Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Tese de Doutorado

Aplicações Markovianas Induzidas para Medidas Parcialmente Hiperbólicas

Katia Silene Ferreira Lima Rocha

Salvador-Bahia
Junho de 2015

Aplicações Markovianas Induzidas para Medidas Parcialmente Hiperbólicas

Katia Silene Ferreira Lima Rocha

Tese de Doutorado apresentada ao Colegiado do Programa de Doutorado em Matemática em Associação UFBA/UFAL, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro.

Salvador-Bahia
Junho de 2015

Rocha, Katia Silene Ferreira Lima.

Aplicações Markovianas Induzidas para Medidas Parcialmente Hiperbólicas / Katia Silene Ferreira Lima Rocha. – Salvador: UFBA, 2015.

53 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro.

Tese (doutorado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2015.

Referências bibliográficas.

1. Aplicações Markovianas. Parcialmente Hiperbolico. 2. Difeomorfismo. 3. Hiperbolicidade Fraca. I. Pinheiro, Vilton Jeovan Viana. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 519.218.84

Aplicações Markovianas Induzidas para Medidas Parcialmente Hiperbólicas

Katia Silene Ferreira Lima RochA

Tese de Doutorado apresentada ao Colegiado do Programa de Doutorado em Matemática em Associação UFBA/UFAL, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática, aprovada em 09 de Junho de 2015.

Salvador-Bahia

Junho de 2015

Banca examinadora:

Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro (Orientador)
UFBA

Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Luciana Silva Salgado
UFBA

Prof. Dr. Vitor Domingos Martins de Araújo
UFBA

Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Isabel Lugão Rios.
UFF

Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Maria José Pacífico.
UFRJ

Salvador-Bahia
Junho de 2015

À minha pequena Sophie

Agradecimentos

Durante esses quatro anos foram vários sentimentos e vibrações que tornaram possível esta tese. Por essa razão, reservo esse texto para não somente agradecer a todos que me ajudaram neste novo projeto, quero trazer para dentro do meu texto aqueles que já o percorreram nas entrelinhas.

A Deus, por me amparar nos momentos difíceis e me proporcionar paz e força interior para superar diculdades.

A CAPES, pela bolsa concedida durante os quatro anos de curso.

Aos professores ainda em Seabra. Em especial a Dourilé Nunes, Efigênia, Maria José, Nelson e Zilda Paiva.

Ao primo Warner José pelo apoio na chegada em Feira.

Aos meus colegas, amigos e professores de trabalho da UEFS, pela torcida. Em especial a Marcos Grilo Rosa, Neima, Claudiano Goulart, João Cardeal, Fabíola, Joílma, Jean Fernanes, Hildete e Cristiano Mascarenhas.

A Wagner Rocha e Cíntia pelo abrigo durante o primeiro verão e semestres seguintes, e a Didi pelo apoio.

A tia Nilza e tia Zélia pelo cuidado diário.

Aos colegas e amigos do programa de pós graduação UFBA-UFAL. Em especial a Francisleide Pires, Renivaldo Sena, Elaís Malheiro, Márcia Graci, Luiz Alberto, Thiago Bomfim, Giovane Ferreira, Roberto Sacramento, Fellipe Antônio, Aubedir Seixas, Andressa Lima, Ângela Soldatelli, Marcus Morro, Anderson Reis, Antonio Teófilo, Alejandra e Elen.

A todos os funcionários do IM-UFBA, pela disposição e profissionalismo. Em especial a Dona Tânia, Dona Zezé, Davilene, Márcio, Gustavo, Kleber e Solange.

A todos os professores do IM-UFBA. Em especial a Enaldo Vergasta, por ter me acolhido de bracos abertos, Taíse Santiago, que por muitas vezes foi muito além de professora, obrigada pelo carinho e conselhos.

A todos os professores da PGMAT do IM-UFBA. Em especial a Paulo Varandas, por ter me ensinado a arte de pensar o trabalho acadêmico com rigor e disciplina, e pelo encorajamento em todas as fases. A Vitor Araújo seus aconselhamentos, sugestões e manuscritos levaram a sucessivas revisões. A Armando Castro, um exemplo de profissional a ser seguido. Diego Catalano pela simpatia e solicitude com que sempre me atendeu.

A Vilton Pinheiro, por ter aceitado o desafio da orientação e que rapidamente me encaminhou para o problema tratado nesta tese, obrigada pela disponibilidade revelada desde o início, entusiasmo, encorajamento, puxões de orelha e experiências acadêmicas que pude vivenciar durante estes dois anos de orientação. Sua dedicação me fez um prossional diferente.

Aos Professores Vitor Araújo, Maria José Pacífico, Isabel Lugão e Luciana Salgado por aceitarem participar da comissão julgadora da tese, pelas correções e sugestões para o texto.

A meu Pai que cedo partiu deixando órfãs paginas de minha vida.

A minha Mãe de uma forma muito carinhosa, pelo cuidado diário, ensinamentos, apoio e amor.

A Neva, minha sempre Cunhada/irmã pelo carinho e inestimavel apoio familiar. Aos meus sobrinhos pela ternura sempre presente apesar do débito de atenção e muitas vezes falta de paciência, fruto do desgaste diario.

A “Cheiro”, pois a crença absoluta na minha capacidade de realização deste foram elementos propulsores. Nesta trajetoria soube compreender como ninguém as fases pelas quais eu estava passando, e as falhas que fui tendo por força da circunstância, sempre tentando entender minhas diculdades, ausência, e sempre encontrando um jeitinho único de se fazer pai e mãe para suprir vários momentos.

A minha pequena Sophie, a quem dedido este trabalho, pois sem entender tudo que se passava me apoiava... em sorriso sincero, em abraço apertado e em vários até logo fáceis.

"A distância entre o sonho e a conquista chama-se atitude"

Nick Vujicic.

Resumo

Em [1] foi mostrado a existência de medidas S.R.B suportadas em um conjunto parcialmente hiperbólico - O espaço tangente é decomposto em dois subfibrados invariantes, um dos quais é uniformemente contrativo, enquanto que o seu complementar é não uniformemente expansor. Já em [10] foi proposta uma construção geral de uma estrutura de Markov Induzida para transformações não uniformemente expansoras; esta estrutura foi usada para provar a existência de medidas invariantes e ergódicas absolutamente contínuas com respeito a qualquer medida de referência expansora cujo jacobiano satisfaz uma condição de distorção. Em [14] a partir de uma estrutura hiperbólica e no contexto de [1] são provadas propriedades estatisticas e existência de medidas SRB.

Neste trabalho construímos uma Partição Markoviana Induzida com relação aos iterados da dinâmica f no contexto do artigo [1]; associada a esta Partição mostramos a existência de um mapa induzido $F(x) = f^{R(x)}(x)$, denominada Aplicação Markoviana Induzida com um limite apropriado no tempo de indução. Dada qualquer medida de referência μ com um controle de distorção na direção centro-instável, que dá peso positivo a um conjunto não uniformemente expansor, usamos a Partição Markoviana Induzida para provar a existência de medidas invariantes e ergódicas absolutamente contínuas com respeito a μ, assim como em [14], visto que esta estrutura equivale a estrutura produto definida no mesmo artigo , ver definição 1.3.7 . Já quando a medida de referência μ é invariante e ergódica, mostramos a existência de medida invariante para a aplicação induzida com tempo de retorno integrável, como em [10] para o contexto de medidas expansoras.

Palavras-chave: Medidas Invariantes absolutamente contínuas com respeito a medida de referência não necessariamente Lebesgue; Difeomorfismo; Hiperbolicidade Parcial; Mapa Induzido e Estutura de Markov.

Abstract

In [1] it was shown the existence of SRB measures supported in a partially hyperbolic set - The tangent space is decomposed into two subfibrados invariant, one of which is uniformly contractive while its complementary is not uniformly expander. In [10] it proposed a general construction of a Markov Induced structure for processing non-uniformly expander; This structure was used to prove the existence of invariant and ergodic absolutely continuous measures to any arrangement for expander reference whose Jacobian satisfies a distortion condition. In [14] from a hyperbolic structure and context [1] are statistical properties and proved existence of SRB measures.

We construct a Markov Induced Partition regarding the iterated the dynamics f in the context of Article [1]; associated with this partition we showed the existence of an inducible map $F(x) = f^{R(x)}(x)$ called Map Markov induced with an appropriate limit on the induction time. Given any reference measured with a distortion control that gives positive weight to a set non-uniform expanding, we use this Markov Induced Partition to prove the existence of absolutely continuous invariant and ergodic measures to μ. As well as in [14], since this structure equivalent to the structure defined in the same product, see 1.3.7. But when the reference measure μ is invariant and ergodic, we showed the existence of invariant measure for applying induced with integrable return time, as in [10] to the context of expanding measures.

Keywords: ; Invariant Measures absolutely continuous with respect to reference measures which are not necessarily Lebesgue;Diffeomorphism; Partial Hyperbolicity; Induced Map and Markov Estructure.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, no contexto de hiperbolicidade parcial como no artigo [1], propomos uma construção geral de uma estrutura de Markov Induzida para transformações em tempo discreto não uniformemente hiperbólicas. Uma característica distintiva desta estrutura é que ela captura as trajetórias com comportamento de expansão na direção centro instável. Este passo é natural visto que, desde o final dos anos 60 e 70, Sinai, Ruelle e Bowen já usavam a partição de Markov e Dinâmica Simbólica de Sistemas Uniformemente Hiperbólicos para deduzir propriedades estatísticas de tais sistemas, ver [5, 12, 13]. Tal técnica consiste em substituir o sistema dinâmico inicial por outro mais fácil de entender e de onde se pode recuperar muito mais informações sobre o sistema inicial. Recordamos que uma Partição de Markov para uma aplicação $f : \Lambda \to \Lambda$ definido em um conjunto uniformemente hiperbólico Λ é uma cobertura $\mathcal{P} = \{R_1, \dots, R_s\}$ de Λ satisfazendo

1. $intR_i \cap intR_j = \emptyset$ para $i \neq j$;
2. $f(W^u(x, R_i)) \supset W^u(f(x), R_j)$ e $f(W^s((x), R_i)) \subset W^s(f(x), R_j)$ onde $x \in intR_i$, $f(x) \in intR_j$ e $W^k(x, R) = W^k(x) \cap R \; k \in \{s, u\}$.

Para o estudo de sistemas além dos uniformemente hiperbólicos, Young usou a partição de Markov para construir as denominadas torres de Young em sistemas com hiperbolicidade não uniforme, ver [14, 15], que podem ser entendidas como uma generalização das partições de Markov. Sob essas torres, Young mostrou a existência de medidas SRB. Como essa estrutura geométrica é o ponto de partida para obter propriedades que implicam existência de estados Gibbs, hoje em dia esta é referida em alguns trabalhos como uma estrutura tipo Gibbs-Markov-Young (GMY). Tal estrutura produto, denominada estrutura produto - Torres de Young, (ver definição1.3.7), é caracterizada por uma região adequada do espaço de fase, particionada em subconjuntos (partição possivelmente infinita) cada um dos quais com um determinado tempo de retorno. Comparando-se com as partições de Markov clássicas, temos que a principal diferença é quanto à possibilidade de tempos de retorno arbitrariamente grandes. Isto é indispensável no contexto de hiperbolicidade não uniforme, em que grandes tempos de espera são necessários para atingir boas taxas de expansão na direção centro-instável de alguns pontos.

Em [1] Alves, Bonatti e Viana consideraram atratores parcialmente hiperbólicos com direção centro-instável não uniformemente expansora, isto é, o espaço tangente é decomposto em subfibrados E^{cu} e E^s tais que $TM = E^{cu} \oplus E^s$, com direção E^s uniformemente contrativa e direção E^{cu} não uniformemente expansora. Eles construiram medidas Sinai-Ruelle-Bowen (SRB) suportadas em tais atratores. Em [4] Alves e Pinheiro obtiveram uma estrutura produto - Torres de Young e, além disso, o decaimento de correlação da função tempo de retorno pode ser controlado em termos de quanto tempo os pontos típicos precisam para alcançar algum tipo de expansão na direção centro instável.

Pinheiro, por sua vez, em [10] propõe uma construção geral de uma estrutura Induzida de Markov para transformações não uniformemente expansoras, e com esta estrutura é capaz de mostrar a existência de medidas invariantes ergódicas absolutamente contínuas com relação a qualquer medida de referência expansora com algum controle do Jacobiano e, em especial, quando a medida de referência é a medida de Lebesgue, isto resulta na medida física da transformação. Tal trabalho aprofunda o desenvolvimento da teoria ergódica desta classe de sistemas.

Neste contexto, o presente trabalho dá uma continuidade ao desenvolvimento da teoria ergódica da classe de sistemas não uniformemente hiperbólicos. Para isto, mostramos a existência de uma aplicação markoviana induzida no contexto do artigo [1] que corresponde à estrutura hiperbólica de [14], quando a medida de referência não é necessariamente invariante (por exemplo, medida de Lebesgue) e satisfaz uma condição de controle de distorção, conclui-se a existência de medidas invariantes absolutamente contínuas com respeito à medida de referência. Além disso, se a medida de referência é invariante e ergódica, mostramos a existência de medidas invariantes para a aplicação induzida com tempo de retorno integrável. Os principais resultados deste trabalho são:

Teorema A. Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo C^{1+}, $K \subset M$ um conjunto compacto positivamente invariante em que f é parcialmente hiperbólico, $T_kM = E^{cs} \oplus E^{cu}$ onde E^{cs} é uniformemente contrativo . Assuma que f é não-uniformemente expansor ao longo de direção centro-instável (NUE-E^{cu}), isto é

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \log \| Df^{-1} |_{E^{cu}_{f^j(x)}} \|^{-1} > 0$$

para todo ponto x em um conjunto $H \subseteq K$ de medida μ positiva. Se μ é uma medida $f-$invariante e ergódica, então existe uma aplicação Markoviana Induzida $(F, \mathcal{P})$ definido em um aberto $Y \subset K$ e uma medida ν $F-$invariante tal que $\nu(B) \leq \mu(B)$ para todo conjunto aberto $B \subset Y$ e tal que $\int R d\nu < \infty$, onde R é tempo de indução de F.

Teorema B. Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo C^{1+}, $K \subset M$ um conjunto compacto positivamente invariante em que f é parcialmente hiperbólico, $T_kM = E^{cs} \oplus E^{cu}$ onde E^{cs} é uniformemente contrativo. Assuma que f é *NUE-E^{cu}* para todo ponto x em um conjunto $H \subseteq K$ de medida μ positiva. Se μ tem controle de distorção na direção centro-instável, então existe uma coleção de medidas $f-$invariantes ergódicas ν_s absolutamente contínuas com respeito a μ tais que $\mu-$quase todo ponto $x \in K$ pertence à bacia de uma destas medidas de probabilidade.

O primeiro capítulo está organizado em quatro seções. Na primeira apresentamos as principais definições no contexto de conjuntos Parcialmente Hiperbólicos; na segunda seção recordamos algumas definições e resultados em tempos hiperbólicos provados em [1, 3]. Estes resultados assumidos aqui, visto que, se a medida de referência não é necessariamente invariante e ergódica, estamos sob a hipótese de controle de distorção, hipótese necessária para alguns destes resultados. Na terceira seção, definimos a estrutura produto Torres de Young, pois a estrutura construída aqui satisfaz a esta estrutura produto. Na quarta e última seção definimos o nosso conceito de Estrutura Markoviana Induzida.

Já o segundo capítulo está organizado em duas seções. Na primeira generalizamos a construção de conjuntos "Nested" proposto por Pinheiro em [10] para a construção de conjuntos encaixados no contexto de hiperbolicidade parcial, adaptada a pré-imagens com algum tipo de contração em uma direção. Na segunda seção, sob a hipótese de controle de distorção, estudamos componentes u-ergódicas e mostramos a existência de atratores dentro de cada componente. Em contrapartida, e por resultados desta mesma seção, se a medida de referência é invariante e ergódica temos uma única componente, mostrando assim a existência de um único atrator, não necessariamente contendo um disco.

No terceiro capítulo provamos o Teorema A. Para isto, construímos uma Partição Markoviana Induzida com relação aos iterados da dinâmica f no contexto do artigo [1]; Associada a esta Partição mostramos a existência de uma aplicação induzida

$$F : \mathcal{C}(\Delta) \to \mathcal{C}(\Delta), \quad com \quad F(x) = f^{R(x)}(x)$$

para Δ um disco com direção centro-instável contida em cones centro-instáveis e $\mathcal{C}(\Delta) = \bigcup_{x\in\Delta} W^s_{\delta_s}(x)$ denominados aqui por Cilindros. A aplicação F é denominado Aplicação Markoviana Induzida com um limite apropriado no tempo de indução.

Para o quarto capítulo, reservamos a prova do Teorema B. Para isto mostramos que a Partição Markoviana definida no capítulo anterior satisfaz a estrutura produto definida pela Young em [14] , ver definição 1.3.7.

No quinto capítulo apresentamos exemplo de aplicações desta construção. No sexto e último capítulo apresentamos o direcionamento para possíveis trabalhos.

Capítulo 1

Definições e Resultados

Neste capítulo apresentamos resultados e definições fundamentais no contexto de sistemas parcialmente hiperbólicos, dentre eles tempos hiperbólicos, estrutura produto Torres de Young e estrutura Markoviana Induzida.

1.1 Sistemas Parcialmente Hiperbólicos

Seja M uma variedade Riemanianna compacta limitada e μ uma medida Riemanianna normalizada definida em conjuntos Borel de M. Dada uma subvariedade $\gamma \subset M$, μ_γ denota a medida μ em γ induzida pela restrição da estrutura Riemanianna para γ. Escrevemos $d(.,.)$ para denotar a distância entre dois pontos, $d_\gamma(.,.)$ a distância induzida em γ e *diam* para o diâmetro.

Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo C^{1+} em uma variedade Riemanianna de dimensão finita. Dizemos que f é C^{1+} se f é C^1 e Df é Holder contínuo. Um conjunto $K \subset M$ é dito invariante se $f(K) = K$ e positivamente invariante se $f(K) \subset K$.

Definição 1.1.1. Um subconjunto compacto positivamente invariante $K \subset M$ tem decomposição dominada, se existe decomposição contínua $Df-$invariante do subfibrado tangente $T_kM = E^{cs} \oplus E^{cu}$ e $0 < \beta < 1$ tais que (para alguma métrica Riemanianna $\| \, . \, \|$ em M)

$$\| Df \mid E^{cs}_x \| \, . \, \| Df^{-1} \mid E^{cu}_{f(x)} \| \leq \beta, x \in K$$

Chamamos E^{cs} de subfibrado centro-estável e E^{cu} de subfibrado centro-instável.

Definição 1.1.2. Um conjunto compacto invariante $K \subset M$ é chamado de parcialmente hiperbólico, se apresenta decomposição dominada $T_kM = E^{cs} \oplus E^{cu}$ tal que E^{cs} é uniformemente contrativo ou E^{cu} é uniformemente expansor, isto é, existe $0 < \beta < 1$ tal que (para alguma metrica Riemanianna $\| \, . \, \|$ em M)

$$\| Df \mid E^{cs}_x \| \leq \beta, \; ou, \; \| Df^{-1} \mid E^{cu}_{f(x)} \|^{-1} \leq \beta \; para \; x \in K$$

Neste trabalho consideramos Conjunto Parcialmente Hiperbólico no sentido do [1], em que a direção centro-estável é uniformemente contrativa e a direção centro-instavel é não-uniformemente expansora, a definir. A partir daqui denote E^{cs} por E^s.

Definição 1.1.3. Dado $\lambda > 0$, dizemos que f é não-uniformemente expansor em um ponto $x \in H$ na direção centro-instável, se para alguma métrica Riemanianna $\| \, . \, \|$ em M

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \| Df^{-1} \mid E^{cu}_{f^j(x)} \|^{-1} > \lambda \tag{1.1}$$

Nota 1.1.4. Se H satisfaz definição anterior, denotamos f em H por $NUE - E^{cu}$.

Definição 1.1.5. Chama-se bacia de uma medida invariante ν ao conjunto $\mathfrak{B}(\nu)$ de ponto de M tais que a média de Birkhoff ao longo da órbita de x converge na *topologia fraca** para ν , isto é

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x)) = \int \phi d\nu, \, \forall \phi \in C^0(M). \tag{1.2}$$

1.2 Resultados Preliminares

Nesta seção recordamos algumas definições e resultados, em tempos hiperbólicos, provados em [1, 3]. Vale ressaltar que estes resultados são assumidos aqui em abordagens de dois contextos diferentes. Se a medida de referência não é necessariamente invariante e ergódica, estamos sob a hipótese de controle de distorção e quando a medida de referência é invariante e ergódica tais resultados não serão usados. A hipótese de controle de distoção é desnecessária quando a medida de referência é Lebesgue, que é a medida assumida para a prova destes resultados.

Considere uma extensão de E^s e E^{cu}, não necessariamente Df invariante, para alguma vizinhança U de K, denotada respectivamente por $\tilde{E}^s$ e $\tilde{E}^{cu}$ que, por abuso de notação, continuaremos denotando por E^s e E^{cu} .

Definição 1.2.1. Dado $0 < a < 1$, um Campo de Cones centro-instável $C_a^{cu} = (C_a^{cu}(x))_{x \in U}$ de largura a é definido por

$$C_a^{cu}(x) = \{v_1 + v_2 \in E_x^s \oplus E_x^{cu} / \parallel v_1 \parallel \leq a \parallel v_2 \parallel\}.$$

O Campo de Cone estável $C_a^s = (C_a^s(x))_{x \in U}$ de largura a é definido similarmente por $C_a^s(x) = \{v_1 + v_2 \in E_x^s \oplus E_x^{cu} / \parallel v_2 \parallel \leq a \parallel v_1 \parallel\}$.

Fixe $a > 0$ e U vizinhança pequena tal que a condição de dominação (1) se verifica para todo ponto $x \in U \cap f^{-1}(U)$ e todo vetor tangente $v^s \in C_a^s(x)$, $v^{cu} \in C_a^{cu}(f(x))$:

$$\parallel Df(x)v^s \parallel . \parallel Df^{-1}(f(x))v^{cu} \parallel \leq \beta \parallel v^s \parallel \parallel v^{cu} \parallel .$$

Definição 1.2.2. Uma subvariedade C^1 mergulhada $\Delta \subset U$ é tangente ao Campo de Cone centro-instável, denominada $cu-$disco, se o subespaço tangente de Δ em cada ponto $x \in \Delta$ está contido no cone correspondente $C_a^{cu}(x)$, isto é $T_x\Delta \subset C_a^{cu}(x)$, para todo ponto $x \in \Delta$.

Nota 1.2.3. Se uma subvariedade L satisfaz a Definição 1.2.2, e $L \subset V$, então $f(L)$ é tangente a um Campo de Cone centro-instável, pela propriedade de dominação.

1.2.1 Tempos Hiperbólicos e Distorção Limitada

Nesta subseção definimos Tempos Hiperbólicos, que é a noção que permite deduzir a expansão e distorção uniforme da condição de não-uniformemente expansor na direção centro instável (NUE-E^{cu}), e suas consequências.

Definição 1.2.4. Dado $0 < \sigma < 1$, dizemos que n é tempo $\sigma-$hiperbólico para $x \in K$ se

$$\prod_{j=n-k+1}^{n} \parallel Df^{-1} \mid E_{f^j(x)}^{cu} \parallel \leq \sigma^k, \ 1 \leq k \leq n. \tag{1.3}$$

Para todo $n \geq 1$, denote

$$H_n(\sigma) = \{x \in K \ : \ n \, \acute{e} \, tempo \, \sigma - hiperb\acute{o}lico\}.$$

Nota 1.2.5. Dado $0 < \sigma < 1$ e $x \in H_n(\sigma)$, obtemos

$$\parallel Df^{-k} \mid E_{f^n(x)}^{cu} \parallel \leq \prod_{j=n-k+1}^{n} \parallel Df^{-1} \mid E_{f^j(x)}^{cu} \parallel \leq \sigma^k$$

Nota 1.2.6. Por continuidade o Campo de Cone centro-instável é positivamente invariante, isto é, $Df(x)C_a^{cu}(x) \subset C_a^{cu}(f(x))$ para $x \in K$ e $x \in U \cap f^{-1}(U)$ e se $a > 0$ e $\delta_1 > 0$ são suficientemente pequenos tais que a δ_1-vizinhança V de K está contido em U temos:

$$\| Df^{-1}(f(y))v \| \leq \frac{1}{\sqrt[4]{\sigma}} \| Df^{-1} \mid E^{cu}_{f(x)} \| \| v \| \tag{1.4}$$

onde $x \in K$, $dist(x, y) \leq \delta_1$, e $v \in C_a^{cu}(y)$.

O próximo Lema é devido a Pliss e sua prova pode ser encontrada em [1].

Lema 1.2.7. *Dado $A \geq c_2 > c_1 > 0$ seja $\theta > 0$. Então dados números reais $a_1, \ldots, a_N$ tais que*

$$\sum_{j=1}^{N} a_j \geq c_2 N$$

com $a_j \leq A$ para todo $1 \leq j \leq N$ existe $l > \theta N$ e $1 < n_1 < \ldots < n_l \leq N$ de modo que

$$\sum_{j=1}^{N} a_j \geq c_1(n_i - n)$$

para todo $0 \leq n < n_i$ e $1 \leq i \leq l$.

O próximo resultado garante a existência de tempos $\sigma-$hiperbólicos para pontos x em uma conjunto K parcialmente hiperbólico como tomado anteriormente.

Corolário 1.2.8. *Existe $\sigma > 0$ tal que todo $x \in H$ tem infinitos tempos $\sigma-$hiperbólicos.*

Demonstração. Dado $x \in H$, pela equação (1.1) temos que existem infinitos inteiros positivos N tal que

$$\sum_{j=1}^{N} \log \| Df^{-1} \mid E^{cu}_{f^j(x)} \|^{-1} \geq cN.$$

Então é suficiente tomar $c_1 = \frac{c}{2}$, $c_2 = c$, $A = sup \mid \log \| Df^{-1} \mid E^{cu} \|^{-1} |$, e $a_j = \log \| Df^{-1} \mid E^{cu} \|^{-1}$ no Lema 1.2.7. □

A próxima proposição está em [1] e garante frequência positiva de tempos hiperbólicos pontos $x \in H$.

Proposição 1.2.9. *Dado $\lambda > 0$ existe $\theta > 0$ tal que*

$$\#\{1 \leq j \leq n\,;\, x \in H_j(\sigma)\} \geq \theta n \tag{1.5}$$

onde

$$\sum_{i=0}^{n-1} \log \parallel (Df(f^j(x)))^{-1} \parallel^{-1} \geq \lambda n \tag{1.6}$$

Denote por

$$H_n(\sigma, \theta) = \{x \in H \,:\, a\, frequênica\, de\, tempos\, \sigma - hiperbólico\, é \geq \theta\}.$$

Seja Δ um $cu-$disco C^1contindo em V. Use $dist_\Delta(.,.)$, como antes, para denotar distância entre dois pontos no disco Δ. A distância a partir de um ponto $x \in \Delta$ para o bordo de Δ é $dist_\Delta(x, \partial\Delta) = \inf_{y\in\partial\Delta} dist_\Delta(x, y)$.

O próximo resultado é o Lema 4.2 de [3].

Lema 1.2.10. *Dado um cu$-$disco $\Delta \subset U$ de raio δ, com $0 < \delta < \delta_1$, existe $n_o \geq 1$ tal que para $x \in \Delta \cap K$ com $dist_\Delta(x, \partial\Delta) \geq \frac{\delta}{2}$ e $n \geq n_o$ tempo $\sigma-$hiperbólico para x, então existe vizinhança $V_n(x)$ de x tal que:*

1. f^n envia difeomorficamente V_n em um disco de raio δ_1 em torno de $f^n(x)$ tangente ao compo de cones centro-instável;
2. Para todo $1 \leq k \leq n$ e $y, z \in V_n$,
$$dist_{f^{n-k}(V_n)}(f^{n-k}(y), f^{n-k}(z)) \leq \sigma^{\frac{k}{2}} dist_{f^n(V_n)}(f^n(y), f^n(z));$$
3. Para todo $1 \leq k \leq n$ e $y \in V_n$, $\prod_{j=n-k+1}^{n} \parallel Df^{-1} \mid E^{cu}_{f^j(y)} \parallel \leq \sigma^{\frac{k}{2}}$.

Os conjuntos $V_n(x)$ são chamados de pré-discos hiperbólicos e suas imagens $f^n(V_n(x)) = D_{\delta_1}(f^n(x))$ discos hiperbólicos.

Já o próximo resultado está provado em [1].

Lema 1.2.11. *Dado um C^1 disco $\Delta \subset V_0$ tangente ao campo de cones centro-instável, $x \in \Delta \cap K$ e $n \geq 1$ um tempo $\sigma-$hiperbólico para x, então*

$$dist_{f^{n-k}(\Delta)}(f^{n-k}(y), f^{n-k}(x)) \leq \sigma^{\frac{k}{2}} dist_{f^n(\Delta)}(f^n(y), f^n(x))$$

para todo ponto $x \in \Delta$ com $dist(f^n(x), f^n(y)) \leq \delta_1$.

Definição 1.2.12. Uma medida μ, finita e f-não singular definida na σ-álgebra de Borel associada a M é chamada medida *parcialmente hiperbólica fraca* se para algum $\sigma < 1$ e μ quase todo ponto possui infinitos tempos *σ-hiperbólicos*. Uma medida μ *parcialmente hiperbólica fraca* é dita ser medida *parcialmente hiperbólica* se

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\#\{1 \leq j \leq n; x \in H_j(\sigma,\theta)\} > 0, \tag{1.7}$$

para μ quase todo ponto $x \in M$.

Observação 1.2.13. Dado um conjunto H NUE-E^{cu}, isto é

$$\limsup \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \log \parallel Df^{-1} \mid E^{cu}_{f^j(x)} \parallel^{-1} > \lambda$$

para todo $x \in H$, pelos resultados 1.2.9 e 1.2.10 temos que existem infinitos n tais que $x \in H_n(\sigma,\theta)$. Consequentemente, se μ é uma medida f-não singular em M tal que $\mu(H) > 0$, temos que μ é *parcialmente hiperbólica* .

Dados γ, γ' cu-discos, e $\gamma^s(x)$ a variedade estável de x. Definimos a holonomia Θ como segue:

$$\begin{array}{rcl} \Theta : \gamma \cap K & \to & \gamma' \cap K \\ x & \mapsto & \gamma^s(x) \cap \gamma' \end{array}$$

Para o que se segue dada qualquer $n \geq 1$, $(f^n)^u$ denota a restrição do mapa f^n a um cu-disco e seja $J_\mu(f^n)^u$ o jacobiano de $(f^n)^u$ com respeito a medida μ.

Definição 1.2.14. Dizemos que uma medida μ tem Jacobiano com respeito ao mapa $f : M \to M$ se existe uma função $J_\mu f \in L^1(\mu)$ tal que

$$\mu(f(A)) = \int_A J_\mu f d\mu$$

para todo conjunto mensurável A tal que $f\mid_A$ é injetivo.

Note que como estamos sob a hipótese de uma dinâmica dada por um difeomorfismo C^{1+} a condição de injetividade se torna desnecessária.

Definição 1.2.15. Dizemos que uma medida μ parcialmente hiperbólica possui distorção limitada na direção centro-instável se:

1. É $f-$não-singular, ou seja $f_*\mu \ll \mu$, onde $f_*\mu(= \mu \circ f^{-1})$ é o "push-forward" de μ por f;

2. Θ é absolutamente contínua com respeito a medida μ;

3. $J_\mu f(x)$ está definido em $\mu-$quase todo ponto $x \in H$;

4. E existe $C > 0$ e $0 < \varsigma \leq 1$ tal que a função $x \mapsto J_\mu f^u(x)$ é $(C, \varsigma)-$Holder para μ quase todo ponto $x \in H$.

O resultado seguinte está provado na Proposição 5.5 de [3], e a mesma é no contexto da medida de referência Lebesgue, para o qual a hipótese de distorção limitada é desnecessária.

Proposição 1.2.16. *Seja Δ um cu$-$disco e $U \subseteq H$, se a medida μ parcialmente hiperbólica possui distorção limitada com $\mu_\Delta(U) > 0$. Então existe uma sequência de conjuntos $\ldots \subseteq W_2 \subseteq W_1 \subseteq \Delta$ e uma sequência de inteiros $n_1 < n_2 < \ldots$ tais que:*

1. *W_k está contido em algum pré-disco hiperbólico com tempo hiperbólico n_k ;*

2. *$\Delta_k := f^{n_k}(W_k)$ é um cu-disco de raio $\frac{\delta_1}{4}$;*

3. $\lim_{k\to\infty} \frac{\mu_\Delta f^{n_k}(U\cap\Delta)}{\mu_{\Delta_k}(\Delta_k)} = 1$

1.3 Estrutura Torres de Young

Nesta seção nós introduziremos a definição de uma estrutura produto apresentada por Young em [14].

Definição 1.3.1. Um disco $\gamma \subset M$ é chamado Variedade Estável se para todo $x, y \in \gamma$, $\exists\ 0 < \lambda < 1$, tais que

$$dist(f^n(x), f^n(y)) \leq \lambda^n \qquad quando \quad n \to \infty$$

De forma similar definimos uma Variedade Instável γ se para todo $x, y \in \gamma$, $\exists\ 0 < \lambda < 1$, tais que

$$dist(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \lambda^n \qquad quando \quad n \to \infty$$

Definição 1.3.2. Seja Λ um conjunto hiperbólico, para todo $x \in \Lambda$, existe $\epsilon, \delta > 0$, os conjuntos

$$W^s_\delta(x) = \{y \in M\ ;\ dist(f^n(x), f^n(y)) \leq \delta, \quad \forall n \in \mathbb{N}\},$$

$$W^u_\delta(x) = \{y \in M\ ;\ dist(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \delta, \quad \forall n \in \mathbb{N}\},$$

são chamadas Variedade ou disco Estável Local e Variedade ou disco Instável Local para x respectivamente. Note que $W^s_\delta(x)$ e $W^u_\delta(x)$ são subvariedades fechadas e com bordo de M.

Definição 1.3.3. Dado $n \geq 1$, seja D^u um disco unitário em $\mathbb{R}^n$ e $Emb^1(D^u, M)$ um espaço de mergulhos C^1 de D^u em M. Uma *Família C^1 Contínua de Discos Instáveis* é um conjunto $\varGamma^u$ de discos instáveis γ^u satisfazendo: Existe um conjunto compacto K^s e uma aplicação $\varPhi^u : K^s \times D^u \to M$ tais que

1. $\gamma^u = \varPhi^u(\{x\} \times D^u)$ é um disco instável local;
2. $\varPhi^u$ envia homeomorficamente $K^s \times D^u$sobre sua imagem;
3. $x \mapsto \varPhi^u \mid (\{x\} \times D^u)$ é um mapa contínuo de K^s para $Emb^1(D^u, M)$

De forma similar definimos a Família C^1 Contínua de discos Estáveis $\varGamma^s$.

Definição 1.3.4. Um subconjunto $\Lambda \subset M$ tem uma Estrutura Produto se, para algum $n \geq 1$, existe uma família contínua de discos instáveis $n-$dimensional $\varGamma^u = \cup\gamma^u$ e uma família contínua de discos estáveis $(m)-$dimensional $\varGamma^s = \cup\gamma^s$ tais que:

1. $dim\gamma^u + dim\gamma^s = n + m = dimM$;
2. Os γ^u-discos são transversais aos γ^s-discos com ângulos limitados e afastados de zero;
3. Cada γ^s-disco intersecta γ^u-disco em exatamente um ponto;
4. $\Lambda = \varGamma^u \cap \varGamma^s$.

Definição 1.3.5. Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto com Estrutura Produto definido por famílias $\varGamma^s$e $\varGamma^u$. Um subconjunto $\Lambda_0 \subset \Lambda$ é chamado *s-subconjunto* se Λ_0 tem uma estrutura produto e as famílias que o definem podem ser tomadas como $\varGamma^u$ e $\varGamma^s_0$ com $\varGamma^s_0 \subset \varGamma^s$; *u-subconjuntos* são definidos analogamente. Para $x \in \Lambda$, seja $\gamma^u(x)$ como o elemento de $\varGamma^u$ que contém x.

Definição 1.3.6. Dados $x, y \in \Lambda_i$, $n = s_0(x, y)$ é um tempo de separação de x e y se as órbitas de x e y estão "juntas" nos $n-$iterados e $f^{n+1}(x)$ e $f^{n+1}(x)$ estão "separadas", de forma mais geral $s_0(\cdot, \cdot)$ é tal que:

i) $s_0(\cdot, \cdot) \geq 0$ e depende apenas do disco estável γ^s contendo os dois pontos;

ii) O número máximo de órbitas a partir de Λ_i que são separados em pares antes do tempo n é finito para cada n;

iii) Para $x, y \in \Lambda_i$, $s_0(x,y) \geq R(\Lambda_i) + s_0(f^{R(\Lambda_i)}(x), f^{R(\Lambda_i)}(y))$, em particular, $s_0(x,y) \geq R(\Lambda_i)$;

iv) Para $x \in \Lambda_i$, $y \in \Lambda_j$, com $i \neq j$ mas $R_i = R_j$, temos que $s_0(x,y) < R(\Lambda_i) - 1$.

Como antes denotaremos por $(f^n)^u$ a restrição de f^n em cu-discos e $J_\mu(f^n)^u$ o jacobiano de $(f^n)^u$.

Definição 1.3.7. Dizemos que um conjunto Λ com estrutura produto que satisfaz as propriedades $(P_1) - (P_5)$, descritas abaixo, tem uma Estrutura - Torres de Young.

(P_1) $\mu_\gamma\{\gamma \cap \Lambda\} > 0$ para todo $\gamma \in \Gamma^u$;

(P_2) Existem s-subconjuntos disjuntos $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots \subset \Lambda$ tais que

1. Para cada γ^u-disco, $\mu_{\gamma^u}\{(\Lambda - \cup\Lambda_i) \cap \gamma^u\} = 0$;
2. Para cada $i \in \mathbb{N}$ e,.çxiste $R(\Lambda_i) \in \mathbb{N}^+$tal que $f^{R(\Lambda_i)}\Lambda_i$ é um $u-$subconjunto de Λ, exigimos na verdade que para todo $x \in \Lambda_i$, $f^{R(\Lambda_i)}(\gamma^s(x)) \subset \gamma^s(f^{R(\Lambda_i)}x)$ e $f^{R(\Lambda_i)}(\gamma^u(x)) \supset \gamma^u(f^{R(\Lambda_i)}x)$;

Existem constantes $C > 0$ e $\alpha < 1$ tais que para todo $x, y \in \Lambda$:

(P_3) Contração uniforme em Γ^s: Para todo $x \in \Lambda$ e cada $y \in \gamma^s(x)$ e todo $n \geq 0$

$$dist(f^n(x), f^n(y)) \leq C\alpha^n$$

(P_4) Contração para o passado e distorção limitada em Γ^u: Para $y \in \gamma^u(x)$ e $0 \leq k \leq n < s_0(x,y)$:

1. $dist(f^n(x), f^n(y)) \leq C\alpha^{s_0(x,y)-n}$;
2. .

$$log\frac{J_\mu(f^{R(\Lambda_i)})^u(x)}{J_\mu(f^{R(\Lambda_i)})^u(y)} \leq Cdist(f^{R(\Lambda_i)}(x), f^{R(\Lambda_i)}(y))$$

(P_5) Convergência de $D(f^i \mid \gamma^u)$ e continuidade absoluta de Γ^s:

1. Para $y \in \gamma^s(x)$ e todo $n \geq 0$

$$log\prod_{i=n}^{\infty}\frac{J_\mu f^u(f^i x)}{J_\mu f^u(f^i y)} \leq C\alpha^n$$

2. Dados $\gamma, \gamma' \in \Gamma^u$, defina a holonomia $\Theta : \gamma \cap \Lambda \to \gamma' \cap \Lambda$ como $\Theta(x) = \gamma^s(x) \cap \gamma$. Entao Θ é absolutamente contínua com

$$\frac{d(\Theta_\star^{-1}\mu_{\gamma'})}{d\mu_\gamma}(x) = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{J_\mu f^u(f^i(x))}{J_\mu f^u(f^i(\Theta(x)))}$$

1.4 Estrutura Markoviana Induzida

Nesta secção incialmente aparesentamos a difinição de uma Partição de Markov para conjuntos hiperbólicos e para conjuntos não uniformemente expansor (NUE), posteriomente adaptamos essa noção para o nosso contexto Parcialmente Hiperbólico.

1.4.1 Conjuntos Hiperbólicos

Considere Λ um conjunto hiperbólico, isto é, $\Lambda \subset M$ é um conjunto invariante para um difeomorfismo $f : M \longrightarrow M$, e existe $C > 0$, $\lambda \in (0,1)$ e para todo $x \in \Lambda$ existem $E^s(x)$, $E^u(x) \subset T_xM$ tais que:

1. $T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x)$;
2. $\| df_x^n v^s \| \leq C\lambda^n \| v^s \|$, $\forall v^s \in E^s(x)$ e $n \geq 0$;
3. $\| df^{-n} v^u \| \leq C\lambda^n \| v^u \|$, $\forall v^u \in E^u(x)$ e $n \geq 0$;
4. $df_x E^s(x) = E^s(f(x))$ e $df_x E^u(x) = E^u(f(x))$.

Denotamos por $[x, y]$ o ponto originado por $W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y)$. Um conjunto $R \subset \Lambda$ é chamado de retângulo se tem diâmetro pequeno e se $[x, y] \in R$ para $x, y \in R$. Um retângulo R é chamado próprio se R é fechado e $R = \overline{intR}$.

Para $x \in R$ seja

$$W^s(x, R) = W^s_\epsilon(x) \cap R$$

e do mesmo modo

$$W^u(x, R) = W^u_\epsilon(x) \cap R,$$

onde ϵ é pequeno e o diâmetro de R é pequeno comparado a ϵ.

Definição 1.4.1. Uma Partição de Markov de $\Omega \subset \Lambda$ é uma cobertura finita $\mathcal{P} = \{R_1, R_2, \ldots, R_m\}$ de Ω por retângulos próprios com

a) $intR_i \cap intR_j = \emptyset$ para $i \neq j$;

b) $f(W^u(x, R_i)) \supset W^u(f(x), R_j)$ e $f(W^s(x, R_i)) \subset W^s(f(x), R_j)$ para $x \in intR_i$ e $f(x) \in intR_j$.

A prova do teorema que segue pode ser encontrada em [5].

Teorema 1.4.2. *Seja Ω um conjunto básico, compacto, $f-$invariante localmente maximal hiperbólico transitivo para f difeomorfismo Axioma A. Então Ω tem uma partição de Markov $\mathcal{P}$ de diâmetro arbitrariamente pequeno.*

1.4.2 Conjuntos NUE.

Nesta subseção apresentamos a noção de Partição de Markov proposta por Pinheiro em [10], que é uma estrutura de Markov para transformações não uniformemente expansora e captura todas as trajetórias com alguma expansão.

Seja $f : U \to U$ um mapa mensurável definido com um conjunto de Borel U de um espaço métrico compacto, separável M. Uma coleção contável $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$ de subconjuntos Borel de U é chamado *Partição de Markov* se:

1. $int(P_i) \cap int(P_j) = \emptyset$ se $i \neq j$;

2. Se $f(P_i) \cap int(P_j) \neq \emptyset$ então $f(P_i) \supset int(P_j)$;

3. $\sharp\{f(P_i); i \in \mathbb{N}\} < \infty$;

4. $f \mid_{P_i}$ é um homeomorfismo e pode ser estendido para um homeomorfismo que envia $\bar{P}_i$ para $\overline{f(P_i)}$;

5. $\lim_n diametro(\mathcal{P}_n(x)) = 0$e $\forall x \in \bigcap_{n\geq 0} f^{-n}(\bigcup_i P_i)$ onde $\mathcal{P}_n(x) = \{y; \mathcal{P}(f^i(y)) = \mathcal{P}(f^i(x)) \forall 0 \leq j \leq n\}$ e $\mathcal{P}(x)$ denota o elemento de $\mathcal{P}$ que contém x .

Definição 1.4.3. Uma coleção enumerável $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$ de subconjuntos Borel de U é chamado *Partição de Markov Induzida* se satisfaz todas as condições da Partição de Markov exceto o segundo item que deve ser substituído por:

- Para cada $P_i \in \mathcal{P}$ existe $R_i \geq 1$ tal que

  1. Se $l < R_i$ e $int(f^l(P_i)) \cap int(P_j) \neq \emptyset$ então $int(f^l(P_i)) \subset int(P_j)$ ou $int(f^l(P_i)) \supset int(P_j)$;

  2. Se $f^{R_i}(P_i) \cap int(P_j) \neq \emptyset$ então $f^{R_i}(P_i) \supset int(P_j)$.

Definição 1.4.4. O par $(F, \mathcal{P})$, onde $\mathcal{P}$ é uma partição de Markov de $F : U \to U$, é chamada *Aplicação de Markov* definido em U . Se $F(P) = U \ \forall P \in \mathcal{P}$, $(F, \mathcal{P})$ é chamado *Aplicação de Markov Completa*.

1.4.3 Conjuntos Parcialmente Hiperbólicos

Nesta subseção apresentamos a definição de uma Partição Induzida no contexto de hiperbolicidade não-uniforme.

Considere $K \subset M$ conjunto parcialmente hiperbólico como definido na seção 1.1.

Definição 1.4.5. Dado um $cu-$disco Δ_0 e $\delta_s > 0$, defina o cilindro sobre Δ_0 por:

$$\mathcal{C}(\Delta_0) = \bigcup_{x \in \Delta_0} W^s_{\delta_s}(x). \tag{1.8}$$

Note que $\mathcal{C}(\Delta_0)$ é fechado.

Para algum δ_s fixado, e um subdisco $\Delta \subset \Delta_0$ considere a projeção π a partir de $\mathcal{C}(\Delta)$ em Δ ao longo de variedade estáveis locais

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathcal{C}(\Delta) & \longrightarrow & \Delta \\ & x & \longmapsto & W^s_{\delta_s}(x) \cap \Delta. \end{array}$$

Definição 1.4.6. Dado Δ como antes, definimos a família $\bar{\Gamma^u}$ como o conjunto de todos os discos centro-instáveis locais intersectando $\mathcal{C}(\Delta)$ e dizemos que um disco centro-instável γ^u $u-$atravessa $\mathcal{C}(\Delta)$ se

$$\pi(\gamma^u \cap \mathcal{C}(\Delta)) = \Delta. \tag{1.9}$$

Para o que se segue definimos $W^s(x, C_i) = W^s(x) \cap C_i$.

Definição 1.4.7. Dado um disco Centro-Instável Δ, uma *Partição Markoviana* para $\mathcal{C}(\Delta) \subset K$, com respeito a f, é uma partição enumerável $\mathcal{P} = \{C_1, C_2, \ldots\}$ de $\mathcal{C}(\Delta)$ por Cilindros abertos com

a) $C_i \cap C_j = \emptyset$ para $i \neq j$;

b) $f(W^s(x, C_i)) \subset W^s(f(x), C_j)$ para $x \in (\pi(C_i))$ e $f(x) \in C_j$;

c) $f(\gamma^u \cap C_i)$ $u-$atravessa $\mathcal{C}(\Delta)$ para $\forall \gamma^u \in \bar{\Gamma^u}$ tal que $\gamma^u \cap C_i \neq \emptyset$.

Definição 1.4.8. Dado um disco Centro-Instável Δ, uma *Partição Markoviana Induzida* para $\mathcal{C}(\Delta) \subset K$ com respeito a f é uma coleção enumerável $\mathcal{P} = \{C_1, C_2, \ldots\}$ de $\mathcal{C}(\Delta)$ por cilindros com

a) $C_i \cap C_j = \emptyset$ para $i \neq j$;

b) Para cada $C_i \in \mathcal{P}$ existe $R_i \geq 1$ tal que

1. se $l < R_i$ e $(f^l(C_i)) \cap C_j \neq \emptyset$ então $\pi(f^l(\gamma^u \cap C_i)) \subset \Delta$ para $\forall \gamma^u \in \bar{\Gamma^u}$ tal que $\gamma^u \cap C_i \neq \emptyset$;

2. Se $(f^{R_i}(C_i)) \cap C_j \neq \emptyset$ então $f^{R_i}(W^s(x, C_i)) \subset W^s(f^{R_i}(x), C_j)$ para $x \in (\pi(C_i))$ e $f(x) \in C_j$ e $f^{R_i}(\gamma^u \cap C_i)$ $u-$atravessa $\mathcal{C}(\Delta)$ para $\forall \gamma^u \in \bar{\Gamma^u}$ tal que $\gamma^u \cap C_i \neq \emptyset$.

Definição 1.4.9. O par $(F, \mathcal{P})$, onde $\mathcal{P}$ é uma partição de Markov de $F : \mathcal{C}(\Delta) \longrightarrow \mathcal{C}(\Delta)$, é chamado *Aplicação Markoviana* definido em $\mathcal{C}(\Delta)$.

Definição 1.4.10. Uma Aplicação Markoviana $(F, \mathcal{P})$ definido em $\mathcal{C}(\Delta)$ é chamado de *Aplicação Markoviana Induzida para* f em $\mathcal{C}(\Delta)$, se existe uma função $R : \mathcal{C}(\Delta) \longrightarrow \mathbb{N}$, chamada de tempo induzido, tal que $\{R \geq 1\} = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$, $R \mid_C$ é constante, $\forall C \in \mathcal{P}$ e $F(x) = f^{R(x)}(x)$ $\forall x \in \mathcal{C}(\Delta)$.

Capítulo 2

Estruturas principais

2.1 Conjuntos Encaixados

A noção de intervalos "nice", introduzida por Martens em [6], é uma ferramenta útil na teoria de sistemas dinâmicos reais e complexos de uma dimensão. Um *intervalo nice* é um intervalo aberto I tal que a órbita positiva $\mathcal{O}^+(\partial I) \cap I = \emptyset$. Sua principal propriedade é que pré- imagens de intervalos "nice" não são ligadas, isto é, se I_1 e I_2 são enviados homeomorficamente em I por f^{n_1} f^{n_2}, respectivamente, então $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $I_1 \subset I_2$ ou $I_2 \subset I_1$.

Já em [10], Pinheiro propôs uma construção abstrata de conjuntos "nested" que reformula e generaliza o conceito de "intervalos nice". Nesta seção nós propomos uma adaptação desta contrução para o contexto de conjuntos Parcialmente Hiperbólicos.

Seja$f : M \longrightarrow M$ um difeomorfismo definido em um espaço métrico M completo e separável. Um conjunto $P \subset M$ é uma *pré-imagem regular de ordem* $n \in \mathbb{N}$ de um conjunto $D \subset M$ se f^n envia P difeomorficamente em D. Vamos denotar por $\mathrm{ord}(P)$ a ordem de P (com respeito a D).

Para o que se segue considere o seguinte Lema:

Lema 2.1.1. *Dado um cu−disco Δ e $\sigma < 1$ tal que n é tempo $\sigma-$ hiperbólico para $y \in \mathcal{C}(\Delta)$; então n induz um tempo hiperbólico para $x \in \Delta$ onde $y \in W^s_{\delta_s}(x)$.*

Demonstração. De fato, como $f^n(x)$ e $f^n(y)$ variam continuamente temos que $Df^{-1}|_{E^{cu}_{f^n(x)}}$ e $Df^{-1}|_{E^{cu}_{f^n(y)}}$ variam continuamente e consequentemente existe ϵ_s dependendo de δ_s tal que:

$$| \log \|Df^{-1}|E^{cu}_{f^n(x)}\| - \log \|Df^{-1}|E^{cu}_{f^n(y)}\| \,|< \epsilon_s.$$

Assim, $e^{\log \frac{\|Df^{-1}|E^{cu}_{f^n(x)}\|}{\|Df^{-1}|E^{cu}_{f^n(y)}\|}} < e^{\epsilon_s}$, ou seja

$$\|Df^{-1}|E^{cu}_{f^n(x)}\| < e^{\epsilon_s}\|Df^{-1}|E^{cu}_{f^n(y)}\|.$$

Portanto,

$$\prod_{j=n-k+1}^{n} ||Df^{-1}|E^{cu}_{f^j(x)}|| < \prod_{j=n-k+1}^{n} e^{\epsilon_s}||Df^{-1}|E^{cu}_{f^j(y)}|| \leq e^{k\epsilon_s}\sigma^k = (e^{\epsilon_s}\sigma)^k, \qquad \forall 1 \leq k \leq n,$$

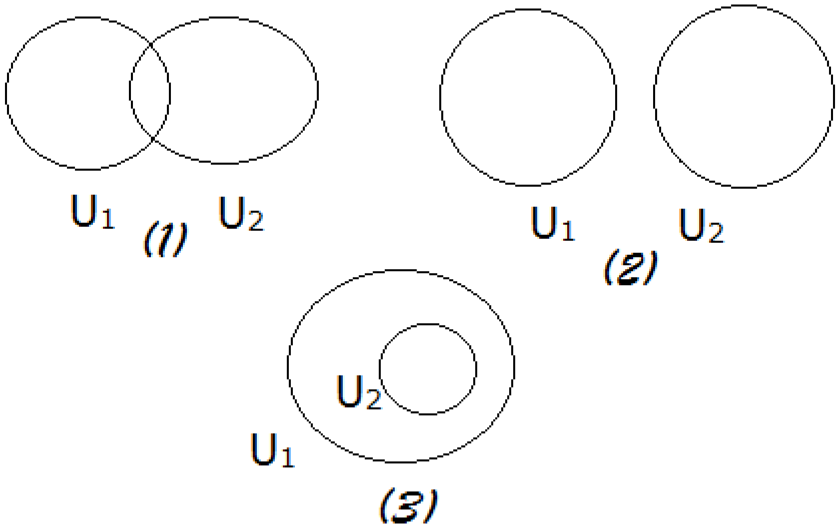
fazendo $\tilde{\sigma} = \sigma e^{\epsilon_s}$, temos que os tempos $\sigma -$ *hiperbólicos* para todo $y \in \mathcal{C}(\Delta)$ induzem tempos $\tilde{\sigma} -$ *hiperbólicos* em Δ, com constante $\tilde{\sigma}$ piorada. Consequentemente, podemos piorar a constante de hiperbolicidade para $\tilde{\sigma}$ (assim pontos em $\mathcal{C}(\Delta)$ serão considerados pela contrução). Denote o conjunto de pontos de K tais que $n \in N$ é um tempo $\tilde{\sigma} -$ *hiperbólico* por $H_n(\tilde{\sigma})$. $\square$

Considere $h = (h(x))_{x\in H}$ onde $h(x) = \{f^m(x);\, m \in \mathbb{N}, x \in H_m(\tilde{\sigma}, \theta)\}$ é conjunto de imagens *hiperbólicas* de x por f. Dizemos que n é um $h-$tempo para x se $f^n(x) \in h(x)$. A pré-imagem hiperbólica $V_n(x)$ é chamada de $h-$pré-imagem do disco $f^n(V_n(x))$, se n é $h-$tempo para x.

Fixe a coleção $\xi_0 = \{f^n(V_n)\,;\, x \in H_n(\sigma, \theta),\, n \in \mathbb{N}\}$ e $\tilde{\xi}_0 = \{f^n(V_n)\,;\, x \in H_n(\tilde{\sigma}, \theta),\, n \in \mathbb{N}\}$ de todos os discos hiperbólicos de M com constantes hiperbólicas σ e $\tilde{\sigma}$ respectivamente. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $D \in \xi_0$ considere $\xi_n(D)$ as pré-imagens regulares de ordem n de D, e analogamente, para $D \in \tilde{\xi}_0$ temos $\tilde{\xi}_n(D)$. Considere os conjuntos $\xi_n = (\xi_n(D))_{D\in\xi_0}$ e $\tilde{\xi}_n = (\tilde{\xi}_n(D))_{D\in\tilde{\xi}_0}$, denote $\xi = (\xi_n)_n$ e $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_n)_n$.

Seja $\xi = (\xi_n)_n$ como antes. Um conjunto P é chamado uma $\xi-$pré-imagem de um $cu-$disco W se existe $n \in \mathbb{N}$ e $D \in \xi_0$ tal que $W = f^n(P) \subset D$. Analogamente, dizemos P é $\tilde{\xi}-$pré-imagem de um $cu-$disco W.

Definição 2.1.2. Dizemos que dois conjuntos abertos em um cu-disco Δ_0, U_1 e U_2 são ligados se $U_1 \backslash U_2$, $U_2 \backslash U_1$ e $U_1 \cap U_2$ são não vazios.

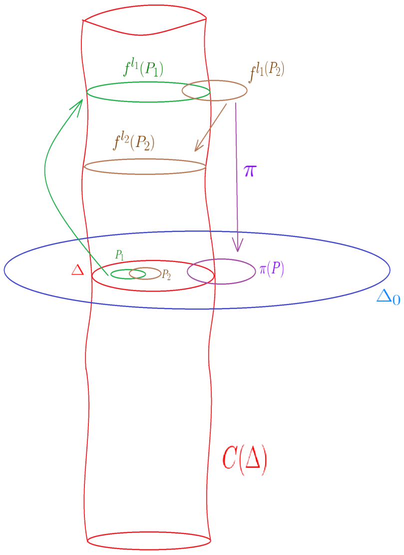


Só na ilustração (1) temos U_1 e U_2 conjuntos ligados. Note que dois conjuntos U_1 e U_2 são ligados se e somente se $\partial U_1 \cap U_2$ e $U_1 \cap \partial U_2$ são conjuntos não vazios.

Definição 2.1.3. Um $cu-$disco Δ é chamado ξ-encaixado se não é ligado com nenhuma $\xi-$pré-imagem de $cu-$discos que $u-$atravessam o cilindro $\mathcal{C}(\Delta)$.

Lema 2.1.4. *Se um cu$-$disco Δ é $\tilde{\xi}-$encaixado e P_1 e P_2 são $\xi-$pré-imagens contidas em Δ de dois elementos de ξ_0 que $u-$atravessam $\mathcal{C}(\Delta)$ com $ord(P_1) \neq ord(P_2)$, então P_1 e P_2 não são ligados.*

Demonstração. Como P_1 e P_2 são $\xi-$pré-imagens contidas em Δ de dois elementos de ξ_0 que $u-$atravessam $\mathcal{C}(\Delta)$, temos que existem $A_i \in \xi_0$ tal que $f^{l_i}(P_i) = A_i$ com $l_i = ord(P_i)$ para $i \in \{1, 2\}$. Assuma que $l_1 < l_2$ e, por contradição, que P_1 e P_2 são ligados; assim $P = f^{l_1}(P_2)$ é uma $\xi-$pré-imagem de A_2 tal que $A_1 \cap P \neq \emptyset$. Para $p_1 \in P_1 \cap \partial P_2$ e $p_2 \in \partial P_1 \cap P_2$, como $f^{l_1}(p_1) \in f^{l_1}(P_1) \cap \partial(f^{l_1}(P)) = f^{l_1}(P_1) \cap \partial P$ e $f^{l_1}(p_2) \in f^{l_1}(P_2) \cap \partial(f^{l_1}(P_1)) = P \cap \partial f^{l_1}(P_1)$ temos que P e $f^{l_1}(P_1)$ são ligados; consequentemente, pela observação 2.1.1 feita acima, temos que tempos hiperbólicos de pontos em $\mathcal{C}(\Delta_0)$ induzem tempos hiperbólicos em pontos de Δ_0. Assim, se $\pi(f^{l_1}(P_2))$ retornar a $\mathcal{C}(\Delta)$, temos que $\pi(f^{l_1}(P_2))$ é uma $\tilde{\xi}-$pré-imagem de um cu-disco que u-atravessa $\mathcal{C}(\Delta)$, e $\pi(f^{l_1}(P_2))$ é ligado com Δ pois $\pi(f^{l_1}(p_1)) \in \pi(f^{l_1}(P_1)) \cap \partial(\pi(f^{l_1}(P))) = \Delta \cap \partial(\pi(P))$ e $\pi(f^{l_1}(p_2)) \in \pi(f^{l_1}(P_2)) \cap \partial(\pi(f^{l_1}(P_1))) = \pi(P) \cap \partial\Delta$, mas isso é impossível, pois Δ é um $cu-$disco $\tilde{\xi}-$encaixado.



□

Corolário 2.1.5. *Se Δ é um conjunto $\varepsilon-$ encaixado e P_1 e P_2 são $\varepsilon-$ pré-imagens de um cu-discos que $u-$ atravessam $\mathcal{C}(\Delta)$, então P_1 e P_2 são não ligados. Além disso, se $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$, então $ord(P_1) \neq ord(P_2)$.*

Demonstração. Suponha que $P_1 \neq P_2$ são $\varepsilon-$pré imagens de A, um $cu-$disco que $u-$atravessa $\mathcal{C}(\Delta)$. Como f é difeomorfismo temos que se $l_j = ord(P_j)$ para $j = 1, 2$ então $l_1 \neq l_2$. Assim, se assumimos que $l_1 < l_2$, pelo Lema 2.1.4, temos que P_1 e P_2 são não ligados. □

2.1.1 Construção de Conjuntos Encaixados

Nesta subseção nós descrevemos a construção de um conjunto encaixado a partir de um $cu-$disco $\Delta \subset \Delta_0$ de raio $r < \delta - diam\, \mathcal{C}(\Delta)$, onde δ é o raio de Δ_0.

Dado δ_1 como na nota 1.2.6, escolha δ_s tal que $0 < \delta_s < \delta_1/2$ tal que pontos em K tenham variedade estável local de tamanho uniforme δ_s. Em particular, estas folhas locais estão contidas em U.

Definição 2.1.6. Uma sequência finita $\mathcal{K} = (V_0, V_1, ..., V_n)$ de $\xi-$pré-imagens de $cu-$discos que $u-$atravessam $\mathcal{C}(\Delta)$ é chamada de cadeia de pré-imagens destes discos iniciando em Δ se:

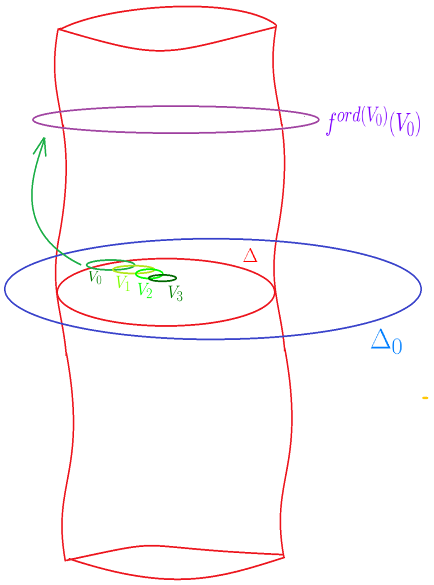
1. $\Delta \cap V_j \neq \emptyset$ para qualquer j;

2. $0 < \mathrm{ord}(V_0) < \mathrm{ord}(V_1) < ... < \mathrm{ord}(V_{n-1}) < \mathrm{ord}(V_n)$;

3. V_0 e Δ são ligados;

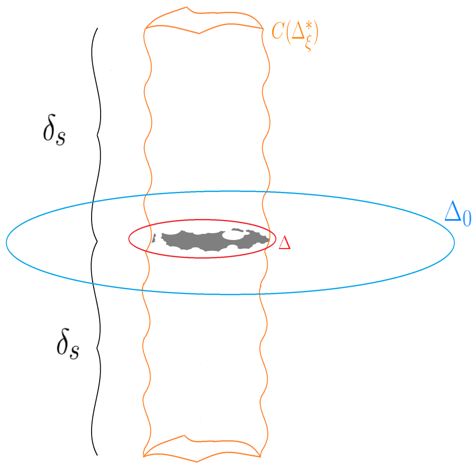
4. V_{j-1} e V_j são ligados, $\forall 1 \leq j \leq n$;

5. $V_i \neq V_j$ para qualquer $i \neq j$.



Denote $ch_\xi(\Delta)$ como sendo a coleção de todas as cadeias de pré-imagens de $cu-$discos que $u-$atravessam $\mathcal{C}(\Delta)$ começando em Δ, e analogamente para $ch_{\tilde{\xi}}(\Delta)$.

Observação 2.1.7. Se $(P_0, P_1, ..., P_n) \in ch_\xi(\Delta)$, então $\bigcup_{j=n_0}^{n_1} P_j$ é um conjunto aberto conexo $\forall 0 \leq n_0 \leq n_1 \leq n$.



Para $\Delta \subset \Delta_0$ defina o conjunto aberto

$$\Delta_{\varepsilon}^{*} = \Delta \setminus \overline{\bigcup_{C_j \in ch_{\xi}(\Delta)} \bigcup_{j} C_j}. \tag{2.1}$$

Definição 2.1.8. Dado $x \in \Delta_{\xi}^{*}$, defina o disco $\xi-$*encaixado* contendo x, $\Delta_{\xi}^{*}(x)$ como a componente conexa de Δ_{ξ}^{*} que contém x . Denote $\Delta_{\xi}^{'}$ como a componente conexa de $\Delta_{\xi}^{*}(x_0)$ em que x_0 é o centro de Δ.

A próxima proposição garante que esta construção de fato origina um conjunto *encaixado.*

Proposição 2.1.9. *Para um cu−disco Δ de centro x tal que $\Delta_{\xi}^{*}(x) \neq \emptyset$, então $\Delta_{\xi}^{'}$ é um conjunto $\xi-$encaixado.*

Demonstração. Por contradição, assuma que existe P $\xi-$pré imagem de um $cu-$disco W que $u-$atravessa $\mathcal{C}(\Delta_{\xi}^{'})$ tal que P e $\Delta_{\xi}^{'}$ são ligados. Então existem $D \in \xi_0$ tal que $W = f^{ord(P)}(P) \subset D$ e $p \in P \cap \partial\Delta_{\xi}^{'}$. Considere $\bar{P} = f^{-ord(P)}(D) \supset P$.

Afirmação 2.1.10. $\bar{P} \subset \Delta$

Demonstração. Para prova a afirmação, primeiro note que $\bar{P} \cap \Delta \supset P \cap \Delta_{\xi}^{'} \supset P \cap \Delta_{\xi}^{'} \neq \emptyset$. Por outro lado, se $\bar{P} \cap \partial\Delta \neq \emptyset$, então $\bar{P} \in ch_{\varepsilon}(\Delta)$ acarretando em uma contradição com a definição de Δ_{ξ}^{*} pois $\bar{P} \cap \Delta^{*} \supset \bar{P} \cap \Delta^{'} \neq \emptyset$. Assim, $\bar{P} \cap \partial\Delta = \emptyset$. Como $\bar{P}$ e Δ são conjuntos conexos e $\bar{P} \cap \Delta \supset \bar{P} \neq \emptyset$, temos que $\bar{P} \supset \Delta$ ou $\bar{P} \subset \Delta$. A primeira opção não é verdade pois $diam\Delta < 2r < 2\delta_1$ e $diam\bar{P} \leq 2\delta_1 \tilde{\sigma}^{ord(P)} < 2\delta_1$, concluindo assim que $\bar{P} \subset \Delta$. □

Como $p \in \partial\Delta^{'}$, para um dado $\epsilon > 0$ existe uma cadeia $Q_0, \ldots, Q_n \in ch_{\xi}(\Delta)$ tal que $dist(p, \cup_{j=0}^{n} Q_j) < \epsilon$. Por outro lado, como P e $\bar{P}$ são conjuntos abertos e $p \in P \subset \bar{P}$, tomando ϵ suficientemente pequeno $P \cap (\cup_j Q_j) \neq \emptyset$ então

$$Q_m \cap \bar{P} \supset Q_m \cap P \neq \emptyset \tag{2.2}$$

para algum $1 \leq m \leq n$. Como $Q_0 \cup \ldots \cup Q_m$ são conjuntos conexos pela observação (2.1.7), e $Q_0 \cap (M \setminus \bar{P}) \supset Q_0 \cap (M \setminus \Delta) \neq \emptyset$ (pois Q_0 e Δ são ligados e pela afirmação 2.1.10), existe $0 \leq j \leq m$ tal que $Q_j \cap \partial\bar{P} \neq \emptyset$. Seja $l = min\{0 \leq j \leq m; Q_j \cap \bar{P} \neq \emptyset\}$.

Temos dois casos: $ord(Q_l) \leq ord\bar{P}$ ou $ord(Q_l) > ord\bar{P}$. Suponha primeiro que $ord(Q_l) \leq ord\bar{P}$. Por minimalidade de l, $\bar{P} \neq Q_j$, $\forall\ 0 \leq j \leq l$. Assim, também é fácil verificar que $\mathcal{K} = (Q_0, \ldots, Q_l, \bar{P}) \in ch_{\xi}(\Delta)$. Como $P \cap \Delta^{*} \supset P \cap \Delta^{'} \neq \emptyset$, a existência de $\mathcal{K}$ é uma contradição com a definição (2.1) que define Δ_{ξ}^{*}, neste caso não pode ocorrer $ord(Q_l) \leq ord\bar{P}$. Para o segundo caso, $ord(Q_l) > ord\bar{P}$, considere

$\mathcal{K} = (\pi(f^{ord\bar{P}}(Q_l)), \ldots, \pi(f^{ord\bar{P}}(Q_m)))$. Como tempos $\sigma-$*hiperbólicos* em $\mathcal{C}(\Delta_0)$ induzem tempos $\tilde{\sigma}-$ *hiperbólicos* em Δ_0, temos que $\mathcal{K} \in ch_{\tilde{\xi}}(\Delta)$, o que contradiz novamente a construção de $\Delta^*_{\tilde{\xi}}$ em 2.1 . Concluindo assim a prova.

C:/Users/katia/Desktop/11872824_941497932573375_1188337215_n.jpg

$\square$

O próximo resultado garante que, se as cadeias tem diâmetro pequeno, então o conjunto $\Delta'_{\tilde{\varepsilon}}$ ainda contém um disco, onde o diâmetro de uma cadeia $(P_j)_j$ é definido como o diâmetro de $\cup_j P_j$.

Proposição 2.1.11. *Seja $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$ e considere Δ um disco de raio r centrado em $p \in M$ tal que $f^n(\Delta) \subsetneq \Delta \forall n > 0$. Se toda cadeia de $\tilde{\xi}-$pré-imagens de Δ tem diâmetro menor que $2\epsilon r$, então o conjunto $\Delta'_{\tilde{\xi}}$ definido acima contém um disco de raio $r(1-2\epsilon)$ centrado em p, denotado por $D_{r(1-2\epsilon)}(p)$.*

Demonstração. Seja Γ a coleção de todas as cadeias de $\tilde{\varepsilon}-$pré-imagens de Δ. Se $(P_j)_j \in \Gamma$ então $\cup_j P_j$ é conjunto aberto conexo intersectando $\partial\Delta$ com diâmetro menor que $2\epsilon r$. Assim, $\cup_j P_j \subset D$, $\forall (P_j)_j \in \mathit{\Gamma}$ onde D é um disco de raio $2\epsilon r$ e centro em $\partial\Delta$. Como consequência

$$\Delta^* = \Delta \setminus \overline{\bigcup_{(P_j)_j \in \mathit{\Gamma}} \bigcup_j P_j} \supset \Delta \setminus D_\epsilon(\partial\Delta) \supset D_{r(1-2\epsilon)}(p).$$

é um conjunto aberto não vazio. Tomando $\Delta'_{\tilde{\xi}}$ como a componente conexa de $\Delta^*_{\tilde{\xi}}$ que contém o ponto p, segue a proposição. $\square$

2.2 Atratores

Seja X um espaço métrico compacto e μ uma medida de probabilidade Borel em X. Seja $f : X \to X$ um aplicação mensurável, não necessariamente preservando a medida μ. Dado $x \in X$, o conjunto estável de x é definido como

$$W^s(x) = \{y \in X \, : \, dist(f^j(x), f^j(y)) \to 0 \; quando \; j \longrightarrow +\infty\}.$$

Nesta seção provaremos a proposição a seguir, cuja prova se encontra na subseção 2.2.2.

Proposição 2.2.1. *Se μ é uma medida parcialmente hiperbólica com distorção limitada na direção centro-instável, então existem atratores $A_1, A_2, ..., A_l$ tais que para $\mu-$quase todo ponto $x \in H\ (NUE - E^{cu})$ temos $\omega(x) = A_j$ para algum $1 \leq j \leq l$. Além disso, $f\mid_{A_j}$ é transitivo e cada A_j contém um cu-disco.*

Para $U \subset X$, seja $W^s(U) = \bigcup_{x\in U} W^s(x)$. Introduziremos aqui duas noções fundamentais para o que se segue

Definição 2.2.2. Dizemos que $S \subset X$ é $s-$saturado se $W^s(S) = S$.

Definição 2.2.3. Dizemos que S é componente $s-$ergódica (componente μ $s-$ergódica em relação a f) se é invariante, $s-$saturado e cada $S' \subset S$ invariante e $s-$saturado satisfaz $\mu(S') = \mu(S)$ ou $\mu(S') = 0$. A medida μ é chamada de $s-$ergódica se X é uma componente $s-$ergódica.

Observação 2.2.4. Ressaltamos que na definição de medida $s-$ ergódica e componente $s-$ ergódica não estamos assumindo a invariância da medida μ em relação a f.

2.2.1 Resultados técnicos

Os resultados desta subseção são necessários para a prova da Proposição 2.2.1.

Seguindo Milnor (ver [8]) um μ atrator (atrator minimal) é um conjunto positivamente invariante compacto A, tal que sua bacia de atração $\mathcal{B}_f(A) = \{x \in X; \omega_f(x) \subset A\}$ tem medida μ positiva e, em contraste, a bacia de todo subconjunto positivamente invariante $A' \subsetneq A$ tem μ medida zero. (Onde, $\omega_f(x)$ denota o conjunto $\omega-$ limite de $x \in X$).

Lema 2.2.5. *Dado $S \subseteq X$ uma componente $s-$ergódica, então existe um único atrator $A \subseteq X$ tal que $\omega_f(x) = A$, para $\mu-$quase todo ponto $x \in S$.*

Demonstração. Dado um conjunto aberto $B \subset X$, temos que $\omega_f(x) \cap B \neq \emptyset$ para $\mu-$ quase todo ponto $x \in S$ ou $\omega_f(x) \cap B = \emptyset$ para $\mu-$ quase todo ponto $x \in S$. Com efeito, tomando

$$B_\omega := \{x \in S \, : \, \omega_f(x) \cap B \neq \emptyset\}$$

temos que B_ω é invariante (pois $\omega_f(x) = \omega_f(f(x)) \ \forall x$), $s-$saturado e além disso, pela hipótese que S é componente $s-$ergódica, $\mu(B_\omega) = 0$ ou $\mu(B_\omega) = \mu(S)$.

Note que se $\omega_f(x) \cap B \neq \emptyset$ para todo conjunto aberto B e μ quase todo ponto $x \in S$ então $\omega_f(x) = X$ provando assim o lema neste caso particular. Assim, podemos supor a existência de um conjunto não vazio $B \subset X$ tal que $\omega_f(x) \cap B = \emptyset$ para $\mu-$ quase todo ponto $x \in S$. Seja W o conjunto aberto maximal tal que $\omega_f(x) \cap W = \emptyset$ para $\mu-$ quase todo ponto $x \in S$.

Agora vamos mostrar que $\omega_f(x) = A$ para $\mu-$ quase todo ponto $x \in S$, onde $A = X \setminus W$. De fato, dado $p \in A$ temos necessariamente que $\omega_f(x) \cap B_\epsilon(p) \neq \emptyset$ para $\mu-$ quase todo ponto $x \in S$ e qualquer $\epsilon > 0$. Caso contrário, existe $\epsilon > 0$ tal que $\omega_f(x) \cap B_\epsilon(p) \neq \emptyset$ para $\mu-$ quase todo ponto $x \in S$, mas então $B_\epsilon(p) \cup W$ contradiz a maximalidade de W . Seja $W_n = \{x \in S; \omega_f(x) \cap B_{\frac{1}{n}}(p) \neq \emptyset\}$. Temos que $\mu(W_n) = \mu(S)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e assim, $\mu(\bigcap_n W_n) = \mu(S)$. Temos que $dist(p, \omega_f(x)) = 0$ para qualquer $x \in \bigcap_n W_n$ e então $p \in \omega_f(x) = \overline{\omega_f(x)}$. Provando assim que $\omega_f(x) = A$ para $\mu-$quase todo ponto $x \in S$. $\square$

Considere para cada ponto x de um conjunto positivamente invariante $U \subset X$, um subconjunto $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{O}^+(x)$ da orbita positiva de x.

Definição 2.2.6. A coleção $\mathcal{U} = (\mathcal{U}(x))_{x \in U}$ é chamada assintoticamente invariante se para todo $x \in U$,

1. $\sharp\{j \in \mathbb{N}; f^j(x) \in \mathcal{U}(x)\} = \infty$*;*
2. $\mathcal{U}(x) \cap \mathcal{O}^+(f^n(x)) = (\mathcal{U}f(x)) \cap \mathcal{O}^+(f^n(x))$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *grande.*

Definição 2.2.7. Dada uma coleção assintoticamente invariante $\mathcal{U} = (\mathcal{U}(x))_{x \in U}$ definimos para cada x o conjunto $\omega_{\mathcal{U}}-$ limite de x, denotado por $\omega_{f,\mathcal{U}}(x)$ como o conjunto de pontos de acumulação de $\mathcal{U}(x)$ e, que é, o conjunto de pontos $p \in X$ tais que a sequência $n_j \to +\infty$ satisfazendo $\mathcal{U}(x) \ni f^{n_j}(x) \to p$.

Dizemos que a coleção assintoticamente invariante $\mathcal{U} = (\mathcal{U}(x))_{x \in U}$ tem frequência positiva em p se

$$\limsup_n \frac{1}{n}\{1 \leq j \leq n; f^j(x) \in \mathcal{U}(x) \cap V\} > 0,$$

para toda vizinhança V de p.

Definição 2.2.8. Se $\mathcal{U} = (\mathcal{U}(x))_{x\in U}$ é uma coleção assintoticamente invariante com frequência positiva em p, definimos $\omega_{+,f,\mathcal{U}}(x)$ como o conjunto $\mathcal{U}-$frequentemente visitado por pontos da orbita de x, isto é, o conjunto de pontos $p \in X$ tal que $\limsup \frac{1}{n}\{1 \leq j \leq n; f^j(x) \in \mathcal{U}(x) \cap V\} > 0$ para toda vizinhança V de p.

Lema 2.2.9. *Seja $\mathcal{U} = (\mathcal{U}(x))_{x\in U}$ uma coleção assintoticamente invariante definida em uma componente s-ergódica S e seja $A \subset X$ o atrator associado a S. Então existe um conjunto compacto $A_{\mathcal{U}} \subset A$ tal que $\omega_{f,\mathcal{U}}(x) = A_{\mathcal{U}}$ para quase todo ponto $x \in S$. Além disso, se $\mathcal{U}$ tem frequência positiva, então existe conjunto compacto $A_{+,\mathcal{U}} \subset A_{\mathcal{U}}$ tal que $\omega_{+,f,\mathcal{U}}(x) = A_{+,\mathcal{U}}$ para quase todo ponto $x \in S$.*

Demonstração. Construimos o conjunto compacto $A_{\mathcal{U}}$ da mesma forma que construimos o conjunto A. Na construção do conjunto $A_{\mathcal{U}}$ a única diferença é que temos que mudar $\omega_f(x)$ por $\omega_{f,\mathcal{U}}(x)$ na prova. Note que a propriedade chave usada é que $\omega_f(x) = \omega_f(f(x))$ e temos também a mesma propriedade para $\omega_{f,\mathcal{U}}$, isto é, $\omega_{f,\mathcal{U}}(x) = \omega_{f,\mathcal{U}}(f(x))$.

Por conveniência na prova de existência do conjunto $A_{+,\mathcal{U}}$ usaremos a seguinte notação: Dado um ponto $x \in S$ e o conjunto $K \subset X$ denote a $\mathcal{U}-$frequência de visitação de x para K por $\phi_K(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sharp\{0 \leq j < n; f^j(x) \in K \cap \mathcal{U}(x)\}$.

Dado um conjunto aberto $B \subset X$, seja $B_\phi := \{x \in U; \phi_B > 0\}$, note que como usamos $\limsup$ na definição de ϕ_K temos que $\phi_K > 0$ ou $\phi_{X\setminus K} > 0$.

Considere agora $Z_1 = X$ e C_1 qualquer cobertura por bolas abertas B de X de raio 1. Para todo $B \in C_1$ temos $\phi_B > 0$ ou $\phi_{X\setminus B} > 0$, consequentemente $\mu(B_\phi) = 0$ ou $\mu(B_\phi) = \mu(S)$. Como X é um espaço métrico compacto, existe subcobertura finita; Assim, existe pelo menos $B_\phi \in C_1$ tal que $\phi_B(x) > 0$. Seja $C_1' = \{B \in C_1 : \phi_{X\setminus B} > 0\}$ e $Z_2 := Z_1 \setminus \bigcup_{B\in C_1'} B$. Z_2 é conjunto não vazio, compacto e $\omega(x) \subseteq Z_2$ para $\mu-$quase todo ponto $x \in S$.

Podemos repetir o processo para Z_2 com cobertura finita de bolas de raio $\frac{1}{2}$ e por indução construir $C_1, C_2, \ldots$; $C_1', C_2', \ldots$ e $Z_1, Z_2, \ldots$ com $Z_1 \supset Z_2 \supset \ldots$ uma sequência não vazia de conjuntos compactos e $\omega(x) \subset Z_j$ $\mu-$quase todo ponto $x \in S$. Defina

$$A_{+,\mathcal{U}} := \bigcap_{n\geq 1} Z_n$$

Assim, $\omega(x) \subseteq A_{+,\mathcal{U}}$ para $\mu-$quase todo ponto $x \in S$. Falta mostrar que $A_{+,\mathcal{U}} \subseteq \omega(x)$ para $\mu-$quase todo ponto $x \in S$. Dado $y \in A_{+,\mathcal{U}} = \bigcap_{\geq 1} Z_n$ então $y \in Z_n$ para todo $n \geq 1$ e portanto existe uma bola $B^n \in C_n \setminus C_n'$ tal que $y \in B^n$ e $diam B^n \to 0$. Assim

$\cap_n B^n = y$, $\mu(B^n_\omega) = \mu(S)$ e $\omega(x) \cap B^n \neq \varnothing$ para $\mu-$quase todo ponto $x \in S$. Portanto, $y \in \omega(x)$ para $\mu-$quase todo ponto $x \in S$. □

Nota 2.2.10. Além disso, todo ponto de $A_{+,\mathcal{U}}$ é acumulado por sequências do tipo $\{f^n(x); n \in N, f^n(x) \in \mathcal{U}(x)\}$ para $\mu-$quase todo ponto $x \in U$ e

$$A_{+,\mathcal{U}} \subset A_{\mathcal{U}} \subset A$$

2.2.1.1 Existência de componentes s-ergódicas

Como na subseção anterior a existência de atratores está sob a hipótese de componentes s-ergódicas, aqui garantimos a existência das mesmas.

Lema 2.2.11. *Seja $Y \subseteq X$ um conjunto invariante com $\mu(Y) > 0$ para o qual existe $\delta > 0$ tal que para todo conjunto invariante $U \subseteq Y$ temos que $\mu(U) > 0 \Rightarrow \mu(W^s(U)) > \delta$. Então Y está contido em uma união finita de componentes $s-$ergódicas.*

Demonstração. Tome $Y_1 = Y$ e considere

$$\mathfrak{F}(Y_1) = \{W^s(U) \, : \, f^{-1}(U) = U \; e \; \mu(W^s(U)) > 0\}.$$

Note que $\mathfrak{F}(Y_1)$ é não vazio pois $W^s(Y_1) \in \mathfrak{F}(Y_1)$.

Afirmação 2.2.12. Para $W_1, W_2 \in \mathfrak{F}(Y_1)$ e $\mu(W_1 \backslash W_2) > 0$, então $W_1 \backslash W_2 \in \mathfrak{F}(Y_1)$.

Demonstração. Para mostrar esta afirmação, basta verificar que $W_1 \backslash W_2 = W^s(U_1 \backslash W^s(U_2))$ onde $U_1, U_2 \subset Y_1$ são invariantes tais que $W_1 = W^s(U_1)$ e $W_2 = W^s(U_2)$. De fato, visto que $U_1 \backslash W^s(U_2) \subseteq Y_1$ e $U_1 \backslash W^s(U_2)$ é invariante; para $W_1, W_2 \in \mathfrak{F}(Y_1)$ e $\mu(W_1 \backslash W_2) > 0$ então $W_1 \backslash W_2 \in \mathfrak{F}(Y_1)$.

Para provar que $W_1 \backslash W_2 = W^s(U_1 \backslash W^s(U_2))$, procedemos da seguinte maneira: Seja $x \in W_1 \backslash W_2$ isto é, $x \in W^s(U_1)$ e $x \notin W^s(U_2)$. Assim existe $u \in U$ tal que $x \in W^s(u)$ e $x \notin W^s(U_2)$ para todo $u_2 \in U_2$. Então, $x \notin W^s(z)$ para $z \in W^s(U_2)$. Consequentemente, $x \in W^s(U_1 \backslash W^s(U_2))$. Tome agora $x \in W^s(U_1 \backslash W^s(U_2))$. Então $x \in W^s(y)$ para algum $y \in U_1 \backslash W^s(U_2)$, assim, $y \in U_1$ e consequentemente $x \in W^s(U_1) = W_1$. Falta mostrar que $x \notin W_2$, suponha por absurdo que $x \in W_2$. Então $x \in W^s(U_2)$ e existe $u_2 \in U_2$ tal que $x \in W^s(u_2)$. Como $x \in W^s(y)$, então $y \in W^s(u_2)$, uma contradição pois $y \notin W^s(U_2)$. Assim, $x \in W_1 \backslash W_2$ e provamos que $W_1 \backslash W_2 = W^s(U_1 \backslash W^s(U_2))$. □

Considere agora uma ordem parcial em $\mathfrak{F}(Y_1)$ definida por $W_1 \succ W_2$ se, e somente se, $W_1 \supset W_2$ e $\mu(W_1 \backslash W_2) > 0$.

Para essa relação de ordem, todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathfrak{F}(Y_1)$ é finito e em particular tem limite inferior. De fato, suponha por contradição que exista $W_1 \succ W_2 \succ \ldots$ em $\mathfrak{F}(Y_1)$ com $\mu(W_k \backslash W_{k+1}) > 0$ para todo $k \geq 1$. Então

$$\sum_{k\geq 1}\mu(W_k\backslash W_{k+1})=\mu(W_1)<\infty$$

e assim $\mu(W_k\backslash W_{k+1})\to 0$ quando $k\to\infty$. Isto é uma contradição, pois $W_k\backslash W_{k+1}\in\mathfrak{F}(Y_1)$ para todo k.

Consequentemente, pelo Lema de Zorn, existe elemento minimal $W^s(U_1)\in\mathfrak{F}(Y_1)$, que é uma componente $s-$ergódica por construção.

Em seguida, considere $Y_2:=Y_1\backslash W^s(U_1)$. Se $\mu(Y_2)=0$, tome $Y=Y_1$ que está contido em $W^s(U_1)$ componente $s-$ergódica. Caso contrário, se $\mu(Y_2)>0$ repetimos o argumento obtendo $U_2\subseteq Y_2$ e outra componente $s-$ergódica $W^s(U_2)$.

Indutivamente, constrói-se

$$W^s(U_1),W^s(U_2),\ldots W^s(U_n)$$

este processo pára pois $\mu(W^s(U))>\delta$. □

Como consequência dos Lemas 2.2.5,2.2.9 e 2.2.11, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.2.13. *Suponha que exista um conjunto invariante Y com $\mu(Y)>0$ e $\delta>0$ tal que para todo conjunto invariante $U\subseteq Y$, sempre que $\mu(U)>0$, temos $\mu(W^s(U))>\delta$. Então existe um número finito de Atratores $A_1,A_2,...,A_l$ de X tais que para $\mu-$ quase todo ponto $x\in Y$ temos $\omega(x)=A_j$ para algum $1\leq j\leq l$.*

2.2.2 Existência de Atrator

O objetivo aqui é prova a proposição 2.2.1.

Seja M uma variedade Riemanianna compacta e limitada e μ uma medida de probabilidade Riemanianna definida em conjuntos Borel de M. Seja $f:M\to M$ um difeomorfismo C^{1+}, não necessariamente preservando a medida μ, $K\subset M$ um conjunto compacto positivamente invariante onde f é parcialmente hiperbólico, e $H\subseteq K$ um conjunto com $\mu(H)>0$, onde f é não-uniformemente expansor ao longo de E^{cu}.

Observação 2.2.14. Note que sob a hipótese de μ medida *parcialmente hiperbólica* com distorção limitada na direção centro instável, temos como consequência a Proposição 1.2.16.

A prova da Proposição 2.2.1 segue dos seguintes Lemas:

Lema 2.2.15. *Se μ é uma medida parcialmente hiper $\subset$ bólica f-não-singular finita com distorção limitada na direção centro-instável, então existem atratores $A_1,A_2,\ldots,A_l$ de*

M tais que, para $\mu-$ quase todo ponto $x \in H$ $(NUE - E^{cu})$, temos $\omega(x) = A_j$ para algum $1 \leq j \leq l$.

Demonstração. Defina $\widetilde{H} = \bigcup_{n \in Z} f^n(H)$. Como H é invariante e $\mu(H) > 0$, temos que $\widetilde{H}$ é invariante e $\mu(\widetilde{H}) > 0$. Para mostrar que existem uma quantidade l de conjuntos A_j devemos mostrar que $\widetilde{H}$ está contido em uma união finita de componentes $s-$ergódicas. Assim pela Proposição 2.2.13, basta mostrar que existe $\delta > 0$ tal que para todo conjunto $U \subseteq \widetilde{H}$ com $\mu(U) > 0$ temos $\mu(W^s(U)) > \delta$. Para tal prova só iremos usar que U é positivamente invariante, assim podemos supor que $U \subseteq K$ e, como K é positivamente invariante, é claro que se $\mu(W^s(U \cap K)) > \delta$, então $\mu(W^s(U)) > \delta$.

Considere que existe um $cu-$disco $\Delta \subseteq V$ tal que $\mu_\Delta(U) > 0$, onde μ_Δ é a medida induzida em Δ e V é δ_1-vizinhança de K. De fato, basta que considere um ponto $p \in U$ de densidade para a medida μ. Como T_pM tem decomposição igual a $E_p^s \oplus E_p^{cu}$, podemos considerar uma vizinhança da origem folheada por discos paralelos ao subespaço E^{cu}, cujas imagens pelo mapa exponencial $exp_p : B_\epsilon(0) \subset T_pM \to M$ são cu-discos na variedade M. Como o mapa exp_p é um difeomorfismo local, temos que a pré-imagem de U por exp_p tem medida positiva em T_pM e de densidade total na origem. Por Fubini, temos que pelo menos um disco intersecta este conjunto com medida positiva, e consequentemente sua imagem pelo mapa exp_p também. Considere agora a sequência $\ldots \subseteq W_2 \subseteq W_1 \subseteq \Delta$ e inteiros $n_1 < n_2 < \ldots$ dados pela Proposição 1.2.16. Pelo item três desta mesma Proposição a medida relativa de $f^{n_k}(U \cap \Delta)$ em Δ_k converge para 1. Uma vez que U é positivamente invariante, temos que a medida relativa de U em Δ_k converge para 1 e além disso $\mu_{D_k}(U) \to \frac{\delta_1}{4}$ quando $k \to \infty$. Como $U \subseteq K$, todos os pontos de U tem variedade estável local de tamanho uniforme e a folheação definida por essas variedades estáveis é absolutamente contínua. Isto mostra que $\mu(W^s(U \cap K)) > \delta$. Consequentemente pela Proposição 2.2.13, existem conjuntos fechados invariantes $A_1, A_2, \ldots, A_l$ tais que para $\mu-$quase todo ponto $x \in H$ temos $\omega(x) = A_j$ para algum $1 \leq j \leq l$. $\square$

Lema 2.2.16. *Se μ é uma medida parcialmente hiperbólica f-não-singular finita com distorção limitada na direção centro-instável, então cada $A = A_j$ contém um cu-disco Δ de raio $\frac{\delta_1}{4}$ para o qual f é não uniformemente expansor ao longo de E^{cu} para $\mu_\Delta-$ quase todo ponto em Δ .*

Demonstração. Para isto, considere

$$A^{(n)} = \{x \in H \,:\, dist(f^k(x), A) \leq \frac{1}{n} \,\forall\, k \geq 0\}.$$

Como os pontos $x \in H$ tal que $\omega(x) = A$ tem $\mu-$medida positiva, temos que $\mu(A^{(n)}) > 0$ para todo $n \geq 1$. Sendo assim, existe $cu-$disco $D^{(n)} \subseteq V$ tal que $\mu_{D^n}(A^{(n)}) >$

0 e sequência $\ldots \subseteq W_2^{(n)} \subseteq W_1^{(n)} \subseteq D^{(n)}$ com $n_1 < n_2 < \ldots$ tais que $D_k^{(n)} = f^{n_k}(W_k^{(n)})$ com $\mu_{D_k^{(n)}}(A^{(n)}) \longrightarrow \frac{\delta_1}{4}$quando $k \to \infty$.

Seja $p_k^{(n)}$o centro de cada disco $D_k^{(n)}$. Tomando subsequências, se necessário, temos que a sequência $\{p_k^{(n)}\}$ converge para o ponto $p^{(n)} \in K$. Usando Ascoli-Arzelà e o fato que os discos $D_k^{(n)}$ tem direções tangentes contidas em $cu-$cones, podemos assumir que a sequência $\{D_k^{(n)}\}$ converge uniformemente, quando $k \to \infty$, para o $cu-$disco $\triangle^{(n)}$ de raio $\frac{\delta_1}{4}$. Note que cada $\Delta^{(n)}$ está necessariamente contido em uma vizinhança de A de raio $\frac{1}{n}$.

Em consequência, temos que f é não uniformemente expansor ao longo de E^{cu} para $\mu_{\Delta^{(n)}}-$quase todo ponto em $\Delta^{(n)}$. De fato, a propriedade de ser não uniformente expansor é uma propriedade assintótica e, se é satisfeita para x, então é satisfeita para todo $y \in W^s(x)$. Além disso, todo ponto de $\Delta^{(n)}$ tem variedade estável local de tamanho uniforme e a folheação da variedade estável local é absolutamente contínua. Uma vez que $\{D_k^{(n)}\}$ converge uniformemente para $\Delta^{(n)}$, k grande, o disco $D_k^{(n)}$ intersecta a folheação estável de pontos de $\Delta^{(n)}$ e além disso, como $\mu_{D_k^{(n)}}(A^{(n)}) \to \frac{\delta_1}{4}$ e $A^{(n)} \subseteq H$, temos que f é não uniformemente expansor ao longo de E^{cu} para $\mu_{D_k^{(n)}}-$quase todo ponto em $\Delta^{(n)}$.

Agora, considere uma subsequência de $\{\Delta^{(n)}\}$ convegindo uniformemente para o $cu-$disco Δ de raio $\frac{\delta_1}{4}$ tal que f é não uniformemente expansor ao longo de E^{cu} para $\mu_\Delta-$quase todo ponto em Δ. Note que, cada $\Delta^{(n)}$ está contido em uma vizinhança de A de raio $\frac{1}{n}$ e Ω é fechado, assim $\Delta \subseteq A$. □

Lema 2.2.17. *$f\mid_A$ é transitivo.*

Demonstração. Por construção, temos que existe um ponto em H cujo $\omega-$limite coincide com A (na verdade existe um conjunto de medida positiva). A órbita de quase ponto deve eventualmente intersectar a variedade estável de algum ponto de $\Delta \subset A$. Como os pontos em variedade estável tem o mesmo $\omega-$limite, concluímos que existe um ponto de A cuja órbita é densa em A . □

E aqui termina a prova da proposição 2.2.1.

Como consequência destes resultados e do Lema 2.2.9, temos as seguintes versões da Proposição 2.2.1

Corolário 2.2.18. *Seja μ uma medida parcialmente hiperbólica com distorção limitada na direção centro-instável e H conjunto NUE. Existem conjuntos compactos $A^1_{+,\mathcal{U}}, A^2_{+,\mathcal{U}}, ..., A^l_{+,\mathcal{U}}$ de M tais que para $\mu-$quase todo ponto $x \in H$, temos $\omega(x) = A^j_{+,\mathcal{U}}$ para algum $1 \le j \le l$ que contém $cu-$disco.*

Definição 2.2.19. Um conjunto invariante U com $\mu(U) > 0$ é chamado de componente ergódica (componente μ ergódica em relação a f) se, para todo conjunto invariante $V \subset$

U, tem-se $\mu(V) = 0$ ou $\mu(V) = \mu(U)$. A medida μ é chamada ergódica se M é uma componente ergódica.

O próximo corolário é devida a Proposição 3.5 provada em [10].

Corolário 2.2.20. *Se μ é uma medida parcialmente hiperbólica f-não-singular finita ergódica, então existe um único conjunto compacto $A_{+,\mathcal{U}}$ de M tal que para $\mu-$quase todo ponto $x \in M$ temos $\omega(x) = A_{+,\mathcal{U}}$.*

Capítulo 3

Construção de uma Aplicação de Markov Induzido Local

Neste capítulo faremos a prova do Teorema A, descrito abaixo. Tal prova está dividida em duas partes: existência de $(F, \mathcal{P})$ *Aplicação Markoviana induzida* definido em um conjunto aberto $Y \subset K$, demonstrada na seção 3.1; e existência de uma *medida* ν $F-$invariante tal que $\int R d\nu < \infty$, demonstrada na seção 3.2.

Teorema. A. Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo C^{1+}, $K \subset M$ um conjunto compacto positivamente invariante em que f é parcialmente hiperbólico, $T_k M = E^{cs} \oplus E^{cu}$ onde E^{cs} é uniformemente contrativo . Assuma que f é não-uniformemente expansor ao longo de direção centro-instável (NUE-E^{cu}) para todo x em um conjunto $H \subseteq K$ de medida μ positiva. Se μ é uma medida $f-$invariante, ergódica e parcialmente hiperbólica, então existe $(F, \mathcal{P})$ uma aplicação Markoviana induzida definida em $Y \subset K$ e uma medida ν $F-$invariante tal que $\nu(B) \leq \mu(B)$ para todo conjunto aberto $B \subset Y$ e tal que $\int R d\nu < \infty$, onde R é tempo induzido de F.

3.1 Aplicação Markoviana Induzida

Nesta seção faremos a construção de uma aplicação markoviana induzida para medidas parcialmente hiperbólicas invariante e ergódica. Sejam $A_{+,\mathcal{U}}$ como na proposição 2.2.20, M e f como na subseção 2.2.2 e μ medida $Parcialmente\ Hiperb\acute{o}lica$ $f-$invariante e ergódica definida em M. Dado $cu-disco$ Δ considere $\Delta'_{\tilde{\xi}}$ como na Definição 2.1.8. Nesta secção construímos uma partição para $\mathcal{C}(\Delta'_{\tilde{\xi}})$.

Denote por $\mathcal{H} = (H_n(\sigma, \theta))_n$ o conjunto de todos os pontos de K com frequência positiva de tempos $\sigma - hiperb\acute{o}licos$, isto é

$$\limsup \frac{1}{n}\sharp\{1 \leq j \leq n; x \in H_j(\sigma,\theta)\} > 0.$$

Denote por $\xi_{\mathcal{H}} = (\xi_{\mathcal{H},n})_n$ como a coleção de todos os pré-discos $\sigma - hiperbólicos$, onde $\xi_{\mathcal{H},n} = \{V_n(x); x \in H_n(\sigma,\theta)\}$ é a coleção de todos os pré discos $\sigma - hiperbólicos$ de ordem n.

Dado $x \in \Delta'_{\tilde{\xi}}$ considere $\Omega(x)$ a coleção de ξ_H-pré-discos $\sigma - hiperbólico$ V de discos que $u-$atravessam $\hat{\mathcal{C}}(\Delta'_{\tilde{\xi}}) = \bigcup_{x\in\Delta'} W^s_{\delta_s+\epsilon_s}(x)$ tal que $x \in V$.

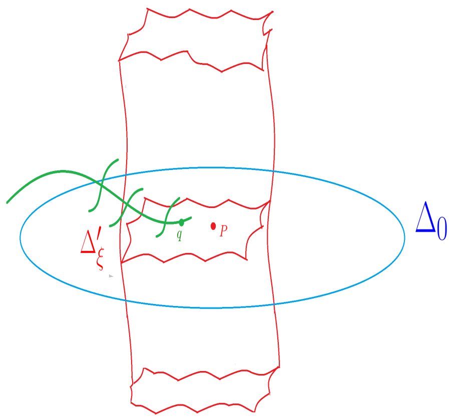
Observação 3.1.1. ϵ_s é tomado para evitar que $V_n(x)$ não seja considerada um elemento de $\Omega(x)$ quando $x \in \Delta'_{\tilde{\xi}}$ tenha um $h-$retorno a $\mathcal{C}(\Delta')$ próximo ao bordo e

$$\pi\left(f^{ordV_n(x)}(V_n(x)) \cap \mathcal{C}(\Delta'_{\tilde{\xi}})\right)$$

não contenha $\Delta'_{\tilde{\xi}}$.

Afirmação 3.1.2. O conjunto $\Omega(x)$ é não vazio.

Demonstração. Isso é sempre verdade para cada $x \in \Delta'_{\tilde{\xi}}$ que tem um $\xi_{\mathcal{H}}-$retorno a $\mathcal{C}(\Delta')$. Para verificarmos isso, basta tomar $\Delta'_{\tilde{\xi}}$ de centro em p e $q \in A_{+,\mathcal{U}}$ tal que $dist(p,q) < \frac{\delta_1}{4}$.



□

Definição 3.1.3. O tempo induzido em $\Delta'_{\tilde{\xi}}$ é a função $R : \Delta'_{\tilde{\xi}} \to \mathbb{N}$ dada por:

$$R(x) = \begin{cases} min\{ord(V); V \in \Omega(x)\}, & \Omega(x) \neq \varnothing \\ 0, & \Omega(x) = \varnothing \end{cases} \tag{3.1}$$

Nota 3.1.4. Dado $x \in \Delta'_{\tilde{\xi}}$, se $R(x) = n$ então para todo $y \in W^s_{\delta_s} x$ temos que $R(y) = n$. Além disso note que $R(x) \leq min\{n \geq 1; f^n(x) \in h(x) \cap \mathcal{C}(\Delta'_{\tilde{\xi}})\}$.

Definição 3.1.5. A aplicação induzida F em $\mathcal{C}(\Delta'_{\tilde{\xi}})$ é a aplicação $F : \mathcal{C}(\Delta'_{\tilde{\xi}}) \to \mathcal{C}(\Delta'_{\tilde{\xi}})$ dada por:

$$F(x) = f^{(R(x))}(x), \forall x \in \mathcal{C}(\Delta'_{\tilde{\xi}}). \tag{3.2}$$

A coleção $\Omega(x)$ é totalmente ordenada pela inclusão e, pelo Corolário 2.1.5, temos que existe um único $\tilde{P}(x) \in \Omega(x)$ tal que $ord(\tilde{P}(x)) = R(x)$, quando $\Omega(x) \neq \varnothing$. Assim, para $x \in \Delta'_{\tilde{\xi}}$ associamos $\tilde{P}(x)$ como anteriormente e

$$P(x) = (f^{R(x)} |_{\tilde{P}(x)})^{-1}(W^s_{\delta_s}(\Delta') \cap f^{R(x)}(\tilde{P}(x))),$$

com $x \in P$.

C:/Users/katia/Desktop/11868725_941494455907056_175003558_n.jpg

Lema 3.1.6. *Se $\Omega(x) \neq \emptyset \neq \Omega(y)$ então $P(x) = P(y)$ ou $P(x) \cap P(y) = \emptyset$.*

Demonstração. Suponha que $\Omega(x) \neq \emptyset$.

Afirmação 3.1.7. $P(x) \supset V$, $\forall V \in \Omega(x)$.

Demonstração. De fato, para a pova desta afirmação suponha por contradição que $P(x) \subsetneq V$ com $V \in \Omega(x)$. Pela definição de $P(x)$, temos que $ord(\bar{P}(x)) < ord(V)$. Consequentemente, como no Corolário 2.1.5, temos que $\Delta'_{\tilde{\xi}}$ está contido em uma $\tilde{\xi}_H-$pré-imagem de um $cu-$disco que $u-$atravessa $\mathcal{C}(\Delta'_{\tilde{\xi}})$. Mas isto é impossível, pois temos contração em tempos $\tilde{\sigma}-$hiperbólicos, isto é, o diâmetro de $\tilde{\xi}_H-$pré-imagem de $\Delta^{'}_{\tilde{\xi}}$ tem diâmetro menor que o diâmetro de $\Delta^{'}_{\tilde{\xi}}$. $\square$

Consequentemente, sejam $x, y \in M$ com $\Omega(x) \neq \emptyset \neq \Omega(y)$. Como $P(x)$ e $P(y)$ são ξ_H-pré-imagens de $cu-$discos que $u-$atravessam $\mathcal{C}(\Delta^{'}_{\tilde{\xi}})$, temos que $P(x)$ e $P(y)$ são não ligados, e temos dois casos: Um é $P(x) \cap P(y) = \emptyset$, e o segundo $P(x) \subset P(y)$ ou $P(x) \supset P(y)$. Se $P(x) \subset P(y)$, pela afirmação, temos que $P(x) \in \Omega(y)$ e, se $P(x) \supset P(y)$ temos $P(y) \in \Omega(x)$; nos dois casos, por unicidade $P(x) = P(y)$. $\square$

Definição 3.1.8. A partição de Markov associada ao primeiro $\xi_{\mathcal{H}}-$retorno a $\mathcal{C}(\Delta^{'}_{\tilde{\xi}})$ é a coleção de conjuntos abertos $\mathcal{P}$ dada por:

$$\mathcal{P} = \{ \bigcup_{y \in P(x)} (W^s_{\delta_s}(y)); x \in \Delta^{'}_{\tilde{\xi}}, \Omega(x) \neq \varnothing \}. \tag{3.3}$$

Corolário 3.1.9. *Sejam F definido por (3.2), R definido por (3.1) e $\mathcal{P}$ definido por (3.3). Se $\mathcal{P} \neq \emptyset$, então $(F, \mathcal{P})$ é uma aplicação Markoviana Induzida para f em $Y = \mathcal{C}(\Delta^{'}_{\tilde{\varepsilon}})$.*

Demonstração. Por construção, os elementos de $\mathcal{P}$ são conjuntos abertos. Pelo Lema 3.1.6, $\mathcal{P}$ satisfaz a condição (a) da Partição, Markoviana Induzida definida em 1.4.8, para a aplicação induzida F. Considere $C_i, C_j \in \mathcal{P}$. Pela contração forte na direção estável, temos o item (b.1) na definição, de Partição Markoviana Induzida. Como $F\mid_P = f^{R(P)}\mid_P$ e $P(x)$ é uma $\xi-$pré-imagem que contém x de ordem $R(x)$, existe um cu-pré-disco hiperbólico $V_{R(x)}(x)$ com $x \in H_{R(x)}(\sigma, \theta)$ tal que $f^{R(x)}$ envia difeomorficamente $V_{R(x)}(x)$ no cu-disco $f^{R(x)}(V_{R(x)}(x))$. Isto conclui a prova do Corolário. $\square$

3.2 Existência de medida F-invariante.

Primeiramente, reduziremos a aplicação $F : \mathcal{C}(\Delta^{'}_{\tilde{\xi}}) \to \mathcal{C}(\Delta^{'}_{\tilde{\xi}})$ a um a aplicação expansora. Para isso considere a seguinte aplicação $\bar{F} : \Delta^{'}_{\tilde{\xi}} \to \Delta^{'}_{\tilde{\xi}}$ definida por $\bar{F}(x) = \pi(F(x))$. Com isso temos a seguinte partição de $\Delta^{'}_{\tilde{\xi}}$ a partir de (3.3).

Definição 3.2.1. A Partição de Markov para $\Delta^{'}_{\xi}$ é a coleção de conjuntos abertos $\mathcal{P}$ dada por:

$$\bar{\mathcal{P}} = \{P(x); x \in \Delta^{'}_{\tilde{\varepsilon}}, \Omega(x) \neq \varnothing\} \tag{3.4}$$

Observação 3.2.2. A partição definida pela equação (3.4) satisfaz a partição da definição 1.4.3.

Teorema 3.2.3. Seja $(F,\mathcal{P})$ como acima. Se μ é uma medida pacialmente hiperbólica $f-$invariante e ergódica, então existe uma medida finita ν $F-$invariante ergódica tal que $\nu(Y)\leq\mu(Y)$ para todo conjunto aberto $Y\subset\mathcal{C}(\Delta'_{\tilde{\varepsilon}})$ e tal que $\int R d\nu<\infty$.

Antes de construir uma medida $F-$invariante ergódica ν, iremos construir uma medida $\bar{\nu}$, $\bar{F}-$invariante tal que $\int R d\bar{\nu}<\infty$.

Teorema 3.2.4. Seja $(\bar{F},\bar{\mathcal{P}})$ como acima. Se μ é uma medida parcialmente hiperbólica $f-$invariante e ergódica, então existe uma medida finita $\bar{\nu}$ $\bar{F}-$invariante ergódica tal que $\bar{\nu}(Y)\leq\mu(W^s_{\delta_s}(Y))$ para todo conjunto aberto $Y\subset\Delta'_{\tilde{\varepsilon}}$.

Demonstração. Seja $\mathcal{B}=\{x\in\Delta'_{\tilde{\varepsilon}};\bar{F}^j(x)\in\bigcup_{P\in\bar{\mathcal{P}}}P\ \forall j\geq 0\}$. Com isso temos que $\mathcal{B}$ é um espaço métrico com a distância definida em Δ e $\mathcal{B}=\Delta'_{\tilde{\varepsilon}}(\mu_{\Delta}mod0)$.

Seja $\mathcal{W}$ uma coleção de subconjuntos de $\mathcal{B}$ formada pelo conjunto vazio e todos os conjuntos $Y\subset\mathcal{B}$ tal que $Y=(\bar{F}\mid_{P_1})^{-1}\circ\cdots\circ(\bar{F}\mid_{P_s})^{-1}(\mathcal{B})$ para alguma sequência $P_1,\ldots,P_s\in\bar{\mathcal{P}}$. Note que os elementos de $\mathcal{W}$ são conjuntos abertos de todos as $\bar{F}$ pré-imagens difeomorficas de $\mathcal{B}$, juntamente com o conjunto vazio. Dados $Y\subset\mathcal{B}$ e $r>0$, seja $\mathcal{W}(r,Y)$ formado por todas as coberturas enumeráveis $\{I_i\}$ de Y por elementos de $\mathcal{W}$ com diâmetro menor ou igual a r, qualquer que seja i.

Dado um conjunto aberto $Y\subset\mathcal{B}$, seja $\tau(Y)\in[0,1]$ tal que

$$\tau(Y)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{0\leq j<n;f^j(x)\in W^s_{\delta_s}(Y)\cap\mathcal{O}^+_F(x)\}\tag{3.5}$$

para μ_{Δ}quase todo ponto $x\in M$.

Afirmação 3.2.5. A função τ tem as seguintes propriedades:

1) $\tau(\emptyset)=0$;

2) $\tau(\mathcal{B})\geq\lambda>0$;

3) $\tau(Y_1)\leq\tau(Y_2)$ onde $Y_1\subset Y_2$ são subconjuntos abertos de $\mathcal{B}$;

4) $\tau(\cup_{i=1}^{\infty}Y_i)\leq\cup_{i=1}^{\infty}\tau(Y_i)$ onde Y_i são subconjuntos abertos de $\mathcal{B}$ para todo i;

5) $\tau(Y)\leq\mu(W^s_{\delta_s}(Y))$ para todo conjunto aberto $Y\subset\mathcal{B}$;

6) $\tau(\bar{F}^{-1}(Y))=\tau(Y)$ para todo conjunto aberto $Y\subset\mathcal{B}$;

Demonstração. Os itens 1, 3 e 4 seguem da definição de τ (3.5). Para o item 2, temos que, pela Proposição 1.2.9, existe θ tal que $\tau(\mathcal{B})\geq\theta>0$. Quanto ao item (5), pelo Teorema de Birkhoff, $\mu(W^s_{\delta_s}(Y))=\lim\frac{1}{n}\sharp\{0\leq j<n;f^j(x)\in W^s_{\delta_s}(Y)\}$ para todo conjunto aberto $Y\subset\mathcal{B}$ e μ quase todo ponto x. Por outro lado, temos que $\mu(W^s_{\delta_s}(Y))=\lim\frac{1}{n}\sharp\{0\leq j<n;f^j(x)\in W^s_{\delta_s}(Y)\}\geq\limsup\frac{1}{n}\sharp\{0\leq j<n;f^j(x)\in W^s_{\delta_s}(Y)\cap\mathcal{O}^+_F(x)\}=\tau(Y)$. Assim,

$\tau(Y) \leq \mu(W^s_{\delta_s}(Y))$ para todo conjunto aberto $Y \subset \mathcal{B}$. Para verificar último item (6), considere $Y \subset \mathcal{B}$. Como $\bar{F}^j(x) \in Y \Leftrightarrow \bar{F}^{j-1}(x) \in \bar{F}^{-1}(Y)$, $\forall j \geq 1$ $\forall x \in \mathcal{B}$, temos que $\tau(\bar{F}^{-1}(Y)) = \tau(Y)$ para todo conjunto aberto $Y \subset \mathcal{B}$. $\square$

Note que τ, restrita a $\mathcal{W}$, é uma pré-medida segundo Rogers em [11] (Definição 5). Dado $Y \subset \mathcal{B}$, defina

$$\bar{\nu}(Y) = \sup_{r>0} \nu_r(Y),$$

onde $\nu_r(Y) = \inf_{\mathcal{I}\in\mathcal{W}(r,Y)} \sum_{I_i\in\mathcal{I}} \tau(I_i)$ e $\mathcal{W}(r,Y)$ é o conjunto de todas as coberturas enumeráveis $\mathcal{I} = \{I_i\}$ de Y por elementos de $\mathcal{W}$ com $diam(I_i) \leq r$, $\forall i$. A função ν, definida na classe de todos os subconjuntos de $\mathcal{B}$, é chamada em [11] de *medida métrica obtida da pré − medida τ pelo método II* (Teorema 15 de [11]).

Pela construção feita para $(\bar{F}, \bar{\mathcal{P}})$ temos que

$$I_1 \subset I_2 \ ou \ I_2 \subset I_1 \ ou \ I_1 \cap I_2 = \emptyset, \ \forall\, I_1, I_2 \in \mathcal{W}. \tag{3.6}$$

Assim, podemos tomar $\widetilde{\mathcal{W}}(r,Y) = \{\{I_i\} \in \mathcal{W}(r,Y);\ I_i \cap I_j = \emptyset\ \forall i \neq j\}$ e definir

$$\nu_r(Y) = \inf_{\mathcal{I}\in\widetilde{\mathcal{W}}(r,Y)} \sum_{I_i\in\mathcal{I}} \tau(I_i).$$

Afirmação 3.2.6. A medida $\bar{\nu}$ é $\bar{F}-$invariante e $\bar{\nu}(Y) \leq \mu(W^s_{\delta_s}(Y))$ para todo conjunto aberto $Y \subset \mathcal{B}$.

Demonstração. Note que,

$$\mu(W^s_{\delta_s}(Y) = \inf_{\mathcal{I}\in\widetilde{\mathcal{W}}(r,Y)} \mu(\cup_{I\in\mathcal{I}}(W^s_{\delta_s}(I))) =$$

$$= \inf_{\mathcal{I}\in\widetilde{\mathcal{W}}(r,Y)} \sum_{I\in\mathcal{I}} \mu(W^s_{\delta_s}(I)) \geq \inf_{\mathcal{I}\in\widetilde{\mathcal{W}}(r,Y)} \sum_{I\in\mathcal{I}} \tau(I) = \nu_r(Y)$$

para todo $r > 0$. Assim, $\bar{\nu}(Y) \leq \mu(W^s_{\delta_s}(Y))$ para todo conjunto aberto $Y \subset \mathcal{B}$. Quanto à prova de que $\bar{\nu}$ é $\bar{F}-$invariante, segue de forma análoga à prova da Afirmação 3 na Prova do Teorema 1 em [10]. Isto conclui a prova da Afirmação 3.2.6. $\square$

Para finalizar a prova do Teorema 3.2.4 estendemos $\bar{\nu}$ para $\Delta'_{\bar{\varepsilon}}$ definindo $\bar{\nu}(\Delta'_{\bar{\varepsilon}} \setminus \mathcal{B}) = 0$. $\square$

Vamos agora mostrar que $\int R d\bar{\nu} < \infty$.

Lema 3.2.7. O tempo R de indução é $\bar{\nu}$ integrável.

Demonstração. Suponha, por contradição, que $\int Rd\bar{\nu} \in (\gamma, +\infty]$ para algum $\gamma > \frac{1}{\theta} \in \mathbb{R}$. Como $\bar{\nu}$ é $\bar{F}-$ invariante e $R \geq 0$, segue pelo Teorema Ergódico de Birkhoff, que existe $\tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$ com $\nu(\tilde{\mathcal{B}}) > 0$ tal que, para todo $x \in \tilde{\mathcal{B}}$, existe algum $n_x \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=0}^{n} R \circ \bar{F}^k(x) > \alpha n, \quad \forall n \geq n_x.$$

Neste caso, para todo $n > \alpha n_x \geq n_x$ e todo $\frac{1}{\alpha} n \leq j < n$, temos

$$\sum_{k=0}^{n} R \circ \bar{F}^k(x) > \alpha j = \alpha \frac{j}{n} n \geq n, \quad \forall n \geq n_x.$$

Assim,

$$sup\{j \geq 0; \sum_{k=0}^{j} R \circ \bar{F}^k(x) < n\} \leq \frac{1}{\alpha} n < \theta n \tag{3.7}$$

para todo $n \geq \alpha n_x$ e todo $x \in \tilde{\mathcal{B}}$.

Como $\{j \geq 0; \sum_{k=0}^{j} R \circ F^k(x) < n\} = \{0 \leq j < n; f^j(x) \in \mathcal{O}_F^+(x)\}$ e $sup\{j \geq 0; \sum_{k=0}^{j} R \circ F^k(x) < n\} = \sharp\{j \geq 0; \sum_{k=0}^{j} R \circ F^k(x) < n\}$, temos que

$$\sharp\{0 \leq j < n; f^j(x) \in \mathcal{O}_F^+(x)\} = sup\{j \geq 0; \sum_{k=0}^{j} R \circ F^k(x) < n\}. \tag{3.8}$$

Aplicando $\limsup_n \frac{1}{n}$ na equação (3.8) e usando na equação (3.7) temos que para todo $x \in \tilde{\mathcal{B}}$

$$\limsup \frac{1}{n} \sharp\{0 \leq j < n; f^j(x) \in \mathcal{O}_F^+(x)\} < \theta.$$

Isto é uma contradição, visto que $\mu_{\Delta'_\xi}(H) > 0$; provando assim que $\int Rd\bar{\nu} < \theta^{-1}$. □

Considere agora um ponto típico x_0 para a medida $\bar{\nu}$. Passando a uma subsequência se necessário, temos que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{\bar{F}^j(x_0)} \longrightarrow^{W^*} \bar{\nu}.$$

Onde $\longrightarrow^{w^*}$ significa a convergência da topologia fraca*.

Afirmação 3.2.8. Se $p \in W^s_{\delta_s}(x_0)$ é ponto típico para μ, então existe ν $F-$invariante.

Demonstração. De fato, como $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(p)} \longrightarrow^{W^*} \mu$ e $f^{(R(x))}(x) = F(x)$, temos que, tomando se necessário uma subsequência, a sequência $\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{F^j(p)}$ converge para ν, $F-$invariante. □

Diante disto, provamos o seguinte:

Lema 3.2.9. *Dado $\bar{\nu}$ $\bar{F}$ invariante, então existe ν $F-$ invariante.*

Demonstração. Considere

$$U = \{x \in \mathcal{B}; \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{\bar{F}^j(x)} \longrightarrow^{W^*} \bar{\nu}\}$$

. Temos que $\bar{\nu}(U) > 0$ e, pela Afirmação 3.2.6, segue

$$0 < \bar{\nu}(U) \leq \mu(W^s_{\delta_s}(U)).$$

Assim, para $p \in W^s_{\delta_s}(U)$ como na afirmação anterior, como

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(p)} \longrightarrow^{W^*} \mu$$

e $f^{(R(x))}(x) = F(x)$ temos que, tomando se necessário uma subsequência, a sequência $\nu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{F^j(p)}$ converge para ν, $F-$invariante. □

Afirmação 3.2.10. *O tempo R de indução é ν integrável.*

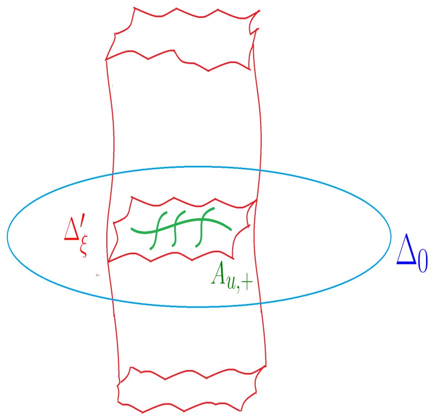
Demonstração. De fato, pois $\infty > \int R d\bar{\nu} = \lim_n \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} R \circ \bar{F}^j(\pi(p)) = \lim_n \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} R \circ F^j(p) = \int R d\nu$. □

Capítulo 4

Existência de Medida Invariante.

Neste capítulo faremos a prova do Teorema B, descrito abaixo. Tal prova está dividida em duas partes: Mostrar que $(F, \mathcal{P})$ *mapa Markoviano induzido* definido em $Y \subset K$ *satisfaz* a estrutura Torres de Young definida na subseção 1.3, o que é feito na seção 4.1; e existência de uma *medida* ν $F-$invariante tal que $\int R d\nu < \infty$, demonstrada na seção 4.2.

Teorema. B. Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo C^{1+}, $K \subset M$ um conjunto compacto positivamente invariante em que f é parcialmente hiperbólico, $T_k M = E^{cs} \oplus E^{cu}$ onde E^{cs} é uniformemente contrativo. Assuma que f é *NUE-*E^{cu} para todo ponto x em um conjunto $H \subseteq K$ de medida μ positiva. Se μ tem controle de distorção na direção centro-instável, então existe uma coleção de medidas $f-$invariantes ergódicas ν_s absolutamente contínuas com respeito a μ tais que $\mu-$quase todo ponto $x \in K$ pertence à bacia de uma destas medidas.



Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo C^{1+} em uma variedade Riemanianna M.

Inicialmente iremos verificar que a partição construída anteriormente é uma estrutura do mesmo tipo que a presente em [14] denominada Estrutura Torres de Young.

Para isto, considere um disco centro-instável Δ como no Lema 2.2.16, e a partição $\mathcal{P}$ de $\mathcal{C}(\Delta'_{\tilde{\xi}})$ $(\mu_\Delta mod0)$ (ver equação (1.8)) construída no capítulo 2; para o que se segue definimos

$$\Gamma^s = \{W^s_{\delta_s}(x)\ :\ x \in \Delta\}.$$

Além disso, definimos a família Γ^u como o conjunto de todas as variedades instáveis locais intersectando $\mathcal{C}(\Delta)$ que $u-$atravessam $\mathcal{C}(\Delta)$(ver equação(1.9)). Claramente Γ^s e Γ^u são não vazios, pois para todo $x \in \Delta$ existe $W^s_{\delta_s}(x)$ e $\Delta \in \Gamma^u$, respectivamente. Observe também que Γ^u é compacto, pois pela propriedade de dominação e o Teorema de Ascoli-Arzela, qualquer disco limite Δ_∞ de discos em Γ^u é um cu-disco u-atravessando $C(\Delta)$, ao mesmo tempo que está contido em $C(\Delta)$ uma vez que $C(\Delta)$ seja fechado. Pela definição de Γ^u, podemos ver que $\Delta_\infty \in \Gamma^u$.

4.1 Partição Markoviana Induzida

Nesta seção iremos mostrar que a Partição Markoviana Induzida construída no capítulo 3 satisfaz a Estrutura - Torre de Young, para isto verificamos que esta estrutura satisfaz as propriedades (P1) - (P5) da estrutura produto definida na subseção 1.3.

Definimos os $s-$subconjuntos $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ como os cilindros $\{C(P) \cap \Gamma^u\}_{P \in \mathcal{P}}$ dados em 3.3, onde

$$C(P) = \bigcup_{x \in P} W^s_{\delta_s}(x).$$

A primeira propriedade (P_1) é descrita nos seguintes termos:

Lema 4.1.1. *$\mu_\gamma\{\gamma \cap \Lambda\} > 0$ para todo $\gamma \in \Gamma^u$.*

Demonstração. De fato, por construção temos que $f^{R(P)}(P)$ é um $u-$subconjunto de $\mathcal{C}(\Delta)$ para todo $P \in \mathcal{P}$ e é constituído por $cu-$discos contidos em $\mathcal{C}(\Delta)$, e além disso temos que $f^{R(\tilde{P})}(\tilde{P})$ $u-$atravessa $W^s_{\delta_s}(\Delta')$. □

O próximo Lema dá precisamente a propriedade (P_2).

Lema 4.1.2. *Os s- subconjuntos $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ são tais que:*

1. Em cada γ^u-disco, $\mu_{\gamma^u}\{(\Lambda - \cup\Lambda_i) \cap \gamma^u\} = 0$;

2. Para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $R(\Lambda_i) \in \mathbb{N}^+$ tal que $f^{R(\Lambda_i)}(\Lambda_i)$ é um u-subconjunto de Λ; mais precisamente $f^{R(\Lambda_i)}(\gamma^s(x)) \subset \gamma^s(f^{R(\Lambda_i)}x)$ e $f^{R(\Lambda_i)}(\gamma^u(x)) \supset \gamma^u(f^{R(\Lambda_i)}x)$;

Demonstração. Basta mostrar que $f^{R(\Lambda_i)}(\Lambda_i)$ é um u-subconjunto. De fato, dado um elemento $P \in \mathcal{P}$, por construção temos que existe $R(P) \in \mathbb{N}$ tal que $f^{R(P)}(P)$ é um disco centro instável u-atravessando $C(\Delta)$. Uma vez que cada γ^u é uma cópia difeomorfica de Δ, $\Gamma^u \cap C(\Lambda_i) \in \bigcup_{x\in\omega} W^s_{\delta_s}(x)$. Uma vez que, por construção $f^{R(P)}(P)$ intersecta $W^s_{\delta_s}(p)$ então de acordo com a escolha de δ_0 e da invariância das folhas estáveis, temos que cada elemento de $f^{R(P)}(\Gamma^u \cap C(P))$ obrigatoriamente u-atravessa $C(\Delta)$ e está contido na $\alpha^{R(P)}\delta_s-$vizinhança $f^{R(P)}(P)$, provando assim que $f^{R(\Lambda_i)}(\Lambda_i)$ é um u-subconjunto. □

Para a propriedade P_3 temos que seu resultado é imediato pois para todo ponto $x \in \Delta$ existe variedade estável local.

Já as propriedades $(P_4(1))$ e $(P_4(2))$ são dadas pelo seguinte Lema:

Lema 4.1.3. *Para todo $x, y \in \Lambda_i$ com $y \in \gamma^u(x)$, e $0 \leq n < R(\Lambda_i)$ temos que existem $C > 0$, $\alpha < 1$ e $0 < \varsigma \leq 1$ tais que:*

$$dist(f^n(y), f^n(x)) \leq C\alpha^{R(\Lambda_i)-n} dist(f^{R(\Lambda_i)}(x), f^{R(\Lambda_i)}(y))$$

e

$$\left| log \frac{J_\mu f^{R(\Lambda_i)}(x)}{J_\mu f^{R(\Lambda_i)}(y)} \right| \leq C dist(f^{R(\Lambda_i)}(x), f^{R(\Lambda_i)}(y))^\varsigma$$

Demonstração. De fato, pela construção dado x em um $cu-$disco, temos que existe $V_n(x) \supset P(x)$ com n tempo $\sigma-$hiperbólico satisfazendo $ord(P(x)) = R(x)$. Por outro lado, como consequência da propriedade (1.4), temos que se $y \in K$ satisfaz $dist(f^j(x), f^j(y)) \leq \delta_1$ para $0 \leq j \leq n-1$, então n é um tempo $\sigma^{\frac{3}{4}}-$hiperbólico para y. Assim, pelo item 2 do Lema 1.2.10, temos a contração para o passado. Quanto à distorção limitada, para $0 \leq i < n$ e $y \in D$ cu-disco temos

$$\left| log \frac{J_\mu f^{R(\Lambda_i)}(x)}{J_\mu f^{R(\Lambda_i)}(y)} \right| = \left| \sum_{i=0}^{R(\Lambda_i)} (log J_\mu f \mid_{T_{f^i(x)} f^i(D)} - log J_\mu f \mid_{T_{f^i(y)} f^i(D)}) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{R(\Lambda_i)} \left| (log J_\mu f \mid_{T_{f^i(x)} f^i(D)} - log J_\mu f \mid_{T_{f^i(y)} f^i(D)}) \right| \leq$$

$$\leq C dist(f^{R(\Lambda_i)}(x), f^{R(\Lambda_i)}(y))^\varsigma$$

□

Para a propriedade $(P_5(1))$ temos o seguinte Lema:

Lema 4.1.4. *Existe $C > 0$ e $0 < \alpha < 1$ tais que para todo $y \in \gamma^s(x)$ e $n \geq 0$*

$$log \prod_{i=n}^{\infty} \frac{J_\mu(f^i x)}{J_\mu(f^i y)} \leq C\alpha^n.$$

Demonstração. Como assumimos que a medida μ é parcialmente hiperbólica tem controle de distorção na direção centro-instável, a conclusão segue imediatamente pela contração uniforme das folhas estáveis. $\square$

Para provar a propriedade $(P_5(2))$ introduziremos algumas notações. Dizemos que $\phi : N \to P$, onde N e P são subvariedades de M, é absolutamente contínua se, sempre que $f\mid_A$ é uma aplicação injetiva, e existe $J : N \to \mathbb{R}$ tal que

$$\mu_P(\phi(A)) = \int_A J d\mu_N.$$

J é chamada Jacobiano de ϕ. A propriedade $(P_5(2))$ é descrita nos seguintes termos:

Lema 4.1.5. *Dados $\gamma, \gamma' \in \mathit{\Gamma}^u$, defina $\Theta : \gamma \to \gamma'$ por $\Theta(x) = \gamma^s(x) \cap \gamma$. Então Θ é absolutamente contínua e o Jacobiano de Θ é dado por:*

$$J(x) = \frac{d(\Theta_\star^{-1}\mu_{\gamma'})}{d\mu_\gamma}(x) = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{J_\mu(f^i(x))}{J_\mu(f^i(\Theta(x)))}.$$

Note que para a medida μ pacialmente hiperbólica com controle de distorção na direção centro-instável temos que Θ é absolutamente contínua. Para a prova da segunta parte apresentamos algumas notações e resultados gerais sobre a convergência de Jacobianos. A prova do próximo Lema está em [[7],Teorema 3.3].

Lema 4.1.6. *Sejam N e P variedades, P com volume finito, e para cada $n \geq 1$, seja $\Theta_n : N \to P$ aplicações contínuas com jacobianos J_n. Assuma que J_n* converge uniformemente para uma função integrável $J : N \to \mathbb{R}$. Então Θ tem Jacobiano J.

Considere agora $\gamma, \gamma' \in \Gamma^u$ e $\Theta : \gamma' \to \gamma$ como no Lema 4.1.5. A prova do Lema seguinte é dado em [[7], Lema 3.4] para difeomorfismos uniformemente hiperbólicos. No entanto, pode-se facilmente ver que este é obtido como consequência do [[7], Lema 3.8] cuja prova usa somente a existência de decomposição dominada.

Lema 4.1.7. *Para cada $n \geq 1$, existe aplicação absolutamente continua $\pi_n : f^n(\gamma) \to f^n(\gamma')$ com Jacobiano G_n satisfazendo:*

1. $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\gamma} dist_{f^n(\gamma)}(\pi_n(f^n(x), f^n(\Theta(x))) = 0$;

2. $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in f^n(\gamma)} \mid 1 - G_n(x) \mid= 0$.

Ainda para a prova da segunda parte do Lema 4.1.5, considere uma sequência de tempos induzidos consecutivos para pontos em Λ

$$r_1 = R \qquad e \qquad r_{n+1} = r_n + R \circ f^{r_n} \qquad para \quad n \geq 1.$$

Note que estas funções são definidas em $\mu-$quase todos os pontos em cada $\gamma \in \Gamma^u$ e são constantes por partes.

Observação 4.1.8. Usando a sequência de tempos de retorno, podemos facilmente construir sequências de Partições $(\mathtt{Q}_n)_n$ $\mu_\gamma mod0$ como feito antes tais que as propriedades $(P_1) - (P_5(1))$ continuam se verificando e as constantes $C > 0$ e $0 < \beta < 1$ podem ser tomadas não dependendo de n.

Definimos para cada $n \geq 0$, o mapa $\Theta_n : \gamma \to \gamma'$ como

$$\Theta_n = f^{-r_n}\pi_{r_n}f^{r_n}. \tag{4.1}$$

Isto basta para verificar que Θ_n tem Jacobiano dado por

$$J_n(x) = \frac{\mid J_{\mu_\gamma}(f^{r_n})^u(x) \mid}{\mid J_{\mu_\gamma}(f^{r_n})^u(\Theta_n(x)) \mid} G_{r_n}(f^{r_n}(x)) \tag{4.2}$$

Afirmação 4.1.9. $(J_n)_n$ converge uniformemente para J .

Demonstração. Por (4.2) temos que

$$J_n(x) = \frac{\mid J_{\mu_\gamma}(f^{r_n})^u(x) \mid}{\mid J_{\mu_\gamma}(f^{r_n})^u(\Theta_n(x)) \mid}.\frac{\mid J_{\mu_\gamma}(f^{r_n})^u(\Theta(x)) \mid}{\mid J_{\mu_\gamma}(f^{r_n})^u(\Theta(x)) \mid}.G_{r_n}(f^{r_n}(x)) =$$

$$= \frac{\mid J_{\mu_\gamma}(f^{r_n})^u(x) \mid}{\mid J_{\mu_\gamma}(f^{r_n})^u(\Theta(x)) \mid}.\frac{\mid J_{\mu_\gamma}(f^{r_n})^u(\Theta(x)) \mid}{\mid J_{\mu_\gamma}(f^{r_n})^u(\Theta_n(x)) \mid}.G_{r_n}(f^{r_n}(x))$$

Usando a regra da cadeia e o Lema 4.1.4, concluímos que o primeiro termo do produto converge uniformemente para $J(x)$. Pelo Lema 4.1.7 temos que o terceiro termo do produto converge uniformemente para 1. Resta ver que o termo do meio converge uniformemente para 1. Por distorção limitada temos

$$\frac{\mid J_{\mu_\gamma}(f^{r_n})^u(\Theta(x)) \mid}{\mid J_{\mu_\gamma}(f^{r_n})^u(\Theta_n(x)) \mid} \leq exp(Cdist_{f^{r_n}(\gamma')}(f^{r_n}(\phi(x)), f^{r_n}(\phi_n(x)))^{\varsigma})$$

como $\Theta_n = f^{-r_n}\pi_{r_n}f^{r_n}$ temos que

$$\frac{\mid J_{\mu_\gamma}(f^{r_n})^u(\Theta(x)) \mid}{\mid J_{\mu_\gamma}(f^{r_n})^u(\Theta_n(x)) \mid} \leq exp(Cdist_{f^{r_n}(\gamma')}(f^{r_n}(\phi(x)), \pi_{r_n}(f^{r_n}(x)))^{\varsigma})$$

do mesmo modo

$$\frac{\mid J_{\mu_\gamma}(f^{r_n})^u(\Theta(x)) \mid}{\mid J_{\mu_\gamma}(f^{r_n})^u(\Theta_n(x)) \mid} \geq exp(-Cdist_{f^{r_n}(\gamma')}(f^{r_n}(\phi(x)), \pi_{r_n}(f^{r_n}(x)))^{\varsigma}).$$

□

Concluindo assim a prova do Lema 4.1.5.

4.2 Existência de medida f-invariante.

Para a conclusão da prova do Teorema B, nesta seção provaremos a existência de uma *medida* ν $F-$invariante tal que $\int Rd\nu < \infty$. Tal prova segue as seguintes etapas:

1. Construir uma medida f^R-invariante ν_0 em K com medidas condicionais absolutamente contínuas com respeito a μ em cu-discos Δ_i;

2. Consequentemente ν_0 é F^R-invariante;

3. Definir $\nu := \sum_{P\in\mathcal{P}}\sum_{j=0}^{R(P)-1} f_*^j(\nu_0 \mid_P)$ absolutamente contínua com respeito a μ em cu-discos.

Proposição 4.2.1. *Sob as hipóteses do Teorema B, se a medida μ tem controle de distorção na direção centro-instável, então existe uma coleção de medidas $f-$invariantes ergódicas ν_s absolutamente contínuas com respeito a μ tais que $\mu-$quase todo ponto $x \in K$ pertence à bacia de uma destas medidas.*

Demonstração. Para construir ν_0, fixe $\Delta'_{\tilde{\varepsilon}}$ como anteriomente. Recorde que pela propriedade (P_5), para toda $\gamma \in \mathit{\Gamma}^u$, $\mu_\gamma \mid (\gamma\cap\Lambda)$ são uniformemente equivalentes. Considere $\mu_0 := \mu_{\Delta'} \mid (\Delta'\cap K) > 0$. Sejam $\rho_j^{\Delta'}$ as densidades das medidas condicionais de $(f^R)_*^j\mu_0$ em cu-discos, isto é, $\rho_j^{\Delta'} = \frac{d(f^R)_*^j\mu_0}{d\mu_{\Delta_i}}/((f^R)_*^j\mu_0)(\Delta_i)$ para algum Δ_i. Pelo Lema de distorção temos que

$$\frac{\rho_j^{\Delta_i}(x)}{\rho_j^{\Delta_i}(y)} \leq C_2, \qquad \forall x, y \in \Delta_i \cap K.$$

Em particular, existe $M_0 > 0$, independente de j e Δ_i, tal que

$$M_0^{-1} \leq \rho_j^{\Delta_i} \leq M_0 \qquad em \quad \Delta_i\cap K$$

Seja ν_0 o ponto de acumulação de $\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(f^R)_*^j\mu_0\right\}_{n=1,2,\ldots}$ na topologia-fraca*, e sejam $\{\nu_0^{\Delta_i}\}$ as medidas condicionais de ν_0 em cu-discos.

Claramente, $\nu_0^{\Delta_i} \ll \mu_{\Delta_i}$. Consequentemente temos que ν_0 é F^R-invariante.

Seja

$$\tilde{\nu} := \sum_{j=0}^{\infty} F_*^j(\nu_0 \mid \{R > j\}),$$

e observe que $\nu_0^{\Delta_i}$ é uniformemente equivalente a $\mu_{\Delta_i} \mid (\Delta_i\cap K)$, a finitude de $\tilde{\nu}(\Delta'_{\tilde{\varepsilon}})$ equivale a $\int_{\Delta_i\cap K} Rd\mu_{\Delta_i} < \infty$.

Defina

$$\nu := \sum_{P\in\mathcal{P}}\sum_{j=0}^{R(P)-1} f_*^j(\tilde{\nu}\mid_P)$$

uma medida $f-$invariante e absolutamente contínua com respeito a μ com cu-discos. $\square$

Capítulo 5

Exemplo e Aplicações

Apresentamos no que segue exemplos de aplicações dos resultados demonstrados nos capítulos anteriores.

5.1 Entropia de um sistema dinâmico

Teorema 5.1.1. Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo C^{1+}, $K \subset M$ um conjunto compacto positivamente invariante em que f é parcialmente hiperbólico, $T_kM = E^{cs} \oplus E^{cu}$ onde E^{cs} é uniformemente contrativo . Assuma que f é não-uniformemente expansor ao longo de direção centro-instável (NUE-E^{cu}), isto é

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \log \| Df^{-1} |_{E^{cu}_{f^j(x)}} \|^{-1} > 0$$

para todo x em um conjunto $H \subseteq K$ de medida positiva. Se a medida μ é $f-$invariante e ergódica, então para todo $\alpha \in [0, h_\mu(f)]$ existe ν medida de probabilidade $f-$invariante ergódica tal que $h_\nu(f) = \alpha$.

Demonstração. Sejam Δ'_{ξ} como na Definição 2.1.8, F, R e $\mathcal{P}$ como no Corolário 3.1.9 e ν uma medida $F-$invariante dada pelo Lema 3.2.9. Note inicialmente que, pela fórmula de Abramov

$$h_\mu(f) = \frac{h_\nu(F)}{\int R d\nu} = \frac{h_\nu(F, \mathcal{P})}{\int R d\nu}. \tag{5.1}$$

Considere $\mathcal{B} = \{x \in \mathcal{C}(\Delta'_{\xi});\ F^j(x) \in \cup_{P\in\mathcal{P}} P\ \forall j \geq 0\}$ e para uma sequência de números $\{a_{P_i}\}_{P_i\in\mathcal{P}}$, defina $\eta(P) = \nu(P) = a_{P_i}\ \forall P_i \in \mathcal{P}$ e com $Y = (F |_{P_1})^{-1} \circ \cdots \circ (F |_{P_s})^{-1}$ defina $\eta(Y) = \nu(P_1) \ldots \nu(P_s) = a_{P_1} \ldots a_{P_s}$. Para $P_0 \in \mathcal{P}$ fixado tal que $a_{P_0} \neq 0$, defina

$$a_P(t) = \begin{cases} 1 - t(1 - a_{P_0}) & se \quad P = P_0 \\ t a_P & se \quad P \neq P_0 \end{cases}.$$

Portanto, definindo a medida $\eta_t(P) = a_{P_i}(t)\ \forall P_i \in \mathcal{P}$ e $\eta_t(Y) = a_{P_1}(t) + \ldots + a_{P_s}(t)$ temos uma quantidade não enumerável de medidas η_t que variam em $t \in [0,1]$, de δ_{P_0} a η. De fato,

$$\eta_0(P) = a_P(0) = \begin{cases} 1 & se \quad P = P_0 \\ 0 & se \quad P \neq P_0 \end{cases} = \delta_{P_0} \quad \forall P \in \mathcal{P}, \quad e.$$

$$\eta_1(P) = a_P(1) = \begin{cases} a_{P_0} & se \quad P = P_0 \\ a_P & se \quad P \neq P_0 \end{cases} = \eta(P) \quad \forall P \in \mathcal{P}$$

Consequentemente,

$$\frac{h_{\eta_t}(F)}{\int R d\eta_t} = \frac{\sum_{P \in \mathcal{P}^n} \eta_t(P) \log\left(\frac{1}{\eta_t(P)}\right)}{\int R d\eta_t} =$$

$$= \frac{(1 - t\,(1 - a_{P_0}))\log\left(\frac{1}{1 - t\left(1 - a_{P_0}\right)}\right) + \sum_{P \neq P_0} t a_P \log\left(\frac{1}{t a_P}\right)}{R(P_0)\,(1 - t(1 - a_{P_0})) + \sum_{P \neq P_0} R(P) t a_P},$$

esta última expressão varia continuamente em t, de 0 a $h_\mu(f)$, pois para $t = 0$ temos $\frac{h_{\eta_0}(F)}{\int R d\eta_0} = 0$ visto que $R(P_0) \neq 0$ e, para $t = 1$ vale $\eta_1 = \eta = \nu$ e temos que, pela equação (5.1) $\frac{h_{\eta_1}(F)}{\int R d\eta_1} = h_\mu(f)$. $\square$

5.2 Exemplo

Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ um mapa definido por:

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & se \quad x < \frac{1}{2} \\ 1 - h(1-x) & se \quad x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

onde $h(x) = x + 2x^2$. O mapa f pode ser visto como um mapa no círculo $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, identificando S^1 com $[0,1]/\{0,1\}$

C:/Users/katia/Downloads/EXEMPLO1EXPMES-eps-converted-to.pdf

Considere o Toro sólido $M = S^1 \times D^2$, onde D^2 é um disco unitário em $\mathbb{R}^2$, definimos o mapa $g : M \to M$ por

$$g(x, y, z) = \left(f(x), \frac{1}{10}y + \frac{1}{2}\cos x, \frac{1}{10}z + \frac{1}{2}\sin x \right).$$

Em [15] Young mostrou que para aplicações expansora por pedações como f a média $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{f^j(x)}$ converge fracamente* para a medida de Dirac no ponto0 para Lebesgue quase todo ponto $x \in S^1$. Usando o fato que temos contração uniforme na direção vertical (segunda e terceira coordenadas de g) e a forma de produto de g, temos que a média $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{g^j(x,y,z)}$ também converge para a medida de Dirac no 0 para Lebesgue quase todo ponto $(x, y, z) \in S^1 \times D^2$. Em particular, assim como para f, temos que g não admite medida invariante absolutamente contínua com respeito a Lebesgue. Em contraste a isto, assim como os resultados vistos aqui podemos construir uma quantidade não enumerável de medidas de probabilidade invariantes, ergódicas e parcialmente hiperbólicas para a aplicação g; para isto, temos a seguinte proposição.

Proposição 5.2.1. *Se $g : M \to M$ é uma aplicação definida como acima então g admite uma quantidade não enumerável de medidas de probabilidade invariantes parcialmente hiperbólicas cujo suporte é igual a $\bigcap_{j\geq 0} g^j(M)$.*

Inicialmente, note que o mapa f é topologicamente conjugado ao mapa de expansão uniforme $h^{'}(x) = 2x(mod\mathbb{Z})$. Assim, f é fortemente topogicamente transitivo. Como $h^{'}$ tem expansão em pontos periódicos, f também a tem; além disso f tem ponto periódico $p \in (0, 1)$ de período dois e, como $Df^2(x) > 1$ $\forall x \in (0, 1)$, segue que p é ponto periódico expansor. Assim, pela Proposição 1.2.9 e Lema 1.2.10 temos que existem θ e δ tais que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sharp\{1 \leq j \leq n; x \in H_j(e^{-\frac{\lambda}{4}}, g^2 \mid_{S^1})\} \geq \theta$$

para todo $x \in S^1$ e $\Delta \subset S^1$ centrado em p.

Considere agora Δ^*_ξ como na subseção 2.1.1 .

Segue do Teorema 6 de [10] e Lema 3.2.9,que g admite uma quantidade não enumerável de medidas de probabilidade invariantes, ergódicas e parcialmente hiperbólicas cujo suporte é $\bigcap_{j\geq 0} g^j(M)$. De fato, para verificar este fato basta aplicar o Teorema 6 de [10] para $g \mid_{S^1}$. Posteriormente considere

$$h = (h(x))_{x\in\limsup H_n(e^{-\frac{\lambda}{4}}, g|_{S^1})}$$

a coleção de imagens hiperbólicas e ξ a coleção de todas as $\xi-$pré-bolas hiperbólicas e R, F e $\mathcal{P}$ como no Corolário 3.1.9 para $\mathcal{C}(\Delta^*_\xi)$.

Consequentemente, para cada $\tilde{\nu}-g \mid_{S^1}$ invariante, ergódica, assim como foi feito em Lema 3.2.9, temos $g-$invariante, ergódica e parcialmente hiperbólica cujo suporte é $\bigcap_{j\geq 0} g^j(M)$.

Capítulo 6

Perspectivas futuras

6.1 Hiperbolicidade parcial por pedaços

Assim como foi feito em [10] podemos considerar agora um difeomorfismo C^{1+}, $f : M \to M$, exceto em um conjunto crítico $\mathsf{C} \subset M$. Para isto, incluir uma hipótese de recorrência lenta a este conjunto crítico. Assim:

Questão 6.1.1. *Valem os resultados do Teorema A e B para o contexto acima?*

Feito isto, podemos pensar nestes resultados para fluxos seccionais hiperbólicos via seções de Poincaré.

6.2 Existência de Medida

Neste trabalho, no contexto de hiperbolicidade parcial, em que o espaço tangente é decomposto em dois subfibrados invariantes, um dos quais é uniformemente contrativo, enquanto que o seu complementar é não uniformemente expansor; para provar os Teoremas A e B assumimos por hipótese a existência de uma medida μ invariante, ergódica e com algum controle de distorção, respectivamente. Então uma pergunta natural seria

Questão. *Para $f : M \to M$ difeomorfismo C^2 e $K \subset M$ parcialmente hiperbólico, existem medidas μ_n $f-$invariantes, ergódicas cuja união dos suportes contém o conjunto não errante de um conjunto NUE?*

Completanto esta questão, poderíamos pensar na existência de uma quantidade finita de tais medidas.

6.3 Medida Misturadora e Decaimento de Correlação

Definição 6.3.1. Seja uma medida de probabilidade $f-$invariante μ. Dizemos que μ é uma medida misturadora(mixing) se

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap f^{-n}(B)) = \mu(A).\mu(B) \tag{6.1}$$

para todos conjuntos A, B mensuráveis.

Ou seja, conjuntos de pontos em A, cuja imagem em tempo n pertence a B tendem a ter a mesma proporção em A como B, proporções entendidas em termos da medida μ. Assim, qualquer conjunto mensurável tende a distribuir-se ao longo do espaço de acordo com μ.

Agora vamos reescrever (6.1) da seguinte forma:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int \mathcal{X}_A(\mathcal{X}_B \circ f^n) d\mu - \int \mathcal{X}_A d\mu . \int \mathcal{X}_B d\mu \right| = 0 \tag{6.2}$$

onde $\mathcal{X}_A$ é a função característica de A, isto é, $\mathcal{X}_A(x) = 1$ se $x \in A$ e $\mathcal{X}_A(x) = 0$ caso contrário.

Note que podemos ver (6.2) como a covariância entre variáveis aleatórias $\mathcal{X}_A$ e $\mathcal{X}_B \circ f^n$. Definimos o Coeficiente de correlação (taxa de mistura) como a volocidade com que (6.1) acontece, isto é,

$$\mathcal{C}_n(\psi, \varphi) = \left| \int \psi(\varphi \circ f^n) d\mu - \int \psi d\mu . \int \varphi d\mu \right| \longrightarrow 0,$$

para quaisquer dois observáveis ψ, φ em espaços de funções adequadas.

A imposição de uma certa regularidade nos observáveis nos dirá algo sobre o comportamento dos coeficientes de correlação para determinados sistemas.

Definição 6.3.2. Dizemos que o sistema (f, μ) tem decaimento exponencial de correlações se existe $\beta > 0$, tal que para todo ψ, φ existe constante $C(\psi, \varphi)$ tais que:

$$\mathcal{C}_n(\psi, \varphi) \leq C(\psi, \varphi) e^{-\beta n} \text{ para todo } n \geq 1.$$

A partir dos resultados obtivos no Teorema B e de [14] e [15] uma aplicação que surge naturalmente é o estudo de decaimento de correlação das medidas parcialmente hiperbólicas, respondendo aos seguintes questionamentos

Questão 6.3.3. *Quando há mistura do sistema (f, ν_s)? E qual a velocidade com que*

$$\mathcal{C}_n(\psi, \varphi) = \left| \int \psi(\varphi \circ f^n) d\mu - \int \psi d\mu . \int \varphi d\mu \right| \longrightarrow 0,$$

para quaisquer dois observáveis ψ, φ em espaços de funções adequadas.

Questão 6.3.4. *Quando o sistema (f, μ) tem decaimento exponencial de correlações?*

Referências Bibliográficas

[1] J. F. Alves, C. Bonatti, M. Viana. SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding, *Invent. Math.,* **140** 351-398, 2000.

[2] J. F. Alves, C. L. Dias, S. Luzzatto. Geometry of expanding absolutely continuous invariant measures and the liftability problem, *Annales de l´Institut Henri Poincare Anal Non Linear Analysis,* **1** 101-120, 2013.

[3] J. F. Alves, V. Pinheiro. Topological structure of (partially) hyperbolic sets with positive volume, *Trans. Amer. Math. Soc.* **360** nº10, 2008.

[4] J. F. Alves, V. Pinheiro. Gibbs - Markov structures and limit laws for partially hyperbolic attractors with mostly expanding central direction, *Adv. Math.* **223** 1706-1730, 2010.

[5] R. Bowen. Markov partitions for Axiom A diffeomorphismos, *Amer. J. Math.* **92** 725-747, 1970.

[6] M. Martens. Distortion results and invariant Cantor Sets of unimodal maps, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **14(2)** 331-349, 1994.

[7] R. Mañé. Ergodic theory and differentiable dynamics, *Springer-Verlag, Berlin,* 1987.

[8] J. Milnor. On the concept of attractor, *Commun Math. Phys.* 99, **2** 171-195, 1985.

[9] V. Pliss. On a Conjecture due to Smale, *Diff. Uravnenija*, **8** 262-268, 1972.

[10] V. Pinheiro. Expanding Measures, *Annales de l´Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis.* **6** *889–939, 2008.*

[11] C.A.Rogers. Hausdorff measures, *Cambridge Univ. Press 2 edition.1998.*

[12] D. Ruelle. Ergodic theory of differentiable dynamical systems, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **50** 27-58, 1979.

[13] Y. Sinai. Markov partitions and C-diffeomorphisms, *Funkcional. Anal. i Prilo zen* **2(1)** 64-89, 1968.

[14] L-S Young. Statistical properties of dynamical systems with some byperbolicity, *Annals of Mathematics,* **147** 585-650, 1998.

[15] L-S Young. Recurrence times and rates of mixing, *Israel J. Math,* **110** 153-188, 1999.

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA
CEP: 40170 - 110
<http://www.pgmat.ufba.br>