, d\nu_{f_0},$$

que estão bem definidas e convergem à constante $\log\lambda_f$, e provaremos que as derivadas de P_n convergem uniformemente quando n tende ao infinito. Pela regra da cadeia, a derivada de P_n com respeito a f é dada por

$$D_fP_n(f)=\frac{dP_n}{df}(f)=\frac{\nu_{f_0}((\frac{d}{df}\mathcal{L}^n_f(1)(\cdot))}{n\,\nu_{f_0}(\mathcal{L}^n_f(1)(\cdot))}.$$

Isto implica que

$$\begin{aligned}D_fP_n(\hat f)\odot H &= \frac{\int D_f\mathcal{L}^n_f(1)_{|\hat f}\odot H d\nu_{f_0}}{n\cdot\int\mathcal{L}^n_{\hat f}(1)d\nu_{f_0}}\\ &= \frac{\int\sum_{i=1}^n\mathcal{L}^{i-1}_{\hat f}(D_f\mathcal{L}_f(\mathcal{L}^{n-i}_{\hat f}(1))_{|\hat f}\odot H)d\nu_{f_0}}{n\cdot\int\mathcal{L}^n_{\hat f}(1)d\nu_{f_0}}.\end{aligned}$$

A última expressão pode ser escrita como a soma

$$\frac{\int\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{\deg(\hat f)}e^{\phi(\hat f_j(\cdot))}\cdot D\mathcal{L}^{n-i}_{\hat f}(1)_{|\hat f_j(\cdot)}\odot[(T_{j|\hat f}\odot H)(\cdot)])\,d\nu_{f_0}}{n\cdot\int\mathcal{L}^n_{\hat f}(1)d\nu_{f_0}}$$

$$+\frac{\int\sum_{i=1}^n\mathcal{L}^{i-1}_{\hat f}(\sum_{j=1}^{deg(\hat f)}e^{\phi(\hat f_j(\cdot))}\cdot\mathcal{L}^{n-i}_{\hat f}(1)(\hat f_j(\cdot))\cdot D\phi_{|\hat f_j(\cdot)}\odot[(T_{j|\hat f}\odot H)(\hat f_j(\cdot))])\,d\nu_{f_0}}{n\cdot\int\mathcal{L}^n_{\hat f}(1)d\nu_{f_0}}. \quad (2.5)$$

Para analisar as expressões anteriores nós consideraremos as duas somas abaixo

$$B_n(\hat f)\odot H=\frac{1}{n}\int\sum_{i=1}^n\tilde{\mathcal{L}}^{i-1}_{\hat f}(\sum_{j=1}^{\deg(\hat f)}e^{\phi(\hat f_j(\cdot))}\cdot D\tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_{\hat f}(1)_{|\hat f_j(\cdot)}\odot[(T_{j|\hat f}\odot H)(\cdot)])\,d\nu_{f_0}$$

e

$$C_n(\hat{f})\odot H=\frac{1}{n}\int\sum_{i=1}^{n}\tilde{\mathcal{L}}_{\hat{f}}^{i-1}\Big(\sum_{j=1}^{\deg(\hat{f})}e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))}\cdot\tilde{\mathcal{L}}_{\hat{f}}^{n-i}(1)(\hat{f}_j(\cdot))\cdot D\phi_{|\hat{f}_j(\cdot)}\odot[(T_{j|\hat{f}}\odot H)(\hat{f}_j(\cdot))]\Big)d\nu_{f_0}.$$

Para estabelecer nosso resultado nós iremos usar as seguintes afirmações:

Afirmação 1: $B_n(\hat{f})\odot H$ é uniformemente convergente sobre $(\hat{f},\phi)$ e $H\in\Gamma^r_{\hat{f}}$, com $||H||_r\leq 1$, para a série $\int\sum_{j=1}^{\deg(\hat{f})}e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))}\cdot Dh_{\hat{f},\hat{\phi}|\hat{f}_j(\cdot)}\odot[(T_{j|\hat{f}}\odot H_1)(\cdot)]d\nu_{\hat{f}}\cdot\int h_{\hat{f}}d\nu_{f_0}$.

Afirmação 2: $C_n(\hat{f})\cdot H$ é uniformemente convergente sobre $(\hat{f},\phi)$ e $H\in\Gamma^r_{\hat{f}}$, com $||H||_r\leq 1$, para a expressão

$$\int\sum_{j=1}^{\deg(\hat{f})}e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))}\cdot h_{\hat{f},\phi}(\hat{f}_j(\cdot))\cdot D\phi_{|\hat{f}_j(\cdot)}\odot[(T_{j|\hat{f}}\odot H)(\hat{f}_j(\cdot))]\,d\nu_{\hat{f}}\cdot\int h_{\hat{f},\phi}d\nu_{f_0}.$$

Note que nosso resultado irá ser uma consequência direta das afirmações anteriores. De fato, utilizando (2.5) temos que

$$DP_n(\hat{f})\odot(H)=\frac{B_n(\hat{f},\hat{\phi})\odot H}{\lambda_{\hat{f}}\int\tilde{\mathcal{L}}^n_{\hat{f}}(1)d\nu_{f_0}}+\frac{C_n(\hat{f},\hat{\phi})\odot H}{\lambda_{\hat{f}}\int\tilde{\mathcal{L}}^n_{\hat{f}}(1)d\nu_{f_0}}.$$

Ademais, utilizando que $\int\tilde{\mathcal{L}}^n_{\hat{f}}(1)d\nu_{f_0}$ converge para $\int h_{\hat{f},\phi}d\nu_{f_0}$ e as uniformidades dos limites dadas pelas *Afirmações 1 e 2* nós obtemos que $DP_n(\hat{f})\odot H$ é uniformemente convergente sobre $(\hat{f},\phi)$ e $H\in\Gamma^r_{\hat{f}}$, tal que $||H||_r=1$, para a soma

$$\begin{aligned}&\lambda^{-1}_{\hat{f},\phi}\int\sum_{j=1}^{\deg(\hat{f})}e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))}\cdot Dh_{\hat{f}\phi|\hat{f}_j(\cdot)}\odot[(T_{j|\hat{f}}\odot H_1)(\cdot)]\,d\nu_{\hat{f}}\\&+\lambda^{-1}_{\hat{f},\phi}\int\sum_{j=1}^{\deg(\hat{f})}e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))}\cdot h_{\hat{f},\phi}(\hat{f}_j(\cdot))\cdot D\phi_{|\hat{f}_j(\cdot)}\odot[(T_{j|\hat{f}}\odot H)(\hat{f}_j(\cdot))]\,d\nu_{\hat{f}}.\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}D_f\lambda_{f,\phi\,|f_0,\phi}\odot H=&\sum_{j=1}^{\deg(f_0)}\int e^{\phi_0(f_{0,j}(\cdot))}Dh_{f_0,\phi_0|f_{0,j}(\cdot)}\odot[(T_{j|f_0}\odot H)(\cdot)]\,d\nu_{f_0,\phi_0}\\&+\sum_{j=1}^{deg(f_0)}\int e^{\phi(f_{0,j}(\cdot))}h_{f_0,\phi}(f_{0,j}(\cdot))D\phi_{|f_{0,j}(\cdot)}\odot[(T_{j|f_0}\odot H)(f_{0,j}(\cdot))]d\nu_{f_0}.\end{aligned}$$

Decorrendo então o teorema. Assim, basta provarmos as afirmações. Primeiro provaremos a *Afirmação 1*. Observe que a seguinte convergência uniforme vale

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int\sum_{j=1}^{\deg(\hat{f})}e^{\phi(\hat{f}_j(\cdot))}\cdot D\tilde{\mathcal{L}}^i_{\hat{f}}(1)_{|\hat{f}_j(\cdot)}\odot[(T_{j|\hat{f}}\odot H)(\cdot)]\,d\nu_{\hat{f}}\cdot\int h_{\hat{f},\phi}d\nu_{f_0}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \int \sum_{j=1}^{\deg(\hat f)} e^{\phi(\hat f_j(\cdot))} \cdot Dh_{\hat f,\phi|\hat f_j(\cdot)} \odot [(T_{j|\hat f} \odot H)(\cdot)]d\nu_{\hat f,\hat\phi} \cdot \int h_{\hat f,\phi} d\nu_{f_0},$$

Ademais, também temos que

$$\Big| B_n(\hat f,\hat\phi) \odot H - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \int \sum_{j=1}^{\deg(\hat f)} e^{\phi(\hat f_j(\cdot))} D\tilde{\mathcal{L}}^i_{\hat f,\phi}(1)_{|\hat f_j(\cdot)} \odot [(T_{j|\hat f} \odot H)(\cdot)]\, d\nu_{\hat f} \cdot \int h_{\hat f} d\nu_{f_0} \Big|$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Big| \int \sum_{j=1}^{\deg(\hat f)} e^{\phi(\hat f_j(\cdot))} D\tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_{\hat f}(1)_{|\hat f_j(\cdot)} \odot [(T_{j|\hat f} \odot H)(\cdot)]\, d(\tilde{\mathcal{L}}^{*i-1}_{\hat f}\nu_{f_0})$$

$$- \int \sum_{j=1}^{\deg(\hat f)} e^{\phi(\hat f_j(\cdot))} D\tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_{\hat f}(1)_{|\hat f_j(\cdot)} \odot [(T_{j|\hat f} \odot H)(\cdot)]\, d\nu_{\hat f} \cdot \int h_{\hat f} d\nu_{f_0} \Big|$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k a_{i-1} \deg(\hat f) ||e^\phi||_s \max_{1\leq j\leq \deg(\hat f)} \{||(T_{j|\hat f} \odot H)||_s\}\, ||\tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_{\hat f}(1)||_{s+1}$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k a_{i-1} \deg(\hat f) ||e^\phi||_s \max_{1\leq j\leq \deg(\hat f)} \{||(T_{j|\hat f} \odot H)||_s\} k$$

que é uniformemente convergente para 0 com respeito a $\hat f$ e todo $H \in \Gamma^r_{\hat f}$ com $||H||_r \leq 1$. Isto prova a *Afirmação 1*. Agora nós provaremos a *Afirmação 2*.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \int \sum_{j=1}^{deg(\hat f)} e^{\phi(\hat f_j(\cdot))} \tilde{\mathcal{L}}^i_{\hat f}(1)(\hat f_j(\cdot)) D\phi_{|\hat f_j(\cdot)} \odot [(T_{j|\hat f} \odot H)(\hat f_j(\cdot))] d\nu_{\hat f,\phi} \cdot \int h_{\hat f} d\nu_{f_0}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int \sum_{j=1}^{deg(\hat f)} e^{\phi(\hat f_j(\cdot))} h_{\hat f}(\hat f_j(\cdot)) D\phi_{|\hat f_j(\cdot)} \odot [(T_{j|\hat f} \odot H)(\hat f_j(\cdot))] d\nu_{\hat f} \cdot \int h_{\hat f} d\nu_{f_0},$$

uniformemente com respeito a $\hat f$ e H. Nós temos que

$$\Big| C_n(\hat f) \odot H - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \int \sum_{j=1}^{\deg(\hat f)} e^{\phi(\hat f_j(\cdot))} \tilde{\mathcal{L}}^i_{\hat f}(1)(\hat f_j(\cdot)) D\phi_{|\hat f_j(\cdot)} \odot [(T_{j|\hat f} \odot H)(\hat f_j(\cdot))] d\nu_{\hat f} \int h_{\hat f} d\nu_{f_0} \Big|$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Big| \int \sum_{j=1}^{deg(\hat f)} e^{\phi(\hat f_j(\cdot))} \tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_{\hat f}(1)(\hat f_j(\cdot)) D\phi_{|\hat f_j(\cdot)} \odot [(T_{j|\hat f} \odot H)(\hat f_j(\cdot))]\, d(\tilde{\mathcal{L}}^{*i-1}_{\hat f}\nu_{f_0})$$

$$- \int \sum_{j=1}^{\deg(\hat f)} e^{\phi(\hat f_j(\cdot))} \tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_{\hat f}(1)(\hat f_j(\cdot)) D\phi_{|\hat f_j(\cdot)} \odot [(T_{j|\hat f} \odot H)(\hat f_j(\cdot))]\, d\nu_{\hat f,\phi} \cdot \int h_{\hat f} d\nu_{f_0} \Big|$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k a_{i-1} || \sum_{j=1}^{\deg(\hat f)} e^{\phi(\hat f_j(\cdot))} \tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_{\hat f}(1)(\hat f_j(\cdot)) \cdot D\phi_{|\hat f_j(\cdot)} \odot [(T_{j|\hat f} \odot H)(\hat f_j(\cdot))]||_s$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} C k a_{i-1} \deg(\hat f) \cdot ||e^\phi||_s \cdot ||\phi||_{s+1} \cdot \max_{j=1,\ldots,deg\hat f} \{||T_{j|\hat f} \odot H||_s\} \cdot ||\tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_{\hat f}(1)||_s$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} C k a_{i-1} \deg(\hat f) \cdot ||e^\phi||_s \cdot ||\phi||_{s+1} \cdot \max_{j=1,\ldots,deg\hat f} \{||T_{j|\hat f} \odot H||_s\} \cdot k$$

onde C é uma constante. Desde que a expressão anterior é uniformemente convergente a 0 com respeito a $\hat{f}$ e $H \in \Gamma^r_{\hat{f}}$, tal que $||H||_r \leq 1$, isto prova a *Afirmação 2* e finaliza a prova do teorema. ■

2.2.3 Diferenciabilidade de $\mu_{f,\phi}$ com respeito à dinâmica

Iremos supor que estamos nas mesmas hipóteses da seção anterior sobre diferenciabilidade do raio espectral. Porém, adicionalmente iremos supor que o potencial fixado ϕ será identicamente nulo e que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i < \infty$. Além disso, teremos que $\lambda_f = \deg(f)$ e $1 = h_f$ para todo $f \in \mathcal{F}^r$.

Também suporemos adicionalmente que:

- para todo $\varphi \in \mathcal{C}^r(M, \mathbb{R})$ temos que $||\frac{\mathcal{L}^n_f \varphi}{\lambda^n_f} - h_f \int \varphi d\nu_f||_{s+1} \leq k a_n ||\varphi||_r$.

Denotaremos $g - \int g d\nu_f$ por $P_{0,f}(g)$.

Teorema 2.31. *A aplicação $\mathcal{F}^r \ni f \mapsto \mu_f \in (\mathcal{C}^r(M, \mathbb{R}))^*$ é C^1 e para todo $g \in C^r(M, \mathbb{R})$ sua derivada atuando em $H \in \Gamma^r_{f_0}$ é dada por*

$$D_f \mu_f(g)_{|f_0} \odot H = \sum_{i=0}^{\infty} \int D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}^i_{f_0}(P_{0,f_0}(g))) \odot H \, d\mu_{f_0}.$$

Prova. Seja $g \in C^r(M, \mathbb{R})$ e $f_0 \in \mathcal{F}^r$ fixado. Definamos uma sequência de funções $F_n : \mathcal{F}^r \to \mathbb{R}$ dada por $F_n(g, f) = \int \tilde{\mathcal{L}}^n_f(g) \, d\mu_{f_0}$, note que $F_n(g, f)$ converge para $\int g \, d\mu_f$ e a convergência é uniforme em relação a f. Ademais, se $H \in \Gamma^r_f$ então

$$\begin{aligned} D_f F_n(g, f) \odot H &= \sum_{i=1}^{n-1} \int \tilde{\mathcal{L}}^{i-1}_f (D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_f(g)) \odot H) \, d\mu_{f_0} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \int \tilde{\mathcal{L}}^{i-1}_f (D_f \tilde{\mathcal{L}}_f \left(\int g \, d\mu_f + \tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_f(P_{0,f}(g)) \right) \odot H) \, d\mu_{f_0} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \int \tilde{\mathcal{L}}^{i-1}_f (D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_f(P_{0,f}(g))) \odot H) \, d\mu_{f_0}. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $\mathcal{L}^*_f \mu_f = \mu_f$ então

$$\sum_{i=1}^{n-1} \int D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}^{n-i}_f(P_{0,f}(g)) \odot H \, d\mu_f = \sum_{i=0}^{n-1} \int D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}^{i}_f(P_{0,f}(g)) \odot H \, d\mu_f$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} |\int D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^i(P_{0,f}(g))) \ \odot H \ d\mu_f| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} ||D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^i(P_{0,f}(g)))_f \ \odot H||_\infty \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} b \max_{i=1,\dots,\deg(f)} \{||T_{i,f}||\} \deg(f) ||\tilde{\mathcal{L}}_f^i(P_{0,f}(g))||_1 \cdot ||H||_1 \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} b \max_{i=1,\dots,\deg(f)} \{||T_{i,f}||\} k a_i \cdot ||g||_r \cdot ||H||_1,
\end{aligned}$$

que é limitado superiormente por $b \max_{i=1,\dots,\deg(f)} \{||T_{i,f}||\} k a_i \cdot ||g||_r \cdot ||H||_1 \sum_{n=0}^\infty a_n < \infty$. Ademais, nós obtemos que a estimativa anterior é uniforme com respeito a f e para $||g||_r = ||H||_r = 1$. Isto implica que o limite

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \int D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^{n-i}(P_{0,f}(g))) \odot H \ d\mu_f,$$

irá existir e é uniforme com respeito a f e para $||g||_r = ||H||_r = 1$. Continuando, nós estimamos

$$\begin{aligned}
&|D_f F_n(g,f) \odot H - \sum_{i=1}^{n-1} \int D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^{n-i}(P_{0,f}(g))) \odot H \, d\mu_f| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n-1} \left[\int \tilde{\mathcal{L}}_f^{i-1}(D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^{n-i}(P_{0,f}(g))) \odot H) \, d\mu_{f_0} - \int D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^{n-i}(P_{0,f}(g))) \cdot H \, d\mu_f \right] \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n-1} \left[\int D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^{n-i}(P_{0,f}(g))) \odot H \, d\tilde{\mathcal{L}}_f^{*i-1}(\mu_{f_0}) - \int D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^{n-i}(P_{0,f}(g))) \odot H \, d\mu_f \right] \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} k a_{i-1} ||D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^{n-i}(P_{0,f}(g))) \odot H||_s \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} C k a_{i-1} ||e^\phi||_{s+1} \cdot b \cdot \deg(f) \max_{i=1,\dots,\deg(f)} \{||T_{i,f}||_s\} \cdot ||\tilde{\mathcal{L}}_f^{n-i}(P_{0,f}(g))||_{s+1} \cdot ||H||_s \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} C k a_{i-1} ||e^\phi||_{s+1} \cdot b \cdot \deg(f) \max_{i=1,\dots,\deg(f)} \{||T_{i,f}||_s\} \cdot k a_{n-i} \cdot ||H||_s \cdot ||g||_r
\end{aligned}$$

que converge a 0. Então $\lim_{n\to+\infty} D_f F_n(g,f) \odot H = \sum_{i=1}^\infty \int D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_f^{n-i}(P_{0,f}(g))) \odot H \, d\mu_f$ uniformemente com respeito a dinâmica f e a $||g||_r = ||H||_r = 1$. Assim nós temos que a sequência $F_n(g,f)$ converge uniformemente para $\int g \, d\mu_f$ e a sequência $D_f F_n$ é também uniformemente convergente para o o funcional linear e contínuo definido acima. Nós temos que

$$D_f \mu_f(g)_{|f_0} \odot H = \sum_{i=0}^\infty \int D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^i(P_{0,f_0}(g))) \odot H d\mu_{f_0}.$$

Isto finaliza a prova do teorema. ■

Decorre diretamente do teorema anterior que $\mathcal{F}^r \ni f \to g_f \in \mathcal{F}^r$ é diferenciável em f_0 então a aplicação $\mathcal{F}^r \ni f \to \int g_f d\mu_f$ é diferenciável em f_0.

2.2.4 Diferenciabilidade de quantidades termodinâmicas

Ao longo dessa seção iremos sempre supor que estamos no mesmo contexto da seção anterior, sobre diferenciabilidade de μ_f.

Expoentes de Lyapunov

Teremos que cada μ_f é $f-$invariante e pela mesma prova da proposição 1.10 teremos que μ_f é $f-$ergódica. Logo para cada $f \in \mathcal{F}^r$ podemos associar os expoentes Lyapunov de μ_f. Sabe-se que $\int \log ||Df(x)|| d\mu_f$ e $\int \log ||Df(x)^{-1}||^{-1} d\mu_f$ são os expoentes de Lyapunov extremais, além disso $\int \log |\det Df(x)| d\mu_f$ é a soma dos expoentes de Lyapunov (para detalhes, veja por exemplo [BP01]). Como decorrência da diferenciabilidade de μ_f como funcional teremos que:

Teorema 2.32. *Se $\mathcal{F}^r \ni f \mapsto g_f \in C^r(M, \mathbb{R})$ é diferenciável em f_0 então a aplicação $\mathcal{F}^r \ni f \mapsto \int g_f d\mu_f$ é diferenciável em f_0. Em particular, se $r \geq 3$ temos que*

$$\mathcal{F}^r \ni f \mapsto \int \log ||Df(x)||\, d\mu_f \quad e \quad \mathcal{F}^r \ni f \mapsto \int \log ||Df(x)^{-1}||^{-1}\, d\mu_f$$

e

$$\mathcal{F}^r \ni f \mapsto \int \log |\det Df(x)|\, d\mu_f$$

são C^1.

Vale ressaltar que em geral o estudo da continuidade dos expoentes de Lyapunov já é um trabalho bastante relevante.

Estabilidade de leis estatísticas

Outra aplicação dos nossos resultados é estabilidade forte das leis estatísticas.

Dados $\varphi, \psi : M \to \mathbb{R}$, a função $C_{\varphi,\psi}(f, n) := \int \varphi \circ f^n \psi d\mu_f - \int \varphi d\mu_f \int \psi d\mu_f$ é chamada de correlação de φ e ψ, essa quantidade mede a perda ou não de "memória"do sistema quando n cresce. Decorre da prova da proposição 1.10 que $C_{\varphi,\psi}(f, n)$ converge a 0 quando $n \to +\infty$ com taxa a_n, como a_n é somável sabemos pela prova da proposição 1.10 que vale o Teorema Central do Limite em $C^r(M, \mathbb{R})$. Para provar que essas quantidades estatísticas são estáveis, nosso primeiro passo será provar que função de correlação é diferenciável com respeito a f e sua derivada converge a 0 na topologia C^1. Mais precisamente,

Corolário 2.33. *Dados $\varphi, \psi \in C^r(M, \mathbb{R})$. A aplicação $\mathcal{F}^r \ni f \mapsto C_{\varphi,\psi}(f,n)$ é C^1, além disso, $D_f C_{\varphi,\psi}(f,0,n)$ converge a 0 quando $n \to +\infty$ e essa convergência pode ser tomada uniforme numa vizinhança de f, de φ e de ψ.*

Prova. Lembremos que podemos escrever

$$C_{\varphi,\psi}(f,n) = \int \varphi\Big[\tilde{\mathcal{L}}_f^n(\psi) - \int \psi d\mu_f\Big] d\mu_f.$$

Logo $C_{\varphi,\psi}(f,n)$ é diferenciável com respeito a f, além disso, dado $f_0 \in \mathcal{F}^r$ e $H \in \Gamma^r_{f_0}$ temos que

$$\begin{aligned}
D_f C_{\varphi,\psi}(f,n)_{|f_0} \odot H &= [D_f \mu_{f|f_0} \odot H]\Big(\varphi(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^n(\psi) - \int \psi d\mu_{f_0})\Big) \\
&+ \int \varphi \cdot \Big(D_f \tilde{\mathcal{L}}_f^n(\psi)_{|f_0} \odot H - [D_f \mu_{f|f_0} \odot H](\psi)\Big) d\mu_{f_0} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \int D_f \tilde{\mathcal{L}}_f\Big(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^i\big(P_0(\varphi(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^n(\psi) - \int \psi d\mu_{f_0}))\big)\Big)_{|f_0} \odot H\, d\mu_{f_0} \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \int \varphi \tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^{i-1}\big(D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^{n-i}\psi)_{f_0} \odot H\big) d\mu_{f_0} \\
&- \sum_{i=0}^{\infty} \int D_f \tilde{\mathcal{L}}_f\Big(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^i\big(P_0(\psi)\big)\Big)_{f_0} \odot H d\mu_{f_0} \cdot \int \varphi d\mu_{f_0}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
D_f C_{\varphi,\psi}(f,n)_{|f_0} \odot H &= \sum_{i=0}^{\infty} \int D_f \tilde{\mathcal{L}}_f\Big(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^i\big(P_0(\varphi(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^n(\psi) - \int \psi d\mu_{f_0}))\big)\Big)_{|f_0} \odot H\, d\mu_{f_0} \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1} \int \varphi \tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^{n-i-1}\big(D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^{i}\psi)_{f_0} \odot H\big) d\mu_{f_0} \\
&- \sum_{i=0}^{\infty} \int D_f \tilde{\mathcal{L}}_f\Big(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^i\big(P_0(\psi)\big)\Big)_{f_0} \odot H d\mu_{f_0} \cdot \int \varphi d\mu_{f_0}.
\end{aligned}$$

Consideremos as séries

$$A_n(f_0,H) = \sum_{i=0}^{\infty} \int D_f \tilde{\mathcal{L}}_f\Big(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^i\big(P_0(\varphi(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^n(\psi) - \int \psi d\mu_{f_0}))\big)\Big)_{|f_0} \odot H\, d\mu_{f_0}$$

e

$$\begin{aligned}
B_n(f_0,H) &= \sum_{i=0}^{n-1} \int \varphi \tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^{n-i-1}\big(D_f \tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^{i}\psi)_{f_0} \odot H\big) d\mu_{f_0} \\
&- \sum_{i=0}^{n-1} \int D_f \tilde{\mathcal{L}}_f\Big(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^i\big(P_0(\psi)\big)\Big)_{f_0} \odot H d\mu_{f_0} \cdot \int \varphi d\mu_{f_0}.
\end{aligned}$$

Nós iremos provar que ambas as expressões $A_n(f_0,H)$ and $B_n(f_0,H)$ convergem uniformemente a 0 em $\{H \in \Gamma^r_{f_0} : ||H||_2 \leq 1\}$. De fato, por um lado

$$|A_n(f_0,H)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \deg(f_0) \max_{i=1,\ldots,\deg(f_0)} \{||T_{i,f_0}||_\infty\} \cdot ||H||_1 \cdot ||\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^i\big(P_0(\varphi(\tilde{\mathcal{L}}_{f_0}^n(\psi) - \int \psi d\mu_{f_0}))\big)||_1$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} 2\deg(f_0) \max_{i=1,\ldots,\deg(f_0)} \{||T_{i,f_0}||_\infty\} \cdot ||H||_1 ka_i \cdot ||P_0||_{s+1} ||\varphi||_{s+1} ||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f_0}(\psi) - \int \psi d\mu_{f_0}||_{s+1}$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} 2\deg(f_0) \max_{i=1,\ldots,\deg(f_0)} \{||T_{i,f_0}||_\infty\} \cdot ||H||_1 ka_i \cdot ||P_0||_{s+1} ||\varphi||_{s+1} ka_n ||\psi||_r$$

que é uniformemente convergente a 0 em $\{H \in \Gamma^r_{f_0} : ||H||_r \leq 1\}$. Por outro lado, $|B_n(f_0, H)|$ é limitado superiormente por

$$\sum_{i=0}^{n-1} ||\varphi||_\infty \cdot ||\tilde{\mathcal{L}}^{n-i-1}_{f_0}\big(D_f\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}^i_{f_0}\psi)_{f_0} \odot H\big) - \int D_f\tilde{\mathcal{L}}_f\Big(\tilde{\mathcal{L}}^i_{f_0}\big(P_0(\psi)\big)\Big)_{f_0} \odot H d\mu_{f_0}||_0$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} ka_{n-i-1}\, ||\varphi||_\infty\, ||D_f\tilde{\mathcal{L}}_f(\tilde{\mathcal{L}}^i_{f_0}P_0(\psi))_{f_0} \odot H||_s$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} ka_{n-i-1}\, ||\varphi||_\infty C \deg(f_0) \max_{i=1,\ldots,\deg(f_0)} \{||T_{i,f_0}||_s\} \cdot ||H||_s\, ||\tilde{\mathcal{L}}^i_{f_0}P_0(\psi))_{f_0}||_{s+1}$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} C \deg(f_0) \max_{i=1,\ldots,\deg(f_0)} \{||T_{i,f_0}||_s\} \cdot ||\varphi||_\infty \cdot k^2 a_{n-i-1} a_i ||\psi||_r ||H||_s,$$

onde C é uma constante que só depende de s, logo $B_n(f_0, H)$ é uniformemente convergente a 0 em $\{H \in C^r(M,M) : ||H||_r \leq 1\}$. As estimativas anteriores também garantem que a convergência a 0 de $C_{\varphi,\psi}(f,n)$ pode ser tomada uniforme numa vizinhança de f, de φ e de ψ. ∎

Notemos que na prova do resultado anterior foi fundamental que o autoespaço do operador de transferência associado ao seu raio espectral fosse formado pelas funções constantes. Desse modo, com a mesma prova não é razoável esperar que se obtenha um resultado similar ao corolário anterior para potenciais não constantes.

Teorema 2.34. *Seja $f \in \mathcal{F}^r$. Se $\psi \in C^r(M, \mathbb{R})$ então:*

i. ou $\psi = u \circ f - u + \int \psi\, d\mu_f$ para algum $u \in L^2(M, \mu_f)$ (nós dizemos que ψ é cohomóloga a uma constante $L^2(M, \mu_{f,\phi})$)

ii. ou a convergência em distribuição

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

vale com média $m = m_f(\psi) = \int \psi\, d\mu_f$ e variância σ^2 dada por

$$\sigma^2 = \sigma^2_f(\psi) = \int \tilde{\psi}^2\, d\mu_f + 2\sum_{n=1}^{\infty} \int \tilde{\psi}(\tilde{\psi} \circ f^n)\, d\mu_f > 0,$$

onde $\tilde{\psi} = \psi - \int \psi\, d\mu_f$ é uma função com média 0 dependendo de f.

Ademais, as funções $\mathcal{F}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \psi) \mapsto m_{f\psi}$ *e* $\mathcal{F}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \psi) \mapsto \sigma_f^2(\psi)$ *são analíticas com respeito a* ψ *e* C^1 *com respeito a* f*.*

Prova. Todos os resultados antes do ademais nada mais são do que o Teorema Central do Limite, que será válido pela mesma prova da proposição 1.10. Provemos então o ademais.

A analiticidade das funções com respeito a ψ é imediata. O fato de $(f, \psi) \mapsto m_{f\psi}$ ser C^1 decorre do teorema 2.31. Por fim, provaremos que $f \mapsto \sigma_f^2(\psi)$ é C^1. Notemos inicialmente que a variância é dada por

$$\sigma_f^2(\psi) = \int \tilde{\psi}^2 \, d\mu_f + 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_{\tilde{\psi},\tilde{\psi}}(f, 0, n)$$

e $\tilde{\psi}$ é C^1 com respeito a f. Então, para provar que a expressão anterior é C^1, utilizando a regra da cadeia, é suficiente provar que a aplicação $f \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} C_{\tilde{\psi},\tilde{\psi}}(f, 0, n)$ é C^1, assumindo que $\tilde{\psi}$ está fixada e independe de f. Fixemos $f_0 \in \mathcal{F}^r$ e consideremos a sequência de funções

$$F_k(f) = \sum_{n=1}^{k} C_{\tilde{\psi},\tilde{\psi}}(f, n),$$

que é C^1 e uniformemente convergente para $F(f) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{\tilde{\psi},\tilde{\psi}}(f, 0, n)$ em uma vizinhança de f_0. Nós provaremos que as derivadas de F_k são uniformemente convergentes. De fato, $D_f F_k(f) \odot H = \sum_{n=1}^{k} D_f C_{\tilde{\psi},\tilde{\psi}}(f, n) \mid_f \odot H$ e então, utilizando a mesma notação do corolário 2.33,

$$D_f F_k(f)_{|f} \odot H = \sum_{n=1}^{k} \Big[A_n(f, H) + B_n(f, H) \Big]$$

Notemos que $\sum_{n=1}^{k} |A_n(f, H) + B_n(f, H)|$ é limitado superiormente por

$$\sum_{n=1}^{k} \Big[\sum_{i=0}^{\infty} 2 \deg(f_0) \max_{i=1,\dots,\deg(f_0)} \{||T_{i,f_0}||_\infty\} \cdot ||H||_1 k a_i \cdot ||P_0||_{s+1} ||\tilde{\psi}||_{s+1} k a_n ||\tilde{\psi}||_r$$
$$+ \sum_{i=0}^{n-1} C \deg(f_0) \max_{i=1,\dots,\deg(f_0)} \{||T_{i,f_0}||_s\} \cdot ||\tilde{\psi}||_\infty \cdot k^2 a_{n-i-1} a_i ||\tilde{\psi}||_r ||H||_s \Big],$$

que é somável. Então está bem definido o limite $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(f, H) + B_n(f, H)$ e a convergência é uniforme numa vizinhança de f_0 e para $||H||_r = 1$. Isso prova que $D_f F_k(f)_{|\hat{f}} \odot H$ é uniformemente convergente e assim F é C^1. Isto finaliza a prova do teorema. ∎

Utilizando a continuidade da variância $\sigma_f^2(\psi)$ com respeito a dinâmica f e o observável ψ, e a primeira parte do teorema, nós obtemos consequências para a equação cohomológica.

Corolário 2.35. *Se* $\psi \in C^r(M, \mathbb{R})$ *não é cohomóloga a uma constante* $L^2(M, \mu_{f,\phi})$ *para* $f \in \mathcal{F}^r$*, então a mesma propriedade vale para todos* $\hat{f}$ *suficientemente próximos* *de f. Como consequência, os conjuntos $\{\hat{f} \in \mathcal{F}^r : \psi$ é cohomóloga a $\int \psi \, d\mu_{\hat{f}}\}$ e $\{\hat{\psi} \in C^r(M, \mathbb{R}) : \psi$ é cohomóloga a $\int \psi \, d\mu_{\hat{f}}\}$ são fechados.*

Prova. Se ψ não é cohomóloga a uma constante em $L^2(M, \mu_f)$, então pelo Teorema 2.34 temos $\sigma^2_{f,}(\psi) > 0$, usando a continuidade obtemos $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}^r \times C^r(M, \mathbb{R})$ aberto tal que, para todo $(\tilde{f}, \tilde{\psi}) \in \mathcal{U}$ temos que $\sigma^2_{\tilde{f}}(\tilde{\phi}) > 0$. Logo, pelo Teorema 2.34, $\tilde{\psi}$ não é cohomóloga a uma constante em $L^2(M, \mu_{\tilde{f}})$ ∎

2.3 Aplicações expansoras

Nessa seção iremos aplicar os resultados obtidos anteriormente no caso específico de dinâmicas expansoras, para detalhes sobre dinâmicas expansoras ver [PU10] e [Rue89]. Começaremos estudando dinâmicas que expandem distâncias e depois estudaremos o caso em que o domínio é um conexo.

2.3.1 Dinâmicas expansoras topológicas

Seja M espaço métrico compacto dotado da distância d, $f : M \to M$ é dita expansora se existe $C, \hat{\delta} > 0$ e $\sigma \in (0,1)$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) \geq C\sigma^{-n} d(x,y)$ para todo $y \in B(x, n, \hat{\delta})$ e $n \geq 1$, onde $B(x, n, \hat{\delta})$ é o conjunto de pontos $y \in M$ tais que $d(f^j(x), f^j(y)) < \hat{\delta}$ para todo $0 \leq j \leq n-1$ ($(n, \hat{\delta})$-*bola dinâmica*). Nesse caso dizemos que M é um repulsor topológico para f. Iremos assumir também que f é uma aplicação aberta e é topologicamente mixing (devido ao teorema de decomposição espectral para dinâmicas expansoras não há perda de generalidade em supor ser topologicamente mixing). Sabemos que, nesse contexto, dado um potencial $\phi : M \to \mathbb{R}$ Holder contínuo existe um único estado de equilíbrio $\mu_{f,\phi}$ com relação a f e ϕ. Além disso, $\mu_{f,\phi} = h_{f,\phi}\nu_{f,\phi}$, onde $\mathcal{L}_{f,\phi} h_{f,\phi} = \lambda_{f,\phi} h_{f,\phi}$, $\mathcal{L}^*_{f,\phi}\nu_{f,\phi} = \lambda_{f,\phi}\nu_{f,\phi}$ e $\log \lambda_{f,\phi} = P_{\mathrm{top}}(f, \phi)$.

Dado $\alpha \in (0,1]$ e um $\delta > 0$ definimos a norma Holder local de $\varphi \in C^\alpha(M, \mathbb{R})$ por $|\varphi|_{\alpha,\delta} := \sup_{0<d(x,y)<\delta} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{d(x,y)^\alpha}$. Podemos dotar o espaço $C^\alpha(M, \mathbb{R})$ das funções $\alpha-$Holder contínuas com a norma $||\cdot||_{\alpha,\delta} := ||\cdot||_\infty + |\cdot|_{\alpha,\delta}$. O espaço $C^\alpha(M, \mathbb{R})$ dotado com a norma $||\cdot||_{\alpha,\delta}$ possui a mesma topologia do que se o dotássemos com a norma canônica.

Assim, fixemos $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que os ramos inversos da dinâmica expansora f estão bem definidos para toda bola de raio δ (tal δ sempre existe no nosso contexto). Sabe-se que existe $k \geq 0$ e $\tau \in (0,1)$ tal que, para todo $g \in C^\alpha$, temos:

$$||\frac{\mathcal{L}^n_{f,\phi} g}{\lambda^n_{f,\phi}} - \int g d\nu_{f,\phi} \cdot h_{f,\phi}||_{\alpha,\delta} \leq k\tau^n ||g||_{\alpha,\delta}.$$

A princípio τ e k dependem de ϕ. Porém, fixado um potencial ϕ, existe uma vizinhança de ϕ em $C^{\alpha,\delta}$ tal que para qualquer potencial nessa vizinhança podemos tomar k e τ uniformes.

Desse modo, fixando uma dinâmica $f : M \to M$ expansora, aberta e topologicamente mixing, teremos os seguintes resultados:

Proposição 2.36. *As seguintes aplicações variam analiticamente:*

i. $C^\alpha(M, \mathbb{R}) \ni \phi \mapsto P_{\text{top}}(f, \phi)$;

ii. $C^\alpha(M, \mathbb{R}) \ni \phi \mapsto \frac{d\mu_{f,\phi}}{d\nu_{f,\phi}} \in C^\alpha$;

iii. $C^\alpha(M, \mathbb{R}) \ni \phi \mapsto \nu_{f,\phi} \in (C^\alpha)^*$;

iv. $C^\alpha(M, \mathbb{R}) \ni \phi \mapsto \mu_{f,\phi} \in (C^\alpha)^*$.

Prova. Basta aplicarmos a Proposição 2.3. ■

Vale ressaltar que o resultado anterior já era conhecido da literatura (veja por exemplo [PP90]).

Antes do próximo resultado lembremos dos Teoremas de Livschitz que nos garantem regularidade da solução de uma equação cohomológica quando temos uma dinâmica hiperbólica:

Teorema 2.37 (Livschitz)**.** *Seja M um espaço métrico compacto e $f : M \to M$ expansora, aberta e topologicamente mixing. Se $\psi : M \to \mathbb{R}$ é um observável contínuo tal que $S_n\psi(x) = 0$ para todo ponto periódico x de período n então existe uma função $u \in C^\alpha(M, \mathbb{R})$ tal que $\psi = u \circ f - u$. Suponhamos adicionalmente que M é uma variedade riemanniana e que $f \in C^r(M, M)$ então existe $u \in C^r(M, \mathbb{R})$ tal que $\psi = u \circ f - u$.*

Prova. Veja por exemplo [KB95].

■

Proposição 2.38. *Seja $\phi \in C^\alpha(M, \mathbb{R})$. Se $\psi \in C^\alpha(M, \mathbb{R})$ então:*

i. *ou $\psi = u \circ f - u + \int \psi \, d\mu_{f,\phi}$ para algum $u \in C^\alpha(M, \mathbb{R})$ (nós dizemos que ψ é cohomóloga a uma constante em $C^\alpha(M, \mathbb{R})$)*

ii. ou a convergência em distribuição

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=0}^{n-1}\psi\circ f^j \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(m,\sigma^2)$$

vale com média $m = m_{f,\phi}(\psi) = \int \psi \, d\mu_{f,\phi}$ *e variância* σ^2 *dada por*

$$\sigma^2 = \sigma^2_{f,\phi}(\psi) = \int \tilde{\psi}^2 \, d\mu_{f,\phi} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int \tilde{\psi}(\tilde{\psi}\circ f^n)\, d\mu_{f,\phi} > 0,$$

onde $\tilde{\psi} = \psi - \int \psi \, d\mu_{f,\phi}$ *é uma função com média 0 dependendo de* ϕ.

Ademais, as funções $C^\alpha(M,\mathbb{R})\times C^\alpha(M,\mathbb{R}) \ni (\phi,\psi)\mapsto m_{f,\phi}(\psi)$ *e* $C^\alpha(M,\mathbb{R})\times C^\alpha(M,\mathbb{R}) \ni (\phi,\psi)\mapsto \sigma^2_f(\psi)$ *são analíticas com respeito a* (ϕ,ψ)

Prova. A prova seria uma aplicação direta do Teorema 2.14 se no item i. a solução da equação cohomólogica estivesse em $L^2(\mu_{f,\phi})$. Para resolver esse empecilho, observemos inicialmente que, por causa da hipótese da dinâmica ser topologicamente mixing, teremos que o suporte de $\mu_{f,\phi}$ é igual a M. Provemos inicialmente que se ψ é cohomólogo a uma constante em $L^2(\mu_{f,\phi})$, então ψ é cohomólogo a uma constante. Notemos que

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{E}''_{f,\phi,\psi}(0) & = & \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}(\int(S_n\psi)^2 d\mu_{f,\phi} - (\int S_n\psi d\mu_{f,\phi})^2) \\
& = & \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int(S_n\tilde{\psi})^2 d\mu_{f,\phi} \\
& = & \int\tilde{\psi}^2 d\mu_{f,\phi} + 2\lim_{n\to+\infty}\int\sum_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\tilde{\psi}\circ f^j\tilde{\psi} d\mu_{f,\phi} \\
& = & \int\tilde{\psi}^2 d\mu_{f,\phi} + 2\sum_{j=1}^{\infty}\int\tilde{\psi}\circ f^j\tilde{\psi} d\mu_{f,\phi} \\
& = & \sigma^2_{f,\phi}(\psi).
\end{array}$$

Pela dicotomia que já sabemos do Teorema Central do Limite, teremos que $\mathcal{E}''_{f,\phi,\psi}(0) = 0$ e assim $\mathcal{E}_{f,\phi,\psi}$ não é estritamente convexa. Porém, como podemos aplicar a proposição 2.17 em nosso contexto, e os estados de equilíbrio tem suporte total, teremos que ψ é cohomólogo a uma constante.

Como já sabemos que ψ é cohomólogo a uma constante, então $S_n\psi(x) = n\int\psi d\mu_{f,\phi}$ para todo ponto periódico x de período n. Assim, basta usarmos o Teorema de Livschitz e concluir que $\psi = u\circ f - u + \int\psi\, d\mu_{f,\phi}$ para alguma função $u : M\to\mathbb{R}$ se, e somente se, podemos tomar uma solução da equação cohomólogica que seja $\alpha-$Holder contínua. E assim finalizamos a prova do corolário. ■

Na prova do corolário anterior, vimos que ψ é cohomólogo a uma constante em $L^2(\mu_{f,\phi})$ se, e somente se, ψ é cohomólogo a uma constante em C^α, logo aplicando o Corolário 2.35 temos

Proposição 2.39. *O conjunto*

$$\{\hat{\psi} \in C^{\alpha}(M,\mathbb{R}) : \hat{\psi} \text{ é cohomóloga a uma constante em } C^{\alpha}(M,\mathbb{R})\}$$

é fechado.

Pela observação 2.18, sabemos que no caso expansor podemos obter o princípio de grandes desvios global. Além disso, pela observação 2.23 e o comentário anterior sobre a solução da equação cohomológica, podemos melhorar o resultado de estabilidade da transformada de Legendre com respeito ao potencial. Mais precisamente,

Proposição 2.40. *Seja V um espaço métrico compacto e $\big((\phi_v,\psi_v)\big)_{v\in V}$ uma família injetiva e parametrizada (contínua) de aplicações em $C^{\alpha}(M,\mathbb{R})\times C^{\alpha}(M,\mathbb{R})$. Se o observável ψ_{v_*} não é cohomólogo a uma constante, para algum $v_* \in V$ então existe uma vizinhança aberta U de v_* tal que para todo $v \in \overline{U}$ e $[a,b] \subset \mathbb{R}$*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_{f_v,\phi_v} \left(x \in M : \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi_v \circ f_v^j(x) \in [a,b] \right) \leq - \inf_{s\in[a,b]} I_{f_v,\phi_v,\psi_v}(s)$$

e

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_{f_v,\phi_v} \left(x \in M : \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi_v \circ f_v^j(x) \in (a,b) \right) \geq - \inf_{s\in(a,b)} I_{f_v,\phi_v,\psi_v}(s).$$

Além disso, a transformada de Legendre $(s,v) \mapsto I_{f_v,\phi_v,\psi_v}(s)$ é contínua sobre $J \times \overline{U}$, na topologia C^0, para todo compacto $J \subset \mathbb{R}$.

2.3.2 Repulsores conexos

Nessa seção iremos continuar o estudo das transformações expansoras focando no caso em que o repulsor é um conexo e também o caso em que a dinâmica é pelo menos C^1. Desenvolveremos a teoria de cones, do mesmo modo que na seção 1, para o caso em que a dinâmica é expansora sobre um repulsor conexo. Para isso utilizaremos cones inspirados no caso S.R.B. porém que serviram para potencias quaisquer (para o caso S.R.B. veja [Vi97] ou [Bal00]).

Iremos supor que M é uma variedade de dimensão finita compacta conexa, dotada da métrica riemanniana d. Dado um inteiro $r \geq 0$ e $\alpha \in [0,1)$ com $r+\alpha > 0$, denotaremos por $\mathcal{D}^{r+\alpha}$ o espaço de aplicações contínuas $f : M \to M$ tais que:

(a) Existe $\hat{\delta} > 0$ e $\sigma \in (0,1)$ tal que $d(fx,fy) \geq \sigma^{-1} d(x,y)$, para todo $x,y \in M$ e $d(x,y) < \hat{\delta}$.

(b) $f \in C^{r+\alpha}$.

Observação 2.41. *Quando $r = 0$, iremos supor que M é somente um espaço métrico compacto conexo e f será Lipschitz. Dotaremos então o espaço $\mathcal{D}^{\alpha}$ com a topologia induzida pela constante de Lipschitz.*

Em [Rue89] é provado que, dado $f \in D^{r+\alpha}$ e $\phi \in C^{\alpha}(M, \mathbb{R})$, existe um único estado de equilíbrio $\mu_{f,\phi}$ com relação a f e ϕ. Além disso, $\mu_{f,\phi} = h_{f,\phi}\nu_{f,\phi}$, onde $\mathcal{L}_{f,\phi}h_{f,\phi} = e^{P_{\text{top}}(f,\phi)}h_{f,\phi}$, $\mathcal{L}^{*}_{f,\phi}\nu_{f,\phi} = e^{P_{\text{top}}(f,\phi)}\nu_{f,\phi}$ e $\lambda_{f,\phi} := e^{P_{\text{top}}(f,\phi)}$ é o raio espectral do operador $\mathcal{L}_{f,\phi}$ agindo sobre C^0 ou $C^{r+\alpha}$.

Para cada aplicação expansora $f \in \mathcal{D}^{r+\alpha}$ existe $\delta > 0$ tal que: se $d(x, y) < \delta$ então para cada $x_i \in f^{-1}(x)$ existe um único $y_i \in f^{-1}(y)$ com $x_i, y_i \in U_z$, vizinhança aberta de algum $z \in M$, e f é injetiva em U_z. Denotaremos por $f_1, \dots, f_{\deg(f)}$ os ramos inversos locais de f. Notemos que, como f é Lipschitz, então existe uma vizinhança de f na topologia dada pela distância Lipschitz tal que podemos encontrar um $\delta > 0$ em que vale a propriedade anterior para todas as dinâmicas nessa vizinhança.

A partir desse momento, desenvolveremos a teoria de cones para as nossas dinâmicas expansoras. Inicialmente, provemos que $\mathcal{L}_{f,\phi}$ tem um gap espectral em C^{α} e C^{r}. A estratégia da prova é a mesma já utilizada, ou seja, encontrar um cone invariante cuja imagem tem diâmetro finito. Passemos então à definição dos cones.

Dado um $\delta > 0$, definimos a norma Holder local de $\varphi \in C^{\alpha}(M, \mathbb{R})$ por $|\varphi|_{\alpha,\delta} := \sup_{0<d(x,y)<\delta} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{d(x,y)^{\alpha}}$. Como M é compacto e conexo a norma Holder global pode ser estimada a partir na norma Holder local, a saber, existe um $m \geq 1$ que só depende de δ tal que $|\cdot|_{\alpha} \leq m|\cdot|_{\alpha,\delta}$.

Para $\alpha \in (0, 1)$, $\kappa > 0$ e $\delta > 0$ definamos

$$\Lambda^{\alpha}_{\kappa,\delta} := \{\varphi \in C^{\alpha}(M, \mathbb{R}) : \varphi > 0 \text{ e } |\log \varphi|_{\alpha,\delta} \leq \kappa\}.$$

Para $r \geq 1$ e $\kappa > 0$ definamos

$$\Lambda^{r}_{\kappa} := \{\varphi \in C^{r}(M, \mathbb{R}) : \varphi > 0 \text{ e } \sup_{x\in M} \left|\left|\frac{D^{s}\varphi(x)}{\varphi(x)}\right|\right| \leq \kappa c^{r-s}_{r,s}, \forall 1 \leq s \leq r\},$$

onde $c_{r,r} = 1$, desprezando o caso quando $r = s$ temos que $c_{r,s}$ só depende de s. $c_{r,s}$ são constantes suficientemente pequenas para que ocorra a invariância dos cones; notemos que omitimos a dependência de $c_{r,s}$ na notação dada aos cones. Quando $r = 1$ temos

$$\Lambda^{1}_{\kappa} = \Big\{\varphi \in \mathcal{C}^{1}(M, \mathbb{R}) : \varphi > 0 \quad \text{e} \quad \sup_{x\in M} \Big|\Big|\frac{D\varphi(x)}{\varphi(x)}\Big|\Big| \leq \kappa\Big\}.$$

Temos que $\Lambda^{\alpha}_{\kappa}$ e Λ^{r}_{κ} são cones convexos, além disso $\overline{\Lambda^{\alpha}_{\kappa}} \cap (-\overline{\Lambda^{\alpha}_{\kappa}}) = \{0\}$ e $\overline{\Lambda^{r}_{\kappa}} \cap (-\overline{\Lambda^{r}_{\kappa}}) = \{0\}$.

Provemos agora a propriedade de invariância dos cones.

O próximo lema é extremamente útil na prova da invariância do cone quando $r > 1$.

Lema 2.42. *Suponha que para todo $\kappa \geq \kappa_1$ e $\max\{i, 1\} < r$ temos $\mathcal{L}_\phi(\Lambda^i_\kappa) \subset \Lambda^i_{\hat{\lambda}\kappa}$. Se para $\kappa_2 > 0$ e para todo $\varphi \in \Lambda^r_\kappa$, com $\kappa \geq \kappa_2$, temos $\sup_{x\in M} \left\|\frac{D^r\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}{\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}\right\| \leq \kappa$, então $\mathcal{L}_\phi(\Lambda^r_\kappa) \subset \Lambda^r_{\hat{\lambda}\kappa}$ para todo $\kappa \geq \kappa_0$.*

Prova. Seja $\kappa_0 := \max\{\kappa_2, \kappa_1 \cdot c(r, r-1)^{1-r}\}$. Tomemos $\varphi \in \Lambda^r_\kappa$, para $\kappa \geq \kappa_0$, em particular $\sup_{x\in M} \left\|\frac{D^i\varphi(x)}{\varphi(x)}\right\| \leq \kappa c^{r-i}_{r,i}$, para $i = 1, \ldots r-1$. Como $c_{r,s}$ só depende de s (retirando a diagonal) temos que $\varphi \in \Lambda^i_{\kappa c^{r-i}_{r,i}}$, para $i = 1, \ldots r-1$. Usando a hipótese, temos que $\mathcal{L}_{f,\phi} \in \Lambda^i_{\hat{\lambda}\kappa c^{r-i}_{r,i}}$, em particular $\sup_{x\in M} \left\|\frac{D^i\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}{\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}\right\| \leq \hat{\lambda}\kappa c^{r-i}_{r,i}$, para $i = 1, \ldots r-1$. Como $\sup_{x\in M} \left\|\frac{D^r\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}{\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}\right\| \leq \kappa$, para $\kappa \geq \kappa_0$, temos $\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi \in \Lambda^r_{\hat{\lambda}\kappa}$. ■

Proposição 2.43. *(i) Dado $f \in D^\alpha$ e $\phi \in C^\alpha$ existem $\kappa_0 > 0, \delta_0 > 0$ e $\rho \in (0,1)$ tais que $\mathcal{L}_{f,\phi}\Lambda^\alpha_{\kappa,\delta} \subset \Lambda^\alpha_{\rho\kappa,\delta}$, para todo $\kappa \geq \kappa_0$ e $0 < \delta \leq \delta_0$.*

(ii) Dado $f \in D^r$ e $\phi \in C^r$ existem $\kappa_0 > 0, c_{r,s} > 0$ e $\rho \in (0,1)$ tais que $\mathcal{L}_{f,\phi}\Lambda^r_\kappa \subset \Lambda^r_{\rho\kappa}$, para todo $\kappa \geq \kappa_0$.

Prova. (i)] Seja $\delta > 0$ tal que os ramos inversos inversos locais estão definidos em bolas de raio $\frac{\delta}{2}$. Seja $\varphi \in \Lambda^\alpha_{\kappa,\delta}$ então $\mathcal{L}_{f,\phi} > 0$, além disso, dados $x, y \in M$ com $0 < d(x,y) < \delta$ temos:

$$\begin{aligned}
\log \mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x) - \log \mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(y) &= \log \frac{\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}{\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(y)} \\
&= \log \frac{\sum_{j=1}^{\deg(f)} e^{\phi(f_j x)}\varphi(f_j x)}{\sum_{j=1}^{\deg(f)} e^{\phi(f_j y)}\varphi(f_j y)} \\
&\leq \log e^{|\phi|_{\alpha,\delta}\sigma^{-1}d(x,y)^\alpha + \sigma^{-1}\kappa d(x,y)^\alpha} \\
&= \left(|\phi|_{\alpha,\delta}\sigma^{-1} + \sigma^{-1}\kappa\right)d(x,y)^\alpha,
\end{aligned}$$

logo $|\log \mathcal{L}_{f,\phi}\varphi|_{\alpha,\delta} \leq |\phi|_{\alpha,\delta}\sigma^{-1} + \sigma^{-1}\kappa$. Tomando $\kappa_0 := \frac{2|\phi|_{\alpha,\delta}}{\sigma - 1}$ teremos que $|\log \mathcal{L}_{f,\phi}\varphi|_{\alpha,\delta} \leq \frac{1-\sigma^{-1}}{2}\kappa$, para todo $\kappa \geq \kappa_0$. Assim provamos o item (i) da proposição.

(ii)] Seja $\varphi \in \Lambda^r_\kappa$ então $\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi > 0$, além disso, dado $x \in M$ e $H \in T_x M$ com

$||H|| = 1$ temos que:

$$\begin{aligned}\frac{|D\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)\cdot H|}{\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)} &= \frac{\sum_{j=1}^{\deg(f)}\left[e^{\phi(f_jx)}\varphi(f_jx)D\phi(f_jx)\cdot Df_j(x)\cdot H + e^{\phi(f_jx)}D\varphi(f_jx)\cdot Df_j(x)\cdot H\right]}{\sum_{j=1}^{\deg(f)} e^{\phi(f_jx)}\varphi(f_jx)} \\ &\leq \frac{\sum_{j=1}^{\deg(f)}\left[e^{\phi(f_jx)}\varphi(f_jx)D\phi(f_jx)\cdot Df_j(x)\cdot H + e^{\phi(f_jx)}D\varphi(f_jx)\cdot Df_j(x)\cdot H\right]}{\sum_{j=1}^{\deg(f)} e^{\phi(f_jx)}\varphi(f_jx)} \\ &\leq ||D\phi||_0\sigma^{-1} + \sigma^{-1}\kappa,\end{aligned}$$

logo $\sup_{x\in M}||\frac{D\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}{\varphi(x)}|| \leq ||D\phi||_0\sigma^{-1} + \sigma^{-1}\kappa$. Tomando $\kappa_0 := \frac{2||D\phi||_0}{\sigma-1}$ teremos que

$$\sup_{x\in M}||\frac{D\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}{\varphi(x)}|| \leq \frac{1-\sigma^{-1}}{2}\kappa,$$

para todo $\kappa \geq \kappa_0$. Assim provamos o item (i) para o caso $r = 1$.

Consideremos agora o caso $r = 2$. Tomemos $\kappa > 0$ e $\varphi \in \Lambda_\kappa^2$. Usando a regra da cadeia, temos que $D^2(\mathcal{L}_\phi)(x)$ é uma soma dos seguintes sete termos:

$$\begin{gathered} D^2\phi(x_j)[Df_j(x)]^2 e^{\phi(x_j)}\varphi(x_j) \\ D\phi(x_j)D^2 f_j(x)e^{\phi(x_j)}\varphi(x_j) \\ D\varphi(x_j)Df_j(x)e^{\phi(x_j)}D\phi(x_j)Df_j(x) \\ D\varphi(x_j)Df_j(x)e^{\phi(x_j)}D\phi(x_j)Df_j(x) \\ \varphi(x_j)D\phi(x_j)Df_j(x)e^{\phi(x_j)}D\phi(x_j)Df_j(x) \\ e^{\phi(x_j)}D^2\varphi(x_j)[Df_j(x)]^2 \\ e^{\phi(x_j)}D\varphi(x_j)D^2 f_j(x). \end{gathered}$$

Logo, para $x \in M$ e $H \in T_xM$, com $||H|| = 1$, temos:

$$\frac{|D^2\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)\cdot H|}{\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)} \leq ||\phi||_2\sigma^{-1} + ||\phi||_2\cdot\sup_{x\in M}||[Df(x)]^{-1}||\cdot||f||_2\cdot\sigma^{-1} + 2c_{2,1}^1\kappa\sigma^{-1}||\phi||_2 +$$

$$||\phi||_2^2\sigma^{-1} + \kappa\sigma^{-1} + c_{2,1}^1\kappa\cdot\sup_{x\in M}||[Df(x)]^{-1}||\cdot||f||_2\cdot\sigma^{-1} =$$

$$||\phi||_2\sigma^{-1}\big(1+\sup_{x\in M}||[Df(x)]^{-1}||\cdot||f||_2+||\phi||_2\big)+\sigma^{-1}\kappa+\sigma^{-1}c_{2,1}^1\kappa\big(\sup_{x\in M}||[Df(x)]^{-1}||\cdot||f||_2+2||\phi||_2\big),$$

logo

$$\sup_{x\in M}\left|\left|\frac{D^2\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}{\varphi(x)}\right|\right| \leq ||\phi||_2\sigma^{-1}\big(1+\sup_{x\in M}||[Df(x)]^{-1}||\cdot||f||_2+||\phi||_2\big)+\sigma^{-1}\kappa+$$

$$\sigma^{-1}c_{2,1}^1\kappa\big(\sup_{x\in M}||[Df(x)]^{-1}||\cdot||f||_2+2||\phi||_2\big).$$

Tomando $\kappa_0 := \frac{3||\phi||_2\left(1+\sup_{x\in M}||[Df(x)]^{-1}||\cdot||f||_2+||\phi||_2\right)}{\sigma-1}$ e $c_{2,1} := \frac{\sigma-1}{3\left(\sup_{x\in M}||[Df(x)]^{-1}||\cdot||f||_2+2||\phi||_2\right)}$ teremos que

$$\sup_{x\in M}\left|\left|\frac{D^2\mathcal{L}_{f,\phi}\varphi(x)}{\varphi(x)}\right|\right| \leq \frac{2+\sigma^{-1}}{3}\kappa,$$

para todo $\kappa > \kappa_0$. Assim usando o caso $r = 1$ e o lema anterior, provamos o item (i) para o caso $r = 2$.

O caso geral é uma computação análoga das derivadas de ordem superior de $\mathcal{L}_\phi \varphi$ através da regra da cadeia e o uso do lema anterior. ■

O próximo corolário nos diz que o cone invariante depende continuamente da dinâmica e do potencial, isso será fundamental na uniformidade do gap espectral.

Corolário 2.44. *(i) Dado $f \in D^\alpha$ Lipschitz e $\phi \in C^\alpha(M, \mathbb{R})$, existem vizinhanças $\mathcal{F}$ de f, na topologia dada pela distância Lipschitz, e $\mathcal{W}$ de ϕ, além de constantes $\kappa > 0, \delta > 0$ e $\rho \in (0,1)$ tais que: se $(\hat{f}, \hat{\phi}) \in \mathcal{F} \times \mathcal{W}$ então $\mathcal{L}_{\hat{f},\hat{\phi}} \Lambda^1_{\kappa,\delta} \subset \Lambda^1_{\rho\kappa,\delta}$.*

(ii) Dado $f \in D^r$ e $\phi \in C^r(M, \mathbb{R})$ existem vizinhanças $\mathcal{F}^r$ de f e $\mathcal{W}^r$ de ϕ, além de constantes $\kappa > 0, c_{r,s} > 0$ e $\rho \in (0,1)$ tal que: se $(\hat{f}, \hat{\phi}) \in \mathcal{F}^r \times \mathcal{W}^r$ então $\mathcal{L}_{\hat{f},\hat{\phi}} \Lambda^r_\kappa \subset \Lambda^r_{\rho\kappa}$ e $\mathcal{L}_{\hat{f},\hat{\phi}} \Lambda^\alpha_{\kappa,\delta} \subset \Lambda^\alpha_{\rho\kappa,\delta}$.

Prova. Decorre diretamente das estimativas feitas na proposição anterior. ■

A próxima proposição, entre outras coisas, nos mostrará que a imagem dos cones estudados pelo operador de Perron tem diâmetro finito.

Proposição 2.45. *(i) Dado $0 < \rho < 1$, o cone $\Lambda^\alpha_{\rho\kappa,\delta}$ tem diâmetro finito em relação à métrica projetiva induzida em $\Lambda^\alpha_{\kappa,\delta}$.*

(ii) Dado $0 < \rho < 1$, o cone $\Lambda^r_{\rho\kappa}$ tem diâmetro finito em relação à métrica projetiva induzida em Λ^r_κ.

Prova. (i) Veja [Vi97], proposição 2.5.

(ii) Basta provarmos que $\theta_\kappa(\varphi, 1)$ é uniformemente limitado para toda $\varphi \in \Lambda^r_{\rho\kappa}$ com $\frac{\sup\varphi}{\inf\varphi} = 1$. Seja então $\varphi \in \Lambda^r_{\rho\kappa}$ com $\frac{\sup\varphi}{\inf\varphi} = 1$.

Afirmação 1: $\beta_\kappa(\varphi, 1) \leq \frac{1}{\inf\varphi(1-\rho\min\{c_{r,s}^{r-s}\})}$.

De fato; provaremos que para $t_0 := \frac{1}{\inf\varphi(1-\rho\min\{c_{r,s}^{r-s}\})}$ ocorrerá que $t_0\varphi - 1 \in \Lambda^r_\kappa$. Como $\rho < 1$ temos $t_0\varphi - 1 > 0$, e dado $x \in M, H \in T_xM$, com $||H|| = 1$

$$\frac{|D^s(t_0\varphi - 1)(x) \cdot H|}{t_0\varphi(x) - 1} = \frac{t_0|D^s\varphi(x) \cdot H|}{t_0\varphi(x) - 1} \leq \frac{t_0}{t_0\varphi(x) - 1} \cdot \rho\kappa c_{r,s}^{r-s} \leq \kappa.$$

Afirmação 2: $\alpha_\kappa(\varphi,1) \geq \frac{1}{\sup\varphi(1+\rho\max\{c_{r,s}^{r-s}\})}$.

De fato; provaremos que para $t_1 := \frac{1}{\sup\varphi(1+\rho\max\{c_{r,s}^{r-s}\})}$ ocorrerá que $1-t_1\varphi \in \Lambda_\kappa^r$. Temos que $1-t_1\varphi > 0$ e dado $x \in M, H \in T_xM$, com $||H|| = 1$,

$$\frac{|D^s(1-t_1\varphi)(x)\cdot H|}{1-t_1\varphi(x)} \leq \frac{t_1|D^s\varphi(x)\cdot H|}{1-t_1\varphi(x)} \leq \frac{t_1}{1-t_1\varphi(x)}\cdot\varphi(x)\rho\kappa c_{r,s}^{r-s} \leq \kappa.$$

Decorre das *Afirmações 1 e 2* que

$$\begin{aligned}\theta(\varphi,1) &\leq \log\frac{\sup\varphi(1+\rho\max\{c_{r,s}^{r-s}\})}{\inf\varphi(1-\rho\min\{c_{r,s}^{r-s}\})}\\ &= \log\frac{\sup\varphi}{\inf\varphi} + \log\frac{1+\rho\max\{c_{r,s}^{r-s}\}}{1-\rho\min\{c_{r,s}^{r-s}\}}\\ &\leq \sup_{x\in X}\{\frac{||D\varphi(x)||}{\varphi(x)}\}d(x,y) + \log\frac{1+\rho\max\{c_{r,s}^{r-s}\}}{1-\rho\min\{c_{r,s}^{r-s}\}}\\ &\leq \rho\kappa\mathrm{diam}(M) + \log\frac{1+\rho\max\{c_{r,s}^{r-s}\}}{1-\rho\min\{c_{r,s}^{r-s}\}}.\end{aligned}$$

■

Provemos agora a propriedade do gap espectral em C^α e C^r. Antes da prova, lembremos que decorre da forma geométrica do teorema de Hahn-Banach que existe uma probabilidade $\nu_{f,\phi}$ tal que $\mathcal{L}_{f,\phi}^*\nu_{f,\phi} = \lambda_{f,\phi}\nu_{f,\phi}$, onde $\lambda_{f,\phi}$ é o raio espectral de $\mathcal{L}_{f,\phi}$ agindo sobre C^0. Fixemos então $\nu_{f,\phi}$ como uma probabilidade com essa probabilidade. Veremos mais adiante que $\nu_{f,\phi}$ é única. Denotaremos $\frac{\mathcal{L}_{f,\phi}}{\lambda_{f,\phi}}$ por $\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}$.

Teorema 2.46. *(i) Dado $f \in D^\alpha$ e $\phi \in C^\alpha$, existe um $0 < \lambda_0 < \lambda_{f,\phi}$ tal que $\mathcal{L}_{f,\phi|C^\alpha}$ admite uma decomposição de seu espectro dada por: spec$(\mathcal{L}_{f,\phi|C^\alpha}) = \{\lambda_{f,\phi}\} \cup \Sigma_0$, onde $\Sigma_0 \subset B(0,\lambda_0)$ e $\lambda_{f,\phi}$ é autovalor com autoespaço unidimensional.*

(ii) Dado $f \in D^r$ e $\phi \in C^r$ existe um $0 < \lambda_0 < \lambda_{f,\phi}$ tal que $\mathcal{L}_{\phi|C^r}$ admite uma decomposição de seu espectro dada por: spec$(\mathcal{L}_{f,\phi|C^r}) = \{\lambda\} \cup \Sigma_0$, onde $\Sigma_0 \subset B(0,\lambda_0)$ e $\lambda_{f,\phi}$ é autovalor com autoespaço unidimensional.

Prova. (i)] Tomemos κ_0, δ e ρ como na proposição 2.43. Seja $\varphi, \psi \in \Lambda_{\kappa_0,\delta}^\alpha$ e θ_+ a métrica projetiva associada ao cone das funções positivas. Pelo teorema A.5, sobre contração na métrica projetiva, temos para $n, k \geq 1$:

$$\Theta_+\big(\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n+k}(\varphi), \tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^n(\psi)\big) \leq \Theta_{\kappa_0,\delta}\big(\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi}^{n+k}(\varphi), \tilde{\mathcal{L}}_\phi^n(\psi)\big) \leq \Delta\tau^{n-1}, \tag{2.6}$$

onde Δ é o $\theta_{\kappa_0,\delta}-$diâmetro do cone $\Lambda^{\alpha}_{\rho\kappa_0,\delta}$ e $\tau := 1 - e^{-\Delta} \in (0,1)$. Notemos que $\left(\varphi_n := \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(\varphi)\right)_{n\geq 1}$ é Cauchy em relação a Θ_+, já sabemos que Θ_+ é completa (veja exemplo A.3), logo existe $h_\varphi \in C_+$ tal que $\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(\varphi) \xrightarrow{\theta_+} h_\varphi$ e $\int h_\varphi d\nu_{f,\phi} = \int \varphi d\nu_{f,\phi}$. Como $\int \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(\varphi) d\nu_{f,\phi} = \int \varphi d\nu_{f,\phi}$ podemos aplicar a proposição A.1 na norma do sup e na semi-norma da integral e assim $\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(\varphi) \xrightarrow{\mathcal{C}^0} h_\varphi$, desse modo $\mathcal{L}_{f,\phi} h_{f,\varphi} = \lambda_{f,\phi} h_\varphi$.

Afirmação 1: Se $\varphi \in \Lambda^{\alpha}_{\kappa_0,\delta}$ então

$$||\varphi_{n+k} - \varphi_n||_\alpha \leq e^{m\kappa_0 \, diam(M)^\alpha} \Delta e^{\Delta}[1 + m\kappa_0 e^{\kappa_0 \delta^\alpha}]||\varphi||_\infty \tau^{n-1}.$$

De fato; aplicando a proposição A.1 na norma do sup e em $\nu_{f,\phi}$, além da estimativa (2.6), temos

$$\begin{aligned} ||\varphi_{n+k} - \varphi_n||_0 &\leq \left(e^{\Theta^+(\varphi_{n+k},\varphi_n)} - 1\right) \cdot ||\varphi_n||_\infty \\ &\leq \Theta^+(\varphi_{n+k},\varphi_n) e^{\Delta} ||\varphi_n||_\infty \\ &\leq \Delta \tau^{n-1} e^{\Delta} ||\varphi_n||_\infty. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Notemos também que como $\int \varphi_n d\nu_{f,\phi} = \int \varphi_{n+k} d\nu_{f,\phi}$ e φ_n, φ_{n+k} são funções contínuas estritamente positivas então

$$\beta_{\kappa_0}(\varphi_{n+k},\varphi_n) \geq 1 \geq \alpha_{\kappa_0}(\varphi_{n+k},\varphi_n),$$

utilizando a estimativa (2.6)

$$e^{-\Delta\tau^{n-1}} \leq \alpha_{\kappa_0,\delta}(\varphi_{n+k},\varphi_n) \leq 1 \leq \beta_{\kappa_0,\delta}(\varphi_{n+k},\varphi_n) \leq e^{\Delta\tau^{n-1}}. \tag{2.8}$$

Logo, utilizando que $\beta_{\kappa_0,\delta}(\varphi_{n+k},\varphi_n) \leq e^{\Delta\tau^{n-1}}$, temos que para $0 < d(x,y) < \delta$

$$\begin{aligned} \varphi_{n+k}(x) - \varphi_n(x) - \varphi_{n+k}(y) + \varphi_n(y) &\leq e^{\Delta\tau^{n-1}} \varphi_{n+k}(x) - \varphi_n(x) + (1 - e^{\Delta\tau^{n-1}})\varphi_{n+k}(x) \\ &\quad - \varphi_{n+k}(y) + \varphi_n(y) \\ &\leq e^{\kappa_0} d(x,y)^\alpha (e^{\Delta\tau^{n-1}} \varphi_{n+k}(y) - \varphi_n(y)) \\ &\quad + (1 - e^{\Delta\tau^{n-1}})\varphi_{n+k}(x) - \varphi_{n+k}(y) + \varphi_n(y) \\ &\leq e^{\kappa_0} d(x,y)^\alpha (e^{\Delta\tau^{n-1}} \varphi_{n+k}(y) - \varphi_n(y)) \\ &\quad + (1 - e^{\Delta\tau^{n-1}})\varphi_{n+k}(y) e^{\kappa_0 d(x,y)^\alpha} - \varphi_{n+k}(y) + \varphi_n(y) \\ &\leq e^{\kappa_0 d(x,y)^\alpha} (\varphi_{n+k}(y) - \varphi_n(y)) - \varphi_{n+k}(y) + \varphi_n(y) \\ &\leq (e^{\kappa_0 d(x,y)^\alpha} - 1)(\varphi_{n+k}(y) - \varphi_n(y)) \\ &\leq \kappa_0 d(x,y)^\alpha e^{\kappa_0 \delta^\alpha} ||\varphi_{n+k} - \varphi_n||_\infty \\ &\leq \kappa_0 d(x,y)^\alpha e^{\kappa_0 \delta^\alpha} \Delta \tau^{n-1} e^{\Delta} ||\varphi_n||_\infty, \end{aligned}$$

utilizando que $e^{-\Delta\tau^{n-1}} \leq \alpha_{\kappa_0,\delta}(\varphi_{n+k},\varphi_n)$ e repetindo o mesmo tipo de estimativa teremos que

$$\varphi_{n+k}(y)-\varphi_n(y)-\varphi_{n+k}(x)+\varphi_n(x) \leq \kappa_0 d(x,y)^\alpha e^{\kappa_0\delta^\alpha}\Delta\tau^{n-1}e^{\Delta}||\varphi_{n+k}||_\infty,$$

logo

$$|\varphi_{n+k}-\varphi_n|_{\alpha,\delta} \leq \kappa_0 e^{\kappa_0\delta^\alpha}\Delta\tau^{n-1}e^{\Delta}\max\{||\varphi_n||_\infty, ||\varphi_{n+k}||_\infty\} \Rightarrow$$

$$|\varphi_{n+k}-\varphi_n|_{\alpha} \leq m\kappa_0 e^{\kappa_0\delta^\alpha}\Delta\tau^{n-1}e^{\Delta}\max\{||\varphi_n||_\infty, ||\varphi_{n+k}||_\infty\}.$$

Como $\int\varphi_m d\nu_{f,\phi} = \int\varphi d\nu_{f,\phi}$ e φ_m é contínua, existe $x\in M$ tal que $\varphi_m(x)=\int\varphi d\nu_{f,\phi}$. Desse modo, dado $y\in M$ temos

$$|\log\varphi_m(x)-\log\varphi_m(y)| \leq m|\log\varphi_m|_{\alpha,\delta}d(x,y)^\alpha \leq m\kappa_0\text{diam}(M)^\alpha \Rightarrow$$

$$||\varphi_m||_\infty \leq ||\varphi||_\infty e^{m\kappa_0\text{diam}(M)^\alpha}.$$

Assim,

$$||\varphi_{n+k}-\varphi_n||_\alpha \leq e^{m\kappa_0\text{diam}(M)^\alpha}\Delta e^{\Delta}[1+m\kappa_0 e^{\kappa_0\delta^\alpha}]||\varphi||_\infty\tau^{n-1}$$

Decorre da *Afirmação 1* que φ_n converge para h_φ na norma C^α e $h_\varphi\in\Lambda^\alpha_{\kappa_0,\delta}$.

Afirmação 2: $\ker(\mathcal{L}_\phi-\lambda_{f,\phi}I)\cap\mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R})$ *tem dimensão 1.*

De fato; seja $h_{f,\phi} := \lim\limits_{n\to+\infty}\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1)$ e $u\in\ker(\mathcal{L}_{f,\phi|\mathcal{C}^\alpha}-\lambda_{f,\phi}I)\cap\Lambda^\alpha_{\kappa_0,\delta}$, por (2.6) existe $t_1>0$ tal que $t_1u=h$; desse modo, pela *Afirmação 1*, para toda $\varphi\in\Lambda^\alpha_{\kappa_0,\delta}$ temos $\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(\varphi)\xrightarrow{\mathcal{C}^\alpha}\int\varphi d\nu_{f,\phi}\cdot h_{f,\phi}$. Dado $v\in\ker(\mathcal{L}_{f,\phi|\mathcal{C}^\alpha}-\lambda_{f,\phi}I)$, podemos escrever $v=v_B^+-v_B^-$, onde $v_B^\pm := \frac{1}{2}(|v|\pm v)+B$. Tomando $B>0$ de modo adequado temos que $v_B^\pm\in\Lambda^\alpha_{\kappa_0,\delta}$, logo $v=\lim\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(v_B^+)-\lim\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(v_B^-)=\int vd\nu_{f,\phi}\cdot h_{f,\phi}$. Vemos então que $\ker(\mathcal{L}_{f,\phi|\mathcal{C}^\alpha}-\lambda_{f,\phi}I)=\{th_{f,\phi}:t\in\mathbb{R}\}$.

Seja $E_1:=\ker(\mathcal{L}_{f,\phi|\mathcal{C}^\alpha}-\lambda_{f,\phi}I)$ e $E_0:=\{\varphi\in\mathcal{C}^\alpha(M,\mathbb{R}):\int\varphi d\nu_{f,\phi}=0\}$; seja $h_{f,\phi}$ definido na afirmação anterior, então $\int h_{f,\phi}d\nu_{f,\phi}=1$ e $E_1=\{t\cdot h_{f,\phi}:t\in\mathbb{R}\}$. Observemos que E_0,E_1 são subespaços $\mathcal{L}_{f,\phi|\mathcal{C}^\alpha}-$invariantes e $\mathcal{C}^\alpha(X,\mathbb{R})=E_1\oplus E_0$.

Afirmação 3: spec$(\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi|E_0})\subset B(0,\lambda_1)$, *onde* $0<\lambda_1<1$.

De fato; dotemos E_0 da norma $\mathcal{C}^\alpha$ e tomemos $\varphi\in E_0$ com $||\varphi||_\alpha=1$. Logo, $\varphi^\pm_{\kappa_0^{-1}}\in\Lambda^\alpha_{\kappa_0,\delta}$. Pelas discussões anteriores sabemos que $\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(\varphi^\pm_{\kappa_0^{-1}})\xrightarrow{\mathcal{C}^r}\displaystyle\int(\frac{1}{2}|\varphi|+\kappa_0^{-1})d\nu_{f,\phi}\cdot h_{f,\phi}$; assim:

$$||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(\varphi)||_\alpha = ||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(\varphi^+_{\kappa_0^{-1}})-\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(\varphi^-_{\kappa_0^{-1}})||_\alpha \leq ||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(\varphi^+_{\kappa_0^{-1}})-\int(\frac{1}{2}|\varphi|+\kappa_0^{-1})d\nu_{f,\phi}\cdot h_{f,\phi}||_\alpha +$$

$$||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(\frac{1}{2}|\varphi|+\kappa_0^{-1})-\int(\frac{1}{2}|\varphi|+\kappa_0^{-1})d\nu_{f,\phi}\cdot h_{f,\phi}||_\alpha \le e^{m\kappa_0 \mathrm{diam}(M)^\alpha}\Delta e^{\Delta}[1+m\kappa_0 e^{\kappa_0\delta^\alpha}]2(1+\kappa_0^{-1})\tau^{n-1}.$$

Logo $\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi|E_0}$ é uma contração na norma $\mathcal{C}^\alpha$ para n suficientemente grande e assim $spec(\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi|E_0})\subset B(0,\lambda_1)$, onde $0<\lambda_1<1$.

Decorre então das afirmações o gap espetral.

(ii)] A prova segue a mesma estratégia do item (i). Tomemos $\kappa_0, c_{r,s}$ e ρ como na proposição 2.43. Seja $\varphi,\psi\in\Lambda^r_{\kappa_0}$ e θ_+ a métrica projetiva associada ao cone das funções positivas. Pelo teorema A.5, para $n,k\ge 1$ temos:

$$\Theta_+\big(\tilde{\mathcal{L}}^{n+k}_{f,\phi}(\varphi),\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(\psi)\big)\le \Theta_{\kappa_0}\big(\tilde{\mathcal{L}}^{n+k}_{f,\phi}(\varphi),\tilde{\mathcal{L}}^n_{\phi}(\psi)\big)\le \Delta\tau^{n-1}, \tag{2.9}$$

onde Δ é o $\theta_{\kappa_0}-$diâmetro do cone $\Lambda^r_{\rho\kappa_0}$ e $\tau:=1-e^{-\Delta}\in(0,1)$. Notemos que $\big(\varphi_n:=\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(\varphi)\big)_{n\ge1}$ é Cauchy em relação a Θ_+, já sabemos que Θ_+ é completa, logo existe $h_\varphi\in C_+$ tal que $\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(\varphi)\xrightarrow{\theta_+}h_\varphi$ e $\int h_\varphi d\nu_{f,\phi}=\int\varphi d\nu_{f,\phi}$. Como $\int\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(\varphi)d\nu_{f,\phi}=\int\varphi d\nu_{f,\phi}$ podemos aplicar a proposição A.1 na norma do sup e na semi-norma da integral e assim $\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(\varphi)\xrightarrow{\mathcal{C}^0}h_\varphi$, desse modo $\mathcal{L}_{f,\phi}h_{f,\varphi}=\lambda_{f,\phi}h_\varphi$.

Afirmação 1: Se $\varphi\in\Lambda^r_{\kappa_0}$ *então* $||\varphi_{n+k}-\varphi_n||_r\le\Delta\tau^{n-1}\big(\kappa_0(e^\Delta+2)+e^\Delta\big)(\kappa_0 diam(M)+1)||\varphi||_0$.

De fato; aplicando a proposição A.1 na norma do sup e em $\nu_{f,\phi}$, além da estimativa (3.8) temos

$$\begin{aligned}||\varphi_{n+k}-\varphi_n||_\infty &\le \big(e^{\Theta^+(\varphi_{n+k},\varphi_n)}-1\big)\cdot||\varphi_n||_\infty\\ &\le \Theta^+(\varphi_{n+k},\varphi_n)e^\Delta||\varphi_n||_\infty\\ &\le \Delta\tau^{n-1}e^\Delta||\varphi_n||_\infty.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Notemos também que como $\int\varphi_n d\nu_{f,\phi}=\int\varphi_{n+k}d\nu_{f,\phi}$ e φ_n,φ_{n+k} são funções contínuas estritamente positivas então

$$\beta_{\kappa_0}(\varphi_{n+k},\varphi_n)\ge 1\ge\alpha_{\kappa_0}(\varphi_{n+k},\varphi_n),$$

logo

$$\Theta_{\kappa_0}(\varphi_{n+k},\varphi_n)\le\Delta\tau^{n-1}\Rightarrow\frac{\beta_{\kappa_0}(\varphi_{n+k},\varphi_n)}{\alpha_{\kappa_0}(\varphi_{n+k},\varphi_n)}\le e^{\Delta\tau^{n-1}}\Rightarrow|1-\alpha_{\kappa_0}(\varphi_{n+k},\varphi_n)|\le\Delta\tau^{n-1}.$$

Sendo assim,

$$||D^s(\varphi_{n+k}-\varphi_n)||_\infty\le||D^s(\varphi_{n+k}-\alpha_{\kappa_0}(\varphi_{n+k},\varphi_n)\cdot\varphi_n)||_\infty+|\alpha_{\kappa_0}(\varphi_{n+k},\varphi_n)-1|\cdot||D^s\varphi_n||_\infty\le$$

$$c_{r,s}^{r-s}\kappa_0||\varphi_{n+k}-\alpha_{\kappa_0}(\varphi_{n+k},\varphi_n)\cdot\varphi_n||_\infty+|\alpha_{\kappa_0}(\varphi_{n+k},\varphi_n)-1|\cdot||D^s\varphi_n||_\infty\leq$$

$$c_{r,s}^{r-s}\kappa_0\Big(||\varphi_{n+k}-\varphi_n||_\infty+|1-\alpha_{\kappa_0}(\varphi_{n+k},\varphi_n)|\cdot||\varphi_n||_0\Big)+c_{r,s}^{r-s}\kappa_0|\alpha_{\kappa_0}(\varphi_{n+k},\varphi_n)-1|\cdot||\varphi_n||_\infty\leq$$

$$c_{r,s}^{r-s}\kappa_0\Big[||\varphi_{n+k}-\varphi_n||_\infty+||\varphi_n||_\infty 2\Delta\tau^{n-1}\Big]\leq$$

$$c_{r,s}^{r-s}\kappa_0\Big[\Delta\tau^{n-1}e^{\Delta}||\varphi_n||_\infty+||\varphi_n||_\infty 2\Delta\tau^{n-1}\Big]\leq$$

$$c_{r,s}^{r-s}\kappa_0\Delta\tau^{n-1}||\varphi_n||_\infty(e^{\Delta}+2). \tag{2.11}$$

Como φ converge uniformemente, utilizando as estimativas (2.10) e (2.11) teremos que φ_n é uma sequência de Cauchy em C^r, além disso, fazendo então $k\to+\infty$ temos que

$$||h_\varphi-\varphi_n||_r\leq\Delta\tau^{n-1}\big(\kappa_0(e^{\Delta}+2)+e^{\Delta}\big)||\varphi_n||_0. \tag{2.12}$$

Como $\int\varphi_n d\nu_{f,\phi}=\int\varphi d\nu_{f,\phi}$ e φ_n é contínua, existe $x\in M$ tal que $\varphi_n(x)=\int\varphi d\nu_{f,\phi}$. Desse modo, dado $y\in M$ temos

$$|\varphi_n(x)-\varphi_n(y)|\leq||D\varphi||_0\text{diam}(M)\Rightarrow|\varphi(y)|\leq||\varphi||_\infty(\kappa_0\text{diam}(M)+1),$$

decorre então da estimativa (2.12) que

$$||h_\varphi-\varphi_n||_r\leq\Delta\tau^{n-1}\big(\kappa_0(e^{\Delta}+2)+e^{\Delta}\big)(\kappa_0\text{diam}(M)+1)||\varphi||_\infty.$$

Decorre da *Afirmação 1* que φ_n converge para h_φ na norma C^r e $h_\varphi\in\Lambda^r_{\kappa_0}$.

Afirmação 2: $\ker(\mathcal{L}_\phi-\lambda_{f,\phi}I)\cap\mathcal{C}^r(M,\mathbb{R})$ *tem dimensão 1.*

De fato; seja $h_{f,\phi}:=\lim\limits_{n\to+\infty}\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1)$ e $u\in\ker(\mathcal{L}_{f,\phi|\mathcal{C}^r}-\lambda_{f,\phi}I)\cap\Lambda^r_{\kappa_0}$, por (3.8) existe $t_1>0$ tal que $t_1u=h$; desse modo, pela *Afirmação 1*, para toda $\varphi\in\Lambda^r_{\kappa_0}$ temos $\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(\varphi)\xrightarrow{\mathcal{C}^r}\int\varphi d\nu_{f,\phi}\cdot h_{f,\phi}$. Dado $v\in\ker(\mathcal{L}_{f,\phi|\mathcal{C}^r}-\lambda_{f,\phi}I)$, existe um número $B>0$ tal que $v+B$ é um elemento de $\Lambda^r_{\kappa_0}$; logo $v=\lim\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(v+B)-\lim\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(B)=\int vd\nu_{f,\phi}\cdot h_{f,\phi}$, vemos então que $\ker(\mathcal{L}_{f,\phi|\mathcal{C}^r}-\lambda_{f,\phi}I)=\{th_{f,\phi}:t\in\mathbb{R}\}$.

Seja $E_1:=\ker(\mathcal{L}_{f,\phi|\mathcal{C}^r}-\lambda_{f,\phi}I)$ e $E_0:=\{\varphi\in\mathcal{C}^r(M,\mathbb{R}):\int\varphi d\nu_{f,\phi}=0\}$; seja $h_{f,\phi}$ definido na afirmação anterior, então $\int h_{f,\phi}d\nu_{f,\phi}=1$ e $E_1=\{t\cdot h_{f,\phi}:t\in\mathbb{R}\}$. Observemos que E_0,E_1 são subespaços $\mathcal{L}_{f,\phi|\mathcal{C}^r}-$invariantes e $\mathcal{C}^r(M,\mathbb{R})=E_1\oplus E_0$.

Afirmação 3: *spec*$(\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi|E_0})\subset B(0,\lambda_1)$, *onde* $0<\lambda_1<1$.

De fato; dotemos E_0 da norma $\mathcal{C}^r$ e tomemos $\varphi \in E_0$ com $||\varphi||_r = 1$. Logo $\varphi + 1 + \frac{1}{k} \in \Lambda^r_{\kappa_0}$. Pelas discussões anteriores, sabemos que $\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(\varphi + 1 + \dfrac{1}{k}) \xrightarrow{\mathcal{C}^r} \displaystyle\int (\varphi + 1 + \dfrac{1}{k}) d\nu_{f,\phi} \cdot h_{f,\phi} = (1 + \dfrac{1}{k}) \cdot h_{f,\phi}$; assim:

$$||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(\varphi)||_r = ||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(\varphi + 1 + \frac{1}{k}) - \tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1 + \frac{1}{k})||_r \leq ||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(\varphi + 1 + \frac{1}{k}) - (1 + \frac{1}{k}) \cdot h_{f,\phi}||_r +$$

$$||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}(1 + \frac{1}{k}) - (1 + \frac{1}{k}) \cdot h_{f,\phi}||_r \leq \Delta \tau^{n-1} \big(\kappa_0 (e^{\Delta} + 2) + e^{\Delta}\big)(\kappa_0 \mathrm{diam}(M) + 1) 2 (1 + \frac{1}{k}).$$

Logo $\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi|E_0}$ é uma contração na norma $\mathcal{C}^r$ para n suficientemente grande e assim *spec*$(\tilde{\mathcal{L}}_{f,\phi|E_0}) \subset B(0, \lambda_1)$, onde $0 < \lambda_1 < 1$.

Decorre então das afirmações o gap espetral. ∎

Corolário 2.47. *(i) Dado $f \in D^\alpha$ e $\phi \in C^\alpha$ existe um único $\nu \in \ker(\mathcal{L}^*_{f,\phi|C^\alpha} - \lambda_{f,\phi} I)$ tal que $\nu(1) = 1$.*

(ii) Dado $f \in D^r$ e $\phi \in C^r$ existe um único $\nu \in \ker(\mathcal{L}^*_{f,\phi|C^r} - \lambda_{f,\phi} I)$ tal que $\nu(1) = 1$.

Prova. (i)] Seja $\nu \in \ker(\mathcal{L}^*_{f,\phi|C^\alpha} - \lambda_{f,\phi} I)$ tal que $\nu(1) = 1$. Dado $\varphi \in C^\alpha$ sabemos do teorema anterior que $\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}\varphi \to \int \varphi d\nu_{f,\phi} \cdot h_{f,\phi}$, logo

$$\nu(\varphi) = \lim \nu(\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}\varphi) = \nu(\int \varphi d\nu_{f,\phi} \cdot h_{f,\phi}) = \int \varphi d\nu_{f,\phi} \nu(h_{f,\phi}) = \int \varphi d\nu_{f,\phi} \lim \nu(\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi} 1) =$$

$$\int \varphi d\nu_{f,\phi},$$

e assim provamos a unicidade.

(ii)] A prova é rigorosamente a mesma que a anterior. ∎

O próximo corolário nos diz que temos uniformidade no gap espectral.

Corolário 2.48. *(i) Dado $f \in D^\alpha$ Lipschitz e $\phi \in C^\alpha(M, \mathbb{R})$ existem vizinhanças $\mathcal{F}$ de f, na topologia dada pelo Lip, e $\mathcal{W}$ de ϕ, além de constantes $k \geq 0$ e $\tau \in (0,1)$ tal que: se $(\hat{f}, \hat{\phi}) \in \mathcal{F} \times \mathcal{W}$ então dado $\varphi \in C^\alpha(M, \mathbb{R})$ temos $||\tilde{\mathcal{L}}_{\hat{f},\hat{\phi}} - \int \varphi d\nu_{\hat{f},\hat{\phi}} \cdot h_{\hat{f},\hat{\phi}}||_\alpha \leq k\tau^n ||\varphi||_\alpha$.*

(ii) Dado $f \in D^r$ e $\phi \in C^r(M, \mathbb{R})$ existem vizinhanças $\mathcal{F}^r$ de f e $\mathcal{W}^r$ de ϕ, além de constantes $k \geq 0$ e $\tau \in (0,1)$ tal que: se $(\hat{f}, \hat{\phi}) \in \mathcal{F}^r \times \mathcal{W}^r$ então dado $\varphi \in C^r(M, \mathbb{R})$ temos

$$||\tilde{\mathcal{L}}_{\hat{f},\hat{\phi}} - \int \varphi d\nu_{\hat{f},\hat{\phi}} \cdot h_{\hat{f},\hat{\phi}}||_r \leq k\tau^n ||\varphi||_r,$$

Prova. Decorre diretamente das estimativas feitas na *Afirmação 3* dos itens (i) e (ii) do teorema anterior, bem como corolário 2.44. ■

Usaremos o corolário anterior para aplicar os resultados das seções sobre estabilidade e Linear response.

Proposição 2.49. *i) A aplicação* $\mathcal{D}^\alpha \times C^\alpha(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi) \longmapsto P_{\text{top}}(f, \phi)$ *é contínua;*

ii) A aplicação $\mathcal{D}^\alpha \times C^\alpha(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi) \longmapsto \frac{d\mu_{f,\phi}}{d\nu_{f,\phi}}$ *é contínua, se dotarmos a imagem da norma do* sup*;*

iii) A aplicação $\mathcal{D}^\alpha \times C^\alpha(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi) \longmapsto \nu_{f,\phi}$ *é contínua, se dotarmos a imagem da topologia fraca***;*

iv) A aplicação $\mathcal{D}^\alpha \times C^\alpha(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi) \longmapsto \mu_{f,\phi}$ *é contínua, se dotarmos a imagem da topologia fraca***.*

Prova. A proposição é uma aplicação direta do teorema 1.12, para isso basta provarmos o item iii) do teorema 1.12. Como $h_{f,\phi} \in \Lambda^\alpha_{\kappa,\delta}$ teremos que $||h||_0 \leq e^{m\kappa \text{diam}(M)^\alpha}$. Decorre então do corolário 2.48 que $||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}||_0 \leq k\tau^n + e^{m\kappa \text{diam}(M)^\alpha}$, e assim podemos aplicar o teorema 1.12. ■

Como aplicação direta da proposição anterior temos,

Corolário 2.50. *As seguintes aplicações são contínuas:*

(i) $\mathcal{D}^{1+\alpha} \times \mathbb{R} \ni (f, t) \mapsto P_{\text{top}}(f, t \log |\det Df|)$*;*

(ii) $\mathcal{D}^{1+\alpha} \times \mathbb{R} \ni (f, t) \mapsto P_{\text{top}}(f, t \log ||Df^{\pm 1}||)$*;*

(iii) $\mathcal{D}^\alpha \times C^\alpha(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi) \mapsto h_{\mu_{f,\phi}}(f) = P_{\text{top}}(f, \phi) - \int \phi d\mu_{f,\phi}$.

Utilizando o Corolário 2.35 podemos obter mais um resultado de estabilidade para equação cohomológica:

Proposição 2.51. *Fixado* $\psi \in C^\alpha(M, \mathbb{R})$*, o conjunto*

$$\{\hat{f} \in \mathcal{D}^\alpha : \psi \text{ é cohomóloga a uma constante em } C^\alpha(M, \mathbb{R}) \text{ para } \hat{f}\}$$

é fechado.

Pelo corolário 2.48 podemos aplicar a proposição 2.3 e melhorar a proposição 2.36:

Proposição 2.52. *Fixada* $f \in \mathcal{D}^r$. *A aplicação* $C^r \ni \phi \mapsto \frac{d\mu_{f,\phi}}{d\nu_{f,\phi}} \in C^r(M;\mathbb{R})$ *é analítica.*

Pelo corolário 2.48 e a proposição 2.49 podemos aplicar o Teorema 2.9, obtendo:

Proposição 2.53. *Se* $r \geq 2$ *as seguintes aplicações são* C^{r-1}*:*

i. $\mathcal{D}^r \times C^\alpha(M,\mathbb{R}) \ni (f,\phi) \mapsto \lambda_{f,\phi}$;

ii. $\mathcal{D}^r \times C^\alpha(M,\mathbb{R}) \ni (f,\phi) \mapsto \frac{d\mu_{f,\phi}}{d\nu_{f,\phi}} \in \mathcal{C}^{r-1}$;

iii. $\mathcal{D}^r \times C^\alpha(M,\mathbb{R}) \ni (f,\phi) \mapsto \nu_{f,\phi} \in C^1$;

iv. $\mathcal{D}^r \times C^\alpha(M,\mathbb{R}) \ni (f,\phi) \mapsto \mu_{f,\phi} \in C^1$.

Podemos melhorar a estabilidade do Teorema Central do Limite quando exigimos mais regularidade das dinâmicas expansoras:

Proposição 2.54. *Seja* $r \geq 2$ *e* $(f,\phi) \in \mathcal{D}^r \times C^\alpha(M,\mathbb{R})$. *Se* $\psi \in C^r(M,\mathbb{R})$ *então:*

i. ou $\psi = u \circ f - u + \int \psi \, d\mu_{f,\phi}$ *para algum* $u \in C^r(M,\mathbb{R})$ *(nós dizemos que* ψ *é cohomóloga a uma constante em* $C^r(M,\mathbb{R})$*)*

ii. ou a convergência em distribuição

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(m,\sigma^2)$$

vale com média $m = m_{f,\phi}(\psi) = \int \psi \; d\mu_{f,\phi}$ *e variância* σ^2 *dada por*

$$\sigma^2 = \sigma^2_{f,\phi}(\psi) = \int \tilde{\psi}^2 \; d\mu_{f,\phi} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \int \tilde{\psi}(\tilde{\psi} \circ f^n) \; d\mu_{f,\phi} > 0,$$

onde $\tilde{\psi} = \psi - \int \psi \; d\mu_{f,\phi}$ *é uma função com média 0 dependendo de* f *e* ϕ.

Ademais, $\mathcal{D}^r \times C^r(M,\mathbb{R}) \times C^r(M,\mathbb{R}) \ni (f,\phi,\psi) \mapsto m_{f,\phi}(\psi)$ *e* $\mathcal{D}^r \times C^r(M,\mathbb{R}) \times C^r(M,\mathbb{R}) \ni (f,\phi,\psi) \mapsto \sigma^2_f(\psi)$ *são* C^{r-1}.

Prova. A prova seria uma aplicação direta do Teorema 2.14 se no item i. a solução da equação cohomológica estivesse em $L^2(\mu_{f,\phi})$. No prova da proposição 2.38 já vimos que ψ ser cohomólogo a uma constante em $L^2(\mu_{f,\phi})$ equivale a ser cohomólogo a uma constante em C^α. Porém no nosso caso $\psi \in C^r(M,\mathbb{R})$ e mais uma vez aplicando o Teorema de

Livschitz para aplicações expansoras (Veja Teorema 2.37) teremos que ψ ser cohomólogo a uma constante em $L^2(\mu_{f,\phi})$ equivale a ser cohomólogo a uma constante em C^r. Assim finalizamos a prova da proposição. ■

E obtemos como consequência mais um resultado de estabilidade para equação cohomológica:

Corolário 2.55. *Seja $r \geq 1$. Se $\psi \in C^r(M, \mathbb{R})$ não é cohomóloga a uma constante em $C^r(M, \mathbb{R})$ para $f \in \mathcal{D}^r$ então a mesma propriedade vale para todos $\hat{f}$ suficientemente próximos de f. Como consequência, os conjuntos*

$$\{\hat{f} \in \mathcal{D}^r : \psi \text{ é cohomóloga a uma constante em } C^r(M, \mathbb{R}) \text{ para } \hat{f}\}$$

e

$$\{\hat{\psi} \in C^r(M, \mathbb{R}) : \hat{\psi} \text{ é cohomóloga a uma constante em } C^r(M, \mathbb{R}) \text{ para } f\}$$

são fechados.

Por fim, exigindo mais regularidade das dinâmicas expansoras obtemos mais estabilidade no teorema de grandes desvios:

Proposição 2.56. *Seja V um espaço métrico compacto e $\big((f_v, \phi_v, \psi_v)\big)_{v \in V}$ uma família injetiva e parametrizada (contínua) de aplicações em $\mathcal{D}^\alpha \times C^\alpha(M, \mathbb{R}) \times C^\alpha(M, \mathbb{R})$. Se o observável ψ_{v_*} não é cohomólogo a uma constante, para algum $v_* \in V$ então existe uma vizinhança aberta U de v_* tal que para todo $v \in \overline{U}$ e $[a, b] \subset \mathbb{R}$*

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mu_{f_v, \phi_v} \left(x \in M : \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi_v \circ f_v^j(x) \in [a, b] \right) \leq - \inf_{s \in [a,b]} I_{f_v, \phi_v, \psi_v}(s)$$

e

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mu_{f_v, \phi_v} \left(x \in M : \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi_v \circ f_v^j(x) \in (a, b) \right) \geq - \inf_{s \in (a,b)} I_{f_v, \phi_v, \psi_v}(s).$$

Além disso,

i. a transformada de Legendre $(s, v) \mapsto I_{f_v, \phi_v, \psi_v}(s)$ é contínua sobre $J \times \overline{U}$, na topologia C^0, para todo compacto $J \subset \mathbb{R}$.

ii. Suponha adicionalmente que V é uma variedade compacta e a parametrização $\big((f_v, \phi_v, \psi_v)\big)_{v \in V}$ esta contida em $D^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \times C^r(M, \mathbb{R})$, para $r \geq 2$, e é C^{r-1}. Então a transformada de Legendre $(s, v) \mapsto I_{f_v, \phi_v, \psi_v}(s)$ é C^{r-1}.

2.4 Revisitando as aplicações não-uniformemente expansoras

Nessa seção, de maneira semelhante a seção anterior, aplicaremos os resultados obtidos na seção sobre Linear response para a classe de aplicações já estudadas na seção 1.4.2.

Fixemos $f_0 : M \to M$ satisfazendo as hipóteses (H1) e (H2) descritas na seção 1.4.2. Seja $\mathcal{W} \subset C^\alpha(M, \mathbb{R})$ o conjunto de ϕ tais que f_0 e ϕ satisfazem as hipóteses (H1), (H2) e (P), temos que $\mathcal{W}$ é um aberto na topologia C^α. Como havíamos comentado, em [CV13] é provado que dado $\phi_0 \in \mathcal{W}$ existe uma vizinhança U de ϕ_0, na topologia C^α, tal que $\mathcal{L}_{f_0,\phi}(\Lambda_{\kappa,\delta}) \subset \Lambda_{\hat{\lambda}\kappa,\delta}$ para todo $\phi \in U$. Aplicando o corolário 1.9 temos que existem constantes $k \geq 0$ e $\tau \in (0,1)$ tal que: se $\varphi \in C^\alpha(M, \mathbb{R})$ então $||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f_0,\phi}\varphi - \int \varphi d\nu_{f_0,\phi} h_{f_0,\phi}||_\alpha \leq k\tau^n ||\varphi||_\alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\phi \in U$. Assim aplicando a Proposição 2.3 e o Teorema 2.25,

Proposição 2.57. *As seguintes aplicações variam analiticamente:*

- $\mathcal{W} \ni \phi \mapsto P_{\text{top}}(f_0, \phi)$;
- $\mathcal{W} \ni \phi \mapsto \frac{d\mu_{f_0,\phi}}{d\nu_{f_0,\phi}} \in C^\alpha$;
- $\mathcal{W} \ni \phi \mapsto \nu_{f_0,\phi} \in (C^\alpha)^*$;
- $\mathcal{W} \ni \phi \mapsto \mu_{f_0,\phi} \in (C^\alpha)^*$.

Ademais, dado $\hat{\phi} \in \mathcal{W}$ e $H \in C^\alpha(M, \mathbb{R})$ temos

$$D_\phi P_{\text{top}}(f_0, \phi) \,|\hat{\phi} \odot H = \int H \, d\mu_{f_0,\hat{\phi}}.$$

Relembremos que para $r \geq 1$ natural, definimos $\mathcal{G}^r := \{(f, \phi); f \in C^r(M, M)$ e $\phi \in C^r(M, \mathbb{R})$ satisfazem as hipóteses (H1), (H2) e (P"), para o mesmo r e $q\}$ e dotamos $\mathcal{G}^r$ da topologia $\mathcal{C}^r \times \mathcal{C}^r$. Em [CV13] é provado que dado $(f_0, \phi_0) \in \mathcal{G}^r$ existe uma vizinhança U de (f_0, ϕ_0), na topologia $\mathcal{C}^r \times \mathcal{C}^r$, tal que $\mathcal{L}_{f,\phi}(\Lambda^r_\kappa) \subset \Lambda^r_{\hat{\lambda}\kappa}$ para todo $(f, \phi) \in U$. Aplicando o Corolário 1.9 temos que existem constantes $k \geq 0$ e $\tau \in (0,1)$ tal que: se $\varphi \in C^r(M, \mathbb{R})$ então $||\tilde{\mathcal{L}}^n_{f,\phi}\varphi - \int \varphi d\nu_{f,\phi} h_{f,\phi}||_r \leq k\tau^n ||\varphi||_r$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $(f, \phi) \in U$. Definiremos $\tilde{\mathcal{G}}^r := \mathcal{G}^r \cap \mathcal{G}^{r-1}$, pelas imposições das constantes nas hipóteses (H1), (H2) e (P") teremos que $\tilde{\mathcal{G}}^r$ é aberto na topologia $\mathcal{C}^r \times \mathcal{C}^r$; por fim definamos $\mathcal{F}^r_\phi := \{f : (f, \phi) \in \tilde{\mathcal{G}}^r\}$.

Assim aplicando mais uma vez a Proposição 2.3 podemos melhorar a proposição anterior,

Proposição 2.58. *Fixado* $(f_0, \phi_0) \in \mathcal{G}^r$*. Seja* $\mathcal{W}^r := \{\phi : (f_0, \phi) \in \mathcal{G}^r\}$*, então a aplicação* $\mathcal{W}^r \ni \phi \mapsto \frac{d\mu_{f_0,\phi}}{d\nu_{f_0,\phi}} \in C^\alpha$ *é analítica.*

Aplicando o Teorema 2.9 obtemos os resultados de diferenciabilidade em relação a dinâmica,

Proposição 2.59. *As seguintes aplicações são* C^{r-1}*:*

i. $\tilde{\mathcal{G}}^r \ni (f, \phi) \mapsto P_{\text{top}}(f, \phi)$*;*

ii. $\tilde{\mathcal{G}}^r \ni (f, \phi) \mapsto \frac{d\mu_{f,\phi}}{d\nu_{f,\phi}} \in \mathcal{C}^{r-1}$*;*

iii. $\tilde{\mathcal{G}}^r \ni (f, \phi) \mapsto \nu_{f,\phi} \in C^1$*;*

iv. $\tilde{\mathcal{G}}^r \ni (f, \phi) \mapsto \mu_{f,\phi} \in C^1$*.*

Como consequências do teorema anterior temos:

Corolário 2.60. *Seja* $r \geq 3$*. Dado um aberto limitado* V *de* $\mathcal{F}^r_\phi$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que* $V \times (-\delta, \delta) \subset \tilde{\mathcal{G}}^r$ *e a função* $\mathcal{F}^r \times (-\delta, \delta) \ni (f, t) \mapsto P_{\text{top}}(f, -t \log ||Df^{\pm 1}||)$ *é* C^{r-1}*.*

Corolário 2.61. *Seja* $r \geq 3$*. A função entropia* $\tilde{\mathcal{G}}^r \ni (f, \phi) \mapsto h_{\mu_{f,\phi}}$ *e as funções expoente de Lyapunov*

$$\tilde{\mathcal{G}}^{r+1} \ni (f, \phi) \mapsto \int \log ||Df(x)|| \, d\mu_{f,\phi},$$

$$\tilde{\mathcal{G}}^{r+1} \ni (f, \phi) \mapsto \int \log ||Df(x)^{-1}||^{-1} \, d\mu_{f,\phi}$$

e

$$\tilde{\mathcal{G}}^{r+1} \ni (f, \phi) \mapsto \int \log |\det Df(x)| \, d\mu_{f,\phi}$$

são C^{r-1}*.*

Aplicando o Corolário 2.33 e os resultados de diferenciabilidade obtemos estabilidade da função de correlação,

Corolário 2.62. *Consideremos a função de correlação*

$$C_{\varphi,\psi}(f, \phi, n) = \int (\varphi \circ f^n)\psi \, d\mu_{f,\phi} - \int \varphi \, d\mu_{f,\phi} \int \psi \, d\mu_{f,\phi}.$$

Então

(i) *Se* $\varphi, \psi : M \to \mathbb{R}$ *são observáveis Holder contínuos, a aplicação* $\mathcal{G} \ni (f, \phi) \mapsto C_{\varphi,\psi}(f, \phi, n)$ *é analítica em relação a* ϕ *e contínua em relação a* f*;*

(ii) *Se* $\varphi, \psi : M \to \mathbb{R}$ *são observáveis* C^2*, a aplicação* $\mathcal{F}_0^2 \ni f \mapsto C_{\varphi,\psi}(f, 0, n)$ *é* C^1*,* $\partial_f C_{\varphi,\psi}(f, 0, n)$ *converge para 0 quando* $n \to \infty$*, e a convergência pode ser tomada uniforme numa pequena vizinhança de* f*.*

Pelo Teorema 2.14 também obtemos o resultado de estabilidade para o Teorema Central do Limite,

Teorema 2.63. *Seja* $(f, \phi) \in \mathcal{G}$*. Se* $\psi \in C^\alpha(M, \mathbb{R})$ *então:*

i. *ou* $\psi = u \circ f - u + \int \psi \, d\mu_{f,\phi}$ *para algum* $u \in L^2(\mu_{f,\phi})$

ii. *ou a convergência em distribuição*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

vale com média $m = m_{f,\phi}(\psi) = \int \psi \; d\mu_{f,\phi}$ *e variância* σ^2 *dada por*

$$\sigma^2 = \sigma^2_{f,\phi}(\psi) = \int \tilde{\psi}^2 \; d\mu_{f,\phi} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int \tilde{\psi}(\tilde{\psi} \circ f^n) \; d\mu_{f,\phi} > 0,$$

onde $\tilde{\psi} = \psi - \int \psi \; d\mu_{f,\phi}$ *é uma função com média 0 dependendo de* f *e* ϕ*.*

Ademais,

iii. *as funções* $\mathcal{G} \times C^\alpha(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi, \psi) \mapsto m_{f,\phi}(\psi)$ *e* $\mathcal{G} \times C^\alpha(M, \mathbb{R}) \ni (\phi, \psi) \mapsto \sigma_f^2(\psi)$ *são contínuas com respeito a* (f, ϕ, ψ) *e são analíticas com respeito a* (ϕ, ψ)

iv. *as funções* $\tilde{\mathcal{G}}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi, \psi) \mapsto m_{f,\phi}(\psi)$ *e* $\tilde{\mathcal{G}}^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \ni (f, \phi, \psi) \mapsto \sigma_f^2(\psi)$ *são* C^{r-1}*.*

Como consequência temos a estabilidade na equação cohomológica,

Corolário 2.64. *Se* $\psi \in C^\alpha(M, \mathbb{R})$ *não é cohomóloga a uma constante* $L^2(M, \mu_{f,\phi})$ *para* $(f, \phi) \in \mathcal{G}$ *então a mesma propriedade vale para todos* $(\hat{f}, \hat{\phi})$ *suficientemente próximos de* (f, ϕ)*. Como consequência, os conjuntos* $\{(\hat{f}, \hat{\phi}) \in \mathcal{G} : \psi$ *é cohomóloga em* $L^2(\mu_{\hat{f},\hat{\phi}})\}$ *e* $\{\hat{\psi} \in C^\alpha(M, \mathbb{R}) : \hat{\psi}$ *é cohomóloga em* $L^2(\mu_{\hat{f},\hat{\phi}})\}$ *são fechados.*

Por fim, aplicando o Teorema 2.22 obtemos a estabilidade do princípio de grandes desvios,

Proposição 2.65. *Seja V um espaço métrico compacto e $\big((f_v, \phi_v, \psi_v)\big)_{v \in V}$ uma família injetiva e parametrizada (contínua) de aplicações em $\mathcal{G} \times C^\alpha(M, \mathbb{R})$, onde Y é um aberto de $\mathcal{G}$ e X é um aberto de $C^\alpha(M, \mathbb{R})$. Se o observável $\psi_{v_*} \in X$ não é cohomólogo a uma constante em $L^2(\mu_{f_{v_*}, \phi_{v_*}})$, para algum $v_* \in V$ então existe um intervalo $J \subset \mathbb{R}$ e uma vizinhança aberta U de v_* tal que para todo $v \in \overline{U}$ e $[a, b] \subset J$*

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mu_{f_v, \phi_v} \left(x \in M : \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi_v \circ f_v^j(x) \in [a, b] \right) \leq - \inf_{s \in [a,b]} I_{f_v, \phi_v, \psi_v}(s)$$

e

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mu_{f_v, \phi_v} \left(x \in M : \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi_v \circ f_v^j(x) \in (a, b) \right) \geq - \inf_{s \in (a,b)} I_{f_v, \phi_v, \psi_v}(s).$$

Além disso,

i. a transformada de Legendre $(s, v) \mapsto I_{f_v, \phi_v, \psi_v}(s)$ é contínua sobre $J \times \overline{U}$, na topologia C^0.

ii. Suponha adicionalmente que V é uma variedade compacta e a parametrização $\big((f_v, \phi_v, \psi_v)\big)_{v \in V}$ é C^{r-1}. Ao invés da família para metrizada $\big((f_v, \phi_v, \psi_v)\big)_{v \in V}$ estar em $\mathcal{G} \times C^\alpha(M, \mathbb{R})$ iremos supor que ela está em $\tilde{\mathcal{G}}^r \times C^r(M, \mathbb{R})$. Então a transformada de Legendre $(s, v) \mapsto I_{f_v, \phi_v, \psi_v}(s)$ é C^{r-1}.

Capítulo 3

Análise multifractal

O objetivo desse capítulo é estudar a pressão topológica de conjuntos associados ao chamado *conjunto irregular*, já definido na introdução, para uma classe de sistemas que possuam um estado de equilíbrio com alguma propriedade do tipo Gibbs-fraco e com estimativas de grandes desvios. Em particular estamos interessados em aplicações não-uniformemente expansoras que já descrevemos e também repulsores. A princípio nossos objetivos parecem não ter elações com os temas já abordados, porém como veremos os resultados obtidos anteriormente serão utilizados de maneira natural.

Dada uma dinâmica $f : M \to M$, um potencial $\phi : M \to \mathbb{R}$, um observável $\psi : M \to \mathbb{R}$, $c > 0$ e um estado de equilíbrio ergódico μ para f com respeito a ϕ, estamos interessados em estudar a pressão topológica dos conjuntos

$$\overline{X}_{\mu,\psi,c} = \Big\{x \in M : \limsup_{n\to\infty} \Big|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \psi(f^j(x)) - \int \psi \, d\mu\Big| \geq c\Big\}$$

e

$$\underline{X}_{\mu,\psi,c} = \Big\{x \in M : \liminf_{n\to\infty} \Big|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \psi(f^j(x)) - \int \psi \, d\mu\Big| \geq c\Big\}.$$

Nossos resultados, moralmente, nos garantem que se μ é um único estado de equilíbrio que tem alguma propriedade do tipo Gibbs fraco e tem estimativas exponenciais de grandes desvios, então a pressão topológica dos conjuntos $\underline{X}_{\mu,\psi,c}$ e $\overline{X}_{\mu,\psi,c}$ é estritamente menor que a pressão topológica total do sistema.

Na seção 3.1.1 provamos que, se μ é uma medida Gibbs, então de fato a pressão topológica dos conjuntos $\underline{X}_{\mu,\psi,c}$ e $\overline{X}_{\mu,\psi,c}$ é estritamente menor que a pressão topológica total do sistema. No caso de repulsores, provamos que a pressão topológica desses conjuntos é a mesma e pode ser expressa em termos da pressão topológica total do sistema e a transformada de Legendre. Além disso, obtemos resultados desse gênero para certos conjuntos irregulares definido por medidas empíricas. Também estendemos esses resultados para o caso em que μ tem propriedades fracas do tipo Gibbs, além de obter aplicações e extensões para o caso de dinâmicas de Manneville-Pomeau, aplicações quadráticas, aplicações multimodais, difeomorfismos hiperbólicos e fluxos hiperbólicos. Por fim, um exemplo de [DGR11, DG12] é dado ilustrando um caso onde a função pressão dos conjuntos é descontínua e não estritamente decrescente.

Na seção 3.2, estendemos o nosso problema para o mundo quase aditivo, ou seja, trabalharemos com uma sequência de potenciais quase aditivos e com uma sequência de observáveis assintoticamente aditivos ou subaditivos e assim obtemos algumas extensões dos resultados obtidos no caso aditivo. Para tal extensão obteremos resultados de regularidade da função taxa de grandes desvios no contexto não-aditivo.

3.1 Análise multifractal dos conjuntos irregulares para medidas Gibbs fraca: caso aditivo

Exporemos agora um dos objetos centrais dos nossos resultados.

Em muitos casos os estados de equilíbrio surgem como probabilidades invariantes absolutamente contínuas com respeito a alguma probabilidade que exibe alguma propriedade do tipo Gibbs. Nós iremos descrever essa classe de medidas. Dado $\varepsilon > 0$, $n \geq 1$ e $x \in M$, a (n,ε)-*bola dinâmica* $B(x,n,\varepsilon)$ é o conjunto de pontos $y \in M$ tais que $d(f^j(x), f^j(y)) < \varepsilon$ para todo $0 \leq j \leq n-1$.

Definição 3.1. *Dado um espaço métrico M, uma dinâmica $f : M \to M$ e um potencial $\phi : M \to \mathbb{R}$, nós dizemos que uma probabilidade ν é uma* medida Gibbs ultra fraca *com respeito a ϕ sobre $\Lambda \subset M$ se existe $\varepsilon_0 > 0$ de modo que, para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, existe uma sequência de constantes positivas $(K_n(\varepsilon))_{n\in\mathbb{N}}$ (dependendo somente de ε) satisfazendo $\lim \frac{1}{n} \log K_n(\varepsilon) = 0$, tal que para ν-quase todo ponto $x \in \Lambda$ existe uma subsequência de tempos (dependendo de x) $n_k(x) \to \infty$ satisfazendo*

$$K_{n_k(x)}(\varepsilon)^{-1} \leq \frac{\mu(B(x,n_k(x),\varepsilon))}{e^{-n_k(x)P+S_{n_k(x)}\phi(x)}} \leq K_{n_k(x)}(\varepsilon).$$

Se a condição anterior vale para todos inteiros positivos n (independente de x em um conjunto de medida total) nós diremos que ν é uma medida Gibbs fraca *com respeito a ϕ. E se além disso $K_n = K$ independente de n, nós iremos dizer que ν é uma* medida Gibbs *com respeito a ϕ.*

Observação 3.2. *Em muitos contextos essas noções de medida Gibbs são ligeiramente diferentes dessa que definimos, pois no lugar de medir bolas dinâmicas são medidos átomos de partições de Markov com diâmetro indo a 0. Na prática, e especificamente no nosso* *caso, não fará diferença pois estamos interessados em estimar superiormente a pressão de um conjunto.*

Na noção anterior de Gibbs fraco não foi requerido nenhuma propriedade sobre os tempos, como por exemplo em ter uma densidade positiva, quando n tende ao infinito, no conjunto de números naturais.

Se f for contínua na definição anterior, então pelo teorema de Brin-Katok temos que $P = h_\mu(f) + \int \phi d\mu$. Naturalmente em aplicações o caso mais interessante é quando o valor P coincide com a pressão topológica $P_{\text{top}}(f, \phi)$. Essas medidas surgem naturalmente no contexto de dinâmica hiperbólica e em alguns casos de dinâmicas não uniformemente hiperbólicas. Dado um conjunto básico Ω para um difeomorfismo f Axioma A (ou Ω repulsor topológico para f) é conhecido que todo potencial ϕ que satisfaz

$$\exists A, \delta > 0 : \sup_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n(\phi, \delta) \leq A, \tag{3.1}$$

onde $\gamma_n(\phi, \delta) := \sup\{|S_n\phi(y) - S_n\phi(z)| : y, z \in B(x, n, \delta)\}$, admite um único estado de equilíbrio μ_ϕ e ele é uma medida Gibbs. Esta condição é conhecida como *condição de Bowen* e foi introduzida por Bowen [Bow74] para provar a unicidade dos estados de equilíbrio para aplicações expansivas com a propriedade de especificação. Ela também foi usada por Ruelle [Ru92] para provar que os operadores de transferência associados a aplicações com expansividade positiva e especificação tem boas propriedades espectrais.

3.1.1 Repulsores

O nosso primeiro resultado é uma contraparte topológica do teorema ergódico especial. Antes de enunciar o teorema precisaremos definir alguns objetos presentes nele. No que segue, dado uma função contínua $\psi : M \to \mathbb{R}$, uma probabilidade μ e um conjunto fechado $I \subset \mathbb{R}$ nós denotaremos

$$\overline{X}_I = \Big\{ x \in M : \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi(f^j(x)) \in I \Big\}$$

e analogamente

$$\underline{X}_I = \Big\{ x \in M : \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi(f^j(x)) \in I \Big\}.$$

Ademais, dado $\delta > 0$ nós denotamos por I_δ a δ-vizinhança do conjunto I. Finalmente, dada uma probabilidade ν nós definimos a limitação superior dos grandes desvios

$$L_{I,\nu} := -\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \nu\Big(\{ x \in \Lambda : \frac{1}{n} S_n\psi(x) \in I \} \Big). \tag{3.2}$$

Nós agora podemos enunciar o nosso primeiro resultado.

Teorema 3.3. *Seja M um espaço métrico compacto, $f : M \to M$ uma dinâmica contínua, $\phi : M \to \mathbb{R}$ um potencial contínuo, ν uma (não necessariamente invariante) medida Gibbs fraca sobre M e $\mu_\phi \ll \nu$ o único estado de equilíbrio de f com respeito a ϕ. Então, para todo observável contínuo $\psi : M \to \mathbb{R}$, intervalo fechado $I \subset \mathbb{R}$ e $\delta > 0$,*

$$P_{\underline{X}_I}(f,\phi) \leq P_{\overline{X}_I}(f,\phi) \leq P_{\text{top}}(f,\phi) - L_{I_\delta,\nu} \ \leq \ P_{\text{top}}(f,\phi).$$

De fato, decorre do [Var12, Teorema 2.1] uma vez que ν é uma medida Gibbs fraca, se $\int \psi d\mu_\phi \notin I_\delta$, então o princípio de grandes desvios diz que $L_{I_\delta,\nu} < 0$ vale e, consequentemente, a pressão topológica dos conjuntos $\underline{X}_I$ e $\overline{X}_I$ é estritamente menor que $P_{\text{top}}(f,\phi)$.

Decorre do teorema anterior que podemos aplicá-lo no caso em que I é uma união finita de intervalos. Em particular, nas hipóteses do teorema anterior, teremos que:

$$P_{\underline{X}_{\mu_\phi,\psi,c}}(f,\phi) \leq P_{\overline{X}_{\mu_\phi,\psi,c}}(f,\phi) \leq P_{\text{top}}(f,\phi) - L_{c-\delta,\nu} \ < \ P_{\text{top}}(f,\phi),$$

para todo $\delta > 0$ suficientemente pequeno, onde $L_{c,\nu} := L_{I_c,\nu}$ é definido como em (3.2) com respeito ao $I_c = (-\infty, \int \psi d\mu_\phi - c] \cup [\int \psi d\mu_\phi + c, +\infty)$.

Para provar o teorema anterior temos que estimar $P_{\overline{X}_I}(f,\phi)$. Consideremos os conjuntos

$$X_{I,n} = \Big\{x \in M : \frac{1}{n} S_n\psi(x) \in I\Big\}.$$

Inicialmente provemos um lema auxiliar.

Lema 3.4. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado. Para todo $\delta > 0$ existe $\varepsilon_\delta > 0$ e $N = N_\delta \in \mathbb{N}$ tal que $B(x,n,\varepsilon) \subset X_{I_\delta,n}$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_\delta$, $n \geq N$ e $x \in X_{I,n}$.*

Prova. Seja $\delta > 0$ dado. Uma vez que ψ é uniformemente contínua, então existe $\varepsilon = \varepsilon_\delta > 0$ e um $N = N_\delta \in \mathbb{N}$ grande tal que $\gamma_n(\psi,\varepsilon) \leq \delta n$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_\delta$ e $n \geq N$. Então, se $n \geq N$, $x \in X_{I,n}$, $y \in B(x,n,\varepsilon)$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_\delta$ nós temos

$$\frac{S_n\psi(x)}{n} - \frac{\gamma_n(\psi,\varepsilon)}{n} \leq \frac{S_n\psi(y)}{n} \leq \frac{S_n\psi(x)}{n} + \frac{\gamma_n(\psi,\varepsilon)}{n}$$

e, consequentemente

$$\frac{S_n\psi(x)}{n} - \delta \leq \frac{S_n\psi(y)}{n} \leq \frac{S_n\psi(x)}{n} + \delta,$$

significando que $y \in X_{I_\delta,n}$. Isto finaliza a prova do lema. ■

Prova do Teorema 3.3. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado e assuma que $\overline{X}_I$ é não-vazio. Seja $\delta > 0$ fixado e considere $L_{I_\delta,\nu}$ como definido na equação (3.2), podemos também supor, sem perda de generalidade, que $L_{I_\delta,\nu} > 0$. Para todo inteiro positivo

n consideremos o conjunto $\mathcal{I}_n \subset M \times \mathbb{N}$ de pares (x,n) com $x \in M$. Relembrando a noção de pressão topológica para conjuntos quaisquer introduzida Pesin e Pitskel (ver por exemplo [Pes97] ou Apêndice C), para provar que $P_{\overline{X}_c}(f,\Phi) \leq P_{\text{top}}(f,\Phi) - L_{I_\delta}$ é suficiente provar que para todo $\alpha > P_{\text{top}}(f,\phi) - L_{I_\delta}$, todo $\varepsilon > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ existe um subconjunto $\hat{\mathcal{G}}_N \subset \bigcup_{n \geq N} \mathcal{I}_n$ tal que

$$\overline{X}_I \subset \bigcup_{(x,n)\in\hat{\mathcal{G}}_N} B(x,n,\varepsilon)$$

e $\displaystyle\sum_{(x,n)\in\hat{\mathcal{G}}_N} e^{-\alpha n + \phi_n(x)} \leq a(\varepsilon) < \infty$ independentemente de N.

Seja $\alpha > P_{\text{top}}(f,\phi) - L_{I_\delta}$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_\delta$ fixado. Tomemos $\zeta > 0$ pequeno de modo que $\alpha > P_{\text{top}}(f,\phi) - L_{I_\delta} + \zeta$. Existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K_n(\varepsilon) \leq e^{\frac{\zeta}{4}n}$, $K_n(\frac{\varepsilon}{2}) \leq e^{\frac{\zeta}{4}n}$ e

$$\nu\Big(\{x \in \Lambda : \frac{1}{n} S_n\psi(x) \in I_\delta\}\Big) \leq e^{-(L_{I_\delta} - \frac{\zeta}{2})n}$$

para todo $n \geq N_0$. Não ha perda de generalidade em supor que $N \geq N_0$.

Note que se $x \in \overline{X}_I$ então existe uma sequência de inteiros positivos $(m_j(x))_{j\in\mathbb{N}}$ convergindo para o infinito com $x \in X_{I_{\frac{\delta}{2}}, m_j(x)}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim

$$\overline{X}_I \subset \bigcap_{\ell\geq 1}\bigcup_{j\geq \ell} X_{I_\delta, j}.$$

Dado $N \geq N_0$ e $x \in \overline{X}_I$ tome $m(x) \geq N$ de modo que $x \in X_{I_{\frac{\delta}{2}}, m(x)}$ e considere $\mathcal{G} := \{(x, m(x)) : x \in \overline{X}_c\}$. Agora, seja $\hat{\mathcal{G}}_N \subset \mathcal{G}_N$ o conjunto maximal com uma propriedade de separação, a saber, que se (x,l) e (y,l) pertencem à $\hat{\mathcal{G}}_N$, então $B(x,l,\frac{\epsilon}{2}) \cap B(y,l,\frac{\epsilon}{2}) = \emptyset$. Logo, para $0 < \varepsilon < \varepsilon_\delta$ dado pelo Lema 3.4, usando a propriedade de Gibbs para ν nós deduzimos que

$$\begin{aligned}\sum_{(x,m(x))\in\hat{\mathcal{G}}_N} e^{-\alpha m(x) + S_{m(x)}\phi(x)} &= \sum_{(x,m(x))\in\hat{\mathcal{G}}_N} e^{(P-\alpha)m(x)} e^{-Pm(x) + S_{m(x)}\phi(x)} \\ &\leq \sum_{(x,m(x))\in\hat{\mathcal{G}}_N} e^{(P-\alpha)m(x)} K_{m(x)}(\varepsilon)\nu(B(x,m(x),\varepsilon))\end{aligned}$$

Agora, nós escrevemos $\hat{\mathcal{G}}_N = \cup_{\ell\geq 1}\hat{\mathcal{G}}_{\ell,N}$ com os conjuntos de nível $\hat{\mathcal{G}}_{\ell,N} := \{(x,\ell) \in \hat{\mathcal{G}}_N\}$. Pelo Lema 3.4 cada bola dinâmica $B(x,\ell,\varepsilon)$ esta contida em $X_{I_\delta,\ell}$. Desse modo, utilizando que $\nu(B(x,m(x),\varepsilon)) \leq K_{m(x)}(\varepsilon)K_{m(x)}(\varepsilon/2)\nu(B(x,m(x),\varepsilon/2)$

$$
\begin{aligned}
\sum_{(x,m(x))\in\hat{\mathcal{G}}_N} e^{-\alpha m(x)+S_{m(x)}\phi(x)} &\leq \sum_{(x,m(x))\in\hat{\mathcal{G}}_N} K_{m(x)}(\varepsilon)e^{(P-\alpha)(m(x))}\nu(B(x,m(x),\varepsilon)) \\
&= \sum_{\ell\geq N} K_\ell(\varepsilon)e^{(P-\alpha)\ell} \sum_{x\in\hat{\mathcal{G}}_{N,\ell}} \nu(B(x,\ell,\varepsilon)) \\
&\leq \sum_{\ell\geq N} K_\ell(\varepsilon)K_\ell(\frac{\varepsilon}{2})e^{(P-\alpha)\ell} \sum_{x\in\hat{\mathcal{G}}_{N,\ell}} \nu(B(x,\ell,\varepsilon/2)) \\
&\leq \sum_{\ell\geq N} K_\ell(\varepsilon)K_\ell(\frac{\varepsilon}{2})e^{(P-\alpha)\ell}\nu(X_{I_\delta,\ell}) \\
&\leq \sum_{\ell\geq N} e^{(P-\alpha-L_{I_\delta}+\zeta)\ell}
\end{aligned}
$$

que é finito e independente da escolha de N. Isto prova que $P_{\overline{X}_I}(f,\phi) \leq P_{\text{top}}(f,\phi) - L_{I_\delta}$. Uma vez que $P_{\underline{X}_I}(f,\phi) \leq P_{\overline{X}_I}(f,\phi)$, isto finaliza a prova do teorema. ■

O teorema anterior é aplicável ao caso de repulsores topológicos: iremos discutir agora esse caso específico.

Se $f : M \to M$ é uma dinâmica expansora topológica transitiva como na seção 2.3.1, e $\phi : M \to \mathbb{R}$ é um potencial Holder contínuo, sabemos que existe um único estado de equilíbrio $\mu_{f,\phi}$ com respeito a f e ϕ. Além disso, é conhecido que $\mu_{f,\phi}$ é uma medida de Gibbs, logo podemos aplicar o teorema anterior:

Corolário 3.5. *Seja $f : M \to M$ uma dinâmica expansora topológica transitiva, $\phi : M \to \mathbb{R}$ um potencial Hölder contínuo e $\mu = \mu_{f,\phi}$ o único estado de equilíbrio para f com respeito a ϕ. Então, para todo observável contínuo $\psi : M \to \mathbb{R}$ e $c > 0$ vale*

$$P_{\underline{X}_{\mu,\psi,c}}(f,\phi) \leq P_{\overline{X}_{\mu,\psi,c}}(f,\phi) \leq P_{\text{top}}(f,\phi) - L_{c-\delta} < P_{\text{top}}(f,\phi)$$

para todo $\delta > 0$ suficientemente.

No resultado anterior a pressão topológica dos conjuntos estudados é estritamente menor que $P_{\text{top}}(f,\phi)$. Isto tem aplicações particularmente interessantes com a propriedade de especificação. Lembremos que um sistema dinâmico $f : M \to M$ satisfaz a propriedade de especificação se, para todo $\varepsilon > 0$ existe um inteiro $N = N(\varepsilon) \geq 1$ tal que vale: para todo $k \geq 1$, e pontos $x_1, \ldots, x_k \in M$, e toda sequência de inteiros positivos $n_1, \ldots, n_k$ e $p_1, \ldots, p_k$ com $p_i \geq N(\varepsilon)$ existe um ponto x in M tal que

$$d\Big(f^j(x), f^j(x_1)\Big) \leq \varepsilon, \quad \forall\, 0 \leq j \leq n_1$$

e

$$d\Big(f^{j+n_1+p_1+\cdots+n_{i-1}+p_{i-1}}(x)\ ,\ f^j(x_i)\Big) \leq \varepsilon$$

para todo $2 \leq i \leq k$ e $0 \leq j \leq n_i$.

Thompson [Tho10] prova que se um sistema dinâmico tem a propriedade de especificação, então o conjunto irregular associado a um observável contínuo $\psi : M \to \mathbb{R}$ ou é vazio ou tem pressão topológica igual a $P_{\text{top}}(f, \phi)$ com respeito a todo potencial contínuo $\phi : M \to \mathbb{R}$. Quando $f : M \to M$ é uma expansora topológica transitiva, temos que f satisfaz a propriedade de especificação, então utilizando o corolário anterior mais o resultado citado de [Tho10] nós obtemos:

Corolário 3.6. *Seja $f : M \to M$ uma dinâmica expansora topológica transitiva e $\psi : M \to \mathbb{R}$ um observável contínuo tal que o conjunto irregular associado satisfaz $E_\psi \neq \emptyset$. Então, para todo potencial contínuo $\phi : M \to \mathbb{R}$ e $c > 0$*

$$P_{\text{top}}(f, \phi) = P_{E_\psi}(f, \phi) > P_{\overline{X}_{\mu_{f,\phi},\psi,c}}(f, \phi),$$

onde $\mu_{f,\phi}$ é o único estado de equilíbrio associado a f com respeito a ϕ.

Em particular, utilizando que

$$E_\psi = \bigcup_{n \geq 1} [E_\psi \cap \overline{X}_{\mu_{f,\phi},\psi,1/n}]$$

e também que $P_{E_\psi}(f, \phi) = \sup_{n \geq 1} P_{E_\psi \cap \overline{X}_{\mu_{f,\phi},\psi,1/n}}(f, \phi)$, o corolário anterior, moralmente, significa que apesar de o conjunto de pontos irregulares ter pressão topológica total, os pontos que dão uma grande contribuição para a pressão topológica são aqueles cujas médias temporais ficam arbitrariamente próximas da média espacial dada pelo único estado de equilíbrio. Na prova do resultado principal de [Tho10] utilizam-se médias próximas do estado de equilíbrio para construir pontos cujas médias temporais estão próximas da média espacial dada pelo estado de equilíbrio. Sendo assim, decorre do comentário anterior que, pelo menos no caso de dinâmicas uniformemente expansoras, a construção do fractal contido em E_ψ que tem pressão topológica total é de certo modo optimal.

Umas das questões naturais após o Teorema 3.3 é se podemos obter a estimativa superior de $P_{\underline{X}_I}(f, \phi)$ em termos de $P_{\text{top}}(f, \phi) - L_I$. A questão principal é que o [Var12, Teorema 2.1] só nos garante que

$$L_I \geq P_{\text{top}}(f, \phi) - \sup_{\eta \in \mathcal{M}_1(f)} \{h_\eta(f) + \int \phi d\eta : \int \psi d\eta \in I\},$$

onde $\mathcal{M}_1(f)$ é o espaço de probabilidade $f-$invariantes. Precisaríamos então garantir que $L_I \leq \inf_{\delta > 0} L_{I_\delta}$ e isso não é claro pela expressão anterior. Porém, no caso específico de dinâmicas expansoras, já sabemos pela Proposição 2.40 que o princípio de grandes desvios é obtido através da transformada de Legendre que é uma função convexa, assim teremos que $L_c = \min\{I_{f,\phi,\psi}(-c)\ ,\ I_{f,\phi,\psi}(c)\}$ e $L_c = \lim_{\delta \searrow 0} L_{c-\delta}$.

Outras questões que surgem naturalmente são: se existe uma desigualdade estrita $P_{\underline{X}_{\mu,\psi,c}}(f,\phi) < P_{\overline{X}_{\mu,\psi,c}}(f,\phi)$ e como variam esses números quando variamos c. O próximo teorema dá uma resposta a essas questões no caso de dinâmicas expansoras, e de fato vai mais além explorando a regularidade dessas pressões topológicas quando variamos f, ϕ ou ψ.

Observação 3.7. *Lembremos que na seção 2.3.2 sobre dinâmicas expansoras definimos $\mathcal{D}^\alpha$ como o espaço de dinâmicas expansoras Lipschitz agindo sobre um espaço métrico compacto e conexo. Também definimos $\mathcal{D}^r$ com o espaço de dinâmicas expansoras C^r agindo sobre uma variedade riemanniana compacta e conexa.*

Observação 3.8. *Dado $\psi : M \to \mathbb{R}$ e $I \subset \mathbb{R}$ denotaremos por $X(I)$ o conjunto $\{x \in M : \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\psi(f^i(x)) \in I\}$. No caso em que I é um intervalo degenerado $[c,c]$, denotaremos $X(I)$ por $X(c)$.*

Teorema 3.9. *Seja $f : M \to M$ uma dinâmica expansora topologicamente mixing, $\phi : M \to \mathbb{R}$ um potencial em C^α e $\mu_{f,\phi}$ o único estado de equilíbrio para f com respeito a ϕ. Se $\psi \in C^\alpha(M,\mathbb{R})$, ψ não cohomólogo a uma constante e $\int \psi\, d\mu_{f,\phi} = 0$ então*

$$P_{\overline{X}_{\mu_{f,\phi},\psi,c}}(f,\phi) \le P_{\text{top}}(f,\phi) - \min\{I_{f,\phi,\psi}(-c)\ ,\ I_{f,\phi,\psi}(c)\}$$

onde $I_{f,\phi,\psi}$ é a transformada de Legendre. Se $0 \notin [c_1,c_2]$ e $c := \min\{|c_1|,|c_2|\} \neq \hat{c} := \max\{|c_1|,|c_2|\}$ então $\overline{X}_c = \emptyset$ ou

$$\begin{aligned} P_{\overline{X}_{\mu_{f,\phi},\psi,c}}(f,\phi) &= P_{\underline{X}_{\mu_{f,\phi},\psi,c}}(f,\phi) = P_{X(c)}(f,\phi) = P_{X([c,\hat{c}])}(f,\phi) \\ &= P_{X(c,\hat{c})}(f,\phi) = P_{\text{top}}(f,\phi) - I_{f,\phi,\psi}(c), \end{aligned}$$

se $I_{f,\phi,\psi}(c) = \min\{I_{f,\phi,\psi}(-c)\ ,\ I_{f,\phi,\psi}(c)\}$, ou então

$$\begin{aligned} P_{\overline{X}_{\mu_{f,\phi},\psi,c}}(f,\phi) &= P_{\underline{X}_{\mu_{f,\phi},\psi,c}}(f,\phi) = P_{X(-c)}(f,\phi) = P_{X([-\hat{c},-c])}(f,\phi) \\ &= P_{X(-\hat{c},-c)}(f,\phi) = P_{\text{top}}(f,\phi) - I_{f,\phi,\psi}(-c), \end{aligned}$$

se $I_{f,\phi,\psi}(-c) = \min\{I_{f,\phi,\psi}(-c)\ ,\ I_{f,\phi,\psi}(c)\}$. Em particular $\mathbb{R}_0^+ \ni c \mapsto P_{\overline{X}_{\mu_{f,\phi},\psi,c}}(f,\phi)$ é derivável, concava e estritamente decrescente.

Observação 3.10. *No teorema anterior aparece a hipótese de que $\int \psi\, d\mu_{f,\phi} = 0$, porém naturalmente podemos estender o resultado para o caso de ψ com integral não nula. Para isso basta aplicarmos o teorema anterior à função $\psi - \int \psi d\mu_{f,\phi}$.*

Prova. Pelo Corolário 3.5 já sabemos que

$$P_{\overline{X}_{\mu,\psi,c}}(f,\phi) \le P_{\text{top}}(f,\phi) - L_{c-\delta} < P_{\text{top}}(f,\phi),$$

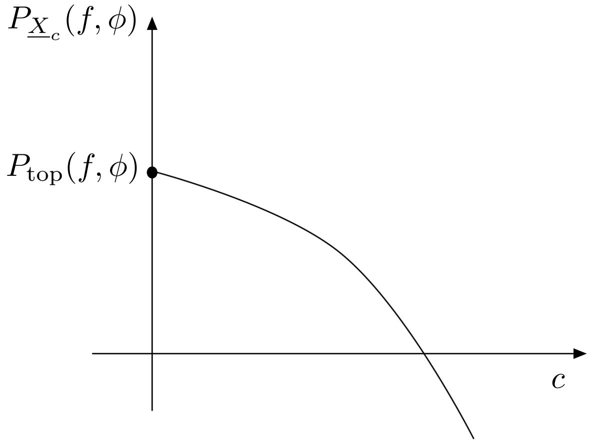

Figura 3.1: Continuidade, monotonicidade e concavidade da função pressão

para todo $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Pelo comentário feito antes desse teorema teremos que

$$P_{\overline{X}_{\mu_{f,\phi,\psi,c}}}(f,\phi) \leq P_{\text{top}}(f,\phi) - \min\Big\{I_{f,\phi,\psi}(c)\ ,\ I_{f,\phi,\psi}(-c)\Big\}.$$

Por outro lado, uma vez que f satisfaz a propriedade de especificação e ψ não é cohomólogo a uma constante, decorre que (veja por exemplo [Tho09])

$$\Big\{\alpha \in \mathbb{R} : \exists\, x \in M \text{ tal que } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n\psi(x) = \alpha\Big\} = \Big\{\int \psi d\mu : \mu \in \mathcal{M}_1(f)\Big\}$$

é um intervalo compacto não vazio, onde $\mathcal{M}_1(f)$ é o espaço de probabilidades $f-$invariantes. Pelo princípio de grandes desvios para dinâmicas uniformemente hiperbólicas de Young [You90] vale que $-I_{f,\phi,\psi}(s) = \sup\{-P_{\text{top}}(f,\phi) + h_\eta(f) + \int \phi\, d\eta \,:\, \int \psi\, d\eta = s\}$. Utilizando [Tho09] a pressão topológica do conjunto $\{x \in M : \lim \frac{1}{n} S_n\psi(x) = c\}$ coincide com $\sup\{h_\eta + \int \phi\, d\eta \,:\, \eta$ é f-invariante e $\int \psi d\eta = c\}$. Desse modo, se (c_1, c_2) é um intervalo não contendo o zero, $c = \min\{|c_1|, |c_2|\}, \hat{c} = \max\{|c_1|, |c_2|\}$ e $X_c \neq \emptyset$ com $I_{f,\phi,\psi}(c) = \min\{I_{f,\phi,\psi}(-c)\ ,\ I_{f,\phi,\psi}(c)\}$ então:

$$\begin{aligned} P_{\text{top}}(f,\phi) - I_{f,\phi,\psi}(c) &= P_{X(c)}(f,\phi) \leq P_{X(c,\hat{c})}(f,\phi) \\ &\leq P_{X[c,\hat{c}]}(f,\phi) \leq P_{\underline{X}_{\mu_{f,\phi,\psi,c}}}(f,\phi) \\ &\leq P_{\overline{X}_{\mu_{f,\phi,\psi,c}}}(f,\phi) \leq P_{\text{top}}(f,\phi) - I_{f,\phi,\psi}(c). \end{aligned}$$

O caso onde $I_{f,\phi,\psi}(-c) = \min\{I_{f,\phi,\psi}(-c)\ ,\ I_{f,\phi,\psi}(c)\}$ é análogo.

Assim provamos que $P_{\overline{X}_{f,\phi,\psi,c}}(f,\phi) = P_{\text{top}}(f,\phi) - \min\{I_{f,\phi,\psi}(c), I_{f,\phi,\psi}(-c)\}$ sempre que o conjunto $\overline{X}_{f,\phi,\psi,c}$ é não vazio, logo $\mathbb{R}_0^+ \ni c \mapsto P_{\overline{X}_{\mu_{f,\phi,\psi,c}}}(f,\phi)$ é derivável, concava e estritamente decrescente. ■

Como aplicação direta do teorema anterior e da Proposição 2.56 obtemos regularidade da pressão do conjunto de desvio estudado com respeito a f, ϕ e ψ. Mais precisamente

Corolário 3.11. *Nas mesmas hipóteses do teorema anterior:*

i. seja V um espaço métrico compacto e $\big((f_v, \phi_v, \psi_v)\big)_{v \in V}$ uma família injetiva e parametrizada (contínua) de aplicações em $\mathcal{D}^\alpha \times C^\alpha(M, \mathbb{R}) \times C^\alpha(M, \mathbb{R})$. Se $U := \{(v, c) \in V \times \mathbb{R}_0^+ : \overline{X}_{\mu_{f,\phi},\psi,c} \neq \emptyset\}$ então

$$U \ni (c, v) \mapsto P_{\overline{X}_{\mu_{f_v,\phi_v},\psi_v,c}}(f_v, \phi_v);$$

é contínuo.

ii. Suponha adicionalmente que V é uma variedade compacta e a parametrização $\big((f_v, \phi_v, \psi_v)\big)_{v \in V}$ está contida em $D^r \times C^r(M, \mathbb{R}) \times C^r(M, \mathbb{R})$, para $r \geq 2$, e é C^{r-1}. Então, o conjunto $Y := \{(v, c) \in V \times \mathbb{R}_0^+ : c < \sup_{\eta \in \mathcal{M}_1(f)} |\int \psi_v d\mu_{f_v,\phi_v} - \int \psi_v d\eta|\}$ é um aberto não vazio e

$$Y \ni (c, v) \mapsto P_{\overline{X}_{\mu_{f_v,\phi_v},\psi_v,c}}(f_v, \phi_v);$$

é C^{r-1}.

Prova. O item i. é corolário direto do teorema anterior e da Proposição 2.56. Para obter o item ii., notemos inicialmente que se $(v, c) \in Y$ então, por especificação, existe existe $x \in M$ tal que $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \psi_v \circ f_v$ é $\int \psi_v d\mu_{f_v,\phi_v} + c$ ou $\int \psi_v d\mu_{f_v,\phi_v} - c$ logo, para provarmos o item ii. basta mostrarmos que Y é aberto.

Como já sabemos que $v \mapsto \mu_{f_v,\phi_v}$ é contínuo, para provarmos que Y é aberto basta mostrarmos que fixado $v_* \in V$, dado $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança $\hat{V}$ de v_* tal que se $\hat{v} \in \hat{V}$ então existe $\eta_v \in \mathcal{M}_1(f_v)$ com $|\int \psi_{v_*} d\eta_v - \int \psi_{v_*} d\mu_{f_{v_*},\phi_{v_*}}| \leq \epsilon$. Provemos então esse fato. Fixemos $v_* \in V$, dado $\epsilon > 0$ pela propriedade de especificação sabemos que existe $N(\epsilon)$ tal que qualquer número finito de órbitas por f_{v_*} pode ser sombreada por um ponto $x \in M$ utilizando f_{v_*} a menos de um erro de $N(\epsilon)$ iterados quando passamos de um pedaço de órbita para outro. A princípio $N(\epsilon)$ depende da dinâmica, porém, como estamos trabalhando com dinâmicas expansoras, a menos de tomarmos uma vizinhança V_1 de v_* podemos supor que $N(\epsilon)$ é o mesmo para toda dinâmica f_v, com $v \in V_1$. Pelo teorema ergódico de Birkhoff existe um $x \in M$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $|\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \psi_{v_*}(f_{v_*}(x)) - \int \psi_{v_*} d\mu_{f_{v_*},\phi_{v_*}}| < \frac{\epsilon}{3}$. Por continuidade da parametrização existe uma vizinhança $\hat{V} \subset V_1$ de v_* tal que $d(f_{v_*}^j(x), f_v^j(x)) < \frac{\epsilon}{3||\psi||_1}$, para todo $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ e $v \in \hat{V}$. Assim, para cada $v \in \hat{V}$ e $l \in \mathbb{N}$ existe um $y_{v,l} \in M$ tal que $y_{v,l}$ sombreia os l pedaços de órbitas

$x, \dots, f_{v_*}^{n-1}(x)$ com um erro em cada salto de $N(\epsilon)$. Desse modo teremos que para cada $v \in \hat{V}$ e $l \in \mathbb{N}$:

$$\Big|\frac{1}{l(n+N(\epsilon))}\sum_{i=0}^{l(n+N(\epsilon))-1}\psi_{v_*}(f_{v_*}(x)) - \frac{1}{l(n+N(\epsilon))}\sum_{i=0}^{l(n+N(\epsilon))-1}\psi_v(f_v(y_{v,l}))\Big| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Tomando então um ponto de acumulação das probabilidades $(\frac{1}{l(n+N(\epsilon))}\sum_{i=0}^{l(n+N(\epsilon))-1}\delta_{f_v(y_{v,l}})_{l\in\mathbb{N}}$ construímos uma probabilidade $f-$invariante η_v com $|\int \psi_{v_*}d\eta_v - \int \psi_{v_*}d\mu_{f_{v_*},\phi_{v_*}}| \leq \epsilon$ e assim como havíamos comentado, temos que Y é aberto. Isto finaliza a prova do corolário.
■

O conjunto definido anteriormente Y possui uma relação profunda com o espectro de Birkhoff de ψ. De fato, definimos o espectro de uma função contínua $\psi : M \to \mathbb{R}$ como sendo $L(\psi, f) := \{\alpha \in \mathbb{R} :$ existe $x \in M$ tal que $lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\psi(f(x)) = \alpha\}$, quando a dinâmica f tem a propriedade especificação sabemos que

$$L(\psi, f) = [\inf_{\eta\in\mathcal{M}_1(f)}\int \psi d\eta, \sup_{\eta\in\mathcal{M}_1(f)}\int \psi d\eta].$$

Desse modo, Y nada mais é do que o conjunto de $(v, c) \in V \times \mathbb{R}_0^+$ tal que $\int \psi_v d\mu_{f_v,\phi_v} + c$ ou $\int \psi_v d\mu_{f_v,\phi_v} - c$ pertence ao interior de $L(\psi_v, f_v)$.

Utilizando as ideias da prova do Teorema 3.3, nós também provamos estimativas para conjuntos irregulares correspondentes a medidas empíricas

$$\delta_{x,n} := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{f^j(x)}.$$

Seja $\mathcal{M}_1$ o conjunto de probabilidades sobre M e d uma métrica compatível com a topologia fraca*. Iremos sempre supor que d tem as seguintes propriedades:

i. $d(\eta_1 + \eta, \eta_2 + \eta) = d(\eta_1, \eta_2), \forall \eta_1, \eta_2, \eta \in \mathcal{M}_1$;

ii. $d(t\eta_1, t\eta_2) = td(\eta_1, \eta_2), \forall \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{M}_1$ e $t > 0$.

Por exemplo $d(\mu, \nu) := \sum_{k\geq 1}\frac{1}{2^k||g_k||_\infty}|\int g_k\,d\mu - \int g_k\,d\nu|$ para algum subconjunto enumerável e denso $(g_k)_k$ de funções contínuas é uma métrica que satisfaz as propriedades anteriores. Nós dizemos que um *princípio de grandes desvios de nível-2* vale para $\nu \in \mathcal{M}_1$ se existe uma função semicontínua $Q : \mathcal{M}_1 \to [0, +\infty]$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log \nu_{f,\phi}\,(x \in M : \delta_{x,n} \in U) \leq -\inf_{\eta\in U} Q(\eta)$$

para todo conjunto fechado $U \subset \mathcal{M}_1$ e

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log \nu_{f,\phi}\,(x \in M : \delta_{x,n} \in V) \geq -\inf_{\eta\in V} Q(\eta)$$

para todo conjunto aberto $V \subset \mathcal{M}_1$. Vale ressaltar que princípio de grandes desvios de nível-2 tem sido obtidos por exemplo em [Lo90, CRL98, Chu11, CTY13]. Considere

$$\overline{Y}_{\mu,c} = \{x \in M : \limsup_{n\to\infty} d(\delta_{x,n}, \mu) \geq c\} \quad , \quad \underline{Y}_{\mu,c} = \{x \in M : \liminf_{n\to\infty} d(\delta_{x,n}, \mu) \geq c\}$$

e, para $C \subset \mathcal{M}_1$, defina $Y(C) := \{x \in M : \lim_{n\to+\infty} \delta_{x,n} \in C\}$.

Parte da nossa já utilizada estratégia pode ser usada para estimar a pressão topológica dos conjuntos $\overline{Y}_{\mu,c}$ e $\underline{Y}_{\mu,c}$ para sistemas dinâmicos que tem a estrutura de g-quase produto e a propriedade de separação uniforme. Estas noções, introduzidas por C. Pfister and W. Sullivan [PS05], são estritamente mais fracas que a propriedade de especificação e a propriedade de expansividade positiva. De fato, a propriedade de separação uniforme é verdade mesmo para aplicações que são assintoticamente h-expansivas. Passemos às definições dessas duas noções.

Definição 3.12. *Seja M um espaço métrico compacto e $f : M \to M$ contínua. Uma função ilimitada não-decrescente $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma* função blow-up *se $g(n) < n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to+\infty} g(n)/n = 0$.*

Dado um subconjunto de inteiros $\Lambda \subset [0, N]$, nós iremos usar a família de distâncias no espaço M dada por $d_\Lambda(x, y) = \max\{d(f^i x, f^i y) : i \in \Lambda\}$ e considerar as bolas $B_\Lambda(x, \varepsilon) = \{y \in X : d_\Lambda(x, y) < \varepsilon\}$. Dada uma função blow-up g, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$, uma *bola dinâmica g-errada* $B_n(g; x, \varepsilon)$ de raio ε e comprimento n associada a g é definida por

$$\begin{aligned} B_n(g; x, \varepsilon) &= \{y \in M \mid y \in B_\Lambda(x, \varepsilon) \text{ para algum } \Lambda \in I(g; n, \varepsilon)\} \\ &= \bigcup_{\Lambda \in I(g;n,\varepsilon)} B_\Lambda(x, \varepsilon) \end{aligned}$$

onde $I(g; n, \varepsilon) = \{\Lambda \subset [0, n-1] \cap \mathbb{N} \mid \#\Lambda \geq n - g(n)\}$. Ou seja, uma bola dinâmica $g-$errada é formada pelos pontos que acompanham x exceto possivelmente por um número de iterados cuja frequência é controlada pela taxa associada a g. Nós agora podemos definir a propriedade g-quase produto.

Definição 3.13. *Seja g uma função blow-up. A dinâmica contínua $f : M \to M$ tem a* propriedade g-quase produto *se existe uma função não-crescente $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}$, tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, pontos $x_1, x_2, \ldots, x_k$, números positivos $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_k$ e números inteiros $n_i \geq m(\varepsilon_1)$ para $i = 1 \ldots k$ vale que*

$$\bigcap_{j=1}^{k} f^{-M_{j-1}} B_{n_j}(g; x_j, \varepsilon_j) \neq \emptyset.$$

onde $M_0 = 0$ e $M_i = n_1 + n_2 + \cdots + n_i, i = 1, 2, \cdots, k-1$.

Ou seja, uma dinâmica tem a propriedade g-quase produto se podemos sombrear pedaços de órbitas, a menos de saltos de um pedaço de órbita para outro que tem uma frequência controlada pela taxa de g.

Passemos agora à definição da propriedade de separação uniforme. Dados $\delta, \varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ nós dizemos que dois pontos $x, y \in X$ são (δ, n, ε)-*separados* se $\#\{0 \leq j \leq n-1 : d(f^j(x), f^j(y)) > \varepsilon\} \geq \delta n$. Além disso, um conjunto $E \subset X$ é (δ, n, ε)-separado se quaisquer dois pares de pontos distintos em E são (δ, n, ε)-separados. Isto significa que os momentos para os quais dois pedaços de órbitas são ε-separados tem uma frequência de pelo menos δ.

Definição 3.14. *Uma dinâmica contínua $f : M \to M$ tem a* propriedade de separação uniforme *se para todo η existe $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ tal que para toda probabilidade ergódica μ e toda vizinhança F de μ no espaço de todas probabilidades $\mathcal{M}_1$ existe $n_{F,\mu,\eta} \geq 1$ com*

$$N(F; \delta, n, \varepsilon) \geq \exp\left[n(h_\mu(f) - \eta)\right]$$

para todo $n \geq n_{F,\mu,\eta}$, onde $N(F; \delta, n, \varepsilon)$ é a maior cardinalidade de um subconjunto (δ, n, ε)-separado do conjunto $\{x \in M : \delta_{x,n} \in F\}$.

Com essas noções em mente podemos estabelecer o nosso resultado.

Observação 3.15. *Dado um conjunto U no espaço das medidas sobre M, denotaremos por $Y(U)$ o conjunto $\{x \in M : \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \delta_{f^i(x)} \in U\}$.*

Teorema 3.16. *Seja M um espaço métrico compacto, $f : M \to M$ e $\phi : M \to \mathbb{R}$ contínuas, ν uma (não necessariamente invariante) probabilidade Gibbs fraca e assuma que $\mu = \mu_{f,\phi} \ll \nu$ é um único estado de equilíbrio para f com respeito a ϕ. Se um princípio de grandes desvios nível 2 vale para ν, então para todo $c > 0$*

$$P_{\overline{Y}_{\mu,c}}(f, \phi) \leq P_{\text{top}}(f, \phi) - \inf_{d(\eta,\mu)\geq c} Q(\eta) \leq P_{\text{top}}(f, \phi).$$

Além disso, se f satisfaz as propriedades de $g-$quase produto e separação uniforme e $0 < c_1 < c_2$, então $\overline{Y}_{\mu,c_1} = \emptyset$ ou

$$\begin{aligned} P_{\overline{Y}_{\mu,c_1}}(f, \phi) &= P_{\underline{Y}_{\mu,c_1}}(f, \phi) = P_{Y(\partial B(\mu,c_1))}(f, \phi) = P_{Y(B(\mu,c_1))}(f, \phi) \\ &= P_{Y\left(\overline{B(\mu,c_1,c_2)}\right)}(f, \phi) = P_{Y(B(\mu,c_1,c_2))}(f, \phi) = P_{\text{top}}(f, \phi) - \inf_{d(\eta,\mu)=c_1} Q(\eta), \end{aligned}$$

onde $B(\mu, c_1)$ denota a bola de raio c_1 entorno de μ e $B(\mu, c_1, c_2)$ denota o anel $\{\eta \in \mathcal{M}_1 : c_1 < d(\eta, \mu) < c_2\}$.

Para a prova do teorema nós iremos precisar de uma lema auxiliar que fará o mesmo papel do lema 3.4 na prova do Teorema 3.3. Já nesse lema nós precisaremos que a métrica sobre $\mathcal{M}_1$ seja invariante por translação e afim.

Lema 3.17. *Seja $c > 0$ dado. Para todo $\delta > 0$ existe $\varepsilon_\delta > 0$ e $N = N_\delta \in \mathbb{N}$ tal que $B(x, n, \varepsilon) \subset Y_{\mu,c-\delta,n}$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_\delta$, $n \geq N$ e $x \in Y_{\mu,c,n}$.*

Prova. Uma vez que $M \in x \mapsto \delta_x \in \mathcal{M}_1$ é uniformemente contínuo, então dado $\delta > 0$ existe $\varepsilon_\delta > 0$ tal que se $d(x, y) < \varepsilon_\delta$ nós temos $d(\delta_x, \delta_y) < \delta$. Logo, se $x \in Y_{c,n}$ e $y \in B(x, n, \varepsilon)$ nós temos:

$$d(\delta_{y,n}, \mu) \geq d(\delta_{x,n}, \mu) - d(\delta_{x,n}, \delta_{y,n}) \geq c - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} d(\delta_x, \delta_y) \geq c - \delta,$$

e assim $y \in Y_{\mu,c,n}$, o que prova o lema. ■

Prova do Teorema 3.16. Lembremos que no teorema $\mu = \mu_{f,\phi}$ é o único estado de equilíbrio para a dinâmica contínua f com respeito ao potencial contínuo ϕ e assumiremos que $\overline{Y}_{\mu,c} \neq \emptyset$. Para provar que $P_{\overline{Y}_{\mu,c}}(f, \phi) \leq P_{\text{top}}(f, \phi) - \inf_{d(\eta,\mu)=c} Q(\eta)$ nós cobrimos $\overline{Y}_{\mu,c}$ por uma família de bolas dinâmicas escolhidas de maneira adequada. Fixemos $\delta > 0$ pequeno e $\alpha > P_{\text{top}}(f, \Phi) - \inf_{d(\eta,\mu)\geq c-\delta} Q(\eta)$. Dado $\varepsilon > 0$ pequeno, tomemos $\zeta > 0$ pequeno de modo que $\alpha > P_{\text{top}}(f, \Phi) - \inf_{d(\eta,\mu)\geq c-\delta} Q(\eta) + \zeta$. Existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K_n(\varepsilon) \leq e^{\frac{\zeta}{4}n}$, $K_n(\frac{\varepsilon}{2}) \leq e^{\frac{\zeta}{4}n}$ e $\mu\,(x \in M : \delta_{x,n} \in U) \leq \exp(-n[\inf_{\eta\in U} Q(\eta) - \frac{\zeta}{2}])$ para todo $n \geq N_0$. Não há perda de generalidade em supor que $N \geq N_0$.

Dado $N \in N_0$, para todo $x \in \overline{Y}_{\mu,c}$ tome $m(x) \geq N$ de modo que $x \in Y_{\mu,c-\frac{\delta}{2},m(x)}$ e considere $\mathcal{G}_N := \{(x, m(x)) : x \in \overline{Y}_{\mu,c}\}$. Logo

$$\overline{Y}_{\mu,c} \subset \bigcup_{(x,n)\in\mathcal{G}_N} B(x, n, \varepsilon)$$

e também $B(x, n, \varepsilon) \subset \overline{Y}_{\mu,c-\delta,n}$, para todo $x \in Y_{\mu,c-\frac{\delta}{2},n}$, $n \geq N$ e ε pequeno (pelo lema 3.17). Portanto nós podemos proceder como na prova do Teorema 3.3 e extrair um subconjunto $\hat{\mathcal{G}}_N \subset \mathcal{G}_N$ de modo que se (x, l) e (y, l) pertencem a $\hat{\mathcal{G}}_N$ então $B(x, l, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(x, l, \frac{\varepsilon}{2}) = \emptyset$. Utilizando a propriedade Gibbs para ν temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{(x,n)\in\hat{\mathcal{G}}_N} e^{-\alpha n + S_n\phi(x)} &\leq \sum_{n\geq N}\sum_{x\in\hat{\mathcal{G}}_{N,n}} K_n(\varepsilon)e^{(P-\alpha)n}\nu(B(x, n, \varepsilon)) \\
&\leq \sum_{n\geq N} K_n(\varepsilon)K_n(\frac{\varepsilon}{2})e^{(P-\alpha)n}\nu\Big(\bigcup_{x\in\hat{\mathcal{G}}_{N,n}} B(x, n, \frac{\varepsilon}{2})\Big) \\
&\leq \sum_{n\geq N} K_n(\varepsilon)K_n(\frac{\varepsilon}{2})e^{(P-\alpha)n}\nu\big(\overline{Y}_{\mu,c-\delta,n}\big) \\
&\leq \sum_{n\geq N} \exp n\big(P - \alpha - \inf_{d(\eta,\mu)\geq c-\delta} Q(\eta) + \zeta\big)
\end{aligned}$$

que é finito e independente de N. Isto prova que

$$P_{\overline{Y}_{\mu,c}}(f, \phi) \leq P_{\text{top}}(f, \phi) - \inf_{d(\eta,\mu)\geq c-\delta} Q(\eta),$$

quando δ é pequeno. Como Q é semi-contínua inferiormente decorre que

$$P_{\overline{Y}_{\mu,c}}(f,\phi) \le P_{\text{top}}(f,\phi) - \inf_{d(\eta,\mu)\ge c} Q(\eta).$$

Para a prova da segunda parte do teorema, nós fazemos uso do princípio de grandes desvios de nível 2 obtido por [CTY13] e o trabalho de Zhou e Chen [ZC13] sob as hipóteses das propriedades de $g-$quase produto e separação uniforme. Seja $0 < c_1 < c_2$ tal que $\overline{Y}_{\mu,c_1} \neq \emptyset$. Utilizando [ZC13], dado um subconjunto compacto conexo em $\mathcal{M}_1(f)$, então a pressão topológica do conjunto $Y(C) := \{x \in M : \lim_{n\to+\infty} \delta_{x,n} \in C\}$ coincide com $\inf\{h_\eta(f) + \int \psi \, d\eta : \eta$ é f-invariante e $\eta \in C\}$. Por outro lado, por [CTY13] $Q(\eta) = P_{\text{top}}(f,\phi) - h_\eta(f) - \int \phi d\eta$. Assim usando que a entropia métrica é linear convexa e a escolha da métrica sobre $\mathcal{M}_1$ nós temos

$$\begin{aligned} P_{\text{top}}(f,\phi) - \inf_{d(\eta,\mu)=c_1} Q(\eta) &= P_{Y(\partial B(\mu,c_1))}(f,\phi) \le P_{Y(B(\mu,c_1,c_2))}(f,\phi) \\ &\le P_{Y\left(\overline{B(\mu,c_1,c_2)}\right)}(f,\phi) \le P_{Y(B(\mu,c_1))}(f,\phi) \\ &\le P_{Y(\overline{B(\mu,c_1)})}(f,\phi) \le P_{\overline{Y}_{\mu,c_1}}(f,\phi) \\ &\le P_{\underline{Y}_{\mu,c_1}}(f,\phi) \le P_{\text{top}}(f,\phi) - \inf_{d(\eta,\mu)\ge c_1} Q(\eta) \\ &\le P_{\text{top}}(f,\phi) - \inf_{d(\eta,\mu)=c_1} Q(\eta), \end{aligned}$$

provando a igualdade de todas as expressões anteriores e finalizando a prova do teorema. ■

Mais informação pode ser extraída se nós conhecemos o comportamento da função taxa Q. Em muitos casos podemos provar que a pressão topológica dos conjuntos de nível é estritamente menor que a pressão topológica $P_{\text{top}}(f,\phi)$. Este é o caso dos repulsores que nós iremos detalhar agora. Quando temos uma dinâmica expansora transitiva temos que ela possui a propriedade de especificação e é expansiva, em particular temos as propriedades de $g-$quase produto e separação uniforme. Assim, como consequência do teorema anterior:

Corolário 3.18. *Seja $f : M \to M$ uma dinâmica expansora transitiva, $\phi : M \to \mathbb{R}$ um potencial contínuo e assuma que existe um único estado de equilíbrio μ_ϕ para f com respeito a ϕ e esse estado de equilíbrio é uma probabilidade Gibbs. Então, para todo $0 < c_1 < c_2$ ou $\overline{Y}_{\mu,c} = \emptyset$, ou então*

$$P_{\overline{Y}_{\mu,c_1}}(f,\phi) = P_{\underline{Y}_{\mu,c_1}}(f,\phi) = \sup_{d(\eta,\mu)=c_1} \{h_\eta(f) + \int \phi \, d\eta\} < P_{\text{top}}(f,\phi).$$

O corolário anterior nos indica que para provar que o conjunto irregular tem pressão topológica grande não basta usar somente a propriedade de especificação, é necessário utilizar pontos cujas medidas empíricas estejam arbitrariamente próximas do estado de equilíbrio. Mais uma vez isso indica que a construção em [Tho10] é optimal.

3.1.2 Caso não-uniformemente expansor

Nessa seção estamos interessados em estender os resultados de seção anterior no caso em que estamos lidando com medidas Gibbs ultra fracas.

Nosso primeiro resultado é a extensão do Teorema 3.3 para o caso de medias Gibbs ultra fraca. Como veremos, as estratégias das provas dos resultados são similares ao caso de medida Gibbs fraca, com a dificuldade adicional que no caso Gibbs ultra fraca a sequência de momentos onde temos controle sobre a medida da bola dinâmica depende do ponto. Assim, ao invés de estimar a pressão de $\overline{X}_I$ estimaremos a pressão de $\underline{X}_I$.

Teorema 3.19. *Seja M um espaço métrico compacto, $f : M \to M$ uma dinâmica contínua e bi-mensurável, $\phi : M \to \mathbb{R}$ um potencial contínuo, ν uma (não necessariamente invariante) probabilidade Gibbs ultra fraca e $\mu \ll \nu$ um único estado de equilíbrio de f com respeito a ϕ. Para todo observável contínuo $\psi : M \to \mathbb{R}$ e todo intervalo fechado $I \subset \mathbb{R}$ vale que $\underline{X}_I = \emptyset$, ou*

$$P_{\underline{X}_I}(f, \phi) \leq P_{\text{top}}(f, \phi) - L_{I_\delta}.$$

para todo δ. Em particular, se $L_{I_\delta} < 0$ então $P_{\underline{X}_I}(f, \phi) < P_{\text{top}}(f, \phi)$.

Prova. Como comentamos anteriormente, a estratégia da prova é a mesma que no Teorema 3.3, por esta razão nós darémos apenas um esboço da prova com os ingredientes principais. Inicialmente, notemos que como f leva conjuntos mensuráveis em conjuntos mensuráveis e μ é um estado de equilíbrio, aplicando a Proposição 3.11 de [VV10] temos que $P_{\underline{X}_I}(f, \phi) = P_{\underline{X}_I}(f, \phi) \cap \Lambda_\mu$ onde Λ_μ é um conjunto de pontos onde vale a propriedade de Gibbs para μ. Sendo assim, iremos ao longo da prova supor que estamos tomando sempre pontos em Λ_μ.

Desde que μ é uma probabilidade Gibbs ultra fraca, então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que a seguinte propriedade vale: para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ existe $K_n(\varepsilon) > 0$ e para μ-quase todo ponto x existe uma sequência $n_k(x) \to \infty$ tal que

$$K_{n_k(x)}(\varepsilon)^{-1} \leq \frac{\mu(B(x, n_k(x), \varepsilon))}{e^{-n_k(x)P + S_{n_k(x)}\phi(x)}} \leq K_{n_k(x)}(\varepsilon).$$

Seja $\delta > 0$ arbitrário. Considere $\alpha > P_{\text{top}}(f,\Phi) - L_{I_\delta}$ dado e tome $\varepsilon > 0$ pequeno e $N \in \mathbb{N}$ grande no que segue. Nós podemos escrever

$$\underline{X}_I \subset \bigcup_{\ell \geq 1} \bigcap_{j \geq \ell} X_{I_\delta, j}.$$

onde como antes $X_{I,n} = \{x \in M : \frac{1}{n} S_n \psi(x) \in I\}$. Não é difícil verificar que para todo $x \in \underline{X}_I$ existe uma sequência de números positivos $(m_j(x))_{j \in \mathbb{N}}$ convergindo ao infinito tal que $x \in X_{I_\delta, m_j(x)}$ e $m_j(x)$ é um momento onde a propriedade de Gibbs vale. Além disso, podemos tomar $m(x) \geq N$ de modo que $x \in X_{I_\delta, m(x)}$, $K_{m(x)}(\varepsilon) \leq \exp \frac{(\alpha - P_{\text{top}}(f,\Phi) + L_{I_\delta}) m(x)}{4}$, $K_{m(x)}(\frac{\varepsilon}{2}) \leq \exp \frac{(\alpha - P_{\text{top}}(f,\Phi) + L_{I_\delta}) m(x)}{4}$,

$$\nu\Big(\{x \in \Lambda : \frac{1}{n} S_n \psi(x) \in I_\delta\}\Big) \leq e^{-(L_{I_\delta} - \frac{\zeta}{2})n}$$

e considerar $\mathcal{G} := \{(x, m(x)) : x \in \overline{X}_I\}$. Agora, para provarmos o resultado basta seguimos com as mesmas estimativas usadas na prova do Teorema 3.3. ■

Como já mencionamos, não pudemos estimar a pressão topológica do conjunto $\overline{X}_c$. De fato, para esse fim teríamos que garantir que para cada ponto existe uma sequência de instantes em que simultaneamente a propriedade de Gibbs vale e a média temporal esta suficientemente afastada da média espacial.

Estimativas para L_{I_δ} irão depender de como ocorre a propriedade Gibbs ultra fraca e podem ser encontradas em [Var12]. Frequentemente ao momentos em que valem a propriedade de Gibbs são os chamados tempos hiperbólicos (ver por exemplo [ABV00] para uma definição precisa) e, pela estimativa de grandes desvios dada em [Var12], vemos que $L_c > 0$ está associado à propriedade do primeiro tempo hiperbólico decair exponencialmente rápido. Além disso, [AFLV11] em um contexto abstrato provam que existe uma relação íntima entre estimativas exponenciais de grandes desvios e decaimento exponencial de correlações.

Discutiremos agora o caso específico das dinâmicas não-uniformemente expansoras apresentadas na seção 1.4.2, e usaremos as notações dessa seção. Se $f \in \mathcal{G}$ e $\phi \in C^\alpha(M, \mathbb{R})$, então por [VV10] temos que o único estado de equilíbrio $\mu_{f,\phi}$ para f com respeito a ϕ é uma probabilidade Gibbs ultra fraca. Além disso, pela Proposição 2.65, sabemos que nesse contexto obtemos estimativas exponenciais de grandes desvios dadas pela transformada de Legendre. Desse modo, como aplicação direta do teorema anterior obtemos:

Corolário 3.20. *Seja $f \in \mathcal{G}$ e $\phi \in C^\alpha(M, \mathbb{R})$. Para todo observável contínuo $\psi : M \to \mathbb{R}$ e todo $c > 0$ vale que $\underline{X}_{\mu_{f,\phi},\psi,c} = \emptyset$, ou*

$$P_{\underline{X}_{\mu_{f,\phi},\psi,c}}(f,\phi) \leq P_{\text{top}}(f,\phi) - \min\{I_{f,\phi,\psi}(c), I_{f,\phi,\psi}(-c)\} < P_{\text{top}}(f,\phi).$$

No preprint de Zhou e Chen [CZ13], como resultado principal é provado que se uma dinâmica contínua f tem a propriedade de especificação não uniforme em relação a uma medida invariante μ, ou seja, em $\mu-$quase todo ponto podemos fazer sombreamento de pedaços de suas órbitas, mas ao invés de pedir que o tempo de passar de uma órbita para outra dependa só do erro do sombreamento, é permitido que esse erro dependa do ponto porém sua taxa vai a zero quando o tempo cresce; então $P_{X(\alpha)}(f,\phi) = \sup\{h_\eta + \int \phi d\eta : \eta(\mathrm{supp}(\mu)) = 1 \text{ e } \int \psi d\eta = \alpha\}$ para todo potencial contínuo ϕ e todo observável contínuo ψ. Na prova do Teorema 3.9 essa é uma das propriedades fundamentais. Desse modo isso nos conduz à seguinte conjectura:

Conjectura 3.21. *Seja $(f,\phi) \in \mathcal{G}$ com f topologicamente mixing. Para todo observável contínuo $\psi : M \to \mathbb{R}$ e todo $c > 0$ vale que $\underline{X}_{\mu_{f,\phi},\psi,c} = \emptyset$, ou*

$$P_{\underline{X}_{\mu_{f,\phi},\psi,c}}(f,\phi) = P_{\mathrm{top}}(f,\phi) - \min\{I_{f,\phi,\psi}(c), I_{f,\phi,\psi}(-c)\}.$$

Como já mencionamos antes, quando temos medidas Gibbs ultra fraca não conseguimos a princípio estimar a pressão de $\overline{X}_{\mu_{f,\phi},\psi,c}$. Assim surgem questões naturais:

Questão 3.22. *Se $f \in \mathcal{F}_0$ é uma família de dinâmicas não uniformemente expansoras e μ é a medida de máxima entropia associada a f, então $h_{\underline{X}_{\mu,\psi,c}}(f) = h_{\overline{X}_{\mu,\psi,c}}(f)$, para todo observável contínuo ψ ?*

Questão 3.23. *Existem $(f,\phi) \in \mathcal{G}$, com f não uniformemente expansora, e um observável contínuo ψ tais que $P_{\overline{X}_c}(f,\phi)$ difere de $P_{\underline{X}_c}(f,\phi)$?*

Nosso próximo objetivo é estender o Teorema 3.16 para o caso de medidas Gibbs ultra fracas.

Teorema 3.24. *Seja M um espaço métrico compacto, $f : M \to M$ e $\phi : M \to \mathbb{R}$ contínuas, ν uma (não necessariamente invariante) probabilidade Gibbs ultra fraca e assuma que $\mu = \mu_{f,\phi} \ll \nu$ é um único estado de equilíbrio para f com respeito a ϕ. Se um princípio de grandes desvios de nível-2 vale para ν, então para todo $c > 0$*

$$P_{\overline{Y}_{\mu,c}}(f,\phi) \le P_{\mathrm{top}}(f,\phi) - \inf_{d(\eta,\mu)\ge c} Q(\eta) \le P_{\mathrm{top}}(f,\phi).$$

Prova. Assim como na prova do Teorema 3.19, a prova decorre da mesma estratégia usado na prova do Teorema 3.16 só levando em conta que compensamos o fato de não podermos usar todos os instantes pelo fato de estarmos estimando a pressão de $\overline{Y}_{\mu,c}$, que envolve o $\liminf$. ■

3.1.3 Caso Manneville-Pomeau (intermitente)

Para cada $\alpha \in (0,1)$ seja $f_\alpha : [0,1] \to [0,1]$ dada por

$$f_\alpha := \begin{cases} x(1+2^\alpha x^\alpha), & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 2x-1, & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

a aplicação de Manneville-Pomeau já discutida anteriormente. Cada f_α é uma aplicação não-uniformemente expansora e, se $(f_\alpha, \phi) \in \mathcal{G}$, já sabemos que existe um único estado de equilíbrio $\mu_{\alpha,\phi}$ para f_α com respeito a ϕ e que $\mu_{\alpha,\phi}$ é uma probabilidade Gibbs fraca. Em particular, podemos aplicar o Corolário 3.20 e concluir que para todo observável contínuo e todo $c > 0$ temos que

$$P_{\underline{X}_{\mu_{\alpha,\phi},\psi,c}}(f,\phi) \leq P_{\text{top}}(f,\phi) - \min\{I_{f,\phi,\psi}(c), I_{f,\phi,\psi}(-c)\}. \tag{3.3}$$

Por outro lado, como f_α é topologicamente conjugada à dinâmica expansora $x \mapsto 2x$ mod 1, então f_α possui a propriedade de especificação, logo podemos aplicar o resultado principal de [Tho09] concluindo que a pressão topológica do conjunto $\{x \in M : \lim \frac{1}{n} S_n\psi(x) = c\}$ coincide com $\sup\{h_\eta + \int \psi \, d\eta : \eta$ e f-invariante e $\int \psi d\eta = c\}$. Notemos que essa propriedade anterior juntamente com a convexidade da função taxa de grandes desvios são as ferramentas fundamentais para obter a desigualdade contrária no Teorema 3.9. Assim, seguindo a mesma prova de tal teorema, é possível obter a estimativa precisa da pressão de $\underline{X}_{\mu_{\alpha,\phi},\psi,c}(f,\phi)$,

Corolário 3.25. *Seja $(f_\alpha, \phi) \in \mathcal{G}$ e $\psi : S^1 \to \mathbb{R}$ um observável Holder e $\int \psi \, d\mu_{\alpha,\phi} = 0$. Se $0 \notin [c_1, c_2]$ e $c := \min\{|c_1|, |c_2|\} \neq \hat{c} := \max\{|c_1|, |c_2|\}$, então $\underline{X}_c = \emptyset$ ou*

$$\begin{aligned} P_{\underline{X}_{\mu_{\alpha,\phi},\psi,c}}(f,\phi) &= P_{X(c)}(f,\phi) = P_{X([c,\hat{c}])}(f,\phi) = P_{X(c,\hat{c})}(f,\phi) \\ &= P_{\text{top}}(f,\phi) - I_{f,\phi,\psi}(c), \end{aligned}$$

se $I_{f,\phi,\psi}(c) = \min\{I_{f,\phi,\psi}(-c)\ ,\ I_{f,\phi,\psi}(c)\}$, ou então

$$\begin{aligned} P_{\underline{X}_{\mu_{\alpha,\phi},\psi,c}}(f,\phi) &= P_{X(-c)}(f,\phi) = P_{X([-\hat{c},-c])}(f,\phi) = P_{X(-\hat{c},-c)}(f,\phi) \\ &= P_{\text{top}}(f,\phi) - I_{f,\phi,\psi}(-c), \end{aligned}$$

se $I_{f,\phi,\psi}(-c) = \min\{I_{f,\phi,\psi}(-c)\ ,\ I_{f,\phi,\psi}(c)\}$. *Em particular* $\mathbb{R}_0^+ \ni c \mapsto P_{\underline{X}_{\mu_{f,\phi},\psi,c}}(f,\phi)$ *é derivável, concava e estritamente decrescente.*

Em particular, para $t \geq 0$ tomemos $\phi_{\alpha,t} := -t\log f'_\alpha$. Para todo $t \in (-\infty,1)$ existe um único estado de equilíbrio $\mu_{\alpha,t}$ para f_α com respeito a todo potencial $\alpha-$Hölder contínuo ϕ_t. Também é bem conhecido que existem dois estados de equilíbrio para f_α com respeito a $-\log f'_\alpha$, a saber, uma probabilidade absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue $\mu_{\alpha,1}$ e uma medida de Dirac δ_0. Ademais, para todo $t \leq 1$ o estado de equilíbrio $\mu_{\alpha,t}$ para f_α com respeito ao potencial ϕ_t satisfaz a propriedade de Gibbs fraca: existe uma sequência K_n, com $\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log K_n = 0$, tal que

$$\frac{1}{K_n} \leq \frac{\mu_t(\mathcal{P}^{(n)}(x))}{e^{-nP_t}|(f_\alpha^n)'(x)|^t} \leq K_n$$

para todo $x \in [0,1]$ e $n \geq 1$, onde $\mathcal{P}$ é uma partição de Markov para f_α, $\mathcal{P}^{(n)}(x)$ é o elemento da partição $\mathcal{P}^{(n)} = \bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}\mathcal{P}$ que contém x e $P_t = P_{\text{top}}(f_\alpha,\phi_t)$.

A medida SRB $\mu_{\alpha,1}$, tem decaimento polinomial de correlações de ordem $\mathcal{O}(n^{\frac{1}{\alpha}-1})$ e limitações polinomiais superiores e inferiores para observáveis $\alpha-$Hölder contínuos tem sido estabelecidos em [MN08, Mel09, PS09] e nossos resultados não são aplicáveis nesse contexto.

Assim, nós iremos direcionar a questão para o caso em que $|t|$ é pequeno. Nesse contexto, como μ_t é uma medida Gibbs fraca podemos aplicar o Teorema 3.3 e, como a taxa de grandes desvios nesse caso é dada pela transformada de Legendre, temos

$$P_{\overline{X}_{\mu_t,\psi,c}}(f,\phi) \leq P_{\text{top}}(f,-t\log f'_\alpha) - \min\{I_{f,-t\log f'_\alpha,\psi}(c), I_{f,-t\log f'_\alpha,\psi}(-c)\}. \tag{3.4}$$

para todo observável Holder $\psi : M \to \mathbb{R}$ com $\int \psi d\mu_t = 0$. E mais uma vez, pela propriedade de especificação e a convexidade da função taxa de grandes desvios, obtemos a igualdade da expressão anterior. De fato, podemos ir além e obter resultados de regularidade para a pressão do conjunto $X_{\alpha,t,c} := \overline{X}_{\mu_{\alpha,t},\log f'_\alpha,c}$, que nada mais é do que o conjunto de pontos cuja sequência que define o expoente de Lyapunov tem infinitos instantes afastados do valor médio do expoente de Lyapunov. Mais precisamente,

Corolário 3.26. *Dado* $\alpha_1 \in (0,1)$ *existe um* $\epsilon > 0$ *tal que a seguinte função é contínua:*

$$[\alpha_1,1) \times (-\epsilon,\epsilon) \times (0,\frac{\log 2}{2}] \ni (\alpha,t,c) \mapsto P_{X_{\alpha,t,c}}(f_\alpha,-t\log f'_\alpha).$$

Prova. Observamos inicialmente que, como f_α tem a propriedade de especificação, então para todo $d \in [0,\log 2]$ existe um ponto $x \in [0,1]$ tal que $\lim \frac{1}{n}\log(f_\alpha^n)'(x) = d$. Por esse motivo, dado $(\alpha,t,c) \in (0,1) \times (-\infty,\infty) \times (0,\frac{\log 2}{2}]$ temos que $X_{\alpha,t,c} \neq \emptyset$, em particular

$\log f'_\alpha$ não é cohomólogo a uma constante. Assim, para provarmos o resultado basta mostramos que a função

$$[\alpha_1, 1) \times (-\epsilon, \epsilon) \times (0, \frac{\log 2}{2}] \ni (\alpha, t, c) \mapsto I_{f_\alpha, -t\log f'_\alpha, \log f'_\alpha}(c)$$

está bem definida e é contínua.

Fixemos $\alpha_1 \in (0,1)$. Primeiro observemos que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\alpha \in (0,1)$ e $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ temos que a dinâmica f_α e o potencial $-t\log f'_\alpha$ são aplicações não-uniformemente expansoras no sentido de [CV13]. Além disso, pelas estimativas de [CV13] podemos tomar ϵ de modo que para todo $\alpha \in [\alpha_1, 1)$ e $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ o operador de transferência associado a f_α e $-t\log f'_\alpha$ leva o cone

$$\{\varphi \in C^{\alpha_1}(M, \mathbb{R}) : \varphi > 0 \text{ e } |\varphi|_{\alpha_1, \frac{1}{2}} \leq \inf \varphi\}$$

no cone

$$\{\varphi \in C^{\alpha_1}(M, \mathbb{R}) : \varphi > 0 \text{ e } |\varphi|_{\alpha_1, \frac{1}{2}} \leq \hat{\lambda} \inf \varphi\},$$

onde $\hat{\lambda} \in (0,1)$ e não depende de t nem de α. De fato, essa propriedade vale para potenciais próximos de $-t\log f'_\alpha$ na norma de C^{α_1}. Assim, aplicando o Corolário 1.15 e o Teorema 2.22, temos que

$$[\alpha_1, 1) \times (-\epsilon, \epsilon) \times (0, \frac{\log 2}{2}] \ni (\alpha, t, c) \mapsto I_{f_\alpha, -t\log f'_\alpha, \log f'_\alpha}(c)$$

é contínua, onde a transformada de Legendre esta bem definida. Sabemos de [VV10] que o suporte de $\mu_{f_\alpha, -t\log f'_\alpha}$ é $[0,1]$, logo, pelo critério estabelecido pela proposição 2.17, temos que a função energia livre associada a f_α, $-\log f'_\alpha$ e $\log f_\alpha$ é estritamente convexa e, assim, podemos definir a transformada de Legendre associada. Isto finaliza a prova do corolário. ∎

Mesmo no caso Manneville-Pomeau, nossas estimativas no caso de potenciais próximos de uma constante foram feitas sobre os conjuntos do tipo $\underline{X}_c$, logo uma questão natural é a seguinte:

Questão 3.27. *Se $(f_\alpha, \phi) \in \mathcal{G}$, potencial $-t\log f'_\alpha$, com t pequeno, e observável $\log f'_\alpha$ vale que $P_{\underline{X}_{\mu_{f_\alpha,\phi}, \log f'_\alpha, c}}(f_\alpha, \phi) = P_{\overline{X}_{\mu_{f_\alpha,\phi}, \log f'_\alpha, c}}(f_\alpha, \phi)$?*

Com já vimos, f_α tem a propriedade de especificação e, para t pequeno, temos que $\mu_{\alpha,t}$ é uma medida Gibbs fraca. Logo, aplicando [CTY13] obtemos princípio de grandes desvios de nível-2 e assim podemos aplicar a primeira parte do Teorema 3.16 em f_α e $\mu_{\alpha,t}$ obtendo:

Corolário 3.28. *Seja $\alpha \in (0,1)$ e $t \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno. Para todo $c > 0$ temos que $\overline{Y}_{\mu_{\alpha,t},c} = \emptyset$ ou*

$$P_{\overline{Y}_{\mu_{\alpha,t},c}}(f_\alpha, -t\log f'_\alpha) \leq \sup_{d(\eta,\mu_{\alpha,t})=c}\{h_\eta(f_\alpha) - t\int \log f'_\alpha\, d\eta\} < P_{\text{top}}(f_\alpha, -t\log f'_\alpha).$$

Observação 3.29. *No corolário anterior, usamos também que $\sup_{d(\eta,\mu_{\alpha,t})\geq c}\{h_\eta(f_\alpha) - t\int \log f'_\alpha\, d\eta\} = \sup_{d(\eta,\mu_{\alpha,t})=c}\{h_\eta(f_\alpha) - t\int \log f'_\alpha\, d\eta\}$ por causa da convexidade estrita da entropia e da escolha da métrica sobre $\mathcal{M}_1$.*

3.1.4 Aplicações quadráticas

Nós consideraremos agora a classe de aplicações quadráticas f_a na reta real dadas por $f_a(x) = 1 - ax^2$. Benedicks and Carleson [BC85] provaram a existência de um conjunto de parâmetros $\Omega \in [0,2]$ de medida positiva em relação à medida de Lebesgue tal que, para todo $a \in \Omega$, a aplicação quadrática f_a tem exponente de Lyapunov positivo e uma única medida invariante μ_a absolutamente contínua com respeito a Lebesgue, suportada sobre $[f^2(0), f(0)]$. Além disso, pela desigualdade de Pesin-Ruelle, temos que $P_{\text{top}}(f_a, -\log|f'_\alpha|) = 0$. Uma vez que essas aplicações são contínuas e topologicamente mixing sobre $[f^2(0), f(0)]$, então decorre do teorema de Blokh [Blo83] que elas satisfazem a propriedade de especificação. A menos de intersectarmos Ω com um intervalo contendo 2, Chung e Takahasi [CT12] provaram estimativas exponenciais globais de grandes desvios para esse conjunto de parâmetros. Iremos daqui em diante denotar o conjunto de parâmetros usado em [CT12] por Ω. Dado um parâmetro $a \in \Omega$ e um observável contínuo $\psi : [-1,1] \to \mathbb{R}$, defina $L_{1,\psi} := \inf_{\eta\in\mathcal{M}_1(f_a)}\{\int \psi d\eta\}$ e $L_{2,\psi} := \sup_{\eta\in\mathcal{M}_1(f_a)}\{\int \psi d\eta\}$. Então em [CT12] se prova que para todo $c_1, c_2 \in [L_{1,\psi}, L_{2,\psi}]$ temos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mu_a\{x \in [-1,1] : c_1 \leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\psi(f_a^i(x))c_2\} =$$

$$\max_{t\in[c_1,c_2]}\sup\{h_\eta(f_a) - \int \log|f'_a|d\eta : \eta \in \mathcal{M}_1(f_a), \int \psi d\eta = t\}.$$

Além disso, a função $[L_{1,\psi}, L_{2,\psi}] \ni t \mapsto \sup\{h_\eta(f_a) - \int \log|f'_a|d\eta : \eta \in \mathcal{M}_1(f_a), \int\psi d\eta = t\}$ é contínua e côncava. Vale a pena também observar que, por causa da propriedade de especificação, $[L_{1,\psi}, L_{2,\psi}] = \{\alpha \in \mathbb{R} :$ existe $x \in [-1,1]$ com $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\psi(f_a^i(x)) = \alpha\}$. Desse modo, aplicando o Teorema 3.19 teremos que para todo $c > 0$:

$$P_{\underline{X}_{\mu_a,\psi,c}}(f_a, -\log|f'_\alpha|) \leq -\sup_{\eta\in\mathcal{M}_1(f_a)}\{h_\eta(f_a) - \int\log|f'_a|d\eta : |\int\psi d\eta - \int\psi d\mu_a| \geq c\}$$
$$< 0.$$

Por outro lado, f_a tem a propriedade de especificação logo, assim como no caso das aplicações de Manneville-Pomeau, vale o resultado principal de [Tho09] e então, pela mesma prova do Teorema 3.9, é possível obter a desigualdade contrária da estimativa anterior e dizer com precisão o valor da pressão $\underline{X}_{\mu_a,\psi,c}$. Mais precisamente

Corolário 3.30. *Existe um conjunto $\Omega \subset [0,2]$ com medida de Lebesgue positiva tal que se $a \in \Omega$, $\psi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ é contínuo com $\int \psi d\mu_a = 0$, $0 \notin [c_1, c_2]$ e $c := \min\{|c_1|, |c_2|\} \neq \hat{c} := \max\{|c_1|, |c_2|\}$ então ou $\underline{X}_{\mu_a,\psi,c} = \emptyset$ ou*

$$\begin{aligned} P_{\underline{X}_{\mu_a,\psi,c}}(f_a, -\log|f_a'|) &= P_{X(c)}(f_a, -\log|f_a'|) = P_{X([c,\hat{c}])}(f_a, -\log|f_a'|) = P_{X(c,\hat{c})}(f_a, -\log|f_a'|) \\ &= -\sup_{\eta \in \mathcal{M}_1(f_a)} \{h_\eta(f_a) - \int \log|f_a'| d\eta : \int \psi d\eta = c\}, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} P_{\underline{X}_{\mu_a,\psi,c}}(f_a, -\log|f_a'|) &= P_{X(-c)}(f_a, -\log|f_a'|) = P_{X([-\hat{c},-c])}(f_a, -\log|f_a'|) = P_{X(-\hat{c},-c)}(f_a, -\log|f_a'|) \\ &= -\sup_{\eta \in \mathcal{M}_1(f_a)} \{h_\eta(f_a) - \int \log|f_a'| d\eta : \int \psi d\eta = -c\}. \end{aligned}$$

Em particular $\mathbb{R}_0^+ \ni c \mapsto P_{\underline{X}_{\mu_a,\psi,c}}(f_a, -\log|f_a'|)$ é concava.

Assim como no caso da aplicação de Manneville-Pomeau, uma questão natural é a seguinte:

Questão 3.31. *Existe um conjunto de parâmetros $\Omega \subset [0,2]$, com medida de Lebesgue positiva, tal que se $a \in \Omega$ então $P_{\underline{X}_{\mu_{a,\log|f_a'|,c}}}(f_a, -\log|f_a'|) = P_{\overline{X}_{\mu_{a,\log|f_a'|,c}}}(f_a, -\log|f_a'|)$?*

Para esse mesmo conjunto de parâmetros Ω já discutido, em [CT12] também é provado um princípio de grandes desvios de nível-2 com função taxa $Q(\eta) = -h_\eta(f_a) + \int \log|f_a'| d\mu_{f_a}$. Assim, aplicando o Teorema 3.24:

Corolário 3.32. *Existe um conjunto $\Omega \subset [0,2]$ com medida de Lebesgue positiva tal que se $a \in \Omega$ e $c > 0$, temos que $\underline{Y}_{\mu_a,c} = \emptyset$ ou*

$$P_{\underline{Y}_{\mu_a,c}}(f_a, -\log|f_a'|) \leq \sup_{d(\eta,\mu_a)=c} \{h_\eta(f_a) - \int \log|f_a'|\, d\eta\} < P_{\text{top}}(f_a, -\log|f_a'|).$$

3.1.5 Aplicações multimodais

Uma classe de aplicações do intervalo onde nossos resultados valem foi considerada por Bruin e Todd in [BT09]. Seja f uma aplicação do intervalo transitiva com um número finito de pontos críticos, todos eles não flat (ou seja, a menos de um difeomorfismo a vizinhança do ponto crítico é um polinômio), e f com derivada Schwarziana negativa. Se existe $C > 0$ e $\beta > 2\ell - 1$ tal que $|Df^n(f(c))| \geq n^\beta$ para todo ponto crítico c e $n \geq 1$ (onde ℓ ordem máxima dos pontos críticos), então decorre de [BT09, Theorem 1] que existe $t_1 < 1$ tal que para todo $t \in (t_1, 1)$:

(i) existe um único estado de equilíbrio μ_t para f com respeito ao potencial $-t \log |Df|$,

(ii) μ_t tem esquema induzido compatível com cauda exponencial, em particular tem decaimento exponencial de correlações

(iii) μ_t tem expoente de Lyapunov positivo.

Ademais, existe uma probabilidade conforme ν_t tal que

$$J_{\nu_t} f(x) = \frac{e^{P(t)}}{|f'(x)|^t} \quad \text{quase sempre}$$

e $\mu_t \ll \nu_t$, onde $P(t) = P_{\text{top}}(f, -t \log |f'|)$. Além disso, como μ_t tem expoente positivo, então quase todo ponto tem infinitos tempos hiperbólicos. Se n é um tempo hiperbólico para x, então o jacobiano $J_{\nu_t} f^n$ tem distorção limitada. Consequentemente, ν_t satisfaz a propriedade Gibbs ultra fraca. Por outro lado, utilizando (ii) acima com os resultados de [AFLV11], temos que μ_t tem estimativas exponenciais de grandes desvios e então podemos aplicar o Teorema 3.19. Em particular, provamos que a pressão de $\underline{X}_c$ é estritamente menor que $P(t)$. Vale ressaltar que as aplicações quadráticas discutidas na seção anterior satisfazem as hipóteses de [BT09].

3.1.6 Difeomorfismos hiperbólicos e subshifts do tipo finito

Nessa seção iremos estudar o caso invertível de dinâmicas, especificamente o caso hiperbólico.

Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo, e seja $\Lambda \subset M$ um conjunto compacto $f-$invariante. Lembremos que um conjunto Λ é dito *conjunto hiperbólico* para f se para todo ponto $x \in \Lambda$ existe uma decomposição do espaço tangente $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$ tal que

$$Df(x) \cdot E^s(x) = E^s(fx) \;\text{ e }\; Df(x) \cdot E^u(x) = E^u(fx),$$

e existem constantes $\lambda \in (0, 1)$ e $C > 0$ tal que

$$||Df(x)^n_{|E^s(x)}|| \leq C\lambda^n \;\text{ e}||Df(x)^{-n}_{|E^u(x)}|| \leq C\lambda^n$$

para todo $x \in \Lambda$ e $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $x \in \Lambda$ a variedade estável e instável de tamanho ε são dadas por

$$W^s_\varepsilon(x) = \{y \in B(x, \varepsilon) : d(f^n y, f^n x) < \varepsilon \text{ para todo } n \geq 0\}$$

$$W^u_\varepsilon(x) = \{y \in B(x, \varepsilon) : d(f^n y, f^n x) < \varepsilon \text{ para todo } n \geq 0\}.$$

Relembremos a noção de partição de Markov para conjunto hiperbólico. Uma coleção de conjuntos fechados $R_1, \ldots, R_p \subset \Lambda$ é chamada uma *partição de Markov* de Λ se:

1. $\Lambda = \cup_{i=1}^p R_i$, e $\overline{\text{int} R_i} = R_i$ para $i = 1, \ldots, p$;

2. $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(x) \in R_i$ e $\#(W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(x)) = 1$ sempre que $x, y \in R_i$;

3. $\text{int} R_i \cap \text{int} R_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$;

4. se $x \in f(\text{int} R_i) \cap \text{int} R_j$ então

$$f^{-1}(W^u_\varepsilon(fx) \cap R_j) \subset W^u_\varepsilon(x) \cap R_i \;\text{ e }\; f(W^s_\varepsilon(x) \cap R_i) \subset W^s_\varepsilon(fx) \cap R_j.$$

Notemos que o interior de cada conjunto R_i é computado com respeito a topologia induzida sobre Λ. A importância da existência de partições de Markov está associada à obtenção de uma semi-conjugação com um subshift do tipo finito. Todo conjunto hiperbólico tem partição de Markov com diâmetro arbitrariamente pequeno (ver por exemplo [Bow75]). Adicionalmente, iremos supor que existe um conjunto aberto $U \subset \Lambda$ tal que $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U)$ (esta propriedade equivale a existência da estrutura de produto local) e que $f_{|\Lambda}$ é topologicamente mixing.

Dada uma partição de Markov $\mathcal{P}$ e $x \in \Lambda$, nós podemos definir $\mathcal{P}_n(x) := \{y \in \Lambda : \; f^j(y) \in R(f^j(x)) \text{ para todo } -n \leq j \leq n\}$ como o cilindro de tamanho n, onde $R(x)$ denota o elemento da partição de Markov que contém x. Dado um potencial $\phi : M \to \mathbb{R}$ Holder contínuo nós sabemos que existe um único estado de equilíbrio μ para $f_{|\Lambda}$ com respeito a ϕ. Ademais, μ é uma medida Gibbs no seguinte sentido: existe uma constante $K > 0$ tal que

$$K^{-1} \leq \frac{\mu(\mathcal{P}_n(x))}{e^{-nP_{\text{top}}(f,\phi) + S_n\phi(x)}} \leq K$$

para todo $x \in \Lambda$ e $n \in \mathbb{N}$. Isto pode ser provado através da semi-conjugação com um subshift do tipo finito (ver por exemplo[Bow75]).

Notemos que nas provas do Teorema 3.3 ou Teorema 3.19, para estimarmos superiormente a pressão do conjunto $\overline{X_c}$, podemos, ao invés de usar cilindros associados a bolas, utilizar qualquer sequência de cilindros associados a coberturas cujo diâmetro vão a zero. Isto vale pela própria definição de pressão via dimensão, devido a Pesin e Pitskel, e em particular podemos utilizar as partições de Markov. Substituindo então bolas dinâmicas por cilindros $\mathcal{P}_n(x)$, obtemos um lema similar ao Lema 3.4 e, pela propriedade do tipo Gibbs sobre os cilindros da partição de Markov, seguindo a mesma prova do Teorema 3.3, obtemos a estimativa superior do resultado. Porém, utilizando a semi-conjugação, iremos provar que a pressão desse conjunto é estritamente menor que a pressão topológica.

Por causa da semi-conjugação entre $f_{|\Lambda}$ e um subshift do tipo finito, observamos que a pressão de $\overline{X}_{\mu_{f_{|\Lambda}},\phi,\psi,c}$ é a mesma que a pressão de $\overline{X}_{\mu_{\sigma_{|\sum_A}},\phi\circ h,\psi\circ h,c}$, onde $h : \sum_A \to \Lambda$ é a semi-conjugação entre $f_{|\Lambda}$ e o subshift do tipo finito $\sigma_{|\sum_A}$. Sendo assim, passemos a estudar o nosso problema para o caso do subshift do tipo finito. Seja então um potencial $\phi : \sum_A \to \mathbb{R}$ Holder contínuo, μ o único estado de equilíbrio e $\psi : \sum_A \to \mathbb{R}$ um observável contínuo. Por um lado, utilizando os cilindros da forma $[x_{-n}, \ldots x_n] := \{(y)_{k\in\mathbb{Z}} \in \sum_A : y_i = x_i, \forall i = -n, \ldots, n\}$ e que μ tem uma propriedade do tipo Gibbs sobre esses cilindros, argumentando como anteriormente, no caso de difeomorfismos hiperbólicos teríamos que $P_{\overline{X_{\mu,\psi,c}}}(\sigma_{|\sum_A}, \phi) \leq P_{\text{top}}(\sigma_{|\sum_A}, \phi) - L_{c-\delta}$, onde $L_c := \{x \in \sum_A : |\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\psi(\sigma^i(x) - \int \psi d\mu| \geq c$. Porém, utilizando as estimativas de grandes desvios de [You90], obtemos que

$$P_{\overline{X_{\mu,\psi,c}}}(\sigma_{|\sum_A}, \phi) \leq P_{\text{top}}(\sigma_{|\sum_A}, \phi) -$$

$$\sup_{\eta\in\mathcal{M}_1(\sigma_{|\sum_A})}\{P_{\text{top}}(\sigma_{|\sum_A}, \phi) - h_\eta(\sigma_{|\sum_A}) - \int \phi d\mu : |\int \psi d\eta - \int \psi d\mu| \geq c\} \leq$$

$$\sup_{\eta\in\mathcal{M}_1(\sigma_{|\sum_A})}\{h_\eta(\sigma_{|\sum_A}) + \int \phi d\mu : |\int \psi d\eta - \int \psi d\mu| \geq c\} < P_{\text{top}}(\sigma_{|\sum_A}, \phi).$$

Obtemos então o respectivo resultado para difeomorfismos hiperbólicos.

3.1.7 Fluxos hiperbólicos

Nesse momento iremos estudar o caso de fluxos hiperbólicos.

Seja $Y \in \mathfrak{X}^1(M)$ um campo de vetores suave e $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ o fluxo associado. Um conjunto compacto invariante $\Lambda \subset M$ é um *conjunto hiperbólico para* $(Y_t)_t$ se existem constantes $\lambda \in (0,1)$ e $C > 0$ tais que, para todo $x \in \Lambda$, existe uma decomposição $T_xM = E^u_x \oplus E^0_x \oplus E^s_x$ com $E^0_x =< Y(x) >$ sendo um subespaço unidimensional, $DY_t(x) \cdot E^u_x = E^u_{Y_t(x)}$, $DY_t(x) \cdot E^s_x = E^s_{Y_t(x)}$ e também

$$||DY_t(x)^t_{|E^s(x)}|| \leq C\lambda^t \quad \text{e} \quad ||DY_t(x)^{-t}_{|E^u(x)}|| \leq C\lambda^t$$

para todo $t \geq 0$. Um fluxo é dito *Axioma A* se o conjunto não-errante é um conjunto hiperbólico e os pontos periódicos são densos nele. Decorre do trabalho pioneiro de Bowen e Ruelle [BR75] que um fluxo Axioma A $(Y_t)_t$ é semi-conjugado a um fluxo suspensão sobre um subshift do tipo finito. Lembremos que, dado um subshift do tipo finito $\sigma : \Sigma_A \to \Sigma_A$ e uma função altura $h : \Sigma_A \to \mathbb{R}^+$ afastada do zero e do infinito, o *fluxo de suspensão* associado $(S_t)_t$ é definido em $M_h = \{(x,t) \in \Sigma_A \times \mathbb{R}_+ : 0 \leq t \leq h(x)\}$ com a identificação dos pares $(x, h(x))$ e $(\sigma(x), 0)$. O fluxo é definido sobre M_h por

$S_t(x,r) = (\sigma^n(x), r + t - \sum_{i=0}^{n-1} h(\sigma^i(x)))$, onde $n \in \mathbb{Z}+$ é unicamente definido por

$$\sum_{i=0}^{n-1} h(\sigma^i(x)) \leq r + t < \sum_{i=0}^{n} h(\sigma^i(x)). \tag{3.5}$$

Ademais, como h é limitado, então $\eta \mapsto \frac{\eta \times \mathrm{Leb}_1}{\int h d\eta}$ é uma correspondência entre probabilidades $\sigma_{|\Sigma_A}$-invariantes e S^t-invariantes, onde Leb_1 denota a medida de Lebesgue unidimensional e a probabilidade $\tilde{\eta} := (\eta \times \mathrm{Leb}_1)/\int h\, d\eta$ é definida sobre M_h por $\int g\, d\tilde{\eta} = \frac{1}{\int h\, d\eta} \int \left(\int_0^{h(x)} g(x,t) dt \right) d\eta(x), \quad \forall g \in C^0(M_h)$. Dado $\psi : M_h \to \mathbb{R}$ nós associamos o observável $\bar{\psi}$ sobre Σ_A definido como $\bar{\psi}(x) = \int_0^{h(x)} \psi(x,t)\ dt$. Em particular, dado $T > 0$ grande, $(x,s) \in M_h$ e $n = n(x, T+s)$ definido pela equação (3.5) decorre que $n(x, T+s) \to \infty$ quando $T \to \infty$ e

$$\frac{1}{n(x,T+s)} \sum_{i=0}^{n(x,T+s)-1} h(\sigma^i(x)) \leq \frac{T+s}{n(x,T+s)} < \frac{1}{n(x,T+s)} \sum_{i=0}^{n(x,T+s)} h(\sigma^i(x)). \tag{3.6}$$

Com esta notação em mente, nós podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_0^T \psi(S_t(x,s))\ dt &= \frac{n(x,T+s)}{T} \frac{1}{n(x,T+s)} \sum_{i=0}^{n(x,T+s)} \overline{\psi}(\sigma^i(x)) \\ &+ \frac{1}{T} \int_0^{T+s-\sum_{i=0}^{n(x,T+s)-1} h(\sigma^i(x))} \psi(S_t(\sigma^n(x),0))\ dt, \end{aligned}$$

onde o segundo termo é limitado superiormente por $||\psi||_\infty\ ||h||_\infty / T$ e converge uniformemente para zero quando T tende ao infinito. Ademais, para todo $\beta_1, \beta_2, \beta_3 > 0$ suficientemente pequenos tal que $\frac{\beta_1}{\int h d\mu_\Sigma} + ||\psi||_0 \cdot \beta_2 < c$ e $\frac{\beta_3}{\inf h \cdot \int h d\mu_\Sigma} < \beta_2$,

$$\overline{X}_c = \Big\{ (x,s) \in M_h : \limsup_{T\to\infty} \Big| \frac{1}{T} \int_0^T \psi(S_t(x,s))\ dt - \int \psi\ d\mu \Big| \geq c \Big\}$$

esta contido na união dos conjuntos $(S_t)_t$-invariantes

$$\begin{aligned} \overline{X}_{c,h} &= \big\{ (x,s) \in M_h : \limsup_{T\to\infty} \Big| \frac{n(x,T+s)}{T+s} - \frac{1}{\int h\ d\mu_\Sigma} \Big| \geq \beta_2 \big\} \\ &\subseteq \big\{ (x,s) \in M_h : \limsup_{T\to\infty} \Big| \frac{1}{n(x,T+s)} \sum_{i=0}^{n(x,T+s)} h(\sigma^i(x)) - \int h\ d\mu_\Sigma \Big| \geq \beta_3 \big\} \end{aligned}$$

e

$$\overline{X}_{c,\overline{\psi}} = \big\{ (x,s) \in M_h : \limsup_{T\to\infty} \Big| \frac{1}{n(x,T)} \sum_{i=0}^{n(x,T+s)} \overline{\psi}(\sigma^i(x)) - \int \overline{\psi}\ d\mu_\Sigma \Big| \geq \beta_1 \big\}$$

Consequentemente, utilizando $P_{\overline{X}_c}((S_t)_t, \phi) \leq \max\{P_{\overline{X}_{c,h}}((S_t)_t, \psi), P_{\overline{X}_{c,\overline{\phi}}}((S_t)_t, \phi)\}$ e o caso de subshift do tipo finito discutido na seção anterior, nós podemos deduzir da semi-conjugação o seguinte:

Corolário 3.33. *Sejam* $(X_t)_t$ *um fluxo Axioma A,* $\phi : M \to \mathbb{R}$ *um potencial Hölder contínuo e* $\mu = \mu_\phi$ *o único estado de equilíbrio para* $(X_t)_t$ *com respeito a* ϕ*. Então, para todo observável contínuo* $\psi : M \to \mathbb{R}$ *e* $c > 0$ *vale que*

$$P_{\overline{X}_c}((X_t)_t, \phi) < P_{\text{top}}((X_t)_t, \phi).$$

3.1.8 Olho de Bowen

Nesse seção iremos apresentar um exemplo de sistema dinâmico f, potencial ϕ, observável ψ e constante $c > 0$ tal que $\overline{X}_c \neq \underline{X}_c$. A aplicação f corresponde ao tempo 1 do fluxo conhecido como Olho de Bowen. A aplicação f tem três pontos fixos p_1, p_2 e p_3 (marcados na Figura 3.2 abaixo) e tais que $\{p_1, p_2, p_3\} = \text{Per}(f) = R(f)$, onde o conjunto não-errante é formado pelo ponto fixo repulsor p_2 que está no centro da figura e o fecho D das duas separatrizes correspondentes às singularidades do tipo sela p_1 (à esquerda de p_2) e p_3 (à direita de p_2) do campo de vetores original.

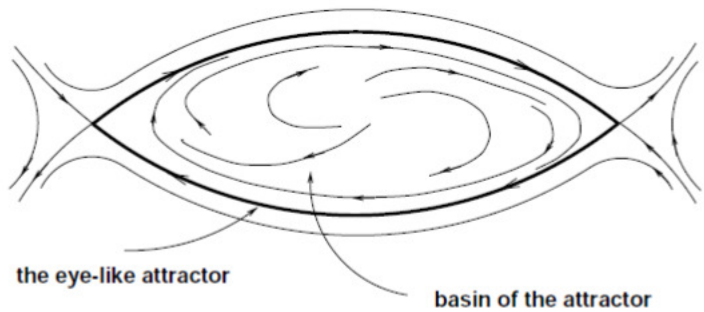

Figura 3.2: Atrator olho de Bowen

Ademais, é bem conhecido que para todo x na região do plano determinada por D (exceto p_2) a medida empírica $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{f^j(x)}$ tem as medidas de Dirac δ_{p_1} e δ_{p_3} como pontos de acumulação. Se $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ denota a projeção sobre a coordenada x- então, pelo princípio variacional,

$$P_{\text{top}}(f, \phi) = \sup\{h_\mu(f) + \int \phi \, d\mu\} = \max_i\{\phi(p_i)\} = \phi(p_3)$$

e δ_{p_3} é o único estado de equilíbrio para ϕ. Por outro lado, se $\psi = -\phi$ então $\min \psi = \psi(p_3)$ e para $0 < c < d(p_2, p_3)$

$$\underline{X}_c = \{p_1\} \cup \{A_1\} \quad \text{e} \quad \overline{X}_c = D \setminus \Big(\{p_3\} \cup A_2\Big),$$

onde A_1 é o arco superior do bordo de D e A_2 é o arco inferior do bordo de D, assim $\overline{X}_c \neq \underline{X}_c$ porém $P_{\underline{X}_c}(f, \phi) = P_{\overline{X}_c}(f, \phi)$.

3.1.9 Contra-exemplo

Apesar do fato da pressão topológica dos conjuntos $\underline{X}_c$ e $\overline{X}_c$ coincidir na exemplo anterior, a construção do Olho de Bowen nos dá uma luz sobre a construção um exemplo onde $P_{\underline{X}_c}(f,\phi) < P_{\overline{X}_c}(f,\phi)$, pois ele nos indica que precisamos escolher um potencial e um observável suportados em regiões diferentes do espaço e que a dinâmica faça com que órbitas alternem longos períodos nessas regiões. O problema é que, assim como no caso do Olho de Bowen, em geral essas regiões é que devem suportar as medidas invariantes. Iremos dar agora um exemplo no qual $\overline{CP}_{\underline{X}_c}(f,\phi) < \overline{CP}_{\overline{X}_c}(f,\phi)$, onde $\overline{CP}_\Lambda$ denota a capacidade superior de Carathéodory do conjunto Λ (para detalhes sobre essa outra noção de medir conjuntos, veja por exemplo [Pes97, Section 11]). Esse exemplo será realizado sobre um conjunto invariante não-compacto de uma ferradura.

Seja $\sigma : \Sigma_A \to \Sigma_A$, com $\Sigma_A \subset \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$, o subshift de tipo finito associado à matriz de transição

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Agora, considere o subconjunto σ-invariante $\Sigma \subset \Sigma_A$ que contém os quatro pontos fixos para o shift σ (correspondendo às sequências constantes) e tal que para todo $x = (x_n)_n \in \Sigma \setminus \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}\}$ vale que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\big\{j \le n : x_j \in \{1,2\}\big\} = 1$$

e

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\big\{j \le n : x_j \in \{1,2\}\big\} = 0.$$

Seja ϕ um potencial contínuo tal que o único estado de equilíbrio é $\mu_\phi = \delta_{\underline{0}}$ (tal potencial existe e pode ser tomado não-negativo seguindo as ideias de Hofbauer [Hof77, Página 226, 239]) e consideremos o observável contínuo $\psi = \chi_{[0]}$. Note que $\int \psi \, d\mu_\phi = 1$ e para $c > 0$ pequeno, nós obtemos que $\underline{X}_c = \{\underline{3}\}$ e $\overline{X}_c = \Sigma \setminus \{\underline{0}\}$. Uma vez que $\phi \mid_{\underline{X}_c} \equiv 0$ então $\overline{CP}_{\underline{X}_c}(f,\phi) = h_{\underline{X}_c}(f) = 0$. Por outro lado, iremos estimar a entropia topológica de $\overline{X}_c$, desde que ϕ é não-negativo então $\overline{CP}_{\overline{X}_c}(f,\phi) \ge \overline{CP}_{\overline{X}_c}(f,0)$. Ademais, se $0 < \alpha < \log 2$ nós iremos provar que $m_\alpha(f,\overline{X}_c) = +\infty$ e deduzir que $\overline{CP}_{\overline{X}_c}(f,0) > 0$. Lembremos que

$$m_\alpha(f,\overline{X}_c) = \lim_{\text{diâmetro}(\mathcal{U})\to 0} m_\alpha(f,\overline{X}_c,\mathcal{U})$$

onde $m_\alpha(f,\overline{X}_c,\mathcal{U}) = \limsup_{N\to\infty} m_\alpha(f,\overline{X}_c,\mathcal{U},N)$, e

$$m_\alpha(f,\overline{X}_c,\mathcal{U},N) = \inf\Big\{ \sum_{U\in\mathcal{G}_N} e^{-\alpha N} : \mathcal{G}_N \text{ é uma subcobertura de } \vee_{0\le j\le N}\, \sigma^{-j}\mathcal{U} \Big\}.$$

Seja $\varepsilon > 0$ pequeno e fixado (para ser mais preciso ele irá depender somente de α). Para todo $\ell \geq 1$, nós consideraremos uma cobertura abertura aberta $\mathcal{U}_\ell$ de $\overline{X}_c$ formada por cilindros definida da seguinte forma: um n-cilindro $U = [x_0, \ldots, x_n]$ pertence a $\mathcal{U}_\ell$ se, e somente se, $n \geq \ell$ é o menor número inteiro tal que

$$\#\big\{j \leq n : x_j \in \{1,2\}\big\} \geq n(1-\varepsilon). \tag{3.7}$$

De fato, dado $x = (x_j)_j \in \underline{X}_c$ e definindo $n(x) \geq \ell$ como o primeiro instante tal que a equação (3.7) vale, temos que $[x_0, \ldots, x_n]$ pertence a $\mathcal{U}_\ell$ e então $\mathcal{U}_\ell$ cobre $\underline{X}_c$. Ademais, por construção, os elementos de $\mathcal{U}_\ell$ são todos disjuntos, todo elemento contém pelo menos um ponto de $\underline{X}_c$ e o diâmetro de $\mathcal{U}_\ell$ vai a zero quando $\ell \to \infty$. Assim

$$m_\alpha(f, \overline{X}_c) = \lim_{\ell \to \infty} m_\alpha(f, \overline{X}_c, \mathcal{U}_\ell)$$

Observe também que $\# U_\ell \geq 2^{\ell(1-\varepsilon)}$, que corresponde ao número de cilindros disjuntos de comprimento $2\ell + 1$ satisfazendo (3.7). Fixemos $N \gg 1$. Como os elementos de $\mathcal{U}_\ell$ são disjuntos, então toda subcobertura $\mathcal{G}_{N,\ell}$ de concatenações $\vee_{0 \leq j \leq N} \sigma^{-j} \mathcal{U}_\ell$ de cilindros cobrindo $\overline{X}_c$ coincide com $\vee_{0 \leq j \leq N} \sigma^{-j} \mathcal{U}_\ell$. Se nós escrevemos $N + \ell = (2\ell+1)s + r$ com $s \geq 1$ e $0 \leq r \leq 2\ell$, então existe pelo menos $2^{(N+\ell-r)(1-\varepsilon)}$ desses cilindros (gerados por N concatenações de $(2\ell+1)$-cilindros que satisfazem a equação (3.7)). Desse modo, se $\varepsilon > 0$ é escolhido pequeno, então decorre que

$$m_\alpha(f, \overline{X}_c, \mathcal{U}_\ell) \geq \limsup_{N \to \infty} \sum_{U \in \mathcal{G}_{N,\ell}} e^{-\alpha N} \geq \limsup_{N \to \infty} e^{-\alpha N}\, 2^{(N-\ell)(1-\varepsilon)} = +\infty.$$

Logo $\overline{CP}_{\overline{X}_c}(f, 0) \geq \log 2 > 0$, provando o que queríamos. Por fim, notemos que como $P_\Lambda(f, \phi) \leq \overline{CP}_\Lambda(f, \phi)$, então ainda fica em aberto a questão sobre a construção de um exemplo onde $P_{\underline{X}_c}(f, \phi) < P_{\overline{X}_c}(f, \phi)$.

3.1.10 Descontinuidade e monotonicidade não-estrita da função pressão: ferraduras porco-espinho

Para apresentar um exemplo onde existe descontinuidade e monotonicidade não-estrita da da função pressão

$$c \mapsto P_{\overline{X}_c}(f, \phi)$$

nós usaremos a classe difeomorfismos parcialmente hiperbólicos transitivos f estudada por Díaz, Gelfert e Rams que exibem uma ferradura porco-espinho. De fato, decorre da análise do espectro de Lyapunov na direção central (ver [DG12, Remark 5.4] e [DGR11]) que existem constantes $\lambda < 0 < \tilde{\beta} < \beta$ tal que

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log ||Df^n\mid_{E^c}(x)|| \in [\log \lambda, \log \tilde{\beta}] \cup \{\log \beta\}$$

e

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log ||Df^n \mid_{E^c} (x)|| \in [\log\lambda, \log\tilde{\beta}] \cup \{\log\beta\}.$$

Também existe um único Q (de fato, ele é um ponto fixo por f) tal que o expoente de Lyapunov central é $\log\beta > 0$.

Nós consideraremos o potencial Hölder contínuo $\phi_t = -t\log||Df \mid_{E^c}||$, onde E^c é a direção central, para um valor de t negativo e suficientemente grande em módulo e um observável $\psi = \log||Df \mid_{E^c}||$. Decorre da [DG12, Proposition 5.6] que para todo $t \ll 0$ a medida de Dirac δ_Q é o único estado de equilíbrio para f com respeito a ϕ_t e consequentemente

$$P_{\text{top}}(f, \phi_t) = -t\log||Df(Q) \mid_{E^c}|| = -t\log\beta.$$

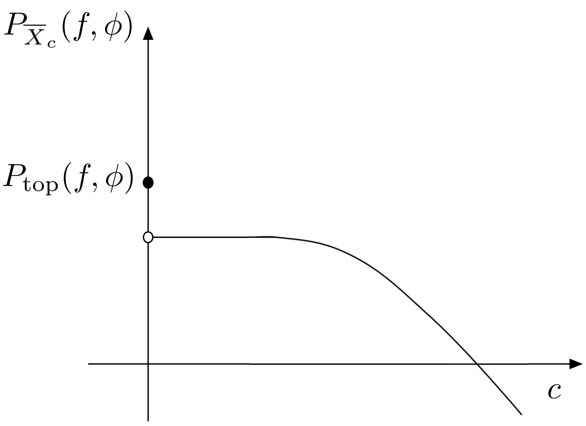

Figura 3.3: Discontinuity of the pressure function

Por outro lado se $c \neq \log\beta$, então utilizando que todas as medidas invariantes que tem expoente de Lyapunov central igual a c, nós podemos estimar

$$\begin{aligned}\sup\left\{h_\eta(f) + \int -t\log||Df(x) \mid_{E^c}||\, d\eta : \lambda(\eta) = c\right\} &\leq h_{\text{top}}(f) - t\log\tilde{\beta} \\ &< P_{\text{top}}(f,\phi_t).\end{aligned}$$

O que mostra a descontinuidade da função pressão $c \mapsto P_{\overline{X}_c}(f,\phi_t)$ onde $\overline{X}_c$ esta associado ao observável ψ. Pelo mesmo argumento anterior também provamos que

$$\begin{aligned}&\sup\left\{h_\eta(f) + \int -t\log||Df(x) \mid_{E^c}||\, d\eta : \lambda(\eta) \in [\log\lambda, \log\tilde{\beta}]\right\} \\ &\quad = \sup\left\{h_\eta(f) + \int -t\log||Df(x) \mid_{E^c}||\, d\eta : \lambda(\eta) \in [\log\lambda, \log\beta)\right\} \\ &\quad < P_{\text{top}}(f,\phi_t)\end{aligned}$$

e então existe um intervalo de constância da função pressão.

3.2 Análise multifractal dos conjuntos irregulares para medidas Gibbs fraco: caso não-aditivo

Nesse seção temos como objetivo estender os resultados da seção anterior para o contexto não-aditivo, tanto do ponto de vista dos potenciais como dos observáveis.

Inicialmente iremos expandir nosso problema para sequências sub-aditivas. Uma sequência $\varphi_n : M \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, n \geq 1$, de funções mensuráveis é dita *sub-aditiva* se $\varphi_{m+n} \leq \varphi_m + \varphi_n \circ f^m$ para todo $m, n \geq 1$. Veremos agora exemplos de sequências sub-aditivas, o primeiro mostrará que sequências sub-aditivas englobam as médias de Birkhoff e o segundo mostrará que elas vão além englobando as sequências que definem o expoentes de Lyapunov. Antes dos exemplo vale a pena enunciar o teorema sub-aditivo de Kingman.

Teorema 3.34 (Kingman). *Sejam $\varphi_n : M \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ uma sequência sub-aditiva de funções mensuráveis e μ uma probabilidade $f-$invariante tal que $\varphi_1^+ \in L^1(\mu)$. Então a sequência $(\frac{1}{n}\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\mu-$q.t.p. para uma função mensurável $\varphi : M \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Ademais, se adicionalmente μ for $f-$ergódica então φ é constante $\mu-$q.t.p..*

Quando μ for ergódica no teorema de Kingman denotaremos φ por $\mathcal{F}_*(\mu, \{\varphi_n\})$.

Exemplo 3.35. *Dada $\varphi : M \to \mathbb{R}$ então $\varphi_n := \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i$ é uma sequência sub-aditiva, de fato $\varphi_{m+n} = \varphi_m + \varphi_n \circ f^m$, para todo $m, n \geq 1$, e nesse caso dizemos que a sequência é aditiva. Note ainda que se tomarmos uma sequência de funções satisfazendo $\varphi_{m+n} = \varphi_m + \varphi_n \circ f^m$, para todo $m, n \geq 1$, teremos que $\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_1 \circ f^i$. Sendo assim, o teorema de Birkhoff é um caso particular do teorema sub-aditivo de Kingman.*

Exemplo 3.36. *Seja $A : M \to GL(d)$ uma função mensurável com valores no grupo linear de matrizes. O* cociclo linear *definido por A sobre f é a transformação*

$$F : M \times \mathbb{R}^d \xrightarrow[(x,v)\to(f(x),A(x)v)]{} M \times \mathbb{R}^d.$$

Observe que $F^n(x, v) = (f^n(x), A^n(x)$ para todo $n \geq 1$, onde

$$A^n(x) := A(f^{n-1}(x)) \cdots A(f(x))A(x).$$

Note que $\frac{1}{n}\log||A^n(x)||$ *e* $\frac{1}{n}\log||A^n(x)^{-1}||^{-1}$ *são sequências sub-aditivas. Se supusermos que* $|\log||A^{\pm}||\,| \in L^1(\mu)$ *então podemos aplicar o teorema sub-aditivo de Kingman definido respectivamente* λ_+ *e* λ_{-1}*, que são os chamados expoentes de Lyapunov extremais. Um caso particular importante de cociclos lineares é o chamado cociclo da derivada, ou seja, se* M *é uma variedade compacta e* f *um difeomorfismo local* C^1 *definimos* $A(x)$ *por* $Df(x)$*.*

Dada então uma sequência sub-aditiva φ_n e μ uma probabilidade $f-$invariante e $f-$ergódica satisfazendo a hipótese do teorema sub-aditivo de Kingman sabemos que o conjunto irregular $X(\{\varphi_n\}) := \{x \in M : \nexists \lim \frac{1}{n}\varphi_n(x)\}$ tem medida zero em relação a μ. Uma pergunta natural é se vale o mesmo que no caso de médias de Birkhoff, ou seja, $X(\{\varphi_n\})$ é vazio ou tem pressão topológica total. Podemos tornar a questão um pouco mais ampla tomando sequências sub-aditivas ou assintoticamente aditivas de potenciais e se perguntando sobre a pressão topológica do ponto de vista do formalismo termodinâmico não-aditivo, como iremos descrever abaixo.

Definição 3.37. *Seja* M *um espaço métrico compacto. Uma sequência* $\Phi = \{\varphi_n\} \subset C(M, \mathbb{R})$ *é uma sequência de potenciais* assintoticamente aditiva *se para todo* $\epsilon > 0$ *existe uma função contínua* g_ϵ *tal que*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}||\varphi_n - S_n g_\epsilon||_\infty < \epsilon.$$

Uma sequência $\Phi = \{\varphi_n\} \subset C(M, \mathbb{R})$ *é uma sequência de potenciais* quase aditiva *se existe uma constante uniforme* $C > 0$ *tal que* $\varphi_m + \varphi_n \circ f^m - C \leq \varphi_{m+n} \leq \varphi_m + \varphi_n \circ f^m + C$ *para todo* $m, n \geq 1$*.*

A próxima proposição estabelece as relações entre essas noções.

Proposição 3.38. *(i) Se* $\Phi = \{\varphi_n\}$ *é quase aditiva então existe* $C > 0$ *tal que a sequência* $\Phi_C = \{\varphi_n + C\}$ *é subaditiva;*

(ii) Se $\Phi = \{\varphi_n\}$ *quase aditiva então* Φ *é assintoticamente aditiva, e para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $k = k(\epsilon) \geq 1$ *tal que* $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}||\varphi_n - S_n(\frac{1}{k}\varphi_k)||_0 < \epsilon$*.*

Prova. O item (i) decorre da definição. O item (ii) esta contido na proposição 2.1 de [CZZ11]. ∎

Dado um espaço métrico M, uma dinâmica $f : M \to M$ contínua, uma sequência de potencias assintoticamente aditivos $\Phi = \{\phi_n\}$ e um conjunto arbitrário $Z \subset M$ pode-se definir a pressão topológica $P_Z(f, \Phi)$ de Z com respeito a f e Φ. Quando fixamos um potencial $\phi \in C(M, \mathbb{R})$ e escolhemos Φ constante e igual a ϕ temos que $P_Z(f, \Phi)$ é exatamente a noção usual de pressão topológica de Z com respeito a f e ϕ (veja apêndice para detalhes). Feng e Huang [FH10] provam que sequências assintoticamente aditivas satisfazem o teorema de Kingman, ou seja, dada uma sequência $\Psi = \{\psi_n\}$ assintoticamente aditiva e μ um probabilidade $f-$invariante e $f-$ergódica então $\frac{1}{n}\psi_n$ converge em $\mu-$q.t.p. e se adicionalmente μ é $f-$ergódica então $\frac{1}{n}\psi_n$ converge em $\mu-$q.t.p.para o número $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int \psi_n d\mu =: \mathcal{F}_*(\mu, \Psi)$. Nesse mesmo artigo, Feng e Huang também provam que a função $\mu \mapsto \mathcal{F}_*(\mu, \Psi)$ é contínua para todo potencial assintoticamente aditivo Ψ, coo também utilizam o estudo de subdiferenciais da função pressão para caracterizar a pressão topológica dos conjuntos de nível $\{x \in M : \lim_{n\to+\infty} \frac{\psi_n(x)}{n} = \alpha\}$. Vale a pena ressaltar que no contexto de potenciais assintoticamente aditivos também vale um princípio variacional, ou seja,

$$P_{\text{top}}(f, \Phi) = \sup\{h_\mu(f) + \mathcal{F}_*(\mu, \Phi) : \mu \text{ é uma probabilidade f-invariante}, \mathcal{F}_*(\mu, \Phi) \neq -\infty\}.$$

Se uma probabilidade atinge o sup dizemos que ela é um *estado de equilíbrio* de f com respeito a Φ. Desse modo, definindo o conjunto irregular $X(\Psi) := \{x \in M : \nexists \lim \frac{1}{n}\psi_n(x)\}$ associado a a sequência Ψ temos que $X(\Psi)$ tem medida zero em relação a μ. Porém, generalizando [Tho10], Cao, Zhang e Zhao [CZZ11] provam que se M é um espaço métrico compacto e a dinâmica $f : M \to M$ é contínua e satisfaz a propriedade de especificação então $X(\Psi)$ é vazio ou tem pressão topológica total com relação a f e Φ. Desse modo, tomando μ uma probabilidade $f-$ergódica, $\Psi = \{\psi_n\}$ uma sequência de observáveis assintoticamente aditiva ou sub-aditiva e $c > 0$ definimos

$$\overline{X}_{\mu,\Psi,c} := \left\{x \in M : \left|\limsup_n \frac{1}{n}\psi_n(x) - \mathcal{F}_*(\mu, \Psi)\right| \geq c\right\}$$

e

$$\underline{X}_{\mu,\Psi,c} := \left\{x \in M : \left|\liminf_n \frac{1}{n}\psi_n(x) - \mathcal{F}_*(\mu, \Psi)\right| \geq c\right\}.$$

Nosso objetivo é estudar esse conjuntos que são generalizações dos respectivos conjuntos já definidos no caso aditivo. Exporemos agora os objetos e propriedades que estão contidos nos nossos resultados.

Assim como no caso aditivo, no caso não aditivo existe a generalização da noção de propriedade do tipo Gibbs e também em certos casos obtemos estados de equilíbrios como medidas invariantes absolutamente contínuas com respeito a medidas com essa propriedade do tipo Gibbs.

Definição 3.39. *Dada uma sequência de funções $\Phi = \{\phi_n\}$, nós dizemos que uma probabilidade ν é uma* medida de Gibbs ultra fraca *com respeito a Φ sobre $\Lambda \subset M$ se existe*

$\varepsilon_0 > 0$ de modo que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ existe uma sequência positiva $(K_n(\varepsilon))_{n\in\mathbb{N}}$ (só dependendo de ε) satisfazendo $\lim \frac{1}{n}\log K_n(\varepsilon) = 0$ tal que para ν-quase todo ponto $x \in \Lambda$ existe uma subsequência $n_k(x) \to \infty$ (dependendo de x) satisfazendo

$$K_{n_k(x)}(\varepsilon)^{-1} \leq \frac{\mu(B(x, n_k(x), \varepsilon))}{e^{-n_k(x)P+\phi_{n_k(x)}}} \leq K_{n_k(x)}(\varepsilon).$$

Se a condição anterior vale para todos inteiros positivos n (independente de x em um conjunto de medida total) nós diremos que ν é uma medida de Gibbs fraca *com respeito a Φ. Se além disso $K_n(\varepsilon) = K(\varepsilon)$ independente de n nós iremos dizer que ν é uma* medida Gibbs *com respeito a Φ.*

Assim como no caso aditivo essas medidas Gibbs aparecem naturalmente no contexto de dinâmicas hiperbólicas. Dado um conjunto básico Ω para um difeomorfismo f Axioma A (ou Ω repulsor para f) sabe-se que todo potencial quase aditivo Φ satisfazendo

$$\text{(variação limitada) } \exists A, \delta > 0 : \sup_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n(\Phi, \delta) \leq A, \tag{3.8}$$

onde $\gamma_n(\Phi, \delta) := \sup\{|\phi_n(y) - \phi_n(z)| : y, z \in B_n(x, \delta)\}$, admite um único estado de equilíbrio μ_Φ que coincide com uma medida Gibbs com respeito a Φ (veja [Ba06] e [Mum06] para a prova). Definiremos agora uma noção mais fraca do que a condição de variação limitada (3.8), nós diremos que uma sequência de funções contínuas $\Psi = \{\psi_n\}$ satisfaz a *condição de Bowen fraca* se existe $\delta > 0$ tal que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\gamma_n(\Psi,\delta)}{n} = 0$.

No nosso primeiro resultado estendemos o Teorema 3.3 para o caso não-aditivo.

Dado um intervalo $J \subset \mathbb{R}$ nós denotamos

$$\overline{X}_{\Psi,J} = \{x \in M : \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\psi_n(x) \in J\}$$

e

$$\underline{X}_{\Psi,J} = \{x \in M : \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\psi_n(x) \in J\}.$$

Para todo $\delta > 0$ nós denotamos por J_δ a $\delta-$vizinhança do conjunto J e para uma probabilidade μ nós definimos

$$L_{\mu,J} := -\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\mu\Big(\{x \in M : \frac{1}{n}\psi_n(x) \in J\}\Big).$$

E por fim, dado $c > 0$ e uma probabilidade ν nós denotaremos $-\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\nu\Big(\{x \in M : |\frac{1}{n}\psi_n(x) - \mathcal{F}_*(\mu_\Phi, \Psi)| \geq c\}\Big)$ por $L_{c,\nu} = L_c$.

Teorema 3.40. *Seja M um espaço métrico compacto, $f : M \to M$ uma dinâmica contínua, $\Phi = \{\phi_n\}$ uma sequência de potenciais quase aditiva com $P_{\text{top}}(f, \Phi) > -\infty$, ν uma (não necessariamente invariante) medida Gibbs fraca sobre M e $\mu_\Phi \ll \nu$ o único estado de equilíbrio de f com respeito a Φ. Suponhamos que $\Psi = \{\psi_n\}$ é uma sequência de observáveis que satisfaz pelo menos uma das seguintes propriedades:*

(a) Ψ *é assintoticamente aditiva ou;*

(b) Ψ *é uma sequência sub-aditiva tal que*

i. satisfaz a condição de Bowen fraca;

ii. $\inf_{n\geq 1} \frac{\psi_n(x)}{n} > -\infty$ *para todo* $x \in M$*; e*

iii. a sequência $\{\frac{\psi_n}{n}\}$ *é equicontínua.*

Então, para todo intervalo fechado $J \subset \mathbb{R}$ *e* $\delta > 0$ *temos que*

$$P_{\underline{X}_{\Psi,J}}(f,\Phi) \leq P_{\overline{X}_{\Psi,J}}(f,\Phi) \leq P_{\text{top}}(f,\Phi) - L_{\nu,J_\delta} \leq P(f,\Phi).$$

Sob as hipóteses do teorema anterior obtemos que para todo $c > 0$ temos que

$$P_{\underline{X}_{\mu_\Phi,\Psi,c}}(f,\Phi) \leq P_{\overline{X}_{\mu_\Phi,\Psi,c}}(f,\Phi) \leq P_{\text{top}}(f,\Phi) - L_{c-\delta,\nu} \leq P(f,\Phi),$$

para todo $\delta > 0$ suficientemente pequeno.

Varandas e Zhao [VZ13] estenderam as resultados de grandes desvios, quando se tem medidas com propriedades do tipo Gibbs fraco, obtidos em [Var12] para o contexto não-aditivo. De fato, com as hipóteses do teorema anterior podemos aplicar parte do Teorema B de [VZ13] garantindo que: dado $c > 0$ temos que

$$-L_c \leq \sup\{-P_{\text{top}}(f,\Phi) + h_\eta(f) + \mathcal{F}_*(\eta,\Phi)\},$$

onde o supremo é sobre todas as probabilidades η tais que $|\mathcal{F}_*(\mu_\Phi,\Psi) - \mathcal{F}_*(\eta,\Phi)| \geq c$. Como exigimos a unicidade do estado de equilíbrio vemos que $L_c > 0$ assim já obtemos a desigualdade $P_{\text{top}}(f,\Phi) - L_{c-\delta} < P(f,\Phi)$, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno.

Antes de provar o teorema precisaremos de um resultado que fará o mesmo papel que o Lema 3.4. Dado $J \subset \mathbb{R}$ denotaremos $\{x \in M : \frac{\psi_n(x)}{n} \in J\}$ por $X_{J,n}$.

Lema 3.41. *Suponha que estamos no contexto do Teorema 3.40. Então* Ψ *satisfaz a* condição de variação temperada*:*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \lim_{n\to+\infty} \frac{\gamma_n(\Psi,\epsilon)}{n} = 0.$$

Em particular, dado $J \subset \mathbb{R}$ *intervalo fechado e* $\delta > 0$ *existe* $\varepsilon_\delta > 0$ *tal que se* $0 < \varepsilon < \varepsilon_\delta$ *então existe* $N = N_{\delta,\epsilon} \in \mathbb{N}$ *com* $B(x,n,\varepsilon) \subset X_{J_\delta,n}$ *para todo* $n \geq N$ *e todo* $x \in X_{J,n}$*.*

Prova. Notemos inicialmente que a condição de variação temperada é trivialmente satisfeita para sequências de observáveis satisfazendo a condição de Bowen fraca. Já no caso de Ψ ser assintoticamente aditivo a prova consta no lema 2.1 de [CZZ11].

Provemos agora a segunda parte do lema. Seja $\delta > 0$ dado. Pela condição de variação temperada existe $\varepsilon_\delta > 0$ tal que $\lim_{n\to\infty} \gamma_n(\psi, \varepsilon) < \delta n$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_\delta$. Então, dado $0 < \varepsilon < \varepsilon_\delta$ existe um $N = N_{\delta,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ grande tal que se $n \geq N$ nós temos que $\gamma_n(\psi, \varepsilon) \leq \delta n$. Então, se $0 < \varepsilon < \varepsilon_\delta$, $n \geq N$ e $x \in X_{J,n}$, $y \in B(x, n, \varepsilon)$ temos

$$\frac{\psi_n(x)}{n} - \frac{\gamma_n(\psi, \varepsilon)}{n} \leq \frac{\psi_n(y)}{n} \leq \frac{\psi_n(x)}{n} + \frac{\gamma_n(\psi, \varepsilon)}{n}$$

e, consequentemente,

$$\frac{\psi_n(x)}{n} - \delta \leq \frac{\psi_n(y)}{n} \leq \frac{\psi_n(x)}{n} + \delta$$

significando que $y \in X_{J_\delta,n}$. Isto finaliza a prova do lema. ■

Prova do teorema 3.40. Denotaremos μ_Φ por μ. A prova é análoga a do Teorema 3.3 utilizando os objetos adequados no contexto não-aditivo. Supondo que $\overline{X_{\Psi,J}} \neq \emptyset$ iremos provar que $P_{X_{\Psi,J}}(f, \Phi) \leq P_{\text{top}}(f, \Phi) - L_{\nu,J_\delta}$. Para tal é suficiente provar que para todo $\alpha \geq P_{\text{top}}(f, \Phi) - L_{\nu,J_\delta}$, dado $\epsilon > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ existe $\mathcal{G} \subset \bigcup_{n\geq N} \mathcal{I}_n$ com $\displaystyle\bigcup_{(x,n)\in\mathcal{G}} B_n(x, \epsilon) \supset X_{\Psi,J}$ e $\displaystyle\sum_{(x,n)\in\mathcal{G}} e^{-\alpha n + \phi_n(x)} \leq a(\epsilon) < \infty$.

Não há perda de generalidade em supor que $L_{\Psi,J_\delta} > 0$. Fixado $\varepsilon > 0$ tomemos $\zeta > 0$ pequeno de modo que $\alpha > P_{\text{top}}(f, \Phi) - L_{\Psi,J_\delta} + \zeta$. Existe $N_0 \geq N_{\delta,\varepsilon}$ tal que $K_n(\varepsilon) \leq e^{\frac{\zeta}{4}n}$, $K_n(\frac{\varepsilon}{2}) \leq e^{\frac{\zeta}{4}n}$ e

$$\nu\Big(\{x \in M : \frac{1}{n}\psi_n(x) \in J\}\Big) \leq e^{-(L_{\nu,J_\delta} - \zeta)n}$$

para todo $n \geq N_0$. Note que se $x \in X_{\Psi,J}$ então existe uma sequência $(m_j(x))_{j\in\mathbb{N}}$ com $m_j(x) \to +\infty$, quando $j \to +\infty$, satisfazendo $x \in X_{\Psi,J_{\frac{\delta}{2}},m_j(x)}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Dado $N \geq N_0$ e $x \in \overline{X}_{\Psi,J_\delta}$ tome $m(x) \geq N$ de modo que $x \in X_{\Psi,J_{\frac{\delta}{2}},m(x)}$ e considere $\mathcal{G}_N := \{(x, m(x)) : x \in \overline{X}_{\Psi,J}\}$. Agora, seja $\hat{\mathcal{G}}_N \subset \mathcal{G}_N$ o conjunto maximal com uma propriedade de separação, a saber, que se (x, l) e (y, l) pertencem à $\hat{\mathcal{G}}_N$ então $B(x, l, \frac{\epsilon}{2}) \cap B(x, l, \frac{\epsilon}{2}) = \emptyset$. Logo, para $0 < \varepsilon < \delta_n$ dado pelo Lema 3.41 usando a propriedade de Gibbs para ν nós deduzimos que

$$\begin{aligned}\sum_{(x,m(x))\in\hat{\mathcal{G}}_N} e^{-\alpha m(x) + \phi_{m(x)}(x)} &= \sum_{(x,m(x))\in\hat{\mathcal{G}}_N} e^{(P-\alpha)m(x)} e^{-Pm(x) + \phi_{m(x)}(x)} \\ &\leq \sum_{(x,m(x))\in\hat{\mathcal{G}}_N} e^{(P-\alpha)m(x)} K_{m(x)}(\varepsilon)\nu(B(x, m(x), \varepsilon))\end{aligned}$$

Agora, nós escrevemos $\hat{\mathcal{G}}_N = \cup_{\ell\geq 1}\hat{\mathcal{G}}_{\ell,N}$ com os conjuntos de level $\hat{\mathcal{G}}_{\ell,N} := \{(x,\ell) \in \hat{\mathcal{G}}_N\}$. Pelo Lema 3.41 cada bola dinâmica $B(x,\ell,\varepsilon)$ está contida em $X_{J_\delta,\ell}$. Desse modo, utilizando que $\nu(B(x,m(x),\varepsilon)) \leq K_{m(x)}(\varepsilon)K_{m(x)}(\varepsilon/2)\nu(B(x,m(x),\varepsilon/2)$ então

$$\begin{aligned}
\sum_{(x,m(x))\in\hat{\mathcal{G}}_N} e^{-\alpha m(x)+\phi_{m(x)}(x)} &\leq \sum_{(x,m(x))\in\hat{\mathcal{G}}_N} K_{m(x)}(\varepsilon)e^{(P-\alpha)(m(x))}\nu(B(x,m(x),\varepsilon)) \\
&= \sum_{\ell\geq N} K_\ell(\varepsilon)e^{(P-\alpha)\ell} \sum_{x\in\hat{\mathcal{G}}_{N,\ell}} \nu(B(x,\ell,\varepsilon)) \\
&\leq \sum_{\ell\geq N} K_\ell(\varepsilon)K_\ell(\frac{\varepsilon}{2})e^{(P-\alpha)\ell} \sum_{x\in\hat{\mathcal{G}}_{N,\ell}} \nu(B(x,\ell,\varepsilon/2)) \\
&\leq \sum_{\ell\geq N} K_\ell(\varepsilon)K_\ell(\frac{\varepsilon}{2})e^{(P-\alpha)\ell}\nu(X_{J_\delta,\ell}) \\
&\leq \sum_{\ell\geq N} e^{(P-\alpha-L_{c-\delta}+\zeta)\ell}
\end{aligned}$$

que é finito e independente da escolha de N. Isto prova que intervalo fechado $J \subset \mathbb{R}$ e todo $\delta > 0$ vale que $P_{\overline{X}_{\Psi,J}}(f,\phi) \leq P_{\text{top}}(f,\phi) - L_{\nu,J_\delta}$. ■

Assim como no caso aditivo obtemos estimativas da pressão de $\underline{X}_{\Psi,J}$ no caso de uma medida Gibbs ultra fraca.

Teorema 3.42. *Seja M um espaço métrico compacto, $f : M \to M$ uma dinâmica contínua e bi-mensurável, $\Phi = \{\phi_n\}$ uma sequência de potenciais quase aditiva com $P_{\text{top}}(f,\Phi) > -\infty$, ν uma (não necessariamente invariante) medida Gibbs ultra fraca sobre M e $\mu_\Phi \ll \nu$ o único estado de equilíbrio de f com respeito a Φ. Suponhamos que $\Psi = \{\psi_n\}$ é uma sequência de observáveis que satisfaz pelo menos uma das seguintes propriedades:*

(a) Ψ é assintoticamente aditiva ou;

(b) Ψ é uma sequência sub-aditiva tal que

i. satisfaz a condição de Bowen fraca;

ii. $\inf_{n\geq 1} \frac{\psi_n(x)}{n} > -\infty$ para todo $x \in M$; e

iii. a sequência $\{\frac{\psi_n}{n}\}$ é equicontínua.

Então, para todo intervalo fechado $J \subset \mathbb{R}$ e $\delta > 0$ temos que

$$P_{\underline{X}_{\Psi,J}}(f,\Phi) \leq P_{\text{top}}(f,\Phi) - L_{\nu,J_\delta} \leq P_{\text{top}}(f,\Phi).$$

Prova. Assim com na prova do Teorema 3.19 a estratégia da prova é a mesma que no Teorema 3.40, levando em conta a dificuldade que os momentos em que ocorre a propriedade de Gibbs depende do ponto e por isso nossas estimativas são sobre $\underline{X}_{\Psi,J}$. Por esta razão nós daremos apenas um esboço da prova com os ingredientes principais. Desde que ν é uma probabilidade Gibbs ultra fraca então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que a seguinte propriedade vale: para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ existe $K_n(\varepsilon) > 0$ tal que para μ-quase todo ponto x existe uma sequência $n_k(x) \to \infty$ com

$$K_{n_k(x)}(\varepsilon)^{-1} \leq \frac{\mu(B(x, n_k(x), \varepsilon))}{e^{-n_k(x)P + S_{n_k(x)}\phi(x)}} \leq K_{n_k(x)}(\varepsilon).$$

Seja $\delta > 0$ arbitrário. Considere $\alpha > P_{\text{top}}(f, \Phi) - L_{\nu,J_\delta}$ dado e tome $\varepsilon > 0$ pequeno e $N \in \mathbb{N}$ grande no que segue. Nós podemos escrever

$$\underline{X}_{\Psi,J} \subset \bigcup_{\ell \geq 1} \bigcap_{j \geq \ell} X_{J_\delta, j}.$$

onde como antes $X_{J,n} = \{x \in M : \frac{1}{n} S_n \psi(x) \in J\}$. Não é difícil checar que para todo $x \in \underline{X}_{\Psi,J}$ existe uma sequência de números positivos $(m_j(x))_{j \in \mathbb{N}}$ convergindo ao infinito tal que $x \in X_{J_{\frac{\delta}{2}}, m_j(x)}$ e $m_j(x)$ é um momento onde a propriedade de Gibbs vale. Além disso, podemos tomar $m(x) \geq N$ de modo que $x \in X_{J_{\frac{\delta}{2}}, m(x)}$, $K_{m(x)}(\varepsilon) \leq \exp \frac{(\alpha - P_{\text{top}}(f,\Phi) + L_{\nu,J_\delta}) m(x)}{4}$, $K_{m(x)}(\frac{\varepsilon}{2}) \leq \exp \frac{(\alpha - P_{\text{top}}(f,\Phi) + L_{\nu,J_\delta}) m(x)}{4}$ e considerar $\mathcal{G} := \{(x, m(x)) : x \in \underline{X}_{\Psi,J}\}$. Agora, para provarmos o resultado basta seguimos com as mesmas estimativas usadas na prova do Teorema 3.40 e obter que $P_{\underline{X}_{\Psi,J}}(f, \Phi) \leq P_{\text{top}}(f, \Phi) - L_{\nu,J_\delta}$. ■

Veremos alguns exemplos em que podemos aplicar nossos resultados. O primeiro exemplo nos dá uma classe de potenciais sub-aditivos em que podemos aplicar o Teorema 3.40.

Exemplo 3.43. *Seja M um espaço métrico compacto e $f : M \to M$ expansora, ou seja, existe $\lambda > 1$ e $\epsilon > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \geq \lambda d(x, y)$ para todo $y \in B(x, \epsilon)$. Seja $\Psi = \{\psi_n\}$ uma família sub-aditiva de funções $\gamma-$Holder contínuos tal que a constante de Holder tem um crescimento menor que linear, ou seja, existe $K > 0$ tal que $|\psi_n|_\gamma \leq Kn$. Note que se Ψ é aditiva então satisfaz essa condição automaticamente. Nós veremos agora que nessas condições Ψ satisfaz as hipóteses (i) e (ii) do Teorema 3.40. Por um lado, a sequência $\{\psi_n\}$ é $\gamma-$Holder contínua com constante uniforme K, logo esta sequência é equicontínua. Por outro lado, para todo $y \in B_n(x, \epsilon)$ temos que $|\psi_n(x) - \psi_n(y)| \leq Knd(x, y)^\gamma \leq Kn\lambda^{-\gamma n} diam(M)^\gamma$, logo $\sup_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n(\Psi, \epsilon) < \infty$ (variação limitada) e em particular satisfaz a condição de Bowen fraca.*

O próximo exemplo explora os nossos resultado no caso expansor.

Exemplo 3.44. *Seja $f : M \to M$ uma aplicação C^1, e $\Lambda \subset M$ um repulsor isolado tal que $f_{|\Lambda}$ é topologicamente mixing. Barreira [Ba06, Page 289] provou que para cada potencial quase aditivo $\Phi = \{\phi_n\}$ satisfazendo a condição de variação limitada tem uma medida Gibbs fraca ν_Φ e o único estado de equilíbrio é absolutamente contínuo em relação a essa medida. Assim, o Teorema 3.40 aplica-se à ν_Φ e toda família assintoticamente aditiva de observáveis Ψ. Vale observar que Barreira [Ba06, Page 289] argumenta que se Φ é quase aditivo satisfazendo a condição de Bowen fraca obtemos uma medida Gibbs fraca ν_Φ ergódica mas não necessariamente invariante e não podemos garantir em geral que existam estados de equilíbrio construídos a partir de ν_ϕ.*

O próximo exemplo é uma classe de difeomorfismos locais introduzida por Barreira e Gelfert [BG06] no estudo de análise multifractal associada a repulsores não-conformes.

Exemplo 3.45. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um difeomorfismo local C^1 e $J \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto compacto f-invariante. Seguindo [BG06], nós dizemos que f satisfaz a* condição de cone *sobre J se existe um número $b \leq 1$ e para cada $x \in J$ existe um subespaço unidimensional $E(x) \subset T_x\mathbb{R}^2$ variando continuamente com x tal que*

$$Df(x)C_b(x) \subset \{0\} \cup \operatorname{int} C_b(fx)$$

onde $C_b(x) = \{(u,v) \in E(x) \bigoplus E(x)^\perp : \ ||v|| \leq b||u||\}$. Decorre de [BG06, Proposition 4] que a condição anterior implica que ambas as famílias de potencias dadas por $\Phi_1 = \{\log \sigma_1(Df^n(x))\}$ e $\Phi_2 = \{\log \sigma_2(Df^n(x))\}$ são quase aditivas, onde $\sigma_1(L) \geq \sigma_2(L)$ são os autovalores de $(L^*L)^{1/2}$ com L^* denotando a transposta de L. Assuma que J é um repulsor isolado topologicamente mixing para f tal que:

(i) f satisfaz a condição de cone sobre J, e

(ii) f tem distorção limitada sobre J, ou seja, existe algum $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} \log \sup \Big\{ ||Df^n(y)(Df^n(z))^{-1}|| : \ x \in J \ e \ y, z \in B_n(x, \delta) \Big\} < \infty.$$

Então decorre de [BG06] e [Ba10] que existe uma probabilidade Gibbs ν_{σ_i} com respeito a família de potenciais Φ_i, para $i = 1, 2$. Ademais, [Ba06, Theorem 9] nos garante que existe um único estado de equilíbrio μ_i para (f, Φ_i). Vale ressaltar que em [BG06] vemos que a existência de uma folheação instável forte ou decomposição dominada implicam a condição de cone.

Agora discutiremos acerca de cociclos sobre subshifts do tipo finito considerados por Feng e Lau [FL02] e depois por Feng e Käenmaäki [FK11].

Exemplo 3.46. *Seja $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ a aplicação shift sobre o espaço $\Sigma = \{1, \ldots, \ell\}$ dotado com a distância $d(x, y) = 2^{-n}$ onde $x = (x_j)_j$, $y = (y_j)_j$ e $n = \min\{j \geq 0 : x_j \neq y_j\}$. Considere matrizes $M_1, \ldots, M_\ell \in \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{C})$ tal que para todo $n \geq 1$ existe $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, \ell\}$ tal que o produto matricial $M_{i_1} \ldots M_{i_n} \neq 0$. Então, a função pressão topológica está bem definida como*

$$P(q) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\iota \in \sum_n} ||M_\iota||^q$$

onde $\Sigma_n = \{1, \ldots, d\}^n$ e para todo $\iota = (i_1, \ldots, i_n) \in \Sigma_n$ consideramos a matriz $M_\iota = M_{i_n} \ldots M_{i_2} M_{i_1}$. Ademais, para toda probabilidade σ-invariante μ definimos o expoente de Lyapunov maximal de μ por

$$M_*(\mu) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\iota \in \sum_n} \mu([\iota]) \log ||M_\iota||$$

e vale que $P(q) = \sup\{h_\mu(\sigma) + q\, M_*(\mu) : \mu \text{ é } \sigma - \text{invariante}\}$. Note que isto é o princípio variacional para os potenciais $\Phi = \{\phi_n\}$ onde $\phi_n(x) = q \log ||M_{\iota_n(x)}||$ e para todo $x \in \Sigma$ nós escolhemos $\iota_n(x) \in \Sigma_n$ como o único símbolo tal que x pertence ao cilindro $[\iota_n(x)]$. Assuma que a conjunto de matrizes $\{M_1, \ldots, M_d\}$ é irredutível sobre $\mathbb{C}^d$, isto é, não existe subespaço não-trivial $V \subset \mathbb{C}^d$ tal que $M_i(V) \subset V$ para todo $i = 1, \ldots, \ell$. Então, decorre da [FK11, Proposição 1.2] que existe um único estado de equilíbrio μ_q para σ com respeito a Φ e ele é uma medida Gibbs para Φ sobre Σ.

Por fim, note que a família subaditiva $\{\log ||M_{\iota_n(x)}||\}$ satisfaz a condição de Bowen fraca.

Nós daremos agora um exemplo onde as famílias de potencias responsáveis por computar o maior e menor expoentes de Lyapunov são assintoticamente aditivos.

Exemplo 3.47. *Seja M uma variedade riemanniana de dimensão d e J um repulsor para $f \in C^1(M, M)$. Nós dizemos que J é um repulsor conforme em média se dada uma media ergódica então todos os seus expoentes de Lyapunov são iguais e positivos. Em particular, decorre do [BCH10, Theorem 4.2] que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\log ||Df^n(x)|| - \log ||Df^n(x)^{-1}||^{-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{||Df^n(x)||}{||Df^n(x)^{-1}||^{-1}} = 0$$

uniformemente sobre J. Logo $\Psi = \{\log ||Df^n(x)||\}_n$ será assintoticamente aditivo pois suas taxas podem ser uniformemente aproximadas pela taxas da sequência de potenciais aditivos $\{\frac{1}{d} \log |\det(Df^n(x))|\}_n$.

O próximo exemplo nos mostra que a sequência dada pelo teorema de Shannon-McMillan-Breiman é quase aditiva no caso de medidas Gibbs e assintoticamente no caso de medidas Gibbs fraca.

Exemplo 3.48. *Seja $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ a aplicação shift. Para todo $\iota = (i_1, \ldots, i_n) \in \Sigma_n$ considere o n-cilindro $[\iota] := \{x \in \Sigma : x_j = i_j,\ \forall 1 \leq j \leq n\}$. Seja $\Phi = \{\varphi_n\}$ uma sequência quase aditiva de potenciais com a condição de variação limitada e μ_Φ o único estado de equilíbrio para f com respeito a Φ dado por [Ba06]. Fixe $C > 0$ tal que para todo $x \in \Sigma$*

$$\varphi_n(x) + \varphi_m(f^n(x)) - C \leq \varphi_{m+n}(x) \leq \varphi_n(x) + \varphi_m(f^n(x)) + C.$$

Como μ_Φ é uma medida Gibbs existe $P \in \mathbb{R}$ e $K > 0$ tal que

$$\frac{1}{K} \leq \frac{\mu_\Phi([\iota_n(x)])}{e^{-Pn+\varphi_n(x)}} \leq K$$

para todo $n \geq 1$ e todo $x \in \Sigma$. Como consequência, se $\psi_n(x) = \log \mu_\Phi([\iota_n(x)])$ então

$$\begin{aligned}
\exp \psi_{m+n}(x) = \mu([\iota_{m+n}(x)]) &\leq K\ e^{-P(m+n)+\varphi_{m+n}(x)} \\
&\leq K\ e^{C}\ e^{-Pn+\varphi_n(x)}\ e^{-Pm+\varphi_m(f^n(x))} \\
&\leq K^3\ e^{C}\ \exp \psi_n(x)\ \exp \psi_m(f^n(x))
\end{aligned}$$

para todo $n \geq 1$ e $x \in \Sigma$. Assim, $\psi_{m+n}(x) \leq \psi_n(x) + \psi_m(f^n(x)) + \tilde{C}$ com $\tilde{C} = C + 3 \log K$. Como a estimativa inferior é completamente análoga nós deduzimos que $\Psi = \{\psi_n\}$ é quase aditivo e satisfaz a condição de variação limitada pois ψ_n é constante sobre os n-cilindros. Em particular estamos nas hipóteses do Theorem B em [VZ13] e assim deduzimos taxa de grandes desvios exponencial. De fato por estimativas análogas provamos que se μ_Φ é uma medida Gibbs fraca então a correspondente sequência de funções Ψ como acima é assintoticamente aditiva. Por [CZZ11] o conjunto irregular de Ψ é vazio ou tem pressão topológica total. Suponhamos que escolhamos Φ de modo a esse conjunto irregular ser não vazio, como ele esta contido no conjunto de pontos nos quais

$$\limsup_{n\to\infty} \Big| -\frac{1}{n} \log \mu_\Phi([\iota_n(x)]) - h_{\mu_\Phi}(f) \Big| > 0$$

então esse novo conjunto também tem pressão topológica total. No entanto pelo nosso Teorema 3.40, para todo $c > 0$ o conjunto de pontos nos quais

$$\limsup_{n\to\infty} \Big| -\frac{1}{n} \log \mu_\Phi([\iota_n(x)]) - h_{\mu_\Phi}(f) \Big| > c$$

tem pressão topológica estritamente menor que $P_{\text{top}}(f, \Phi)$.

Gostaríamos de nos resultados anteriores concluir que se $\overline{X}_{\mu_\Phi,\Psi,c} \neq \emptyset$ então $P_{\overline{X}_{\mu_\Phi,\Psi,c}}(f,\Phi) \leq P_{\text{top}}(f,\Phi) - L_c$, no entanto precisaríamos garantir uma continuidade de L_c em relação a c (pelo menos semicontinuidade de alguma limitação superior). As hipóteses do Teorema B de [VZ13] estão contidas nas nossas hipóteses, sendo assim parte do Teorema B nos garante que: dado $c > 0$ temos que

$$-L_c \leq \sup\{-P_{\text{top}}(f,\Phi) + h_\eta(f) + \mathcal{F}_*(\eta,\Phi)\},$$

onde o supremo é sobre todas as probabilidades η tais que $|\mathcal{F}_*(\mu_\Phi,\Psi) - \mathcal{F}_*(\eta,\Phi)| \geq c$. A princípio não é de se esperar que essa estimativa superior de grandes desvios varie continuamente. No caso aditivo isso era resolvido quando sabíamos que o princípio de grandes desvios era dado pela transformada de Legendre, porém no contexto não-aditivo mesmo se a dinâmica for expansora não é claro que temos um princípio de grandes desvios dado por algo que faça o mesmo papel da transformada de Legendre. Um dos motivos é que não é claro como se é possível usar aproximação funcional na contexto não-aditivo. Como esse tipo de questão é importante independente do estudo de conjuntos desvio, iremos estudá-la dando contribuições em particular ao estudo dos nossos conjunto desvio.

3.2.1 Princípio de grandes desvios “fino” para sequências assintoticamente aditivas

Dado um espaço métrico compacto M denotaremos por $\mathcal{AA} := \{\Psi = \{\psi_n\}_n : \Psi \text{ é assintoticamente aditivo }\}$. O espaço $\mathcal{AA}$ tem uma estrutura natural de espaço vetorial induzida pela própria estrutura de espaço vetorial do espaço de funções, ou seja, dado $\{\psi_{1,n}\}_n, \{\psi_{2,n}\}_n \in \mathcal{AA}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos: $\{\psi_{1,n}\}_n + \{\psi_{2,n}\}_n := \{\psi_{1,n} + \psi_{2,n}\}_n$ e $\lambda \cdot \{\psi_{1,n}\}_n := \{\lambda\psi_{1,n}\}_n$. Sobre essa estrutura de espaço vetorial podemos dotar a seminorma: $||\{\psi_n\}_n||_{aa} := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}||\psi_n||_\infty$. Note que restrito a sequências aditivas $||\cdot||_{aa}$ definida anteriormente é uma norma.

As bolas da seminorma $||\cdot||_{aa}$ formam uma base para uma topologia em $\mathcal{AA}$ que não será metrizável pois não é Hausdorf, porém $\mathcal{AA}$ com a estrutura de espaço vetorial já citada e com essa topologia ainda será um espaço vetorial topológico localmente convexo completo. Dotaremos $\mathcal{AA}$ com essa topologia.

Proposição 3.49. *Seja M espaço métrico e $f : M \to M$ contínuo então as seguintes funções são contínuas:*

i. $\mathcal{AA} \ni \Phi \mapsto P_{\text{top}}(f,\Phi)$;

ii. $\mathcal{M}_1(f) \times \mathcal{AA} \ni (\mu,\Psi) \mapsto \mathcal{F}_*(\mu,\Psi)$.

Prova. i.] Decorre da definição de pressão e de $||\cdot||_{aa}$.

ii.] Fixemos $\Psi_1 = \{\psi_{1,n}\}_n \in \mathcal{AA}$ e $\eta_1 \in \mathcal{M}_1(f)$, provemos que $(\mu, \Psi) \mapsto \mathcal{F}_*(\mu, \Psi)$ é contínua em (Ψ_1, η_1). Dado $\varepsilon \in (0,1)$, seja $g_{\frac{\varepsilon}{6}} \in C^0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n}||\psi_{1,n} - S_n g_{\frac{\varepsilon}{6}}||_\infty < \frac{\varepsilon}{6}$ para todo $n \geq n_0$. Existe $\delta > 0$ tal que se $d(\eta_1, \eta_2) < \delta$ então $|\int g_{\frac{\varepsilon}{6}} d\eta_1 - \int g_{\frac{\varepsilon}{6}} d\eta_2| < \frac{\varepsilon}{6}$. Fixemos $\Psi_2 = \{\psi_{2,n}\}_n \in \mathcal{AA}$ e $\eta_2 \in \mathcal{M}_1(f)$ tais que $||\Psi_1 - \Psi_2||_{aa} < \frac{\varepsilon}{6}$ e $d(\eta_1, \eta_2) < \delta$, então existe $n_1 = n_1(\Psi_2, \eta_2) \geq n_0$ tal que $\frac{1}{n_1}||\psi_{1,n_1} - \psi_{2,n_1}||_\infty < \frac{\varepsilon}{6}$, $|\frac{1}{n_1}\int \psi_{2,n_1} d\eta_2 - \mathcal{F}_*(\eta_2, \Psi_2)| < \frac{\varepsilon}{6}$ e $|\frac{1}{n_1}\int \psi_{1,n_1} d\eta_1 - \mathcal{F}_*(\eta_1, \Psi_1)| < \frac{\varepsilon}{6}$.

Sendo assim, dado $\Psi_2 = \{\psi_{2,n}\}_n \in \mathcal{AA}$ e $\eta_2 \in \mathcal{M}_1(f)$ tais que $||\Psi_1 - \Psi_2||_{aa} < \frac{\varepsilon}{6}$ e $d(\eta_1, \eta_2) < \delta$ teremos que:

$$|\mathcal{F}_*(\eta_1, \Psi_1) - \mathcal{F}_*(\eta_2, \Psi_2)| \leq |\mathcal{F}_*(\eta_2, \Psi_2) - \int g_{\frac{\varepsilon}{6}} d\eta_2| + \Big|\int g_{\frac{\varepsilon}{6}} d\eta_2 - \mathcal{F}_*(\eta_1, \Psi_1)\Big| \leq$$

$$\Big|\frac{1}{n_1}\int S_{n_1} g_{\frac{\varepsilon}{6}} d\eta_2 - \frac{1}{n_1}\int \psi_{1,n_1} d\eta_2\Big| + \Big|\frac{1}{n_1}\int \psi_{1,n_1} d\eta_2 - \mathcal{F}_*(\eta_2, \Psi_2)\Big| + \Big|\int g_{\frac{\varepsilon}{6}} d\eta_2 - \int g_{\frac{\varepsilon}{6}} d\eta_1\Big| +$$

$$\Big|\int g_{\frac{\varepsilon}{6}} d\eta_1 - \mathcal{F}_*(\eta_1, \Psi_1)\Big| \leq \frac{\varepsilon}{6} + \Big|\frac{1}{n_1}\int \psi_{1,n_1} d\eta_2 - \frac{1}{n_1}\int \psi_{2,n_1} d\eta_2\Big| +$$

$$\Big|\frac{1}{n_1}\int \psi_{2,n_1} d\eta_2 - \mathcal{F}_*(\eta_2, \Psi_2)\Big| + \frac{\varepsilon}{6} + \Big|\int g_{\frac{\varepsilon}{6}} d\eta_1 - \frac{1}{n_1}\int \psi_{1,n_1} d\eta_1\Big| + \Big|\frac{1}{n_1}\int \psi_{1,n_1} d\eta_1 - \mathcal{F}_*(\eta_1, \Psi_1)\Big| \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} \leq \varepsilon.$$

Desse modo provamos que $(\mu, \Psi) \mapsto \mathcal{F}_*(\mu, \Psi)$ é contínua em (Ψ_1, η_1). ■

Na definição de observáveis assintoticamente aditivos Ψ não exigimos nenhuma hipótese, além de continuidade, sobre as funções g_ε cuja média de Birkhoff aproxima a taxa dada por Ψ. Iremos impor restrições sobre g_ε para obter resultados em termos de Ψ. A partir desse momento M será uma variedade riemanniana, $f : M \to M$ será uma dinâmica C^1, $\Lambda \subset M$ será um repulsor isolado tal que f é topologicamente mixing sobre Λ e iremos sempre definir os objetos sobre Λ. Além disso fixaremos $\alpha \in (0,1)$. De fato nosso resultados irão também valer para subshifts do tipo finito porém por simplicidade iremos focar sobre o caso de dinâmicas expansoras regulares.

Proposição 3.50. *Seja H um subconjunto denso no espaço de funções contínuas $C(M, \mathbb{R})$ na norma do* sup $||\cdot||_\infty$. *Se $\Psi = \{\psi_n\}$ é uma sequência assintoticamente aditiva de observáveis então existe $(0,1) \ni \varepsilon \mapsto g_\varepsilon \in H$ tal que para todo $\varepsilon > 0$*

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n}||\psi_n - S_n g_\varepsilon||_\infty < \varepsilon.$$

Prova. Como $\Psi = \{\psi_n\}$ é uma sequência assintoticamente aditiva de observáveis existe uma família $(\tilde{g}_\varepsilon)_\varepsilon$ de funções ocntínuas tal que para todo para todo $\varepsilon > 0$ nós temos que $\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}||\psi_n - S_n\tilde{g}_\varepsilon||_\infty < \varepsilon/2$. Desde que $H \subset C(M,\mathbb{R})$ é denso então existe uma família $(g_\varepsilon)_\varepsilon$ de observáveis em H tal que $||g_\varepsilon - \tilde{g}_\varepsilon||_\infty < \varepsilon/2$ para todo ε. O que implica que as médias de Birkhoff são $\varepsilon/2$ próximas, assim provamos o lema. ■

Como o formalismo termodinâmico para dinâmicas expansoras é bem adaptado ao espaço de funções Holder contínuas nós iremos tomar na proposição anterior $H = C^\alpha(M,\mathbb{R})$. Dado $\Psi = \{\psi_n\}_n \in \mathcal{AA}$, pela densidade das funções Holder no espaço das funções contínuas sempre podemos supor que na definição de sequências assintoticamente aditivas as funções cujas médias de Birkhoff aproximam as taxas dadas por ψ_n são funções Holder, ou seja, se $\Psi = \{\psi_n\}_n \in \mathcal{AA}$ então existe pelo menos uma família de funções $(0,1) \ni \varepsilon \mapsto g_\varepsilon \in C^\alpha(M,\mathbb{R})$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ temos que $||\Psi - \{S_n g_\varepsilon\}_n||_{aa} < \varepsilon$. Chamaremos esse tipo de família de funções por *família admissível para* Ψ e para simplificar a notação denotaremos por $\{g_\varepsilon\}_\varepsilon$. O próximo resultado nos diz que recuperamos informações termodinâmicas de Ψ através das suas famílias admissíveis.

Proposição 3.51. *i. Seja $\Phi \in \mathcal{AA}$ e $(g_\varepsilon)_\varepsilon$ admissível para Φ então*

$P_{\text{top}}(f,\Phi) = \lim_{\varepsilon\to 0} P_{\text{top}}(f, g_\varepsilon)$.

ii. Seja $(g_\varepsilon)_\varepsilon$ admissível para Ψ e μ_ε o único estado de equilíbrio para f com respeito a g_ε então todo ponto de acumulação de μ_ε é estado de equilíbrio para f com respeito a Ψ. Em particular, se existe um único estado de equilíbrio μ para f com respeito a Ψ então $\mu = \lim_{\varepsilon\to 0}\mu_\varepsilon$.

Prova. i.] Decorre do item i. da proposição anterior.

ii.] Como Λ é um repulsor temos que $\mu \mapsto h_m(f)$ é semicontínua superiormente, assim utilizando a o item ii. da proposição anterior concluímos que todo ponto de acumulação de μ_ε é estado de equilíbrio para f com respeito a Ψ. Utilizando a compacidade do espaço de probabilidades invariantes vemos que se existe um único estado de equilíbrio μ para f com respeito a Ψ então $\mu = \lim_{\varepsilon\to 0}\mu_\varepsilon$. ■

Estamos interessados em obter mais informações sobre a função taxa de grandes desvios dada por [VZ13], obtendo um princípio de grandes desvios mais fino assim como quando provamos o princípio de grandes desvios através da transformada de Legendre. Porém, não existe uma maneira natural de usar a aproximação funcional no caso de potenciais assintoticamente aditivos, de tal modo faremos uso das famílias admissíveis pertencerem a um espaço onde temos uma boa aproximação funcional. O próximo resultado nós permite definir a transformada de Legendre de Ψ em termos das transformadas de Legendre associadas uma família admissível qualquer. Para cada potencial quase aditivo Φ satisfazendo a condição de variação limitada iremos denotar por μ_Φ o único estado de equilíbrio de f com respeito a Φ. Para cada Φ e Ψ assintoticamente aditivos definamos a transformada de Legendre de Ψ em $t \in \mathbb{R}$ por $\mathcal{E}_{f,\Phi,\Psi} := P_{\text{top}}(f, \Phi + t\Psi) - P_{\text{top}}(f, \Phi)$. Então $\mathcal{E}_{f,\Phi,\Psi} := \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{E}_{f,\phi_\varepsilon,g_\varepsilon}$, onde $\{\varphi_\varepsilon\}_\varepsilon$ e $\{g_\varepsilon\}_\varepsilon$ são família admissíveis quaisquer de Φ e Ψ respectivamente.

Antes de passarmos ao estudo da transformada de Legendre, lembremos que aplicando a [Ba10, Theorem 6.3] temos o seguinte o resultado:

Proposição 3.52. *Seja f uma dinâmica contínua sobre um espaço métrico compacto e assuma que $\mathcal{M}_1(f) \ni \mu \mapsto h_\mu(f)$ é semi-contínua superiormente. Assuma também que Φ e Ψ são sequências quase aditivas satisfazendo a condição de variação limitada e que existe um único estado de equilíbrio para $\Phi + t\Psi$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então a função $\mathbb{R} \ni t \mapsto P_{\text{top}}(f, \Phi + t\Psi)$ e C^1 e $\frac{d}{dt}P(f, \Phi + t\Psi) = \mathcal{F}_*(\mu_{\Phi+t\Psi}, \Psi)$.*

Decorre da proposição anterior que se Φ e Ψ são quase aditivas satisfazendo a condição de variação limitada então a função transformada de Legendre $t \mapsto \mathcal{E}_{f,\Phi,\Psi}$ é C^1.

Seja Ψ quase aditiva, diremos que Ψ é *cohomólogo a uma constante* se existe uma família admissível $\{g_\varepsilon\}_\varepsilon$ para Ψ tal que g_ε é cohomólogo a uma constante para todo $\varepsilon \in (0,1)$. Dizemos que a família $\{g_\varepsilon\}_\varepsilon$ *é cohomólogo a uma constante.* Uma questão natural é entender quais famílias são cohomólogas a uma constante, o próximo lema deixa a situação mais clara.

Proposição 3.53. *$\Psi = \{\psi_n\}_n \in \mathcal{AA}$ é cohomólogo a uma constante se, e somente se, $(\frac{\psi_n}{n})_n$ é uniformemente convergente à uma constante.*

Prova. Por um lado, se Ψ é cohomólogo a uma constante ent ao existe uma família admissível $\{g_\varepsilon\}_\varepsilon$ para Ψ tal que g_ε é cohomólogo a uma constante para todo $\varepsilon \in (0,1)$, ou seja, existem constantes $c_\varepsilon \in \mathbb{R}$ e funções contínuas u_ε tal que $g_\varepsilon = u_\varepsilon \circ f - u_\varepsilon + c_\varepsilon$ e, consequentemente, $S_n g_\varepsilon = u_\varepsilon \circ f^n - u_\varepsilon + c_\varepsilon n$ para todo $\varepsilon \in (0,1)$. Assim

$$\limsup_{n\to\infty} \Big|\Big|\frac{\psi_n}{n} - c_\varepsilon\Big|\Big|_\infty = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big|\Big|\psi_n - S_n g_\varepsilon - u_\varepsilon \circ f^n + u_\varepsilon\Big|\Big|_\infty < \varepsilon,$$

o que prova que $c = \lim_{\varepsilon\to 0} c_\varepsilon$ existe e que $(\frac{\psi_n}{n})_n$ é uniformemente convergente à constante c.

Por outro lado, se $(\frac{\psi_n}{n})_n$ é uniformemente convergente à uma constante c então tomemos g_ε constante e igual à c e note que como $S_n g_\varepsilon = cn$ então claramente

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big||\psi_n - S_n g_\varepsilon\Big||_\infty = 0.$$

Isto finaliza a prova doa proposição. ■

Notemos que se Ψ não é cohomólogo a uma constante então existe uma família admissível $\{g_\varepsilon\}_\varepsilon$ para Ψ tal que g_ε não é cohomólogo a uma constante para todo $\varepsilon \in (0,1)$, nesse caso dizemos que a família $\{g_\varepsilon\}_\varepsilon$ não é cohomólogo a uma constante.

Se Φ é uma sequência de potenciais quase aditiva com condição de variação limitada, Ψ uma sequência de observáveis quase aditiva com condição de variação limitada e não cohomólogo a uma constante, $\{g_\varepsilon\}_\varepsilon$ é uma família admissível para Ψ não cohomóloga a uma constante e $(\varphi_\varepsilon)_\varepsilon$ é uma família admissível para Φ então faz sentido as transformadas de Legendre $I_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon}(t)$ para todo $\varepsilon \in (0,1)$. Como cada g_ε não é cohomólogo a uma constante vale a propriedade variacional

$$I_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon}(\mathcal{E}'_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon}(t)) = t\mathcal{E}'_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon}(t) - \mathcal{E}_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon}(t)$$

para todo $\varepsilon \in (0,1)$ e $t \in \mathbb{R}$, utilizando esse propriedade variacional podemos definir a transformada de Legendre de Ψ, de fato, para todo $s \in (\inf_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{E}'_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon}(t), \sup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{E}'_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon}(t))$ temos que

$$I_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon}(s) = s\cdot(\mathcal{E}'_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon})^{-1}(s) - \mathcal{E}_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon}\circ(\mathcal{E}'_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon})^{-1}(s),$$

pelas Proposições 3.49 e 3.51 temos que $\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{E}'_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon}(t) = \mathcal{F}_*(\Psi,\mu_{f,\Phi+t\Psi})$ e $\lim_\varepsilon \mathcal{E}_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon}(t) = P_{\text{top}}(f,\Phi+t\Psi) - P_{\text{top}}(f,\Phi)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e esse convergência é uniforme em compactos. Desse modo, existe a transformada de Legendre de Ψ em

$$s \in \Big(\inf_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{F}_*(\Psi,\mu_{\Phi+t\Psi})\ ,\ \sup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{F}_*(\Psi,\mu_{\Phi+t\Psi})\Big)$$

definida como $I_{f,\Phi,\Psi}(s) := \lim_{\varepsilon\to 0} I_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon}(s)$, note que esse limite não depende das escolhas das famílias $\{\varphi_\varepsilon\}_\varepsilon$ e $\{g_\varepsilon\}_\varepsilon$. A princípio $\Big(\inf_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{F}_*(\Psi,\mu_{\Phi+t\Psi})\ ,\ \sup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{F}_*(\Psi,\mu_{\Phi+t\Psi})\Big)$ poderia ser um intervalo degenerado, porém o próximo lema nos dirá que o fecho desse intervalo é exatamente o espectro de Ψ, em particular $\Big(\inf_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{F}_*(\Psi,\mu_{\Phi+t\Psi})\ ,\ \sup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{F}_*(\Psi,\mu_{\Phi+t\Psi})\Big)$ é um intervalo degenerado se, e somente se, Ψ é cohomólogo a uma constante.

Lema 3.54. *Dado $\Psi = \{\psi_n\}_n$ e $\Phi \in \mathcal{AA}$ temos que*

$$\Big[\inf_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{F}_*(\Psi,\mu_{\Phi+t\Psi})\ ,\ \sup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{F}_*(\Psi,\mu_{\Phi+t\Psi})\Big] = \{\mathcal{F}_*(\Psi,\eta) : \eta \in \mathcal{M}_1(f)\}.$$

Em particular, $\Big(\inf_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{F}_*(\Psi,\mu_{\Phi+t\Psi})\ ,\ \sup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{F}_*(\Psi,\mu_{\Phi+t\Psi})\Big)$ é um intervalo degenerado se, e somente se, Ψ é cohomólogo a uma constante.

Prova. Dada as sequências admissíveis φ_ε e g_ε para Φ e ψ respectivamente, temos que

$$\bigcap_{\varepsilon_0\in(0,1)}\bigcup_{\varepsilon\geq\varepsilon_0}\Big(\inf_{t\in\mathbb{R}}\mathcal{E}'_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon}(t)\ ,\ \sup_{t\in\mathbb{R}}\mathcal{E}'_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon}(t)\Big)=\Big(\inf_{t\in\mathbb{R}}\mathcal{F}_*(\Psi,\mu_{\Phi+t\Psi})\ ,\ \sup_{t\in\mathbb{R}}\mathcal{F}_*(\Psi,\mu_{\Phi+t\Psi})\Big)$$

e

$$\bigcap_{\varepsilon_0\in(0,1)}\bigcup_{\varepsilon\geq\varepsilon_0}\Big(\inf_{\eta\in\mathcal{M}_1(f)}\int g_\varepsilon d\eta\ ,\ \sup_{\eta\in\mathcal{M}_1(f)}\int g_\varepsilon d\eta\Big)=\Big(\inf_{\eta\in\mathcal{M}_1(f)}\mathcal{F}_*(\Psi,\eta)\ ,\ \sup_{\eta\in\mathcal{M}_1(f)}\mathcal{F}_*(\Psi,\eta)\Big).$$

Desse modo basta provarmos o resultado pretendido para o caso em que Ψ e Φ são sequências aditivas. Seja g e $\phi\in C(M,\mathbb{R})$, defina $T:\mathbb{R}\xrightarrow[t\mapsto\int g\mu_{\phi+tg})]{}\mathbb{R}$. Como sabemos que os estados de equilíbrio variam continuamente com o potencial temos que T é contínuo, em particular a imagem de T é um intervalo. Além disso, dado $\eta\in\mathcal{M}_1(f)$ e $t>0$ temos que

$$h_\eta(f)+\int\phi d\eta\leq h_{\mu_{\phi+tg}}(f)+\int\phi d\mu_{\phi+tg}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{t}h_\eta(f)+\frac{1}{t}\int\phi+\int gd\eta\leq\frac{1}{t}h_{\mu_{\phi+tg}}(f)+\frac{1}{t}\int\phi+\int gd\mu_{\phi+tg},$$

fazendo t convergir ao infinito temos que $\displaystyle\int gd\eta\leq\int gd(\limsup_{t\to+\infty}\mu_{\phi+tg})$. Utilizando o mesmo raciocínio teremos que $\displaystyle\int gd\eta\geq\int gd(\limsup_{t\to-\infty}\mu_{\phi+tg})$. Assim, existe um intervalo compacto $[a,b]\subset\mathbb{R}$ tal que $T([a,b])=T(\mathbb{R})=\{\int gd\eta:\eta\in\mathcal{M}_1(f)\}$. E assim findamos a prova da primeira parte do resultado.

Provemos agora a segunda parte do resultado. Como $\{\mathcal{F}_*(\Psi,\eta):\eta\in\mathcal{M}_1(f)\}=\{\alpha\in\mathbb{R}:\exists x\in M \text{ com } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_ng(x)=\alpha\}$, utilizando o lema 3.53 obtemos que $\inf_{t\in\mathbb{R}}\mathcal{F}_*(\Psi,\mu_{\Phi+t\Psi})=\sup_{t\in\mathbb{R}}\mathcal{F}_*(\Psi,\mu_{\Phi+t\Psi})$ se, e somente se, Ψ é cohomólogo a uma constante. ■

No próximo teorema veremos algumas propriedades dessa transformada de Legendre.

Teorema 3.55. *Sejam Φ sequência de potenciais quase aditiva satisfazendo condição de variação limitada e Ψ uma sequência de observáveis quase aditiva satisfazendo condição de variação limitada e não cohomóloga a uma constante. Então:*

i. a transformada de Legendre de Ψ satisfaz a propriedade variacional:

$$I_{f,\Phi,\Psi}(\mathcal{E}'_{f,\Phi,\Psi}(t))=t\mathcal{E}'_{f,\Phi,\Psi}(t)-\mathcal{E}_{f,\Phi,\Psi}(t),$$

para todo $t\in\mathbb{R}$;

ii. $I_{f,\Phi,\Psi}\geq 0$ é uma função convexa e dado qualquer intervalo $(a,b)\subset\mathbb{R}$, não contendo $\mathcal{F}_*(\mu_\Phi,\Psi)$, temos que $\inf_{s\in(a,b)}I_{f,\Phi,\Psi}(s)=\min\{I_{f,\Phi,\Psi}(a),I_{f,\Phi,\Psi}(b)\}$.

iii. $-I_{f,\Phi,\Psi}(s) = \sup_{\eta\in\mathcal{M}_1(f)}\{-P_{\text{top}}(f,\Phi) + h_\eta(f) + \mathcal{F}_*(\eta,\Phi) : \mathcal{F}_*(\eta,\Psi) = s\}$.

iv. $I_{f,\Phi,\Psi}(s) = 0$ *se, e somente se,* $s = \mathcal{F}_*(\mu_\Phi,\Psi)$. *Em particular,* $s \mapsto I_{f,\Phi,\Psi}(s)$ *é estritamente convexa numa vizinhança de* $\mathcal{F}_*(\mu_\Phi,\Psi)$.

Prova. Ao longo da prova iremos supor que $\{\varphi_\varepsilon\}_\varepsilon$ é uma família admissível para Φ e $\{g_\varepsilon\}_\varepsilon$ é uma família admissível para Ψ não cohomóloga a uma constante.

i.] Já sabemos que $I_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon}(\mathcal{E}'_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon}(t)) = t\mathcal{E}'_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon}(t) - \mathcal{E}_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon}(t)$, fazendo $\varepsilon \to 0$ obtemos que $I_{f,\Phi,\Psi}(\mathcal{E}'_{f,\Phi,\Psi}(t)) = t\mathcal{E}'_{f,\Phi,\Psi}(t) - \mathcal{E}_{f,\Phi,\Psi}(t)$.

ii.] Já sabemos que $I_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon} \geq 0$ para todo $\varepsilon \in (0,1)$ logo por definição $I_{f,\Phi,\Psi} \geq 0$. Como $I_{f,\Phi,\Psi}$ é limite das funções convexas $I_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon}$ então $I_{f,\Phi,\Psi}$ é convexa. Por fim, dado $(a,b) \subset \mathbb{R}$ não contendo $\mathcal{F}_*(\mu_\Phi,\Psi)$ então sabemos que

$$\inf_{s\in(a,b)} I_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon}(s) = \min\{I_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon}(a), I_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon}(b)\}$$

logo a mesma propriedade irá ser válida para $I_{f,\Phi,\Psi}$.

iii.] A igualdade que pretendemos provar é satisfeita quando $s = \mathcal{F}_*(\mu_\Phi,\Psi)$ pela unicidade dos estados de equilíbrio e a Proposição 3.51, logo estudaremos agora o caso em que $s \neq \mathcal{F}_*(\mu_\Phi,\Psi)$. Pelo caso aditivo já discutido (veja a prova do Teorema 3.9) sabemos que

$$-I_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon}(s) = \sup_{\eta\in\mathcal{M}_1(f)}\{-P_{\text{top}}(f,\varphi_\varepsilon) + h_\eta(f) + \int \varphi_\varepsilon d\eta : \int g_\varepsilon d\eta = s\}$$

para todo $\varepsilon \in (0,1)$, logo também utilizando a Proposição 3.49 vemos que para obtermos o resultado pretendido basta mostramos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\eta\in\mathcal{M}_1(f)}\{h_\eta(f) + \int \varphi_\varepsilon d\eta : \int g_\varepsilon d\eta = s\} = \sup_{\eta\in\mathcal{M}_1(f)}\{h_\eta(f) + \mathcal{F}_*(\eta,\Phi) : \mathcal{F}_*(\eta,\Psi) = s\}.$$

Por um lado, seja $\eta_\varepsilon \in \mathcal{M}_1(f)$ tal que $\int g_\varepsilon d\eta_\varepsilon = s$ e

$$h_{\eta_\varepsilon}(f) + \int \varphi_\varepsilon d\eta_\varepsilon = \sup_{\eta\in\mathcal{M}_1(f)}\{h_\eta(f) + \int \varphi_\varepsilon d\eta : \int g_\varepsilon d\eta = s\}$$

para todo $\varepsilon \in (0,1)$. Tomemos um ponto de acumulação $\tilde{\eta} \in \mathcal{M}_1(f)$ de η_ε, a menos de trocarmos as famílias $\{\varphi_\varepsilon\}_\varepsilon$ e $\{g_\varepsilon\}_\varepsilon$ podemos supor sem perda de generalidade que $\eta_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \tilde{\eta}$. Pela Proposição 3.49 temos que $\lim_{\varepsilon\to}\int \varphi_\varepsilon d\eta_\varepsilon = \mathcal{F}_*(\tilde{\eta},\Phi)$ e $\lim_{\varepsilon\to}\int g_\varepsilon d\eta_\varepsilon = \mathcal{F}_*(\tilde{\eta},\Psi) = s$, logo também utilizando a semicontinuidade superior da função entropia

$\eta \mapsto h_\eta(f)$ temos que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\eta\in\mathcal{M}_1(f)} \{h_\eta(f) + \int \varphi_\varepsilon d\eta : \int g_\varepsilon d\eta = s\} = \lim_{\varepsilon\to 0} h_{\eta_\varepsilon}(f) + \int \varphi_\varepsilon d\eta_\varepsilon$$
$$\leq h_{\tilde{\eta}}(f) + \mathcal{F}_*(\tilde{\eta}, \Phi)$$
$$\leq \sup_{\eta\in\mathcal{M}_1(f)} \{h_\eta(f) + \mathcal{F}_*(\eta, \Phi) : \mathcal{F}_*(\eta, \Psi) = s\}.$$

Por outro lado, tome $\tilde{\eta} \in \mathcal{M}_1(f)$ tal que $\mathcal{F}_*(\tilde{\eta}, \Psi)$ e

$$h_{\tilde{\eta}}(f) + \mathcal{F}_*(\tilde{\eta}, \Phi) = \sup_{\eta\in\mathcal{M}_1(f)} \{h_\eta(f) + \mathcal{F}_*(\eta, \Phi) : \mathcal{F}_*(\eta, \Psi) = s\}.$$

Pela Proposição 3.49, dado $\delta > 0$ pequeno existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $\int g_\varepsilon d\tilde{\eta} \in (s-\delta, s+\delta)$ para todo $\varepsilon < \varepsilon_1$, logo

$$\sup_{\eta\in\mathcal{M}_1(f)} \{h_\eta(f) + \mathcal{F}_*(\eta, \Phi) : \mathcal{F}_*(\eta, \Psi) = s\} = h_{\tilde{\eta}}(f) + \mathcal{F}_*(\tilde{\eta}, \Phi)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} h_{\tilde{\eta}}(f) + \int \varphi_\varepsilon d\tilde{\eta}$$
$$\leq \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\eta\in\mathcal{M}_1(f)} \{h_\eta(f) + \int \varphi_\varepsilon d\eta : \int g_\varepsilon d\eta \in (s-\delta, s+\delta)\}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} - \inf_{t\in(s-\delta,s+\delta)} I_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon}(t) + P_{\text{top}}(f, \varphi_\varepsilon)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} - \min\{I_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon}(s-\delta), I_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon}(s-\delta)\} + P_{\text{top}}(f, \varphi_\varepsilon)$$
$$= -\min\{I_{f,\Phi,\Psi}(c-\delta), I_{f,\Phi,\Psi}(c+\delta)\} + P_{\text{top}}(f, \Phi),$$

fazendo $\delta \to 0$ teremos que

$$\sup_{\eta\in\mathcal{M}_1(f)} \{h_\eta(f) + \mathcal{F}_*(\eta, \Phi) : \mathcal{F}_*(\eta, \Psi) \leq -I_{f,\Phi,\Psi}(c) + P_{\text{top}}(f, \Phi)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} -I_{f,\varphi_\varepsilon,g_\varepsilon}(s) + P_{\text{top}}(f, \varphi_\varepsilon)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\eta\in\mathcal{M}_1(f)} \{h_\eta(f) + \int \varphi_\varepsilon d\eta : \int g_\varepsilon d\eta = s\}.$$

E assim findamos a prova do item.

iv.] Pelo item iii. e a unicidade do estado de equilíbrio μ_Φ vemos que $I_{f,\Phi,\Psi}(s) = 0 \Leftrightarrow s = \mathcal{F}_*(\mu_\Phi, \Psi)$. Suponhamos agora por absurdo que $I_{f,\Phi,\Psi}$ não é estritamente convexa em nenhuma vizinhança de $\mathcal{F}_*(\mu_\Phi, \Psi)$, pelo item ii. teríamos que $I_{f,\Phi,\Psi}$ é constante em um intervalo aberto contendo $\mathcal{F}_*(\mu_\Phi, \Psi)$. Em particular obteríamos um número $s \neq \mathcal{F}_*(\mu_\Phi, \Psi)$ tal que $I_{f,\Phi,\Psi}(s) = 0$, o que é um absurdo pelo que provamos a pouco. ∎

A relação variacional obtida no item iii) do teorema anterior é particularmente interessante no estudo de grandes desvios. Como já comentamos em [VZ13] é provado resultados de grandes desvios para sequências subaditivas e assintoticamente aditivas. No caso de dinâmicas expansoras e sequências quase aditivas de potenciais o teorema anterior nos dá a seguinte consequência imediata:

Corolário 3.56. *Sejam M uma variedade riemanniana, $f : M \to M$ uma dinâmica C^1 e $\Lambda \subset M$ uma repulsor isolado tal que $f\mid_\Lambda$ é topologicamente mixing. Sejam $\Phi = \{\varphi_n\}$ uma sequência quase aditiva de potenciais satisfazendo a condição de variação limitada e μ_Φ o único estado de equilíbrio para $f\mid_\Lambda$ com respeito a Φ. Se $\Psi = \{\psi_n\}$ é uma sequência quase aditiva de observáveis satisfazendo a condição de variação limitada então vale o seguinte princípio de grandes desvios: dado $F \subset \mathbb{R}$ fechado temos que*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_\Phi \left(\left\{ x \in M : \frac{1}{n}\psi_n(x) \in F \right\} \right) \leq - \inf_{s\in F} I_{f,\Phi,\Psi}(s)$$

e também para todo conjunto aberto $E \subset \mathbb{R}$ temos

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_\Phi \left(\left\{ x \in M : \frac{1}{n}\psi_n(x) \in E \right\} \right) \geq - \inf_{s\in E} I_{f,\Phi,\Psi}(s).$$

Também como consequência do teorema anterior podemos melhorar a estimativa dos Teoremas 3.40 e 3.42.

Observação 3.57. *Para os resultados que seguiram iremos supor que $\mathcal{F}_*(\mu_\Phi, \Psi) = 0$, isso não será problema pois dado uma sequência de observáveis $\Psi = \{\Psi_n\}_n$ sempre podemos aplicar os resultados na nova sequência de observáveis $\{\psi_n - n\mathcal{F}_*(\mu_\Phi, \Psi)\}_n$.*

Observação 3.58. *Assim como no caso aditivo fixado uma sequência de observáveis $\Psi = \{\psi_n\}_n$ e um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ não degenerado denotaremos $\{x \in \Lambda : \lim_{n\to+\infty} \frac{\psi_n(x)}{n} \in I\}$ por $X(I)$.*

Os próximo resultados são extensões dos Teoremas 3.9 e 3.19 para o caso não aditivo.

Corolário 3.59. *Sejam M uma variedade riemanniana, $f : M \to M$ uma dinâmica C^1, $\Lambda \subset M$ um repulsor isolado tal que f é topologicamente mixing sobre Λ e $\Phi \equiv 0$. Suponhamos que Ψ é uma sequência de observáveis quase aditiva satisfazendo a condição de variação limitada e com $\mathcal{F}_*(\mu_0, \Psi) = 0$, onde μ_0 é a única medida de máxima entropia para f. Então para todo intervalo $J \subset \mathbb{R}$ temos que*

$$h_{\overline{X}_{\Psi,J}}(f) \leq h_{\text{top}}(f) - I_{f,0,\Psi}(c_*),$$

onde c_* pertence ao fecho de J e $I_{f,0,\Psi}(c_*) = \inf_{s\in J} I_{f,0,\Psi}(s)$. Ademais, se $\overline{X}_{\Psi,J} \neq \emptyset$ então c_* é um ponto do bordo de J e

$$h_{\overline{X}_{\Psi,J}}(f) = h_{\underline{X}_{\Psi,J}}(f) = h_{X(c_*)}(f) = h_{X(J)}(f) = h_{\text{top}}(f) - I_{f,0,\Psi}(c_*),$$

Em particular $\mathbb{R}_0^+ \ni c \mapsto h_{\overline{X}_{\mu_0,\Psi,c}}(f)$ é contínuo, estritamente decrescente e concava em uma vizinhança do zero.

Prova. Pelos trabalhos de [Ba06] e [Mum06], como $\Phi \equiv 0$ claramente satisfaz a condição de variação limitada já sabemos que μ_Φ é uma medida Gibbs. Logo pelo Teorema 3.40 obtemos que $h_{\overline{X}_{\Psi,J}}(f) \leq h_{\text{top}}(f) - L_{\nu,J_\delta}$, para todo $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Pelo corolário anterior

$$h_{\overline{X}_{\Psi,J}}(f) \leq h_{\text{top}}(f) - \inf_{s\in J_\delta} I_{f,0,\Psi}(s)$$

para todo $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Como a transformada de Legendre de Ψ é contínua temos que

$$h_{\overline{X}_{\Psi,F}}(f) \leq h_{\text{top}}(f) - \inf_{s\in J} I_{f,0,\Psi}(s)$$

Provemos agora a segunda parte dos resultados. A prova segue o mesmo tipo de estimativa presente na prova do Teorema 3.9. Pelos trabalhos [BD09] sabemos que se $X(\alpha) \neq \emptyset$ então $h_{X(\alpha)}(f) = \sup_{\eta\in\mathcal{M}_1(f)}\{h_\eta(f) : \mathcal{F}_*(\eta,\Psi) = \alpha\}$. Desse modo, se $\overline{X}_{\Psi,J} \neq \emptyset$ então $\mathcal{F}_*(\mu_0,\Psi) \notin J$ logo o Teorema 3.55 (item ii.) nos garante que o ínfimo de $\inf_{s\in J} I_{f,0,\Psi}(s)$ é realizado no bordo em um ponto c_* do bordo de J. Assim:

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(f) - I_{f,0,\Psi}(c_*) = h_{X(c_*)}(f) &\leq h_{X(J)}(f,) \\ &\leq h_{X(\overline{J})}(f) \leq h_{\underline{X}_{\Psi,J}}(f) \\ &\leq h_{\overline{X}_{\Psi,J}}(f) \leq h_{\text{top}}(f) - I_{f,0,\Psi}(c_*). \end{aligned}$$

Em particular, podemos aplicar os resultados para $J_c = \mathbb{R} \setminus (\mathcal{F}_*(\mu_0,\Psi) - c, \mathcal{F}_*(\mu_0,\Psi) + c)$, e como $\overline{X_{J_c}} = \overline{X}_{\mu_0,\Psi,c}$ temos

$$h_{\overline{X}_{\mu_0,\Psi,c}}(f) = h_{\text{top}}(f) - \min\{I_{f,0,\Psi}\big(\mathcal{F}_*(\mu_0,\Psi) + c\big)\ ,\ I_{f,0,\Psi}\big(\mathcal{F}_*(\mu_0,\Psi) - c\big)\}$$

quando o conjunto $\overline{X}_{\mu_0,\Psi,c}$ é não vazio. Então pelo Teorema 3.55 deduzimos que a função $\mathbb{R}_0^+ \ni c \mapsto h_{\overline{X}_{\mu_0,\Psi,c}}(f)$ é estritamente decrescente e concava em uma vizinhança do zero. ■

Na prova do resultado anterior usamos fortemente a caracterização da entropia topológica dos conjuntos de nível devido a Barreira e Doutor [BD09], como é de se esperar estimativas análogas para a pressão topológica nós esperamos que estimativas análogas a do teorema anterior valham no contexto de pressão topológica.

Por fim observemos que nos resultados anteriores para estudarmos a transformada de Legendre nós utilizamos sequências de potenciais quase aditivos com condição de variação limitada, no entanto era extremamente interessante estender os resultados para o caso de potenciais assintoticamente aditivos com variação limitada ou dinâmicas mais gerais que expansoras. Isso de fato para alguns casos parece razoável porém o primeiro passo perpassa por um estudo dos estados de equilíbrio no caso desses tipos de potenciais, de fato para nos o ideal seria obtermos um único estado de equilíbrio para uma classe de potenciais assintoticamente aditivos ou uma classe de dinâmicas e de fato ele ser uma medida Gibbs fraca.

Apêndice A

Cones e métricas projetivas

Seja E um espaço vetorial, $\emptyset \neq C \subset E \setminus \{0\}$ é dito ser um cone (convexo) se $\forall v_1, v_2 \in C$ e $t > 0$ tivermos $tv_1 + v_2 \in C$. Exigindo $C \cap (-C) = \emptyset$ podemos induzir uma ordem sobre E que preserva a sua estrutura de espaço vetorial; com efeito:

$$u \preceq v \Leftrightarrow v - u \in C \cup \{0\}$$

$\preceq$ será uma ordem parcial sobre E com as seguintes propriedades: $(u, v, w \in E$ e $\lambda \geq 0)$

- $u \preceq v \Rightarrow u + w \preceq v + w$;
- $u \preceq v \Rightarrow \lambda u \preceq \lambda v$.

Se E for um espaço vetorial topológico e se $C \cup \{0\}$ for fechado topologicamente então $\preceq$ é "contínua", ou seja, $u_n \to u$ e $u_n \preceq v \Rightarrow u \preceq v$.

O fecho $\overline{C}$ de C será definido por:

$$w \in \overline{C} \Leftrightarrow \textit{existe } v \in C \textit{ e } t_n \searrow 0 \textit{ tal que } (w + t_n v) \in C, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Notemos que se E é um espaço vetorial topológico, então o fecho do cone C está contido no fecho topológico de C, no entanto é uma noção mais adaptada a convexidade.

Trabalharemos a partir daqui com cones tais que $\overline{C} \cap (-\overline{C}) = \{0\}$, isso nos permitirá definir uma pseudo-métrica sobre os elementos do cone. Dados v_1 e $v_2 \in C$, definamos:

- $\alpha(v_1, v_2) := \sup\{t > 0; v_2 - tv_1 \in C\}$
- $\beta(v_1, v_2) := \inf\{t > 0; tv_1 - v_2 \in C\}$.

Por convenção, $\sup\emptyset = 0$ e $\inf\emptyset = +\infty$. Notamos que α e β tem as seguintes propriedades:

- $\alpha(v_1, v_2) \leq \beta(v_1, v_2); \forall v_1, v_2 \in C$
- $\alpha(v_1, v_2) < +\infty; \forall v_1, v_2 \in C$
- $\beta(v_1, v_2) > 0; \forall v_1, v_2 \in C$

(As provas desses resultado podem se encontradas em [Vi97], página 17).

Seja $\Theta : C \times C \to [0, +\infty]$ definida por:

$$\Theta(v_1, v_2) := \log \frac{\beta(v_1, v_2)}{\alpha(v_1, v_2)}$$

(Por convenção $\Theta(u, v) = +\infty$ se $\alpha(u, v) = 0$ ou $\beta(u, v) = +\infty$) Θ é conhecida como métrica de Hilbert e tem as seguintes propriedades:

- $\Theta(v_1, v_2) = \Theta(v_2, v_1); \forall v_1, v_2 \in C$
- $\Theta(v_1, v_3) \leq \Theta(v_1, v_2) + \Theta(v_2, v_3); \forall v_1, v_2, v_3 \in C$
- $\Theta(v_1, v_2) = 0 \Leftrightarrow \exists t > 0$ tal que $v_1 = tv_2$
- $\Theta(v_1, v_2) = \Theta(t_1 v_1, t_2 v_2); \forall v_1, v_2 \in C$ e $t_1, t_2 > 0$.

(As provas desses resultados podem ser encontradas em [Vi97], página 17).

Desse modo Θ é uma pseudo-métrica. Denotando $\mathcal{R}$ pelo $\{(u, v) \in C \times C : u = tv$, para algum $t > 0\}$, $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência: se existir um $x_0 \in C$ tal que $A_{x_0} := \{v \in C : \Theta(v, x_0) < +\infty\} \neq \emptyset$, teremos que $\tilde{\Theta} : A_{x_0}/\mathcal{R} \times A_{x_0}/\mathcal{R} \to [0, +\infty)$ definida por $\tilde{\Theta}([v_1], [v_2]) := \Theta(v_1, v_2)$ é uma métrica sobre $A_{x_0}/\mathcal{R}$. Por esse motivo, Θ também é chamada *métrica projetiva.*

Observação: Notemos que

$$\Theta(v_1, v_2) := \log \frac{\inf\{t > 0; tv_1 - v_2 \in C\}}{\sup\{t > 0; v_2 - tv_1 \in C\}} = \log \frac{\inf\{t > 0; tv_1 - v_2 \in C \cup \{0\}\}}{\sup\{t > 0; v_2 - tv_1 \in C \cup \{0\}\}} =$$

$$\log \frac{\inf\{t > 0; tv_1 \succeq v_2\}}{\sup\{t > 0; v_2 \succeq tv_1\}}.$$

É natural se perguntar sobre a relação entre a métrica projetiva e a métrica pré-existente em um espaço vetorial topológico metrizável; em geral depende do cone (ordem) a qual se está perguntando, a próxima proposição nos dá um resultado nesse sentido sob uma certa uma hipótese.

Proposição A.1. *Seja E um espaço normado, $||\cdot||_i$ semi-normas sobre E para $i = 1,2$ e $\preceq$ uma ordem parcial que preserva sua estrutura de espaço vetorial e suponha que para todo $v, u \in C$ temos:*

$$-v \preceq u \preceq v \Rightarrow ||u||_i \leq ||v||_i, i = 1,2.$$

Então; dados $f, g \in C$, com $||f||_1 = ||g||_1$ teremos:

$$||f - g||_2 \leq (e^{\Theta(f,g)} - 1)||f||_2.$$

Prova. Sejam $f, g \in C$, com $||f||_1 = ||g||_1$. Se $\Theta(f,g) = +\infty$ teremos a desigualdade requerida, suponhamos então que $\Theta(f,g) < +\infty$. Seja $A := \sup\{t > 0; g - tf \in C\}$ e $B := \inf\{t > 0; tf - g \in C\}$; logo $Af \preceq g \preceq Bf$, e assim $-g \preceq 0 \preceq Af \preceq g$ e $-Bf \preceq g \preceq Bf$, desse modo $A||f||_1 \leq ||g||_1$ e $||g||_1 \leq B||f||_1$. Como $||f||_1 = ||g||_1$, por hipótese, teremos $A \leq 1$ e $B \geq 1$ e assim:

$$-(B - A)f \preceq (A - 1)f \preceq g - f \preceq (B - 1)f \preceq (B - A)f,$$

usando mais uma vez nossa hipótese teremos:

$$||g - f||_2 \leq (B - A)||f||_2 \leq \frac{B - A}{A}||f||_2 = (e^{\Theta(f,g)} - 1)||f||_2.$$

■

Corolário A.2. *Seja E um espaço normado, $||\cdot||_i$ semi-normas sobre E para $i = 1,2$ e $\preceq$ uma ordem parcial que preserva sua estrutura de espaço vetorial e suponha que para todo $v, u \in C$ temos:*

$$-v \preceq u \preceq v \Rightarrow ||u||_i \leq ||v||_i, i = 1,2.$$

Se $w_n \xrightarrow{\Theta} w$ e $||w||_1 = ||w_n||_1$, então $w_n \xrightarrow{||\cdot||_2} w$.

Prova. Pela proposição anterior $||w_n - w||_2 \leq (e^{\Theta(w_n,w)} - 1)||w||_2$, como $w_n \xrightarrow{\Theta} w$ teremos que $w_n \xrightarrow{||\cdot||_2} w$. ■

Exemplo A.3. *E_+ será um cone nos termos apresentados anteriormente; e para $\varphi_1, \varphi_2 \in C_+$ teremos:*

$$\alpha(\varphi_1, \varphi_2) := \sup\{t > 0 : (\varphi_2 - t\varphi_1)(x) > 0, \forall x \in X\} = \inf \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$$

e

$$\beta(\varphi_1, \varphi_2) = \sup \frac{\varphi_2}{\varphi_1}.$$

Desse modo

$$\Theta_+(\varphi_1, \varphi_2) = \log \frac{\sup(\varphi_2/\varphi_1)}{\inf \varphi_2/\varphi_1} = \log \sup \Big\{ \frac{\varphi_2(x)\varphi_1(y)}{\varphi_1(x)\varphi_2(y)} : x, y \in M \Big\}.$$

Esse cone tem a importante propriedade de completude, ou seja, se $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência em E_+ que é Cauchy em relação a Θ_+ então $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ é Θ_+ convergente em E_+ (para prova veja [Vi97], página 24). Seja $\varphi \in E_+$ tal limite então aplicando o corolário anterior teremos que $(\frac{\sup \varphi}{\sup \varphi_n} \cdot \varphi_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência em C_+ que converge uniformemente a φ.

Exemplo A.4. *Para cada $\kappa_1, \ldots, \kappa_r > 0$ temos que $C(\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$ será um cone nos termos apresentados anteriormente.*

Sejam E_1, E_2 espaços vetoriais, $C_i \subset E_i, i = 1, 2$, cones e $L : E_1 \to E_2$ um operador linear tal que $L(C_1) \subset C_2$; então:

- $\alpha_1(u, v) \leq \alpha_2(L(u), L(v))$
- $\beta_1(u, v) \geq \beta_2(L(u), L(v))$.

Desse modo, $\Theta_2(L(u), L(v)) \leq \Theta_1(u, v), \forall\, u, v \in C_1$. Assim $L_{|C_1}$ é Lipschitz, a princípio, não necessariamente uma contração; a próxima teorema nos mostrará que sob uma hipótese muito razoável (diâmetro de $L(C_1)$ finito) $L_{|C_1}$ é uma contração, sua constante de Lipschitz é diretamente proporcional ao diâmetro e converge exponencialmente rápido para 0 quando o diâmetro diminui.

Teorema A.5. *Seja $D := \sup\{\Theta_2(L(u), L(v)) : u, v \in C_1\}$. Se $D < +\infty$ então:*

$$\Theta_2(L(u), L(v)) \leq (1 - e^{-D})\Theta_1(u, v), \forall\, u, v \in C_1.$$

Prova. Veja [Vi97], página 18. ∎

Essa teoria de cones e métricas projetivas é frequentemente utilizada no estudo de decaimento de correlações; o método é encontrar um cone invariante pelo operador de

Ruelle-Perron-Frobenius que tenho diâmetro finito e que tenha uma certa propriedade de completude, através desse cone encontramos propriedades sobre o espectro do operador e daí pode derivar o decaimento de correlações.

A primeira sistematização desta técnica foi feita por Birkhoff em [Bir57], onde foi aplicada no estudo de cadeias de Markov e de certos operadores integrais.

Apêndice B

Esperança condicional e Teorema de Gordin

Essa seção tem por objetivo apresentar o teorema de Gordin que é extremamente útil na prova de teoremas centrais do limite.

Ao longo dessa seção $(X, \mathcal{A}, \mu)$ será um espaço de medida fixado.

Definição B.1 (Esperança condicional)**.** *Seja $\varphi : X \to \mathbb{R} \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ uma $\sigma-$álgebra de X. A esperança condicional $\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B})$ de φ com respeito a $\mathcal{B}$ é a derivada de Radon-Nikodym da medida μ_φ, definida por*

$$\mu_\varphi(B) := \int_B \varphi d\mu, \ \forall B \in \mathcal{B},$$

em relação a restrição de μ para $\mathcal{B}$. Em outras palavras: $\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B})$ é a única, a menos de um conjunto de medida nula pertencente a $\mathcal{B}$, função $\mathcal{B}-$mensurável satisfazendo

$$\int_B \varphi d\mu = \int_B \mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B}) d\mu, \ \forall B \in \mathcal{B}.$$

Como tomamos φ integrável em relação a μ, então sempre existe $\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B})$. A esperança condicional de φ com respeito a $\mathcal{B}$ pode ser interpretada como o representante de φ nos $\mathcal{B}-$mensuráveis.

A definição de $\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B})$ foi feita via teoria da medida, porém, veremos que quando φ é quadrado integrável em relação a μ podemos enxergar $\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B})$ sob um prisma de análise funcional.

Proposição B.2. *Seja $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ uma $\sigma-$álgebra de X. Então; $L^2(X, \mathcal{A}, \mu) = L^2(X, \mathcal{B}, \mu) \oplus L^2(X, \mathcal{B}, \mu)^\perp$ e*

$$\mathbb{E} : L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \xrightarrow[\varphi \to \mathbb{E}(\varphi|\mathcal{B})]{} L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$$

é a projeção ortogonal em relação a $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Prova. Veja [BDV05], página 345. ■

Teorema B.3 (Gordin). *Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de probabilidade, $f : X \to X$ mensurável, μ $f-$ergódica e $\varphi \in L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ tal que $\int \varphi dm = 0$. Seja $\mathcal{F}_n$ a sequência não-decrescente de $\sigma-$álgebras $\mathcal{F}_n = f^{-n}(\mathcal{F}), n \geq 0$. Se*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||E(\varphi|\mathcal{F}_n)||_2 < \infty,$$

então $\sigma \geq 0$ dado por

$$\sigma^2 = \int \varphi^2 d\mu + 2\sum_{n=0}^{\infty} \int \varphi(\varphi \circ f^n) d\mu$$

é finito e $\sigma = 0$ se, e somente se, $\varphi = u \circ f - u$ para alguma $u \in L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$. Ademais; se $\sigma > 0$ então, dado uma intervalo $A \subset \mathbb{R}$:

$$\mu(\{x \in X : \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) \in A\}) \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_A e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Prova. Veja [Vi97], página 29. ■

Definição B.4 (Medida exata). *Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço mensurável, $f : X \to X$ mensurável. Uma medida μ $f-$invariante é dita exata se a $\sigma-$álgebra*

$$\mathcal{F}_\infty := \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$$

é $\mu-$trivial, ou seja, todas as funções $\mathcal{F}_\infty-$mensuráveis são constantes $\mu-$q.t.p..

Uma medida exata é ergódica para todos os iterados da dinâmica.

A próxima proposição nos dirá como funções $\mathcal{F}_\infty-$mensuráveis podem ser vistas através de funções mensuráveis.

Proposição B.5. *Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço mensurável, $f : X \to X$ mensurável. Uma função $\xi : M \to \mathbb{R}$ é $\mathcal{F}_n-$mensurável se, e somente se, $\xi = \xi_n \circ f^n$ para alguma ξ_n mensurável.*

Prova. Veja [Vi97], página 27. ■

Apêndice C

Pressão topológica relativa usando bolas dinâmicas

Nessa seção descreveremos a noção de pressão topológica para potenciais assintoticamente aditivos e não necessariamente invariantes e compactos.

Seja M um espaço métrico compacto, $f : M \to M$ uma aplicação contínua e $\Phi = \{\phi_n\}_n$ uma sequência de potenciais contínuos assintoticamente aditiva. A *bola dinâmica* de centro $x \in M$, raio $\delta > 0$, e comprimento $n \geq 1$ é definida por

$$B_n(x, \delta) := \{y \in M : d(f^j(y), f^j(x)) \leq \delta, \forall 0 \leq j \leq n\}.$$

Seja $\Lambda \subset M$, fixe $\epsilon > 0$. Defina $\mathcal{I}_n = M \times \{n\}$ e $\mathcal{I} = M \times \mathbb{N}$. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $N \geq 1$, defina

$$m_\alpha(f, \Phi, \Lambda, \epsilon, N) := \inf_{\mathcal{G}} \Big\{ \sum_{(x,n) \in \mathcal{G}} e^{-\alpha n + \phi_n(x)} \Big\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as famílias finitas ou enumeráveis $\mathcal{G} \subset \cup_{n \geq N} \mathcal{I}_n$ tais que a coleção dos conjuntos $\{B(x, n, \epsilon) : (x, n) \in \mathcal{G}\}$ cobrem Λ. Então, seja

$$m_\alpha(f, \Phi, \Lambda, \epsilon) := \lim_{N \to +\infty} m_\alpha(f, \Phi, \Lambda, \epsilon, N)$$

(a sequência é monótona crescente) e

$$P_\Lambda(f, \Phi, \epsilon) := \inf\{\alpha : m_\alpha(f, \Phi, \Lambda, \epsilon) = 0\} = \sup\{\alpha : m_\alpha(f, \Phi, \Lambda, \epsilon) = +\infty\}.$$

Como mencionado no trabalho de Cao, Zhang e Zhao [CZZ11], existe o limite quando $\epsilon \to 0$ e ele é definido como a *pressão relativa* de Λ:

$$P_\Lambda(f, \Phi) = \lim_{\epsilon \to 0} P_\Lambda(f, \Phi, \epsilon).$$

Se $\Lambda = M$ temos que $P_\Lambda(f, \Phi)$ é definido como pressão topológica de f com respeito a Φ e denotado por $P_{\text{top}}(f, \Phi)$.

Quando tomamos um potencial contínuo ϕ temos que $P_\Lambda(f,\{\phi_n\}_n)$, para $\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1}\phi\circ f^i$, é igual a pressão usual de Λ com respeito a f e ϕ.

Decorre da definição de pressão relativa que se $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset M$ teremos que $P_{\Lambda_1}(f,\Phi) \leq P_{\Lambda_2}(f,\Phi)$.

No contexto assintoticamente aditivo também teremos o princípio variacional para pressão.

Proposição C.1. *Seja M espaço métrico compacto, $f : M \to M$ contínuo e $\Phi = \{\phi_n\}$ um sequência de potencias assintoticamente aditiva. Então*

$$P_{\text{top}}(f,\Phi) = \sup\{h_\mu(f)+\mathcal{F}_*(\mu,\Phi) : \mu \textit{ é uma probabilidade } f\textit{-invariante, } \mathcal{F}_*(\mu,\Phi) \neq -\infty\},$$

onde o supremo é tomado sobre todas probabilidades $f-$invariantes μ e $\mathcal{F}_*(\mu,\Phi) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int\phi_n d\mu$.

Prova. Veja [FH10]. ■

Se uma probabilidade atinge o sup dizemos que ela é um *estado de equilíbrio* de f com respeito a Φ.

Referências

[ABV00] J. F. Alves, C. Bonatti, and M. Viana. SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding. *Invent. Math.*, 140:351–398, 2000.

[AFLV11] J. Alves, J. Freitas e S. Luzzatto. From rates of mixing to recurrence times via large deviations. *Advances in Mathematics*, 228(2), 1203-1236, 2011.

[AP06] V. Araújo e M.J. Pacífico. Large deviations for non-uniformly expanding maps. *J. Statist. Phys.*, 125:415–457, 2006.

[AM06] A. Arbieto e C. Matheus. Fast decay of correlations of equilibrium states of open classes of non-uniformly expanding maps and potentials. *preprint http://www.preprint.impa.br*, 2006.

[Bal00] V. Baladi. Positive transfer operators and decay of correlations. *World Scientific Publishing Co. Inc.*, 2000.

[BaS08] V. Baladi e D. Smania. Linear response formula for piecewise expanding unimodal maps. *Nonlinearity*, 21: 677-711, 2008.

[BaS10] V. Baladi e D. Smania. Linear response for smooth deformations of generic nonuniformly hyperbolic unimodal maps. *Annales scientifiques de l'ENS*, 45(6), 861-926, 2012.

[BCH10] J. Ban, Y. Cao e H. Hu. The dimensions of non-conformal repeller and average conformal repeller. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362 : 727-751, 2010.

[BP01] L. Barreira e Y. Pesin. Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory. *American Mathematical Society*, University Lecture Series 23, 2001.

[Ba06] L. Barreira. Nonadditive thermodynamic formalism: equilibrium and Gibbs measures. *Disc. Contin. Dyn. Syst.*, 16 : 279-305, 2006.

[BG06] L. Barreira e K. Gelfert. Multifractal analysis for Lyapunov exponents on nonconformal repellers. *Commun. Math. Phys.*, 267: 393–418, 2006.

[BD09] L. Barreira e P. Doutor. Almost additive multifractal analysis. *Jour. de Math. Pur. et Appl.*, 92 (1), 1-17, 2009.

[Ba10] L. Barreira. Almost additive thermodynamic formalism: some recent developments. *Rev. Math. Phys.*, 22, 1147, 2010.

[BC85] M. Benedicks and L. Carleson. On iterations of $1 - ax^2$ on $(-1, 1)$. *Annals of Math.*, 122:1–25, 1985.

[Bir57] G. Birkhoff. Extension of Jentzsch's theorem. *Trans. A.M.S.*, 85, 219-227, 1957.

[Blo83] A.M. Blokh. Decomposition of dynamical systems on an interval. *Russ. Math. Surv.*, 38, 133-134, 1983.

[BCV13] T. Bomfim, A. Castro e P. Varandas. Differentiability of thermodynamical quantities in non-uniformly expanding dynamics, *Preprint arXiv:1205.5361*, 2013.

[BV14] T. Bomfim e P. Varandas Multifractal analysis of irregular sets for weak Gibbs measures *Preprint arXiv:1405.2541*, 2014.

[BV14] T. Bomfim e P. Varandas Multifractal analysis of the irregular set for almost-additive sequences via large deviations. *Preprint arXiv:1410.2220*, 2014.

[BDV05] C. Bonatti, L. J. Díaz e M. Viana. Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, volume 102, Springer Verlag, 2005.

[Bow74] R. Bowen. Some systems with unique equilibrium states. *Math. Systems Theory* 8, 193 - 202, 1974.

[Bow75] R. Bowen. Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms. *Lect. Notes in Math.*, 470, Springer, 1975.

[BR75] R. Bowen e D. Ruelle. The ergodic theory of Axiom A flows. *Invent. Math.*, 29, no. 3, 181–202, 1975.

[BT09] H. Bruin and M. Todd. Equilibrium states for interval maps: the potential $-t \log |Df|$. *Ann. Sci. Ècole Norm. Sup.*, 4: 42, 559–600, 2009.

[CZZ11] Y. Cao, L. Zhang e Y. Zhao. The asymptotically additive topological pressure on the irregular set for asymptotically additive potentials. *Nonlinear Analysis* 74, 5015-5022, 2011.

[Cas02] A. Castro. Backward inducing and exponential decay of correlations for partially hyperbolic attractors. *Israel Journal of Mathematics*, v.130, 2002.

[Cas04] A. Castro, Fast mixing for attractors with mostly contracting central direction, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **24** (2004), 17-44.

[CV13] A. Castro e P. Varandas. Equilibrium states for non-uniformly expanding maps: decay of correlations and strong stability. *Annales de l Institut Henri Poincaré - Analyse non Lineaire*, 30:2, 225–249, 2013.

[Cas13] Augusto Armando Castro JR.. Funções de operador e o estudo do espectro. *Publicações dos Colóquios de Matemática, 29º CBM*, Rio de Janeiro: IMPA, 138 p., 2013.

[CN14] A. Castro e T. Nascimento. Statistical properties of equilibrium states for partially hyperbolic attractors. *Preprint UFBA*, 2014.

[ZC13] E. Chen. e X. Zhou. Multifractal analysis for the historic set in topological dynamical systems. *Nonlinearity*, 26, no. 7, 1975–1997, 2013.

[CZ13] E. Chen. e X. Zhou. Multifractal Analysis of Ergodic Averages in Some Nonuniformly Hyperbolic Systems *Preprint Arxiv:1310.2348*, 2013

[Chu11] Y.M. Chung Large deviations on Markov towers. *Nonlinearity*, 24:1229–1252, 2011.

[CT12] Y.M. Chung e H. Takahasi. Large deviation principle for Benedicks-Carleson quadratic maps. *Comm. Math. Phys.*, 315 (2012), no. 3, 803–826.

[Cli10] V. Climenhaga Multifractal formalism derived from thermodynamics for general dynamical systems. *Electronic Research Announcements in Mathematical Sciences*, 17, 1-11, 2010.

[CTY13] V. Climenhaga, D. Thompson e K. Yamamoto. Large deviations for systems with non-uniform structure. *Preprint ArXiv:1304.5497*, 2013.

[CRL98] H. Comman e J. Rivera-Letelier. Large deviations principles for non-uniformly hyperbolic rational maps. *preprint*, 2008.

[DZ98] A. Dembo e O. Zeitouni. Large Deviation Techniques and Applications, Second Edition *Springer Verlag*, 1998.

[DK01] M. Denker e M. Kesseböhmer. Thermodynamical formalism, large deviation and multifractals. *Stochastic Climate Models, Progress in Probability*, 49, 159-169, 2001.

[DGR11] L. Díaz, K. Gelfert e M. Rams. Rich phase transitions in step skew products. *Nonlinearity*, 24, no. 12, 3391–3412, 2011.

[DG12] L. Díaz e K. Gelfert. Porcupine-like horseshoes: transitivity, Lyapunov spectrum, and phase transitions. *Fund. Math.*, 216, no. 1, 55–100, 2012.

[Dol04] D. Dolgopyat. On differentiability of SRB states for partially hyperbolic systems. *Invent. Math.*, 155, 389–449, 2004.

[DS58] Nelson Dunford e Jacob T. Schwartz. Linear operations. *Pure and applied mathematics. A series of tesets and monographs*, 7, New York: Interscience, v. 1, 1958.

[El85] R. Ellis. *Entropy, Large Deviation and Statistical Mechanics.* Springer Verlag, 1985.

[FL02] D.-J. Feng e K.-S. Lau. The pressure function for products of non-negative matrices. *Math. Res. Lett.*, 9 : 363-378, 2002.

[FH10] D. Feng e W. Huang. Lyapunov spectrum of asymptotically sub-additive potentials. *Commun. Math. Phys.*, 297: 1-43, 2010.

[FK11] D. Feng e A. Käenmäki. Equilibrium states of the pressure function for products of matrices. *Discrete Cont. Dyn. Sys.*, 30 (3) : 699 - 708, 2011.

[Fr79] J. Franks. *Manifolds of C^r Mappings and Applications to Differentiable Dynamical Systems.* Studies in Analysis. Advances in Mathematics Supplementary Studies, vol 4, pages 271– 290. Academic Press, 1979.

[GR] K. Gelfert e M. Rams. The Lyapunov spectrum of some parabolic systems. *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, 29 (3), 919-940, 2009.

[GL06] S. Gouezel e C. Liverani. Banach spaces adapted to Anosov systems Ergod. Th. & Dynam. Sys. , 26, 189–217, 2006.

[Hof77] F. Hofbauer. Examples for the nonuniqueness of the equilibrium state *Trans. Amer. Math. Soc.*, 228, 223–241, 1977.

[He93] H. Hennion. Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipchitziens Proc. Amer. Math. Soc., 118(2):627-634, 1993.

[JR] T. Jordan e M. Rams. Multifractal analysis of weak Gibbs measures for non-uniformly expanding C^1 maps. *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, 31 (1), 143-164, 2011.

[K95] Tosio Kato. Perturbation theory for linear operators. *Classics in mathematics*, Berlin: Springer, 619 p., 1995.

[KB95] A. Katok e B. Hasselblatt. Introduction to the modern theory of dynamical systems. *Encyclopedia of mathematics and its applications*, v. 54, New York: Cambridge University Press, 802 p., 1995.

[KN92] G. Keller e T. Nowicki. Spectral theory, zeta functions and the distribution of periodic points for Collet-Eckmann maps. *Comm. Math. Phys.*, 149:31–69, 1992.

[KRM12] V. Kleptsyn, D. Ryzhov e S. Minkov. Special ergodic theorems and dynamical large deviations. *Nonlinearity* 25, 3189-3196, 2012.

[LY73] A. Lasota e J.A. Yorke. On the Existence of Invariant Measures for Piecewise Monotonic Transformations. *Trans. of A.M.S.*, 186, 1973.

[Li95] C. Liverani. Decay of correlations, *Annals of Math.*, 142, 239–301, 1995.

[LSV98] C. Liverani, B. Saussol e S. Vaienti, Conformal measure and decay of correlation for covering weighted systems *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, 18:6, 1399-1420, 1998.

[Lo90] A. Lopes. Entropy and large deviation, *Nonlinearity*, 2, 527–546, 1990.

[MN08] I. Melbourne e M. Nicol. Large deviations for nonuniformly hyperbolic systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 360:6661–6676, 2008.

[Mel09] I. Melbourne. Large and moderate deviations for slowly mixing dynamical systems. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137:1735–1741, 2009.

[Mum06] A. Mummert. The thermodynamic formalism for almost-additive sequences. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 16 : 435-454, 2006.

[Oli12] K. Oliveira. Every expanding measure has the nonuniform specification property. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 140, 1309-1320, 2012.

[PP90] W. Parry e M. Pollicott. Zeta functions and closed orbits for hyperbolic systems. *Asterisque*, (Societe Mathematique de France), 187-188, 1990.

[Pes97] Ya. Pesin. Dimension theory in dynamical systems. *University of Chicago Press*, Contemporary views and applications, 1997.

[PW97] Y. Pesin e H. Weiss. The multifractal analysis of Gibbs measures: Motivation, mathematical foundation, and examples. *Chaos*, 7(1):89–106, 1997.

[PW01] Y. Pesin e H. Weiss. The multifractal analysis of Birkhoff averages and large deviations. In H. Broer, B. Krauskopf, and G. Vegter, editors, *Global Analysis of Dynamical Systems*, Bristol, UK, 2001.

[PS05] C. Pfister and W. Sullivan. Large deviations estimates for dynamical systems without the specification property. Applications to the β-shifts. *Nonlinearity*, 18 (2005) 237-261.

[PS09] M. Pollicott and R. Sharp. Large deviations for intermittent maps. *Nonlinearity*, 22, 2079–2092 (2009).

[PW99] M. Pollicott e H. Weiss. Multifractal Analysis of Lyapunov Exponent for Continued Fraction and Manneville-Pomeau Transformations and Applications to Diophantine Approximation. *Commun. Math. Phys.*, 207, 145 –171 (1999).

[PU10] Feliks Przytycki e Mariusz Urbanski. Conformal fractals: ergodic theory methods. *London Mathematical Society lecture note series*, 371, New York: Cambridge University Press, 354 p, 2010.

[RY08] L. Rey-Bellet e L.-S. Young. Large deviations in non-uniformly hyperbolic dynamical systems. *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, 28: 587-612, 2008.

[Rue89] D. Ruelle. The Thermodynamic Formalism for Expanding Maps. *Commun. Math. Phys.*, 125, 239-262, 1989.

[Ru92] D. Ruelle. Thermodynamical formalism for maps satisfying positive expansiveness and specification. *Nonlinearity*, 5, 1223–1236 (1992).

[Rue97] D. Ruelle. Differentiation of SRB states. *Comm. Math. Phys.*, 187, 227–241, 1997.

[Rue03] D. Ruelle. Correction and complements. *Commun. Math. Phys.*, 234, 185-90, 2003.

[Rue09] D. Ruelle. A review of linear response theory for general differentiable dynamical systems. *Nonlinearity*, 22, 855–870,2009.

[Sar99] O. Sarig. Thermodynamic formalism for countable Markov shifts. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 19:1565–1593, 1999.

[Shu] L. Shu. The multifractal analysis of Birkhoff averages for conformal repellers under random perturbations. *Monatsh Math*, 159:81–113, 2010.

[Sin72] Ya. Sinai. Gibbs measures in ergodic theory. *Russian Math. Surveys*, 27:21–69, 1972.

[TV99] Floris Takens e Evgeny Verbitski. Multifractal analysis of local entropies for expansive homeomorphisms with specification. *Comm. Math. Phys.*, 203:593–612, 1999.

[Tho09] D. Thompson. A variational principle for topological pressure for certain non-compact sets. *J. London Math. Soc.*, 80 (3) : 585 - 602, 2009.

[Tho10] D. Thompson. The irregular set for maps with the specification property has full topological pressure. *Dyn. Syst.*, v. 25, no. 1, p. 25-51, 2010.

[T] M. Todd. Multifractal analysis for multimodal maps. *Preprint Arxiv*, 2008.

[VV10] P. Varandas e M. Viana. Existence, uniqueness and stability of equilibrium states for non-uniformly expanding maps. *Annales de l'Institut Henri Poincaré- Analyse Non-Linéaire*, 27, 555-593, 2010.

[Var12] P. Varandas. Non-uniform specification and large deviations for weak Gibbs measures. *Journal of Stat. Phys.*, 146, 330–358, 2012.

[VZ13] P. Varandas e Y. Zhao. Weak specification properties and large deviations for non-additive potentials. *Ergodic Theory and Dynamical Systems (Print)*, v. 33, p. 1-26, 2013.

[Vi97] M. Viana. Stochastic dynamics of deterministic systems, *Colóquio Brasileiro de Matemática*, 1997.

[You90] L.-S. Young. Some large deviations results for dynamical systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 318: 525-543, 1990.

[You98] L.-S. Young. Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity. *Ann. of Math.*, 147, no. 3, 585D-650, 1998.

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA
CEP: 40170 -110
<http://www.pgmat.ufba.br>