Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Triângulo de Pascal: aplicações no Ensino Fundamental e Médio

TÂMARA PAIVA SANTIAGO

Salvador - Bahia
Julho de 2016

Triângulo de Pascal: aplicações no Ensino Fundamental e Médio

TÂMARA PAIVA SANTIAGO

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Luis Godinho Mandolesi.

Salvador - Bahia
Julho de 2016

Triângulo de Pascal: aplicações no Ensino Fundamental e Médio

TÂMARA PAIVA SANTIAGO

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 07 de julho de 2016.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. André Luis Godinho Mandolesi (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Marcelo Dias Passos
UFBA

Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey
UFBA

À minha família,
em especial à minha mãe,
que me apoiou,
incentivou e ajudou nesses
dois anos de curso.

Agradecimentos

A Deus, em primeiro lugar, por ter permitido o meu ingresso e conclusão desse curso de mestrado;

À minha família: meus pais Gilvan e Mirian, meus irmãos Diego e Flávia, minha avó Lenice e meu namorado Artur pela paciência e incentivo nessa caminhada;

Aos meus amigos que o mestrado me presenteou, meus Ninjas e eternos incentivadores Lázaro, Daiane, Lígia, Cristiano, Fabíola, Eduardo e Fabiano, por tornarem meus sábados mais felizes;

A todos os professores do PROFMAT/UFBA, em especial, aos professores Dr. André Luis Godinho Mandolesi e Dr. Joseph Nee Anyah Yartey pela disponibilidade e dedicação para comigo nesta jornada;

Às diretoras e coordenadoras das escolas onde trabalho, pelo apoio e compreensão durante todo o período do curso;

O meu mais sincero OBRIGADA!

"Felizes aqueles que se divertem com
problemas que educam a alma e
elevam o espírito."
(Fenelon)

Resumo

A presente dissertação apresentará um estudo acerca do Triângulo Aritmético quanto à sua funcionalidade como artifício facilitador do estudo de outros conteúdos. Com a análise histórica do surgimento do Triângulo desde as sociedades mais antigas até a época de Pascal, será mostrado um pouco da sua construção e o porquê do Triângulo Aritmético ser geralmente conhecido como Triângulo de Pascal. O objetivo principal desse trabalho é, através de uma síntese teórica, demonstrar a relação intrínseca entre o Triângulo de Pascal, a Análise Combinatória e o Binômio de Newton, proporcionando a utilização do triângulo em outros conteúdos do Ensino Médio, a exemplo da Trigonometria, das Progressões Aritméticas e das Potências de 11. Além disso, a utilização do Triângulo será mostrada também no Ensino Fundamental na busca de regularidades e padrões matemáticos. Dessa forma, será possível o desenvolvimento de estratégias didáticas e de novas práticas de ensino-aprendizagem da matemática no que diz respeito aos supraditos conteúdos.

Palavras-chave: Triângulo de Pascal, Binômio de Newton, Análise Combinatória, Aplicações.

Abstract

This thesis will present a study on the Arithmetic Triangle as to its functionality as a facilitator artifice of other content studies. With the historical analysis of the emergence of the Triangle from the earliest societies until Pascal's time, we present some of its construction and why the Arithmetic Triangle is generally known as Pascal's triangle. The main objective of this work is, through a theoretical synthesis, demonstrate the intrinsic relationship between Pascal's Triangle, Combinatorial Analysis and Newton's Binomial, facilitating the use of the triangle in other high school contents, such as trigonometry, Arithmetic progressions and powers of 11. Furthermore, use of the Triangle will also be shown in elementary school in the search of regularities and mathematical patterns. Thus, the development of teaching strategies and new mathematics teaching-learning practices will be possible, with regard to the aforementioned contents.

Keywords: Pascal triangle, Binomial of Newton, Combinatorial Analysis, Applications.

Sumário

Introdução

Em âmbito institucional, ou não, muito são discutidas as formas de ensino da Matemática. Constata-se que os alunos se deparam com a dificuldade em memorizar métodos e, em alguns casos, com o prejuízo trazido quando os conteúdos são ensinados de maneira separada, sem que haja uma associação entre eles. Decorar fórmulas, acreditar que quanto mais conteúdo melhor e ter a matemática como absoluta, que não pode ser questionada, são alguns dos problemas que atrapalham o processo de ensino-aprendizagem.

Cabe ao professor encontrar técnicas, meios de tornar o conteúdo matemático mais acessível e atraente para o educando. Trabalhar com jogos, material concreto, resolução de problemas e utilizar a História da Matemática em sala são algumas opções que podem colaborar com sua aprendizagem.

A utilização da História da Matemática como recurso metodológico para a aprendizagem dos conteúdos matemáticos, por exemplo, é pertinente na medida em que o aluno verifica que tudo foi uma construção humana, nada caiu do céu ou apareceu num passe de mágica. Segundo [Portanova, 2004],

> o aluno reconhecerá a Matemática como uma criação humana, que surgiu a partir da busca de soluções para resolver problemas do cotidiano, conhecerá as preocupações dos vários povos em diferentes momentos históricos, identificando a utilização da Matemática em cada um deles e estabelecerá comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente.

Assim, é importante que o docente trabalhe em sala de aula com a história do surgimento do conteúdo, justificando assim a sua necessidade, pois o professor tem que ter em vista que um maior aproveitamento dos assuntos pelos alunos deve ser seu principal objetivo.

Outro aspecto relevante é a não dissociação dos conteúdos. O professor deve trabalhar em sala de aula buscando a ligação entre os assuntos, aprimorando a capacidade de reflexão e generalização, excluindo nos alunos a impressão de que a Matemática é misteriosa e difícil.

Dessa forma, esta dissertação apresentará uma síntese teórica sobre a Análise Combinatória e o Binômio de Newton e estudará o Triângulo de Pascal, suas propriedades, história e curiosidades como um instrumento para melhorar o ensino desses conteúdos. No primeiro capítulo será apresentado um pouco da história do surgimento do triângulo, sua definição e propriedades, bem como alguns conceitos necessários como pré-requisitos para o próximo capítulo. A relação entre os conteúdos citados será abordada nos capítulos seguintes em três seções, mostrando a ligação intrínseca entre eles e como um pode ser utilizado para facilitar o estudo do outro. As propriedades justificadas do Triângulo de Pascal constarão no terceiro capítulo, no quarto serão apresentadas algumas de suas aplicações no Ensino Fundamental e Ensino Médio e, por fim, curiosidades aparecerão no último capítulo.

Diante do exposto, a proposta é mostrar como o estudo do Triângulo de Pascal abre caminho para a análise dos conteúdos citados. É possível a exemplificação de algumas propriedades de combinatória no corpo do triângulo, a observação das potências de 11, além da trigonometria ser facilitada com o seu uso.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

1.1 O Triângulo de Pascal

1.1.1 Um pouco de história

O Triângulo Aritmético é também chamado de Triângulo de Pascal pelos franceses, Triângulo de Tartaglia pelos italianos, Tartaglia-Pascal em outras localidades ou simplesmente Triângulo Combinatório. Não podemos falar em descoberta, mas sim em redescobertas e inserção, imensuráveis vezes, em todas as localidades onde se estuda matemática.

Existem indícios da utilização de métodos similares de organização na Índia, 200 a.C., quase 2000 anos antes de Pascal. Pingala, matemático indiano, no seu trabalho intitulado Chandas Shartra, já apresentava uma tabulação similar ao Triângulo de Pascal quando estudou os cálculos combinatórios. Seu desenvolvimento se deu através do estudo de métricas musicais na versificação. Com efeito, ele observou que a expansão de métricas de uma, duas, três, etc. sílabas poderia ser organizada sob a forma de um padrão numérico triangular denominado como Meruprastara, para homenagear o sagrado Monte Meru.

Segundo [Silveira, 2001], a regra para construção descrita por Pingala era a seguinte:

> Desenhe um quadradinho; abaixo dele desenhe dois outros, de modo que juntem-se no ponto médio da base dele; abaixo desses dois, desenhe outros três e assim por diante. A seguir, escreva 1 no primeiro quadradinho e nos da segunda linha. Na terceira linha escreva 1 nos quadradinhos dos extremos, e no do meio escreva a soma dos números acima dele. Prossiga fazendo o mesmo nas demais linhas. Nessas linhas, a segunda dá as combinações com uma sílaba; a terceira dá as combinações com duas sílabas e assim por diante.

O Meruprastara e a regra de Pingala ainda podem ser encontrados em outras obras anos depois da Chandas Shartra.

Na China seu aparecimento se deu através do estudo das aproximações das raízes quadradas, cúbicas etc., e foi denominado *sistema de tabulação para descobrir coeficientes binomiais*. Uma das obras chinesas mais importantes é o Precioso Espelho dos Quatro Elementos (1303) de Chu Shih-chieh (viveu de 1280-1303), último e maior matemático chinês. Para Chu, o Triângulo Aritmético era um diagrama do velho método para achar potências oitavas e menores. Na sua arrumação aparecem os coeficientes das expansões binomiais até a oitava potência em numerais em barra e um símbolo redondo para o zero.

Além dele podemos citar o mais famoso chinês associado ao Triângulo Aritmético, o matemático Yang Hui, que apresentou um arranjo semelhante até a sexta potência. Como as obras chinesas apresentam mais de 1000 referências às tabulações de coeficientes binomiais, através do *Traité du triangle arithmétique* ("Tratado sobre o Triângulo Aritmético"), em 1653, atribui-se sua origem erroneamente à China.

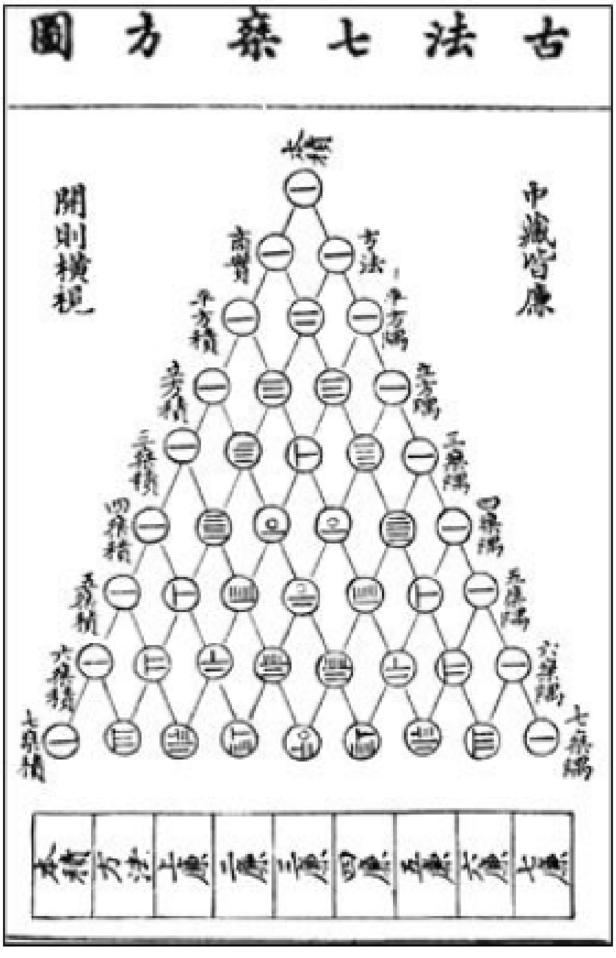

Figura 1.1: Triângulo Aritmético de Yang Hui

Imagem retirada: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Yanghui_triangle.gif

Outras localidades também possuíram matemáticos que desenvolveram e estudaram tabulações parecidas com a de Pascal. Islâmicos como o persa Umar al-Khayyami, 1150 d.C., em seu Tratado de demonstrações de problemas de Álgebra; alemães como Apianus, que em 1527 publicou um livro intitulado Rechnung; e o italiano Tartaglia, com seu livro General Tratato di numeri et misure de 1556.

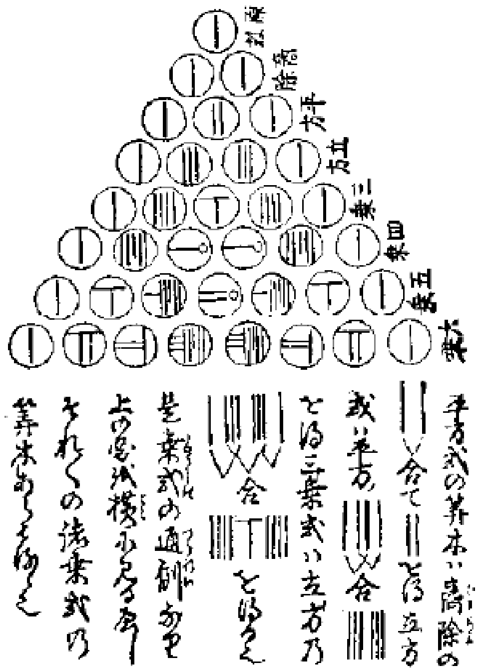

Figura 1.2: Triângulo de Pascal no Japão
Imagem retirada de [Boyer, 1906]

Só aproximadamente 500 anos depois de ser apresentado por Yang Hui, suas propriedades foram estudadas por Blaise Pascal. Ele ligou o estudo das probabilidades com o Triângulo Aritmético e, como suas descobertas e discussões sobre o tema foram mais longe, o arranjo triangular ficou conhecido como Triângulo de Pascal, onde um dos avanços foi a descoberta de propriedades como:

> Em todo triângulo aritmético, se duas células são contíguas na mesma base, a superior está para a inferior como o número de células desde a superior até o topo da base está para o número de células da inferior, até o ponto mais baixo inclusive. (PASCAL, apud, BOYER, 1974, p.265)

Pascal chamava as células na mesma diagonal apontando para cima de “células da mesma base”. Tal propriedade pode ser demonstrada usando o método da indução matemática.

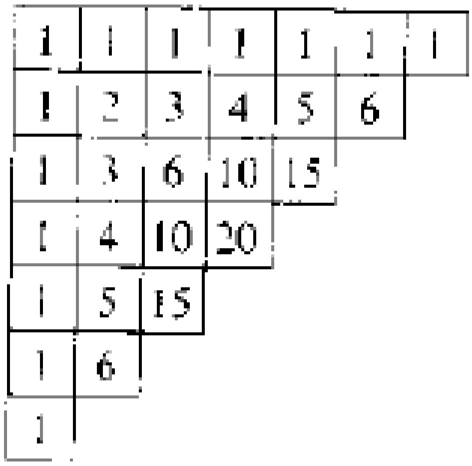

Figura 1.3: Células do Triângulo de Pascal

Imagem retirada de [Boyer, 1906]

Desde essa época o triângulo já era relacionado com outros conteúdos matemáticos com o fim de facilitar seu entendimento ou sua demonstração. Exemplo disso foi a relação encontrada por Pascal para obter uma fórmula de soma das potências m-ésimas dos primeiros n inteiros consecutivos.

Segundo o Traité du Triangle Arithmétique de Pascal, escrito em 1653 e publicado em 1665, o Triângulo Aritmético era construído da seguinte maneira: "Obtém-se qualquer elemento (da segunda linha em diante) como soma de todos os elementos da linha precedente situados exatamente acima ou à esquerda do elemento desejado."(EVES, 2008)

Observe a figura 1.4:

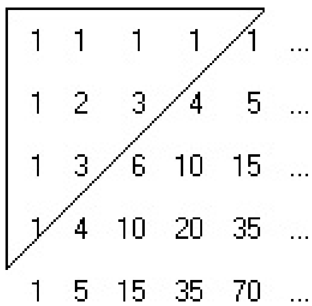

Figura 1.4: Triângulo aritmético

Imagem retirada:http://www.matematica.br/historia/pascal.html

Assim, na quarta linha teremos 35 = 1+3+6+10+15, o que será mostrado mais tarde como o Teorema das Colunas.

A sua utilização por Pascal incluía observar os coeficientes dos Binômios de Newton do tipo $(a+b)^n$ e no cálculo das probabilidades ao determinar o número de combinações de n objetos tomados p de cada vez.

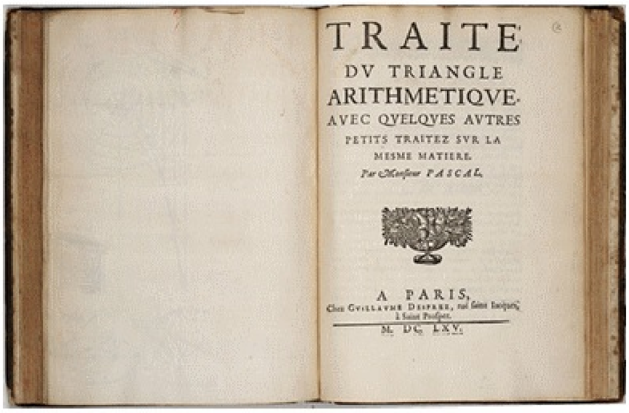

Figura 1.5: Traité du Triangle Arithmétique de Pascal

Imagem retirada: http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2010/01

1.1.2 Definição

O Triângulo Aritmético, de Tartaglia-Pascal ou simplesmente Triângulo de Pascal, é uma composição geométrica triangular formada por números que observam as seguintes regras:

- o triângulo é formado por linhas e colunas: numerando as linhas e as colunas a partir do zero, o elemento que se encontra na linha n $(n = 0, 1, 2, ...)$ e na coluna p $(p = 0, 1, ..., n)$ denotaremos por $T_{n,p}$.

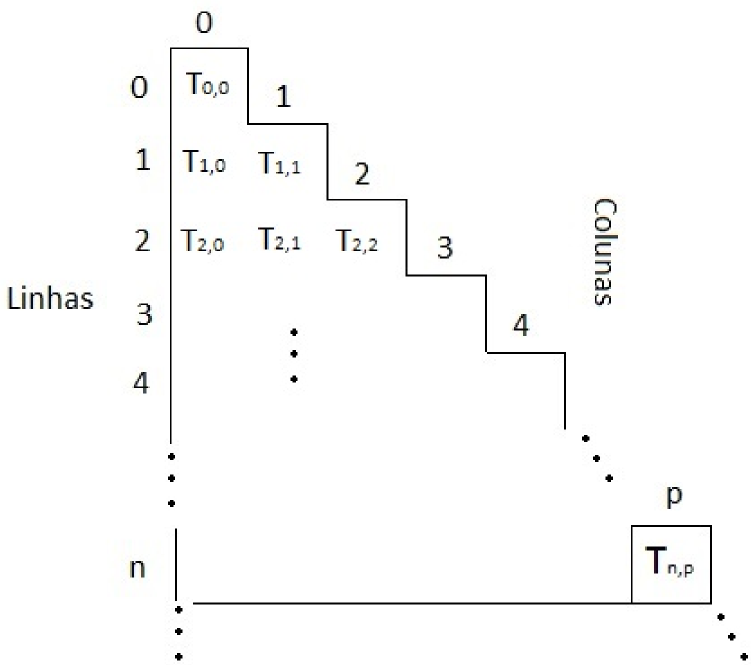

Figura 1.6: Estrutura do Triângulo Aritmético

- o primeiro e o último elementos de cada linha são iguais a 1;
- a linha 0 tem um elemento, a linha 1 tem dois elementos, a linha 2 tem três elementos, e assim por diante. Isto é, cada linha n tem n+1 elementos;
- a partir da linha 2, cada elemento é a soma de dois elementos da linha anterior: o imediatamente acima e o seu anterior. Ou seja, sendo $n, p \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$ e $0 \leq p \leq n-1$,

$$T_{n+1,p+1} = T_{n,p} + T_{n,p+1}.$$

Desta forma, temos:

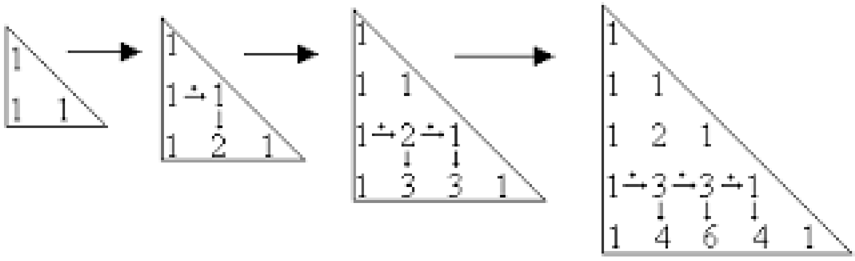

Figura 1.7: Definição do Triângulo Aritmético

Imagem retirada: http://www.somatematica.com.br/emedio/binomio/binomio3.php

Vale ressaltar que o Triângulo de Pascal pode ser apresentado de outras maneiras:

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Figura 1.8: Representação do Triângulo(1)

Imagem retirada: www.pt.wikipedia.org/wiki/Triângulo_de_Pascal

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Figura 1.9: Representação do Triângulo(2)

Imagem retirada: www.waldexifba.wordpress.com/material-de-apoio/ensino-medio

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

Figura 1.10: Representação do Triângulo(3)

Imagem retirada: http://www.librosmaravillosos.com/triangulopascal/capitulo03.html

1.2 Análise combinatória

Para melhor entender esse estudo é necessário saber alguns conceitos da análise combinatória:

Definição 1.2.1 (Permutação)**.** Permutação simples *é uma maneira de ordenar* n *elementos distintos. Representamos o número de permutações simples de* n *objetos distintos por* P_n*.*

Sendo n a quantidade de elementos distintos de um determinado conjunto, ao ordená-los teremos n possibilidades de escolha do elemento para ocupar a primeira posição, $n-1$ possibilidades de escolha do elemento para ocupar a segunda posição, $\cdots$, 1 possibilidade de escolha do elemento para ocupar a última posição. Portanto, pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de ordenar n elementos distintos é $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 1 = n!$. Assim, $P_n = n!$ e definimos $P_0 = 1$.

Exemplo. Para os elementos 4, 5 e 6 há 6 ordenações: 456, 465, 546, 564, 645, 654. Isto é, $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Definição 1.2.2 (Arranjo). *Sendo $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ um conjunto com n elementos distintos, chamamos de* arranjos *dos n elementos tomados p a p $(1 \leq p \leq n)$ a qualquer sequência de p elementos formado pelos elementos de A, importando a sua ordem, ou seja, uma sequência do tipo (a_1, a_2, a_3) é diferente de um subconjunto do tipo (a_2, a_3, a_1).*

Ao determinar a quantidade de sequências com p elementos distintos de A, importando a ordem, teremos n possibilidades para sequências com 1 elemento; para sequências com 2 elementos teremos n possibilidades para a escolha de um dos elementos e, escolhido este, teremos $n-1$ elementos para a escolha do segundo. De modo análogo, pelo princípio multiplicativo, teremos $n.(n-1) \cdot ... \cdot (n-p+1)$ sequências possíveis com p elementos.

Quantidade de elementos na sequência	Possibilidades de sequências
1	n
2	$n(n-1)$
3	$n(n-1)(n-2)$
...	...
p	$n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot (n-p+1)$

Logo, o número de arranjos de n elementos tomados p a p, denotado por $A_{n,p}$, será dado por

$$A_{n,p} = n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Definição 1.2.3 (Combinação). *Sendo $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ um conjunto com n elementos distintos, chamamos de* combinação simples *dos n elementos tomados p a p $(1 \leq p \leq n)$ a qualquer subconjunto de p elementos formado com elementos de A sem importar a sua ordem, ou seja, um subconjunto do tipo $\{a_1, a_2, a_3\}$ é o mesmo que um subconjunto do tipo $\{a_2, a_3, a_1\}$. O número de combinações simples de classe p de n objetos é representado por C_n^p ou $\binom{n}{p}$, e chamado* Coeficiente Binomial, Número Combinatório *ou* Número Binomial.

Considerando o conjunto A, de quantas maneiras diferentes poderemos escolher p elementos $(p < n)$ deste conjunto para formar subconjuntos sem que importe a ordem dos seus elementos? Primeiramente, vamos determinar a quantidade de arranjos possíveis com os elementos de A. Em seguida, já que queremos subconjuntos onde a ordem dos elementos não importa, e em cada subconjunto os elementos podem ser ordenados de $p!$ vezes, devemos dividir a quantidade de arranjos por $p!$. Daí,

$$C_n^p = \frac{n.(n-1).....(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

Logo, o número de combinações simples de n elementos em subconjuntos com p objetos será dada por $C_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$.

1.2.1 Combinação simples e Conjuntos

Vale ressaltar a relação do conceito de Combinação Simples com os conjuntos: a quantidade de subconjuntos de um conjunto com n elementos pode ser calculada utilizando os números binomiais:

- Para subconjuntos com zero elementos, basta calcular C_n^0
- Para subconjuntos com um elemento, basta calcular C_n^1

$$\vdots$$

- Para subconjuntos com p elementos, basta calcular C_n^p

Logo, cada combinação de n elementos tomados p a p corresponde à quantidade de subconjuntos com p elementos de um conjunto com n elementos.

1.3 Polinômios

Definição 1.3.1. *Chamamos* expressão polinomial *ou* polinômio *na variável x toda expressão da forma*

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

onde $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ são constantes que denominamos coeficientes, *n é um número inteiro positivo ou nulo e o maior expoente de x, com coeficiente não nulo, é o* grau *do polinômio.*

Ao apresentar a multiplicação entre polinômios, podemos utilizar uma disposição tabular para a sua resolução. Vale lembrar que ao multiplicar dois polinômios de graus n e $m \in \mathbb{N}$, respectivamente, o polinômio resultante possuirá grau $n+m$. Dessa forma, podemos organizar a multiplicação entre os polinômios

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_{n-j}x^{n-j} + ... + a_1x + a_0$$

e

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_{m-j}x^{m-j} + ... + b_1 x + b_0$$

em uma tabela onde na primeira linha estão os termos de um dos polinômios e na primeira coluna os termos do outro, respeitando a ordem decrescente dos expoentes. Observe:

	$a_n x^n$	$a_{n-1}x^{n-1}$	$\cdots$	$a_{n-j}x^{n-j}$	$\cdots$	$a_1 x$	a_0
$b_m x^m$							
$b_{m-1}x^{m-1}$							
$\vdots$							
$b_{m-j}x^{m-j}$							
$\vdots$							
$b_1 x$							
b_0							

Basta multiplicar cada elemento da 1ª linha por todos os elementos da 1ª coluna. Observando os resultados das multiplicações, verificamos que em cada diagonal os termos encontrados terão o mesmo grau:

	$a_n x^n$	$a_{n-1}x^{n-1}$	$\cdots$	$a_{n-j}x^{n-j}$	$\cdots$	$a_1 x$	a_0
$b_m x^m$	$a_n b_m x^{n+m}$	$a_{n-1} b_m x^{n+m-1}$		$a_{n-j} b_m x^{n+m-j}$			
$b_{m-1}x^{m-1}$	$a_n b_{m-1} x^{n+m-1}$		$\cdots$				
$\vdots$		$\cdots$					
$b_{m-j}x^{m-j}$	$a_n b_{m-j} x^{n+m-j}$						
$\vdots$							
$b_1 x$							
b_0							

Assim, ao somar os termos semelhantes, ou seja, os termos de uma mesma diagonal, obteremos os termos do polinômio resultante. Vejamos os exemplos:

a) Multiplicação do polinômio $3x^2 + 4x - 2$ pelo polinômio $x^3 + 2x + 4$.

Primeiro montaremos a tabela onde na primeira linha estão os termos de um dos polinômios e na primeira coluna os termos do outro, respeitando a ordem decrescente dos expoentes. Observe que o zero na primeira linha corresponde ao coeficiente do x^2 no segundo polinômio.

	$1x^3$	$0x^2$	$2x$	4
$3x^2$				
$4x$				
-2				

Basta multiplicar cada elemento da 1ª linha por todos os elementos da 1ª coluna:

	$1x^3$	$0x^2$	$2x$	4
$3x^2$	$3x^5$	$0x^4$	$6x^3$	$12x^2$
$4x$	$4x^4$	$0x^3$	$8x^2$	$16x$
-2	$-2x^3$	$0x^2$	-$4x$	-8

Observando os resultados das multiplicações, basta somar os elementos de uma mesma diagonal para obter os termos do polinômio resultante:

$$3x^5 + (4+0)x^4 + (-2+0+6)x^3 + (0+8+12)x^2 + (-4+16)x + (-8) =$$
$$3x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 20x^2 + 12x - 8$$

b) Multiplicação entre $(x^3 + 5x^2 + 4)$ e $(x^2 + 3x)$.

Essa multiplicação pode ser feita através dessa mesma tabela simplificada. Primeiramente, montamos a tabela só com os coeficientes dos polinômios que serão multiplicados.

	1	5	0	4
1				
3				
0				

Em seguida, multiplicamos cada elemento da 1ª linha por todos os elementos da 1ª coluna.

	1	5	0	4
1	1	5	0	4
3	3	15	0	12
0	0	0	0	0

Por fim, soma-se os termos de cada diagonal. Começando da esquerda para direita teremos os coeficientes do produto em ordem decrescente do expoente. Neste caso, começaremos com o termo de grau 5 = 3+2:

$$1x^5+(3+5)x^4+(0+15+0)x^3+(0+0+4)x^2+(0+12)x+0 = 1x^5+8x^4+15x^3+4x^2+12x$$

1.3.1 Binômio de Newton

Binômio de Newton[1] é toda potência do tipo $(x+a)^n$, com $x, a \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$. Para obter a sua fórmula, basta fazer a multiplicação do termo $(x+a)$ n vezes utilizando a propriedade distributiva:

$$(x+a)\cdot(x+a)\cdot(x+a)\cdot\ldots\cdot(x+a)$$

- De cada fator $(x+a)$ selecionamos exatamente um termo, que poderá ser x ou a, multiplicando-os em seguida;
- Continuamos o processo até esgotar todas as seleções possíveis de um termo de cada fator. Observe que à medida que o expoente do x cresce uma unidade começando do 0, o expoente de a decresce uma unidade começando do n.
- Depois que reduzirmos os termos semelhantes na multiplicação, teremos uma soma de termos da forma $B_{n,p}x^p a^{n-p}$ onde $B_{n,p}$ é o coeficiente do termo $x^p a^{n-p}$ no desenvolvimento.
- O desenvolvimento de $(x+a)^n$ possui $n+1$ monômios.

Desta forma, podemos expressar a sua fórmula como:

$$\begin{aligned}(x+a)^n &= \sum_{p=0}^{n} B_{n,p}x^p a^{n-p}\\ &= B_{n,0}x^0a^n + B_{n,1}x^1a^{n-1} + B_{n,2}x^2a^{n-2} + \ldots + B_{n,p}x^pa^{n-p} + \ldots + B_{n,n}x^na^0.\end{aligned}$$

Em particular, fazendo $a = 1$, o polinômio de grau n $B_{n,0}x^0 + B_{n,1}x^1 + B_{n,2}x^2 + \ldots + B_{n,p}x^p + \ldots + B_{n,n}x^n$ é o desenvolvimento do binômio $(x+1)^n$, ou seja,

$$(x+1)^n = B_{n,0}x^0 + B_{n,1}x^1 + B_{n,2}x^2 + \ldots + B_{n,p}x^p + \ldots + B_{n,n}x^n.$$

[1]Newton, Isaac (1642-1727), matemático e físico inglês

Capítulo 2

Relações entre Triângulo de Pascal, Binômio de Newton e Análise Combinatória

2.1 Relação entre Triângulo de Pascal e Binômio de Newton

Utilizando os produtos notáveis estudados no ensino fundamental, temos:

$(x+a)^0 = 1$

$(x+a)^1 = 1x + 1a$

$(x+a)^2 = (x+a).(x+a) = 1x^2 + 2xa + 1a^2$

$(x+a)^3 = (x+a).(x+a)^2 = 1x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + 1a^3$

Observando os coeficientes dos desenvolvimentos, percebemos que eles formam as primeiras linhas do Triângulo de Pascal.

$$
\begin{array}{llllll}
(x+a)^0 = 1 & & B_{0,0} = 1 & & & \\
(x+a)^1 = 1x + 1a & & B_{1,0} = 1 & B_{1,1} = 1 & & \\
(x+a)^2 = 1x^2 + 2xa + 1a^2 & & B_{2,0} = 1 & B_{2,1} = 2 & B_{2,2} = 1 & \\
(x+a)^3 = 1x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + 1a^3 & & B_{3,0} = 1 & B_{3,1} = 3 & B_{3,2} = 3 & B_{3,3} = 1
\end{array}
$$

Vamos mostrar que é possível escrever qualquer desenvolvimento do binômio $(x+a)^n$ observando seus coeficientes nas linhas do Triângulo Aritmético.

Proposição 1. *Qualquer coeficiente do desenvolvimento do Binômio de Newton* $(x+a)^{n+1}$ *do tipo* $B_{n+1,p+1}$ *pode ser determinado através da soma* $B_{n,p+1} + B_{n,p}$*, ou seja,*

$$B_{n+1,p+1} = B_{n,p+1} + B_{n,p}.$$

Demonstração. Ao determinar o desenvolvimento do binômio $(x+a)^{n+1}$, sem perda de generalidade, usaremos $a = 1$. Pela propriedade distributiva, temos $(x+1)^{n+1} = (x+1).(x+1)^n$. Utilizando a disposição em tabela para a multiplicação, como visto na seção 1.3, teremos:

	$B_{n,n}x^n$	$B_{n,n-1}x^{n-1}$	...	$B_{n,p+1}x^{p+1}$	$B_{n,p}x^p$	...
$1x$					$B_{n,p}x^{p+1}$	
1				$B_{n,p+1}x^{p+1}$		

Como a soma de cada diagonal nos oferece um coeficiente do binômio, temos que a soma de $B_{n,p}$ e $B_{n,p+1}$ será o coeficiente de x^{p+1} no binômio $(x+1)^{n+1}$, ou seja, $B_{n+1,p+1}$ por definição. Logo, temos que:

$$B_{n+1,p+1} = B_{n,p+1} + B_{n,p}.$$

□

Como consequência, podemos determinar a relação entre os elementos do Triângulo de Pascal e os coeficientes do desenvolvimento do Binômio de Newton.

Proposição 2. *Sendo n, $p \in \mathbb{N}$ e $p \leq n$, $B_{n,p} = T_{n,p}$.*

Demonstração. Por indução, temos:

Para $n = 0$, $T_{0,0} = 1$ pela definição do triângulo e $B_{0,0} = 1$ pois $(x+1)^0 = 1$. Logo, $T_{0,0} = B_{0,0}$.

Suponha válido $B_{n,p} = T_{n,p}$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e $\forall p \in \mathbb{N}$ com $p \leq n$. Vamos mostrar que é válido para $n+1$, ou seja, $B_{n+1,p} = T_{n+1,p}$ $\forall p \in \mathbb{N}$ e $p \leq n+1$.

Pela proposição 1, $B_{n+1,p} = B_{n,p} + B_{n,p-1}$. Por outro lado, por hipótese, $B_{n,p} + B_{n,p-1} = T_{n,p} + T_{n,p-1}$. Como, pela lei de formação do triângulo, $T_{n,p} + T_{n,p-1} = T_{n+1,p}$, temos que $B_{n+1,p} = B_{n,p} + B_{n,p-1} = T_{n,p} + T_{n,p-1} = T_{n+1,p}$. Logo, $B_{n+1,p} = T_{n+1,p}$. □

2.2 Relação entre Binômio de Newton e Análise Combinatória

A relação entre a Análise Combinatória e o Binômio de Newton se dá através dos coeficientes do desenvolvimento do binômio, denotados por $B_{n,p}$.

O termo genérico $B_{n,p}x^pa^{n-p}$ do Binômio de Newton $(x+a)^n$, é obtido tomando em p dos fatores $(p = 0, 1, ..., n)$ a primeira parcela e tomando nos restantes $n-p$ fatores a segunda parcela. Como isso pode ser feito de $\binom{n}{p} = C_n^p$ maneiras, logo podemos concluir que

$$B_{n,p} = C_n^p.$$

Assim podemos reescrever o desenvolvimento do binômio $(x+a)^n$ utilizando os números binomiais:

$$(x+a)^n = C_n^0 x^0 a^n + C_n^1 x^1 a^{n-1} + C_n^2 x^2 a^{n-2} + ... + C_n^p x^p a^{n-p} + ... + C_n^n x^n a^0.$$

2.3 Relação entre Triângulo de Pascal e Análise Combinatória

Agora que identificamos os coeficientes do Binômio de Newton, $B_{n,p}$, como a combinação de n elementos tomados p a p ($B_{n,p} = C_n^p$), podemos ver o Triângulo de Pascal como um arranjo geométrico triangular formado pelos números C_n^p, já que

$$T_{n,p} = B_{n,p} = C_n^p.$$

Na linha n e na coluna p ($0 \leq p \leq n$) é colocado o coeficiente binomial $\binom{n}{p} = C_n^p$.

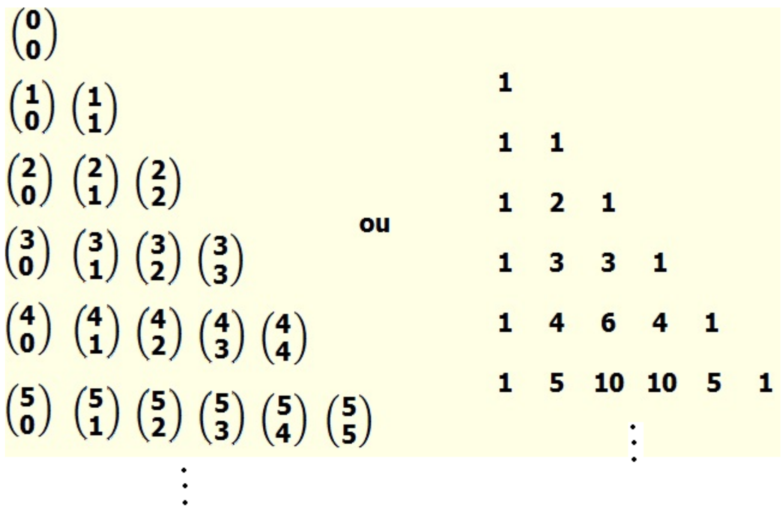

Figura 2.1: Triângulo de Pascal e Análise Combinatória

Imagem retirada e editada: http://fatosmatematicos.blogspot.com/

Capítulo 3

Propriedades do Triângulo de Pascal

O Triângulo de Pascal tem muitas propriedades interessantes. Neste capítulo iremos explorar algumas delas.

3.1 Teorema das Combinações Complementares

Esse teorema nos garante que numa linha do triângulo os elementos equidistantes em relação ao termo central são iguais.

Teorema 1 (Teorema das Combinações Complementares)**.**

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

Demonstração. Utilizando o conceito de combinação podemos demonstrar esse fato de forma simples: formar subconjuntos com p objetos dentre n elementos (C_n^p) é o mesmo que procurar quantos subconjuntos com $n-p$ elementos irão sobrar ao formar os subconjuntos com p elementos (C_n^{n-p}). Logo, $C_n^p = C_n^{n-p}$. □

No triângulo, podemos notar claramente a simetria existente em suas linhas.

Exemplo. Observe que na linha $n = 6$, $6 = C_6^1 = C_6^5$, assim como $15 = C_6^2 = C_6^4$.

$$\begin{array}{ccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

Exemplo. (PUCRS-2000) Se o terceiro termo do desenvolvimento $(a+b)^n$ é $21a^5b^2$, então o sexto termo é:

a)$35a^4b^3$ b)$7ab^6$ c)$21a^3b^4$ d)$7a^2b^5$ e)$21a^2b^5$

Solução: Como o terceiro termo é $21a^5b^2$, podemos concluir que $n = 7$. Daí, pelo teoremas das combinações complementares, o sexto termo terá o mesmo coeficiente do terceiro termo. Logo, o sexto termo será $21a^2b^5$.

3.2 Relação de Stifel

Teorema 2 (Relação de Stifel). [1] *Para todo n=0,1,2... e p=0,1,...,n-1 vale:*

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$$

Esse teorema nos diz que a soma de um elemento de uma linha do triângulo com o próximo elemento da mesma linha é igual ao elemento que está imediatamente abaixo do segundo elemento somado. Geralmente, recorreremos à Análise Combinatória para demonstrar essa relação.

Demonstração.

$$\begin{aligned} C_n^p + C_n^{p+1} &= \frac{n!}{(n-p)!p!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} \\ &= \frac{(p+1)n! + (n-p)n!}{(p+1)!(n-p)!} \\ &= \frac{(n+1)n!}{(p+1)!(n-p)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} \\ &= C_{n+1}^{p+1} \end{aligned}$$

□

Entretanto, podemos utilizar a relação entre a Análise Combinatória e o Triângulo de Pascal para mostrar ao aluno a validade da Relação de Stifel de maneira mais fácil.

Demonstração. Já sabemos que cada termo do triângulo corresponde a um número binomial $T_{n,p} = \binom{n}{p} = C_n^p$ e que, pela definição do triângulo, temos

$$T_{n+1,p+1} = T_{n,p} + T_{n,p+1}.$$

[1]Stifel, Michael (1487?-1567), algebrista alemão

Daí,

$$C_{n+1}^{p+1} = T_{n+1,p+1} = T_{n,p} + T_{n,p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$$

mostrando a validade da Relação de Stifel. $\square$

Observe o exemplo na linha $n = 5$ do triângulo.

Exemplo. $C_5^1 + C_5^2 = C_6^2$, ou seja, 5 + 10 = 15.

Interpretando em termos de subconjuntos, determinar a quantidade de subconjuntos com 2 elementos num grupo com 6 objetos é o mesmo que determinar o total de subconjuntos com 1 e 2 elementos num grupo com 5 objetos, pois separando 1 elemento dos 6 sobram 5 elementos e, em seguida, escolher 2 elementos dos 6 significa escolher 1 dos 5 restantes (C_5^1) ou escolher 2 dos 5 restantes (C_5^2).

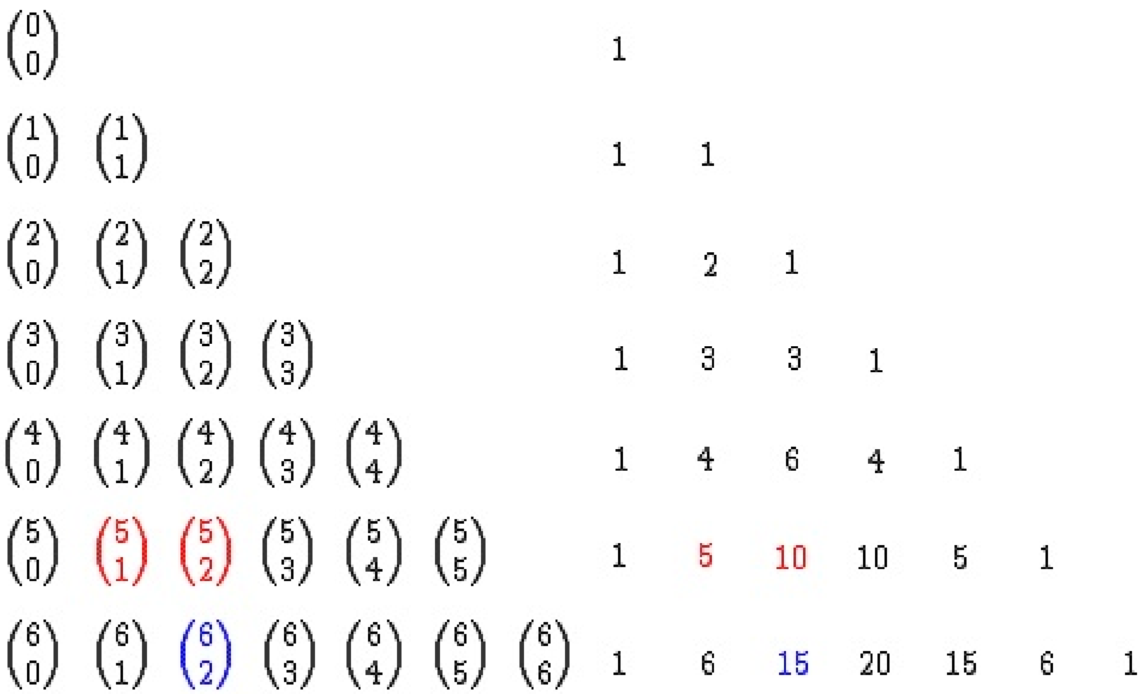

Figura 3.1: Relação de Stifel

Imagem retirada: http://www.matematicadidatica.com.br/TrianguloDePascal.aspx

Exemplo. (PUCSP-2002) No saguão de um teatro, há um lustre com 10 lâmpadas, todas de cores distintas entre si. Como medida de economia de energia elétrica, o gerente desse teatro estabeleceu que só deveriam ser acesas, simultaneamente, de 4 a 7 lâmpadas, de acordo com a necessidade. Nessas condições, de quantos modos distintos podem ser acesas as lâmpadas desse lustre?

a) 664 b) 792 c) 852 d) 912 e) 1044

Solução: Como só devem ser acesas de 4 a 7 lâmpadas simultaneamente, teremos $C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6 + C_{10}^7$. Daí pela Relação de Stifel, temos que $C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6 + C_{10}^7 = C_{11}^5 + C_{11}^7$. Por outro lado, pelo teoremas das combinações complementares, $C_{11}^7 = C_{11}^4$. Logo,

$$C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6 + C_{10}^7 = C_{11}^5 + C_{11}^7 = C_{11}^5 + C_{11}^4 = C_{12}^5 = 792.$$

3.3 Teorema das Linhas

Teorema 3 (Teorema das Linhas)**.** *A soma dos elementos da linha n vale 2^n. Ou seja,*

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Observando a figura abaixo, para $n = 3$, por exemplo, temos que $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$ assim como na linha $n = 6$, temos a soma dos termos sendo igual a $64 = 2^6$.

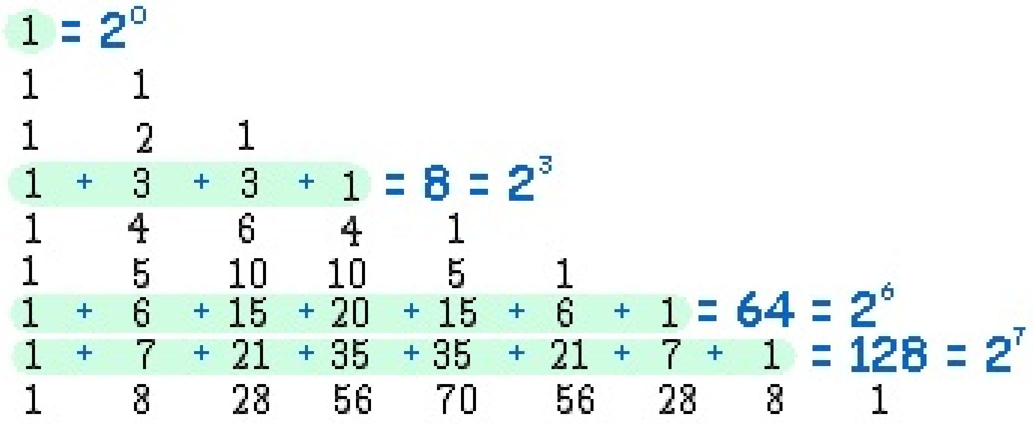

Figura 3.2: Teorema das Linhas

Imagem retirada: http://www.matematicadidatica.com.br/TrianguloDePascal.aspx

Essa propriedade é de fácil demonstração utilizando o Binômio de Newton.

Demonstração. Tome o desenvolvimento do binômio $(x+1)^n$. Daí, teremos:

$$\begin{aligned}(x+1)^n &= C_n^0 \cdot x^0 \cdot 1^n + C_n^1 \cdot x^1 \cdot 1^{n-1} + C_n^2 \cdot x^2 \cdot 1^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} \cdot x^{n-1} \cdot 1 + C_n^n \cdot x^n \\ &= C_n^0 + C_n^1 \cdot x + C_n^2 \cdot x^2 + \ldots + C_n^{n-1} \cdot x^{n-1} + C_n^n \cdot x^n\end{aligned}$$

Fazendo $x = 1$, temos:

$$\begin{aligned}2^n &= (1+1)^n \\ &= C_n^0 + C_n^1 \cdot 1 + C_n^2 \cdot 1^2 + \ldots + C_n^{n-1} \cdot 1^{n-1} + C_n^n \cdot 1^n \\ &= C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n\end{aligned}$$

Logo, $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Exemplo. (ESPM-2005) A média aritmética dos coeficientes numéricos do desenvolvimento do binômio $(x+y)^{31}$ é igual a:

a) 8^8 b) 4^{13} c) 4^{14} d) 8^7 e) 2^{25}

Solução: Já sabemos que a soma dos coeficientes numéricos do binômio citado estão representados na linha $n = 31$ do triângulo e que, pelo Teorema das Linhas, a sua soma é dada por $2^n = 2^{31}$. Daí, como teremos $n + 1 = 31 + 1 = 32$ coeficientes, temos que sua média aritmética de será dada por $\dfrac{2^{31}}{32} = \dfrac{2^{31}}{2^5} = 2^{31-5} = 2^{26} = 4^{13}$.

Além disso, vale destacar a importância desse teorema para a Teoria dos Conjuntos. Em um conjunto com n elementos,

$$
\begin{array}{ccc}
C_n^0 & = & \text{quantidade de subconjuntos com 0 elementos} \\
C_n^1 & = & \text{quantidade de subconjuntos com 1 elemento} \\
C_n^2 & = & \text{quantidade de subconjuntos com 2 elementos} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
C_n^{n-1} & = & \text{quantidade de subconjuntos com } n-1 \text{ elementos} \\
C_n^n & = & \text{quantidade de subconjuntos com } n \text{ elementos}
\end{array}
$$

Daí, $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n$ é a quantidade total de subconjuntos de um conjunto com n elementos.

Logo, pelo Teorema das Linhas, $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$ é quantidade total de subconjuntos de um conjunto com n elementos.

3.4 Teorema das Colunas

Esse teorema nos diz que a soma dos primeiros elementos de uma coluna do triângulo é igual ao elemento que está avançando uma linha e uma coluna sobre a última parcela da soma.

Exemplo. No triângulo, somando os seis primeiros números da terceira coluna obtemos exatamente o quarto termo da próxima linha.

Teorema 4 (Teorema das Colunas)**.**

$$C_p^p + C_{p+1}^p + \ldots + C_{p+n}^p = C_{p+n+1}^{p+1}$$

Demonstração. Usaremos indução em n para demonstrar.

Para $n = 0$, é válido pois $C_p^p = 1 = C_{p+1}^{p+1}$.

Suponha válido $C_p^p + C_{p+1}^p + \ldots + C_{p+n}^p = C_{p+n+1}^{p+1}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que é válido para $n+1$, ou seja, $C_p^p + C_{p+1}^p + \ldots + C_{p+n}^p + C_{p+n+1}^p = C_{p+n+2}^{p+1}$.

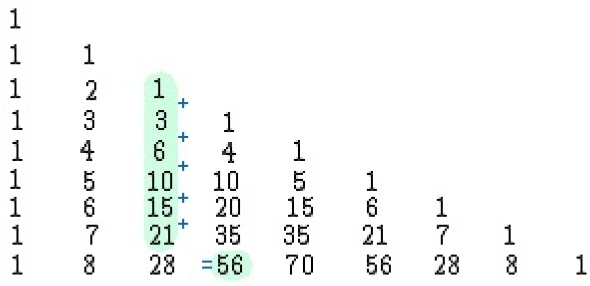

Figura 3.3: Teorema das Colunas

Imagem retirada: http://www.matematicadidatica.com.br/TrianguloDePascal.aspx

De fato,

$$C_p^p + C_{p+1}^p + \ldots + C_{p+n}^p = C_{p+n+1}^{p+1}$$
$$C_p^p + C_{p+1}^p + \ldots + C_{p+n}^p + C_{p+n+1}^p = C_{p+n+1}^{p+1} + C_{p+n+1}^p.$$

Pela Relação de Stifel,

$$C_{p+n+1}^{p+1} + C_{p+n+1}^p = C_{p+n+2}^{p+1}.$$

Logo,

$$C_p^p + C_{p+1}^p + \ldots + C_{p+n}^p + C_{p+n+1}^p = C_{p+n+2}^{p+1}.$$

□

Exemplo. (UERJ-2006) Em uma barraca de frutas, as laranjas são arrumadas em camadas retangulares, obedecendo à seguinte disposição: uma camada de duas laranjas encaixa-se sobre uma camada de seis; essa camada de seis encaixa-se sobre outra de doze; e assim por diante, conforme a ilustração a seguir. Com base nessas informações, calcule o número total de laranjas que compõem quinze camadas.

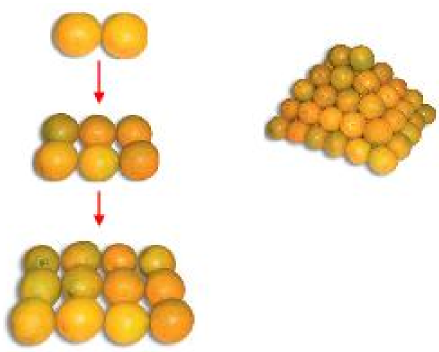

Figura 3.4: Disposição das Laranjas

Imagem retirada: professorwaltertadeu.mat.br/GABNumerosBinomiais2014.doc

Solução: Observe que cada camada forma um retângulo de nxm laranjas, começando com 2 x 1, sendo que a cada nova camada n e m aumentam uma unidade. Assim, o total de laranjas é $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + ... + 16 \cdot 15$. Daí, multiplicando e dividindo essa expressão por 2, temos:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + ... + 16 \cdot 15 &= 2 \cdot (\frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + ... + 16 \cdot 15}{2}) \\ &= 2 \cdot (\frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{5 \cdot 4}{2} + ... + \frac{16 \cdot 15}{2}) \end{aligned}$$

Reescrevendo os termos da soma entre parênteses como números binomiais, note que obteremos a soma dos termos de uma das colunas (p=2) do Triângulo de Pascal. Daí,

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + ... + 16 \cdot 15 &= 2 \cdot (\frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + ... + 16 \cdot 15}{2}) \\ &= 2 \cdot (\frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{5 \cdot 4}{2} + ... + \frac{16 \cdot 15}{2}) \\ &= 2 \cdot (C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_{16}^2) \end{aligned}$$

Pelo teorema das colunas, temos:

$$2 \cdot (C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_{16}^2) = 2 \cdot C_{17}^3 = 2 \cdot 680 = 1360.$$

Logo, o total de laranjas que compõem quinze camadas é 1360.

3.5 Teorema das Diagonais

A soma dos primeiros elementos de uma diagonal do triângulo, isto é uma paralela à hipotenusa, é igual ao elemento que está imediatamente abaixo da última parcela.

Exemplo. Observando a segunda diagonal da direita pra esquerda, ao somar os seus cinco primeiros termos, obteremos o quinto termo da linha $n = 6$.

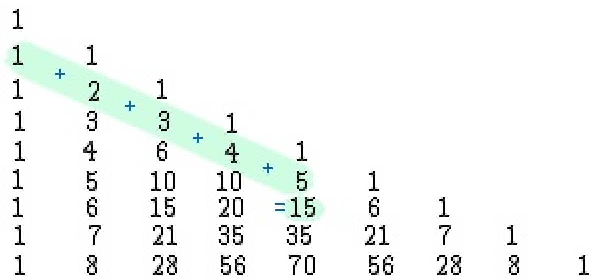

Figura 3.5: Teorema da Diagonal

Imagem retirada: http://www.matematicadidatica.com.br/TrianguloDePascal.aspx

De fato, pela lei de formação do triângulo, temos $15 = T_{6,4} = T_{5,3} + T_{5,4} = 10 + 5$. Por sua vez, $10 = T_{5,3} = T_{4,2} + T_{4,3} = 6 + 4$. Daí, temos que

$$15 = 10 + 5 = (6 + 4) + 5.$$

De forma análoga, concluímos que:

$$\begin{aligned} 15 &= 10 + 5 \\ &= (6 + 4) + 5 \\ &= (3 + 3) + 4 + 5 \\ &= (1 + 2) + 3 + 4 + 5 \\ &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \end{aligned}$$

Logo qualquer um dos elementos do triângulo pode ser escrito como a soma dos termos de uma diagonal que começa no termo posicionado na casa imediatamente superior a ele até o 1. Isso é o que veremos no teorema a seguir.

Teorema 5 (Teorema das Diagonais)**.**

$$C_n^0 + C_{n+1}^1 + \ldots + C_{n+p}^p = C_{n+p+1}^p$$

Demonstração. Por indução teremos:

Para $p = 0$, é valido pois $C_n^0 = 1 = C_{n+1}^0$

Suponha válido $C_n^0 + C_{n+1}^1 + \ldots + C_{p+n}^p = C_{p+n+1}^p$ para algum $p \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que é válido para $p+1$, ou seja, $C_n^0 + C_{n+1}^1 + \ldots + C_{p+n}^p + C_{p+n+1}^{p+1} = C_{p+n+2}^{p+1}$.

$$C_n^0 + C_{n+1}^1 + \ldots + C_{p+n}^p = C_{p+n+1}^p$$
$$C_n^0 + C_{n+1}^1 + \ldots + C_{p+n}^p + C_{p+n+1}^{p+1} = C_{p+n+1}^p + C_{p+n+1}^{p+1}$$

Pela Relação de Stifel,

$$C_{p+n+1}^p + C_{p+n+1}^{p+1} = C_{p+n+2}^{p+1}.$$

Logo,

$$C_n^0 + C_{n+1}^1 + \ldots + C_{p+n}^p + C_{p+n+1}^{p+1} = C_{p+n+2}^{p+1}$$

□

Observe que podemos demonstrar mais facilmente o Teorema das Diagonais utilizando o Teorema das Colunas e o Teorema das Combinações Complementares.

Demonstração. Do Teorema das Colunas, sabemos que

$$C_p^p + C_{p+1}^p + \ldots + C_{p+n}^p = C_{p+n+1}^{p+1}.$$

Por outro lado, pelo Teorema das Combnações Complementares, temos que $C_p^p = C_p^0$, $C_{p+1}^p = C_1^p$, ..., $C_{p+n}^p = C_n^p$ e $C_{p+n+1}^{p+1} = C_n^{p+1}$. Daí,

$$C_p^0 + C_1^p + \ldots + C_n^p = C_p^p + C_{p+1}^p + \ldots + C_{p+n}^p = C_{p+n+1}^{p+1} = C_n^{p+1}.$$

Logo, trocando p por n, temos que

$$C_n^0 + C_1^n + \ldots + C_p^n = C_p^{n+1}.$$

como queríamos demonstrar.

$\square$

Capítulo 4

Aplicações do Triângulo de Pascal no Ensino Fundamental e Médio

Ao analisar o Triângulo de Pascal e suas propriedades, podemos perceber sua aplicabilidade em outros conteúdos do Ensino Fundamental e Médio como, por exemplo, na busca de padrões, na trigonometria, nas progressões aritméticas e nos polinômios. Veremos esses exemplos a seguir.

4.1 Ensino Fundamental

De acordo com os PCNs [Brasil, 1988],

> pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis).

Dessa forma, no Ensino Fundamental II, podemos trabalhar com o Triângulo de Pascal investigando padrões e regularidades em seus elementos buscando, assim, algum nível de sistematização que possam ser usadas pelos discentes em novos problemas, por exemplo.

A proposta, apresentada no Apêndice A, é, primeiramente, exibir o triângulo da maneira mais simples deixando a cargo do professor contar um pouco da sua história. Nesse momento não se faz necessário falar sobre os números binomiais. No segundo momento, os alunos poderão analisar o triângulo e especular possíveis padrões e, por último, será pedido que eles escrevam a próxima linha do triângulo seguindo o que foi discutido anteriormente.

Essa atividade foi aplicada numa turma de 7º ano do Ensino Fundamental II da Escola Municipal Ana Lúcia Magalhães localizada no município de Lauro de Freitas. Nesse momento estavam presentes 24 alunos que foram arrumados em duplas para a realização da referida tarefa.

Inicialmente foi explicado aos alunos o que são padrões e regularidades para que eles pudessem entender a proposta que viria em seguida. Daí, cada dupla recebeu uma folha com a atividade e foi feito um breve resumo acerca do surgimento do Triângulo de Pascal, o porquê dele ter recebido esse nome e como os seus elementos estão organizados.

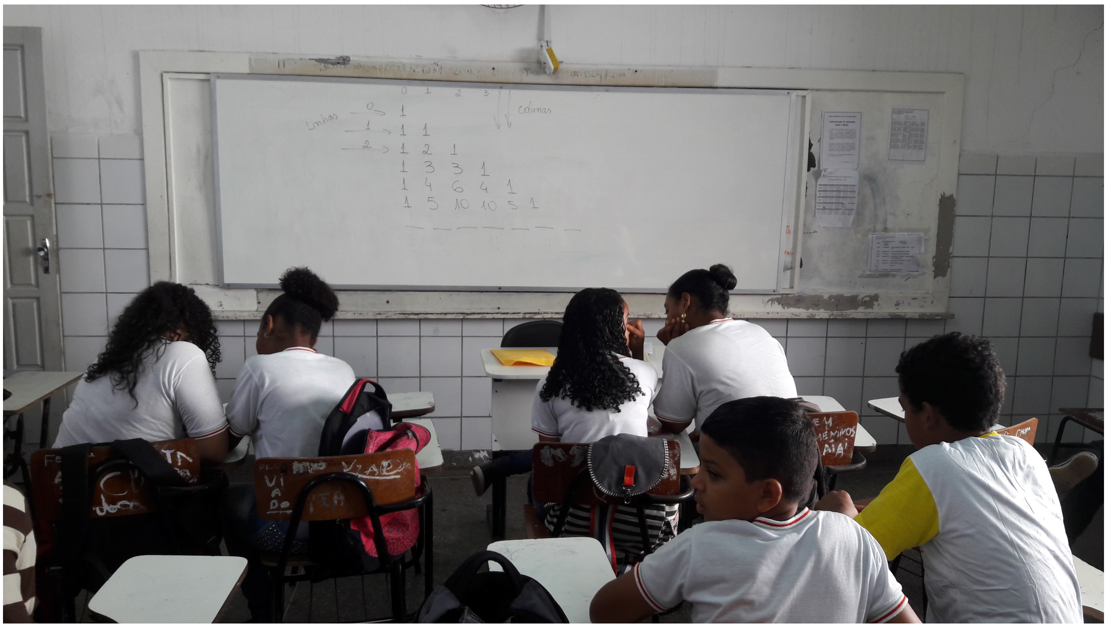

Figura 4.1: Atividade Buscando Padrões

Ao analisarem o triângulo, algumas das regularidades apontadas foram que todas as linhas começam e terminam com 1, que uma coluna e uma diagonal apresentam números consecutivos e que os elementos se repetem nas linhas. Além disso, foi possível, através da discussão, apresentar superficialmente: o teorema das linhas quando foi dito por um dos alunos que o resultado da soma dos elementos de cada linha gera um múltiplo de dois; o teorema das colunas a partir da terceira questão; e a equivalência do teorema das colunas e o teorema das diagonais pela fala de um deles que dizia que "somar os elementos das colunas dava no mesmo que somar os elementos das diagonais". Como consequência disso, a quarta questão foi de fácil resolução já que eles já tinham descoberto a lei de formação do triângulo.

No final da atividade, foi pedido a eles que escrevessem o que tinham achado da atividade. Daí, foi obtido alocuções como: "Gostei da aula, bastante divertida. As opiniões dos alunos foram bastante diversificadas. Não parece sequer com um assunto de segundo ano. Me surpreendeu! Era tanta coisa que eu via que era difícil de colocar no papel"; "Achamos interessante e pensamos que iria ser mais difícil. O difícil mesmo é escrever o que entendemos e o que achamos no triângulo, mas gostamos"; "Foi diferenciada. Teve coisas mais difíceis e outras não"; "Foi bom. Nós sabemos explicar mas não sabemos escrever"; "Foi fácil, mas tudo foi questão de observação".

Figura 4.2: Respondendo a atividade Buscando Padrões

Durante o processo, foi possível constatar a dificuldade que eles tem em trabalhar com questões que envolvem raciocínio lógico e como eles não conseguem escrever o que estavam pensando e falando. Atividades como essa podem ser aplicada em qualquer ano do Ensino Fundamental II com o objetivo de proporcionar aos alunos o contato com conteúdos que geralmente só são ensinados no Ensino Médio e, principalmente, trabalhar neles o raciocínio lógico, a observação e a capacidade de transcrever para o papel aquilo que está pensando.

4.2 Ensino Médio

4.2.1 Construção das linhas do Triângulo de Pascal

É possível determinar os termos das linhas do Triângulo de Pascal sem o desenvolvimento dos números binomiais que os formam e sem conhecer as linhas anteriores.

Para isso vamos encontrar um fator F tal que $\binom{n}{p+1} = F.\binom{n}{p}$. Daí, temos

$$\begin{aligned}\binom{n}{p+1} = F.\binom{n}{p} &\iff \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} = F.\frac{n!}{(n-p)!p!}\\ &\iff \frac{(n-p)!p!}{(p+1)!(n-p-1)!} = F\\ &\iff F = \frac{(n-p)(n-p-1)!p!}{(n-p-1)!(p+1)p!} = \frac{n-p}{p+1}\end{aligned}$$

Logo, basta multiplicar o termo anterior da linha por $\dfrac{n-p}{p+1}$ para obter o próximo termo. A relação $\dbinom{n}{p+1} = \dfrac{n-p}{p+1}.\dbinom{n}{p}$ é chamada de Relação de Fermat.

Exemplo. Sabemos que cada linha n do Triângulo Aritmético começa pelo número 1 seguido do número n. A linha $n = 8$ começa pelo número 1 e seu segundo termo, que denotarei por $p = 1$, é o número 8.

1	8

Para obtermos o próximo termo $(p + 1 = 2)$ da linha, basta multiplicar o termo anterior $(p = 1)$ por $\dfrac{n-p}{p+1} = \dfrac{8-1}{1+1} = \dfrac{7}{2}$, ou seja, $8.\dfrac{7}{2} = 28$.

1	8	28

Para obtermos o quarto termo, $p + 1 = 3$, vamos multiplicar o terceiro termo (28) por $\dfrac{6}{3}$, ou seja, $28.\dfrac{6}{3} = 56$.

1	8	28	56

Analogamente para o quinto termo $(p = 4)$, teremos $56.\dfrac{5}{4} = 70$. Observe que no fator que é multiplicado à medida que diminuímos uma unidade no numerador aumentamos uma unidade no denominador.

1	8	28	56	70

Como sabemos que cada linha tem $n + 1$ elementos e que existe uma simetria nos termos, os próximos só serão repetidos na ordem decrescente obtendo assim todos os termos da linha $n = 8$ do triângulo.

1	8	28	56	70	56	28	8	1

Exemplo. Iremos fazer o mesmo para obter a linha $n = 9$ do triângulo. Sabendo que o primeiro termo $(p = 0)$ é igual a 1, vamos multiplicá-lo por $\dfrac{9}{1}$ para encontar o segundo termo, que será multiplicado por $\dfrac{8}{2}$ para encontrar o terceiro termo, que será multiplicado por $\dfrac{7}{3}$ para achar o quarto termo, e esse processo será repetido até o denominador da fração ficar maior ou igual ao denominador. Nesse momento, basta repetir os termos encontrados anteriormente na ordem decrescente que aparecem. Daí, para $n = 9$, teremos a linha

1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Essa sistematização pode auxiliar os alunos no desenvolvimento do Binômio de Newton $(x+a)^n$, no Ensino Médio, já que nos apresenta um método prático para encontrar os coeficientes dos seus termos.

Exemplo. (UFSM-2005) Desenvolvendo o binômio $(2x-1)^8$, o quociente entre o quarto e o terceiro termos é:

a)-4 b)$-x$ c)x d) $\dfrac{-1}{x}$ e)$4x$

Solução: Geralmente, esse tipo de questão é resolvida no ensino médio utilizando a fórmula do termo geral do binômio de Newton: $T_{p+1} = \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$. Daí teríamos:

$$\begin{aligned} T_3 = T_{2+1} &= \binom{8}{2} \cdot (2x)^6 \cdot (-1)^2 \\ &= \frac{8!}{6!2!} \cdot 64x^6 \\ &= \frac{8.7}{2} \cdot 64x^6 \\ &= 1792x^6 \end{aligned}$$

De forma análoga, temos que $T_4 = -1792x^5$. Daí, o quociente entre o quarto e o terceiro termos é dado por $\dfrac{1792x^6}{-1792x^5} = -x$.

Entretanto, podemos resolver essa questão utilizando a construção das linhas do Triângulo de Pascal. Como $n = 8$, temos que os coeficientes do terceiro termo e do quarto termo serão, respectivamente, $8 \cdot \dfrac{7}{2} = 28$ e $28 \cdot \dfrac{6}{3} = 56$. Daí temos:

$$\frac{T_4}{T_3} = \frac{56 \cdot (2x)^5}{-28 \cdot (2x)^6} = -x.$$

4.2.2 Algumas identidades do Seno e Cosseno

Inicialmente, é ensinado ao aluno no segundo ano do Ensino Médio a desenvolver expressões do tipo $\cos nx$ ou $\operatorname{sen} nx$ através da fórmula do seno da soma ou cosseno da soma.

Exemplo. Sen3x

Como

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2x &= \operatorname{sen}(x+x) \\ &= \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x \\ &= 2 \operatorname{sen} x \cos x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos(x+x)\\ &= \cos x \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x\\ &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x,\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 3x &= \operatorname{sen}(2x+x)\\ &= \operatorname{sen} 2x \cos x + \operatorname{sen} x \cos 2x\\ &= 2\operatorname{sen} x \cos x \cos x + \operatorname{sen} x(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\\ &= 2\operatorname{sen} x \cos^2 x + \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x\\ &= 3\operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x\end{aligned}$$

Entretanto, ao tentar desenvolver essas expressões no terceiro ano do Ensino Médio, podemos determinar os coeficientes dos termos através do Triângulo de Pascal. Como, pela fórmula de De Moivre, $\cos nx + i \operatorname{sen} nx = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^n$, nos deparamos com o desenvolvimento do Binômio de Newton $(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n$, com $n \in N$, cujos coeficientes estão determinados na linha n do triângulo.

A expressão $\cos 3x + i \operatorname{sen} 3x = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^3$, por exemplo, tem como desenvolvimento:

$$\begin{aligned}\cos 3x + i \operatorname{sen} 3x &= (\cos x + i \operatorname{sen} x)^3\\ &= 1 \cdot \cos^3 x + 3i \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x + i^2 3 \cos x \cdot \operatorname{sen}^2 x + 1 i^3 \operatorname{sen}^3 x\\ &= 1 \cdot \cos^3 x + 3i \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x - 3 \cos x \cdot \operatorname{sen}^2 x - 1 i \operatorname{sen}^3 x\\ &= (\cos^3 x - 3\cos x \cdot \operatorname{sen}^2 x) + i(3\cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x)\end{aligned}$$

Tomando o Triângulo de Pascal determinado como abaixo, os coeficientes do desenvolvimento $\cos 3x + i \operatorname{sen} 3x$ encontram-se na sua linha de número $n = 3$.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Logo, ao separar a parte real e a parte imaginária no desenvolvimento do $\cos 3x + i \operatorname{sen} 3x$, teremos que $\operatorname{sen} 3x = 3\cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x$ como foi visto no exemplo anterior.

Exemplo. Observando a linha de $n = 6$ do triângulo, podemos determinar o desenvolvimento do binômio $\cos 6x + i \operatorname{sen} 6x = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^6$:

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$$\Downarrow$$

$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^6 =$
$= 1\cos^6 x + 6i\cos^5 x \operatorname{sen} x + 15i^2\cos^4 x \operatorname{sen}^2 x + 20i^3\cos^3 x \operatorname{sen}^3 x + 15i^4\cos^2 x \operatorname{sen}^4 x +$
$+ 6i^5 \cos x \operatorname{sen}^5 x + 1i^6 \operatorname{sen}^6 x$
$= 1\cos^6 x + 6i\cos^5 x \operatorname{sen} x - 15\cos^4 x \operatorname{sen}^2 x - 20i\cos^3 x \operatorname{sen}^3 x + 15\cos^2 x \operatorname{sen}^4 x +$
$+ 6i\cos x \operatorname{sen}^5 x - 1\operatorname{sen}^6 x$
$= (1.\cos^6 x - 15\cos^4 x \operatorname{sen}^2 x + 15\cos^2 x \operatorname{sen}^4 x - 1\operatorname{sen}^6 x) + i(6\cos^5 x \operatorname{sen} x - 20\cos^3 x \operatorname{sen}^3 x +$
$6\cos x \operatorname{sen}^5 x)$

Para obter a expressão do $\cos 6x$ ou do $\operatorname{sen} 6x$, por exemplo, basta separar a parte real da parte imaginária:

$\cos 6x = 1.\cos^6 x - 15\cos^4 x \operatorname{sen}^2 x + 15\cos^2 x \operatorname{sen}^4 x - 1\operatorname{sen}^6 x$

$\operatorname{sen} 6x = 6\cos^5 x \operatorname{sen} x - 20\cos^3 x \operatorname{sen}^3 x + 6\cos x \operatorname{sen}^5 x$

Fazendo isso, podemos notar que só de observar o Triângulo de Pascal já podemos determinar qualquer $\operatorname{sen} nx$ ou $\cos nx$, $n \in \mathbb{N}$. Para o exemplo anterior, pegamos a linha $n = 6$. Os termos de colunas pares da linha (1, 15, 15, 1) serão os coeficientes dos termos do $\cos 6x$ e os termos de colunas ímpares (6, 20, 6) serão os coeficientes dos termos de $\operatorname{sen} 6x$. Além disso, para o $\cos 6x$ tomamos os termos $\cos^{6-p} x \operatorname{sen}^p x$ com p par e para o $\operatorname{sen} 6x$ os termos com p ímpar, com sinais intercalados começando pelo positivo, devido às potências de i no desenvolvimento de $(\cos x + i \operatorname{sen} x)^6$.

Vamos a outro exemplo:

Exemplo. Para $\cos 4x$ e $\operatorname{sen} 4x$, pegaremos a linha de $n = 4$. Logo, os coeficientes de $\cos 4x$ serão 1, -6 e 1 e os coeficientes de $\operatorname{sen} 4x$ serão 4 e -4. Basta agora tomar os termos $\cos^{4-p} x \operatorname{sen}^p x$ com p par para um e com p ímpar para o outro, nessa ordem:

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$$\Downarrow$$

$$\cos 4x = 1\cos^4 x - 6\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x + 1\operatorname{sen}^4 x$$

$$\operatorname{sen} 4x = 4\cos^3 x \operatorname{sen} x - 4\cos x \operatorname{sen}^3 x$$

4.2.3 Progressão Aritmética (PA)

É possível trabalhar no primeiro ano do Ensino Médio com o Triângulo de Pascal mostrando exemplos de Progressões Aritméticas em suas colunas. Primeiramente, definiremos as Progressões Aritméticas:

PA de primeira ordem

Uma progressão aritmética de primeira ordem é toda sequência numérica cuja diferença entre dois termos consecutivos seja constante. A essa diferença denominaremos por razão da PA e a representaremos pela letra r.

Ex.: As sequências (10,13,16,19...) e (13, 11, 9, 7...) são progressões aritméticas cujas razões valem 3 e -2, respectivamente.

PA de ordem superior

Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência (a_n) na qual as diferenças $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, entre cada termo e o termo anterior, formam uma PA não constante. Isto é, a diferença entre termos consecutivos da sequência geral, na ordem em que aparecem, gera uma PA de primeira ordem.

Generalizando, um progressão aritmética de ordem l $(l \in \mathbb{N}, l > 2)$ é uma sequência na qual as diferenças entre termos consecutivos formam uma PA de ordem $l - 1$.

Feito isso, passaremos a mostrar exemplos no corpo do triângulo. Observando suas colunas, notamos, por exemplo, que:

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

- a coluna 0 determina uma PA constante de razão $r = 0$
- a coluna 1 determina uma PA de primeira ordem com razão $r = 1$
- a coluna 2 determina uma PA de segunda ordem. A diferença entre um termo e o termo anterior gera a PA de primeira ordem descrita na coluna 1, obedecendo a lei de formação do Triângulo de Pascal ($T_{n+1,p+1} - T_{n,p+1} = T_{n,p}$): (1 − 0, 3 − 1, 6 − 3, 10 − 6, ...) = (1, 2, 3, 4, ...).
- a coluna 3 determina uma PA de terceira ordem. A diferença entre um termo e o termo anterior gera a PA de segunda ordem descrita na coluna 2: (1 − 0, 4 − 1, 10 − 4, 20 − 10,...) = (1, 3, 6, 10,...).
- etc.

Dessa forma, o Teorema das Colunas ilustra, no Triângulo de Pascal, uma propriedade geral das PAs de ordem superior:

Proposição 3. *A soma dos k primeiros termos de uma PA de ordem n gera os elementos de uma outra PA de ordem n+1.*

Demonstração. Seja $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, \cdots)$ uma PA de ordem n e S_k a soma dos k primeiros termos dessa PA. Basta observar que a diferença entre os termos de S_k, fornece $\Delta S_k = S_{k+1} - S_k = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = a_{k+1}$. Logo, cada S_k será um termo de uma PA de ordem $n + 1$. □

Além disso, o teorema a seguir, cuja demostração pode ser encontrada em [Castro, 2010], nos garante que cada coluna p do Triângulo de Pascal pode ser determinada por um polinômio de grau p na variável n, ou seja, um polinômio do tipo

$$f(n) = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + ... + a_1 n + a_0$$

onde, $a_k \in \mathbb{R}$, com $k = 0, 1, ..., p$, são os coeficientes dos termos do polinômio $f(n)$.

Teorema 6. *A sequência $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma P.A. de ordem p se, e somente se, b_n é dado por um polinômio de grau p na variável n.*

De fato,

- Para a coluna zero ($p = 0$) temos o polinômio de grau $p = 0$, $f(n) = 1$, já que é uma PA constante de razão $r = 0$.
- Para a coluna um ($p = 1$) temos o polinômio $f(n) = n$ de grau $p = 1$, já que temos uma PA de primeira ordem de razão $r = 1$.
- Na coluna dois ($p = 2$) aparece uma PA de segunda ordem determinada pelo polinômio $f(n) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$

E assim por diante.

Como, pelo teorema 6, cada coluna do Triângulo de Pascal pode ser descrita através de um polinômio, é possível determinar qualquer termo da coluna variando o valor da linha n:

Já vimos que todos os termos do triângulo são determinados através do desenvolvimento dos números binomiais $\binom{n}{p}$. Daí, como numa coluna o p é fixo, a variável do polinômio será o n e os polinômios terão essa forma:

$$\begin{aligned}\binom{n}{p} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p)!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)}{p \cdot (p-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}\end{aligned}$$

Como só tem a variável n no numerador, teremos um polinômio de incógnita n de grau p.

Exemplo. Para a coluna 3 ($p = 3$), teremos o polinômio $\dfrac{n^3}{6} - \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{3}$:

$$\begin{aligned}\binom{n}{3} &= \frac{n!}{3!(n-3)!} \\ &= \frac{n.(n-1)(n-2)}{3.2} \\ &= \frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}\end{aligned}$$

Tomando o exemplo acima, no Ensino Médio, podemos utilizar tal polinômio pra determinar, por exemplo, a quantidade de subconjuntos com 3 elementos de qualquer conjunto com n elementos.

Exemplo. Para um conjunto com $n = 6$ elementos, teremos

$$\frac{6^3}{6} - \frac{6^2}{2} + \frac{6}{3} = \frac{216}{6} - \frac{36}{2} + \frac{6}{3} = 36 - 18 + 2 = 20$$

subconjuntos com 3 elementos.

Capítulo 5

Curiosidades

5.1 Potências de 11

Podemos relacionar as potências de 11 com o Triângulo de Pascal após ensinar Binômio de Newton no segundo ano do Ensino Médio. Ao decompor as potências de 11 no sistema decimal, aparecerão como coeficientes das potências de 10 os termos do triângulo. Isto é, ao escrever a potência 11^n como o binômio $(10+1)^n$, teremos:

$$\boxed{11^n = (10+1)^n = \binom{n}{0}.10^n + \binom{n}{1}.10^{n-1} + ... + \binom{n}{n-1}.10^1 + \binom{n}{n}.10^0.}$$

Dessa forma, podemos encontrar qualquer potência de 11:

$$\begin{gathered}
11^0 = 1.10^0 = 1 \\
11^1 = 1.10^1 + 1.10^0 = 11 \\
11^2 = 1.10^2 + 2.10^1 + 1.10^0 = 121 \\
11^3 = 1.10^3 + 3.10^2 + 3.10^1 + 1.10^0 = 1331 \\
11^4 = 1.10^4 + 4.10^3 + 6.10^2 + 4.10^1 + 1.10^0 = 14641
\end{gathered}$$

Deve-se tomar cuidado ao calcular as potências de 11 a partir do $n = 5$, pois, como alguns termos do triângulo serão maiores do que 10, devemos fazer a passagem para a próxima casa do sistema decimal. Por exemplo,

$$\begin{gathered}
11^5 = 1.10^5 + 5.10^4 + 10.10^3 + 10.10^2 + 5.10^1 + 1.10^0 = \\
= 100000 + 50000 + 10000 + 1000 + 5 + 1 = 161051
\end{gathered}$$

5.2 Como usar as linhas n e m para obter a linha $n+m$

Como $(x+a)^{n+m} = (x+a)^n.(x+a)^m$, basta multiplicar os coeficientes dos desenvolvimentos dos Binômios de Newton, $(x+a)^n$ e $(x+a)^m$, utilizando a tabela de multiplicação descrita na seção 1.3.

Exemplo. Obtendo a linha 7 do Triângulo de Pascal a partir das linhas 3 e 4.

Tomemos a linha 3 (1-3-3-1) e a linha 4 (1-4-6-4-1) do triângulo.

	1	3	3	1
1				
4				
6				
4				
1				

Após a multiplicação, obteremos:

	1	3	3	1
1	1	3	3	1
4	4	12	12	4
6	6	18	18	6
4	4	12	12	4
1	1	3	3	1

Para determinar cada termo da linha 7, basta somar as diagonais na tabela: a soma em cada diagonal corresponde a um dos 8 termos da linha 7.

- 1º termo: 1
- 2º termo: 4+3 = 7
- 3º termo: 6+12+3 = 21
- 4º termo : 4+18+12+1 = 35
- 5º termo : 4+18+12+1 = 35
- 6º termo: 6+12+3 = 21
- 7º termo: 4+3 = 7
- 8º termo: 1

Logo, a linha 7 tem termos iguais a 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7 e 1 nessa ordem.

5.3 Pirâmide de Pascal

A título de curiosidade, ao analisar o desenvolvimento do trinômio $(a + b + c)^n$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, podemos associá-lo com a Pirâmide de Pascal que é uma generalização do Triângulo Aritmético, onde cada seção da pirâmide corresponderia a uma linha do triângulo. O aprofundamento do assunto, disponível em [Staib, 1978], deixo a cargo do leitor.

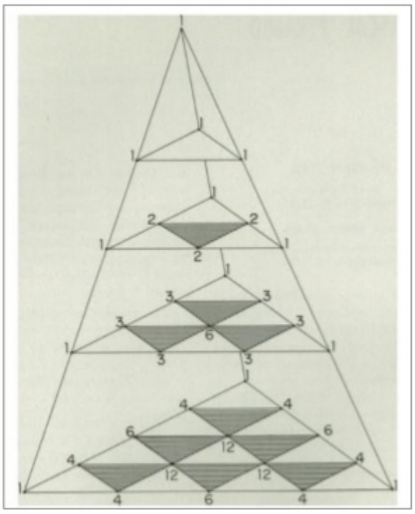

Figura 5.1: Pirâmide de Pascal

Imagem retirada: http://www.jstor.org/stable/27961325?seq=1#fndtn-page_scan_tab_contents

Capítulo 6

Considerações Finais

A concretização dessa dissertação alcançou, como um dos propósitos almejados, o desenvolvimento de estratégias didáticas e de novas práticas de ensino-aprendizagem da Matemática no que diz respeito à Análise Combinatória e ao Binômio de Newton. Elas contribuíram na significação e compreensão dos conteúdos trabalhados e na construção de novos conceitos metodológicos através da utilização do Triângulo de Pascal como artifício.

Iniciar com a história do surgimento do Triângulo de Pascal possibilita entender com qual propósito ele foi criado e como pode ser utilizado em outros conteúdos. Pensando dessa forma, a interligação entre a Análise Combinatória e o Binômio de Newton com o Triângulo Aritmético pode ser feita de uma maneira mais clara e simples para viabilizar a aprendizagem do aluno. No quesito propriedades, suas demonstrações foram feitas da maneira mais simples encontrada.

Tradicionalmente, o Triângulo de Pascal é definido em termos dos coeficientes binomiais e a relação de Stifel é demonstrada utilizando a manipulação de fatoriais, o que não é nada intuitivo para um aluno de Ensino médio. Daí, observa-se que o triângulo pode ser construído somando termos 2 a 2 e que os coeficientes do Binômio de Newton correspondem aos números binomiais definidos anteriormente. Com a nova abordagem apresentada na dissertação, o Triângulo de Pascal foi definido por sua propriedade construtiva e, em seguida, os coeficientes do Binômio de Newton foram relacionados com seus elementos mostrando, por multiplicação de polinômios, que ele satisfaz a mesma propriedade construtiva do triângulo. Dessa forma, após relacionar o binômio com os coeficientes binomiais por argumento combinatório, foi possível obter de imediato que o Triângulo Aritmético é formado pelos números binomiais e a demonstração da relação de Stifel é automaticamente obtida de forma mais fácil e intuitiva.

No decorrer da pesquisa, surgiram algumas curiosidades e aplicações do Triângulo de Pascal em outras temáticas. No Ensino Médio, foi possível mostrar que o Triângulo de Pascal não precisa ser citado somente ao estudar Análise Combinatória e Binômio de Newton. Ele poder ser ligado com outros assuntos como, por exemplo, PAs e trigonometria. O maior desafio deste trabalho foi encontrar uma maneira de utilizar o triângulo no Ensino Fundamental, sendo a solução para essa questão a procura por padrões matemáticos. Apresentá-lo no Ensino Fundamental II, como na atividade em apêndice, possibilitará o desenvolvimento de habilidades matemáticas que permitirão ao aluno "compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive"([Brasil, 1988]).

Espera-se que o uso do Triângulo de Pascal proporcione benefícios no aperfeiçoamento e aplicação dos conteúdos propostos. É bom salientar que é imprescindível que o professor de matemática tenha como hábito a reflexão sobre os conteúdos matemáticos e sobre as maneiras de ensiná-los e entendê-los em seu âmbito mais amplo, buscando sempre a melhoria de suas aulas.

Apêndice A

Atividade - Buscando Padrões

A figura abaixo apresenta as primeiras linhas de um arranjo geométrico formado por números dispostos em linhas e colunas conhecido como Triângulo Aritmético, Triângulo de Tartaglia-Pascal ou simplesmente Triângulo de Pascal. Observe:

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
—	—	—	—	—	—	—
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Agora que você já conhece o Triângulo de Pascal, responda:

1. Que regularidade você observou na construção das linhas do Triângulo?

2. Algum outro padrão pode ser encontrado no corpo do Triângulo? Cite-os.

3. Some os dois primeiros elementos da segunda coluna. Em seguida, some os três primeiros elementos da mesma coluna. Faça isso novamente com os quatro primeiros elementos dessa coluna. Observando os resultados, o que você pode concluir? É possível determinar um elemento de uma linha só observando a soma dos elementos da coluna anterior a que ele pertence?

4. Quais serão os números presentes na próxima linha do Triângulo? Complete a figura do início da atividade.

Sucesso na atividade!

Apêndice B

Respostas da atividade

Nas páginas seguintes dessa seção, serão apresentadas algumas atividades respondidas pelos alunos, onde será possível observar quais regularidades foram detectadas por eles.

Escola: Ana Lúcia Magalhães Data: 20/06/16
Alunos: Lara L. Leal, Lídia Vieira
Professora: Tâmara Paiva Disciplina: Matemática Ano: 7° Turma: A

Atividade - Buscando Padrões

A figura abaixo apresenta as primeiras linhas de um arranjo geométrico formado por números dispostos em linhas e colunas conhecido como Triângulo Aritmético, Triângulo de Tartaglia-Pascal ou simplesmente Triângulo de Pascal. Observe:

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Agora que você já conhece o Triângulo de Pascal, responda:

1. Que regularidade você observou na construção das linhas do Triângulo?

A soma dos elementos de uma linha é o resultado dos elementos das linhas seguintes

2. Algum outro padrão pode ser encontrado no corpo do Triângulo? Cite-os.

Na segunda coluna os elementos são consecutivo, e na primeira coluna segunda linha na diagonal também é consecutivo

3. Some os dois primeiros elementos da segunda coluna. Em seguida, some os três primeiros elementos da mesma coluna. Faça isso novamente com os quatro primeiros elementos dessa coluna. Observando os resultados, o que você pode concluir? É possível determinar um elemento de uma linha só observando a soma dos elementos da coluna anterior a que ele pertence?

Que a soma dos três primeiros elementos da coluna é igual ao terceiro número da coluna sucessora.

4. Quais serão os números presentes na próxima linha do Triângulo? Complete a figura do início da atividade.

Sucesso na atividade!

Escola: Municipal Ana Lúcia Magalhães Data: 20/06/2016
Alunos: Rafaela Rebouças e Ludmila França
Professora: Tâmara Paiva Disciplina: Matemática Ano: 7º Turma: A

Atividade - Buscando Padrões

A figura abaixo apresenta as primeiras linhas de um arranjo geométrico formado por números dispostos em linhas e colunas conhecido como Triângulo Aritmético, Triângulo de Tartaglia-Pascal ou simplesmente Triângulo de Pascal. Observe:

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Agora que você já conhece o Triângulo de Pascal, responda:

1. Que regularidade você observou na construção das linhas do Triângulo?

o número 1 sempre repete, Para encontrar os resultados só é soma.

2. Algum outro padrão pode ser encontrado no corpo do Triângulo? Cite-os.

Sim, Na coluna o número 1 sempre se repete. E só tem uma coluna na ordem certa e uma na diagonal.

3. Some os dois primeiros elementos da segunda coluna. Em seguida, some os três primeiros elementos da mesma coluna. Faça isso novamente com os quatro primeiros elementos dessa coluna. Observando os resultados, o que você pode concluir? É possível determinar um elemento de uma linha só observando a soma dos elementos da coluna anterior a que ele pertence?

Observamos que ao soma os três primeiros números o resultado estava em baixo. Sim.

4. Quais serão os números presentes na próxima linha do Triângulo? Complete a figura do início da atividade.

Sucesso na atividade!

Escola: Municipal ana lucia magalhães Data: 20/06/16
Alunos: Celi Sousa .S, Aly Samuel dos Santos
Professora: Tâmara Paiva Disciplina: Matemática Ano: 7 Turma: A

Atividade - Buscando Padrões

A figura abaixo apresenta as primeiras linhas de um arranjo geométrico formado por números dispostos em linhas e colunas conhecido como Triângulo Aritmético, Triângulo de Tartaglia-Pascal ou simplesmente Triângulo de Pascal. Observe:

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Agora que você já conhece o Triângulo de Pascal, responda:

1. Que regularidade você observou na construção das linhas do Triângulo?
Que a quantidade de linhas é a mesma quantidade das colunas

2. Algum outro padrão pode ser encontrado no corpo do Triângulo? Cite-os.
Que os numeros somados horizontalmente da um numero PÁ

3. Some os dois primeiros elementos da segunda coluna. Em seguida, some os três primeiros elementos da mesma coluna. Faça isso novamente com os quatro primeiros elementos dessa coluna. Observando os resultados, o que você pode concluir? É possível determinar um elemento de uma linha só observando a soma dos elementos da coluna anterior a que ele pertence?
Que o numero somado na diagonal da o result de baixo

4. Quais serão os números presentes na próxima linha do Triângulo? Complete a figura do início da atividade.

Sucesso na atividade!

Referências

[Armando, 2014] Armando, H. R; Santos, R. C. d. (2014). Triângulo de pascal e funções polinomiais. Disponível em http://www.rpm.org.br/cdrpm/86/41.html. Revista do professsor de matematica nº 86. Acessado em 26 jan. 2016.

[Boyer, 1906] Boyer, C. B. (1906). *Historia da Matemática*. Ed. Da Universidade de São paulo, Universidade de São paulo, São Paulo. Tradução Elza F. Gornide.

[Brasil, 1988] Brasil (1988). Ministério da educação. secretaria de educação fundamental. parâmetros curriculares nacionais: Matemática. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Brasília: MEC, 1988. Acessado em 12 mar. 2016.

[Castro, 2010] Castro, L. M. d. (2010). P.a. de ordem superior, operador diferenca, somatórios. Disponível em http://www.aprender.blog.br/2010/09/pa-de-ordem-superior-somatorios.html. Acessado em 27 fev. 2016.

[Costa, 2014] Costa, A. (2014). Histórias com o triângulo aritmético. Disponível em http://www.rpm.org.br/cdrpm/85/18.html. Revista do professsor de matematica 85. Acessado em 26 jan. 2016.

[D'Ambrosio, 2010] D'Ambrosio, B. S. (2010). Como ensinar matemática hoje? Disponível em http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Beatriz.pdf. Acessado em 17 out. 2015.

[Eves, 2008] Eves, H. (2008). *Introdução à História da Matemática*. Unicamp, Campinas, SP.

[Fomin, 2012] Fomin, D. (2012). *Círculos Matemáticos*. IMPA, Rio de Janeiro.

[Forner, 2005] Forner, R. (2005). Paulo freire e educação matemática: reflexos sobre a formação do professor. Disponível em http://www.bibliotecadigital.puc-campinas.edu.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=614. Acessado em 17 out. 2015.

[Hazzan, 2004] Hazzan, S. (2004). *Fundamentos de matemática elementar: combinatória e probabilidade*. Atual, São Paulo. 7 ed., v.5.

[Morgado, 2006] Morgado, A. C. (2006). *Análise Combinatória e Probabilidade*. SBM, Rio de Janeiro. 9 ed.

[Morgado, 2013] Morgado, Augusto César; Carvalho, P. C. P. (2013). *Matemática discreta*. SBM, Rio de Janeiro. Coleção PROFMAT.

[Nobre, 2004] Nobre, S. (2004). *Leitura Crítica da História: Reflexões sobre a História da matemática*. UNESP, São Paulo. Revista Ciência e Educação, v. 10, n.3, p.531-5439.

[Portanova, 2004] Portanova, R. (2004). História da matemática: um recurso metodológico? Disponível em http://www.sbmac.org.br/cnmacs/2004/cd_cnmac/files_pdf/10494a.pdf. Acessado em 18 out. 2015.

[Silveira, 2001] Silveira, J. F. P. d. (2001). O triângulo pascal é de pascal? Disponível em http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2b.html. Acessado em 03 nov. 2015.

[Staib, 1978] Staib, John; Staib, L. (1978). The pascal pyramid. Disponível em http://www.jstor.org/stable/27961325. Acessado em 28 maio 2016.