Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Tese de Doutorado

Existência, unicidade e estabilidade de medidas SRB para endomorfismos parcialmente hiperbólicos

Anderson Reis da Cruz

Salvador-Bahia

Dezembro de 2016.

Existência, unicidade e estabilidade de medidas SRB para endomorfismos parcialmente hiperbólicos

Anderson Reis da Cruz

Tese de Doutorado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Paulo César Rodrigues Pinto Varandas

Salvador-Bahia

Dezembro de 2016.

Cruz, Anderson Reis da.

Existência, unicidade e estabilidade de medidas SRB para endomorfismos parcialmente hiperbólicos / Anderson Reis da Cruz. – Salvador: UFBA, 2016.

120 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Paulo César Rodrigues Pinto Varandas.

Tese (doutorado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2016.

Referências bibliográficas.

1. Medidas SRB. 2. Hiperbolicidade Parcial. 3. Endomorfismos. 4. Estabilidade estaística. 5. Derivados de Anosov. I. Varandas, Paulo César Rodrigues Pinto. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Existência, unicidade e estabilidade de medidas SRB para endomorfismos parcialmente hiperbólicos.

CDU : 517.938

Existência, unicidade e estabilidade de medidas SRB para endomorfismos parcialmente hiperbólicos

Anderson Reis da Cruz

Tese de Doutorado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática, aprovada em 02 de dezembro de 2016.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Paulo César Rodrigues Pinto Varandas (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Vítor Domingos Martins de Araújo
UFBA

Prof. Dr. Villton Jeovan Viana Pinheiro
UFBA

Prof. Dr. Daniel Smania
ICMC-USP

Prof. Dr. Ian Melbourne
University of Warwick

A minha filha Filipa e minha esposa Andrêssa.

Agradecimentos

Aos meus pais pelo apoio incondicional às minhas decisões e por tudo que sou hoje como pessoa. Eles sempre foram exemplos de conduta e me incentivaram a buscar aquilo que desejava.

A minha esposa Andrêssa, com quem pude buscar tranquilidade e força para seguir em frente nos momentos difíceis. Agradeço a ela todo o companheirismo e compreensão demonstrados nestes anos.

Ao meu orientador e amigo Paulo Varandas pela orientação, disponibilidade e paciência.

Aos professores Vítor Araújo, Vilton Pinheiro, Daniel Smania e Ian Melbourne por aceitarem participar da comissão julgadora desta tese e pelas sugestões para o trabalho.

Aos professor Jorge Rocha pela orientação durante o período de Doutorado Sanduíche na Universidade do Porto. Ao professor José Alves da Universidade do Porto pelos questionamentos e sugestões. Ao professor Mário Bessa, pela oportunidade de apresentar este trabalho na Universidade da Beira Interior (Covilhã - Portugal).

Ao professor Carlos Vásquez por me recepcionar na Pontifícia Universidade Católica de Valparaíso (Chile) e pelas contribuições a esta tese.

Aos meus colegas de turma, Alejandra, Edward, Elen, Marcus e Wescley pelos momentos de descontração e pelas experiências compartilhadas. Aos colegas dinamicistas, Edvan, Fabíola, Felipe, Junílson pela disponibilidade em assistir as minhas apresentações prévias deste trabalho.

Aos professores da Pós Graduação em Matemática da UFBA pelos ensinamentos compartilhados durante a minha formação. Aos funcionários do Departamento de Matemática por sua prestatividade e profissionalismo.

À todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para o encerramento deste ciclo da minha vida acadêmica.

Finalmente, à CAPES pela bolsa do Programa de Doutorado Sanduíche no Exterior (PDSE) e a bolsa de doutorado recebida nestes quatro anos.

"Foi o tempo que dedicastes à tua rosa que a fez tão importante."

Antoine de Saint-Exupéry

Resumo

Neste trabalho construímos medidas SRB (Sinai-Ruelle-Bowen) para difeomorfismos locais parcialmente hiperbólicos. A hiperbolicidade parcial será caracterizada pela existência de um campo de cones positivamente invariante satisfazendo uma condição de expansão não uniforme num conjunto de medida de Lebesgue positiva. Mostramos ainda que existem no máximo um número finito de medidas SRB e que, caso o difeomorfismo local seja transitivo, existe uma única medida SRB. Provamos a estabilidade estatística destas medidas, assumindo que vale a expansão não uniforme no campo de cones robustamente e com constantes uniformes. Finalmente, apresentamos exemplos de perturbações de endomorfismos de Anosov em que podemos aplicar nossos resultados.

Palavras chaves: SRB; endomorfismos; expansão não uniforme; estabilidade; derivados de Anosov.

Abstract

In this work we construct SRB (Sinai-Ruelle-Bowen) measures for partially hyperbolic local diffeomorphisms admitting a positively invariant cone field which is non uniformly expanding in a set with positive Lebesgue measure. We show that there exists at most a finitely number of SRB measures and if the local diffeomorphism is transitive then there is a unique SRB measure. We also prove the statistical stability of these measures under the assumption of the robustly non uniform expansion along a cone field with uniform constants. Finally, we present robust classes of perturbation of Anosov endomorphisms which satisfy our hypotheses.

Keywords: SRB; endomorphisms; non uniform expansion; stability; derived from Anosov.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Medidas SRB e o formalismo termodinâmico

Um dos objetivos da pesquisa em sistemas dinâmicos é o estudo de propriedades estatísticas de um dado sistema do ponto de vista de uma medida invariante. Contudo, o conjunto de medidas invariantes para determinadas dinâmicas pode ser grande ou conter medidas que não fornecem informação suficiente para descrever o que acontece com a maioria dos pontos do sistema. Por exemplo, para uma medida de Dirac em um ponto fixo p obtemos apenas informações acerca deste ponto fixo. Assim, é natural darmos destaque para algumas medidas que descrevem de maneira satisfatória o comportamento estatístico das órbitas de um sistema.

Nesta busca em exibir medidas que descrevam o comportamento estatístico da órbitas de um dado sistema dinâmico, Sinai, Ruelle e Bowen ([Sin72, Rue76, Rue78, Bow75]) construíram, para difeomorfismos uniformemente hiperbólicos (difeomorfismos de Anosov e difeomorfismos Axioma A), medidas que possuem desintegração absolutamente contínua com respeito a Lebesgue ao longo de variedades instáveis. Além disto, estas medidas são físicas (ou seja, as suas bacias tem medida positiva com respeito a medida de volume na variedade) e ainda são estados de equilíbrio Gibbs para o potencial $\Phi^u(x) = \log\left|\det Df(x)\,|_{E^u_x}\right|$. Tais medidas são hoje denominadas medidas de Sinai-Ruelle-Bowen ou simplesmente medidas SRB.

O ponto principal para a construção destas medidas, em [Sin72, Rue76, Rue78, Bow75], foi a existência de partições de Markov e consequentemente a semiconjugação com um subshift do tipo finito.

Outros sistemas invertíveis, com formas mais fracas de hiperbolicidade, também admitem a existência de medidas SRB. Por exemplo em [Car93] temos a existência de medidas SRB para difeomorfismos derivados de Anosov em dimensão $n \geq 2$ e em [BY93] temos um conjunto de parâmetros $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, com $Leb(\Delta) > 0$, para a família de Hénon, tal que para todo $(a,b) \in \Delta$, $f_{a,b}$ admite uma única medida SRB. Em [BV00] foi provada a existência de medidas SRB para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos com uma direção contratora não uniforme e em [ABV00] foi demonstrada a existência de medidas SRB para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos com direção expansora não uniforme. O caso em que a direção central tem comportamento neutro foi abordado por Tsujii em [Tsu05]. Em [ADLP15], temos a existência de medidas SRB para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos admitindo uma direção central fracamente não uniformemente expansora. Mais recentemente, [CDP16] temos a existência de medidas SRB para difeomorfismos que satisfazem uma condição de hiperbolicidade efetiva, traduzida em termos de campos de cones. Neste contexto estão inseridas aplicação que podem não admitir partições de Markov ou decomposições dominadas.

A existência de medidas SRB com respeito à aplicações não invertíveis na presença de expansão não uniforme foi demonstrada em [ABV00] como caso particular do contexto parcialmente hiperbólico considerado neste artigo; em [Tsu00, Tsu01] para aplicações lineares e real-analítica por partes; em[Pin06] para aplicações fracamente não uniformemente expansoras; em [OV08] para aplicações não uniformemente expansoras que admitem partições de Markov; em [VV10] para aplicações não uniformemente expansoras em espaços métricos e que não admitem necessariamente uma partição de Markov.

Algumas dificuldades surgem quando tratamos de sistemas hiperbólicos não invertíveis e não expansores em geral. Podemos citar a não existência de partições de Markov como no caso invertível hiperbólico ou contração dos ramos inversos como no caso não invertível não uniformemente expansor. Um outro obstáculo para o estudo de sistemas não invertíveis é o fato de que as variedades instáveis neste contexto dependem das pré-órbitas do sistema o que torna a estrutura geométrica da família de variedades instáveis mais complicada em razão do grande número de interseções. Veja por exemplo [Zhu98, QXZ09].

Em [QZ95] foi provada a existência de uma medida invariante satisfazendo a fórmula de Pesin para atratores Axioma A de endomorfismos. Tal medida foi obtida como estado de equilíbrio para o determinante do Jacobiano na direção instável. A definição de medida SRB para endomorfismos como uma medida que tem desintegração absolutamente contínua com respeito a Lebesgue em variedades instáveis foi introduzida em [QZ02]. Neste artigo foi provado uma extensão de [LY85, Teorema A] para o contexto não invertível. Eles provaram que se f é um endomorfismo de classe C^2 e μ é uma medida tal que $\log|\det Df(\cdot)| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ então μ é uma medida SRB se, e somente se μ satisfaz a fórmula da entropia de Pesin. Consequentemente a medida exibida em [QZ95] é uma medida SRB.

Nosso trabalho tem o intuito de contribuir para o estudo do formalismo termodinâmico para aplicações não uniformemente hiperbólicas não invertíveis, especificamente no que diz respeito à existência de medidas SRB. Consideraremos $f : M \to M$ um difeomorfismo local de classe $C^{1+\alpha}$ definido numa variedade compacta e conexa M, satisfazendo uma condição de expansão não uniforme ao longo de um campo de cones invariantes, complementar a uma direção estável uniformemente contratora e Df-invariante. Neste contexto, demonstramos a existência de um número finito de medidas SRB.

O resultado que demonstramos é uma extensão do [ABV00, Teorema A]. Aqui adaptamos a noção de expansão não uniforme ao longo de uma direção centro instável para expansão não uniforme ao longo de um campo de cones. O principal motivo para considerar a hiperbolicidade usando campo de cones neste contexto é devido à possível existência de infinitas direções instáveis invariantes associadas a um mesmo ponto [Prz76, MT14]. Devido a isto, considerar hiperbolicidade de endomorfismos usando decomposições invariantes é muito restritivo. No entanto, a existência de tempos cone-hiperbólicos, reminiscente das ideias de hiperbolicidade não uniforme para difeomorfismos, garante que discos tangentes ao campo de cones exibem expansão ao longo de certos iterados e, consequentemente, bom controle do push-forward da medida de Lebesgue neste disco.

Medidas SRB para endomorfismos parcialmente hiperbólicos em superfícies foram estudadas em [Tsu05], ou seja, endomorfismos que admitem uma decomposição $TS = E^c \oplus E^u$, não necessariamente invariante, onde E^u é uniformemente expansor e domina a direção E^c. Tsujii provou que endomorfismos C^r-genéricos ($r \geq 19$) admitem medidas SRB. A ideia central neste artigo é que para uma dada constante $\chi > 0$ existem finitas medidas físicas com expoentes de Lyapunov de valor absoluto maior do que χ. Se X é o complementar da união das bacias destas medidas e $Leb\,(X) > 0$ então pontos de acumulação da sequência dada por

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_*^j \nu_\gamma$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde γ é um disco instável contido em X, são medidas absolutamente contínuas com respeito a Lebesgue em variedades instáveis.

Argumentos semelhantes serão aplicados em nosso contexto. Como não assumimos a existência de direções uniformemente expansoras, a princípio, não temos a existência de variedades instáveis. Partimos então de um disco D tangente ao campo de cones e tomamos como candidatas a medidas SRB, componentes ergódicas de pontos de acumulação da sequência dada por

$$\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_*^j Leb_D \tag{1.1.1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que, como f é uma aplicação não necessariamente invertível, o iterado $f^j(D)$ não é necessariamente uma variedade. Ainda assim, extraímos para cada $j \in \mathbb{N}$ uma família finita $\mathcal{D}_j$ de subdiscos de D dois a dois disjuntos. Para cada $D_j \in \mathcal{D}_j$ temos que $f^j\mid_{D_j}$ é injetiva, portanto $f^j(D_j)$ é um disco e usaremos a propriedade de existência de tempos cone-hiperbólicos para garantir a expansão destes discos em tempo j. Consideraremos, então a sequência de medidas dada por

$$\nu_n := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_*^j\left(Leb\mid_{\mathcal{D}_j}\right) \tag{1.1.2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Veremos que se ν é um ponto de acumulação, então o suporte de ν é coberto por discos instáveis que dependem de pré-órbitas. O mesmo fenômeno observado em [Tsu05] no caso bidimensional, em que dado um disco instável γ, as interseções de $f^j(\gamma)$ com uma pequena vizinhança V crescem exponencialmente rápido conforme j cresce, será visto para esse contexto para os iterados $f^j(D_j)$ com $j \in \mathbb{N}$. Isto dificulta a verificação da propriedade de continuidade absoluta ao longo dos discos instáveis, uma vez que temos possivelmente auto-interseções, não conseguimos construir uma partição em que possamos desintegrar a medida ν. Para contornarmos esta dificuldade, faremos uso da extensão natural, que é o espaço das pré-órbitas do difeomorfismo local. Intuitivamente, este espaço permite que vejamos cada conjunto $A \subset M$, suficientemente pequeno, acoplado a uma das suas pré-órbitas. Por exemplo no caso das variedades instáveis associadas a pré-órbitas distintas de um mesmo ponto $x \in M$, apesar delas terem interseção pelo menos em x, temos que, na extensão natural, identificamos estas variedades a dois conjuntos distintos.

Cada elemento da extensão natural é representado como uma sequência $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$, em que $x_{-n} \in M$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $f(x_{-n}) = x_{-n+1}$ para todo $n \geq 1$. Denotaremos este espaço por M^f. A dinâmica f é semiconjugada a um homeomorfismo $\hat{f}$ na extensão natural pela projeção $\pi : M^f \to M$, na primeira coordenada. Isto nos permite estabelecer uma bijeção entre o espaço de medidas $\hat{f}$-invariantes e o espaço de medidas f-invariantes ([QXZ09]).

Replicaremos a construção das medidas na variedade na extensão natural, definindo levantamentos das medidas ν_n na extensão natural, ou seja, medidas $\hat{\nu}_n$ tais que $\pi_*\hat{\nu}_n = \nu_n$. Esses levantamentos, uma vez que ν_n não é necessariamente invariante, não estão unicamente definidos. Construiremos tais medidas usando a estrutura de produto da extensão natural provada em [AH94]. Usaremos então as $\hat{\nu}_n's$ para verificarmos a propriedade de continuidade absoluta desintegrando (localmente) um ponto de acumulação $\hat{\nu}$ desta sequência em uma partição que consiste das representações de discos instáveis na extensão natural.

Também no contexto não invertível e não necessariamente expansor temos em [UW04] uma caracterização de medidas SRB para endomorfismos em termos de características dimensionais da variedade estável num atrator Axioma A e em [MT16] uma cota superior para o número de medidas SRB em função das classes homoclínicas do sistema.

Nos indagamos ainda acerca da estabilidade estatística das medidas obtidas em nosso trabalho. Precisamente, assumindo que valem as hipóteses de expansão não uniforme robustamente ao longo de cones e com constantes uniformes num conjunto aberto de endomorfismos, podemos investigar se, para uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a f nesta vizinhança, a sequência de medidas $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em que μ_n é uma medida SRB para f_n para cada n converge a uma medida μ que é SRB para f. Respostas afirmativas a esta questão no caso invertível e caso não invertível uniformemente expansor podem ser vistas por exemplo em [Vás07, DL08, ACF10b, ACF10a, VV10, CV13].

Inspirados por [Vás07] provamos que temos também estabilidade estatística em nosso contexto. O primeiro passo aqui é vermos que qualquer medida SRB pode ser obtida como acumulação de sequências de medidas como na equação (1.1.1) acima, com cotas uniformes nas densidades. Então provamos que as estruturas geométricas associadas a esta construção passam por limite, ou seja, que o limite das estruturas associadas a μ_n são as mesmas estruturas que definem μ.

Outros avanços tem sido feitos no estudo do formalismo termodinâmico para aplicações não invertíveis. Por exemplo, em [Mih10a, Mih10b, Mih12b] temos um estudo acerca da existência de medidas SRB inversas e suas propriedades no contexto hiperbólico. Uma medida SRB inversa é um estado de equilíbrio para o potencial $\Phi^s(x) := \log \left|\det Df(x)|_{E^s_x}\right|$. Analogamente a uma medida SRB usual, uma medida SRB inversa fornece informações estatísticas sobre a distribuição das pré-imagens de um endomorfismo. Em [Mih12a] temos que, no contexto hiperbólico, estados de equilíbrio com respeito a potenciais Hölder contínuos existem e podem ser aproximados por medidas suportadas ao longo de pré-órbitas do sistema. Em [MU14] temos um estudo da taxa de crescimento das pré-imagens de um endomorfismo hiperbólico, obtendo uma expressão para a pressão topológica em termos desta taxa.

Nossos resultados se aplicam à adaptações da classe exemplos exibidos em [Car93, ABV00] para o contexto não invertível. Partimos de um endomorfismo Anosov, por exemplo um endomorfismo linear no toro $\mathbb{T}^3$ induzido por uma matriz $A \in GL_3(\mathbb{Z})$ ([Prz76]), e, via isotopia, perturbamos localmente de modo a enfraquecer a direção instável do endomorfismo, por exemplo, via um bifurcação pitchfork ou bifurcação de Hopf, para obtermos um endomorfismo que satisfaz as nossas hipóteses.

Mais ainda, no caso em que o fibrado E^s é trivial , recuperamos as classes de dinâmicas não uniformemente expansoras consideradas em [ABV00].

1.2 Resultados principais

Ante a discussão realizada na seção anterior, descreveremos aqui o contexto e os resultados principais demonstrados neste trabalho.

Seja M uma variedade Riemanniana compacta e conexa d-dimensional. Dado um conjunto $A \subset M$, denotamos por $\bar{A}$ o seu fecho. Dados espaços vetoriais normados E e F e uma transformação linear $T : E \to F$, se $C \subset E$ é um subconjunto fechado consideraremos a norma de $T\mid_C$ como

$$\|T\mid_C\| = \sup_{v \in C \setminus \{0\}} \frac{\|T \cdot v\|}{\|v\|}.$$

No que segue, descreveremos o contexto de endomorfismos não singulares que estudaremos neste trabalho. Suponhamos $f : M \to M$ um difeomorfismo local de classe $C^{1+\alpha}$, com $\alpha > 0$. Seja $\Lambda \subset M$ um subconjunto compacto e positivamente f-invariante. Suponha $U \supset \Lambda$ um conjunto aberto tal que $\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^n\left(\overline{U}\right)$. Assumamos que existam uma decomposição contínua do fibrado tangente $T_U M = E^s \oplus F$ (não necessariamente invariante) e uma constante $0 < \lambda < 1$ satisfazendo:

(H1) $Df(x) \cdot E^s_x = E^s_{f(x)}$ para todo $x \in U$;

(H2) $\|Df^n|_{E^s}\| \leq \lambda^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(H3) Existe $c > 0$, existe um campo de cones, $U \ni x \mapsto C_a(x)$, de amplitude $a > 0$ centrado em F, satisfazendo $Df(x) \cdot C_a(x) \subseteq C_a(f(x))$ para todo $x \in \Lambda$ e existe um conjunto $H \subset U$ com $Leb(H) > 0$ tal que:

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \| \left(Df(f^j(x))|^{-1}_{C_a(f^j(x))} \right) \| \leq -2c < 0 \tag{1.2.1}$$

para todo $x \in H$;

(H4) $\|Df(x) \cdot v\| \cdot \left\|Df(x)^{-1} \cdot w\right\| \leq \lambda \cdot \|v\| \cdot \|w\|$ para todo $v \in E^s_x$ e todo $w \in Df(x) \cdot C_a(x)$ e para todo $x \in U$.

Dado um difeomorfismo local nas condições acima, diremos que E^s é um fibrado uniformemente contrator e que C_a é um campo de cones com expansão não uniforme. Denotaremos ainda $d = \dim(M)$, $d_s := \dim(E^s)$ e $d_u := \dim(F)$. Não é difícil verificar que a existência do subfibrado E^s é equivalente à existência de um campo de cones estável.

Observe que a condição (H3) implica a existência de um disco $D \subset U$ tangente ao campo de cones tal que $Leb_D(H) > 0$. Esta condição é suficiente para demonstrar a existência de uma medida SRB neste contexto. Poderíamos então substituir a hipótese (H3) pela hipótese

(H3') Existe $c > 0$ e existe um campo de cones, $\overline{U} \ni x \mapsto C_a(x)$, de amplitude $a > 0$ centrado em F, satisfazendo $Df(x) \cdot C_a(x) \subseteq C_a(f(x))$ e existe um disco $D \subset U$ tangente ao campo de cones C_a e um conjunto $H \subset D$ com $Leb_D(H) > 0$ temos:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \| \left(Df(f^j(x))|_{C_a(f^j(x))}^{-1} \right) \| \leq -2c < 0$$

para todo $x \in H$.

Assumiremos a hipótese (H3), pois esta hipótese nos permitirá garantir a finitude de medidas SRB associadas ao conjunto H, no sentido que temos um número finito de medidas SRB cujas bacias cobrem o conjunto H a menos de um conjunto de medida de Lebesgue nula.

Observação 1.2.1. Assumimos, por simplicidade, a decomposição na vizinhança U de Λ. Note que, supondo $T_\Lambda M = E^s \oplus F$, podemos estender esta decomposição a $\overline{U}$, $T_{\overline{U}}M = \tilde{E}^s \oplus \tilde{F}$. Além disto, assumindo U suficientemente pequeno, vale (H2) e (H4) para uma constante $\lambda_1 < \lambda$.

Nossos resultados principais são os seguintes:

Teorema A. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo local de classe $C^{1+\alpha}$ ($\alpha > 0$) em uma variedade Riemanniana compacta e conexa M. Suponhamos $\Lambda \subset M$ um atrator para f e que exista uma decomposição contínua do fibrado tangente $T_\Lambda M = E^s \oplus F$, em que E^s é um fibrado uniformemente contrator e F admite um campo de cones com expansão não uniforme, i.e., valem as propriedades (H1), (H2), (H3) e (H4). Então existe no máximo uma quantidade finita de probabilidades invariantes e ergódicas com a propriedade SRB cujas bacias cobrem H ($Leb \mod 0$). Consequentemente, se $H = U$ ($Leb \mod 0$) então existem um número finito de medidas SRB para f em U. Finalmente, se f é uma aplicação transitiva então existe uma única medida SRB para f.*

Provamos ainda a estabilidade dessas propriedades assumindo que valem as hipóteses (H1), (H2), (H3) e (H4) robustamente numa vizinhança de f. Assumamos então que exista um vizinhança aberta $\mathcal{V} \subset End^r(M)$, onde $End^r(M)$ denota o conjunto de difeomorfismos locais de classe C^r em M, e um campo de cones $U \ni x \to C(x)$ de dimensão $0 < d_u \leq dim(M)$ definido num aberto $U \subset M$ satisfazendo que $g\left(\overline{U}\right) \subset \overline{U}$. Ademais, suponha que existem constantes $\lambda \in (0,1)$, $\alpha > 0$ e $c > 0$ tais que cada $g \in \mathcal{V}$ satisfaz:

(R1) g admite um subespaço uniformemente λ-contrator e Dg-invariante $E^s_x(g)$ para cada $x \in \Lambda_g$, ou seja, $\|Dg|_{E^s}\| \leq \lambda$ e $Dg \cdot E^s = E^s$. Além disso $\measuredangle(E^s, v) > \alpha$, para todo $v \in C$.

(R2) o campo de cones C é positivamente Dg-invariante e para *Leb* quase todo ponto $x \in U$ temos que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \| \left(Dg\left(g^j(x)\right)|_{C(g^j(x))}\right)^{-1} \| \leq -c < 0.$$

(R3) para todo $v \in E^s_x$ e $w \in Dg(x) \cdot C(x)$

$$\|Dg(x) \cdot v\| \|Dg(x)^{-1} \cdot w\| \leq \lambda.$$

Neste caso diremos que $\mathcal{V}$ é um *aberto de difeomorfismos locais parcialmente hiperbólicos de classe C^r com constantes uniformes.*

Teorema B. *Seja $r > 1$. Assumamos que exista um aberto $\mathcal{V} \subset End^r(M)$ de difeomorfismos locais parcialmente hiperbólicos de classe C^r com constantes uniformes, ou seja, cada $g \in \mathcal{V}$ satisfaz (R1), (R2) e (R3). Seja $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{V}$ convergente para $g \in \mathcal{V}$ e suponha que μ_n é medida SRB ergódica para g_n, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então todo ponto de acumulação μ de $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma combinação convexa das medidas SRB para g. Em particular, se cada $g \in \mathcal{V}$ admite somente uma medida SRB, μ_g, então a aplicação*

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &\to \mathcal{M}(M) \\ g &\mapsto \mu_g \end{aligned}$$

*é contínua na topologia fraca *.*

Neste caso, caso exista tal aberto $\mathcal{V} \subset End^r(M)$ de endomorfismos parcialmente hiperbólicos de classe C^r com constantes uniformes, cada $g \in \mathcal{V}$ é dita estatisticamente estável.

Observação 1.2.2. Estamos assumindo que existe uma decomposição não necessariamente invariante. Isto porque, em geral, a decomposição $TM = E^s \oplus F$ não pode ser tomada Df-invariante. Mesmo no caso hiperbólico, [MT14] mostraram que ou F é Df-invariante ou existem infinitas direções instáveis para todo x em um conjunto residual $R \subset M$.

Considere f um endomorfismo Axioma A em M. Isto é, o conjunto não errante

$$\Omega(f) := \{x \in M : \text{ para toda vizinhança } U \text{ de } x \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^n(U) \cap U \neq \emptyset\}$$

é um conjunto hiperbólico e o conjunto dos pontos periódicos $Per(f)$ satisfaz que, o seu fecho, $\overline{Per(f)}$, é igual a $\Omega(f)$.

Como veremos adiante na Subseção 1.3.1, a hiperbolicidade do compacto $\Omega(f)$ equivale a existência de um subfibrado E^s de $T_{\Omega(f)}M$ satisfazendo, para constantes $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$:

$$Df(x) \cdot E^s_x = E^s_{f(x)} \text{ e } \|Df^n(x) \cdot v\| \leq C \cdot \lambda^n \|v\|$$

para todo $v \in E^s_x$, $x \in \Omega(f)$ e $n \in \mathbb{N}$; e a existência de um campo de cones $\Omega(f) \ni x \mapsto C^u(x)$ satisfazendo para uma constante $\sigma > 1$

$$Df(x) \cdot C^u(x) \subset C^u(f(x)) \text{ e } \|Df(x) \cdot v\| \geq \sigma \|v\|$$

para todo $v \in C^u(x)$ e $x \in \Omega(f)$. Ora, então

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \| \left(Df\left(f^j(x)\right) |_{C^u(f^j(x))} \right)^{-1} \| \leq -\log \sigma < 0,$$

para todo $x \in \Omega(f)$.

Temos que o conjunto dos endomorfismos Axioma A é aberto, veja por exemplo [Prz76, Teorema 1.16]. Em particular, por continuidade, existe um aberto $\mathcal{U} \subset End^r(M)$ de endomorfismos Axioma A de classe C^r, $r > 1$, que satisfaz as hipóteses (R1), (R2) e (R3). Ou seja, $\mathcal{U}$ é um aberto de endomorfismos não singulares parcialmente (uniformemente) hiperbólicos. Logo temos como consequência imediata do Teorema B a estabilidade estatística para endomorfismos Axioma A, como segue:

Corolário C. *Seja $f : M \to M$ um endomorfismo Axioma A numa variedade compacta e conexa M. Então f é estatisticamente estável.*

1.3 Estrutura da tese

1.3.1 O conceito de hiperbolicidade uniforme

Suponhamos $f : M \to M$ um difeomorfismo C^1 numa variedade riemanniana compacta M. Um conjunto compacto Λ f-invariante é dito hiperbólico se existe uma decomposição contínua e Df-invariante $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$ e constantes $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que:

1. $\|Df^n |_{E^s} \| \leq C\lambda^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

2. $\|Df^{-n} |_{E^u} \| \leq C\lambda^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Alternativamente, podemos definir a hiperbolicidade do compacto Λ através da existência de campos de cones $\Lambda \ni x \to C^s(x)$ e $\Lambda \ni x \mapsto C^u(x)$ (com dimensão constante) satisfazendo:

1. $Df^{-1}(x) \cdot C^s(f(x)) \subsetneq C^s(x)$ e $Df(x) \cdot C^u(x) \subsetneq C^u(f(x))$;

2. existe $\sigma > 1$ tal que $\|Df^{-1}(x) \cdot v\| \geq \sigma \|v\|$ para todo $v \in C^s(f(x))$ e $\|Df(x) \cdot w\| \geq \sigma \|w\|$ para todo $w \in C^u(x)$.

A partir do campo de cones podemos recuperar as direções invariantes pondo:

- $E^s_x = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Df^{-n}(x) \cdot C^s(f^n(x))$;

- $E^u_x = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Df^n(f^{-n}(x)) \cdot C^u(f^{-n}(x))$.

Podemos citar [Maz08] e [New04] para mais detalhes sobre a relação entre o conceito de campos de cones e hiperbolicidade. Nestes artigos caracterizam-se também a noção de decomposição dominada via campo de cones.

Se f é um endomorfismo não necessariamente invertível, não podemos aplicar diretamente a definição de hiperbolicidade no caso invertível. Isto porque, ao definirmos o subfibrado instável não teríamos bem definida uma inversa para f, sob a qual veríamos contração deste subfibrado.

Assumamos então que f é um endomorfismo não singular, (i.e. um difeomorfismo local). Então para cada $x \in M$ existe uma vizinhança V_x de x tal que f admite uma inversa local $f^{-1} : V_x \to W_x$. Usando a regra da cadeia temos que para todo $x \in M$ existe a inversa derivada de f no ponto x, $Df(x)^{-1}$. Vamos adaptar então a noção de hiperbolicidade via campo de cones para o contexto não invertível.

Considere $\Lambda \ni x \mapsto C^s(x)$ e $\Lambda \ni x \mapsto C^u(x)$ campos de cones com dimensão constante satisfazendo:

1. $Df(x)^{-1} \cdot C^s(f(x)) \subsetneq C^s(x)$ e $Df(x) \cdot C^u(x) \subsetneq C^u(f(x))$ para todo $x \in \Lambda$;

2. existe $\sigma > 1$ tal que $\|Df(x)^{-1} \cdot v\| \geq \sigma \|v\|$ para todo $v \in C^s(f(x))$ e $\|Df(x) \cdot w\| \geq \sigma \|w\|$ para todo $w \in C^u(x)$.

Definindo

$$E^s_x := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Df^n(x)^{-1} \cdot C^s(f^n(x)) \tag{1.3.1}$$

é fácil ver que $x \mapsto E^s_x$ define um subfibrado Df-invariante, $Df(x) \cdot E^s_x = E^s_{f(x)}$ e uniformemente contrator. A direção instável também pode ser obtida via campo de cones, contudo, a construção irá depender da pré-órbita de cada ponto. Dado $x \in \Lambda$ considere

$(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em Λ tal que $f(x_{-n}) = x_{-n+1}$ para todo $n \geq 1$ e $x_0 = x$. Observe que a sequência $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$, assim definida, representa uma única pré-órbita de x. Definamos

$$E^u_{(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Df^n(x_{-n}) \cdot C^u(x_{-n}). \tag{1.3.2}$$

É fácil ver que $E^u_{(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}}$ define um fibrado que é contrator para o passado ao longo da pré-órbita de x dada por $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ e é Df-invariante, no sentido que $Df(x) \cdot E^u_{(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}} = E^u_{(y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}}$, onde $(y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência em Λ dada por $y_0 = f(x)$ e $y_{-n} = x_{-n+1}$ para todo $n \geq 1$.

Encontramos assim decomposições do plano tangente a x em M, $T_xM := E^s_x \oplus E^u_{(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}}$ para cada pré-órbita de x, aqui representada por uma sequência $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$. Esta noção de hiperbolicidade para endomorfismos foi introduzida em [Prz76], onde foi definida a hiperbolicidade a partir de decomposições em direções uniformemente contratoras e uniformemente expansoras dependentes das trajetórias de cada ponto pelo endomorfismo.

Existem casos de endomorfismos em que a direção instável independe das trajetórias, ou seja, a interseção dada por (1.3.2) independe da pré-órbita escolhida do ponto x. Por exemplo, os endomorfismos lineares de Anosov no toro satisfazem essa propriedade. Ainda assim, [Prz76] mostra que é possível encontrar um endomorfismo Anosov suficientemente próximo de um endomorfismo linear de Anosov, tal que em cada ponto existem infinitas direções instáveis, cada uma delas associada a uma pré-órbita de um ponto. Também, [MT14] mostram que para um endomorfismo Anosov temos que ou existe uma única direção instável ou, existem infinitas direções instáveis e esta última ocorre genericamente.

Para formalizarmos este conceito de hiperbolicidade para endomorfismo usamos a noção de extensão natural, que não é nada mais que o espaço das sequências que representam pré-órbitas do endomorfismo f. É possível induzirmos um levantamento de f neste espaço que vem a ser um homeomorfismo. Contudo, ao fazermos este processo, perdemos em geral a estrutura de variedade do espaço.

Então, considerar a hiperbolicidade de um endomorfismo a partir de direções invariantes parece não ser razoável.

1.3.2 Hiperbolicidade não-uniforme e medidas SRB

Assim, adaptamos a noção de hiperbolicidade parcial contida em [ABV00], considerando campos de cones invariantes no lugar de direções invariantes. Por simplicidade, consideramos uma direção uniformemente estável e Df-invariante e um campo de cones complementar com uma condição de expansão não uniforme. Esta condição implicará na existência do que chamaremos de tempos cone-hiperbólicos, que, em linhas gerais, garante que dado discos tangentes ao campo de cones e de diâmetro suficientemente pequeno tem a propriedade de expansão em determinada sequência de iterados da f.

O método que utilizaremos para encontrarmos a medida SRB é inspirado nos argumentos do [ABV00]. Consideraremos um disco tangente ao campo de cones C_a da hipótese (H3), ou seja, $T_x D \subset C_a(x)$ para todo $x \in D$ e a dimensão de D é igual a $\dim(F)$. Definiremos medidas

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_*^j Leb_D$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, onde Leb_D é a medida de Lebesgue normalizada em D. A medida candidata a SRB será alguma componente ergódica de um ponto de acumulação da sequência $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Observe que diferente do caso invertível, o suporte de cada medida $f_*^j Leb_D$ para $j \in \mathbb{N}$, pode não ser um disco, pois, se f é não invertível, $f^j(D)$ pode ter auto-interseções e portanto não ter estrutura de variedade. Iremos então escolher, por um processo cuidadoso de seleção, para cada $j \in \mathbb{N}$, uma família $\mathcal{D}_j$ de subdiscos de D com a propriedade de expansão em tempo j. O tamanho destes subdiscos deverá se suficientemente pequeno, de modo que f^j restrito a cada subdisco $D_j \in \mathcal{D}_j$ seja um difeomorfismo para podermos comparar a medida $f_*^j Leb_{D_j}$ com $Leb_{f^j(D_j)}$.

Restringiremos a sequência μ_n às famílias de discos expansores em tempo j, $\mathcal{D}_j$. Ou seja, consideraremos

$$\nu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_*^j Leb_{\mathcal{D}_j} \tag{1.3.3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, em que $Leb_{\mathcal{D}_j} = \sum_{D_j\in\mathcal{D}_j} Leb_{D_j}$. Note que ν_n é uma medida tal que $\nu_n(M) \leq \mu_n(M) = 1$. Logo, a sequência $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite subsequência convergente. Se ν é um ponto de acumulação de $(\nu_n)_n$ podemos escrever $\mu = \nu + \eta$ onde μ é um ponto de acumulação de $(\mu_n)_n$. Mostraremos que o suporte de ν está contido numa união de discos instáveis, possivelmente dependentes das pré-órbitas. Como era de se esperar, tais discos instáveis não são necessariamente disjuntos. Então para podermos identificar a continuidade absoluta da medida temos que tentar eliminar possíveis interseções para desintegrarmos a medida e analisarmos cada elemento da desintegração. Para isso, usaremos a noção de extensão natural que nos permitirá ver cada disco instável, ao menos localmente, como subconjuntos disjuntos.

A extensão natural é o espaço das pré-órbitas de f. O representamos como o espaço das sequências $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$ que satisfazem $f(x_{-n}) = x_{-n+1}$ para todo $n \geq 1$. Denotamos este conjunto por M^f. Se M é uma variedade compacta então M^f é um espaço métrico compacto. Podemos definir em M^f a aplicação $\hat{f}: M^f \to M^f$ dada por

$$\hat{f}\left(\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0\right) = \left(\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0, f\left(x_0\right)\right).$$

$\hat{f}$ é um homeomorfismo e é semi-conjugado a f pela projeção na primeira coordenada $\pi : M^f \to M$. Esta projeção π induz uma aplicação no espaço de medidas que a cada medida $\hat{\mu}$ em M^f associa a medida $\mu = \pi_*\hat{\mu}$ dada pelo push-forward de $\hat{\mu}$ por π. Quando nos restringimos ao espaço de medidas $\hat{f}$-invariantes temos uma bijeção sobre o espaço de medidas f-invariantes ([QXZ09]) .

Reproduziremos a sequência dada por (1.3.3) em M^f, ou seja, consideraremos uma sequência de medidas $\left(\hat{\nu}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ em M^f tal que $\pi_*\hat{\nu}_n = \nu_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Gostaríamos de dizer que $\hat{\nu}_n$ é também uma média de Cesáro dos iterados de Lebesgue em M^f. Contudo, observe que, como M^f não tem necessariamente uma estrutura de variedade, não temos bem definida uma medida de volume em M^f que se relacione com a medida de Lebesgue em M. Também, como a medida de Lebesgue não é necessariamente invariante, não temos bem definido um levantamento da medida de Lebesgue para M^f. Sendo assim, construiremos o levantamento da medida de Lebesgue em pequenos discos usando a estrutura de produto da extensão natural demonstrada em [AH94]. Em linhas gerais, temos que se V é um aberto suficientemente pequeno em M então $\pi^{-1}(V)$ é homeomorfo ao produto de V por um conjunto de Cantor Γ. Então para cada disco D_j podemos definir um levantamento da medida de Lebesgue à extensão natural como uma medida produto entre Lebesgue no disco e uma probabilidade $\mathbb{P}$ no conjunto de Cantor Γ. As $\hat{\nu}_n$ serão definidas como médias de Cesáro dos iterados deste levantamento por $\hat{f}$.

Como consequência desta construção obteremos que um ponto de acumulação $\hat{\nu}$ de $\left(\hat{\nu}_n\right)_n$ é uma medida tal que $\nu := \pi_*\hat{\nu}$ é um ponto de acumulação de $\left(\nu_n\right)_n$. Mais ainda, o suporte de $\hat{\nu}$ está contido numa união de conjuntos $\left\{\hat{\Delta}_\lambda\right\}_{\lambda\in I}$, em que para cada λ, $\pi\mid_{\hat{\Delta}_\lambda}$ está em bijeção com um disco instável Δ que está contido na cobertura do suporte de ν. A vantagem é que, ao menos localmente, a família $\left\{\hat{\Delta}_\lambda\right\}_{\lambda\in I}$ tem elementos dois a dois disjuntos e podemos desintegrar a medida $\hat{\nu}$ nestes elementos. Verificaremos a continuidade absoluta projetando por π_* os elementos da desintegração e comparando com a medida de Lebesgue. Note que ν é uma medida que não é necessariamente invariante.

Como $\mu = \nu + \eta$, temos que os discos instáveis que cobrem o suporte de ν também são relevantes para a medida μ. Usaremos então um argumento tipo Hopf, para, a partir da medida ν, exibir componentes ergódicas da medida μ que são medidas SRB para f. Este é, em linhas gerais, o conteúdo do capítulo 3.

Neste ponto, demonstramos a existência de um número finito de medidas SRB para f neste contexto.

No capítulo 2 apresentamos os conceitos básicos utilizados em nossos argumentos, como o conceito de extensão natural e suas propriedades, o conceito de medida SRB e o conceito de tempos cone-hiperbólicos.

Em [Vás07] foi demonstrado a estabilidade estatística das medidas SRB encontradas no contexto parcialmente hiperbólico e de decomposição dominada por [ABV00]. Nos questionamos então se a estabilidade também é válida no âmbito de aplicações não invertíveis e verificamos que qualquer medida SRB pode ser obtida pela construção anterior. Não obstante, a maior parte da construção fazer uso da extensão natural, o fato que, simultaneamente, a construção também está atrelada a geometria da variedade, nos permite mostrar que a construção é, em certo sentido, estável, assumindo que a propriedade de expansão não uniforme no campo de cones valha robustamente. A descrição deste argumentos está no Capítulo 4.

Finalmente exibiremos alguns exemplos nos quais podemos aplicar os nossos resultados a partir de perturbações de endomorfismos Anosov no capítulo 5.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Extensão natural

Seja (M, d) um espaço métrico compacto e $f : M \to M$ uma aplicação contínua. Definimos a *extensão natural* de M por f como o conjunto:

$$M^f := \left\{ \hat{x} = (x_{-j})_{j \in \mathbb{N}} : \ x_{-j} \in M \text{ e } f(x_{-j}) = x_{-j+1} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \right\}.$$

A distância d em M induz uma distância $\hat{d}$ em M^f dada por

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) := \sum_{j \in \mathbb{N}} 2^{-j} d(x_{-j}, y_{-j}).$$

É fácil ver que, com esta métrica, M^f é um espaço compacto se M é compacto. Consideraremos ainda a projeção natural na primeira coordenada, $\pi : M^f \to M$, $\pi(\hat{x}) = x_0$, que é uma aplicação contínua com as métricas acima.

Definimos o *levantamento* de f por π como sendo a aplicação $\hat{f} : M^f \to M^f$ dada por $\hat{f}(\hat{x}) = (\cdots, x_{-n}, ..., x_{-1}, x_0, f(x_0))$. Temos que

$$f \circ \pi = \pi \circ \hat{f}.$$

Em geral, a extensão natural de M por um endomorfismo f não tem estrutura de variedade diferenciável. Contudo podemos induzir em M^f uma estrutura fibrada, semelhante a um fibrado tangente, tomando o pull back do fibrado tangente de M, TM, pela projeção π. Em outras palavras, para cada $\hat{x} \in M^f$, consideramos

$$T_{\hat{x}} := T_{\pi(\hat{x})} M.$$

Ao conjunto dos pares $(\hat{x}, v)$ com $\hat{x} \in M^f$ e $v \in T_{\hat{x}}$ denotaremos por $\mathcal{F}M^f$. Se f é um endomorfismo de classe C^1, temos que a derivada de f induz uma aplicação em $\mathcal{F}M^f$. Definimos $D\hat{f} : \mathcal{F}M^f \to \mathcal{F}M^f$ por $D\hat{f}(\hat{x}, v) = \left(\hat{f}(\hat{x}), Df(\pi(\hat{x})) \cdot v\right)$, para todo $(x, v) \in \mathcal{F}M^f$. Observe que $D\hat{f} \cdot T_{\hat{x}} \subseteq T_{\hat{f}(\hat{x})}$, para todo $\hat{x} \in M^f$. Escreveremos $D\hat{f}(\hat{x})$ para indicar a restrição de $D\hat{f}$ ao espaço tangente $T_{\hat{x}}$, ou seja, $D\hat{f}(\hat{x}) : T_{\hat{x}} \to T_{\hat{f}(\hat{x})}$.

Observação 2.1.1. Se temos que $\Lambda \subset M$ é um conjunto compacto e positivamente invariante, consideraremos

$$\Lambda^f := \left\{\hat{y} \in M^f : y_{-n} \in \Lambda \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\right\}$$

a extensão natural de Λ. Note que $\Lambda^f \subset M^f$. Como assumimos apenas que $f(\Lambda) \subset \Lambda$, pode existir $x \in \Lambda$ cuja alguma sua pré-imagem não pertence a Λ. A extensão natural de Λ desconsiderará as pré-órbitas com tais pré-imagens.

Temos o Teorema de Oseledec para endomorfismos, enunciado a seguir como em [Wal00, Teorema 10.4]:

Teorema 2.1.2. *Seja $f : M \to M$ um endomorfismo de classe C^1 em M, variedade Riemanniana compacta. Então existe um conjunto Borel mensurável $\Gamma \subset M$ com $f(\Gamma) \subset \Gamma$ e $\mu(\Gamma) = 1$ para qualquer medida f-invariante μ tal que valem as seguintes propriedades:*

1. *existe uma função mensurável $r : \Gamma \to \{1, 2, \ldots, \dim(M)\}$ com $r \circ f = r$;*
2. *para todo $x \in \Gamma$, existem números reais*
$$+\infty > \lambda_1(x) > \lambda_2(x) > \cdots > \lambda_{r(x)}(x) \geq -\infty;$$
3. *se $x \in \Gamma$ então existe uma filtração por subespaços lineares*
$$T_xM = V_0(x) \supset V_1(x) \supset \cdots \supset V_{r(x)}(x) = \{0\}$$
de T_xM;
4. *se $x \in \Gamma$ e $1 \leq i \leq r(x)$ então*
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(x) \cdot v\| = \lambda_i(x),$$
para todo $v \in V_{i-1}(x) \backslash V_i(x)$. Além disto,
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log |\det(Df^n(x))| = \sum_{i=1}^{r(x)} \lambda_i(x) m_i(x),$$
em que $m_i(x) = \dim(V_{i-1}(x)) - \dim(V_i(x))$ para todo $1 \leq i \leq r(x)$.

5. *$x \mapsto \lambda_i(x)$ é uma aplicação mensurável definida em $\{x \in \Gamma : \ r(x) \geq i\}$ e, além disto, $\lambda_i(f(x)) = \lambda_i(x)$ para todo $x \in \Gamma$;*

6. *$Df(x) \cdot V_i(x) \subset V_i(f(x))$ se $i \geq 0$ e $x \in \Gamma$.*

Os números $\{\lambda_i(x)\}_{i=1}^{r(x)}$ dados pelo Teorema anterior são chamados de expoentes de Lyapunov de f em x e $m_i(x)$ é chamada a multiplicidade de $\lambda_i(x)$.

A projeção $\pi : M^f \to M$ induz uma aplicação $\pi_* : \mathcal{M}_{\hat{f}}\left(M^f\right) \to \mathcal{M}_f(M)$, onde $\mathcal{M}_{\hat{f}}\left(M^f\right)$ denota o conjunto das medidas de probabilidade borelianas, $\hat{f}$-invariantes em M^f e $\mathcal{M}_f(M)$ denota o conjunto das medidas de probabilidade f-invariantes em M. π_* é a aplicação que a cada medida $\hat{\mu} \in \mathcal{M}_{\hat{f}}\left(M^f\right)$ associa a medida $\pi_*\hat{\mu}$ definida por

$$\int \phi d(\pi_*\hat{\mu}) = \int (\phi \circ \pi)\, d\hat{\mu},$$

para todo $\phi \in C(M)$. Conforme [QXZ09, Proposição I.3.1], temos que para cada $\mu \in \mathcal{M}_f(M)$ existe uma única medida $\hat{\mu} \in \mathcal{M}_{\hat{f}}\left(M^f\right)$ tal que $\pi_*\hat{\mu} = \mu$. Chamaremos tal única medida de levantamento da medida μ. É fácil ver que, $\mu \in \mathcal{M}_f(M)$ é ergódica se e somente se seu levantamento também é uma medida ergódica.

Temos ainda a versão adaptada a extensão natural do Teorema de Oseledec, conforme [QXZ09, Proposição I.3.5]:

Proposição 2.1.3. *Seja $f : M \to M$ um endomorfismo de classe C^1 em M, variedade Riemanniana compacta. Existe um conjunto boreliano $\hat{\Delta} \subset M^f$ com $\hat{f}(\hat{\Delta}) = \hat{\Delta}$ e $\hat{\mu}(\hat{\Delta}) = 1$ tal que todo $\hat{x} \in \hat{\Delta}$ existe uma decomposição do espaço tangente em $\hat{x}$*

$$T_{\hat{x}} = T_{x_0}M = E_1(\hat{x}) \oplus E_2(\hat{x}) \oplus \cdots \oplus E_{r(\hat{x})}(\hat{x})$$

e números

$$+\infty > \lambda_1(\hat{x}) > \lambda_2(\hat{x}) > \cdots > \lambda_{r(\hat{x})}(\hat{x}) > -\infty$$

e $m_i(\hat{x})$ com $1 \leq i \leq r(\hat{x})$, satisfazendo para todo $\hat{x} \in \hat{\Delta}$:

1. *$D\hat{f}\left(\hat{f}^n(\hat{x})\right) : T_{\hat{f}^n(\hat{x})} \to T_{\hat{f}^{n+1}(\hat{x})}$ é um isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$;*

2. *as funções $r : \hat{\Delta} \to \mathbb{N}$ e $\lambda_i : \hat{\Delta} \to \mathbb{R}$ e $m_i : \hat{\Delta} \to \mathbb{N}$ são $\hat{f}$-invariantes para cada $1 \leq i \leq r(\hat{x})$;*

3. *$\dim(E_i(\hat{x})) = m_i(\hat{x})$ para todo $1 \leq i \leq r(\hat{x})$;*

4. *a decomposição é $D\hat{f}$-invariante, isto é, $D\hat{f}(\hat{x}) \cdot E_i(\hat{x}) = E_i\left(\hat{f}(\hat{x})\right)$;*

5. *$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log\left|D\hat{f}^n(\hat{x}) \cdot u\right| = \lambda_i(\hat{x})$ para todo $u \in E_i(\hat{x}) \setminus \{0\}$, $1 \leq i \leq r(\hat{x})$;*

6. *se escrevermos*
$$\rho_1(\hat{x}) \geq \rho_2(\hat{x}) \geq \cdots \geq \rho_d(\hat{x})$$
denotando os números $\lambda_i(\hat{x})$ *repetidos* $m_i(\hat{x})$ *vezes para cada* $1 \leq i \leq r(\hat{x})$ *e* $\{u_1, u_2, ..., u_d\}$ *é uma base de* $T_{\hat{x}}$ *que satisfaz*
$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \left| D\hat{f}^n(\hat{x}) \cdot u_i \right| = \rho_i(\hat{x})$$
para todo $1 \leq i \leq d$, *então para quaisquer subconjuntos* $P, Q \subset \{1, 2, ..., d\}$ *com* $P \cap Q = \emptyset$ *temos que*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sphericalangle \left(D\hat{f}^n(\hat{x}) \cdot E_P, D\hat{f}^n(\hat{x}) \cdot E_Q \right) = 0,$$
onde E_P *e* E_Q *denotam os subespaços de* $T_{\hat{x}}$ *gerados pelos vetores* $\{u_i\}_{i\in P}$ *e* $\{u_j\}_{j\in Q}$, *respectivamente.*

7. $\pi(\hat{x}) = x_0 \in \Gamma'$ *e* $r(\hat{x}) = r(x_0)$, $\lambda_i(\hat{x}) = \lambda_i(x_0)$ *e* $m_i(\hat{x}) = m_i(x_0)$ *para todo* $1 \leq i \leq r(\hat{x})$, *onde* $r(x_0)$, $\lambda_i(x_0)$ *e* $m_i(x_0)$ *são dados pelo Teorema 2.1.2.*

Note que os expoentes de Lyapunov de um endomorfismo f e de seu levantamento $\hat{f}$ são iguais. Contudo enquanto na versão do Teorema Multiplicativo Ergódico para endomorfismos temos tão somente uma filtração, na versão enunciada a partir da extensão natural definimos uma decomposição associada a cada pré-órbita de um ponto regular. Dentro de cada $V_{i-1}(x_0) \backslash V_i(x_0)$, encontramos um subespaço invariante $E_i(\hat{x})$ associado ao expoente de Lyapunov $\lambda_i(\hat{x}) = \lambda_i(x_0)$ para cada $\hat{x} \in \pi^{-1}(x_0)$.

Temos ainda a existência de variedades instáveis locais associadas a pré-órbitas de pontos regulares, conforme teorema que enunciamos a seguir e cuja demonstração pode ser encontrada em [QXZ09, Capítulo 5] ou [Zhu98, Teorema 1].

Proposição 2.1.4. *(Variedade instável local para endomorfismos)Suponhamos* $f : M \to M$ *um endomorfismo de classe* C^2 *e* μ *uma medida de probabilidade* f*-invariante que tem pelo menos um expoente de Lyapunov positivo em quase todo o ponto. Existe uma quantidade enumerável de conjuntos compactos* $\left\{\hat{\Delta}_i\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ *de* M^f *com* $\hat{\mu}\left(\cup_{i\in\mathbb{N}}\hat{\Delta}_i\right) = 1$ *tal que:*

1. *se denotamos* $E^u_{\hat{x}} := \bigoplus_{\lambda_j(\hat{x})>0} E_j(\hat{x})$ *e* $E^{cs}_{\hat{x}} := \bigoplus_{\lambda_j(\hat{x})\leq 0} E_j(\hat{x})$ *então* $\dim(E^u_{\hat{x}})$ *e* $\dim(E^{cs}_{\hat{x}})$ *são constantes em* $\hat{\Delta}_i$, *digamos* $\dim(E^u_{\hat{x}}) = k_i$ *para todo* $\hat{x} \in \hat{\Delta}_i$. *Além disto,* $E^u_{\hat{x}}$ *e* $E^{cs}_{\hat{x}}$ *dependem continuamente em* $\hat{x} \in \hat{\Delta}_i$, *para cada* $i \in \mathbb{N}$.

2. *para cada* $\hat{\Delta}_i$ *existe uma família de discos* C^1 *mergulhados,* k_i*-dimensionais*
$$\{W^u_{loc}(\hat{x})\}_{\hat{x}\in\hat{\Delta}_i}$$

em M e números positivos λ_i, $\epsilon_i < \lambda_i/200$, $r_i < 1$, γ_i , α_i e β_i tais que valem as seguintes propriedades:

(a) *existe uma aplicação C^1 $h_{\hat{x}} : O_{\hat{x}} \to E^{cs}_{\hat{x}}$, em que $O_{\hat{x}}$ é um subconjunto aberto de $E^u_{\hat{x}}$ que contém $\{v \in E^u_{\hat{x}} : \|v\| < \alpha_i\}$*

   i. *$h_{\hat{x}}(0) = 0$ e $Dh_{\hat{x}}(0) = 0$;*

   ii. *$Lip(h_{\hat{x}}) \leq \beta_i$ e $Lip(Dh_{\hat{x}}) \leq \beta_i$;*

   iii. *$W^u_{loc}(\hat{x}) = \exp_{x_0}(Graf(h_{\hat{x}})) \subset B\left(x_0, \hat{\kappa}(\hat{x})^{-1}\right)$.*

(b) *dado qualquer $y_0 \in W^u_{loc}(\hat{x})$ existe um único $\hat{y} \in M^f$ tal que $\pi(\hat{y}) = y_0$,*

$$d(y_{-n}, x_{-n}) \leq r_i e^{-\epsilon_i n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

e

$$d(y_{-n}, x_{-n}) \leq \gamma_i e^{-\lambda_i n} d(y_0, x_0), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(c) *definindo*

$$\hat{W}^u_{loc}(\hat{x}) := \left\{\hat{y} \in M^f : y_{-n} \in W^u_{loc}\left(\hat{f}^{-n}(\hat{x})\right), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\right\},$$

então $\pi : \hat{W}^u_{loc}(\hat{x}) \to W^u_{loc}(\hat{x})$ é bijetiva.

(d) *dados quaisquer $\hat{y}, \hat{z} \in \hat{W}^u_{loc}(\hat{x})$ temos que*

$$d^u_{\hat{f}^{-n}(\hat{x})}(y_{-n}, z_{-n}) \leq \gamma_i e^{-\lambda_i n} d^u_{\hat{x}}(y_0, z_0)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $d^u_{\hat{f}^{-n}(\hat{x})}(\cdot, \cdot)$ denota a distância ao longo da variedade instável associada a $\hat{f}^{-n}(\hat{x})$, para $n \in \mathbb{N}$.

Temos as seguintes propriedades adicionais das variedades instáveis locais:

Proposição 2.1.5. *Sejam $\left(\hat{\Delta}_i\right)_{i \in \mathbb{N}}$, $\{W^u_{loc}(\hat{x})\}_{\hat{x} \in \hat{\Delta}_i}$ e $\left\{\hat{W}^u_{loc}(\hat{x})\right\}_{\hat{x} \in \hat{\Delta}_i}$ dados pela Proposição 2.1.4. Então existe $\rho > 0$ tal que para todo $\hat{\Delta}_i$ existem números $r_i \in \left(0, \frac{\rho}{4}\right)$ e $\epsilon_i \in (0, 1)$ e $R_i > 0$ satisfazendo:*

1. *Dados quaisquer $r \in \left[\frac{r_i}{2}, r_i\right]$ e $\hat{x} \in \hat{\Delta}_i$, se $\hat{y} \in B_{\hat{\Delta}_i}(\hat{x}, \epsilon_i r) := \hat{\Delta}_i \cap B(\hat{x}, \epsilon_i r)$ então $W^u_{loc}(\hat{y}) \cap B(x_0, r)$ é conexo e a aplicação*

$$B_{\hat{\Delta}_i}(\hat{x}, \epsilon_i r) \ni \hat{y} \mapsto W^u_{loc}(\hat{y}) \cap B(x_0, r)$$

é contínua com a topologia de Hausdorff nos subconjuntos compactos de $B(x_0, r)$.

2. *Dados quaisquer* $r \in \left[\frac{r_i}{2}, r_i\right]$ *e* $\hat{x} \in \hat{\Delta}_i$*, se* $\hat{y}$ *e* $\hat{z}$ *pertencem a* $B_{\hat{\Delta}_i}(\hat{x}, \epsilon_i r)$ *então, ou*

$$W^u_{loc}(\hat{y}) \cap B(x_0, r) = W^u_{loc}(\hat{z}) \cap B(x_0, r)$$

ou

$$\left(W^u_{loc}(\hat{y}) \cap B(x_0, r)\right) \bigcap \left(W^u_{loc}(\hat{z}) \cap B(x_0, r)\right) = \emptyset.$$

3. *Para cada* $\hat{x} \in \Delta_i$ *se* $\hat{y} \in B_{\hat{\Delta}_i}(\hat{x}, \epsilon_i r)$ *e* $z_0 \in W^u_{loc}(\hat{y}) \cap B(x_0, r)$ *então* $W^u_{loc}(\hat{y})$ *contém a bola fechada de centro em* y_0*e raio* R_i *em* $W^u(\hat{y})$*, com a distância* $d^u_{\hat{y}}$*.*

Para uma prova nos referimos ao leitor para [QXZ09, Proposição VII.2.1].

2.2 Teorema da desintegração de Rokhlin

Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de probabilidade e $\mathcal{P}$ é uma partição mensurável de X podemos induzir uma estrutura mensurável no espaço quociente $X/\mathcal{P}$ que nos permitirá escrever a medida de probabilidade μ em termos de medidas suportadas nos átomos de $\mathcal{P}$, como descreveremos a seguir.

A mensurabilidade da partição significa que podemos gerar a partição a partir de uma sequência de partições enumeráveis. Lembremos que dadas duas partições $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$ definimos a partição $\mathcal{Q} \bigvee \mathcal{P}$ por

$$\mathcal{Q} \bigvee \mathcal{P} := \{Q \cap P : \ Q \in \mathcal{Q} \text{ e } P \in \mathcal{P}\}.$$

Analogamente, se $(\mathcal{Q}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é uma família de partições definimos

$$\bigvee_{j=0}^{\infty} \mathcal{Q}_j := \left\{ \bigcap_{j=0}^{\infty} Q_j : \ Q_j \in \mathcal{Q}_j, \ j \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dizemos ainda que uma partição $\mathcal{P}$ é mais fina do que uma dada partição $\mathcal{Q}$ se, para todo $P \in \mathcal{P}$ existe $Q \in \mathcal{Q}$ tal que $P \subseteq Q$. Neste caso, denotamos $\mathcal{Q} \prec \mathcal{P}$.

Definição 2.2.1. Uma partição $\mathcal{P}$ de um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é dita ser *mensurável* (com respeito a μ) se, restrita a um subconjunto com μ-medida total, X_0, temos que existe uma sequência crescente $\mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}_2 \prec \cdots \prec \mathcal{P}_n \prec \cdots$ de partições enumeráveis tal que

$$\mathcal{P} = \bigvee_{j=1}^{\infty} \mathcal{P}_j.$$

Consideremos a projeção $p : X \to \mathcal{P}$ que a cada elemento $x \in X$ associa o átomo de $\mathcal{P}$ que contém x, que denotaremos por $\mathcal{P}(x)$. Diremos que um subconjunto $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$

é mensurável se, e somente se, $p^{-1}(\mathcal{Q})$ é um subconjunto mensurável de X. Temos então que a família de todos os subconjunto mensuráveis de $\mathcal{P}$, neste sentido, forma uma σ-álgebra em $\mathcal{P}$, que denotaremos por $\tilde{\mathcal{A}}$. Definimos então a *medida quociente* $\tilde{\mu}$ por $\tilde{\mu}(\mathcal{Q}) = \mu(p^{-1}(\mathcal{Q}))$. Com essa estrutura de espaço de probabilidade em $X/\mathcal{P}$, temos a noção de sistema condicional de medidas que nos permite enxergar a medida μ em termos de medidas nos átomos da partição $\mathcal{P}$, conforme definição abaixo.

Definição 2.2.2. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $\mathcal{P}$ uma partição de X. Um *sistema condicional de medidas* de μ com respeito a $\mathcal{P}$ é uma família $\{\mu_P : P \in \mathcal{P}\}$ de probabilidades em X tal que, para todo subconjunto mensurável $E \subset X$:

1. $\mu_P(P) = 1$ para $\tilde{\mu}$-quase todo $P \in \mathcal{P}$;
2. a aplicação $P \mapsto \mu_P(E)$ é mensurável;
3. $\mu(E) = \int \mu_P(E)\, d\tilde{\mu}(P)$.

Rokhlin em [Rok49] demonstrou que se $\mathcal{P}$ é uma partição mensurável então existe um sistema condicional de medidas com respeito a tal partição, conforme enunciado a seguir.

Teorema 2.2.3 (Desintegração de Rokhlin)**.** *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade em que X é um espaço métrico completo e separável. Se $\mathcal{P}$ é uma partição mensurável de X então μ admite algum sistema condicional de medidas com respeito a $\mathcal{P}$.*

Observação 2.2.4. É importante observar que se $\{\mu_P : P \in \mathcal{P}\}$ e $\{\mu'_P : P \in \mathcal{P}\}$ são sistemas condicionais de medidas de μ com respeito a $\mathcal{P}$ então $\mu_P = \mu'_P$ para $\tilde{\mu}$-quase todo $P \in \mathcal{P}$.

Lema 2.2.5. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade em que X é um espaço métrico compacto e seja $\mathcal{P}$ uma partição mensurável de X. Suponha $f : X \to X$ um homeomorfismo e considere a partição $\mathcal{Q} := f^{-1}(\mathcal{P})$. Então se $\{\mu_P : P \in \mathcal{P}\}$ e $\{\mu_Q : Q \in \mathcal{Q}\}$ são sistemas condicionais de medidas de μ com respeito a $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, respectivamente, então, denotando para $P \in \mathcal{P}$, $Q(P) := f^{-1}(P)$, temos que $\mu_P = f_*\mu_{Q(P)}$ para $\tilde{\mu}$ quase todo $P \in \mathcal{P}$.*

Demonstração. Como vimos anteriormente, basta provarmos que $\left\{f_*\mu_{Q(P)} : P \in \mathcal{P}\right\}$ é uma desintegração de μ com respeito a $\mathcal{P}$. Consideremos $p : X \to \mathcal{P}$ e $q : X \to \mathcal{Q}$ as projeções associadas às partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ respectivamente. Definamos $\tilde{f} : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ dada por $\tilde{f}(P) := f^{-1}(P)$. Temos que, como f é um homeomorfismo, $\tilde{f}$ é uma aplicação mensurável. Temos a seguinte relação

$$\tilde{f} \circ p(x) = q \circ f^{-1}(x),$$

para todo $x \in X$. Denotemos $\tilde{\mu}_{\mathcal{P}}$ e $\tilde{\mu}_{\mathcal{Q}}$ as medidas quociente com respeito a $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ respectivamente. Então

$$\tilde{f}_* \tilde{\mu}_{\mathcal{P}} = \tilde{f}_* \left(p_* \mu\right) = q_* \left(f_* \mu\right) = q_* \mu = \tilde{\mu}_{\mathcal{Q}},$$

isto porque μ é uma medida f-invariante. A propriedade acima implica que, como $\mu_Q\left(Q\right) = 1$ para $\tilde{\mu}_{\mathcal{Q}}$ quase todo $Q \in \mathcal{Q}$, $f_* \mu_{Q(P)}\left(P\right) = 1$ para $\tilde{\mu}_{\mathcal{P}}$ quase todo $P \in \mathcal{P}$.

Fixemos $E \subset M$ um subconjunto mensurável. Então a aplicação $\mathcal{P} \ni P \mapsto f_* \mu_{Q(P)}\left(E\right)$ é mensurável pois pode ser vista como a composição da aplicação $\tilde{f}$ com a aplicação mensurável $\mathcal{Q} \ni Q \mapsto \mu_Q\left(f^{-1}\left(E\right)\right)$.

Por fim, note que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{P}} f_* \mu_{Q(P)}\left(E\right) d\tilde{\mu}_{\mathcal{P}}\left(P\right) &= \int_{\mathcal{P}} \mu_{\tilde{f}(P)}\left(f^{-1}E\right) d\tilde{\mu}_{\mathcal{P}}\left(P\right) \\
&= \int_{\mathcal{Q}} \mu_Q\left(f^{-1}E\right) d\tilde{f}_* \tilde{\mu}_{\mathcal{P}}\left(Q\right) \\
&= \int_{\mathcal{Q}} \mu_Q\left(f^{-1}E\right) d\tilde{\mu}_{\mathcal{Q}}\left(Q\right) \\
&= \mu\left(f^{-1}E\right) = \mu\left(E\right)
\end{aligned}$$

para todo subconjunto $E \subset M$ mensurável. Portanto $\left\{f_* \mu_{Q(P)} : P \in \mathcal{P}\right\}$ é uma desintegração de μ com respeito a $\mathcal{P}$ e coincide com $\{\mu_P : P \in \mathcal{P}\}$ com exceção de um conjunto de medida $\tilde{\mu}_{\mathcal{P}}$ nula. $\square$

2.3 Propriedade SRB para endomorfismos

Recordemos que dado uma aplicação contínua $f : M \to M$ definimos M^f como o espaço das pré-órbitas de M por f, que representamos por sequências $\hat{x} = \left(x_{-n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazendo $f\left(x_{-n}\right) = x_{-n+1}$ para todo $n \geq 1$. Consideramos ainda $\pi : M^f \to M$ a projeção natural dada por $\pi\left(\hat{x}\right) = x_0$. Dada uma medida de probabilidade μ em M, f-invariante, temos que π induz uma única medida de probabilidade $\hat{\mu}$ em M^f, que é $\hat{f}$-invariante. Chamamos esta medida de levantamento da μ.

Quando f é um endomorfismo de classe C^1, a Proposição 2.1.4 nos dá a existência de variedades instáveis associadas às pré-órbitas de um subconjunto de medida μ-total. A seguinte definição diz respeito a partições do espaço M^f, adaptadas às variedades instáveis de (f, μ).

Definição 2.3.1. Seja μ uma medida f-invariante com pelo menos um expoente de Lyapunov positivo em quase todo ponto. Uma partição mensurável $\mathcal{P}$ de M^f é dita ser *subordinada a variedades instáveis* se para $\hat{\mu}$ q.t.p. $\hat{x} \in M^f$, $\mathcal{P}\left(\hat{x}\right)$ satisfaz:

1. $\pi|_{\mathcal{P}(\hat{x})} : \mathcal{P}(\hat{x}) \to \pi(\mathcal{P}(\hat{x}))$ é bijetiva;

2. Existe uma subvariedade $W_{\hat{x}}$ de dimensão $k(\hat{x})$ em M tal que $W_{\hat{x}} \subset W^u(\hat{x})$ e $\pi(\mathcal{P}(\hat{x})) \subset W_{\hat{x}}$ e $\pi(\mathcal{P}(\hat{x}))$ contém uma vizinhança aberta de x_0 em $W_{\hat{x}}$.

Definimos então a propriedade SRB para medidas invariantes de um endomorfismo:

Definição 2.3.2. Dizemos que uma medida f-invariante μ , com ao menos um expoente de Lyapunov positivo em quase todo ponto, tem a *propriedade SRB* se para toda partição mensurável de M^fsubordinada a variedades instáveis e para $\hat{\mu}$ q.t.p. $\hat{x} \in M^f$ temos que $\pi_*\hat{\mu}_{\hat{x}} \ll Leb_{W_{\hat{x}}}$, onde $\{\hat{\mu}_{\hat{x}}\}_{\hat{x}\in M^f}$ é um sistema de medidas condicionais para $\hat{\mu}$ e $\pi_*\hat{\mu}_{\hat{x}}$ é a projeção de $\hat{\mu}_{\hat{x}}$ por $\pi|_{\mathcal{P}(\hat{x})}$.

2.4 Campos de cones e tempos cone-hiperbólicos

Em [New04], Newhouse caracteriza hiperbolicidade e existência de decomposição dominada em termos de campos de cones. Inspirado nisso, consideraremos a nossa hipótese de expansão não uniforme usando campos de cones. Apresentaremos as definições necessárias e introduziremos o conceito de tempo cone-hiperbólico, que é uma generalização do conceito de tempo hiperbólico em [Alv00, ABV00].

Observe que o espaço das aplicações lineares de V em W restritas a um subconjunto fechado $E \subset V$, que denotaremos por $\mathcal{L}_E(V,W)$ formam um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(V,W)$. De fato, dados $\lambda \in \mathbb{R}$ e $S,T \in \mathcal{L}(V,W)$, temos que $S|_E + \lambda \cdot T|_E = (S + \lambda \cdot T)|_E$. Logo, $S|_E + \lambda \cdot T|_E \in \mathcal{L}_E(V,W)$ e $\mathcal{L}_E(V,W)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(V,W)$. Portanto, faz sentido o conceito de norma para elementos deste espaço.

Definição 2.4.1. Sejam V, W espaços vetoriais normados e $T : V \to W$ uma aplicação linear. Suponha $E \subset V$ um subconjunto fechado, então definimos $\|T|_E\|$ por:

$$\|T|_E\| = \sup_{0\neq v\in E} \frac{\|T \cdot v\|}{\|v\|}. \tag{2.4.1}$$

Não é difícil ver que $\|T|_E\|$ é uma norma em $\mathcal{L}_E(V,W)$. De fato, a aplicação $\|\| : \mathcal{L}_E(V,W) \to [0,\infty)$ satisfaz:

1. $\|T|_E\| \geq 0$ para todo $T|_E \in \mathcal{L}_E(V,W)$ e $\|T|_E\|$=0 se, e somente se $T|_E = 0$;

2. $\|\lambda \cdot T|_E\| = |\lambda| \cdot \|T|_E\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $T|_E \in \mathcal{L}_E(V,W)$, por definição;

3. $\|S|_E + T|_E\| \leq \|S|_E\| + \|T|_E\|$, para todo $S|_E, T|_E \in \mathcal{L}_E(V,W)$.

A desigualdade triangular segue imediatamente da desigualdade triangular da norma em V.

Definição 2.4.2. Seja V um espaço vetorial normado. Suponhamos que $V = E \oplus F$. Dado $a > 0$, definimos o *cone de amplitude* $a > 0$ *centrado em* E como o conjunto:

$$C_a := \{v \in V : \ v = v_1 \oplus v_2 \text{ onde } v_1 \in E \text{ e } v_2 \in F \text{ com } \|v_2\| \leq a\|v_1\|\} .$$

Definição 2.4.3. Dada M uma variedade Riemanniana compacta e uma decomposição $TM = E \oplus F$ do fibrado tangente, definimos o *campo de cones de amplitude* $a > 0$ *centrado em* E como a aplicação $x \mapsto C_a(x)$ que a cada $x \in M$ associa um cone de amplitude $a > 0$ em T_xM, centrado em E_x.

Observação 2.4.4. Iremos chamar a *dimensão do campo de cones* C_a, que denotaremos por $\dim(C_a)$, à dimensão do subespaço gerador E.

Definição 2.4.5. Seja $N \subset M$, uma subvariedade. Dizemos que N é uma subvariedade tangente a um campo de cones $x \mapsto C(x)$, se $\dim(N) = \dim(C)$ e $T_xN \subset C(x)$, para todo $x \in N$.

Iremos estender a definição de tempos hiperbólicos, usualmente considerada em direções invariantes(ver [ABV00, Definição 2.6]), para campos de cones. Adiantamos desde já que a não existência de uma direção Df-invariante é uma das principais dificuldades na construção das medidas SRB (veja Seção 3.2).

Seja $\Lambda \subset M$ um subconjunto compacto e f-invariante e um campo de cones $\Lambda \ni x \mapsto C(x)$.

Definição 2.4.6. Suponhamos M uma variedade Riemanniana compacta. Sejam $f : M \to M$ um difeomorfismo local e $c > 0$. Dizemos que $n \in \mathbb{N}$ é um *c-tempo cone-hiperbólico* para $x \in M$ (com respeito ao campo de cones C) se $Df(f^j(x)) \cdot C(f^j(x)) \subset C(f^{j+1}(x))$ para todo $0 \leq j \leq n-1$ e

$$\prod_{j=n-k}^{n-1} \left\| \left(Df(f^j(x))|_{C(f^j(x))}\right)^{-1} \right\| \leq e^{-ck} \tag{2.4.2}$$

para todo $1 \leq k \leq n-1$.

Lema 2.4.7. *Sejam M uma variedade Riemanniana compacta e $c > 0$. Sejam $x \in M$ e n um c-tempo cone-hiperbólico para x, com respeito a um difeomorfismo local $f : M \to M$. Então para cada $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$ e cada $v \in C(f^j(x))$ vale $\|Df^{n-j}(f^j(x)) \cdot v\| \geq e^{c(n-j)}\|v\|$.*

Demonstração. Fixemos $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$ e $v \in C\left(f^j(x)\right)$. Denotemos

$$w = Df^{n-j}\left(f^j(x)\right) \cdot v.$$

Então,

$$v = Df\left(f^j(x)\right)^{-1} \circ Df\left(f^{j+1}(x)\right)^{-1} \circ \cdots \circ Df\left(f^{n-1}(x)\right)^{-1} \cdot w.$$

Observe que para cada $j+1 \leq k \leq n-1$ temos que

$$Df\left(f^k(x)\right)^{-1} \circ Df\left(f^{k+1}(x)\right)^{-1} \circ \cdots \circ Df\left(f^{n-1}(x)\right)^{-1} \cdot w = Df^{k-j}\left(f^j(x)\right) \cdot v.$$

Como $Df\left(f^j(x)\right) \cdot C\left(f^j(x)\right) \subset C\left(f^{j+1}(x)\right)$ para todo $0 \leq j \leq n-1$, por definição, temos que $Df^{k-j}\left(f^j(x)\right) \cdot v \in Df\left(f^{k-1}(x)\right) \cdot C\left(f^{k-1}(x)\right) \subset C\left(f^k(x)\right)$, para todo $j+1 \leq k \leq n-1$. Segue portanto que:

$$\begin{aligned}
\|v\| &= \|Df\left(f^j(x)\right)^{-1} \circ Df\left(f^{j+1}(x)\right)^{-1} \circ \cdots \circ Df\left(f^{n-1}(x)\right)^{-1} \cdot w\| \\
&\leq \|\left(Df\left(f^j(x)\right)|_{C(f^j(x))}\right)^{-1}\| \cdot \|Df\left(f^{j+1}(x)\right)^{-1} \circ \cdots \circ Df\left(f^{n-1}(x)\right)^{-1} \cdot w\| \\
&\leq \prod_{k=j}^{n-1} \|\left(Df\left(f^k(x)\right)|_{C\left(f^k(x)\right)}\right)^{-1}\| \cdot \|w\|.
\end{aligned}$$

Como n é um c-tempo cone-hiperbólico para x temos que

$$\prod_{k=j}^{n-1} \|\left(Df\left(f^k(x)\right)|_{C\left(f^k(x)\right)}\right)^{-1}\| \leq e^{-c(n-j)},$$

logo, $\|v\| \leq e^{-c(n-k)}\|w\|$, ou seja, $\|Df^{n-j}\left(f^j(x)\right) \cdot v\| \geq e^{c(n-j)}\|v\|$. Como j foi tomado qualquer entre 0 e $n-1$ e o v também foi escolhido arbitrariamente, concluímos a prova do Lema. $\square$

Observação 2.4.8. Lembremos que a aplicação que leva uma transformação linear em sua inversa é uma aplicação contínua. A norma do operador também é uma aplicação contínua. Assim, se o campo de cones $\Lambda \ni x \to C(x)$ é contínuo, temos que $\Lambda \ni x \to Df(x)|_{C(x)}$ é contínua, considerando a norma da Definição 2.4.1. Logo $\Lambda \ni x \to \left(Df(x)|_{C(x)}\right)^{-1}$ é contínua e consequentemente $\Lambda \ni x \to \|\left(Df(x)|_{C(x)}\right)^{-1}\|$ também é contínua. Esta propriedade nos permitirá futuramente a espalhar a propriedade de tempos hiperbólicos a vizinhanças de pontos que satisfaçam tal propriedade.

Capítulo 3

Prova do Teorema A: Existência e unicidade de medidas SRB

Queremos provar a existência de medidas com propriedade SRB para um difeomorfismo local f de classe $C^{1+\alpha}$, com $\alpha > 0$, admitindo um fibrado estável E^s e um campo de cones não uniformemente expansor numa direção complementar. Queremos verificar então que existe uma medida de probabilidade f-invariante μ com pelo menos um expoente de Lyapunov positivo em quase todo o ponto e que o levantamento $\hat{\mu}$ de μ, admite desintegração absolutamente contínua com respeito a Lebesgue em toda a partição subordinada a variedades instáveis. Aqui a continuidade absoluta com respeito a variedades instáveis significa que, para toda partição de M^f subordinada a variedades instáveis, se $\pi_* \hat{\mu}_{\hat{P}}$ é a projeção da medida condicional de $\hat{\mu}$ em $\hat{P}$ então $\pi_* \hat{\mu}_{\hat{P}}$ é absolutamente contínua com respeito a $Leb_{\pi(\hat{P})}$. Por definição $\pi(\hat{P})$ está contido em alguma (única) variedade instável local.

Começamos por dar uma descrição da estratégia usada para provar o Teorema A. A ideia da prova da existência da medida SRB neste contexto, parte da hipótese da existência de um conjunto $H \subset U$ com expansão não-uniforme ao longo de cones invariantes (conforme equação (1.2.1)). Como $Leb\,(H) > 0$, existe um disco $D \subset U$ tangente ao campo de cones não uniformemente expansor com $Leb_D\,(H) > 0$. Como consequência do Lema de Pliss ([ABV00, Lema 2.10],[Mañ87, Lema 11.8]) teremos que se $x \in H$ então existe uma sequência $(n_k\,(x))_{k \in \mathbb{N}}$ tendendo a infinito tal que para cada k temos que Df^{n_k} expande os elementos do cone em x. Isto nos permite, para cada $m \in \mathbb{N}$, encontrar uma família $\mathcal{D}_m$ de subdiscos em D que expandem por f^m, escolhendo em H, aqueles elementos x que satisfazem $m \in \{n_k\,(x)\}$. Tomamos como candidata a medida SRB para f a medida ν obtida como ponto de acumulação da sequência de medidas dadas pelas médias dos iterados da medida de Lebesgue nos subdiscos em $\mathcal{D}_k$, ou seja, $\nu_n = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} f_*^m Leb_{\mathcal{D}_m}$.

O suporte de um ponto de acumulação desta sequência está contido numa união de discos acumulados por iterados por f^m de subdiscos $D_m \in \mathcal{D}_m$, com $m \to \infty$. Como os discos em $\mathcal{D}_m$ são expandidos por f^m temos que seus iterados são contraídos pelo ramo inverso $f^{-m} : f^m(D_m) \to D_m$. Assim, se Δ é limite de $f^m(D_m)$, é possível provar uma escolha apropriada de ramos inversos tal que Δ é contraído por f^{-j}, para todo $j \in \mathbb{N}$. Este fato, juntamente com a continuidade da derivada de f garante a existência de expoentes de Lyapunov positivos para ν.

Iremos ver que como D é tangente ao campo de cones não uniformemente expansor então o seu fibrado tangente varia Hölder continuamente. O mesmo vale para $f^m(D')$ para $D' \subset D$, tal que $f^m|_{D'}$ é injetiva. Com isto e a expansão em $\mathcal{D}_m$ por f^m vamos provar a distorção limitada em $f^m : \mathcal{D}_m \to f^m(\mathcal{D}_m)$, para todo m. Então $f^m_* Leb_{\mathcal{D}_m}$ é absolutamente contínua com respeito a $Leb_{f^m \mathcal{D}_m}$. Mostraremos então que se $\hat{\nu}$ é um levantamento de ν então $\hat{\nu}$ está contido em uma união de subconjuntos $\hat{\Delta}$, tal que $\pi : \hat{\Delta} \to \Delta$ é bijetiva e Δ é um dos elementos da cobertura do suporte de ν por discos acumulados por $(f^m(\mathcal{D}_m))_{m \in \mathbb{N}}$. De fato teremos que Δ está contida em uma variedade instável e construiremos em uma vizinhança de Δ uma família disjunta de discos instáveis locais, $\mathcal{K}$, em que verificamos a propriedade $\pi_* \hat{\nu}_{\hat{\gamma}} \ll Leb_\gamma$, para todo $\gamma \in \mathcal{K}$, onde $\pi : \hat{\gamma} \to \gamma$ é bijetiva.

Poderemos repetir este argumento para todo disco Δ tal que consigamos uma vizinhança e uma família de discos instáveis locais com medida ν-positiva. Isto mostrará que o levantamento de ν à extensão natural desintegra-se de forma absolutamente contínua com respeito a Lebesgue nos levantamentos $\hat{\gamma}$ dos discos instáveis γ . Observe que ainda não podemos dizer que ν é uma medida SRB pois ν é uma medida que não é sequer invariante. Consideraremos então

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f^j_* Leb_D$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Temos que $\mu_n = \nu_n + \eta_n$, onde $\eta_n = \mu_n - \nu_n$. Seja μ um ponto de acumulação de $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$, temos que $\mu = \nu + \eta$, com η um ponto de acumulação de $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e μ é uma medida invariante. Usando a propriedade de continuidade absoluta mostrada para ν, extrairemos, via um argumento semelhante ao de Hopf, uma componente ergódica de μ que também satisfaz a propriedade de continuidade absoluta em variedades instáveis e portanto é uma medida SRB.

Por fim veremos que a bacia de uma medida SRB contém um aberto em M o que, por compacidade, implica na finitude das medidas ergódicas SRB para f, pois bacias de medidas ergódicas diferentes são disjuntas. Finalmente provaremos a unicidade da medida SRB quando f é transitiva.

Os resultados aqui provados estendem [ABV00] e valem se f é um difeomorfismo ou um difeomorfismo local com E^s trivial.

Dividimos então a prova nas seguintes seções:

- Seção 3.1: descrevemos um pouco da geometria de subvariedades, N, tangentes ao campo de cones não uniformemente expansor, verificando a regularidade da variação do fibrado tangente. Como f é um difeomorfismo local, temos que a imagem por f^k de uma tal subvariedade não é necessariamente uma subvariedade, contudo localmente temos que $f^k(N)$ é uma subvariedade. Verificamos também o que ocorre com estas subvariedades contidas em $f^k(N)$;

- Seção 3.1.1: nesta seção descrevemos a construção das famílias de discos expansores $\mathcal{D}_k$;

- Seção 3.2: nesta seção consideramos uma medida μ que é um ponto de acumulação, na topologia fraca *, da sequência de medidas dadas pelas médias de Cèsaro dos iterados de Lebesgue. Construiremos uma medida ν, não necessariamente invariante, a partir da estrutura expansora em D obtida na seção anterior;

- Seção3.3: estudamos o levantamento $\hat{\nu}$ da medida ν e verificamos a existência de expoentes de Lyapunov positivos para estas medidas;

- Seção 3.4: construímos a família de discos instáveis locais $\mathcal{K}$ e mostramos que ν tem desintegração absolutamente contínua ao longo de discos instáveis, olhando para os respectivos levantamentos dos discos instáveis, que são conjuntos localmente disjuntos na extensão natural;

- Seção 3.5: mostramos a ergodicidade e finitude de medidas SRB para f e deduzimos a unicidade no caso em que f é transitiva.

3.1 Geometria de discos tangentes ao campo de cones C_a

Consideremos N uma subvariedade de M tangente ao campo de cones C_a dada pelas hipóteses (H1), (H2) e (H3). Para $\epsilon > 0$ e $x \in M$ denotemos por

$$T_xM(\epsilon) := \{v \in T_xM : \|v\| \leq \epsilon\}$$

a bola de raio $\epsilon > 0$ em T_xM centrada na origem $0 \in T_xM$. Fixemos $\delta_0 > 0$ tal que a aplicação exponencial, $\exp_x : T_xM(\delta_0) \to M$ é um difeomorfismo na sua imagem para todo $x \in M$. Tal $\delta_0 > 0$ existe e independe de x por compacidade de M. Consideremos $B(x,\epsilon) := \exp_x(T_xM(\epsilon))$, para todo $0 < \epsilon \leq \delta_0$.

Existe $0 < \delta \leq \delta_0$ tal que se $y \in B(x,\delta) \cap N$ existe uma única aplicação linear $A_x(y) : T_xN \to E^s_x$, tal que o transporte paralelo de y a x, $P_{y \mapsto x}$, do plano tangente a N em y, coincide com o gráfico desta aplicação. Em outras palavras, $P_{y\mapsto x}(T_yN) = graf(A_x(y))$. Assim, a menos de considerarmos δ_0 menor, o espaço tangente a N em todo em $y \in B(x,\delta_0) \cap N$ pode ser visto como o gráfico de uma aplicação $A_x(y)$ do espaço tangente T_xN para o espaço E^s_x. Observe que, novamente pela compacidade de M, podemos tomar $\delta > 0$ independente de x. Além disto, $\delta > 0$ depende apenas do campo de cones, ou seja, para qualquer subvariedade tangente a C_a, vale esta mesma propriedade para este $\delta > 0$ fixado. Expressamos então a noção de variação Hölder do fibrado tangente de N em função destas coordenadas locais:

Definição 3.1.1. Dados $C > 0$ e $0 < \alpha < 1$. Diremos que o fibrado tangente TN de N é (C,α)-Hölder se

$$\|A_x(y)\| \leq C \cdot dist_N(x,y)^\alpha,$$

para todo $y \in B(x,\delta_0) \cap N$ e $x \in N$.

Definição 3.1.2. Dado $0 < \alpha < 1$ definimos a constante α-Hölder do fibrado TN como sendo:

$$\kappa(TN,\alpha) := \inf\{C > 0 : \ TN \text{ é } (C,\alpha)\text{-Hölder}\}.$$

Proposição 3.1.3. *Existem $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$ e $C_0 > 0$ tal que se N é uma subvariedade de M tangente a C_a e $f(N)$ também é subvariedade de M então*

$$\kappa(Tf(N),\alpha) \leq \beta \cdot \kappa(TN,\alpha) + C_0.$$

Demonstração. A prova segue os mesmos argumentos de [ABV00, Proposição 2.2]. □

Corolário 3.1.4. *Existe $L_1 > 0$ tal que se N é uma subvariedade de M tangente ao campo de cones C_a e $k \in \mathbb{N}$ é tal que $f^k(N)$ é uma subvariedade de Mentão a função*

$$\begin{array}{rccl} J_k : & f^k(N) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \log\left|\det\left(Df(x)|_{T_xf^k(N)}\right)\right|, \end{array}$$

é (L_1,α)-Hölder contínua, em que $L_1 > 0$ depende apenas em f.

A prova segue [ABV00, Corolário 2.4].

3.1.1 Estrutura expansora do disco

A hipótese (H3) nos dá um disco $D \subset \Lambda$ tangente a C_a e um subconjunto $H \subset U$ com $Leb_D(H) > 0$, tal que para todo $x \in H$ temos que:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \| \left(Df(f^j(x))|_{C_a(f^j(x))}\right)^{-1} \| \leq -2c < 0. \tag{3.1.1}$$

Com o Lema de Pliss, enunciado a seguir, obteremos a existência de infinitos tempos hiperbólicos com densidade positiva a partir da condição acima.

Lema 3.1.5. *[Lema de Pliss] Dados $A \geq c_2 > c_1 > 0$, consideremos*

$$\theta = (c_2 - c_1) / (A - c_1).$$

Então, dados números reais $a_0, ..., a_{N-1}$ satisfazendo

1. $\sum_{j=0}^{N-1} a_j \geq c_2 N$ *e*
2. $a_j \leq A$ *para todo* $0 \leq j \leq N-1$,

existem $l \geq \theta N$ e $0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_l \leq N-1$ tais que

$$\sum_{j=n}^{n_i} a_j \geq c_1 (n_i - n), \text{ para todo } 0 \leq n < n_i \text{ e } 1 \leq i \leq l.$$

Demonstração. Ver por exemplo[Mañ87, Lema IV.11.8]. □

O seguinte lema é uma aplicação do Lema de Pliss e é uma adaptação do Corolário 3.2 de [ABV00] para a frequência de tempos hiperbólicos.

Lema 3.1.6. *Para todo $x \in H$ e n suficientemente grande existe $\theta > 0$ (que depende apenas em f e c) e uma sequência $1 \leq n_1(x) < \cdots < n_l(x) \leq n$ de c-tempos cone-hiperbólicos para x com $l \geq \theta n$.*

Demonstração. Usando a continuidade da função $x \mapsto \| \left(Df(x)|_{C_a(x)}\right)^{-1} \|$ (conforme Observação 2.4.8) e a compacidade de Λ, existe uma constante $D > 0$, tal que

$$\| \left(Df(x)|_{C_a(x)}\right)^{-1} \| \geq D,$$

para todo $x \in \overline{U}$. Em outras palavras, $-\log \| \left(Df(f^j(x))|_{C_a(f^j(x))}\right)^{-1} \| \leq -\log D$, para todo $j \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \overline{U}$.

A equação 3.1.1 implica que para n suficientemente grande e $x \in H$

$$\sum_{j=0}^{n-1} -\log \| \left(Df\left(f^j(x)\right)|_{C_a(f^j(x))}\right)^{-1} \| \geq 2cn.$$

Definamos $A := \max\{-\log D,\ 2c\}$ e tomemos

- $a_j = -\log \| \left(Df\left(f^j(x)\right)|_{C_a(f^j(x))}\right)^{-1} \|$;
- $c_2 = 2c$;
- $c_1 = c$ e
- $\theta = (c_2 - c_1)/(A - c_1)$.

Então, dado $x \in H$, pelo Lema de Pliss segue que existe $l \geq \theta n$ e uma sequência $1 \leq n_1(x) < \cdots < n_l(x) \leq n$ tais que

$$\sum_{j=n}^{n_i(x)-1} -\log \| \left(Df\left(f^j(x)\right)|_{C_a(f^j(x))}\right)^{-1} \| \geq c_1\left(n_i(x) - n\right),$$

para todo $0 \leq n < n_i$ e $1 \leq i \leq l$.

Em outras palavras,

$$\prod_{j=n_i(x)-k}^{n_i(x)-1} \left\| \left(Df(f^j(x))|_{C(f^j(x))}\right)^{-1} \right\| \leq e^{-ck},\ \text{para todo } 1 \leq k \leq n_i(x) - 1 \text{ e } 1 \leq i \leq l.$$

Portanto, $1 \leq n_1(x) < \cdots < n_l(x) \leq n$ é uma sequência de tempos hiperbólicos para x. Note que θ depende apenas em f e c por definição, o que conclui o lema. □

Como M é compacta e f é um difeomorfismo local, existe $\delta_1 > 0$, tal que os ramos inversos estão bem definidos na bola de raio δ_1 centrada em x para todo $x \in M$. Mais precisamente, dados $x \in M$ e $y \in f^{-1}(\{x\})$, podemos definir um difeomorfismo $f_y^{-1} : B(x, \delta_1) \to V_y$ em que V_y é uma vizinhança aberta de y, satisfazendo $f \circ f_y^{-1} = id_{B(x,\delta_1)}$. Além disto, reduzindo $\delta_1 > 0$ se necessário, podemos obter que $V_z \cap V_y = \emptyset$ para todo $y, z \in f^{-1}(\{x\})$ com $y \neq z$. O seguinte resultado mostra uma continuidade uniforme dos ramos inversos.

Lema 3.1.7. *Seja $c > 0$ dado por 3.1.1. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que para todo $x \in M$, $f_y^{-1}(B(x,\delta)) \subset B(y,\varepsilon)$, para todo $y \in f^{-1}(\{x\})$.*

Demonstração. Fixe $x \in M$ e $\varepsilon > 0$. Para todo $y \in f^{-1}(\{x\})$, existe $0 < \delta_y < \delta_1$ tal que $dist_M(z,x) < \delta_y$ implica $dist_M\left(f_y^{-1}(z), y\right) < \varepsilon/2$. Definamos então $\delta'(x) :=$

$\min\{\delta_y : y \in f^{-1}(\{x\})\}$. Como M é uma variedade compacta, temos que $\# f^{-1}(\{x\}) < \infty$ e $\delta'(x) > 0$ para todo $x \in M$.

Note que, se $dist_M(z,x) < \delta'(x)$ então para todo $y \in f^{-1}(\{x\})$ temos que $dist_M\left(f_y^{-1}(z), y\right) < \varepsilon/2$. Tomemos a cobertura de M pelas bolas abertas

$$\{B(x, \delta'(x)/8)\}_{x \in M}.$$

Pela compacidade de M, podemos extrair uma subcobertura finita, digamos

$$\{B(x_j, \delta'(x_j)/8) : 1 \leq j \leq m\}.$$

Definamos $\delta = \min\{\delta'(x_j) : 1 \leq j \leq m\}/2$.

Fixemos $x \in M$ e $y \in f^{-1}(\{x\})$. Vejamos que $f_y^{-1}(B(x,\delta)) \subset B(y,\varepsilon)$. Seja $z \in B(x,\delta)$. Temos que existe $1 \leq j \leq m$ tal que $z \in B(x_j, \delta'(x_j)/8)$. Então, por definição de $\delta'(x_j)$, $dist_M(f_u^{-1}(z), u) < \varepsilon/2$ para todo $u \in f^{-1}(\{x_j\})$. Observe que,

$$\begin{aligned} dist_M(x, x_j) &\leq dist_M(x,u) + dist_M(u, x_j) \leq \delta_0 + \delta_2(x_j)/8 \\ &< \delta_2(x_j)/2 + \delta_2(x_j)/8 < \delta'(x_j). \end{aligned}$$

Portanto, $dist_M(f_u^{-1}(x), u) < \varepsilon/2$, para cada $u \in f^{-1}(\{x_j\})$. Assim,

$$dist_M\left(f_u^{-1}(z), f_u^{-1}(x)\right) < \varepsilon,$$

para cada $u \in f^{-1}(\{x_j\})$.

Observe que $x_j \in B(x, \delta'(x_j)) \subset B(x, \delta_1)$ implica que se $u_0 = f_y^{-1}(x_j)$ então f_y^{-1} coincide com $f_{u_0}^{-1}$ em $B(x,\delta_1) \cap B(x_j, \delta_1)$. Como, z e x pertencem a esta interseção temos que:

$$dist_M\left(f_y^{-1}(z), y\right) = dist_M\left(f_y^{-1}(z), f_y^{-1}(x)\right) = dist_M\left(f_{u_0}^{-1}(z), f_{u_0}^{-1}(x)\right) < \varepsilon,$$

o que conclui a prova pois x, y e z foram escolhidos arbitrariamente. □

Lema 3.1.8. *Existe uma constante $\delta_2 > 0$ tal que , dado $x \in \Lambda$, para todo $y \in B(x, \delta_2) \cap \Lambda$ e todo $z \in f^{-1}(\{x\})$ vale que:*

$$\|Df(f_z^{-1}(y))^{-1}v\| \leq e^{\frac{\varepsilon}{2}} \|Df(f_z^{-1}(x))^{-1}|_{C_a(f(x))}\| \|v\| \qquad (3.1.2)$$

para todo $v \in C_a(f(y))$.

Demonstração. Temos que a função $\Lambda \ni x \mapsto \|\left(Df(x)|_{C_a(x)}\right)^{-1}\|$ é uniformemente contínua. Logo, dado $\eta > 0$ existe $\xi > 0$ tal que $dist_M(x, y) < \xi$ implica que

$$|\| \left(Df(x)|_{C_a(x)}\right)^{-1} \| - \| \left(Df(y)|_{C_a(y)}\right)^{-1} \|| < \eta.$$

Como f é um difeomorfismo local em Λ, que é compacto, temos que

$$D := \inf_{x \in \Lambda} \| \left(Df(x)|_{C_a(x)}\right)^{-1} \| > 0.$$

Fixemos $x \in M$, $y \in B(x, \delta) \cap \Lambda$ e $z \in f^{-1}(x)$. Fixe $\eta = \left(e^{\frac{c}{2}} - 1\right) D$ e $\xi > 0$ dado pela continuidade uniforme acima. Seja $\delta_2 = \delta(\xi) > 0$ dado pelo Lema 3.1.7. Então se $x, y \in \Lambda$ são tais que $dist_M(x, y) < \delta_2$ temos que $dist_M(x_1, y_1) < \xi$, em que $x_1 := f_z^{-1}(x)$ e $y_1 := f_z^{-1}(y)$. Mas então:

$$\begin{aligned}
&\left| \| \left(Df(x_1)|_{C_a(x_1)}\right)^{-1} \| - \| \left(Df(y_1)|_{C_a(y_1)}\right)^{-1} \| \right| \\
&\qquad < \left(e^{\frac{c}{2}} - 1\right) D < \left(e^{\frac{c}{2}} - 1\right) \| \left(Df(x_1)|_{C_a(x_1)}\right)^{-1} \|.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
&\| \left(Df(y_1)|_{C_a(y_1)}\right)^{-1} \| - \| \left(Df(x_1)|_{C_a(x_1)}\right)^{-1} \| \\
&\qquad \leq \left| \| \left(Df(x_1)|_{C_a(x_1)}\right)^{-1} \| - \| \left(Df(y_1)|_{C_a(y_1)}\right)^{-1} \| \right|
\end{aligned}$$

segue que:

$$\begin{aligned}
\| \left(Df(y_1)|_{C_a(y_1)}\right)^{-1} \| &< \| \left(Df(x_1)|_{C_a(x_1)}\right)^{-1} \| + \left(e^{\frac{c}{2}} - 1\right) \| \left(Df(x_1)|_{C_a(x_1)}\right)^{-1} \| \\
&= e^{\frac{c}{2}} \| \left(Df(x_1)|_{C_a(x_1)}\right)^{-1} \|.
\end{aligned}$$

Assim dado $v \in C_a(f(y_1)) = C_a(y)$ temos que

$$\begin{aligned}
\|Df(y_1)^{-1} \cdot v\| &\leq \| \left(Df(y_1)|_{C_a(y_1)}\right)^{-1} \| \cdot \|v\| \\
&< e^{\frac{c}{2}} \| \left(Df(x_1)|_{C_a(x_1)}\right)^{-1} \| \cdot \|v\|
\end{aligned}$$

Portanto, $\|Df(f_z^{-1}(y))^{-1} v\| \leq e^{\frac{c}{2}} \|Df(f_z^{-1}(x))^{-1}|_{C_a(f(x))}\| \|v\|$. □

Dada $D \subset M$ uma subvariedade de M, denotaremos por $B_D(\cdot, \varepsilon)$ *a bola de raio* $\varepsilon > 0$ em D com a distância induzida pela métrica Riemanniana em D, $dist_D(\cdot, \cdot)$. Das propriedades da aplicação exponencial e continuidade do transporte paralelo (ver por exemplo [BG05, Capítulo 4]) e do controle da variação do fibrado tangente de discos tangentes ao campo de cones (3.1.3) deduzimos o seguinte:

Lema 3.1.9. *Seja D um disco C^1 mergulhado em U tangente ao campo de cones C_a. Então existe $\xi > 0$ tal que para todo $x \in D$, $B_D(x, \xi) = exp_x(graf(\psi_x))$ onde ψ_x é uma aplicação de $B(0, \xi) \subset T_x D$ em E^s_x. Além disto, ψ_x é Lipschitz e existe $\varepsilon_0 > 0$ (dependendo de $a > 0$) tal que $Lip(\psi_x) \leq \varepsilon_0$.*

Observação 3.1.10. O Lema 3.1.9 nos diz que dado um disco D tangente ao campo de cones C_a localmente podemos ver esse disco como o gráfico de uma aplicação Lipschitz de $T_x D$ em E^s_x, com constante que depende apenas da abertura do campo de cones. Diremos que $\Delta(q, \delta) \subset D$ *é um disco de raio δ tangente ao campo de cones, se* $\Delta(q, \delta) = \exp_q(graf(\psi))$ *em que ψ é uma aplicação definida de $B(0, \delta) \subset T_q D$ em E^s_x e $graf(\psi)$ está contido em $C_a(q)$. Observe que a menos de uma constante $R > 0$, que depende apenas do campo de cones, $\Delta(q, \delta)$ contém $B_D(q, R\delta)$ e está contido em $B_D(q, 2R\delta)$.*

Lema 3.1.11. *Seja D um disco C^1 mergulhado em Λ tangente ao campo de cones C_a. Existe $\delta > 0$ tal que dado $x \in D$ e n um c-tempo cone-hiperbólico para x, existe uma vizinhança $D(x, n, 8\delta)$ de x em D que é difeomorfa por f^n a $\Delta(f^n(x), 8\delta)$, ou seja, a um disco de raio 8δ tangente ao campo de cones C_a.*

Demonstração. Como vimos anteriormente, existem $\delta_0, \delta_1 > 0$ tal que para todo $y \in M$, $exp_y : B(0, \delta_0) \subset T_y M \to exp_y(B(0, \delta_0))$ e $f|_{B(y,\delta_1)} : B(y, \delta_1) \to f(B(y, \delta_1))$ são difeomorfismos. Da continuidade uniforme de f, existe $\delta_3 > 0$ tal que $dist_M(y, z) < \delta_3$ implica que $dist_M(f(y), f(z)) < \delta_1$. Fixemos também $\xi > 0$ dado pelo Lema 3.1.9.

Consideremos então $8\delta = \frac{1}{2} \min\{\xi, \delta_0, \delta_1, \delta_3\}$ e definamos:

$$F_x := \exp^{-1}_{f(x)} \circ f \circ \exp_x : B(0, 8\delta) \subset T_x M \to T_{f(x)} M.$$

Afirmamos que F_x é uma aplicação bem definida e $F_x : B(0, 8\delta) \to F_x(B(0, 8\delta))$ é um difeomorfismo. De fato, como $8\delta < \delta_0$ temos que $\exp_x|_{B(0,8\delta)}$ é um difeomorfismo com sua imagem, a bola de raio $\delta > 0$ e centro em x em M. Como $\delta < \delta_1$ segue que f é difeomorfismo quando restrita a $B(x, \delta)$ e como $\delta < \delta_3$, $f(B(x, 8\delta)) \subset B(f(x), \delta_1)$ e portanto $\exp^{-1}_{f(x)}$ é difeomorfismo sobre a imagem bem definido em $f(B(x, 8\delta))$.

Sejam $D \subset M$ um disco C^1 mergulhado tangente a C_a, $B_D(x, 8\delta)$ bola de raio 8δ e centro em x em D. Como assumimos $8\delta < \xi$, consideremos $\psi_x : T_x D(8\delta) \subset T_x D \to E^s_x$ dada pelo Lema 3.1.9, ou seja, tal que $\exp_x(graf(\psi_x)) = B_D(x, 8\delta)$. Vamos mostrar agora que a imagem $F_x(graf(\psi_x))$ é o gráfico de uma aplicação de $T_{f(x)} f(D)$ em $E^s_{f(x)}$. Observe que, como f é apenas um difeomorfismo local, $f(D)$ pode não ser uma subvariedade. Contudo, para uma pequena vizinhança V_x de x em D temos que $f(V_x)$ é uma subvariedade contida em $f(D)$ contendo $f(x)$. Denotamos então $T_{f(x)} f(D)$ como sendo $T_{f(x)} f(V_x)$.

Afirmação 3.1.12. Existe $\eta > 0$ tal que $F_x(graf(\psi_x)) = graf\left(\psi_{f(x)}\right)$ para alguma função Lipschitz $\psi_{f(x)} : T_{f(x)}f(D)(\eta) \subset T_{f(x)}f(D) \to E^s_{f(x)}$.

Prova da afirmação. Note que podemos escrever

$$F_x(u+v) = Df(x)(u+v) + r_x(u+v) + t_x(u+v)$$

em que $r_x : T_xD(8\delta) \times E^s_x(8\delta) \to T_{f(x)}f(D)$ e $t_x : T_xD(8\delta) \times E^s_x(8\delta) \to E^s_{f(x)}$ são aplicações com $Lip(r_x), Lip(t_x) < \zeta$, com ζ dependendo apenas em δ. Mais do que isto, r_x, t_x são aplicações $C^{1+\alpha}$, já que f é de classe $C^{1+\alpha}$ (ver [BP07, Seção 7.1]). Seja p_1 a projeção de $T_{f(x)}M$ em $T_{f(x)}f(D)$. Temos que

$$Lip(p_1 \circ F_x \circ (id, \psi_x) - p_1 \circ Df(x) \circ (id, \psi_x)) \leq Lip(r_1).$$

Isto segue imediatamente do fato que $p_1 \circ F_x \circ (id, \psi_x) - p_1 \circ Df(x) \circ (id, \psi_x) = r_1 \circ (id, \psi_x)$ pela invariância do fibrado E^s e do fato que $Df(x) \cdot T_xD = T_{f(x)}f(D)$. Então tomando δ suficientemente pequeno tal que $Lip(r_x) \leq Lip\left[(p_1 \circ Df(x) \circ (id, \psi_x))^{-1}\right]^{-1}$ segue pelo Teorema I.2 em [Shu87] que $p_1 \circ F_x \circ (id, \psi_x)$ é um homeomorfismo com sua imagem. Isto garante que a imagem de $graf(\psi_x)$ por F_x é um gráfico de uma aplicação $\psi_{f(x)}$ de $T_{f(x)}f(D)$ em $E^s_{f(x)}$.

Observe que se $dom\left(\psi_{f(x)}\right) \subset B_{f(D)}(0, 8\delta)$ então podemos repetir o argumento acima e encontrar $\psi_{f^2(x)}$ tal que $graf\left(\psi_{f^2(x)}\right) = F_{f(x)}\left(graf\left(\psi_{f(x)}\right)\right)$. Suponhamos que possamos definir $\psi_{f^j(x)}$ uma aplicação definida em $dom\left(\psi_{f^j(x)}\right) \subsetneq B_{f^j(D)}(0, 8\delta)$ para todo $0 \leq j \leq n$ tal que $\exp_{f^j(x)}\left(graf\left(\psi_{f^j(x)}\right)\right) = f^j(D(x, n, 8\delta))$. Vamos mostrar que isto contradiz a hipótese de n ser um c-tempo cone-hiperbólico para x. De fato, temos que $graf\left(\psi_{f^n(x)}\right) = F^n_x(graf(\psi_x))$, onde $F^n_x = F_{f^{n-1}(x)} \circ ... \circ F_{f(x)} \circ F_x$. Então $F^n_x = exp^{-1}_{f^n(x)} \circ f^n \circ exp_x$. Então podemos escrever

$$F^n_x(u+v) = Df^n(x)(u+v) + r^{(n)}_1(u+v) + r^{(n)}_2(u+v).$$

Então dado $u \in T_xD(8\delta)$ temos que

$$\begin{aligned}
\|p_1 \circ F^n_x \circ (id + \psi_x)(u)\| &= \|Df^n(x)\,u + r^{(n)}_1(u + \psi_x(u))\| \\
&\geq \|Df^n(x)\,u\| - \|r^{(n)}_1(u + \psi_x(u))\| \\
&\geq e^{cn}\|u\| - Lip\left(r^{(n)}_1\right)\|u\| \\
&= \left(e^{cn} - Lip\left(r^{(n)}_1\right)\right)\|u\|.
\end{aligned}$$

Note que, a menos de reduzirmos $\delta > 0$, podemos assumir que $Lip\left(r^{(n)}_1\right)$ é uniformemente limitado ([BP07]). Em outras palavras, F_x^n expande ao longo do espaço T_xD. Daí, $dom\left(\psi_{f^n(x)}\right) \supset T_{f^n(x)}f^n\left(D\right)(8\delta)$, contrariando a hipótese. Logo deve existir algum $1 \leq j \leq n$, tal que $dom\left(\psi_{f^j(x)}\right) \supset T_{f^j(x)}f^j\left(D\right)(8\delta)$. Seja j_0 o menor tal que isto ocorre. Se $j_0 = n$, concluímos o lema. Caso contrário, restringimos $\psi_{f^{j_0}(x)}$ a $T_{f^{j_0}(x)}f^{j_0}\left(D\right)(8\delta)$, e repetimos o processo, usando que $\|Df^{n-j_0}\left(f^{j_0}\left(x\right)\right)\cdot u\| \geq e^{c(n-j_0)}\|u\|$ para todo $u \in T_{f^{j_0}(x)}f^{j_0}\left(D\right)$. Ao fim de uma quantidade finita de passos vemos que $dom\left(\psi_{f^n(x)}\right) \supseteq T_{f^n(x)}f^n\left(D\right)(8\delta)$ e concluímos a prova do Lema. $\square$

Dada D uma subvariedade de M, denotaremos por $dist_D$ a distância Riemanniana em D. Observe que, como

$$dist_M\left(x,y\right) := \inf\left\{\ell\left(\gamma\right):\ \gamma: I \to M,\ \text{curva regular com } \gamma\left(a\right) = x \text{ e } \gamma\left(b\right) = y\right\},$$

então $dist_M \leq dist_D$. De fato, a distância em D é dada pelo ínfimo do comprimento das curvas regulares em D que conectam x e y, e o conjunto destas curvas está contido no conjunto de curvas regulares em M que conectam x e y.

A seguinte proposição nos diz que se n é um c-tempo cone-hiperbólico para x então a distância em $\Delta\left(f^n\left(x\right), 8\delta\right)$ é contraída pelos ramos inversos $f^{-k}_{f^{n-k}(x)}$, para todo $1 \leq k \leq n$

Proposição 3.1.13. *Seja D um disco C^1 mergulhado em Λ tal que D é tangente ao campo de cones C_a. Sejam $x \in D$ e $n \geq 1$ um c-tempo cone-hiperbólico para x. Seja $\delta > 0$ e seja $D(x,n,8\delta)$ a vizinhança de x em D dados pelo lema anterior. Se $y \in D(x,n,8\delta)$ então*

$$dist_{f^{n-k}(D(x,n,8\delta))}(f^{n-k}(x), f^{n-k}(y)) \leq e^{-\frac{c}{2}k} dist_{\Delta(f^n(x),8\delta)}(f^n(x), f^n(y)) \tag{3.1.3}$$

para todo $1 \leq k \leq n$.

Demonstração. Seja D um disco C^1 mergulhado em M tal que D é tangente ao campo de cones C_a. Fixemos $x \in D$ e n um c-tempo cone-hiperbólico para x e consideremos $y \in D(x,n,8\delta)$. Seja $\gamma_n : [a,b] \to \Delta\left(f^n\left(x\right), 8\delta\right)$ uma curva suave satisfazendo $\gamma_n\left(a\right) = f^n\left(x\right)$, $\gamma_n\left(b\right) = f^n\left(y\right)$ e $\ell\left(\gamma_n\right) = dist_{f^n(D(x,n,\delta))}(f^n(x), f^n(y))$. Note que tal curva existe pois $\Delta\left(f^n\left(x\right), \delta\right)$ é uma subvariedade fechada de M. Definamos $\gamma_{n-1} := f^{-1}_{f^{n-1}(x)}\left(\gamma_n\right) \subset f^{n-1}\left(D\right)$ uma vez que $f^{-1}_{f^{n-1}(x)}$ está bem definido em γ_n (pois $f^n|_{D(x,n,8\delta)} : D(x,n,8\delta) \to \Delta\left(f^n\left(x\right), 8\delta\right)$ é um difeomorfismo). Por construção, se u é um vetor tangente a γ_{n-1} em um ponto $z \in \gamma_{n-1}$ então podemos escrever $u = Df\left(z\right)^{-1}\cdot w$ com w vetor tangente a γ_n em $f\left(z\right)$, pois $\gamma_{n-1} \subset f^{n-1}\left(D\right)$.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\Delta\left(f^n\left(x\right), 8\delta\right)$ é de fato uma bola de raio 8δ contida em $f^n\left(D\right)$. Assim, para qualquer $t \in [a,b]$, $dist_M\left(f^n\left(x\right), \gamma\left(t\right)\right) \leq$

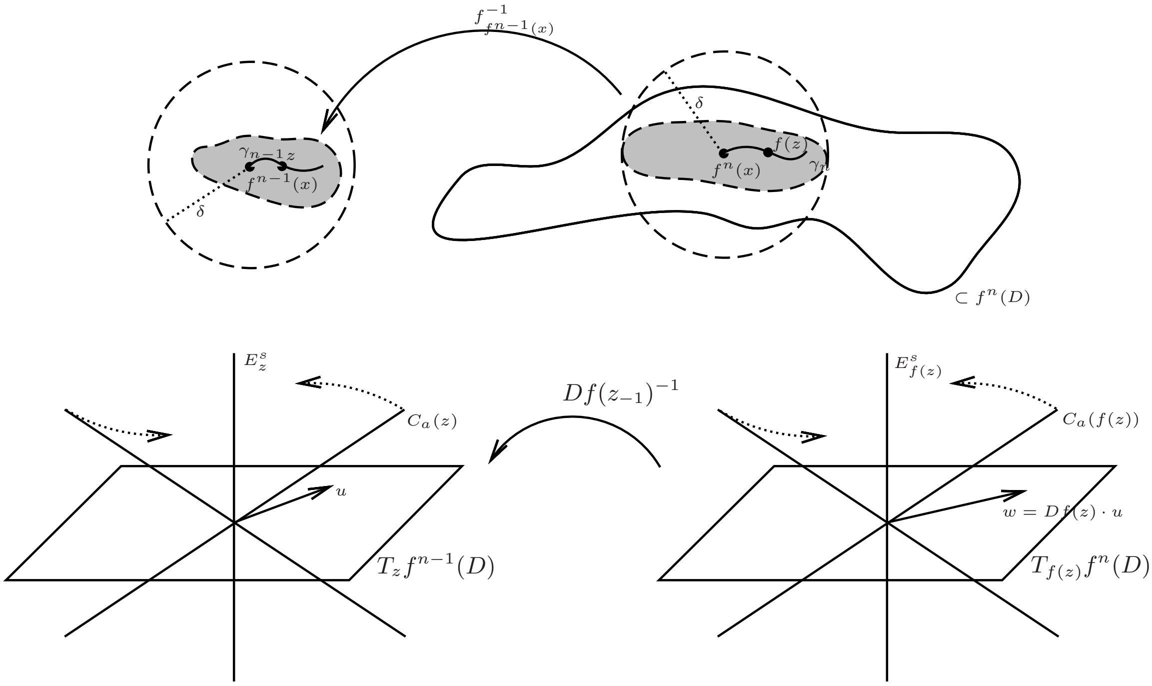

Figura 3.1.1: Contração de curvas pelo ramo inverso $f^{-1}_{f^{n-1}(x)}$.

8δ. De fato, $\gamma_n|_{[a,t]}$ é uma curva regular em $\Delta\left(f^n(x), 8\delta\right)$ que conecta $f^n(x)$ a $\gamma_n(t)$ e tem comprimento menor ou igual a 8δ. Logo,

$$dist_M\left(f^n(x), \gamma_n(t)\right) \leq dist_{\Delta(f^n(x),8\delta)}\left(f^n(x), \gamma_n(t)\right) \leq 8\delta.$$

Então

$$dist_M\left(f(z), f^n(x)\right) \leq 8\delta$$

e pelo Lema 3.1.8 temos que

$$\|Df(z)^{-1}w\| \leq e^{\frac{c}{2}} \| \left(Df\left(f^{n-1}(x)\right)|_{C_a(f^{n-1}(x))}\right)^{-1} \| \|w\|,$$

pois $w \in Df(z) \cdot C_a(f(z))$. Ora, mas como n é um c-tempo cone-hiperbólico para x, temos que

$$\| \left(Df(f^{n-1}(x))|^{-1}_{C_a(f^{n-1}(x))}\right) \| \leq e^{-c}.$$

Segue portanto que $\|u\| \leq e^{-\frac{c}{2}}\|w\|$. Como u é tangente a γ_{n-1} é arbitrário e $\gamma_{n-1} := f^{-1}_{f^{n-1}(x)}(\gamma_n)$, segue que:

$$\|\frac{d\gamma_{n-1}}{dt}(s)\| \leq e^{-\frac{c}{2}}\|\frac{d\gamma_n}{dt}(s)\|,$$

para todo $a \leq s \leq b$. Logo $\ell(\gamma_{n-1}) \leq e^{-\frac{c}{2}}\ell(\gamma_n) \leq e^{-\frac{c}{2}}8\delta < 8\delta$.

Novamente temos que $f^{-1}_{f^{n-2}(x)}$é bem definido em γ_{n-1}, pois γ_{n-1} está contida em $f^{n-1}(D(x, n, 8\delta))$ e f^n restrito a $D(x, n, 8\delta)$ é um difeomorfismo sobre a imagem. Assim podemos considerar $\gamma_{n-2} := f^{-1}_{f^{n-2}(x)}(\gamma_{n-1}) = f^{-1}_{f^{n-2}(x)} \circ f^{-1}_{f^{n-1}(x)}(\gamma_n)$. Tomando u um vetor tangente a γ_{n-2} em $z \in \gamma_{n-2}$ temos que $u = Df(z)^{-1} \circ Df(f(z))^{-1} \cdot w$, com $w \in Df(f(z)) \cdot C_a(f(z))$ e $Df(f(z))^{-1} \cdot w \in Df(z) \cdot C_a(z)$. Ora, como $dist(f(z), f^{n-1}(x)) < 8\delta$ e $dist(f^2(z), f^n(x)) < 8\delta$ temos que

$$\|Df(z)^{-1}v_0\| \leq e^{\frac{c}{2}} \| \left(Df(f^{n-2}(x))|_{C_a(f^{n-2}(x))}\right)^{-1} \| \|v_0\|,$$

para todo $v_0 \in Df(z) \cdot C_a(z)$, e

$$\|Df(f(z))^{-1}w_0\| \leq e^{\frac{c}{2}} \| \left(Df(f^{n-1}(x))|_{C_a(f^{n-1}(x))}\right)^{-1} \| \|w_0\|,$$

para todo $w_0 \in Df(f(z)) \cdot C_a(f(z))$. Segue então que, tomando $v_0 = Df(f(z))^{-1} \cdot w$ e $w_0 = w$ nas desigualdades acima:

$$\begin{aligned}
\|u\| &= \|Df(z)^{-1} \circ Df(f(z))^{-1} \cdot w\| \\
&\leq e^{\frac{c}{2}} \| \left(Df(f^{n-2}(x))|_{C_a(f^{n-2}(x))}\right)^{-1} \| \|Df(f(z))^{-1} \cdot w\| \\
&\leq e^{\frac{c}{2}} e^{\frac{c}{2}} \| \left(Df(f^{n-2}(x))|_{C_a(f^{n-2}(x))}\right)^{-1} \| \| \left(Df(f^{n-1}(x))|_{C_a(f^{n-1}(x))}\right)^{-1} \| \|w\| \\
&\leq e^{\frac{c}{2} \cdot 2} e^{-2c} \|w\| = e^{-\frac{c}{2} \cdot 2} \|w\|.
\end{aligned}$$

Portanto, como os vetores tangentes a γ_{n-2} são arbitrários, por integração, concluímos que $\ell(\gamma_{n-2}) \leq e^{-\frac{c}{2} \cdot 2} \ell(\gamma_n) < 8\delta$. Prosseguindo o raciocínio, recursivamente, temos que $\ell(\gamma_{n-k}) \leq e^{-\frac{c}{2} \cdot k} \ell(\gamma_n)$, para todo $1 \leq k \leq n$, onde γ_{n-k} denota a curva $f^{-1}_{f^{n-k}(x)} \circ f^{-1}_{f^{n-k+1}(x)} \circ \cdots \circ f^{-1}_{f^{n-1}(x)}(\gamma_n)$. Em outras palavras, toda curva de comprimento menor que 8δ em $f^n(D)$ é contraída pelos ramos inversos $f^{-1}_{f^{n-k}(x)} \circ f^{-1}_{f^{n-k+1}(x)} \circ \cdots \circ f^{-1}_{f^{n-1}(x)}$, com $1 \leq k \leq n$, isto é,

$$\ell\left(f^{-k}_{f^{n-k}(x)} \circ \gamma_n\right) \leq e^{-\frac{c}{2}k} \ell(\gamma_n). \tag{3.1.4}$$

Mas então

$$\begin{aligned}
dist_{f^{n-k}(D(x,n,8\delta))}(f^{n-k}(x), f^{n-k}(y)) &\leq \ell\left(f^{-k}_{f^{n-k}(x)} \circ \gamma_n\right) \leq e^{-\frac{c}{2}k} \ell(\gamma_n) \\
&= e^{-\frac{c}{2}k} dist_{\Delta(f^n(x),8\delta)}(f^n(x), f^n(y)),
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

$\square$

Observe que $\delta > 0$ utilizado na Proposição anterior é dado pelo Lema 3.1.11 e portanto independe de $x \in M$. Dado D um disco C^1, tangente ao campo de cones C_a, para simplificarmos a notação, chamaremos os discos $D(x, n, 8\delta) \subset D$, obtidos na Proposição 3.1.13, de pré-discos hiperbólicos. As suas imagens $\Delta(f^n(x), 8\delta)$, chamaremos de discos

n-hiperbólicos.

A próxima proposição irá garantir a distorção limitada do jacobiano do difeomorfismo local f, em pré-discos hiperbólicos.

Proposição 3.1.14. *Suponhamos D um disco C^1 mergulhado em Λ, $x \in D$ e n um c-tempo cone-hiperbólico para x. Existe $C_1 > 0$ tal que*

$$C_1^{-1} \leq \frac{|det\ Df^n(y)|_{T_yD(x,n,8\delta)}|}{|det\ Df^n(z)|_{T_zD(x,n,8\delta)}|} \leq C_1$$

para todo $y, z \in D(x,n,8\delta)$, onde $D(x,n,8\delta)$ é o pré-disco hiperbólico associado a x.

Demonstração. Pelo Corolário 3.1.4, temos que

$$f^j\left(D(x,n,8\delta)\right) \ni y \mapsto \log|\det\left(Df\left(y\right)|_{T_yf^j(D(x,n,8\delta))}\right)|$$

é (L_1, α)-Hölder contínua para todo $j \in \mathbb{N}$, i.e:

$$\left|\log\frac{|\det\left(Df\left(y\right)|_{T_yf^j(D(x,n,8\delta))}\right)|}{|\det\left(Df\left(z\right)|_{T_zf^j(D(x,n,8\delta))}\right)|}\right| \leq L_1 dist_{f^j(D(x,n,8\delta))}\left(y,z\right)^{\alpha},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ e todos $y, z \in f^j\left(D(x,n,8\delta)\right)$.

Logo, usando a regularidade Hölder,

$$\begin{aligned}
&\log|\det\left(Df^n\left(y\right)|_{T_yD(x,n,8\delta)}\right)| - \log|\det\left(Df^n\left(z\right)|_{T_zD(x,n,8\delta)}\right)| \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1}\log\left|\det\left(Df\left(f^j\left(y\right)\right)|_{T_{f^j(y)}f^j(D(x,n,8\delta))}\right)\right| - \log\left|\det\left(Df\left(f^j\left(z\right)\right)|_{T_{f^j(z)}f^j(D(x,n,8\delta))}\right)\right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1} L_1 dist_{f^j(D(x,n,8\delta))}\left(f^j\left(y\right), f^j\left(z\right)\right)^{\alpha} \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1} L_1\left(e^{\frac{c}{2}(j-n)}\left(dist_{\Delta(f^n(x),8\delta)}\left(f^n\left(y\right), f^n\left(z\right)\right)\right)\right)^{\alpha} \\
&\leq L_1\left(16\delta\right)^{\alpha}\sum_{j=0}^{n-1}e^{-\frac{c}{2}j\alpha} \leq L_1\left(16\delta\right)^{\alpha}\frac{1}{1-e^{-\frac{c\alpha}{2}}}.
\end{aligned}$$

Tomando $C_1 = e^{\left(L_1(16\delta)^{\alpha}\frac{1}{1-e^{-\frac{c\alpha}{2}}}\right)}$ obtemos:

$$\frac{|det\ Df^n(y)|_{T_yD(x,n,8\delta)}|}{|det\ Df^n(z)|_{T_zD(x,n,8\delta)}|} \leq C_1.$$

Invertendo os papéis de y e z obtemos a desigualdade:

$$C_1^{-1} \leq \frac{|det\ Df^n(y)|_{T_yD(x,n,8\delta)}|}{|det\ Df^n(z)|_{T_zD(x,n,8\delta)}|},$$

o que completa a prova da proposição. □

Seja $\delta > 0$ dado pela Proposição 3.1.13 e $H = H(c)$ dado pela hipótese (H3) é um conjunto de pontos em U vizinhança de Λ com infinitos c-tempos cone-hiperbólicos tal que $Leb_D(H) > 0$. Reduzindo $\delta > 0$, se necessário, podemos assumir que o subconjunto

$$B := B(D, c, 8\delta) := \{x \in D \cap H :\ dist_D(x, \partial D) \geq 8\delta\}$$

é tal que $Leb_D(B) > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos:

$$H_n := \{x \in B :\ n \text{ é um } c\text{-tempo hiperbólico para } x\}.$$

Observação 3.1.15. É fácil ver que se n e m são c-tempos cone-hiperbólicos para $x \in \Lambda$, digamos $n < m$, então $m - n$ é um c-tempo cone-hiperbólico para $f^n(x)$. Como consequência temos que se x possui infinitos c-tempos cone-hiperbólicos então $f^n(x)$ também possui infinitos c-tempos cone-hiperbólicos, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, sem perda de generalidade, podemos assumir que $f(H) \subset H$. Em particular, como $H_k \subset H$, $f^n(H_k) \subset H$, para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

A seguinte proposição segue as ideias apresentadas em [ABV00, Proposição 3.3].

Proposição 3.1.16. *Existe uma constante $\tau > 0$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um subconjunto finito H_n^* de H_n tal que os pré-discos hiperbólicos $D(x, n, \delta)$ com $x \in H_n^*$ são dois a dois disjuntos e sua união*

$$\mathcal{D}_n := \bigcup_{x \in H_n^*} D(x, n, \delta)$$

satisfaz:

$$Leb_D(\mathcal{D}_n \cap H_n) \geq \tau Leb_D(H_n).$$

Demonstração. Fixemos $n \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 3.1.9 para todo $x \in H_n$, $\Delta(f^n(x), 8\delta)$ é um disco C^1 mergulhado e tangente ao campo de cones C_a. Além disso, como $8\delta < \xi$ temos que se $\Delta(f^n(x), 8\delta)$ contém a bola $B_{\Delta(f^n(x),8\delta)}(y, s)$, para algum $y \in \Delta(f^n(x), 8\delta)$ e $s > 0$, então existe uma transformação Lipschitz $\psi_y : T_yD(s) \to E_y^s$ tal que $B_{\Delta(f^n(x),8\delta)}(y, s) = \exp_y(graf(\psi_y))$. Em outras palavras, a bola de raio s e centro em y em $\Delta(f^n(x), 8\delta)$ é a imagem pela exponencial em y do gráfico de uma aplicação $\psi_y : B(0,s) \subset T_y D \to E^s_y$. Além disto, $Lip(\psi_y) < \varepsilon_0$, com $\varepsilon_0 > 0$ dependendo de a. Isto implica que, neste caso, existe uma constante uniforme $R > 0$ tal que para todo $o < r < s$ a bola $B_{\Delta(f^n(x),8\delta)}(y,s)$ pode ser coberta por $(s/r)^{d_u} R$ bolas de raio r, onde $d_u = \dim(C_a)$.

Fixe $n \in \mathbb{N}$. Para cada $z \in H_n$, pela Proposição 3.1.13, existe um disco $D(z,n,8\delta)$ contido em D e difeomorfo por f^n a um disco de raio 8δ centrado em $f^n(z)$ e tangente ao campo de cones C_a, que denotamos por $\Delta(f^n(z), 8\delta)$. Dados $y \in D(z,n,8\delta)$ e $\epsilon > 0$ tais que $B_{\Delta(f^n(z),8\delta)}(y,\epsilon) \subset \Delta(f^n(z),8\delta)$, considere o conjunto $D^*(y,n,\epsilon) := f_z^{-n}\left(B_{\Delta(f^n(z),8\delta)}(y,\epsilon)\right)$, onde f_z^{-n} denota o ramo inverso de f^n com $f_z^{-n}(f^n(z)) = z$. Suponhamos que $Leb_D(H_n) > 0$, caso contrário nada temos a mostrar. Escolha $z_1 \in H_n$ tal que $Leb_D(D^*(z_1,n,4\delta) \cap H_n) \geq \frac{1}{2} Leb_D(D^*(z,n,4\delta) \cap H_n)$, para todo $z \in H_n$. Se não existisse tal z_1 então dado $w \in H_n$ existiria $w_1 \in H_n$ tal que

$$Leb_D(D^*(w,n,4\delta) \cap H_n) \leq \frac{1}{2} Leb_D(D^*(w_1,n,4\delta) \cap H_n).$$

Também existiria $w_2 \in H_n$ tal que

$$Leb_D(D^*(w_1,n,4\delta) \cap H_n) \leq \frac{1}{2} Leb_D(D^*(w_2,n,4\delta) \cap H_n).$$

Em particular

$$Leb_D(D^*(w,n,4\delta) \cap H_n) \leq \frac{1}{2^2} Leb_D(D^*(w_2,n,4\delta) \cap H_n).$$

Prosseguindo desta forma, encontramos uma sequência $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em H_n tal que

$$Leb_D(D^*(w,n,4\delta) \cap H_n) \leq \frac{1}{2^k} Leb_D(D^*(w_k,n,4\delta) \cap H_n),$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Mas isto implica que $Leb_D(D^*(w,n,4\delta) \cap H_n) = 0$. Como w foi fixado arbitrário teríamos que $Leb_D(D^*(z,n,4\delta) \cap H_n) = 0$ para todo $z \in H_n$. Isto contradiz a hipótese que $Leb_D(H_n) > 0$.

Da observação inicial, podemos cobrir $\Delta(f^n(z_1), 4\delta)$ por $8^{d_u} R$ bolas de raio $\delta/2$. Consequentemente podemos cobrir $D^*(z_1,n,4\delta)$ por $8^{d_u} R$ conjuntos $D^*(\cdot,n,\delta/2)$. Escolha $y_1 \in D^*(z_1,n,4\delta)$ que satisfaz:

$$Leb_D(D^*(y_1,n,\delta/2) \cap H_n) \geq \frac{1}{8^{d_u} R} Leb_D(D^*(z_1,n,4\delta) \cap H_n) > 0.$$

Em particular, $D^*(y_1,n,\delta/2) \cap H_n \neq \emptyset$. Tome $x_1 \in D^*(y_1,n,\delta/2) \cap H_n$. É claro que

$D^*(x_1,n,\delta) \supset D^*(y_1,n,\delta/2)$. Logo,

$$\begin{aligned} Leb_D(D^*(x_1,n,\delta)\cap H_n) &\geq Leb_D(D^*(y_1,n,\delta/2)\cap H_n) \\ &\geq \frac{1}{8^{d_u}R} Leb_D(D^*(z_1,n,4\delta)\cap H_n) \\ &\geq \frac{1}{8^{d_u}2R} Leb_D(D^*(x_1,n,4\delta)\cap H_n). \end{aligned}$$

Ou seja, em $D^*(x_1,n,4\delta)$ encontramos um subconjunto $D^*(x_1,n,\delta)$ tal que o tamanho do conjunto de pontos com n como c-tempo cone-hiperbólico corresponde a uma taxa maior do que $\frac{1}{8^{d_u}2R}$ do tamanho do conjunto de pontos de $D^*(x_1,n,4\delta)$ em que n é c-tempo cone-hiperbólico. Se $Leb_D(H_n \backslash D^*(x_1,n,4\delta)) = 0$ então $Leb_D(H_n) = Leb_D(D^*(x_1,n,4\delta)\cap H_n)$. Assim, tomando $H_n^* = \{x_1\}$ e $\tau = \frac{1}{8^{d_u}2R}$ concluímos a prova. Caso contrário, repetimos o processo para $H_n \backslash D^*(x_1,n,4\delta)$ e encontramos x_2 pertencente à $H_n \backslash D^*(x_1,n,4\delta)$ tal que:

$$Leb_D(D^*(x_2,n,\delta)\cap H_n) \geq \frac{1}{8^k 2R} Leb_D(D^*(x_2,n,4\delta)\cap H_n).$$

Se $Leb_D(H_n \backslash (D^*(x_1,n,4\delta)\cup D^*(x_2,n,4\delta))) = 0$ terminamos. Caso contrário, mais uma vez repetimos o processo para $H_n \backslash (D^*(x_1,n,4\delta)\cup D^*(x_2,n,4\delta))$. Pela compacidade de M, esse processo termina em um número finito de passos. Segue da construção que $D^*(x_1,n,\delta)\cap D^*(x_2,n,\delta) = \emptyset$.

Observe que se $\mathcal{D}_n := \bigcup_{x\in H_n^*} D^*(x,n,\delta)$ então:

$$\begin{aligned} Leb_D(\mathcal{D}_n \cap H_n) &= \sum_{x\in H_n^*} Leb_D(D^*(x,n,\delta)\cap H_n) \\ &\geq \frac{1}{8^{d_u}2R} \sum_{x\in H_n^*} Leb_D(D^*(x,n,4\delta)\cap H_n) \\ &\geq \frac{1}{8^{d_u}2R} Leb_D(\cup_{x\in H_n*}(D^*(x,n,4\delta)\cap H_n)) \\ &\geq \frac{1}{8^{d_u}2R} Leb_D(H_n). \end{aligned}$$

Portanto escolhemos $\tau := \frac{1}{8^{d_u}2R}$ e a proposição está demonstrada. □

3.2 Construção de medidas invariantes e hiperbólicas em Λ

Nosso objetivo agora é usar a estrutura expansora do disco D, descrita na Seção 3.1.1 para construir medidas com a propriedade SRB para o endomorfismo não uniformemente hiperbólico $f|_\Lambda$. Seja $\mathcal{B}(\Lambda)$ a σ-álgebra de Borel em Λ. Diremos que uma medida $\nu : (\Lambda, \mathcal{B}(\Lambda)) \to [0, +\infty]$ é uma subprobabilidade se $\nu(\Lambda) \leq 1$. Denotemos por $\mathcal{S}(\Lambda)$ o conjunto das subprobabilidades borelianas no compacto Λ. Pelo Teorema de Schauder, $\mathcal{S}(\Lambda)$ é compacto, munido da topologia fraca *. Logo, toda sequência $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{S}(\Lambda)$ admite uma subsequência convergente.

Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, a medida

$$\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_*^j Leb_D,$$

onde D é o disco tangente ao campo de cones C_a, fixado anteriormente. Suponhamos que a medida Leb_D é a medida de Lebesgue no disco induzida por sua métrica Riemanniana e normalizada. É fácil ver que se μ é um ponto de acumulação de $(\mu_n)_n$ na topologia fraca* então μ é uma medida f-invariante.

Consideremos agora para cada $j \in \mathbb{N}$, a medida $Leb_{\mathcal{D}_j} := \sum_{x\in H_j^*} Leb_{D(x,j,\delta)}$ e definamos para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\nu_n := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_*^j Leb_{\mathcal{D}_j}. \tag{3.2.1}$$

Observe que $Leb_{\mathcal{D}_j}(M) \leq Leb_D(M) = 1$, logo, cada ν_n é uma subprobabilidade. Consideremos $\eta_n := \mu_n - \nu_n$. Então $\mu_n = \nu_n + \eta_n$. Fixemos μ um ponto de acumulação de $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ na topologia fraca* . Tomando uma subsequência convergente de $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtemos que $\mu = \nu + \eta$ onde ν é uma subprobabilidade e ponto de acumulação de $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. O seguinte resultado nos diz que a medida ν é não nula.

Proposição 3.2.1. *Existe $\alpha > 0$ tal que $\nu_n(H) \geq \alpha$ para todo n suficientemente grande. Consequentemente, se ν é um ponto de acumulação de $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, então $\nu(H) \geq \alpha$.*

Demonstração. Observe que, como

$$H_j = \{x \in H \cap D : dist(x, \partial D) \geq \delta \text{ e } n \text{ é } c\text{-tempo hiperbólico para } x\}$$

então:

$$\begin{aligned}
\nu_n(H) &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_*^j Leb_{\mathcal{D}_j}(H) \geq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_*^j Leb_{\mathcal{D}_j}\left(f^j(H_j)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} Leb_{\mathcal{D}_j}\left(f^{-j}\left(f^j(H_j)\right)\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} Leb_{\mathcal{D}_j}(H_j) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} Leb_D(\mathcal{D}_j \cap H_j) \geq \frac{\tau}{n}\sum_{j=0}^{n-1} Leb_D(H_j)
\end{aligned}$$

Aqui, usamos o fato que $f^j(H_j) \subset H$, para todo $j \in \mathbb{N}$, conforme Observação 3.1.15. Então precisamos estimar $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} Leb_D(H_j)$. Fixado $n \in \mathbb{N}$ considere o espaço $A_n := \{0, 1, ..., n-1\}$ com a σ-álgebra das partes de A_n e a medida $\eta_n(B) := \frac{\#B}{n}$ em A_n. Considere a função $\chi_n : D \times A_n \to \mathbb{R}$ dada por $\chi(x,i) = 1$ se $x \in H_i$ e $\chi(x,i) = 0$, caso contrário. Temos pelo Teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} Leb_D(H_j) &= \int\left(\int \chi(x,i)\, dLeb_D(x)\right) d\eta_n(i)\\ &= \int\left(\int \chi(x,i)\, d\eta_n(i)\right) dLeb_D(x).\end{aligned}$$

Lembremos que consideramos o conjunto B, como o conjunto dos pontos H que distam mais do que δ do bordo do disco D. Defina, para cada $k \geq 1$, os subconjuntos de B,

$$B_k := \left\{x \in B :\ \sum_{j=0}^{n-1} \log \| \left(Df\left(f^j(x)\right)|_{C_a(f^j(x))}\right)^{-1} \| \leq -2cn,\ \text{para todo } n \geq k\right\}.$$

Observe que $B_k \subset B_{k+1}$, para todo $k \geq 1$ e que $B = \cup_{k\geq 1} B_k$. Então, existe $k_0 \geq 1$ tal que $Leb_D(B_{k_0}) \geq \frac{1}{2} Leb_D(B)$. Como consequência do Lema de Pliss (Lema 3.1.5) e do Lema 3.1.6 temos que para $x \in B_{k_0}$ e $n \geq k_0$ temos

$$\int \chi(x,i)\, d\eta_n(i) := \#\frac{1}{n}\{0 \leq j \leq n-1 :\ j \text{ é um tempo hiperbólico para } x\} \geq \theta.$$

Por outro lado temos também que, como $D \ni x \mapsto \int \chi(x,i)\, d\eta_n(i)$ é uma função positiva então

$$\int_D \int_{A_n} \chi(x,i)\, d\eta_n(i)\, dLeb_D(x) \geq \int_{B_{k_0}} \int_{A_n} \chi(x,i)\, d\eta_n(i)\, dLeb_D(x).$$

Portanto,

$$\int_D \int_{A_n} \chi(x,i)\, d\eta_n(i)\, dLeb_D(x) \geq \theta Leb_D(B_{k_0}) \geq \frac{\theta}{2} Leb_D(B) > 0,$$

para todo $n \geq k_0$.

Portanto, para todo $n \geq k_0$, temos:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} Leb_D(H_j) \geq \frac{\theta}{2} Leb_D(B).$$

Logo a proposição segue tomando $\alpha := \tau\frac{\theta}{2} Leb_D(B) > 0$. $\square$

Consideremos $\Delta_n := \cup_{x \in H_n^*} \Delta(f^n x, \delta)$. Pela construção de ν_n, é fácil vermos que $supp\,(\nu_n) \subseteq \cup_{j=0}^{n-1} \Delta_j$. Logo, se ν é um ponto de acumulação qualquer de $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ então $supp\,(\nu) \subseteq \cap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\cup_{j=0}^{n-1} \Delta_j}$.

O lema a seguir nos diz que o suporte da medida ν está contido numa união de discos contrativos para o passado segundo alguma trajetória passada $\hat{x}$ de M^f. A ideia é que, como $supp\,(\nu) \subseteq \cap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\cup_{j=0}^{n-1} \Delta_j}$, temos que cada $y \in supp\,(\nu)$ pode ser visto como o limite de y_n com $y_n \in \Delta(f^n(x_n), \delta)$ e $x_n \in H_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A menos de uma subsequência assumimos que $f^n(x_n)$ converge a $x \in M$ quando $n \to \infty$. Usando o teorema de Arzelá-Ascoli obteremos que de fato $\Delta(f^n(x_n), \delta)$ converge a um disco Δ de centro em x e que contém y. A escolha do $\hat{x} \in M^f$ tal que este disco Δ é contrativo ao longo desta pré-órbita é feita a partir de escolhas adequadas dos ramos inversos do ponto x. Como $x = \lim_{n \to \infty} f^n(x_n)$, e x_n tem n como tempo cone-hiperbólico para todo $n \in \mathbb{N}$, temos contração para o passado nos ramos inversos $\Delta(f^n(x_n), \delta) \mapsto f^{n-k}(D(x_n, n, \delta))$, para $0 \leq k \leq n-1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então para determinar $\hat{x}$, determinaremos cada uma de suas entradas. Por exemplo, para a pré-imagem x_{-1} de x, escolhemos uma subsequência $(f^{j_k-1}(x_{j_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ de $(f^{j-1}(x_j))_{j \geq 1}$ que está contida numa mesma pré-imagem V_{-1} da bola $B(x, \delta)$. Como, por hipótese, $f^{j_k}(x_{j_k})$ converge a x quando k tende a infinito, devemos ter necessariamente que $f^{j_k-1}(x_{j_k})$ converge a x_{-1}, pré-imagem de x em V_{-1}. Por continuidade provamos que o ramo inverso que leva Δ a $\Delta_{-1} \subset V_{-1}$ é contrativo neste conjunto.

Lema 3.2.2. *Seja $y \in supp\,(\nu)$. Então existe $\hat{x} = (x_{-n})_{n \in \mathbb{N}} \in M^f$ tal que y está contido em um disco $\Delta(\hat{x})$ de raio δ acumulado por discos $\Delta(f^{n_j}(x), \delta)$ com $j \to \infty$, satisfazendo*

1. *o ramo inverso $f_{x_{-n}}^{-n}$ está bem definido em $\Delta(\hat{x})$ para todo $n \geq 0$;*

2. *para cada $y \in \Delta(\hat{x})$ vale que:*

$$dist_M(y_{-n}, x_{-n}) \leq e^{-\frac{c}{2} \cdot n} \delta, \text{ para todo } n \geq 0$$

$y_{-n} := f_{x_{-n}}^{-n}(y)$.

Demonstração. Dado $y \in supp\,(\nu)$, existe uma sequência $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ com $y_j \in \Delta\left(f^{n_j}\left(x_{n_j}\right), \delta\right)$ e $x_{n_j} \in H_{n_j}^*$ tais que $\lim_{j \to \infty} y_j = y$. Tomando uma subsequência, se necessário, podemos assumir que $\lim_{j \to \infty} f^{n_j}\left(x_{n_j}\right) = x$. Pelo Lema 3.1.9 podemos escrever $\Delta\left(f^{n_j}\left(x_{n_j}\right), \delta\right)$ como a exponencial do gráfico de uma aplicação $\psi_{f^{n_j}\left(x_{n_j}\right)} : T_{f^{n_j}\left(x_{n_j}\right)} D(\delta) \to E^s_{f^{n_j}(x_j)}$, com $Lip\left(\psi_{f^{n_j}\left(x_{n_j}\right)}\right) < \varepsilon_0$. Usando o transporte paralelo do gráfico de $\psi_{f^{n_j}\left(x_{n_j}\right)}$, podemos identificar o disco $\Delta\left(f^{n_j}\left(x_{n_j}\right), \delta\right)$, com o gráfico de uma aplicação $g_{n_j} : T_x(f^{n_j}(D))(\delta) \to E^s_x$. Como $Lip\left(\psi_{f^{n_j}\left(x_{n_j}\right)}\right) < \varepsilon_0$ para qualquer j e o transporte paralelo é um isomorfismo linear uniformemente contínuo, temos que $\left(g_{n_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de aplicações equicontínuas e equilimitadas. Então, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli obtemos que existe uma subsequência tal que $\lim_{k\to\infty} g_{n_{j_k}} = g$ uniformemente. Daí, temos que $\Delta(x) = exp_x(graf(g))$ é um disco C^1 mergulhado em M com raio δ acumulado pelos discos $\left\{\Delta\left(f^{n_j}\left(x_{n_j}\right),\delta\right)\right\}_{j\in\mathbb{N}}$.

Sem perda de generalidade, suponhamos

$$\Delta(x) := \lim_{j\to\infty} \Delta\left(f^j(x_j),\delta\right)$$

e

$$\lim_{j\to\infty} f^j(x_j) = x.$$

Como $\Delta(f^j(x_j),\delta) \subset B(f^j(x_j),\delta)$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\Delta(f^j(x_j),\delta) \subset B(x,\delta_1)$ para todo $j \geq j_0$. Logo, como cada ponto possui um número finito de pré-imagens, existe $x_{-1} \in f^{-1}(\{x\})$ tal que $f^{-1}_{x_{-1}}(B(x,\delta)) \supset f^{j_k-1}(D(x_{j_k},j_k,\delta))$ para alguma subsequência $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$, com $j_k \to \infty$ quando $k \to \infty$. Mais ainda, pela Proposição 3.1.13:

$$dist_{f^{j_k-1}\left(D\left(x_{j_k},j_k,\delta\right)\right)}\left(f^{j_k-1}(y_{j_k}),f^{j_k-1}(x_{j_k})\right) \leq e^{-\frac{c}{2}} dist_{\Delta\left(f^{j_k}\left(x_{j_k}\right),\delta\right)}\left(f^{j_k}(y_{j_k}),f^{j_k}(x_{j_k})\right),$$

para todo $y_{j_k} \in D(x_{j_k},j_k,\delta)$ e $k \in \mathbb{N}$. Isto implica que

$$dist_M\left(f^{-1}_{x_{-1}}\left(f^{j_k}(y_{j_k})\right),f^{-1}_{x_{-1}}\left(f^{j_k}(x_{j_k})\right)\right) \leq e^{-\frac{c}{2}} dist_{\Delta\left(f^{j_k}\left(x_{j_k}\right),\delta\right)}\left(f^{j_k}(y_{j_k}),f^{j_k}(x_{j_k})\right),$$

para todo $y_{j_k} \in D(x_{j_k},j_k,\delta)$ e $k \in \mathbb{N}$. Ora, então, se $y \in \Delta(x)$ então $y = \lim_{j\to\infty} y_{j_k}$ com $y_{j_k} \in \Delta(f^{j_k}(x_{j_k}),\delta)$. Daí, $y_{-1} := f^{-1}_{x_{-1}}(y)$ satisfaz $y_{-1} = \lim_{k\to\infty} f^{-1}_{x_{-1}}(y_{j_k})$. Como consequência obtemos:

$$dist_M(y_{-1},x_{-1}) \leq e^{-\frac{c}{2}}\delta.$$

Note agora que, a menos de considerarmos uma subsequência de $(x_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$, podemos supor $\lim_{k\to\infty} f^k(x_k) = x$ e $f^{k-1}(D(x_k,k,\delta)) \subset B(x_{-1},\delta)$ para todo k suficientemente grande. Então existe $x_{-2} \in f^{-1}(\{x_{-1}\}) \subset f^{-2}(\{x\})$ tal que $f^{-1}_{x_{-2}}(B(x_{-1},\delta)) \supset f^{k_s-2}(D(x_{k_s},k_s,\delta))$ para alguma subsequência k_s de k, com $k_s \to \infty$ quando $s \to \infty$. O mesmo argumento acima, garante que:

$$dist_M(y_{-2},x_{-2}) \leq e^{-\frac{c}{2}\cdot 2}\delta < \delta.$$

Prosseguindo com este raciocínio, temos que existe $\hat{x} \in \pi^{-1}(\{x\})$ tal que $f^{-n}_{x_{-n}}$ está sempre bem definido em $\Delta(x)$ e para todo $y \in \Delta(x)$, denotando $y_{-n} = f^{-n}_{x_{-n}}(y)$ temos que:

$$dist_M(y_{-n},x_{-n}) \leq e^{-\frac{c}{2}\cdot n}\delta,$$

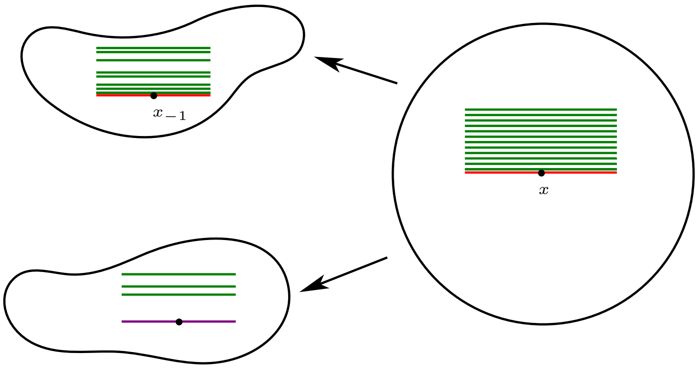

Figura 3.2.1: Escolha do ramo inverso contrativo

para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso $\Delta(\hat{x}) := \Delta(x)$ é o disco pretendido. Observe que $\hat{x} \in \Lambda^f$ pois x_0 é o limite de $f^{n_k}(x_{n_k}) \in f^{n_k}(H) \subset \Lambda$ e Λ é f-invariante. $\square$

O lema anterior nos diz que para cada ponto y do suporte de ν existe um $\hat{x} \in M^f$ e um disco $\Delta(\hat{x})$, contrativo ao longo do itinerário passado definido por $\hat{x}$, tal que $y \in \Delta(\hat{x})$. Denotemos por $\hat{H}_\infty$ o conjunto de todos elementos de M^f obtidos desta forma, ou seja, $supp(\nu) \subseteq \bigcup_{\hat{x} \in \hat{H}_\infty} \Delta(\hat{x})$. Observe então que, apesar da medida ν não ser necessariamente invariante temos a existência de discos instáveis em quase todo ponto com respeito a esta medida.

3.3 Levantamento de medidas hiperbólicas para a extensão natural

Na seção anterior obtivemos uma subprobabilidade ν como ponto de acumulação das médias de iterados da medida de Lebesgue em subconjuntos de um disco fixado tangente ao campo de cones C_a. Nesta seção vamos construir um levantamento para ν, ou seja, uma medida $\hat{\nu}$ em M^f tal que $\pi_* \hat{\nu} = \nu$. Lembremos que a existência e unicidade de levantamento é garantida apenas quando nos restringimos a medidas f-invariantes, conforme [QXZ09, Proposição I.3.1].

O método de construção desta medida nos permitirá verificar a continuidade absoluta de $\hat{\nu}$ com respeito a Lebesgue ao longo de discos instáveis, no sentido de que a medida desintegrada projeta-se em uma medida absolutamente contínua com respeito a Lebesgue nos discos instáveis.

Como observamos na Seção 2.1, em geral, a extensão natural não tem necessariamente estrutura de variedade diferenciável. Contudo, no contexto de difeomorfismos locais, localmente, podemos considerar a extensão natural como uma variedade produto. Para tanto utilizaremos do seguinte fato, cuja prova está contida em [AH94, Teorema

6.5.1]. Denotemos $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Note que, como M é uma variedade conexa, existe $d \in \mathbb{N}^*$, tal que $\# f^{-1}(x) = d$ para todo $x \in M$. Consequentemente $\# f^{-n}(\{x\}) = d^n$. Chamamos este número d de grau de f.

Proposição 3.3.1. *Sejam M uma variedade Riemanniana compacta e conexa e $f : M \to M$ um difeomorfismo local de grau d. Existe $\rho > 0$ tal que para todo $x \in M$, dado $n \in \mathbb{N}^*$, existe uma família de abertos 2 a 2 disjuntos $\mathcal{J}_n(x) := \{V_\lambda : \lambda \in I_n\}$, onde $I_n := \{1, 2, ..., d\}^n$, satisfazendo:*

1. *$f^{-n}(B(x, \rho)) := \bigcup_{\lambda \in I_n(x)} V_\lambda$*

2. *$f^n|_{V_\lambda} : V_\lambda \to B(x, \rho)$ é um difeomorfismo, para todo $\lambda \in I_n(x)$.*

Demonstração. [AH94, Teorema 6.5.1]. □

Observe que dado $V_\lambda \in \mathcal{J}_n(x)$ temos que $f^j(V_\lambda) \in \mathcal{J}_{n-k}(x)$, para todo $1 \leq k \leq n-1$. Vamos estabelecer então uma enumeração para $\mathcal{J}_n(x)$ que nos permita identificar as imagens de elementos de $\mathcal{J}_n(x)$ em $\mathcal{J}_k(x)$, para $1 \leq k \leq n-1$. Para $n = 1$ temos $\mathcal{J}_1(x) := \{V_1, ..., V_d\}$. Fixemos então para $n = 2$, $\mathcal{J}_2(x) := \{V_{i_2 i_1} : (i_2, i_1) \in I_2\}$ tal que $f(V_{i_2 i_1}) = V_{i_1} \in \mathcal{J}_1(x)$. Suponhamos que tenhamos fixado

$$\mathcal{J}_{n-1}(x) := \left\{V_{i_{n-1} i_{n-2} \dots i_1} : (i_{n-1}, ..., i_2, i_1) \in I_{n-1}\right\},$$

então colocamos $\mathcal{J}_n(x) := \{V_{i_n \dots i_1} : (i_n, ..., i_1) \in I_n\}$ de modo que

$$f\left(V_{i_n i_{n-1} \dots i_1}\right) = V_{i_{n-1} \dots i_1} \in \mathcal{J}_{n-1}(x).$$

Vale ressaltar que, aqui estamos fixando uma enumeração dentre as inúmeras possíveis, contudo, os nossos futuros argumentos independem de tal escolha.

Vamos então definir uma caracterização, via homeomorfismo, para a pré-imagem pela projeção natural na primeira coordenada, $\pi : M^f \to M$, da bola de centro em $x \in M$ e raio $\rho > 0$. Consideremos $\Gamma := \{1, ..., d\}^{\mathbb{N}^*}$. Definamos

$$\begin{array}{rccl} \varphi_x : & B(x,\rho) \times \Gamma & \to & \pi^{-1}(B(x,\rho)) \subset M^f \\ & (z, (i_n)_{n \in \mathbb{N}}) & \mapsto & \left((f^n|_{V_{i_n \dots i_1}})^{-1}(z)\right)_{n \in \mathbb{N}} \end{array}$$

Lema 3.3.2. *φ_x acima definida é um homeomorfismo para todo $x \in M$.*

Demonstração. [AH94, Teorema 6.5.1]. □

Temos que Γ é homeomorfo a um conjunto de Cantor. Logo, para todo $x \in M$, encontramos uma vizinhança $B(x, \rho)$ e um conjunto Γ homeomorfo a um Cantor, tal que existe um homeomorfismo, $\varphi_x : B(x, \rho) \times \Gamma \to \pi^{-1}(B(x, \rho))$, satisfazendo $\pi \circ \varphi_x(z, c) = z$.

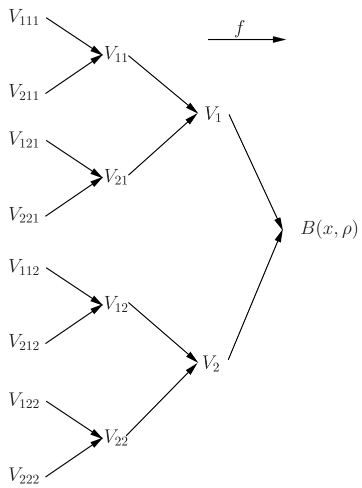

Figura 3.3.1: Enumeração das pré-imagens de $B\,(x,\rho)$

Agora, utilizaremos desta estrutura local fibrada para levantar a medida de Lebesgue em cada disco pré-hiperbólico $D\,(x,n,\delta)$. Reduzindo δ se necessário, podemos assumir $D\,(x,n,\delta) \subset B\,(x,\rho)$, para todo $x \in H_n$ e $n \in \mathbb{N}$. De fato, lembremos que

$$dist_{f^{n-k}(D(x,n,\delta))}(f^{n-k}(x), f^{n-k}(y)) \leq e^{-\frac{c}{2}k} dist_{\Delta(f^n(x),\delta)}(f^n(x), f^n(y)) \leq \delta$$

para todo $y \in D\,(x,n,\delta)$ e $1 \leq k \leq n$. Logo $D\,(x,n,\delta)$ está contido na bola de raio δ e centro x. Sendo mais preciso, $D\,(x,n,\delta)$ está contido na bola de raio $e^{-\frac{c}{2}n}\delta$ e centro x. Daí podemos assumir que, a menos de reduzir δ, temos $D\,(x,n,\delta) \subset B\,(x,\rho)$, para todo $x \in H_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Comecemos por fixar $\mathbb{P}$ uma probabilidade em Γ. Lembremos que H_j^* é o subconjunto finito de pontos que têm j como tempo cone-hiperbólico dado pela Proposição (3.1.16). Então, definamos para cada $j \in \mathbb{N}$ e $x \in H_j^*$ a medida

$$\hat{m}_{j,x} := (\varphi_x)_* \left[Leb_{D(x,j,\delta)} \times \mathbb{P}\right], \tag{3.3.1}$$

em $\pi^{-1}\,(D\,(x,j,\delta))$.

Consideremos para cada $j \in \mathbb{N}$, a medida $\hat{m}_j = \sum_{x \in H_j^*} \hat{m}_{j,x}$. Tomemos então as médias Cesàro dos iterados de $\hat{m}_j$ por $\hat{f}^j$, ou seja,

$$\hat{\nu}_n := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \hat{f}_*^j \hat{m}_j, \tag{3.3.2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. No lema a seguir, veremos que a medida $\hat{m}_{j,x}$ é um levantamento a M^f (não necessariamente único) da medida de Lebesgue no disco pré-hiperbólico $D\,(x,j,\delta)$, ou seja, $\pi_* \hat{m}_{j,x} = Leb_{D(x,j,\delta)}$. Usando que a projeção π semiconjuga f e $\hat{f}$ veremos que as medidas $\hat{\nu}_n$ também se projetam sobre as medidas

$$\nu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_*^j Leb_{\mathcal{D}_j}.$$

Lema 3.3.3. *$\pi_*\hat{\nu}_n = \nu_n$, para cada $n \geq 1$. Consequentemente se $\lim_{k\to\infty}\hat{\nu}_{n_k} = \hat{\nu}$, então a medida $\nu = \pi_*\hat{\nu}$ é um ponto de acumulação de $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}\pi_*\hat{m}_{j,z}(O) &= \hat{m}_{j,z}\left(\pi^{-1}(O)\right) = (\varphi_z)_*\left(Leb_{D(z,j,\delta)} \times \mathbb{P}\right)\left(\pi^{-1}(O)\right)\\ &= \left(Leb_{D(z,j,\delta)} \times \mathbb{P}\right)\left((\varphi_z)^{-1}\left(\pi^{-1}(O)\right)\right)\end{aligned}$$

para todo $O \subset D(z,j,\delta)$ mensurável. Como para qualquer que seja $(y,\lambda) \in B(z,\rho) \times \Gamma$ temos que $\pi \circ \varphi_z(y,\lambda) = y$, segue que $\pi^{-1}(O) = \varphi_z(O \times \Gamma)$. Ou seja, $(\varphi_z)^{-1}(\pi^{-1}(O)) = O \times \Gamma$. Portanto:

$$\begin{aligned}\pi_*\hat{m}_{j,z}(O) &= \left(Leb_{D(z,j,\delta)} \times \mathbb{P}\right)(O \times \Gamma)\\ &= Leb_{D(z,j,\delta)}(O) \cdot \mathbb{P}(\Gamma) = Leb_{D(z,j,\delta)}(O),\end{aligned}$$

para todo $O \subset D(z,j,\delta)$ mensurável. Então $\pi_*\hat{m}_{j,z} = Leb_{D(z,j,\delta)}$, qualquer que seja $z \in H_j$ e $j \in \mathbb{N}$. Segue da linearidade de π_* que $\pi_*\hat{\nu}_n = \nu_n$. Da continuidade de π_*, segue que se $\hat{\nu}$ é um ponto de acumulação de $(\hat{\nu}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ então $\nu = \pi_*\hat{\nu}$ é um ponto de acumulação de $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ☐

Observação 3.3.4. O levantamento de medida não invariantes não é necessariamente unicamente definido. No entanto é útil discutir levantamentos das medidas ν construídas anteriormente. Vimos que dado um ponto de acumulação $\hat{\nu}$ de $(\hat{\nu}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ então $\pi_*\hat{\nu}$ é um ponto de acumulação de $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Em contrapartida, se temos ν um ponto de acumulação de $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ então $\nu = \lim_{k\to\infty}\nu_{n_k}$, para alguma subsequência $(\nu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tome a subsequência $(\hat{\nu}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\hat{\nu}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Então existe uma subsequência $\left(\hat{\nu}_{n_{k_j}}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ de $(\hat{\nu}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a $\hat{\eta}$. Observe que isto implica que $\pi_*\hat{\nu}_{n_{k_j}} = \nu_{n_{k_j}} \to \pi_*\eta$ quando $j \to \infty$. Portanto $\pi_*\eta = \nu$. Com isso, concluímos que dada uma medida ν construída pelo processo da seção anterior, podemos considerar uma subsequência de $(\hat{\nu}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a um levantamento da medida ν.

Segue da definição da medida $\hat{\nu}_n$ que

$$supp(\hat{\nu}_n) \subset \bigcup_{j=0}^{n-1}\bigcup_{x\in H_j^*}\hat{f}^j\left(\pi^{-1}(D(x,j,\delta))\right).$$

Portanto se $\hat{\nu} = \lim_{k\to\infty} \hat{\nu}_{n_k}$ então $supp\,(\hat{\nu}) \subset \cap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\cup_{j=0}^{n-1} \cup_{x\in H_j^*} \hat{f}^j\left(\pi^{-1}\left(D\left(x,j,\delta\right)\right)\right)}$.

Lembre que definimos Λ^f como a extensão natural de um conjunto compacto e positivamente invariante e esta é a coleção de todas as pré-órbitas de pontos em Λ contidas em Λ (Observação 2.1.1).

Pelo Lema 3.2.2 dado um ponto y do suporte da medida ν existe um disco $\Delta\left(\hat{x}\right)$ que é contrativo para o passado ao longo da pré-órbita $\hat{x} \in M^f$. Apesar do espaço M^f não ter necessariamente uma estrutura de variedade, gostaríamos de afirmar que o suporte da medida $\hat{\nu}$ tem estrutura semelhante ao suporte da sua projeção ν.

A próxima proposição nos dirá que o suporte de $\hat{\nu}$ está contido numa união de conjuntos homeomorfos a $\Delta\left(\hat{x}\right)$ pela projeção π. Para isso, consideremos $\Delta\left(\hat{x}\right) = \lim_{k\to\infty} \Delta\left(f^{j_k}\left(z_{j_k}\right), \delta\right)$, com $z_{j_k} \in H_{j_k}^*$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Este limite é dado pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, uma vez que os discos $\Delta\left(f^{j_k}\left(z_{j_k}\right), \delta\right)$ podem ser representados por aplicações equilimitadas e equicontínuas no fibrado tangente a M.

Os conjuntos $\hat{f}^{j_k}\left(\pi^{-1}\left(D\left(z_{j_k}, j_k, \delta\right)\right)\right)$ com $k \in \mathbb{N}$ exercem o mesmo papel na extensão natural que os conjuntos $\Delta\left(f^{j_k}\left(z_{j_k}\right), \delta\right)$ na construção das medidas. Em outras palavras, o suporte de $\hat{\nu}$ está contido na união de conjuntos obtidos como acumulação destes conjuntos na extensão natural, agora usando a topologia do espaço métrico M^f Definamos então $\hat{\Delta}\left(\hat{x}\right)$ como o conjunto de pré-órbitas $\hat{y} \in M^f$ que são limite de alguma subsequência $\left(\hat{y}_{j_{k_s}}\right)_{s\in\mathbb{N}}$, com $\hat{y}_{j_{k_s}} \in \hat{f}^{j_{k_s}}\left(\pi^{-1}\left(D\left(z_{j_{k_s}}, j_{k_s}, \delta\right)\right)\right)$, onde $\left(z_{j_{k_s}}\right)_{s\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $\left(z_{j_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ com $j_{k_s} \to \infty$ quando $s \to \infty$. Por continuidade da projeção π, cada $\hat{y} \in \hat{\Delta}\left(\hat{x}\right)$ é tal que $\pi\left(\hat{y}\right) \in \Delta\left(\hat{x}\right)$. Portanto $\pi\left(\hat{\Delta}\left(\hat{x}\right)\right) \subseteq \Delta\left(\hat{x}\right)$. O que veremos na proposição a seguir é que, a restrição da projeção a este conjunto é na verdade uma bijeção.

Formalmente definimos:

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}\left(\hat{x}\right) := \Big\{ \hat{y} \in M^f : \; & \hat{y} = \lim_{s\to\infty} \hat{y}_{j_{k_s}}, \text{ para alguma subsequência } \left(y_{j_{k_s}}\right)_{s\in\mathbb{N}} \\ & \text{com } \hat{y}_{j_{k_s}} \in \hat{f}^{j_{k_s}}\left(\pi^{-1}\left(D\left(z_{j_{k_s}}, j_{k_s}, \delta\right)\right)\right) \text{ e } \left(z_{j_{k_s}}\right)_{s\in\mathbb{N}} \subset \left(z_{j_k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \Big\}. \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Observe que a sequência $\left(z_{j_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfaz a propriedade que $\lim_{k\to\infty} f^{j_k - n}\left(z_{j_k}\right) = x_{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, conforme prova do Lema 3.2.2. Como $j_k \to \infty$ quando $k \to \infty$ estamos olhando, para cada $n \in \mathbb{N}$, o limite sobre $j_k \geq n$.

Proposição 3.3.5. *Se $\hat{y} \in supp\,(\hat{\nu})$ então existem $\hat{x} \in M^f$ e um conjunto $\hat{\Delta}\left(\hat{x}\right) \subset M^f$ (conforme (3.3.3)) tais que $\hat{y} \in \hat{\Delta}\left(\hat{x}\right)$ e $\pi|_{\hat{\Delta}(\hat{x})} : \hat{\Delta}\left(\hat{x}\right) \to \Delta\left(\hat{x}\right)$ é uma bijeção.*

Demonstração. Suponhamos $\Delta\left(\hat{x}\right)$ dado pelo Lema 3.2.2. Digamos que

$$\Delta\left(\hat{x}\right) = \lim_{k\to\infty} \Delta\left(f^{j_k}\left(z_{j_k}\right), \delta\right),$$

com $z_{j_k} \in H^*_{j_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Consideremos $\hat{\Delta}(\hat{x})$ dada por 3.3.3. Como observamos anteriormente, a continuidade de π implica que $\pi\left(\hat{\Delta}(\hat{x})\right) \subset \Delta(\hat{x})$. De fato, se $\hat{y} \in \hat{\Delta}(\hat{x})$ então $\hat{y} = \lim_{s\to\infty} \hat{y}_{j_{k_s}}$ com $\hat{y}_{j_{k_s}} \in \hat{f}^{j_{k_s}}\left(\pi^{-1}\left(D\left(z_{j_{k_s}}, j_{k_s}, \delta\right)\right)\right)$. Mas então $\pi(\hat{y}) = \lim_{s\to\infty} \pi\left(\hat{y}_{j_{k_s}}\right)$. Mas $\pi\left(\hat{y}_{j_{k_s}}\right) \in \Delta\left(f^{j_{k_s}}\left(z_{j_{k_s}}\right), \delta\right)$ por definição. Como $\Delta(\hat{x}) = \lim_{k\to\infty} \Delta\left(f^{j_k}\left(z_{j_k}\right), \delta\right)$ devemos ter necessariamente que $\pi(\hat{y}) \in \Delta(\hat{x})$.

A inclusão $\Delta(\hat{x}) \subset \pi\left(\hat{\Delta}(\hat{x})\right)$ segue também da continuidade de π. De fato, se $y \in \Delta(\hat{x})$ é tal que $y = \lim_{k\to\infty} y_{j_k}$ então, escolhendo $\hat{y}_{j_k}$ tal que $\pi(\hat{y}_{j_k}) = y_{j_k}$ e $\hat{y}_{j_k} \in \hat{f}^{j_k}\left(\pi^{-1}\left(D\left(z_{j_k}, j_k, \delta\right)\right)\right)$, temos, por compacidade de M^f que existe uma subsequência convergente $\left(\hat{y}_{j_{k_s}}\right)_{s\in\mathbb{N}}$, $\lim_{k\to\infty} \hat{y}_{j_k} = \hat{y}$, ou seja, $\hat{y} \in \hat{\Delta}(\hat{x})$. Da continuidade de π devemos ter necessariamente que $\pi(\hat{y}) = y$.

Vamos mostrar então que $\pi\mid_{\hat{\Delta}(\hat{x})}$ é injetiva. Afirmamos que se $\hat{y} \in \hat{\Delta}(\hat{x})$ então

$$dist\left(y_{-n}, x_{-n}\right) \leq e^{-\frac{c}{2}n}\delta, \text{ para todo } n \geq 1.$$

De fato, fixe $n \geq 1$. Do Lema 3.2.2, temos que

$$f^{-n}_{x_{-n}}\left(\Delta\left(f^{j_k}\left(z_{j_k}\right), \delta\right)\right) = f^{j_k - n}\left(D\left(z_{j_k}, j_k, \delta\right)\right)$$

para todo $j_k \geq n$. Então $\hat{y} \in \hat{\Delta}(x)$, implica que

$$y_{-n} := \lim_{s\to\infty} f^{-n}_{x_{-n}}\left(y_{j_{k_s}}\right),$$

pois $y_{-n} = \pi \circ \hat{f}^{-n}(\hat{y})$ e $f^{-n}_{x_{-n}}\left(f^{j_{k_s}}\left(z_{j_{k_s}}\right)\right) = \pi \circ \hat{f}^{-n}\left(\hat{y}_{j_{k_s}}\right)$. Logo, usando o Lema 3.2.2 temos que

$$dist\left(y_{-n}, x_{-n}\right) \leq e^{-\frac{c}{2}n}\delta.$$

Como $n \geq 1$ foi tomado arbitrariamente, $dist\left(y_{-n}, x_{-n}\right) \leq e^{-\frac{c}{2}n}\delta$, para todo $n \geq 1$. Isto garante que se $\pi(\hat{y}) = \pi(\hat{u})$ então $\hat{y} = \hat{u}$ (pois os pontos em $\hat{\Delta}(\hat{x})$ estão bem determinados pelos ramos inversos $f^{-n}_{x_{-n}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$). Então $\pi\mid_{\hat{\Delta}(\hat{x})}$ é injetiva e portanto $\pi\mid_{\hat{\Delta}(\hat{x})}: \hat{\Delta}(\hat{x}) \to \Delta(\hat{x})$ é bijetora $\square$

Lembremos que denotamos por $\hat{H}_\infty$ o conjunto dos pontos $\hat{x} \in M^f$ encontrados no Lema 3.3.5, ou seja, tal que $\operatorname{supp}(\hat{\nu}) \subset \bigcup_{\hat{x}\in\hat{H}_\infty} \hat{\Delta}(\hat{x})$.

Proposição 3.3.6. *Dado $\hat{x} \in \hat{H}_\infty$, para cada $\hat{y} \in \hat{\Delta}(\hat{x})$ existe um subespaço d_u-dimensional $\mathcal{E}^u_{\hat{y}}$ de $T_{\hat{y}} = T_{y_0}M$ satisfazendo para todo $v \in \mathcal{E}^u_{\hat{y}}$:*

$$\|\left(Df^m\left(y_{-m}\right)\right)^{-1} \cdot v\| \leq e^{-\frac{c}{2}m}\|v\|, \tag{3.3.4}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Fixemos $\hat{y} \in \hat{\Delta}(\hat{x})$. Definamos

$$\mathcal{E}^u_{\hat{y}} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Df^n(y_{-n}) \cdot C_a(y_{-n}).$$

Vamos mostrar que $\mathcal{E}^u_{\hat{y}}$ é um subespaço vetorial de dimensão d_u e que satisfaz a desigualdade (3.3.4). Comecemos por demonstrar que se $v \in \mathcal{E}^u_{\hat{y}}$ então $\|(Df^m(y_{-m}))^{-1} \cdot v\| \leq e^{-\frac{c}{2}m}\|v\|$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Conforme vimos na Proposição 3.3.5, temos que $\hat{y} = \lim_{k\to\infty} \hat{y}_{n_k}$, para alguma subsequência $(\hat{y}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ com $\hat{y}_{n_k} \in \hat{f}^j(\pi^{-1}(D(z_{n_k}, n_k, \delta)))$ e $z_{n_k} \in H^*_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Escrevendo $\hat{y}_{n_k} := \left(y^k_{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\hat{y} = (y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ temos que $\hat{y} = \lim_{k\to\infty} \hat{y}_{n_k}$ se, e somente se $\lim_{k\to\infty} y_{k,-j} = y_{-j}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. $\square$

Afirmamos que dado $m \in \mathbb{N}$ e $w \in Df^m(y_{-m}) \cdot C_a(y_{-m})$ então

$$\left\|(Df^m(y_m))^{-1} \cdot w\right\| \leq e^{-\frac{c}{2}m}\|w\|.$$

De fato, fixemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geq m$. Então, como $\hat{y}_{n_k} \in \hat{f}^j(\pi^{-1}(D_{n_k}(x_{n_k}, \delta)))$ temos que $y^k_{-j} \in f^{n_k-j}(D(x_{n_k}, n_k, \delta))$ para todo $0 \leq j \leq n_k$. Em particular $y^k_{-j} \in f^{n_k-j}(D(x_{n_k}, n_k, \delta))$ para todo $0 \leq j \leq m$.

Usando a Proposição 3.1.13 concluímos que

$$dist_M\left(y^k_{-j}, f^{n_k-j}(z_{n_k})\right) \leq e^{-\frac{c}{2}j}\delta$$

para todo $0 \leq j \leq m$. Usando a continuidade da derivada, conforme Lema 3.1.8 temos que:

$$\|\left(Df\left(y^k_{-j-1}\right)\right)^{-1} \cdot u_j\| \leq \|\left(Df\left(f^{n_k-j-1}(z_{n_k})\right)|_{C_a\left(f^{n_k-j-1}\left(z_{n_k}\right)\right)}\right)^{-1}\| \cdot \|u_j\|, \qquad (3.3.5)$$

para todo $u_j \in C_a\left(y^k_{-j}\right)$ para todo $0 \leq j \leq m-1$. Portanto, se $w_k \in Df^m\left(y^k_{-m}\right) \cdot C_a\left(y^k_{-m}\right)$ então:

$$\begin{aligned}
\left\|\left(Df^m\left(y^k_{-m}\right)\right)^{-1} \cdot w_k\right\| &\leq \left\|\left(Df\left(y^k_{-m}\right)\right)^{-1} \circ Df^{m-1}\left(y^k_{-m+1}\right) \cdot w_k\right\| \\
&\leq \left\|\left(Df\left(f^{n_k-m}(z_{n_k})\right)|_{C_a\left(f^{n_k-m}(z_{n_k})\right)}\right)^{-1}\right\| \cdot \left\|Df^{m-1}\left(y^k_{-m+1}\right) \cdot w_k\right\| \\
&\leq \prod_{j=n_k-m}^{n_k-1} \left\|\left(Df\left(f^j(z_{n_k})\right)|_{C_a\left(f^j\left(z_{n_k}\right)\right)}\right)^{-1}\right\| \cdot \|w_k\|
\end{aligned}$$

Aqui usamos que $\left(Df^j\left(y_{-j}^k\right)\right)^{-1} \cdot w_k \in C_a\left(y_{-j}\right)$ para todo $0 \leq j \leq m-1$, pois assumimos o campo de cones invariante e $w_k \in Df^m\left(y_{-m}^k\right) \cdot C_a\left(y_{-m}^k\right)$.

Como z_{n_k} tem n_k como c-tempo cone-hiperbólico, segue, por definição, que:

$$\prod_{j=n_k-m}^{n_k-1} \| \left(Df\left(f^j\left(z_{n_k}\right)\right)|_{C_a\left(f^j\left(z_{n_k}\right)\right)}\right)^{-1} \| \leq e^{-\frac{c}{2}m}.$$

Portanto, $\| \left(Df^m\left(y_{-m}^k\right)\right)^{-1} \cdot w_k\| \leq e^{-\frac{c}{2}m}\|w_k\|$, para todo $w_k \in Df^m\left(y_{-m}^k\right) \cdot C_a\left(y_{-m}^k\right)$. Como escolhemos k arbitrariamente com $n_k \geq m$ temos que para todo k tal que $n_k \geq m$, se $w_k \in Df^m\left(y_{-m}^k\right) \cdot C_a\left(y_{-m}^k\right)$ então $\| \left(Df^m\left(y_{-m}^k\right)\right)^{-1} \cdot w_k\| \leq e^{-\frac{c}{2}m}\|w_k\|$. Suponha agora $w \in Df^m\left(y_{-m}\right) \cdot C_a\left(y_{-m}\right)$. A continuidade do campo de cones, permite que escrevamos w como limite de uma sequência $\left(w_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ com $w_k \in Df^m\left(y_{-m}^k\right) \cdot C_a\left(y_{-m}^k\right)$. Como f é de classe C^2 e o campo de cones C_a é contínuo, temos que, como

$$\| \left(Df^m\left(y_{-m}^k\right)\right)^{-1} \cdot w_k\| \leq e^{-\frac{c}{2}m}\|w_k\|$$

para todo k então, passando o limite em $k \to \infty$ que:

$$\| \left(Df^m\left(y_{-m}\right)\right)^{-1} \cdot w\| \leq e^{-\frac{c}{2}m}\|w\|,$$

para todo $w \in Df^m\left(y_{-m}\right) \cdot C_a\left(y_{-m}\right)$. O que conclui a prova da afirmação.

Como m foi fixado de maneira arbitrária segue que para todo $m \in \mathbb{N}$ e $w \in Df^m\left(y_{-m}\right) \cdot C_a\left(y_{-m}\right)$:

$$\| \left(Df^m\left(y_{-m}\right)\right)^{-1} \cdot w\| \leq e^{-\frac{c}{2}m}\|w\|.$$

Em particular se $w \in \mathcal{E}_{\hat{y}}^u$ então $w \in Df^m\left(y_{-m}\right) \cdot C_a\left(y_{-m}\right)$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e portanto $\| \left(Df^m\left(y_{-m}\right)\right)^{-1} \cdot w\| \leq e^{-\frac{c}{2}m}\|w\|$ para todo $m \in \mathbb{N}$ como queríamos mostrar.

Mostremos agora que $\mathcal{E}_{\hat{y}}^u$ consiste de um subespaço vetorial. Considere para cada $n \geq 1$ a família de subespaços de $T_{y_0}M$

$$\mathcal{S}_n := \left\{E \leqslant T_{y_0}M : \ E \subset Df^n\left(y_{-n}\right) \cdot C_a\left(y_{-n}\right) \text{ e } \dim\left(E\right) = d_u\right\},$$

em que $E \leqslant T_{y_0}M$ denota que E é subespaço vetorial de $T_{y_0}M$. Com a topologia Grassmanniana, $\mathcal{S}_n$ é um compacto. Isto porque, como $\mathcal{S}_n$ é uma família de subespaços contidos na n-ésima imagem do cone em $T_{y_{-n}}M$, em particular é uma família de subespaços vetoriais contidos no cone $C_a\left(y_0\right) \subset T_{y_0}M$. Assim, podemos ver cada elemento de $\mathcal{S}_n$ como o gráfico de uma aplicação linear $A : F_{y_0} \to E_{y_0}^s$, onde F_{y_0} é a fibra na qual definimos o campo de cones. Portanto, uma sequência $\left(E_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\mathcal{S}_n$, pode ser vista como uma sequência de aplicações lineares $\left(A_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de F_{y_0} em $E_{y_0}^s$.

Fixemos então uma sequência $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{S}_n$. Digamos que $E_k = graf\,(A_k)$ onde $A_k : F_{y_0} \to E^s_{y_0}$ é uma aplicação linear. Observe que o espaço $\mathcal{L}\left(F_{y_0}, E^s_{y_0}\right)$ das aplicações lineares de F_{y_0} em $E^s_{y_0}$ é um espaço de Banach de dimensão $\dim(F_{y_0}) \cdot \dim\left(E^s_{y_0}\right) < \infty$. Temos também que o subconjunto das aplicações lineares de F_{y_0} em $E^s_{y_0}$ cujo gráfico está contido em $Df^n(y_{-n}) \cdot C_a(y_{-n})$ é um subconjunto fechado de $\mathcal{L}\left(F_{y_0}, E^s_{y_0}\right)$ e consequentemente um compacto. De fato, se $T = \lim_{k\to\infty} T_k$ e $graf\,(T_k) \subset Df^n(y_{-n}) \cdot C_a(y_{-n})$ então, como $Df^n(y_{-n}) \cdot C_a(y_{-n})$ é um subconjunto fechado de $T_{y_0}M$, $graf\,(T) \subset Df^n(y_{-n}) \cdot C_a(y_{-n})$. Então a sequência $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente. Portanto $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente. Segue daí que $\mathcal{S}_n$ é um conjunto compacto.

Além disso, $\mathcal{S}_n$ é não-vazio pois $F_n := Df^n(y_{-n}) \cdot F_{y_{-n}} \in \mathcal{S}_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, onde F é o fibrado, não necessariamente invariante, no qual definimos o campo de cones C_a. Além disto $\mathcal{S}_{n+1} \subset \mathcal{S}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$: se $E := Df^{n+1}(y_{-n-1}) \cdot Z \in \mathcal{S}_{n+1}$, então $E := Df^n(y_{-n}) \cdot [Df(y_{-n-1}) \cdot Z] \in \mathcal{S}_n$. Segue portanto que $\cap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{S}_n \neq \emptyset$. Ora, mas $G \in \cap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{S}_n$ se, e somente se $G \subset \mathcal{E}^u_{\hat{y}}$.

Vejamos que $\# \cap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_n = 1$. Suponhamos que existam $G \neq G' \in \cap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{S}_n$. Tome $v \in G \backslash G'$. Como visto anteriormente, temos que:

$$\| \left[Df^n(y_{-n})\right]^{-1} \cdot v\| \leq e^{-\frac{c}{2}n}\|v\|, \tag{3.3.6}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, podemos escrever $v = v_s + v'$ com $v_s \in E^s_{y_0} \backslash \{0\}$ e $v' \in G'$. Mas então:

$$\begin{aligned}\| \left[Df^n(y_{-n})\right]^{-1} \cdot v\| &\geq \| \left[Df^n(y_{-n})\right]^{-1} \cdot v_s\| - \| \left[Df^n(y_{-n})\right]^{-1} \cdot v'\| \\ &\geq \lambda^{-n} \cdot \|v_s\| - e^{-\frac{c}{2}n}\|v'\|,\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é possível se, e somente se $\|v_s\| = 0$. Mas então $v \in G'$, o que contradiz a hipótese, portanto $G = G'$. Isto prova que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_n$ consiste de um único subespaço $\mathcal{E}^u_{\hat{y}}$, o que completa a prova do Lema. □

A Proposição 3.3.6 nos diz que para todo $\hat{x} \in \hat{H}_\infty$ e para cada $\hat{y} \in \hat{\Delta}(\hat{x})$ temos uma única decomposição $T_{\hat{y}} = E^s_{y_0} \oplus \mathcal{E}^u_{\hat{y}}$ com a propriedade (3.3.4) de contração para o passado. Dado $\hat{y} \in \bigcup_{\hat{x}\in\hat{H}_\infty} \hat{\Delta}(\hat{x})$ definamos

$$\mathcal{E}^u_{\hat{f}^{-1}(\hat{y})} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Df^n(y_{-1-n}) \cdot C(y_{-1-n}).$$

Observe que se existem $E, E' \subset \mathcal{E}^u_{\hat{f}^{-1}(\hat{y})}$ tais que $\dim(E) = \dim(E') = d_u$ então $Df(y) \cdot E, Df(y) \cdot E'$ são subespaços de dimensão d_u contidos em $\mathcal{E}^u_{\hat{y}}$. Portanto, como vimos na Proposição 3.3.6, $Df(y_{-1})(E) = Df(y_{-1})(E')$. Portanto $E = E'$.

Note também que dado $v \in \mathcal{E}^u_{\hat{f}^{-1}(\hat{y})}$ temos que

$$\left\|Df^n(y_{-1-n})^{-1} \cdot v\right\| \le e^{-\frac{c}{2}n}\|v\|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então temos uma decomposição

$$T_{\hat{f}^{-1}(\hat{y})} = E^s_{y_{-1}} \oplus \mathcal{E}^u_{\hat{f}^{-1}\hat{y}}$$

em um espaço uniformemente expansor, $E^s_{y_{-1}}$, por $D\hat{f}^{-1}$ e um espaço uniformemente contrator, $\mathcal{E}^u_{\hat{f}^{-1}(\hat{y})}$, para $D\hat{f}^{-1}$. Lembremos que definimos uma transformação no conjunto $T\hat{M}^f$, $D\hat{f} : T\hat{M}^f \circlearrowleft$, pondo $D\hat{f}(\hat{x}, v) = Df(x_0) \cdot v$, e que como f é um difeomorfismo local, $Df(x)$ é inversível para todo $x \in M$. Faz sentido então definirmos $D\hat{f}^{-1} : T\hat{M}^f \circlearrowleft$ por $D\hat{f}^{-1}(\hat{x}, v) = Df(x_{-1})^{-1} \cdot v$. Denotaremos também $\mathcal{E}^u_{\hat{f}^{-1}(\hat{y})} := Df(y_0)^{-1} \cdot \mathcal{E}^u_{\hat{y}}$. Assim para todo $\hat{x} \in \hat{S}_\infty := \bigcup_{n \ge 0} \hat{f}^{-n}\left(\hat{\Delta}_\infty\right)$ existe uma decomposição $D\hat{f}$-invariante $T_{\hat{x}} = E^s_{x_0} \oplus \mathcal{E}^u_{\hat{x}}$, em que

$$\begin{cases} \|D\hat{f}^n(\hat{x})\,|_{E^s_{x_0}}\| & \le \lambda^n < 1 \\ \|D\hat{f}^{-n}(\hat{x})\,|_{\mathcal{E}^u_{\hat{x}}}\| & \le e^{-\frac{c}{2}n} < 1 \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por [Shu87, BP07] temos a existência de variedades instáveis locais $\{W^u_{loc}(\hat{x})\}_{\hat{x} \in \hat{S}_\infty}$.

Como $\Delta(\hat{x})$ é limite de $\Delta(f^{n_k}(x_{n_k}), \delta) := f^{n_k}(D(x_{n_k}, n_k, \delta))$ com $n_k \to \infty$, temos que para cada $m \in \mathbb{N}$, $T_y\Delta(\hat{x}) \subset Df^m(y_{-m}) \cdot C_a(y_{-m})$, para todo $y \in \Delta(\hat{x})$. Isto porque, em outras palavras $\Delta(\hat{x})$ é limite de $f^m(f^{n_k-m}(D_{n_k}(x_{n_k}, \delta)))$ quando $n_k \to \infty$, como $f^{n_k-m}(D_{n_k}(x_{n_k}, \delta))$ também é tangente ao campo de cones, $T\Delta(\hat{y})$ é limite de $Df^m \cdot C_a$, logo, para cada $y \in \Delta(\hat{x})$, $T_y\Delta(\hat{x}) \subset Df^m(y_{-m}) \cdot C_a(y_{-m})$. Em particular, usando este fato e o Lema 3.2.2, temos $\Delta(\hat{x}) \subset W^u_{loc}(\hat{x})$.

Fixemos $z \in M$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $B(z, \epsilon)$ está contido no domínio do homeomorfismo φ_z dado pelo Lema 3.3.2. Consideremos o conjunto

$$H_z := \left\{\hat{x} \in \hat{H}_\infty : \ \Delta(\hat{x}) \cap B(z, \epsilon) \ne \emptyset\right\}.$$

Afirmamos que para quaisquer $\hat{x}, \hat{y} \in H_z$ então ou

$$\left(\hat{\Delta}(\hat{x}) \cap \pi^{-1}(B(z, \epsilon))\right) = \left(\hat{\Delta}(\hat{y}) \cap \pi^{-1}(B(z, \epsilon))\right)$$

ou

$$\left(\hat{\Delta}(\hat{x}) \cap \pi^{-1}(B(z,\epsilon))\right) \bigcap \left(\hat{\Delta}(\hat{y}) \cap \pi^{-1}(B(z,\epsilon))\right) = \emptyset.$$

De fato, sejam $\hat{x}$ e $\hat{y}$ em H_z. Então, como $B(z,\epsilon)$ está contido no domínio de φ_z podemos escrever

$$\hat{\Delta}(\hat{x}) \cap \pi^{-1}(B(z,\epsilon)) = \varphi_z\left((\Delta(\hat{x}) \cap B(z,\epsilon)) \times \{\xi\}\right)$$

e

$$\hat{\Delta}(\hat{y}) \cap \pi^{-1}(B(z,\epsilon)) = \varphi_z\left(\varphi_z\left((\Delta(\hat{y}) \cap B(z,\epsilon)) \times \{\zeta\}\right)\right).$$

Assim, se $\xi \neq \zeta$ então $\left(\hat{\Delta}(\hat{x}) \cap \pi^{-1}(B(z,\epsilon))\right) \bigcap \left(\hat{\Delta}(\hat{y}) \cap \pi^{-1}(B(z,\epsilon))\right) = \emptyset$, pois φ_z é homeomorfismo. Caso, $\xi = \eta$, então $\hat{x}$ e $\hat{y}$ são pre órbitas que acompanham uma mesma pré-órbita de z, logo estão próximas, assim usando [QXZ09, Proposição VII.2.1], temos neste caso que ou

$$\left(\hat{\Delta}(\hat{x}) \cap \pi^{-1}(B(z,\epsilon))\right) = \left(\hat{\Delta}(\hat{y}) \cap \pi^{-1}(B(z,\epsilon))\right)$$

ou

$$\left(\hat{\Delta}(\hat{x}) \cap \pi^{-1}(B(z,\epsilon))\right) \bigcap \left(\hat{\Delta}(\hat{y}) \cap \pi^{-1}(B(z,\epsilon))\right) = \emptyset.$$

Temos então a seguinte proposição:

Proposição 3.3.7. *Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que se $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{H}_\infty$ e $dist(x_0, y_0) < \varepsilon_0$ então ou $\hat{\Delta}(\hat{x}) = \hat{\Delta}(\hat{y})$ ou $\hat{\Delta}(\hat{x}) \cap \hat{\Delta}(\hat{y}) = \emptyset$.*

3.4 Propriedade SRB

Denotamos por $\hat{H}_\infty$ o conjunto dos pontos $\hat{x} \in \Lambda^f$, obtidos como no Lema 3.2.2, ou seja, como ponto de acumulação de uma sequência $\left(f^{n_j}\left(x_{n_j}\right)\right)_{j\in\mathbb{N}}$, com $x_{n_j} \in H_{n_j}$e $n_j \to \infty$ quando $j \to \infty$. Dado $\hat{x} \in \hat{H}_\infty$, existe um conjunto $\hat{\Delta}(\hat{x})$ que contém algum $\hat{y} \in supp(\hat{\nu})$ e projeta-se bijetivamente sobre $\Delta(\hat{x})$. Consideremos

$$C_r(\hat{x}) := \cup_{y\in\Delta(\hat{x})} W_r^s(y) \tag{3.4.1}$$

em que $W_r^s(y)$ é a componente conexa de $W_{loc}^s(y) \cap B(y,r)$ que contém y. Iremos construir uma cobertura do suporte de $\hat{\nu}$ usando estes conjuntos e mostraremos que em cada elemento desta cobertura com medida $\hat{\nu}$-positiva encontramos uma partição em discos instáveis ($\gamma \subset \hat{W}_{loc}^u(\hat{z})$) cuja desintegração da medida com respeito a esta partição satisfaz $\pi_*\hat{\nu}_\gamma \ll Leb_{W_{loc}^u(\hat{z})}$.

Note que, diferente do caso em que f é um difeomorfismo, a família de discos instáveis $\{\Delta(\hat{x})\}_{\hat{x}\in\hat{H}_\infty}$ não é duas a duas disjunta. De fato em um único ponto podem existir infinitos discos passando por este ponto. Conforme Proposição 3.3.7, existe $\varepsilon_0 \in (0,1)$ tal que se $dist\,(x_0, y_0) < \varepsilon_0$ então ou $\Delta(\hat{x}) \cap \Delta(\hat{y}) = \emptyset$ ou $\Delta(\hat{x}) = \Delta(\hat{y})$. Isto significa que se olharmos em torno de uma bola de raio $\epsilon_0 > 0$ e nos restringirmos a pré-órbitas suficiente próximas temos disjunção dos discos.

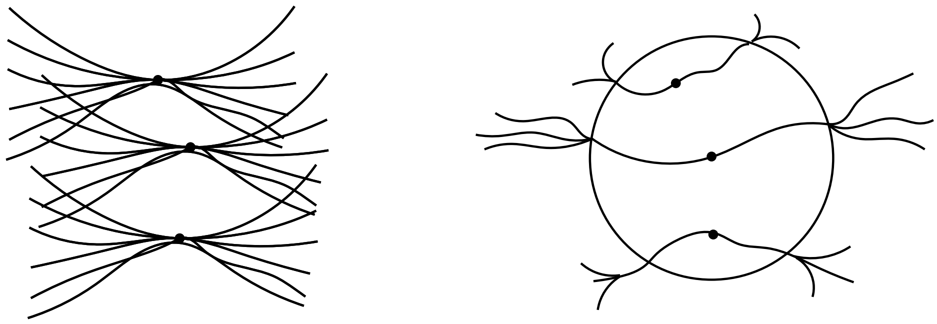

Figura 3.4.1: Interseção entre discos instáveis

Assumamos então $r > 0$ e $\delta > 0$ suficientemente pequenos tais que $C_r(\hat{x}) \subset B(x_0, \varepsilon_0)$.

Usando o homeomorfismo dado pelo Lema 3.3.2, podemos identificar $\pi^{-1}(C_r(\hat{x}))$ com $C_r(\hat{x}) \times \Gamma$.

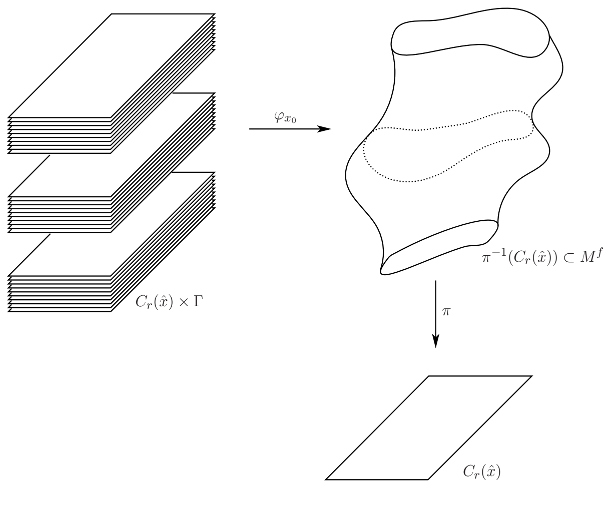

Figura 3.4.2: Identificação de $\pi^{-1}(C_r(\hat{x}))$.

Seja $\varepsilon_1 > 0$. Consideremos uma cobertura finita de $\overline{\Delta(\hat{x})}$, $\{\Delta_{\hat{x},l}\}_{l=1}^{n}$, de modo que a interseção de

$$C_r(\hat{x}, l) := \cup_{y\in\Delta_{\hat{x},l}} W_r^s(y) \tag{3.4.2}$$

com qualquer disco Δ tangente ao campo de cones instável tenha diâmetro menor do que ε_1 em Δ. Analogamente, $\pi^{-1}(C_r(\hat{x}, l))$ também é identificado com $C_r(\hat{x}, l) \times \Gamma$.

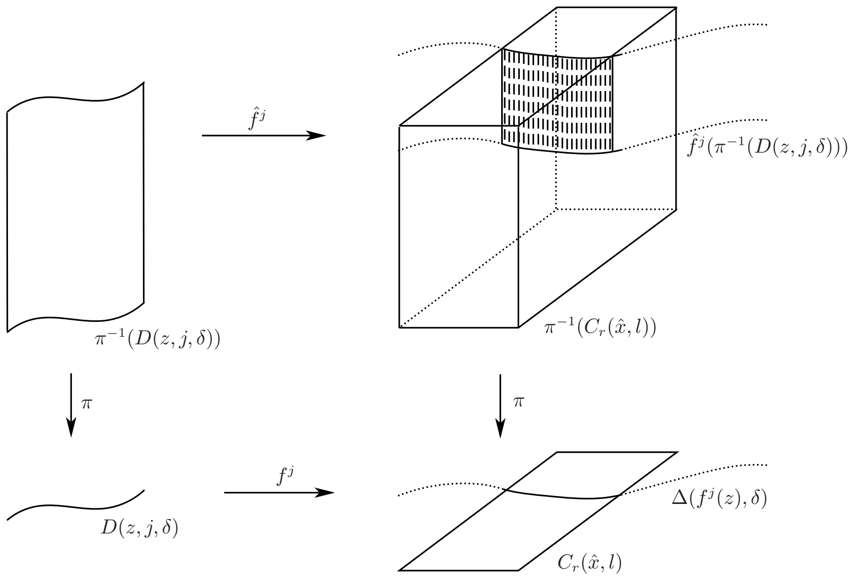

Figura 3.4.3: Um elemento de $\hat{\mathcal{K}}_j\left(\hat{x},l\right)$

Temos bem definida uma holonomia $H^s : C_r\left(\hat{x}\right) \to \Delta\left(\hat{x}\right)$, ao longo das variedades estáveis dada por $H^s\left(y\right) := W_r^s\left(y\right) \pitchfork \Delta\left(\hat{x}\right)$ para todo $y \in C_r\left(\hat{x}\right)$. Diremos que $\Delta\left(f^j\left(z\right),\delta\right)$ cruza $C_r\left(\hat{x},l\right)$ se $H^s|_{\Delta(f^j z,\delta)\cap C_r(\hat{x},l)}$ é um difeomorfismo com $\Delta_{\hat{x},l}$. Fixemos $(\hat{x},l)$. Por abuso de notação, denotaremos $\Delta\left(f^j\left(z\right),\delta\right)$ como a interseção de $\Delta\left(f^j\left(z\right),\delta\right)$ com $C_r\left(\hat{x},l\right)$. A escolha do $\varepsilon_1 > 0$ implica que qualquer disco $\Delta\left(f^j\left(z\right),\delta\right)$ que intersecta $C_r\left(\hat{x},l\right)$ cruza $C_r\left(\hat{x},l\right)$.

Definamos então para $j \in \mathbb{N}$

$$\hat{\mathcal{K}}_j\left(\hat{x},l\right) := \left\{\hat{f}^j\left(\hat{\pi}^{-1}\left(D\left(z,j,\delta\right)\right)\right) : \Delta\left(f^j z,\delta\right) \text{ cruza } C_r\left(\hat{x},l\right)\right\} \tag{3.4.3}$$

e

$$\hat{\mathcal{K}}_\infty\left(\hat{x},l\right) := \left\{\hat{\Delta}\left(\hat{z}\right) :\ \Delta\left(\hat{z}\right) \text{ cruza } C_r\left(\hat{x},l\right)\right\}. \tag{3.4.4}$$

Observe que, como $\{D\left(z,j,\delta\right)\}_{z\in H_j^*}$ é uma família de conjuntos dois a dois disjuntos, por construção (Proposição 3.1.16), a família $\{\pi^{-1}\left(D\left(z,j,\delta\right)\right)\}_{z\in H_j^*}$ é uma família de elementos dois a dois disjuntos. Consequentemente, os elementos de $\hat{\mathcal{K}}_j\left(\hat{x},l\right)$ também são dois a dois disjuntos. Denotemos por $\hat{K}_j\left(\hat{x},l\right)$ a união dos elementos de $\hat{\mathcal{K}}_j\left(\hat{x},l\right)$ para $0 \leq j \leq \infty$.

Relembre que estamos considerando o levantamento $\hat{\nu}_n$ das medidas ν_n dados por (3.3.2) e $\hat{\nu}$ ponto de acumulação desta sequência.Temos que $\bigcup_{j=0}^{n-1} \hat{K}_j\left(\hat{x},l\right)$ cobre o suporte da medida $\hat{\nu}_n|_{\pi^{-1}(C_r(\hat{x},l))}$ e $\hat{\mathcal{K}}_\infty\left(\hat{x},l\right)$ contém o suporte de $\hat{\nu}|_{\pi^{-1}(C_r(\hat{x},l))}$.

Vamos ver a seguir, que retirando uma vizinhança suficientemente pequena do bordo dos discos hiperbólicos ainda assim, repetindo a nossa construção, obtemos uma medida de massa positiva. Isto garantirá que ao tomarmos a cobertura do suporte de

ν formada pelos interiores dos conjuntos $C_r(\hat{x}, l)$, deveremos ter algum deles com medida ν-positiva. Para vermos tal fato, denotemos para $\epsilon > 0$, $V_\epsilon\left(\partial\Delta\left(f^j(z), \delta\right)\right)$ como a vizinhança de tamanho ϵ do bordo do disco $\Delta\left(f^j(z), \delta\right)$, para $z \in H_j^*$ e $j \in \mathbb{N}$. Consideremos então $\Delta_\epsilon\left(f^j(z), \delta\right) := \Delta\left(f^j(z), \delta\right) \backslash V_\epsilon\left(\partial\Delta\left(f^j(z), \delta\right)\right)$ e $D_\epsilon(z, j, \delta) := f_z^{-j}\left(\Delta_\epsilon\left(f^j(z), \delta\right)\right)$. Definamos então:

$$\hat{m}_{j,z,\epsilon} := (\varphi_z)_*\left(Leb_{D_\epsilon(z,j,\delta)} \times \mathbb{P}\right). \tag{3.4.5}$$

Definamos ainda $\hat{m}_{j,\epsilon} := \sum_{z\in H_j^*} \hat{m}_{j,z,\epsilon}$ e

$$\hat{\nu}_{n,\epsilon} := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \hat{f}_*^j \hat{m}_{j,\epsilon}. \tag{3.4.6}$$

Lema 3.4.1. *Se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno então $\hat{\nu}_{n,\epsilon}\left(\Lambda^f\right) \geq \frac{\alpha}{2}$ para todo n suficientemente grande.*

Demonstração. Observe que $\hat{\nu}_n\left(\Lambda^f\right) = \nu_n(\Lambda) \geq \nu_n(H) \geq \alpha$, para todo n suficientemente grande, pela Proposição 3.2.1. Temos ainda que:

$$\begin{aligned}
\hat{\nu}_n\left(\Lambda^f\right) - \hat{\nu}_{n,\epsilon}\left(\Lambda^f\right) &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \hat{f}_*^j \hat{m}_j\left(\Lambda^f\right) - \hat{f}_*^j \hat{m}_{j,\epsilon}\left(\Lambda^f\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{z\in H_j^*} \hat{f}_*^j \hat{m}_{j,z}\left(\hat{\Delta}\left(f^j(z), \delta\right) \backslash \hat{\Delta}_\epsilon\left(f^j(z), \delta\right)\right) \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{z\in H_j^*} \hat{f}_*^j \hat{m}_{j,z}\left(\pi^{-1}\left(\Delta\left(f^j(z), \delta\right) \backslash \Delta\left(f^j(z), \delta\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{z\in H_j^*} \pi_* \hat{f}_*^j \hat{m}_{j,z}\left(\Delta\left(f^j(z), \delta\right) \backslash \Delta_\epsilon\left(f^j(z), \delta\right)\right) \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{z\in H_j^*} f_*^j Leb_{D(z,j,\delta)}\left(\Delta\left(f^j(z), \delta\right) \backslash \Delta_\epsilon\left(f^j(z), \delta\right)\right)
\end{aligned}$$

Tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno temos que a medida de Lebesgue da união das vizinhança de tamanho $\epsilon > 0$ do bordo dos discos $\Delta\left(f^j(z), \delta\right)$ é uma pequena fração da medida de Lebesgue da união dos discos $\Delta\left(f^j(z), \delta\right)$. A distorção limitada implica que temos que o mesmo vale para $f_*^j Leb_D$. Portanto, assim como na prova do Lema 4.2 em [ABV00], a menos de diminuirmos ϵ, podemos assumir que

$$\sum_{z\in H_j^*} f_*^j Leb_{D(z,j,\delta)}\left(\Delta\left(f^j(z), \delta\right) \backslash \Delta_\epsilon\left(f^j(z), \delta\right)\right) \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Portanto
$$\hat{\nu}_n\left(\Lambda^f\right)-\hat{\nu}_{n,\epsilon}\left(\Lambda^f\right)\le\frac{\alpha}{2}.$$
Ou seja,
$$\hat{\nu}_{n,\epsilon}\left(\Lambda^f\right)\ge\hat{\nu}_n\left(\Lambda^f\right)-\frac{\alpha}{2}\ge\frac{\alpha}{2}.$$
O que completa a prova. □

A medida positiva do interior dos discos hiperbólicos nos garantirá que deve existir um par $(\hat{x},l)$ tal que $\pi^{-1}\left(\hat{K}_\infty(\hat{x},l)\right)$ tem medida $\hat{\nu}$ positiva, o que provamos no seguinte lema.

Lema 3.4.2. *Existe $(\hat{x},l)$ tal que $\hat{\nu}\left(\hat{K}_\infty(\hat{x},l)\right)>0$. Além disto, existe $\kappa(\hat{x},l)$ tal que $\hat{\nu}\left(\hat{K}_\infty(\hat{x},l)\right)>\kappa(\hat{x},l)$ e $\hat{\nu}_n\left(\cup_{j=0}^{n-1}\hat{K}_j(\hat{x},l)\right)>\kappa(\hat{x},l)$ para n em alguma subsequência de (n_k), onde $\hat{\nu}_{n_k}\to\hat{\nu}$.*

Demonstração. A menos de tomarmos uma subsequência de $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, podemos considerar que $\hat{\nu}_{n_k,\epsilon}$ converge a uma medida $\hat{\nu}_\epsilon$ na topologia fraca *. Pelo Lema (3.4.1) temos que $\hat{\nu}_\epsilon\left(\Lambda^f\right)\ge\frac{\alpha}{2}$. Note que $supp\left(\hat{\nu}_\epsilon\right)\subset\cap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\cup_{j=0}^{n-1}\hat{K}_{j,\epsilon}}$ e este conjunto é coberto pela união dos interiores das caixas $\pi^{-1}\left(C_r(\hat{x})\right)$. Por compacidade , existe um número finito de pontos $\hat{x}$ tal que $supp\left(\hat{\nu}_\epsilon\right)\subset\cup_{\hat{x}\in\hat{H}_\infty}\left(\pi^{-1}\left(C_r(\hat{x})\right)\right)$. Segue portanto que deve existir $\hat{x}$ tal que $\hat{\nu}_\epsilon\left(\pi^{-1}\left(C_r(\hat{x})\right)\right)>0$ e consequentemente existe $(\hat{x},l)$ e $\kappa(\hat{x},l)>0$ tal que $\hat{\nu}_\epsilon\left(\pi^{-1}\left(C_r(\hat{x},l)\right)\right)\ge\kappa(\hat{x},l)>0$.

Em virtude da escolha das caixas $C_r(\hat{x},l)$ temos que qualquer disco da construção, $\Delta\left(f^j(z),\delta\right)$ que intersecte $C_r(\hat{x},l)$ cruza $C_r(\hat{x},l)$. Isto implica que
$$\hat{\nu}_{n,\epsilon}\left(\pi^{-1}\left(C_r(\hat{x},l)\right)\right)=\hat{\nu}_{n,\epsilon}\left(\cup_{j=0}^{n-1}\hat{K}_j(\hat{x},l)\right).$$

A menos de reduzirmos $r>0$ e diminuirmos os subdiscos $\Delta_{\hat{x},l}$ de $\Delta(\hat{x})$ na escolha das caixas, podemos assumir que a medida $\hat{\nu}$ do bordo de $\pi^{-1}\left(C_r(\hat{x},l)\right)$ é zero. Como, por definição, $\hat{\nu}_\epsilon\le\hat{\nu}$ temos que:
$$\lim_{k\to\infty}\hat{\nu}_{n_k,\epsilon}\left(\pi^{-1}\left(C_r(\hat{x},l)\right)\right)=\hat{\nu}_\epsilon\left(\pi^{-1}\left(C_r(\hat{x},l)\right)\right)\ge\kappa(\hat{x},l).$$

Portanto, para todo n numa subsequência de (n_k) vale que
$$\hat{\nu}_n\left(\cup_{j=0}^{n-1}\hat{K}_j(\hat{x},l)\right)\ge\hat{\nu}_{n,\epsilon}\left(\cup_{j=0}^{n-1}\hat{K}_j(\hat{x},l)\right)\ge\kappa(\hat{x},l).$$

Note agora que
$$\limsup_{k\to\infty}\hat{\nu}_{n_k}\left(\cup_{j=0}^{n-1}\hat{K}_j(\hat{x},l)\right)\le\hat{\nu}\left(\cup_{j=0}^{n-1}\hat{K}_j(\hat{x},l)\right).$$

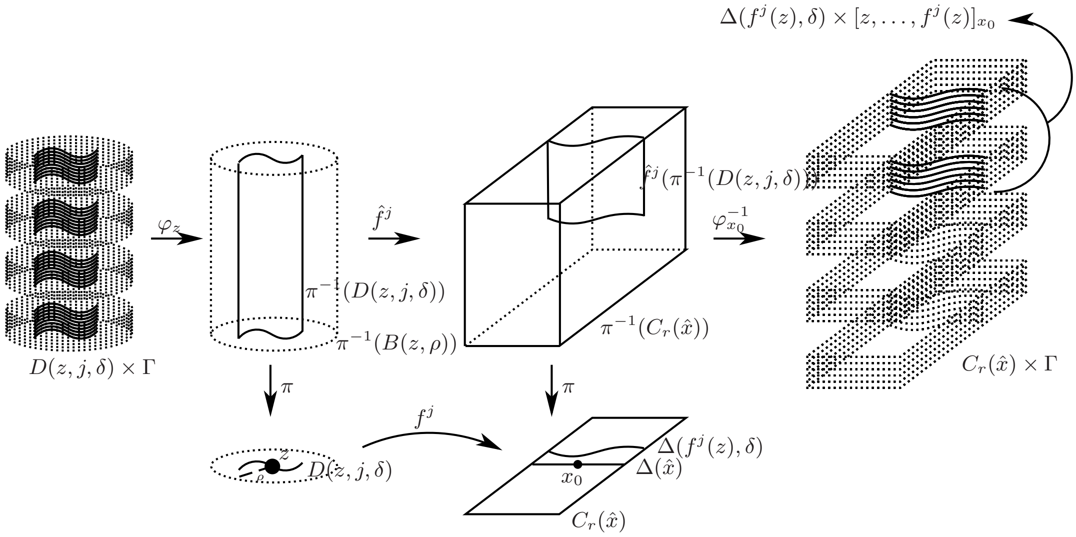

Figura 3.4.4: Representação de $\hat{f}^j\left(\pi^{-1}\left(D\left(z,j,\delta\right)\right)\right)$ em $C_r\left(\hat{x}\right)\times\Gamma$

Como $\cap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\left(\cup_{j=0}^{n-1}\hat{K}_j\left(\hat{x},l\right)\right)}\subset\hat{K}_\infty\left(\hat{x},l\right)$, segue que $\hat{\nu}\left(\hat{K}_\infty\left(\hat{x},l\right)\right)\geq\kappa\left(\hat{x},l\right)$. □

Recorreremos à estrutura local de produto dada pelo Lema 3.3.2 para entender a estrutura dos conjuntos $\hat{f}^j\left(\pi^{-1}\left(D\left(z,j,\delta\right)\right)\right)\in\hat{\mathcal{K}}_j\left(\hat{x},l\right)$.

Observação 3.4.3. Tomemos $\hat{f}^j\left(\pi^{-1}\left(D\left(z,j,\delta\right)\right)\right)\in\hat{\mathcal{K}}_j\left(\hat{x},l\right)$. Podemos utilizar o homeomorfismo φ_z para identificar o conjunto $\pi^{-1}\left(D\left(z,j,\delta\right)\right)$ com $D\left(z,j,\delta\right)\times\Gamma$. Gostaríamos de ver como representar a imagem $\hat{f}^j\left(\pi^{-1}\left(D\left(z,j,\delta\right)\right)\right)$ em termos do homeomorfismo φ_{x_0}. Observe que, $\pi^{-1}\left(D\left(z,j,\delta\right)\right)\subset M^f$ representa o conjunto $D\left(z,j,\delta\right)$ e todas as suas possíveis pré-histórias. O conjunto $\hat{f}^j\left(\hat{\pi}^{-1}\left(D\left(z,j,\delta\right)\right)\right)$ representa então as pré-órbitas de $\Delta\left(f^j\left(z\right),\delta\right)=f^j\left(D\left(z,j,\delta\right)\right)$ que contêm $D\left(z,j,\delta\right)$. Em particular, $\hat{f}^j\left(\hat{\pi}^{-1}\left(D\left(z,j,\delta\right)\right)\right)$ corresponde as pré-órbitas de $\Delta\left(f^j\left(z\right),\delta\right)$ em que fixamos as j primeiras pré imagens. Então, é fácil ver que o conjunto $\hat{f}^j\left(\hat{\pi}^{-1}\left(D\left(z,j,\delta\right)\right)\right)$ é homeomorfo a $\Delta\left(f^j\left(z\right),\delta\right)\times\left[x_{-j},...,x_{-1}\right]_{x_0}$ por φ_{x_0} , onde

$$\left[x_{-j},...,x_{-1}\right]_{x_0}:=\left\{\left(i_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}\in\Gamma:\ x_{-k}\in V_{i_k\dots i_1}\left(x_0\right),\ \text{para cada } 1\leq k\leq j\right\}.$$

Note que $\left[x_{-j},...,x_{-1}\right]_{x_0}$ é um cilindro de comprimento j em Γ.

Dado $j\in\mathbb{N}$ e $z\in H_j^*$, se $\Delta\left(f^j\left(z\right),\delta\right)\subset B\left(x,\rho\right)$ denotaremos :

$$\left[z,f\left(z\right),...,f^j\left(z\right)\right]_x:=\left\{\left(i_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\in\Gamma:\ f^{j-k}\left(z\right)\in V_{i_n i_{n-1}\dots i_1}\left(x\right),\ 0\leq k\leq j\right\}.$$

Ou seja, o conjunto $\left[z,f\left(z\right),...,f^j\left(z\right)\right]_x$ das pré-histórias de x tais que

$$f^{j-k}\left(z\right)=f^{-k}\left(f^j\left(z\right)\right),$$

para todo $1 \leq k \leq j$. Note que este conjunto é um cilindro de comprimento j em Γ.

A observação 3.4.3 nos diz que se $\hat{f}^j\left(\pi^{-1}\left(D\left(z,j,\delta\right)\right)\right) \in \hat{K}_j\left(\hat{x},l\right)$, podemos identificá-lo com $\Delta\left(f^j\left(z\right),\delta\right) \times \left[z, f\left(z\right), ..., f^j\left(z\right)\right]_{x_0}$.

Queremos ver que $\hat{\nu}\mid_{\hat{K}_\infty(\hat{x},l)}$ tem desintegração absolutamente contínua com respeito a Lebesgue. Antes de enunciarmos e provarmos tal resultado, vamos construir um espaço auxiliar e uma sequência de partições que nos permitirá estudar um elemento $\hat{\nu}_{\hat{\Delta}}$ da desintegração de $\hat{\nu}$ em termos da sequência de medidas $\left(\hat{\nu}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Fixemos um par $\left(\hat{x},l\right)$ tal que $\hat{\nu}\left(\hat{K}_\infty\left(\hat{x},l\right)\right) > 0$. Tal par existe pelo Lema 3.4.2. Lembremos que $\hat{K}_\infty\left(\hat{x},l\right)$ é a família de conjuntos que se projetam bijetivamente sobre discos que cruzam $C_r\left(\hat{x},l\right)$ e que são obtidos como acumulação dos discos hiperbólicos. Por construção os elementos de $\hat{\mathcal{K}}_\infty\left(\hat{x},l\right)$ são obtidos como acumulação de $\hat{f}^j\left(\pi^{-1}\left(D\left(z,j,\delta\right)\right)\right)$, onde $\Delta\left(f^j\left(z\right),\delta\right) = f^j\left(D\left(z,j,\delta\right)\right)$ cruza $C_r\left(\hat{x},l\right)$. Por acumulação aqui entendemos que para cada $\hat{x} \in \hat{\Delta} \in \hat{\mathcal{K}}_\infty\left(\hat{x},l\right)$ existe uma sequência $\left(\hat{y}_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\hat{y}_{n_k} \in \hat{f}^{n_k}\left(\pi^{-1}\left(D\left(z_{n_k},n_k,\delta\right)\right)\right)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, n_k é crescente e tende a infinito quando k vai a infinito e $\lim_{k\to\infty}\hat{y}_{n_k} = \hat{x}$.

Por simplicidade, omitiremos o par $\left(\hat{x},l\right)$ na notação dos conjuntos $\hat{\mathcal{K}}_j\left(\hat{x},l\right)$ e $\hat{K}_j\left(\hat{x},l\right)$ para $j \in \overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definidos por (3.4.3) e (3.4.4) e o conjunto $C_r\left(\hat{x},l\right)$ definido por (3.4.2) . Denotaremos ainda $\hat{x} = \left(x_{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\hat{\Delta} := \hat{\Delta}\left(\hat{x}\right)$ e $\Delta := \Delta\left(\hat{x}\right)$.

Definamos $K^\dagger := \bigcup_{j\in\overline{\mathbb{N}}}\hat{K}_j \times \{j\}$. Então um elemento de $K^\dagger$ é um par $\left(\hat{a},m\right)$ em que $\hat{a} \in \hat{f}^m\left(\pi^{-1}\left(D\left(z,m,\delta\right)\right)\right)$ para algum $z \in H_m^*$. Como observamos anteriormente temos que $\hat{f}^m\left(\pi^{-1}\left(D\left(z,m,\delta\right)\right)\right) = \varphi_{x_0}\left(\Delta\left(f^m\left(z\right),\delta\right) \times \left[z,\ldots,f^m\left(z\right)\right]_{x_0}\right)$ onde $\left[z,\ldots,f^m\left(z\right)\right]_{x_0}$ é um cilindro de comprimento m em $\Gamma = \{1,\ldots,d\}^{\mathbb{N}^*}$. Como φ_{x_0} é um homeomorfismo, a cada $\hat{a} \in \hat{f}^m\left(\pi^{-1}\left(D\left(z,m,\delta\right)\right)\right)$ está associado um único para $\left(a,\lambda\right) \in \Delta\left(f^m\left(z\right),\delta\right) \times \left[z,\ldots,f^m\left(z\right)\right]_{x_0}$ tal que $\varphi_{x_0}\left(a,\lambda\right) = \hat{a}$ e $a = \pi\left(\hat{a}\right)$. Então, a menos da identificação por φ_{x_0}, podemos escrever um elemento $\left(\hat{a},m\right) \in K^\dagger$ como uma tripla $\left(a,\lambda,m\right) \in \Delta\left(f^m\left(z\right),\delta\right) \times \left[z,\ldots,f^m\left(z\right)\right]_{x_0} \times \mathbb{N}$ em que $\varphi_{x_0}\left(a,\lambda\right) = \hat{a}$.

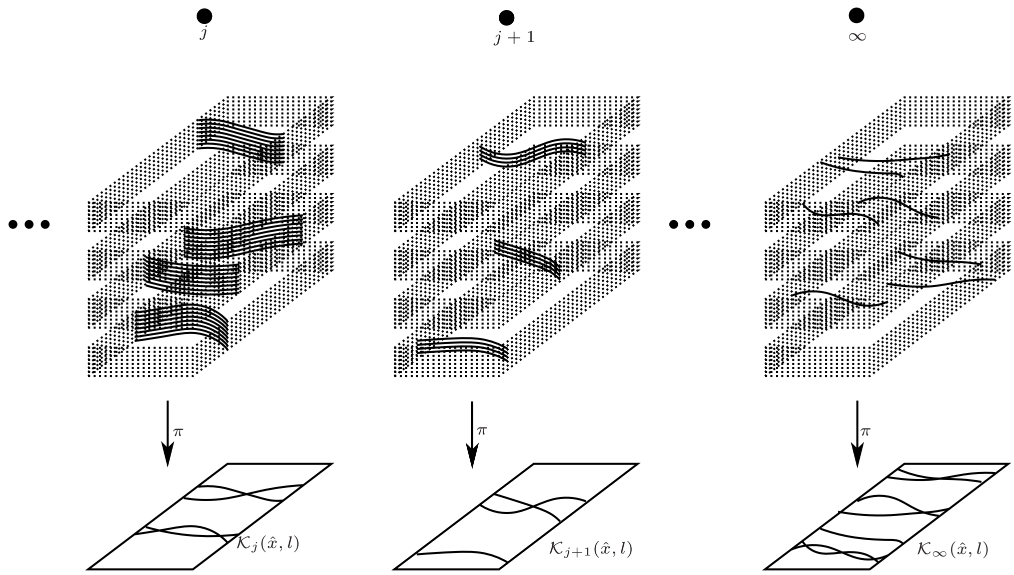

Figura 3.4.5: O espaço $K^\dagger$

Em paralelo à construção das medidas $\hat{\nu}_m$, definamos agora, para cada $m \in \mathbb{N}$, a medida $\xi_m^\dagger$ em $K^\dagger$ dada por:

$$\xi_m^\dagger \left(\bigcup_{j \in \overline{\mathbb{N}}} \hat{A}_j \times \{j\} \right) := \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \hat{f}_*^j \hat{m}_j \left(\hat{A} \right).$$

Observe que tais medidas estão bem definidas para todo $m \in \mathbb{N}$ uma vez que, por definição de $K^\dagger$, se $\bigcup_{j \in \overline{\mathbb{N}}} \hat{A}_j \times \{j\}$ é um subconjunto de $K^\dagger$ então $\hat{A}_j \subset \hat{K}_j$ e $\hat{f}_*^j \hat{m}_j$ está suportada em $\hat{K}_j$. Note ainda que dado qualquer conjunto $\hat{A} \subset \hat{C}_r$ temos que

$$\hat{\nu}_m \left(\hat{A} \right) = \hat{\nu}_m \left(\bigcup_{j=0}^{m-1} \hat{A} \cap \hat{K}_j \right) = \xi_m^\dagger \left(\bigcup_{j=0}^{m-1} \left(\hat{A} \cap \hat{K}_j \right) \times \{j\} \right)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Em particular, isto implica que $\xi_m^\dagger \left(K^\dagger \right) > 0$ para alguma subsequência dos naturais conforme Lema 3.4.2. Assim sendo, existe um ponto de acumulação da sequência $\left(\xi_m^\dagger \right)_{m \in \mathbb{N}}$ que é uma medida positiva $\xi^\dagger$ cujo suporte está contido em $\hat{K}_\infty \times \{\infty\} \subset K^\dagger$. Além disto, $\xi^\dagger \left(\hat{B} \times \{\infty\} \right) = \hat{\nu} \left(\hat{B} \right)$, para todo $\hat{B} \subset \hat{K}_\infty$.

Mostraremos então que $\xi^\dagger$ tem desintegração absolutamente contínua com respeito a Lebesgue relativamente à partição $\left\{ \hat{\Delta} \times \{\infty\} \right\}_{\hat{\Delta} \in \hat{\mathcal{K}}_\infty}$ de $\hat{K}_\infty \times \{\infty\}$ para concluirmos que o mesmo vale para $\hat{\nu}$. A desintegração de $\xi^\dagger$ ser absolutamente contínua com respeito a Lebesgue corresponde a dizer que $p_*^\dagger \xi_{\hat{\Delta} \times \{\infty\}}^\dagger \ll Leb_{\pi(\hat{\Delta})}$ onde $p^\dagger : K^\dagger \to \Delta$, dada por $p^\dagger (a, \lambda, n) = H^s (a)$ e H^s é a holonomia por variedades estáveis em C_r. Para vermos tal propriedade, vamos definir uma sequência crescente $\{\mathcal{P}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de partições enumeráveis de $K^\dagger$ que será geradora para $\left\{ \hat{\Delta} \times \{\infty\} \right\}_{\hat{\Delta} \in \hat{\mathcal{K}}_\infty}$.

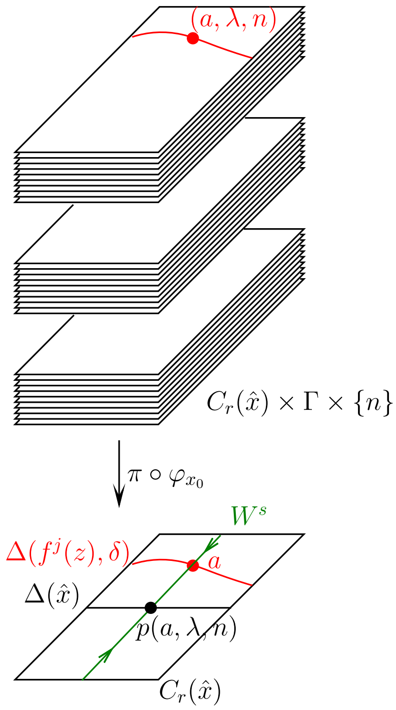

Figura 3.4.6: Projeção $p^{\dagger}$

Lembremos que podemos identificar $\pi^{-1}(C_r)$ com $C_r \times \Gamma$ pelo homeomorfismo φ_{x_0}. Consideremos $z' \in \Delta_*$ e seja $W_r^s(z')$ a variedade estável local de z'. Tomemos $(\mathcal{W}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de partições enumeráveis de $W_r^s(z')$ cujo diâmetro tende a zero quando k tende a infinito. Fixemos também a sequência $(\Gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de partições de Γ em que cada Γ_k é a partição por cilindros de comprimento k em Γ. Observe que $(\Gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de partições enumeráveis de Γ com diâmetro tendendo a zero quando k tende a infinito. Assim $(\mathcal{W}_k \times \Gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de partições enumeráveis de $W_r^s(z') \times \Gamma$ cujo diâmetro também vai a zero quando k tende a infinito, conforme Figura 3.4.7. Logo, $\bigvee_{j=0}^{\infty} \mathcal{W}_k \times \Gamma_k$ é a partição de $W_r^s(z') \times \Gamma$ por pontos.

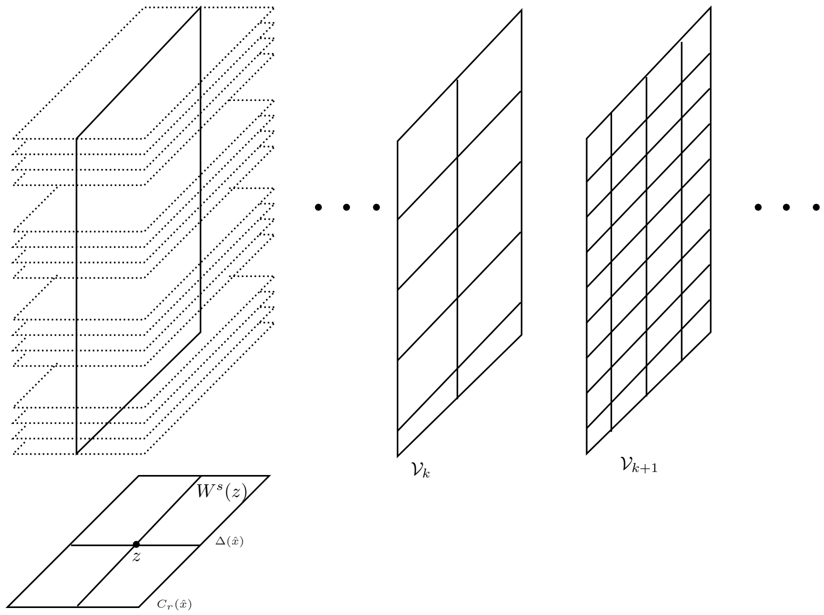

Figura 3.4.7: Sequência de partições $(\mathcal{W}_k \times \Gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, agruparemos os elementos de $\hat{\mathcal{K}}_j$ que intersectam o mesmo átomo de $\mathcal{W}_k \times \Gamma_k$ para construir a partição $\mathcal{P}_k$. Os átomos de $\mathcal{P}_k$ consistirão de união de elementos de $\hat{\mathcal{K}}_j$ que intersectam o mesmo átomo de $\mathcal{W}_k \times \Gamma_k$ para $j < k$ fixado e da união de elementos de $\hat{\mathcal{K}}_j$, para todo $j \geq k$, que intersectam o mesmo átomo de $\mathcal{W}_k \times \Gamma_k$.

Definimos assim a partição $\mathcal{P}_k$ de $K^\dagger$ dizendo que $(a, \lambda, n) \in K^\dagger$ e $(b, \sigma, m) \in K^\dagger$pertencem ao mesmo átomo de $\mathcal{P}_k$ se as seguintes condições são satisfeitas:

1. existem y e z tais que $a \in \Delta\left(f^n\left(y\right), \delta\right)$ e $b \in \Delta\left(f^m\left(z\right), \delta\right)$ e os discos $\Delta\left(f^m\left(y\right), \delta\right)$ e $\Delta\left(f^m\left(z\right), \delta\right)$ intersectam o mesmo átomo de $\mathcal{W}_k$;

2. λ e σ pertencem ao mesmo átomo de Γ_k;

3. $[m \geq k$ e $n \geq k]$ ou $m = n < k$.

Observe que, como $\Delta\left(f^m\left(y\right), \delta\right)$ e $\Delta\left(f^m\left(z\right), \delta\right)$ cruzam C_r então a interseção destes com $W_r^s\left(z'\right)$ nunca é vazia. As condições 1,2 e 3 acima definem uma relação de equivalência em $K^\dagger$ o que implica que $\mathcal{P}_k$ é uma partição de $K^\dagger$.

Afirmamos que os átomos de $\mathcal{P}_k$ são uniões de produtos de discos hiperbólicos por cilindros em Γ pelos tempos hiperbólicos correspondentes (figuras 3.4.8 e 3.4.9). De fato, tomemos $(a, \lambda, m) \in K^\dagger$. Suponhamos $m < k$. Então $(a, \lambda) \in \Delta\left(f^m\left(z\right), \delta\right) \times [z, ..., f^m\left(z\right)]_{x_0}$ para algum $z \in H_m^*$. Denotemos por $\mathcal{P}_k\left(a, \lambda, m\right)$ o átomo de $\mathcal{P}_k$ que contém (a, λ, m). É imediato da definição da partição $\mathcal{P}_k$ que

$$\Delta\left(f^m\left(z\right), \delta\right) \times \left([z, ..., f^m\left(z\right)]_{x_0} \cap \Gamma_k\left(\lambda\right)\right) \times \{m\} \subset \mathcal{P}_k\left(a, \lambda, m\right),$$

onde $\Gamma_k(\lambda)$ é o átomo da partição Γ_k que contém λ. Ora, mas $\Gamma_k(\lambda)$ é um cilindro de comprimento $k > m$ que tem interseção não vazia com o cilindro $[z, ..., f^m(z)]_{x_0}$ de comprimento m. Logo $[z, ..., f^m(z)]_{x_0} \supset \Gamma_k(\lambda)$ e $[z, ..., f^m(z)]_{x_0} \cap \Gamma_k(\lambda) = \Gamma_k(\lambda)$. Portanto

$$\Delta(f^m(z), \delta) \times \Gamma_k(\lambda) \times \{m\} \subset \mathcal{P}_k(a, \lambda, m).$$

Observe ainda que $(y, \sigma, n) \in \mathcal{P}_k(a, \lambda, m)$ se, e somente se:

- $y \in \Delta(f^n(w), \delta)$ para algum $w \in H_n^*$ e $\Delta(f^n(w), \delta)$ e $\Delta(f^m(z), \delta)$ intersectam o mesmo átomo de $\mathcal{W}_k$;
- $\sigma \in \Gamma_k(\lambda)$;
- $m = n$.

Então $\Delta(f^m(w), \delta) \times \Gamma_k(\lambda) \times \{m\} \subset \mathcal{P}_k(a, \lambda, m)$. Concluímos então que, caso $m < k$,

$$\mathcal{P}_k(a, \lambda, m) = \bigcup_w \Delta(f^m(w), \delta) \times \Gamma_k(\lambda) \times \{m\}$$

em que a união percorre $w \in H_m^*$ tal que $\Delta(f^m(w), \delta)$ e $\Delta(f^m(z), \delta)$ intersectam o mesmo átomo de $\mathcal{W}_k$ e $[w, \ldots, f^m(w)]_{x_0}$ tem interseção não vazia com $\Gamma_k(\lambda)$.

Suponhamos agora $(a, \lambda, m) \in K^\dagger$ com $m \geq k$. Observamos inicialmente, que como no caso anterior temos que $(a, \lambda) \in \Delta(f^m(z), \delta) \times [z, ..., f^m(z)]_{x_0}$ para algum $z \in H_m^*$. Novamente é imediato da definição que

$$\Delta(f^m(z), \delta) \times \left([z, ..., f^m(z)]_{x_0} \cap \Gamma_k(\lambda)\right) \times \{m\} \subset \mathcal{P}_k(a, \lambda, m).$$

Mas, como assumimos que $m \geq k$, $[z, ..., f^m(z)]_{x_0} \cap \Gamma_k(\lambda) = [z, ..., f^m(z)]_{x_0}$. Então $\Delta(f^m(z), \delta) \times [z, ..., f^m(z)]_{x_0} \times \{m\} \subset \mathcal{P}_k(a, \lambda, m)$. Os mesmo argumentos anteriores mostram que

$$\mathcal{P}_k(a, \lambda, m) = \bigcup_{j \geq k} \bigcup_{w_j} \Delta\left(f^j(w_j), \delta\right) \times \left[w_j, ..., f^j(w_j)\right]_{x_0} \times \{j\} \cup \left(\bigcup_{\hat{x}} \Delta(\hat{x}) \times \{\sigma\} \times \{\infty\}\right)$$

onde a união em w_j se dá sobre todos $w_j \in H_j^*$ tal que $\Delta(f^j(w_j), \delta)$ e $\Delta(f^m(z), \delta)$ intersectam o mesmo átomo de $\mathcal{W}_k$ e $[w_j, ..., f^j(w_j)]_{x_0}$ tem interseção não vazia com $\Gamma_k(\lambda)$ e a união em $\hat{x}$ percorre os pontos $\hat{x}$ tais que $\Delta(\hat{x})$ e $\Delta(f^m(z), \delta)$ intersectam o mesmo átomo de $\mathcal{W}_k$ e $\sigma \in \Gamma_k(\lambda)$.

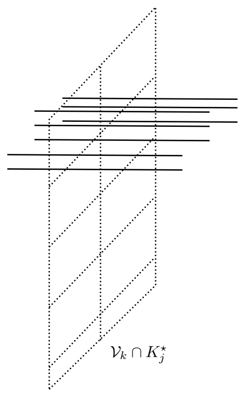

Figura 3.4.8: Átomo da partição $\mathcal{P}_k$ que contém $(\hat{u}, j)$ com $j < k$.

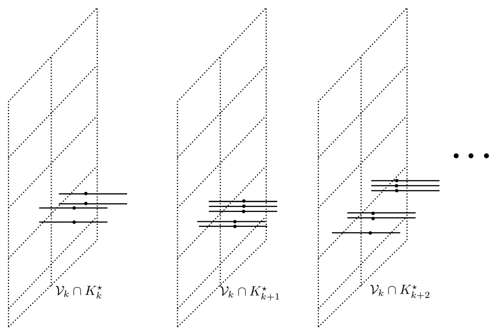

Figura 3.4.9: Átomo da partição $\mathcal{P}_k$ que contém $(\hat{u}, j)$ com $j \geq k$.

É fácil ver que, como o diâmetro da partição $\mathcal{W}_k \times \Gamma_k$ vai a zero quando k tende a infinito, vale a propriedade encaixante:

$$\mathcal{P}_1(a, \lambda, n) \supset \mathcal{P}_2(a, \lambda, n) \supset \cdots \supset \mathcal{P}_k(a, \lambda, n) \supset \ldots$$

e $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_k(a, \lambda, n) = \Delta(f^n(z), \delta) \times \{\lambda\} \times \{n\}$ onde $a \in \Delta(f^n(z), \delta)$. Em particular dado (a, λ, ∞) temos que $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_k(a, \lambda, \infty) = \Delta(\hat{y}) \times \{\lambda\} \times \{\infty\}$ onde $a \in \Delta(\hat{y})$.

Enunciemos então o resultado principal desta seção:

Teorema 3.4.4. *Se $(\hat{x}, l)$ é como no Lema 3.4.2 então existe $C_3 > 1$ e uma família de medidas condicionais $(\hat{\nu}_{\hat{\Delta}})_{\hat{\Delta} \in \hat{\mathcal{K}}_\infty(\hat{x}, l)}$ de $\hat{\nu}|_{\hat{K}_\infty(\hat{x}, l)}$ tal que $\pi_* \hat{\nu}_{\hat{\Delta}} \ll Leb_\Delta \left(\Delta = \pi\left(\hat{\Delta}\right)\right)$ e*

$$\frac{1}{C_3} Leb_\Delta(B) \leq \pi_* \hat{\nu}_{\hat{\Delta}}(B) \leq C_3 Leb_\Delta(B)$$

para todo $B \subset \Delta$ mensurável, para quase todo $\hat{\Delta} \in \hat{\mathcal{K}}_\infty(\hat{x}, l)$.

Demonstração. Fixemos $(\hat{x}, l)$ dado pelo Lema 3.4.2, ou seja, tal que $\hat{K}_\infty(\hat{x}, l)$ tem $\hat{\nu}$-

medida positiva. Considere o espaço $K^\dagger$ e a sequência de medidas $\left(\xi_m^\dagger\right)_{m\in\mathbb{N}}$ dadas por

$$\xi_m^\dagger\left(\bigcup_{j\in\overline{\mathbb{N}}}\hat{A}_j\times\{j\}\right):=\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\hat{f}_*^j\hat{m}_j\left(\hat{A}\right),$$

para cada $m\in\mathbb{N}$, definidos previamente. Consideremos a projeção $p^\dagger:K^\dagger\to\Delta_*$ que a cada $(a,\lambda,n)\in K^\dagger$ associa a projeção de $a$pela holonomia estável H^s, ou seja, $p^\dagger(a,\lambda,n)=H^s(a)$.

Lembremos que estamos considerando o levantamento da medida de Lebesgue nos pré-discos hiperbólicos dado por (3.3.1) na página 49, onde $\mathbb{P}$ é uma probabilidade no conjunto de Cantor Γ fixada.

Para provarmos o teorema basta mostrarmos que existe uma constante $C>1$, tal que dado qualquer mensurável $B\subset\Delta$, $k\geq 1$ e $\zeta^\dagger\in K^\dagger$ e $n\geq 1$:

$$C^{-1}\xi_n^\dagger\left(\mathcal{P}_k\left(\zeta^\dagger\right)\right)Leb_\Delta(B)\leq\xi_n^\dagger\left(\left(p^\dagger\right)^{-1}(B)\cap\mathcal{P}_k\left(\zeta^\dagger\right)\right)\leq C\xi_n^\dagger\left(\mathcal{P}_k\left(\zeta^\dagger\right)\right)Leb_\Delta(B).$$

É importante notar que as estimativas acima independem da escolha da probabilidade $\mathbb{P}$.

De fato, fixando $B\subset\Delta$ um conjunto mensurável podemos escrever $\mathcal{P}_k\left(\zeta^\dagger\right)$ como a união de $\Delta\left(f^j(z),\delta\right)\times\Omega(z,k)\times\{j\}$, onde, ou

$$\Omega(z,k)=\left[z,\ldots,f^j(z)\right]_{x_0}$$

ou

$$\Omega(z,k)=\Gamma_k(\lambda)$$

em que $\zeta^\dagger=(a,\lambda,n)$. Em ambos os casos, $\Omega(z,k)$ é um cilindro em Γ. Então temos que:

$$\xi_n^\dagger\left(\mathcal{P}_k\left(\zeta^\dagger\right)\right)=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_z\hat{f}_*^j\hat{m}_{j,z}\left(\varphi_{x_0}\left(\Delta\left(f^j(z),\delta\right)\times\Omega(z,k)\right)\right). \tag{3.4.7}$$

onde a soma se dá sobre os pontos z tais que $\Delta\left(f^j(z),\delta\right)\times\Omega(z,k)\times\{j\}\subset\mathcal{P}_k\left(\zeta^\dagger\right)$. O somando da expressão acima é igual a:

$$\left(Leb_{D(z,j,\delta)}\times\mathbb{P}\right)\left(\varphi_z^{-1}\circ\hat{f}^{-j}\circ\varphi_{x_0}\left(\Delta\left(f^j(z),\delta\right)\times\Omega_{x_0}(z,k)\right)\right). \tag{3.4.8}$$

Usando o raciocínio da Observação 3.4.3, é fácil ver que

$$\varphi_z^{-1}\circ\hat{f}^{-j}\circ\varphi_{x_0}\left(\Delta\left(f^j(z),\delta\right)\times\Omega_{x_0}(z,k)\right)=D(z,j,\delta)\times\Omega_z,$$

com Ω_z ainda um cilindro em Γ.

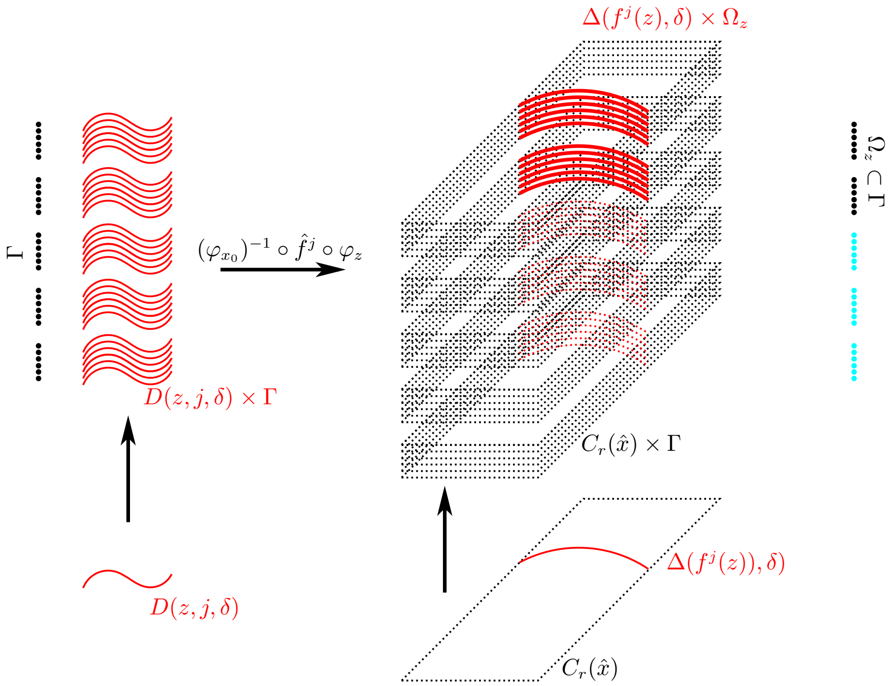

Figura 3.4.10: Mudança de cilindros.

Então a expressão (3.4.8) é igual a:

$$\begin{aligned}\left(Leb_{D(z,j,\delta)}\times\mathbb{P}\right)\left(D\left(z,j,\delta\right)\times\Omega_z\right) &= Leb_{D(z,j,\delta)}\left(D\left(z,j,\delta\right)\right)\cdot\mathbb{P}\left(\Omega_z\right)\\ &= f_*^j Leb_{D(z,j,\delta)}\left(\Delta\left(f^j\left(z\right),\delta\right)\right)\cdot\mathbb{P}\left(\Omega_z\right).\end{aligned}$$

Segue então que

$$\hat{f}_*^j\hat{m}_{j,z}\left(\varphi_{x_0}\left(\Delta\left(f^j\left(z\right),\delta\right)\times\Omega_{x_0}\left(z,k\right)\right)\right)=f_*^j Leb_{D(z,j,\delta)}\left(\Delta\left(f^j\left(z\right),\delta\right)\right)\cdot\mathbb{P}\left(\Omega_z\right). \quad (3.4.9)$$

Denotemos por $H^s_{f^j(z)}$ a restrição de H^s ao disco hiperbólico $\Delta\left(f^j\left(z\right),\delta\right)$. Como $\left(H^s_{f^j(z)}\right)^{-1}(B)\subset\Delta\left(f^j\left(z\right),\delta\right)$, não é difícil ver que as propriedades acima valem substituindo $\Delta\left(f^j\left(z\right),\delta\right)$ por $\left(H^s_{f^j(z)}\right)^{-1}(B)$, com os mesmos subconjuntos de Γ, portanto,

$$\hat{f}_*^j\hat{m}_{j,z}\left(\varphi_{x_0}\left(\left(H^s_{f^j(z)}\right)^{-1}(B)\times\Omega_{x_0}\left(z,k\right)\right)\right)=f_*^j Leb_{D(z,j,\delta)}\left(\left(H^s_{f^j(z)}\right)^{-1}(B)\right)\cdot\mathbb{P}\left(\Omega_z\right). \quad (3.4.10)$$

A propriedade de distorção limitada dada pela Proposição 3.1.14 nos fornece uma constante $T_1>1$ tal que

$$T_1^{-1}Leb_{\Delta(f^j(z),\delta)}\left(\left(H^s\right)^{-1}(B)\right)\leq f_*^j Leb_{D(z,j,\delta)}\left(\left(H^s\right)^{-1}(B)\right)\leq T_1 Leb_{\Delta(f^j(z),\delta)}\left(\left(H^s\right)^{-1}(B)\right).$$

Como pode ser visto em [QXZ09, Teorema V.8.1] a holonomia estável $H^s_{f^j(z)}$ é absolutamente contínua e tem jacobiano afastado de zero e infinito o que implica que existe uma constante $T_2 > 1$ satisfazendo:

$$T_2^{-1} Leb_\Delta\left(B\right) \leq Leb_{\Delta(f^j(z),\delta)}\left(\left(H^s\right)^{-1}\left(B\right)\right) \leq T_2 Leb_\Delta\left(B\right).$$

Portanto

$$T_1^{-1}T_2^{-1} Leb_\Delta\left(B\right) \leq f^j_* Leb_{D(z,j,\delta)}\left(\left(H^s\right)^{-1}\left(B\right)\right) \leq T_1 T_2 Leb_\Delta\left(B\right).$$

Nos argumentos acima, substituindo B por Δ_*, obtemos que

$$T_1^{-1}T_2^{-1} Leb_\Delta\left(\Delta\right) \leq f^j_* Leb_{D(z,j,\delta)}\left(\Delta\left(f^j\left(z\right),\delta\right)\right) \leq T_1 T_2 Leb_\Delta\left(\Delta\right).$$

Assim o quociente

$$\frac{\hat{f}^j_* \hat{m}_{j,z}\left(\varphi_{x_0}\left(\left(H^s_{f^j(z)}\right)^{-1}\left(B\right)\times\Omega_{x_0}\left(z,k\right)\right)\right)}{\hat{f}^j_* \hat{m}_{j,z}\left(\varphi_{x_0}\left(\Delta\left(f^j\left(z\right),\delta\right)\times\Omega_{x_0}\left(z,k\right)\right)\right)} = \frac{f^j_* Leb_{D(z,j,\delta)}\left(\left(H^s_{f^j(z)}\right)^{-1}\left(B\right)\right)}{f^j_* Leb_{D(z,j,\delta)}\left(\Delta\left(f^j\left(z\right),\delta\right)\right)}$$

tem cotas superiores e inferiores dadas por

$$C_*^{-1}\frac{Leb_\Delta\left(B\right)}{Leb_\Delta\left(\Delta\right)} \leq \frac{\hat{f}^j_* \hat{m}_{j,z}\left(\varphi_{x_0}\left(\left(H^s\right)^{-1}\left(B\right)\times\Omega_{x_0}\left(z,k\right)\right)\right)}{\hat{f}^j_* \hat{m}_{j,z}\left(\varphi_{x_0}\left(\Delta\left(f^j\left(z\right),\delta\right)\times\Omega_{x_0}\left(z,k\right)\right)\right)}$$

e

$$\frac{\hat{f}^j_* \hat{m}_{j,z}\left(\varphi_{x_0}\left(\left(H^s\right)^{-1}\left(B\right)\times\Omega_{x_0}\left(z,k\right)\right)\right)}{\hat{f}^j_* \hat{m}_{j,z}\left(\varphi_{x_0}\left(\Delta\left(f^j\left(z\right),\delta\right)\times\Omega_{x_0}\left(z,k\right)\right)\right)} \leq C_*\frac{Leb_\Delta\left(B\right)}{Leb_\Delta\left(\Delta\right)}$$

onde $C_* = (T_1T_2)^2$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\xi^\dagger_n\left(\left(p^\dagger\right)^{-1}\left(B\right)\cap\mathcal{P}_k\left(\zeta^\dagger\right)\right) &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_z \hat{f}^j_* \hat{m}_{j,z}\left(\varphi_{x_0}\left(\left(H^s\right)^{-1}\left(B\right)\times\Omega_{x_0}\left(z,k\right)\right)\right)\\
&\leq C_*\frac{Leb_\Delta\left(B\right)}{Leb_\Delta\left(\Delta\right)}\frac{1}{n}\sum_{j,z}\hat{f}^j_* \hat{m}_{j,z}\left(\varphi_{x_0}\left(\Delta\left(f^j\left(z\right),\delta\right)\times\Omega_{x_0}(z,k)\right)\right)\\
&= C_*\frac{Leb_\Delta\left(B\right)}{Leb_\Delta\left(\Delta\right)}\xi^\dagger_n\left(\mathcal{P}^\dagger_k\left(\zeta^\dagger\right)\right).
\end{aligned}$$

Analogamente

$$C_*^{-1}\frac{Leb_{\Delta_*}\left(B\right)}{Leb_{\Delta_*}\left(\Delta_*\right)}\xi^\dagger_n\left(\mathcal{P}^\dagger_k\left(\zeta^\dagger\right)\right) \leq \xi^\dagger_n\left(\left(p^\dagger\right)^{-1}\left(B\right)\cap\mathcal{P}_k\left(\zeta^\dagger\right)\right).$$

Findamos então a prova da afirmação pondo $C_3 = \frac{C_*}{Leb_\Delta(\Delta)}$.

Para concluirmos a prova do Teorema observe que se $\lim_{k\to\infty} \hat{\nu}_{n_k} = \hat{\nu}$ na topologia fraca$*$, também existe o limite $\lim_{k\to\infty} \xi^\dagger_{n_k} = \xi^\dagger$ e $supp\left(\xi^\dagger\right) \subset \cup_{\hat{\Delta}\in\hat{K}_\infty} \hat{\Delta} \times \{\infty\}$. Temos ainda que $\xi^\dagger (\Upsilon \times \{\infty\}) = \hat{\nu}(\Upsilon)$. Escolhendo $\left(\hat{\zeta}, \infty\right) \in K^\dagger$ na afirmação anterior, já vimos que $\cap_k \mathcal{P}_k \left(\hat{\zeta}, \infty\right) = \hat{\Delta} \times \{\infty\}$ com $\hat{\Delta} \times \{\infty\}$ contendo ζ. Então, fazendo o n tender a infinito temos que

$$C^{-1} Leb_\Delta (B) \leq \frac{\xi^\dagger \left(\left(p^\dagger\right)^{-1}(B) \cap \mathcal{P}_k\left(\hat{\zeta}, \infty\right)\right)}{\xi^\dagger\left(\mathcal{P}_k\left(\hat{\zeta}, \infty\right)\right)} \leq C Leb_\Delta (B).$$

Ou seja, a medida condicional de $\xi^\dagger$ em $\hat{\Delta} \times \{\infty\}$ é absolutamente contínua com respeito a Leb_Δ. Daí $\pi_* \hat{\nu}_{\hat{\Delta}} \ll Leb_\Delta$ provando o teorema. □

3.5 Finitude e unicidade de medidas ergódicas

Construímos uma medida μ obtida como ponto de acumulação das médias Césaro da medida de Lebesgue num disco D tangente ao campo de cones C_a, que é não uniformemente expansor em um subconjunto $H \subset U$, vizinhança do atrator Λ. Ainda, D satisfaz que $Leb_D (H) > 0$. Em outras palavras, existe uma medida f-invariante:

$$\mu = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} f_*^j Leb_D,$$

para alguma subsequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{N}$ com $n_k \to \infty$ quando $k \to \infty$. Mais ainda, se

$$\nu = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} f_*^j Leb_{\mathcal{D}_j},$$

é como em 3.2.1 na página 43 podemos escrever $\mu = \nu + \eta$, onde $\eta = \mu - \nu$.

A medida ν admite um levantamento $\hat{\nu}$ em M^f e existe um conjunto $\hat{K}_\infty \subset M^f$ composto por conjuntos instáveis (conjuntos que projetam-se pela projeção natural em variedades instáveis) tal que $\hat{\nu}$ satisfaz $\pi_* \hat{\nu}_{\hat{\Delta}} \ll Leb_{\pi(\hat{\Delta})}$ para todo $\hat{\Delta} \in \hat{K}_\infty$, em que $\{\hat{\nu}_{\hat{\Delta}}\}_{\hat{\Delta}\in\hat{K}_\infty}$ é um sistema condicional de medidas com respeito a $\hat{K}_\infty$. Esta propriedade nos permitirá extrair uma componente ergódica da medida $\hat{\mu}$ com a propriedade SRB.

Seja, $R\left(\hat{f}\right)$ o conjunto de pontos em que a média de Birkhoff passadas e futuras coincidem, ou seja,

$$R\left(\hat{f}\right) := \left\{\hat{z} \in M^f : \text{ existe } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}\left(\hat{f}^{-j}(\hat{z})\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}\left(\hat{f}^{j}(\hat{z})\right)\right\}.$$

Como consequência do Teorema Ergódico de Birkhoff, temos que $R\left(\hat{f}\right)$ tem medida total, conforme[Mañ87, Corolário II.1.4].

Lembremos que dada uma partição $\mathcal{P}$, mensurável com respeito a uma medida boreliana μ, denotamos por $\tilde{\mu}$ a medida quociente induzida por $\mathcal{P}$.

Lema 3.5.1. *Para $\tilde{\nu}$ quase todo $\Delta \in \mathcal{K}_\infty$ e todo $\phi \in C(M)$ existe $L_\Delta(\phi) \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \phi\left(f^j(x)\right) = L_\Delta(\phi)$ para Leb_Δ quase todo $x \in \Delta$.*

Demonstração. Como $\hat{\mu}\left(R\left(\hat{f}\right)\right) = 1$ devemos ter que $\hat{\nu}\left(M^f \backslash R\left(\hat{f}\right)\right) = 0$. Em particular, para quase todo $\hat{\Delta} \in \hat{\mathcal{K}}_\infty$ temos que $\hat{\nu}_{\hat{\Delta}}\left(M^f \backslash R\left(\hat{f}\right)\right) = 0$. Caso contrário existiria um subconjunto $\mathcal{K}'$ de $\hat{\mathcal{K}}_\infty$ com medida positiva tal que $\hat{\nu}_{\hat{\Delta}}\left(M^f \backslash R\left(\hat{f}\right)\right) > 0$ para todo $\hat{\Delta} \in \mathcal{K}'$. Mas então $\hat{\nu}\left(M^f \backslash R\left(\hat{f}\right)\right) \geq \int_{\mathcal{K}'} \hat{\nu}_{\hat{\Delta}}\left(M^f \backslash R\left(\hat{f}\right)\right) d\tilde{\hat{\nu}} > 0$. Este argumento garante que para quase todo $\hat{\Delta} \in \hat{\mathcal{K}}_\infty$ temos que $\hat{\nu}_{\hat{\Delta}}$ quase todo $\hat{x} \in \hat{\Delta}$ pertence a $R\left(\hat{f}\right)$.

Seja $\hat{\Delta} \in \hat{\mathcal{K}}_\infty$. Considere

$$R_{\hat{\Delta}}\left(\hat{f}\right) := \left\{\hat{z} \in \hat{\Delta} : \text{ existe } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}\left(\hat{f}^{-j}(\hat{z})\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}\left(\hat{f}^{j}(\hat{z})\right)\right\}.$$

Como vimos $\hat{\nu}_{\hat{\Delta}}\left(M^f \backslash R_{\hat{\Delta}}\left(\hat{f}\right)\right) = 0$ para quase todo $\hat{\Delta} \in \hat{\mathcal{K}}_\infty$. Então $R_\Delta := \pi\left(R_{\hat{\Delta}}\left(\hat{f}\right)\right)$ é um conjunto de medida total para $\pi_*\hat{\nu}_{\hat{\Delta}}$ e consequentemente para Leb_Δ. Isto porque, conforme Teorema 3.4.4, $\pi_*\hat{\nu}_{\hat{\Delta}}$ é absolutamente contínua com respeito a Leb_Δ com densidade afastada de zero e infinito. Seja $\phi \in C(M)$ e $x, y \in R_\Delta$. Então existem $\hat{x}, \hat{y} \in R_{\hat{\Delta}}\left(\hat{f}\right)$ tais que $\pi(\hat{x}) = x$ e $\pi(\hat{y}) = y$. Observe que $\phi \circ \pi \in C\left(M^f\right)$, logo temos que existem os limites:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \phi(x_{-j}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \phi\circ\pi\left(\hat{f}^{-j}(\hat{x})\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \phi\circ\pi\left(\hat{f}^{j}(\hat{x})\right)$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \phi(y_{-j}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \phi\circ\pi\left(\hat{f}^{-j}(\hat{y})\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \phi\circ\pi\left(\hat{f}^{j}(\hat{y})\right).$$

Ora, $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{\Delta}$ implica que $\lim_{j\to\infty} d(x_{-j}, y_{-j}) = 0$. Então:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \phi(x_{-j}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \phi(y_{-j})$$

e portanto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\phi\circ\pi\left(\hat{f}^{-j}\left(\hat{x}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\phi\circ\pi\left(\hat{f}^{-j}\left(\hat{y}\right)\right).$$

Como $\hat{x},\hat{y}\in R\left(\hat{f}\right)$, segue que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\phi\circ\pi\left(\hat{f}^{j}\left(\hat{x}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\phi\circ\pi\left(\hat{f}^{j}\left(\hat{y}\right)\right).$$

Usando que $f^j\circ\pi=\pi\circ\hat{f}^j$, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\phi\left(f^{j}\left(x\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\phi\left(f^{j}\left(y\right)\right).$$

Como x,y foram escolhidos arbitrariamente temos que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\phi\left(f^j\left(x\right)\right)=L_\Delta\left(\phi\right)$ para todo $x\in R_\Delta$ e por definição $Leb_\Delta\left(\Delta\backslash R_\Delta\right)=0$. □

Temos a propriedade de desintegração absolutamente contínua para uma sub-probabilidade ν não necessariamente ergódica e invariante. Para garantirmos a existência de medidas SRB bastará garantir a existência de medidas ergódicas com desintegração absolutamente contínua com respeito a Lebesgue e ergódicas. A próxima proposição garante a existência de componentes ergódicas de μ com a propriedade SRB.

Proposição 3.5.2. *A medida f-invariante $\mu=\nu+\eta$ tem alguma componente ergódica μ_* cujos expoentes de Lyapunov são todos não nulos e tem a propriedade SRB. Além disso, $supp\left(\mu_*\right)\subset\Lambda$.*

Demonstração. Consideremos $R=\bigcup_{\Delta\in\mathcal{K}_\infty}R_\Delta$. Defina $\mathcal{R}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}f^{-n}\left(R\right)$. Temos que $\mathcal{R}$ é f-invariante, no sentido que $\mu\left(\mathcal{R}\cap f^{-1}\left(\mathcal{R}\right)\right)=0$. De fato, é claro que $f^{-1}\left(\mathcal{R}\right)\subset\mathcal{R}$ e, pelo Teorema de Recorrência de Poincaré é fácil ver que $\mu\left(\mathcal{R}\backslash f^{-1}\left(\mathcal{R}\right)\right)=0$.

Afirmamos que para todo $\phi\in C\left(M\right)$ existe $L\left(\phi\right)\in\mathbb{R}$ tal que para todo $x\in R$ vale:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\phi\left(f^{j}\left(x\right)\right)=L\left(\phi\right).$$

A prova segue as ideias do argumento de Hopf para ergodicidade de difeomorfismos de Anosov. Para vermos isso, usando o Lema 3.5.1, temos que existe $L_\Delta\left(\phi\right)\in\mathbb{R}$ tal que para todo $x\in R_\Delta$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\phi\left(f^{j}\left(x\right)\right)=L_\Delta\left(\phi\right)\ \text{ para todo } \phi\in C\left(M\right).$$

Dados $\Delta, \Delta' \in \mathcal{K}_\infty$, consideremos a holonomia estável $H^s : \Delta \to \Delta'$. Como R_Δ e $R_{\Delta'}$ são conjuntos de medida total para Leb_Δ e $Leb_{\Delta'}$, respectivamente, e a folheação estável é absolutamente contínua ([QXZ09, Teorema V.8.1]) temos $H^s(R_\Delta) = R_{\Delta'}$ ($Leb_\Delta -$ mod 0). Observe também que $\tilde{\phi}(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x))$ é constante quando restrita a variedades estáveis. Daí temos que $L_\Delta(\phi) = L_{\Delta'}(\phi) = L(\phi)$, para quaisquer pares $\Delta, \Delta' \in \mathcal{K}_\infty$. Portanto dado $\phi \in C(M)$ existe $L(\phi) \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x)) = L(\phi)$ para todo $x \in R$.

Assim, dado $\phi \in C(M)$ temos que para todo $x \in \mathcal{R}$, existe $n_0(x) \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(x) \in R$, e portanto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \phi\left(f^j(x)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \phi\left(f^j\left(f^{n_0}(x)\right)\right) = L(\phi). \tag{3.5.1}$$

Observe que

$$\mu(\mathcal{R}) \geq \mu(R) \geq \nu(R) = \pi_*\hat{\nu}(R) = \hat{\nu}\left(\pi^{-1}(R)\right) \geq \hat{\nu}\left(R\left(\hat{f}\right)\right) = \hat{\nu}\left(\hat{K}_\infty\right) \geq \alpha > 0.$$

Defina $\mu_* := \mu|_{\mathcal{R}}$, onde $\mu|_{\mathcal{R}}(A) = \frac{\mu(A\cap\mathcal{R})}{\mu(\mathcal{R})}$, para todo $A \subset M$ mensurável. Ora, como $\mathcal{R}$ é f-invariante, temos que μ_* é uma probabilidade f-invariante positiva. Como para todo $x \in \mathcal{R}$ temos que vale (3.5.1), μ_* é uma medida ergódica. Podemos escrever ainda $\mu_* = \nu|_{\mathcal{R}} + \eta|_{\mathcal{R}}$.

Como consequência da Proposição 3.3.6 temos que para todo $\Delta \in \mathcal{K}_\infty$ e para todo $y \in \Delta$ existe uma pré-órbita $\hat{y} \in M^f$ de y que admite uma decomposição $D\hat{f}^{-1}$-invariante $T_{\hat{y}} = E^s_y \oplus \mathcal{E}^u_{\hat{y}}$ em que E^s_y é uniformemente contrator e $\mathcal{E}^u_{\hat{y}}$ é contrator para o passado ao longo da pré-órbita $\hat{y}$. Em particular, para todo $y \in R$ existe uma tal pré-órbita $\hat{y} \in M^f$ e a decomposição $T_{\hat{y}} = E^s_y \oplus \mathcal{E}^u_{\hat{y}}$. Observe que $\mu_*(R) > \nu(R) > 0$. Logo os expoentes de Lyapunov com respeito a $\hat{\mu}_*$ associados a este $\hat{y}$ são não nulos. Pela Proposição (2.1.3) temos que tais expoentes coincidem com os expoentes de y, assim os expoentes de Lyapunov de y com respeito a μ_* são não nulos. Então para todo $x \in R$ o espectro de Lyapunov não contém o zero. Portanto μ_* é hiperbólica.

Vamos ver agora que μ_* tem a propriedade SRB. Consideremos $\hat{\mu}_*$ o levantamento de μ_*. Lembremos que μ_* é f-invariante e portanto $\hat{\mu}_*$ é única medida $\hat{f}$-invariante tal que $\pi_*\hat{\mu}_* = \mu_*$. É fácil ver que $\hat{\mu}_* := \hat{\mu}|_{\pi^{-1}(\mathcal{R})}$.

Afirmação 3.5.3. Se $\left\{\hat{\mu}_{*,\hat{\Delta}}\right\}_{\hat{\Delta}\in\hat{\mathcal{K}}_\infty}$ é um sistema condicional de medidas de $\hat{\mu}_*$ com respeito a $\hat{\mathcal{K}}_\infty$ então $\pi_*\hat{\mu}_{*,\hat{\Delta}} \ll Leb_\Delta$, para $\tilde{\hat{\mu}}_*$ quase todo $\hat{\Delta} \in \hat{\mathcal{K}}_\infty$.

Prova da Afirmação. Para cada $\hat{\Delta} \in \hat{\mathcal{K}}_\infty$ temos que $\pi|_{\hat{\Delta}} : \hat{\Delta} \to \Delta$ é um difeomorfismo. Podemos então levantar a medida de Lebesgue em Δ a cada conjunto $\hat{\Delta}$ correspondente, pondo $\hat{m}_{\hat{\Delta}} := \left(\pi|_{\hat{\Delta}}\right)_*^{-1} Leb_\Delta$. Assim $\pi_*\hat{\mu}_{*,\hat{\Delta}} \ll Leb_\Delta$ se, e somente se

$\hat{\mu}_{*,\hat{\Delta}} \ll \hat{m}_{\hat{\Delta}}$.

Suponhamos por redução ao absurdo que exista $\hat{A} \subset \hat{K}_\infty$ tal que $\hat{\mu}_*\left(\hat{A}\right) > 0$ e $\hat{m}_{\hat{\Delta}}\left(\hat{A} \cap \hat{\Delta}\right) = 0$ para $\tilde{\hat{\mu}}_*$ quase todo $\hat{\Delta} \in \hat{\mathcal{K}}_\infty$. Mas $\hat{\mu}_*\left(\hat{A}\right) > 0$ implica que $\hat{\mu}_{*,\hat{\Delta}}\left(\hat{A} \cap \hat{\Delta}\right) > 0$ para todo $\hat{\Delta}$ em algum subconjunto $\hat{\mathcal{K}}'_\infty \subset \hat{\mathcal{K}}_\infty$ com medida $\tilde{\hat{\mu}}_*$ positiva. Defina $\hat{B} = \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} \hat{f}^j\left(\hat{A}\right)$.Ora, $\hat{B}$ é $\hat{f}$-invariante e $\hat{\mu}_*\left(\hat{B}\right) \geq \hat{\mu}_*\left(\hat{A}\right) > 0$. Então, por ergodicidade, $\hat{\mu}_*\left(\hat{B}\right) = 1$ e portanto $\hat{\mu}_{*,\hat{\Delta}}\left(\hat{B} \cap \hat{\Delta}\right) = 1$, para $\tilde{\hat{\mu}}_*$ quase todo $\hat{\Delta} \in \hat{\mathcal{K}}_\infty$. Por outro lado $\hat{m}_{\hat{\Delta}}\left(\hat{B} \cap \hat{\Delta}\right) = 0$ para $\tilde{\hat{\mu}}_*$ quase todo $\hat{\Delta} \in \hat{\mathcal{K}}_\infty$, pois $\hat{f}^j_*\hat{m}_{\hat{\Delta}} \ll \hat{m}_{\hat{\Delta}}$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. Concluímos então que, neste caso, $\hat{\mu}_{*,\hat{\Delta}} \perp \hat{m}_{\hat{\Delta}}$, para $\tilde{\hat{\mu}}_*$ quase todo $\hat{\Delta} \in \hat{\mathcal{K}}_\infty$.

Note que não podemos ter $\hat{\mu}_{*,\hat{\Delta}} \perp \hat{m}_{\hat{\Delta}}$, para $\tilde{\hat{\mu}}_*$ quase todo $\hat{\Delta} \in \hat{\mathcal{K}}_\infty$, pois em $\hat{\mathcal{K}}_\infty$ podemos escrever $\hat{\mu}_{*,\hat{\Delta}} = \hat{\nu}_{\hat{\Delta}} + \hat{\eta}_{\hat{\Delta}}$ e já temos que $\hat{\nu}_{\hat{\Delta}} \ll \hat{m}_{\hat{\Delta}}$ (Teorema 3.4.4) e $\hat{\nu}_{\hat{\Delta}}$ tem massa positiva.

Assim sendo, para todo $\hat{A} \subset \hat{K}_\infty$ tal que $\hat{m}_{\hat{\Delta}}\left(\hat{A} \cap \hat{\Delta}\right) = 0$ temos que $\hat{\mu}_*\left(\hat{A}\right) = 0$ e, neste caso, é imediato que $\hat{\mu}_{*,\hat{\Delta}} \ll \hat{m}_{\hat{\Delta}}$, para $\tilde{\hat{\mu}}_*$ quase todo $\hat{\Delta} \in \hat{\mathcal{K}}_\infty$. Isto prova a afirmação.

Como na prova da Proposição VII.2.4 de [QXZ09] temos que $\mathcal{P} := \bigvee_{j \in \mathbb{N}} \hat{f}^{-j}\hat{\mathcal{K}}_\infty$ é uma partição de $\mathcal{R}$ subordinada a variedades instáveis. Pois aqui também estamos tomando uma família de conjuntos instáveis dois a dois disjuntos e gerando uma partição a partir desta família. Usando a propriedade acima concluímos que para quase todo $\hat{P} \in \mathcal{P}$, teremos que $\pi_*\hat{\mu}_{*,\hat{P}} \ll Leb_{\pi\left(\hat{P}\right)}$. Se $\mathcal{Q}$ é qualquer outra partição subordinada a variedades instáveis, a mesma propriedade de continuidade absoluta vale para $\mathcal{Q} \vee \mathcal{P}$ e portanto para $\mathcal{Q}$. Portanto μ_* é uma medida SRB para f. É imediato que $supp\left(\mu_*\right) \subset \Lambda$, pois μ_* é a restrição de μ a $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}$ está contido em Λ. $\square$

Lema 3.5.4. *Existe $b > 0$ tal que se μ_* é dado pela Proposição 3.5.2, então existe um aberto $U \subset M$ que está contido em $B\left(\mu_*\right)$ (a menos de um conjunto de medida de Lebesgue nula) e $Leb\left(U\right) > b$.*

Demonstração. Observe que $\hat{\mu}_*\left(B\left(\hat{\mu}_*\right)\right) = 1$, pois $\hat{\mu}_*$ é uma medida ergódica. Em particular, existe $\hat{\Delta} \in \hat{\mathcal{K}}_\infty$ tal que $\hat{\mu}_{*,\hat{\Delta}}$ quase todo ponto $\hat{x}$ em $\hat{\Delta}$ pertence a $B\left(\hat{\mu}_*\right)$, consequentemente $\hat{m}_{\hat{\Delta}}$ quase todo ponto $\hat{x}$ em $\hat{\Delta}$ pertence a $B\left(\hat{\mu}_*\right)$. Observe que $\pi\left(B\left(\hat{\mu}_*\right)\right) \subset B\left(\mu_*\right)$. De fato, dado $\phi \in C\left(M\right)$ temos que $\phi \circ \pi \in C\left(M\right)$, logo se $\hat{x} \in B\left(\hat{\mu}_*\right)$ então:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ \pi\left(\hat{f}^j\left(\hat{x}\right)\right) = \int \phi \circ \pi d\hat{\mu}_*.$$

Mas o lado direito da igualdade acima é igual a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \phi\left(f^j\left(x_0\right)\right)$ enquanto o esquerdo é igual a $\int \phi d\mu_*$. Portanto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\phi\left(f^j\left(x_0\right)\right)=\int\phi d\mu_*.$$

Ou seja, $x_0=\pi\left(\hat{x}\right)\in B\left(\mu_*\right)$. Então Leb_Δ quase todo ponto $x\in\Delta$ pertence a $B\left(\mu_*\right)$. Então a união das variedades estáveis de pontos em $B\left(\mu_*\right)\cap\Delta$ também estão contidas em $B\left(\mu_*\right)$, pois limites de médias de Birkhoff são constantes ao longo de variedades estáveis. Usando a continuidade absoluta da folheação estável e que as variedades estáveis têm tamanho uniformemente afastado de zero, concluímos para $r>0$ suficientemente pequeno, que $U=\bigcup_{y\in\Delta}W_r^s\left(y\right)$ é um aberto que está contido em $B\left(\mu_*\right)$ exceto por um conjunto de medida nula. O fato que U tem medida de Lebesgue uniformemente afastada de zero é análogo à prova do Corolário 4.6 de [ABV00]. $\square$

Como consequência do Lema 3.5.4, temos que existe um número finito de medidas ergódicas SRB para a aplicação f, uma vez que a bacia de cada uma delas é disjunta e contém um conjunto de medida de Lebesgue positiva uniformemente afastada de zero.

Suponhamos agora que f seja transitiva e que existam μ_1 e μ_2 medidas SRB para f. Pelo Lema 3.5.4 temos que existem abertos $U_1\subset B\left(\mu_1\right)\mod 0$ e $U_2\subset B\left(\mu_2\right)\mod 0$. A transitividade de f implica que existe um $N_0\in\mathbb{N}$ tal que $f^{N_0}\left(U_1\right)\cap U_2\neq\emptyset$. A menos de considerarmos um aberto menor, podemos supor que $f^{N_0}|_{U_1}$ é um difeomorfismo. Em particular temos que $f^{N_0}\left(U_1\right)\cap U_2$ é um aberto. Ora, mas também $f^{N_0}\left(U_1\right)\cap U_2\subset B\left(\mu_2\right)$ mod 0. Temos ainda que $f^{-N_0}\left(f^{N_0}\left(U_1\right)\cap U_2\right)\cap U_1\subset B\left(\mu_1\right)\mod 0$. Portanto, deve existir $x\in M$, tal que $x\in B\left(\mu_1\right)$ e $f^{N_0}\left(x\right)\in B\left(\mu_2\right)$, ou seja, $x\in B\left(\mu_1\right)\cap B\left(\mu_2\right)$. Logo, $\mu_1=\mu_2$. Ou seja, a medida SRB é única se f é transitiva.

Podemos então resumir os resultados obtidos:

Teorema 3.5.5. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta e conexa. Suponhamos $f:M\to M$ um difeomorfismo local de classe $C^{1+\alpha}$, com $\alpha>0$ e $\Lambda\subset M$ um atrator para f e $U\subset\Lambda$ uma vizinhança de Λ tal que $\Lambda=\cap_{n\geq0}f^n\left(\overline{U}\right)$. Assumamos que para todo $x\in U$ temos bem definido um subespaço estável $E_x^s\leq T_xM$ e um campo de cones de amplitude $a>0$, complementar ao espaço estável satisfazendo as hipóteses (H1), (H2), (H3) e (H4). Então existe no máximo uma quantidade finita de probabilidades invariantes e ergódicas com a propriedade SRB cujas bacias cobrem H (Leb $\mod 0$). Consequentemente, se $H=U$ (Leb $\mod 0$) então existem um número finito de medidas SRB para f em U. Finalmente, se f é uma aplicação transitiva então existe uma única medida SRB para f.*

Capítulo 4

Estabilidade estatística da medida SRB

Finalizamos o capítulo anterior mostrando que existe um número finito de medidas SRB ergódicas cujas bacias cobrem, a menos de um conjunto de medida de Lebesgue nula, o conjunto H de pontos que tinham infinitos tempos cone-hiperbólicos. Caso f seja transitiva no atrator Λ então temos a unicidade de tal medida. Neste capítulo vamos ver que se as hipóteses (H1), (H2), (H3) e (H4) valem robustamente então temos a estabilidade estatística da medida SRB. Precisamente, suponhamos $\mathcal{U}$ um aberto de endomorfismos de classe C^r em que valem as propriedades (H1), (H2), (H3) e (H4) com constantes uniformes e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{U}$ convergindo a $f \in \mathcal{U}$. Então temos a estabilidade estatística das medidas SRB se para qualquer sequência de medidas $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em que, para cada n, μ_n é uma medida SRB para f_n, então todo ponto de acumulação μ de $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é combinação linear de medidas SRB para f. Comecemos por definir a robustez das propriedades (H1), (H2), (H3) e (H4).

Suponhamos que Λ seja um atrator para f. Consideremos $U \supset \Lambda$ uma vizinhança aberta de Λ tal que $\cap_{n\geq 0} f^n\left(\overline{U}\right) = \Lambda$. Se g é próxima de f então $\Lambda_g := \cap_{n\geq 0} g^n\left(\overline{U}\right)$ é um atrator para g. Denotemos por $End^r(M)$ o conjunto de difeomorfismos locais de classe C^r em M.

Assumamos que exista um vizinhança aberta , $\mathcal{V} \subset End^r(M)$, de f, um campo de cones em U de dimensão $0 < d_u \leq dim\,(M)$

$$U \ni x \to C(x)$$

e constantes $\lambda \in (0,1)$, $\alpha > 0$ e $c > 0$ tais que cada $g \in \mathcal{V}$ satisfaz:

(R1) g admite um subespaço uniformemente λ-contrator e Dg-invariante $E^s_x(g)$ para cada $x \in \Lambda_g$, ou seja, $\|Dg|_{E^s}\| \leq \lambda$ e $Dg \cdot E^s = E^s$. Além disso $\measuredangle(E^s, v) > \alpha$, para todo

$v \in C$.

(R2) o campo de cones C é positivamente Dg-invariante e para Leb quase todo ponto $x \in U$ temos que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \| \left(Dg\left(g^j(x)\right) |_{C(g^j(x))} \right)^{-1} \| \leq -c < 0.$$

(R3) para todo $v \in E_x^s$ e $w \in Dg(x) \cdot C(x)$

$$\|Dg(x) \cdot v\| \|Dg(x)^{-1} \cdot w\| \leq \lambda.$$

Neste caso diremos que $\mathcal{V}$ é um *aberto de difeomorfismos locais parcialmente hiperbólicos de classe* C^r *com constantes uniformes.* Para cada $g \in \mathcal{V}$, denotemos por H_g o subconjunto de U de pontos que satisfazem a propriedade (R2).

Observação 4.0.6. Como a existência de um espaço estável é equivalente a existência de um campo de cones invariante pelo inverso da derivada em cada ponto, alternativamente poderíamos substituir a condição (4) pela existência de um campo de cones C^s satisfazendo $Dg(x)^{-1} \cdot C^s(g(x)) \subset C(x)$ para todo $x \in \Lambda_g$ e para todo $g \in \mathcal{V}$ e existe $\sigma > 1$ tal que $\|Dg(x)^{-1} \cdot v\| \geq \sigma \|v\|$ para todo $v \in C^s(g(x))$, para todo $x \in \Lambda_g$ e para todo $g \in \mathcal{V}$.

Segue do Teorema 3.5.5 que:

Corolário 4.0.7. *Para todo* $g \in \mathcal{V}$ *existe uma quantidade finita de medidas SRB ergódicas para* g *suportadas em* Λ_g. *Além disso, se* $g|_{\Lambda_g}$ *é transitiva então existe uma única medida SRB para* g.

A partir daqui fixemos $\mathcal{V} \subset End^r(M)$ um aberto de difeomorfismos locais parcialmente hiperbólicos de classe C^r e se $g \in \mathcal{V}$, seja μ_g uma medida SRB para g. Então, dada uma partição $\hat{\mathcal{P}}$ de M^g subordinada a variedades instáveis, para $\hat{\mu}_g$ quase todo ponto $\hat{x} \in M^g$:

$$\pi_* \hat{\mu}_{\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})} \ll Leb_{\pi\left(\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})\right)},$$

onde $\hat{\mu}_g$ é o levantamento de μ_g para M^g, $\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})$ é o átomo de $\hat{\mathcal{P}}$ que contém $\hat{x}$, $\hat{\mu}_{\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})}$ é o elemento da desintegração de $\hat{\mu}_g$ em $\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})$ e a aplicação π é considerada restrita a $\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})$. Pelo Teorema de Radon-Nikodym existe uma função mensurável $\rho_{\hat{x}} : \pi\left(\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})\right) \to \mathbb{R}$ que é positiva para $\pi_* \hat{\mu}_{\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})}$ quase todo ponto e satisfaz para todo subconjunto mensurável $B \subset \pi\left(\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})\right)$:

$$\pi_* \hat{\mu}_{\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})}(B) = \int_B \rho_{\hat{x}} dLeb_{\pi\left(\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})\right)}.$$

Por outro lado, observe que, $\pi\mid_{\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})}: \hat{\mathcal{P}}(\hat{x}) \to \pi\left(\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})\right)$ é uma aplicação bijetiva, podemos induzir uma medida de Lebesgue em $\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})$ a partir da medida de Lebesgue em $\pi\left(\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})\right)$. Lembremos que $\pi\left(\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})\right)$ está contida em $W^u_{loc}(\hat{x})$ e portanto, entendemos por medida de Lebesgue neste conjunto como aquela induzida pela medida de Lebesgue em $W^u_{loc}(\hat{x})$. Definamos $\hat{m}_{\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})} := \left(\pi\mid_{\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})}\right)^* Leb_{\pi\left(\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})\right)}$, onde

$$\left(\pi\mid_{\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})}\right)^* Leb_{\pi\left(\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})\right)}\left(\hat{A}\right) = Leb_{\pi\left(\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})\right)}\left(\pi\mid_{\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})}\left(\hat{A}\right)\right).$$

Note ainda que $\pi_*\hat{m}_{\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})} = Leb_{\pi\left(\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})\right)}$. Então $\pi_*\hat{\mu}_{\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})} \ll Leb_{\pi\left(\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})\right)}$ se, e somente se, $\hat{\mu}_{\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})} \ll \hat{m}_{\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})}$. Novamente pelo Teorema de Radon-Nikodym, temos que existe uma função mensurável $\hat{\rho} : \hat{\mathcal{P}}(\hat{x}) \to \mathbb{R}$, positiva em $\hat{\mu}_{\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})}$ quase todo ponto, tal que

$$\hat{\mu}_{\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})}\left(\hat{B}\right) = \int_{\hat{B}} \hat{\rho}\, d\hat{m}_{\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})}.$$

A medida $\hat{m}_{\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})}$ herda a propriedade de mudança de variáveis da medida de Lebesgue em $\pi\left(\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})\right)$, com respeito a $\hat{g}$ como veremos no lema a seguir. Antes, relembremos que definimos sobre a extensão natural de um endomorfismo $g : M \to M$, M^g, uma estrutura de fibrado vetorial que associa a cada $\hat{x} \in M^g$ o espaço vetorial $T_{\hat{x}} := T_{\pi(\hat{x})}M$. E definimos a derivada de $\hat{g}$ na sequência $\hat{x} \in M^g$, como a aplicação

$$\begin{aligned} D\hat{g}(\hat{x}) : T_{\hat{x}} &\to T_{\hat{g}(\hat{x})} \\ v &\mapsto Dg(\pi(\hat{x})) \cdot v \end{aligned}.$$

Podemos definir também $\det D\hat{g}(\hat{x}) = \det Dg(\pi(\hat{x}))$.

Lema 4.0.8. *Seja $g : M \to M$ um endomorfismo de classe C^1 definido numa variedade Riemanniana compacta M.Suponha $\hat{A} \subset M^g$ um subconjunto satisfazendo que $\pi\mid_{\hat{A}}: \hat{A} \to \pi\left(\hat{A}\right)$ é bijetiva e $\pi\left(\hat{A}\right)$ é uma subvariedade de M. Além disto, assuma que $\pi\mid_{\hat{g}\left(\hat{A}\right)}$ também é bijetiva com a sua imagem. Então vale que*

$$\int_{\hat{g}\left(\hat{A}\right)} \phi\, d\hat{m}_{\hat{g}\left(\hat{A}\right)} = \int_{\hat{A}} \phi \circ \hat{g}(\hat{x}) \left|\det D\hat{g}(\hat{x})\mid_{T_{x_0}\pi\left(\hat{A}\right)}\right| d\hat{m}_{\hat{A}}.$$

Demonstração. Denote $A := \pi\left(\hat{A}\right)$. Então A é uma subvariedade de M. Como $\pi\mid_{\hat{g}\left(\hat{A}\right)}$ é uma aplicação injetiva e π semiconjuga g e $\hat{g}$ temos que $g\mid_A$ é um difeomorfismo sobre sua imagem. Em particular $g(A)$ também é uma subvariedade de M. Então se $\phi : \hat{g}\left(\hat{A}\right) \to \mathbb{R}$

é uma aplicação mensurável temos:

$$\begin{aligned}
\int_{\hat{g}(\hat{A})} \phi d\hat{m}_{\hat{g}(\hat{A})} &= \int_{\hat{g}(\hat{A})} \phi d\left(\pi\mid_{\hat{g}(\hat{A})}\right)^{*} Leb_{g(A)} \\
&= \int_{g(A)} \phi\circ\left(\pi\mid_{\hat{g}(\hat{A})}\right)^{-1} dLeb_{g(A)} \\
&= \int_{A} \phi\circ\left(\pi\mid_{\hat{g}(\hat{A})}\right)^{-1}\circ g(x)\left|\det\left(Dg(x)\mid_{T_xA}\right)\right| dLeb_A \\
&= \int_{A} \phi\circ\hat{g}\circ\left(\pi\mid_{\hat{A}}\right)^{-1}(x)\left|\det\left(D\hat{g}\left(\left(\pi\mid_{\hat{A}}\right)^{-1}(x)\right)\mid_{T_xA}\right)\right| dLeb_A \\
&= \int_{\hat{A}} \phi\circ\hat{g}(\hat{x})\left|\det\left(D\hat{g}(\hat{x})\mid_{T_{x_0}A}\right)\right| d\left(\pi\mid_{\hat{A}}\right)^{*} Leb_A \\
&= \int_{\hat{A}} \phi\circ\hat{g}(\hat{x})\left|\det\left(D\hat{g}(\hat{x})\mid_{T_{x_0}A}\right)\right| d\hat{m}_{\hat{A}}(\hat{x})
\end{aligned}$$

□

Observação 4.0.9. Note que se $g \in End^r(M)$, $r \geq 1$, e $\hat{A} \subset M^g$ é um subconjunto tal que $\pi\mid_{\hat{A}}$ é uma aplicação injetiva então $\pi\mid_{\hat{g}^{-1}(\hat{A})}$ também é um aplicação injetiva. De fato, suponhamos $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{g}^{-1}\left(\hat{A}\right)$ e $\pi(\hat{x}) = \pi(\hat{y})$. Então $g(\pi(\hat{x})) = g(\pi(\hat{y}))$. Mas, como π é semiconjugação entre g e $\hat{g}$, temos que $\pi(\hat{g}(\hat{x})) = \pi(\hat{g}(\hat{y}))$. Mas $\hat{g}(\hat{x}), \hat{g}(\hat{y}) \in \hat{A}$ e $\pi\mid_{\hat{A}}$ e injetiva implica que $\hat{g}(\hat{x}) = \hat{g}(\hat{y})$. Logo, $\hat{x} = \hat{y}$. Em particular, se $\pi\left(\hat{A}\right)$ é subvariedade de M então $\pi\left(\hat{g}^{-1}\left(\hat{A}\right)\right)$ também é uma subvariedade de M. O Lema 4.0.8 garante então que, para $\phi : \hat{g}^{-1}\left(\hat{A}\right) \to \mathbb{R}$.

$$\int_{\hat{g}^{-1}(\hat{A})} \phi d\hat{m}_{\hat{g}^{-1}(\hat{A})} = \int_{\hat{A}} \phi\circ\hat{g}^{-1}(\hat{x})\left|\det\left(D\hat{g}^{-1}(\hat{x})\mid_{T_{x_0}\pi(\hat{A})}\right)\right| d\hat{m}_{\hat{A}}(\hat{x}),$$

onde $D\hat{g}^{-1}(\hat{x}) = \left(Dg(x_{-1})\right)^{-1}$.

O próximo lema garante que tais funções $\rho_{\hat{x}}$ são afastadas de zero e infinito e portanto $\pi_*\hat{\mu}_{\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})}$ não só é absolutamente contínua com respeito a $Leb_{\pi\left(\hat{\mathcal{P}}(\hat{x})\right)}$, como é também equivalente.

Lema 4.0.10. *Existe $C > 0$ tal que se $g \in \mathcal{V}$ e μ_g é medida SRB para g então as densidades são funções Hölder contínuas e são afastadas de zero e infinito e*

$$C^{-1} \leq \frac{d\pi_*\hat{\mu}_{g,\hat{\Delta}}}{dLeb_{\Delta}} \leq C,$$

onde $\left\{\hat{\mu}_{g,\hat{\Delta}}\right\}_{\hat{\Delta}\in\mathcal{P}}$ é desintegração do levantamento $\hat{\mu}_g$ de μ_g com respeito a partição $\mathcal{P}$ subordinada a variedades instáveis e $\Delta = \pi\left(\hat{\Delta}\right)$.

Demonstração. Fixemos $\mathcal{P}$ uma partição de M^g subordinada a variedades instáveis. Seja $\hat{z} \in supp\left(\hat{\mu}_g\right)$. Temos por definição que $\pi \mid_{\mathcal{P}(\hat{z})}$ é uma aplicação bijetiva com a sua imagem. Consideremos então a medida $\hat{m}_{\mathcal{P}(\hat{z})} := \left(\pi \mid_{\mathcal{P}(\hat{z})}\right)^* Leb_{\pi(\mathcal{P}(\hat{z}))}$. Como $\pi_* \hat{\mu}_{\mathcal{P}(\hat{z})} \ll Leb_{\pi(\mathcal{P}(\hat{z}))}$ temos que $\hat{\mu}_{\mathcal{P}(\hat{z})} \ll \hat{m}_{\mathcal{P}(\hat{z})}$ e portanto, pelo Teorema de Radon-Nikodym existe uma função mensurável $\rho_{\hat{z}} : \mathcal{P}\left(\hat{z}\right) \to \mathbb{R}$ que é positiva para $\hat{\mu}_{\mathcal{P}(\hat{z})}$ quase todo ponto satisfazendo

$$\hat{\mu}_{\mathcal{P}(\hat{z})}\left(\hat{B}\right) = \int_{\hat{B}} \rho_{\hat{x}} d\hat{m}_{\mathcal{P}(\hat{z})}.$$

Da invariância das variedades instáveis e do fato que $\pi \mid_{\hat{g}^{-1}\left(\hat{P}\right)}$ é injetiva para todo $\hat{P} \in \mathcal{P}$ decorre que $\hat{g}^{-n}\mathcal{P}$ também é uma partição subordinada a variedades instáveis. Denotemos por $\rho_n : \hat{g}^{-n}\left(\mathcal{P}\left(\hat{z}\right)\right) \to \mathbb{R}$ a densidade de $\hat{\mu}_{\hat{g}^{-n}(\mathcal{P}(\hat{z}))}$ com respeito a $\hat{m}_{\hat{g}^{-n}(\mathcal{P}(\hat{z}))}$. Usando a fórmula de mudança de variáveis, temos que se $\hat{B} \subset \mathcal{P}\left(\hat{z}\right)$ é um subconjunto mensurável, então

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{\hat{g}^{-n}(\mathcal{P}(\hat{z}))}\left(\hat{g}^{-n}\left(\hat{B}\right)\right) &= \int_{\hat{g}^{-n}\left(\hat{B}\right)} \rho_n d\hat{m}_{\hat{g}^{-n}(\mathcal{P}(\hat{z}))} \\ &= \int_{\hat{B}} \rho_n \circ \hat{g}^{-n}\left(\hat{x}\right) \left|\det\left(D\hat{g}^{-n}\left(\hat{x}\right) \mid_{T_{x_0}\pi(\mathcal{P}(\hat{z}))}\right)\right| d\hat{m}_{\mathcal{P}(\hat{z})}. \end{aligned}$$

Mas, pelo Lema 2.2.5, temos que $\hat{g}^n_* \hat{\mu}_{\hat{m}_{\hat{g}^{-n}(\mathcal{P}(\hat{z}))}} = \hat{\mu}_{\mathcal{P}(\hat{z})}$. Daí,

$$\rho_{\hat{z}}\left(\hat{x}\right) = \rho_n \circ \hat{g}^{-n}\left(\hat{x}\right) \left|\det\left(D\hat{g}^{-n}\left(\hat{x}\right) \mid_{T_{x_0}\pi(\mathcal{P}(\hat{z}))}\right)\right|.$$

Observe que

$$\begin{aligned} D\hat{g}^{-n}\left(\hat{x}\right) &= Dg^n\left(\pi\left(\hat{g}^{-n}\left(\hat{x}\right)\right)\right)^{-1} \\ &= Dg\left(x_{-n}\right)^{-1} \circ Dg\left(x_{-n+1}\right)^{-1} \circ \cdots \circ Dg\left(x_{-2}\right)^{-1} \circ Dg\left(x_{-1}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Então

$$\det\left(D\hat{g}^{-n}\left(\hat{x}\right) \mid_{T_{x_0}\pi(\mathcal{P}(\hat{z}))}\right) = \prod_{k=1}^{n} \det\left(Dg\left(x_{-k}\right)^{-1} \mid_{\mathbb{E}_{x_{-k+1}}}\right)$$

onde $\mathbb{E}_{x_{-k}} := T_{x_{-k}}\pi\left(\hat{g}^{-k}\left(\mathcal{P}\left(\hat{z}\right)\right)\right)$. Ou ainda:

$$\det\left(D\hat{g}^{-n}\left(\hat{x}\right) \mid_{T_{x_0}\pi(\mathcal{P}(\hat{z}))}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left[\det\left(Dg\left(x_{-k}\right) \mid_{\mathbb{E}_{x_{-k}}}\right)\right]^{-1}$$

. Assim, dados $\hat{x}, \hat{y} \in \mathcal{P}(\hat{z})$ temos que

$$\frac{\rho_{\hat{z}}(\hat{x})}{\rho_{\hat{z}}(\hat{y})} = \frac{\rho_n(\hat{g}^{-n}(\hat{x}))}{\rho_n(\hat{g}^{-n}(\hat{y}))} \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{\left[\det\left(Dg(x_{-k})\,|_{\mathbb{E}_{x_{-k}}}\right)\right]^{-1}}{\left[\det\left(Dg(y_{-k})^{-1}\,|_{\mathbb{E}_{y_{-k}}}\right)\right]^{-1}} \right|.$$

Usando o Corolário 3.1.4 temos que $\pi\left(\hat{g}^{-k}(\mathcal{P}(\hat{z}))\right) \ni w \to \log(\det Dg(w)\,|_{\mathbb{E}_w})$ é uma função Hölder contínua, com constantes $L > 0$ e $\alpha \in (0,1)$. Então

$$\begin{aligned}\log\left[\prod_{k=1}^{n} \frac{\left[\det\left(Dg(x_{-k})\,|_{\mathbb{E}_{x_{-k}}}\right)\right]^{-1}}{\left[\det\left(Dg(y_{-k})^{-1}\,|_{\mathbb{E}_{y_{-k}}}\right)\right]^{-1}}\right] &\leq \sum_{k=1}^{n} \log\det\left(Dg(x_{-k})\,|_{\mathbb{E}_{x_{-k}}}\right) \\ &\qquad - \log\det\left(Dg(y_{-k})^{-1}\,|_{\mathbb{E}_{y_{-k}}}\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} L \cdot dist(x_{-k}, y_{-k})^{\alpha} \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} L \cdot e^{-\frac{c}{2}\alpha k} dist(x_0, y_0)^{\alpha}.\end{aligned}$$

Em particular temos que, $\prod_{k=1}^{n} \left| \frac{\det\left(Dg(x_{-k})|_{\mathbb{E}_{x_{-k}}}\right)}{\det\left(Dg(y_{-k})^{-1}|_{\mathbb{E}_{y_{-k}}}\right)} \right|$ é um número afastado de zero e infinito para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmação. Existe uma subsequência $n_k \to \infty$ tal que $\lim_{k\to\infty} \frac{\rho_{n_k}\left(\hat{g}^{-n_k}(\hat{x})\right)}{\rho_{n_k}\left(\hat{g}^{-n_k}(\hat{y})\right)} = 1$.

Prova da afirmação. Consideremos $\mathcal{C} := \bigcup_{y \in \pi(\mathcal{P}(\hat{z}))} W_r^s(y)$ com r suficientemente pequeno. Consideremos $\mathcal{K}$ a família de variedades instáveis locais de (g, μ_g) que cruzam $\mathcal{C}$ e $\hat{\mathcal{K}}$ a família dos levantamentos dos elementos de $\mathcal{K}$. Tomemos $\hat{W} = \pi^{-1}(W_r^s(z))$. Então todo elemento de $\hat{\Omega}_\varepsilon$ está contido em algum $\hat{W}_{loc}(\hat{w})$ com $\hat{w} \in \hat{W}$. Fixemos $\varepsilon > 0$ e $\hat{\Omega}_\varepsilon \subset \hat{\mathcal{K}}$ um subconjunto compacto tal que $\hat{\mu}\left(\hat{\mathcal{K}} \backslash \hat{\Omega}_\epsilon\right) < \epsilon$ e a aplicação $\rho : \hat{\Omega}_\epsilon \to \mathbb{R}$ dada por $\rho(\hat{x}) = \rho_{\hat{w}}(\hat{x})$ onde $\hat{w} \in \hat{W}$ é tal que $\hat{x} \in \hat{W}_{loc}(\hat{w})$ e $\rho_{\hat{w}}$ é a densidade no elemento $\mathcal{P}(\hat{x})$ é uma aplicação contínua. Em particular, dado $k \in \mathbb{N}$ existe $\delta_k > 0$ tal que

$$\left| \frac{\rho(\hat{x})}{\rho(\hat{y})} - 1 \right| < \frac{1}{k}$$

para todo $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{\Omega}_\varepsilon$ que pertencem a um mesmo $\hat{W}_{loc}(\hat{w})$ e $\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) < \delta_k$.

Como $\hat{\mu}\left(\hat{\Omega}_\varepsilon\right) > 0$, podemos aplicar o Teorema de Recorrência de Poincaré para afirmar que para $\hat{x}, \hat{y} \in \mathcal{P}(\hat{z})$ existe n_k suficientemente grande tal que:

1. existe $\hat{w} \in \hat{W}$ tal que $\hat{g}^{-n_k}(\mathcal{P}(\hat{z})) \subset \hat{W}^u_{loc}(\hat{w})$;

2. $\hat{d}\left(\hat{g}^{-n_k}(\hat{x}), \hat{g}^{-n_k}(\hat{y})\right) \leq \delta_k$.

A primeira propriedade segue da invariância das variedades instáveis e a segunda da propriedade de contração para o passado fixadas as pré-órbitas. Segue então que

$$\rho_{n_k}\left(\hat{g}^{-n_k}(\hat{x})\right) = \rho\left(\hat{g}^{-n_k}(\hat{x})\right)$$

e

$$\rho_{n_k}\left(\hat{g}^{-n_k}(\hat{y})\right) = \rho\left(\hat{g}^{-n_k}(\hat{y})\right).$$

Mas então, por hipótese:

$$\left|\frac{\rho_{n_k}\left(\hat{g}^{-n_k}(\hat{x})\right)}{\rho_{n_k}\left(\hat{g}^{-n_k}(\hat{y})\right)} - 1\right| = \left|\frac{\rho\left(\hat{g}^{-n_k}(\hat{x})\right)}{\rho\left(\hat{g}^{-n_k}(\hat{y})\right)} - 1\right| < \frac{1}{k},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Isto conclui a prova da afirmação.

Então, como

$$\frac{\rho_{\hat{z}}(\hat{x})}{\rho_{\hat{z}}(\hat{y})} = \frac{\rho_n\left(\hat{g}^{-n}(\hat{x})\right)}{\rho_n\left(\hat{g}^{-n}(\hat{y})\right)} \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{\det\left(Dg(x_{-k})\,|_{\mathbb{E}_{x_{-k}}}\right)}{\det\left(Dg(y_{-k})^{-1}\,|_{\mathbb{E}_{y_{-k}}}\right)} \right|$$

temos que existe uma constante $\kappa > 0$ tal que $\kappa^{-1} \leq \frac{\rho_{\hat{z}}(\hat{x})}{\rho_{\hat{z}}(\hat{y})} \leq \kappa$, como queríamos mostrar. $\square$

Lema 4.0.11. *Sejam $g \in \mathcal{V}$ e μ_g uma medida SRB para g. Então existe um disco $D \subset M$ tal que $Leb_D\left(D \cap B(\mu_g) \cap H_g\right) = Leb_D(D)$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{P}$ uma partição de M^g subordinada a variedades instáveis. Então cada átomo de $\mathcal{P}$ contém, por definição, um conjunto que projeta-se pela projeção natural $\pi : M^g \to M$ sobre um disco contido em alguma variedade instável local de g com respeito a μ_g. Consideremos sem perda de generalidade que a partição $\mathcal{P}$ seja tal que cada átomo é de fato um conjunto que projeta-se sobre um disco instável local. Seja $\hat{\mu}_g$ o levantamento de μ_g para a extensão natural. Temos que $\hat{\mu}_g$ é uma medida ergódica, portanto $\hat{\mu}_g\left(B(\hat{\mu}_g)\right) = 1$, onde $B(\hat{\mu}_g)$ é a bacia da medida $\hat{\mu}_g$. Em particular devemos ter que para quase todo $\hat{P} \in \mathcal{P}$, $\hat{\mu}_{g,\hat{P}}\left(B(\hat{\mu}_g)\right) = \hat{\mu}_{g,\hat{P}}\left(\hat{P}\right)$, em que $\left\{\hat{\mu}_{g,\hat{P}}\right\}_{\hat{P}\in\mathcal{P}}$ é um sistema condicional de medidas com respeito a partição $\mathcal{P}$. Então tome $\hat{P}$ um tal átomo, ou seja, tal que $\hat{\mu}_{g,\hat{P}}\left(B(\hat{\mu}_g)\right) = \hat{\mu}_{g,\hat{P}}\left(\hat{P}\right)$. Tome $D := \pi\left(\hat{P}\right)$. Então D é um disco contido em uma variedade instável local.

Como μ_g é uma medida SRB para g, temos que $\mu_D := \pi_* \hat{\mu}_{g,\hat{P}} \ll Leb_D$. Observe que $\mu_D(B(\mu)\cap D)=\mu_D(D)$ uma vez que

$$\begin{aligned}\mu_D(B(\mu)) &= \pi_*\hat{\mu}_{g,\hat{P}}(B(\mu))=\hat{\mu}_{g,\hat{P}}\left(\pi^{-1}(B(\mu))\right)\\ &\geq \hat{\mu}_{g,\hat{P}}(B(\hat{\mu}))=\hat{\mu}_{g,\hat{P}}\left(\hat{P}\right)=\mu_D(D).\end{aligned}$$

Ou seja, para μ_D quase todo ponto $x\in D$ temos que $x\in B(\mu)$. Em particular para Leb_D quase todo ponto $x\in D$ temos que $x\in B(\mu)$, pois $\mu_D\ll Leb_D$ com densidades afastadas de zero e infinito.

Considere então $\Gamma=\bigcup_{y\in D}W^s_{loc}(y)$. Como $Leb(H_g)=Leb(U)$, deve existir um disco $\tilde{D}$ cruzando Γ tal que $Leb_{\tilde{D}}(H_g)=Leb_{\tilde{D}}\left(\tilde{D}\right)$. Pois caso contrário, encontraríamos um subconjunto A com medida positiva tal que $A\subset U\backslash H_g$. Por definição se $\tilde{D}$ cruza Γ então a holonomia estável que leva D em $\tilde{D}$ é um difeomorfismo. Como tal holonomia é absolutamente contínua, temos que $Leb_{\tilde{D}}$ quase todo ponto $x\in\tilde{D}$ pertence a $B(\mu)$. Sendo assim, encontramos $\tilde{D}\subset M$ um disco tal que $Leb_{\tilde{D}}\left(\tilde{D}\cap B(\mu_g)\cap H_g\right)=Leb_{\tilde{D}}\left(\tilde{D}\right)$. O que conclui a prova do lema. □

Teorema 4.0.12. *Sejam $g\in\mathcal{V}$ e μ_g uma medida SRB ergódica para g. Então μ_g é ponto de acumulação na topologia fraca * de alguma sequência $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ da forma*

$$\omega_n=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}g^j_*m_D,$$

em que m_D é a medida de Lebesgue normalizada num $D\subset M$ um disco satisfazendo, para constantes $C>0$, $\xi\in(0,1)$ e $c>0$:

1. *para cada k e para cada domínio de injetividade $\mathcal{D}_k$ de g^k em D a aplicação*

$$g^j(\mathcal{D}_k)\ni x\mapsto\log\left|\det\left(Dg(x)|_{T_xg^j\mathcal{D}_k}\right)\right|$$

   é (C,ξ)-Hölder contínua para todo $0\leq j\leq k-1$.

2. $\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\log\left\|\left(Dg\left(g^j(x)\right)|_{T_{g^j(x)}g^jD}\right)^{-1}\right\|\leq -c<0$ *para Leb_D quase todo $x\in D$.*

Ademais as constantes C, ξ e c independem de $g\in\mathcal{V}$.

Demonstração. Tome $D\subset M$ um disco tangente ao campo de cones C dado pelo Lema 4.0.11. Usando o Corolário 3.1.4 podemos obter (1). A propriedade (2) segue imediatamente do fato que $Leb_D(H_g)=Leb_D(D)$ pelo Lema 4.0.11.

Consideremos então

$$\omega_n=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}g^j_*m_D.$$

Seja ω um ponto de acumulação na topologia fraca $*$. Digamos $\omega = \lim_{k\to\infty}\omega_{n_k}$. Vamos mostrar que $\omega = \mu_g$. Seja $\phi \in C(M)$. Temos que

$$\begin{aligned}\int \phi d\omega &= \lim_{k\to\infty}\int \phi d\omega_{n_k} = \lim_{k\to\infty}\int \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\phi\circ g^j dm_D \\ &= \int \lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\phi\circ g^j dm_D.\end{aligned}$$

Mas, $Leb_D(B(\mu_g)) = Leb_D(D)$. Portanto para Leb_D quase todo $x \in D$ temos que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\phi\circ f^j(x) = \int \phi d\mu_g$. Daí, $\int \phi d\omega = \int \phi d\mu_g$. Como ϕ foi escolhida arbitrariamente, temos que $\omega = \mu_g$.

Ademais, observe que as constantes C, ξ são oriundas do Corolário 3.1.4 e dependem somente do campo de cones, o qual tomamos o mesmo para todo $g \in \mathcal{V}$. Já a constante $c > 0$ vem da hipótese (R2) e portanto é a mesma para todo endomorfismo $g \in \mathcal{V}$. □

O Teorema 4.0.12 nos diz que toda medida SRB para $g \in \mathcal{V}$, pode ser obtida pelo processo de construção do capítulo anterior, usando um disco D adequado. A diferença é que no capítulo anterior a medida SRB era uma componente ergódica absolutamente contínua de um ponto de acumulação da sequência das médias de Cesàro dos iterados de Lebesgue num disco tangente ao campo de cones. Aqui, o próprio ponto de acumulação é a medida SRB.

Queremos mostrar que há a continuidade dessas medidas com respeito a topologia fraca* em algum sentido. Veremos que se $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathcal{V}$ convergindo a $g \in \mathcal{V}$, $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de probabilidades ergódicas em que μ_n é uma medida SRB para g_n para cada $n \in \mathbb{N}$ e μ é um ponto de acumulação de $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ então quase toda componente ergódica de μ é uma medida SRB para g.

Inspirado por [Vás07] e pela construção das medidas SRB para endomorfismos parcialmente hiperbólicos, iremos ver que se μ_g é uma medida SRB então existe uma família de discos instáveis disjuntos de tamanho uniformemente afastado de zero para $g \in \mathcal{V}$. Esta uniformidade nos permitirá para cada n escolher uma tal família associada a g_n, digamos $\mathcal{K}_n$ e mostraremos então que pela compacidade de M esta família deve acumular em uma família de discos $\mathcal{K}$ que mostraremos ser instáveis com respeito a g.

Como para cada n teremos que μ_n será absolutamente contínua com respeito aos discos instáveis de $\mathcal{K}_n$ acabaremos por mostrar que μ também é absolutamente contínua com respeito a Lebesgue nos discos de $\mathcal{K}$. Mostraremos então que a decomposição ergódica de μ dada pelas medidas ergódicas

$$\mu_x := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)}$$

com x variando num conjunto de probabilidade total então para quase todo ponto $x \in \mathcal{K}$ a medida μ_x é uma medida SRB ergódica para g. Para finalizarmos, veremos que a decomposição ergódica de μ é realizada no conjunto $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} f^{-j}(\mathcal{K})$ donde garantimos que quase toda componente ergódica de μ é uma medida SRB.

Dado um disco $\Delta \subset M$, denotemos $C_r^g(\Delta) := \bigcup_{y\in\Delta} W_r^s(g,y)$, onde $W_r^s(g,y)$ é o disco de raio $r > 0$ centrado em y da variedade estável local $W_{loc}^s(g,y)$ com respeito a g. Diremos que um disco $\tilde{\Delta}$ de mesma dimensão que Δ cruza $C_r^g(\Delta)$ se a a holonomia por variedades estáveis $H^s : \tilde{\Delta} \to \Delta$ é um difeomorfismo. Denotemos por $\mathcal{K}_r^g(\Delta)$ a família de variedades instáveis locais de g que cruzam $C_r^g(\Delta)$ e por $K_r^g(\Delta)$ a união de seus elementos. Ou seja, $K_r^g(\Delta) = \bigcup_{D^u\in\mathcal{K}_r^g(\Delta)} D^u$.

Proposição 4.0.13. *Existem $\delta > 0$ e $\eta > 0$ satisfazendo que para todo $g \in \mathcal{V}$ e μ_g medida SRB para g, existe um disco $\Delta := \Delta(g,\mu_g)$ de raio $\delta > 0$ tal que se $\mathcal{K}_g(\Delta)$ é a família de discos instáveis que cruza $C_\delta(\Delta)$ então $\mu_g(K_g(\Delta)) > \eta$.*

Demonstração. Sejam $g \in \mathcal{V}$ e μ_g uma medida SRB para g. Pela proposição 3.2.1, existe uma subprobabilidade ν_g tal que $\mu_g = \nu_g + (\mu_g - \nu_g)$, $\nu_g(M) \geq \alpha(g) > 0$ e o suporte de ν_g está contido numa união de discos instáveis de raio $\delta(g) > 0$, conforme Lema3.2.2. Temos ainda que ν_g é absolutamente contínua com respeito a Lebesgue nestes discos instáveis. Consequentemente o suporte de ν_g está contido na união de $C_{r_g}^g(\Delta)$ com Δ disco instável de raio $\delta(g) > 0$.

Observe que a constante $\delta > 0$ pode ser tomada uniforme na vizinhança $\mathcal{V}$. De fato, relembre que esse δ corresponde ao tamanho dos discos hiperbólicos em tempo finito do endomorfismo parcialmente hiperbólico. Vimos que este tamanho depende apenas do tamanho do domínio de invertibilidade da aplicação exponencial, do tamanho do domínio dos ramos inversos e da continuidade uniforme das aplicações e estas quantidades variam continuamente, conforme Lema 3.1.11.

Como as variedades estáveis dependem continuamente em relação a dinâmica podemos tomar $r_g := r > 0$ para todo $g \in \mathcal{V}$. Temos também que a constante α depende apenas da frequência de tempos hiperbólicos para o endomorfismo parcialmente hiperbólico (Proposição 3.2.1) e esta por sua vez depende continuamente do endomorfismo e da constante $c > 0$ da expansão não uniforme do cone (Lema 3.1.6).

Em outras palavras, existem constantes $\delta > 0$ e $\alpha > 0$ tais que para todo $g \in \mathcal{V}$ e μ_g uma medida SRB para g temos que existe uma subprobabilidade ν_g tal que $\mu_g =$

$\nu_g + (\mu_g - \nu_g)$ satisfazendo $\nu_g(M) \geq \alpha$ e o suporte de ν_g está contido numa união de $C_r^g(\Delta)$ com Δ disco instável de raio $\delta > 0$.

Agora observe que $C_r^g(\Delta)$ contém uma bola de raio $\xi > 0$, independente de g, pois os r e δ são constantes em $\mathcal{V}$. Então, como a medida ν_g é uniformemente afastada de zero para todo g, podemos escolher um disco $\Delta = \Delta(g, \mu_g)$ instável de raio δ tal que $\mu_g(C_r^g(\Delta)) \geq \nu_g(C_r^g(\Delta)) \geq \eta > 0$. Isto equivale a dizer que $\mu_g(K_r^g(\Delta)) \geq \eta$. □

Dada $g \in \mathcal{V}$ e μ_g uma medida SRB para g considere o conjunto $C_g := C_r^g(\Delta)$ e $\mathcal{K}_g := \mathcal{K}_r^g(\Delta)$ dados pela Proposição anterior. Ou seja, tais que $\mu_g(K_g) \geq \eta$ e C_g contém uma bola de raio $\xi > 0$ uniforme em g. Temos que $\mathcal{K}_g$ é um família de discos instáveis disjuntos e cada elemento de $\mathcal{K}_g$ admite um levantamento bijetivo à extensão natural de M por g. Denotemos a família destes levantamentos por $\hat{\mathcal{K}}_g$. Temos a seguinte:

Proposição 4.0.14. *Existe $\tau > 0$ tal que para todo $g \in \mathcal{V}$ e μ_g medida SRB para g temos que se $\hat{\mu}_g$ é o levantamento de μ_g e $\left\{\hat{\mu}_{g,\hat{\Delta}}\right\}_{\hat{\Delta}\in\hat{\mathcal{K}}_g}$ é um sistema condicional de medidas de $\hat{\mu}_g|_{\hat{\mathcal{K}}_g}$ então*

$$\tau^{-1} Leb_\Delta(B) \leq \pi_* \hat{\mu}_{g,\hat{\Delta}}(B) \leq \tau Leb_\Delta(B) \tag{4.0.1}$$

para todo $B \subset \Delta$ mensurável

Demonstração. Ora, podemos repetir os argumentos do Teorema 3.4.4 para garantir que para cada $g \in \mathcal{V}$ existe um $\tau = \tau(g)$ tal que vale a propriedade (4.0.1). Para concluirmos a prova da proposição, observe que a constante $\tau = \tau(g)$ é obtida em função da distorção limitada dos iterados de Lebesgue no disco e da regularidade da holonomia estável. A constante de distorção limitada é oriunda da regularidade do Jacobiano ao longo dos iterados do disco, que vimos ser (C, ξ)-Hölder contínuo, em que C e ξ valem para todo $g \in \mathcal{V}$. E a regularidade da holonomia também varia de forma contínua em $\mathcal{V}$, uma vez que as variedades estáveis variam continuamente em $\mathcal{V}$. Portanto, podemos assumir que vale (4.0.1) com a constante τ uniforme para todo $g \in \mathcal{V}$. □

Fixemos então uma sequência $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de difeomorfismos locais de classe C^r, em que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_n \in \mathcal{V}$. Suponhamos que $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ na topologia C^r. Denotemos então $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_{g_n}$, $\hat{\mathcal{K}}_n = \hat{\mathcal{K}}_{g_n}$ e $C_n = C_{g_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 4.0.7 temos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma medida ergódica SRB, μ_n, para g_n. Suponhamos então μ um ponto de acumulação de $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. É claro que μ é uma medida g-invariante.

A estratégia para mostrar que as componentes ergódicas de μ são medidas SRB para g passa por mostrar que podemos recuperar uma estrutura semelhante a obtida na construção de medidas SRB através do limite das estruturas para g_n. Então mostramos que as componentes ergódicas satisfazem a propriedade de continuidade absoluta com respeito a esta estrutura de discos instáveis.

Lema 4.0.15. *Existe um cilindro C e uma família $\mathcal{K}$ de discos instáveis disjuntos com respeito a g contidos em C tal que $\mu(\mathcal{K}) \geq \alpha > 0$.*

Demonstração. Relembremos que C_n consiste das uniões das variedades estáveis de pontos em um disco Δ_n tangente ao campo de cones. Usando da compacidade de M e o Teorema de Arzelá-Ascoli, podemos supor que a menos passarmos a uma subsequência, Δ_n converge a um disco Δ. Como cada Δ_n tem raio uniformemente limitado por baixo por $\delta > 0$, Δ é um disco de raio δ. Consideremos então $C := \cup_{y\in\Delta} W_r^s(y, g)$, com $r > 0$ dado pela construção dos C_n. Considere

$$\mathcal{K} := \left\{ D \subset M : \ D = \lim_{k\to\infty} D_{n_k} \text{ com } D_{n_k} \in \mathcal{K}_{n_k}, \ D \subset C \right\},$$

ou seja, $\mathcal{K}$ é a família de discos contidos em C obtidos como acumulação dos discos instáveis para g_{n_k} com n_k convergindo a infinito quando k vai a infinito. Como cada $D_n \in \mathcal{K}_n$ é um disco tangente ao campo de cones $\mathcal{C}$ então $D \in \mathcal{K}$ é um disco tangente ao campo de cones $\mathcal{C}$.

Suponhamos $D \in \mathcal{K}$. Por simplicidade, escrevamos $D = \lim_{n\to\infty} D_n$. Suponhamos $x \in D$ tal que $D \subset B(x, \delta)$. Para n suficientemente grande temos que $D_n \subset B(x, \delta)$. A menos de reduzirmos a vizinhança $\mathcal{V}$ podemos assumir que cada g_n tem ramos inversos bem definidos em $B(x, \delta)$. Por definição temos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um ramo inverso $g_{n,i_n}^{-1} : B(x, \delta) \to V_{i_n}$ tal que existe uma constante $0 < \sigma < 1$ satisfazendo

$$dist\left(g_{n,i_n}^{-1}(z), g_{n,i_n}^{-1}(y)\right) \leq \sigma dist(z, y)$$

para todo $z, y \in D_n$. Ademais, a constante σ independe de n. Considere para cada $n \in \mathbb{N}$, $D_n^{-1} := g_{n,i_n}^{-1}(D_n)$. A menos de passarmos a uma subsequência podemos assumir que $\lim_{n\to\infty} D_n^{-1} = D^{-1}$. De fato, se x_n é o centro de D_n podemos tomar uma subsequência convergente de $\left(g_{n,i_n}^{-1}(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ e aplicar o Teorema de Arzelá-Ascoli para garantir a convergência da sequência de discos $(D_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Observe que $g(D^{-1}) = D$. Tome $z \in D^{-1}$. Então $z = \lim_{n\to\infty} z_n$ com $z_n \in D_n^{-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, temos que a menos de uma subsequência $\lim_{n\to\infty} g(z_n) = w$ com $w \in D$. Portanto devemos ter necessariamente que $g(z) = w$. Note ainda que como D^{-1} é um disco de diâmetro menor do que $\sigma\delta$, pois assim o é cada D_n^{-1}, temos que D^{-1} deve pertencer a alguma imagem de um ramo inverso de g.

Concluímos assim que g^{-1} é contrativa em D para algum ramo inverso de g. Podemos prosseguir com este mesmo raciocínio para qualquer ramo inverso de g^{-j} para todo $j \in \mathbb{N}$. Então vemos assim que cada $D \in \mathcal{K}$ é um disco instável segundo alguma pré-órbita de g.

Em particular, temos que cada $D \in \mathcal{K}$, admite um conjunto $\hat{D} \subset M^g$ cuja projeção é bijetiva neste conjunto. Ademais, tais discos são disjuntos e podemos exibir subespaços do plano tangente contratores para o passado conforme Proposição 3.3.6 e Proposição 3.3.7.

Para vermos que $\mathcal{K}$ tem medida μ positiva, lembremos que $\mu_n(\mathcal{K}_n) \geq \alpha > 0$ para todo $n \geq 0$. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos $V_\varepsilon(\mathcal{K})$ a ε-vizinhança de $\mathcal{K}$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{K}_n \subset V_\varepsilon(\mathcal{K})$ para todo $n \geq n_0$. Mas note que, $\cap_{\varepsilon>0} V_\varepsilon(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $\mu(\partial V_\varepsilon(\mathcal{K})) = 0$, então:

$$\mu(V_\varepsilon(\mathcal{K})) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(V_\varepsilon(\mathcal{K})) \geq \alpha > 0$$

e portanto,

$$\mu(\mathcal{K}) = \liminf_{\varepsilon\to 0} \mu(V_\varepsilon(\mathcal{K})) \geq \alpha > 0.$$

□

Estamos então em condições de repetir os argumentos do Teorema 3.4.4 para $\mathcal{K}$. Obtemos então:

Lema 4.0.16. *Existe uma constante $\tau_0 > 1$ tal que se $(\hat{\mu}_{\hat{\Delta}})_{\hat{\Delta}\in\mathcal{K}}$ é um sistema condicional de medidas do levantamento $\hat{\mu}$ de μ restrita a $\mathcal{K}$ então $\pi_*\hat{\mu}_{\hat{\Delta}}$ é absolutamente contínua com respeito a Leb_Δ, onde $\Delta = \pi\left(\hat{\Delta}\right)$ e ainda*

$$\tau_0^{-1} Leb_\Delta(B) \leq \pi_*\hat{\mu}_\Delta(B) \leq \tau_0 Leb_\Delta(B)$$

para todo $B \subset \Delta$ Borel mensurável.

Agora vamos mostrar que quase toda componente ergódica de $\hat{\mu}|_{\mathcal{K}}$ é uma medida SRB para g. Inicialmente vamos escolher um conjunto $\hat{Z}$ de medida total em $\hat{K}$ tal que para todo ponto $\hat{x} \in \hat{Z}$ temos que a componente ergódica dada pela decomposição ergódica de $\hat{\mu}$ é uma medida SRB para g.

O Teorema da Decomposição Ergódica, [Mañ87, Teorema II.6.4], assegura que existe um conjunto $\hat{\Sigma}(\hat{g})$ de medida total, ou seja, de medida total para qualquer probabilidade invariante $\hat{\mu}$, tal que para todo $\hat{x} \in \hat{\Sigma}(\hat{g})$, existe o limite

$$\hat{\mu}_{\hat{x}} := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{\hat{g}^j(\hat{x})}.$$

Além disto, $\hat{x} \mapsto \int \hat{\phi} d\hat{\mu}_{\hat{x}}$ é mensurável e

$$\int \hat{\phi} d\hat{\mu} = \int \left(\int \hat{\phi} d\hat{\mu}_x \right) d\hat{\mu}(\hat{x})$$

para toda função mensurável e limitada $\hat{\phi} : M^g \to \mathbb{R}$. Ainda para toda função mensurável e limitada $\hat{\phi} : M^g \to \mathbb{R}$ temos para $\hat{\mu}$ quase todo $\hat{x} \in M^g$ que:

$$\int \hat{\phi} d\hat{\mu}_{\hat{x}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}\left(\hat{g}^j\left(\hat{x}\right)\right).$$

Para cada $\Delta \in \mathcal{K}$ existe um único $\hat{\Delta} \in \hat{\mathcal{K}}$ tal que $\pi|_{\hat{\Delta}}$ é um homeomorfismo sobre Δ. Definamos então para cada $\hat{\Delta} \in \hat{\mathcal{K}}$ a medida

$$\hat{m}_{\hat{\Delta}} := \left(\pi|_{\hat{\Delta}}\right)^* Leb_{\Delta}.$$

Temos que $\pi_* \hat{m}_{\hat{\Delta}} = Leb_{\Delta}$ imediatamente da definição. Note que se $\{\hat{\mu}_{\hat{\Delta}}\}_{\hat{\Delta}\in\hat{\mathcal{K}}}$ é um sistema condicional de medidas de $\hat{\mu}|_{\hat{K}}$ então $\pi_*\hat{\mu}_{\hat{\Delta}} \ll Leb_{\Delta}$ se, e somente se, $\hat{\mu}_{\hat{\Delta}} \ll \hat{m}_{\hat{\Delta}}$.

Fixemos $\hat{B} \subset M^g$ tal que $\hat{m}_{\hat{\Delta}}\left(\hat{B} \cap \hat{\Delta}\right) = 0$ para todo $\hat{\Delta} \in \hat{\mathcal{K}}$ e $\hat{\mu}\left(\hat{B}\right)$ é maximal entre todos os conjuntos mensuráveis com esta propriedade. Usando o Lema 4.0.16 temos que $\hat{\mu}_{\hat{\Delta}} \ll \hat{m}_{\hat{\Delta}}$ e portanto, como $\hat{\mu}\left(\hat{B}\right) = \int\int \hat{\mu}_{\hat{\Delta}}(B)\, d\tilde{\hat{\mu}}\left(\hat{\Delta}\right)$, em que $\tilde{\hat{\mu}}$ é a medida quociente de $\hat{K}/\hat{\mathcal{K}}$ (Teorema de Desintegração de Rokhlin), segue que $\hat{\mu}\left(\hat{B}\right) = 0$.

Relembre que tomamos $R(\hat{g})$ como o conjunto dos pontos em M^g tal que as médias de Birkhoff futuras e passadas convergem e coincidem, ou seja,

$$R(\hat{g}) := \left\{\hat{y} \in M^g : \text{existe } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}\left(\hat{g}^j(\hat{y})\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}\left(\hat{g}^{-j}(\hat{y})\right) \ \forall \hat{\phi} \in C(M^g)\right\}.$$

Considere $\hat{Z} := K \cap \Sigma(\hat{g}) \cap R(\hat{g}) \backslash \hat{B}$.

O próximo Lema, enunciado em um contexto mais amplo, nos dará condições necessárias para que a desintegração de $\hat{\mu}$ com respeito a $\hat{\mathcal{K}}$ coincida com a desintegração de $\hat{\mu}_{\hat{x}}$ com respeito a $\mathcal{K}$ para quase todo ponto $\hat{x}$ com exceção de um conjunto de medida nula de elementos de $\hat{\mathcal{K}}$

Lema 4.0.17. *Seja υ uma medida finita em um espaço de medida $(Z, \mathcal{B})$, com $\upsilon(Z) > 0$. Seja $\mathcal{K}$ uma partição mensurável de Z e $(\upsilon_z)_{z\in Z}$ uma família de medidas finitas em Z tais que:*

(a) a função $z \mapsto \upsilon_z(A)$ é mensurável e constante em cada elemento de $\mathcal{K}$, para cada subconjunto mensurável $A \subset Z$.

(b) $\{w : \upsilon_z = \upsilon_w\}$ é um conjunto mensurável de medida υ_z total, para todo $z \in Z$.

Suponhamos que $\upsilon(A) := \int l(z)\, \upsilon_z(A)\, d\upsilon$ para alguma função mensurável $l : Z \to \mathbb{R}_+$ e qualquer mensurável $A \subset Z$. Sejam $\{\upsilon_\gamma : \gamma \in \mathcal{K}\}$ e $\{\upsilon_{z,\gamma} : \gamma \in \mathcal{K}\}$ desintegrações de υ e υ_z, respectivamente, em medidas condicionais com respeito a $\mathcal{K}$. Então $\upsilon_{z,\gamma} = \upsilon_\gamma$ para

υ quase todo $z \in Z$ e para $\tilde{\upsilon}_z$ quase todo $\gamma \in \mathcal{K}$, em que $\tilde{\upsilon}_z$ é a medida quociente em $\mathcal{K}$ induzida por υ_z.

Demonstração. Ver [ABV00]. $\square$

Vamos provar então que quase toda componente ergódica $\hat{\mu}_{\hat{x}}$ de $\hat{\mu}|_{\hat{K}}$ satisfaz a propriedade de continuidade absoluta ao longo dos conjuntos $\hat{\Delta} \in \hat{\mathcal{K}}$.

Proposição 4.0.18. *Para $\hat{\mu}$ quase todo $\hat{x} \in \hat{\mathcal{K}}$ a medida $\hat{\mu}_{\hat{x}}$ satisfaz $\hat{\mu}_{\hat{\Delta}} = \hat{\mu}_{\hat{x},\hat{\Delta}}$ para $\tilde{\hat{\mu}}$ quase todo $\hat{\Delta} \in \hat{\mathcal{K}}$.*

Demonstração. Queremos aplicar o Lema 4.0.17 para $Z = \hat{Z}$, $\upsilon = \hat{\mu}|_{\hat{K}}$, $\mathcal{K} = \hat{\mathcal{K}}$ e $\upsilon_{\hat{z}} = \hat{\mu}_{\hat{z}}$, para cada $\hat{z} \in \hat{Z}$. Observe que como $R(\hat{g})$ e $\Sigma(\hat{g})$ são conjuntos de probabilidade total e $\hat{\mu}\left(\hat{B}\right) = 0$ temos que

$$\hat{\mu}\left(\hat{Z}\right) = \hat{\mu}\left(\hat{K} \cap R(\hat{g}) \cap \Sigma(\hat{g})\right) = \hat{\mu}\left(\hat{K}\right) \geq \alpha.$$

Fixemos $\hat{A} \subset M^g$ um subconjunto mensurável. Observe que a aplicação $\hat{x} \mapsto \hat{\mu}_{\hat{x}}\left(\hat{A}\right)$ é mensurável para quase todo $\hat{x} \in \hat{Z}$ pelo Teorema de Decomposição Ergódica. Fixe $\hat{\Delta} \in \hat{\mathcal{K}}$ e $\hat{x},\hat{y} \in \hat{Z} \cap \hat{\Delta}$. Seja $\hat{\phi} \in C(M^g)$ temos que

$$\int \hat{\phi} d\hat{\mu}_{\hat{x}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}\left(\hat{g}^j(\hat{x})\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}\left(\hat{g}^{-j}(\hat{x})\right)$$

e

$$\int \hat{\phi} d\hat{\mu}_{\hat{y}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}\left(\hat{g}^j(\hat{y})\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}\left(\hat{g}^{-j}(\hat{y})\right)$$

pois $\hat{x}, \hat{y} \in R(\hat{g}) \cap \Sigma(\hat{g})$. Ora, mas como $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{\Delta}$ que é um conjunto instável temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}\left(\hat{g}^{-j}(\hat{x})\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}\left(\hat{g}^{-j}(\hat{y})\right).$$

Portanto $\int \hat{\phi} d\hat{\mu}_{\hat{x}} = \int \hat{\phi} d\hat{\mu}_{\hat{y}}$ para todo $\hat{\phi} \in C(M^g)$. Portanto $\hat{\mu}_{\hat{x}} = \hat{\mu}_{\hat{y}}$ para quaisquer $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{\Delta} \cap \hat{Z}$. Assim $\hat{x} \mapsto \hat{\mu}_{\hat{x}}\left(\hat{A}\right)$ é constante em cada $\hat{\Delta} \in \hat{\mathcal{K}}$.

Vejamos que vale a propriedade 4.0.17 do Lema 4.0.17.

Note que como M^g é um espaço métrico compacto, temos que $C(M^g)$ admite um subconjunto enumerável denso. Seja $\left\{\hat{\phi}_m\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal conjunto. Considere $G\left(\hat{\phi}_m, k\right)$ o conjunto dos pontos $\hat{x} \in \hat{\Sigma}$ tais que existe um natural $q(\hat{x})$ satisfazendo

$$\left|\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}_m\left(\hat{g}^j \hat{x}\right) - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}_m\left(\hat{g}^j \hat{z}\right)\right| \leq \frac{1}{k}$$

para todo $n \geq q(\hat{x})$. Temos que $G\left(\hat{\phi}_m, k\right)$ é um conjunto mensurável para todo $m \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que $\{\hat{w} : \hat{\mu}_{\hat{w}} = \hat{\mu}_{\hat{z}}\} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \cap_{k\in\mathbb{N}} G\left(\hat{\phi}_m, k\right)$. De fato, dado $\hat{w} \in E_{\hat{z}} := \{\hat{w} : \hat{\mu}_{\hat{w}} = \hat{\mu}_{\hat{z}}\}$, temos:

$$\begin{aligned}\hat{w} \in E_{\hat{z}} &\Leftrightarrow \int \hat{\phi} d\hat{\mu}_{\hat{w}} = \int \hat{\phi} d\hat{\mu}_{\hat{z}} \text{ para todo } \hat{\phi} \in C(M^g)\\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}\left(\hat{g}^j(\hat{w})\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}\left(\hat{g}^j(\hat{z})\right) \text{ para todo } \hat{\phi} \in C(M^g).\end{aligned}$$

Mas então, fixado $m \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}_m\left(\hat{g}^j\hat{x}\right) - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}_m\left(\hat{g}^j\hat{z}\right)\right| \leq \frac{1}{k}$$

para todo $n \geq q$. Ou seja, $\hat{w} \in G\left(\hat{\phi}_m, k\right)$ para todo $m, k \in \mathbb{N}$.

Reciprocamente, suponhamos $\hat{w} \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \cap_{k\in\mathbb{N}} G\left(\hat{\phi}_m, k\right)$. Fixemos $\epsilon > 0$. Dado $\hat{\phi} \in C(M^g)$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|\hat{\phi} - \hat{\phi}_m\| < \epsilon/3$. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $1/k < \epsilon/3$. Por hipótese, $\hat{w} \in G\left(\hat{\phi}_m, k\right)$, logo existe $q \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq q$ temos que:

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}_m\left(\hat{g}^j\hat{w}\right) - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}_m\left(\hat{g}^j\hat{z}\right)\right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Segue então:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}\left(\hat{g}^j\hat{w}\right) - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}\left(\hat{g}^j\hat{z}\right)\right| &\leq \left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}\left(\hat{g}^j\hat{w}\right) - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}_m\left(\hat{g}^j\hat{w}\right)\right|\\ &\quad + \left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}_m\left(\hat{g}^j\hat{w}\right) - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}_m\left(\hat{g}^j\hat{z}\right)\right|\\ &\quad + \left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}_m\left(\hat{g}^j\hat{z}\right) - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}\left(\hat{g}^j\hat{z}\right)\right|\\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon,\end{aligned}$$

para todo $n \geq q$. Portanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}\left(\hat{g}^j(\hat{w})\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}\left(\hat{g}^j(\hat{z})\right).$$

Como as escolhas foram arbitrárias, temos que $\hat{\mu}_{\hat{w}} = \hat{\mu}_{\hat{z}}$ e $\hat{w} \in E_{\hat{z}}$. Como $\hat{\mu}_{\hat{z}}$ é ergódica, temos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\hat{\phi}\left(\hat{g}^j\left(\hat{x}\right)\right)=\int\hat{\phi}d\hat{\mu}_{\hat{z}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\hat{\phi}\left(\hat{g}^j\left(\hat{z}\right)\right)$$

para $\hat{\mu}_{\hat{z}}$ quase todo o ponto $\hat{x}\in M^g$. Daí, $E_{\hat{z}}$ tem medida total para $\hat{\mu}_{\hat{z}}$.

Falta mostrarmos então que existe uma função mensurável $l:Z\to\mathbb{R}_+$ tal que $\hat{\mu}\left(\hat{A}\right)=\int l\left(\hat{x}\right)\cdot\hat{\mu}_{\hat{x}}\left(\hat{A}\right)d\hat{\mu}\left(\hat{x}\right)$ para todo $\hat{A}\subset\hat{Z}$ mensurável. Denotemos por $\mathbb{1}_{\hat{A}}$ a função característica do conjunto $\hat{A}$. Então

$$\hat{\mu}_{\hat{x}}\left(\hat{A}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{1}_{\hat{A}}\left(\hat{x}\right).$$

Então $\hat{\mu}_{\hat{x}}\left(\hat{A}\right)>0$ somente se $\hat{x}$ tem algum iterado que pertence a $\hat{A}\subset\hat{Z}$. Definamos para cada $\hat{z}\in\hat{Z}$.

$$l\left(\hat{z}\right):=\min\left\{r>0:\hat{g}^{-r}\left(\hat{z}\right)\in\hat{Z}\right\},$$

ou seja, o menor tempo de retorno para o passado de um ponto $\hat{z}\in\hat{Z}$. Ora l é bem definida para $\hat{\mu}$ quase todo $\hat{z}\in\hat{Z}$ pelo Teorema de Recorrência de Poincaré. É fácil ver que

$$\hat{\mu}\left(\hat{A}\right)=\int_{\Sigma}\hat{\mu}_{\hat{x}}\left(\hat{A}\right)d\hat{\mu}\left(\hat{x}\right)=\int_{\hat{Z}}l\left(\hat{z}\right)\hat{\mu}_{\hat{z}}\left(\hat{A}\right)d\hat{\mu}\left(\hat{z}\right).$$

Estamos então aptos a aplicar o Lema 4.0.17 para concluirmos a prova desta proposição. □

Consideremos então $K=\pi\left(\hat{K}\right)$. Temos o seguinte:

Corolário 4.0.19. *Para quase todo $x\in K$ temos que μ_x é uma medida SRB para g.*

Demonstração. Observe que para cada $\hat{y}\in M^g$ temos que $\pi_*\delta_{\hat{y}}=\delta_{y_0}$. Da linearidade e continuidade de $\pi_*:\mathcal{M}\left(M^g\right)\to\mathcal{M}\left(M\right)$ temos que $\pi_*\hat{\mu}_{\hat{x}}=\mu_{x_0}$, para todo $\hat{x}\in\Sigma\left(\hat{g}\right)$, onde $\mu_{x_0}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{f^j(x_0)}$. Note também que, se $\hat{B}\subset M^g$ é um conjunto de medida total para $\hat{\mu}$ então $\pi\left(\hat{B}\right)\subset M$ é um conjunto de medida total para $\mu=\pi_*\hat{\mu}$. De fato, como $\pi^{-1}\left(\pi\left(\hat{B}\right)\right)\supset\hat{B}$ temos que $\mu\left(\pi\left(\hat{B}\right)\right)=\pi_*\hat{\mu}\left(\pi\left(\hat{B}\right)\right)\geq\hat{\mu}\left(\hat{B}\right)=1$. Com isso, concluímos que para quase todo $x\in K$, temos que μ_x é tal que o seu levantamento $\hat{\mu}_x$ tem desintegração que coincide com a desintegração de $\hat{\mu}$ ao longo dos discos instáveis de $\mathcal{K}$. Como já mostramos que a desintegração de $\hat{\mu}$ é absolutamente contínua neste discos instáveis, segue que μ_x é uma medida SRB para quase todo $x\in K$. □

Recordemos que temos uma sequência $\left(g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{V}$ convergindo a $g\in\mathcal{V}$ e uma sequência de medidas $\left(\mu_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, em que cada μ_n é uma medida g_n-invariante, ergódica e uma medida SRB para g_n. Denotamos por $\hat{\mu}_n$ o levantamento à extensão natural de cada medida μ_n. Consideramos a projeção natural $\pi : M^{g_n} \to M$, omitindo a dependência de π em n, para maior simplicidade na escrita. Seja μ um ponto de acumulação de $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Exibimos um conjunto K tal que o elemento da decomposição ergódica μ_x, de μ, é uma medida SRB para g, para todo $x \in K$, onde K é obtido como projeção do conjunto $\hat{K} \subset M^g$. Queremos ver que μ é combinação convexa de medidas SRB para g. Pelo corolário 4.0.19 temos que μ quase todo $x \in K$, a componente da decomposição ergódica μ_x é uma medida SRB. Portanto, se mostrarmos que a decomposição ergódica de μ é realizada por pontos em K, ou seja, que $\mu = \int_K \mu_x d\mu$, então concluímos que μ é uma combinação convexa das medidas SRB para g. Observe que, pelo Teorema 3.5.5, da seção anterior, g admite um número finito de medidas SRB. Logo $\mu = \int_K \mu_x d\mu$ equivale a dizer que $\mu = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu_j$, onde $\{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$ é o conjunto de medidas SRB para g e $\alpha_j \in [0,1]$, para todo $1 \leq j \leq k$ e $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1$. Mais precisamente, vamos mostrar que $\mu = \int_G \mu_x d\mu$, onde G é um conjunto de medida μ-total em $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} g^{-j}(K)$.

Definamos $\hat{K}_0 = \bigcup_{j=0}^{\infty} \hat{g}^{-j}\left(\hat{K}\right)$. Defina

$$\hat{G} := \Sigma(\hat{g}) \cap R(\hat{g}) \cap \hat{K}_0$$

e

$$\hat{\zeta} := \int_{\hat{G}} \hat{\mu}_{\hat{x}} d\hat{\mu}(\hat{x}). \tag{4.0.2}$$

Note que $\hat{G}$ é um conjunto $\hat{g}$-invariante. Por definição $\hat{\mu}_{\hat{x}}\left(\hat{G}\right) > 0$ se, e somente se $\hat{x} \in \hat{G}$. Então, $supp\left(\hat{\zeta}\right) = \overline{\hat{G}}$. Observe ainda que cada $\hat{\mu}_{\hat{x}}$ com $\hat{x} \in \hat{G}$ é uma medida SRB.

Para $n \in \mathbb{N}$, cada μ_n é uma medida ergódica e portanto $\hat{\mu}_n$ é uma medida ergódica. Logo, conforme [Wal00, Teorema 1.5], como $\hat{\mu}_n\left(\hat{K}_n\right) \geq \alpha > 0$ temos que

$$\hat{\mu}_n\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} \hat{g}_n^{-j}\left(\hat{K}_n\right)\right) = 1.$$

Defina

$$\hat{A}_n^j := \left\{\hat{x} \in \hat{K}_n : j \text{ é o primeiro tempo de retorno de } \hat{x} \text{ por } \hat{g}_n\right\}.$$

Esses conjuntos são dois a dois disjuntos e $\hat{K}_n = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \hat{A}_n^j \mod 0$. Logo

$$\hat{\mu}_n\left(\hat{K}_n\right) := \sum_{j=1}^{\infty} \hat{\mu}_n\left(\hat{A}_n^j\right).$$

Lema 4.0.20. *A série $\sum_{j=1}^{\infty} \hat{\mu}_n\left(\hat{A}_n^j\right)$ converge uniformemente com respeito a $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Fixemos $j \in \mathbb{N}$. Como $\hat{\mu}_n$ é uma medida $\hat{g}_n$-invariante temos que

$$\hat{\mu}_n\left(\hat{A}_n^j\right) = \hat{\mu}_n\left(\hat{g}_n^j\left(\hat{A}_n^j\right)\right).$$

Usando da desintegração de $\hat{\mu}_n$ em $\hat{K}_n$ temos que:

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_n\left(\hat{g}_n^j\left(\hat{A}_n^j\right)\right) &= \int_{\hat{K}_n} \hat{\mu}_{n,\hat{D}}\left(\hat{g}_n^j\left(\hat{A}_n^j\right)\right) d\tilde{\hat{\mu}}\left(\hat{D}\right) \\
&= \int_{\hat{K}_n}\int_{\hat{D}} \mathbb{1}_{\hat{g}_n^j\left(\hat{A}_n^j\right)}\left(\hat{x}\right)\rho_{\hat{D}}^n\left(x\right) d\hat{m}_{\hat{D}}\left(\hat{x}\right) d\tilde{\hat{\mu}}\left(\hat{D}\right).
\end{aligned}$$

Pela Proposição 4.0.14 temos que existe uma constante $\tau > 0$ que independe de $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_{\hat{D}} \mathbb{1}_{\hat{g}_n^j\left(\hat{A}_n^j\right)}\left(\hat{x}\right)\rho_{\hat{D}}^n\left(x\right) d\hat{m}_{\hat{D}}\left(\hat{x}\right) &= \int_{\hat{g}_n^{-j}\left(\hat{D}\right)} \mathbb{1}_{\hat{A}_n^j}\left(\hat{x}\right)\rho_{\hat{g}_n^{-j}\left(\hat{D}\right)}^n\left(x\right) d\hat{m}_{\hat{g}_n^{-j}\left(\hat{D}\right)}\left(\hat{x}\right) \\
&\leq \tau d\hat{m}_{\hat{g}_n^{-j}\left(\hat{D}\right)}\left(\hat{A}_n^j\right).
\end{aligned}$$

Como $\hat{D}$ está contido no levantamento de uma variedade instável, e temos uma $e^{-\frac{c}{2}j}$-contração por $\hat{g}_n^{-j}$, existe uma constante $\sigma > 0$ tal que, para $D_{j,n} := \pi\left(\hat{g}_n^{-j}\hat{D}\right)$ temos

$$Leb_{D_{j,n}}\left(\pi\left(\hat{A}_n^j\right)\right) \leq \sigma e^{-\frac{c}{2}j}$$

para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Assim

$$\int_{\hat{D}} \mathbb{1}_{\hat{g}_n^j\left(\hat{A}_n^j\right)}\left(\hat{x}\right)\rho_{\hat{D}}^n\left(x\right) d\hat{m}_{\hat{D}}\left(\hat{x}\right) \leq \tau\sigma e^{-\frac{c}{2}j}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Concluímos portanto que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \hat{\mu}_n\left(\hat{A}_n^j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \tau\sigma e^{-\frac{c}{2}j}$$

e a série converge uniformemente em n. $\square$

Observação 4.0.21. Se definirmos

$$\hat{A}^j := \left\{\hat{x} \in \hat{K} : j \text{ é o primeiro tempo de retorno de } \hat{x} \text{ por } \hat{g}\right\}$$

então, como acima, a série $\sum_{j=1}^{\infty} \hat{\mu}\left(\hat{A}^j\right)$ converge e temos a mesma estimativa

$$\sum_{j=1}^{\infty} \hat{\mu}\left(\hat{A}^j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \tau\sigma e^{-\frac{c}{2}j}.$$

Considere $k(\hat{x}, n)$ o menor inteiro positivo tal que $\hat{g}_n^{k(\hat{x},n)}(\hat{x}) \in \hat{K}_n$. Temos que este número é bem definido para $\hat{\mu}_n$ quase todo ponto. Para $N \in \mathbb{N}$, defina

$$\hat{K}_n^N = \{\hat{x} \in M^{g_n} : k(\hat{x}, n) = N\}.$$

Para todo $N \in \mathbb{N}$, definamos $\hat{\mu}_n^N = \left(\hat{\mu}_n \mid_{\hat{K}_n^N}\right)$. Segue do Lema 4.0.20 que para todo $n \in \mathbb{N}$ fixado, $\hat{\mu}_n^N$ converge na topologia fraca * a $\hat{\mu}_n$ quando N vai a infinito, uniformemente em n.

Analogamente, defina $k(\hat{x})$ como o menor inteiro positivo tal que $\hat{g}^{k(\hat{x})}(\hat{x}) \in \hat{K}$. Para $N \in \mathbb{N}$, definamos o conjunto

$$\hat{K}_0^N := \{\hat{x} \in M^g : k(\hat{x}) = N\}.$$

Para todo $N \in \mathbb{N}$, defina $\hat{\zeta}_N = \hat{\zeta} \mid_{\hat{K}_0^N}$, onde $\hat{\zeta}$ é dada por (4.0.2). Temos ainda que $\hat{\zeta}_N$ converge na topologia fraca * à medida $\hat{\zeta}$.

Lema 4.0.22. $\pi_*\hat{\mu} = \pi_*\hat{\zeta}$.

Demonstração. Seja $\phi : M \to \mathbb{R}$ uma aplicação contínua e $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{N\to\infty} \hat{\zeta}_N \overset{w*}{=} \hat{\zeta}$ e $\lim_{N\to\infty} \hat{\mu}_n^N = \hat{\mu}_n$, temos que $\lim_{N\to\infty} \pi_*\hat{\zeta}_N \overset{w*}{=} \pi_*\hat{\zeta}$ e $\lim_{N\to\infty} \pi_*\hat{\mu}_n^N = \pi_*\hat{\mu}_n$. Fixemos então $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\int \phi d\pi_*\hat{\zeta} - \int \phi d\pi_*\hat{\zeta}_N\right| \leq \varepsilon$$

e

$$\left|\int \phi d\pi_*\hat{\mu}_n - \int \phi d\pi_*\hat{\mu}_n^N\right| \leq \varepsilon$$

para todo $n \geq 1$. Temos ainda que $\lim_{n\to\infty} \hat{\mu}_n = \hat{\mu}$ por hipótese e que $\lim_{n\to\infty} \pi_*\hat{\mu}_n^N = \pi_*\hat{\zeta}_N$ por definição. Logo, fixemos $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\left|\int \phi d\pi_*\hat{\mu}_n - \int \phi d\pi_*\hat{\mu}\right| \leq \varepsilon$$

e

$$\left|\int \phi d\pi_*\hat{\zeta}_N - \int \phi d\pi_*\hat{\mu}_n^N\right| \leq \varepsilon.$$

A desigualdade triangular implica então que

$$\left|\int \phi d\pi_*\hat{\zeta} - \int \phi d\pi_*\hat{\mu}\right| \leq 4\varepsilon$$

e portanto $\pi_*\hat{\zeta} = \pi_*\hat{\mu}$. □

Corolário 4.0.23. *A medida μ é combinação convexa das medidas SRB para g.*

Demonstração. Considere $\hat{\zeta}$ dada por (4.0.2). Pelo Lema anterior temos que

$$\mu = \int_{\pi(\hat{G})} \mu_x d\mu.$$

Note que $\pi\left(\hat{G}\right)$ é um conjunto de medida μ-total em $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} g^{-j}(K)$, pois $\hat{G}$ é um conjunto de medida $\hat{\mu}$-total em $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \hat{g}^{-j}\left(\hat{K}\right)$. Ora, mas temos que μ_x é uma medida SRB para todo $x \in \pi\left(\hat{G}\right)$ e o Teorema 3.5.5 nos diz que existe apenas um número finito de medidas SRB para g. Então $\mu_x \in \{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$, com $k < \infty$, para todo $x \in \pi\left(\hat{G}\right)$.

Denote $G_j := \left\{x \in \pi\left(\hat{G}\right) : \ \mu_x = \mu_j\right\}$, para todo $1 \leq j \leq k$. É fácil ver que G_j é um conjunto mensurável para todo $1 \leq j \leq k$. Então,

$$\mu = \int_{\pi(\hat{G})} \mu_x d\mu = \sum_{j=1}^{k} \int_{G_j} \mu_j d\mu = \sum_{j=1}^{n} \mu(G_j)\, \mu_j.$$

E, como $G_j \cap G_{j'} = \emptyset$ se $j \neq j'$, temos que $\sum_{j=1}^{k} \mu(G_j) = 1$. Ou seja, μ é uma combinação convexa das medidas SRB para g. □

Observação 4.0.24. Observe que se $(g_n)_n \subset \mathcal{V}$ é tal que g_n é transitiva para todo $n \in \mathbb{N}$ então, conforme Teorema 3.5.5, existe uma única medida SRB μ_n para g_n. Então se g_n converge a g que também é transitiva teremos que μ_n converge para a única medida SRB, μ, para g. Em outras palavras se temos transitividade para toda $g \in \mathcal{V}$ temos que a aplicação $\mathcal{S} : \mathcal{V} \to \mathcal{M}(M)$ que associa a cada $g \in \mathcal{V}$ a sua medida SRB, μ_g é contínua com a topologia fraca *.

Resumimos os resultados deste capítulo no seguinte Teorema:

Teorema 4.0.25. *Seja $r > 1$. Assumamos que exista um aberto $\mathcal{V}$ na topologia C^r tal que todo $g \in \mathcal{V}$ satisfaz as hipóteses (R1), (R2) e (R3). Seja $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{V}$ convergente para $g \in \mathcal{V}$ e suponha que μ_n é medida SRB ergódica para g_n, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então todo ponto de acumulação μ de $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma soma convexa de medidas SRB para g. Em particular, se cada $g \in \mathcal{V}$ admite somente uma medida SRB, μ_g então a aplicação*

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\to \mathcal{M}(M) \\ g &\mapsto \mu_g \end{aligned}$$

*é contínua na topologia fraca *.*

Capítulo 5

Exemplos

Neste capítulo exibiremos alguns exemplos de aplicação dos nossos resultados. Antes, vejamos dois resultados que serão úteis para a construção dos nossos exemplos. O primeiro diz respeito a uma estimativa para o binomial $\binom{n}{k}$ quando k é uma fração γ de n com $\gamma > \frac{1}{2}$ e é consequência da fórmula de Stirling. O segundo nos dá uma estimativa sobre a frequência de visitas de um ponto a uma determinada região do espaço, vista em função dos elementos de uma cobertura por domínios de injetividade que contém essa região.

Lema 5.0.26. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\gamma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ um número real. Consideremos k o menor inteiro tal que $k \geq \gamma n$. Então existem constantes $A, B > 0$ tais que $\binom{n}{k} \leq Ae^{B(1-\gamma)n}$ para todo n suficientemente grande.*

Demonstração. Esta é uma aplicação direta da fórmula de Stirling:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Então, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ temos:

$$(1-\epsilon)\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq (1+\epsilon)\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Em particular se $n, k, n-k \geq n_0$ então:

$$\binom{n}{k} \leq \frac{(1+\epsilon)\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{(1-\epsilon)\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k (1-\epsilon)\sqrt{2\pi(n-k)}\left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}}.$$

Tomando então $A_0 = \frac{(1+\epsilon)}{(1-\epsilon)^2\sqrt{2\pi}}$ temos:

$$\binom{n}{k} \leq A_0 \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}},$$

para todo $n, k \gg n_0$.

Fixemos $\gamma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e escrevamos $k := \delta_n n$ o menor inteiro maior ou igual a γn. Temos então que $\gamma \leq \delta_n < \gamma + \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, se n é suficientemente grande então $\gamma + \frac{1}{n} \leq \theta < 1$ e δ_n é uniformemente afastado de 1. Assim, para esse k temos:

$$\sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} = \sqrt{\frac{1}{(1-\delta_n)n}} \leq \epsilon,$$

para n suficientemente grande. Temos ainda que:

$$\begin{aligned} \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}} &= \left(\frac{n}{k}\right)^k \left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k} \leq \left(\frac{1}{\delta_n}\right)^k \left(\frac{1}{1-\delta_n}\right)^{n-k} \\ &\leq \left[\left(\frac{1}{\delta_n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \left(\frac{1}{1-\delta_n}\right)\right]^{n-k} \leq \left[\left(\frac{1}{\delta_n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \left(\frac{1}{1-\delta_n}\right)\right]^{(1-\gamma)n}. \end{aligned}$$

Como $\gamma \leq \delta_n \leq \theta < 1$ temos que existe uma constante $\xi > 0$ tal que $\frac{k}{n-k} \leq \xi$. Logo, se n é suficientemente grande temos que existe uma constante B_0 tal que $\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}} \leq B_0^{(1-\gamma)n}$. Portanto, escolhendo $A = A_0\epsilon$ e $B = \log B_0$ concluímos a prova do Lema. □

5.1 Perturbações locais de endomorfismos Anosov

Suponhamos M uma variedade Riemanniana compacta e conexa d-dimensional. Consideremos $f : M \to M$ um difeomorfismo local $C^{1+\alpha}$. Suponha que existe uma decomposição contínua, não necessariamente invariante, $TM = E \oplus F$ do fibrado tangente sobre M satisfazendo

1. existe $\alpha > 0$ tal que o cone de amplitude $\alpha > 0$ centrado em E, $x \mapsto C_\alpha^-(x)$ satisfaz:
   (a) $Df(x)^{-1} \cdot C_\alpha^-(f(x)) \subsetneq C_\alpha^-(x)$, para todo $x \in M$;
   (b) existe $\lambda_s > 1$ tal que $\|Df(x)^{-1} \cdot v\| \geq \lambda_s \|v\|$, para todo $v \in C_\alpha^-(f(x))$, para todo $x \in M$.
2. existe $\beta > 0$ e uma função $L : M \to (0, \infty)$ tal que o cone de amplitude β centrado em F, satisfaz:

(a) $Df(x) \cdot C_\beta^+(x) \subseteq C_\beta^+(f(x))$ para todo $x \in M$;

(b) $\|Df(x) \cdot v\| \geq L(x)\|v\|$ para todo $v \in C_\beta^+(x)$ e para todo $x \in M$.

3. $\det |Df\,(x)\,|_{T_xD}| > \sigma$, para alguma constante $\sigma > 1$, para todo $x \in M$ e disco tangente a C_β^+ contendo x.

4. Existe uma região aberta $\mathcal{O} \subset M$ tal que $L\,(x) \geq \lambda_u$, para alguma constante $\lambda_u > 1$ e para todo $x \in M \backslash \mathcal{O}$ e $L\,(x) \geq L$, para alguma constante $L < 1$ (a determinar), para todo $x \in \mathcal{O}$. Além disto, assumamos $\{V_1, ..., V_p, V_{p+1}, ..., V_q\}$ uma partição de M por domínios de injetividade e que $\mathcal{O} \subset \cup_{j=1}^q V_{p+j}$, onde p, q são números naturais tais que existe $\gamma \in (0,1)$ satisfazendo $p^{(1-\gamma)}q \leq \sigma$.

Dado um disco $D \subset M$ tangente a C_β^+, $n \in \mathbb{N}$ e $\gamma \in (0,1)$, definamos

$$R\,(D, n, \gamma) := \left\{x \in D : \ \#\left\{0 \leq j \leq n-1 : \ f^j\,(x) \in \mathcal{O}\right\} \geq \gamma n\right\}$$

Lema 5.1.1. *Fixemos um disco $D \subset M$ tangente ao campo de cones C_β^+. Existe $\gamma_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ tal que para todo n suficientemente grande temos que $Leb_D\,(R\,(D, n, \gamma_0)) \leq Ke^{-\epsilon n}$ para algum ϵsuficientemente pequeno e uma constante $K > 0$.*

Demonstração. Consideremos $N_{p+q} := \{1, ..., p, p+1, ..., p+q\}$ e o conjunto

$$\mathcal{R}\,(n, \gamma) := \left\{\vec{i} \in N_{p+q}^n : \ \#\,\{0 \leq j \leq n-1 : i_j > p\} \geq \gamma n\right\}.$$

Denotemos $V_{\vec{i}} := \cap_{j=0}^{n-1} f^{-j}\left(V_{i_j}\right)$. Observe que $x \in R\,(D, n, \gamma)$ então $x \in V_{\vec{i}}$ para algum $\vec{i} \in \mathcal{R}\,(n, \gamma)$. Logo,

$$R\,(D, n, \gamma) \subset \cup_{\vec{i} \in \mathcal{R}(n,\gamma)} V_{\vec{i}}.$$

Vamos estimar a medida de $V_{\vec{i}}$, para um qualquer elemento $\vec{i} \in N_{p+q}^n$. Por definição temos que $f^n|_{V_{\vec{i}}}$ é injetiva, portanto vale que:

$$Leb_{f^n\left(V_{\vec{i}}\right)}\,(f^n\,(V_{\vec{i}})) = \int_{V_{\vec{i}}} |\det Df^n\,(x)\,|_{T_xD}| dLeb_D.$$

Como $f^j\,(V_{\vec{i}})$ é um disco, pela injetividade de f^n neste domínios, e é tangente ao campo de cones, pela invariância do mesmo, temos que

$$|\det Df^n\,(x)\,|_{T_xD}| = \prod_{j=0}^{n-1} |\det Df\left(f^j\,(x)\right)|_{T_{f^j(x)}f^j\left(V_{\vec{i}}\right)}| \geq \sigma^n. \tag{5.1.1}$$

Segue assim que

$$Leb_D\,(V_{\vec{i}}) \leq \sigma^{-n} Leb_{f^n\left(V_{\vec{i}}\right)}\,(f^n\,(V_{\vec{i}})) \leq C_0 \sigma^{-n}.$$

Ora, então $Leb_D\left(R\left(D,n,\gamma\right)\right) \leq \#\mathcal{R}\left(n,\gamma\right)\cdot C_0\sigma^{-n}$. Precisamos estimar então $\#\mathcal{R}\left(n,\gamma\right)$. Seja

$$k := \min\left\{m\in\mathbb{N}:\ m\geq\gamma n\right\}.$$

Podemos escrever $\mathcal{R}\left(n,\gamma\right)=\dot{\cup}_{j=k}^{n}\mathcal{R}_j\left(n,\gamma\right)$ em que

$$\mathcal{R}_j\left(n,\gamma\right) := \left\{\vec{i}\in N_{p+q}^{n}:\ \#\left\{0\leq j\leq n-1: i_j>p\right\}=j\right\}.$$

E para cada j temos que

$$\#\mathcal{R}_j\left(n,\gamma\right)=\binom{n}{j}p^{n-j}q^{j},$$

logo

$$\#\mathcal{R}\left(n,\gamma\right)=\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}p^{n-j}q^{j}.$$

Sabemos que como $k>\frac{n}{2}$ então $\binom{n}{k}\geq\binom{n}{j}$ para todo $k\leq j\leq n$. Assim,

$$\#\mathcal{R}\left(n,\gamma\right)\leq\frac{n}{2}\binom{n}{k}p^{n-k}q^{n}.$$

Usando o Lema 5.0.26 temos que

$$\#\mathcal{R}\left(n,\gamma\right)\leq\frac{n}{2}Ae^{B(1-\gamma)n}p^{(1-\gamma)n}q^{n},$$

para n suficientemente grande e constantes uniformes $A,B>0$. Note que para n suficientemente grande $\frac{n}{2}\leq e^{B(1-\gamma)n}$. Logo

$$\#\mathcal{R}\left(n,\gamma\right)\leq Ae^{2B(1-\gamma)n}p^{(1-\gamma)n}q^{n}.$$

Portanto

$$Leb_D\left(R\left(D,n,\gamma\right)\right)\leq C_0Ae^{-n\log\sigma}e^{2B(1-\gamma)n}p^{(1-\gamma)n}q^{n}.$$

Então, como por hipótese, assumimos que $p^{(1-\gamma)}q\leq\sigma$ temos que $(1-\gamma)\log p+\log q-\log\sigma<-2\epsilon<0$. Portanto se escolhermos γ_0 suficientemente próximo de 1 de forma que $2B(1-\gamma_0)<\epsilon$ então:

$$-\log\sigma+2B\left(1-\gamma\right)+\left(1-\gamma\right)\log p+\log q<-\epsilon.$$

Segue portanto que

$$Leb_D\left(R\left(D,n,\gamma\right)\right) \leq C_0 A e^{n[-\log\sigma + 2B(1-\gamma)+(1-\gamma)\log p + \log q]} \leq C_0 A e^{-\epsilon n}$$

para todo $n$suficientemente grande. □

Observação 5.1.2. Suponhamos que não tenhamos expansão de volume para todo o espaço ao longo de discos tangentes aos cones. Seja $\{V_1,\ldots,V_p,V_{p+1},\ldots,V_{p+q}\}$, uma partição de M em domínios de injetividade. Assumamos que exista $\sigma > 1$ e $\rho < 1$ tais que

$$|\det Df\left(x\right)|_{T_xD}| \geq \sigma \tag{5.1.2}$$

para todo $x \in \bigcup_{j=1}^{p} V_j$ e

$$|\det Df\left(x\right)|_{T_xD}| \geq \rho \tag{5.1.3}$$

para todo $x \in \bigcup_{j=1}^{q} V_{p+j}$, onde D é qualquer disco tangente ao campo de cones. Então se $V_{\vec{i}}$ é como anteriormente e $\vec{i} \in \mathcal{R}\left(n,\gamma\right)$, com $\gamma \in \left(\frac{1}{2},1\right)$, então para todo $x \in V_{\vec{i}}$ e $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\prod_{j=0}^{n-1}\left|\det Df\left(f^j\left(x\right)\right)|_{T_{f^j(x)}f^j(D)}\right| \geq \gamma\sigma\rho n.$$

Então se γ e ρ são suficientemente próximos de 1 temos que $\gamma\sigma\rho > 1$ temos ainda expansão de volume em tempo n. Então substituindo a hipótese 3 pelas equações (5.1.2) e (5.1.3) temos a validade da estimativa da frequência de visitas na região $V_{p+1} \cup \cdots \cup V_{p+q}$ dada pelo Lema (5.1.1).

Corolário 5.1.3. *Se D é um disco tangente ao campo de cones C_β^+ e $\gamma_0 \in \left(\frac{1}{2},1\right)$ é como no Lema anterior então para Leb_D quase todo ponto $x \in D$ existe $n\left(x\right) \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin R\left(D,n,\gamma_0\right)$ para todo $n \geq n\left(x\right)$.*

Demonstração. Pelo Lema anterior, para todo n suficientemente grande, temos que:

$$Leb_D\left(R\left(D,n,\gamma_0\right)\right) < Ke^{-\epsilon n}.$$

Portanto $\sum_{n=1}^{\infty} Leb_D\left(R\left(D,n,\gamma_0\right)\right) < \infty$, e pelo Lema de Borel-Cantelli, temos que

$$Leb_D\left(\cap_{n\geq 1}\cup_{m\geq n} R\left(D,n,\gamma_0\right)\right) = 0,$$

o que conclui a prova do corolário. □

Consideremos $L < 1$ suficientemente próximo de 1 e $c > 0$ suficientemente próximo de zero de modo que

$$L^{\gamma_0} \cdot \lambda_u^{(1-\gamma_0)} \geq e^c > 1 \tag{5.1.4}$$

Proposição 5.1.4. *Seja D um disco tangente ao campo de cones C_β^+. Então existe $c > 0$ tal que para Leb_D quase todo $x \in D$ vale que:*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \left\| \left(Df\left(f^j(x)\right) |_{T_{f^j(x)} f^j(D)} \right)^{-1} \right\| \leq -c < 0.$$

Demonstração. Como D é um disco tangente ao campo de cones C_β^+ e C_β^+ é Df-invariante temos que

$$\left\| \left(Df\left(f^j(x)\right) |_{T_{f^j(x)} f^j(D)} \right)^{-1} \right\| \leq \lambda_u < 1 \text{ se } f^j(x) \notin \mathcal{O}$$

e

$$\left\| \left(Df\left(f^j(x)\right) |_{T_{f^j(x)} f^j(D)} \right)^{-1} \right\| \leq L^{-1} \text{ se } f^j(x) \in \mathcal{O}.$$

Então para todo n:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \log \left\| \left(Df\left(f^j(x)\right) |_{T_{f^j(x)} f^j(D)} \right)^{-1} \right\| \leq \sum_{j\in r(n,x)} \log \left\| \left(Df\left(f^j(x)\right) |_{T_{f^j(x)} f^j(D)} \right)^{-1} \right\|$$
$$+ \sum_{j\in g(n,x)} \log \left\| \left(Df\left(f^j(x)\right) |_{T_{f^j(x)} f^j(D)} \right)^{-1} \right\|,$$

onde $r(n,x) := \{0 \leq j \leq n-1 : f^j(x) \in \mathcal{O}\}$ e $g(n,x) := \{0,1,\ldots,n-1\} \setminus r(n,x)$. O corolário *5.1.3* implica que para Leb_D q.t.p. x existe $n(x)$ tal que para todo $n \geq n(x)$, $x \notin R(D,n,\gamma_0)$. Em outras palavras, para todo $n \geq n(x)$ temos que $\#r(n,x) < \gamma_0 n$. Consequentemente $\#g(n,x) \geq (1-\gamma_0)n$. Segue portanto que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \log \left\| \left(Df\left(f^j(x)\right) |_{T_{f^j(x)} f^j(D)} \right)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{n}\#r(n,x)\log L^{-1} + \frac{1}{n}\#g(n,x)\log \lambda_u^{-1}$$
$$= -\left(\frac{1}{n}\#r(n,x)\log L + \frac{1}{n}\#g(n,x)\log \lambda_u \right).$$

Como $L < 1$, temos que $\log L < 0$ e portanto, como $\frac{1}{n}\#r(n,x) < \gamma_0$ temos que

$\frac{1}{n}\#r\,(n,x)\log L \geq \gamma_0 \log L$. Também $\frac{1}{n}\#g\,(n,x)\log \lambda_u \geq (1-\gamma_0)\log \lambda_u$. Portanto

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\log\left\|\left(Df\left(f^j(x)\right)|_{T_{f^j(x)}f^j(D)}\right)^{-1}\right\| \leq -\left(\gamma_0 \log L + (1-\gamma_0)\log \lambda_u\right)$$
$$\leq -\left(\log\left(L^{\gamma_0}\cdot \lambda_u^{(1-\gamma_0)}\right)\right) \leq -c < 0.$$

□

Observe que se f é um endomorfismo que satisfaz 1, 2, 3 e 4, com a constante L satisfazendo (5.1.4) então a Proposição anterior nos diz que dado um disco D tangente ao campo de cones C_β^+ temos que Leb_D quase todo ponto tem expansão não uniforme ao longo dos iterados do espaço tangente. A hipótese (1) implica na existência de um subfibrado Df-invariante e uniformemente estável. Além disto se $\lambda_s \cdot L^{-1} < 1$, temos que existe uma folheação estável absolutamente contínua tangente a este fibrado. Em particular, temos que para Leb quase todo $x \in M$, x tem expansão não uniforme ao longo de alguma direção. Segue portanto que existem uma quantidade finita de medidas SRB para f, pois f satisfaz as condições (H1), (H2), (H3) e (H4) descritas no Capítulo 2.

5.2 Derivados de endomorfismos de Anosov

Exemplo 5.2.1 (Bifurcação Pitchfork)**.** Considere $M = \mathbb{T}^3$ e $g : M \to M$ um endomorfismo Anosov linear de classe C^r, $r \geq 1$. Então g é um endomorfismo Anosov especial, ou seja, tal que os espaços instáveis independem das pré-órbitas, conforme [Prz76]. Seja $p \in M$ um ponto fixo para g. Tome $T_pM = E_p^s \oplus E_p^u$, onde $\dim\left(E_p^u\right) = 2$. Fixemos $\delta > 0$ e $B(p,\delta) \subset M$. Se δ é suficientemente pequeno podemos escrever em $B(p,\delta)$ em termos de coordenadas locais em $E_p^s \oplus E_p^u$:

$$g(x,y,z) = (\lambda_1 \cdot x, h(y,z))$$

onde $x \in E_p^s$ e $(y,z) \in E_p^u$ e $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ é o autovalor de Df na direção E_p^s, $|\lambda_1| < 1$. Sejam $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, $|\lambda_2| \geq |\lambda_3| > 1$ os autovalores de Df em E_p^u. Deformamos por isotopia a aplicação h num arco $[0,1] \ni t \mapsto h_t$ tal que:

1. $h_0 = h$;

2. h_t, $t \in [0,1]$ tem um ponto fixo p_t, continuação de p. Assumiremos sem perda de generalidade que $p_t = p$ para todo $t \in [0,1]$;

3. $h_t : B^u(\delta) \subset E_{t,p}^c \to E_{t,p}^c$ é uma aplicação C^rpara todo $t \in [0,1]$, onde $E_{t,p}^c := E_p^u$ para todo $t \in [0,1]$;

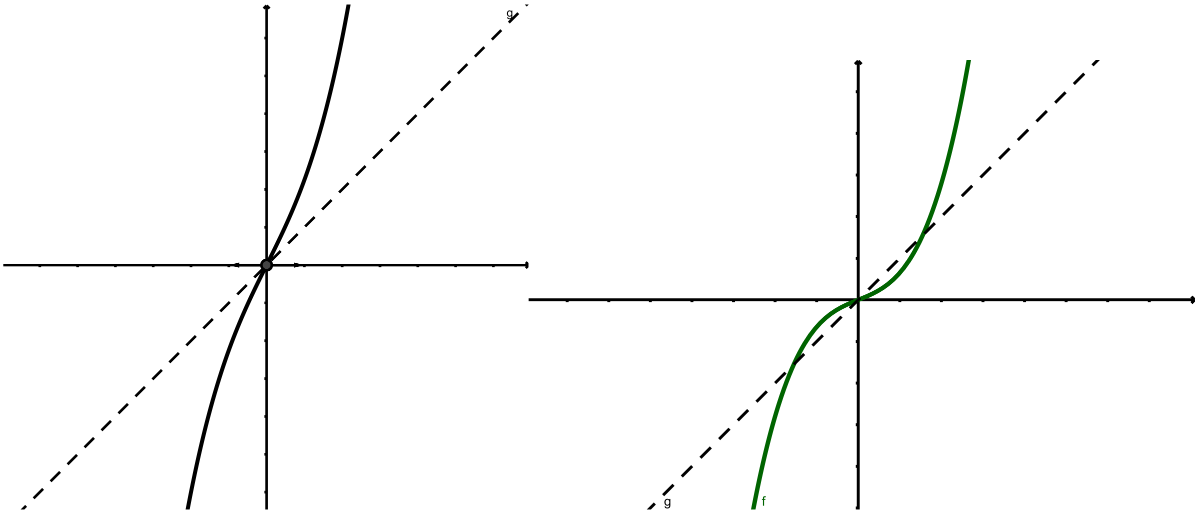

Figura 5.2.1: Antes da bifurcação existe um único ponto fixo repulsor. Após a bifurcação surgem um ponto fixo atrator e dois pontos fixos repulsores.

4. os autovalores de Dh_1 em p são λ_2 e $\rho \in \mathbb{R}$ com $|\rho| < 1$.

Suponhamos que ρ seja suficientemente próximo de 1 tal que

$$|\lambda_2 \cdot \rho| > 1.$$

Considere r suficientemente grande tal que exista $\gamma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ tal que

$$r^{(1-\gamma)} < |\lambda_2 \cdot \rho| .$$

Assuma que exista uma partição de M, $\{B_1, B_2, \ldots, B_k, B\}$ com $k \geq r$, por domínios de injetividade, onde $B = B(p, \delta)$. Note que, a menos de reduzirmos $\delta > 0$, $B(p, \delta)$, $g_t |_{B(p,\delta)}$ é injetiva para todo $t \in [0, 1]$

Consideremos então $g_t : M \to M$ dada por $g_t(x, y, z) = (\lambda \cdot x, h_t(y, z))$ em $B(p, \delta)$ e $g_t |_{M \setminus B(p,\delta)} = g |_{M \setminus B(p,\delta)}$. Observe que $TM = E_t^s \oplus E_t^c$. Definindo para $\alpha \in (0, 1)$

$$\mathcal{C}_t^s(x) := \{v = v_s \oplus v_c : \ \|v_c\| \leq \alpha \|v_s\|\}$$

e

$$\mathcal{C}_t^u(x) := \{v = v_s \oplus v_c : \ \|v_s\| \leq \alpha \|v_c\|\} .$$

Assumamos que

$$|\lambda_2 \cdot \lambda_1| < 1 \text{ e } \left|\lambda_1 \cdot \rho^{-1}\right| \leq 1.$$

Afirmamos que g_1 satisfaz as hipóteses (1), (2), (3) e (4). De fato, observe que dado $v \in \mathcal{C}^s(g_1(p))$ temos que $v = v_s \oplus v_c$ onde $v_* \in E^*_{1,p}$, $* = s, c$ e $Dg_1(p)^{-1} v =$

$Dg_1(p)^{-1} \cdot v_s + Dg_1(p)^{-1} \cdot v_c$. Então, considerando a norma da soma em TM e escrevendo $v_c = v_{c,2} \oplus v_{c,3}$ onde $v_{c,2}$ pertence ao autoespaço associado a λ_2 e $v_{c,3}$ pertence ao autoespaço associado a ρ temos que

$$\begin{aligned}\left\|Dg_1(p)^{-1} \cdot v_c\right\| &\leq \left\|Dg_1(p)^{-1} \cdot v_{c,2}\right\| + \left\|Dg_1(p)^{-1} \cdot v_{c,3}\right\| \\ &\leq |\lambda_2|^{-1} \|v_{c,2}\| + |\rho|^{-1} \|v_{c,3}\| \\ &\leq |\rho|^{-1} (\|v_{c,2}\| + \|v_{c,3}\|) = |\rho|^{-1} \|v_c\| \\ &\leq |\rho|^{-1} \alpha \|v_s\| \leq |\lambda_1| |\rho|^{-1} \cdot \alpha \left\|Dg_1(p)^{-1} \cdot v_s\right\| \\ &\leq \alpha \left\|Dg_1(p)^{-1} \cdot v_s\right\|.\end{aligned}$$

Ou seja, $Dg_1(p)^{-1} \cdot v \in \mathcal{C}_1^s(p)$. Analogamente, se $v \in \mathcal{C}_1^u(p)$ então

$$\|Dg_1(p) \cdot v_s\| \leq |\lambda_2 \lambda_1| \alpha \|Dg_1(p) \cdot v_c\| \leq \alpha \|Dg_1(p) \cdot v_c\|$$

e $Dg_1(p) \cdot v \in \mathcal{C}_1^u(p)$. Por continuidade, temos o mesmo para todo $x \in B(p, \delta)$.

Observe ainda que para $v \in \mathcal{C}_1^u(p)$ temos que $\|Dg_1(p) \cdot v\| \geq (1 - \alpha) \cdot \mu \|v\|$. Por continuidade, para $x \in B(p, \delta)$ temos

$$\|Dg_1(x) \cdot v\| \geq (1 - \alpha) \cdot \mu \|v\|.$$

Se $x \notin B(p, \delta)$, como $g_1 |_{M \setminus B(p,\delta)} = g |_{M \setminus B(p,\delta)}$ temos que

$$\|Dg_1(x) \cdot v\| \geq (1 - \alpha) \cdot \lambda_2 \|v\|.$$

Então, tomando $\mathcal{O} = B(p, \delta)$ temos que valem as propriedades (1), (2) e (4). Para verificarmos a propriedade (3), observe que $\det\left(Dg(p) |_{E^c_{1,p}}\right)$ é aproximadamente dada pelo produto $\lambda_2 \rho$. Em particular para todo $x \in B(p, \delta)$ temos a mesma estimativa (possivelmente para uma constante um pouco menor). Fora de $B(p, \delta)$, g_1 expande volume em $E^c_{1,x}$ por hipótese.

Sendo assim, g_1 admite um número finito de medidas SRB. Tomando $\mathcal{V} \subset End^r(M)$ uma vizinhança aberta de g_1 suficientemente pequena, é fácil ver que valem essas hipótese robustamente e portanto temos a estabilidade estatística destas medidas conforme Teorema 4.0.25.

Exemplo 5.2.2 (Bifurcação de Hopf)**.** Consideremos $g : M \to M$ como no exemplo 5.2.1, ou seja, um endomorfismo Anosov Linear em $M = \mathbb{T}^3$. Seja também $p \in M$ um ponto fixo e $T_pM = E^s_p \oplus E^u_p$ com $\dim\left(E^u_p\right) = 2$. Podemos repetir a construção acima considerando uma bifurcação de Hopf do ponto fixo p, deformando g por isotopia. Assumamos então que Dg possua dois autovalores complexos conjugados de valor absoluto $\rho > 1$. Obtemos então um arco $[-1,1] \ni t \to g_t$ satisfazendo:

1. para todo $t \in [-1,1]$, g_t é um endomorfismo de classe C^r com um ponto fixo p_t, continuação de p. Assumiremos por simplicidade que $p_t = p$ para todo $t \in [-1,1]$.

2. $g_{-1} = g$.

3. para todo $t < 0$, g_t é um endomorfismo Anosov. g_0 tem autovalores complexos conjugados de valor absoluto 1 restrito a $E^u_{0,p}$.

4. a bifurcação de Hopf acontece no parâmetro $t = 0$. Então para todo parâmetro $t > 0$ suficientemente pequeno temos que os autovalores de Dg_t restrito a E^c_t são ainda complexos conjugados mas tem valor absoluto menor do que 1. Para estes parâmetros surge ainda um círculo invariante C_t, em volta de p, que é repulsor. O ponto p torna-se um ponto fixo atrator.

5. $g_t \mid_{M \backslash B(p,\delta)} = g \mid_{M \backslash B(p,\delta)}$ para todo $t \in [-1,1]$

Como no exemplo anterior, o espaço $E^s_{t,x} = E^s_{-1,x}$ para todo $x \in M$ e $\left\| Dg_t \mid_{E^s_t} \right\| < \lambda < 1$. Fixemos então $f = g_{t_0}$ para algum parâmetro $t_0 > 0$ satisfazendo as assertivas acima. Denotemos por ρ_{t_0} o valor absoluto dos autovalores de $Dg_{t_0}(p)$ em $E^c_{t_0,p}$. É fácil ver a existência de cones invariantes para f. Suponha λ o autovalor de Df na direção E^s. Note que em $M \backslash B(p,\delta)$ temos que $|\det Df(x) \mid_{T_xD}| \geq |\rho|$ para todo disco tangente ao campo de cones. Em $B(p,\delta)$, $|\det Df(x) \mid_{T_xD}| \geq |\rho_{t_0}|$. Assumindo que exista $\gamma \in (0,1)$ tal que

$$\rho_{t_0}^{\gamma} \rho^{1-\gamma} > 1$$

e que $\delta > 0$ é suficientemente pequeno tal que $\{B_1, \ldots, B_p, B(p,\delta)\}$ é uma partição de M em domínios de injetividade tal que

$$p^{1-\gamma} \leq \gamma \rho \rho_{t_0}$$

temos que f satisfaz as hipóteses (1), (2), (3) e (4).

Com no exemplo anterior, é fácil ver que podemos mostrar que para todo g numa vizinhança aberta de f, g é um endomorfismo parcialmente hiperbólico com um campo de cones não uniformemente expansor.

Observação 5.2.3. Usando [Tsu05, Proposição 4.7], se nos restringimos a endomorfismos parcialmente hiperbólicos em superfícies, temos que a medida SRB aqui encontrada é também absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue na superfície.

5.3 Difeomorfismos parcialmente hiperbólicos e aplicações não uniformemente expansoras

Em [ABV00, Apêndice A], Alves, Bonatti e Viana exibiram duas classes abertas de aplicações não uniformemente hiperbólicas: a primeira delas consiste em endomorfismos não singulares de classe $C^{1+\alpha}$ para os quais vale

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \|Df\left(f^j(x)\right)^{-1}\| \leq -2c < 0 \tag{5.3.1}$$

em um conjunto com medida de Lebesgue positiva; a segunda classe é formada por difeomorfismos admitindo uma decomposição dominada invariante $TM = E^s \oplus E^c$, em que E^s é um espaço uniformemente contrator e E^c satisfaz

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \|Df\left(f^j(x)\right)^{-1} |_{E^c_{f^{j+1}(x)}} \| \leq -2c < 0 \tag{5.3.2}$$

em um conjunto H com medida de Lebesgue positiva.

Os endomorfismos satisfazendo a desigualdade (5.3.1) são ditas aplicações não uniformemente expansoras e correspondem em nosso contexto ao caso em que tomamos o fibrado E^s não trivial e o campo de cones corresponde ao fibrado tangente inteiro.

Os difeomorfismos parcialmente hiperbólicos satisfazendo (5.3.2) também satisfazem as nossas hipóteses. De fato, a equação (5.3.2) é equivalente a dizer que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \|Df\left(f^j(x)\right)^{-1} |_{E^c_{f^{j+1}(x)}} \| \leq -2c < 0$$

para todo n suficientemente grande. Então, pela continuidade da derivada, se $a > 0$ é suficientemente pequeno, podemos dizer que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \| \left(Df\left(f^j(x)\right) |_{C_a(f^j(x))}\right)^{-1} \| \leq -2c < 0$$

para todo n suficientemente grande, onde C_a é o campo de cones invariante de amplitude $a > 0$ centrado em E^c. Em outras palavras,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \| \left(Df\left(f^j(x)\right) |_{C_a(f^j(x))}\right)^{-1} \| \leq -2c < 0$$

para todo $x \in H$.

Sendo assim, nossos resultados se aplicam a difeomorfismos parcialmente hiperbólicos não singulares e transformações não uniformemente expansoras não singulares contidas em [ABV00, Apêndice A].

Capítulo 6

Perspectivas futuras

Neste trabalho mostramos a existência de medidas SRB para endomorfismos não singulares parcialmente hiperbólicos e mostramos a continuidade com respeito a topologia fraca * (estabilidade estatística) das medidas em relação a dinâmica. Dada a existência desta medida surgem questões naturais que, respondidas, levam a um maior entendimento do comportamento das órbitas do sistema do ponto de vista desta medida invariante.

Podemos também indagar sobre generalizações de nossos resultados para endomorfismos singulares ou ainda sobre outras formas de estabilidade das medidas SRB.

Neste capítulo apresentamos algumas destas questões a ser respondidas no futuro.

6.1 Endomorfismos singulares

Como salientamos anteriormente, o Teorema A é uma generalização de resultados de [ABV00] para endomorfismos não singulares parcialmente hiperbólicos. Em [ABV00], os autores também abordam o caso de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos e endomorfismos não uniformemente expansores admitindo um conjunto singular $\mathcal{S} \subset M$. Assumindo que f se comporta como uma potência da distância ao conjunto $\mathcal{S}$ em regiões próximas de $\mathcal{S}$, eles mostram que existe um número finito de medidas SRB para f ([ABV00, Teorema C e Corolário D]).

É natural então investigarmos o que ocorre com endomorfismos parcialmente hiperbólicos admitindo regiões singulares:

Pergunta 6.1.1. *Seja $f : M\backslash\mathcal{S} \to M\backslash\mathcal{S}$ um endomorfismo de classe $C^{1+\alpha}$ admitindo um subfibrado invariante contrativo, onde $\mathcal{S}$ é uma região crítica de f. Quais condições sobre $\mathcal{S}$ devemos ter para que tenhamos a existência de medidas SRB para f?*

6.2 Estabilidade estocástica

Supondo $\mathcal{V} \subset End^1(M)$ um aberto de endomorfismos não singulares parcialmente hiperbólicos com constantes uniformes, o Teorema B diz que vale a estabilidade estatística neste aberto. Ou seja, para quaisquer sequência $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{V}$ convergindo para $g \in \mathcal{V}$, se μ_n é uma sequência de probabilidades ergódicas, em que μ_n é uma medida SRB para g_n para todo $n \in \mathbb{N}$, então todo ponto de acumulação de $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ na topologia fraca * é uma combinação convexa das medidas SRB de g. Isto nos dá uma continuidade das medidas SRB com respeito à $g \in \mathcal{V}$ com a topologia fraca *.

Podemos questionar acerca da continuidade das medidas SRB com respeito a perturbações aleatórias da dinâmica. Uma perturbação aleatória de $f \in \mathcal{V}$ é uma família $(\theta_\epsilon)_{\epsilon>0}$ de probabilidades em $\mathcal{V}$ tais que existe uma vizinhança $V_\epsilon(f)$ de f para todo $\epsilon > 0$ satisfazendo:

$$supp\,(\theta_\epsilon) \subset V_\epsilon(f) \;\text{ e }\; \bigcap_{\epsilon>0} V_\epsilon(f) = \{f\}\,.$$

Ademais, $V_{\epsilon_1}(f) \subset V_{\epsilon_2}(f)$ se $\epsilon_1 < \epsilon_2$. Considere o skew product

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathcal{V}^{\mathbb{N}} \times M & \to & \mathcal{V}^{\mathbb{N}} \times M \\ & (\underline{f}, x) & \mapsto & (\sigma(\underline{f}), f_0(x)) \end{array},$$

onde $\underline{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots)$ e $\sigma : \mathcal{V}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{V}^{\mathbb{N}}$ dado por

$$\sigma(f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots) = (f_1, \ldots, f_n, \ldots)\,.$$

Uma medida μ^ϵ em M é dita uma medida estacionária se a medida $\theta^{\mathbb{N}} \times \mu^\epsilon$ é uma medida invariante em $\mathcal{V}^{\mathbb{N}} \times M$. Diremos então que f é estocasticamente estável se para uma sequência de medidas estacionárias $(\mu^\epsilon)_{\epsilon>0}$ qualquer ponto de acumulação é uma combinação convexa das medidas SRB de f.

Temos a estabilidade estocástica para abertos de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos (veja [AAV07]). Então esperamos uma resposta positiva para a seguinte questão:

Pergunta 6.2.1. *Se f é um endomorfismo não singular parcialmente hiperbólico e existe uma vizinhança $\mathcal{V} \subset End^1(M)$ de f constituída de endomorfismos não singulares e parcialmente hiperbólicos então f é estocasticamente estável?*

6.3 Continuidade absoluta da medida SRB com respeito a medida de Lebesgue

Em [Tsu05, Proposição 4.7], o autor mostra que, para endomorfismos parcialmente hiperbólicos não singulares em superfícies, medidas SRB hiperbólicas são absolutamente contínuas com respeito a medida de volume na superfície, não somente ao longo de variedade instáveis. Intuitivamente, a continuidade absoluta é obtida a partir do estudo das interseções de iterações de discos instáveis com uma fixada vizinhança da variedade. Deduz-se a continuidade absoluta com respeito a medida de Lebesgue na superfície a partir da continuidade absoluta ao longo das variedades instáveis. Comportamentos similares podem ser observados em nosso contexto de endomorfismos não singulares parcialmente hiperbólicos em dimensão finita qualquer, o que nos leva a seguinte questão:

Pergunta 6.3.1. *Se μ é uma medida SRB para um endomorfismo não singular parcialmente hiperbólico f então μ é absolutamente contínua com respeito a Lebesgue?*

6.4 Propriedades estatísticas da medida SRB

Se f é um endomorfismo não singular parcialmente hiperbólico satisfazendo (H1), (H2), (H3) e (H4) e μ é uma medida SRB para f dada pelo Teorema A então μ é uma medida física (Lema 3.5.4). Lembremos que uma medida μ é dita uma medida física se a sua bacia

$$B(\mu) := \left\{ x \in M : \text{ existe } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} = \mu \right\}$$

tem medida de Lebesgue positiva. Ademais, se f é transitiva e o conjunto H da hipótese (H3) tem medida de Lebesgue total então esta medida física é única e $B(\mu)$ também tem medida de Lebesgue total. Em particular, dada $\varphi : M \to \mathbb{R}$ uma função contínua o conjunto

$$D_\varphi(\mu) := \left\{ x \in M : \text{ existe } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi\left(f^j(x)\right) = \int \varphi d\mu \right\}$$

tem medida de Lebesgue total. Consequentemente, se definirmos para $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$

$$D_\varphi(\mu, n, \epsilon) := \left\{ x \in M : \left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi\left(f^j(x)\right) - \int \varphi d\mu \right| \geq \epsilon \right\}$$

então $\lim_{n\to\infty} Leb\left(D_\varphi(\mu, n, \epsilon)\right) = 0$. Surge então a questão das taxas de convergência deste limite o que chamamos de taxa de grandes desvios para a medida μ. Taxas de grandes desvios para medidas SRB para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos foram provadas em [AP10]. É natural então buscar responder a seguinte:

Pergunta 6.4.1. *Que tipo de taxa de grandes desvios para a medida SRB μ para o endomorfismo parcialmente hiperbólico f podemos obter e para qual classe de observáveis podemos obter tais taxas?*

Uma outra propriedade estatística para o conhecimento do comportamento da dinâmica é o decaimento de correlações. Dados dois observáveis $\varphi, \psi : M \to \mathbb{R}$, definimos a função correlação, para cada $n \in \mathbb{N}$, como sendo

$$C_n(\varphi, \psi) := \left| \int (\varphi \circ f^n) \cdot \psi d\mu - \int \varphi d\mu \cdot \int \psi d\mu \right|.$$

Para determinadas classes de observáveis é possível mostrar que esta função converge a zero quando n tende a infinito e exibir taxas para esta convergência. Por exemplo, para observáveis Hölder contínuos com respeito a difeomorfismos parcialmente hiperbólicos como em [ABV00], temos condições para taxas de decaimento de correlações polinomiais (ver [AP10]). É intuitivo investigar o que acontece no contexto de um endomorfismo em geral:

Pergunta 6.4.2. *Para qual classe de observáveis podemos obter taxas de decaimento de correlações? Que tipo de taxas podemos obter?*

Uma forma de obter respostas para a pergunta anterior seria uma adaptação da construção de torres de Young (veja por exemplo [AP10]) para o contexto de endomorfismos parcialmente hiperbólicos e adaptar os resultados devidos a L.S. Young ([You98, You99]).

Referências Bibliográficas

[AAV07] ALVES, José F. ; ARAÚJO, Vítor ; VÁSQUEZ, Carlos H.: Stochastic stability of non-uniformly hyperbolic diffeomorphisms. In: *Stochastics and Dynamics* 7 (2007), Nr. 03, S. 299–333

[ABV00] ALVES, José F. ; BONATTI, Christian ; VIANA, Marcelo: SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding. In: *Inventiones Mathematicae* 140 (2000), Nr. 2, S. 351–398

[ACF10a] ALVES, Jose F. ; CARVALHO, Maria ; FREITAS, Jorge M.: Statistical stability and continuity of SRB entropy for systems with Gibbs-Markov structures. In: *Communications in Mathematical Physics* 296 (2010), Nr. 3, S. 739–767

[ACF10b] ALVES, Jose F. ; CARVALHO, Maria ; FREITAS, Jorge M.: Statistical stability for Hénon maps of the Benedicks–Carleson type. In: *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis* Bd. 27 Elsevier, 2010, S. 595–637

[ADLP15] ALVES, Jose F. ; DIAS, Carla L. ; LUZZATTO, Stefano ; PINHEIRO, Vilton: SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is weakly expanding. In: *arXiv preprint arXiv:1403.2937* (2015)

[AH94] AOKI, Nobuo ; HIRAIDE, Kōichi: *Topological theory of dynamical systems: recent advances*. Bd. 52. Elsevier, 1994

[Alv00] ALVES, José F.: SRB measures for non-hyperbolic systems with multidimensional expansion. In: *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure* Bd. 33, 2000, S. 1–32

[AP10] ALVES, José F. ; PINHEIRO, Vilton: Gibbs–Markov structures and limit laws for partially hyperbolic attractors with mostly expanding central direction. In: *Advances in Mathematics* 223 (2010), Nr. 5, S. 1706–1730

[BG05] BURNS, Keith ; GIDEA, Marian: *Differential Geometry and Topology: With a view to dynamical systems*. CRC Press, 2005

[Bow75] Bowen, Rufus: *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*. Bd. 470. Springer, 1975

[BP07] Barreira, Luis ; Pesin, Yakov: *Non uniform hyphyperbolic: dynamics of systems with non zero Lyapunov exponents*. Cambridge University Press, 2007

[BV00] Bonatti, Christian ; Viana, Marcelo: SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly contracting. In: *Israel Journal of Mathematics* 115 (2000), Nr. 1, S. 157–193

[BY93] Benedicks, Michael ; Young, Lai-Sang: Sinai-Bowen-Ruelle measures for certain Hénon maps. In: *The Theory of Chaotic Attractors*. Springer, 1993, S. 364–399

[Car93] Carvalho, Maria: Sinai–Ruelle–Bowen measures for N-dimensional derived from Anosov diffeomorphisms. In: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 13 (1993), Nr. 01, S. 21–44

[CDP16] Climenhaga, Vaughn ; Dolgopyat, Dmitry ; Pesin, Yakov: Non-Stationary Non-Uniform Hyperbolicity: SRB Measures for Dissipative Maps. In: *Communications in Mathematical Physics* 346 (2016), Nr. 2, S. 553–602

[CV13] Castro, Armando ; Varandas, Paulo: Equilibrium states for non-uniformly expanding maps: decay of correlations and strong stability. In: *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis* Bd. 30 Elsevier, 2013, S. 225–249

[DL08] Demers, Mark ; Liverani, Carlangelo: Stability of statistical properties in two-dimensional piecewise hyperbolic maps. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 360 (2008), Nr. 9, S. 4777–4814

[LY85] Ledrappier, François ; Young, Lai-Sang: The metric entropy of diffeomorphisms: Part I: Characterization of measures satisfying Pesin's entropy formula. In: *Annals of Mathematics* (1985), S. 509–539

[Mañ87] Mañé, Ricardo: *Ergodic theory and differentiable dynamics*. Bd. 8. Springer-Verlag Berlin, 1987

[Maz08] Mazur, Marcin: On some useful conditions for hyperbolicity. In: *Trends in Mathematics - New Series* 10 (2008), Nr. 2, S. 57–64

[Mih10a] Mihailescu, Eugen: Asymptotic distributions of preimages for endomorphisms. In: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 31 (2010), Nr. 3, S. 911–934

[Mih10b] Mihailescu, Eugen: Physical measures for multivalued inverse iterates near hyperbolic repellors. In: *Journal of Statistical Physics* 139 (2010), Nr. 5, S. 800–819

[Mih12a] Mihailescu, Eugen: Approximations for Gibbs states of arbitrary Hölder potentials on hyperbolic folded sets. In: *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 32 (2012), Nr. 3, S. 961–975

[Mih12b] Mihailescu, Eugen: Equilibrium measures, prehistories distributions and fractal dimensions for endomorphisms. In: *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 32 (2012), Nr. 7, S. 2485–2502

[MT14] Micena, Fernando ; Tahzibi, Ali: On the unstable directions and Lyapunov exponents of Anosov endomorphisms. In: *arXiv preprint arXiv:1412.0629* (2014)

[MT16] Mehdipour, Pouya ; Tahzibi, Ali: SRB measures and homoclinic relation for endomorphisms. In: *Journal of Statistical Physics* 163 (2016), Nr. 1, S. 139–155

[MU14] Mihailescu, Eugen ; Urbański, Mariusz: Measure-theoretic degrees and topological pressure for non-expanding transformations. In: *Journal of Functional Analysis* 267 (2014), Nr. 8, S. 2823–2845

[New04] Newhouse, Sheldon: Cone-fields, domination, and hyperbolicity. In: *Modern dynamical systems and applications* (2004), S. 419–432

[OV08] Oliveira, Krerley ; Viana, Marcelo: Thermodynamical formalism for robust classes of potentials and non-uniformly hyperbolic maps. In: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 28 (2008), Nr. 02, S. 501–533

[Pin06] Pinheiro, Vilton: Sinai–Ruelle–Bowen measures for weakly expanding maps. In: *Nonlinearity* 19 (2006), Nr. 5, S. 1185–1200

[Prz76] Przytycki, Feliks: Anosov endomorphisms. In: *Studia mathematica* 3 (1976), Nr. 58, S. 249–285

[Qiu11] Qiu, Hao: Existence and Uniqueness of SRB Measure on C^1 Generic Hyperbolic Attractors. In: *Communications in Mathematical Physics* 302 (2011), Nr. 2, S. 345–357

[QXZ09] Qian, Min ; Xie, Jian-Sheng ; Zhu, Shu: *Smooth ergodic theory for endomorphisms*. Springer, 2009

[QZ95] Qian, Min ; Zhang, Zhusheng: Ergodic theory for Axiom A endomorphisms. In: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 15 (1995), Nr. 01, S. 161–174

[QZ02] Qian, Min ; Zhu, Shu: SRB measures and Pesin's entropy formula for endomorphisms. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 354 (2002), Nr. 4, S. 1453–1471

[Rok49] Rokhlin, Vladimir A.: On the fundamental ideas of measure theory. In: *Matematicheskii Sbornik* 67 (1949), Nr. 1, S. 107–150

[Rue76] Ruelle, David: A measure associated with axiom-A attractors. In: *American Journal of Mathematics* (1976), S. 619–654

[Rue78] Ruelle, David: *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Bd. 5: *Thermodynamic formalism*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass, 1978

[Shu87] Shub, Michael: *Global stability of dynamical systems*. Springer - Verlag, 1987

[Sin72] Sinai, Yakov G.: Gibbs measures in ergodic theory. In: *Russian Mathematical Surveys* 27 (1972), Nr. 4, S. 21–70

[Tsu00] Tsujii, Masato: Absolutely continuous invariant measures for piecewise real-analytic expanding maps on the plane. In: *The Theory of Chaotic Attractors*. Springer, 2000, S. 425–442

[Tsu01] Tsujii, Masato: Absolutely continuous invariant measures for expanding piecewise linear maps. In: *Inventiones mathematicae* 143 (2001), Nr. 2, S. 349–373

[Tsu05] Tsujii, Masato: Physical measures for partially hyperbolic surface endomorphisms. In: *Acta mathematica* 194 (2005), Nr. 1, S. 37–132

[UW04] Urbanski, Mariusz ; Wolf, Christian: SRB measures for Axiom A endomorphisms. In: *Math. Res. Lett* 11 (2004), Nr. 5-6, S. 785–797

[Vás07] Vásquez, Carlos H.: Statistical stability for diffeomorphisms with dominated splitting. In: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 27 (2007), Nr. 01, S. 253–283

[VV10] Varandas, Paulo ; Viana, Marcelo: Existence, uniqueness and stability of equilibrium states for non-uniformly expanding maps. In: *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis* 27 (2010), Nr. 2, S. 555–593

[Wal00] Walters, Peter: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 79: *An introduction to ergodic theory*. 1. Springer-Verlag New York, 2000

[You98] Young, Lai-Sang: Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity. In: *Annals of Mathematics* 147 (1998), Nr. 3, S. 585–650

[You99] Young, Lai-Sang: Recurrence times and rates of mixing. In: *Israel Journal of Mathematics* 110 (1999), Nr. 1, S. 153–188

[Zhu98] Zhu, Shu: Unstable manifolds for endomorphisms. In: *Science in China Series A: Mathematics* 41 (1998), Nr. 2, S. 147–157

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA
CEP: 40170 -110
<http://www.pgmat.ufba.br>