



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PGMAT
TESE DE DOUTORADO



COTA SUPERIOR DE GRANDES DESVIOS PARA
SUMIDOUROS HIPERBÓLICOS SINGULARES

ANDRÊSSA LIMA DE SOUZA

Salvador-Bahia
Fevereiro de 2017

COTA SUPERIOR DE GRANDES DESVIOS PARA SUMIDOUROS HIPERBÓLICOS SINGULARES

ANDRÊSSA LIMA DE SOUZA

Tese de Doutorado apresentada ao Colegiado do programa de doutorado em Matemática UFBA/UFAL como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: . Prof. Dr. Vitor Domingos Martins de Araújo

Salvador-Bahia

Fevereiro de 2017

Souza, Andrêssa Lima de.

Cota superior de grandes desvios para sumidouros hiperbólicos singulares / Andrêssa Lima de Souza. – Salvador: UFBA, 2017.

84 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Vitor Domingos Martins de Araújo .

Tese (doutorado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Doutorado em Matemática UFBA/UFAL, 2017.

Referências bibliográficas.

1. Sumidouro 2. Atrator. 3. Conjunto hiperbólico singular. 4. Grandes desvios. 5. Aproximação exponencialmente lenta. 6. Transformações expansoras por pedaços com singularidades. I. Araújo, Vitor . II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Cota superior de grandes desvios para sumidouros hiperbólicos singulares .

CDU : 517.938

COTA SUPERIOR DE GRANDES DESVIOS PARA SUMIDOUROS HIPERBÓLICOS SINGULARES

ANDRÊSSA LIMA E SOUZA

Tese de Doutorado apresentada ao Colegiado do programa de doutorado em Matemática da UFBA/UFAL como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática, aprovada em 09 de fevereiro de 2017.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Vitor Domingos Martins de Araújo (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Paulo César Rodrigues Pinto Varandas
UFBA

Prof. Dr. Thiago Bomfim São Luis Nunes
UFBA

Prof. Dr. Kleyber Mota da Cunha
UFBA

Profa. Dra. Maria José Pacífico
UFRJ

Agradecimentos

Aos meus pais pela dádiva da vida, apoio e suporte durante todos esses anos. Aos meus irmãos Raissa e Artur Gabriel pelo amor.

A minha avó Eunice que sempre me guiou pelo melhor caminho. Sem suas palavras, amor e dedicação jamais chegaria tão longe.

Ao meu marido Anderson que foi meu porto seguro, meu companheiro e minha inspiração para continuar. Sem ele tudo seria mais difícil, o seu amor me torna uma pessoa melhor a cada dia.

A minha família, em especial minha tia Aldenice pelo seu amor e por nunca se afastar de mim, mesmo quando os estudos apertavam.

Ao meu orientador Vitor Araújo, por toda dedicação. Sempre amigo e compreensivo e ao mesmo tempo exigente para que eu sempre pudesse ir além.

A Paulo Varandas que foi um excelente orientador no mestrado e que muito me ajudou no doutorado.

Aos meus amigos da pós-graduação em Matemática da UFBA, em especial a Elen, Alejandra, Thiago, Roberto, Marcus, Jacqueline, Edward, Wesley.

A Teófilo que foi, desde a minha graduação, o meu maior incentivador. Teve papel fundamental em momentos decisivos no meu doutorado.

Aos professores Paulo Varandas, Thiago Bomfim, Kleyber Mota e Maria José Pacífico por aceitarem participar da comissão julgadora desta tese e pelas sugestões para o trabalho.

Ao professor Jorge Freitas pela orientação no período do doutorado sanduíche na Universidade do Porto.

Aos professores da pós-graduação da UFBA pelos ensinamentos durante minha formação. Aos servidores da secretária pela disponibilidade em ajudar, especialmente Davilene.

À todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para que eu pudesse alcançar esse título.

Finalmente, a Capes pelo suporte financeiro durante o doutorado e o doutorado sanduíche.

Resumo

Neste trabalho obtemos uma cota superior para a taxa exponencial de grandes desvios para observáveis contínuos em semifluxos de suspensão sobre uma base unidimensional não-uniformemente expansora com singularidades não-flat ou descontinuidades, onde a função teto que define a suspensão se comporta como o logaritmo da distância para o conjunto singular/descontínuo da aplicação base. Para obtermos tal cota, mostramos que a transformação da base apresenta recorrência exponencialmente lenta para o conjunto descontínuo. Os resultados são aplicados, em particular, para semifluxos que modelam sumidouros hiperbólicos singulares em variedades tridimensionais não necessariamente transitivos. Como corolários obtemos taxas de escape de subconjuntos destes sumidouros sem medida total e resultado de existência de medida física para classes de transformações do intervalo expansoras por pedaços com singularidades.

Palavras chaves: Sumidouro, atrator, conjunto hiperbólico-singular, grandes desvios, aproximação exponencialmente lenta, transformações expansoras por pedaços com singularidades.

Abstract

We obtain an exponential large deviation upper bound for continuous observables on suspension semiflows over a non-uniformly expanding base transformation with non-flat singularities or criticalities, where the roof function defining the suspension behaves like the logarithm of the distance to the singular/discontinuous set of the base map. To obtain this upper bound, we show that the base transformation exhibits exponential slow recurrence to the singular set. The results are applicable in particular to semiflows modeling singular-hyperbolic attracting sets of three-dimensional flows. As corollary of the methods we obtain a result on the existence of physical measure for classes of piecewise expanding maps of the interval with singularities. We are also able to obtain exponentially fast escape rates from subsets without full measure.

Keywords: Attracting set, attractor, singular-hyperbolic set, large deviations, exponentially slow approximation, piecewise expanding transformation with singularities.

Sumário

Introdução	1
0.1 Resultados Principais	2
0.2 Recorrência exponencialmente lenta ao conjunto de descontinuidades/ singularidades	3
0.3 Sobre a prova dos resultados	5
0.4 Organização do texto	6
1 Preliminares	8
1.1 Definições Gerais	8
1.1.1 Equações diferenciais ordinárias	8
1.1.2 Hiperbolicidade	10
1.2 Hiperbolicidade Singular	11
1.2.1 Sumidouros hiperbólicos-singulares	13
1.3 Algumas propriedades dos conjuntos hiperbólicos singulares	14
1.4 Transformações não uniformemente expansoras	18
1.5 Equivalência entre medidas SRB e estados de equilíbrio	21
2 Aplicação Global de Primeiro Retorno de Poincaré	24
2.1 Folheações estáveis	24
2.2 Seções Transversais e Aplicação de Poincaré	25
2.2.1 Suavidade de holonomias em seções transversais	26
2.2.2 Aplicações de Poincaré	28
2.2.3 Quocientando localmente sobre a folheação estável	29
2.2.4 Hiperbolicidade do mapa de Poincaré	29
2.2.5 Seções transversais adaptadas	30
2.2.6 Seção δ -adaptada numa vizinhança de todo ponto regular	32
2.2.7 Suavidade e expansão do quociente da aplicação de Poincaré sobre as folhas estáveis	34
2.3 Aplicação de Poincaré perto das singularidades	34

2.4	Transformação Global de Poincaré	36
2.4.1	Número finito de faixas no domínio da aplicação global de Poincaré	40
2.4.2	Integrabilidade do tempo de retorno global de Poincaré τ	40
2.5	Aplicação bidimensional F	41
3	Aplicação unidimensional induzida e densidade das variedades estáveis das singularidades	43
3.1	Propriedades da aplicação unidimensional f	43
3.1.1	Propriedades topológicas da dinâmica de f	44
3.1.2	Propriedades ergódicas de f	45
3.1.3	Medidas absolutamente contínuas e órbitas periódicas destacadas	46
3.2	Densidade de variedades estáveis de singularidades	47
3.2.1	Prova do item 6 do Teorema 1.3.5	48
3.2.2	Intersecções transversais entre variedades instáveis de órbitas periódicas e variedades estáveis de singularidades	48
4	Grandes desvios para sumidouros hiperbólicos singulares	50
4.1	Cota superior para grandes desvios	51
4.1.1	Redução à dinâmica nas seções adaptadas e ao quociente sobre folhas estáveis	51
4.1.2	Redução à dinâmica unidimensional	52
4.2	Grandes desvios para observáveis com cota logarítmica perto do conjunto descontínuo/singular	55
4.2.1	Semifluxos com altura com cota logarítmica nas singularidades e aproximação exponencialmente lenta.	57
4.2.2	Redução para a dinâmica da base.	58
4.2.3	A função teto como observável sobre a dinâmica da base.	59
4.2.4	Usando φ como observável sobre a dinâmica da base.	60
5	Recorrência Exponencialmente Lenta	62
5.1	Condições gerais e enunciado do resultado	62
5.2	Partição inicial e refinamento	63
5.2.1	Refinando a Partição	65
5.2.2	Distorção Limitada	66
5.3	Medida dos átomos de \mathcal{P}_n	67
5.4	Média do logaritmo da distância à \mathcal{D}	71
5.5	Medida dos pontos com recorrência ruim	75

6	Perspectivas futuras	76
6.1	Extensão para classe de sumidouros singulares em dimensão mais alta . . .	76
6.2	Sumidouros para campos com menos regularidade	77
6.3	Extensão do resultado unidimensional	77

Introdução

Um dos conceitos mais importantes em Sistemas Dinâmicos é a noção de medida física (SRB) para um fluxo ou transformação. Diz-se que uma medida de probabilidade invariante μ para um fluxo X^t em uma variedade compacta é física se o conjunto de pontos z tais que, para toda função contínua ψ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \psi(X^s(z)) ds = \int \psi d\mu,$$

tem medida de Lebesgue positiva no espaço ambiente. Equivalentemente, definimos bacia de uma probabilidade invariante μ como sendo o subconjunto de pontos $z \in M$ tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \delta(X^j(z)) = \mu$ na topologia fraca* e uma medida física é aquela cuja bacia tem volume positivo.

Dos primeiros trabalhos sobre existência de medidas físicas destacamos os trabalhos de Sinai, Ruelle e Bowen, em [29, 30, 47, 48, 53], nos quais é provada a existência dessas medidas para difeomorfismos e fluxos uniformemente hiperbólicos. Mais recentemente, Alves, Bonatti e Viana, em [5], mostraram existência para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos e aplicações não-uniformemente expansoras. E, mais próximo do nosso contexto, destacamos o trabalho de Araújo, Pacífico, Pujals e Viana ([15]) que prova a existência para atratores hiperbólicos singulares em dimensão três. Tais medidas para aplicações e fluxos não uniformemente hiperbólicos foram obtidas recentemente [44, 32, 25, 26, 8, 5].

Mostrado que estas medidas existem, é natural considerar a taxa de convergência das médias temporais para a média espacial. Essa taxa pode ser medida pelo volume do subconjunto de pontos cujas médias temporais estão afastadas da média espacial por uma quantidade fixada, até certo tempo de evolução. Precisamente, se fixarmos $\epsilon > 0$, uma margem de erro, e considerarmos o conjunto

$$B_T = \left\{ x : \left| \frac{1}{T} \int_0^T \psi(X^s(x)) ds - \int \psi d\mu \right| > \epsilon \right\},$$

procuramos condições sob as quais a sua medida de Lebesgue decai exponencialmente rápido, isto é, se existem constantes $C, \xi > 0$ tais que

$$\text{Leb}(B_T) \leq Ce^{-\xi T}, \text{ para todo } T > 0.$$

Esta taxa está relacionada com o formalismo termodinâmico, primeiro desenvolvido para difeomorfismos uniformemente hiperbólicos por Bowen, Ruelle e Sinai (veja por exemplo [29, 30, 49, 50, 33, 28, 44], entre outros). Estes autores estudaram sistematicamente a construção e propriedades de medidas físicas para difeomorfismos e fluxos hiperbólicos. As propriedades estatísticas de medidas físicas são um objeto de intenso estudo, veja por exemplo [30, 40, 54, 55, 27, 3, 4, 7, 35, 18, 12]. A principal ideia por trás destes esforços é que a família $\{\psi \circ X^t\}_{t>0}$, assintoticamente, comporta-se em muitos aspectos como uma variável aleatória i.i.d..

0.1 Resultados Principais

O estudo dos fluxos de suspensão é motivado pela modelagem de um fluxo que admite uma seção-transversal global. Tal fluxo é equivalente a um semifluxo de suspensão sobre a aplicação de retorno de Poincaré para a seção transversal com função teto dada pela função tempo de retorno para os pontos da seção. Isto é uma das principais ferramentas técnicas na teoria ergódica de fluxos Axiomas A (ou uniformemente hiperbólicos) desenvolvidas por Bowen e Ruelle [30], permitindo passar deste tipo de fluxo para um fluxo de suspensão sobre um shift com número finito de símbolos e função teto limitada. Então, as propriedades da transformação base são usados para deduzir muitos resultados para o fluxo de suspensão, que são então passados para o fluxo original.

Em [13], Araújo obteve uma cota superior de grandes desvios exponencial para observáveis contínuos em semifluxos de suspensão sobre uma transformação base não uniformemente expansora com singularidades não-flat ou criticalidades, onde a função teto que define a suspensão comporta-se como a distância logaritmica para o conjunto singular/crítico da transformação base. Estendemos aqui este resultado de grandes desvios para a medida de volume obtido para atratores geométricos de Lorenz, provando o mesmo para sumidouros hiperbólicos-singulares em variedades tridimensionais sem assumir transitividade. Isto nos obrigou a, primeiro, generalizar a construção de uma aplicação global de Poincaré obtida em [15] via seções adaptadas do fluxo, construídas agora sem assumir transitividade; segundo, a lidar com a possível existência de diversas medidas físicas, em número finito, cujas combinações lineares convexas formam o conjunto denotado por \mathbb{E} de todos os estados de equilíbrio destes conjuntos em relação ao potencial dado pelo logaritmo do jacobiano centro-instável do fluxo, e que exigiram uma modificação simples da redução do conjunto de desvios do fluxo para uma transformação unidimensional.

Finalmente, e tecnicamente mais delicado, generalizamos a prova, dada em [13]

para uma transformação expansora por pedaços do intervalo com descontinuidades singulares, da recorrência exponencialmente lenta para transformações expansoras por pedaços com singularidades e descontinuidades. Provamos assim o seguinte resultado:

Teorema A. *Seja X^t um fluxo em uma variedade tridimensional exibindo um sumidouro hiperbólico singular com região armadilha \mathcal{U} . Denote por Leb a restrição normalizada da medida de Lebesgue em \mathcal{U} e assuma que o sumidouro tem volume zero e todas as singularidades são do tipo Lorenz. Seja $\psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada, então para qualquer $\epsilon > 0$*

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log Leb \left\{ z \in \mathcal{U} : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{1}{T} \int_0^T \psi(X^t(z)) dt - \mu(\psi) \right| > \epsilon \right\} < 0.$$

Este resultado nos permite obter informações sobre a taxa de escape de um compacto em \mathcal{U} . Precisamente, fixe $K \subset \mathcal{U}$ um subconjunto compacto. Dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar um conjunto aberto $W \supset K$ contido em \mathcal{U} e uma função bossa contínua $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $Leb(W \setminus K) < \epsilon$ com $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi|_K \equiv 1$ e $\varphi|_{M \setminus W} \equiv 0$. Então, obtemos para $T > 0$

$$\{z \in K : X^t(z) \in K, 0 < t < T\} \subset \left\{ z \in \mathcal{U} : \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(X^t(z)) dt \geq 1 \right\},$$

e deduzimos o seguinte, usando o Teorema A:

Corolário B. *No mesmo contexto do Teorema A. Seja K um subconjunto compacto de M tal que $\inf_{\mu \in \mathbb{E}} \mu(K) < 1$. Então,*

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log Leb (\{z \in K : X^t(z) \in K, 0 < t < T\}) < 0.$$

Para provar o Teorema A usamos a propriedade de aproximação exponencialmente lenta às singularidades de uma transformação unidimensional, obtida por quociente sobre folheação uniformemente contrativa da dinâmica de uma certa transformação de retorno Poincaré a uma família finita de seções adaptadas.

0.2 Recorrência exponencialmente lenta ao conjunto de descontinuidades/ singularidades

Nos Capítulos 2 e 3 veremos que para um conjunto aberto e denso de campos de vetores X de classe C^2 tendo um sumidouro hiperbólico singular Λ em uma variedade tridimensional, existe uma família finita Ξ de seções transversais e uma aplicação global de Poincaré $R : \Xi_0 \rightarrow \Xi$, $R(x) = X^{\tau(x)}(x)$, para alguma $\tau : \Xi \rightarrow \mathbb{R}_+$ função tempo

de retorno e $\Xi_0 = \Xi \setminus \Gamma$, em que Γ é uma família finita de arcos suaves. Ademais, escolhendo coordenadas adequadas em Ξ a aplicação R pode ser escrita como $F : \tilde{Q} \rightarrow Q$, $F(x, y) = (f(x), g(x, y))$ e a função $f : \mathbb{I} \setminus \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{I}$, onde $\mathbb{I} = [0, 1]$ e $\mathcal{D} \subset \mathbb{I}$ é um conjunto finito de pontos, é monótona, $C^{1+\alpha}$ em pedaços com $n + 1$ ramos definidos nas componentes conexas de $\mathbb{I} \setminus \mathcal{D}$ e tem um conjunto finito de medidas invariantes absolutamente contínuas (a.c.i.m.), μ_f^i . Mostraremos que a aplicação f satisfaz a condição de aproximação exponencialmente lenta ao conjunto de descontinuidades e singularidades.

Denotamos $\Delta_\delta(x) = |\log \text{dist}_\delta(x, \mathcal{S})|$ a distância logarítmica δ -truncada de $x \in M$ à \mathcal{S} , isto é, $\Delta_\delta(x)$ é não negativa e contínua longe de \mathcal{S} , identicamente nula 2δ -longe de \mathcal{S} , e igual a $-\log \text{dist}(x, \mathcal{S})$ quando $\text{dist}(x, \mathcal{S}) \leq \delta$ e toma valores entre 0 e $-\log \delta$ para x tal que $\text{dist}(x, \mathcal{S}) < 2\delta$.

De fato, mostramos esta propriedade para transformações expansoras possivelmente com infinitos ramos, como segue:

Teorema C. *Seja $f : \mathbb{I} \setminus \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{I}$ uma função unidimensional monótona, $C^{1+\alpha}$ em pedaços com ramos monótonos definidos nas componentes conexas de $\mathbb{I} \setminus \mathcal{D}$ tal que $\inf |f'| > 1$ onde está definida. Além disso, assuma que o conjunto \mathcal{D} seja enumerável e que se divida em dois subconjuntos \mathcal{S} e $\mathcal{D} \setminus \mathcal{S}$, em que $\mathcal{S} \neq \emptyset$ é o conjunto finito das singularidades satisfazendo:*

1. *para todo $b \in \mathcal{D}$ existem os limites laterais $f(b^\pm) = \lim_{t \rightarrow b^\pm} f(t)$;*
 - (a) *existe $L \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $b \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{S}$ existe $T(b^\pm) \leq L$ tal que $f^{T(b^\pm)}(b^\pm) \in \mathcal{S}$;*
 - (b) *para todo $b \in \mathcal{S}$ existe $0 < \alpha = \alpha(b) < 1$ e, existe e é finito e não nulo algum (ou ambos) dos limites laterais $\lim_{t \rightarrow b^\pm} |t - b|^{1-\alpha} f'(t)$.*

Tal função tem recorrência exponencialmente lenta ao conjunto das descontinuidades/singularidades \mathcal{D} , ou seja, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{Leb} \left\{ x \in \mathbb{I} : \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \Delta_\delta(f^j(x)) > \epsilon \right\} < 0.$$

Neste resultado, assumimos que cada ponto de descontinuidade com derivada finita seja enviado para outro ponto de descontinuidade com derivada infinita; que cada ponto de descontinuidade seja não degenerado; e que o número de pontos com derivada infinita seja finito.

Exemplos de aplicação são os sumidouros hiperbólicos-singulares: eles induzem uma transformação unidimensional com estas propriedades, que de fato tem um número finito de ramos.

Por resultados bem conhecidos sobre transformações não uniformemente expansoras (veja por exemplo a Seção 4 do Capítulo 1) o Teorema C garante também a existência de número finito de medidas invariantes ergódicas e absolutamente contínuas para transformações na classe dada no Teorema C. Mais precisamente,

Corolário 0.2.1. *Seja f nas condições do Teorema C. Existe uma quantidade finita de medidas invariantes ergódicas absolutamente contínuas com respeito a Lebesgue.*

Este resultado generaliza resultados bem conhecidos de existência de probabilidade invariante absolutamente contínua para transformação expansoras por pedaços do intervalo de classe $C^{1+\alpha}$, possibilitando uma infinidade de ramos e fornecendo também informação estatística sobre a recorrência de quase todas as órbitas aos bordos dos domínios de monotonia da transformação. Em particular, segue da aproximação exponencialmente lenta, que a cauda da função primeiro tempo hiperbólico desta classe de transformações é exponencial, o que nos fornece outras propriedades estatísticas muito fortes para as probabilidades invariantes absolutamente contínuas destas transformações; veja [7], [45] e [6].

0.3 Sobre a prova dos resultados

A prova destes resultados exigiu a generalização da construção de seções adaptadas obtidas pela primeira vez em [15] para o caso de um atrator hiperbólico-singular (um sumidouro hiperbólico-singular transitivo) e a dedução de certas propriedades topológicas das variedades estáveis das singularidades destes sumidouros.

Em [15] a construção de seções adaptadas, necessárias para a redução da dinâmica do fluxo a uma aplicação global de Poincaré, foi feita assumindo existência de órbita densa no sumidouro. Generalizamos esta construção para sumidouros hiperbólicos singulares assumindo que o volume destes é zero, garantindo em particular que eles não têm pontos interiores. Esta suposição de volume zero é natural visto que se sabe (pelo trabalho de [2]) que um sumidouro hiperbólico singular transitivo próprio de um campo C^2 tem necessariamente volume zero.

Em [13] a aproximação exponencialmente lenta foi obtida para uma transformação do intervalo com número finito de ramos todos singulares, com derivada crescendo como o logaritmo da distância aos bordos dos intervalos de monotonia, segundo o modelo da transformação de Lorenz. No nosso contexto, para reduzirmos a dinâmica a transformação do intervalo, precisamos admitir ramos singulares mas também ramos com derivada finita e limitada. Isto cria problemas de controle de distorção em órbitas que passam muito perto do bordo destes intervalos de monotonia.

Ademais, em [13] a expansão proporcional a uma potência da distância ao bordo resolvia o problema via um argumento de refinamento dinâmico de partições. Agora mostramos que os sumidouros considerados admitem família de seções adaptadas com bordos contidos em variedades estáveis das singularidades do sumidouro, que induz transformação do intervalo cujos bordos dos intervalos de monotonia são ou singulares, ou enviados em pontos singulares em número finito de iterações da transformação. Isto é suficiente para que o método de prova da aproximação exponencialmente lenta de [13] possa ser estendido para a nossa dinâmica.

Além disto, temos que lidar com o fato de que nosso sumidouro pode ter várias medidas físicas, em vez de uma única medida física, como em [13] e [15]. Mostramos que tal como peças básicas no contexto uniformemente hiperbólico, toda medida física é SRB e é um estado de equilíbrio com respeito ao jacobiano centro-instável, e que esta família vem de medidas invariantes ergódicas absolutamente contínuas da transformação do intervalo induzida. Usaremos este conjunto \mathbb{E} de estados de equilíbrio para exprimir o que queremos dizer com grandes desvios no enunciado do Teorema A (veja seção 4.1).

0.4 Organização do texto

No Capítulo 1, apresentamos definições preliminares e alguns resultados gerais sobre hiperbolicidade e hiperbolicidade singular, destacando a prova da equivalência entre medidas SRB e estados de equilíbrio no contexto hiperbólico singular sem transitividade. No Capítulo 2, descrevemos a construção da transformação de retorno de Poincaré que vamos usar para reduzir a dinâmica deste sumidouro para uma transformação unidimensional. No Capítulo 3, estudamos mais profundamente certas propriedades desta aplicação unidimensional. Mais precisamente, mostramos aqui que para um conjunto aberto e denso de campos de vetores X de classe C^2 tendo um sumidouro hiperbólico singular Λ em uma variedade tridimensional, existe uma família finita Ξ de seções transversais e uma aplicação global de Poincaré $R : \Xi_0 \rightarrow \Xi$, $R(x) = X^{\tau(x)}(x)$ tal que escolhendo coordenadas adequadas em Ξ a aplicação R pode ser escrita como $F : \tilde{Q} \rightarrow Q$, $F(x, y) = (f(x), g(x, y))$ e a função $f : \mathbb{I} \setminus \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{I}$ é monótona, $C^{1+\alpha}$ em pedaços com $n + 1$ ramos definidos nas componentes conexas de $\mathbb{I} \setminus \mathcal{D}$ e tem um conjunto finito de medidas invariantes absolutamente contínuas (a.c.i.m.), μ_f^i . Veremos que a aplicação f , satisfaz a condição de aproximação exponencialmente lenta ao conjunto de descontinuidades e singularidades. No Capítulo 4, mostramos como reduzir o enunciado do resultado de grandes desvios do Teorema A para um resultado de grandes desvios para a aplicação unidimensional induzida. No Capítulo 5, provamos a aproximação exponencialmente lenta às descontinuidades/singularidades desta aplicação unidimensional, completando a prova

dos Teoremas A e B.

Terminamos com algumas perspectivas de desenvolvimento futuro no Capítulo 6.

Capítulo 1

Preliminares

Ao longo da tese iremos considerar M uma variedade Riemanniana compacta sem bordo, conexa e de dimensão três. Fixamos em M uma distância d induzida pela métrica riemanniana.

Na primeira seção deste capítulo estabeleceremos notações e definições preliminares para fluxos, e na segunda seção estabeleceremos as principais ferramentas utilizadas ao longo deste trabalho.

1.1 Definições Gerais

1.1.1 Equações diferenciais ordinárias

Denotaremos por $\mathfrak{X}^1(M)$ o conjunto dos campos vetoriais de classe C^1 em M munido da topologia C^1 . Lembramos que um campo vetorial é uma aplicação de classe C^1 , $X : M \rightarrow TM$, onde TM é o fibrado tangente associado à variedade M . Para cada $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ denotaremos por X^t o fluxo induzido por X , que definiremos da seguinte forma.

Um fluxo de classe C^1 é uma família $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$ de difeomorfismos de classe C^1 satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $X^0 = Id : M \rightarrow M$ é a aplicação identidade em M ;
2. $X^{t+s} = X^t \circ X^s$ para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$.

Dado um campo vetorial de classe C^1 , X , existe único fluxo associado ao campo X que satisfaz

$$\frac{d}{dt} X^t(q)|_{t=t_0} = X(X^{t_0}(q)) \text{ para quaisquer } q \in M \text{ e } t_0 \in \mathbb{R}.$$

Se o bordo de M é vazio, como M é compacta, todo campo vetorial de classe C^1 , X , é limitado, e portanto, o fluxo X^t está definido em toda reta real. Note que,

reciprocamente, um fluxo X^t determina unicamente um campo vetorial X cujo fluxo associado é precisamente X^t .

Dado $X \in \mathfrak{X}^1(M)$, uma singularidade de X ou um ponto fixo para o fluxo X^t é um ponto $p \in M$ tal que $X^t(p) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Nesse caso temos $X(p) = 0$. Ao longo desta tese denotaremos por $\mathcal{S}(X)$ o conjunto de todas as singularidades do campo X . Todo ponto $p \in M \setminus \mathcal{S}(X)$ é chamado ponto *regular* para X .

Diremos que um fluxo é *não-singular* se ele não admite pontos fixos. Analogamente, diremos que um campo vetorial é *não-singular* se ele não admite singularidades.

Dado $p \in M$, a órbita de p através de X é o conjunto $O(p) = O_X(p) = \{X^t(p) : t \in \mathbb{R}\}$. Sendo assim, σ é uma singularidade se, e somente se, $O_X(\sigma) = \{\sigma\}$. Uma órbita periódica de X é uma órbita $O_X(p)$ tal que $X^T(p) = p$ para algum $T > 0$ e $X^t(p) \neq p$ para todo $t \in (0, T)$. Nesse caso, chamamos T o período de p ou da órbita de p . Uma órbita é compacta se, e somente se, ela é uma singularidade ou uma órbita periódica. Denotaremos por $Per(X)$ o conjuntos das órbitas periódicas de X .

Um *elemento crítico* de um campo X é um ponto $p \in M$ que é uma singularidade ou pertence a uma órbita periódica. Definimos o conjunto $Crit(X) = \mathcal{S}(X) \cup Per(X)$ pelo conjunto dos elementos críticos de X . Por uma órbita fechada nós queremos dizer uma órbita que é uma singularidade ou uma órbita periódica.

Dizemos que um ponto $p \in M$ é não errante se para toda vizinhança U de p e todo $T > 0$ existe $t > T$ tal que $X^t(U) \cap U \neq \emptyset$. O conjunto não-errante $\Omega(X)$ é o conjunto de todos os pontos não errantes de X .

Se $p \in M$, definimos o conjunto ω -limite do ponto p , $\omega_X(p)$, pelo conjunto dos pontos de acumulação do seguinte conjunto: $\{X^t(p) : t \geq 0\}$. Analogamente, definimos o α -limite do ponto p por $\alpha_X(p) = \omega_{-X}(p)$, onde $-X$ é o campo inverso de X . Segue que o α -limite e o ω -limite de qualquer ponto da variedade M estão contidos no conjunto não-errante.

Um subconjunto Λ de M é dito invariante por X se $X^t(\Lambda) = \Lambda$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Um subconjunto invariante Λ é dito *transitivo* se existe $p \in \Lambda$ tal que $\omega_X(p) = \Lambda$, e ele é dito *isolado* se,

$$\Lambda = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X^t(U),$$

para alguma vizinhança aberta U de Λ . Tal vizinhança é chamada um *bloco isolador*.

Se U pode ser escolhido tal que $X^t(U) \subset U$, para todo $t > 0$, dizemos que Λ é um *conjunto sumidouro* ou simplesmente um *sumidouro*. Um *atrator* é um conjunto sumidouro transitivo, e um *repulsor* é um atrator para $-X$.

Fixado um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}^1(X)$ e $t \in \mathbb{R}$, denotaremos por DX^t a derivada do difeomorfismo $X^t : M \rightarrow M$ em relação a variedade M e escrevemos $DX^t(p) : T_p M \rightarrow T_{X^t(p)} M$ a derivada de X^t aplicada no ponto $p \in M$. Da mesma forma denotaremos por

DX a derivada do campo vetorial $X : M \rightarrow TM$ com respeito a variedade M e escrevemos $DX(p)$ ou $D_pX : T_pM \rightarrow T_pM$ para denotar a derivada aplicada no ponto $p \in M$.

1.1.2 Hiperbolicidade

Denotamos por $m(L) = \inf_{\|v\|=1} L(v)$ a conorma do operador linear L .

Definição 1.1.1. Um conjunto compacto e X^t -invariante Λ é hiperbólico se existe uma decomposição contínua e invariante do fibrado tangente $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^X \oplus E_\Lambda^u$ e existem constantes $\lambda, K > 0$ tais que

- E_Λ^s é (λ, K) -contrator, isto é

$$\|DX^t(x)|_{E_x^s}\| \leq K^{-1}e^{-\lambda t}, \text{ para todo } x \in \Lambda, \text{ e para todo } t \geq 0;$$

- E_Λ^u é (λ, K) -expansor, isto é

$$m(DX^t(x)|_{E_x^u}) \geq Ke^{\lambda t}, \text{ para todo } x \in \Lambda, \text{ e para todo } t \geq 0;$$

- E_x^X é o subespaço em T_xM gerado por $X(x)$ para todo $x \in \Lambda$.

Se a variedade inteira M é um conjunto hiperbólico para o campo vetorial M , dizemos que o campo X e o fluxo gerado por ele é Anosov.

Assim, definimos que um ponto crítico de X é hiperbólico se sua órbita é um conjunto hiperbólico para X , e denotaremos por $Perh(X)$ o conjunto dos pontos periódicos hiperbólicos para X . Um conjunto hiperbólico Λ para X é chamado *básico* se ele é transitivo e isolado. Seja Λ um conjunto hiperbólico básico. Então existe uma vizinhança $U \subset M$ de Λ e uma vizinhança de classe C^1 , \mathcal{U} de X tal que se $Y \in \mathcal{U}$, então Y admite um conjunto hiperbólico Λ_Y em U chamado a continuação de Λ . Nesse caso a dimensão dos subfibrados $E_{\Lambda_Y}^*$ é igual a dimensão de E_Λ^* , para $* = s, u$.

Pela Teoria de Variedades Invariantes, se $\Lambda \subset M$ é um conjunto hiperbólico, então para todo $p \in \Lambda$, os conjuntos

$$W_X^{ss}(p) = \{q \in M : d(X^t(p), X^t(q)) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty\}$$

$$W_X^{uu}(p) = \{q \in M : d(X^t(p), X^t(q)) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}$$

são variedades tangentes a E_Λ^s e E_Λ^u , respectivamente.

Sendo $O = O_X(p)$ a órbita de p , então

$$W_X^s(O) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W_X^{ss}(X^t(p)) \text{ e } W_X^u(O) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W_X^{uu}(X^t(p))$$

são variedades tangentes a $E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^X$ e $E_\Lambda^X \oplus E_\Lambda^u$, respectivamente. Definimos, desta forma, as variedades estável e instável forte e estável e instável de um ponto $p \in \Lambda$ por $W_X^{ss}(p)$, e $W_X^s(O_X(p))$, respectivamente.

Ainda para p periódico e hiperbólico, se $\epsilon > 0$ a *variedade estável forte local* de p é definida por

$$W_\epsilon^{ss}(p) = W_{\epsilon, X}^{ss}(p) = \{y \in M; d(X^t(y), X^t(p)) < \epsilon, \text{ se } t \geq 0\}.$$

Pelo Teorema da Variedade Estável existe $\epsilon = \epsilon(p) > 0$ tal que

$$W_X^{ss}(p) = \bigcup_{t \leq 0} X^t(W_\epsilon^{ss}(X^{-t}(p))).$$

Analogamente, se σ é uma singularidade hiperbólica para X , a *variedade estável forte local* de σ é definida por

$$W_\epsilon^{ss}(\sigma) = \{y \in M; d(X^t(y), \sigma) < \epsilon \text{ se } t \geq 0\}.$$

Novamente, pelo Teorema da Variedade Estável, existe $\epsilon = \epsilon(\sigma) > 0$ tal que

$$W_X^{ss}(\sigma) = \bigcup_{t \leq 0} X^t(W_\epsilon^{ss}(\sigma)).$$

Analogamente, definimos variedades *instável forte*, *instável* e *instável local*.

Seja $p \in M$ um ponto crítico hiperbólico para X . A dimensão da variedade estável $W^s(O(p))$ é chamado *índice* de $O(p)$, e denotaremos por $index(O(p))$.

Seja σ uma órbita hiperbólica crítica (singularidade ou órbita periódica) de um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. Pelo anterior, existe uma vizinhança $U \subset M$ de σ e uma vizinhança C^1 , \mathcal{U} , de X tal que se $Y \in \mathcal{U}$, então Y admite uma órbita crítica hiperbólica σ_Y em U e $index(\sigma_Y) = index(\sigma)$. Tal σ_Y é chamada de continuação de σ .

Um poço de X é um atrator trivial para X , ou seja, ele é uma órbita de X . Uma fonte de X é um atrator trivial para $-X$.

1.2 Hiperbolicidade Singular

Seja Λ um conjunto compacto invariante de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $c > 0$ e $\lambda > 0$. Dizemos que Λ tem uma (c, λ) -decomposição dominada se o fibrado tangente sobre Λ pode ser escrito como uma soma DX^t -invariante e contínua de sub-fibrados

$$T_\Lambda M = E^1 \oplus E^2,$$

tal que para cada $t > 0$ e cada $x \in \Lambda$, temos

$$\|DX^t|_{E_x^1}\| \cdot \|DX^{-t}|_{E_{X^t(x)}^2}\| < ce^{-\lambda t}.$$

Dizemos que Λ é parcialmente hiperbólico se tem uma (c, λ) -decomposição dominada tal que o sub-fibrado E^1 é uniformemente contrativo, isto é, para algum $c > 0$ e todo $t > 0$ e cada $x \in \Lambda$ temos

$$\|DX^t|_{E_x^1}\| \leq ce^{-\lambda t}.$$

Proposição 1.2.1 ([36]). *Existe uma métrica Riemanniana adaptada $\|\cdot\|_0$ equivalente a original e $\lambda \in (0, 1)$ tal que*

$$\|DX^t|_{E_x^1}\|_0 \cdot \|DX^{-t}|_{E_{X^t(x)}^2}\|_0 < e^{-\lambda t}$$

e

$$\|DX^t|_{E_x^1}\|_0 \leq e^{-\lambda t},$$

para todo $t \geq 0$ e todo $x \in \Lambda$.

Durante todo o texto a métrica Riemanniana é uma métrica adaptada e o subfibrado E^1 é unidimensional.

Para $x \in \Lambda$ e $t \in \mathbb{R}$ seja $J_t^2(x)$ o valor absoluto do determinante da aplicação linear $DX^t|_{E_x^2} : E_x^2 \rightarrow E_{X^t(x)}^2$. Dizemos que o subfibrado E_Λ^2 é volume expensor se existem $K > 0$ e $\theta > 0$ tais que

$$J_t^2(x) \geq Ke^{\theta t},$$

para todo $x \in \Lambda$, $t \geq 0$.

Esta condição é mais fraca do que a expansão uniforme ao longo da direção central. O atrator geométrico de Lorenz tem direção central volume expensora que não é uniformemente expensora.

Outra propriedade importante é que a condição de dominação junto com a contração uniforme, implica que a direção do fluxo está contida no fibrado central E^{cu} . Especificamente,

Lema 1.2.2 ([17, Lema 3.2]). *Seja Λ um compacto invariante para um fluxo X^t de um campo X de classe C^1 em M .*

1. *Dada uma decomposição contínua $T_\Lambda M = E \oplus F$ tal que E é uniformemente contraído, então $X(x) \in F_x$, para todo $x \in \Lambda$.*
2. *Assumindo que Λ é não-trivial e tem decomposição contínua e dominada $T_\Lambda M = E \oplus F$ tal que $X(x) \in F_x$ para todo $x \in \Lambda$, então E é uniformemente contraído.*

1.2.1 Sumidouros hiperbólicos-singulares

Dizemos que uma singularidade σ de um campo X tridimensional é tipo-Lorenz se os autovalores λ_i , $i = 1, 2, 3$ de $DX(\sigma)$ são reais e satisfazem

$$\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < -\lambda_3 < \lambda_1.$$

Seja Λ um conjunto compacto invariante de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Dizemos que Λ é um **sumidouro hiperbólico-singular** para X se é parcialmente hiperbólico com direção central volume expansora e todas as singularidades em Λ são do tipo-Lorenz. É claro que um sumidouro hiperbólico singular tem um número finito de singularidades, pois estas são hiperbólicas, portanto isoladas contidas em um conjunto compacto.

Consideraremos a classe dos sumidouros hiperbólicos singulares que contém os sumidouros parcialmente hiperbólicos Λ de um campo X de classe C^2 , com um número finito de singularidades acumuladas por órbitas regulares de X em Λ , e admitindo uma decomposição contínua e DX^t -invariante do fibrado tangente sobre Λ ,

$$T_\Lambda = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^{cu}.$$

O subfibrado E_Λ^s unidimensional é uniformemente contraído por DX^t , e E_Λ^{cu} tem fibras bidimensionais cuja área é uniformemente expandida por DX^t . Como mostrado em [43] esta classe é uma extensão dos atratores uniformemente hiperbólicos. Em particular, fluxos Anosov em variedades tridimensionais pertencem a esta classe. Além disso, os atratores hiperbólicos singulares contém cada conjunto C^1 robustamente transitivo isolado para fluxos em variedades compactas tridimensionais.

O exemplo motivador da teoria de hiperbolicidade singular foi o atrator de Lorenz e o correspondente atrator geométrico de Lorenz; veja [16]

Exemplos de sumidouros não-transitivos podem ser obtidos modificando a construção do atrator geométrico de Lorenz, primeiro introduzindo novas singularidades tipo-Lorenz, como na figura, obtendo ainda um atrator; e depois colocando uma cópia invertida do atrator geométrico de Lorenz, como na figura, obtendo agora um sumidouro que não admite órbita densa.

Para outros exemplos de sumidouros hiperbólicos singulares, incluindo construções com qualquer número finito de singularidades e singularidades que não são do tipo-Lorenz; veja [20, 42, 21]. Os atratores hiperbólicos singulares próprios apenas admitem singularidades tipo Lorenz, como provado em [16], mas esta propriedade pode não valer em sumidouros hiperbólicos singulares, como mostram os exemplos nos artigos citados no parágrafo anterior. Consideramos no que segue apenas sumidouros hiperbólicos singulares com singularidades de tipo Lorenz.

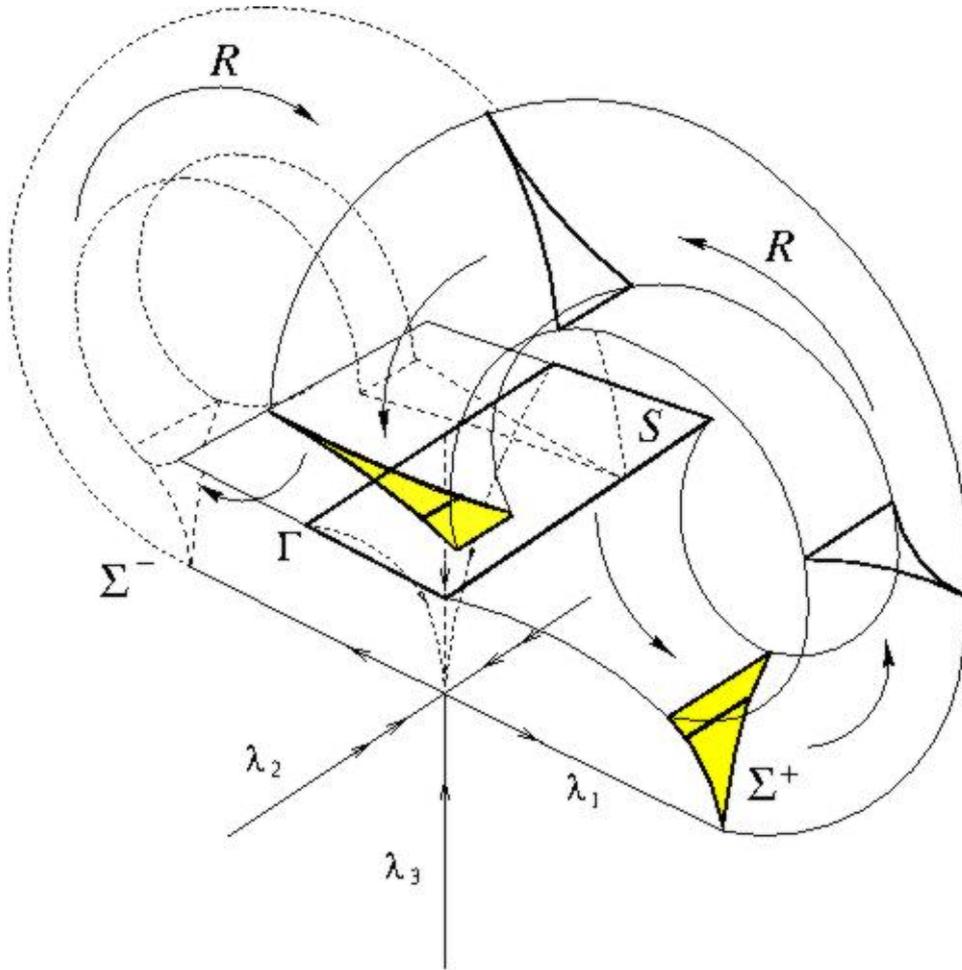


Figura 1.2.1:

1.3 Algumas propriedades dos conjuntos hiperbólicos singulares

Nesta seção apresentaremos algumas propriedades já conhecidas sobre os conjuntos hiperbólicos singulares bem como novas propriedades que serão fundamentais para a prova do teorema principal.

Proposição 1.3.1. [16] *Seja Λ um conjunto hiperbólico singular de $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. Então, qualquer subconjunto compacto invariante $\Gamma \subset \Lambda$ sem singularidades é uniformemente hiperbólico.*

É claro que um atrator hiperbólico singular tem um número finito de singularidades, pois estas são hiperbólicas, portanto isoladas contidas em um conjunto compacto. O lema a seguir é uma generalização do Lema 6.3 de Araújo e Pacífico [16], página 164, mas o enunciado seguinte não tem condições extras em sigma; veja também [Thm A, Sing-hyp systems, MPP, PAMS].

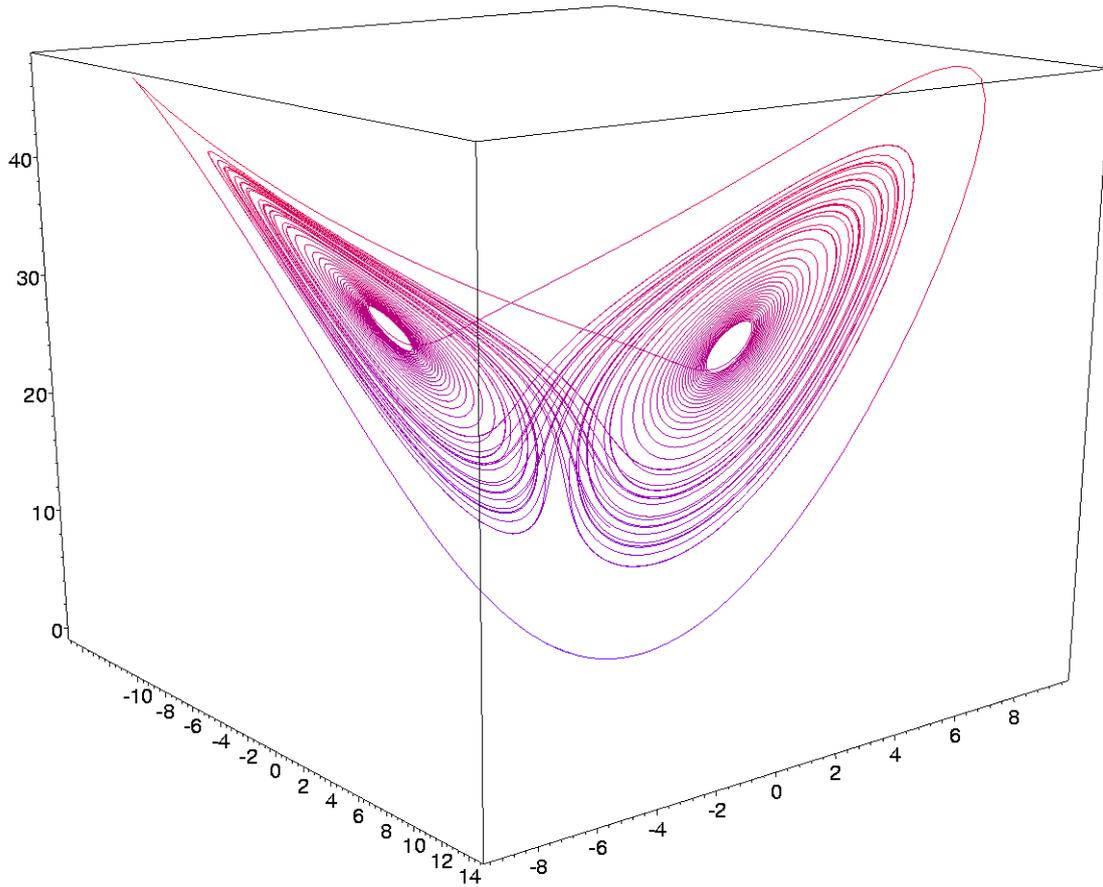


Figura 1.2.2:

Lema 1.3.2. *Seja Λ um conjunto compacto, não-vazio, invariante, isolado para um fluxo tri-dimensional X^t associado a um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. Assuma que Λ é parcialmente hiperbólico com direção central volume-expansor. Então,*

1. *se σ é uma singularidade do tipo-Lorenz para X então $W_X^{ss}(\sigma) \cap \Lambda = \{\sigma\}$;*
2. *se σ é uma singularidade do tipo-Lorenz para $-X$ então $W_X^{uu}(\sigma) \cap \Lambda = \{\sigma\}$.*

Demonstração. Seja σ uma singularidade em Λ de tipo-Lorenz para X e seja $x \in (W^{ss}(\sigma) \cap \Lambda) \setminus \{\sigma\}$ e seja $X^t = X^t(x)$ com $T_{X^t}M = E^s(X^t) \oplus E^c(X^t)$. Por continuidade da decomposição segue que

$$E^s(X^t) \rightarrow_{t \rightarrow \infty} E^{ss}(\sigma),$$

e pelo Lema 1.2.2, $X(X^t) \in E^c(X^t)$. Mas como $X^t \in W^{ss}(\sigma) \setminus \{\sigma\}$, temos $X(X^t) \in T_{X^t}W^{ss}(\sigma)$. No entanto,

$$T_{X^t}W^{ss}(\sigma) \rightarrow_{t \rightarrow \infty} E^{ss}(\sigma),$$

portanto o ângulo entre $E^s(X^t)$ e $E^c(X^t)$ vai a zero quando $t \rightarrow \infty$, contrariando a continuidade de $E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c = T_\Lambda M$, com $\sigma \in \Lambda$.

Assim, $W^{ss}(\sigma) \cap \Lambda = \{\sigma\}$ em toda singularidade do tipo-Lorenz num conjunto hiperbólico-singular. \square

Teorema 1.3.3. [16] *Todas as singularidades num atrator hiperbólico singular são do tipo Lorenz.*

Dizemos que um subconjunto compacto invariante H de um fluxo é uma classe homoclínica se H é o fecho do conjuntos de pontos de intersecção transversal entre as variedades estável e instável da órbita de um ponto periódico hiperbólico, isto é, existe p tal que

$$H = \overline{W^s(O(p)) \cap W^u(O(p))}.$$

Teorema 1.3.4. [16, Cap 6, Sec 2] *Todo atrator hiperbólico singular é uma classe homoclínica e contém um subconjunto denso de órbitas periódicas.*

Os mais significativos exemplos de atratores singulares hiperbólicos são os atratores de Lorenz e o atrator geométrico de Lorenz. O próximo resultado coleciona uma série de resultados que permitem estudar propriedades desta família de atratores, reduzindo sua dinâmica à de transformações de Poincaré entre secções transversais ao fluxo numa vizinhança do atrator.

Em [15] a construção de um mapa global de Poincaré para qualquer atrator hiperbólico singular é feita com base na existência de secções transversais adaptadas e holonomias estáveis C^1 -Hölder nestas secções. Com os resultados que apresentaremos nas próximas secções esta construção pode ser realizada para qualquer conjunto sumidouro hiperbólico singular com volume zero. Esta construção foi resumida em [14, Teorema 5] como segue, com adaptações para nosso contexto um pouco mais geral: itens (1-5) podem ser encontrados em [15] mas item (6), que é crucial para o trabalho, vai ser obtido nas próxima secções.

Teorema 1.3.5. [14, Teorema 5, Seção 4, p 1021] *Para um subconjunto aberto e denso de campos de vetores X de classe C^2 com sumidouro hiperbólico singular Λ com volume zero em uma variedade tri-dimensional, existe $\alpha > 0$ e uma família finita Ξ de secções transversais adaptadas e uma aplicação global (n -ésimo retorno) de Poincaré $R : \Xi_0 \rightarrow \Xi$, $R(x) = X^{\tau(x)}(x)$ tal que*

1. *o domínio $\Xi_0 = \Xi \setminus \Gamma$, em que Γ é uma família finita de arcos suaves, e $\tau : \Xi_0 \rightarrow [\tau_0, +\infty]$ é uma função suave afastada de zero pela constante $\tau_0 > 0$.*
2. *Podemos escolher coordenadas em Ξ nas quais a aplicação R pode ser escrita como $F : \tilde{Q} \rightarrow Q$, $F(x, y) = (f(x), g(x, y))$, onde $Q = \mathbb{I} \times \mathbb{I}$, $\mathbb{I} = [0, 1]$ e $\tilde{Q} = Q \setminus \Gamma_0$ com $\Gamma_0 = \mathcal{D} \times \mathbb{I}$ e $\mathcal{D} = \{b_1, \dots, b_n\} \subset \mathbb{I}$ um conjunto finito de pontos.*

3. A função $f : \mathbb{I} \setminus \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{I}$ é monótona, $C^{1+\alpha}$ em pedaços com $n + 1$ ramos definidos nas componentes conexas de $\mathbb{I} \setminus \mathcal{D}$ e tem um conjunto finito de medidas invariantes absolutamente contínuas (a.c.i.m.), μ_f^i . Além disso, $\inf |f'| > 2$ onde está definida.
4. A aplicação $g : \tilde{Q} \rightarrow \mathbb{I}$ preserva e contrai uniformemente a folheação vertical $\mathcal{F} = \{\{x\} \times \mathbb{I}\}_{x \in \mathbb{I}}$ de Q : existe $0 < \lambda < 1$ tal que $\text{dist}(g(x, y_1), g(x, y_2)) \leq \lambda |y_1 - y_2|$ para todos $y_1, y_2 \in \mathbb{I}$.
5. A aplicação F admite uma família finita de medidas físicas μ_F^i que são induzidas por μ_f^i de uma forma padrão. O tempo de Poincaré τ é integrável com respeito a cada μ_F^i e com respeito à medida de Lebesgue bidimensional em Q .
6. O conjunto \mathcal{D} se divide em dois subconjuntos \mathcal{S} e $\mathcal{D} \setminus \mathcal{S}$, em que $\mathcal{S} \neq \emptyset$ é o conjunto das singularidades satisfazendo:
 - (a) para todo $b \in \mathcal{D}$ existem os limites laterais $f(b^\pm) = \lim_{t \rightarrow b^\pm} f(t)$;
 - (b) para todo $b \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{S}$ existe $T(b^\pm) \in \mathbb{N}$ tal que $f^{T(b^\pm)}(b^\pm) \in \mathcal{S}$;
 - (c) para todo $b \in \mathcal{S}$ existe $0 < \alpha = \alpha(b) < 1$ e, existe e é finito e não nulo algum (ou ambos) dos limites laterais $\lim_{t \rightarrow b^\pm} |t - b|^{1-\alpha} Df(t)$.

O fluxo X^t em U é semiconjugado a um fluxo de suspensão com função teto τ e dinâmica da base F . Isto é, seja $\phi^t : M_\tau \rightarrow M_\tau$ o fluxo de suspensão com função teto $\tau : M \setminus \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ sobre a base F , onde

$$M_\tau = \{(x, s) \in M \times [0, +\infty) : 0 \leq s \leq \tau(x)\}.$$

Para cada $(x, s) \in M_\tau$ e $t > 0$ existe um número $n(x, s, t) \geq 1$, que consideramos o número de voltas que o ponto dá sobre o conjunto M_τ , tal que $S_n \tau(x) \leq s + t \leq S_{n+1} \tau(x)$, então definimos $\phi^t(x, s) = (F^n(x), s + t - S_n \tau(x))$.

A aplicação $\Phi : M_\tau \rightarrow U$ dada por $\Phi(x, s) = X^s(x)$ é um difeomorfismo local e semiconjugação entre os fluxos, com número finito e limitado de pré imagens. Não temos como garantir injetividade pela forma como definimos a função tempo de retorno de Poincaré: de x a $X^{\tau(x)}(x)$ a trajetória pode cruzar várias seções de Ξ , mas apenas um número finito e limitado delas.

Vamos assim analisar o conjunto de grandes desvios sobre o sumidouro estudando o conjunto de grandes desvios nesta suspensão, sem qualquer perda na medida de Lebesgue. Isto será feito no capítulo 4 depois de obtermos diversas propriedades da transformação F .

1.4 Transformações não uniformemente expansoras

A aplicação unidimensional f faz parte de uma classe de transformações com propriedades muito úteis que enunciaremos aqui.

Denote por $\| \cdot \|$ a norma Riemanniana de uma variedade compacta sem bordo M , por $dist$ a distância induzida e por Leb a forma de volume correspondente, a qual chamamos medida de Lebesgue ou volume. Assumimos que Leb é normalizada, ou seja, $Leb(M) = 1$.

Seja $f : M \setminus \mathcal{S} \rightarrow M$ um difeomorfismo local de classe $C^{1+\alpha}$, onde \mathcal{S} é um conjunto singular não-flat com volume zero. A definição de não-flat usada aqui é uma noção estendida para dimensão qualquer do mesmo em dimensão um, e significa que f se comporta como uma potência da distância ao conjunto singular. Mas precisamente, existem $B > 1$, $0 < \beta < 1$ tais que, para todo $x, y \in M \setminus \mathcal{S}$ com $dist(x, y) < \frac{dist(x, \mathcal{S})}{2}$ e $v \in T_x M \setminus \{0\}$ vale o seguinte,

1. $\frac{1}{B} dist(x, \mathcal{S})^\beta \leq \frac{\|Df(x)v\|}{\|v\|} \leq \frac{1}{B} dist(x, \mathcal{S})^{-\beta};$
2. $|\log \|Df(x)^{-1}\| - \log \|Df(y)^{-1}\|| \leq B \frac{dist(x, y)}{dist(x, \mathcal{S})^\beta};$
3. $|\log |\det Df(x)^{-1}| - \log |\det Df(y)^{-1}|| \leq B \frac{dist(x, y)}{dist(x, \mathcal{S})^\beta}.$

Além disso, assumimos uma condição extra relacionada a geometria de \mathcal{S} . A medida de vizinhanças de \mathcal{S} é comparável a uma potência da distância a \mathcal{S} , ou seja, existe C_k , $k > 0$ tal que para todo $\rho > 0$ pequeno vale que

$$Leb\{x \in M : dist(x, \mathcal{S}) < \rho\} \leq C_k \rho^k. \quad (1.4.1)$$

Dizemos que f é não-uniformemente expansora se existe $c > 0$ tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|Df(f^i(x))^{-1}\| \leq -c$$

para Lebesgue quase todo ponto $x \in M$.

Seja $\Delta_\delta(x) = |\log dist_\delta(x, \mathcal{S})|$ a distância logarítmica δ -truncada de $x \in M$ à \mathcal{S} , isto é, $\Delta_\delta(x)$ é não negativa e contínua longe de \mathcal{S} , identicamente nula 2δ -longe de \mathcal{S} , e igual a $-\log dist(x, \mathcal{S})$ quando $dist(x, \mathcal{S}) \leq \delta$ e toma valores entre 0 e $-\log \delta$ para x tal que $dist(x, \mathcal{S}) < 2\delta$.

Dizemos que f tem *recorrência exponencialmente lenta ao conjunto singular* \mathcal{S} se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Leb \left\{ x \in M : \frac{1}{n} S_n \Delta_\delta(x) > \epsilon \right\} < 0. \quad (1.4.2)$$

A condição acima implica que $\frac{S_n \Delta_\delta(x)}{n}$ converge, em medida, para zero. Ou seja, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \Delta_\delta(x) \leq \epsilon, \quad (1.4.3)$$

para Lebesgue quase todo ponto $x \in M$. Dizemos que f satisfazendo (1.4.3) tem *recorrência lenta ao conjunto singular* \mathcal{S} .

Apresentaremos um resultado de existência de medidas absolutamente contínuas. Veremos que tais medidas são de fato estados de equilíbrio para o potencial $\log |\det Df|$, isto é, $h_\mu(f) = \int \log |\det Df| d\mu$.

Teorema 1.4.1 ([5]). *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo local de classe $C^{1+\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, exceto em um conjunto singular \mathcal{S} . Suponha que f é não-uniformemente expansora com recorrência lenta à \mathcal{S} . Então, existe um número finito de medidas de probabilidade f -invariantes, ergódicas, absolutamente contínuas μ_1, \dots, μ_k cujas bacias cobrem a variedade Lebesgue quase todo ponto, ou seja, $B(\mu_1) \cup \dots \cup B(\mu_k) = M$, Leb- mod 0. Além disso, o suporte de cada medida contém um disco aberto em M .*

Leis de grandes desvios são usualmente relacionados a Teoria da Entropia Métrica e estados de equilíbrio. Denotamos por M_f o conjunto das probabilidades invariantes por f . Seja $J = |\det Df|$, dizemos que $\mu \in M_f$ é um estado de equilíbrio com respeito ao potencial $\log J$ se $h_\mu(f) = \int \log J d\mu$, isto é, se μ satisfaz a Fórmula da Entropia. Denote por \mathbb{E} o subconjunto de M_f formado por todos os estados de equilíbrio de f .

Para o que segue precisaremos da definição de tempos hiperbólicos que nos permite trabalhar com comportamento uniforme extraído da hipótese de expansão não-uniforme. Fixe $b > 0$ constante tal que $b < \min\{1/2, 1/(2\beta)\}$.

Definição 1.4.2. Dado $\sigma < 1$ e $\delta > 0$, dizemos n é um (σ, δ) - tempo hiperbólico para um ponto $x \in M \setminus \mathcal{D}$ se para todo $1 \leq k \leq n$

$$\prod_{j=n-k}^{n-1} \|Df(f^j(x))^{-1}\| \leq \sigma^k \text{ e } \text{dist}_\delta(f^{n-k}(x), \mathcal{D}) \geq \sigma^{bk}.$$

Esta definição nos garante uma série de propriedades.

Lema 1.4.3. *Dado $\sigma < 1$ e $\delta > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que se n é um (σ, δ) - tempo hiperbólico para um ponto $x \in M \setminus \mathcal{D}$, então existe uma vizinhança V_x de x tal que*

1. f^n envia V_x difeomorficamente na bola de raio δ_1 em torno de $f^n(x)$;
2. para cada $1 \leq k < n$ e $y, z \in V_x$,

$$\text{dist}(f^{n-k}(y), f^{n-k}(z)) \leq \sigma^{k/2} \text{dist}(f^n(y), f^n(z)).$$

Corolário 1.4.4. *Existe constante $C > 0$ tal que para cada $x \in M \setminus \mathcal{D}$, para todo (σ, δ) -tempo hiperbólico n para x , e cada $y, z \in V_x$*

$$\frac{1}{C} \leq \frac{|\det Df^n(y)|}{|\det Df^n(z)|} \leq C.$$

Lema 1.4.5. *Existem $\theta > 0$ e $\delta > 0$, dependendo apenas de σ e de f , tal que dado qualquer ponto x e qualquer $N \geq 1$ suficientemente grande existem tempos hiperbólicos $1 \leq n_1 < \dots < n_l \leq N$ para x , $l \geq \theta N$.*

Usaremos tais propriedades para provar o seguinte.

Proposição 1.4.6. *Toda medida física de f pertence a \mathbb{E} .*

Demonstração. Para ver isto primeiro temos que verificar que a função Δ_δ é μ -integrável. De fato, como f tem recorrência lenta ao conjunto singular \mathcal{S} , podemos aplicar o recíproco do Teorema de Birkhoff que nos garante a integrabilidade de funções não negativas tais que o limite das médias de Birkhoff existe. A partir disso e das condições não degeneradas em \mathcal{S} vamos mostrar que $\log |\det Df|$ é μ -integrável.

Temos por hipótese sobre \mathcal{S} que $\frac{\|Df(x)v\|}{\|v\|} \leq Cd(x, \mathcal{S})^{-\beta}$ para todo $v \in T_x M$, para algum $\beta \in (0, 1)$. Daí, $\log \|Df(x)\| \leq \log C - \beta \log d(x, \mathcal{S})$. Por definição, temos que

$$|\det Df(x)| = \frac{\text{vol}(Df(x)e_1, \dots, Df(x)e_m)}{\text{vol}(e_1, \dots, e_m)} \leq \|Df(x)e_1\| \dots \|Df(x)e_m\|,$$

se considerarmos $\{e_1, \dots, e_m\}$ uma base ortonormal de $T_x M$. Então, $\log |\det Df(x)| \leq m \log C - m\beta \log d(x, \mathcal{S})$ e daí,

$$\begin{aligned} \int \log |\det Df(x)| d\mu &\leq m \log C + m\beta \int -\log d(x, \mathcal{S}) d\mu \\ &\leq m \log C + m\beta \int \Delta_\delta(x) d\mu. \end{aligned}$$

Como já vimos que $\Delta_\delta(x)$ é integrável concluímos que $\log |\det Df|$ também o é.

Agora, podemos aplicar o Teorema de Birkhoff para o $\log |\det Df|$ e a desigualdade de Ruelle para obter $h_\mu(f) \leq \int \log |\det Df| d\mu$.

Para terminar, precisamos obter a desigualdade contrária. Pelo Teorema de Shannon-McMillan-Breiman se a entropia é finita e μ é ergódica podemos usar uma partição geradora, isto é, $h_\mu(f) = h_\mu(f, \mathcal{P})$.

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(\mathcal{P}_n(x)),$$

para μ -quase todo ponto x . No nosso contexto, para μ -quase todo ponto $x \in M$ existem infinitos tempos hiperbólicos com frequência positiva. Podemos olhar apenas

para a sequência de (n_k) de tempos hiperbólicos,

$$\begin{aligned} h_\mu(f) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \left(\frac{\mu(\mathcal{P}_{n_k}(x))}{Leb(\mathcal{P}_{n_k}(x))} Leb(\mathcal{P}_{n_k}(x)) \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \frac{\mu(\mathcal{P}_{n_k}(x))}{Leb(\mathcal{P}_{n_k}(x))} + \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log Leb(\mathcal{P}_{n_k}(x)) \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log Leb(\mathcal{P}_{n_k}(x)). \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Radon-Nikodym o quociente $\frac{\mu(\mathcal{P}_{n_k}(x))}{Leb(\mathcal{P}_{n_k}(x))}$ é igual a $\frac{1}{Leb(\mathcal{P}_{n_k}(x))} \int_{\mathcal{P}_{n_k}(x)} \frac{d\mu}{dLeb} d\mu$ e pelo Teorema de Derivação de Lebesgue o limite é exatamente a derivada de radon-Nikodym $\frac{d\mu}{dLeb}$ que é não nula μ quase todo $x \in M$.

Nos tempos hiperbólicos vale distorção limitada e a usamos para comparar o volume de $\mathcal{P}_n(x)$ com o volume de $\mathcal{P}(f^n(x))$ pois $f^n(\mathcal{P}_n(x)) \subset \mathcal{P}(f^n(x))$. Como assumimos que \mathcal{P} é uma partição finita e que $Leb(\mathcal{P}(z)) > \alpha_0 > 0$ para μ quase todo ponto z , usando novamente o Teorema de Birkhoff temos que para μ -q.t.p. x $h_\mu(f) \geq \int \log |\det Df(x)| d\mu$. Isto mostra que μ é estado de equilíbrio e termina a prova da proposição. \square

1.5 Equivalência entre medidas SRB e estados de equilíbrio

Aqui vamos mostrar que em qualquer sumidouro hiperbólico singular para um fluxo suave (pelo menos de classe C^2) vale uma propriedade similar ao que Bowen provou para atratores hiperbólicos Axioma A, em [29, 30].

Teorema 1.5.1. *Seja Λ um sumidouro singular hiperbólico, com volume zero, para um campo vetorial X de classe C^1 . Seja μ uma medida de probabilidade X -invariante suportada em Λ . Então as seguintes afirmativas são equivalentes:*

1. $h_\mu(X_1) = \int \log |\det DX_1|_{E^c} d\mu > 0$;
2. μ é uma medida SRB;
3. μ é uma medida física.

Antes de demonstrar o teorema acima vamos lembrar um resultado obtido em [15] e também em [51]. A partir do Teorema 1.3.5 podemos seguir [15, Seções 6-8] para obter:

Teorema 1.5.2. *Seja Λ um sumidouro singular hiperbólico, com volume zero, para um campo vetorial de classe C^1 , com região armadilha U . Então, existem um número finito*

de medida ergódicas SRB/físicas μ_1, \dots, μ_k suportadas em Λ tais que a união das suas bacias ergódicas cobrem U Lebesgue quase todo lugar, isto é, $\text{Leb}\left(U \setminus \left(\bigcup_{i=1}^k B(\mu_i)\right)\right) = 0$. Além disso, cada μ_i é um estado de equilíbrio para o log do jacobiano central com entropia positiva, ou seja,

$$h_{\mu_i}(X_1) = \int \log |\det DX_1|_{E^c}| d\mu_i > 0.$$

Prova do Teorema 1.5.1: Seja μ uma probabilidade X -invariante suportada em Λ . Vamos começar mostrando que (3) \implies (1).

Note que se a bacia $B(\mu)$ de μ tem medida de Lebesgue positiva então por invariância $B(\mu) \cap U$ deve ter medida de Lebesgue positiva. Daí, obtemos uma decomposição Leb-mod 0 de $B(\mu) \cap U = U \cap \left(\bigcup_{i=1}^k B(\mu) \cap B(\mu_i)\right)$. Pela definição de medida física isto significa que para cada observável contínuo $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ tem-se

$$\begin{aligned} \int \varphi d\mu &= \frac{1}{\text{Leb}(U)} \int_U \int \varphi d\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{X_1^j(x)}\right) d\text{Leb}(x) \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{\text{Leb}(B(\mu) \cap B(\mu_i) \cap U)}{\text{Leb}(U)} \int \varphi d\mu_i, \end{aligned}$$

onde o limite é tomado na topologia fraca* das medidas de probabilidade da variedade. Portanto, temos que $\mu = \sum_{i=1}^k \frac{\text{Leb}(B(\mu) \cap B(\mu_i) \cap U)}{\text{Leb}(U)} \mu_i$. Ou seja, μ é uma combinação linear convexa das medidas ergódicas SRB/físicas dadas pelo Teorema 1.5.2 com coeficientes $\alpha_i = \frac{\text{Leb}(B(\mu) \cap B(\mu_i) \cap U)}{\text{Leb}(U)}$. Daí concluímos que μ é um estado de equilíbrio pois

$$h_{\mu}(X_1) = \sum_{i=1}^k \alpha_i h_{\mu_i}(X_1) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \int \log |\det DX_1|_{E^c}| d\mu_i = \int \log |\det DX_1|_{E^c}| d\mu > 0.$$

Isto completa a prova que (3) \implies (1).

Agora provaremos que (1) \implies (2) \implies (3). A hipótese (1) implica, pelo trabalho de Ledrapiér, que μ é uma medida SRB, isto é, μ tem desintegração absolutamente contínua ao longo das variedades instáveis $W^u(x)$ para μ -quase todo ponto $x \in \Lambda$. Pela invariância das variedades instáveis e suavidade do fluxo, vemos que μ tem desintegração absolutamente contínua ao longo das variedades centro-instáveis $W^{cu}(x)$ para μ -quase todo ponto x , onde $W^{cu}(x) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} X^t W^u(x)$. Isto mostra que (1) \implies (2).

Seja Λ_1 um subconjunto de Λ com μ -medida total, onde μ tem desintegração absolutamente contínua ao longo das variedades centro-instáveis. Como Λ é um sumidouro, então Λ contém todas variedades instáveis e então todas as variedades centro-instáveis $W^{cu}(x)$, para $x \in \Lambda_1$. Lembre que $W^{cu}(x)$ é tangente a $E^c(x)$ em $x \in \Lambda_1$. Além disso, como Λ tem uma decomposição parcialmente hiperbólica, cada ponto $y \in \Lambda$ admite uma variedade estável $W^s(y)$ que é tangente a $E^s(y)$ em y . Assim, $W^s(y)$ é transversal a $W^{cu}(x)$ para todo $y \in W^{cu}(x)$ e $x \in \Lambda_1$.

Ademais, as médias temporais de $z \in W^s(y)$ e y são a mesma para todo observável contínuo. O mesmo vale para $y \in A_x$ e x , onde A_x é algum subconjunto de $W^{cu}(x)$ com área positiva (pela desintegração absolutamente contínua) para $x \in \Lambda_1$. Portanto o subconjunto $B = \{W^s(y) : y \in A_x, x \in \Lambda_1\}$ está contido na bacia ergódica de μ .

Pela suavidade do fluxo é bem sabido que a folheação forte-estável $\{W^s(x)\}_{x \in \Lambda}$ é uma folheação absolutamente contínua de U , ou seja, em particular, o conjunto B tem medida de Lebesgue positiva. Portanto, $Leb(B(\mu)) \geq Leb(B) > 0$, logo μ é física. Isto mostra que (2) \Rightarrow (3) e termina a prova.

Capítulo 2

Aplicação Global de Primeiro Retorno de Poincaré

Vamos agora começar a apresentação da construção da aplicação global de primeiro retorno de Poincaré para sumidouros hiperbólicos singulares com volume zero, fornecendo uma prova do Teorema 1.3.5.

2.1 Folheações estáveis

Durante todo o texto vamos assumir que Λ é um sumidouro singular hiperbólico para um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$, com decomposição invariante $T_\Lambda M = E^s \oplus E^{cu}$ com dimensão de E^{cu} igual a 2. Seja $\tilde{E}^s \oplus \tilde{E}^{cu}$ uma extensão contínua desta decomposição para uma vizinhança U de Λ . Convenientemente tomamos U invariante para o futuro e tal que $\bigcap_{t \geq 0} X^t(U) = \Lambda$, além disso \tilde{E}^s pode ser escolhida DX^t -invariante. Em geral, a extensão \tilde{E}^{cu} da direção centro-instável não pode ser assumida invariante. No entanto, podemos sempre considerar um campo de cones em torno de U

$$C_a^{cu}(x) = \{v = v^s + v^{cu} : v^s \in \tilde{E}_x^s \text{ e } v^{cu} \in \tilde{E}^{cu} \text{ com } \|v^s\| \leq a \cdot \|v^{cu}\|\}$$

que é invariante para o futuro para algum $a > 0$, que é, existe um $T > 0$ dependendo apenas de a , tal que

$$DX^t(C_a^{cu}(x)) \subset C_a^{cu}(X^t(x)),$$

para todo $t \geq T$. Além disso, podemos tomar $a > 0$ arbitrariamente pequeno, reduzindo U se necessário. Por simplicidade de notação, no que segue, escreveremos E^s e E^{cu} no lugar de \tilde{E}^s e \tilde{E}^{cu} .

Seja D^k o disco unitário k -dimensional e seja $\text{Emb}^r(D^k, M)$ o conjunto dos mergulhos C^r , $\phi : D^k \rightarrow M$, dotado com a distância C^r .

Teorema 2.1.1. [11] *Existe uma vizinhança positivamente invariante U de Λ e uma constante $0 < \nu < 1$ tal que*

1. *Para todo $x \in U$, existe $W_x^s \in \text{Emb}^r(D^1, M)$ com $x \in W_x^s$ tal que*
 - $T_x W_x^s = E_x^s$;
 - $X^t(W_x^s) \subset W_{X^t x}^s, \forall t \geq 0$;
 - $d(X^t(x), X^t(y)) \leq \nu^t d(x, y), \forall y \in W_x^s, \forall t \geq 0$.
2. *existe uma aplicação contínua $\gamma : U \rightarrow \text{Emb}^0(D^1, M)$ tal que $\gamma(x)(0) = x$ e $\gamma(x)(D^1) = W_x^s$;*
3. *o conjunto $\{W_x^s : x \in U\}$ define uma folheação topológica de U .*

O teorema acima nos garante a existência de uma folheação topológica estável numa vizinhança de Λ . Além disso, [11] prova um resultado sobre a regularidade desta folheação sob uma condição bunching apropriada. As referências padrões são [38] e [52]. Condição q -bunching significa que existe $t > 0$ tal que

$$\|DX^t|E_x^s\| \cdot \|DX_{-t}|E_{X^t x}^{cu}\| \cdot \|DX^t|E_x^{cu}\|^q < 1 \text{ para todo } x \in \Lambda.$$

Teorema 2.1.2. [11] *Seja $q \in [0, [r]]$. Se a condição q -bunching vale para algum $t > 0$, então o fibrado E^s é C^q sobre U . Isto é, a aplicação $x \mapsto E_x^s$ é de classe C^q em uma vizinhança $U_1 \subset U$ de Λ para \mathcal{G}_1 (a Grassmanniana de todos os subespaços unidimensionais em $T_{U_1}M$).*

Observação 2.1.3. (a) Segue da dominação que a condição q -bunching vale para $q = 0$. Pela suavidade do fluxo e a compacidade de Λ , uma condição q -bunching vale para algum $q > 0$. Portanto, o fibrado estável E^s é pelo menos Hölder sobre U_1 .

(b) Quando $q \geq 1$ no teorema anterior, segue pelo Teorema de Frobenius que a família de variedades estáveis $\mathcal{F}^s = \{W_x^s\}_{x \in U}$ já obtidas formam uma C^q folheação de U_1 , no sentido que as cartas coordenadas são C^q . Além disso, a aplicação holonomia ao longo das folhas estáveis são C^q suaves.

Para detalhes sobre as provas, veja [11] e [10].

2.2 Seções Transversais e Aplicação de Poincaré

Aqui mostraremos que holonomias ao longo de folhas contrativas em seções transversais de sumidouros parcialmente hiperbólicos de um fluxo suave são sempre C^{1+} , sempre no caso onde q -bunching vale para $q \in (0, 1)$. Feito isso, consideraremos a composição

de um mapa de Poincaré entre seções transversais com uma holonomia, para localmente obter uma aplicação unidimensional C^{1+} . Finalmente, globalizaremos a construção em uma vizinhança de um sumidouro singular hiperbólico, escolhendo seções transversais adaptadas, e representando a dinâmica no sumidouro por um mapa unidimensional expansor por partes com número finito de ramos e singularidades tipo-Lorenz.

Seja Σ uma seção transversal ao fluxo, que é definida como um disco C^2 compacto mergulhado transversalmente ao campo X em cada ponto $x \in \Sigma$. Assumimos que as seções transversais estão contidas em uma vizinhança aberta de Λ onde uma folheação contrativa \mathcal{F}^{ss} está definida.

Observação 2.2.1. Dada uma seção transversal Σ podemos supor, sem perda de generalidade, que é a imagem do quadrado $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ por um difeomorfismo ℓ de classe $C^{1+\alpha}$, para algum $0 < \alpha < 1$, que envia linhas verticais em folhas de \mathcal{F}_Σ^s . Denote por $\text{int}(\Sigma)$ a imagem de $(0, 1) \times (0, 1)$ por ℓ . Também assumimos que cada seção Σ está contida em U , então cada $x \in \Sigma$ é tal que $\omega(x) \subset \Lambda$. A partir de agora vamos assumir que as seções transversais são deste tipo.

2.2.1 Suavidade de holonomias em seções transversais

Seja $\Sigma \subset U$ uma seção transversal para o fluxo, isto é, um disco mergulhado compacto C^2 em cada ponto $x \in \Sigma$. Considere $\tau_0 = \inf \{|t| : X^t(x) \in \Sigma, t \neq 0\}$ que é estritamente positivo pela compacidade de Σ .

Para $x \in \Sigma$ definimos $W_x^s(\Sigma)$ a componente conexa de $\Sigma \cap \left(\bigcup_{|t| \leq \tau_0/2} X^t(W_x^s) \right)$ que contém x . Como o fluxo $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$ é C^2 , $W_x^s(\Sigma)$ é uma curva mergulhada C^2 de codimensão um para cada $x \in \Sigma$. Estas folhas formam uma folheação \mathcal{F}_Σ^s de codimensão um de Σ . Neste contexto, as holonomias entre pares de curvas transversais a \mathcal{F}_Σ^s ao longo das linhas de \mathcal{F}_Σ^s podem ser vistas como mapas entre intervalos da reta tendo um jacobiano Hölder com respeito à medida de Lebesgue. Portanto estas holonomias são mapas $C^{1+\alpha}$, para algum $0 < \alpha < 1$ que depende apenas de X . Neste caso, as folhas $W^s(x, \Sigma)$, para $x \in \Sigma$ definem uma folheação \mathcal{F}_Σ^s de Σ cuja suavidade transversal é C^1 -Hölder.

Consideremos um par de curvas suaves γ_0, γ_1 contidas em Σ dadas por $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow \Sigma$, $i = 0, 1$ cujo espaço tangente está sempre contido num cone centro-instável:

$$\gamma_i'(t) \in \mathcal{C}_{\gamma_i(t)}^{cu}(a), \text{ para todo } t \in [0, 1], i = 0, 1$$

para algum $a > 0$ pequeno. Chamamos as γ_i 's de *cu*-curvas. Ainda assumimos que $\gamma_i([0, 1]) \pitchfork W_x^s(\Sigma) = \gamma_i([0, 1]) \cap W_x^s(\Sigma)$ é um único ponto para todo $x \in \Sigma$, $i = 0, 1$. Portanto, existe um mapa $h : \gamma_0 \rightarrow \gamma_1$ que associa cada $\gamma_0(t_0)$ ao único ponto de intersecção de $W_{\gamma_0(t_0)}^s(\Sigma)$ com γ_1 ; isto é a holonomia de \mathcal{F}_Σ^s de γ_0 para γ_1 .

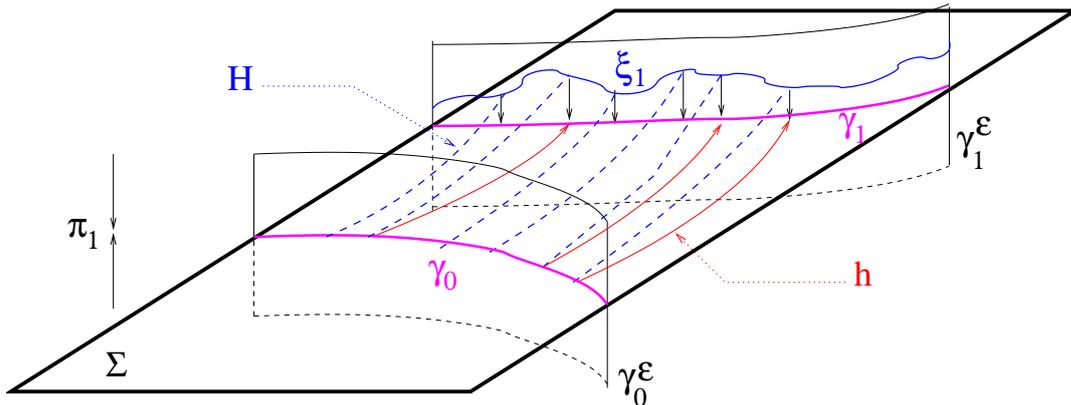


Figura 2.2.1: A seção transversal Σ para o fluxo junto com as curvas γ_i e superfícies γ_i^ϵ , $i = 0, 1$, a holonomia H restrita a γ_0 e holonomia h depois composta com a projeção π_1 .

Lema 2.2.2. *A holonomia h é diferenciável e sua derivada é Hölder.*

Este resultado foi crucialmente usado em [16] para atratores hiperbólicos singulares (para campo de vetores tridimensionais). Para provar o lema precisamos considerar as holonomias da folheação estável \mathcal{F}^s do fluxo.

Fixando $0 < \epsilon < \tau_0$, consideremos as superfícies $\gamma_i^\epsilon = \bigcup_{t \in [-\epsilon, \epsilon]} X^t(\gamma_i)$, $i = 0, 1$ que são pelo menos C^2 já que tanto γ_i quanto X^t pertencem a esta mesma classe de diferenciabilidade. Estas são transversais a folheação estável \mathcal{F}^s do fluxo, por construção. Podemos definir a holonomia $H : \gamma_0^\epsilon \rightarrow \gamma_1^\epsilon$ que a cada $z \in \gamma_0^\epsilon$ associa a única intersecção de W_z^s com γ_1^ϵ ; veja figura 2.2.1

Demonstração. Escrevemos h como composição de $\tilde{h} : \gamma_0 \rightarrow \xi_1 \subset \gamma_1^\epsilon$ e $\pi_i : \gamma_i^\epsilon \rightarrow \gamma_i$, $i = 0, 1$ que é a projeção natural ao longo do fluxo. Temos então que $h = \pi_1 \circ \tilde{h}$, onde

$$\pi_1(z) = \gamma_1(s) \iff \exists |t| < \epsilon : X^t(\gamma_1(s)) = z,$$

para algum $s \in [0, 1]$; veja figura 2.2.1. Então podemos escrever a imagem $\xi_1 = \tilde{h}(\gamma_0)$ como o gráfico de ξ_1^ϵ sobre γ_1 :

$$\xi_1 = \left\{ X_{\xi(\gamma_1(s))}(\gamma_1(s)) : s \in [0, 1] \right\}$$

para uma função $\xi : \gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}$.

Relembremos que \tilde{h} é dada pela restrição $H|_{\gamma_0}$. A Hölder continuidade da holonomia H ao longo de laminações forte-estável ou forte-instável é uma consequência geral da dinâmica parcialmente hiperbólica $C^{1+\alpha}$ para qualquer $\alpha > 0$; veja [13]. Portanto, $\xi : \gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}$ é Hölder contínua.

Além disso, neste contexto, estas holonomias são também absolutamente contínuas com respeito a medida suave m_i em γ_i^ϵ , $i = 0, 1$ induzida do volume Riemanniano em M ;

veja [11,12]. Isto é sabido pois Anosov estudou fluxos hiperbólicos de classe C^2 em variedades com curvatura seccional negativa, e significa que $H_*(m_0) \ll m_1$.

isto também significa que H admite um Jacobiano, que é, existe $JH : \gamma_0^\epsilon \rightarrow [0, +\infty)$ tal que $m_1(H(A)) = \int_A JH dm_0$ para todos subconjunto de Borel A de γ_0^ϵ . Em adição, como consequência da suavidade e hiperbolicidade parcial, este Jacobiano é uma aplicação Hölder contínua.

Denotemos por λ_i a medida induzida em γ_i pela medida de volume m_i em γ_i^ϵ , $i = 0, 1$.

Tudo isto junto significa que $h : \gamma_0 \rightarrow \gamma_1$ é absolutamente contínua no sentido que $h_*(\lambda_0) \ll \lambda_1$ e seu Jacobiano é também Hölder, que implica que a derivada de Radon-Nikodym $\frac{d(h_*\lambda_0)}{d\lambda_1}$ pode ser vista como λ_1 - quase todo ponto igual a h' , e então h se torna de classe C^1 -Hölder.

De fato, dado qualquer intervalo aberto $(a, b) \subset [0, 1]$ definimos $\lambda_i(\gamma_i(a, b)) = m_i(\pi_i^{-1}\gamma_i(a, b))$, $i = 0, 1$ e então

$$\begin{aligned} \lambda_1(h(a, b)) &= \lambda_1(\pi_1 \tilde{h}(\gamma_0(a, b))) = \lambda_1(\pi_1 H(\pi_0^{-1}\gamma_0(a, b))) \\ &= m_1(H(\pi_0^{-1}\gamma_0(a, b))) \\ &= \int_{\pi_0^{-1}\gamma_0(a, b)} JH dm_0 = \int_{\gamma_0(a, b)} JH d((\pi_0)_*m_0) \\ &= \int_{\gamma_0(a, b)} JH d\lambda_0 \end{aligned}$$

veja que o Jacobiano de h pode ser visto como uma restrição de JH para γ_0 . Finalmente, mapas absolutamente contínuos como h são diferenciáveis λ_0 -quase todo ponto e, além disso, são primitivas da derivada. Então temos

$$\lambda_1(h(\gamma_0(a, b))) = \int_{\gamma_0(a, b)} |h'| d\lambda_0$$

para todo $0 \leq a < b \leq 1$. Como também sabemos que $|h' \circ \gamma_0| = JH \circ \gamma_0$, λ_0 - q.t.p. e JH é Hölder contínua, então podemos estender h' para uma função Hölder contínua $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que é a derivada de h . Isto conclui a prova. \square

2.2.2 Aplicações de Poincaré

Para o que segue assumiremos que Λ é um sumidouro hiperbólico singular. Dadas duas seções transversais $\Sigma, \tilde{\Sigma}$ para o fluxo, vamos assumir que existe $x \in \text{int}(\Sigma)$ e $\tau > 0$ tais que $X_\tau(x) \in \text{int}(\tilde{\Sigma})$. A suavidade do fluxo implica que existe uma vizinhança U_x de x em Σ e uma aplicação de Poincaré unicamente definida

$$R : U_x \subset \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}, R(x) = X_{r(x)}(x)$$

para uma função tempo de retorno de Poincaré adequada $r : U_x \rightarrow \mathbb{R}^+$ com $r(x) = \tau$, de tal forma que $R|_{U_x}$ se torne um difeomorfismo para uma vizinhança $V_{R(x)} = R(U_x)$ de $R(x)$ em $\tilde{\Sigma}$ e tão suave quanto o campo de vetores. [10, Proposição 1.2, pp 94].

Note que, em geral, r não precisa corresponder ao primeiro tempo que órbitas de $U_x \subset \Sigma$ encontram $\tilde{\Sigma}$, nem está definido em todo Σ .

Assumimos que $\Sigma, \tilde{\Sigma}$ estão dotados com cu -curvas $\gamma_0, \tilde{\gamma}_0$ que intersectam cada seção e também U_x e $V_{R(x)}$, respectivamente. Na notação introduzida acima, a função tempo de retorno $r : \Sigma \rightarrow (0, +\infty)$ pertence a mesma classe de diferenciabilidade do fluxo, pois as seções transversais $\Sigma, \tilde{\Sigma}$ são discos C^2 , mergulhados em M .

2.2.3 Quocientando localmente sobre a folheação estável

Denote por $p : U_x \rightarrow \gamma_0, p' : V_{f(x)} \rightarrow \tilde{\gamma}_0$ as projeções ao longo da folheação estável \mathcal{F}_Σ^s e $\mathcal{F}_{\tilde{\Sigma}}^s$ em cada vizinhança. A vizinhança aberta U_x onde f está definida é projetada sobre $V = p(U_x)$ que é uma vizinhança aberta de $p(x)$ em γ_0 . Como folhas estáveis são invariantes pelo fluxo, podemos definir uma aplicação de V para γ_0

$$y \in V \mapsto \bar{f}(y) = p' (f (p^{-1}(y) \cap U_x)). \quad (2.2.1)$$

De acordo com o Lema 2.2.2 esta aplicação é uma composição de um mapa $C^{1+\alpha}$ com a aplicação de Poincaré, e assim \bar{f} é uma aplicação $C^{1+\alpha}$, para alguma constante $0 < \alpha < 1$.

2.2.4 Hiperbolicidade do mapa de Poincaré

Assuma que

- R está definida em todos os pontos de Σ (removendo de Σ os pontos onde R não está definida, se necessário), e que
- R envia folhas de \mathcal{F}_Σ^s no interior de folhas de $\mathcal{F}_{\tilde{\Sigma}}^s$.

Então, tomando cu -curvas $\gamma_0, \tilde{\gamma}_0$ intersectando $\Sigma, \tilde{\Sigma}$, respectivamente, o procedimento anterior define uma aplicação quociente $\bar{f} : \gamma_0 \rightarrow \tilde{\gamma}_0$ que é de classe $C^{1+\alpha}$.

Para mostrar que f envia folhas de \mathcal{F}_Σ^s no interior de folhas na imagem, precisamos usar a hiperbolicidade parcial do mapa de retorno de Poincaré entre seções transversais adaptadas em U .

A decomposição $E^s \oplus E^{cu}$ sobre U induz uma decomposição contínua $E^s(\Sigma) \oplus E^{cu}(\Sigma)$ do fibrado tangente $T\Sigma$ (e analogamente para $\tilde{\Sigma}$), definida por

$$E_y^s(\Sigma) = E_y^{cs} \cap T_y \Sigma \text{ e } E_y^{cu}(\Sigma) = E_y^{cu} \cap T_y \Sigma, y \in \Sigma \quad (2.2.2)$$

onde $E_y^{cs} = E_y^s \oplus E_y^G$ e E_y^G é a direção do fluxo em y . A DX^t -invariância da decomposição $E^s \oplus E^{cu}$ em Λ e a invariância de E^s em U significa que $DR.E_x^s(\Sigma) = E_{R(x)}^s(\Sigma)$ para todo $x \in \Sigma$ e $DR.E_x^{cu}(\Sigma) = E_{R(x)}^{cu}(\Sigma)$ para todo $x \in \Lambda \cap \Sigma$.

O próximo resultado estabelece que, se $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c$ é uma decomposição hiperbólica singular e o tempo de Poincaré $r(x)$ é suficientemente grande, então 2.2.2 define uma decomposição hiperbólica para a transformação R nas seções transversais.

Proposição 2.2.3 ([16, Proposição 6.15, p 172]). *Seja $R : \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$ o mapa de Poincaré com tempo de Poincaré $r(\cdot)$ e assumamos que E_Λ^{cu} é seccionalmente expandido. Para cada $0 < \lambda < 1$ dado, existe $T_1 = T_1(\Sigma, \tilde{\Sigma}, \lambda) > 0$ tal que se $\inf r > T_1$, então*

$$\|DR|E_x^s(\Sigma)\| < \lambda \quad e \quad \|DR|E_x^{cu}(\Sigma)\| > 1/\lambda \quad \text{para todo } x \in \Sigma.$$

Dado Σ , $\rho > 0$ e $x \in \Sigma$, definimos $\mathcal{C}_x^u(\rho) = \mathcal{C}_x^{cu}(\rho) \cap T_x M$.

Corolário 2.2.4 ([16, Corolário 6.17, p 173]). *Para $R : \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$ como na Proposição anterior, com $\inf r > T_1$, e qualquer $x \in \Sigma$, existe $\rho > 0$ tal que*

$$DR(x).\mathcal{C}_x^u(\rho) \subset \mathcal{C}_{R(x)}^u(\rho/2) \quad e \quad \|DR(x).(v)\| \geq \frac{\lambda^{-1}}{2} \cdot \|v\| \quad \text{para todo } v \in \mathcal{C}_x^u(\rho).$$

A prova da proposição e seu corolário são baseadas na observação que, para $\rho > 0$ pequeno, $v \in \mathcal{C}_x^u(\rho)$ podemos escrever como $v^s + v^u$, $v^s \in E_x^{cs}$, que é contraído a uma taxa λ , e $v^u \in E_x^{cu}(\Sigma)$, que sai de $T_x \Sigma$ para $T_{R(x)} \Sigma$ é expandido de uma taxa λ^{-1} . Esta expansão é uma consequência da expansão de área ao longo do plano gerado por $\{X(x).v^u\}$ junto com a invariância da direção do fluxo sobre a aplicação tangente para o fluxo. Portanto, para ρ pequeno, a componente centro-instável domina a componente estável e o comprimento do vetor é acrescido de uma taxa próxima a λ^{-1} .

Desta forma, podemos sempre alcançar uma expansão arbitrariamente grande ao longo das direções do cone instável em qualquer par de seções transversais, sempre que tomarmos λ suficientemente próximo de zero e, conseqüentemente, um tempo limite T_1 suficientemente grande.

Observação 2.2.5. Dada uma seção transversal Σ podemos supor, sem perda de generalidade, que é a imagem do quadrado $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ por um difeomorfismo h de classe $C^{1+\alpha}$, para algum $0 < \alpha < 1$, que envia linhas verticais em folhas de \mathcal{F}_Σ^s . Denote por $\text{int}(\Sigma)$ a imagem de $(0, 1) \times (0, 1)$ por h . Também assumimos que cada seção Σ está contida em U , então cada $x \in \Sigma$ é tal que $\omega(x) \subset \Lambda$. A partir de agora vamos assumir que as seções transversais são deste tipo.

2.2.5 Seções transversais adaptadas

A próxima etapa é encontrar variedades estáveis para a transformação de Poincaré R . Os naturais candidatos são as interseções $W^s(x, \Sigma) = W^s(x) \cap \Sigma$. Por construção estas

folhas são contraídas pela ação do fluxo e portanto contraídas por R . Além disso, como já dito antes, estas interseções definem uma folheação estável $C^{1+\alpha}$ \mathcal{F}_Σ^s de σ com holonomia C^1 -Hölder. Para alcançar nosso objetivo é importante que esta folheação seja invariante:

$$R(W^s(x, \Sigma)) \subset W^s(R(x), \Sigma') \text{ para todo } x \in \Lambda \cap \Sigma(\Sigma'). \quad (2.2.3)$$

Para obter este tipo de propriedade restringimos nossa classes de seções transversais tais que o bordo centro instável é disjunto de Λ . Lembre que estamos considerando seções Σ que são difeomorfas ao quadrado $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$, com linhas verticais $\{\eta\} \times \mathbb{I}$ enviadas em conjuntos estáveis $W^s(y, \Sigma)$. O *bordo estável* $\partial^s \Sigma$ é a imagem de $\{0, 1\} \times \mathbb{I}$. O *bordo centro instável ou cu-bordo* $\partial^{cu} \Sigma$ é a imagem de $\mathbb{I} \times \{0, 1\}$. A seção transversal é δ -adaptada se

$$d(\Lambda \cap \Sigma, \partial^{cu} \Sigma) > \delta,$$

onde d é a distância intrínseca em Σ . Relembre que escolhemos a seção tal que os *cu*-bordos são formados por *cu*-curvas.

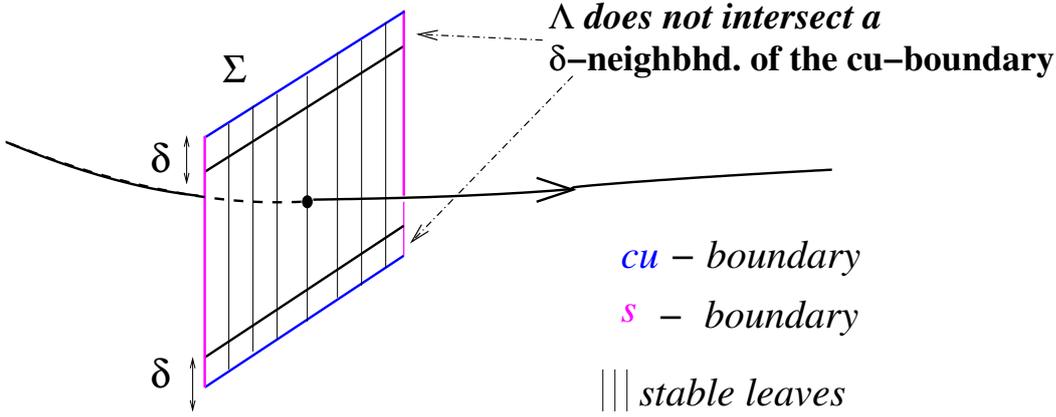


Figura 2.2.2: Seção adaptada para Λ

Chamamos faixa vertical de Σ a imagem $h(J \times \mathbb{I})$ para qualquer subintervalo compacto J , onde $h : \mathbb{I}^2 \rightarrow \Sigma$ é o sistema de coordenadas em Σ como na Observação (2.2.1). Note que cada faixa vertical é uma seção δ -adaptada.

Proposição 2.2.6. [16, Lema 6.22, pp 177] *Seja Λ um subconjunto compacto invariante para um campo de vetores tridimensional G , que é sumidouro seccional hiperbólico com volume zero, e seja $x \in \Lambda$ um ponto regular. Então, existe $\delta > 0$ tal que podemos encontrar uma seção transversal δ - adaptada Σ contendo x em seu interior.*

O próximo lema diz que se as seções transversais são adaptadas, e o tempo de Poincaré é grande o suficiente, então temos a propriedade (2.2.3).

Lema 2.2.7. [16, Lema 6.23, pag 178] *Dado $\delta > 0$ e Σ, Σ' seções δ -adaptadas, existe $T_2 = T_2(\Sigma, \Sigma') > T_1 > 0$, onde T_1 é como na Proposição 2.2.3, tal que se $R : \Sigma(\Sigma') \rightarrow \Sigma'$ é a transformação de Poincaré com tempo de Poincaré $\inf r > T_2$, então*

1. $R(W^s(x, \Sigma)) \subset W^s(R(x), \Sigma')$ para cada $x \in \Sigma(\Sigma')$, e
2. $d(R(y), R(z)) \leq \frac{1}{2}d(y, z)$ para todo $y, z \in W^s(x, \Sigma)$ e $x \in \Sigma(\Sigma')$.

O lema acima, que é consequência direta das propriedades obtidas na Proposição (2.2.3) usadas em seções adaptadas, nos dá condições suficientes para termos hiperbolicidade parcial da aplicação de Poincaré. De fato, se $t > T_2 > T_1$, então as folhas estáveis são enviadas estritamente dentro das folhas estáveis e uniformemente contraídas pela taxa de $1/2$; e os cones instáveis em seções transversais são preservados.

2.2.6 Seção δ -adaptada numa vizinhança de todo ponto regular

A prova da Proposição 2.2.6 será baseada nos argumentos usados em [16, Seção 6.1.3, pp 175-178] visto que as hipóteses em Λ no enunciado do lema são mais fracas do que é considerado usualmente na literatura.

O próximo resultado é uma consequência topológica do Lema 1.3.2 e é crucial no que segue. Este é o único resultado que usa a hipótese de que o sumidouro tem volume zero. O mesmo resultado foi obtido em [15] assumindo, além da hiperbolicidade singular, também transitividade.

Lema 2.2.8. *Cada ponto regular x em um conjunto compacto invariante Λ , no contexto da Proposição 2.2.6, satisfaz $x \in \overline{W^{ss}(x)} \setminus \Lambda$.*

Usamos o seguinte lema da dinâmica hiperbólica.

Lema 2.2.9 ([16, Lema 6.20]). *Seja $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e Λ um subconjunto compacto invariante parcialmente hiperbólico contendo um disco forte-estável γ , com γ uma vizinhança de algum ponto de $W^{ss}(x) \cap \Lambda$ com a topologia relativa de $W^{ss}(x)$, para algum $x \in \Lambda$. Então, $\alpha_X(\gamma) = \{\alpha(z) : z \in \gamma\}$ contém todos os discos estáveis através de seus pontos.*

A seguir damos a prova do Lema 2.2.8.

Demonstração. A prova é feita por contradição. Suponha que existe $x \in \Lambda$ tal que x está no interior de $W^{ss}(x) \cap \Lambda$. Pelo Lema 2.2.9 o conjunto $\alpha(x)$ contém todas as variedades estáveis através de seus pontos.

Segue que $\alpha(x)$ não contém nenhuma singularidade: de fato, pelo Lema 1.3.2 sabemos que a variedade forte-estável de cada singularidade intersecta Λ apenas na singularidade.

Portanto, segue da Proposição 1.3.1 que o conjunto invariante $\alpha(x) \subset \Lambda$ é hiperbólico. Segue das observações anteriores que o conjunto

$$H = \overline{\bigcup \{W^{ss}(y) : y \in \alpha(x) \cap \Lambda\}}$$

está contido em Λ . Pelo mesmo argumento de antes, este conjunto contém as variedades forte-estáveis de todos os seus pontos. Portanto pela Proposição 1.3.1, H não contém nenhuma singularidade, isto é, H é uniformemente hiperbólico.

Afirmamos que $\overline{W^u(H)}$, o fecho da união das variedades instáveis dos pontos de H , é um conjunto aberto (claramente é um conjunto fechado). Primeiro mostraremos que $W^u(H)$ é aberto. Note que H contém toda a variedade estável $W^s(z)$ de cada $z \in H$: isto porque H é invariante e contém a variedade forte-estável de z . Note que a união das variedades forte-instáveis dos pontos de $W^s(z)$ contém uma vizinhança de z . Isto prova que $W^u(H)$ é uma vizinhança de H . Assim, a órbita passada de qualquer ponto em $W^u(H)$ deve entrar no interior de $W^u(H)$. Uma vez que o interior é um conjunto invariante segue que $W^u(H)$ é aberto.

Agora observe que, como $W^u(H)$ é aberto e invariante, a variedade forte-estável de qualquer $z \in W^u(H)$ está contido em $W^u(H)$, que está contido em Λ pois assumimos que Λ é sumidouro. Portanto, tomando limites vemos que $W^{ss}(\omega) \subset W^u(H)$, para todo $\omega \in \overline{W^u(H)}$. Isto implica que $\overline{W^u(H)}$ não contém singularidades e é hiperbólico. Finalmente, as variedades instáveis dos pontos em $\overline{W^u(H)}$ estão bem definidas pela hiperbolicidade e estão em $\overline{W^u(H)}$, apenas tomando limites dos pontos em $W^u(H)$. Portanto, $\overline{W^u(H)}$ contém suas variedades estáveis e instáveis, e então um conjunto aberto em Λ .

Isto mostra que Λ tem interior não vazio, contradizendo a hipótese que Λ tem volume zero. \square

Corolário 2.2.10. *Para qualquer $x \in \Lambda$ existe pontos $x^+ \notin \Lambda$ e $x^- \notin \Lambda$ em distintas componentes conexas de $W^{ss}(x) \setminus \{x\}$.*

Agora podemos provar a Proposição 2.2.6. Fixe $\epsilon > 0$ como no Teorema da variedade estável. Qualquer seção transversal Σ_0 em x suficientemente pequena com respeito a $\epsilon > 0$ é folheada pelas intersecções $W_\epsilon^s(x) \cap \Sigma_0$. Pelo Corolário 2.2.10, podemos encontrar pontos $x^+ \notin \Lambda$ e $x^- \notin \Lambda$ em cada uma das componentes conexas de $W_\epsilon^s(x) \cap \Sigma_0$. Como Λ é fechado, existem vizinhanças V^\pm de x^\pm disjuntas de Λ . Seja $\gamma \subset \Sigma_0$ alguma curva pequena passando por x transversal a $W_\epsilon^s(x) \cap \Sigma_0$. Então, podemos encontrar uma família contínua de segmentos dentro de $W_\epsilon^s(y) \cap \Sigma_0$, para cada $y \in \gamma$ com pontos finais em V^\pm . A união Σ destes segmentos é uma seção transversal δ - adaptada, para algum $\delta > 0$. Veja figura 2.2.6.

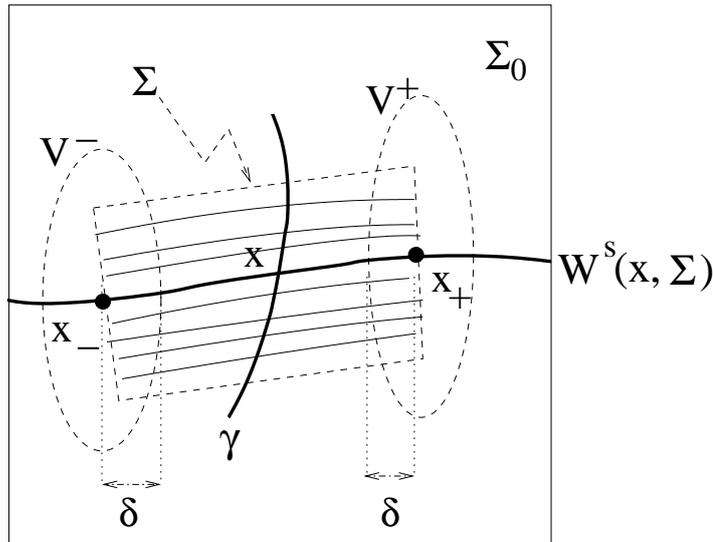


Figura 2.2.3: A construção de uma seção δ -adaptada para um $x \in \Lambda$ regular.

Isto conclui a prova da Proposição 2.2.6

2.2.7 Suavidade e expansão do quociente da aplicação de Poincaré sobre as folhas estáveis

Agora podemos voltar para o mapa quociente sobre as folhas estáveis que agora estão bem definidas em $V = \Sigma$ e concluir que este é uma aplicação $C^{1+\alpha}$ e também que, para qualquer $\sigma > 1$, definimos $\lambda = \sigma^{-1}$ na Proposição 2.2.3 e deduzir que

$$|D\bar{f}| = |D(p' \circ R \circ \gamma_0)| \geq \sin \angle (\mathcal{F}_\Sigma^s(R \circ \gamma_0), \tilde{\gamma}_0) \cdot \|DR \circ \gamma_0(\tilde{\gamma}_0)\| > \sigma$$

sempre que tomarmos os limites temporais T_1, T_2 grandes o suficiente, pois os ângulos entre as cu -curvas $\gamma_0, \tilde{\gamma}_0$ e a folheação estável nas seções são afastados de zero.

2.3 Aplicação de Poincaré perto das singularidades

Aqui construiremos a aplicação de Poincaré do fluxo próximo as singularidades. Relembre que, como as singularidades σ são do tipo Lorenz, a variedade instável $W^u(\sigma)$ é unidimensional, e existe uma variedade forte estável $W^{ss}(\sigma)$ contida na variedade estável bidimensional $W^s(\sigma)$. Pelos resultados de linearização obtidos por Hartman na ausência de ressonâncias, órbitas do fluxo em uma vizinhança pequena U_σ de uma dada singularidade σ são soluções do seguinte sistema linear, módulo uma escolha suave de coordenadas:

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y, \lambda_3 z) \quad \text{logo} \quad X^t(x_0, y_0, z_0) = (x_0 e^{\lambda_1 t}, y_0 e^{\lambda_2 t}, z_0 e^{\lambda_3 t}), \quad (2.3.1)$$

com $\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < -\lambda_3 < \lambda_1$.

Vamos usar o seguinte resultado de linearização.

Teorema 2.3.1. *Dado $n \in \mathbb{Z}^+$ existe inteiro $N = N(n) \geq 2$ tal que: se Γ é uma matriz real não singular $d \times d$ com autovalores $\gamma_1, \dots, \gamma_d$ satisfazendo*

$$\sum_{i=1}^d m_i \gamma_i \neq \gamma_k \text{ para todo } k = 1, \dots, d \text{ e } 2 \leq \sum_{j=1}^d m_j \leq N \quad (2.3.2)$$

e se $\dot{\xi} = \Gamma\xi + \Xi(\xi)$, $\dot{\zeta} = \Gamma\zeta$, onde $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^d$ e Ξ é de classe C^N para $\|\xi\|$ pequeno com $\Xi(0) = 0$, $\partial_\xi \Xi(0) = 0$; então existe um difeomorfismo C^n R de uma vizinhança de $\xi = 0$ para uma vizinhança de $\zeta = 0$ tal que $R\xi_t R^{-1} = \zeta_t$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e condições iniciais para os quais o fluxo ζ_t e ξ_t estão definidos nas correspondentes vizinhanças da origem.

Demonstração. Veja [37], Teorema 12.1, p. 257. □

Lembre que, em geral, singularidades hiperbólicas são apenas linearizadas por homeomorfismos no máximo Hölder de acordo com o Teorema de Hartman-Grobman.

Pelo Teorema 2.3.1, é suficiente escolhermos os autovalores $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ de σ satisfazendo um conjunto finito de relações de não-ressonância (2.3.2) para um certo $N = N(2)$ e para cada singularidade σ_k em Λ . Para esta condição, defina um conjunto aberto e denso em \mathbb{R}^3 e então toda perturbação pequena Y do campo X vai ter uma singularidade cujos autovalores $(\lambda_1(Y), \lambda_2(Y), \lambda_3(Y))$ estão ainda na região de linearização C^2 .

Note que em (2.3.1) x corresponde a direção forte estável em σ , y a direção expansora e z a direção estável fraca. Então, para algum $\delta > 0$ podemos escolher seções transversais contidas em U_σ

- $\Sigma_\sigma^{0,\pm}$ em pontos y^\pm em diferentes componentes de $W_{loc}^u(\sigma) \setminus \{\sigma\}$;
- $\Sigma_\sigma^{i,\pm}$ em pontos x^\pm em diferentes componentes de $W_{loc}^s(\sigma) \setminus W_{loc}^{ss}(\sigma)$,

e a aplicação de primeiro retorno de Poincaré $R^\pm : \Sigma_\sigma^{i,\pm} \setminus \ell^\pm \longrightarrow \Sigma_\sigma^{0,-} \cup \Sigma_\sigma^{0,+}$, onde $\ell^\pm = \Sigma_\sigma^{i,\pm} \cap W_{loc}^s(\sigma)$, satisfazendo

1. cada órbita no sumidouro que intersecta uma vizinhança pequena da singularidade σ intersecta alguma das seções $\Sigma_\sigma^{i,\pm}$;
2. R^\pm envia cada componente conexa de $\Sigma_\sigma^{i,\pm} \setminus \ell^\pm$ difeomorficamente em uma diferente seção $\Sigma_\sigma^{0,\pm}$, preservando as correspondentes folheações estáveis.

Aqui escrevemos $W_{loc}^*(\sigma)$, $*$ = s, ss, u para as variedades locais estável, forte estável e instável da singularidade tipo sela hiperbólica σ , e estas variedades estendem-se para as seções $\Sigma_\sigma^{i,\pm}$, e $\Sigma_\sigma^{0,\pm}$.

Note que em cada caixa de fluxo próximo a singularidade existem quatro seções: duas de saída $\Sigma_\sigma^{i,\pm}$ e duas de chegada $\Sigma_\sigma^{0,\pm}$.

Usando as coordenadas C^2 linearizadas na caixa de fluxo próximo a singularidade, com os apropriados reescalamentos, podemos assumir sem perda de generalidade que para um $\delta > 0$ pequeno, $\Sigma^{i,\pm} = \{(x_1, x_2, \pm 1) : |x_1| \leq \delta, |x_2| \leq \delta\}$ e $\Sigma^{0,\pm} = \{(\pm 1, x_2, x_3) : |x_2| \leq \delta, |x_3| \leq \delta\}$.

Então, a partir de (2.3.1) podemos determinar a expressão da transformação de Poincaré entre as seções de saída e chegada:

$$\Sigma^{i,\pm} \cap \{x_1 > 0\} \rightarrow \Sigma^{0,\pm}, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (1, x_2 \cdot x_1^{-\lambda_2/\lambda_1}, x_1^{-\lambda_3/\lambda_1}) \quad (2.3.3)$$

Os outros casos são similares.

Isto mostra que a aplicação obtida a partir da identificação dos pontos com a mesma coordenada x_2 , ou seja, pontos na mesma folha estável, é simplesmente $x \mapsto f(x) = x^\alpha$ em que $\alpha = -\lambda_3/\lambda_1 \in (0, 1)$. Analogamente, as coordenadas transversais as folhas estáveis transformam de acordo com o mapa $g(x, y) = yx^\beta$ em que $\beta = -\lambda_2/\lambda_1 > 0$. *Observação 2.3.2.* $\partial_x g(x, y) = \beta y x^{\beta-1}$ é limitada se, e somente se, $\beta \geq 1$ ou equivalentemente $-\lambda_2 > \lambda_1$.

Nestas coordenadas é fácil ver que para pontos $z = (x_1, x_2, \pm 1) \in \Sigma^{i,\pm}$ o tempo τ^\pm tal que o fluxo começa em z e toca em uma das $\Sigma^{0,\pm}$ depende apenas de x_1 e é dado por

$$\tau^{\pm 1}(x_1) = -\frac{\log |x_1|}{\lambda_1} \text{ e conseqüentemente } \int_{-\delta}^{\delta} |\tau^\pm(x_1)| dx_1 < \infty. \quad (2.3.4)$$

Isto mostra, em particular, que o tempo de retorno em uma seção de saída próximo a uma singularidade é constante nas folhas estáveis.

2.4 Transformação Global de Poincaré

Agora mostramos a construção da aplicação global de Poincaré para o fluxo em uma vizinhança do sumidouro singular hiperbólico Λ .

Observe que pela Proposição 2.2.6 podemos encontrar uma seção δ -adaptada em cada ponto não singular $x \in \Lambda$. Sabemos também que perto de cada singularidade σ_k de Λ existe uma caixa de fluxo U_{σ_k} contendo σ_k em seu interior. Seja $S(\Lambda)$ o conjunto das singularidades em Λ .

Passo 1: Escolha uma caixa de fluxo U_σ com as seguintes condições extras:

1. para qualquer par de distintos $\sigma_1, \sigma_2 \in S(\Lambda)$ a caixa de fluxo

$$\Sigma_\sigma^{*,\pm}(T) := \{X_s(x) : x \in \text{int}(\Sigma_\sigma^{*,\pm}), |s| < T_1\}, \sigma = \sigma_1, \sigma_2, * = i, 0$$

são disjuntas dois a dois, e

2. o menor tempo necessário para a órbita positiva de um ponto em $\Sigma^{i,\pm}$ intersectar $\Sigma^{0,\pm}$ é maior que T_1 .

Note que como podemos tomar $\Sigma_\sigma^{*,\pm}$ arbitrariamente próximo de σ , estas condições podem sempre ser obtidas. Denote por Θ a família de todas as seções transversais perto das singularidades de Λ .

Passo 2: Considere o conjunto aberto $V_S = \cup_{\sigma \in S(\Lambda)} \cup_{* \neq i, 0} \Sigma_\sigma^{*,\pm}(T_1)$ e o subconjunto compacto $\Lambda_1 := \Lambda \setminus V_S$ de Λ . Sabemos que qualquer $x \in \Lambda_1$ é um ponto regular. Portanto temos seções δ -adaptadas Σ_x para todo $x \in \Lambda_1$. Considere a ϵ_0 -caixa de fluxo

$$\Sigma_x(\epsilon_0) := \{X_s(x) : x \in \text{int}(\Sigma_x), |s| < \epsilon_0\}$$

para um ϵ_0 fixo pequeno e $\epsilon_0 < T_1$. Note que $x \in \Lambda_1$ significa que $\Sigma_x(\epsilon_0)$ não contém singularidades e, de fato, não intersecta qualquer uma das seções fixadas no Passo 1.

A coleção $\mathcal{C} := \{\Sigma_x(\epsilon_0) : x \in \Lambda_1\}$ é uma cobertura aberta de Λ_1 . Fixamos a subcobertura finita $\mathcal{C}_0 = \{\Sigma_{x_1}(\epsilon_0), \dots, \Sigma_{x_k}(\epsilon_0)\}$ no que segue e consideramos a correspondente família finita de seções transversais $\Xi_0 = \{\Sigma_{x_1}, \dots, \Sigma_{x_k}\}$.

Passo 3: Agora ajustamos a construção de forma que o tempo de primeiro retorno de Poincaré entre elementos de Ξ_0 seja maior que alguma constante positiva uniforme.

Dadas $\Sigma, \Sigma' \in \Xi_0$, se $\text{int}(\Sigma) \cap \text{int}(\Sigma') \neq \emptyset$, então podemos supor sem perda de generalidade que a interseção é transversal. Por outro lado, se $h : \mathbb{I}^2 \rightarrow \Sigma$ é o sistema de coordenadas de Σ visto na Observação 2.2.1, podemos encontrar um mergulho $C^{1+\alpha}$ $\hat{h} : \mathbb{I}^2 \rightarrow M$ suficientemente próximo de h tal que $\hat{\Sigma} := \hat{h}(\mathbb{I}^2)$ é uma seção δ -adaptada e existe $\phi : \mathbb{I}^2 \rightarrow (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ tal que $\hat{h}(s, t) = X_{\phi(s, t)}(h(s, t))$ e ambos os pares $\text{int}(\hat{\Sigma}), \text{int}(\Sigma')$ e $\partial\hat{\Sigma}, \partial\Sigma'$ são transversais. Em particular, $\partial\hat{\Sigma}$ e $\partial\Sigma'$ devem ser disjuntos, pois o espaço ambiente é tridimensional.

Segue que podemos assumir que a interseção $\Sigma \cap \Sigma'$ é formada por um número finito de curvas suaves fechadas. Considere a sub faixa de Σ dada por

$$\Sigma_0 := \cup \{W^s(y, \Sigma) : y \in \Sigma \cap \Sigma'\}$$

e também a sub faixa de Σ' dada por

$$\Sigma_1 := \cup \{W^s(z, \Sigma') : z \in \Sigma \cap \Sigma'\}.$$

Com respeito a definição de $W^s(z, \Sigma), W^s(z, \Sigma')$ existem $\phi_z : W^s(z, \Sigma) \rightarrow (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ e $\hat{\phi}_z : W^s(z, \Sigma') \rightarrow (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ tais que para cada $z \in \Sigma \cap \Sigma'$

$$W_0^{ss}(z) := \{X_{\phi(x)}(x) : x \in W^s(z, \Sigma)\} \cup \{X_{\hat{\phi}(y)}(y) : y \in W^s(z, \Sigma')\} \subset W_\epsilon^{ss}(z)$$

e $\phi(z) = 0 = \hat{\phi}(z)$. Pelo Teorema 2.1.1, as variedades estáveis na vizinhança U de Λ variam C^2 - suavemente no pontos da base, então o conjunto

$$\Sigma_2 := \{W_0^{ss}(z) : z \in \Sigma \cap \Sigma'\}$$

é uma seção δ - adaptada cuja caixa de fluxo, no tempo $2\epsilon_0$, cobre a ϵ_0 - caixa de fluxo de Σ_0 e Σ_1 .

Substituímos Σ e Σ' pelas seguintes faixas: o fecho das componentes conexas de $\Sigma \setminus \Sigma_0$; junto com o fecho das componentes conexas de $\Sigma' \setminus \Sigma_1$; e o fecho de Σ_2 . O número de tais componentes é finito e, além disso, suas caixas de fluxo, no tempo $2\epsilon_0$, cobrem pelo menos a mesma porção de Λ como as caixas de fluxo de Σ e Σ' .

Esta construção nos garante que, para quaisquer $\Sigma, \hat{\Sigma}$ em Ξ_0 , seus interiores não se intersectam e o menor tempo de primeiro retorno de Poincaré entre estas seções é estritamente positivo. Redefinimos $\mathcal{C}_0 = \{\Sigma(2\epsilon_0) : \Sigma \in \Xi_0\}$.

Definimos $\Xi := \Xi_0 \cup \Theta$ a família de todas as seções transversais escolhidas nas etapas acima.

Observação 2.4.1. Note que:

1. garantimos que cada um dos conjuntos abertos $\Sigma(2\epsilon_0)$, $\Sigma \in \Xi$ e $U_\sigma, \sigma \in S(\Lambda)$ está contido em U , vizinhança de Λ onde a extensão da folheação forte estável está definida;
2. dada $\Sigma \in \Xi$ e $x \in \text{int}(\Sigma)$, o tempo de primeiro retorno de Poincaré para a órbita positiva de x alcançar alguma seção em Ξ é estritamente positivo, como o número de seções é finito e cada uma delas é compacta existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $\inf\{t > 0 : X^t(x) \in \Xi\} \geq \epsilon_1$;
3. como Λ é um atrator, o conjunto $\omega(z)$ de qualquer $z \in \cup_{\Sigma \in \mathcal{C}} \Sigma(\epsilon_0) \cup \cup_{\sigma \in S(\Lambda)} U_\sigma$ está contido em Λ . Seja z um ponto regular. Com exceção das variedades locais de σ em U_σ , um ponto $y \in \omega(z)$ tem órbita regular que intersecta alguma seção em Ξ em algum tempo futuro. Portanto, a órbita de z , que acumula em $\omega(z)$, deve intersectar alguma seção de Ξ .

Definição 2.4.2. [Aplicação global de primeiro retorno de Poincaré] Seja z um ponto no interior de uma seção transversal em Ξ . A aplicação de primeiro retorno de Poincaré é dada por

$$R_0(z) := X_{\tau_0(z)}(z) \tag{2.4.1}$$

e dizemos que

$$\tau_0(z) := \inf\{t > 0 : X^t(z) \in \Xi\} \tag{2.4.2}$$

é o tempo de Poincaré de z . Se o ponto z nunca retorna para alguma das seções, então o mapa R_0 não está definido em z .

Esta construção nos garante que R_0 é injetiva, uma vez que é o mapa de primeiro retorno entre seções transversais ao fluxo.

Ainda não podemos assegurar que o tempo de Poincaré é suficientemente grande para ter hiperbolicidade da transformação de retorno. Observemos primeiro que pelo Lema 2.2.6 podemos tomar uma seção transversal δ -adaptada em cada ponto não singular $x \in \Lambda$. Sabemos também que próximo de cada singularidade σ_k existe uma caixa de fluxo U_{σ_k} .

Usando a construção da vizinhança tubular próximo a qualquer seção δ -adaptada Σ , linearizamos o fluxo em um conjunto aberto $U_\Sigma = X^{(-\epsilon, \epsilon)}(\text{int}(\Sigma))$ para $\epsilon > 0$ pequeno, contendo o interior da seção. Isto nos fornece uma cobertura aberta do compacto Λ por caixas de fluxo próximo as singularidades e vizinhanças tubulares em torno de pontos regulares.

Seja $\{U_{\Sigma_i}, U_{\sigma_k} : i = 1, \dots, l \text{ e } k = 1, \dots, s\}$ uma cobertura finita de Λ , onde $s \geq 1$ é o número de singularidades em Λ , e seja $T_3 > 0$ um limite superior para o tempo que qualquer ponto $z \in U_{\Sigma_i}$ leva para sair da vizinhança tubular sob o fluxo, para qualquer $i = 1, \dots, l$. Assumimos, sem perda de generalidade, que $T_2 > T_3$.

Para definir a aplicação de Poincaré R para qualquer ponto z em uma das seções em

$$\Xi = \{\Sigma_j, \Sigma_{\sigma_k}^{i, \pm}, \Sigma_{\sigma_k}^{0, \pm} : j = 1, \dots, l; k = 1, \dots, s\},$$

consideramos $\hat{z} = X^{T_2}(z)$ e esperamos o próximo tempo $\tau_0(X^{T_2}(z))$ que a órbita de \hat{z} toca novamente uma das seções. Então, definimos

$$R(z) = X^{T_2 + \tau_0(X^{T_2}(z))}(z),$$

e dizemos que $\tau(z) = T_2 + \tau_0(X^{T_2}(z))$ é o tempo de Poincaré de z . Se o ponto z nunca retorna para umas as seções transversais, então o mapa R não está definido em z . Além disso, pelo Lema 2.2.7, se R está definida em $x \in \Sigma$ para alguma $\Sigma \in \Xi$, então R está definida em cada ponto de $W^s(x, \Sigma)$. Portanto, o domínio de $R|_\Sigma$ é formado por faixas de Σ . A suavidade de $(x, t) \mapsto X^t(x)$ significa que as faixas

$$\Sigma(\Sigma') = \{x \in \Sigma : R(x) \in \Sigma'\}$$

em interior não-vazio em Σ , para quaisquer $\Sigma, \Sigma' \in \Xi$. Numa seção de chegada perto de uma singularidade σ_k , pode existir um bordo da faixa correspondendo a linha l_k^\pm de pontos que caem na variedade estável de σ_k .

Observação 2.4.3. Pelo item (3) da Observação 2.4.1, a família de todas $\Sigma(\Sigma')$ para $\Sigma' \in \Xi$ cobre Σ exceto nos ponto em que R não está definida.

2.4.1 Número finito de faixas no domínio da aplicação global de Poincaré

O próximo resultado diz que, fixando uma seção transversal $\Sigma \in \Xi$, os pontos onde R não está definida estão contido em um número finito de folhas estáveis. Assim, a família de todas as possíveis faixas cobrem Σ exceto por um número finito de folhas estáveis $W^s(x_i, \Sigma)$, $i = 1, \dots, m = m(\Sigma)$. Ou seja, o número de faixas em cada seção é finito.

Pelo Teorema do Fluxo Tubular e a suavidade do fluxo temos que R é suave em todos os pontos $x \in \Sigma$ tais que $R(x) \in \text{int}(\Xi)$, onde $\text{int}(\Sigma)$ é a união dos interiores de cada seção em Ξ . Denote $\partial^s \Xi$ a união de todas as folhas que formam o bordo estável de cada seção em Ξ .

Lema 2.4.4 ([16]). *O conjunto das descontinuidades de R em $\Xi \setminus \partial^s \Xi$ está contido no conjunto dos pontos $x \in \Xi \setminus \partial^s \Xi$ tal que:*

1. *Ou $R(x)$ está definida e pertence a $\partial^s \Xi$;*
2. *ou existe algum $0 < t < T_2$ tal que $X^t(x) \in W_\epsilon^s(\sigma) \cap \Sigma_j$ para alguma singularidade σ em Λ e $\Sigma_j \in \Xi$.*

Além disso, este conjunto está contido em um número finito de folhas estáveis da seção $\Sigma \in \Xi$.

A prova deste lema depende do fato de que o tempo de Poincaré é finito para pontos onde $R(x)$ está definida, então os outros pontos devem estar no atrator mas nunca intersectam outra seção em Ξ , então devem convergir para uma singularidade de X em Λ , ou vão cair no bordo estável de alguma seção de Ξ .

Seja Γ o conjunto finito das folhas estáveis de Ξ vindas do Lema (2.4.4) unido com $\partial^s \Xi$. Então o complementar $\Xi \setminus \Gamma$ é formado por finitas faixas abertas $\Sigma \in \Xi$, onde R é de classe C^2 . Cada uma dessas faixas é então uma componente dos conjuntos $\Sigma(\Sigma')$ para $\Sigma, \Sigma' \in \Xi$, onde R é um difeomorfismo C^2 .

2.4.2 Integrabilidade do tempo de retorno global de Poincaré τ

Agora vamos obter uma propriedade fundamental para a construção de medidas físicas para atratores hiperbólicos singulares.

Lema 2.4.5. *O tempo global de Poincaré τ é integrável com respeito a medida de Lebesgue em Ξ , induzida pela forma de volume em M .*

Demonstração. Seja $z \in \Xi$, o ponto $\hat{z} = X^{T_2}(z)$ ou está numa caixa de fluxo U_{σ_k} de uma singularidade σ_k , ou não. No primeiro caso, o tempo que \hat{z} leva para alcançar uma seção de saída $\Sigma_{\sigma_k}^{0,\pm}$ é limitado pela função tempo de saída $\tau_{\sigma_k}^\pm$ da correspondente caixa de fluxo, que é integrável. No segundo caso, \hat{z} leva um tempo de no máximo $2T_3$ para alcançar outra seção, pela definição de T_3 . Assim, o tempo de Poincaré em Ξ é limitado por $T_2 + T_3$ mais uma soma de finitas funções integráveis, uma para cada caixa de fluxo perto de uma singularidade, por finitude do número de singularidades, do número de seções em Ξ e do número de faixas em cada seção. Assim, o tempo de Poincaré de R em Ξ é Lebesgue integrável. \square

Observação 2.4.6. Como as folhas estáveis nas seções transversais fixadas são uniformemente contraídas pelo fluxo, existe uma constante c dependente apenas do campo, do diâmetro e posições das seções, tal que $|\tau(x) - \tau(x')| < c$ para todos os pares x, x' na mesma folha estável das seções da família Ξ . Ou seja, o tempo de retorno de Poincaré é quase constante sobre as folhas estáveis de Ξ .

2.5 Aplicação bidimensional F

A partir de agora Ξ é a coleção de todas as faixas $\Sigma(\Sigma')$ onde a aplicação de Poincaré é suave. Vamos denotar as faixas por Σ . Escolhemos uma cu -curva C^2 γ_Σ transversal a \mathcal{F}_Σ^s em cada $\Sigma \in \Xi$. Então, a projeção p_Σ ao longo das folhas de \mathcal{F}_Σ^s em γ_Σ é um mapa $C^{1+\alpha}$, pois as folhas estáveis $W^s(x, \Sigma)$ são definidas através dos pontos de $\Sigma \in \Xi$ e as holonomias dependem $C^{1+\alpha}$ suavemente no ponto da base.

Dado um conjunto A , defina

$$I = \bigcup_{\Sigma, \Sigma' \in \Xi} \overline{\Sigma(\Sigma')} \cap \gamma_\Sigma \quad \text{e} \quad S = \bigcup_{\Sigma, \Sigma' \in \Xi} \overline{\Sigma(\Sigma')}.$$

Como o número de faixas é finito, pelas propriedades de $\Sigma(\Sigma')$ obtidas anteriormente, o conjunto I é C^2 -difeomorfo ao intervalo $\mathbb{I} = [0, 1]$ menos o conjunto com finitos pontos $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$, e $p_\Sigma|_{p_\Sigma^{-1}}$ torna-se uma submersão C^1 . O conjunto S é $C^{1+\alpha}$ -difeomorfo ao retângulo fechado não degenerado $Q \subset \mathbb{R}^2$, $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ menos o conjunto finito formado por linhas verticais $\mathcal{C} \times \mathbb{I}$. Denote por H o $C^{1+\alpha}$ -difeomorfismo $H : S \rightarrow Q$ que envia folhas estáveis em linhas verticais e considere a composição

$$F = H \circ R \circ H^{-1} : Q \rightarrow Q.$$

De acordo com a Proposição 2.2.3, Corolário 2.2.4 e Lema 2.2.7, a aplicação de Poincaré $R : \Xi \setminus \Gamma \rightarrow \Xi$ leva folhas estáveis de \mathcal{F}_Σ^s em folhas estáveis da mesma folheação, é C^1 por partes e hiperbólica. Além disso, pelo Corolário 2.2.4, uma cu -curva $\gamma \subset \Sigma$ é levada por R em uma cu -curva $R(\gamma)$ na imagem da seção.

Podemos definir cones instáveis em Q usando a suavidade de H :

$$\mathbb{C}_\rho^u(H(x)) := DH(x) \cdot C_\rho^u.$$

Isto significa, em particular, que cu - curvas são enviadas por F em cu - curvas. Portanto, o mapa $F = H \circ R \circ H^{-1}$ pode ser escrito como

$$F(x, y) = (f(x), g(x, y)),$$

onde

$$f : \mathbb{I} \setminus \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{I}, (\mathbb{I} \setminus \mathcal{D}) \ni z \mapsto H((p_{\Sigma'}(R(W^s(H^{-1}(z), \Sigma) \cap \Sigma(\Sigma'))))).$$

Por construção temos que valem as seguintes propriedades:

- $f : \mathbb{I} \setminus \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{I}$ não está definida em $\mathcal{D} = \{b_1, \dots, b_n\}$ e é C^1 em $\mathbb{I} \setminus \mathcal{D} = \cup_{0 \leq j \leq n} I_j$. Os pontos b_1, \dots, b_n correspondem ou a projeção de uma linha $\ell = \Sigma_i \cap W_\epsilon^s(\sigma)$, ou a projeção do bordo de uma faixa $\Sigma \in \Xi$.
- $g : Q \rightarrow \mathbb{I}$ não está definida nas linhas verticais $\ell_{b_i} = \{b_i\} \times \mathbb{I}$ em Q , que correspondem a $p_{\Sigma}^{-1}(b_i)$ e g é C^1 restrita a $Q \setminus (\cup_{0 \leq i \leq n} \ell_{b_i})$.

Finalmente, colocando $b_0 = 0$ e $b_n = 1$, a restrição de F a cada faixa $\Sigma_j = (b_i, b_{i+1}) \times [0, 1] \subset Q$, $0 \leq j \leq n - 1$ é dada por

$$F_{\Sigma_j}(x, y) = (f_{\Sigma_j}(x), g_{\Sigma_j}(x, y)).$$

Notemos que o Lema (2.2.7)(b) junto com o fato de que H é um difeomorfismo $C^{1+\alpha}$ implica que

Lema 2.5.1. *A aplicação $F : Q \rightarrow Q$ preserva a folheação vertical \mathcal{F}^s de Q , e $F|_\gamma$ é λ -Lipschitz com $\lambda < 1$ em cada folha $\gamma \in \mathcal{F}^s$.*

Observação 2.5.2. Tomando a seção Σ suficientemente pequena podemos garantir que o cone instável tem variação muito pequena ao longo da faixa. Então todas as curvas que estão a uma distância constante de γ_Σ também são cu - curvas. Como \mathcal{F}_Σ^s é enviada em linhas verticais em Q através de H , isto nos dá que todas as linhas horizontais em Q que não intersectam as linhas verticais ℓ_{c_i} são cu - curvas, pois estas linhas horizontais correspondem, por H , a curvas que estão essencialmente a uma distância constante de γ_Σ ao longo das folhas estáveis.

Capítulo 3

Aplicação unidimensional induzida e densidade das variedades estáveis das singularidades

Apresentamos agora prova do item 6 do Teorema 1.3.5 baseada no estudo de propriedades topológicas e ergódicas da transformação quociente unidimensional.

3.1 Propriedades da aplicação unidimensional f

É sabido que como o fluxo $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$ é C^2 , os conjuntos $W^s(x, \Sigma)$, $x \in \Sigma$, definem uma folheação C^0 , \mathcal{F}_Σ^s , de cada seção transversal $\Sigma \in \Xi$, cuja holonomia é absolutamente contínua e com jacobiano Hölder com respeito à medida de Lebesgue, logo esta holonomia é C^1 - Hölder.

Estas propriedades junto com a expansão fornecida pelo Corolário 2.2.4 implicam (veja a prova em [16], seção 7.3.2 pag 222.).

Lema 3.1.1. *A aplicação unidimensional f é expansora, isto é, $|f'| \geq \kappa$, para algum $\kappa > 1$. Além disso, é de classe $C^{1+\alpha}$ por pedaços tal que $1/|Df|$ é α - Hölder, para algum $0 < \alpha < 1$, restrita a cada I_j .*

A expansão uniforme é consequência da existência de uma cota uniforme para os ângulos entre \mathcal{F}_Σ^s e as curvas γ_Σ , uma vez que fixamos o conjunto Ξ das seções transversais, e obtemos uma taxa de expansão arbitrariamente grande ao longo dos cones instáveis se $T_1 > 0$ é suficientemente grande. Podemos portanto assumir, sem perda de generalidade, que $\kappa > 2$ no enunciado do Lema 3.1.1 e assim faremos no restante deste trabalho. Como consequência disto é possível deduzir mais propriedades da aplicação unidimensional.

3.1.1 Propriedades topológicas da dinâmica de f

O seguinte lema garante a existência de uma classe especial de órbitas periódicas para f .

Lema 3.1.2 ([16], Lema 6.30). *Seja $f : \bigcup_j I_j \rightarrow I$ uma aplicação de classe C^1 , expansora por partes com finitos ramos I_1, \dots, I_l tal que cada I_j é um intervalo aberto não-vazio. Suponha que $|Df|_{I_i}| \geq \kappa > 2$ e $I \setminus (\bigcup_j I_j)$ é finito.*

Então, para cada $\delta > 0$ pequeno existe $n = n(\delta)$ tal que, para cada intervalo aberto não-vazio $J \subset \bigcup_j I_j$ com $|J| \geq \delta$, podemos encontrar $0 \leq k \leq n$, um subintervalo \hat{J} de J e $1 \leq j \leq l$ satisfazendo $f^k|_{\hat{J}} : \hat{J} \rightarrow I_j$ é um difeomorfismo.

Ademais, f tem número finito de órbitas periódicas $\mathcal{O}(p_1), \dots, \mathcal{O}(p_k)$ contidas em $\bigcup_j I_j$, e cada intervalo aberto não vazio J admite um subintervalo aberto \hat{J} , um ponto periódico p_j e um iterado n tal que $f^n|_{\hat{J}}$ é um difeomorfismo em uma vinhança de p_j .

Observação 3.1.3. Para a aplicação bidimensional F o lema acima mostra que existem um número finito de órbitas periódicas $\mathcal{O}(P_1), \dots, \mathcal{O}(P_k)$ para F tal que $\pi(\mathcal{O}(P_i)) = \mathcal{O}(p_i)$, $i = 1, \dots, k$, onde $\pi : Q \rightarrow I$ é a projeção na primeira coordenada. Além disso, a união das variedades estáveis dessas órbitas periódicas é densa em Q .

De fato, $\pi^{-1}\mathcal{O}(p_i)$ é uma coleção finita de folhas verticais de Q , compactas e invariantes para o futuro. Cada folha é contraída por F^{r_i} , onde $r_i \in \mathbb{Z}^+$ é o menor período de p_i . Portanto existe um ponto fixo para F^{r_i} em cada folha de $\pi^{-1}\mathcal{O}(p_i)$ e juntos eles formam uma órbita periódica para F , $\mathcal{O}(P_i)$ tal que $\pi\mathcal{O}(P_i) = \mathcal{O}(p_i)$, e $\pi^{-1}\mathcal{O}(p_i)$ se torna uma variedade estável local da órbita periódica $\mathcal{O}(P_i)$, para cada $i = 1, \dots, k$.

Além disso, para cada intervalo não-vazio J consideramos a faixa $J \times I$ em Q e a subfaixa $\hat{J} \times I$ dentro de $J \times I$, onde \hat{J} é dado pelo Lema 3.1.2, que também nos dá $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f^n : \hat{J} \rightarrow V(p_i)$ é um difeomorfismo de \hat{J} para a vizinhança $V(p_i)$ de p_i . Então, $F^n(J \times I)$ intersecta $V(p_i) \times I$ e então $F^n(\hat{J} \times I) \cap \pi^{-1}p_i \neq \emptyset$, que é, $W^s(P_i) \cap F^n(\hat{J} \times I) \neq \emptyset$. Pela invariância da variedade estável, concluímos que $J \times I \supset \hat{J} \times I$ contém um ponto na variedade estável de P_i .

Observação 3.1.4. Isto também implica que as variedades estáveis das órbitas periódicas P_i obtidas acima são densas em uma vizinhança U de Λ .

De fato, podemos escrever o fluxo X^t em uma vizinhança de Λ como um fluxo de suspensão sobre F ; veja [15]. Então a órbita de cada P_i é periódica e hiperbólica, e $W_G^s(P_i)$ é a suspensão de $W_F^s(P_i)$. Portanto, a densidade de $\cup_i W_F^s(P_i)$ em Q implica a densidade de $\cup_i W_X^s(P_i)$ em uma vizinhança U de Λ .

Denotamos por $\mathcal{C}(\Xi)$ a família de componentes conexas maximais das sub-faixas $\{\Sigma(\Sigma') : \Sigma' \in \Xi\}$, para qualquer dada $\Sigma \in \Xi$, onde R é suave.

Definição 3.1.5. Dadas duas faixas $S_1 = J_1 \times \mathbb{I} \subset \Sigma_1$ e $S_2 = J_2 \times \mathbb{I} \subset \Sigma_2$, para quaisquer $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \Xi$, onde J_1 e J_2 são subintervalos compactos de \mathbb{I} . Dizemos que $R^k(S_1)$ intersecta S_2 para algum $k \geq 1$, se existe uma sub-faixa $S = J \times \mathbb{I}$ de S_1 tal que

$$p_{\Sigma_2}(\overline{R^k(S)}) \supseteq p_{\Sigma_2}(\overline{S_2}) \text{ e } R^k(S) \text{ é difeomorfica a } S.$$

Dadas duas faixas S_1, S_2 escrevemos $S_1 \xrightarrow{k} S_2$ se $R^k(S_1)$ intersecta S_2 .

Lema 3.1.6. *Se existe um intervalo $J \subset I$ e um inteiro n tal que $f^n|_J$ é um difeomorfismo entre J e sua imagem $f^n(J)$, então a faixa $S = J \times \mathbb{I}$ intersecta a faixa $\hat{S} = f^n(J) \times \mathbb{I}$.*

Demonstração. Como $f \circ p = p \circ R$ temos que $f^n(p(S)) = p(R^n(S)) = f^n(J)$, e assim $R^n(S)$ projeta em $p(\hat{S})$. Portanto $S \xrightarrow{n} \hat{S}$. \square

Como consequência dos resultados acima, obtemos

Proposição 3.1.7. *Existem pontos periódicos p_1, \dots, p_k do campo X em Ξ tais que $p_{\Xi}(p_i)$ está contido em $\cup_j I_j$ e, para cada faixa S contida em $\mathcal{C}(\Sigma)$ existe subfaixa \hat{S} de S e $k \in \mathbb{N}$ tais que $R_k : \hat{S} \rightarrow R^k(\hat{S})$ é um difeomorfismo e $R^k(\hat{S})$ contém algum dos pontos $p_i, i \in \{1, \dots, k\}$ no seu interior.*

Observação 3.1.8. As órbitas periódicas obtidas na proposição acima serão designadas por “órbitas periódicas destacadas” no que segue.

3.1.2 Propriedades ergódicas de f

A aplicação f é expansora por partes com derivada Hölder, isto é suficiente para que possamos usar resultados fortes da dinâmica unidimensional.

É bem sabido que aplicações f de classe C^1 , expansora por partes, no intervalo I tal que $1/|Df|$ tem variação limitada tem um número finito de medidas de probabilidade invariantes absolutamente contínuas cujas bacias cobrem Lebesgue quase todos os pontos de I .

Usando uma extensão da noção de variação limitada foi mostrado em [9] que os resultados de existência e finitude de medidas invariantes absolutamente contínuas ergódicas e invariantes podem ser estendidos para aplicações expansoras por partes de classe C^1 tais que $g = 1/|f'|$ é α -Hölder para algum $\alpha \in (0, 1)$. Estas funções são de variação limitada universalmente, isto é,

$$\sup_{a=a_0 < a_1 < \dots < a_n = b} \left(\sum_{j=1}^n |g(a_j) - g(a_{j-1})|^{1/\alpha} \right)^\alpha < \infty,$$

onde o supremo é tomado sobre todas partições finitas do intervalo $I = [a, b]$. Além disso, a partir de [39] as densidades φ das medidas de probabilidade invariantes absolutamente contínuas para f satisfazem o seguinte: existem constantes $A, C > 0$ tais que

$$\int \text{osc}(\varphi, \epsilon, x) dx \leq C \cdot \epsilon^\alpha \text{ para todo } 0 < \epsilon \leq A,$$

onde $\text{osc}(\varphi, \epsilon, x) = \text{ess sup}_{y, z \in B(x, \epsilon)} |\varphi(y) - \varphi(z)|$ e o supremo essencial é tomado com respeito a medida de Lebesgue. A partir daí podemos encontrar uma sequência $\epsilon_n \rightarrow 0$ tal que $\text{osc}(\varphi, \epsilon, \cdot) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ (com respeito a medida de Lebesgue). Isso implica que o suporte de $\text{supp}(\varphi)$ contém intervalos abertos não vazios.

De fato, dado $\delta > 0$ pequeno seja $\rho > 0$ pequeno e n grande tal que $W = \{\varphi > \rho\}$ e $V = \{\text{osc}(\varphi, \epsilon_n, \cdot) > \rho/2\}$ satisfazem $\lambda(I \setminus W) < \delta$. Então, $\lambda(W \cap I \setminus V) > 1 - 2\delta > 0$. Seja x um ponto densidade de Lebesgue de $W \cap I \setminus V$. Então existe um subconjunto com medida de Lebesgue positiva de $B(x, \epsilon_n)$ onde $\varphi > \rho$. Pela definição de $\text{osc}(\varphi, \epsilon_n, x)$ temos que $\varphi(y) > \rho/2 > 0$ para Lebesgue quase todo ponto $y \in B(x, \epsilon_n)$, e assim $B(x, \epsilon_n) \subset \text{supp}(\varphi)$.

Ademais, segue de [9] que existe um número finito de medidas de probabilidade ergódicas, invariantes, e absolutamente contínuas ν_1, \dots, ν_l de f e toda probabilidade invariante absolutamente contínua ν se decompõe em uma combinação linear convexa $\nu = \sum_{i=1}^l a_i \nu_i$. Considerando qualquer subintervalo $J \subset I$ e a medida de Lebesgue normalizada $\lambda_J = (\lambda|_J)/\lambda(J)$ em J , cada ponto de acumulação fraca* de $n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j(\lambda_J)$ é uma probabilidade invariante absolutamente contínua ν para f (pois a função indicador de J tem variação limitada generalizada). Portanto as bacias de ν_1, \dots, ν_l cobrem I Lebesgue módulo zero: $\lambda(I \setminus (B(\nu_1) \cup \dots \cup B(\nu_l))) = 0$.

Note que a partir de [9] também sabemos que a densidade φ de qualquer medida de probabilidade f -invariante absolutamente contínua é limitada por cima.

3.1.3 Medidas absolutamente contínuas e órbitas periódicas destacadas

Agora enunciamos algumas propriedades topológicas e ergódicas que tanto quanto sabemos são obtidas aqui pela primeira vez.

Lema 3.1.9. *Para cada órbita periódica destacada $\mathcal{O}(p_i)$ de f existe alguma medida ν_i de probabilidade f -invariante ergódica e absolutamente contínua tal que $p_i \in \text{supp}(\nu_i)$, e vice versa.*

Demonstração. Defina $E = \{1 \leq i \leq k : \exists 1 \leq j \leq l \text{ tal que } \mathcal{O}(p_i) \in \text{supp} \nu_j\}$. Note que como $\text{int}(\text{supp} \nu_1)$ é não vazio, então para um intervalo $J \subset \text{int}(\text{supp} \nu_1)$ podemos, pela Proposição 2.1, encontrar outro intervalo $\hat{J} \subset J$ e $n > 1$ tais que $f^n|_{\hat{J}} : \hat{J} \rightarrow V(p_i)$ é um

difeomorfismo para uma vizinhança $V(p_i)$ de p_i , para algum $1 \leq i \leq k$. A invariância de $\text{supp}\nu_i$ mostra que $p_i \in \text{int}(\text{supp}\nu_1)$ e $E \neq \emptyset$.

Seja $B = \{1, \dots, k\} \setminus E$. Agora vamos mostrar que $B = \emptyset$. Escrevemos $i \rightarrow j$ se a pré órbita de $\mathcal{O}(p_j)$ acumula $\mathcal{O}(p_i)$.

Afirmamos que se $i \rightarrow j$ e $j \in E$, então $i \in E$. Portanto, órbitas em B não podem intersectar órbitas em E . Pois a união das pré órbitas de órbitas periódicas distintas de f são densas em I , então B pode apenas ser acumulado por pré órbitas de elementos de B . Assim, a união W das pré órbitas de elementos de B é f -invariante e densa em uma vizinhança das órbitas dos elementos de B . Portanto, \overline{W} é um compacto f -invariante com interior não vazio de I e então \overline{W} contém o suporte de alguma ν_j . Consequentemente a pré órbita de algum elemento de B intersecta $\text{int}(\text{supp}\nu_1)$ e então $B \cap E \neq \emptyset$. Esta contradição prova que B deve ser vazio a menos da prova da afirmação.

Existe $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p_i$ tal que $x_n \in \cup_{m \geq 0} f^{-m}(p_j)$ e então podemos encontrar V_n vizinhança de x_n e $m_n > 1$ tal que $f^{m_n}|_{V_n} : V_n \rightarrow V(p_i)$ é um difeomorfismo em uma vizinhança $V(p_j)$ de p_j . Mas $V(p_j) \cap \text{supp}\nu_h \neq \emptyset$ para algum $1 \leq h \leq l$ e então, por invariância do $\text{supp}\nu_h$, existem pontos de $\text{supp}\nu_h$ em V_n , para todo $n \geq 1$. Isto mostra que p_i é um limite pontual de $\text{supp}\nu_h$, e então $i \in E$. Isto prova a afirmação e termina a prova do lema \square

3.2 Densidade de variedades estáveis de singularidades

Aqui provaremos algumas consequências para o sumidouro Λ a partir das propriedades da aplicação unidimensional.

Teorema 3.2.1. *A união das variedades estáveis das singularidades de um conjunto sumidouro hiperbólico singular com volume zero é densa na bacia de atração topológica, que é*

$$U \subset \overline{\bigcup_{\sigma \in \Lambda \cap S(X)} W^s(\sigma)}.$$

Uma importante implicação é a possibilidade de escolhermos seções transversais adaptadas com uma especial característica que vai ser crucial para a prova do Teorema C.

Corolário 3.2.2. *Cada ponto regular de um conjunto sumidouro hiperbólico singular com volume zero admite seção transversal δ -adaptada cujo bordo estável é formado por variedades estáveis de singularidades do conjunto, para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeno.*

3.2.1 Prova do item 6 do Teorema 1.3.5

Como consequência do Corolário 3.2.2, a aplicação unidimensional f satisfaz o item (6) do Teorema 1.3.5.

De fato, pontos na variedade estável de uma singularidade $\sigma \in \Lambda$ são enviados, pelo fluxo em tempo finito, para a variedade estável local da singularidade em uma seção transversal próxima a singularidade. Para a aplicação unidimensional o comportamento correspondente é precisamente dado pelo item (6b) do Teorema 1.3.5.

O item (6b) é uma consequência da definição de aplicações de retorno em seções transversais, enquanto o item (6c) é uma consequência do comportamento local do fluxo próximo a uma singularidade tipo-Lorenz; veja [15, Seção 2.4].

3.2.2 Intersecções transversais entre variedades instáveis de órbitas periódicas e variedades estáveis de singularidades

Para provar o Teorema 3.2.1 note que o fluxo de X na variedade com bordo \bar{U} é um fluxo Anosov-seccional, pois Λ é um subconjunto maximal invariante na região armadilha U . Vamos usar isto para deduzir o seguinte.

Teorema 3.2.3. *Seja μ uma medida de probabilidade invariante hiperbólica suportada em um sumidouro hiperbólico singular conexo Λ com volume zero. Assuma que μ é um estado u -Gibbs, isto é, para μ -quase todo x a variedade instável W_X^u está bem definida e Lebesgue quase todo ponto $y \in W_x^u$ é μ -genérico: $\frac{1}{T} \int_0^T \delta_{X_s(y)} ds \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \mu$.*

Então existe $\sigma \in \Lambda \cap S(X)$ tal que $W^u(p) \pitchfork W^s(\sigma) \neq \emptyset$ para cada $p \in \text{supp}\mu$.

Podemos agora provar o Teorema 3.2.1: Este teorema é um corolário do Teorema 3.2.3 pois, pela observação 3.1.4, as variedades estáveis das órbitas periódicas distintas são densas em uma vizinhança U de Λ . A interseção transversal dada pelo Teorema 3.2.3 significa que cada uma destas variedades estáveis é acumulada pela variedade estável de alguma singularidade; aqui usamos o λ -Lema. Daí segue o resultado 3.2.1.

A seguir apresentaremos alguns resultados para a prova do Teorema 3.2.3.

Lema 3.2.4. *No contexto do enunciado do Teorema 3.2.3, fixe $p_0 \in \text{Per}(X) \cap \text{supp}(\mu)$ e seja $J = [a, b]$ um arco em uma componente conexa de $W_X^{uu}(p_0) \setminus \{p_0\}$ com $a \neq b$. Então, $H = \overline{\cup_{t \in \mathbb{R}} X^t(J)}$ contém alguma singularidade de Λ .*

Demonstração. Segundo a teoria não uniformemente hiperbólica (Teoria de Pesin) sabemos que o suporte de uma medida de probabilidade ergódica hiperbólica não atômica μ está contida na classe homoclínica de uma órbita periódica $\mathcal{O}(p)$; por exemplo veja [8] ou [6].

Portanto, para μ -quase todo ponto x temos que $W_x^u \subset \text{supp}\mu$ (pois μ é uma medida Gibbs) e $W_x^u \cap W^s(\mathcal{O}(p)) \neq \emptyset$. Assim, pelo λ - lema (veja [10]) temos que $W^u(p) \subset \overline{W^u(x)} \subset \text{supp}\mu$.

Como cada ponto periódico $p_0 \in \text{supp}\mu$ está homoclinicamente relacionado a p , então também temos $W^{uu}(p_0) \subset W^u(p_0) \subset \text{supp}\mu$.

Note que $H \subset \overline{W_0^u(p_0)} \subset \text{supp}\mu$ e H é um conjunto compacto por construção, onde $W_0^u(p_0)$ é a componente conexa de $W^u(p_0) \setminus \mathcal{O}(p)$ contendo J . Ademais, H é conexo, pois H é também o fecho da órbita do conjunto conexo J sob o fluxo contínuo.

Se H não tem singularidades, então H é um conjunto compacto conexo hiperbólico e então contém as variedades forte-estáveis de quaisquer de seus pontos, pois cada ponto em H é acumulado por iterados futuros do arco J . isto significa que H é um sumidouro e então $H = \Lambda$ por conexidade, e portanto H contém todas as singularidades de Λ . Esta contradição nos diz que H deve conter alguma singularidade. \square

Fixe p_0 e $\sigma \in S(X) \cap H$ como no enunciado do Lema 3.2.4. Devemos mostrar que $\overline{W^u(p_0)} \cap S(X) \neq \emptyset$. Além disso, o fluxo de X é interiormente transversal ao bordo da variedade \overline{U} e tem Λ como seu subconjunto invariante maximal, que é hiperbólico singular. Portanto X em \overline{U} é um fluxo Anosov-seccional e estamos no contexto do próximo resultado devido a Batista e Morales [22].

Teorema 3.2.5. [22] *Se \mathcal{O} é uma órbita periódica de um fluxo Anosov-seccional em uma variedade compacta satisfazendo $\overline{W^u(p_0)} \cap S(X) \neq \emptyset$, então existe $\sigma \in S(X)$ tal que $W^u(\mathcal{O}) \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset$.*

Agora tomemos $\mathcal{O} = \mathcal{O}(p_0)$ e como X é um fluxo Anosov-seccional na região armadilha de Λ , aplicamos o Teorema 3.2.5 para obter a existência de $\sigma \in S(X)$ tal que $W^u(\mathcal{O}) \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset$. Pela definição de hiperbolicidade singular, isto significa que $W^u(p_0) \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset$.

Isto é suficiente para concluir a prova do Teorema 3.2.3. De fato, como todas as órbitas periódicas em $\text{supp}(\mu)$ estão homoclinicamente relacionados, é suficiente obter $W^u(p_0) \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset$ para um ponto periódico destacado $p_0 \in \text{supp}(\mu)$.

Capítulo 4

Grandes desvios para sumidouros hiperbólicos singulares

Um dos conceitos mais importantes em Sistemas Dinâmicos é a noção de medida física (SRB) para um fluxo ou transformação. Diz-se que uma medida de probabilidade invariante μ para um fluxo X^t em uma variedade compacta é física se o conjunto de pontos z tais que, para toda função contínua ψ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \psi(X^s(z)) ds = \int \psi d\mu,$$

tem medida de Lebesgue positiva no espaço ambiente. Equivalentemente, definimos bacia de uma probabilidade invariante μ como sendo o subconjunto de pontos $x \in M$ tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} = \mu$ na topologia fraca* e uma medida física é aquela cuja bacia tem volume positivo.

Mostrado que estas medidas existem, é natural considerar a taxa de convergência das médias temporais para a média espacial. Essa taxa é medida pelo volume do subconjunto de pontos cujas médias temporais estão afastadas da média espacial por uma quantidade fixada, até certo tempo de evolução. Precisamente, se fixarmos $\epsilon > 0$ uma margem de erro, e considerarmos o conjunto

$$B_T = \left\{ x : \left| \frac{1}{T} \int_0^T \psi(X^s(x)) ds - \int \psi d\mu \right| > \epsilon \right\},$$

procuramos condições sob as quais a sua medida de Lebesgue decai exponencialmente rápido, isto é, se existem constantes $C, \xi > 0$ tais que

$$\text{Leb}(B_T) \leq C e^{-\xi t}, \text{ para todo } t > 0.$$

4.1 Cota superior para grandes desvios

Vamos agora começar a construir a prova do seguinte resultado, que é o Teorema A enunciado na Introdução.

Teorema 4.1.1. *Seja X^t um fluxo C^2 em uma variedade tridimensional exibindo um sumidouro hiperbólico singular com região armadilha \mathcal{U} . Denote por Leb a restrição normalizada da medida de Lebesgue em \mathcal{U} e assuma que o sumidouro tem volume zero. Seja $\psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada, então para qualquer $\epsilon > 0$*

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log Leb \left\{ z \in \mathcal{U} : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{1}{T} \int_0^T \psi(X^t(z)) dt - \mu(\psi) \right| > \epsilon \right\} < 0.$$

Começamos por mostrar que, graças à folheação uniformemente contrativa que cobre o sumidouro, o conjunto de pontos que sofrem grandes desvios está contido num conjunto de grandes desvios para a aplicação induzida F nas seções adaptadas.

4.1.1 Redução à dinâmica nas seções adaptadas e ao quociente sobre folhas estáveis

Para o fluxo de suspensão $\phi^t : \Xi^\tau \rightarrow \Xi^\tau$ com altura τ e dinâmica da base F e para $\psi : \Xi^\tau \rightarrow \mathbb{R}$ contínua temos, para $T > 0$ e $z = (x, s)$ com $x \in \Xi$ e $0 < s < \tau(x) < \infty$

$$\begin{aligned} \int_0^T \psi(\phi^t(z)) dt &= \int_s^{\tau(x)} \psi(\phi^t(x, 0)) dt + \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^{\tau(F^j(x))} \psi(\phi^t(F^j(x), 0)) dt \\ &\quad + \int_0^{T+s-S_n\tau(x)} \psi(\phi^t(F^n(x), 0)) dt \end{aligned}$$

Definindo $\varphi(x) = \int_0^{\tau(x)} \psi(\phi^t(x, 0)) dt$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \psi(\phi^t(z)) dt &= \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^{\tau(F^j(x))} \psi(\phi^t(F^j(x), 0)) dt - \frac{1}{T} \int_0^s \psi(\phi^t(x, 0)) dt \\ &\quad + \frac{1}{T} \int_0^{T+s-S_n\tau(x)} \psi(\phi^t(F^n(x), 0)) dt. \end{aligned}$$

Podemos majorar

$$I = I(x, s, T) = -\frac{1}{T} \int_0^s \psi(\phi^t(x, 0)) dt + \frac{1}{T} \int_0^{T+s-S_n\tau(x)} \psi(\phi^t(F^n(x), 0)) dt,$$

pelo seguinte

$$I \leq \left(2\frac{s}{T} + \frac{S_{n+1}^F \tau(x) - S_n^F \tau(x)}{T} \right) \cdot \|\psi\|,$$

onde $\|\psi\| = \sup |\psi|$. Dado $\omega > 0$ para $0 \leq s < \tau(x)$ e $n = n(x, s, T)$ o conjunto

$$\left\{ (x, s) \in \Xi^\tau : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{1}{T} S_n^F \varphi(x) + I - \frac{\mu(\varphi)}{\mu(r)} \right| > \omega \right\}$$

está contido na união dos conjuntos

$$\left\{ (x, s) \in \Xi^\tau : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{1}{T} S_n^F \varphi(x) - \frac{\mu(\varphi)}{\mu(r)} \right| > \frac{\omega}{2} \right\} \cup \left\{ (x, s) \in \Xi^\tau : I > \frac{\omega}{2} \right\}. \quad (4.1.1)$$

Note que se $\psi \equiv 0$ então consideraremos o subconjunto do lado esquerdo de (4.1.1) no que segue. Vamos estimar a λ -medida de cada subconjunto acima assumindo que ψ não é identicamente nula. Mostraremos que estes conjuntos podem ser incluídos em conjuntos definidos para a dinâmica de F .

Primeiro note que pela observação 2.4.6 temos

$$I \leq \frac{1}{T} (2s + \tau(F^n x)) \|\psi\| \leq \frac{1}{T} (2s + \tau(f^n(p(x)))) \|\psi\| + \frac{c}{T} \|\psi\|,$$

onde $p : \Xi \rightarrow \mathbb{I}$ é a projeção ao longo das folhas estáveis \mathcal{F}_Ξ , mostrando que I é dominado por uma expressão que depende realmente apenas de f .

Para o outro conjunto, note que

$$\left\{ (x, s) \in \Xi^\tau : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{1}{T} S_n^F \varphi(x) - \frac{\mu(\varphi)}{\mu(r)} \right| > \frac{\omega}{2} \right\}. \quad (4.1.2)$$

está contido em

$$\left\{ (x, s) \in \Xi^\tau : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{n}{T} \left(\frac{S_n^F \varphi}{n} - \mu(\varphi) \right) \right| > \frac{\omega}{4} \right\} \cup \left\{ (x, s) \in \Xi^\tau : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{n}{T} - \frac{1}{\mu(r)} \right| > \frac{\omega}{4 |\mu(\varphi)|} \right\}. \quad (4.1.3)$$

pois para toda $\mu \in \mathbb{E}$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{T} S_n^F \varphi - \frac{\mu(\varphi)}{\mu(r)} \right| &\leq \left| \frac{n}{T} \frac{S_n^F \varphi}{n} - \frac{n}{T} \mu(\varphi) \right| + \left| \frac{n}{T} \mu(\varphi) - \frac{\mu(\varphi)}{\mu(r)} \right| \\ &\leq \frac{n}{T} \left| \frac{S_n^F \varphi}{n} - \mu(\varphi) \right| + \mu(\varphi) \left| \frac{n}{T} - \frac{1}{\mu(r)} \right|, \end{aligned}$$

onde $n = n(x, s, T)$ satisfaz

$$\frac{S_n^f \tau(p(x))}{n} - c \leq \frac{S_n^F \tau(x)}{n} \leq \frac{T + s}{n} < \frac{S_{n+1}^F \tau(x)}{n} \leq \frac{S_{n+1}^f \tau(p(x))}{n} + \frac{n+1}{n} c.$$

Portanto, cotas envolvendo $\frac{n}{T}$ podem ser substituídas por outras envolvendo $\frac{S_n^f \tau(p(x))}{n}$ e assim reduzimos estas estimativas à dinâmica de f , com exceção das cotas que envolvem $\frac{S_n^F \varphi}{n}$.

4.1.2 Redução à dinâmica unidimensional

Agora mostramos que podemos reduzir a propriedade de grandes desvios da dinâmica da aplicação F , sobre um observável induzido pelo observável original, para uma propriedade semelhante da dinâmica da aplicação unidimensional quociente.

Dizemos que a função $\varphi : M \setminus \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ tem crescimento logarítmico próximo a \mathcal{S} se existe $K = K(\varphi) > 0$ tal que $|\varphi| \chi_{B(\mathcal{S}, \delta)} \leq K \Delta_\delta$, para todo $\delta > 0$ suficientemente pequeno.

Proposição 4.1.2. *Seja $\epsilon > 0$ e $\psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada em uma vizinhança \mathcal{U} do Λ . Defina $\varphi : \Xi_0 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x, y, z) = \int_0^{\tau(x, y, z)} \psi(X^t(x, y, z)) dt$, onde $\tau(x, y, z)$ é o tempo de retorno do ponto $(x, y, z) \in \Xi_0$.*

Seja μ medida tal que $\mu(|\varphi|) < \infty$. Então, existem inteiros $N > 1$, $\delta > 0$ pequeno, $\gamma > 0$ constante dependendo apenas de ψ e do fluxo, e uma função contínua $l : \mathbb{I} \setminus \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ com crescimento logarítmico próximo ao conjunto \mathcal{D} , tais que, para todo $n > N$

$$\left\{ \left| 1S_n^F \varphi - \mu(\varphi) \right| > 3\epsilon \right\} \subset p^{-1} \left(\left\{ \frac{1}{n} S_n^f \Delta_\delta > \frac{\epsilon}{\gamma} \right\} \cup \left\{ \left| \frac{1}{n} S_n^f l - \mu(\varphi) \right| > \epsilon \right\} \right),$$

onde $p : \Xi_0 \rightarrow \mathbb{I}$ é a projeção canônica que leva um ponto y na folha estável correspondente x no quociente \mathbb{I} .

Demonstração. De acordo com a construção do fluxo hiperbólico singular, existem $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que dados dois pontos na mesma seção e na mesma folha estável y_1 e y_2 temos

$$d(R^k(x, y_1, z), R^k(x, y_2, z)) \leq C\lambda^k, \text{ para todo } 1 \leq k \leq n, \quad (4.1.4)$$

onde $n \geq 1$ é o primeiro tempo em que a órbita dos pontos intersectam a linha singular, que corresponde a intersecção da folha estável local de alguma singularidade do campo com uma seção transversal de entrada perto dessa singularidade. Os tempos de intersecção dependem apenas da órbita de x pela aplicação f e correspondem aos tempos n tais que $f^n(x) \in \mathcal{D}$. Como \mathcal{D} é finito, $X_0 = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\mathcal{D})$ é enumerável. Assim, o conjunto de pontos em $\Sigma \in \Xi$ que representam linhas $\{x\} \times \mathbb{I} \times \{z\}$, com $x \in X_0$ e $z \in \mathbb{I}$ fixo, tem medida de Lebesgue nula em Σ . Portanto, para um conjunto de medida de Lebesgue total em Ξ vale (4.1.4) para todo $k \geq 1$.

Além disso, como y_1 e y_2 pertencem a mesma variedade estável, então para todo $t > 0$ temos que

$$\text{dist}(X^t(y_1), X^t(y_2)) \leq \kappa |y_1 - y_2|, \quad (4.1.5)$$

para uma constante $\kappa > 0$ dependendo apenas dos ângulos entre a superfície Σ e a folha estável do fluxo através dos pontos de Ξ . Note que φ é contínua em Ξ_0 e

$$|\varphi(y)| \leq \tau(y) \cdot \sup |\psi| \leq C_0 \cdot \sup |\psi|.$$

Temos que a constante $C_0 > 0$ satisfaz $C_0 \leq K \cdot \Delta_\delta(x)$, para algum $\delta > 0$ suficientemente pequeno e $K = K(\tau) > 0$. Esta última desigualdade vem do fato de que próximo às singularidades a função τ cresce como logaritmo da distância e é limitada no complementar.

É claro que para y, w em Σ na mesma folha estável em alguma seção Σ de Ξ , e $n > 1$, existe ponto x em \mathbb{I} correspondente a essa folha tal que

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\varphi(F^j(y)) - \varphi(F^j(w))) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \bar{\varphi}_j(x)$$

onde $\bar{\varphi}_j(x) = \sup_{y,w \in W^s(x,\Sigma)} |\varphi(F^j(y)) - \varphi(F^j(w))|$. Seja $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ pequeno e $\eta > 0$ tal que $-K\kappa\eta \log \delta > \epsilon/3$ e $\kappa\eta \leq \sup |\psi|$. Seja $\xi > 0$ satisfazendo

$$\text{dist}(y, y') < \xi \implies |\psi(y) - \psi(y')| < \eta. \quad (4.1.6)$$

Então por (4.1.4) podemos encontrar um $j_0 = j_0(\eta) \geq 1$ tal que $|F^j(y) - F^j(w)| \leq \frac{\xi}{\kappa}$ para $j > j_0$ e quaisquer y, w na mesma linha vertical. Assim, obtemos a partir de (4.1.5) e (4.1.6) e as escolhas de ϵ, δ e η

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_j(x) &\leq K\Delta_\delta(x_j) \cdot \sup_{0 < t < K\Delta_\delta(x_j)} |\psi(X^t(F^j(y))) - \psi(X^t(F^j(w)))| \\ &\leq K\Delta_\delta(x_j)\kappa\eta + \epsilon/2. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Tome uma função contínua $l : \mathbb{I} \setminus \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para algum $0 < a < \epsilon/3$

1. $\min_{y \in W^s(x,\Sigma)} \varphi(F^{j_0}(y)) - a \leq l(x) \leq a + \max_{y \in W^s(x,\Sigma)} \varphi(F^{j_0}(y))$;
2. $\mu(l \circ \mathcal{P}) = \mu(\varphi)$.

Note que φ é μ -integrável. Observe também que l tem crescimento logarítmico próximo ao conjunto de singularidades. Para obter tal função l , desintegre μ ao longo da partição mensurável de cada Σ dada pelas linhas verticais e defina $l_0(x) = \int \varphi d\mu_x$. Então aproxime l_0 por uma função contínua l_1 tal que $\int |l_0 - l_1| \circ \mathcal{P} d\mu < \epsilon/3$. Agora para algum $-\epsilon/3 < a < \epsilon/3$ a função $l = l_1 + a$ satisfaz as condições 1 e 2 acima para todas as seções em Ξ .

Agora para $n > 0$ usando (4.1.7), $f \circ \mathcal{P} = \mathcal{P} \circ F$ e somando sobre órbitas de F^k e f^k

$$\begin{aligned} |S_n^F(l \circ \mathcal{P}) - S_n^F\varphi|(y) &\leq |l \circ \mathcal{P} - \varphi|(y) + |S_{n-1}^F(l \circ \mathcal{P} - \varphi)|(y) \\ &\leq 2 \sup |\psi| K\Delta_\delta(x) + a + \sum_{j=1}^{n-1} (K\kappa\eta\Delta_\delta(f^j(x)) + a + \epsilon/3) \\ &\leq 2 \sup |\psi| K(\log \delta^{-1} + \Delta_\delta(x)) + \frac{2n\epsilon}{3} + K\kappa\eta \cdot S_{n-1}\Delta_\delta(f(x)) \\ &\leq 2 \sup |\psi| K \log \delta^{-1} + \frac{2n\epsilon}{3} + K(\kappa\eta + 2 \sup |\psi|) \cdot S_n\Delta_\delta(x). \end{aligned}$$

Observe que

$$\left\{ \left| \frac{1}{n} S_n^F\varphi - \mu(\varphi) \right| > 3\epsilon \right\} \subset \left\{ \left| \frac{1}{n} (S_n^F(l \circ \mathcal{P}) - S_n^F\varphi) \right| > 2\epsilon \right\} \cup \left\{ \frac{1}{n} |S_n^F(l \circ \mathcal{P}) - \mu(\varphi)| > \epsilon \right\}. \quad (4.1.8)$$

Definindo $\gamma_1 = 2 \sup |\psi| K \log \delta^{-1}$ e $\gamma_2 = K(\kappa\eta + 2 \sup |\psi|)$ obtemos para n suficientemente grande

$$\frac{1}{n} (S_n^F(l \circ \mathcal{P}) - S_n^F\varphi) \leq \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\gamma_1}{n} \cdot S_n^f\Delta_\delta \circ \mathcal{P} \leq \epsilon + \frac{\gamma_2}{n} \cdot S_n^f\Delta_\delta \circ \mathcal{P},$$

onde $\gamma_2 \leq 3C_0 \sup |\psi|$, pela escolha de η . Logo,

$$\left\{ \left| \frac{1}{n} (S_n^F(l \circ \mathcal{P}) - S_n^F \varphi) \right| > 2\epsilon \right\} \subseteq P^{-1} \left\{ \frac{1}{n} S_n^f \Delta_\delta > \frac{\epsilon}{3C_0 \sup |\psi|} \right\},$$

e isto juntamente com (4.1.8) completa a prova da Proposição. \square

4.2 Grandes desvios para observáveis com cota logarítmica perto do conjunto descontínuo/singular

Recordamos que uma função $\varphi : M \setminus \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ tem cota logarítmica próximo a \mathcal{S} se existe $K = K(\varphi) > 0$ tal que $|\varphi| \chi_{B(\mathcal{S}, \delta)} \leq K \Delta_\delta$, para todo $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Também dizemos que f é uma transformação regular se para $E \subset M$ tal que $Leb(E) = 0$, então $Leb(f^{-1}(E)) = 0$, ou seja $f_* \mu \ll \mu$.

Teorema 4.2.1 ([12]). *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo local, regular, de classe $C^{1+\alpha}$ em $M \setminus \mathcal{S}$ onde \mathcal{S} é um conjunto singular não-flat e $\alpha \in (0, 1)$. Suponha que f é uma transformação não-uniformemente expansora com recorrência exponencialmente lenta ao conjunto singular \mathcal{S} e seja $\varphi : M \setminus \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que tem cota logarítmica próximo a \mathcal{S} . Além disso, assuma que existem no máximo um número finito de estados de equilíbrio μ_1, \dots, μ_k com respeito a $\log J$, que são absolutamente contínuos. Então, dado $\omega > 0$*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Leb \left\{ x \in M : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{1}{n} S_n \varphi(x) - \mu(\varphi) \right| \geq \omega \right\} < 0,$$

onde \mathbb{E} é a família de todos os estados de equilíbrio com respeito a $\log J$.

Demonstração. Defina

$$\varphi_k = \xi_k \circ \varphi, \text{ onde } \xi_k = \begin{cases} k & \text{se } x \geq k \\ x & \text{se } |x| < k, k \geq 1. \\ -k & \text{se } x \leq -k \end{cases}$$

Então, $\varphi_k : M \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua para todo $k \geq 1$, $\varphi_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi(x)$ para todo $x \in M \setminus \mathcal{S}$ e $|\varphi - \varphi_k| \leq |\varphi| \chi_{\{|\varphi| > k\}}$. Além disso, claramente temos para todo $n, k \geq 1$

$$S_n \varphi_k - S_n |\varphi - \varphi_k| \leq S_n \varphi = S_n \varphi_k + S_n (\varphi - \varphi_k) \leq S_n \varphi_k + S_n |\varphi - \varphi_k|. \quad (4.2.1)$$

Observe que, como φ tem crescimento logarítmico próximo à \mathcal{S} , para quaisquer $c, \epsilon_0 > 0$ dados, podemos escolher $\epsilon_1, \delta_1 > 0$ tais que a condição de recorrência exponencialmente lenta é verdade e $K \cdot \epsilon_1 \leq \epsilon_0$. Então, escolhemos $k \geq 1$ grande suficiente para $\{|\varphi| > k\} \subseteq B(\mathcal{S}, \delta_1)$. Da relação 4.2.1 obtemos a seguinte inclusão

$$\left\{ \frac{1}{n} S_n \varphi > c \right\} \subseteq \left\{ \frac{1}{n} S_n \varphi_k > c - \epsilon_0 \right\} \cup \left\{ \frac{1}{n} S_n \Delta_{\delta_1} \geq \epsilon_1 \right\}, \quad (4.2.2)$$

usando a hipótese que φ cresce como logaritmo da distância perto de \mathcal{S} e as escolhas de ϵ_1, δ_1 . Analogamente obtemos uma inclusão oposta

$$\left\{ \frac{1}{n} S_n \varphi < c \right\} \subseteq \left\{ \frac{1}{n} S_n \varphi_k < c + \epsilon_0 \right\} \cup \left\{ \frac{1}{n} S_n \Delta_{\delta_1} \geq \epsilon_1 \right\}; \quad (4.2.3)$$

veja [13, Seção 4, pp 352] para detalhes sobre como obter estas inclusões.

A partir de (4.2.2) e (4.2.3) vemos que para obter o limite para grandes desvios no enunciado do Teorema 4.2.1 é suficiente obter um limite de grandes desvios para a função contínua φ_k com respeito a mesma transformação f e ter recorrência exponencialmente lenta para o conjunto singular \mathcal{S} .

Para obter cota para grandes desvios, usamos o resultado seguinte já provado para observáveis contínuos sobre transformações não uniformemente expansoras no nosso contexto em [12].

Teorema 4.2.2. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo local fora de um conjunto singular não-flat \mathcal{S} , que é não-uniformemente expansor e tem recorrência lenta para \mathcal{S} . Então, para $\omega_0 > 0$ e uma função contínua $\varphi_0 : M \rightarrow \mathbb{R}$ existem $\epsilon, \delta > 0$ arbitrariamente próximos a zero tais que, escrevendo*

$$A_n = \left\{ x \in M : \frac{1}{n} S_n \Delta_\delta(x) \leq \epsilon \right\} \text{ e } B_n = \left\{ x \in M : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{1}{n} S_n \varphi_0(x) - \mu(\varphi_0) \right| > \omega_0 \right\}$$

obtemos $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \text{Leb}(A_n \cap B_n) < 0$.

Relembre que $\mathbb{E} = \{\nu \in \mathcal{M}_f : h_\nu(f) = \nu(\log J)\}$ é o conjunto de todos os estados de equilíbrio de f com respeito ao potencial $\log J$. Note que \mathbb{E} é um subconjunto compacto não-vazio convexo do conjunto de probabilidades invariantes, na topologia fraca*.

Recorrência exponencialmente lenta nos garante que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{Leb}(M \setminus A_n) < 0$. Sob essa hipótese o teorema acima significa que para (ϵ, δ) próximos a $(0, 0)$ temos que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{Leb}(B_n) < 0$, pois $\text{Leb}(B_n) \leq \text{Leb}(A_n \cap B_n) + \text{Leb}(M \setminus A_n)$.

Então, escolhemos $\omega, \epsilon > 0$ pequenos, $k \geq 1$ como antes, $\varphi_0 = \varphi_k$ e $\omega_0 = \omega + \epsilon_0$. Portanto $\{\mu(\varphi_k) : \mu \in \mathbb{E}\}$ é um intervalo compacto da reta. Em (4.2.2) definimos $c = \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \mu(\varphi_0) - \omega$ e em (4.2.3) definimos $c = \sup_{\mu \in \mathbb{E}} \mu(\varphi_0) + \omega$. Então, temos a inclusão

$$\left\{ \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left\{ \left| \frac{1}{n} S_n \varphi - \mu(\varphi) \right| \right\} > \omega \right\} \subset B_n \cup \left\{ \frac{1}{n} S_n \Delta_{\delta_1} \geq \epsilon_1 \right\}. \quad (4.2.4)$$

Pelo Teorema 4.2.2 podemos encontrar $\epsilon, \delta > 0$ suficientemente pequenos tais que a recorrência exponencialmente lenta vale também para o par (ϵ, δ) e portanto

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{Leb} \left\{ \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left\{ \left| \frac{1}{n} S_n \varphi_0 - \mu(\varphi_0) \right| \right\} > \omega_0 \right\} < 0. \quad (4.2.5)$$

Finalmente as escolhas de ϵ_1, δ_1 unida à condição de recorrência exponencialmente lenta para \mathcal{S} significa que a medida de Lebesgue do subconjunto do lado direito em (4.2.4) é

também exponencialmente pequeno quando $n \rightarrow +\infty$. Isto, junto com (4.2.5) conclui a prova do Teorema 4.2.1. \square

4.2.1 Semifluxos com altura com cota logarítmica nas singularidades e aproximação exponencialmente lenta.

Seja $\phi^t : M_r \rightarrow M_r$ um semifluxo com função teto $r : M \setminus \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ sobre a base f , onde

$$M_r = \{(x, s) \in M \times [0, +\infty) : 0 \leq s \leq r(x)\}.$$

Para cada $(x, s) \in M_r$ e $t > 0$ existe um número $n(x, s, t) \geq 1$, que consideramos o número de voltas que o ponto dá sobre o conjunto M_r , tal que $S_n^f r(x) \leq s + t \leq S_{n+1}^f r(x)$, então definimos $X^t(x, s) = (f^n(x), s + t - S_n r(x))$.

Denotemos por $\nu = \mu \times \text{Leb}^1$ a extensão X^t - invariante de μ para M_r e por λ a extensão de Leb para M_r , isto é, $\lambda = \text{Leb} \times \text{Leb}^1$, onde Leb^1 é a medida de Lebesgue em \mathbb{R} . Para qualquer subconjunto $A \subset M_r$

$$\nu(A) = \frac{1}{\mu(r)} \int d\mu(x) \int_0^{r(x)} \chi_A(x, s) ds$$

$$\lambda(A) = \frac{1}{\text{Leb}(r)} \int d\text{Leb}(x) \int_0^{r(x)} \chi_A(x, s) ds.$$

O próximo resultado será uma das nossas principais ferramentas neste capítulo e com ele vamos provar o resultado final deste trabalho.

Teorema 4.2.3 ([13]). *Seja X^t um semifluxo de suspensão sobre uma transformação não uniformemente expansora $f : M \setminus \mathcal{S} \rightarrow M$ que tem recorrência exponencialmente lenta ao conjunto singular \mathcal{S} e a função teto $r : M \setminus \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ tem crescimento logarítmico próximo a \mathcal{S} . Seja \mathbb{E} o conjunto formado por todos os estados de equilíbrio com respeito a $\log J$, e seja $\psi : M_r \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, dado $\epsilon > 0$*

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \lambda \left\{ z \in M_r : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{1}{T} \int_0^T \psi(X^t(z)) dt - \mu(\psi) \right| > \epsilon \right\} < 0.$$

Com a relação entre o fluxo original numa vizinhança do sumidouro e o fluxo suspensão sobre F , e esta redução ao semifluxo de suspensão sobre dinâmica unidimensional, completamos a prova do Teorema (4.1.1), ou seja, do Teorema A, assumindo a propriedade de aproximação exponencialmente lenta ao conjunto das singularidades /descontinuidades, que será o objeto do capítulo 5.

4.2.2 Redução para a dinâmica da base.

Grandes desvios para um semifluxo pode ser provado a partir da dinâmica da base, isto é, reduzimos o conjunto desvio do fluxo para um conjunto desvio que só depende da dinâmica da base.

Seja $\psi : M_r \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada. Para $T > 0$ e $z = (x, s)$ com $x \in M$ e $0 \leq s \leq r(x) < \infty$ podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_0^T \psi(X^t(z)) dt &= \int_s^{r(x)} \psi(X^t(x, 0)) dt + \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^{r(f^j(x))} \psi(X^t(f^j(x), 0)) dt \\ &\quad + \int_0^{T+s-S_n r(x)} \psi(X^t(f^n(x), 0)) dt \end{aligned}$$

onde $n = n(x, s, T) \in \mathbb{N}$ é o número de voltas tal que $S_n r(x) \leq s + T < S_{n+1} r(x)$.

Definindo $\varphi(x) = \int_0^{r(x)} \psi(X^t(x, 0)) dt$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \psi(X^t(z)) dt &= \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^{r(f^j(x))} \psi(X^t(f^j(x), 0)) dt - \frac{1}{T} \int_0^s \psi(X^t(x, 0)) dt \\ &\quad + \frac{1}{T} \int_0^{T+s-S_n r(x)} \psi(X^t(f^n(x), 0)) dt. \end{aligned}$$

Podemos majorar $I = I(x, s, T) = -\frac{1}{T} \int_0^s \psi(X^t(x, 0)) dt + \frac{1}{T} \int_0^{T+s-S_n r(x)} \psi(X^t(f^n(x), 0)) dt$, pelo seguinte

$$I \leq \left(2\frac{s}{T} + \frac{S_{n+1}(x) - S_n r(x)}{T} \right) \cdot \|\psi\|,$$

onde $\|\psi\| = \sup |\psi|$. Dado $\omega > 0$ para $0 \leq s < r(x)$ e $n = n(x, s, T)$ o conjunto

$$\left\{ (x, s) \in M_r : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{1}{T} S_n \varphi(x) + I - \frac{\mu(\varphi)}{\mu(r)} \right| > \omega \right\}$$

está contido na união dos conjuntos

$$\left\{ (x, s) \in M_r : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{1}{T} S_n \varphi(x) - \frac{\mu(\varphi)}{\mu(r)} \right| > \frac{\omega}{2} \right\} \cup \left\{ (x, s) \in M_r : I > \frac{\omega}{2} \right\}. \quad (4.2.6)$$

Note que se $\psi \equiv 0$ então consideraremos o subconjunto do lado esquerdo de (4.2.6) no que segue. Vamos estimar a λ -medida de cada subconjunto acima assumindo que ψ não é identicamente nula.

4.2.3 A função teto como observável sobre a dinâmica da base.

Tome $N \geq 1$ suficientemente grande tal que $N\|\psi\| > 2$ e note que para quaisquer $T, \omega > 0$,

$$\begin{aligned} \lambda \left\{ I > \frac{\omega}{2} \right\} &= \int dLeb \int_0^{r(x)} ds (\chi_{(\omega/2, +\infty)} \circ I)(x, s, T) \\ &\leq Leb \left\{ r > \frac{\omega T}{2N\|\psi\|} \right\} + Leb \left\{ r(x) \leq \frac{\omega T}{2N\|\psi\|} \text{ e } S_i r(x) \leq T < S_{i+1} r(x), i \in \mathbb{N} \right\} \\ &\leq Leb \left\{ r > \frac{\omega T}{2N\|\psi\|} \right\} + \frac{\omega T}{2N\|\psi\|} \sum_{i=0}^{\lceil T/r_0 \rceil + 1} Leb \left\{ \frac{|S_{i+1}r - S_i r|}{T} > \frac{N\|\psi\| - 2}{2N\|\psi\|} \omega \right\}. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Note que, como r é limitado por baixo, $r \geq r_0 > 0$, temos que $T \geq r_0 n$, o que nos dá um limite superior, $\lceil \frac{T}{r_0} \rceil + 1$, para o possível número de voltas que aparecem na soma acima. Em (4.2.7) também usa-se as seguintes relações

$$\frac{2s}{T} < \frac{2r}{T} \leq \frac{2}{T} \cdot \frac{\omega T}{2N\|\psi\|} = \frac{\omega}{N\|\psi\|} \quad \text{e} \quad \frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{N\|\psi\|} = \frac{N\|\psi\| - 2}{2N\|\psi\|} \omega.$$

Por um lado, como r cresce como logaritmo da distância a \mathcal{S} , temos que a primeira parcela do lado esquerdo da soma (4.2.7) é limitada por

$$Leb \left\{ x \in M : \text{dist}(x, \mathcal{S}) \leq \exp \left(-C \cdot \frac{\omega T}{N\|\psi\|} \right) \right\},$$

onde $C > 0$ é uma constante dependente de r . Segue da hipótese (1.4.1) que

$$Leb \left\{ x \in M : \text{dist}(x, \mathcal{S}) \leq \exp \left(-C \cdot \frac{\omega T}{N\|\psi\|} \right) \right\} \leq e^{-C\kappa\omega T/N\|\psi\|}.$$

Por outro lado, como $T \geq S_i r(x) \geq r_0 i$ obtemos o seguinte limite superior para a parcela do lado direito da soma (4.2.7), para cada $i = 0, \dots, \lceil T/r_0 \rceil + 1$

$$\begin{aligned} Leb \left\{ \frac{|S_{i+1}r - S_i r|}{i} > \left(\frac{N\|\psi\| - 2}{2N\|\psi\|} \cdot r_0 \right) \omega \right\} &\leq \left(\text{seja } r'_0 = \frac{N\|\psi\| - 2}{2N\|\psi\|} r_0 \right) \\ &\leq Leb \left\{ \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{1}{i} S_i r - \mu(r) \right| > \frac{\omega r'_0}{2} \right\} + Leb \left\{ \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{1}{i} S_{i+1} r - \mu(r) \right| > \frac{\omega r'_0}{2} \right\} \leq 2C_0 e^{-\beta i} \end{aligned}$$

com $C_0, \beta > 0$ constantes. A desigualdade acima segue do Teorema 4.2.1 que nos garante um limite de grandes desvios para o observável r com respeito ao ínfimo das medidas físicas de f . Portanto, podemos estimar a soma (4.2.7) por

$$\frac{\omega T}{2N\|\psi\|} \cdot 2C_0 \sum_{i=0}^{\lceil T/r_0 \rceil + 1} e^{-\beta i} \leq \frac{C\omega T}{2N\|\psi\|} e^{-\beta T/r_0}$$

para uma constante $C > 0$ dependente de f, r, ω e ψ .

Assim, obtemos

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \lambda \left\{ I > \frac{\omega}{2} \right\} < 0, \quad (4.2.8)$$

sempre que tomarmos $\omega > 0$ suficientemente pequeno.

4.2.4 Usando φ como observável sobre a dinâmica da base.

Agora vamos dar um limite superior (estimar) para a medida de Lebesgue do conjunto

$$\left\{ (x, s) \in M_r : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{1}{T} S_n \varphi(x) - \frac{\mu(\varphi)}{\mu(r)} \right| > \frac{\omega}{2} \right\}. \quad (4.2.9)$$

Para toda $\mu \in \mathbb{E}$ e Leb quase todos os pontos $x \in M$ e todo $0 \leq s < r(x)$

$$\frac{S_n r(x)}{n} \leq \frac{T + s}{n} \leq \frac{S_{n+1} r(x)}{n}. \quad (4.2.10)$$

Também temos que para toda $\mu \in \mathbb{E}$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{T} S_n \varphi - \frac{\mu(\varphi)}{\mu(r)} \right| &\leq \left| \frac{n}{T} \frac{S_n \varphi}{n} - \frac{n}{T} \mu(\varphi) \right| + \left| \frac{n}{T} \mu(\varphi) - \frac{\mu(\varphi)}{\mu(r)} \right| \\ &\leq \frac{n}{T} \left| \frac{S_n \varphi}{n} - \mu(\varphi) \right| + \mu(\varphi) \left| \frac{n}{T} - \frac{1}{\mu(r)} \right|. \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto $\left\{ (x, s) \in M_r : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{1}{T} S_n \varphi(x) - \frac{\mu(\varphi)}{\mu(r)} \right| > \frac{\omega}{2} \right\}$ está contido na seguinte união,

$$\left\{ (x, s) \in M_r : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{n}{T} \left(\frac{S_n \varphi}{n} - \mu(\varphi) \right) \right| > \frac{\omega}{4} \right\} \cup \left\{ (x, s) \in M_r : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{n}{T} - \frac{1}{\mu(r)} \right| > \frac{\omega}{4|\mu(\varphi)|} \right\}. \quad (4.2.11)$$

Note que a λ - medida do conjunto $\left\{ (x, s) \in M_r : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{n}{T} - \frac{1}{\mu(r)} \right| > \frac{\omega}{4|\mu(\varphi)|} \right\}$ é limitada por cima por

$$\lambda \left\{ (x, s) \in M_r : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{n}{T} - \frac{1}{\mu(r)} \right| > \frac{\omega}{4|\mu(\varphi)|} \text{ e } r(x) \leq T \right\} + \lambda \{ (x, s) \in M_r : r(x) > T \}. \quad (4.2.12)$$

Veremos adiante que essa quebra será útil para reduzir a medida λ em M_r para a medida de Leb em M , e assim aplicar um resultado de grandes desvios para o observável r .

Para $\omega > 0$ suficientemente pequeno, T e n suficientemente grandes, temos que

$$\begin{aligned} &\lambda \left\{ (x, s) \in M_r : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{n}{T} - \frac{1}{\mu(r)} \right| > \frac{\omega}{4|\mu(\varphi)|} \text{ e } r \leq T \right\} \\ &\leq T \sum_{i=0}^{[T/r_0]+1} \sum_{j=0,1} Leb \left\{ x \in M : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{i}{S_{i+j} r} - \frac{1}{\mu(r)} \right| > \frac{\omega}{|\mu(\varphi)|} \right\}. \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Seja $(x, s) \in M_r$. Para $T > 0$ suficientemente grande temos que quando o fluxo age sobre esse ponto até tempo T ele dá n “voltas” e este número de voltas já vimos que é limitado por $[T/r_0] + 1$. Suponha, por exemplo, que $n(x, s, T) = 2$. Sabemos que $\frac{2}{S_3 r} \leq \frac{2}{T} \leq \frac{2}{S_2 r}$, logo

$$(x, s) \in \left\{ (x, s) \in M_r : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{2}{S_3 r} - \frac{1}{\mu(r)} \right| > \frac{\omega}{|\mu(\varphi)|} \right\} \cup \left\{ (x, s) \in M_r : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{2}{S_2 r} - \frac{1}{\mu(r)} \right| > \frac{\omega}{|\mu(\varphi)|} \right\}.$$

Fazendo o mesmo para todas as possibilidades de voltas, obtemos a cota (4.2.13).

Usando o resultado de grandes desvios limitado, Teorema 4.2.1, para o observável r temos que existem constantes $C_0, \beta > 0$ tais que

$$\text{Leb} \left\{ x \in M : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{i}{S_{i+j}r} - \frac{1}{\mu(r)} \right| > \frac{\omega}{4|\mu(\varphi)|} \right\} \leq C_0 e^{-\beta i}, \text{ para } j = 0, 1,$$

e então para alguma constante $C_1 > 0$ dependendo apenas de f, r e ω temos

$$T \sum_{i=0}^{[T/r_0]+1} \sum_{j=0,1} \text{Leb} \left\{ x \in M : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{i}{S_{i+j}r} - \frac{1}{\mu(r)} \right| > \frac{\omega}{|\mu(\varphi)|} \right\} \leq C_1 T e^{-\beta T/r_0}.$$

A integral $\int_{\{r>T\}} r d\text{Leb}$ é limitada usando a condição (1.4.1) da seguinte forma: para $T > 0$ suficientemente grande tal que $i > [T]$ implica $(i+1)e^{c_0 i} < 1$, onde $c_0 = -\kappa \log \rho / 2K > 0$. Daí,

$$\begin{aligned} \int_{\{r>T\}} r d\text{Leb} &\leq \sum_{i \geq [T]} \int_i^{i+1} r d\text{Leb} \leq \sum_{i \geq [T]} (i+1) \text{Leb}\{r > i\} \\ &\leq C_k \sum_{i \geq [T]} (i+1) e^{-2c_0 i} \leq C_k \sum_{i \geq [T]} e^{-c_0 i} \leq C_2 e^{-c_0 T}, \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

para uma constante positiva $C_2 > 0$ dependendo apenas de f .

Para terminar temos que analisar o subconjunto do lado esquerdo de (4.2.11).

Para algum $\hat{\omega} > 0$, o conjunto

$$\left\{ (x, s) \in M_r : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{n}{T} \left(\frac{S_n \varphi}{n} - \mu(\varphi) \right) \right| > \frac{\omega}{4} \right\}$$

está contido na seguinte união

$$\left\{ (x, s) \in M_r : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{T}{n} - \mu(r) \right| > \hat{\omega} \right\} \cup \left\{ (x, s) \in M_r : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{S_n \varphi}{n} - \mu(\varphi) \right| > \frac{\omega}{4} \left(\hat{\omega} + \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \mu(r) \right) \right\}, \quad (4.2.15)$$

pois $\left| \frac{T}{n} - \mu(r) \right| > \hat{\omega}$ implica que $\frac{n}{T} > \frac{1}{\hat{\omega} + \mu(r)}$.

Novamente para $\omega > 0$ a λ -medida do subconjunto do lado esquerdo de (4.2.15), seguindo os mesmos argumentos acima, é exponencialmente pequeno em T . Para estimar a λ -medida do lado direito de (4.2.15) usamos grandes desvios limitados para o observável φ com respeito a f , já que φ tem crescimento logarítmico próximo ao conjunto singular. De fato, $|\varphi(x)| \leq \int_0^{r(x)} |\psi(x, s)| dt \leq r(x) \cdot \|\psi\|$ para $x \in M \setminus S$ pois ψ é limitada. Podemos estimar a λ -medida do subconjunto do lado direito em (4.2.15) como em (4.2.13) e (4.2.14), obtendo constantes $C_3, \gamma > 0$ dependendo de f, r e ω tais que

$$\lambda \left\{ (x, s) \in M_r : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{S_n \varphi}{n} - \mu(\varphi) \right| > \mu(r) \cdot \frac{\omega}{4} \left(\frac{2 - \hat{\omega}}{2} \right) \right\} \leq C_3 T e^{-\gamma n}.$$

A partir disso concluímos

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \lambda \left\{ (x, s) \in M_r : \inf_{\mu \in \mathbb{E}} \left| \frac{1}{T} S_n \varphi - \frac{\mu(\varphi)}{\mu(r)} \right| > \frac{\omega}{2} \right\} < 0. \quad (4.2.16)$$

Juntando (4.2.8) e (4.2.16), fica provado o Teorema 4.2.3.

Capítulo 5

Recorrência Exponencialmente Lenta

Neste capítulo vamos provar o principal resultado técnico deste trabalho, o Teorema C: a aproximação exponencialmente lenta às singularidades/descontinuidades de uma transformação expansora por pedaços unidimensional, admitindo conjunto enumerável de ramos não singulares mas número finito de singularidades, e tal que as imagens laterais dos pontos de descontinuidade não singulares são enviadas em alguma singularidade num número finito uniforme de iterados.

Como explicado na introdução, este resultado garante, em particular, a existência de número finito de densidades invariantes para a dinâmica cuja bacia ergódica cobre quase todo ponto do intervalo, com respeito à medida de Lebesgue.

5.1 Condições gerais e enunciado do resultado

Por construção temos que $|f'|$ cresce como a inversa de alguma potência da distância ao conjunto das singularidades, isto é, existem $B > 0$ e $0 < \beta < 1$ tais que

$$|f'(x)| \geq B^{-1}d(x, \mathcal{D})^{-\beta}, \quad (5.1.1)$$

para todo $x \in M \setminus \mathcal{D}$.

Lembre que f tem **recorrência exponencialmente lenta** ao conjunto das descontinuidades \mathcal{D} , se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{Leb} \left\{ x \in \mathbb{I} : \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \Delta_\delta(f^j(x)) > \epsilon \right\} < 0, \quad (5.1.2)$$

onde $\Delta_\delta(x) = |\log \text{dist}_\delta(x, \mathcal{D})|$ é a distância logarítmica δ -truncada de $x \in M$ à \mathcal{D} , isto é, $\Delta_\delta(x)$ é não negativa e contínua longe de \mathcal{D} , identicamente nula 2δ -longe de \mathcal{D} , e igual a $-\log \text{dist}(x, \mathcal{D})$ quando $\text{dist}(x, \mathcal{D}) \leq \delta$ e toma valores entre 0 e $-\log \delta$ para x tal que $\text{dist}(x, \mathcal{D}) < 2\delta$.

Teorema 5.1.1. *Seja $f : \mathbb{I} \setminus \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{I}$ uma função unidimensional monótona, $C^{1+\alpha}$ em pedaços com $n + 1$ ramos definidos nas componentes conexas de $\mathbb{I} \setminus \mathcal{D}$ admitindo um conjunto finito de medidas invariantes absolutamente contínuas (a.c.i.m.) μ_f^i , e que $\inf |f'| > 2$ onde está definida. Além disso, assuma que o conjunto \mathcal{D} seja enumerável e que se divida em dois subconjuntos \mathcal{S} e $\mathcal{D} \setminus \mathcal{S}$, em que $\mathcal{S} \neq \emptyset$ é o conjunto finito das singularidades satisfazendo:*

1. *para todo $b \in \mathcal{D}$ existem os limites laterais $f(b^\pm) = \lim_{t \rightarrow b^\pm} f(t)$;*
2. *existe $L \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $b \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{S}$ existe $T(b^\pm) \leq L$ tal que $f^{T(b^\pm)}(b^\pm) \in \mathcal{S}$;*
3. *para todo $b \in \mathcal{S}$ existe $0 < \alpha = \alpha(b) < 1$ e, existe e é finito e não nulo algum (ou ambos) dos limites laterais $\lim_{t \rightarrow b^\pm} |t - b|^{1-\alpha} Df(t)$.*

Então f tem recorrência exponencialmente lenta ao conjunto das descontinuidades \mathcal{D} .

A prova demanda técnicas de refinamento de partições primeiramente desenvolvidas nos trabalhos de Benedicks e Carleson ([23], [24]) e será baseada principalmente na prova de Araújo [13], que mostrou recorrência exponencialmente lenta da transformação base do semifluxo de suspensão obtido através da redução do fluxo do atrator geométrico de Lorenz.

As técnicas apresentadas aqui também foram utilizadas por Freitas em [34] para provar que a família quadrática $f_a = a - x^2$ com $a \in [a_0, 2]$ no subconjunto com medida de Lebesgue positiva construído por Benedicks e Carleson ([23],[24]), onde $a_0 \approx 2$ tem aproximação exponencialmente lenta para a singularidade.

5.2 Partição inicial e refinamento

Aqui vamos construir uma partição cujos elementos tenham comprimento exponencialmente pequeno com respeito a distância ao conjunto \mathcal{D} . Assumimos que $\mathcal{D} = \{b_n\}_n$ é uma sequência estritamente monótona (em ordem anti-horária se $M = S^1$). Denotamos $c_n = \frac{b_n + b_{n+1}}{2}$ os pontos médios para todos os índices n . A partir daí vamos definir a partição \mathcal{P}_0 , Lebesgue módulo 0, de M como segue.

1ª Parte. $b_n \in \mathcal{S}$. Consideremos $p \geq \rho_0 > 1$, com $\rho_0 > 0$ suficientemente grande. Particionamos (b_n, c_n) em subintervalos

$$M(2n, p) = (b_n + d_{2n}e^{-p}, b_n + d_{2n}e^{-(p-1)}),$$

onde $d_{2n} = c_n - b_n$. O índice $2n$ indica que particionamos o intervalo que está à direita de b_n .

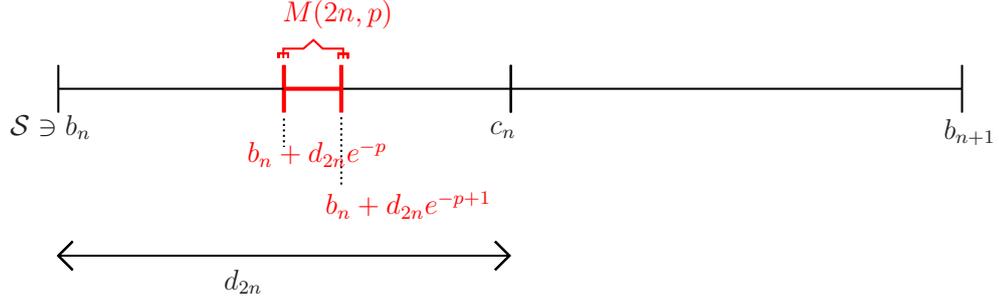


Figura 5.2.1: Átomo da partição \mathcal{P}_0 próximo a uma singularidade.

Analogamente particionamos (c_{n-1}, b_n) em subintervalos

$$M(2n-1, p) = (b_n + d_{2n-1}e^{-(p-1)}, b_n + d_{2n}e^{-p}),$$

para todo $p \geq \rho_0 > 1$ e $d_{2n-1} = b_n - c_{n-1}$.

2ª Parte. $b_n \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{S}$. O Teorema 1.3.5 item (6-b) garante que existe $T(b_n^\pm) \in \mathbb{N}$ tal que $f^{T(b_n^\pm)}(b_n^\pm) = b_k^\pm$, com $b_k \in \mathcal{S}$. Denotaremos por T o menor inteiro positivo tal que $f^{T(b_n^\pm)} \in \mathcal{S}$. Seja $d_n \in (b_n, c_n)$ de tal forma que a imagem de (b_n, d_n) por f^{T_n} esteja contida ou em (b_k, c_k) ou em (c_{k-1}, b_k) .

Para cada $p \geq \rho_0 > 1$, tome $M(k, p)$ contido em (b_k, c_k) ou em (c_{k-1}, b_k) tal que $f^{-T_n}(M(k, p)) \cap (b_n, d_n)$ seja um subintervalo de (b_n, d_n) que iremos denotar por $\tilde{M}(n, p)$. Estes elementos pertencem a partição de (b_n, c_n) .

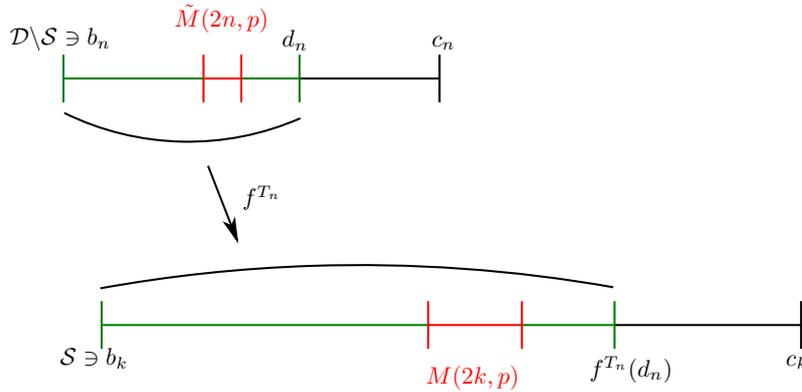


Figura 5.2.2: Átomo da partição \mathcal{P}_0 próximo a uma descontinuidade.

Completamos a partição de (b_n, c_n) com o intervalo

$$\tilde{M}(2n, 0) = (b_n, c_n) \setminus (b_n, d_n).$$

Fazemos a mesma construção para o intervalo (c_{n-1}, b_n) .

3ª Parte. Para concluir a definição da partição inicial considere $\rho_0 \in \mathbb{N}$ tal que $e^{-\frac{\beta\rho_0}{2}} < 1$ e $\left(1 + \frac{2}{\rho_0}\right) \left(1 + \frac{\rho_0}{2}\right)^{\frac{2}{\rho_0}} < e^\beta$, onde $\beta \in (0, 1)$ já foi definido em (5.1.1). Então, defina \mathcal{P}_0

como a coleção de todos os intervalos $M(k, p)$, $\tilde{M}(n, p)$ para todo $n, k \in \mathbb{N}$ e todo $p \geq \rho_0$ unido às componentes conexas de

$$M \setminus \left[\left(\bigcup_{k, p \geq \rho_0} M(k, p) \cup \{b_k\} \right) \cup \left(\bigcup_{n, p \geq \rho_0} \tilde{M}(n, p) \cup \{b_n\} \right) \right].$$

Isto conclui a construção da partição \mathcal{P}_0 .

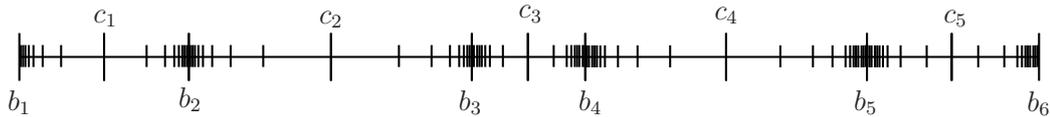


Figura 5.2.3: Partição inicial \mathcal{P}_0 .

Para cada elemento $\eta \in \mathcal{P}_0$ denote por η^+ o intervalo obtido pela união de η com seus dois intervalos vizinhos em \mathcal{P}_0 . Por definição temos a seguinte relação para todo k e todo $p \geq \rho_0$

$$Leb(M(k, p)^+) \leq 9Leb(M(k, p)) = 9d_k e^{-p}(e-1),$$

se $M(k, p)$ é um elemento da partição \mathcal{P}_0 próximo a alguma singularidade, ou

$$Leb(\tilde{M}(n, p)^+) \leq 9Leb(\tilde{M}(k, p)) \leq 9 \sup |(f^{-T_n})'|_{M(k, p) \cap (d_n, b_n)} |leb(M(k, p)) \leq 9\tilde{d}_n e^{-p}(e-1),$$

onde $\tilde{d}_n = \sup |(f^{-T_n})'|_{M(k, p) \cap (d_n, b_n)} |d_n$, $\tilde{M}(n, p)$ é um elemento da partição \mathcal{P}_0 próximo perto de alguma descontinuidade e $M(k, p)$ está perto de alguma singularidade.

Observação 5.2.1. Assumimos que $T(b)$ é uniformemente limitado e por isso podemos escolher ρ suficientemente grande tal que os iterados intermediários entre b e $f^{T(b)}(b)$ não visitam os intervalos da partição \mathcal{P}_0 .

5.2.1 Refinando a Partição

A partição \mathcal{P}_0 é dinamicamente refinada de forma que quaisquer x, y pertencentes ao mesmo átomo do n -ésimo refinamento \mathcal{P}_n pertencem ao mesmo elemento de \mathcal{P}_0 durante os primeiros n iterados, isto é, $\mathcal{P}_0(f^i(x)) = \mathcal{P}_0(f^i(y))$ para $i = 0, \dots, n-1$. Além disso, $f^n|_\omega$ é um difeomorfismo para cada intervalos $\omega \in \mathcal{P}_n$.

O refinamento é definido indutivamente. Assuma que \mathcal{P}_n já esteja definida e para cada $\omega \in \mathcal{P}_n$ existem conjuntos $R_n(\omega)$ e $D_n(\omega)$. Para $\omega \in \mathcal{P}_0$, colocamos $R_0(\omega) = D_0(\omega) = \emptyset$.

Vamos construir \mathcal{P}_{n+1} . Seja $\omega \in \mathcal{P}_n$ e analisemos $f^{n+1}(\omega)$:

Primeiro caso $f^{n+1}(\omega)$ intersecta três ou menos elementos de \mathcal{P}_0 . Neste caso definimos

$$\omega \in \mathcal{P}_{n+1}, R_{n+1}(\omega) = R_n(\omega) \text{ e } D_{n+1}(\omega) = D_n(\omega).$$

Note que, da forma que a partição \mathcal{P}_0 foi definida, $f^{n+1}(\omega)$ está longe de qualquer singularidade.

Segundo caso Não acontece o primeiro. Então consideraremos os subconjuntos $\eta' = (f^{n+1}|_\omega)^{-1}(\eta)$, para todos os $\eta \in \mathcal{P}_0$ que intersectam $f^{n+1}(\omega)$.

A família $\{\eta'\}$ obtida acima é uma partição de ω . Note também que $f^{n+1}(\eta')$ ou é igual a algum $\eta \in \mathcal{P}_0$ ou está estritamente contido em algum $\eta \in \mathcal{P}_0$.

Quando $f^{n+1}(\eta') \subsetneq \eta$ redefinimos a partição juntando os intervalos extremos de $\{\eta'\}$ com seu intervalos vizinhos tal que a nova partição $\{\xi\}$ de ω satisfaça: para cada ξ existe $M(k, p) \in \mathcal{P}_0$ tal que $M(k, p) \subseteq f^{n+1}(\xi) \subseteq M(k, p)^+$.

Colocamos então cada $\xi \in \mathcal{P}_{n+1}$, $R_{n+1}(\xi) = R_n(\xi) \cup \{n+1\}$ e $D_{n+1}(\xi) = D_n(\xi) \cup \{(k, p)\}$ e dizemos que $n+1$ é o tempo de decomposição e que (k, p) é a profundidade da decomposição.

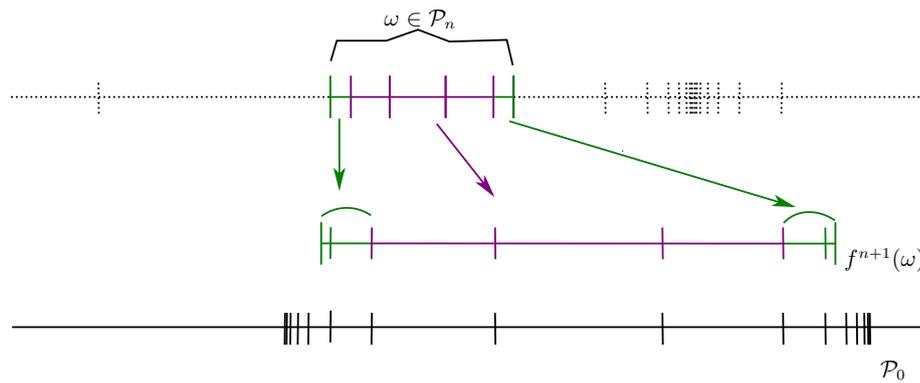


Figura 5.2.4: Refinamento do átomo $\omega \in \mathcal{P}_n$.

Isto completa a construção de \mathcal{P}_{n+1} a partir de \mathcal{P}_n , para todo $n \geq 0$.

5.2.2 Distorção Limitada

Seja $\omega \in \mathcal{P}_n$ para algum $n \geq 1$ e sejam $x, y \in \omega$. Lembre que, pela construção de \mathcal{P}_n o mapa $f^i|_\omega$ é um difeomorfismo para todo $i = 1, \dots, n$, além disso f expande distâncias com uma taxa mínima de σ e f' é α -Holder. Então existem constantes $C, D > 0$ tais que

$$\begin{aligned}
\log \left| \frac{(f^n)'(x)}{(f^n)'(y)} \right| &= \sum_{j=0}^{n-1} \log \frac{|f'(f^j(x))|}{|f'(f^j(y))|} \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1} |\log |f'(f^j(x))| - \log |f'(f^j(y))|| \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|f'(f^j(x)) - f'(f^j(y))|}{\max\{|f'(f^j(x))|, |f'(f^j(y))|\}} \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{C|f^j(x) - f^j(y)|^\alpha}{\max\{|f'(f^j(x))|, |f'(f^j(y))|\}} \\
&\leq \frac{C}{\sigma} \sum_{j=0}^{n-1} (\sigma^{i-n})^\alpha |f^n(x) - f^n(y)|^\alpha \\
&\leq \frac{C}{\sigma} \sum_{j=0}^{n-1} \sigma^{-i\alpha} \text{diam}(\mathcal{P}_0)^\alpha \\
&\leq D.
\end{aligned}$$

5.3 Medida dos átomos de \mathcal{P}_n

Vamos mostrar que podemos estimar a medida de cada elemento de \mathcal{P}_n usando as informações contidas em R_n e D_n .

Dado $n \geq 1$ e $\omega \in \mathcal{P}_n$ temos:

- uma sequência de tempos $R_n(\omega) = \{r_1 < \dots < r_s\}$ com $r_1 \geq 1$ e $r_s \leq n$.
- uma sequência de intervalos $\omega_0 \supseteq \omega_1 \supseteq \dots \supseteq \omega_s = \omega$ com suas correspondentes profundidades $D_n(\omega) = \{(k_1, p_1), \dots, (k_s, p_s)\}$, onde $\omega_0 \in \mathcal{P}_0$ e

$$\omega_i \in \mathcal{P}_{r_i} \cap \dots \cap \mathcal{P}_{r_{i+1}-1}$$

tal que $M(k_i, p_i) \subseteq f^{r_i}(\omega_{i-1}) \subseteq M(k_i, p_i)^+$, para todo $i = 0, 1, \dots, s$ com $r_0 = 0$.

Observação 5.3.1. Nos casos em que $f^{r_i}(\omega_i)$ está próximo de uma descontinuidade, temos que $M(k_i, p_i)$ vem, via pré-imagem, da partição exponencial perto de uma vizinhança unilateral de alguma singularidade.

Os tempos r_i 's são os iterados onde as imagens do elemento anterior da partição foi quebrado em iterados menores, isto é, a imagem de ω_{i-1} por f^{r_i} intersecta mais de três elementos de \mathcal{P}_0 e é particionado de acordo com a construção feito no segundo caso da Seção 5.2.1.

Usando a distorção limitada obtida na seção 5.2.2 e o Teorema de Mudança de Variáveis, obtemos a seguinte estimativa:

$$\frac{Leb(\omega)}{Leb(\omega_0)} = \frac{Leb(\omega_s)}{Leb(\omega_{s-1})} \cdots \frac{Leb(\omega_1)}{Leb(\omega_0)} \leq \prod_{i=1}^s D^2 \frac{Leb(f^{r_i}(\omega_i))}{Leb(f^{r_i}(\omega_{i-1}))}. \quad (5.3.1)$$

De fato,

$$\begin{aligned} Leb(f^{r_i}\omega_i) &= \int_{\omega_i} |(f^{r_i})'(x)| dx \\ &\geq D^{-1} |(f^{r_i})'(y)| Leb(\omega_i), \end{aligned}$$

para algum $y \in \omega_i$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} Leb(f^{r_i}\omega_{i-1}) &= \int_{\omega_{i-1}} |(f^{r_i})'(x)| dx \\ &\leq D |(f^{r_i})'(y)| Leb(\omega_{i-1}). \end{aligned}$$

Observe que $\omega_i \subset \omega_{i-1}$. Portanto podemos tomar o mesmo $y \in \omega_{i-1}$ nas duas desigualdades.

Finalmente

$$\frac{Leb(\omega_i)}{Leb(\omega_{i-1})} \leq \frac{D |(f^{r_i})'(y)|}{Leb(f^{r_i}(\omega_{i-1}))} \frac{D Leb(f^{r_i}(\omega_i))}{|(f^{r_i})'(y)|} = D^2 \frac{Leb(f^{r_i}(\omega_i))}{Leb(f^{r_i}(\omega_{i-1}))},$$

e repetindo o mesmo argumento para $i = 1, \dots, s$ obtemos 5.3.1.

Agora nosso objetivo é limitar a expressão (5.3.1) obtendo assim uma estimativa para a medida de ω . Consideraremos três casos separadamente, por clareza:

1º. Ambos os retornos estão perto de alguma singularidade: Neste caso repetimos o argumento apresentado em Araújo ([13]).

Sabemos por construção que $f^{r_i}\omega_i$ não foi quebrado, então $f^{r_i}\omega_i \subset M(k_i, p_i)^+$ e portanto $Leb(f^{r_i}\omega_i) \leq Leb(M(k_i, p_i)^+)$. Por outro lado, tem-se que

$$\begin{aligned} Leb(f^{r_i}\omega_{i-1}) &= Leb(f^{r_i-r_{i-1}}(f^{r_{i-1}}\omega_{i-1})) \\ &= |(f^{r_i-r_{i-1}})'(\xi)| Leb(f^{r_{i-1}}\omega_{i-1}), \text{ com } \xi \in f^{r_{i-1}}\omega_{i-1} \\ &= \prod_{j=0}^{r_i-r_{i-1}-1} |f'(f^j(\xi))| Leb(f^{r_{i-1}}\omega_{i-1}) \\ &\geq |f'(\xi)| Leb(f^{r_{i-1}}\omega_{i-1}), \text{ com } \prod_{j=0}^{r_i-r_{i-1}-1} |f'(f^j(\xi))| > 1 \\ &\geq B^{-1} d(\xi, \mathcal{D})^{-\beta} Leb(M(k_{i-1}, p_{i-1})). \end{aligned}$$

Na última desigualdade usamos a hipótese 5.1.1 e o fato de que $f^{r_{i-1}}(\omega_{i-1})$ não quebra e portanto contém $M(k_{i-1}, p_{i-1})$.

2º. Se $f^{r_i}(\omega_i)$ retorna próximo a alguma descontinuidade e $f^{r_{i-1}}(\omega_{i-1})$ cai próximo de alguma singularidade: Seja b_i a descontinuidade próxima de $f^{r_i}(\omega_i)$. Sabemos que existe $T_i = T(b_i) > 0$ tal que $f^{T_i}(b_i) = b_j^\pm$, onde b_j é alguma singularidade de f . Além disso, sabemos que no tempo r_i não houve a quebra de ω_i , ou seja, $f^{r_i}(\omega_i) \subset \tilde{M}(k_i, p_i)^+$. Portanto,

$$\text{Leb}(f^{r_i}(\omega_i)) \leq \text{Leb}(\tilde{M}(k_i, p_i)^+) \leq \kappa^{-T_i} \text{Leb}(M(k_i, p_i)^+) < \text{Leb}(M(k_i, p_i)^+)$$

Para estimar a medida de $f^{r_i}(\omega_{i-1})$ repetimos o argumento do caso anterior e obtemos

$$\text{Leb}(f^{r_i}(\omega_{i-1})) \geq B^{-1} d(\xi, D)^{-\beta} \text{Leb}(M(k_{i-1}, p_{i-1})).$$

3º. Se $f^{r_i}(\omega_i)$ está perto de alguma singularidade e $f^{r_{i-1}}(\omega_{i-1})$ próximo de alguma descontinuidade: Já sabemos que $f^{r_i}(\omega_i) \subset M(k_i, p_i)^+$, logo $\text{Leb}(f^{r_i}(\omega_i)) \leq \text{Leb}(M(k_i, p_i)^+)$. Queremos também estimar a medida de $f^{r_i}(\omega_{i-1})$. Como $f^{r_{i-1}}(\omega_{i-1})$ cai próximo de alguma descontinuidade, a qual denotamos b_{i-1} , é claro que

$$\text{Leb}(f^{r_i}(\omega_{i-1})) = \text{Leb}(f^{r_i - r_{i-1} - T_{i-1}}(f^{T_{i-1} + r_{i-1}}(\omega_{i-1}))),$$

onde $T_{i-1} < r_i - r_{i-1}$, pois T_i é o primeiro iterado que cai perto de uma singularidade e, pela escolha de ρ na observação 5.2.1, não há visitas perto do conjunto \mathcal{D} antes de T_i . Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Leb}(f^{r_i}(\omega_{i-1})) &= |(f^{r_i - r_{i-1} - T_{i-1}})'(y)| \text{Leb}(f^{T_{i-1} + r_{i-1}}(\omega_{i-1})) \\ &\geq |f'(y)| \prod_{j=1}^{r_i - r_{i-1} - (T_{i-1} + 1)} |f'(f^j(y))| \text{Leb}(M(k_{i-1}, p_{i-1})) \\ &\geq B^{-1} d(y, \mathcal{D})^{-\beta} \text{Leb}(M(k_{i-1}, p_{i-1})), \end{aligned}$$

com $y \in f^{T_{i-1} + r_{i-1}}(\omega_{i-1}) \subset M(\tilde{k}_{i-1}, \tilde{p}_{i-1})^+$ e $\prod_{j=1}^{r_i - r_{i-1} - (T_{i-1} + 1)} |f'(f^j(y))| \geq 1$

Agora estamos em condições de estimar o produto (5.3.1). Assumindo que pode ocorrer um dos três tipos de retorno para cada $i = 1, \dots, s$ temos,

$$\frac{\text{Leb}(\omega)}{\text{Leb}(\omega_0)} \leq \prod_{i=1}^s D^2 \frac{\text{Leb}(f^{r_i}(\omega_i))}{\text{Leb}(f^{r_i}(\omega_{i-1}))} \leq \prod_{i=1}^s D^2 \frac{\text{Leb}(M(k_i, p_i)^+)}{B^{-1} d(\xi, \mathcal{D})^{-\beta} \text{Leb}(M(k_{i-1}, p_{i-1}))}$$

A construção da partição nos dá um limite inferior para à distância de qualquer ponto ao conjunto \mathcal{D} ,

$$d(\xi, \mathcal{D}) \geq \min\{d(P_n(\xi), \mathcal{D})\} \geq \min\{d(M(k, p)^+, \mathcal{D})\} = d_k e^{-p},$$

se $P_n(\xi)$ está próximo de alguma singularidade. Caso contrário,

$$d(\xi, \mathcal{D}) \geq \min\{d(P_n(\xi), \mathcal{D})\} \geq \min\{d(\tilde{M}(k, p)^+, \mathcal{D})\} = \tilde{d}_k e^{-p},$$

com $\tilde{d}_k = \kappa^{-T_k} d_k$.

Daí segue que

$$\frac{Leb(\omega)}{Leb(\omega_0)} \leq \prod_{i=1}^s D^2 \frac{Leb(f^{r_i}(\omega_i))}{Leb(f^{r_i}(\omega_{i-1}))} \leq \prod_{i=1}^s D^2 \frac{Leb(M(k_i, p_i)^+)}{B^{-1} e^{\beta p_{i-1}} d_{k_{i-1}}^{-\beta} (e-1)^{-\beta} Leb(M(k_{i-1}, p_{i-1}))}.$$

Isto é,

$$\begin{aligned} Leb(\omega) &\leq (D^2 B (e-1)^\beta)^s \prod_{i=0}^{s-1} e^{-\beta p_i} d_{k_i}^\beta \left[Leb(M(k_0, p_0)) \prod_{i=1}^s \frac{Leb(M(k_i, p_i)^+)}{Leb(M(k_{i-1}, p_{i-1}))} \right] \\ &\leq (9D^2 B (e-1)^\beta)^s Leb(M(k_s, p_s)) \prod_{i=0}^{s-1} e^{-\beta p_i} d_{k_i}^\beta \\ &= (9D^2 B (e-1)^\beta)^s \cdot d_{k_s} \cdot e^{-p_s} (e-1) \prod_{i=0}^{s-1} e^{-\beta p_i} d_{k_i}^\beta \\ &\leq (9D^2 B (e-1)^{\beta+1})^s \prod_{i=0}^s e^{-\beta p_i} d_{k_i}^\beta \\ &= (9D^2 B (e-1)^{\beta+1})^s \prod_{i=0}^s e^{-\beta \frac{p_i}{2}} d_{k_i}^\beta e^{-\beta \frac{p_i}{2}} \\ &\leq (9D^2 B (e-1)^{\beta+1} \cdot e^{-\beta \frac{\rho_0}{2}})^s \prod_{i=0}^s e^{-\beta \frac{p_i}{2}} d_{k_i}^\beta \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

$$\leq \prod_{i=0}^s e^{-\beta \frac{p_i}{2}} d_{k_i}^\beta = \exp\left(-\beta \sum_{i=0}^s \left(\frac{p_i}{2} + q_i\right)\right), \tag{5.3.3}$$

Da linha (5.3.2) para a linha (5.3.3) usamos que $(9DB(e-1)^{\beta+1} \cdot e^{-\beta \frac{\rho_0}{2}})^s < 1$, ou seja, estamos assumindo que

$$\frac{\log((9D^2 B (e-1)^{\beta+1})^s)}{\rho_0} \leq \frac{\beta}{2}.$$

Além disso, $q_i = \lceil -\log d_{k_i} \rceil$ para simplificar a notação.

As estimativas que obtivemos acima nos dizem que a medida de cada átomo de \mathcal{P}_n depende apenas do tempo de quebra e da profundidade da tal quebra. Além disso, notemos que se $R_n(\omega) = \emptyset$ então não existe quebra, mas existe expansão uniforme com controle de distorção. Daí, temos que:

$$Leb(f^n(\omega)) = \int_\omega |(f^n)'| dLeb \geq D^2 \sigma^n Leb(\omega),$$

ou seja, $Leb(\omega) \leq D^{-2} \sigma^{-n}$. Em todos os casos apresentados a medida de ω decai exponencialmente.

5.4 Média do logaritmo da distância à \mathcal{D} .

Usamos novamente as propriedades do refinamento de \mathcal{P}_n para estimar $\log \text{dist}(f^j(x), \mathcal{D})$ via $R_n(\omega)$ para $\omega \ni x$ e $j \leq n$.

Sejam $n \geq 1$, $\omega \in \mathcal{P}_n$ e os intervalos $\omega_0 \supseteq \omega_1 \supseteq \dots \supseteq \omega_s = \omega$ como na seção anterior. Dados $r, r' \in R_n(\omega)$ consecutivos sabemos que, para iterados i entre r e r' , existe $\eta \in \mathcal{P}_0$ tal que $f^i(\omega_r) \subset \eta^+$.

A partir das propriedades de f e da partição \mathcal{P}_n deduzimos que

1. se $i \in \{1, \dots, r' - r - 1\}$ é tal que $f^{r+i-1}(\omega_r)$ está próximo de alguma singularidade, então

$$\begin{aligned} \text{Leb}(f^{r+i}(\omega_r)) &\geq |f'(\lambda)| \cdot \text{Leb}(f^{r+i-1}(\omega_r)), \quad \lambda \in f^{r+i-1}(\omega_r) \\ &\geq B^{-1} d(\lambda, \mathcal{D})^{-\beta} \text{Leb}(f^{r+i-1}(\omega_r)) \\ &\geq B^{-\beta} (d_{k_{r+i-1}} e^{-p_{r+i-1}})^{-\beta} \text{Leb}(f^{r+i-1}(\omega_r)) \\ &= \left(\frac{B}{e-1}\right)^{-\beta} ((e-1) d_{k_{r+i-1}} e^{-p_{r+i-1}})^{-\beta} \text{Leb}(f^{r+i-1}(\omega_r)) \\ &\geq \left(\frac{e-1}{B}\right)^{\beta} [\text{Leb}(f^{r+i-1}(\omega_r))]^{1-\beta}. \end{aligned}$$

Por outro lado em $r+i$ ainda não houve quebra de ω_r , então $f^{r+i}(\omega_r) \subset M(k_{r+i}, p_{r+i})^+$.

Logo

$$d_{k_{r+i}} e^{-p_{r+i}} \geq (9(e-1))^{-1} \text{Leb}(f^{r+i}(\omega_r)),$$

ou seja, $d(f^{r+i}(\omega_r), \mathcal{D}) \geq (9(e-1))^{-1} \text{Leb}(f^{r+i}(\omega_r))$.

2. se $j \in \{1, \dots, r' - r - 1\}$ é tal que $f^{r+j-1}(\omega_r)$ está perto de alguma descontinuidade.

$$\begin{aligned} \text{Leb}(f^{r+j}(\omega_r)) &\geq |f'(\lambda)| \cdot \text{Leb}(f^{r+j-1}(\omega_r)), \quad \lambda \in f^{r+j-1}(\omega_r) \\ &\geq B^{-1} d(\lambda, \mathcal{D})^{-\beta} \text{Leb}(f^{r+j-1}(\omega_r)) \\ &\geq B^{-\beta} (\tilde{d}_{k_{r+j-1}} e^{-p_{r+j-1}})^{-\beta} \text{Leb}(f^{r+j-1}(\omega_r)) \\ &= \left(\frac{B}{e-1}\right)^{-\beta} ((e-1) \tilde{d}_{k_{r+j-1}} e^{-p_{r+j-1}})^{-\beta} \text{Leb}(f^{r+j-1}(\omega_r)) \\ &\geq \left(\frac{e-1}{B}\right)^{\beta} [\text{Leb}(f^{r+j-1}(\omega_r))]^{1-\beta}. \end{aligned}$$

Também temos que

$$\tilde{d}_{k_{r+j}} e^{-p_{r+j}} \geq (9(e-1))^{-1} \text{Leb}(f^{r+j}(\omega_r)),$$

ou seja, $d(f^{r+j}(\omega_r), \mathcal{D}) \geq (9(e-1))^{-1} \text{Leb}(f^{r+j}(\omega_r))$.

Agora é fácil ver que

$$\begin{aligned}
-\log \text{Leb}(f^{r+i+1}(\omega_r)) &\leq -(1-\beta) \log \text{Leb}(f^{r+i}(\omega_r)) + \beta \log \frac{B}{e-1} \\
&= -\log \text{Leb}(f^{r+i}(\omega_r)) \left((1-\beta) - \frac{\beta \log B/e-1}{\log \text{Leb}(f^{r+i}(\omega_r))} \right) \\
&= -\gamma \log \text{Leb}(f^{r+i}(\omega_r))
\end{aligned}$$

com $\gamma = \left((1-\beta) - \frac{\beta \log B/e-1}{\log \text{Leb}(f^{r+i}(\omega_r))} \right) \in (0, 1)$ para B suficientemente grande.

Assim obtemos

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^{r'-r-1} \log d(f^{r+i}(\omega_r), \mathcal{D}) &\leq -\sum_{i=1}^{r'-r-1} (\log \text{Leb}(f^{r+i}(\omega_r)) - \log(9(e-1))) \\
&\leq -\text{const} \log \text{Leb}(f^r(\omega_r)) + (r'-r) \log(9(e-1)) \\
&\leq -\text{const} \log \text{Leb}(f^r(\omega_r)).
\end{aligned}$$

Na última linha usamos expansão uniforme e a definição de r e r' :

$$\kappa^{r'-r} \text{Leb}(f^r(\omega_r)) \leq 1 \Rightarrow r' - r \leq \frac{-\log(\text{Leb}(f^r(\omega_r)))}{\log \kappa}.$$

Como $r < r'$ são elementos arbitrários de $R_n(\omega)$ mostramos que

$$\sum_{j=0}^{s-1} -\log d(f^j(x), \mathcal{D}) \leq -c \sum_{(k,p) \in D_s(\omega)} \log(d_k e^{-p}), \quad (5.4.1)$$

para todo $x \in \omega$, onde $s < n$ é o último tempo de quebra antes de n .

Se $m > n$ é o primeiro inteiro tal que $\omega \notin \mathcal{P}_n$, mas pertence a partição \mathcal{P}_l , para $n < l < m$, ou seja, m é o primeiro tempo maior que n em que há quebra de ω . Então, podemos escrever $\omega = \cup_{\omega' \in \mathcal{P}_m} \omega' \cap \omega$. Repetindo o argumento para $x \in \omega' \cap \omega$, para cada $\omega' \in \mathcal{P}_m$, obtemos uma relação tipo (5.4.1) substituindo $D_s(\omega)$ por $D_n(\omega)$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} -\log d(f^j(x), \mathcal{D}) \leq -c \sum_{(k,p) \in D_n(\omega)} \log(d_k e^{-p}). \quad (5.4.2)$$

Defina para um conjunto co-enumerável de $x \in \mathbb{I}$ a função

$$\mathcal{L}_n(x) = \sum_{(k,p) \in D_n(\mathcal{P}_n(x))} -\log(d_k e^{-p}). \quad (5.4.3)$$

Defina também a soma truncada: para todo $\delta > 0$ e para o mesmo conjunto co-enumerável de pontos $x \in \mathbb{I}$

$$\mathcal{L}_n^\delta(x) = \sum_{\substack{(k,p) \in D_n(\mathcal{P}_n(x)) \\ d_k e^{-p} < \delta}} -\log(d_k e^{-p}). \quad (5.4.4)$$

Pelos argumentos anteriores obtemos

$$\sum_{j=0}^{n-1} -\log d_\delta(f^j(x), \mathcal{D}) \leq \mathcal{L}_n^\delta(x). \quad (5.4.5)$$

Defina os números $t_n(x) := \#R_n(\mathcal{P}_n(x))$ o número de quebras até o n -ésimo iterado e $u_n(x) := \#\{(k, p) \in R_n(\mathcal{P}_n(x)) : d_k e^{-p} < \delta\}$ número de quebras profundas.

Dado $x \in \mathbb{I}$ e $n \geq 1$, sejam $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_t$ com $t = t_n(x)$ os tempos de quebra ao longo da órbita de x até tempo n . Seja $0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_u$ os índices das correspondentes profundidades, onde $u = u_n(x)$. Cada quantidade acima é constante nos elementos de \mathcal{P}_n .

Defina,

$$A_{(k_1, p_1), \dots, (k_u, p_u)}^{u, t}(n) := \{x \in \mathbb{I} : t_n(x) = t, u_n(x) = u \text{ e } (k_{s_i}, p_{s_i}) = (k_i, p_i), i = 1, \dots, u\},$$

o conjunto de pontos que em n iterados tem t tempos de quebra e dentre estes u quebras profundas, com profundidades específicas $(k_1, p_1), \dots, (k_u, p_u)$.

Lema 5.4.1. $Leb(A_{(k_1, p_1), \dots, (k_u, p_u)}^{u, t}(n)) \leq \binom{t}{u} \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^u (\eta_i + p_i)\right)$, onde $\eta_i = [-\log d_{k_i}]$.

Demonstração. Usando a estimativa (5.3.3) obtemos a seguinte limitação para a medida de Lebesgue de $A_{(k_1, p_1), \dots, (k_u, p_u)}^{u, t}(n)$

$$\binom{t}{u} \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^u (\eta_i + p_i)\right) \cdot \exp\left(-\beta \sum_{\substack{(k_j, p_j) \text{ t.q. } d_{k_j} e^{-p_j} \geq \delta \\ j=1, \dots, t-u}} (\nu_j + p_j)\right).$$

O coeficiente binomial leva em conta todas as possíveis ordenações de u profundidades entre t tempos de quebra. O último fator exponencial é uma cota para contribuição de todas as possíveis $t - u$ vezes de quebra não profunda, com $\nu_j = [-\log d_{k_j}]$. Como $p \geq \rho_0$ e $\nu_j \geq 0$ concluímos que o último fator exponencial é menor que 1 e prova-se o enunciado. \square

Lema 5.4.2. Para qualquer $z > \beta$ temos que $\int e^{z\mathcal{L}_n^\delta(x)} dx \leq e^{\theta(\delta)n}$ onde $\theta(\delta)$ é tal que $\theta(\delta) \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$.

Demonstração. Por definição,

$$\begin{aligned} \int e^{z\mathcal{L}_n^\delta(x)} dx &= \sum_{\omega \in \mathcal{P}_n} e^{z\mathcal{L}_n^\delta(\omega)} Leb(\omega) \leq \sum_{\substack{\omega_0 \in \mathcal{P}_0 \\ D\sigma^n Leb(\omega_0) \leq 1}} Leb(\omega_0) + \\ &+ \sum_{0 < u \leq t < n} \sum_{\substack{(k_i, p_i) \\ i=1, \dots, u}} e^{z\mathcal{L}_n^\delta(\omega)} Leb(A_{(k_1, p_1), \dots, (k_u, p_u)}^{u, t}(n)), \end{aligned}$$

onde estamos considerando todas possíveis combinações de profundidades de quebra e de quebras profundas entre todos os tempos de quebra, para todos os elementos de \mathcal{P}_n na segunda soma. Podemos estimar a primeira soma como segue

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\omega_0 \\ D\sigma^n|\omega| \leq 1}} \text{Leb}(\omega_0) &= \sum_{\substack{D\sigma^n|\omega_0| \leq 1 \\ d_k\sigma^{n/2} < 1}} \text{Leb}(\omega_0) + \sum_{\substack{D\sigma^n|\omega_0| \leq 1 \\ d_k\sigma^{n/2} \geq 1}} \text{Leb}(\omega_0) \\ &\leq \sum_{p > \log(D(e-1)\sigma^{n/2})} e^{-p} \leq e^{-cn}. \end{aligned}$$

Como \mathcal{D} é finito não acontece $d_{k\sigma^{n/2}} < 1$ para n grande. Então limitamos o segundo termo da soma principal. Considerando o Lema (5.4.1) e sabendo que

$$\mathcal{L}_n^\delta(\omega) = \sum_{\substack{(k,p) \in \mathcal{D}_n(\omega) \\ d_k e^{-p} < \delta}} -\log(d_k e^{-p}),$$

obtemos a seguinte cota para a segunda soma

$$\begin{aligned} &\sum_{0 < u \leq t < n} \sum_{\substack{(k_i, p_i) \\ i=1, \dots, u}} e^{z\mathcal{L}_n^\delta(\omega)} \text{Leb}(A_{(k_1, p_1), \dots, (k_u, p_u)}^{u, t}(n)) \\ &\leq \sum_{0 < u \leq t < n} \sum_{\substack{(k_i, p_i) \\ i=1, \dots, u}} \exp\left(z \sum_{d_k e^{-p} < \delta} -\log(d_k e^{-p})\right) \cdot \binom{t}{u} \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^u (q_i + \rho_i)\right) \\ &\leq \sum_{0 < u \leq t < n} \sum_{\substack{(k_i, p_i) \\ i=1, \dots, u}} \binom{t}{u} \exp\left(-(z + \beta) \sum_{i=1}^u (q_i + \rho_i)\right) \\ &\leq \sum_{0 < u \leq t < n} \sum_{h > u\ell(\delta)} \binom{t}{u} u L(h, u) e^{-(\beta+z)h}, \end{aligned}$$

onde $h = \sum_i (q_i + \rho_i)$, $\ell(\delta)$ é um inteiro tal que cada par (k, p) satisfazendo $d_k e^{-p} < \delta$ também satisfaz $k + p > \ell(\delta)$, e

$$L(h, u) = \#\{((q_i, \rho_i))_{i=1, \dots, u} \in \mathbb{N}_0^{2u} : \sum_{i=1}^u (q_i + \rho_i) = h \text{ com } \rho_i \geq \rho_o\}.$$

Além disso, o número u limita a quantidade de distintos d_{k_i} com o mesmo valor q_i ao longo de n iterados da órbita dos pontos. Observe que

$$L(h, u) \leq \#\{(h_i)_i \in \mathbb{N}_0^{2u} : \sum_{i=0}^{2u} h_i = h\} = \binom{h + 2u - 1}{2u - 1}.$$

Aplicando a Fórmula de Stirling ficamos com

$$L(h, u) \leq \left(e^{1/h} \left(1 + \frac{2u-1}{h} \right) \left(1 + \frac{h}{2u-1} \right)^{\frac{2u-1}{h}} \right)^h \leq e^{\beta h} \leq e^{zh},$$

onde $0 < c < 1$ é uma constante independente das outras variáveis, e usamos que $h \geq u\rho_0$, a definição de ρ_0 e por último que $z > \beta$.

Juntando todas as cotas obtidas temos que

$$\begin{aligned} \sum_{0 < u \leq t < n} \sum_{h > u\ell(\delta)} \binom{t}{u} u L(h, u) e^{-(\beta+z)h} &\leq \sum_{0 < u \leq t < n} \sum_{h > u\ell(\delta)} \binom{t}{u} u e^{-\beta h} \\ &\leq \sum_{u=0}^n n \binom{n-1}{u} u e^{-\beta u\ell(\delta)/2} \cdot \frac{e^{-\beta u\ell(\delta)/2}}{1 - e^{-\beta}} \\ &\leq \sum_{u=0}^n \binom{n}{u} c \frac{(e^{-\beta\ell(\delta)/2})^u}{1 - e^{-\beta}} \\ &\leq \left(1 + \frac{c}{1 - e^{-\beta}} e^{-\beta\ell(\delta)/2} \right)^n, \end{aligned}$$

onde $c > 0$ é uma constante que limita $\{u e^{-\beta\ell(\delta)/2}\}_{u \geq 0}$ e não depende de $\ell(\delta)$.

Finalmente, como $\ell(\delta)$ cresce sem limite quando $\delta \rightarrow 0$, o enunciado do lema segue apenas aumentando o valor de c e levar em conta a primeira estimativa. \square

5.5 Medida dos pontos com recorrência ruim

Neste momento estamos com todas as ferramentas para deduzir que f satisfaz a propriedade de recorrência exponencialmente lenta ao conjunto singular \mathcal{D} . Iremos usar a desigualdade de Tchebishev da seguinte forma: dados $\epsilon, \delta > 0$ sabemos que existe constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \left\{ x \in M : -\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \text{dist}_\delta(f^j(x), \mathcal{D}) \geq \epsilon \right\} &\subset \left\{ x \in M : \frac{1}{n} \mathcal{L}_n^\delta(x) \geq \frac{\epsilon}{C} \right\} \\ &= \left\{ x \in M : e^{z\mathcal{L}_n^\delta(x)} \geq e^{n\epsilon/C} \right\} \end{aligned}$$

portanto,

$$\text{Leb} \left\{ x \in M : -\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \text{dist}_\delta(f^j(x), \mathcal{D}) \geq \epsilon \right\} \leq e^{-n\epsilon/C} \int e^{z\mathcal{L}_n^\delta(x)} d\text{Leb} = e^{-n(\epsilon/C - \theta(\delta))}$$

que pode ser tomado exponencialmente pequeno, escolhendo $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $\epsilon/C > \theta(\delta)$. Isto conclui a prova do Teorema 5.1.1.

Capítulo 6

Perspectivas futuras

Indicamos aqui alguns possíveis desenvolvimentos futuros dentro da linha dos resultados deste trabalho.

6.1 Extensão para classe de sumidouros singulares em dimensão mais alta

Metzger e Morales [41] introduziram o conceito mais geral de hiperbolicidade singular (que são modelos definidos em variedades tridimensionais) chamado de hiperbolicidade seccional que inclui sistemas definidos em variedades de dimensão finita arbitrária. Precisamente, dizemos que um conjunto compacto Λ invariante por um fluxo gerado por um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ em uma variedade compacta M de dimensão finita é seccional expansor se o fibrado tangente sobre Λ admite uma decomposição $T_\Lambda M = E^s \oplus E^c$, DX^t -invariante e dominada tal que existem $C, \lambda > 0$ satisfazendo para cada $x \in \Lambda$ e $t > 0$ que:

- E^s é uniformemente contraído, isto é, $\|DX^t|_{E^s}\| \leq Ce^{-\lambda t}$ e;
- E^c é seccionalmente expandido, ou seja, para cada subespaço bidimensional F_x contido em E_x^c temos que $|\det(DX^t|_{F_x})| \geq Ce^{\lambda t}$.

Então é natural a seguinte pergunta,

Questão. *Valem os grandes desvios para sumidouros hiperbólicos-seccionais?*

Sobre a equivalência entre estado de equilíbrio para $\log |\det DX_1|$, estado de cu-Gibbs e medida física num sumidouro hiperbólico seccional, a única coisa que falta para reargumentar como na seção 1.5 para o caso de um sumidouro hiperbólico-seccional é saber que sempre temos número finito de medidas físicas/SRB também neste contexto. Sabendo isso, a equivalência deve seguir pelo mesmo argumento.

6.2 Sumidouros para campos com menos regularidade

Reduzindo a diferenciabilidade, parece natural levantar

Questão. *Se o sumidouro hiperbólico singular for de um campo de classe apenas C^1 numa variedade tridimensional, que podemos dizer sobre os grandes desvios para a medida de Lebesgue?*

Observamos que, apesar de a nossa prova da cota superior de grandes desvios usar medidas físicas do sumidouro, o enunciado de grandes desvios não precisa de nenhuma medida invariante.

6.3 Extensão do resultado unidimensional

Como exemplo de transformação nas condições do Teorema C com infinitos ramos, tome uma transformação de Lorenz topologicamente exata no intervalo $[f(0^+), f(0^-)]$ estritamente contido em $I = [-1/2, 1/2]$ e completamos seu gráfico como função de I em I com pedaços afins entre pontos com ordenada igual a algum ponto da pré-órbita da única singularidade na origem. Podemos proceder de maneira que a inclinação destes ramos afins seja superior a 2 e os respectivos domínios de monotonia/continuidade $I_j, j \in \mathbb{Z}$ formem uma cobertura enumerável de I , com a exceção de um conjunto enumerável de pontos (os bordos destes intervalos). Assumimos também que os extremos a, b dos intervalos de ambos os lados da singularidade na origem são também pré-imagens da singularidade.

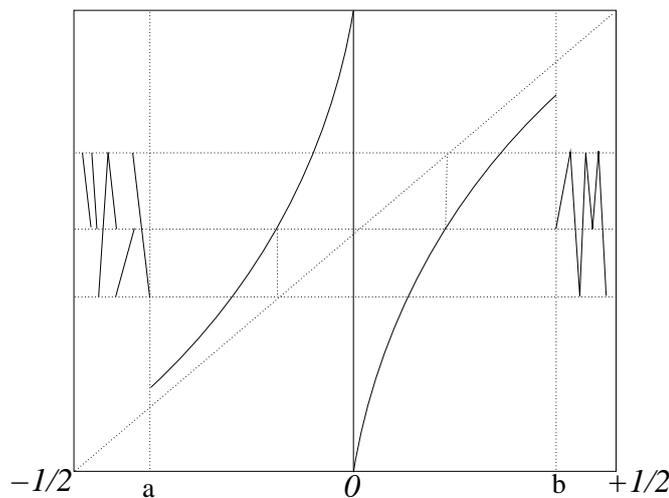


Figura 6.3.1:

Verifica-se facilmente que a singularidade e as descontinuidades nos bordos dos

intervalos de monotonia são não degeneradas; veja Seção 4 do Capítulo 1 para a definição de conjunto singular/crítico não degenerado e também subseção 7.3.11.1 de [16].

De fato, a singularidade na origem é uma singularidade de tipo Lorenz, cujo caráter não degenerado é bem conhecido: na seção 3 do Capítulo 2 se mostrou que $|Df|_{I_j}|$ no caso singular tem a forma x^β para algum $\beta \in (0, 1)$; nos demais casos $|Df|_{I_j}|$ é limitada superiormente e inferiormente afastada de zero, ou mais restritivamente, no caso afim $Df|_{I_j}$ é uma constante.

Por construção, os pontos de descontinuidade são enviados na singularidade em número finito de iterados. Temos assim satisfeitas as hipóteses do Teorema C. Porém, temos apenas uma singularidade.

Questão. *Podemos obter aproximação exponencialmente lenta com uma infinidade de singularidades?*

Considerando os sumidouros hiperbólicos-seccionais em dimensão arbitrária, seria interessante também responder a seguinte pergunta,

Questão. *Podemos obter aproximação exponencialmente lenta a um conjunto singular ou descontínuo ou crítico para transformações não uniformemente expansoras em variedades de dimensão mais alta?*

Faz parte desta questão encontrar condições suficientes gerais para definir classes amplas de transformações não uniformemente expansoras multidimensionais em que se possa provar aproximação exponencialmente lenta ao conjunto não regular.

Referências Bibliográficas

- [1] ABRAHAM, R. H. ; ROBBIN, J. : Transversal mappings and flows. In: *An appendix by Al Kelley* (1967)
- [2] ALVES, J. ; ARAÚJO, V. ; PACÍFICO, M. ; PINHEIRO, V. : On the volume of singular-hyperbolic sets. In: *Dynamical Systems* 22 (2007), Nr. 3, S. 249–267
- [3] ALVES, J. F. ; ARAÚJO, V. : Random perturbations of non-uniformly expanding maps. In: *Astérisque* 286 (2003), S. 25–62
- [4] ALVES, J. F. ; ARAÚJO, V. : Hyperbolic times: frequency versus integrability. In: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 24 (2004), Nr. 02, S. 329–346
- [5] ALVES, J. F. ; BONATTI, C. ; VIANA, M. : SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding. In: *Inventiones mathematicae* 140 (2000), Nr. 2, S. 351–398
- [6] ALVES, J. F. ; FREITAS, J. M. ; LUZZATTO, S. ; VAIENTI, S. : From rates of mixing to recurrence times via large deviations. In: *Advances in Mathematics* 228 (2011), Nr. 2, S. 1203–1236
- [7] ALVES, J. F. ; LUZZATTO, S. ; PINHEIRO, V. : Markov structures and decay of correlations for non-uniformly expanding dynamical systems. In: *Annales de l'IHP Analyse non linéaire* Bd. 22, 2005, S. 817–839
- [8] ALVES, J. F.: SRB measures for non-hyperbolic systems with multidimensional expansion. In: *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure* Bd. 33, 2000, S. 1–32
- [9] ANOSOV, D. V.: Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature. In: *Trudy Matematicheskogo Instituta Imeni VA Steklova* 90 (1967), S. 3–210
- [10] ARAÚJO, V. : Smoothness of the stable foliation versus decay of correlations for Lorenz-like attractors. In: *ESI Programme à Mixing Flows and Averaging Methods* (2016)

- [11] ARAÚJO, V. ; MELBOURNE, I. : Existence and smoothness of the stable foliation for sectional hyperbolic attractors. In: *arXiv preprint arXiv:1604.06924* (2016)
- [12] ARAÚJO, V. ; PACÍFICO, M. : Large deviations for non-uniformly expanding maps. In: *Journal of statistical physics* 125 (2006), Nr. 2, S. 411–453
- [13] ARAÚJO, V. : Large deviations bound for semiflows over a non-uniformly expanding base. In: *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series* 38 (2007), Nr. 3, S. 335–376
- [14] ARAÚJO, V. ; GALATOLO, S. ; PACÍFICO, M. J.: Decay of correlations for maps with uniformly contracting fibers and logarithm law for singular hyperbolic attractors. In: *Mathematische Zeitschrift* 276 (2014), Nr. 3-4, S. 1001–1048
- [15] ARAÚJO, V. ; PACÍFICO, M. ; PUJALS, E. ; VIANA, M. : Singular-hyperbolic attractors are chaotic. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 361 (2009), Nr. 5, S. 2431–2485
- [16] ARAÚJO, V. ; PACÍFICO, M. J.: *Three-dimensional flows*. Bd. 53. Springer Science & Business Media, 2010
- [17] ARAÚJO, V. ; SALGADO, L. : Infinitesimal Lyapunov functions for singular flows. In: *Mathematische Zeitschrift* 275 (2013), Nr. 3-4, S. 863–897
- [18] ARBIETO, A. ; MATHEUS, C. : Fast decay of correlations of equilibrium states of open classes of non-uniformly expanding maps and potentials. In: *Preprint <http://arxiv.org/abs/math.DS/0603629>* (2006)
- [19] ARROYO, A. ; PUJALS, E. R.: Dynamical properties of singular-hyperbolic attractors. In: *Discrete Contin. Dyn. Syst* 19 (2007), Nr. 1, S. 67–87
- [20] BARRAGÁN, A. M. L. ; SÁNCHEZ, H. M.: Sectional Anosov Flows: Existence of Venice Masks with Two Singularities. In: *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series* (2016), S. 1–18
- [21] BAUTISTA, S. ; MORALES, C. ; PACIFICO, M. : On the intersection of homoclinic classes on singular-hyperbolic sets. In: *Discrete and continuous Dynamical Systems* 19 (2007), Nr. 4, S. 761
- [22] BAUTISTA, S. ; MORALES, C. : A sectional-Anosov connecting lemma. In: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 30 (2010), Nr. 02, S. 339–359
- [23] BENEDICKS, M. ; CARLESON, L. : On iterations of $1 - ax^2$ on $(-1, 1)$. In: *Annals of Mathematics* 122 (1985), Nr. 1, S. 1–25

- [24] BENEDICKS, M. ; CARLESON, L. : The dynamics of the Hénon map. In: *Annals of Mathematics* 133 (1991), Nr. 1, S. 73–169
- [25] BENEDICKS, M. ; YOUNG, L.-S. : Absolutely continuous invariant measures and random perturbations for certain one-dimensional maps. In: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 12 (1992), Nr. 01, S. 13–37
- [26] BENEDICKS, M. ; YOUNG, L.-S. : Sinai-Bowen-Ruelle measures for certain Hénon maps. In: *Invent. Math.* 112 (1993), S. 541–576
- [27] BENEDICKS, M. ; YOUNG, L.-S. : Markov extensions and decay of correlations for certain Hénon maps. In: *Astérisque* 261 (2000), S. 13–56
- [28] BONATTI, C. ; DÍAZ, L. J. ; VIANA, M. : *Dynamics beyond uniform hyperbolicity: A global geometric and probabilistic perspective*. Bd. 102. Springer Science & Business Media, 2006
- [29] BOWEN, R. : *Lecture Notes in Mathematics*. Bd. 470: *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*. Springer, 1975
- [30] BOWEN, R. ; RUELLE, D. : The ergodic theory of Axiom A flows. In: *Inventiones Mathematicae* 29 (1975), S. 181–202
- [31] BRIN, M. I. ; PESIN, J. B.: Partially hyperbolic dynamical systems. In: *Mathematics of the USSR-Izvestiya* 8 (1974), Nr. 1, S. 177
- [32] COLLET, P. ; TRESSER, C. : *Ergodic theory and continuity of the Bowen-Ruelle measure for geometrical Lorenz flows*. Bd. 20. 1988. – 33–48 S.
- [33] ELLIS, R. S.: *Entropy, large deviations, and statistical mechanics*. Springer Verlag, Berlin, 2006 (Classics in Mathematics)
- [34] FREITAS, J. M.: Continuity of SRB measure and entropy for Benedicks–Carleson quadratic maps. In: *Nonlinearity* 18 (2005), Nr. 2, S. 831
- [35] GOUËZEL, S. : Decay of correlations for nonuniformly expanding systems. In: *Bulletin de la Société mathématique de France* 134 (2006), Nr. 1, S. 1–31
- [36] GOURMELON, N. : Adapted metrics for dominated splittings. In: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 27 (2007), Nr. 06, S. 1839–1849
- [37] HARTMAN, P. : *Ordinary differential equations*. 2002 (Classics in Applied Mathematics)

- [38] HIRSCH, M. ; PUGH, C. ; SHUB, M. : *Lecture Notes in Mathematics*. Bd. 583: *Invariant Manifolds*. Springer, Berlin, 1977
- [39] KELLER, G. : Generalized bounded variation and applications to piecewise monotonic transformations. In: *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* 69 (1985), Nr. 3, S. 461–478
- [40] KIFER, Y. : Large deviations in dynamical systems and stochastic processes. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 321 (1990), Nr. 2, S. 505–524
- [41] METZGER, R. J. ; MORALES, C. A.: The Rovella attractor is a homoclinic class. In: *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society* 37 (2006), Nr. 1, S. 89–101
- [42] MORALES, C. A.: Examples of singular-hyperbolic attracting sets. In: *Dynamical Systems* 22 (2007), Nr. 3, S. 339–349
- [43] MORALES, C. A. ; PACÍFICO, M. J. ; PUJALS, E. R.: Robust transitive singular sets for 3-flows are partially hyperbolic attractors or repellers. In: *Annals of mathematics* (2004), S. 375–432
- [44] PESIN, Y. B. ; SINAI, Y. G.: Gibbs measures for partially hyperbolic attractors. In: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 2 (1982), Nr. 3-4, S. 417–438
- [45] PINHEIRO, V. : Expanding measures. In: *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis* 28 (2011), Nr. 6, S. 889–939
- [46] PUGH, C. ; SHUB, M. : Ergodicity of Anosov actions. In: *Inventiones mathematicae* 15 (1972), Nr. 1, S. 1–23
- [47] RUELLE, D. : A measure associated with axiom-A attractors. In: *American Journal of Mathematics* (1976), S. 619–654
- [48] RUELLE, D. : *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Bd. 5: *Thermodynamic formalism*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass, 1978
- [49] RUELLE, D. : The thermodynamic formalism for expanding maps. In: *Communications in Mathematical Physics* 125 (1989), Nr. 2, S. 239–262
- [50] RUELLE, D. : *Thermodynamic formalism: the mathematical structure of equilibrium statistical mechanics*. Cambridge University Press, 2004
- [51] SATAEV, E. A.: Some properties of singular hyperbolic attractors. In: *Sbornik: Mathematics* 200 (2009), Nr. 1, S. 35

- [52] SHUB, M. : *Global stability of dynamical systems*. Springer Verlag, 1987
- [53] SINAI, Y. G.: Gibbs measures in ergodic theory. In: *Russian Mathematical Surveys* 27 (1972), Nr. 4, S. 21–70
- [54] YOUNG, L.-S. : Large deviations in dynamical systems. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 318 (1990), Nr. 2, S. 525–543
- [55] YOUNG, L.-S. : Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity. In: *Annals of Mathematics* 147 (1998), Nr. 3, S. 585–650

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA

CEP: 40170-110

<<http://www.pgmat.ufba.br>>