Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matematica - IM
Sociedade Brasileira de Matematica - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Números Complexos: Interpretação geométrica e aplicações

Valdencastro Pereira Vilas Boas Junior

Salvador - Bahia
11 de abril de 2015

Valdencastro Pereira Vilas Boas Junior

Números Complexos: Interpretação geométrica e aplicações

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação profissional em Matemática PROFMAT-UFBA do Instituto de Matematica e Sociedade Brasileira de Matematica como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Universidade Federal da Bahia - UFBA

Instituto de Matematica - IM

Sociedade Brasileira de Matematica - SBM

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Prof. Dr. Evandro Carlos Ferreira dos Santos

Brasil

2014, v-1

Valdencastro Pereira Vilas Boas Junior
Números Complexos: Interpretação geométrica e aplicações/ Valdencastro Pereira Vilas Boas Junior. – Brasil, 2014, v-1-
58 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Evandro Carlos Ferreira dos Santos

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matematica - IM
Sociedade Brasileira de Matematica - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2014, v-1.

1. Números Complexos. 2. Ensino. I. Prof. Dr. Evandro Carlos Ferreira dos Santos II. Universidade Federal da Bahia - UFBA. III. Instituto de Matemática. IV. Números Complexos: Interpretação geométrica e aplicações

CDU 02:141:005.7

Valdencastro Pereira Vilas Boas Junior

Números Complexos: Interpretação geométrica e aplicações

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação profissional em Matemática PROFMAT-UFBA do Instituto de Matematica e Sociedade Brasileira de Matematica como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Trabalho aprovado. Brasil, 26 de setembro de 2014:

Prof. Dr. Evandro Carlos Ferreira dos Santos
Orientador

Prof. Dr.Vinícius Moreira Mello
UFBA
Membro Interno

Prof. Dr. Antônio Teófilo Ataíde do Nascimento
Membro Externo

Brasil

2015

Dedico este trabalho a todos os brasileiros, que ajudam a sustentar a universidade pública. Principalmente aqueles que nunca terão a oportunidade de estudar nela.

Agradecimentos

À minha família pelo apoio incondicional em todas as minhas escolhas, caminhos e descaminhos. À minha Sophia que abdicou, mesmo que de forma involuntária, vários momentos com o pai. Ao meu orientador, Professor Dr. Evandro Carlos Ferreira, pela liberdade a mim concedida neste caminho. E por fim, e não menos importante, ao Baixo Clero, por fazer meus sábados mais leves, mais descomplicados, e aos amigos Marcos Batista Figueredo e Uálace Melo, por terem sido fundamentais na construção desta dissertação.

Resumo

O trabalho ora proposto tem como objetivo discutir os entraves no estudo dos números complexos no ensino médio, bem como realizar propostas didáticas que visem diminuir o nível de abstração do conteúdo, apresentando interpretações geométricas e aplicações na área técnica de eletricidade, consequência do trabalho realizado pelo proponente no ensino de matemática em cursos técnicos de eletrotécnica de Nível Médio

Palavras-chaves: Número Complexo, Circuitos Elétricos, Ensino.

Abstract

The work proposed here aims to discuss the barriers in the study of complex numbers in high school as well as perform didactic proposals aimed at reducing the level of abstraction of the contents, providing geometric interpretations and applications in the technical area of electricity, a consequence of the work done by tenderer in mathematics teaching in technical courses in electrical engineering Middle Level.

Key-words: Complex Number, Electrical Circuits, Learn..

Lista de ilustrações

Lista de símbolos

ω	Letra grega ômega minúsculo
Ω	Letra grega ômega maiúsculo
θ	Lambda
$\in$	Pertence
$\angle$	ângulo

Sumário

1 Introdução

A modelagem matemática possui duas dimensões que são de interesse neste trabalho, o uso da matemática como ferramental de desenvolvimento em ciências naturais, sociais e suas tecnologias, e como mecanismo catalisador do processo de aprendizagem, que é a modelagem matemática no ensino de ciências e da própria matemática. O objeto deste trabalho envolve as duas dimensões, pois relaciona a modelagem matemática de uma área específica da física/eletrotécnica, feita a partir do conteúdo de Números complexos, que consta na ementa da matemática do ensino médio.

No caso específico a ser tratado neste trabalho, será feita a discussão da modelagem a partir da breve experiência vivida como docente de matemática do Instituto federal de educação, ciência e tecnologia da Bahia- Campus Camaçari, nos curso de eletrotécnica, integrado e subseqüente. Para tanto, o viés didático da discussão se dará na perspectiva de atender ao público de nível médio, com todas as possibilidades e limitações que este público insere ao problema, exigindo da discussão o cuidado necessário para transpô-las.

2 A matemática e o mundo ao seu redor

A matemática vista como linguagem, tanto no seu desenvolvimento enquanto área do conhecimento, quanto em processos didáticos, goza do status de ferramenta capaz de dar credibilidade e até cientificidade a diversas áreas do conhecimento, permitindo coerência lógica estrutural e relativa precisão no tratamento de dados e na predição de resultados; Seja na obtenção de resultados confirmadores em teorias, ou em produções tecnológicas advindas dos conceitos científicos.

No entanto, esta mesma linguagem, no âmbito didático se constrói de tal maneira que os seus símbolos, conceitos e teorias ganham sentido paulatinamente, a partir da relação que a mesma estabelece com o mundo, através da sua inserção como linguagem necessária às ciências naturais, sociais e etc.

Um exemplo de tal aquisição de sentido é a introdução, pouco a pouco, da compreensão dos conjuntos numéricos, pelos estudantes, a partir das suas capacidades de abstração e das possibilidades de aplicação, e de modelagem de problemas reais com o arcabouço matemático que eles possuem.

Nos primeiros anos do ensino fundamental os problemas matemáticos de modelagem da realidade, cabíveis ao nível de cognição e capacidade de abstração do estudante, em geral, permitem a compreensão de não mais que os números naturais, resumindo tal modelagem a problemas de contagem de objetos, nas mais diversas situações, possibilitando adições, multiplicações e algumas subtrações. Neste nível de aprendizagem matemática, é possível identificar que algumas manipulações não têm sentido ainda, dada a inviabilidade de se tratar casos de problemas concretos que se enquadrem a tais simbologias e conceitos. Um exemplo concreto é o da impossibilidade, até esse momento, de se realizar subtrações onde o minuendo é menor que o subtraendo. Tal limitação se dá pela incapacidade de se conceber significado real à ideia de número negativo.

A escolha metodológica historicamente feita- introduzir passo a passo os conceitos, seus símbolos, a partir de problemas e modelos da realidade ou de alguma ciência, que deem sentido a tais conceitos- ajuda a elucidar a relação de cada conceito matemático novo e o seu sentido. Sentido este que em geral só se dá a partir do momento em que tal conceito ou símbolo é inserido na modelagem e resolução de algum problema que tenha no mínimo um paralelo com a realidade.

Na mesma lógica em que se introduz a ideia de números negativos, faz-se a construção do conceito de fração, a partir de divisões em situações concretas, reais e palpáveis. E isso se repete a cada conjunto numérico ou conceito matemático novo, como os irracionais, que podem aparecer a partir de construções geométricas.

Na transição para o ensino médio, o estudo da matemática, em geral, apresenta uma descontinuidade metodológica, no que diz respeito ao acréscimo substancial da capacidade de abstração requerida aos estudantes no estudo da mesma. Tal descontinuidade se faz presente por dois motivos principais. O primeiro é o próprio nível de cognição e abstração demandados pelos conceitos ora apresentados, e o segundo diz respeito à incapacidade, por parte dos docentes, de estabelecer modelos, aplicações, paralelos e analogias com a realidade para um número considerável de temas abordados neste nível.

Entre os conceitos matemáticos do ensino médio cujas abordagens clássicas pecam por negligenciar a necessidade de se buscar na modelagem da realidade o elemento de concretude que poderia dar sentido ao conceito, que garantiria assim a compreensão do mesmo para além de meras operações repetitivas, abstratas e sem objetivos, é o conceito de Números complexos. Talvez por isso a compreensão de tal conceito seja tão limitada entre os estudantes em geral, e tão evitada, tendo sua posição relegada a apêndice no último ano do ensino médio, podendo ser suprimido em muitos casos.

3 O estudo dos Números complexos

Assim como o conjunto dos números inteiros, ou dos números irracionais, cuja abordagem é a da negação da existência até que seja possível a sua modelagem a partir de situações concretas, e se tenha assumido a capacidade cognitiva dos estudantes para tal, a introdução dos números complexos segue a mesma forma. Nega-se a existência de números complexos até meados do último ano do ensino médio, quando é introduzido tal conceito. A despeito de se haver consenso ou dissenso na assunção de que os estudantes tenham ou não capacidade cognitiva ou de abstração para se introduzir mais tenramente alguns conceitos e conjuntos numéricos, implicando na negação da existência de tais conceitos, o fato é que esta negação, no caso dos números complexos, repetida inúmeras vezes, por vários anos, desde o início do segundo ciclo do ensino fundamental, ganha status de verdade, e é sedimentada de tal forma que esta deficiência conceitual pode ser levada para níveis maiores, dada a dificuldade para revertê-la. Tal sedimentação dificilmente será quebrada sem uma abordagem modelar que estabeleça uma relação entre o conceito e a realidade, dando assim sentido a um conceito, que sem isso é mera abstração matemática, pertencente a um mundo paralelo e desprovido de sentido e objetivos.

No ensino médio, os números complexos são introduzidos, em geral, a partir da análise da incapacidade de se resolver algumas equações de grau dois, no conjunto dos números reais.

Assim, os números complexos ganham espaço ao serem os responsáveis por permitir que equações como $x^2 + 1 = 0$ passem a ter solução. No entanto, o artifício que torna esta solução possível apenas transfere o problema de uma equação insolúvel para um conceito ininteligível, dado que a solução perpassa pela criação da unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$, cujo significado continua sem sentido e no campo da abstração.

A ideia deste trabalho é trazer uma aplicação dos números complexos na área de física/engenharia, permitindo uma quebra no elevado nível de abstração do conteúdo, e ao mesmo tempo mostrar como este conceito- o de números complexos- permite o estudo de temas de elevada sofisticação e complexidade, de forma simples, já no ensino médio.

Para tanto, ele se divide em três grandes partes. A primeira refere-se à introdução do conceito de Números complexos, com ênfase na sua representação gráfica e nas nuances trazidas por esta interpretação. A segunda estabelece, a partir da visão gráfica e representação via par ordenado, uma correlação entre alguns tipos de funções trigonométricas e os números complexos. Já a terceira parte mostra como a interpretação geométrica pode ter uma aplicação extremamente simplificadora de um conteúdo um tanto quanto sofisticado, podendo, assim, ser trabalhado no ensino médio. Tudo isso, sempre intercalado e acompanhado de intervenções didáticas, atividades dirigidas e resolvidas, a serem realizadas pelos estudantes, com o objetivo de induzir a apreensão dos conceitos a partir da prática.

> Nessa etapa da escolaridade, portanto, a Matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem e com papel integrador importante junto às demais Ciências da Natureza. Enquanto ciência, sua dimensão histórica e sua estreita relação com a sociedade e a cultura em diferentes épocas ampliam e aprofundam o espaço de conhecimentos não só nesta disciplina, mas nas suas inter-relações com outras áreas do saber(BRASIL, 2002)

3.1 Números complexos

Como é sabido, os números complexos são definidos a partir da sua forma algébrica como sendo(IEZZI, 1993)

$$z = a + bi \text{ onde } a \text{ e } b \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

onde:

$$a \text{ é chamado parte real de } z;$$
$$b \text{ é chamado parte imaginária de } z.$$

De tal maneira que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = i$ e assim sucessivamente.

Da definição dada, é possível extrair o fato de que z pode ser determinado de forma única pelo par ordenado (a, b). Consequentemente, é possível expressá-lo graficamente num plano cartesiano como sendo o ponto (a, b).

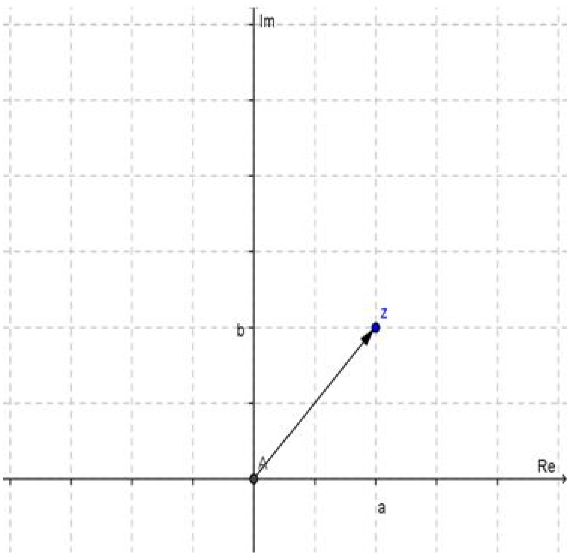

Figura 1 – Representação geométrica do complexo z

Faz-se possível, também, expressar z no sistema de coordenadas polares, onde

$$z = a + bi \tag{3.2}$$

Torna-se $z = \rho(cos\theta + isen\theta)$ onde ρ é o módulo de z e θ é o ângulo ou fase de z.

$$\rho > 0 \text{ e } 0 \leq \theta < 2\pi \tag{3.3}$$

$$a = \rho \cos \theta e b = \rho \operatorname{sen} \theta$$

Desta forma,

$$cos\theta = \frac{a}{b} \text{e} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{3.4}$$

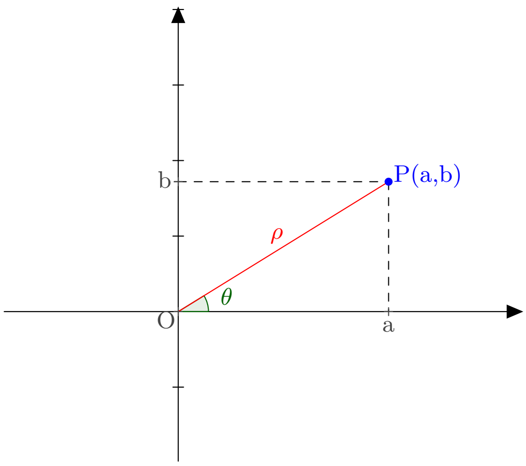

Figura 2 – Representação geométrica do complexo z incluindo parâmetros polares ρ e θ

Fica claro, portanto, que um número complexo z é unicamente determinado por um par ordenado, seja em coordenadas cartesianas (a, b), seja em coordenadas polares (ρ, θ).

3.1.1 Propriedades geométricas dos números complexos

Os números complexos possuem algumas características notáveis. Uma das mais interessantes características é a multiplicação promover rotações do número complexo, como pode ser ilustrado abaixo:

Supondo $z = 1$, a sua representação geométrica é:

O que nos fornece, em coordenadas polares, $\rho = 1$ e $\theta = 0$

Ao multiplicar z por i, obtem-se $z_1 = i$, o que representa, geometricamente, uma rotação de 90ž de z, em torno da origem, no sentido anti-horário. Como visto na figura, posto que $\rho = 1$ mantem-se inalterado, $\theta = 90$ž.

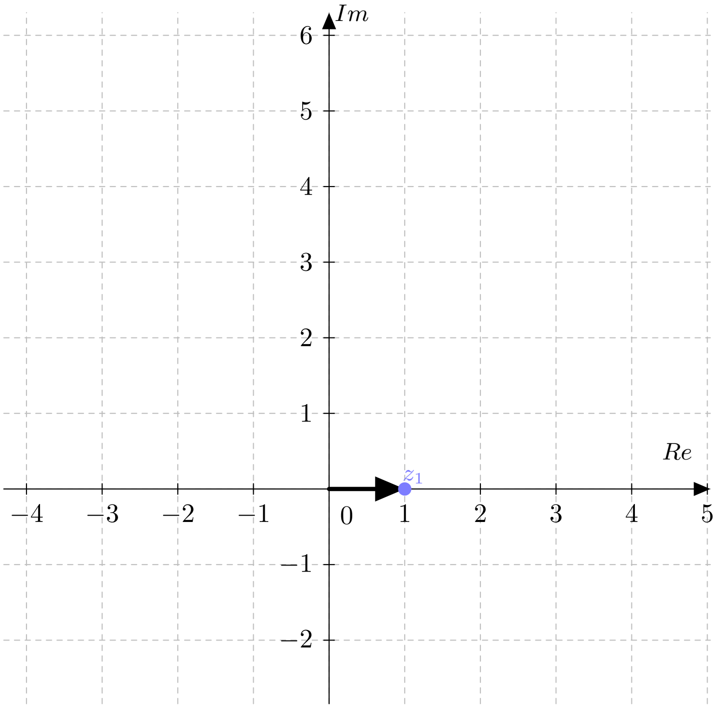

Figura 3 – Representação do complexo $z = 1$

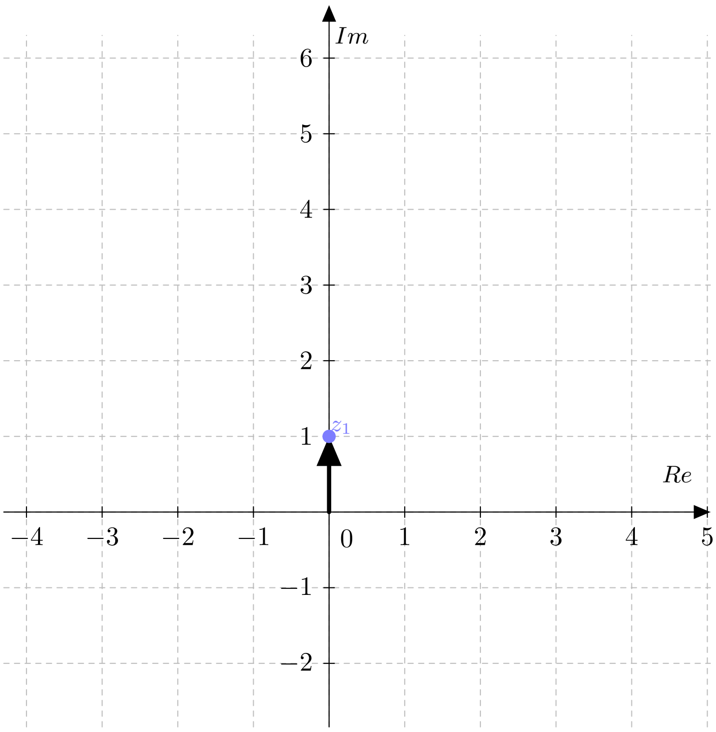

Figura 4 – Representação do complexo $z_1 = i$

Analogamente, multiplicando z_1 por i, obtem-se outra rotação de 90ž, agora de z_1 em relação a origem e novamente no sentido anti-horário. De tal maneira que $z_2 = -1$ tem $\rho = 1$ e $\theta = 180ž$, como se pode ver no gráfico abaixo:

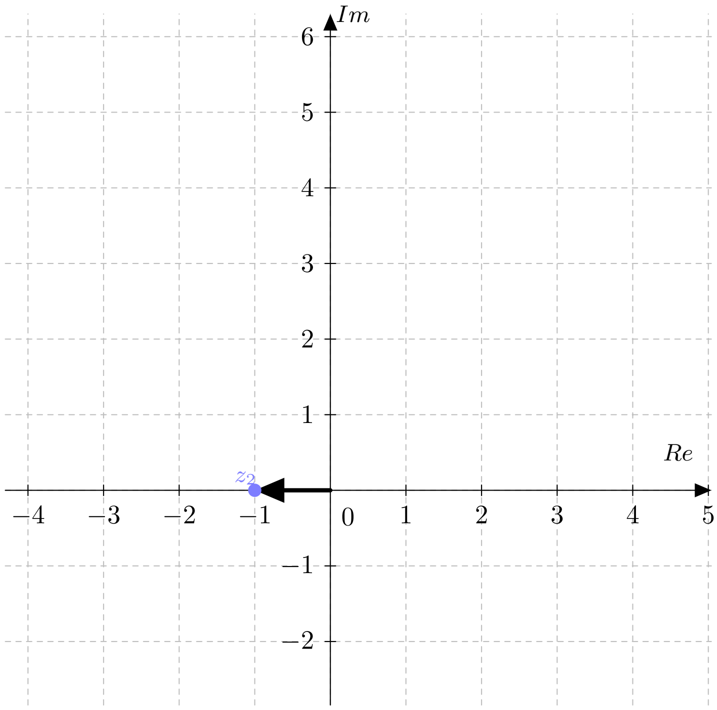

Figura 5 – Representação do complexo $z_2 = -1$

O que se repete para $z_3 = i.z_2 = -i$ e para $z_4 = i.z_3 = 1 = z$, que possuem $\rho = 1$ e $\theta = 270ž$ e $\theta = 360ž$ respectivamente:

De maneira geral, dado um número complexo $z = a + bi$, multiplica-lo por i resulta em $z_2 = -b + ai$, o que representa uma rotação de 90ž no sentido anti-horário. Conforme ilustrado no gráfico abaixo.

Ou seja, é possível interpretar a unidade imaginária como um operador que efetua uma rotação sobre o número z. Dando-se, assim, significado que ultrapassa a abstração algébrica e ganha elementos geométricos.

Para uma visão mais sistêmica da matemática, é importante perceber que esta "nova"definição - O número complexo- não contraria conceitos anteriores e consolidados entre os estudantes(AVILA, 1990). A multiplicação de um número a por -1 equivale a uma rotação de 180ž. Para perceber tal rotação, basta observar o gráfico abaixo. É possível perceber, de imediato, a convergência entre álgebra e geometria, neste caso. Pois $a(-1)(-1) = a$, o que corresponde a duas rotações sucessivas de 180ž, perfazendo 360ž, retornando à posição inicial, como previsto algebricamente.

Para o caso dos números complexos, é possível perceber tal correlação entre álgebra e representação geométrica, e também é perceptível a manutenção da coerência entre

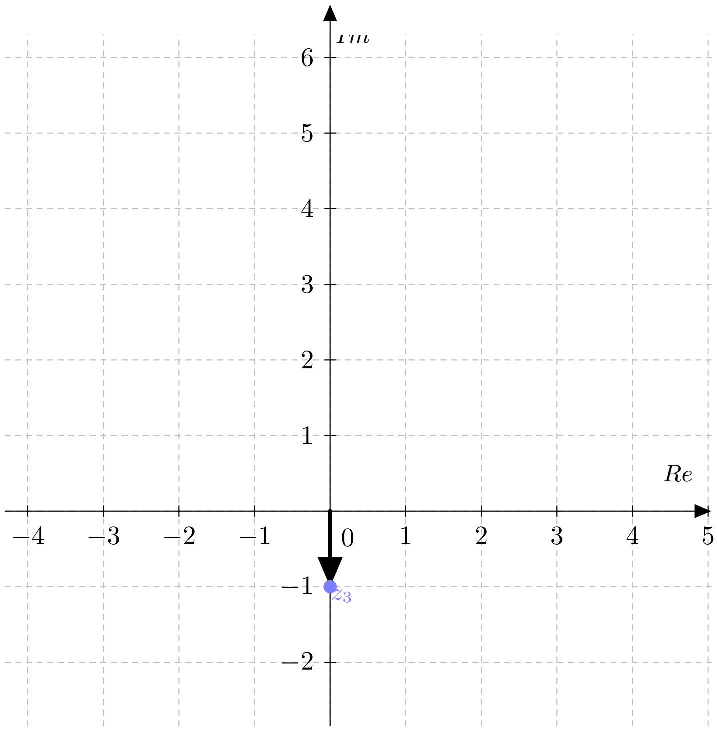

Figura 6 – Representação do complexo $z_3 = -i$

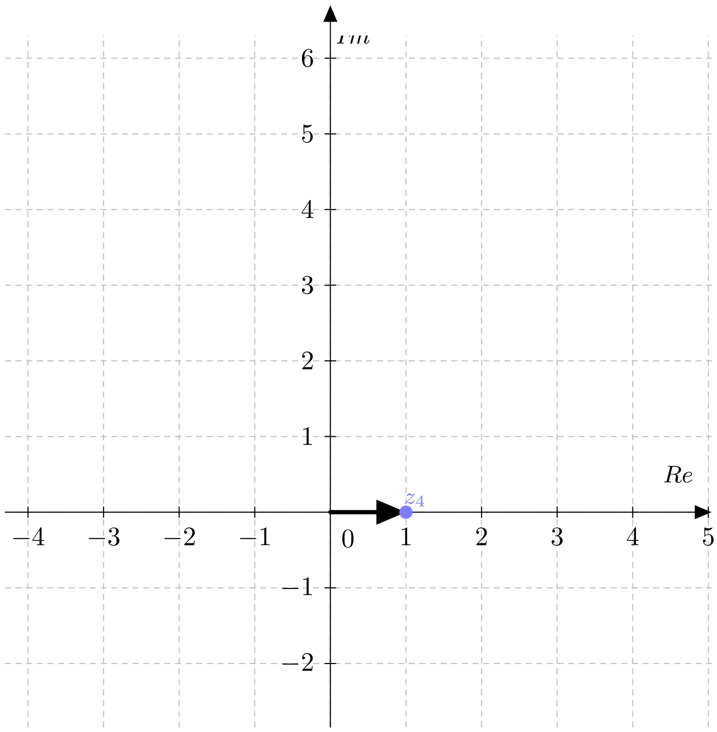

Figura 7 – Representação do complexo $z_4 = 1$

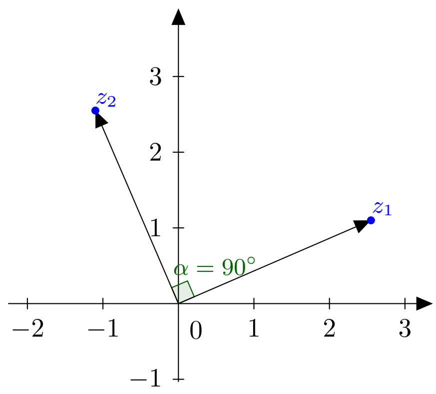

Figura 8 – Representação dos complexos z_1 e z_2 com destaque para o ângulo formado entre eles

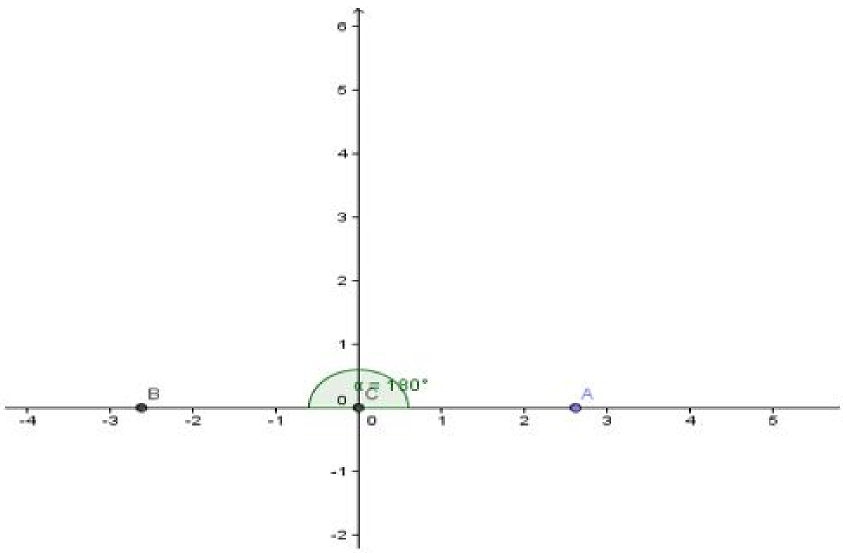

Figura 9 – ângulo formado entre $z = a$ e $z' = -a$

o novo conceito e os números reais, quando fazemos $a.i$, $a.i.i = -a$, $a.i.i.i = -a.i$ e $a.i.i.i.i = a$, que representam rotações de a no sentido anti-horário por ângulos de 90ž, sucessivamente, por quatro vezes, perfazendo 360ž de rotação, voltando, assim, para a sua posição inicial, prevista algebricamente por $a.i.i.i.i = a$, ou seja, $i.i.i.i = 1$

3.1.2 Operações na forma Polar

Como visto anteriormente, existem duas formas básicas de representar os números complexos, a forma algébrica e a forma polar também conhecida como forma trigonométrica. Ao realizar operações é importante escolher a forma mais conveniente de expressar os números de maneira a simplificar ao máximo cada operação. Veremos que multiplicações e divises tornam-se muito mais simples quando realizadas com os números complexos na forma polar.

3.1.2.1 Multiplicação e divisão na forma algébrica

Sejam $z_1 = a+bi$ e $z_2 = c+di$ dois números complexos na forma algébrica, considere a forma trigonométrica de ambos dada por:

$$z_1 = \rho_1 (\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) \tag{3.5}$$

$$z_2 = \rho_2 (\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2) \tag{3.6}$$

Na forma algébrica tem-se:

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (a+bi)(c+di) \\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i \end{aligned} \tag{3.7}$$

e

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \tag{3.8}$$

Na forma polar, tais operações tornam-se:

$$z_1.z_2 = \rho_1.\rho_2 (\cos(\theta_1+\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)) \tag{3.9}$$

e

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\theta_1-\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)) \tag{3.10}$$

Comparando 3.7 com 3.9 e 3.8 com 3.10, percebe-se, que na forma polar as operações de multiplicação e divisão tornam-se sensivelmente mais simples e práticas.

3.1.3 Atividades dirigidas

3.1.3.1 Atividade 1

Realizar graficamente, no Geogebra, as adições no conjunto dos números complexos: Dados $z_1 = 3i$, $z_2 = i$ e $z_3 = 1$

1. $z_1 + z_2$
2. $z_1 - z_2$
3. $z_2 + z_3$
4. $2.z_1$

Solução para atividade 1:

Representação dos números complexos:

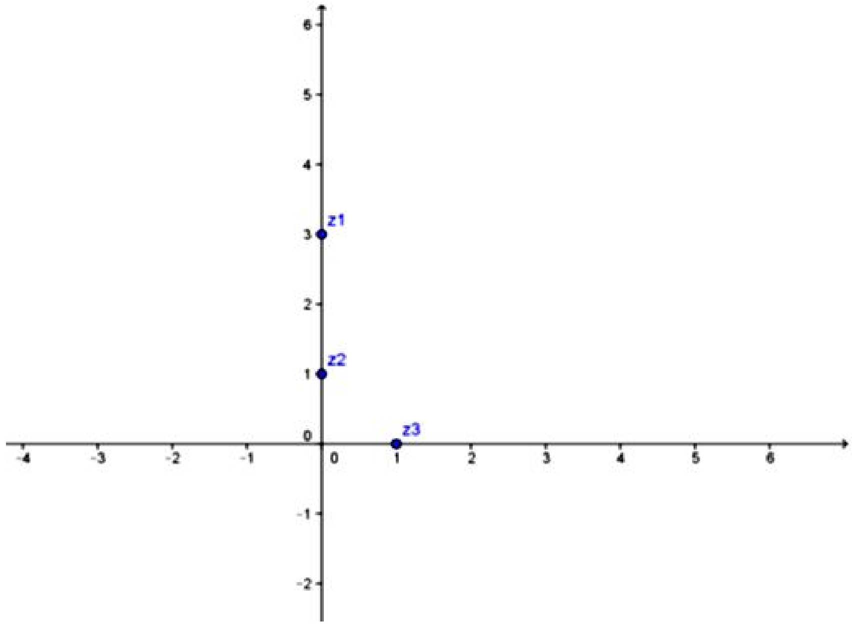

Figura 10 – Representação geométrica dos complexos z_1, z_2 e z_3

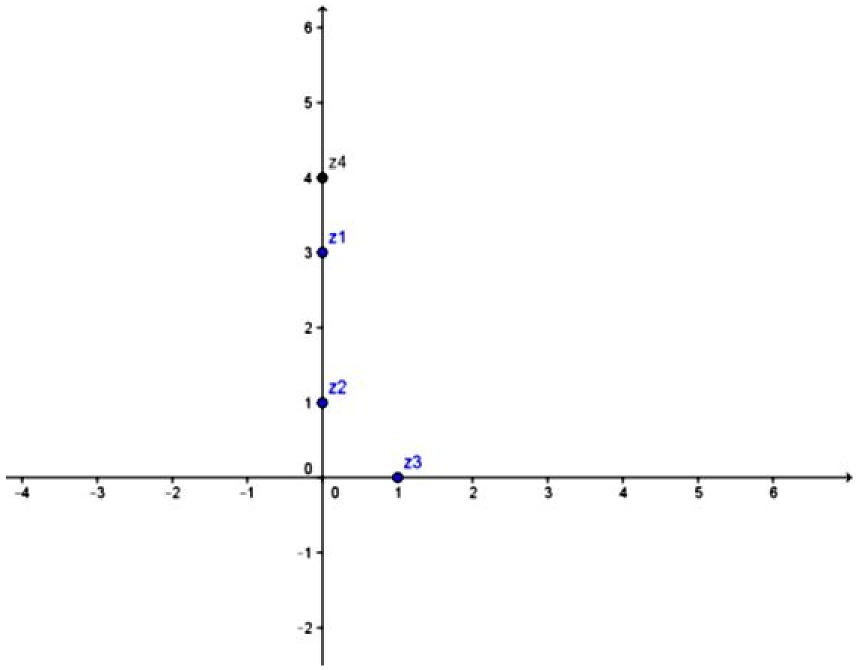

Figura 11 – Questão 1 item (a) - Representação geométrica dos complexos z_1, z_2, z_3 e $z_4 = z_1 + z_2$

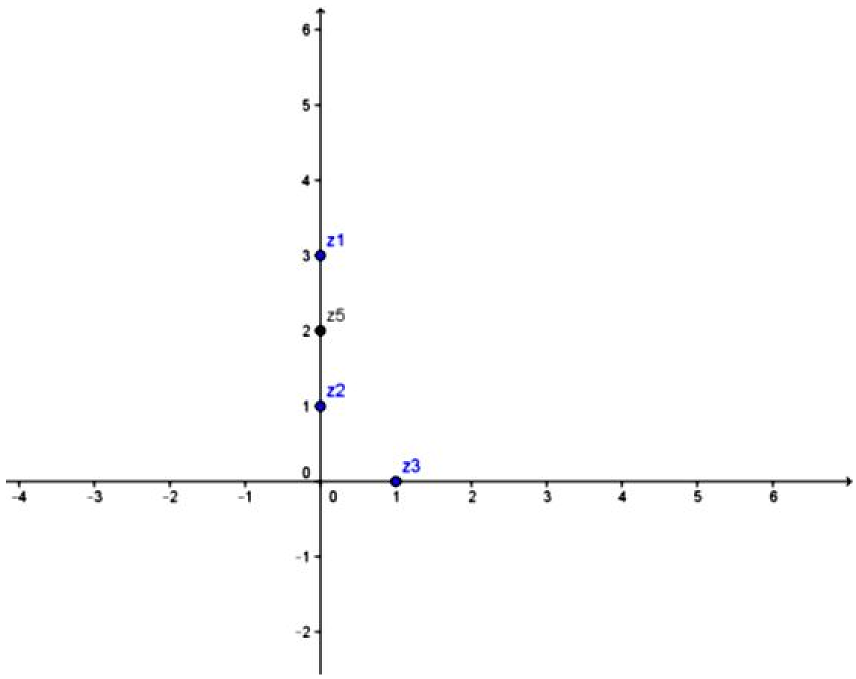

Figura 12 – Questão 1 item (b) -Representação geométrica dos complexos z_1, z_2, z_3 e z_5

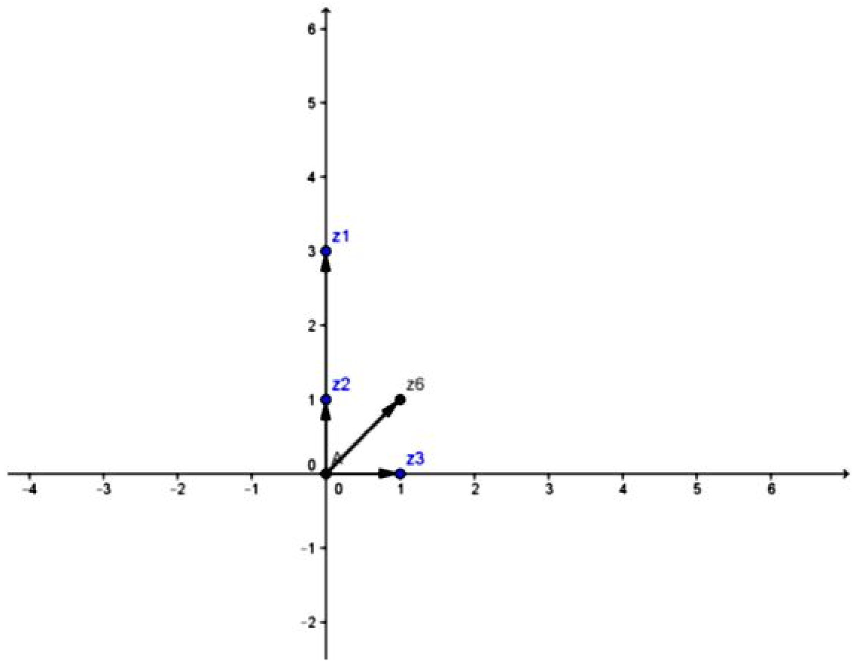

Figura 13 – Questão 1 item (c) -Representação geométrica dos complexos z_1, z_2, z_3 e z_6

Item a: $z_4 = z_1 + z_2$

Item b: $z_5 = z_1 - z_2$

Item c: $z_6 = z_2 + z_3$

Item d: $z_7 = 2.z_1$

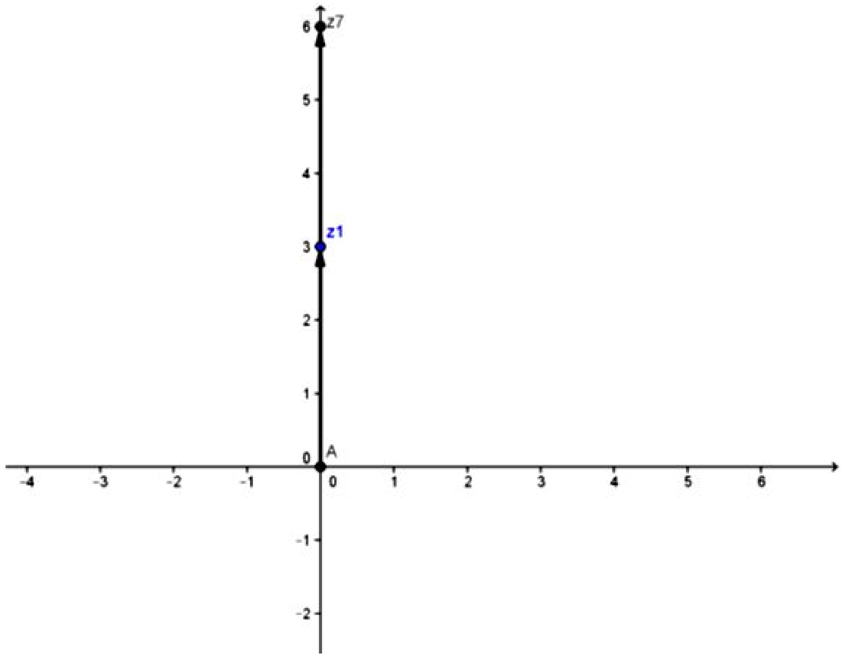

Figura 14 – Questão 1 item (d) -Representação geométrica dos complexos z_1 e z_7

3.1.3.2 Atividade 2

Dado o número $z = 2$, efetue as multiplicações indicadas abaixo, algebricamente e geometricamente:

1. $z_1 = i.z$

2. $z_2 = i.z_1$

3. $z_3 = (-1).z$

Qual a relação entre z_2 e z_3? Os resultados algébricos e geométricos são coerentes entre si?

Solução para atividade 2

Representação de z:

Observa-se que $z_2 = i.z_1 = i.i.z$ o que traz a informação de que o resultado algébrico da multiplicação de um número por i é coerente com a sua interpretação geométrica.

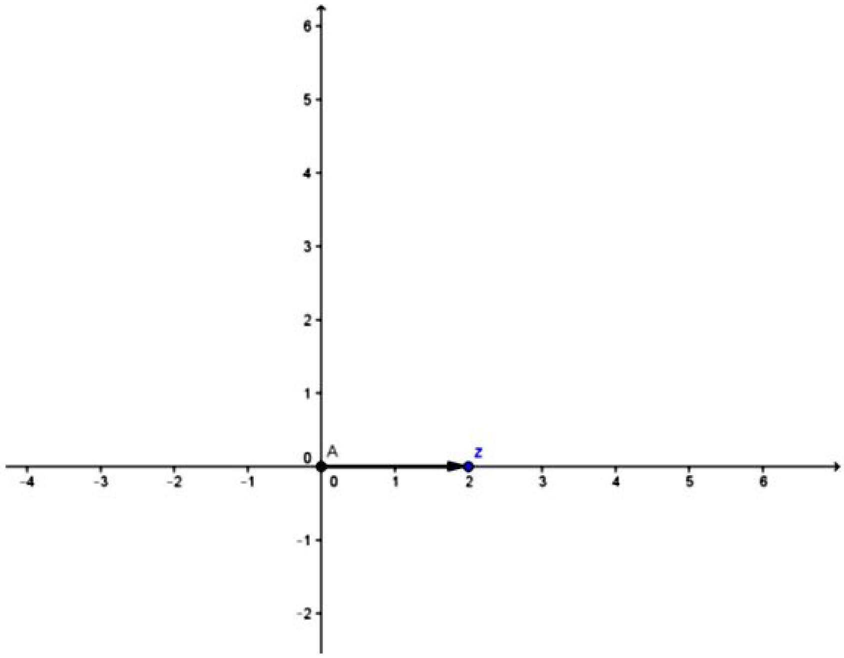

Figura 15 – Questão 2 item (a)

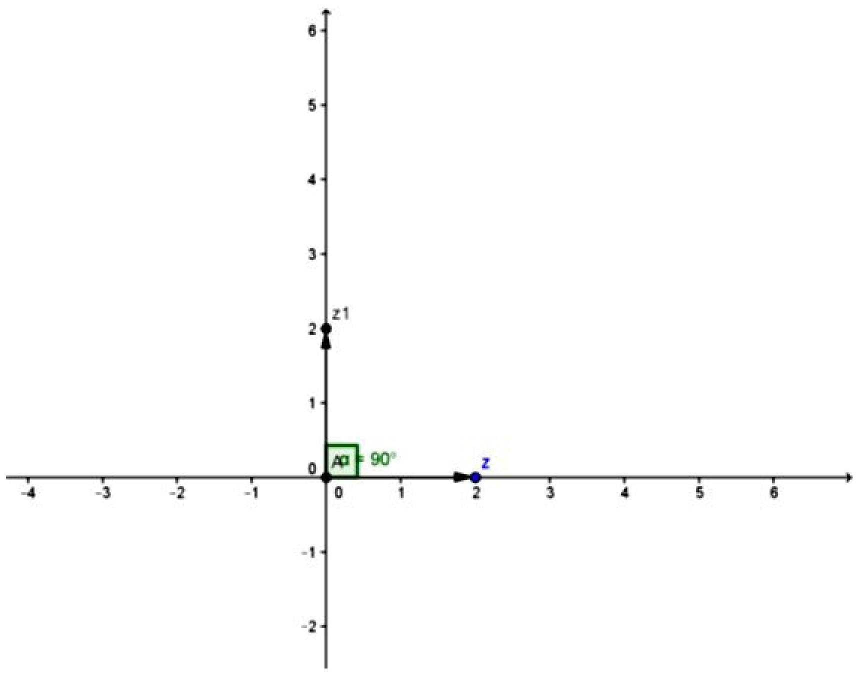

Figura 16 – Questão 2 item (b)

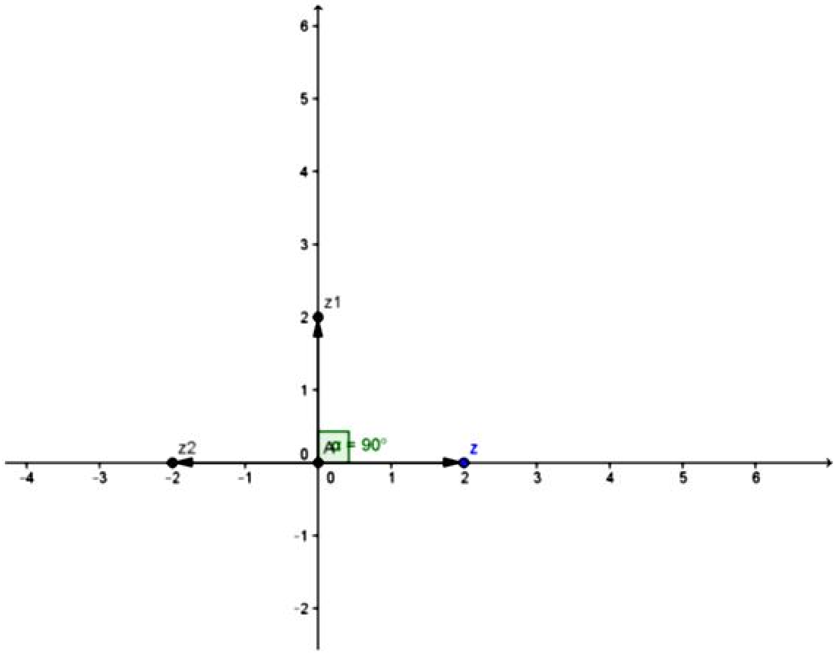

Figura 17 – Questão 2 item (c)

3.1.3.3 Atividade 3

Efetuar, algebricamente, e graficamente com auxílio do Geogebra, as seguintes operações: Dado $z_1 = 3 + 2i$

1. $z_2 = i.z_1$
2. $z_3 = i.z_2$
3. $z_4 = i.z_3$
4. $z_5 = i.z_4$

Solução para atividade 3

Representação de z_1:

item a) $z_2 = i.z_1 = i.(3 + 2i) = -2 + 3$

item b) $z_3 = i.z_2 = i.(-2 + 3i) = -3 - 2i$

item c) $z_4 = i.z_3 = i(-3 - 2i) = 2 - 3i$

item d) $z_5 = i.z_4 = i.(2 - 3i) = 3 + 2i$

4. Na atividade anterior, determine, usando o Geogebra, o ângulo formado entre os números complexos z_1 e z_2.

Observações:

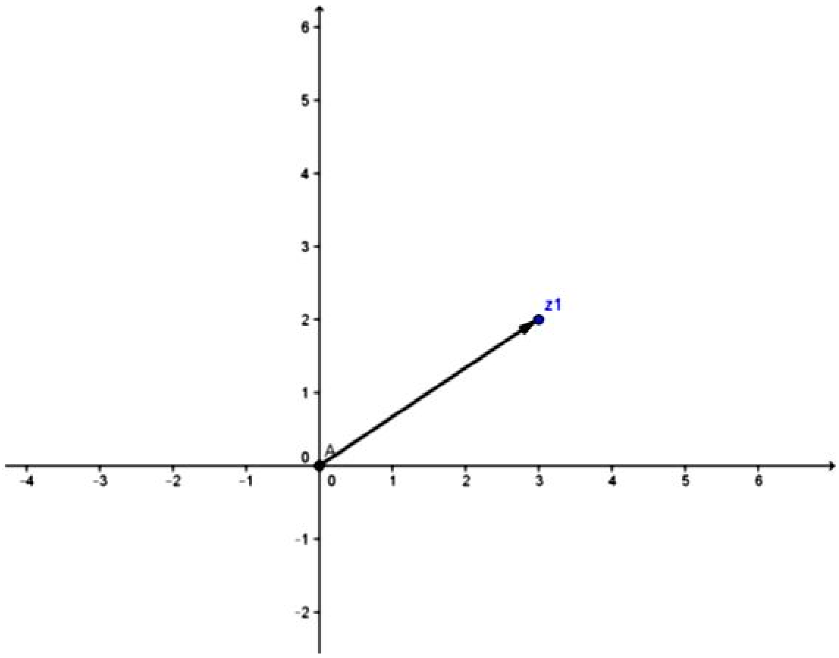

Figura 18 – Representação geométrica de z_1

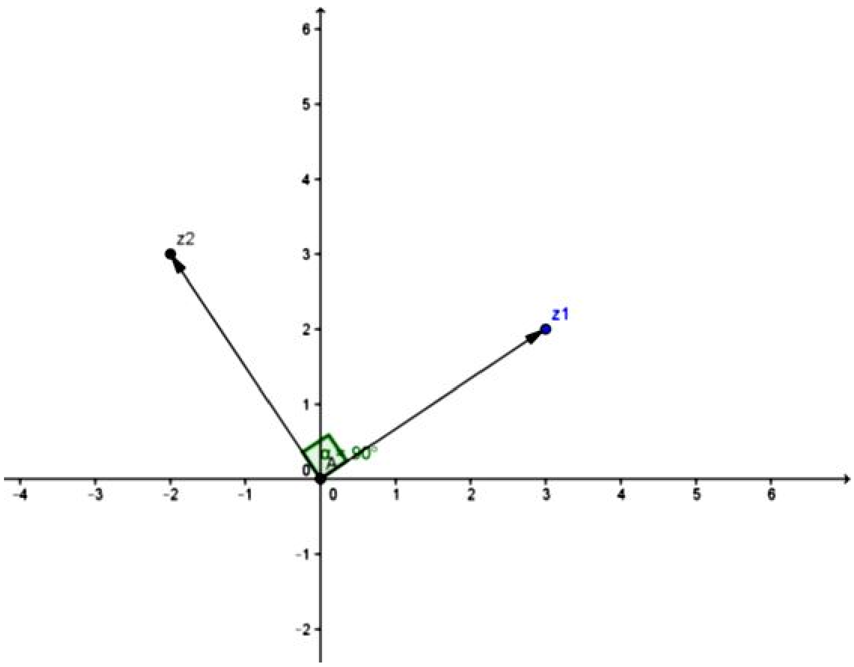

Figura 19 – Questão 3 item (a)

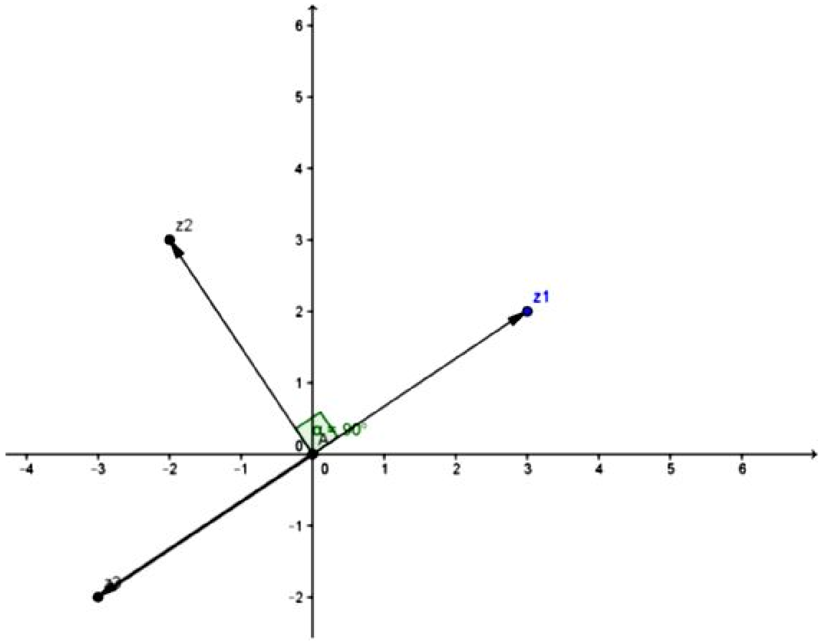

Figura 20 – Questão 3 item (b)

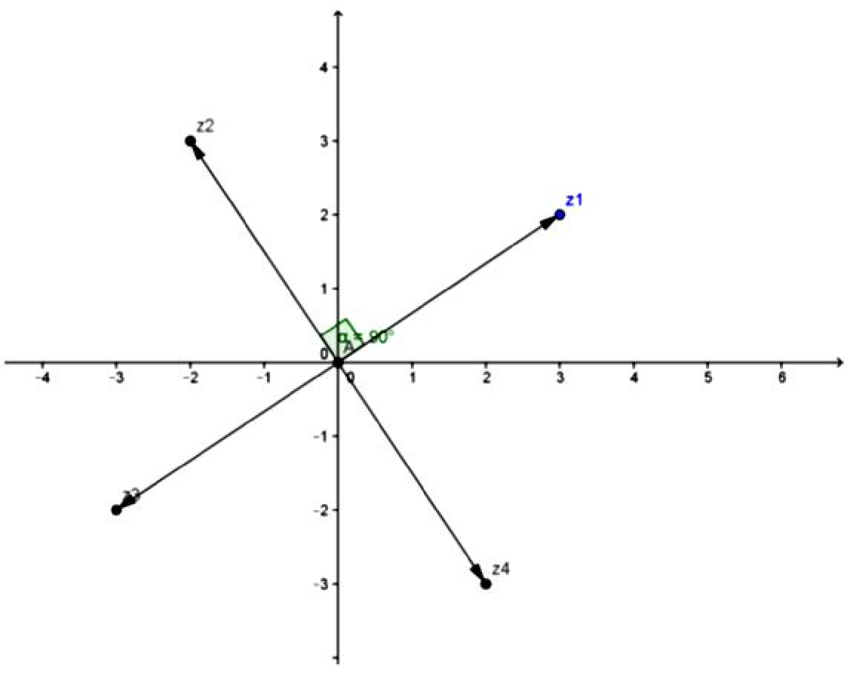

Figura 21 – Questão 3 item (c)

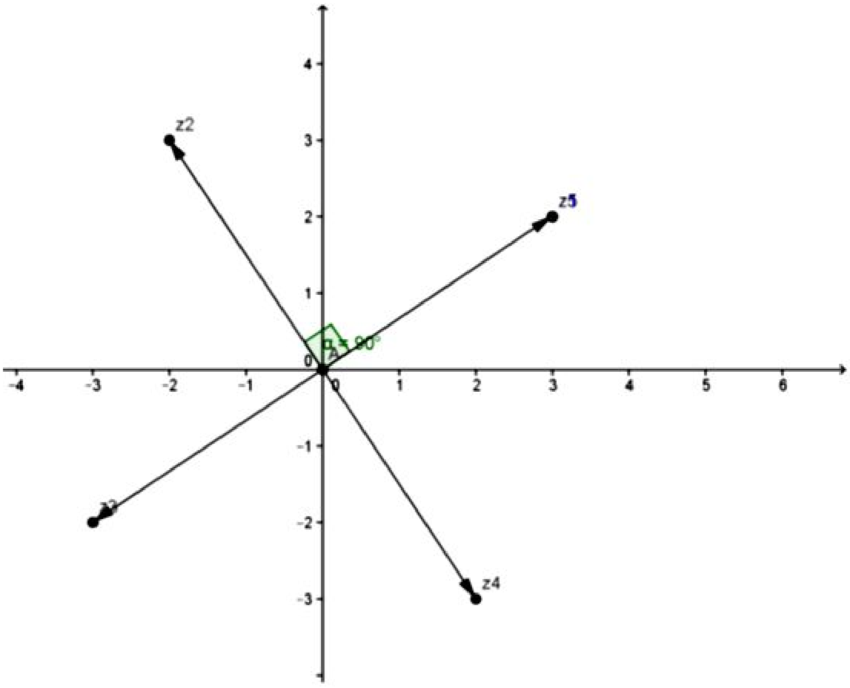

Figura 22 – Questão 3 item (d)

Como visto nas figuras acima, o ângulo formado entre z_1 e z_2 é de 90ž.

Qual a observação a ser feita a respeito da relação entre z_5 e z_1?

A interpretação geométrica do número complexo inclui o fato de que a multiplicação pela unidade imaginária i funciona como uma rotação de 90ž no plano no sentido anti-horário, isso significa que ao multiplicarmos z por i 4 vezes consecutivas, teremos uma volta completa, 360ž, o que leva z_5 à mesma posição de z_1, ou seja $z_5 = z_1$.

3.2 Funções seno/cosseno e Números complexos

O estudo das funções trigonométricas não é exatamente o conteúdo mais simples do nível médio, mas se pensarmos apenas nas funções seno e cosseno pode-se apontar algumas características que podem fazer tal estudo bastante simplificado.

Uma função seno, em geral, tem a forma $y = A\,\text{sen}(\omega x + \theta)$, onde A é conhecido como amplitude, ω é conhecido como frequência angular e θ é conhecido como fase da função. Os parâmetros A, ω e θ definem a forma da função dada. Como estes parâmetros têm significados bastante específicos e independentes na função, pode-se dizer que a função seno é plenamente especificada pelos três parâmetros. Isso nos leva a crer que a função seno como definida acima é caracterizada por uma terna ordenada dos parâmetros.

3.2.1 Identificação da função através dos parâmetros:

3.2.1.1 Atividade 1

Esboce o gráfico, manualmente, e posteriormente usando o Geogebra, da seguinte família de funções:

1. $y_1 = sen(x)$
2. $y_2 = 2sen(x)$
3. $y_3 = 5sen(x)$
4. $y_4 = -2sen(x)$

Solução proposta para atividade 1

Quais as características comuns às quatro funções da atividade anterior?

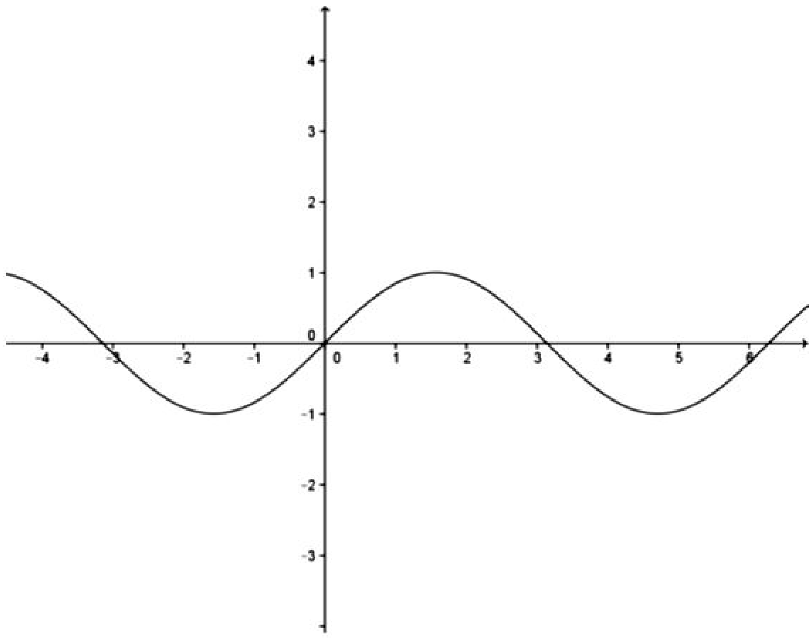

Figura 23 – Item (a)

Como se observa na figura 27, no plano cartesiano que contém todos os gráficos das funções pedidas eles têm em comum o fato de terem o mesmo período- ou frequência.

3.2.1.2 Atividade 2

Esboce o gráfico, manualmente, e posteriormente usando o Geogebra, da seguinte família de funções:

1. $y_1 = 3sen(x)$

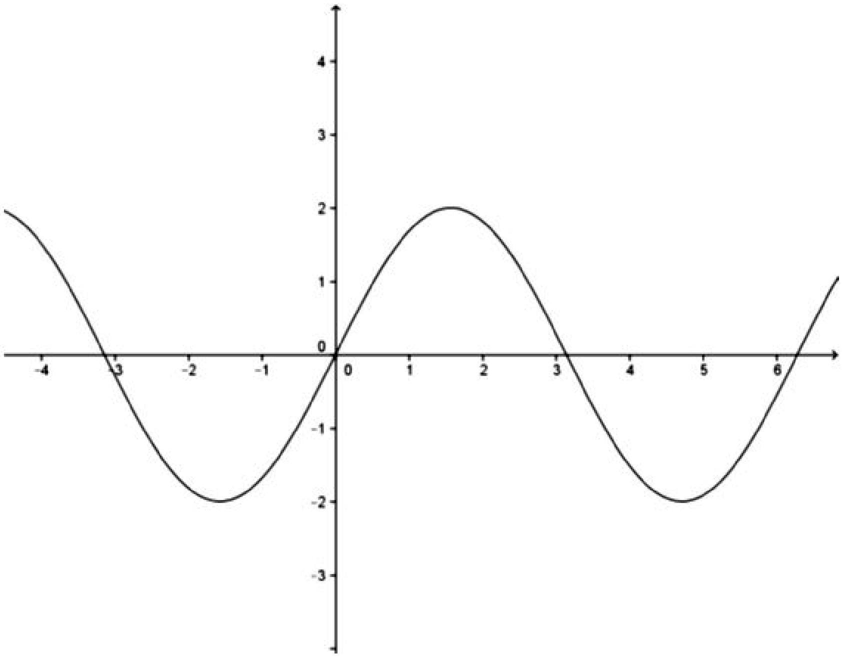

Figura 24 – Item (b)

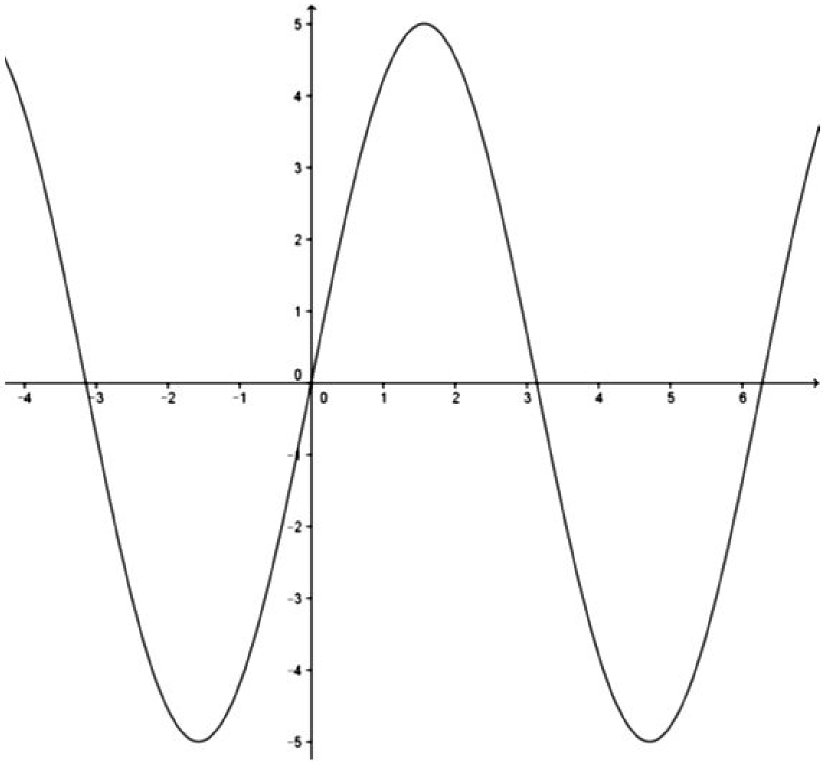

Figura 25 – Item (c)

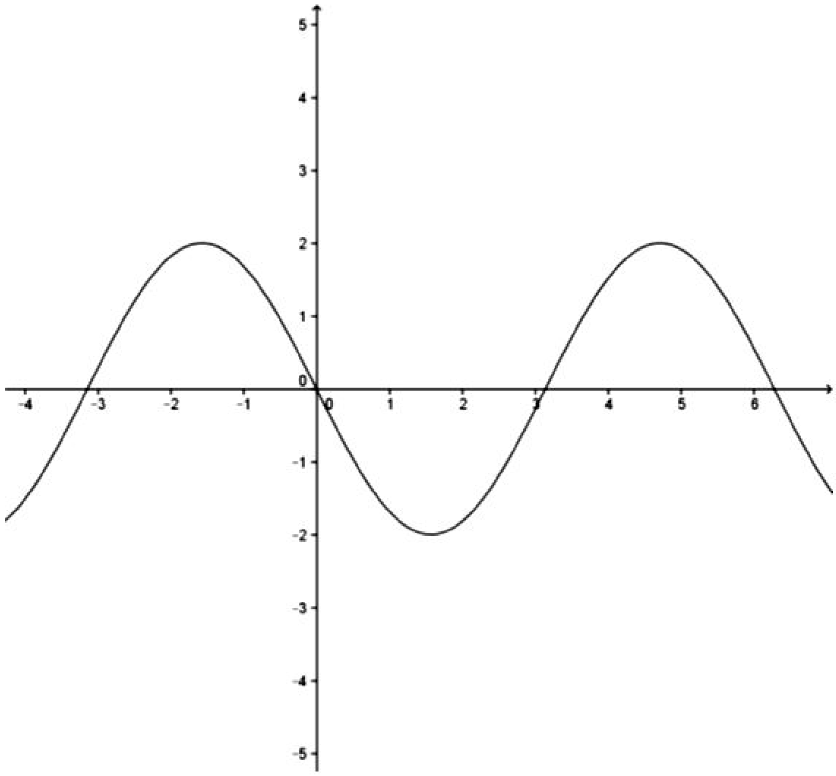

Figura 26 – Item (d)

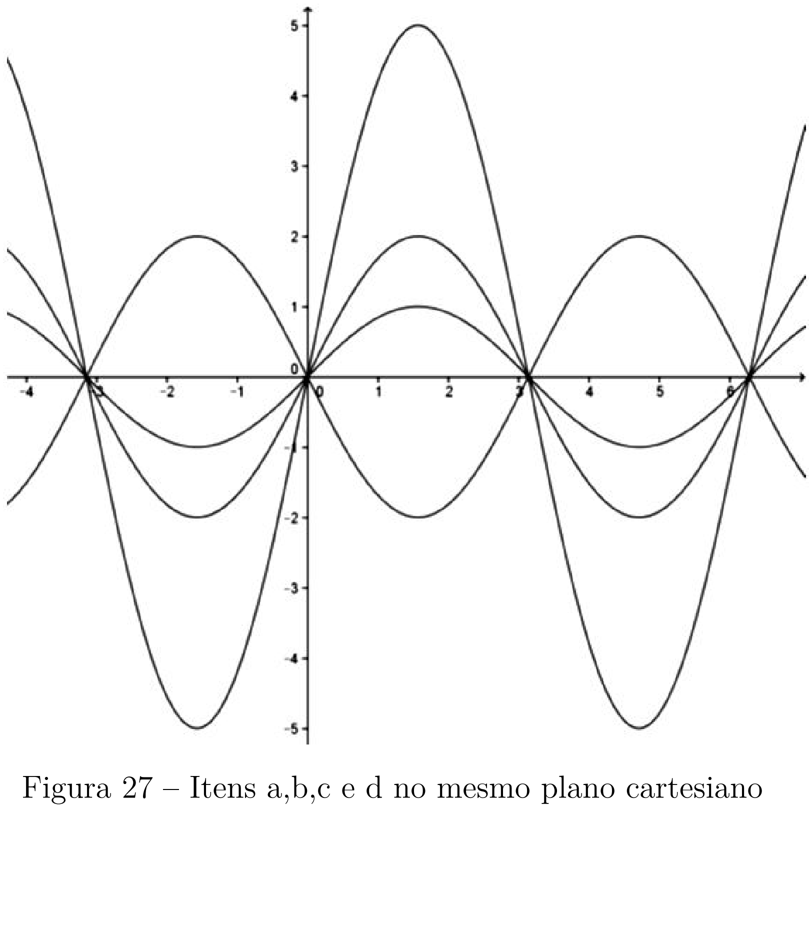

Figura 27 – Itens a,b,c e d no mesmo plano cartesiano

2. $y_2 = 3sen(2x)$
3. $y_3 = 3sen(4x)$

Solução proposta para atividade 2

Quais as características que se mantiveram nas três funções dadas na atividade anterior?

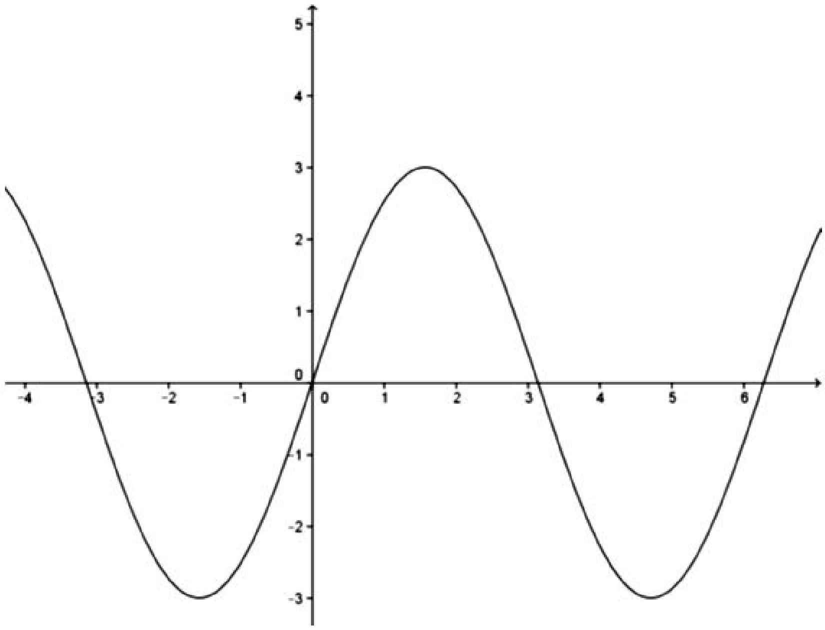

Figura 28 – Item (a)

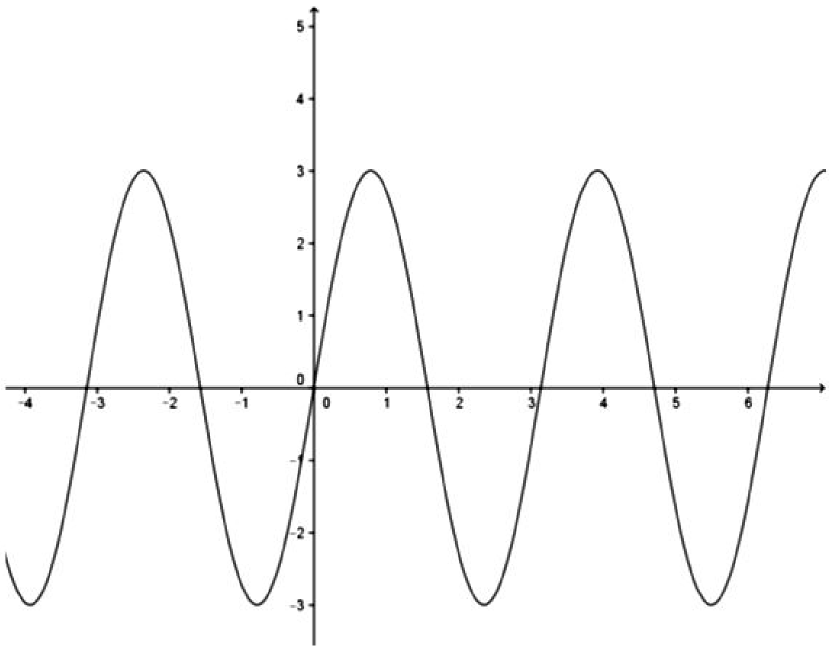

Figura 29 – Item (b)

Ao observarmos os três gráficos construídos no mesmo plano cartesiano, percebemos que o que há em comum é o fato de terem a mesma amplitude A.

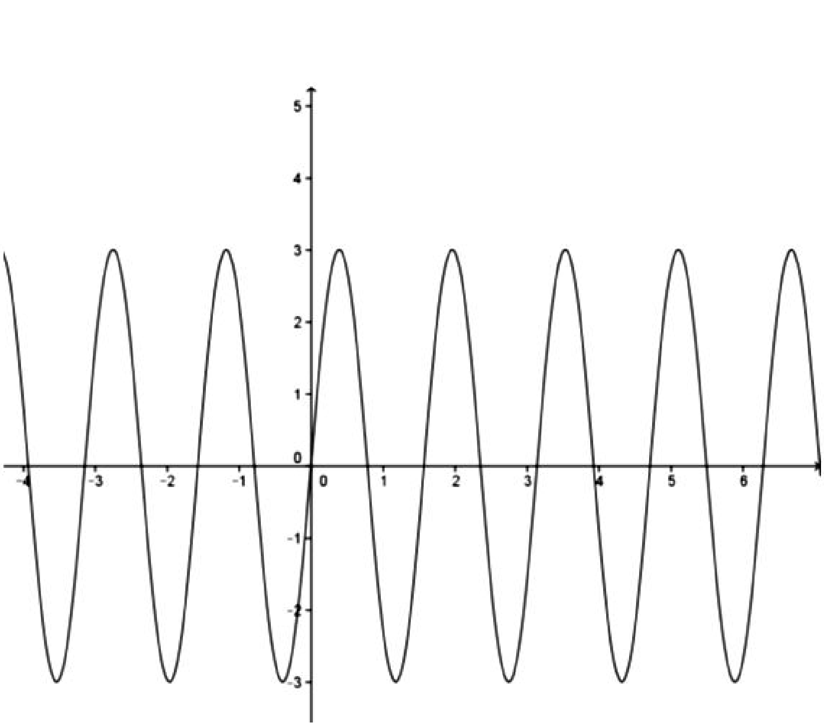

Figura 30 – Item (c)

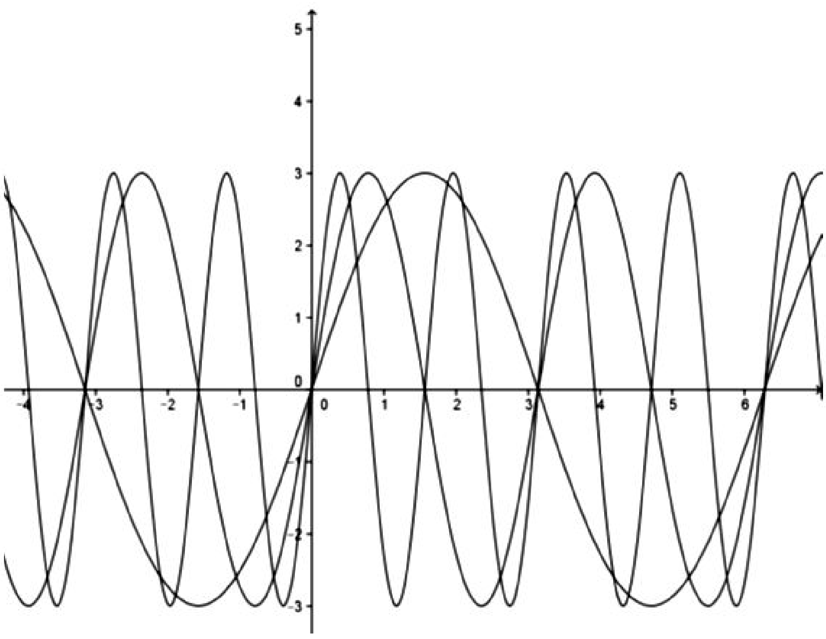

Figura 31 – Itens a,b e c no mesmo plano cartesiano

3.2.1.3 Atividade 3

Esboce o gráfico, manualmente, e posteriormente usando o Geogebra, da seguinte família de funções:

1. $y_1 = 2sen(x + 30ž)$
2. $y_2 = 2sen(x + 60ž)$
3. $y_3 = 2sen(x + 90ž)$

Solução proposta para atividade 3

Quais as características que se mantiveram e quais as que se alteraram na família de funções da atividade anterior?

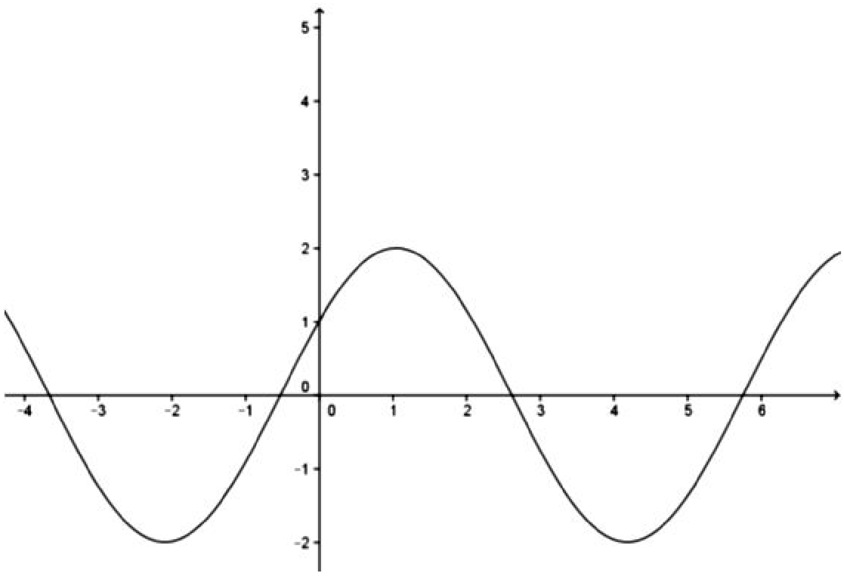

Figura 32 – Item (a)

3.2.1.4 Atividade 4

Esboce o gráfico, manualmente, e posteriormente usando o Geogebra, da seguinte família de funções:

1. $y_1 = sen(x)$
2. $y_2 = 2sen(x - 30ž)$
3. $y_3 = 4sen(x + 60ž)$

Solução proposta para atividade 4

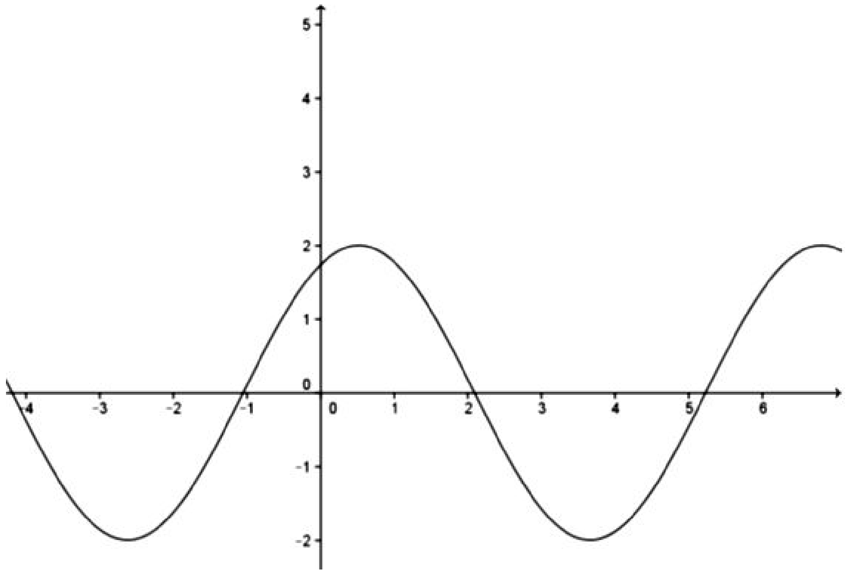

Figura 33 – Item (b)

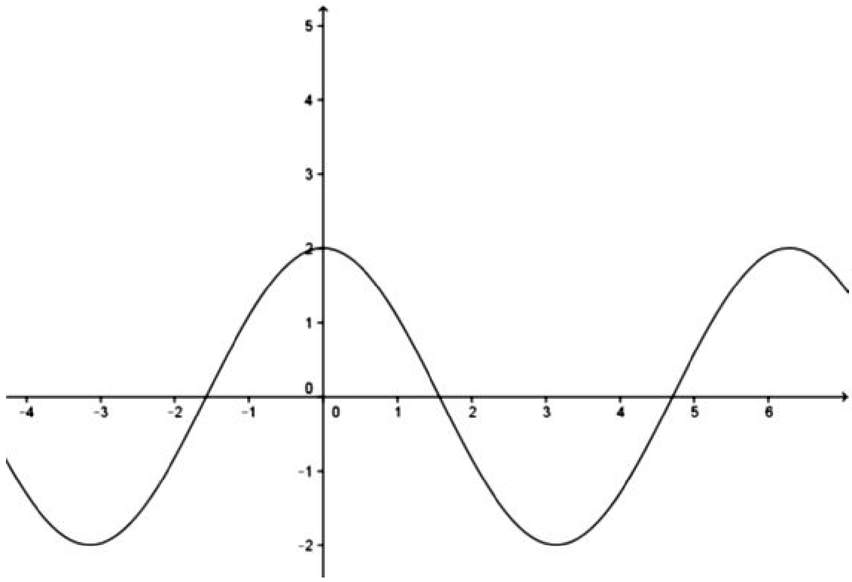

Figura 34 – Item (c)

É possível perceber que o parâmetro ω não mudou na última família de funções. Qual a conclusão imediata?

É possível identificar tais funções por pares ordenados formados pelos parâmetros que variaram?

3.2.1.5 Atividade 4

Represente as funções da última atividade pelos seus pares ordenados (A, θ).

Esboce os gráficos das funções seno dadas pelos seus pares (A, θ), dado $\omega = 1$.

1. $(5, 0ž)$

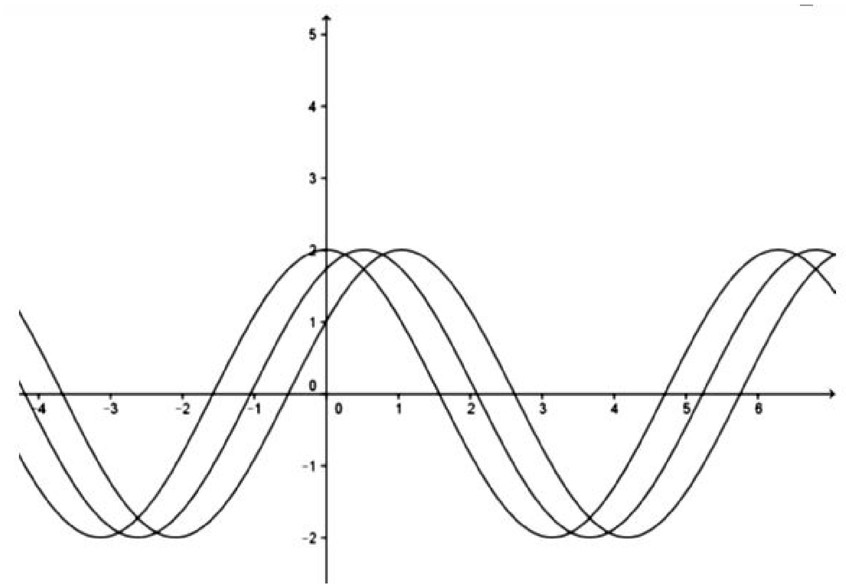

Figura 35 – Itens a,b e c no mesmo plano cartesiano

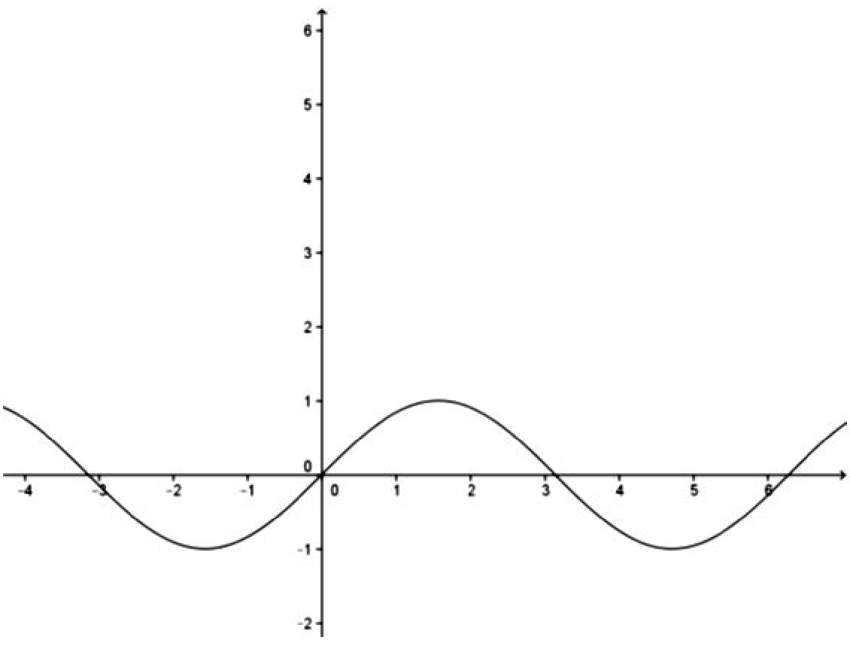

Figura 36 – Item (a)

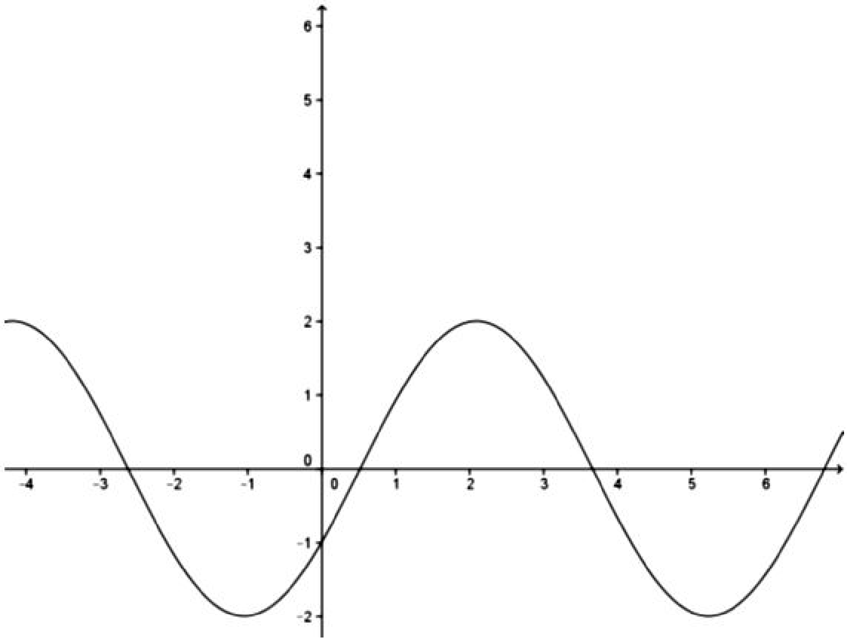

Figura 37 – Item (b)

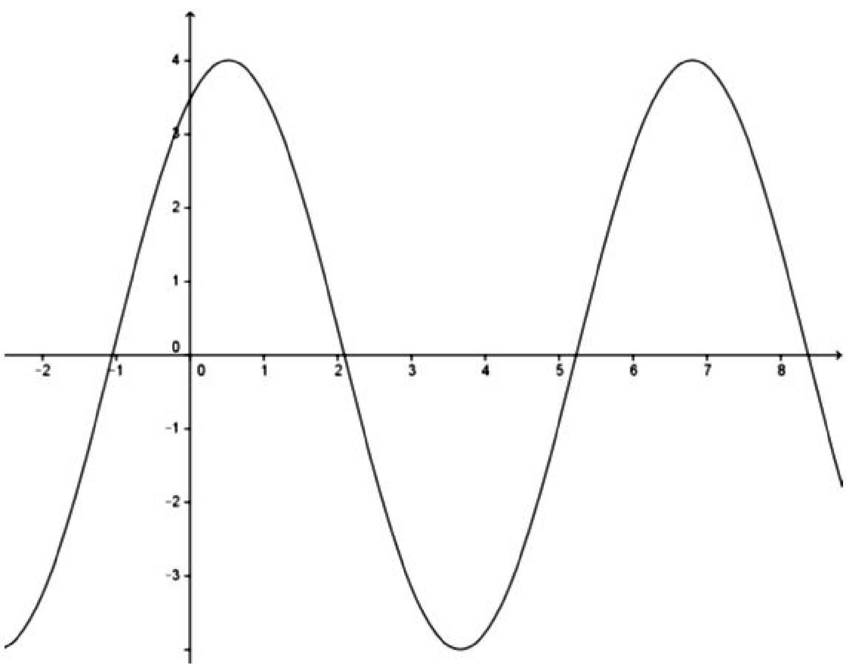

Figura 38 – Item (c)

2. $(2, 60ž)$

3. $(3, 90ž)$

Escreva as funções na forma de equações.

É possível interpretar esses pares ordenados (A, θ) como números complexos na forma polar?

Resolução: A cada par ordenado corresponde uma função seno da forma $y = A\,\text{sen}(\omega x + \theta)$, logo:

1. $y = 5\,\text{sen}(x)$

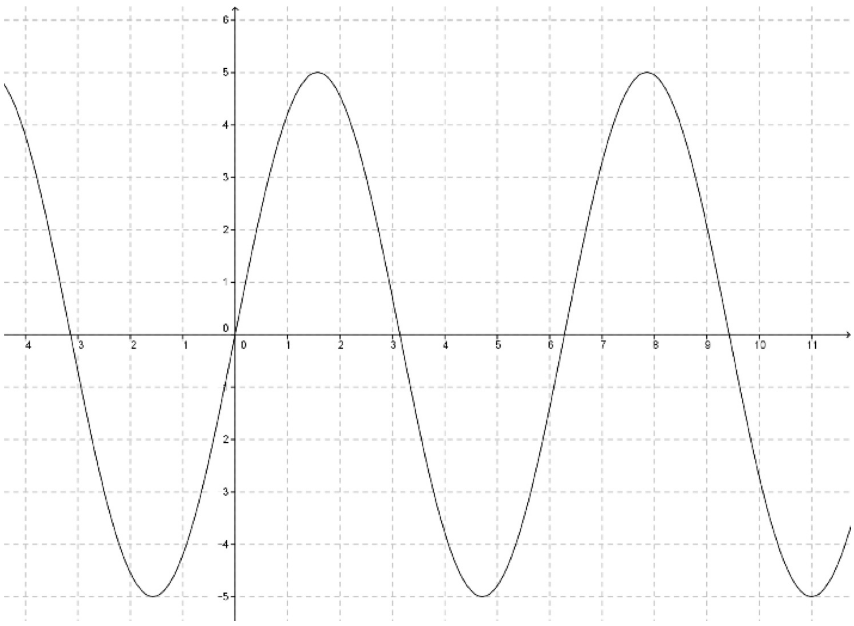

Figura 39 – item 1

2. $y = 2\,\text{sen}(x + 60\circ)$

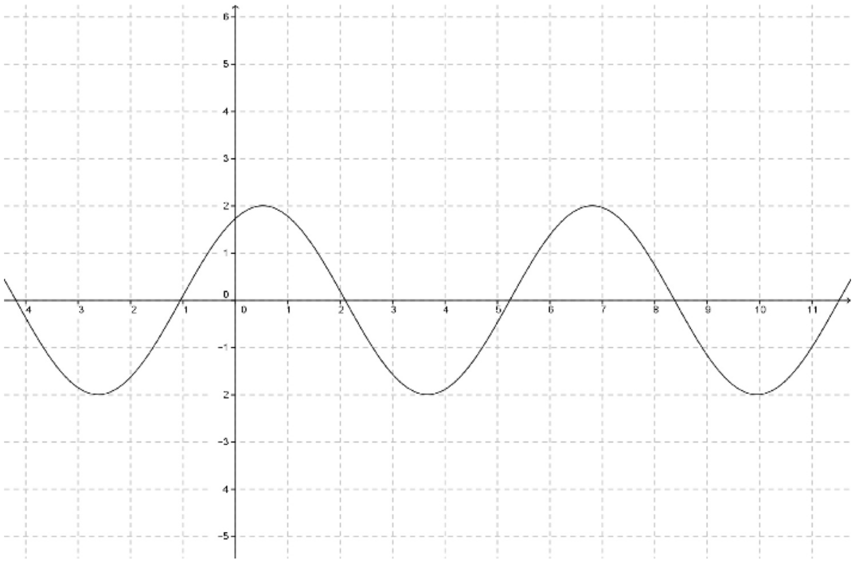

Figura 40 – item 2

3. $y = 3\,\mathrm{sen}(x + 90\circ)$

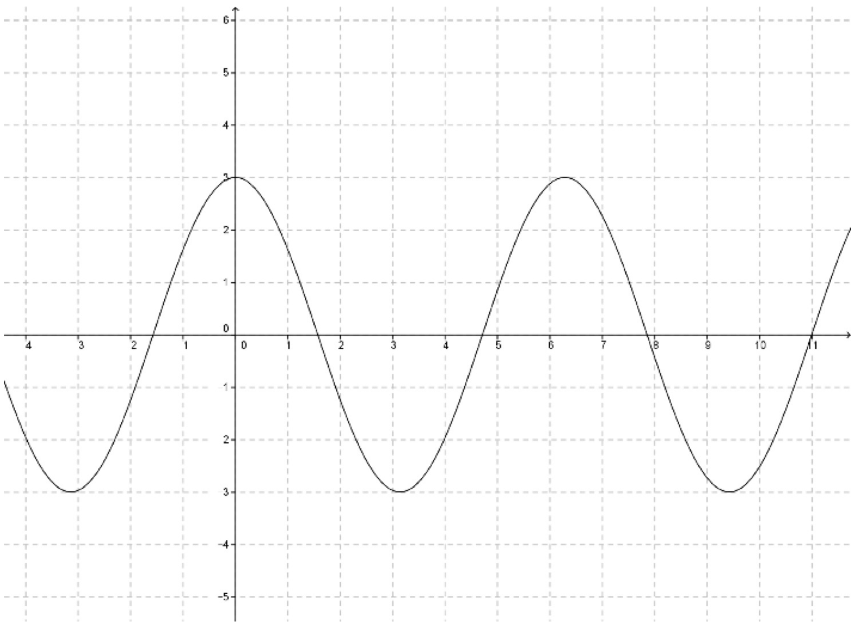

Figura 41 – item 3

4 Circuitos elétricos e Números complexos

Agora que exploramos um pouco as propriedades geométricas dos números complexos, tentaremos fazer uma aplicação bastante útil dos números complexos na física/eletrotécnica, de tal maneira que será possível substituir um arcabouço matemático sofisticado e complicado por simples álgebra de números complexos.

Da física elementar sabemos que ao submetermos um condutor elétrico a uma diferença de potencial elétrico, o fluxo de corrente é proporcional a esta diferença de potencial. Que pode ser expresso pela Lei de Ohm,(ALEXANDER; SADIKU, 2013),(ALBUQUERQUE, 1997):

$$v = R.i$$

Onde: v é a diferença de potencial elétrico, também conhecida como tensão elétrica; i é o fluxo de corrente elétrica, ou simplesmente corrente elétrica, e R é a resistência elétrica do condutor, e representa numericamente a oposição à passagem de corrente elétrica.

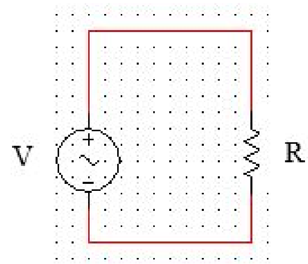

Figura 42 – Circuito elétrico composto por fonte e resistor

Uma observação importante é que, em termos históricos, a Lei de Ohm surgiu do estudo de fontes ditas contínuas, o que significa que $v(t)$ é uma função constante do tempo: $v(t) = v_o$. No entanto, posteriormente percebeu-se que para a maioria dos condutores tal Lei continuava valendo, mesmo que $v(t)$ deixasse de ser uma função constante. Particularmente, é de grande interesse o caso de $v(t)$ ser uma função senoidal, ou co-senoidal do tempo.

Ou seja, $v(t) = v_o.\operatorname{sen}(\omega t + \theta)$ implica em $i(t) = \dfrac{v_o}{R}.\operatorname{sen}(\omega t + \theta)$ ou $v(t) = v_o.cos(\omega t + \theta)$ implica em $i(t) = \dfrac{v_o}{R}.\cos(\omega t + \theta)$

O que significa, em suma, que a única diferença entre as funções $v(t)$ e $i(t)$ está nas suas amplitudes, mantendo-se o período, e também a fase. Como está colocado no gráfico abaixo, que representa, num mesmo plano cartesiano, $i(t)$ e $v(t)$:

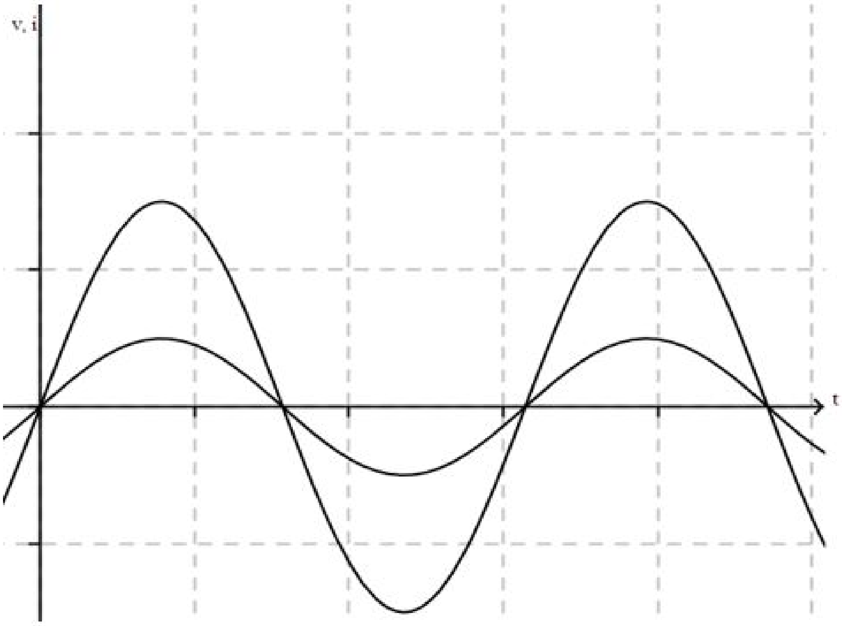

Figura 43 – Circuito elétrico composto por fonte e resistor

O desenvolvimento da física permitiu a descoberta de dois outros comportamentos elétricos além do comportamento dos condutores. Tais comportamentos elétricos deram origem a dois tipos de componentes elétricos, os capacitores e os indutores.

A despeito da essência da física que se faz presente em cada componente, é possível expressar matematicamente cada comportamento elétrico, como expresso abaixo:

1. Capacitor:

$$i(t) = C.\frac{dv(t)}{dt} \tag{4.1}$$

Onde C é a capacitância do componente.

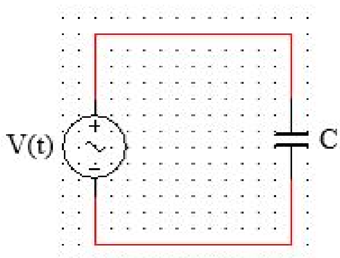

Figura 44 – Circuito elétrico composto por fonte e capacitor

2. Indutor:

$$v(t) = L.\frac{di(t)}{dt} \tag{4.2}$$

Onde L é a indutância do componente.

É perceptível que, dados os comportamentos matemáticos expressos pelas derivadas temporais da tensão e corrente, respectivamente em cada componente, é de se esperar

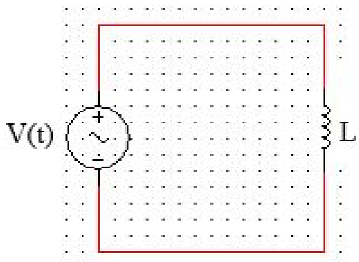

Figura 45 – Circuito elétrico composto por fonte e indutor

que circuitos formados pelas combinações de capacitores e indutores levem a equações diferenciais, o que é inviável para a abordagem em cursos de nível médio.

No entanto, é possível perceber algo de interessante no comportamento destas equações. Vejamos:

Supondo o caso de interesse maior que é quando a tensão é função senoidal do tempo, é possível perceber que ao aplicarmos a tensão $v(t) = v_o \operatorname{sen}(\omega t)$ no circuito capacitivo, a corrente é dada por:

$$i(t) = C.\frac{d(v_o \operatorname{sen}(\omega t))}{dt}$$

Ou seja, $i(t) = C.v_o.\omega.\cos(\omega t)$ ou melhor: $i(t) = C.v_o.\omega.\operatorname{sen}(\omega t - \frac{\pi}{2})$

Isso significa que neste caso, tensão aplicada e corrente não diferem apenas pela amplitude. Muda também a fase. Para ser mais exato, a corrente fica com uma fase de $-\frac{\pi}{2}$rad. Como pode ser visto no gráfico abaixo:

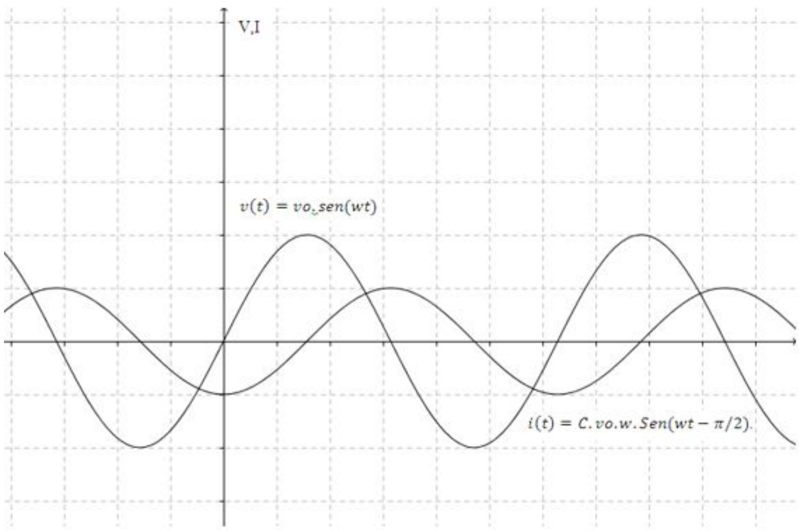

Figura 46 – Gráficos de tensão e corrente no mesmo plano - circuito capacitivo

Afirmação vaga e descontextualizada, ou seja, uma função trigonométrica é completamente caracterizada por uma grandeza complexa, cujo módulo representa a amplitude da função trigonométrica, e cujo argumento representa a fase. Analogamente, no circuito indutivo,

$$v(t) = L.\frac{di(t)}{dt} \tag{4.3}$$

Como $v(t) = v_o.\operatorname{sen}(\omega t)$, teremos

$$v_o.\operatorname{sen}(t) = L.\frac{di(t)}{dt}$$

Logo:

$$i(t) = \frac{v_o}{L}\int \operatorname{sen}(\omega t)\mathrm{d}t \tag{4.4}$$

O que nos dá como resultado:

$$i(t) = -\frac{v_o.\omega}{L}\cos(\omega t) \tag{4.5}$$

Ou melhor:

$$i(t) = \frac{v_o.\omega}{L}\operatorname{sen}(\omega t + \frac{\pi}{2}) \tag{4.6}$$

O que significa, novamente, que além da amplitude, as funções tensão e corrente $v(t)$ e $i(t)$ se diferenciam pela fase. Neste caso, a corrente tem fase $\frac{\pi}{2}$rad, como se vê no gráfico abaixo:

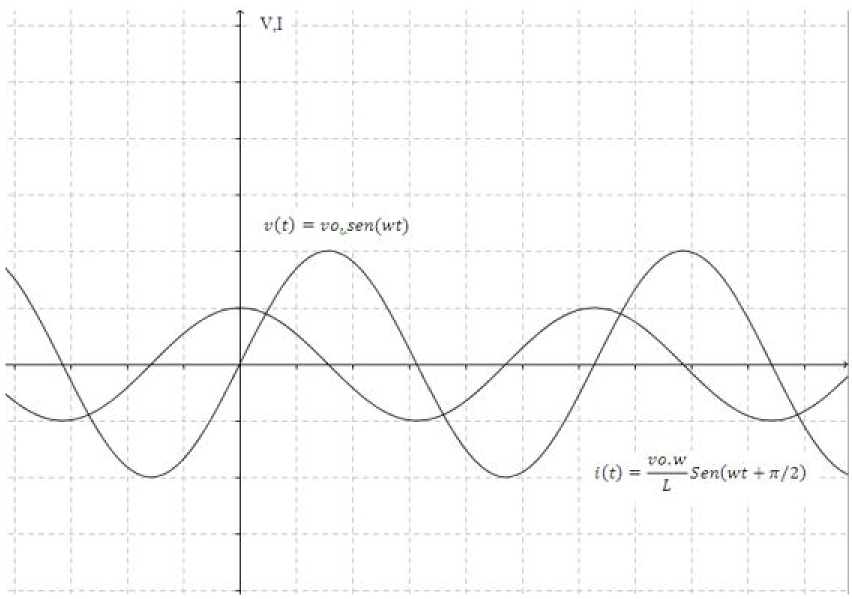

Figura 47 – Gráficos de tensão e corrente no mesmo plano - circuito indutivo

A questão que se coloca é: É possível estabelecer uma modelagem que envolva números complexos para a solução deste problema? Além disso, é possível que esta modelagem se baste no uso dos números complexos, podendo assim ser usada, sem maiores problemas, no ensino médio?

É possível perceber que as funções usadas neste tema de circuitos elétricos tem sempre um formato geral dado por $f(t) = A.\cos(\omega t + \theta)$, onde os parâmetros são A, ω e θ.

Ou seja, se usarmos como referência a função seno, toda função elétrica usada é do tipo acima, onde o θ determina se será cosseno ou seno, em cada caso. Assim, toda função usada poderá ser unicamente determinada pelo terno A, ω e θ.

Além disso, nota-se também que se a tensão tem frequência ω, a corrente também terá, o que significa que pode-se identificar as funções elétricas corrente e tensão para uma dada frequência ω. Isso reduz a identificação das funções apenas ao par A e θ.

Em resumo, toda função elétrica - Corrente e tensão, $i(t)$ e $v(t)$ - é unicamente determinada pela sua amplitude A e por sua fase θ. Assim sendo, é possível associar a qualquer função elétrica de um circuito dado, um par ordenado (A, θ).

Oras, se é possível identificar toda grandeza elétrica de interesse (tensão ou corrente) pelo par ordenado (A, θ), e sabendo que é possível associar a cada número complexo um par ordenado(A, θ), infere-se que é possível associar cada grandeza elétrica a um número complexo, o que pode facilitar sobremaneira a manipulação algébrica de tais entes elétricos.

Voltando a cada caso particular, é possível associar a uma tensão $v = v_o.\cos(\omega t)$ o número complexo $V = (v_o, 0) = v_o\angle 0$ donde se determina, para um circuito capacitivo, a corrente $i = C.\omega.v_o.\cos(\omega t + 90ž)$, cuja representação complexa é $I = i_o\angle 90ž$.

Analogamente, tem-se que para $V = (v_o, 0) = v_o\angle 0$, num circuito indutivo, $i = \frac{v_o.\omega}{L}.v_o.\cos(\omega t - 90ž)$, cuja representação complexa é $I = i_o\angle - 90ž$

Buscando uma analogia entre os circuitos capacitivos e indutivos e o circuito elementar resistivo, cuja Lei de Ohm é válida, podemos substituir os componentes por elementos genéricos que chamaremos de impedância. Algebricamente, temos:

$V = Z.I$, onde Z é chamado de impedância e cumpre papel análogo ao que cumpre a resistência elétrica na Lei de Ohm.

Imediatamente, percebemos que no caso capacitivo, onde a grandeza I está defasada de 90ž em relação a V, pode-se inferir que $Z = -k'.i$, onde $k \in R_+$. Pois:

$V = Z.I$, logo $Z = \frac{V}{I}$ o que nos dá: $Z = \frac{v_o\angle 0}{i_0\angle - 90ž} = \frac{v_o}{i_o}$.

Analogamente, para o caso indutivo, tem-se que I está adiantada de 90ž em relação a V, o que permite concluir que $Z = k''.i$.

Uma curiosidade interessante é que é possível associar indutores e capacitores em série e em paralelo, usando as mesmas regras aplicadas nos circuitos resistivos elementares. Isso é possível por se tratar da mesma estrutura algébrica dos circuitos anteriores, com a diferença de estarem agora, as grandezas, no conjunto dos números complexos.

4.0.2 Intervenção didática:

Aplica-se a tensão $V = 1000\angle V$, ou seja, uma tensão senoidal de 100V com defasagem nula, ou seja, sem defasagem- sobre os circuitos elétricos abaixo. Determine a corrente elétrica em cada circuito dado. Esboce o gráfico e a representação complexa da tensão aplicada, e da corrente em cada caso:

1. Circuito resistivo

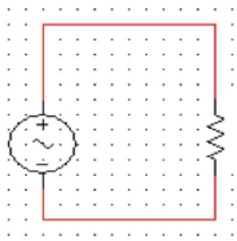

Figura 48 – $Z_1 = R = 10\Omega = 10\angle 0\Omega$

2. Circuito capacitivo

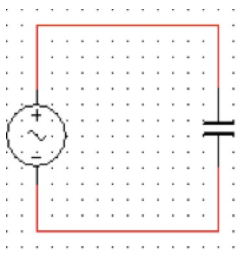

Figura 49 – $Z_2 = 10\angle - 90 \circ \Omega$

3. Circuito indutivo

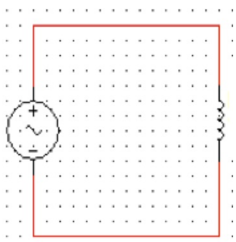

Figura 50 – $Z_3 = 20\angle 90 \circ \Omega$

Resolução: A tensão, que na forma complexa é escrita $V = 100 = 100\angle 0V$, tem a representação gráfica

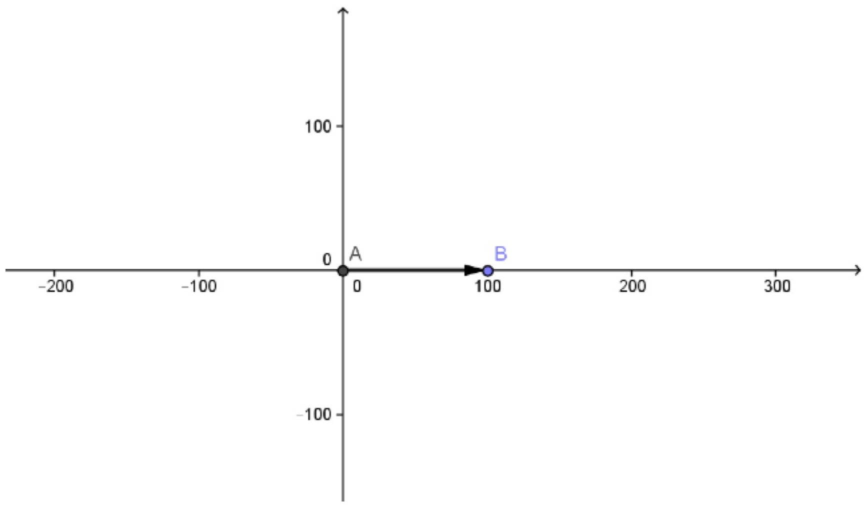

Figura 51 – Representação gráfica da tensão

E representa a função:

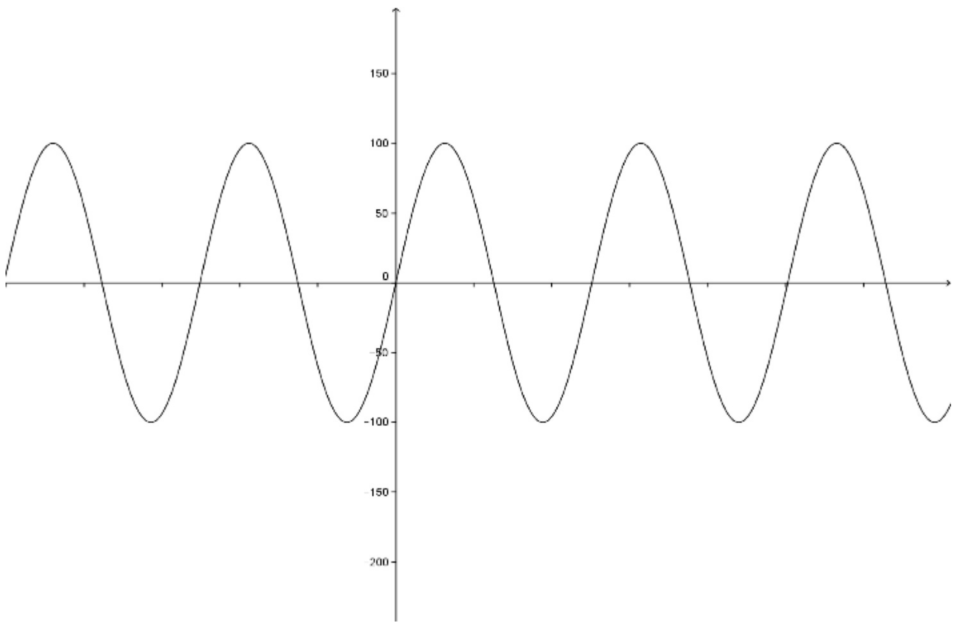

Figura 52 – Gráfico da tensão

Assim

1. $I = \frac{V}{Z} = \frac{100\angle 0}{10\angle 0} = \frac{100}{10} = 10A = 10\angle 0A$

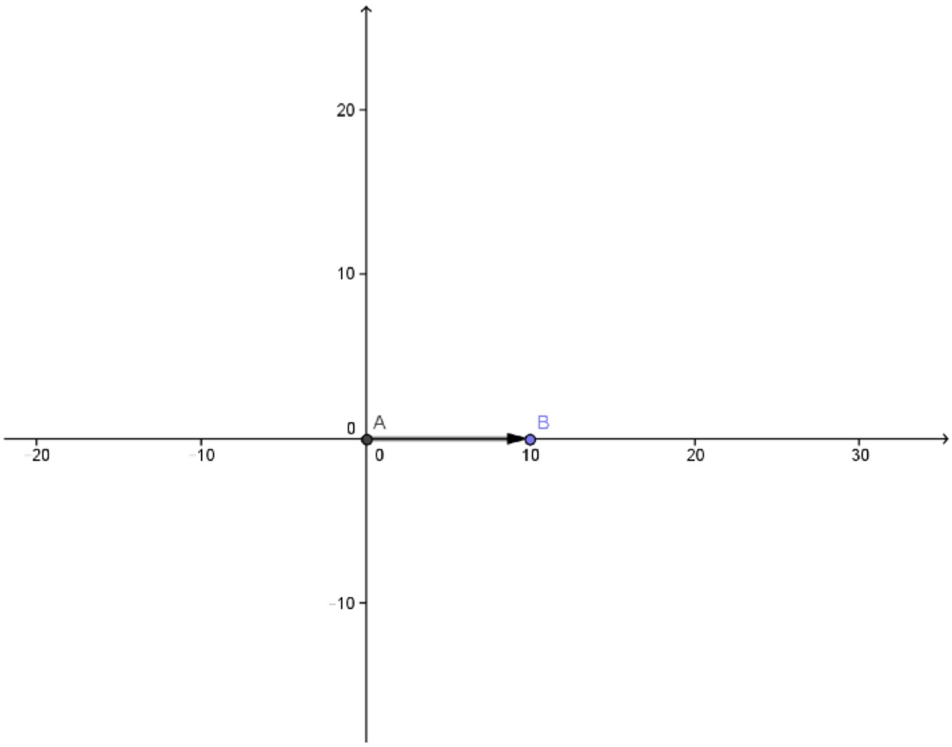

Figura 53 – Representação Geométrica da corrente elétrica

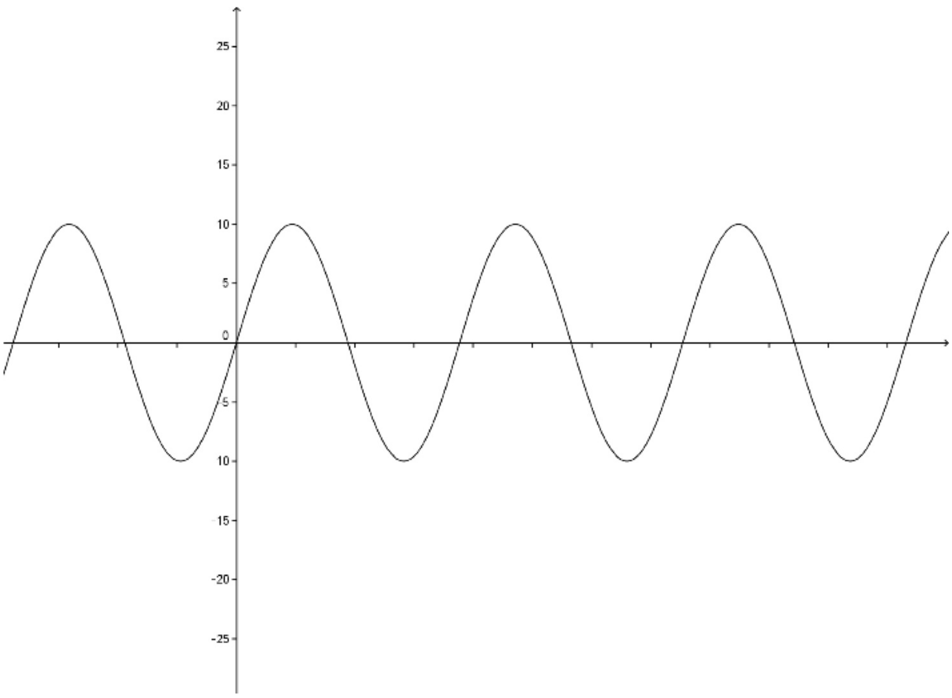

Figura 54 – Gráfico da corrente elétrica

2. $I = \frac{V}{Z} = \frac{100\angle 0}{10\angle -90^{\circ}} = 10\angle 90^{\circ} A$

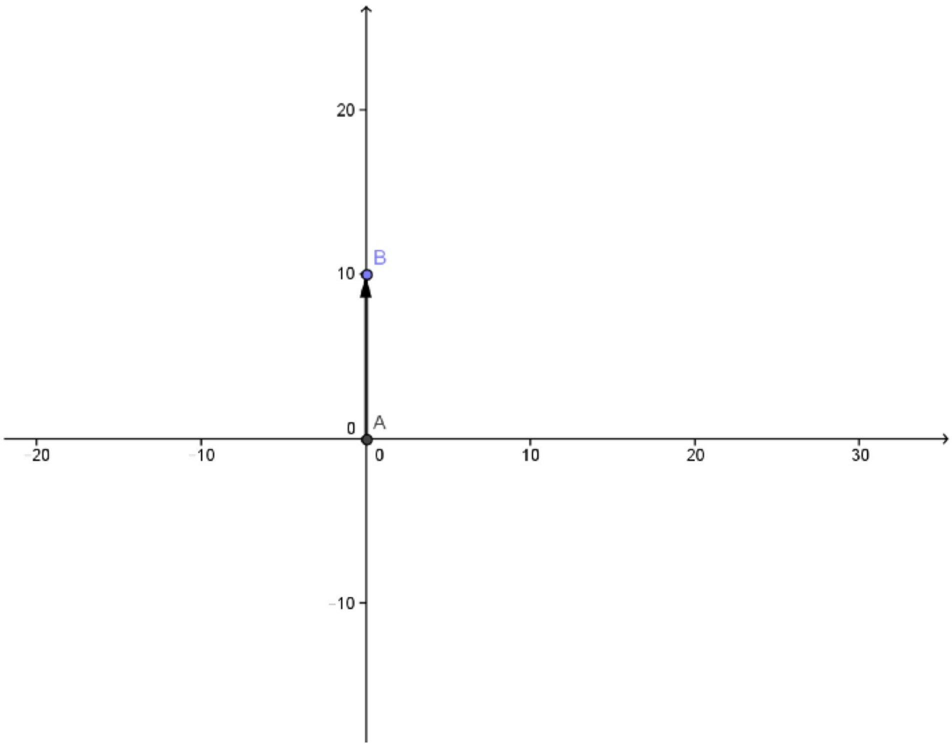

Figura 55 – Representação geométrica:

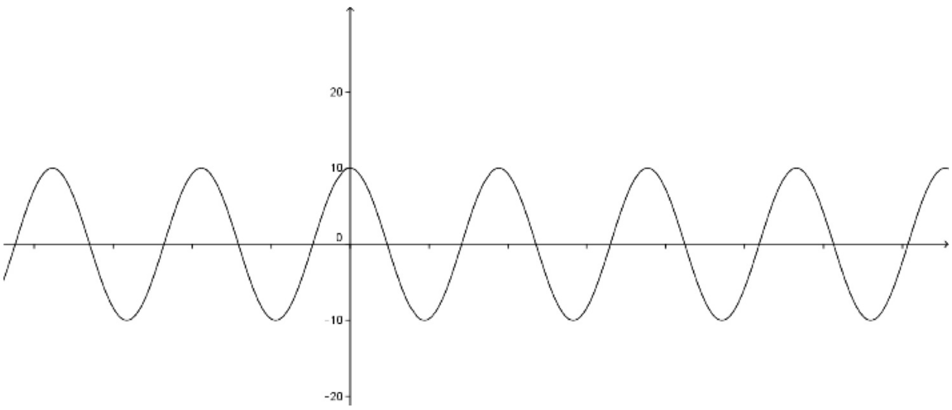

Figura 56 – Gráfico da corrente elétrica

3. $I = \frac{V}{Z} = \frac{100\angle 0}{10\angle 90°} = 10\angle -90° A$

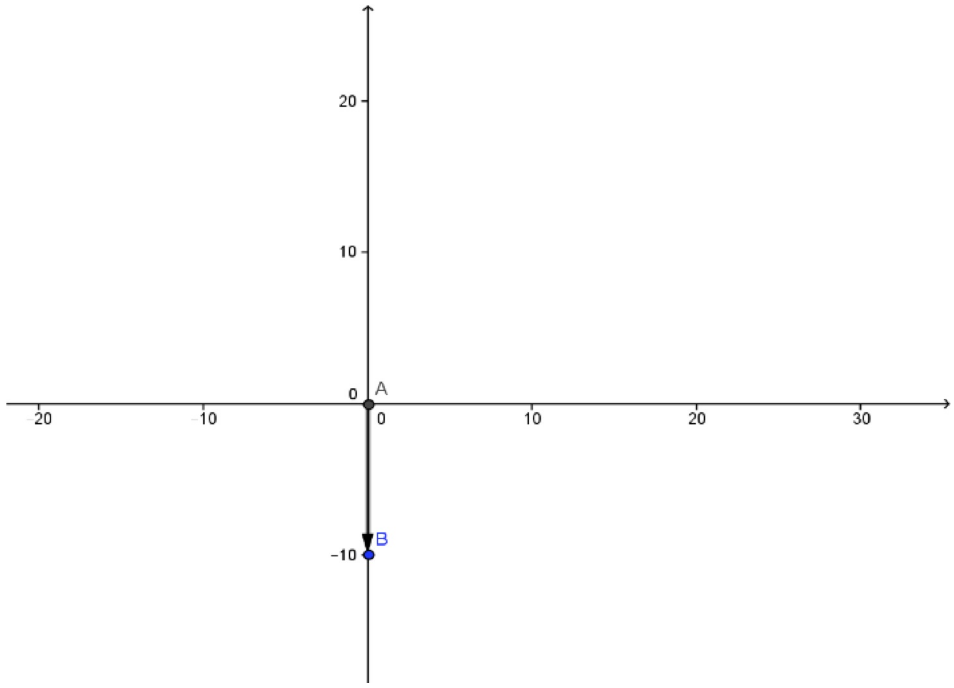

Figura 57 – Representação geométrica:

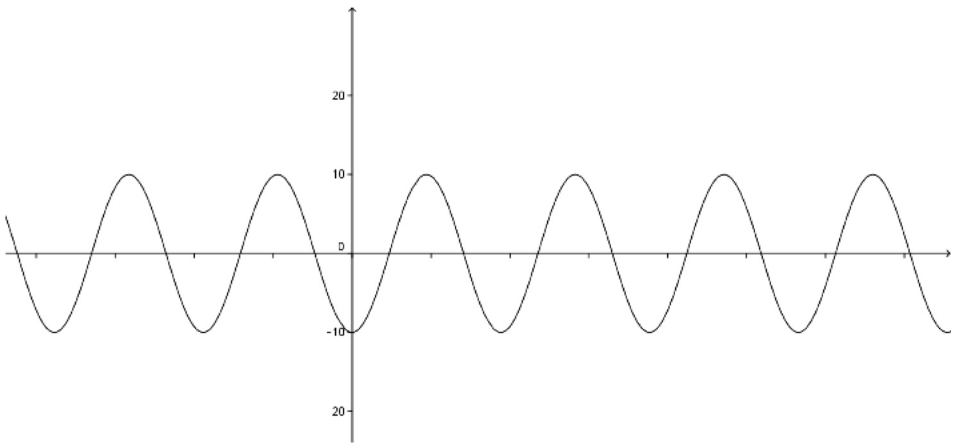

Figura 58 – Gráfico da corrente elétrica

Uma conclusão importante para esta aplicação dos números complexos é que estes cumprem o papel de operador de rotação que serve para modelar o deslocamento de fase nas grandezas elétricas. Ou seja, uma rotação do número complexo equivale à mudança de fase de uma função seno/cosseno que representa uma grandeza elétrica. Exercício de aprofundamento: Idem para o circuito abaixo. Discuta os resultados, comparando com os exercícios anteriores.(Use os mesmos valores de tensão e impedâncias).

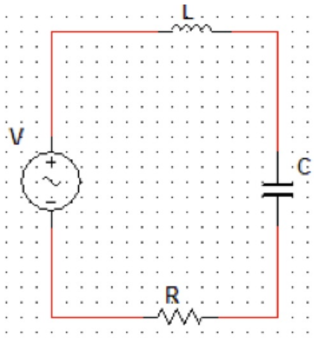

Figura 59 – Circuito RLC série

Resolução: Considerando que o circuito está em série, a impedância total é dada pela soma das impedâncias de cada componente. Logo:

$$Zt = Z1 + Z2 + Z3 = 10 + 10\angle - 90 + 10\angle - 90$$

Reescrevendo na forma algébrica temos:

$$Zt = 10 + 10i - 10i$$

Logo: $Zt = 10\Omega$

5 Considerações Finais

O estudo dos números complexos no ensino médio carrega em si uma deficiência. Esta deficiência está intimamente ligada ao fato de este conteúdo carecer, neste nível, de uma modelagem que o aproxime da realidade. Além disso, há uma escolha metodológica em todo o ensino básico na apresentação dos conjuntos numéricos, que é a negação da existência dos mesmos até que se julgue possível a síntese de modelagens que deem significado concreto aos elementos de tais conjuntos. Esta estratégia parece ser vitoriosa em todos os conjuntos, exceto no conjunto dos números complexos. Tal entrave ocorre por duas razões, primeiro pelo tempo que se demora a apresentar tal conjunto, apenas no final do ensino médio, o que significa que a sedimentação da noção de inexistência da raiz de um número negativo se torna muito mais difícil de desfazer. Segundo, porque mesmo neste momento não há à mão modelos que tornem palpável, ou minimamente concreta, a ideia de número complexo.

Apresentamos então neste pequeno trabalho uma interpretação geométrica dos números complexos, com vistas a diminuir o nível de abstração de tal conteúdo, e apresentamos uma aplicação conhecida na área de circuitos elétricos, que mostra o uso dos números complexos como um elemento de extrema simplificação em problemas que originalmente se exigia uso de equações diferenciais, e que com isso passa a ser possível o seu estudo no Nível Médio.

Referências

ALBUQUERQUE, R. O. Circuito em corrente alternada. [S.l.]: Érica, 1997. Citado na página 43.

ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. N. O. Fundamentos de circuitos elétricos. [S.l.]: Mc Graw Hill, 2013. Citado na página 43.

AVILA, G. Variáveis Complexas e aplicações. [S.l.]: LTC, 1990. Citado na página 21.

BRASIL. PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Linguagens, códigos e suas tecnologias. [S.l.]: Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002. Citado na página 17.

IEZZI, G. Fundamentos de matemática elementar. [S.l.]: Editora atual, 1993. v. 6. Citado na página 17.

A Geogebra

Para dinamizar a apresentação do conteúdo dos números complexos, permitindo uma melhor compreensão da interpretação geométrica e suas aplicações, o uso de um software gráfico pode ser de grande valia. Especificamente apresentaremos doravante a apresentação básica de alguns modelos facilitadores para a interpretação geométrica dos números complexos e aplicações, com o uso do software Geogebra.

Representação da função seno, com uso do Geogebra. Faz-se neste caso imperioso o uso de controles deslizantes para a observação individualizada da contribuição de cada parâmetro para o formato do gráfico.

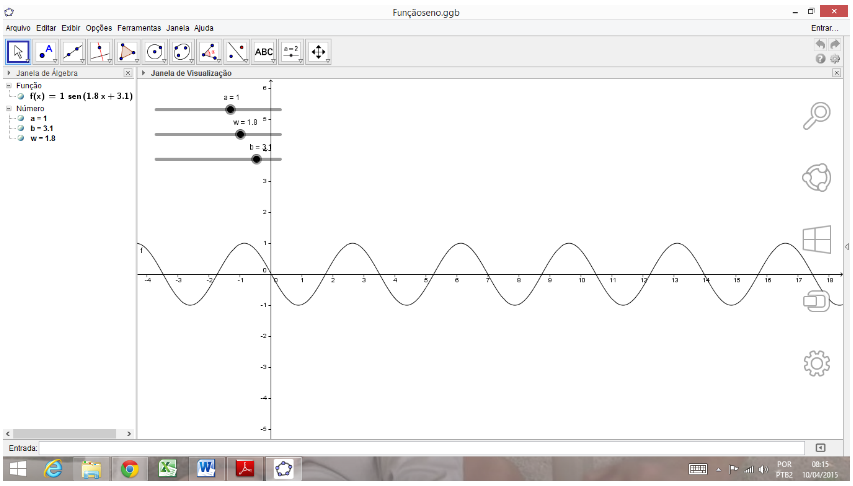

Figura 60 – Função Seno

Representação geométrica da operação de multiplicação de números complexos, no geogebra, e fazendo uso de controles deslizantes como forma de potencializar a compreensão dos efeitos da multiplicação complexa.

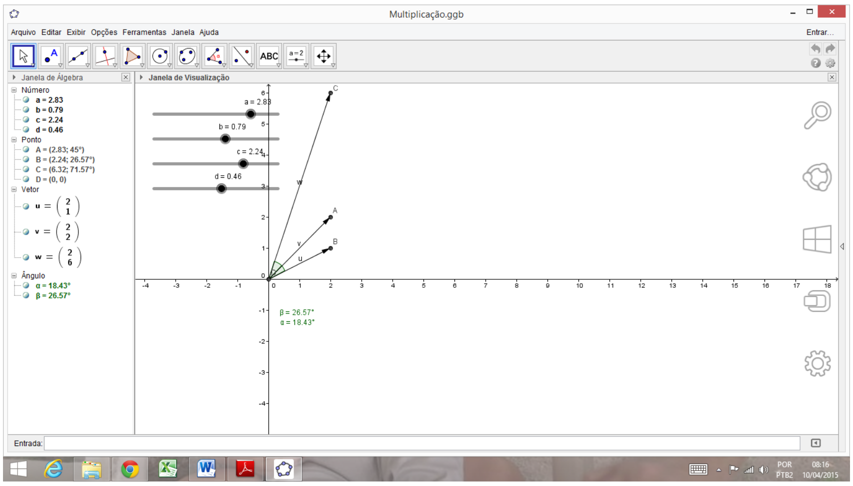

Figura 61 – Multiplicação de Complexos

Operador rotação: Com o uso do software geogebra, realizamos o produto de um número complexo z qualquer pela unidade imaginária e observamos o efeito geométrico de tal produto. Este efeito permite-nos chamá-lo de operador rotação.

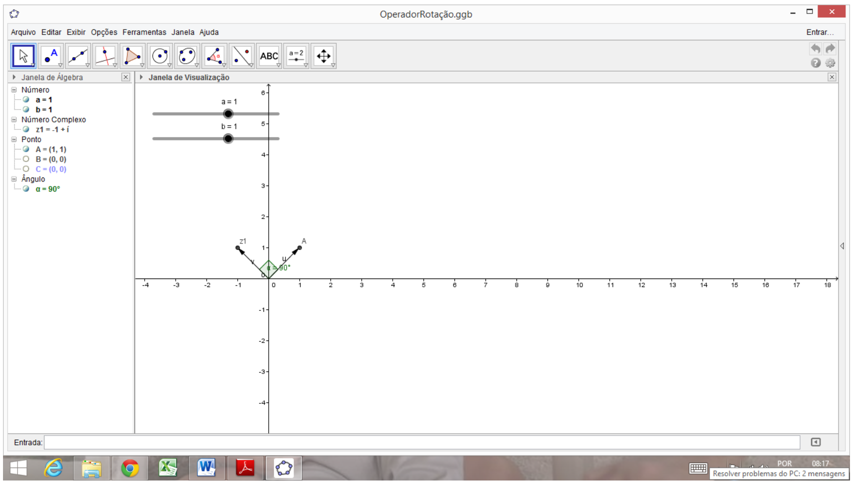

Figura 62 – Operador Rotação

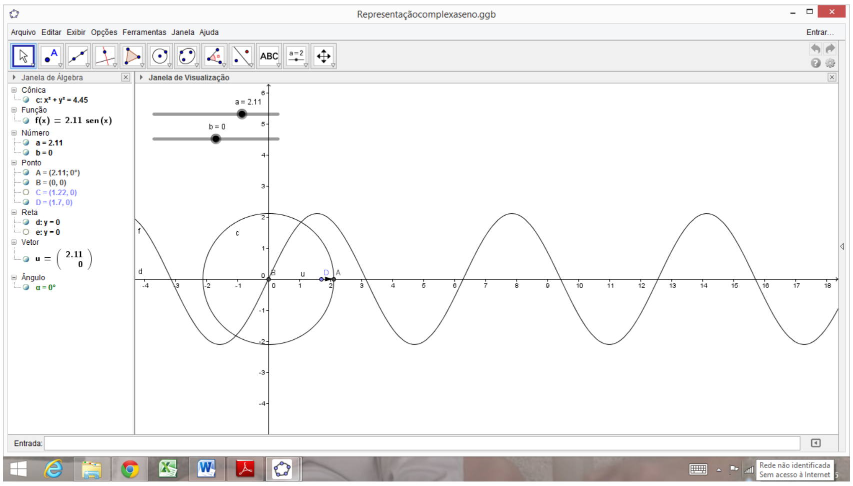

Figura 63 – Representação complexa da função seno

A ligação entre número complexo e função seno é observada neste gráfico, onde se percebe que é possível representar a função seno como um número complexo. Tal ligação é o amálgama que permite aplicar o conteúdo de números complexos em circuitos elétricos de forma a simplificar enormemente os cálculos.