Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

O teorema de Pick e algumas aplicações para os Ensinos Fundamental II e Médio

Fabíola Caroline Luz Sento Sé

Salvador - Bahia
Dezembro de 2016

O teorema de Pick e algumas aplicações para os Ensinos Fundamental II e Médio

Fabíola Caroline Luz Sento Sé

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo Nogueira Bahiano.

Salvador - Bahia
Dezembro de 2016

Modelo de ficha catalográfica fornecido pelo Sistema Universitário de Bibliotecas da UFBA para ser confeccionada pelo autor

438 Luz Sento Sé, Fabíola Caroline
O Teorema de Pick e algumas aplicações para os Ensinos Fundamental II e Médio / Fabíola Caroline Luz Sento Sé. -- Salvador, 2016.
54 f. : il

Orientador: Carlos Eduardo Nogueira Bahiano.
Dissertação (Mestrado - PROFMAT) -- Universidade Federal da Bahia, UFBA, 2016.

1. Teorema de Pick. 2. Fórmula de Euler. 3. Polígonos com buracos. 4. Teorema de Pick - exercícios. I. Bahiano, Carlos Eduardo Nogueira. II. Título.

O teorema de Pick e algumas aplicações para os Ensinos Fundamental II e Médio.

Fabíola Caroline Luz Sento Sé

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 20/12/2016.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Carlos Eduardo Nogueira Bahiano (orientador)
UFBA

Prof. Dr. Marcelo Dias Passos
UFBA

Prof. Dr. André Luís Godinho Mandolesi
UFBA

À minha família, meu porto seguro.

Agradecimentos

Há dois anos e meio, comecei uma nova etapa de minha vida. Foi um período de muito estudo, dedicação, ganho de conhecimento, mas também de muita privação. Ficava conciliando trabalho, estudo e família, mas valeu a pena.

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus por não me deixar desistir e fazer eu encontrar forças para vencer todos os obstáculos que encontrei. Também tenho que agradecer a ele, por ter colocado três grandes amigas em minha vida: Cecília, Lise e Sueli, pois sem elas essa caminhada não teria começado. Obrigada, meninas, pela amizade e incentivo.

Aos meus pais e minhas irmãs que sempre acreditaram em minha capacidade e estiveram ao meu lado em todos os momentos de minha vida. Tudo o que sou, agradeço a vocês. Amo vocês!

Ao meu marido Amon, amor da minha vida, e meu filho Rian, presente que Deus me deu, por estarem sempre lá, me esperando após aqueles longos sábados. Sei que foi difícil para eles, afinal em muitos momentos, tiveram que ficar em segundo plano para eu poder estudar para as provas, além de aguentar meu estresse. Eles são meu porto seguro e sem eles eu não vivo, pois os amo muito.

Ao PROFMAT que me deu um presente que levarei por toda minha vida: meus amigos NINJAS. Vocês tornaram os sábados mais leves e especiais.

Aos colegas da turma 2014, pela troca de conhecimentos e pela amizade que cultivamos.

A todos os professores que me ajudaram a ampliar e aprofundar meus conhecimentos. Especialmente, o meu orientador Carlos Bahiano que tornou essa dissertação realidade. Obrigada pelo apoio, paciência e dedicação.

Novamente, obrigada a todos vocês.

*"Aprender é a única coisa de que a
mente nunca se cansa, nunca tem
medo e nunca se arrepende".*
Leonardo da Vinci

Resumo

Este trabalho propõe o cálculo de área de figuras poligonais, cujos vértices possuam coordenadas inteiras, através da aplicação da fórmula de Pick, cuja validade foi demonstrada pelo matemático austríaco Georg Alexander Pick.

No primeiro capítulo serão abordados os conceitos básicos de geometria, teoremas e observações necessárias para se compreender e obter os resultados que serão abordados neste trabalho. No segundo capítulo, será apresentado o teorema de Pick, sua demonstração e um pouco da história desse matemático. Nos capítulos seguintes, serão apresentadas algumas aplicações do teorema e sugestões de como o professor pode trabalhar o referido tópico com os alunos, incluindo exercícios e algumas generalizações da fórmula.

Abstract

This work deals with calculations of polygonal areas whose vertices have integer coordinates, through the Austrian mathematician Georg Alexander Pick.

In the first chapter we will discuss the basic concepts of geometry, theorems and observations necessary to understand and get the results that will be addressed during the work. In the second chapter it will be presented the Pick's theorem and your demonstration, and a bit of the history of this mathematician. In the following chapters will be informed some applications of the theorem, as the teacher can work with students including exercises and some generalizations of this theorem.

Sumário

Introdução

Ao longo da história, é percebido que há uma grande dificuldade por parte dos alunos em aprender Matemática, em especial a Geometria. Por outro lado, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) trazem as habilidades que devem ser adquiridas pelos alunos ao final de cada ciclo de ensino. Segundo as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), os alunos após concluírem o Ensino Fundamental II, devem ter adquirido as seguintes habilidades:

- Fazer a composição e a decomposição de figuras planas e identificar que qualquer polígono pode ser decomposto a partir de figuras triangulares;

- Calcular a área de figuras desenhadas em malhas quadriculadas;

- Resolver situações-problemas que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução;

- Calcular a área de superfícies planas por meio da composição e decomposição de figuras e por aproximação.

Com base nesse contexto, é apresentado nesse trabalho o Teorema de Pick, que é uma forma diferente de se calcular a área de polígonos, cujos vértices tenham coordenadas inteiras. Além disso, existem algumas relações matemáticas que também podem estar relacionadas ao cálculo da área e, normalmente, não são abordadas pelos professores. Assim, podemos enriquecer as aulas de Matemática com essas novas abordagens e misturar um pouco da Álgebra com a Geometria e da Trigonometria com a Geometria.

No capítulo um serão abordados os conceitos básicos, teoremas e observações necessárias para se compreender e obter os resultados que serão abordados durante o trabalho.

No capítulo dois será descrito um breve histórico do matemático Georg Alexander Pick, seu teorema mais lembrado e sua demonstração. Além disso, serão abordadas algumas características da fórmula que relaciona esse teorema e algumas propriedades que caracterizam o teorema de Pick.

No capítulo três serão informadas algumas aplicações do teorema de Pick: a relação entre o teorema de Pick e o teorema de Euler, o número π e o teorema para polígonos com buracos.

O capítulo quatro será voltado para o professor. Como este pode apresentar esse teorema para os alunos e algumas atividades que poderão ser trabalhadas com os discentes, para um melhor entendimento do teorema, bem como uma ampliação do teorema em outros conteúdos matemáticos.

No capítulo cinco serão feitas algumas generalizações do teorema de Pick.

No último capítulo, algumas considerações finais.

Assim, esperasse que este trabalho contribua no ensino da Matemática, em especial da Geometria, não apenas no Ensino Fundamental II, como no Ensino Médio, buscando sempre o enriquecimento das aulas e o melhor aprendizado da Geometria.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Neste primeiro capítulo são apresentados os conceitos básicos, teoremas e observações necessários para compreensão e obtenção dos resultados que serão tratados nos próximos capítulos.

1.1 Definições importantes

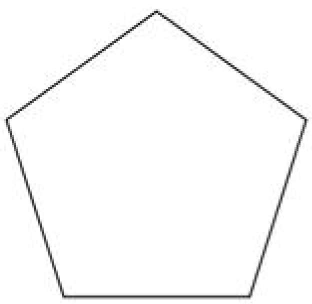
Definição 1.1.1. *Uma poligonal é uma figura formada por uma sequência de pontos* $A_1, A_2, ..., A_n$ *e pelos segmentos* $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ..., A_{n-1}A_n$.

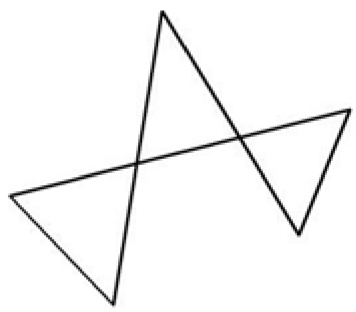
Definição 1.1.2. *Um polígono é uma poligonal em que as seguintes três condições são satisfeitas:*

i) $A_n = A_1$*;*

ii) os lados da poligonal se interceptam somente em suas extremidades;

iii) dois lados com a mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.





A primeira figura representa um polígono, pois obedece as três condições acima. Já a segunda, não representa um polígono, pois os lados das poligonais se interceptam em um ponto diferente das extemidades.

Definição 1.1.3. *Um polígono é convexo se está sempre contido em um dos semiplanos determinados pelas retas que contêm os seus lados.*

Na primeira figura, está representado um polígono convexo, mas na segunda, temos um polígono não convexo.

Definição 1.1.4. *Uma rede de pontos no plano é um conjunto de pontos dispostos regularmente ao longo de retas horizontais e verticais, de modo que a distância de cada um deles aos pontos mais próximos na horizontal ou na vertical é igual a 1.*

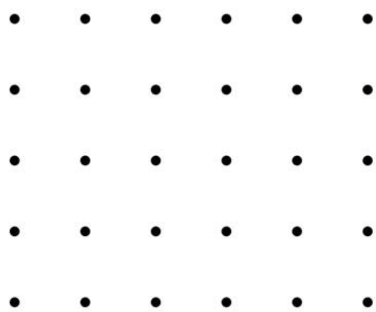


Figura 1.1: Rede de pontos.

Para considerar um sistema de coordenadas cartesianas, basta tomar como origem um ponto da rede, como eixo das abscissas, um eixo na direção horizontal, e como eixo das ordenadas, um eixo na direção vertical. Na rede, os pontos têm coordenadas inteiras.

A rede de pontos será utilizada durante todo o texto, pois para se aplicar o teorema de Pick é necessário que os polígonos tenham vértices de coordenadas inteiras.

Definição 1.1.5. *Um triângulo chama-se fundamental quando tem os três vértices e mais nenhum outro ponto (do bordo ou do interior) sobre a rede.*

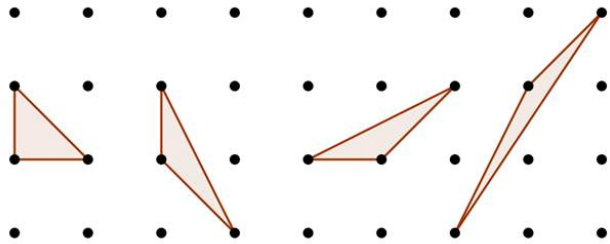


Figura 1.2: Triângulos Fundamentais.

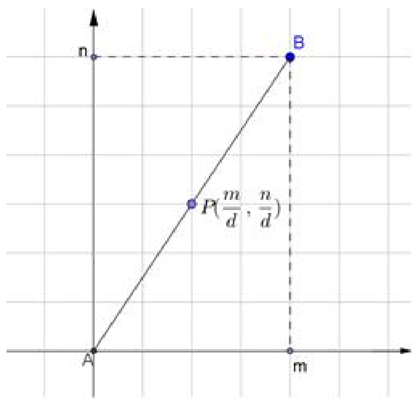
O triângulo fundamental é o menor polígono, com vértices de coordenadas inteiras, que pode ser traçado. Tais tipos de triângulos são extremamente úteis, pois qualquer polígono pode ser dividido em triângulos fundamentais como será visto mais a frente.

Lema 1.1.1. *(Teorema Bachet-Bézout) Se os inteiros m, n são primos entre si, então existem inteiros s, t tais que $tm - sn = 1$.*

A demonstração desse lema pode ser encontrada em [2].

Teorema 1.1.1. *A área de um triângulo fundamental é igual a $\frac{1}{2}$.*

Demonstração. (A demonstração apresentada abaixo foi retirada de [2].) Sejam $A(0,0)$ e $B(m,n)$ as coordenadas inteiras dos dois primeiros vértices do triângulo fundamental ABC. Mostremos, inicialmente, que m e n são primos entre si. Com efeito, se $d > 1$ fosse um divisor comum de m e n, o ponto $P(\frac{m}{d}, \frac{n}{d})$ estaria na rede e no interior do segmento de reta AB. Logo, ABC não seria fundamental.

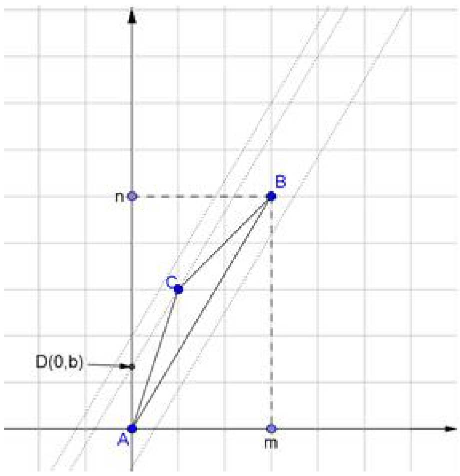


Suponhamos $m \neq 0$. A equação da reta que passa pelo ponto C e é paralela a AB é

$$y = \frac{n}{m}x + b$$

onde b é a ordenada do ponto $D(0, b)$, no qual a reta corta o eixo vertical. Todos os triângulos que têm AB como base e cujo terceiro vértice está sobre essa reta têm a mesma área que ABC. Em particular, áreaABC = área$ABD = \frac{|bm|}{2}$, pois $|b|$ é a medida da base e $|m|$ da altura de ABC. Resta-nos então provar que $|b| = \frac{1}{|m|}$. Para isto, consideremos mais geralmente a equação $y = \frac{n}{m}x + \beta$ de qualquer reta paralela a AB. Sabemos que β é a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo vertical. Se a reta passa por algum ponto da rede com coordenadas (s, t), então $t = \frac{n}{m}s + \beta$, donde

$$\beta = t - \frac{n}{m}s = \frac{tm - ns}{m}$$

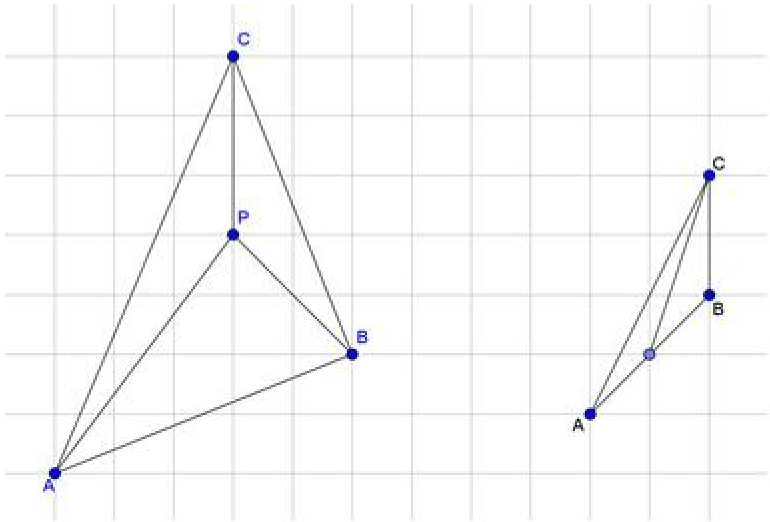


Dentre estas retas, nenhuma está mais próxima da reta AB do que a que passa pelo ponto C, para a qual temos $\beta = b$. Logo, $|b|$ é o menor valor positivo que $|\beta|$ pode assumir. Por outro lado, como m e n são primos entre si, o lema 1.1.1 nos assegura que existem inteiros s,t, tais que $tm - sn = 1$. Portanto, $\frac{1}{|m|}$ é o menor valor positivo de $|\beta|$, donde $|b| = \frac{1}{|m|}$.
Para completar a demonstração, falta considerar o caso $m = 0$. Mas, $m = 0$ obriga $n = \pm 1$ e ABC é um triângulo fundamental, logo sua área é $\frac{1}{2}$.

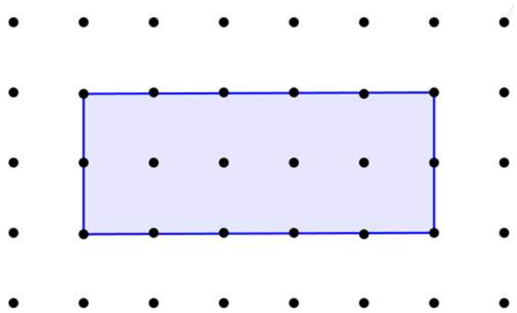
Teorema 1.1.2. *Todo polígono cujos vértices pertencem a uma rede pode ser decomposto numa reunião de triângulos fundamentais que partilham apenas um vértice ou somente uma aresta, ou seja, a interseção das áreas é nula.*

Demonstração. (A demonstração a seguir foi retirada de [2].) Para provar esse teorema, basta mostrar que todo triângulo de vértices na malha pode ser decomposto em triângulos fundamentais que partilham apenas um vértice ou somente uma aresta.

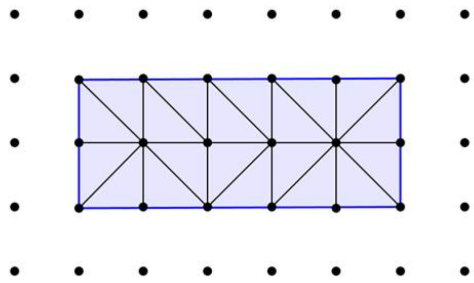
Considere que o polígono é um triângulo ABC que contém n pontos da rede (no interior ou no bordo). Se existir algum ponto P da rede no interior do triângulo, traçamos segmentos de reta ligando esse ponto aos vértices A, B e C e, deste modo, o triângulo ABC vai ser decomposto em três triângulos, cada um contendo um número n menor de pontos da rede. Se houver pontos da rede sobre os lados de ABC, escolhemos um deles, digamos AB, e ligamos ao outro vértice, C. Assim, decompomos ABC em dois triângulos, cada um contendo um número n menor de pontos da rede. Prosseguindo desta maneira, com um número finito de etapas, será obtida uma decomposição de ABC em triângulos fundamentais.



Exemplo 1.1.1. *Calcule a área do polígono a seguir.*



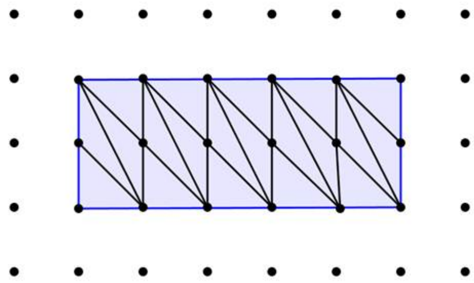
Vamos calcular a área do polígono acima usando triângulos fundamentais.



Sabemos que a área de um triângulo fundamental é $\frac{1}{2}$ *e observando nosso polígono, percebemos que ele está dividido em* 20 *triângulos fundamentais. Logo, sua área é:*

$$A = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$$

Será que se dividíssemos o polígono usando outros triângulos fundamentais, encontraríamos a mesma área? Observe o mesmo polígono dividido de outra forma.



Percebemos que apesar de dividirmos de outra maneira, encontramos a mesma quantidade de triângulos fundamentais, ou seja, 20*. Assim, sua área será a mesma.*

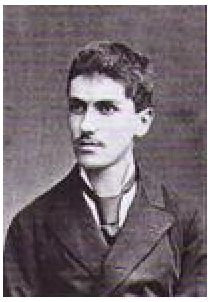
Observação 1.1.1. *Se um polígono convexo é particionado em um número finito de outros polígonos convexos (isto é, se o polígono é a união de um número finito de outros polígonos convexos, tais que dois quaisquer deles partilham somente um vértice, ou uma aresta), então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.*

Capítulo 2

Teorema de Pick

Neste capítulo, será descrito de forma breve a história do matemático Georg Alexander Pick. Também será apresentado e demonstrado o teorema que é mais lembrado desse matemático: o Teorema de Pick. Este teorema é uma forma diferente de se fazer o cálculo da área de polígonos que tenham coordenadas inteiras.

2.1 Um pouco de história



O austríaco Georg Alexander Pick nasceu em 10 de agosto de 1859, em Viena. Estudou em casa até os 11 anos e seu pai era seu professor. Sua primeira escola foi Leopoldstaedter Communal Gymsasium, onde ele permaneceu até 1875, quando foi para Universidade de Viena, na qual estudou Matemática e Física, formando-se em 1879. Após a conclusão de seu doutorado, que lhe rendeu um prêmio pela sua dissertação "Uber eine Klasse abelscher Intégrale", começou a sua vida laboral na Universidade Karl-Ferdinand, em Praga, primeiro como assistente de Ernest Mach, depois como professor. Pick manteve sua carreira acadêmica em Praga, exceto nos anos letivos de 1884-85, em que lecionou na Universidade de Leipzig. No campo da Matemática, o trabalho de Pick abordou tópicos como Álgebra Linear, Análise Funcional, Cálculo de Integrais e Geometria. Porém, o seu teorema mais lembrado é o Teorema de Pick que foi publicado em Praga em 1899. Pick faleceu em 26 de julho de 1942, aos 82 anos, em Theresienstadt, Bohemia.

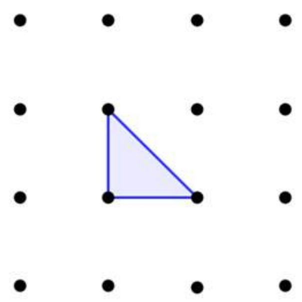
2.2 Relação de dependência

Será que existe relação de dependência entre a área (x), o número de pontos na fronteira (y) e o número de pontos internos (z) em polígonos cujos vértices tem coordenadas inteiras?

Será que tem uma relação de grau 1 para descrevê-la? Se existir, teremos algo da forma:

$$ax + by + cz + k = 0$$

Sendo aplicada tal relação aos polígonos a seguir, obtemos:

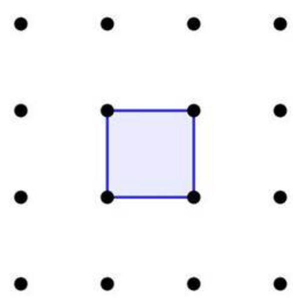


$$x = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y = 3$$

$$z = 0$$

$$\frac{1}{2}a + 3b + k = 0$$

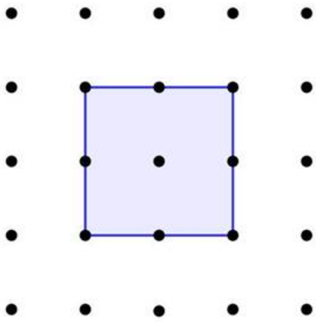


$$x = 1 \times 1 = 1$$

$$y = 4$$

$$z = 0$$

$$a + 4b + k = 0$$

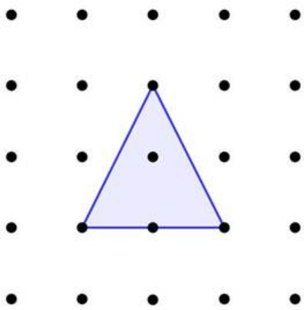


$$x = 2 \times 2 = 4$$

$$y = 8$$

$$z = 1$$

$$4a + 8b + c + k = 0$$



$$x = \frac{2 \times 2}{2} = 2$$

$$y = 4$$

$$z = 1$$

$$2a + 4b + c + k = 0$$

Assim, será obtido o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + 3b + k = 0 \\ a + 4b + k = 0 \\ 4a + 8b + c + k = 0 \\ 2a + 4b + c + k = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, será obtido o seguinte resultado:

$$a = k$$

$$b = \frac{-k}{2}$$
$$c = -k$$

Como,

$$ax + by + cz + k = 0$$
$$kx - \frac{k}{2}y - kz + k = 0$$
$$k(x - \frac{y}{2} - z + 1) = 0$$

Para qualquer valor de k é verdade, em particular para k=1. Logo,

$$x - \frac{y}{2} - z + 1 = 0$$
$$x = \frac{y}{2} + z - 1 \tag{2.1}$$

Portanto, é percebido que existe uma relação de dependência entre os objetos área, pontos de fronteira e pontos internos nesses polígonos acima. Logo, se existir uma relação de dependência que valha para todos os polígonos será algo desse tipo.

Será que essa fórmula é válida para qualquer polígono? Será visto a seguir que sim.

2.3 O Teorema de Pick

Teorema 2.3.1. *A área A de um polígono cujos vértices são pontos de uma rede é dada pela função*

$$A = \frac{b}{2} + I - 1$$

onde b é o número de pontos da rede situado sobre o bordo do polígono e I é o número de pontos da rede existentes no interior do polígono.

Demonstração. Para mostrar que o Teorema de Pick é dado por $A = \frac{b}{2} + I - 1$, basta mostrar que a área de um polígono P é dado pela metade do número de triângulos fundamentais α da decomposição de P, que é $b + 2I - 2$. Primeiro, vamos calcular a soma dos ângulos internos dos α triângulos fundamentais que compõem P. De um lado, temos que essa soma é igual a $\alpha\pi$. De outro, temos que calcular separadamente a soma S_b dos ângulos que têm vértice no bordo e a soma S_I dos ângulos cujos vértices estão no interior do polígono P. Sejam b_1 o número de vértices de P e b_2 o número de pontos na rede que estão sobre o bordo de P, mas não são vértices de P. Logo, $b = b_1 + b_2$. Então, S_b é a soma de $(b_1 - 2)\pi$, (pois a soma dos ângulos internos de um polígono é dada por $(n-2)\pi$, onde n é o número de lados de um polígono) mais $b_2\pi$ (pois cada vértice do bordo que não é vértice de P descreve um ângulo raso). Ou seja, $S_b = (b_1 - 2)\pi + b_2\pi = (b_1 + b_2 - 2)\pi = (b - 2)\pi$.

Por outro lado, cada ponto da rede, interior a P, forma um ângulo cuja medida é igual a 2π. Logo, $S_I = 2\pi I$, onde I é o número de vértices no interior de P. Portanto,

$$S_b + S_I = (b-2)\pi + 2\pi I = (b + 2I - 2)\pi$$

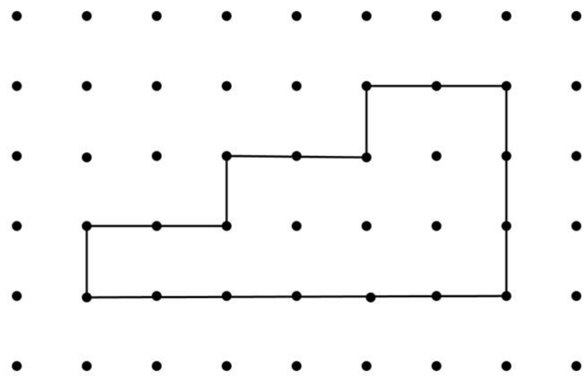
Comparando os dois resultados das somas dos ângulos internos dos α triângulos fundamentais que compõem P temos:

$$\alpha\pi = (b + 2I - 2)\pi$$

$$\alpha = b + 2I - 2$$

Como queríamos demonstrar.

Exemplo 2.3.1. *Calcular a área do polígono abaixo.*

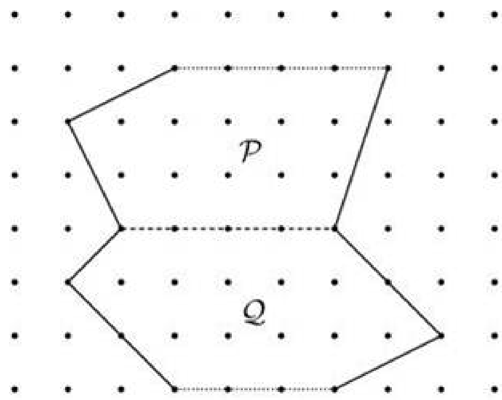


Analisando o polígono acima, percebemos que ele tem 18 *pontos de bordo e* 4 *pontos internos. Aplicando o teorema de Pick, temos:*

$$A = \frac{b}{2} + I - 1 = \frac{18}{2} + 4 - 1 = 12u.a.$$

2.4 Aditividade da fórmula de Pick

Proposição 2.4.1. *Dados dois polígonos P e Q, que possuem um segmento comum, onde suas extremidades pertencem a malha. Se o teorema de Pick é verdadeiro tanto para P quanto para Q, também é válido para o polígono R, que é obtido pela adição de P e Q.*



Demonstração. Como o teorema de Pick é válido tanto para P quanto para Q, temos que:

$$A_P = \frac{b_P}{2} + I_P - 1$$

$$A_Q = \frac{b_Q}{2} + I_Q - 1$$

onde, b_P e b_Q são os pontos no bordo de P e Q, respectivamente, e I_P e I_Q são os pontos no interior de P e Q respectivamente. Como os polígonos P e Q possuem uma aresta comum, então os k pontos dessa aresta com exceção dos dois pontos finais da borda, passarão a ser os pontos internos de R. Logo,

$$I_R = (I_P + I_Q) + (k - 2)$$

$$b_R = (b_P + b_Q) - 2(k - 2) - 2$$

Então,

$$I_P + I_Q = I_R - (k - 2)$$

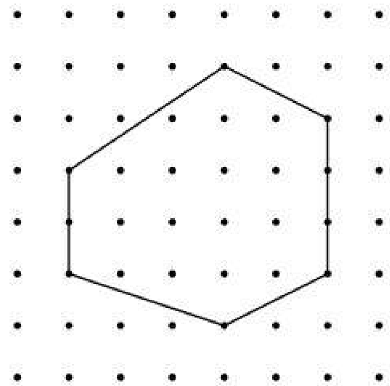
$$b_P + b_Q = b_R + 2(k - 2) + 2$$

Como o teorema de Pick foi assumido como verdadeiro para P e Q separadamente, temos:

$$\begin{aligned}
A_R &= A_P + A_Q \\
&= (\frac{b_P}{2} + I_P - 1) + (\frac{b_Q}{2} + I_Q - 1) \\
&= (\frac{b_P + b_Q}{2}) + (I_P + I_Q) - 2 \\
&= \frac{b_R + 2(k-2) + 2}{2} + I_R - (k - 2) - 2 \\
&= \frac{b_R}{2} + I_R + (k - 2) + 1 - (k - 2) - 2 \\
&= \frac{b_R}{2} + I_R - 1
\end{aligned}$$

Portanto, o teorema de Pick é válido para R. Assim, conclui-se que a fórmula do Teorema de Pick é aditiva.

Exemplo 2.4.1. *Determinar a área do polígono a seguir.*



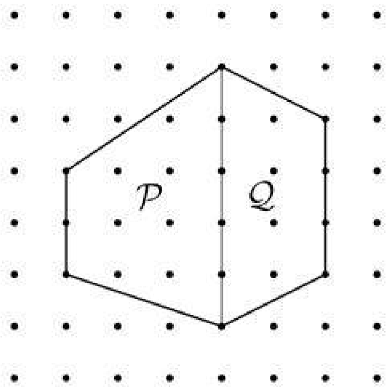
Vamos denotar esse polígono de R.

Primeiramente, vamos calcular a área utilizando o terema de Pick.

Nota-se que o polígono R tem 9 *pontos no bordo e* 15 *pontos internos. Aplicando a fórmula de Pick temos:*

$$A(R) = \frac{9}{2} + 15 - 1 = 18,5u.a.$$

Agora, vamos dividir o polígono acima, em dois outros polígonos, pois assim podemos verificar a aditividade da fórmula.



Começaremos analisando o polígono P. Ele possui 9 *pontos no bordo e* 7 *pontos internos. Por Pick obtemos:*

$$A(P) = \frac{9}{2} + 7 - 1 = 10,5u.a.$$

Agora, vamos explorar o polígono Q. Ele apresenta 10 *pontos no bordo e* 4 *pontos internos. Assim, utilizando o teorema, temos:*

$$A(Q) = \frac{10}{2} + 4 - 1 = 8u.a.$$

Assim, confirmamos a aditividade do teorema de Pick por este exemplo, pois:

$$A(R) = A(P) + A(Q)$$

$$A(R) = 10,5 + 8 = 18,5u.a.$$

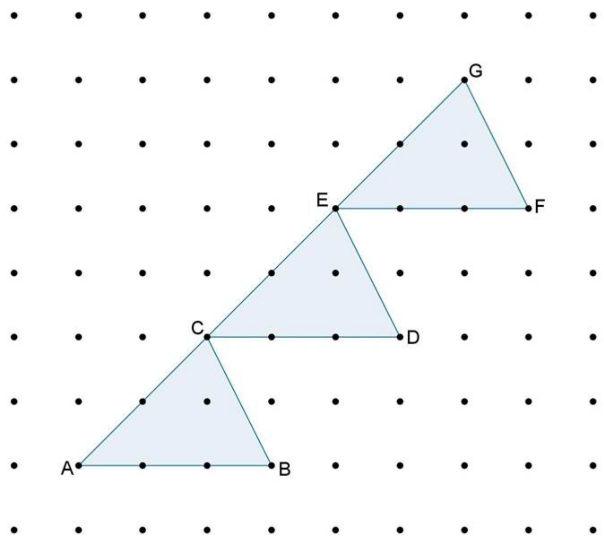
2.5 Propriedades do Teorema de Pick

Nesta seção observamos, sob a luz do Teorema de Pick, algumas propriedades dos movimentos rígidos: translação, reflexão, homotetia e rotação.

1. Translação

   A translação é o termo usado para "mover" formas, sendo necessárias duas especificações: a direção e o deslocamento.

   Analisando as imagens abaixo e aplicando o teorema de Pick obtemos:

   No polígono ABC temos:
   $$A = \frac{6}{2} + 1 - 1 = 3$$

   No polígono CDE temos:
   $$A = \frac{6}{2} + 1 - 1 = 3$$

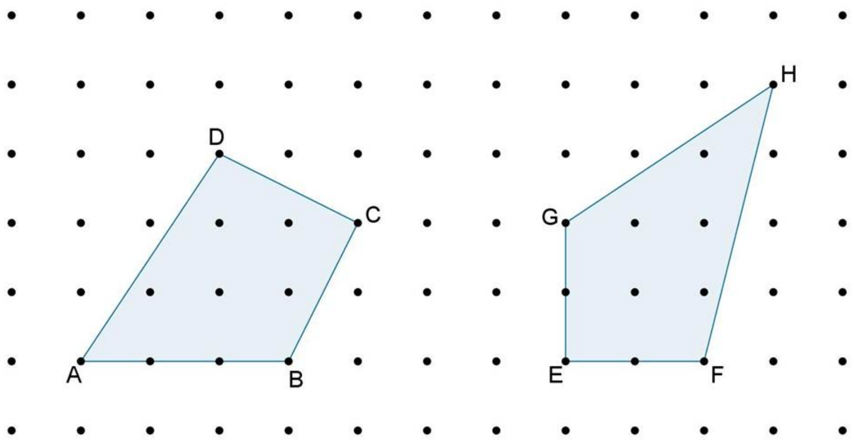
   No polígono EFG temos:
   $$A = \frac{6}{2} + 1 - 1 = 3$$

   Assim, é observado que apesar da figura ter sofrido uma translação a área dela não muda.

2. Invariância

Invariância é uma propriedade de um sistema e suas grandezas, as quais permanecem imutáveis, caracterizando uma grandeza invariante, sobre qualquer transformação. Ou seja, é algo que não altera ao aplicar-se um conjunto de transformações.

Os exemplos abaixo demonstram essa propriedade.



No polígono ABCD obtemos:

$$A = \frac{6}{2} + 5 - 1 = 7$$

No polígono EFHG obtemos:

$$A = \frac{6}{2} + 5 - 1 = 7$$

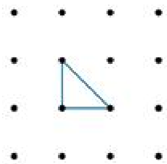
Assim, polígonos que tem a mesma quantidade de pontos internos e na fronteira tem a mesma área, ou seja, o teorema de Pick garante a propriedade de invariância.

3. Homotetia

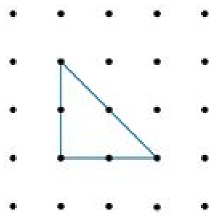
Figuras homotéticas são figuras semelhantes dispostas de modo que os lados homólogos sejam paralelos.

A homotetia é aplicada para ampliar ou reduzir uma figura plana, numa razão chamada razão de homotetia. Assim, a área da imagem de um polígono P por meio de uma homotetia de razão r é a área de P vezes r^2.

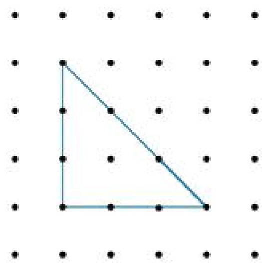
Vamos analisar algumas situações para percebermos que essa relação dita acima é verdadeira. Vamos trabalhar com triângulos.



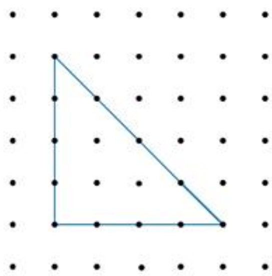
Na figura observa-se 3 pontos no bordo e nenhum ponto interno.



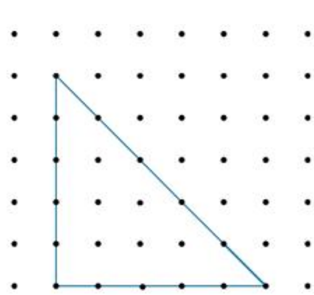
Nessa figura temos 6 pontos no bordo e nenhum ponto interno.



Agora, percebemos 9 pontos no bordo e 1 ponto interno.



Notam-se 12 pontos no bordo e 3 pontos internos.



São percebidos 15 pontos no bordo e 6 pontos internos.

Considere o número de figuras igual a r.

Assim, percebemos que a partir da terceira figura, passamos a ter pontos internos. Nota-se que:

$$r = 3 \rightarrow 1$$

$$r = 4 \rightarrow 1 + 2$$

$$r = 5 \rightarrow 1 + 2 + 3$$

Logo, a quantidade de pontos internos é dada pela soma de uma PA que tem $(r-2)$ termos e cujo primeiro termo é 1 e o último é $(r-2)$. Assim, podemos dizer que a quantidade de pontos internos é dada por:

$$\frac{(r-2)(r-1)}{2}$$

Por outro lado, o número de pontos no bordo é igual a $3r$.

Aplicando a fórmula de Pick obtemos:

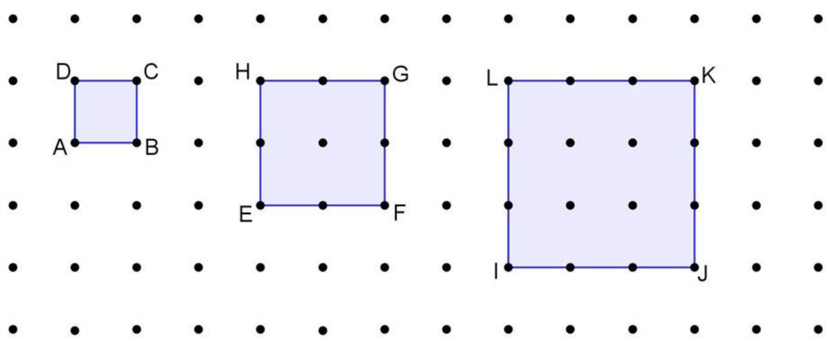
$$A = \frac{3r}{2} + \frac{(r-2)(r-1)}{2} - 1$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot r^2$$

Ou seja, encontramos que a área da figura obtida por uma ampliação da primeira, que era um triângulo fundamental, foi igual a área da primeira vezes a razão ao quadrado.

Isso é verdade mesmo que escolhamos outro tipo de triângulo fundamental ou mesmo outro polígono.

Exemplo 2.5.1. *Vamos perceber o que acontece com a área dos polígonos quando ocorre a homotetia.*



No polígono ABCD observa-se que:

$$A = \frac{4}{2} + 0 - 1 = 1$$

No polígono EFGH observa-se que:

$$A = \frac{8}{2} + 1 - 1 = 4$$

No polígono IJKL observa-se que:

$$A = \frac{12}{2} + 4 - 1 = 9$$

Assim percebe-se que:

- $A(EFGH) = 2^2 \cdot A(ABCD)$, *ou seja, a razão de homotetia é* 2.

- $A(IJKL) = 3^2 \cdot A(ABCD)$, *ou seja, a razão de homotetia é* 3.

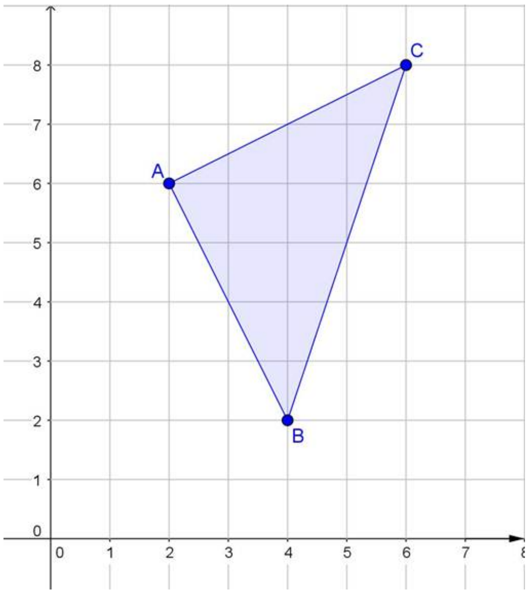
Considerando que a razão de homotetia r é inteiro, temos que r^2 é inteiro, então o polígono continua tendo coordenadas inteiras.

Seja um ponto $P = (x, y)$.

Como a homotetia é de razão r, então a hometetia leva o ponto P em (rx, ry).

Se r for um número racional, ou seja, $r = \frac{c}{q}$, então para que os vértices dos polígonos tenham coordenadas inteiras, é necessário que $q|x$ e $q|y$, $\forall (x, y) \in V(P)$, que é o conjunto de vértices de P.

Exemplo 2.5.2. *Dado o polígono abaixo, construa um polígono semelhante a ele de razão* $\frac{1}{2}$.



Aplicando a definição de homotetia, vamos determinar os vértices para o polígono semelhante.

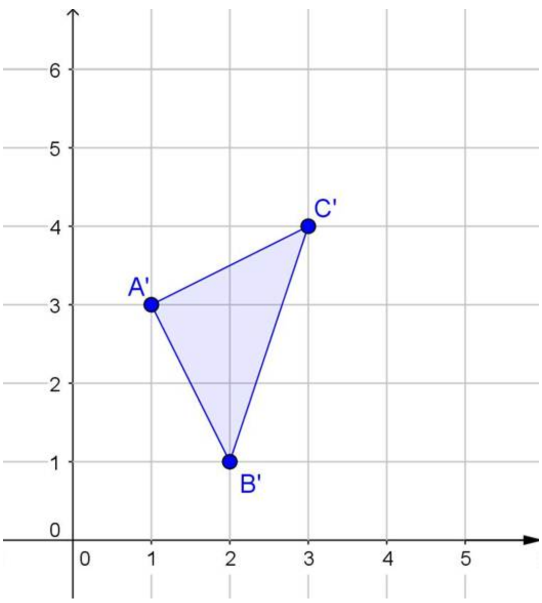
$A(2,6) \longrightarrow A'(1,3)$

$B(4,2) \longrightarrow B'(2,1)$

$C(6,8) \longrightarrow C'(3,4)$

Isso só foi possível, pois o denominador da razão dividia todos os valores de x e y, que eram coordenadas do nosso polígono.

Logo, temos o seguinte polígono semelhante.



Capítulo 3

Aplicações do Teorema de Pick

3.1 O Teorema de Pick e a Fórmula de Euler

A fórmula de Euler para polígonos, ou seja, para poliedros planificados cujos vértices tenham cordenadas inteiras, é apresentada por $F - A + V = 1$, onde F, A e V representam, respectivamente, o número de faces, o número de arestas e o número de vértices obtidos da decomposição de um polígono P em polígonos menores. Para que essa relação seja válida, a seguinte condição precisa ser satisfeita: "duas faces quaisquer da decomposição, ou são disjuntas, ou têm um vértice em comum, ou têm uma ou mais arestas em comum".

Demonstração. (Será utilizada aqui a demonstração abordada em [2].) Seja um poliedro planificado P, cujos vértices tenham cordenadas inteiras, e decomponha cada uma de suas faces em triângulos, sem acrescentar novos vértices. Dessa forma, F e A se alterarão, mas V permanecerá o mesmo. Se for acrescentado uma nova aresta, cada um dos números F e A aumenta de uma unidade, logo esses aumentos se anulam em $F-A+V$. Será admitido, sem perda de generalidade, que as faces do poliedro planificado P serão todas triângulos. Considere $V = V_i + V_b$, onde V_i é o número de vértices interiores e V_b o número de vértices sobre o bordo de P. A soma dos ângulos internos do poliedro plano P pode ser obtido de duas formas:

- Como todas as faces são triângulos e a soma dos ângulos internos de um triângulo é π temos:

$$F \cdot \pi \tag{3.1}$$

- Também pode ser calculada levando em conta os vértices que coincidem com os vértices de P

$$(V_b - 2)\pi$$

e os vértices interiores

$$V_i \cdot 2\pi$$

Assim,

$$(V_b - 2) \cdot \pi + V_i \cdot 2\pi = \pi(V_b + 2V_i - 2) \tag{3.2}$$

Igualando (3.1) e (3.2) será obtido

$$F \cdot \pi = \pi(V_b + 2V_i - 2)$$

$$F = V_b + 2V_i - 2$$

Como $V_i = V - V_b$, temos $F = 2V - V_b - 2$.

Cada face de P tem 3 arestas, cada aresta interior é lado de 2 faces e cada aresta do bordo é lado de 1 face. Considerando que o número de arestas do bordo é igual ao número V_b de vértices desse mesmo bordo, temos

$$3F = 2A - V_b$$

Subtraindo membro a membro as igualdades

$$3F = 2A - V_b$$

$$F = 2V - V_b - 2$$

obtemos, $2F = 2A - 2V + 2$, ou seja,

$$F = A - V + 1 \tag{3.3}$$

que é o teorema de Euler para poliedros planificados.

Por outro lado, como F representa o número de triângulos fundamentais e a área $\phi(P)$ de um triângulo fundamental é $\frac{1}{2}$ temos

$$\phi(P) = \frac{1}{2} \cdot F$$

$$F = 2 \cdot \phi(P) \tag{3.4}$$

Igualando (3.3) e (3.4) será obtido

$$2 \cdot \phi(P) = A - V + 1$$

$$\phi(P) = \frac{A - V + 1}{2}$$

Assim, percebemos a relação entre o Teorema de Pick e a Fórmula de Euler.

Exemplo 3.1.1. *Considere que existe a planificação de poliedros que possuem vértices na malha.*

Como a fórmula de Euler é $F = A - V + 1$ e F representa o número de triângulos fundamentais, temos que $F = 2 \cdot \varphi(P)$, onde P é o poliedro e $\varphi(P)$ sua área.

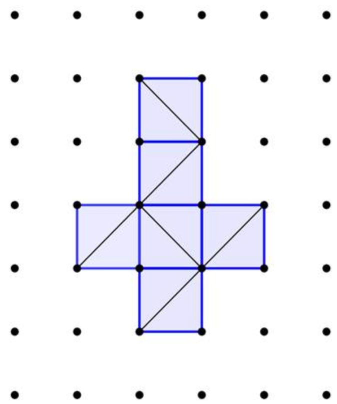
Assim, obtemos:

$$2 \cdot \varphi(P) = A - V + 1$$

Logo,

$$\varphi(P) = \frac{A - V + 1}{2}$$

Aplicando o teorema no cubo de aresta 1 temos:



Observa-se que o cubo planificado e triangulado tem 25 arestas, 12 faces e 14 vértices. Logo:

$$\frac{A - V + 1}{2} = \frac{25 - 14 + 1}{2} = 6u.a.$$

Por outro lado,

$$F = 2 \cdot \varphi(P)$$

$$2 \cdot \varphi(P) = 12$$

$$\varphi(P) = 6u.a.$$

Assim, verificamos a Fórmula de Euler nesse exemplo.

3.2 O teorema de Pick e o número π

Sabe-se que a fórmula para calcular a área de um círculo é dado por:

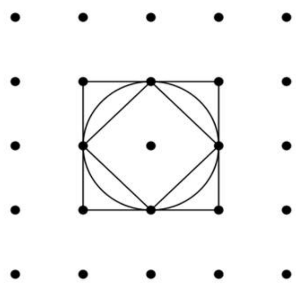
$$A(C) = \pi \cdot r^2$$

onde r é o raio do círculo. A partir dessa informação, pode-se obter o valor de π pela seguinte relação:

$$\pi = \frac{A(C)}{r^2}$$

Para estimar o valor de π, serão utilizados os polígonos cujas áreas se aproximam da área do círculo.

Observe a figura abaixo, cujo círculo tem raio 1.



Vamos tentar calcular o valor de π pela aproximação das áreas desses dois quadrados.

Primeiro, vamos trabalhar com o quadrado que está inscrito no círculo.

A área do quadrado Q_1, utilizando a fórmula de Pick, é dada por:

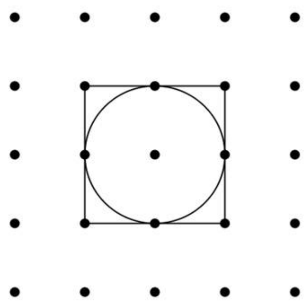
$$A(Q_1) = \frac{4}{2} + 1 - 1 = 2u.a.$$

Logo,

$$\pi = \frac{A(C)}{r^2} \approx \frac{A(Q_1)}{r^2} = \frac{2}{1^2} = 2$$

Porém, essa aproximação para π está muito ruim.

Agora, vamos trabalhar com o quadrado Q_2 circunscrito, considerando a unidade 1.



Aplicando a fórmula de Pick para calcular a área de Q_2, obtemos:

$$A(Q_2) = \frac{8}{2} + 1 - 1 = 4u.a.$$

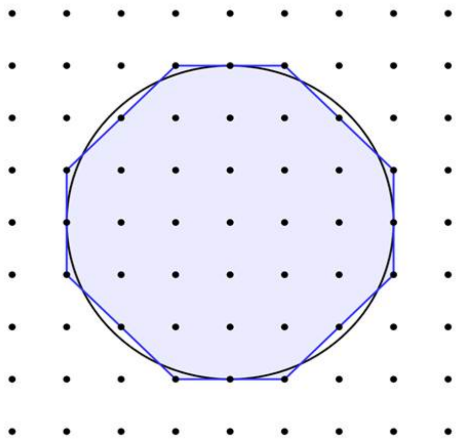
Logo,

$$\pi \approx \frac{A(Q_2)}{r^2} = \frac{4}{1^2} = 4$$

que também é uma aproximação ruim para π.

Como os valores de π encontrados são aproximações grosseiras, vamos tentar calcular o valor dele utilizando outros polígonos.

Vamos analisar o octógono P abaixo.



Pela fórmula de Pick temos:

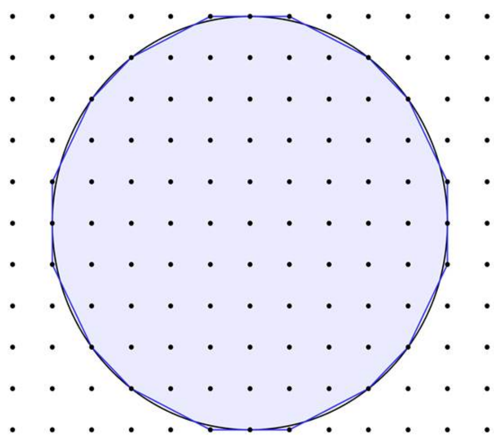
$$A(P) = \frac{16}{2} + 21 - 1 = 28u.a.$$

Assim,

$$\pi \approx \frac{A(P)}{r^2} = \frac{28}{3^2} = 3,1111...$$

que é uma boa aproximação para π.

Será que conseguimos uma aproximação melhor? Vamos tentar com um polígono irregular R de 16 lados para ver o que conseguimos.



Observando o polígono R, percebemos que tem 20 pontos no bordo e 69 pontos internos. Já o círculo tem raio igual a 5. Aplicando a fórmula de Pick para calcular a área do polígono R, obtemos:

$$A(R) = \frac{20}{2} + 69 - 1 = 78u.a.$$

Assim,

$$\pi \approx \frac{A(R)}{r^2} = \frac{78}{5^2} = 3,12$$

que é uma aproximação bem melhor do número π.

Poderíamos repetir esse procedimento tantas vezes quanto desejássemos, de forma que a área do polígono se aproximasse mais da área do círculo, ou seja, aumentasse a quantidade de pontos no bordo e no interior. Assim, quando a quantidade de pontos tender ao infinito, o valor de π tenderá ao seu valor real.

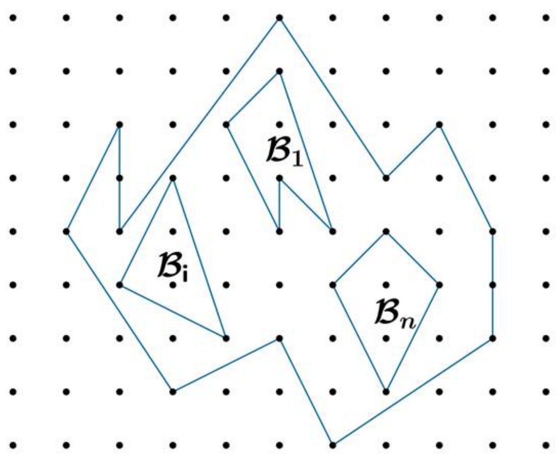
3.3 O teorema de Pick para polígonos com buracos

Teorema 3.3.1. *A área de um polígono P com m buracos é dada por:*

$$A(P) = \frac{b}{2} + I + m - 1,$$

onde b é o número de pontos no bordo de P e no bordo dos buracos e I é o número de pontos no interior de P, excluindo os pontos que estão no interior dos buracos.

Demonstração. Seja P um polígono com m buracos. Denote cada um de seus buracos por B_i, onde $1 \leq i \leq m$.



Nota-se que o teorema de Pick é válido tanto para o polígono P, como para cada um dos buracos. Considere que o polígono P tem b_0 pontos no bordo e I_0 pontos interiores.

Já cada buraco possui b_n pontos sobre o bordo e I_n pontos internos, com $0 \leq n \leq m$. Logo,

$$A(P) = \frac{b_0}{2} + I_0 - 1$$

$$A(B_n) = \frac{b_n}{2} + I_n - 1$$

Assim, a área da região R limitada pelo polígono P e pela parte externa dos buracos será dada por:

$$\begin{aligned}
A(R) &= A(P) - A(B_n) \\
&= A(P) - A(B_1) - A(B_2) - ... - A(B_m) \\
&= \frac{b_0}{2} + I_0 - 1 - (\frac{b_1}{2} + I_1 - 1) - (\frac{b_2}{2} + I_2 - 1) - ... - (\frac{b_m}{2} + I_m - 1) \\
&= \frac{b_0}{2} - (\frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} + ... + \frac{b_m}{2}) + I_0 - (I_1 + I_2 + ... + I_m) - 1 + \underbrace{(1 + 1 + ... + 1)}_{\text{m vezes}} \\
&= \frac{b_0}{2} + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} + ... + \frac{b_m}{2} - (b_1 + b_2 + ... + b_m) + I_0 - (I_1 + I_2 + ... + I_m) - 1 + m \\
&= \frac{b_0 + b_1 + b_2 + ... + b_m}{2} - (b_1 + b_2 + ... + b_m) + I_0 - (I_1 + I_2 + ... + I_m) - 1 + m
\end{aligned}$$

Observe que

$$\frac{b_0 + b_1 + b_2 + ... + b_m}{2}$$

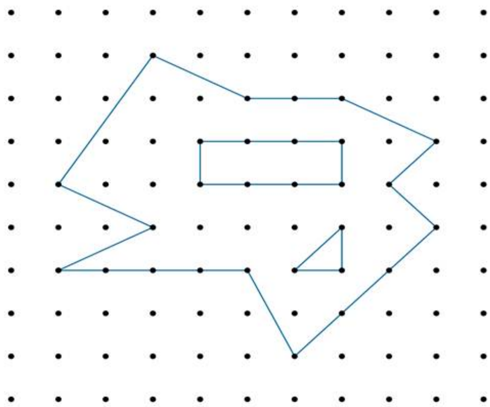
representa metade dos pontos sobre o bordo e

$$I_0 - (I_1 + I_2 + ... + I_m) - (b_1 + b_2 + ... + b_m)$$

a quantidade de pontos no interior. Logo,

$$A(R) = \frac{b}{2} + I + m - 1$$

Exemplo 3.3.1. *Calcular a área do polígono abaixo.*



Analisando o polígono acima, percebemos que ele tem 28 *pontos de bordo (pontos no bordo do polígono mais os pontos no bordo dos buracos),* 12 *pontos internos e* 2 *buracos. Aplicando a fórmula de Pick, temos:*

$$A = \frac{b}{2} + I + m - 1 = \frac{28}{2} + 12 + 2 - 1 = 27u.a.$$

Capítulo 4

Trabalhando com o professor

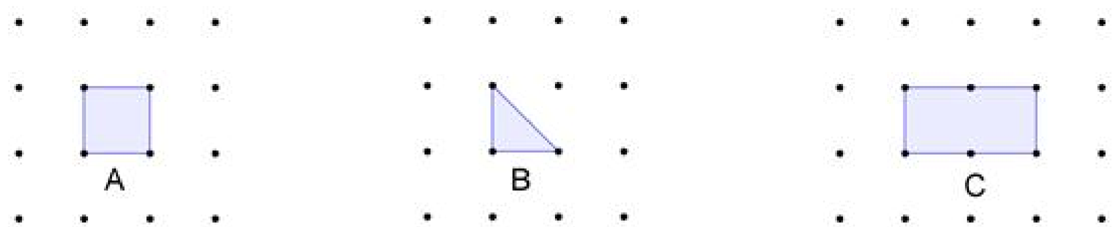
Neste capítulo, será demonstrado como o professor pode apresentar para os alunos o teorema de Pick e alguns exercícios que podem ser aplicados para os mesmos em relação a alguns tópicos que foram abordados no capítulo 3 e outros conteúdos matemáticos.

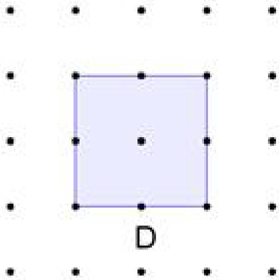
4.1 Estudo Dirigido

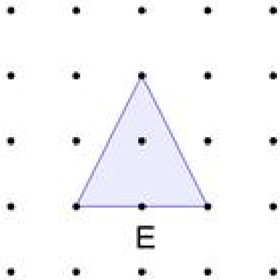
Abaixo, segue um estudo dirigido para o professor levar ao conhecimento do aluno o teorema de Pick. Nele, o aluno é levado através do preenchimento de uma tabela e pelo auxílio do professor a chegar na fórmula do teorema. Também, o estudo dirigido traz alguns exercícios para a aplicação do teorema. O mesmo encontra-se respondido no anexo.

Estudo Dirigido

Vamos preencher a tabela a partir das figuras apresentadas abaixo, onde b é o número de pontos no bordo e I o número de pontos internos. Considere a unidade igual a 1.







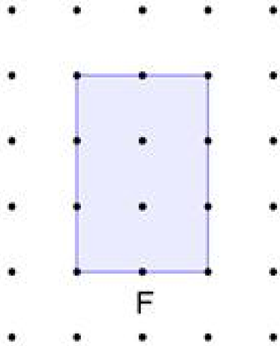


Tabela 4.1: Teorema de Pick

Figura	b	I	Área da figura	$\frac{b}{2}+I-1$
A				
B				
C				
D				
E				
F				

Comparando a quarta e quinta colunas percebemos que o resultado encontrado é o mesmo. Assim, percebemos que podemos calcular a área de um polígono da seguinte forma:

"Dividimos o número de pontos no bordo do polígono por 2, somamos o resultado ao número de pontos no interior do polígono e, em seguida, subtraímos um."

Este resultado obtido é o teorema mais lembrado do matemático austríaco Georg Pick, o teorema de Pick.

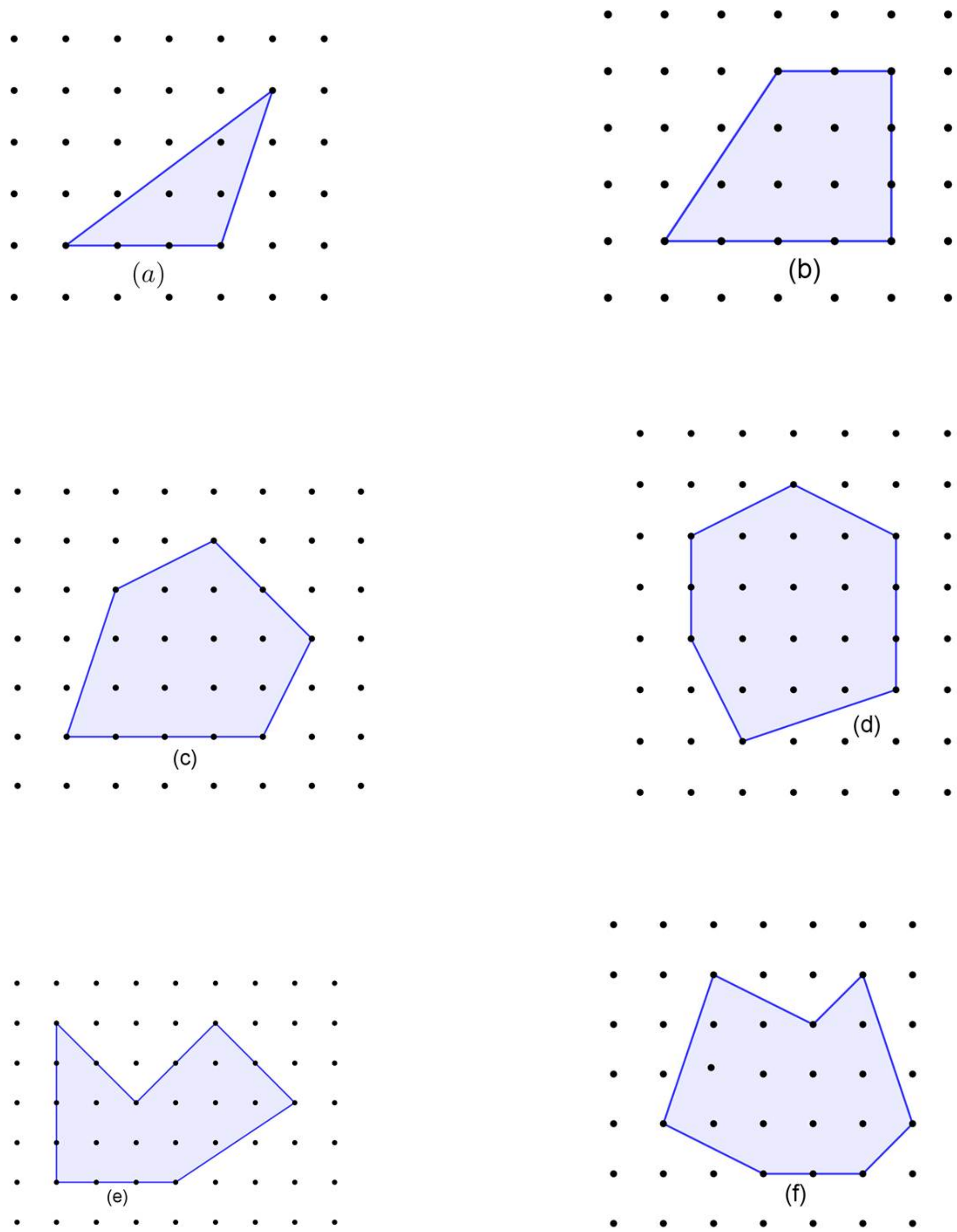
Teorema de Pick: A área A de um polígono cujos vértices são pontos de uma rede é dada pela função

$$A = \frac{b}{2} + I - 1,$$

onde b é o número de pontos da rede situado sobre o bordo do polígono e I é o número de pontos da rede existente no interior do polígono.

EXERCÍCIO

Aplicando o teorema apresentado acima, calcule a área dos polígonos a seguir.



Sugestão:

- Pode ser aplicado tanto no Ensino Fundamental II quanto no Ensino Médio.
- É bastante interessante comprovar a solução utilizando o Geogebra.

4.2 Exercício 1

Calcule a área do polígono determinado pelas seguintes retas:

$$y = x$$

$$y = 15 - x$$

$$y = 7$$

$$y = \frac{1}{2}(15 - x)$$

Resolução: Primeiro, vamos traçar essas retas num mesmo plano cartesiano. A figura obtida está representada abaixo.

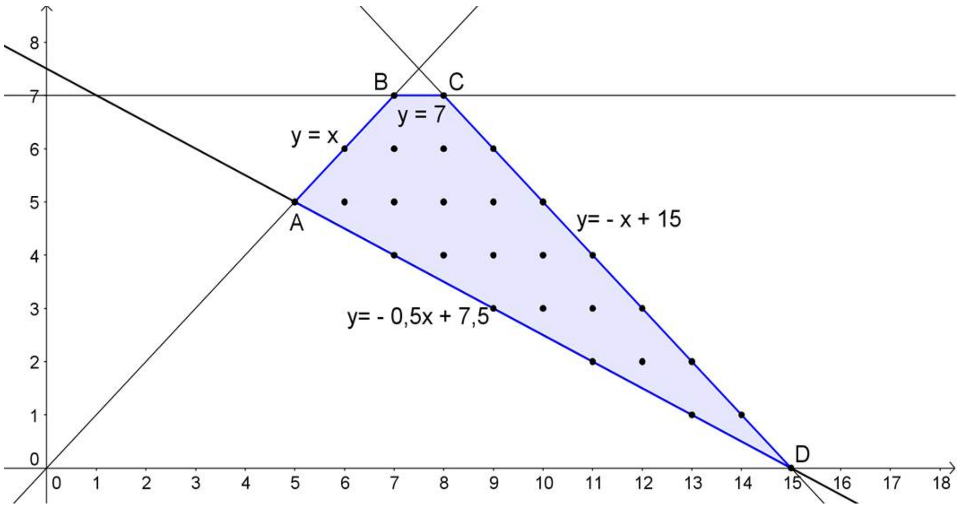


Figura 4.1: Área determinada pelas retas

Percebemos no quadrilátero ABCD obtido que temos 15 pontos na fronteira e 12 pontos internos. Assim, aplicando a fórmula de Pick temos:

$$A = \frac{b}{2} + i - 1$$

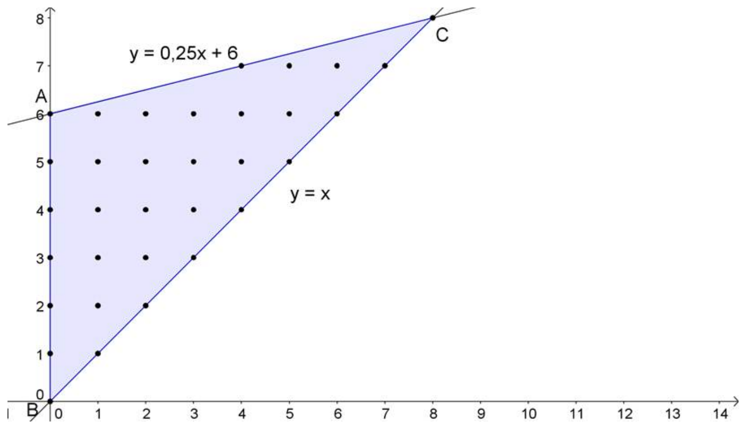
$$A = \frac{15}{2} + 12 - 1 = 18,5u.a.$$

Sugestão: A figura pode ser feita no Geogebra e sua área conferida no próprio programa.

4.3 Exercício 2

Qual a área do polígono determinado pelas retas $y - 6 = 0,25x$ e $y = x$?

Resolução: Primeiro, vamos traçar essas retas num mesmo plano cartesiano. A figura obtida está representada abaixo.



Obtemos o triângulo ABC que possui 16 pontos de fronteira e 17 pontos internos. Aplicando a fórmula de Pick:

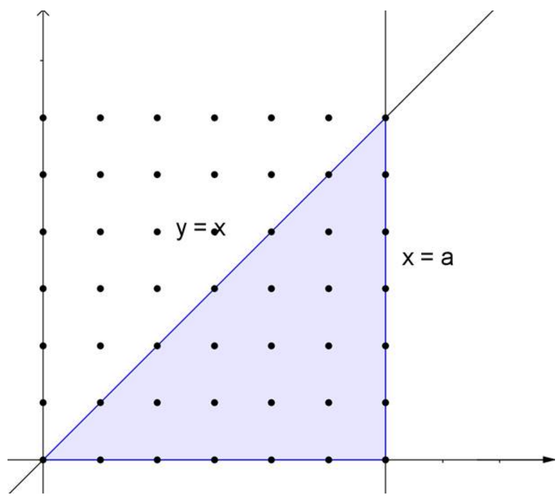
$$A = \frac{b}{2} + i - 1$$

$$A = \frac{16}{2} + 17 - 1 = 24u.a.$$

4.4 Exercício 3

Escreva a relação que determina o número de pontos internos do polígono formado pelo eixo das abscissas, a reta $y = x$ e a reta $x = a$.

Resolução: Podemos traçar no plano cartesiano as retas para termos uma ideia do que acontece.



Analisando a figura, percebemos que a área do triângulo ABC é metade da área do quadrado ABCD. Também podemos determinar a área desse triângulo usando a fórmula de Pick. Assim, notamos que o número de ponto na fronteira é o triplo da medida do lado do quadrado, logo:

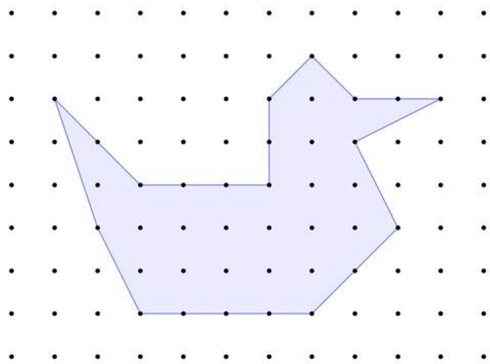
$$\frac{a^2}{2} = \frac{b}{2} + i - 1$$

$$\frac{a^2}{2} - \frac{b}{2} + 1 = i$$
$$i = 0 + 1 + 2 + ... + a - 2$$
$$\frac{a^2}{2} - \frac{3a}{2} + 1 = i$$

Portanto, conseguimos determinar o número de pontos internos em função do número a, que é a medida do lado do quadrado.

4.5 Exercício 4

Qual a área da figura abaixo?



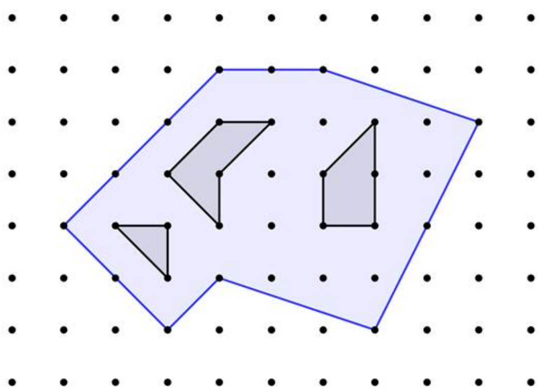
Resolução: Percebemos que a figura possui 21 pontos de fronteira e 16 pontos internos. Aplicando a fórmula de Pick:

$$A = \frac{b}{2} + i - 1$$

$$A = \frac{21}{2} + 16 - 1 = 25,5u.a.$$

4.6 Exercício 5

Qual a área da figura abaixo?



Resolução: Nota-se que o polígono tem 25 pontos de fronteira, 8 pontos internos e 3 buracos. Pela fórmula de Pick obtemos:

$$A = \frac{b}{2} + i + m - 1$$

$$A = \frac{25}{2} + 8 + 3 - 1 = 22,5u.a.$$

Portanto, a área do polígono é 22,5u.a.

4.7 Exercício 6

Corte o primeiro triângulo no diagrama em partes que possam ser rearrumadas para formar o segundo triângulo.

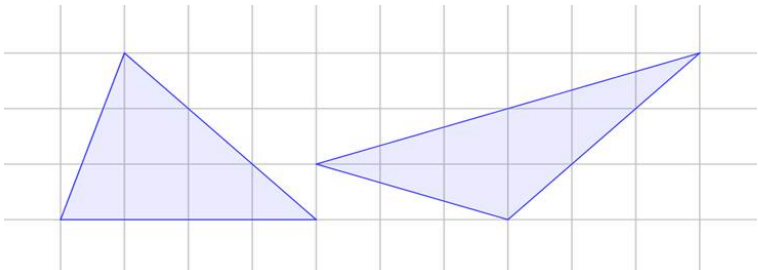


Figura 4.2: Exercício 6

Resolução:

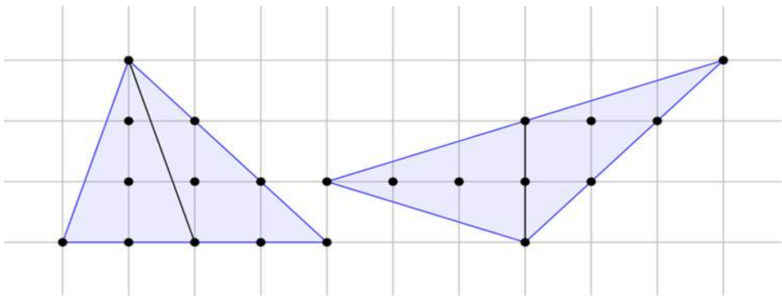


Figura 4.3: Resolução do Exercício 6

Percebemos que o segundo triângulo tem dois lados iguais ao primeiro. Logo, a ideia foi dividir o lado diferente exatamente na metade como se observa na figura 4.3.

4.8 Exercício 7

No diagrama abaixo, vemos duas figuras que estão divididas em quatro partes. Aparentemente, elas são iguais. Elas apresentam a mesma área?

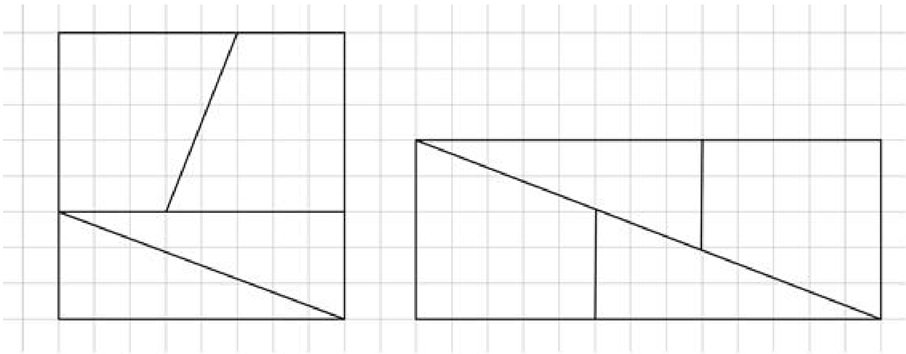


Figura 4.4: Exercício 7

Resolução: Nota-se que os triângulos são todos congruentes. Então, as duas figuras só terão a mesma área, se a soma das duas áreas dos quadriláteros da primeira figura, for igual a soma das duas áreas dos quadriláteros da segunda figura. Porém, não seria possível aplicar o teorema de Pick na segunda figura, pois existem polígonos que não tem coordenadas inteiras. Por outro lado, podemos comparar a área das figuras olhando a primeira como um grande quadrado e a segunda como um grande retângulo, em ambos os casos, desconsiderando as divisões internas das figuras.

Analisando a primeira figura, percebemos 32 pontos de fronteira e 42 pontos internos. Assim:

$$A = \frac{32}{2} + 42 - 1 = 64$$

Observando a segunda figura, percebemos 36 pontos de fronteira e 48 pontos internos. Assim:

$$A = \frac{36}{2} + 48 - 1 = 65$$

Portanto, as duas figuras possuem áreas diferentes.

Capítulo 5

Generalizações do Teorema de Pick

5.1 Teorema de Pick na malha hexagonal

Para determinar a área de um polígono usando o Teorema de Pick na malha hexagonal, além dos parâmetros b (número de pontos na fronteira) e i (número de pontos internos), dependemos de um parâmetro adicional c, que chamaremos de característica de fronteira. Esse parâmetro é determinado por:

$$c(x, P) = |F(x) - G(x)|$$

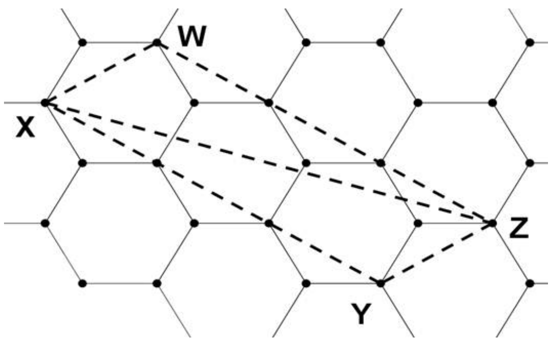
onde $F(x)$ é a quantidade de arestas que começam em P e se estendem para o seu exterior e $G(x)$ é a quantidade de arestas que começam em P e se estendem para o seu interior.

Assim, a área de um polígono será determinada por:

$$A(P) = \frac{1}{4} \cdot b + \frac{1}{2} \cdot i + \frac{1}{12} \cdot c - 1$$

Podemos encontrar mais detalhes sobre o teorema de Pick na malha hexagonal em [10].

Exemplo 5.1.1. *Calcular a área do paralelogramo $XWZY$.*



Analisando o polígono acima, percebemos que ele tem 8 *pontos de bordo,* 3 *pontos internos* *e o $c = 6$. Aplicando o teorema de Pick, temos:*

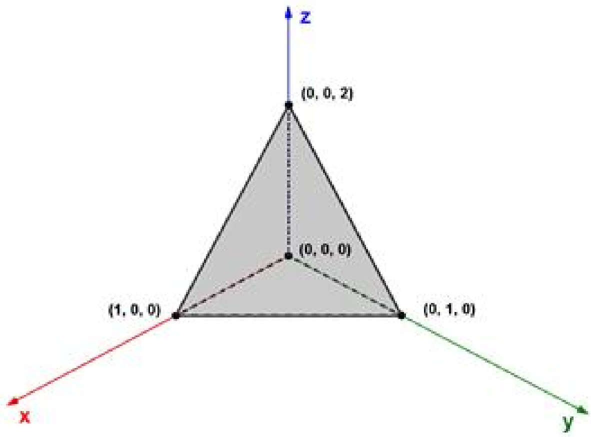
$$A(P) = \frac{1}{4} \cdot b + \frac{1}{2} \cdot i + \frac{1}{12} \cdot c - 1$$

$$A(P) = \frac{1}{4} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{12} \cdot 6 - 1$$

$$A(P) = 3u.a.$$

5.2 Teorema de Pick e o 3D

Seja um tetraedro cujos vértices são da forma $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,r)$ onde r é um número inteiro. Se considerarmos $r = 2$, obteremos uma pirâmide como a da figura abaixo.



Analisando a figura, percebemos 4 pontos de fronteira e 1 ponto interno. Se considerarmos que o teorema de Pick é válido para o cálculo do volume, temos:

$$V = \frac{b}{2} + i - 1$$

$$V = \frac{4}{2} + 1 - 1 = 2u.v.$$

Porém, sabemos que o volume de uma pirâmide é dado por:

$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h$$

onde S_b é a área da base e h é a altura. Assim, nota-se que o volume dessa pirâmide é igual a:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

Portanto, essa fórmula de Pick não é válida para o cálculo do volume. Existe uma fórmula que podemos obter mais informações em [11].

Capítulo 6

Considerações Finais

A maior preocupação ao desenvolver esse trabalho era contribuir com o trabalho do professor, por isso o tema escolhido estava relacionado com geometria, que é uma parte da Matemática que os alunos sentem bastante dificuldade.

Assim, neste trabalho, foi proposto uma nova abordagem do cálculo de área de polígonos, o Teorema de Pick, que é baseado apenas na contagem de pontos, o que o torna bastante interessante. Através deste, pretende-se enriquecer as aulas de Matemática, saindo da abordagem tradicional do cálculo de área de figuras planas e expandindo para qualquer polígono, desde que este tenha coordenadas inteiras. Assim, foi apresentado conceitos básicos e o histórico do matemático Georg Alexander Pick, para dar subsídios para o entendimento do teorema. Desta forma, as aplicações do teorema apresentadas no trabalho, amplia a utilização deste, para que o professor possa inovar e relacionar o cálculo de área de polígonos com outros conhecimentos matemáticos, fazendo uso, inclusive, dos exercícios resolvidos apresentados no capítulo Trabalhando com o Professor. Este, por sua vez, traz no Estudo Dirigido, uma boa forma do docente apresentar o teorema aos seus alunos.

Diante de tudo que foi explanado, espera-se que o trabalho sirva como fonte de pesquisa para que professores, tanto do Ensino Fundamental II quanto do Ensino Médio, comecem a abordar o tema nas suas aulas, fazendo as devidas adaptações de acordo com o público alvo, para estimular o discente para a beleza da Matemática, atingindo assim os objetivos propostos pelos PCNs.

Capítulo 7

Apêndice

Estudo Dirigido

Vamos preencher a tabela a partir das figuras apresentadas abaixo, onde b é o número de pontos no bordo e I o número de pontos internos. Considere a unidade igual a 1.

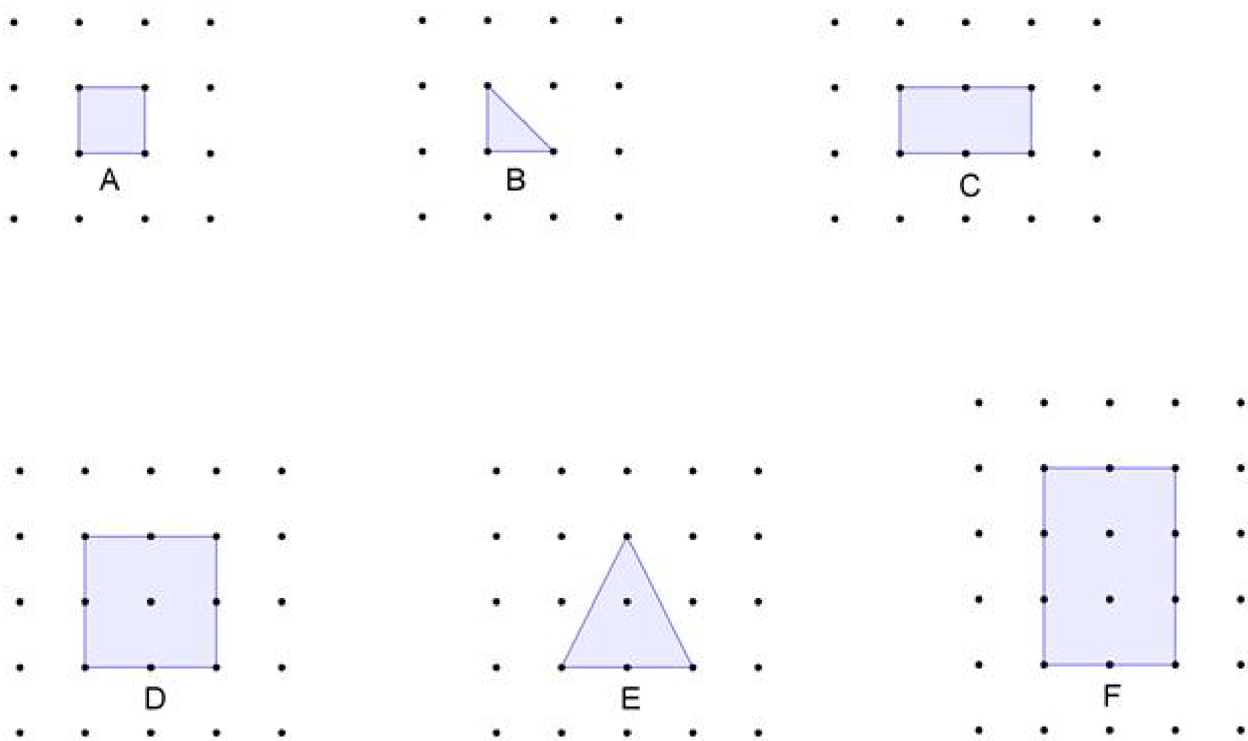


Tabela 7.1: Teorema de Pick

Figura	b	I	Área da figura	$\frac{b}{2}+I-1$
A	4	0	$1^2=1$	$\frac{4}{2}+0-1=1$
B	3	0	$\frac{1\cdot 1}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}+0-1=\frac{1}{2}$
C	6	0	$2\cdot 1=2$	$\frac{6}{2}+0-1=2$
D	8	1	$2^2=4$	$\frac{8}{2}+1-1=4$
E	4	1	$\frac{2\cdot 2}{2}=2$	$\frac{4}{2}+1-1=2$
F	10	2	$2\cdot 3=6$	$\frac{10}{2}+2-1=6$

Comparando a quarta e quinta colunas percebemos que o resultado encontrado é o mesmo. Assim, percebemos que podemos calcular a área de um polígono da seguinte forma:

"Dividimos o número de pontos no bordo do polígono por 2, somamos o resultado ao número de pontos no interior do polígono e, em seguida, subtraímos um."

Este resultado obtido é o teorema mais lembrado do matemático austríaco Georg Pick, o teorema de Pick.

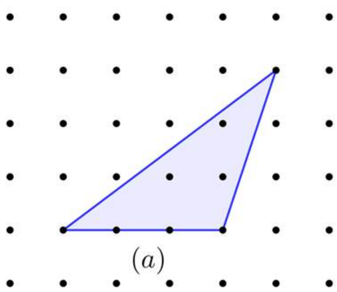
Teorema de Pick: A área A de um polígono cujos vértices são pontos de uma rede é dada pela função

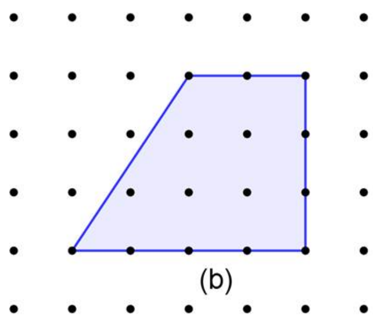
$$A = \frac{b}{2} + I - 1,$$

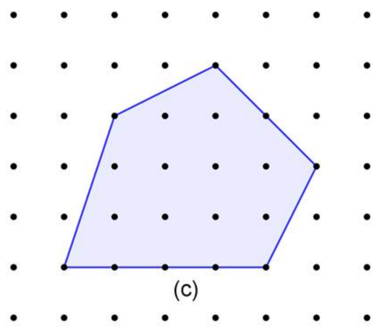
onde b é o número de pontos da rede situado sobre o bordo do polígono e I é o número de pontos da rede existente no interior do polígono.

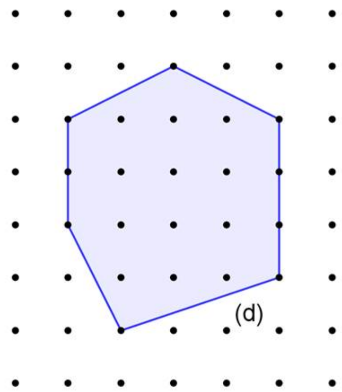
EXERCÍCIO

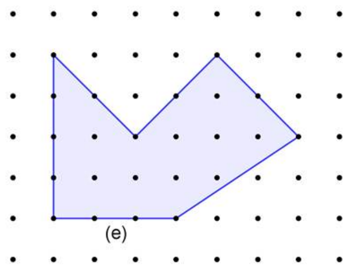
Aplicando o teorema apresentado acima, calcule a área dos polígonos a seguir.

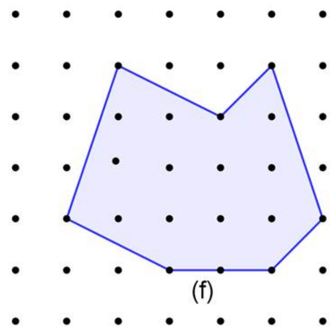

(a)


(b)









Na figura (a) temos $b = 5$ e $I = 3$. Logo:

$$A = \frac{5}{2} + 3 - 1 = 4,5u.a.$$

Na figura (b) temos $b = 10$ e $I = 5$. Logo:

$$A = \frac{10}{2} + 5 - 1 = 9u.a.$$

Na figura (c) temos $b = 9$ e $I = 10$. Logo:

$$A = \frac{9}{2} + 10 - 1 = 13,5u.a.$$

Na figura (d) temos $b = 9$ e $I = 12$. Logo:

$$A = \frac{9}{2} + 12 - 1 = 15,5u.a.$$

Na figura (e) temos $b = 14$ e $I = 9$. Logo:

$$A = \frac{14}{2} + 9 - 1 = 15u.a.$$

Na figura (f) temos $b = 8$ e $I = 11$. Logo:

$$A = \frac{8}{2} + 11 - 1 = 14u.a.$$

Referências Bibliográficas

[1] Deutschen, Sitzungsber, *Geometria sobre inteiros*, Sitzungsberichte des deutschen naturwissenschaftlich - medicinischen Vereines für Böhmn "Lotos"in Prag., 1899, p.311-319.

[2] Lima, Elon Lages, *Meu Professor de Matemática e outras histórias*, 3ª Edição, Rio de Janeiro, SBM, 1991, p.101-114.

[3] Marques Barbosa, João Lucas, *Geometria Euclidiana Plana*, 4ª Edição, SBM, 2000, p.29-30.

[4] Muniz Neto, Antonio Caminha, *Geometria: Coleção PROFMAT*, 1ª Edição, SBM, 2013, p.206.

[5] Leite R. Pessôa, Maria da Conceição, Elisabete de Araújo Ulisses dos Santos e Antônio Andrade da Silva, *Desenho Geométrico*, Salvador: Quarteto Editora/ FAUFBA, Departamento das Geometrias de Representação, 2000, p. 162-163.

[6] Dorichenko, Sergey, *Um Círculo Matemático de Moscou*, 8000ª Edição, IMPA, 2016, p.17 e 32.

[7] Goulart Verri, André Felipe e Sônia Regina Leite Garcia, *Uma apresentação didática do Teorema de Pick*.

[8] E. Varberg, Dale, *Pick's Theorem Revisited*, The American Mathematical Monthly, vol. 92, $n°$8, (Oct.,1985), p.584-587.

[9] Grunbaum, Branko e G. C. Shephard, *Pick's Theorem*, The American Mathematical Monthly, vol. 100, $n°$2 (Feb.,1993), p.150-161.

[10] Ding,Ren, Krzysztof Kolodziejczyk e Jonh Reay, *A New Pick-Type Theorem on the Hexagonal Lattice*.

[11] Kolodziejczyk, Krzysztof e Jonh Reay, *Polynomials and Spatial Pick-Type Theorem*, Science Direct, 2008, p.41-53.

[12] Melo, Severino Toscano e Antônio Luiz Pereira, *Contando áreas - O Teorema de Pick*, Revista do Professor de Matemática 78, SBM, 2012, p.36-42.

[13] Guerrero, Eugenio, Miguel A. Marmolejo e Héber Mesa,*Triángulos de lados enteros, particiones y el Teorema de Pick.*

[14] Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, *Ministério da Educação, Secretaria de Educação, Brasília, 1997.*