



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM  
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

NÚMEROS COMPLEXOS NA GEOMETRIA E OUTRAS  
APLICAÇÕES

ETINEVALDO SANTOS ALMEIDA MATOS

Salvador - Bahia

2017

# NÚMEROS COMPLEXOS NA GEOMETRIA E OUTRAS APLICAÇÕES

ETINEVALDO SANTOS ALMEIDA MATOS

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. André Luis Godinho Mandolesi

Salvador - Bahia

2017

# NÚMEROS COMPLEXOS NA GEOMETRIA E OUTRAS APLICAÇÕES

ETINEVALDO SANTOS ALMEIDA MATOS

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 10 de janeiro de 2017.

## **Banca Examinadora:**

---

Prof. Dr. André Luis Godinho Mandolesi (Orientador)  
UFBA

---

Prof. Dr. Evandro Carlos Ferreira dos Santos  
UFBA

---

Prof. Dr. Ana Lúcia Pinheiro Lima  
UFBA

*A minha família*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus pela vida e pela incomensurável ajuda para cursar o mestrado profissional em matemática, a minha filha amada Luana e a minha querida mãe Iara, pela compreensão e incentivos nas horas dedicadas para o estudo das diversas disciplinas. Agradeço também ao meu tio Geovaldo Miguel Valois, pelo incentivo desde o início para que eu fizesse esse curso. A minha amiga e companheira, que sempre esteve ao meu lado em todos os momentos, sejam eles difíceis ou alegres. O meu muito obrigado a André Luis Godinho Mandolesi, professor e orientador, pela paciência, atenção, dedicação e pelos conselhos dados durante toda a minha jornada e aos demais educadores do corpo docente do instituto de matemática da UFBA que fazem parte do PROFMAT, que contribuíram para o meu crescimento profissional. Agradeço ao IMPA, a Sociedade Brasileira de Matemática e a CAPES pela existência do curso, sem o qual nada disso seria possível. Aos meus colegas de curso pelo companheirismo, incentivos e em especial aos amigos Marcelo, Ivanilton e Leandro pela ajuda nas horas mais difíceis.

*”Nem sempre as raízes  
verdadeiras(positivas) ou  
falsas(negativas) de uma equação são  
reais. Às vezes elas são imaginárias”.*

*René Descartes*

# Resumo

O presente trabalho tem como objetivo apresentar aos alunos do ensino médio a grande importância de se estudar os números complexos, como uma ferramenta facilitadora na resolução de problemas matemáticos. Inicialmente, será apresentado o contexto histórico, mostrando o seu avanço ao longo dos séculos; em seguida, apresenta-se a definição e as operações algébricas e trigonométricas. Será feito também uma abordagem geométrica desses números, mostrando que os mesmos se apresentam como pontos ou vetores no plano, e que as operações entre eles aparecem como transformações geométricas. Desta forma introduz-se uma representação para a forma trigonométrica desses números, usando os complexos unitários, com o intuito de facilitar as operações e a sua visualização no plano. Será abordado também como os números complexos estão intrinsecamente relacionados com a geometria e outros conteúdos da matemática. A proposta de se fazer uma abordagem geométrica dos números complexos através de vetores no plano, é mais viável, pois possibilita aos alunos do ensino médio ter uma visualização dessas transformações geométricas, o que dá um significado maior ao conteúdo estudado.

**Palavras-chave:** Números complexos, Geometria, Aplicações.

# Abstract

The present work aims to show high school students the great importance of studying complex numbers as a facilitating tool in solving mathematical problems. Initially the historical context will be presented, showing its progress over the centuries, then the definition and algebraic and trigonometric operations will be presented. A geometric approach of these numbers will also be made, showing that they appear as points or vectors in the plane, and that the operations between them appear as geometric transformations. In this way we introduce a representation for the trigonometric form of these numbers, the unitary complexes, in order to facilitate the operations and their visualization in the plane. It will also be discussed how the complex numbers are intrinsically related to some of the contents of mathematics. The proposal of making a geometric approach through vectors in the plane of complex numbers is more feasible, since it allows the students of high school to have a visualization of these geometric transformations, which gives a greater meaning to the studied content.

**Key words:** Complex numbers, Geometry, Applications.



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 História dos números complexos</b>	<b>3</b>
<b>2 Números Complexos</b>	<b>6</b>
2.1 Conjunto dos números complexos . . . . .	6
2.2 Representação algébrica ou binomial . . . . .	6
2.3 Representação geométrica dos complexos . . . . .	7
2.4 Operações com números complexos . . . . .	8
2.5 Forma trigonométrica ou polar . . . . .	19
2.6 Complexos Unitários . . . . .	20
2.7 Operações na forma polar . . . . .	22
<b>3 Aplicações dos complexos na geometria</b>	<b>32</b>
3.1 Ponto médio de um segmento . . . . .	32
3.2 Distância entre dois pontos . . . . .	32
3.3 Colinearidade . . . . .	33
3.4 Rotação de um ponto . . . . .	33
3.5 Equação de uma reta . . . . .	35
3.6 Equação de uma circunferência . . . . .	35
3.7 Polígonos . . . . .	36
3.8 Problemas resolvidos . . . . .	37
<b>4 Aplicações dos números complexos na trigonometria</b>	<b>49</b>
<b>5 Outras aplicações dos números complexos</b>	<b>53</b>
5.1 Somas de números binomiais . . . . .	53
5.2 Somatórios trigonométricos . . . . .	56
5.3 Aplicações dos números complexos em polinômios . . . . .	59
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>64</b>

# Introdução

O estudo dos números complexos vem sendo ministrado hoje em dia com uma abordagem puramente algébrica. Isto impossibilita que os alunos tenham uma visualização geométrica do que está acontecendo. Somado a isso, vem a falta de contextualização com outros conteúdos da matemática, tornando-o isolado dos demais conteúdos. Esta postura só vem a contribuir para o grande desinteresse dos alunos do ensino médio por este conteúdo, pois, não conseguem ver a importância desses números dentro da matemática e, conseqüentemente, sua relevância no avanço científico e tecnológico. Daí a necessidade dos docentes buscarem uma forma diferente de apresentar estes números e dedicar tempo para mostrar a sua importância e relevância na história, chegando até as suas várias aplicações, que tanto influenciam direta ou indiretamente nossas vidas. Buscando dessa forma dar um significado ao seu estudo.

Será abordado no capítulo 1 deste trabalho, o contexto histórico dos números complexos, mostrando a contribuição que diversos matemáticos deram ao longo dos séculos, para o entendimento do conceito e do significado geométrico da unidade imaginária  $i$  dos números complexos.

No capítulo 2, explora-se a parte algébrica e geométrica dos números complexos, utilizando vetores no plano para facilitar a visualização das operações desses números. Será introduzido uma notação para representar os complexos unitários, o que facilitará no seu entendimento e nas diversas soluções dos problemas propostos.

O capítulo 3 é voltado às aplicações dos complexos na geometria. Apresentando conceitos da geometria que podem ser facilmente relacionados com os complexos, e, conseqüentemente, resolvendo problemas da geometria com o uso dos números complexos. Percebendo com isso que os complexos são uma excelente ferramenta na resolução de problemas.

No capítulo 4, relaciona-se os complexos unitários com a trigonometria. Onde observa-se a grande utilidade do mesmo na obtenção das fórmulas trigonométricas, bem como na resolução de problemas envolvendo a trigonometria.

No capítulo 5 é feito um estudo entre os complexos e o binômio de Newton, para obter formas reduzidas para representar alguns somatórios. A finalidade de encontrar tais

expressões é a de facilitar a resolução de problemas que envolvam somas trigonométricas ou binomiais. Tem-se também uma abordagem dos complexos com os polinômios, mostrando sua eficácia na resolução de problemas que envolvam polinômios.

Neste trabalho, procura-se mostrar que os números complexos tem relação com diversos conteúdos da matemática, vislumbrando o quão importante essa ferramenta é na resolução de problemas matemáticos. Espera-se que o presente trabalho desperte o interesse dos alunos do ensino médio pelos números complexos e que os professores possam a partir daí, pensar como podem trabalhar esse conteúdo de uma forma tal, que venha a contribuir no processo de ensino-aprendizagem da matemática.

# Capítulo 1

## História dos números complexos

No passado um dos principais objetivos dos matemáticos era equacionar um problema a fim de obter a sua resolução. Desde a antiguidade, antes mesmo do uso de fórmulas para a resolução das equações do segundo grau, os povos tais como, hindus, gregos, egípcios e babilônios, já conheciam alguns casos particulares dessas equações do segundo grau. Estes povos antigos usavam régua e compasso para solucionar tais equações. Quando aparecia uma raiz quadrada de número negativo, diziam que o problema não tinha solução, uma vez que estes problemas equacionados eram para a vida prática.

Com o passar do tempo, a interpretação também não era diferente com o uso da fórmula de Bhaskara  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ , para a resolução das equações do segundo grau  $ax^2 + bx + c = 0$ . Quando o discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$  era negativo, o problema era dito sem solução. Apenas no século *XVI*, com o esforço dos matemáticos para resolver equações cúbicas e de quarto grau, o matemático italiano Girolamo Cardano (1501–1576), após algumas manipulações da equação da forma  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , chegou na forma  $x^3 + px + q = 0$ . Publicando assim em seu famoso livro *Ars Magna* a seguinte fórmula:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Esta fórmula, apesar de ter sido publicada por Cardano, a sua descoberta se deve ao matemático Tartaglia. Quando Cardano aplicou esta fórmula para resolver a equação  $x^3 - 15x = 4$ , que era referente a um problema do cotidiano, ele obteve como resultado a seguinte solução

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Cardano concluiu dizendo que essas quantidades são verdadeiramente sofisticadas e que, continuar trabalhando com elas seria tão sutil quanto inútil. Como já foi comentado, quando surgiam raízes de números negativos, os matemáticos diziam que não tinham solução. Mas neste caso específico, Cardano sabia que  $x = 4$  era solução da equação

$x^3 - 15x = 4$ , pois,  $4^3 - 15 \cdot 4 = 4 \Rightarrow 64 - 60 = 4$ . Este impasse poderia ter levado os grandes matemáticos da época, a esquecer a fórmula, por achar que ela só servia para alguns casos específicos. Foi então que Raphael Bombelli (1526 – 1573) deu continuidade à solução encontrada por Cardano, verificando que realmente esses números funcionavam. Após várias tentativas de representar  $\sqrt{-121}$ , Bombelli chegou à forma  $\sqrt{-121} = \sqrt{11^2 \cdot (-1)} = 11\sqrt{-1}$ . O que Bombelli fez, foi aplicar as propriedades para números reais nas raízes quadradas de números negativos ou seja,

$$\begin{aligned}(2 + \sqrt{-1})^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} \\ &= 2 + 11\sqrt{-1} \\ &= 2 + \sqrt{-121},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2 - \sqrt{-1})^3 &= 2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{-1})^2 - (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 - 12\sqrt{-1} - 6 + \sqrt{-1} \\ &= 2 - 11\sqrt{-1} \\ &= 2 - \sqrt{-121}.\end{aligned}$$

Que substituindo na solução encontrada por Cardano:

$$\begin{aligned}x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3} \\ &= 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} \\ &= 4.\end{aligned}$$

Com isso, Bombelli considerou  $\sqrt{-1}$  um número imaginário, e apesar de chamar a ideia de louca, desenvolveu regras para trabalhar com esse tipo de número. Foi então que os matemáticos encararam essas raízes como números e começaram a trabalhar com eles. Coube ao suíço Leonhard Euler (1707 – 1783), já no século *XVIII*, em 1749, levar adiante esta ideia. Euler mostrou que se  $a + b\sqrt{-1}$  for raiz de uma equação,  $a - b\sqrt{-1}$  também será. Mas Euler tinha dúvidas, como a maioria dos matemáticos da época, no que se refere a trabalhar com esses números. Em um trabalho de 1777, que só foi publicado em 1794, Euler introduziu  $i = \sqrt{-1}$ , de forma que  $i^2 = -1$ , bem como a fórmula  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ .

Assim,  $\sqrt{-121}$  passou a ser expresso por:

$$\sqrt{-121} = \sqrt{11^2 \cdot (-1)} = 11\sqrt{-1} = 11i.$$

Desta forma, os problemas passaram a ter uma solução, mesmo existindo números negativos no radicando. Foi então que o estudo desses números se intensificou. Vários matemáticos se dedicaram ao estudo desse novo conjunto numérico. O matemático norueguês Caspar Wessel (1745-1818), já havia escrito sobre a representação algébrica desses números no plano. Contudo, seus trabalhos não obtiveram a notoriedade na época, em virtude da pouca representatividade do mesmo. Em 1801, o matemático Carl Friedrich Gauss usou o símbolo  $i$  criado por Leonard Euler em seus estudos, com isso, esse símbolo passou a ser amplamente aceito no meio acadêmico. Dando continuidade ao seus estudos, Gauss, em 1831, apresentou uma grande obra, onde explicava, de forma detalhada, como esses números poderiam ser desenvolvidos segundo uma teoria exata, baseada na representação geométrica dos mesmos no plano cartesiano. Gauss então, introduz a partir daí a expressão número complexo, utilizada até os dias atuais.

No entanto, é creditada aos matemáticos Caspar Wessel (1745-1818), Jean Robert Argand (1768-1822) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855) a associação dos números complexos a pontos do plano real. Este plano é denominado até hoje de plano de Argand-Gauss, provavelmente pela demora ao reconhecimento do trabalho de Wessel.

Posteriormente, em 1837, Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) consagrou essas descobertas reconhecendo os números complexos como um par ordenado de números reais  $(a, b)$ , podendo assim definir operações algébricas com esses números de maneiras mais simples, do que as definições geométricas de Gauss. Portanto, definiu números complexos como pares ordenados de números reais para os quais:[1]

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

e

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

# Capítulo 2

## Números Complexos

### 2.1 Conjunto dos números complexos

**Definição 2.1.1.** O conjunto dos números complexos denotado por  $\mathbb{C}$ , pode ser definido como o conjunto dos pontos ou pares de números reais  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , em que estão definidas as operações de adição e multiplicação, respectivamente, por

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

e

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Pode-se identificar  $\mathbb{R}$  com o subconjunto  $\{(a, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}\} \subset \mathbb{C}$ . Aplicando as operações de adição e multiplicação aos pares de números reais  $(a, 0)$  e  $(b, 0)$ , tem-se:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$

e

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0).$$

Observa-se acima, que as operações "padrões" de adição e multiplicação definidas em  $\mathbb{R} \times \{0\}$  correspondem às operações em  $\mathbb{R}$ . Assim, pode-se escrever  $(a, 0) = a \in \mathbb{R}$ , onde o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais pode ser identificado com um subconjunto do conjunto  $\mathbb{C}$  dos números complexos.

### 2.2 Representação algébrica ou binomial

A unidade imaginária  $i$  será definida como sendo  $i = (0, 1)$ . Assim, será mostrado que,  $i^2 = -1$ . De fato,

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -1.$$

Todo número complexo  $z = (a, b)$  pode ser representado da forma:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi,$$

com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $i$  sendo a unidade imaginária. A representação,  $z = a + bi$  é chamada *forma algébrica*, onde  $a$  é chamado de *parte real de  $z$*  e  $b$  é chamado de *parte imaginária de  $z$* , ou ainda  $Re(z) = a$  e  $Im(z) = b$ .

**Proposição 2.2.1.** *Dados dois números complexos  $z = a + bi$  e  $w = c + di$ , com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , tem-se que  $z = w$ , se e somente se,  $a = c$  e  $b = d$ .*

*Demonstração.* Nota-se que

$$z = w \Leftrightarrow (a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}.$$

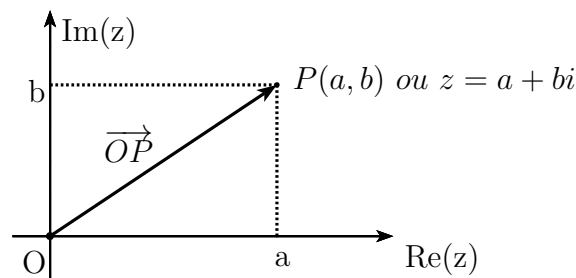
□

## 2.3 Representação geométrica dos complexos

Cada par ordenado de números reais  $(a, b)$  pode ser representado no plano cartesiano por um único ponto. Desta forma, no plano, há um ponto  $P$ , de coordenadas  $a$  e  $b$ , ou seja,  $P(a, b)$ , que está associado a um único número complexo  $z = a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$  e vice-versa. Portanto, há uma relação biunívoca entre os pontos do plano e os números complexos, onde  $z = (a, b) = a + bi$ .

O número complexo  $z = a + bi$  pode ser visto também como o vetor determinado por o segmento de reta orientado  $\overrightarrow{OP}$ , onde  $O$  é a origem dos eixos cartesianos e  $P$  é a imagem de  $z$ , ou seja, o vetor que sai da origem  $O(0, 0)$  e vai até o ponto  $P(a, b)$  do plano. O plano cartesiano, nessa interpretação, é denominado *plano de Argand-Gauss* ou *plano complexo*. Nesse plano, o eixo das abscissas é chamado de eixo real ou (*Re*) e o eixo das ordenadas, eixo imaginário ou (*Im*).

Vale ressaltar que, frequentemente, será usado a mesma letra, como  $z$  ou  $P$ , para representar tanto um número complexo quanto o ponto correspondente ou o vetor.





**Definição 2.3.1.** Dado  $z = a + bi$  com  $a, b \in \mathbb{R}$ , o vetor  $\overrightarrow{OP}$  será representado pelo vetor  $\vec{z}$ , onde  $O =$  origem e  $P = (a, b)$  a extremidade do vetor.

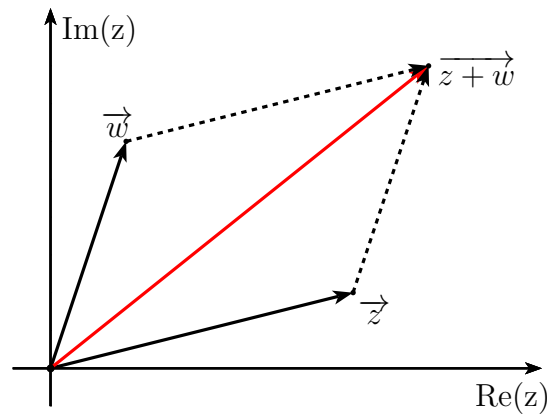
## 2.4 Operações com números complexos

### 2.4.1 Adição

Dados dois números complexos  $z = a + bi$  e  $w = c + di$  com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , decorre da definição dos números complexos, que a soma  $z + w$  é obtida, adicionando de forma separada as partes reais e as partes imaginárias dos complexos  $z$  e  $w$  :

$$\begin{aligned} z + w &= (a + bi) + (c + di) \\ &= (a, b) + (c, d) \\ &= (a + c, b + d) \\ &= (a + c) + (b + d)i. \end{aligned}$$

A soma de  $z = a + bi$  e  $w = c + di$  com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  ou seja  $z + w = (a + c) + (b + d)i$  coincide com uma soma vetorial, aplicando neste caso a regra do paralelogramo.



Logo, o vetor que representa a soma de  $z + w$  é o vetor soma  $\vec{z+w} = \vec{z} + \vec{w}$ .

Será utilizada a definição dos números complexos visto acima, para demonstrar as propriedades da adição.

### Propriedade Comutativa

Dados dois números complexos  $z = a + bi$  e  $w = c + di$  tem-se a igualdade:

$$\begin{aligned} z + w &= (a + bi) + (c + di) \\ &= (a + c) + (b + d)i \\ &= (c + a) + (d + b)i \\ &= (c + di) + (a + bi) \\ &= w + z. \end{aligned}$$

### Propriedade Associativa

Dados três complexos  $z = a + bi$ ,  $w = c + di$  e  $k = e + fi$ , cumpre-se:

$$\begin{aligned} (z + w) + k &= [(a + bi) + (c + di)] + (e + fi) \\ &= [(a + c) + (b + d)i] + (e + fi) \\ &= [(a + c) + e] + [(b + d) + f]i \\ &= [a + (c + e)] + [b + (d + f)]i \\ &= (a + bi) + [(c + e) + (d + f)]i \\ &= (a + bi) + [(c + di) + (e + fi)] \\ &= z + (w + k). \end{aligned}$$

### Propriedade do Elemento neutro

O elemento neutro da adição é  $z = 0 + 0i$ , ou seja,  $z = 0$ , já que

$$(a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi.$$

### Propriedade do Elemento oposto

Dado  $z = a + bi$ , o seu elemento oposto aditivo é  $-z = (-a) + (-b)i$  já que

$$(a + bi) + [(-a) + (-b)i] = (a - a) + (b - b)i = 0 + 0i = 0.$$

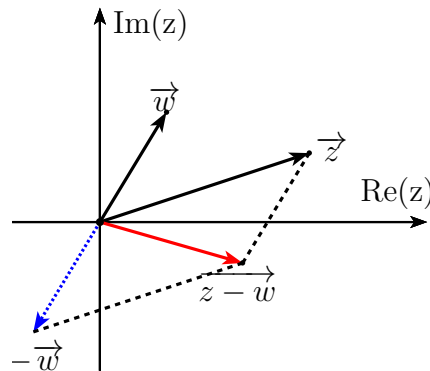
## 2.4.2 Subtração

Dados os complexos  $z = a + bi$  e  $w = c + di$ , a subtração  $z - w$  fica definida como  $z + (-w)$ . Assim,

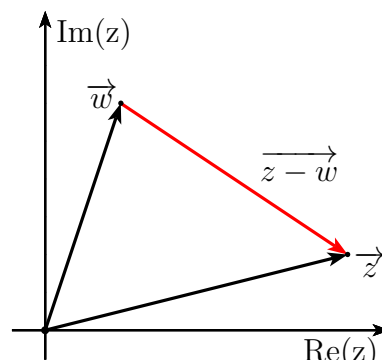
$$\begin{aligned} z - w &= z + (-w) \\ &= (a + bi) + [(-c) + (-d)i] \\ &= (a - c) + (b - d)i. \end{aligned}$$

Portanto, pode-se subtrair dois números complexos, subtraindo de forma separada suas partes reais e suas partes imaginárias.

A diferença vetorial entre dois complexos  $z$  e  $w$  ou seja  $z - w$  é um caso especial da soma vetorial, com isso vale as mesmas considerações feitas para a soma, ou seja, significa realizar a soma vetorial do vetor  $\vec{z}$  com o simétrico ou oposto do vetor  $\vec{w}$  mudando apenas sentido do vetor  $-\vec{w}$ .



Logo, o vetor que representa a diferença de  $z - w$  é o vetor diferença  $\overrightarrow{z - w} = \vec{z} - \vec{w}$ . Pode-se representar geometricamente a diferença  $z - w$  como:



### 2.4.3 Multiplicação

Dados os complexos  $z = a + bi$  e  $w = c + di$ , o produto  $z \cdot w$  decorre da definição dos números complexos:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a + bi) \cdot (c + di) \\ &= (a, b) \cdot (c, d) \\ &= (ac - bd, ad + bc) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

Na multiplicação de um complexo  $z = a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , por um número real  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tem-se

$$\lambda z = (\lambda + 0i) \cdot (a + bi) = \lambda a + \lambda bi \in \mathbb{C}.$$

Com isso, ao multiplicarmos um número complexo  $z$  por um  $\lambda \in \mathbb{R}$ , que equivale à multiplicação de vetor por número real, o vetor terá seu comprimento ampliado ( $|\lambda| > 1$ ) ou contraído ( $|\lambda| < 1$ ), podendo também alterar o seu sentido ( $\lambda < 0$ ).

Essa multiplicação tem as seguintes propriedades:

### Propriedade Comutativa

Dados dois números complexos  $z = a + bi$  e  $w = c + di$  tem-se a igualdade

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a + bi) \cdot (c + di) \\ &= (ac - bd, ad + bc) \\ &= (ca - db, cb + da) \\ &= (c, d) \cdot (a, b) \\ &= (c + di) \cdot (a + bi) \\ &= w \cdot z. \end{aligned}$$

### Propriedade Associativa

Dados três números complexos  $z = a + bi$ ,  $w = c + di$  e  $k = e + fi$  cumpre-se que

$$\begin{aligned} (z \cdot w) \cdot k &= [(a + bi) \cdot (c + di)] \cdot (e + fi) \\ &= [(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) \\ &= (ac - bd, ad + bc) \cdot (e, f) \\ &= (ace - adf - bcf - bde, acf - bdf - ade - bce) \\ &= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)) \\ &= (a, b) \cdot (ce - df, cf + de) \\ &= (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)] \\ &= z \cdot (w \cdot k). \end{aligned}$$

### Propriedade do Elemento neutro

O elemento neutro do produto é  $1 + 0i = (1, 0) = 1$ , já que para qualquer complexo  $z = a + bi = (a, b)$ , tem-se

$$\begin{aligned}(a + bi) \cdot (1 + 0i) &= (a, b) \cdot (1, 0) \\ &= (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) \\ &= (a, b) \\ &= a + bi.\end{aligned}$$

### Propriedade do Elemento inverso

Dado um número complexo qualquer  $z = a + bi$ , com  $z \neq 0$ , existe um complexo  $w$  tal que,

$$z \cdot w = 1 + 0i = (1, 0) = 1$$

Será mostrado que  $w = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$  satisfaz essa condição.

De fato,

$$\begin{aligned}(a, b) \cdot \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) &= \left( \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \frac{ab}{a^2 + b^2} - \frac{ab}{a^2 + b^2} \right) \\ &= \left( \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{ab - ab}{a^2 + b^2} \right) \\ &= (1, 0) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Tal  $w$  é chamado de elemento inverso multiplicativo de  $z = (a, b) \neq 0$ , e representado como  $z^{-1}$  ou  $\frac{1}{z}$ , isto é

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right).$$

### Propriedade Distributiva

Dados três números complexos  $z = a + bi$ ,  $w = c + di$  e  $k = e + fi$ , cumpre-se:

$$\begin{aligned}
 z \cdot (w + k) &= (a + bi) \cdot [(c + di) + (e + fi)] \\
 &= (a, b) \cdot [(c, d) + (e, f)] \\
 &= (a, b) \cdot (c + e, d + f) \\
 &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) \\
 &= ((ac - bd) + (ae - bf), (ad + bc) + (af + be)) \\
 &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) \\
 &= (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f) \\
 &= z \cdot w + z \cdot k.
 \end{aligned}$$

Pode-se mostrar agora, que a fórmula de multiplicação  $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ , não surge do nada, mas pode ser obtida da exigência de que a multiplicação de complexos tenha as propriedades acima e  $i^2 = -1$ .

$$\begin{aligned}
 (a + bi) \cdot (c + di) &= ac + adi + bic + bi \cdot di \\
 &= ac + adi + bci + bdi \cdot i \\
 &= ac + (ad + bc)i + bdi^2 \\
 &= ac + (ad + bc)i + bd(-1) \\
 &= ac + (ad + bc)i - bd \\
 &= (ac - bd) + (ad + bc)i.
 \end{aligned}$$

### 2.4.4 Divisão

**Definição 2.4.1.** Dados dois números complexos  $z = a + bi$ ,  $w = c + di$  com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $w \neq 0$ , o quociente  $\frac{z}{w}$  é definido como sendo  $z \cdot \frac{1}{w}$ , isto é;

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w}.$$

**Proposição 2.4.1.** Dados os números complexos  $z, w, u \in \mathbb{C}$ , com  $w \neq 0$ , temos que

$$\frac{z}{w} = u \Leftrightarrow z = u \cdot w.$$

*Demonstração.* Tem-se, por definição, que

$$\frac{z}{w} = u \Leftrightarrow z \cdot \frac{1}{w} = u \Leftrightarrow z \cdot \frac{1}{w} \cdot w = u \cdot w \Leftrightarrow z = u \cdot w.$$

□

**Proposição 2.4.2.** *Dados os números complexos  $z, w \in \mathbb{C}$  com  $z \neq 0$  e  $w \neq 0$ , tem-se que*

$$\frac{1}{z \cdot w} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{w}.$$

*Demonstração.*

$$\left(\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{w}\right) \cdot (z \cdot w) = \left(z \cdot \frac{1}{z}\right) \cdot \left(w \cdot \frac{1}{w}\right) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Conclui-se que

$$\frac{1}{z \cdot w} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{w}.$$

□

**Proposição 2.4.3.** *Dados os números complexos  $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ , com  $w_1 \neq 0$  e  $w_2 \neq 0$ , é verdade que*

$$\frac{z_1}{w_1} \cdot \frac{z_2}{w_2} = \frac{z_1 \cdot z_2}{w_1 \cdot w_2}.$$

*Demonstração.*

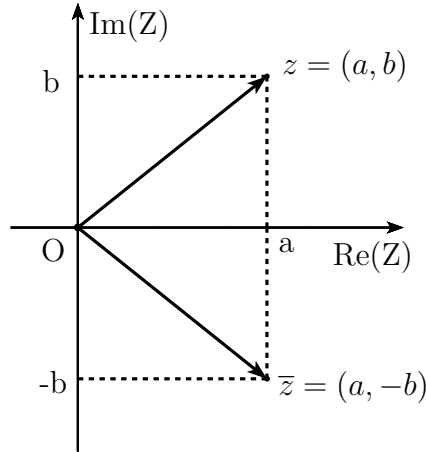
$$\begin{aligned} \frac{z_1}{w_1} \cdot \frac{z_2}{w_2} &= z_1 \cdot \frac{1}{w_1} \cdot z_2 \cdot \frac{1}{w_2} \\ &= z_1 \cdot z_2 \cdot \frac{1}{w_1} \cdot \frac{1}{w_2} \\ &= (z_1 \cdot z_2) \cdot \frac{1}{(w_1 \cdot w_2)} \\ &= \frac{z_1 \cdot z_2}{w_1 \cdot w_2} \end{aligned}$$

□

## 2.4.5 Conjugado

**Definição 2.4.2.** *O conjugado de um número complexo  $z = a + bi$  com  $a, b \in \mathbb{R}$  é indicado por  $\bar{z}$  e dado por  $\bar{z} = a - bi$ . Assim,  $z$  e  $\bar{z}$  são complexos conjugados se têm partes reais iguais e partes imaginárias opostas.*

No plano complexo, o conjugado  $\bar{z} = a - bi = (a, -b)$  é o simétrico de  $z = a + bi = (a, b)$  em relação ao eixo das abscissas.



**Proposição 2.4.4.** *Sejam os números complexos  $z = a+bi$  e  $w = c+di$  com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , então as seguintes propriedades são satisfeitas:*

- 1)  $z = \overline{\overline{z}}$ ;
- 2)  $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ ;
- 3)  $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ ;
- 4)  $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$ ;
- 5)  $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ .

*Demonstração.* 1) Como  $\overline{z} = a - bi$ , então  $\overline{\overline{z}} = a - (-b)i = a + bi = z$ .

2)

$$\begin{aligned}
 \overline{z+w} &= \overline{(a+bi) + (c+di)} \\
 &= \overline{(a+c) + (b+d)i} \\
 &= (a+c) - (b+d)i \\
 &= (a-bi) + (c-di) \\
 &= \overline{z} + \overline{w}.
 \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
 \overline{z \cdot w} &= \overline{(a+bi) \cdot (c+di)} \\
 &= \overline{(ac-bd) + (ad+cb)i} \\
 &= (ac-bd) - (ad+cb)i \\
 &= [ac - (-b) \cdot (-d)] + [a \cdot (-d) + c \cdot (-b)]i \\
 &= (a-bi) \cdot (c-di) \\
 &= \overline{z} \cdot \overline{w}.
 \end{aligned}$$



4)

$$z \cdot z^{-1} = 1 \Rightarrow \overline{(z \cdot z^{-1})} = \overline{1}$$

Consequentemente,

$$\bar{z} \cdot \overline{(z^{-1})} = 1$$

Portanto,

$$\bar{z}^{-1} = \overline{z^{-1}}.$$

5)

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(z \cdot \frac{1}{w}\right)} = \bar{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \bar{z} \cdot \frac{1}{\bar{w}} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}.$$

□

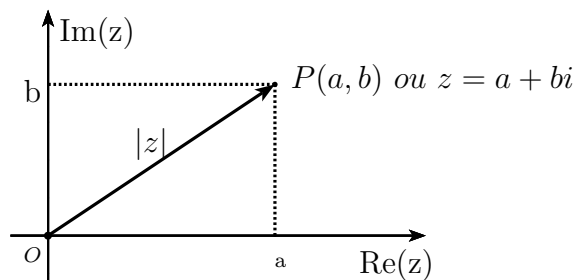
## 2.4.6 Módulo

**Definição 2.4.3.** Dado um número complexo  $z = a + bi$  com  $a, b \in \mathbb{R}$ , chama-se módulo ou valor absoluto de  $z$  o número

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

O módulo  $|z|$  de um número complexo  $z = a + bi$ , com  $a$  e  $b \in \mathbb{R}$ , é a distância entre a origem  $O(0, 0)$  do sistema cartesiano e o ponto  $P(a, b)$  ou, simplesmente, o módulo do vetor  $\vec{z}$  (comprimento do vetor).

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OAP, sendo  $A = (a, 0)$ , tem-se



$$|z|^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}_+.$$

**Proposição 2.4.5.** Dados  $z, w \in \mathbb{C}$ , são válidas as propriedades:

- 1)  $|z| \geq 0$ , com  $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ;
- 2)  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ ;

- 3)  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ ;  
 4)  $|z^{-1}| = |z|^{-1}, z \neq 0$ ;  
 5)  $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}, w \neq 0$ ;  
 6)  $|z| = |\bar{z}|$ ;  
 7)  $|z^n| = |z|^n, n \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* 1) Pela definição do módulo de um número complexo,

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0.$$

Se  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0$  com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $a^2 \geq 0, b^2 \geq 0$ , então a igualdade acima nos leva a concluir que

$$a = b = 0 \Rightarrow z = 0.$$

2) Seja  $z = a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ . Então,

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a + bi) \cdot (a - bi) \\ &= a^2 - abi + abi - b^2i^2 \\ &= a^2 - b^2(-1) \\ &= a^2 + b^2 \\ &= |z|^2. \end{aligned}$$

3) Tem-se, pela propriedade 2, que

$$|z \cdot w|^2 = (z \cdot w) \cdot (\overline{z \cdot w}) = (z \cdot \bar{z})(w \cdot \bar{w}) = |z|^2 \cdot |w|^2$$

e, como consequência,

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|,$$

pois o módulo de um número complexo é positivo.

4) Temos

$$z \cdot \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow |z| \cdot \left| \frac{1}{z} \right| = 1,$$

ou seja,

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}.$$

Portanto,

$$|z^{-1}| = |z|^{-1}.$$

5) Temos

$$\left| \frac{z}{w} \right| = \left| z \cdot \frac{1}{w} \right| = |z| \cdot \frac{1}{|w|} = \frac{|z|}{|w|}.$$

6) É imediato observar que  $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |z|$ .

7) Tem-se

$$|z^n| = \underbrace{|z \cdot z \cdot \dots \cdot z|}_n = \underbrace{|z| \cdot |z| \cdot \dots \cdot |z|}_n = |z|^n.$$

□

**Corolário 2.4.1.** *Sejam  $z, w \in \mathbb{C}$ . Então,*

$$|z - w|^2 = (z - w) \cdot \overline{(z - w)}.$$

**Proposição 2.4.6.** *Dado o número complexo  $z = a + bi$  com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $z \neq 0$ , a fórmula do inverso multiplicativo pode ser escrita de forma mais simples em termos de  $\bar{z}$  e  $|z|$ , como*

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

*Demonstração.* Tem-se que,

$$\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) = \frac{1}{z}.$$

□

Observação.

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} \Rightarrow \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}.$$

**Proposição 2.4.7.** *Dados os números complexos  $z = a + bi$  e  $w = c + di$  com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $w \neq 0$ , a divisão  $\frac{z}{w}$  pode ser obtida fazendo*

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}.$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= z \cdot \frac{1}{w} \\ &= z \cdot \frac{\bar{w}}{|w|^2} \\ &= \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}}. \end{aligned}$$

□

## 2.5 Forma trigonométrica ou polar

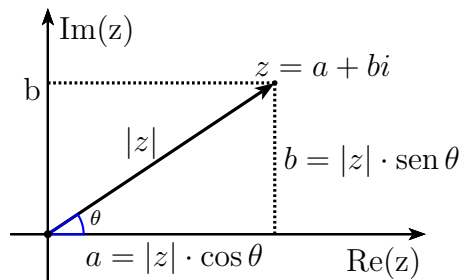
Dado um complexo  $z = a + bi \neq 0$ , com  $a$  e  $b \in \mathbb{R}$ , o ângulo  $\theta$  formado entre o eixo horizontal positivo e o vetor  $\vec{z}$ , considerado positivo no sentido anti-horário, é chamado de *argumento de  $z$*  e, indicado por  $\arg(z)$ . Ele nos fornece a direção do vetor  $\vec{z}$ .

Considerando  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $\theta$  é chamado de argumento principal. Por outro lado, em alguns casos pode ser interessante permitir  $\theta \geq 2\pi$  ou mesmo  $\theta$  negativo (sentido horário). Nesse caso, um mesmo  $z$  admite diferentes argumentos, diferindo do principal por múltiplos de  $2\pi$ .

Observando o triângulo retângulo representado no plano complexo abaixo, afirma-se que:

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|}; \quad \text{sen } \theta = \frac{b}{|z|}; \quad \tan \theta = \frac{b}{a}; \quad \theta = \arg(z).$$

Assim, um número complexo  $z \neq 0$  é definido de maneira única por  $|z|$  e por  $\arg(z)$ , que correspondem às coordenadas polares do ponto  $z$ , sendo  $\rho = |z|$  e  $\theta = \arg(z)$ .



Utilizando as relações acima; temos que

- $\text{sen } \theta = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z| \cdot \text{sen } \theta = \rho \text{sen } \theta$
- $\text{cos } \theta = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z| \cdot \text{cos } \theta = \rho \text{cos } \theta$

Substituindo essas identidades na forma algébrica de  $z$ ; ou seja, fazendo

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ &= \rho \cdot \text{cos } \theta + \rho \cdot \text{sen } \theta \cdot i \\ &= \rho(\text{cos } \theta + i \cdot \text{sen } \theta), \end{aligned}$$

obtem-se a *forma trigonométrica* ou *polar de  $z$*  dada por

$$z = \rho(\text{cos } \theta + i \cdot \text{sen } \theta)$$

ou

$$z = |z|(\text{cos } \theta + i \cdot \text{sen } \theta).$$

**Proposição 2.5.1.** *Dados dois números complexos  $z = \rho_1(\cos \theta_1 + i \cdot \text{sen } \theta_1)$  e  $w = \rho_2(\cos \theta_2 + i \cdot \text{sen } \theta_2)$  tem-se  $z = w$  se, e somente se,  $\rho_1 = \rho_2$  e  $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi k$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ).*

*Demonstração.* Nota-se que

$$z = w \Rightarrow |z| = |w| \Rightarrow \rho_1 = \rho_2.$$

Por outro lado,

$$\cos \theta_1 + i \cdot \text{sen } \theta_1 = \cos \theta_2 + i \cdot \text{sen } \theta_2 \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta_1 = \cos \theta_2 \\ \text{sen } \theta_1 = \text{sen } \theta_2 \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 + 2\pi \cdot k, (k \in \mathbb{Z}).$$

□

## 2.6 Complexos Unitários

Através dos números complexos unitários, (isto é, de módulo 1) propõe-se uma representação mais simples para a forma trigonométrica dos números complexos. Será utilizado o símbolo  $U^\theta$  para representar o complexo unitário de argumento  $\theta$ , ou seja,

$$U^\theta = \cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta.$$

De modo que todo número complexo da forma

$$z = \rho(\cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta),$$

pode ser escrito como

$$z = \rho U^\theta.$$

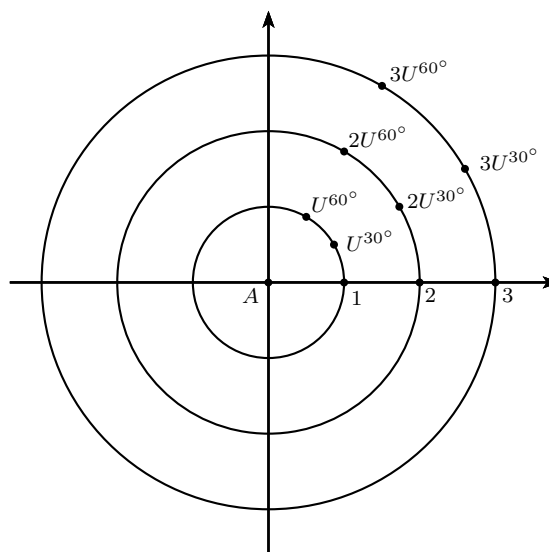


Figura 2.1: Complexos Unitários

**Proposição 2.6.1.** *Dados dois números complexos unitários  $U^{\theta_1} = \cos \theta_1 + i \cdot \text{sen } \theta_1$  e  $U^{\theta_2} = \cos \theta_2 + i \cdot \text{sen } \theta_2$ , observa-se que:*

$$1) U^{\theta_1} \cdot U^{\theta_2} = U^{\theta_1 + \theta_2};$$

$$2) (U^{\theta_1})^n = U^{n\theta_1};$$

$$3) \frac{U^{\theta_1}}{U^{\theta_2}} = U^{\theta_1 - \theta_2}.$$

*Demonstração.* 1)

$$\begin{aligned} U^{\theta_1} \cdot U^{\theta_2} &= (\cos \theta_1 + i \cdot \text{sen } \theta_1) \cdot (\cos \theta_2 + i \cdot \text{sen } \theta_2) \\ &= (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + i \cdot \cos \theta_1 \cdot \text{sen } \theta_2 + i \cdot \text{sen } \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + i^2 \text{sen } \theta_1 \cdot \text{sen } \theta_2) \\ &= (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \text{sen } \theta_1 \cdot \text{sen } \theta_2) + i \cdot (\text{sen } \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \text{sen } \theta_2 \cdot \cos \theta_1). \end{aligned}$$

Pela relação da trigonometria abaixo,

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \text{sen } \theta_1 \cdot \text{sen } \theta_2, \\ \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) &= \text{sen } \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \text{sen } \theta_2 \cdot \cos \theta_1. \end{aligned}$$

logo,

$$U^{\theta_1} \cdot U^{\theta_2} = [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)] = U^{\theta_1 + \theta_2}.$$

2) Para o cálculo da potência, será utilizado o resultado obtido em 1:

$$\begin{aligned} (U^{\theta_1})^n &= \underbrace{U^{\theta_1} \cdot U^{\theta_1} \cdot \dots \cdot U^{\theta_1}}_n \\ &= U^{\underbrace{\theta_1 + \theta_1 \dots + \theta_1}_n} \\ &= U^{n\theta_1}. \end{aligned}$$

3) Para a divisão, basta observar que,

$$U^{\theta_2} \cdot U^{\theta_1 - \theta_2} = U^{\theta_1}.$$

Portanto,

$$\frac{U^{\theta_1}}{U^{\theta_2}} = U^{\theta_1 - \theta_2}.$$

□

**Proposição 2.6.2.** *Dados dois números complexos  $z = \rho_1 U^{\theta_1}$  e  $w = \rho_2 U^{\theta_2}$  tem-se que  $z = w$ , se e somente, se  $\rho_1 = \rho_2$  e  $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi k$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ).*

*Demonstração.* Imediato da proposição 2.5.1 □

A fórmula que leva o nome do matemático Leonhard Euler é dada por  $e^{ix} = \cos x + i \cdot \operatorname{sen} x$ , onde  $e$  é o número de Euler ( $e \cong 2,718\dots$ ),  $i$  é a unidade imaginária e  $x \in \mathbb{R}$ .

Como visto acima, o símbolo  $U^\theta = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$  é usado para representar os números complexos unitários, ou seja,

$$U^\theta = e^{i\theta} = (e^i)^\theta.$$

Isto explica porque  $U^\theta$  tem propriedades de potências: ele realmente é uma potência, de base  $e^i$ . A vantagem de usar  $U^\theta$  invés de  $e^{i\theta}$  é a facilidade de ensinar para alunos do Ensino médio, que não conhecem ao número de Euler nem o que significa um expoente imaginário.

Variando o ângulo  $\theta$  (figura 2.2), que é formado pelo eixo real e o vetor  $\overrightarrow{OA}$ , de origem nos eixos coordenados  $O = (0,0)$  e extremidade no ponto arbitrário  $A = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$ , obtem-se uma circunferência unitária descrita por  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta$ . Portanto, o conjunto  $\{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$  pode ser visualizada no plano complexo, como um círculo unitário ou seja de raio 1 e centro na origem  $O = (0,0)$ , conforme vemos abaixo na figura 2.2.

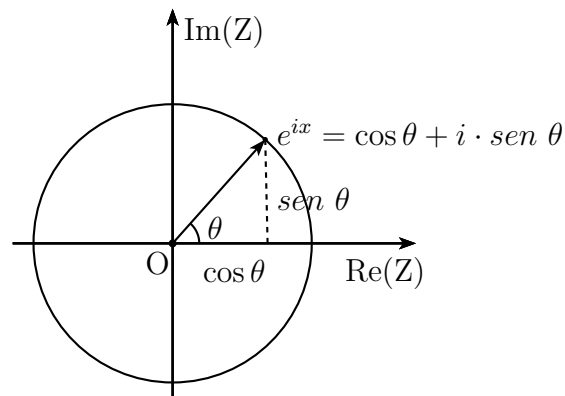


Figura 2.2: Interpretação geométrica da fórmula de Euler

## 2.7 Operações na forma polar

### 2.7.1 Multiplicação

**Proposição 2.7.1.** *Dados os números complexos  $z_1 = \rho_1 U^{\theta_1}$  e  $z_2 = \rho_2 U^{\theta_2}$ . Então*

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 U^{\theta_1 + \theta_2}.$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 U^{\theta_1} \cdot \rho_2 U^{\theta_2} \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2 U^{\theta_1 + \theta_2}. \end{aligned}$$

□

Nota-se que no produto dos números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , os módulos ficaram multiplicados e seus argumentos somados, ou seja, o produto de dois números complexos nada mais é do que uma ampliação ou contração do vetor  $z_1 \cdot z_2$ , seguido de uma rotação de  $\theta_2 + \theta_1$ , no sentido anti-horário em torno da origem do mesmo. O produto entre os complexos  $z_1$  e  $z_2$  pode ser visualizado no plano complexo abaixo.

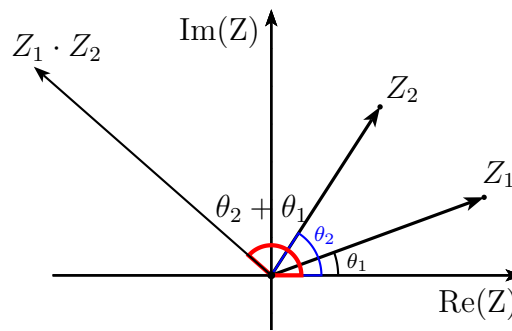


Figura 2.3: Multiplicação entre dois complexos

Pode-se generalizar o resultado para o caso da multiplicação de  $n$  fatores complexos.

$$\begin{aligned} z &= z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \dots \cdot \rho_n [U^{(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)}]. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$z = \rho U^\theta,$$

com  $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n$  e  $\rho = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \dots \cdot \rho_n$ .

A multiplicação de  $z \in \mathbb{C}$  pela unidade imaginária  $i = U^{90^\circ}$ , significa fazer uma rotação de  $\pi$  a partir da origem no sentido anti-horário

$$z \cdot i = \rho U^\theta \cdot U^{90^\circ} = \rho U^{\theta + 90^\circ}.$$



## 2.7.2 Divisão

**Proposição 2.7.2.** *Dados os números complexos  $z_1 = \rho_1 U^{\theta_1}$  e  $z_2 = \rho_2 U^{\theta_2}$ . Então*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} U^{\theta_1 - \theta_2}.$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1 U^{\theta_1}}{\rho_2 U^{\theta_2}} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} U^{\theta_1 - \theta_2} \end{aligned}$$

□

Como visto acima, o quociente  $\frac{z_1}{z_2}$  fica determinado pela divisão dos módulos  $\frac{\rho_1}{\rho_2}$  e pela diferença de seus argumentos  $\theta_1 - \theta_2$ . Olhando agora para os complexos  $z_1$  e  $z_2$  como vetores, observa-se esta divisão no plano complexo abaixo.

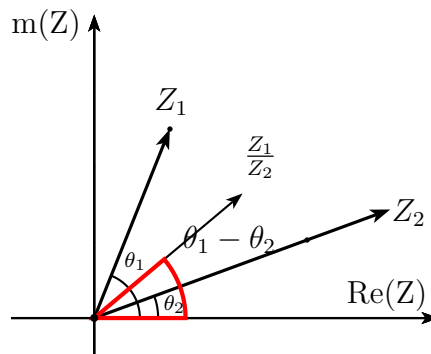


Figura 2.4: Divisão entre dois complexos

## 2.7.3 Conjugado

**Proposição 2.7.3.** *Dado o número complexo  $z = \rho U^{\theta}$ , o seu conjugado é  $\bar{z} = \rho U^{-\theta}$ .*

*Demonstração.* Como

- $\cos(-\theta) = \cos \theta$ ,
- $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen} \theta$ ,

nota-se que,

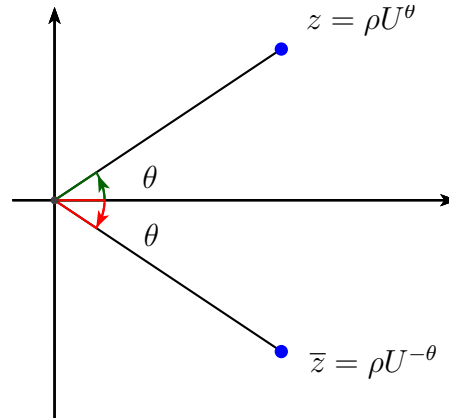
$$\begin{aligned} \bar{z} &= \rho(\cos \theta - i \cdot \text{sen} \theta) \\ &= \rho[\cos(-\theta) + i \cdot \text{sen}(-\theta)]. \end{aligned}$$

Portanto, obter o conjugado de  $z = \rho(\cos \theta + i \cdot \text{sen} \theta)$  equivale a trocar  $\theta$  por  $(-\theta)$ . □

Utilizando a notação dos complexos unitários, o conjugado de  $z = \rho U^\theta$  fica

$$\bar{z} = \rho U^{-\theta}$$

Na figura abaixo, observa-se a representação geométrica do conjugado.



## 2.7.4 Potenciação

Para deduzir a expressão da potenciação  $z^n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , na forma trigonométrica, será utilizado a propriedade de multiplicação de complexos na forma trigonométrica. Temos

$$\begin{aligned} z^n &= \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_n = \underbrace{(\rho U^\theta) \cdot (\rho U^\theta) \cdot \dots \cdot (\rho U^\theta)}_n \\ z^n &= \underbrace{\rho \cdot \rho \cdot \dots \cdot \rho}_n \cdot U^{\underbrace{\theta + \theta + \dots + \theta}_n}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$z^n = \rho^n U^{n\theta}, \text{ com } n \in \mathbb{N}.$$

Essa é a chamada fórmula de De Moivre que pode ser estendida para  $n \in \mathbb{Z}$

**Proposição 2.7.4.** (Fórmula de De Moivre) Sejam  $z = \rho U^\theta$  e  $n \in \mathbb{Z}$ . Então,

$$z^n = \rho^n U^{n\theta} = \rho^n (\cos n\theta + i \cdot \text{sen } n\theta).$$

*Demonstração.* Para provar que  $z^n = \rho^n U^{n\theta}$  com  $n \in \mathbb{N}$ , usaremos o princípio da indução finita sobre  $n$ .

Para  $n = 0$ ,

$$z^0 = \rho^0 U^0 \Rightarrow 1 = 1.$$

Suponha por hipótese que a fórmula  $z^n = \rho^n U^{n\theta}$  seja válida para  $n = k$ , ou seja;

$$z^k = \rho^k U^{k\theta}.$$

Será provada sua validade para  $n = k + 1$ .

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k \cdot z^1 \\ &= \rho^k (U^{k\theta}) \cdot \rho^1 (U^\theta) \\ &= \rho^k \cdot \rho^1 (U^{k\theta+\theta}) \\ &= \rho^{k+1} \cdot U^{(k+1)\theta}. \end{aligned}$$

Foi visto que a fórmula de De Moivre é válida para  $n \in \mathbb{N}$ . Será mostrado agora que também vale para expoentes inteiros negativos. Tomando  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} z^{-n} &= \frac{1}{z^n} \\ &= \frac{1 \cdot \overline{z^n}}{|z^n|^2} \\ &= \frac{\rho^n U^{n(-\theta)}}{\rho^{2n}} \\ &= \frac{U^{-n\theta}}{\rho^n} \\ &= \rho^{-n} U^{-n\theta}. \end{aligned}$$

Portanto, como vale para  $n \in \mathbb{N}$  e vale para expoentes inteiros negativos, então vale para qualquer  $n \in \mathbb{Z}$ . □

### 2.7.5 Radiciação

**Definição 2.7.1.** *Seja o número complexo  $z = \rho U^\theta$ , com  $z \neq 0$ , e  $n \in \mathbb{N}$ , com  $n > 1$ . Todo número complexo  $w$  que satisfaz a igualdade  $w^n = z$  é uma raiz enésima de  $z$ .*

**Proposição 2.7.5.** *(Fórmula de De Moivre para radiciação) Todas as raízes enésimas, com  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , distintas de  $z$ , são dadas por*

$$w = \sqrt[n]{\rho} U^{\frac{\theta+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{\rho} \left[ \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \cdot \text{sen} \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad (2.1)$$

onde  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n - 1)$ .

*Demonstração.* Para determinar as raízes enésimas de  $z = \rho(\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)$ , com  $z \neq 0$ , temos que encontrar todos os números complexos  $w = |w|(\cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha)$ , com  $w \neq 0$ , que satisfaçam a igualdade,

$$w^n = z,$$

ou seja,

$$(|w|U^\alpha)^n = \rho U^\theta.$$

Utilizando à fórmula de De Moivre, tem-se

$$|w|^n U^{n\alpha} = \rho U^\theta.$$

Pela propriedade da igualdade de dois números complexos, observa-se

- $|w|^n = \rho \Rightarrow |w| = \sqrt[n]{\rho}$ .
- $U^{n\alpha} = U^\theta \Rightarrow n\alpha = \theta + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$ , onde  $k \in \mathbb{Z}$ .

Fazendo  $0 \leq \alpha < 2\pi$ , os valores de  $k$  para que sejam encontradas todas as  $n$  raízes enésimas distintas de  $z$  são:

$$\begin{aligned} k = 0 & \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} \\ k = 1 & \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \\ k = 2 & \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} + 2 \cdot \frac{2\pi}{n} \\ & \vdots \\ k = n - 1 & \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} + (n - 1) \cdot \frac{2\pi}{n}. \end{aligned}$$

Como  $0 \leq \alpha < 2\pi$  os valores de  $\alpha$  acima, não são congruentes, basta fazer  $k = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$ . Para os demais valores de  $k \in \mathbb{Z}$ , teremos uma mera repetição dos ângulos  $\alpha$ , ou seja, ângulos congruentes.

Assim;

- $|w| = \sqrt[n]{\rho}$ ,
- $\alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$ ,
- $w = |w|U^\alpha$ ,

obtendo o seguinte resultado:

$$w = \sqrt[n]{\rho} U^{\frac{\theta+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{\rho} \left[ \cos \left( \frac{\theta+2k\pi}{n} \right) + i \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\theta+2k\pi}{n} \right) \right]$$

onde  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$ .  $\square$

**Proposição 2.7.6.** *Os lugares geométricos das raízes enésimas do complexo  $z \neq 0$  são os vértices de um  $n$ -ágono regular inscrito em uma circunferência com centro na origem e raio  $\sqrt[n]{\rho}$ .*

*Demonstração.* Pode-se provar isso tomando as raízes ou coordenadas complexas

$$W_0, W_1, W_2, \dots, W_{n-1}$$

como pontos e, sendo  $OW_k = |W_k| = \sqrt[n]{\rho}$ , para  $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)\}$ , tem-se que os pontos  $W_k$  estão sobre a circunferência  $C(O, \sqrt[n]{\rho})$ . Por outro lado, a medida do arco  $\widehat{W_k W_{k+1}}$  é igual a  $\arg(W_{k+1}) - \arg(W_k) = \frac{q + 2(k+1)\pi - (q + 2k\pi)}{n} = \frac{2\pi}{n}$ , com  $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, (n-2)\}$  e o arco restante  $\arg(W_{n-1}) - \arg(W_0) = 2\pi - (n-1)\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$ . Como todos os arcos  $\widehat{W_0 W_1}, \widehat{W_1 W_2}, \dots, \widehat{W_{n-1} W_0}$  são iguais, o polígono  $W_0 W_1 \dots W_{n-1}$  é regular. [4]  $\square$

## 2.7.6 Raízes da unidade

*As raízes enésimas com  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$  da unidade, são os números complexos  $w$ , que satisfazem a equação*

$$w^n = 1.$$

Encontra-se as raízes enésimas de  $1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$  partindo da fórmula (2.1) com  $\rho = 1$  e  $\theta = 0$  ou seja,

$$w = \sqrt[n]{\rho} \cdot U^{\frac{\theta+2k\pi}{n}} = U^{\frac{2k\pi}{n}}$$

$k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$ .

Vamos representar as raízes enésimas da unidade por  $w_n^k$ , onde,

$$w_n^k = U^{\frac{2k\pi}{n}}.$$

Portanto, para  $n \geq 2$ , as raízes são  $\{1, \omega_n, \omega_n^2, \omega_n^3, \dots, \omega_n^{n-1}\}$ .

Observa-se que as raízes  $w_n^k$  correspondem a potências de  $w_n = U^{\frac{2\pi}{n}}$  :

$$\begin{aligned} k = 0 &\Rightarrow \omega_n^0 = U^0 = (\omega_n)^0 = 1; \\ k = 1 &\Rightarrow \omega_n^1 = U^{\frac{2\pi}{n}} = (\omega_n)^1; \\ k = 2 &\Rightarrow \omega_n^2 = U^{\frac{4\pi}{n}} = (\omega_n)^2; \\ &\vdots \\ k = n - 1 &\Rightarrow \omega_n^{n-1} = U^{\frac{2\pi(n-1)}{n}} = (\omega_n)^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Assim, os lugares geométricos das raízes enésimas da unidade, são os vértices de um polígono regular de  $n$  lados, inscrito em uma circunferência unitária com um dos vértices em 1. Portanto, as raízes complexas  $n$ -ésimas da unidade, dividem a circunferência em  $n$  partes iguais.

**Exemplo 2.7.1.** Para  $n = 3$  as raízes cúbicas da unidade são:

$$z^3 - 1 = 0 \Rightarrow \omega_3^k = U^{\frac{2k\pi}{3}}, k \in \{0, 1, 2\}$$

$$k = 0 \Rightarrow \omega_3^0 = U^0 = 1$$

$$k = 1 \Rightarrow \omega_3^1 = U^{\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = (\omega_3)^1$$

$$k = 2 \Rightarrow \omega_3^2 = U^{\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = (\omega_3)^2.$$

Assim,  $\{1, \omega_3, (\omega_3)^2\}$  forma um triângulo equilátero inscrito na circunferência de raio 1, conforme figura 2.4.

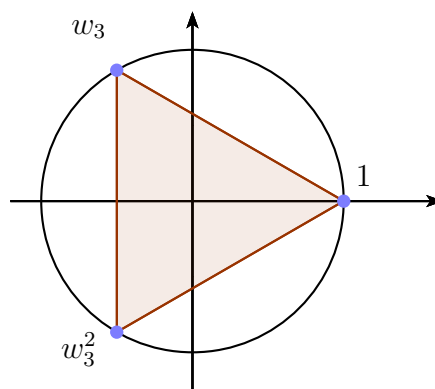


Figura 2.5: Raízes cúbicas da unidade

**Exemplo 2.7.2.** Para  $n = 4$  as raízes quartas da unidade são:

$$z^4 - 1 = 0 \Rightarrow \omega_4^k = U^{\frac{2k\pi}{4}}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$k = 0 \Rightarrow \omega_4^0 = U^0 = 1;$$

$$k = 1 \Rightarrow \omega_4^1 = U^{\frac{2\pi}{4}} = i = (\omega_4)^1;$$

$$k = 2 \Rightarrow \omega_4^2 = U^{\frac{4\pi}{4}} = -1 = (\omega_4)^2;$$

$$k = 3 \Rightarrow \omega_4^3 = U^{\frac{6\pi}{4}} = -i = (\omega_4)^3.$$

Portanto,  $\{1, \omega_4, \omega_4^2, \omega_4^3\}$  forma os vértices de um quadrado inscrito na circunferência de raio 1.

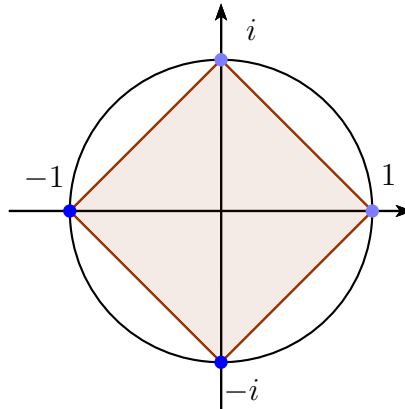


Figura 2.6: Raízes quartas da unidade

Uma observação que pode-se fazer sobre as raízes quartas da unidade é que, ao calcular os valores de  $i^n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se

$$\begin{array}{ll} i^0 = 1, & i^4 = 1, \\ i^1 = i, & i^5 = i, \\ i^2 = -1, & i^6 = -1, \\ i^3 = -i, & i^7 = -i. \end{array}$$

Nota-se que os valores de  $i^n$  se repetem de 4 em 4, ou seja, essas potências de  $i$  são periódicas. Essas recorrências são válidas para todo natural  $n$ . Como  $i$  é raiz quarta da unidade, implica que  $i^4 = 1$  onde, tomando  $n = 4q + r$  com  $q, r \in \mathbb{N}, r < 4$ , temos que:  $i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = (1)^q \cdot i^r = i^r$ . Assim tem-se  $i^n = i^r$ , onde  $r$  é o resto da divisão de  $n$  por 4. Em geral, temos

**Exemplo 2.7.3.** Observe que a soma das raízes cúbicas e quartas da unidade, são iguais a zero:

- Soma das raízes cúbicas da unidade.

$$1 + \omega_3 + \omega_3^2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

- Analogamente, a soma das raízes quartas da unidade.

$$1 + \omega_4 + \omega_4^2 + \omega_4^3 = 1 + i - 1 - i = 0.$$

**Proposição 2.7.7.** *Se as raízes enésimas da unidade são  $1, \omega_n, \omega_n^2, \omega_n^3, \dots, \omega_n^{n-1}$  então,*

$$1 + \omega_n + \omega_n^2 + \omega_n^3 + \dots + \omega_n^{n-1} = 0.$$

*Demonstração.* Nota-se que  $z^n - 1$ , com  $z \in \mathbb{C}$ , pode ser escrito da seguinte forma:

$$(1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{n-1}) \cdot (z - 1) = z^n - 1.$$

Fazendo verifica-se que, de fato,

$$z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots + z^{n-1} + z^n - 1 - z - z^2 - z^3 - \dots - z^{n-1} = z^n - 1.$$

Para  $z \neq 1$  nota-se,

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1},$$

que corresponde à fórmula da soma de uma progressão geométrica finita.

Fazendo  $z = \omega_n$ , tem-se  $z^n = 1$  e a expressão acima fica

$$1 + \omega_n + \omega_n^2 + \omega_n^3 \dots + \omega_n^{n-1} = 0.$$

□



# Capítulo 3

## Aplicações dos complexos na geometria

Inicialmente servísto alguns conceitos da geometria sendo relacionados com os números complexos. E em seguida alguns problemas da geometria sendo solucionados através dos números complexos. Vale lembrar que, cada ponto  $A = (a, b)$  será identificado com o complexo  $a + bi$ , operando com pontos da mesma forma que com complexos.

### 3.1 Ponto médio de um segmento

**Proposição 3.1.1.** *Dados dois pontos  $A = (a, b)$  e  $B = (c, d)$  com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$  é dado por  $\frac{A+B}{2}$ .*

*Demonstração.* Pela fórmula do ponto médio entre dois pontos da geometria analítica,

$$\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right) = \frac{(a, b) + (c, d)}{2}.$$

□

### 3.2 Distância entre dois pontos

**Proposição 3.2.1.** *Dados os complexos  $z$  e  $w$ , a distância  $d$ , entre  $z$  e  $w$  é dada por*

$$d = |z - w|.$$

*Demonstração.* Sejam  $z = a + bi = (a, b)$  e  $w = c + di = (c, d)$  com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Então; Utilizando a fórmula da distância no plano entre os pontos  $z$  e  $w$ , temos

$$d = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}. \tag{3.1}$$

Por outro lado, usando a definição do módulo de números complexos,

$$|z - w| = |(a - c, b - d)| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}. \quad (3.2)$$

Por (3.1) e (3.2) tem-se,

$$d = |z - w|.$$

□

### 3.3 Colinearidade

**Proposição 3.3.1.** *Os pontos  $A, B, C$  com  $B \neq A$  são colineares se, e somente se,*

$$\frac{C - A}{B - A} \in \mathbb{R}.$$

*Demonstração.* Para que os pontos  $A, B, C$  com  $B \neq A$ , sejam colineares, os vetores  $\overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{AB}$  tem que ser múltiplos, ou seja,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= \lambda \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \\ C - A &= \lambda(B - A) \Leftrightarrow \\ \frac{C - A}{B - A} &= \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

### 3.4 Rotação de um ponto

Para rotacionar um ponto  $A$  de um ângulo  $\theta$  em relação a origem, basta efetuar o produto desse ponto com o complexo unitário  $U^\theta = \cos \theta + i \sin \theta$ . Como  $|U^\theta| = 1$  o comprimento do vetor  $A$  não se altera, assim a rotação obtida é

$$A' = A \cdot U^\theta.$$

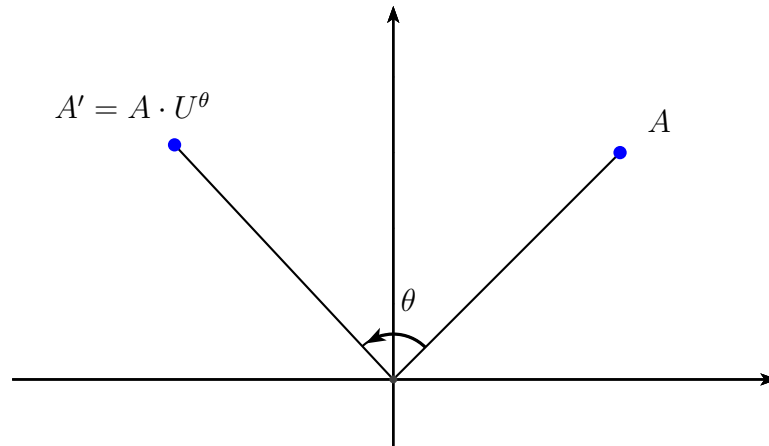


Figura 3.1: Rotação do ponto  $A$  em relação a origem

Pode-se provar isso, tomando  $A = \rho U^\alpha$  e fazendo; temos

$$\begin{aligned} A' &= A \cdot U^\theta \\ &= \rho U^\alpha \cdot A \cdot U^\theta \\ &= \rho U^{\alpha+\theta}. \end{aligned}$$

Rotacionar um segmento é análogo a rodar um ponto. De fato, dados dois pontos  $A$  e  $B$  no plano, para rotacionar o seguimento  $\overline{AB}$  no sentido anti-horário de um ângulo  $\theta$ , em relação ao ponto  $B$ , basta proceder da mesma forma abordada acima

$$\overline{BA'} = \overline{BA} \cdot U^\theta.$$

A partir daí, pode-se também encontrar a coordenada do ponto  $A'$ . Por exemplo, para obter o ponto  $A'$ , que é a rotação de  $A$  em relação à  $B$  de um ângulo  $\theta$ , procede-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \overline{BA'} &= \overline{BA} \cdot U^\theta \\ A' - B &= (A - B) \cdot U^\theta \\ A' &= B + (A - B) \cdot U^\theta. \end{aligned}$$

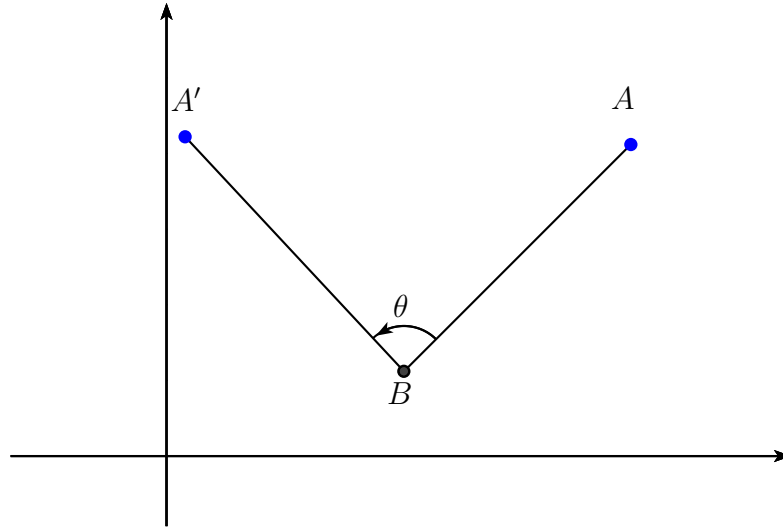


Figura 3.2: Rotação do ponto  $A$  em relação ao ponto  $B$

### 3.5 Equação de uma reta

**Proposição 3.5.1.** *Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos quaisquer. A reta que passa por estes pontos no plano complexo, pode ser representada na forma paramétrica por*

$$P(t) = A + t(B - A).$$

*Demonstração.* Dados os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , colineares então vai existir um  $t \in \mathbb{R}$  tal que:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= t\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \\ C - A &= t(B - A) \Leftrightarrow \\ C &= A + t(B - A) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Fazendo  $C = P(t)$

$$P(t) = A + t(B - A).$$

□

### 3.6 Equação de uma circunferência

**Proposição 3.6.1.** *A equação de uma circunferência no plano complexo é  $|z - c| = r$ , onde  $z = (x, y)$  é um ponto genérico da circunferência,  $c = (a, b)$  é o centro e  $r$  é o raio.*

*Demonstração.* A equação de uma circunferência no plano cartesiano é  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ . Fazendo,

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2 \\ \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} &= r \\ |(x-a, y-b)| &= r \\ |(x, y) - (a, b)| &= r \\ |z - c| &= r.\end{aligned}$$

□

## 3.7 Polígonos

### 3.7.1 Triângulo equilátero

**Proposição 3.7.1.** *Sejam  $A, B$  e  $C$ , orientados no sentido anti-horário, os vértices do triângulo  $ABC$ . Então  $A + B \cdot \omega_3 + C \cdot \omega_3^2 = 0$ , onde  $\omega_3 = U^{\frac{2\pi}{3}}$ , se, e somente se, o triângulo  $ABC$  é equilátero.*

*Demonstração.* Se o triângulo  $ABC$  é equilátero, o ângulo formado pelos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  mede  $60^\circ$ . Portanto, o ângulo formado por  $-\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  mede  $120^\circ$ . Assim, a condição necessária é

$$\begin{aligned}\overline{AC} \cdot \omega_3 &= -\overline{AB} \\ (C - A) \cdot \omega_3 &= A - B \\ C\omega_3 - A\omega_3 - A + B &= 0 \\ C\omega_3 - A(\omega_3 + 1) + B &= 0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

como  $1, \omega$  e  $\omega^2$  são as raízes cúbicas da unidade então  $1 + \omega_3 + \omega_3^2 = 0$ , ou seja,  $1 + \omega_3 = -\omega_3^2$  que, substituindo em (3.3), nos dá

$$C\omega_3 + A\omega_3^2 + B = 0.\tag{3.4}$$

Multiplicando (3.4) por  $\omega_3$ , temos

$$\begin{aligned}C\omega_3^2 + A\omega_3^3 + B \cdot \omega_3 &= 0 \\ A + B \cdot \omega_3 + C \cdot \omega_3^2 &= 0.\end{aligned}$$

□

### 3.7.2 Paralelogramo

**Proposição 3.7.2.** *Dados os pontos não colineares  $M, N, P$  e  $Q$  o quadrilátero  $MNPQ$  é paralelogramo se e somente se,  $N - M = P - Q$ .*

*Demonstração.* O quadrilátero  $MNPQ$  é um paralelogramo, se e somente se

$$\begin{aligned}\overline{MN} &= \overline{QP} \\ N - M &= P - Q\end{aligned}$$

□

## 3.8 Problemas resolvidos

Será feito uso nos exemplos que se seguem do complexo unitário  $U^\theta = \cos \theta + i \sen \theta$ , facilitando com isso a escrita e tendo uma melhor visualização do problema.

### 3.8.1 Exercícios elementares

**Exemplo 3.8.1.** Encontre o ponto  $B$ , que é obtido após uma rotação de  $45^\circ$  no sentido anti-horário do ponto  $A = (2, 4)$ , em torno da origem.

*Solução.* Por hipótese,  $A = 2 + 4i$  e  $U^{45^\circ} = \cos 45^\circ + i \sen 45^\circ$ .

O ponto  $B$ , é obtido da seguinte forma:

$$\begin{aligned}B &= A \cdot U^{45^\circ} \\ &= (2, 4) \cdot (\cos 45^\circ + i \sen 45^\circ) \\ &= (2 + 4i) \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2}i + \frac{4\sqrt{2}}{2}i - \frac{4\sqrt{2}}{2} \\ &= -\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i \\ &= (-\sqrt{2}, 3\sqrt{2})\end{aligned}$$

□

**Exemplo 3.8.2.** Após uma rotação de  $105^\circ$  no sentido anti-horário em torno da origem do complexo  $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ , qual será o novo ponto correspondente?

*Solução.* O número complexo pode ser escrito, da seguinte forma:

$$\begin{cases} |z| = \rho = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = 2 \\ \operatorname{sen} \theta = \frac{b}{|z|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{cos} \theta = \frac{a}{|z|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

Portanto  $z = 2U^{45^\circ}$ .

A rotação de  $105^\circ$  no sentido anti-horário de  $z$  fica:

$$\begin{aligned} w &= U^{105^\circ} \cdot 2U^{45^\circ} \\ &= 2U^{105^\circ+45^\circ} \\ &= 2U^{150^\circ}, \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} U^{150^\circ} &= \cos 150^\circ + i \cdot \operatorname{sen} 150^\circ \\ &= -\cos 30^\circ + i \cdot \operatorname{sen} 30^\circ \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

Assim, o novo ponto será

$$\begin{aligned} w &= 2U^{150^\circ} \\ &= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= -\sqrt{3} + i \\ &= (-\sqrt{3}, 1). \end{aligned}$$

□

**Exemplo 3.8.3.** Sejam os pontos  $A = (2, 3)$  e  $B = (4, 3)$  do plano. O segmento  $\overline{AC}$  é obtido do segmento  $\overline{AB}$ , por uma rotação de  $30^\circ$ , no sentido anti-horário, em torno do ponto  $A$ . Determine as coordenadas do ponto  $C$ .

*Solução.*

$$\begin{aligned}
 \overline{AC} &= \overline{AB} \cdot U^{30^\circ} \\
 C - A &= (B - A) \cdot U^{30^\circ} \\
 C &= A + (B - A) \cdot U^{30^\circ} \\
 &= (2, 3) + [(4, 3) - (2, 3)] \cdot U^{30^\circ} \\
 &= (2, 3) + (2, 0) \cdot (\cos 30^\circ + i \cdot \operatorname{sen} 30^\circ) \\
 &= (2, 3) + (2, 0) \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) \\
 &= (2, 3) + (\sqrt{3}, 1) \\
 &= (2 + \sqrt{3}, 4).
 \end{aligned}$$

□

**Exemplo 3.8.4.** Seja o triângulo  $ABC$ , retângulo e isósceles, de coordenadas  $A = (8, 6)$ ,  $B = (9, 10)$  e hipotenusa  $\overline{BC}$ . Sabendo-se que os vértices  $A, B, C$  estão no sentido anti-horário, determine a coordenada do vértice  $C$ .

*Solução.* Como os vértices estão no sentido anti-horário:

$$\begin{aligned}
 \overline{AC} &= \overline{AB} \cdot U^{90^\circ} \\
 C - A &= (B - A) \cdot U^{90^\circ} \\
 C &= A + (B - A) \cdot U^{90^\circ} \\
 &= (8, 6) + [(9, 10) - (8, 6)] \cdot U^{90^\circ} \\
 &= (8, 6) + (1, 4) \cdot (\cos 90^\circ + i \cdot \operatorname{sen} 90^\circ) \\
 &= (8, 6) + (1, 4) \cdot (0, 1) \\
 &= (8, 6) + (-4, 1) \\
 &= (4, 7).
 \end{aligned}$$

□

**Exemplo 3.8.5.**  $ABO$  é um triângulo equilátero cujos vértices estão no sentido anti-horário. Dados  $A = (\sqrt{3}, 1)$  e sendo  $O$  a origem do plano, determine o vértice  $B$ .

*Solução.* O número complexo  $A$  pode ser escrito, da seguinte forma:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2 \\ \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2} \\ \operatorname{cos} \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = 30^\circ \Rightarrow A = 2U^{30^\circ}$$



Como o triângulo é equilátero e suas coordenadas estão no sentido anti-horário, será feita uma rotação do ponto  $A$  em torno  $O$ , de  $60^\circ$  no sentido anti-horário. Assim:

Sendo  $A = 2U^{30^\circ}$  e  $B = U^{60^\circ} \cdot A$ ,

$$\begin{aligned} B &= U^{60^\circ} \cdot A \\ &= U^{60^\circ} \cdot 2U^{30^\circ} \\ &= 2U^{90^\circ} \\ &= 2i. \end{aligned}$$

Portanto, o vértice  $B$  será

$$B = (0, 2).$$

□

**Exemplo 3.8.6.** Dados os complexos  $z_1 = 2 + i$  e  $z_2 = 4 + 3i$ , escreva a equação da reta que passa por esses pontos.

*Solução.* A reta que passa pelos pontos  $z_1$  e  $z_2$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$P(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

Assim,

$$\begin{aligned} P(t) &= (2, 1) + t((4, 3) - (2, 1)) \\ &= (2, 1) + t(2, 2) \\ &= (2 + 2t, 1 + 2t). \end{aligned}$$

□

**Exemplo 3.8.7.** Dada a reta  $P(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$  com  $t \in \mathbb{R}$ , obtenha a nova reta, após uma rotação no sentido anti-horário de um ângulo  $\theta$ , em torno da origem.

*Solução.* Seja  $P(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$  com  $t \in \mathbb{R}$  uma reta qualquer. Para fazer uma rotação da reta, no sentido anti-horário, de um ângulo  $\theta$  em relação a origem, procede-se da mesma forma que rotacionar um ponto ou um segmento.

$$\begin{aligned} \tilde{P}(k) &= U^\theta \cdot P(t) \\ &= U^\theta \cdot [z_1 + t(z_2 - z_1)] \end{aligned}$$

□

**Exemplo 3.8.8.** Dada uma reta  $r$  e um ponto  $A \in r$ , achar a reta perpendicular a  $r$  passando por  $A$  no sentido anti-horário em torno da origem.

*Solução.* Seja  $r : P(t) = A + t\overrightarrow{AB}$  com  $t \in \mathbb{R}$  uma reta qualquer, onde  $A$  e  $B$  são pontos da reta  $r$ . Para obter a reta  $\tilde{r}$  que passa pelo ponto  $A$  e é perpendicular a  $r$  no sentido anti-horário em torno da origem, basta rotacionarmos o vetor  $\overrightarrow{AB}$  de um ângulo de  $90^\circ$  ou seja,

$$\tilde{r} : \tilde{P}(k) = A + k\overrightarrow{AB} \cdot U^{90^\circ}$$

□

**Exemplo 3.8.9.** Dada a reta  $r : y = \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}$ , obtenha a nova reta  $r$  após uma rotação de  $60^\circ$  no sentido anti-horário em torno da origem.

*Solução.* Inicialmente, deve-se encontrar dois pontos arbitrários da reta  $r : y = \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}$ . Escolhendo  $x = 1$  e  $x = 3$ , tem-se, respectivamente,  $y = 2$  e  $y = 9$ . Chamamos de  $A = (1, 2)$  e  $B = (3, 9)$ . Como cada ponto representa um vetor ou um número complexo; temos

$$\begin{aligned} r : P(t) &= A + \overrightarrow{AB}t \\ &= A + t(B - A) \\ &= (1, 2) + t(2, 7) \\ &= (1 + 2i) + t(2 + 7i). \end{aligned}$$

Para fazer a rotação de  $60^\circ$  no sentido anti-horário, basta fazer:

$$\begin{aligned} U^{60^\circ} \cdot P(t) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot [(1 + 2i) + (2 + 7i)t] \\ &= \frac{1}{2} + i + t + \frac{7t}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \sqrt{3} + t\sqrt{3}i - \frac{7\sqrt{3}}{2}t \\ &= \left[\left(\frac{1 - 2\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right) \cdot i\right] + \left[\left(\frac{2 - 7\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{7 + 2\sqrt{3}}{2}\right) \cdot i\right] \cdot t. \end{aligned}$$

Portanto, a reta procurada, fazendo  $t=1$  é

$$\tilde{r} : \tilde{P}(k) = \left(\frac{1 - 2\sqrt{3}}{2}, \frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{2 - 7\sqrt{3}}{2}, \frac{7 + 2\sqrt{3}}{2}\right) \cdot k.$$

□

**Exemplo 3.8.10.** Descreva o lugar geométrico do complexo  $z$  tal que  $|z - 3| = 1$ .

*Solução.* Esta equação modular pode ser interpretada, como uma equação de uma circunferência, ou seja,

$$|(x, y) - (3, 0)| = 1$$

Onde  $z = (x, y)$  é um ponto qualquer,  $C = (3, 0)$  é o centro e 1 é o raio da circunferência.  $\square$

**Exemplo 3.8.11.** Dada a equação de uma circunferência qualquer, determine a reta tangente a esta circunferência no ponto  $z$ .

*Solução.* Seja  $|z - c| = r$  a equação de uma circunferência no plano complexo, onde  $Z = (x, y)$  é um ponto genérico da circunferência,  $C = (a, b)$  é o centro e  $r$  é o raio. Como a reta tangencia a circunferência então, para obter a equação desta reta, o segmento  $\overline{ZC}$  será rodado de um ângulo de  $90^\circ$  no sentido anti-horário ou seja,

$$P(t) = (x, y) + t\overline{ZC} \cdot U^{90^\circ}$$

$\square$

**Exemplo 3.8.12.** Dado o triângulo  $ABC$  de vértices  $A = (1, \sqrt{3})$ ,  $B = (0, 4)$  e  $C = (-1, \sqrt{3})$ , determine as coordenadas dos vértices do triângulo  $A_1B_1C_1$ , obtido pela rotação do triângulo  $ABC$  em  $120^\circ$ , em torno da origem, no sentido anti-horário.

*Solução.* Para obter os vértices do triângulo  $A_1B_1C_1$  será feito a rotação de  $120^\circ$  de cada vértice do triângulo  $ABC$ . Assim, cada ponto A, B e C do plano pode ser associado a um número complexo  $z_A = 1 + \sqrt{3}i$ ,  $z_B = 4i$  e  $z_C = -1 + \sqrt{3}i$ . Assim, utilizando os complexos unitários  $z_A = 2U^{60^\circ}$ ,  $z_B = 4U^{90^\circ}$  e  $z_C = 2U^{120^\circ}$ , as coordenadas dos pontos são obtidas da seguinte maneira:

- coordenadas do vértice  $A_1$

$$\begin{aligned} A_1 &= U^{120^\circ} \cdot 2U^{60^\circ} \\ &= 2U^{180^\circ} \\ &= -2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$A_1 = (-2, 0).$$

- Coordenadas do vértice  $B_1$

$$\begin{aligned} B_1 &= U^{120^\circ} \cdot 4U^{90^\circ} \\ &= 4U^{210^\circ} \\ &= -2\sqrt{3} - 2i \end{aligned}$$

Assim,

$$B_1 = (-2\sqrt{3}, -2).$$

- Coordenadas do vértice  $C_1$

$$\begin{aligned} C_1 &= U^{120^\circ} \cdot 2U^{120^\circ} \\ &= 2U^{240^\circ} \\ &= -1 - \sqrt{3}i, \end{aligned}$$

ou seja,

$$C_1 = (-1, -\sqrt{3}).$$

□

**Exemplo 3.8.13.** Dado um número complexo  $z = 3 + 2i$ , cuja representação no plano de Argand-Gauss é o ponto  $A$ , determinem o número complexo cuja representação no plano é o vértice  $B$  do triângulo equilátero  $ABO$ , sendo  $O$  a origem.

*Solução.* Como o triângulo é equilátero, será feita uma rotação em torno do ponto  $A$ , de  $60^\circ$  no sentido anti-horário e outra de  $(-60^\circ)$  no sentido horário. Assim:

- No sentido anti-horário  $B = U^{60^\circ} \cdot A$  ou seja, lembrando que  $U^{60^\circ} = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$ ,

$$\begin{aligned} B &= U^{60^\circ} \cdot A \\ &= \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \cdot (3 + 2i) \\ &= \left( \frac{3 - 2\sqrt{3}}{2} \right) + \left( \frac{3 + 3\sqrt{3}}{2} \right) i. \end{aligned}$$

Portanto, o vértice

$$B = \left( \frac{3 - 2\sqrt{3}}{2}, \frac{3 + 3\sqrt{3}}{2} \right).$$

- No sentido horário  $B = U^{-60^\circ} \cdot A$

$$\begin{aligned} B &= U^{(-60^\circ)} \cdot A \\ &= \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \cdot (3 + 2i) \\ &= \left( \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2} \right) + \left( \frac{2 - 3\sqrt{3}}{2} \right) i \end{aligned}$$

e o vértice,

$$B' = \left( \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2}, \frac{2 - 3\sqrt{3}}{2} \right).$$

□

**Exemplo 3.8.14.** Seja  $ABCD$  um quadrado, cujos vértices estão no sentido anti-horário. Dados  $A = (1, 2)$  e  $B = (3, 5)$  determine  $C$  e  $D$ .

*Solução.* Como se trata de um quadrado, para encontrar o vértice  $D$ , será feita uma rotação do vetor  $\overrightarrow{AB}$  em torno do ponto  $A$ , de  $90^\circ$  (sentido anti-horário).

Os vértices, ou pontos,  $A=(1,2)$  e  $B=(3,5)$  do quadrado, representam geometricamente os complexos  $A = 1 + 2i$  e  $B = 3 + 5i$ , respectivamente. Como será feita uma rotação, precisa-se encontrar o complexo ou o vetor  $\overrightarrow{AB}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (3 + 5i) - (1 + 2i) \\ &= 2 + 3i. \end{aligned}$$

Fazendo a rotação do vetor  $\overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned} T &= U^{90^\circ} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= i \cdot (2 + 3i) \\ &= -3 + 2i. \end{aligned}$$

Assim, o vértice  $D$  é obtido,

$$\begin{aligned} D &= A + T \\ &= (1 + 2i) + (-3 + 2i) \\ &= -2 + 4i, \end{aligned}$$

ou seja,

$$D = (-2, 4).$$

Como no cálculo para encontrar o vértice  $D$  acima, teria que ser feita uma rotação no sentido anti-horário em torno do ponto  $A$  para encontrar o ponto  $C$ . Mas, como se trata de um quadrado, pode-se encontrar esses vértices utilizando soma de complexos, ou seja;

$$\begin{aligned} \overline{DC} &= \overline{AB} \\ C - D &= B - A \\ C &= D + (B - A). \end{aligned}$$

Assim, o vértice  $C$  é obtido,

$$\begin{aligned} C &= (-2, 4) + [(3, 5) - (1, 2)] \\ &= (-2, 4) + (2, 3) \\ &= (0, 7) \end{aligned}$$

□

### 3.8.2 Exercícios avançados

**Exemplo 3.8.15.** Sobre os lados de um quadrilátero convexo  $ABCD$  são construídos externamente os triângulos equiláteros  $ABM$  e  $CDP$  e internamente os triângulos equiláteros  $BCN$  e  $ADQ$ . Mostre que quadrilátero  $MNPQ$  é um paralelogramo, a menos que esses pontos sejam colineares.[4]

*Solução.* Fazendo a rotação no sentido anti-horário a partir do ponto  $A$ , de  $60^\circ$  do triângulo equilátero  $ABM$ , tem-se:

$$\begin{aligned} AM &= AB \cdot U^{60^\circ} \\ M - A &= (B - A) \cdot U^{60^\circ} \\ M &= A + (B - A) \cdot U^{60^\circ} \end{aligned}$$

Procedendo de forma análoga, com rotações de  $60^\circ$  no sentido anti-horário nos seguintes casos:

No triângulo equilátero  $CDP$ , a partir do ponto  $C$

$$P = C + (D - C) \cdot U^{60^\circ}.$$

Analogamente no triângulo equilátero  $BCN$ , a partir do ponto  $C$

$$N = C + (B - C) \cdot U^{60^\circ}.$$

No triângulo equilátero  $ADQ$ , a partir do ponto  $A$  tem-se, também,

$$Q = A + (D - A) \cdot U^{60^\circ}.$$

Pela Proposição 3.7.3, o quadrilátero  $MNPQ$  é um paralelogramo, a menos que esses pontos sejam colineares, se satisfaz a condição

$$N - M = P - Q.$$

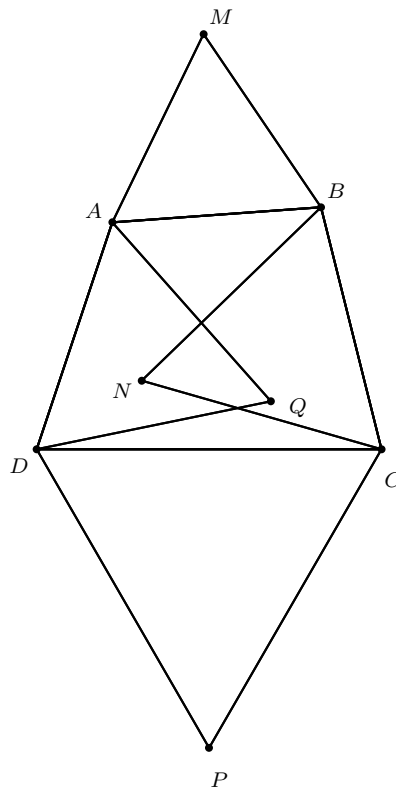
onde

$$\begin{aligned} N - M &= C + (B - C) \cdot U^{60^\circ} - A - (B - A) \cdot U^{60^\circ} \\ &= C - A + (A - C) \cdot U^{60^\circ}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} P - Q &= C + (D - C) \cdot U^{60^\circ} - A - (D - A) \cdot U^{60^\circ} \\ &= C - A + (A - C) \cdot U^{60^\circ}. \end{aligned}$$

Portanto, ou  $MNPQ$  é um paralelogramo, ou os pontos  $M, N, P, Q$  são colineares.  $\square$



**Exemplo 3.8.16.** Seja  $ABC$  um triângulo equilátero com circunraio igual a 1. Prove que para qualquer ponto  $P$  sobre o circuncírculo tem-se  $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 6$ . [4]

*Solução.* Como  $ABC$  é um triângulo equilátero de circunraio igual a 1, podemos adotar como coordenadas dos pontos  $A, B$  e  $C$ , as raízes cúbicas da unidade  $1, \omega_3$  e  $\omega_3^2$ , respectivamente. Denota-se  $z$ , como sendo a coordenada do ponto  $P$ . Como  $P, A, B$  e  $C$  são pontos sobre a circunferência de raio 1 e centro na origem, circunscrita ao triângulo equilátero, nota-se  $|z| = |\omega_3| = |\omega_3^2| = 1$ .

Considere as seguintes distâncias:

$$PA = |z - 1|$$

$$PB = |z - \omega_3|$$

$$PC = |z - \omega_3^2|$$

Será mostrado que

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 6$$

Fazendo

$$PA^2 = |z - 1|^2 = (z - 1) \cdot (\bar{z} - 1) = z \cdot \bar{z} - z - \bar{z} + 1 \quad (3.5)$$

$$PB^2 = |z - \omega_3|^2 = (z - \omega_3) \cdot (\bar{z} - \bar{\omega}_3) = z \cdot \bar{z} - z \cdot \bar{\omega}_3 - \omega_3 \cdot \bar{z} + \omega_3 \cdot \bar{\omega}_3 \quad (3.6)$$

$$PC^2 = |z - \omega_3^2|^2 = (z - \omega_3^2) \cdot (\bar{z} - \bar{\omega}_3^2) = z \cdot \bar{z} - z \cdot \bar{\omega}_3^2 - \omega_3^2 \cdot \bar{z} + \omega_3^2 \cdot \bar{\omega}_3^2 \quad (3.7)$$

Substituindo (3.5), (3.6) e (3.7) em  $PA^2 + PB^2 + PC^2 = k$ ,

$$\begin{aligned} k &= z \cdot \bar{z} + z \cdot \bar{z} + z \cdot \bar{z} - (\bar{z} + \omega_3 \cdot \bar{z} + \omega_3^2 \cdot \bar{z}) - (z + z \cdot \bar{\omega}_3 + z \cdot \bar{\omega}_3^2) + 1 + \omega_3 \cdot \bar{\omega}_3 + \omega_3^2 \cdot \bar{\omega}_3^2 \\ &= 3 \cdot |z|^2 - (1 + \omega_3 + \omega_3^2) \cdot \bar{z} - (1 + \bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_3^2) \cdot z + 1 + |\omega_3|^2 + |\omega_3^2|^2 \\ &= 3 \cdot 1 - 0 \cdot \bar{z} - 0 \cdot z + 1 + 1 + 1 \\ &= 3 - 0 - 0 + 1 + 1 + 1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

□

**Exemplo 3.8.17.** O ponto  $B$  situa-se sobre o segmento  $AC$ . Os triângulos equiláteros  $ABE$  e  $BCF$  são construídos sobre o mesmo lado da reta  $AC$ . Se  $M$  e  $N$  são os pontos médios dos segmentos  $AF$  e  $CE$  respectivamente, prove que o triângulo  $BMN$  é equilátero.

*Solução.* O ponto  $E$  é obtido do ponto  $B$  por meio de uma rotação de  $60^\circ$  em torno do centro  $A$ . Assim,

$$E = A + (B - A) \cdot U^{60^\circ}.$$

De forma análoga, o ponto  $F$  é obtido do ponto  $C$  por meio de uma rotação de  $60^\circ$  em torno do centro  $B$

$$F = B + (C - B) \cdot U^{60^\circ}.$$



Como as coordenadas dos pontos  $M$  e  $N$  são os pontos médios dos segmentos  $\overline{AF}$  e  $\overline{CE}$ , respectivamente, então

$$\begin{aligned} M &= \frac{A + F}{2} \\ &= \frac{A + B + (C - B) \cdot U^{60^\circ}}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} N &= \frac{E + C}{2} \\ &= \frac{C + A + (B - A) \cdot U^{60^\circ}}{2}. \end{aligned}$$

Se o triângulo  $BMN$  é equilátero então pela proposição 3.8.2 tem-se que provar,

$$B + N \cdot U^{120^\circ} + M \cdot U^{240^\circ} = 0 \quad (3.8)$$

Assim, substituindo as coordenadas  $M$  e  $N$  em (3.8)

$$\begin{aligned} B + \frac{C + A + (B - A) \cdot U^{60^\circ}}{2} \cdot U^{120^\circ} + \frac{A + B + (C - B) \cdot U^{60^\circ}}{2} \cdot U^{240^\circ} &= 0 \\ 2B + (C + A) \cdot U^{120^\circ} + (B - A) \cdot U^{180^\circ} + (A + B) \cdot U^{240^\circ} + (C - B) \cdot U^{300^\circ} &= 0 \\ A \cdot [U^{120^\circ} + 1 + U^{240^\circ}] + B \cdot [2 - 1 + U^{240^\circ} - U^{300^\circ}] + C \cdot [U^{120^\circ} + U^{300^\circ}] &= 0 \end{aligned}$$

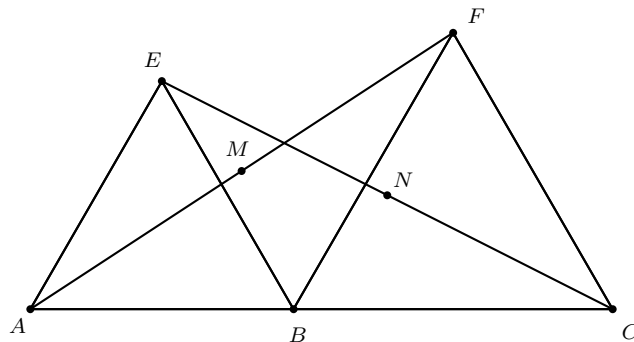
Como  $U^{120^\circ} = -U^{300^\circ}$  verifica-se que,

$$\begin{aligned} A \cdot [1 + U^{120^\circ} + U^{240^\circ}] + B \cdot [1 + U^{240^\circ} - U^{300^\circ}] + C \cdot [U^{120^\circ} - U^{120^\circ}] &= 0 \\ A \cdot [1 + U^{120^\circ} + U^{240^\circ}] + B \cdot [1 + U^{120^\circ} + U^{240^\circ}] + C \cdot [U^{120^\circ} - U^{120^\circ}] &= 0 \end{aligned}$$

Por outro lado,  $1 + U^{120^\circ} + U^{240^\circ} = 0$  (Proposição 2.7.6) ou seja,

$$A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = 0$$

o que de fato, conclui-se que o triângulo  $BMN$  é equilátero.  $\square$



# Capítulo 4

## Aplicações dos números complexos na trigonometria

Com a utilização do complexo unitário  $U^\theta = \cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta$ , será obtida algumas fórmulas trigonométricas. Uma vez que, esta maneira de encontrar essas fórmulas, não é uma prova das fórmulas que será visto a seguir. É apenas uma forma de obter estas fórmulas, de uma maneira mais rápida, caso o aluno as esqueça.

**Proposição 4.0.1.** *Dados dois arcos  $\alpha$  e  $\beta$ , são válidas as fórmulas:*

$$\begin{aligned}\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta, \\ \operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) &= \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta \pm \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha.\end{aligned}$$

*Demonstração.* Tem-se que,

$$\begin{aligned}U^\alpha &= \cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ U^\beta &= \cos \beta + i \cdot \operatorname{sen} \beta\end{aligned}$$

Multiplicando as duas equações acima,

$$\begin{aligned}U^\alpha \cdot U^\beta &= (\cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha) \cdot (\cos \beta + i \cdot \operatorname{sen} \beta) \\ &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + i \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta + i \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + i^2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta \\ &= (\cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta) + i \cdot (\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta)\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$U^{\alpha+\beta} = \cos(\alpha + \beta) + i \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$$

Como

$$U^{\alpha+\beta} = U^\alpha \cdot U^\beta$$

logo,

$$\cos(\alpha + \beta) + i \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = (\cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta) + i \cdot (\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta, \\ \operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha.\end{aligned}$$

Para determinar as fórmulas do seno e do cosseno da diferença, basta trocar  $\beta$  por  $-\beta$  nas fórmulas já obtidas para a soma, ou seja:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen}(-\beta), \\ \operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos(-\beta) + \operatorname{sen}(-\beta) \cdot \cos \alpha.\end{aligned}$$

Lembrando que  $\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen} \beta$  e  $\cos(-\beta) = \cos \beta$  temos,

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta, \\ \operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha.\end{aligned}$$

□

As demonstrações que será vista a seguir dos arcos, são válidas.

**Proposição 4.0.2.** *Dado o arco  $\alpha$ , são válidas às fórmulas*

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \\ \operatorname{sen} 2\alpha &= 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha.\end{aligned}$$

*Demonstração.* Utilizando  $U^\theta = \cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta$

$$\begin{aligned}U^{2\alpha} &= \cos 2\alpha + i \cdot \operatorname{sen} 2\alpha, \\ (U^\alpha)^2 &= (\cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha)^2\end{aligned}$$

Igualando as duas equações acima, temos

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha + i \cdot \operatorname{sen} 2\alpha &= (\cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha)^2 \\ &= \cos^2 \alpha + i \cdot 2 \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \\ &= (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) + (2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha)i.\end{aligned}$$

E, utilizando a igualdade entre dois números complexos, encontramos

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \\ \operatorname{sen} 2\alpha &= 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha.\end{aligned}$$

□

**Proposição 4.0.3.** *Dado o arco  $\alpha$ , são válidas as fórmulas*

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha, \\ \operatorname{sen} 3\alpha &= 3 \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha.\end{aligned}$$

*Demonstração.* Utilizando  $U^\theta = \cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta$ ,

$$\begin{aligned}U^{3\alpha} &= \cos 3\alpha + i \cdot \operatorname{sen} 3\alpha, \\ (U^\alpha)^3 &= (\cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha)^3.\end{aligned}$$

Igualando as duas equações acima,

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha + i \cdot \operatorname{sen} 3\alpha &= (\cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha)^3 \\ &= \cos^3 \alpha + i \cdot 3 \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha - 3 \cos \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha \\ &= (\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha) + i \cdot (3 \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha).\end{aligned}$$

E, utilizando a igualdade entre dois números complexos, temos

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha, \\ \operatorname{sen} 3\alpha &= 3 \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha.\end{aligned}$$

Desta forma, pode-se encontrar as fórmulas do cosseno ou seno de qualquer múltiplo de um determinado ângulo, através dos números complexos.  $\square$

**Lema 4.0.1.** *Dados o arco  $\alpha$  e  $U^\alpha = \cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha$ , é verdade que*

$$\cos \alpha = \frac{U^\alpha + U^{-\alpha}}{2} \quad (4.1)$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{U^\alpha - U^{-\alpha}}{2i}. \quad (4.2)$$

*Demonstração.* Tem-se que,

$$\begin{aligned}U^\alpha &= \cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ U^{-\alpha} &= \cos \alpha - i \cdot \operatorname{sen} \alpha\end{aligned}$$

Somando as duas equações acima e subtraindo,

$$\begin{aligned}U^\alpha + U^{-\alpha} &= 2 \cdot \cos \alpha \\ U^\alpha - U^{-\alpha} &= 2 \cdot i \cdot \operatorname{sen} \alpha\end{aligned}$$

Colocando em evidência tanto o  $\cos \alpha$  e o  $\operatorname{sen} \alpha$ , chega-se às fórmulas:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{U^\alpha + U^{-\alpha}}{2} \\ \operatorname{sen} \alpha &= \frac{U^\alpha - U^{-\alpha}}{2i}.\end{aligned}$$

Estas fórmulas, são úteis para demonstrar diversas relações trigonométricas.  $\square$

**Proposição 4.0.4.** *Dado o arco  $\alpha$ , são válidas as fórmulas,*

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad (4.3)$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}. \quad (4.4)$$

*Demonstração.* Faremos uso do lema 4.0.1, acima para demonstrar as fórmulas (4.3) e (4.4).

Elevando (4.1) e (4.2) ao quadrado, tem-se

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= \frac{U^{2\alpha} + 2U^\alpha U^{-\alpha} + U^{-2\alpha}}{4}, \\ \operatorname{sen}^2 \alpha &= \frac{-U^{2\alpha} + 2U^\alpha U^{-\alpha} - U^{-2\alpha}}{4}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{U^{2\alpha} + U^{-2\alpha} + 2}{2}, \quad (4.5)$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{-(U^{2\alpha} + U^{-2\alpha}) + 2}{2}. \quad (4.6)$$

Como  $U^\alpha + U^{-\alpha} = 2 \cdot \cos \alpha$ , substituindo  $\alpha$  por  $2\alpha$ ,

$$U^{2\alpha} + U^{-2\alpha} = 2 \cdot \cos 2\alpha$$

Substituindo em (4.5) e (4.6), encontra-se as relações trigonométricas que queríamos:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2},$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

□

# Capítulo 5

## Outras aplicações dos números complexos

### 5.1 Somas de números binomiais

O objetivo dessa seção é através dos números complexos, obter uma forma reduzida para representar alguns somatórios. Para tanto, será lembrado algumas somas já conhecidas, obtidas através do desenvolvimento do Binômio de Newton e, com isso, determinar algumas expressões importantes que servirão para o nosso objeto de estudo.

Através do Binômio de Newton,

$$(y + x)^n = \binom{n}{0}y^n + \binom{n}{1}y^{n-1}x + \binom{n}{2}y^{n-2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n,$$

encontra-se algumas propriedades importantes:

- Fazendo  $x = 1$  e  $y = 1$  na distribuição binomial acima, chega-se a seguinte relação,

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}.$$

- E tomando  $x = -1$  e  $y = 1$ ,

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}.$$

- Ao somar as relações acima, encontra-se o somatório:

$$2^{n-1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \dots \quad (5.1)$$

- E ao fazer a diferença entre estas relações tem-se,

$$2^{n-1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \binom{n}{7} + \dots \quad (5.2)$$

Vale ressaltar que os somatórios (5.1) e (5.2), vão até  $\binom{n}{n-1}$  ou  $\binom{n}{n}$  dependendo da paridade.

Assim,

$$\begin{aligned} 2^{n-1} &= \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \dots \\ &= \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \binom{n}{7} + \dots \end{aligned}$$

Com isso, pode-se observar que nestes somatórios, as classes dos números binomiais estão variando de 2 em 2 pois as potências de  $-1$  se repetem a cada duas. Isso nos faz lembrar que nos números complexos as potências de  $i$  se repetem de 4 em 4.

Então, tomando o desenvolvimento do binômio  $z = 1 + i$ , ou seja, fazendo no binômio  $(y + x)^n$ ,  $y = 1$  e  $x = i$  tem-se:

$$\begin{aligned} z^n &= (1 + i)^n \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}i + \binom{n}{2}i^2 + \binom{n}{3}i^3 + \binom{n}{4}i^4 + \dots + \binom{n}{n}i^n \\ &= \underbrace{\left[ \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \binom{n}{8} \dots \right]}_{Re} + i \cdot \underbrace{\left[ \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} \dots \right]}_{Im}. \end{aligned}$$

Sendo  $z = 1 + i$ , a sua forma trigonométrica fica,  $z = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sen \frac{\pi}{4})$  ou ainda, utilizando os complexos unitários,  $z = \sqrt{2}U^{\frac{\pi}{4}}$ .

Assim, ao utilizar a fórmula da potência de De Moivre observa-se que:

$$z^n = (1 + i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \cdot U^{\frac{n\pi}{4}}.$$

Igualando,

$$\underbrace{\left[ \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \dots \right]}_{Re} + i \cdot \underbrace{\left[ \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots \right]}_{Im} = 2^{\frac{n}{2}} \cdot U^{\frac{n\pi}{4}}.$$

Utilizando a igualdade entre números complexos acima, chega-se as seguintes relações:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos \frac{n\pi}{4}. \quad (5.3)$$

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \sen \frac{n\pi}{4}. \quad (5.4)$$

Assim, as expressões encontradas são (5.1), (5.2), (5.3), e (5.4):

$$\begin{aligned}
\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \dots &= 2^{n-1} \\
\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \binom{n}{7} + \dots &= 2^{n-1} \\
\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots &= 2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos \frac{n\pi}{4} \\
\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \dots &= 2^{\frac{n}{2}} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4}
\end{aligned}$$

Com base nas relações acima, será encontrada uma forma reduzida para representar os somatórios, cujo ciclo é de 4 em 4.

**Proposição 5.1.1.** *Seendo  $n \in \mathbb{N}$  tem-se*

$$\begin{aligned}
1) \quad & \binom{n}{3} + \binom{n}{7} + \binom{n}{11} + \binom{n}{15} + \dots = 2^{n-2} - 2^{\frac{n}{2}-1} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} \\
2) \quad & \binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \binom{n}{12} + \dots = 2^{n-2} + 2^{\frac{n}{2}-1} \cdot \cos \frac{n\pi}{4} \\
3) \quad & \binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \binom{n}{13} + \dots = 2^{n-2} + 2^{\frac{n}{2}-1} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} \\
4) \quad & \binom{n}{2} + \binom{n}{6} + \binom{n}{10} + \binom{n}{14} + \dots = 2^{n-2} - 2^{\frac{n}{2}-1} \cdot \cos \frac{n\pi}{4}
\end{aligned}$$

1) *Demonstração.* Basta fazer a diferença entre as expressões (5.2) e (5.4) ou seja:

$$\begin{aligned}
& \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \binom{n}{7} + \dots = 2^{n-1} \\
& - \\
& \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4}
\end{aligned}$$

Assim:

$$\binom{n}{3} + \binom{n}{7} + \binom{n}{11} + \binom{n}{15} + \dots = 2^{n-2} - 2^{\frac{n}{2}-1} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4}$$

□

2) *Demonstração.* Neste caso será feito a adição entre as expressões (5.1) e (5.3) ou seja:

$$\begin{aligned}
& \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \dots = 2^{n-1} \\
& + \\
& \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos \frac{n\pi}{4}
\end{aligned}$$



Chega-se a expressão reduzida:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \binom{n}{12} + \dots = 2^{n-2} + 2^{\frac{n}{2}-1} \cdot \cos \frac{n\pi}{4}$$

□

3) *Demonstração.* Basta fazer a soma entre as expressões (5.2) e (5.4) ou seja:

$$\begin{aligned} & \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \binom{n}{7} + \binom{n}{9} \dots = 2^{n-1} \\ + \\ & \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \binom{n}{9} \dots = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \binom{n}{13} + \dots = 2^{n-2} + 2^{\frac{n}{2}-1} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4}$$

□

4) *Demonstração.* Neste caso procede-se fazendo a diferença entre as expressões (5.1) e (5.3) ou seja:

$$\begin{aligned} & \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \binom{n}{10} + \dots = 2^{n-1} \\ - \\ & \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \binom{n}{10} - \dots = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos \frac{n\pi}{4} \end{aligned}$$

Chega-se a expressão reduzida:

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{6} + \binom{n}{10} + \binom{n}{14} + \dots = 2^{n-2} - 2^{\frac{n}{2}-1} \cdot \cos \frac{n\pi}{4}$$

□

Observe que pode-se obter somatórios de 3 em 3, 5 em 5, etc, usando outras raízes da unidade.

## 5.2 Somatórios trigonométricos

**Exemplo 5.2.1.** Mostre que:

- a)  $\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \dots + \cos n\theta = \dots$   
 b)  $\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \dots + \sin n\theta = \dots$

*Solução.*

$$\begin{aligned} U^\theta &= \cos \theta + i \sin \theta \\ (U^\theta)^2 &= \cos 2\theta + i \sin 2\theta \\ &\vdots \\ (U^\theta)^n &= \cos n\theta + i \sin n\theta \end{aligned}$$

Pode-se observar que  $(U^\theta, (U^\theta)^2, \dots, (U^\theta)^n)$  é uma progressão geométrica finita de razão  $U^\theta$  com  $n$  termos. Fazendo uso da fórmula da soma de uma PG que é:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (5.5)$$

Será obtido a soma  $\sum_{i=1}^n \cos n\theta$  que é a parte real e a soma  $\sum_{i=1}^n \sin n\theta$  que é a parte imaginária do somatório do número complexo  $\sum_{i=1}^n (\cos n\theta + i \cdot \sin n\theta)$  :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n U^{n\theta} &= U^\theta \cdot \frac{U^{n\theta} - 1}{U^\theta - 1} \\ &= U^\theta \cdot \frac{U^{\frac{n\theta}{2}}}{U^{\frac{\theta}{2}}} \cdot \frac{U^{\frac{n\theta}{2}} - U^{-\frac{n\theta}{2}}}{U^{\frac{\theta}{2}} - U^{-\frac{\theta}{2}}} \end{aligned}$$

Utilizando o lema 4.0.1

$$\begin{aligned} &= U^{\frac{(n+1)\theta}{2}} \cdot \frac{\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} \\ &= \left[ \cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \right] \cdot \frac{\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^n \cos n\theta = \cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \cdot \frac{\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} \text{ e } \sum_{i=1}^n \sin n\theta = \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \cdot \frac{\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} \quad \square$$

**Exemplo 5.2.2.** Prove que  $\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$

*Solução.* Sendo  $U^{\frac{\pi}{11}} = \cos \frac{\pi}{11} + i \sin \frac{\pi}{11}$ , temos a progressão geométrica finita dada abaixo

$$(U^{\frac{\pi}{11}}, (U^{\frac{\pi}{11}})^3, (U^{\frac{\pi}{11}})^5, (U^{\frac{\pi}{11}})^7, (U^{\frac{\pi}{11}})^9)$$

de razão  $(U^{\frac{\pi}{11}})^2$  com 5 termos. Utilizando a fórmula da soma de uma PG que é:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^5 (U^{\frac{\pi}{11}})^{2n-1} &= U^{\frac{\pi}{11}} \cdot \frac{U^{\frac{10\pi}{11}} - 1}{U^{\frac{2\pi}{11}} - 1} \\ &= U^{\frac{\pi}{11}} \cdot \frac{U^{\frac{5\pi}{11}}}{U^{\frac{\pi}{11}}} \cdot \frac{U^{\frac{5\pi}{11}} - U^{-\frac{5\pi}{11}}}{U^{\frac{\pi}{11}} - U^{-\frac{\pi}{11}}} \\ &= U^{\frac{5\pi}{11}} \cdot \frac{\text{sen}(\frac{5\pi}{11})}{\text{sen}(\frac{\pi}{11})} \\ &= \left[ \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{5\pi}{11}\right) \right] \cdot \frac{\text{sen}(\frac{5\pi}{11})}{\text{sen}(\frac{\pi}{11})} \end{aligned}$$

Tomando a parte real da expressão acima,

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} &= \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) \cdot \frac{\text{sen}(\frac{5\pi}{11})}{\text{sen}(\frac{\pi}{11})} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{sen}(2 \cdot \frac{5\pi}{11})}{\text{sen}(\frac{\pi}{11})} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{sen}(\pi - \frac{\pi}{11})}{\text{sen}(\frac{\pi}{11})} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{sen}(\frac{\pi}{11})}{\text{sen}(\frac{\pi}{11})} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

**Exemplo 5.2.3.** Prove que  $\text{sen} \frac{6\pi}{7} + \text{sen} \frac{10\pi}{7} + \text{sen} \frac{12\pi}{7} = -\frac{\sqrt{7}}{2}$

*Solução.* Fazendo  $U = \cos \frac{2\pi}{7} + i \text{sen} \frac{2\pi}{7}$

Como nas raízes da unidade, a soma das raízes sétimas da unidade é igual a:

$$1 + U^{\frac{2\pi}{7}} + U^{\frac{4\pi}{7}} + U^{\frac{6\pi}{7}} + \dots + U^{\frac{12\pi}{7}} = 0$$

logo,

$$1 + U + U^2 + U^3 + \dots + U^6 = 0$$

Para encontrar a parte imaginária, da soma  $U^3 + U^5 + U^6$ , será feito o seguinte:

$$\begin{aligned} 1 + (U + U^2 + U^4) + (U^3 + U^5 + U^6) &= 0 \\ \underbrace{(U + U^2 + U^4)}_x + \underbrace{(U^3 + U^5 + U^6)}_y &= -1 \end{aligned}$$

$$x + y = -1$$

onde,

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (U + U^2 + U^4) \cdot (U^3 + U^5 + U^6) \\ &= U^4 + U^6 + U^7 + U^5 + U^7 + U^8 + U^7 + U^9 + U^{10} \\ &= U^4 + U^6 + 3U^7 + U^5 + U^8 + U^9 + U^{10} \end{aligned}$$

das raízes da unidade

$$U^7 = 1, U^8 = U, U^9 = U^2 \text{ e } U^{10} = U^3$$

$$\begin{aligned} x \cdot y &= U^4 + U^6 + 3 + U^5 + U + U^2 + U^3 \\ &= (1 + U + U^2 + U^3 + U^4 + U^5 + U^6) + 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Basta, resolver o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x \cdot y = 2 \end{cases}$$

Isolando o valor de x da primeira equação e substituindo na segunda equação,

$$y^2 + y + 2 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

Como  $y = U^3 + U^5 + U^6$ , é a soma dos termos nos quadrantes *III* e *IV*, então:

$$y = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$$

Assim, tomando a parte imaginária de ambos os lados, a soma pedida é:

$$\operatorname{sen} \frac{6\pi}{7} + \operatorname{sen} \frac{10\pi}{7} + \operatorname{sen} \frac{12\pi}{7} = -\frac{\sqrt{7}}{2}$$

□

### 5.3 Aplicações dos números complexos em polinômios

Será utilizado os complexos unitários, para facilitar a resolução de um problemas envolvendo polinômios.

**Exemplo 5.3.1.** (IME-1994) Mostre que  $P(x)$  é divisível por  $Q(x)$  onde  $P$  e  $Q$  são os polinômios dados:

$$P(x) = x^{999} + x^{888} + x^{777} + x^{666} + x^{555} + x^{444} + x^{333} + x^{222} + x^{111} + 1$$

$$Q(x) = x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x^1 + 1$$

*Solução.* Para resolver esse problema, iremos recorrer primeiramente ao seguinte teorema,

**Teorema 5.3.1** (Teorema de D'alembert). *Se  $x = a$  é raiz de um polinômio  $P(x)$  então  $P(x)$  é divisível por  $(x - a)$ .*

Assim, vamos encontrar todas as raízes de  $Q(x)$  e verificar se também são raízes de  $P(x)$ . Podemos observar que os termos de  $Q(x)$  formam uma progressão geométrica, com 10 termos e razão igual a  $x$ , por se tratar de uma soma iremos utilizar a fórmula:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (5.7)$$

Assim,

$$Q(x) = 1 \cdot \frac{x^{10} - 1}{x - 1}$$

Como queremos encontrar as raízes  $w_k$  do polinômio  $Q(w_k)$  então:

$$\frac{w_k^{10} - 1}{w_k - 1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} w_k^{10} - 1 = 0 \\ w_k - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_k^{10} = 1 \\ w_k \neq 1 \end{cases}$$

Ficamos portanto com  $w_k^{10} = 1$ , como se trata da procura das raízes, iremos utilizar a fórmula (2.1) por ser mais reduzida do que a usual,

$$w_k = U^{\frac{2k\pi}{10}}, \quad k = 1, 2, \dots, 9$$

Vamos agora substituir todas as raízes  $w_k$  no polinômio  $P(x)$  para vermos se satisfaz, a condição,  $P(w_k) = 0$  com  $k = 1, 2, \dots, 9$ :

$$P(w_k) = (w_k^{111})^9 + (w_k^{111})^8 + (w_k^{111})^7 + \dots + 1$$

De forma análoga usaremos a fórmula (6.1) para a soma dos termos do polinômio  $P(w_k)$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 P(w_k) &= 1 \cdot \frac{(w_k^{111})^{10} - 1}{w_k^{111} - 1} \\
 &= \frac{\left[ \left( U^{\frac{2k\pi}{10}} \right)^{10} \right]^{111} - 1}{w_k^{111} - 1} \\
 &= \frac{(U^{2k\pi})^{111} - 1}{w_k^{111} - 1} \\
 &= \frac{1 - 1}{w_k^{111} - 1} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Podemos observar que as raízes do polinômio  $Q(x)$ , da forma  $w_k = U^{\frac{2k\pi}{10}}$ ,  $k = 1, 2, \dots, 9$  satisfizeram a condição  $P(w_k) = 0$ . Portanto  $P(x)$  é divisível por  $Q(x)$ .

Podíamos ter feito também, observando que como  $w_k$  é raiz 10<sup>o</sup> da unidade, suas potências se repetem a cada 10. Logo  $w_k^{111} = w_k^1$ , e  $P(w_k) = w_k^9 + w_k^8 + \dots + 1 = Q(w_k) = 0$ . □

# Considerações Finais

Os parâmetros curriculares nacionais do ensino médio(PCNEM) fornece as orientações dos conteúdos que devem ser abordados da relativa matéria, bem como, quais são as competências esperadas ao estudar esses conteúdos. No que se refere ao estudo dos números complexos, não é observada uma relativa importância para que o professor se aprofunde nesse tema. Isso também fica nítido quando se analisa os livros paradidáticos, pois não fazem uma abordagem adequada desses números.

Causando um desinteresse por parte de alguns professores, uma vez que são impelidos a focar no conteúdo que realmente é cobrado nos vestibulares e a seguir a risca a matriz curricular. Desta forma, os alunos não conseguem assimilar o conteúdo, pois a este conteúdo é dado um tratamento apenas mecânico, somente através da utilização de fórmulas.

Assim, os números complexos vem sendo ministrado nas escolas do Ensino Médio com uma visão puramente algébrica, esquecendo-se de mencionar sua interpretação geométrica no plano complexo e sua importância dentro da matemática, acarretando um certo desinteresse por parte dos alunos, uma vez que eles não têm a real noção do significado desses números, bem como, a sua relação com os demais conteúdos da matemática e suas aplicações.

Visando contribuir para o ensino dos números complexos, falamos sobre o contexto histórico, tentando com isso, mostrar que estes números não surgiram do nada, mas sim, que o seu surgimento, resultou na solução de problemas que até então não tinham solução. Procuramos interpretar as operações dos números complexos no plano de Argand-Gauss e fizemos uso dos complexos unitários para facilitar a escrita e a visualização das transformações no plano.

Foram apresentados exercícios variados para mostrar aos educandos, tendo como meta mostrar que esses números são uma ferramenta poderosa na resolução de problemas diversos da matemática, alcançado assim o objetivo esperado. Este trabalho é uma contribuição para o conteúdo que foi abordado que tem uma aplicação tão vasta. Existem inúmeras aplicações dos números complexos, na engenharia elétrica, nos estudos do eletromagnetismo, na física quântica, teoria do caos e na aerodinâmica dos aviões, que

influenciam nossas vidas, diretamente ou indiretamente.

Os professores podem também utilizar estas e outras aplicações dos complexos, com o intuito de mostrar aos alunos que esses números não constituem um conteúdo isolado.

Espera-se que os alunos do ensino médio consigam perceber a real importância de estudá-los, não só para o avanço da matemática como nas diversas áreas do conhecimento.



# Referências Bibliográficas

- [1] Carl B. Boyer. *História da Matemática*. Editora Edgard Blcher da Universidade de São Paulo, 1974, São Paulo, 2011.
- [2] Brasil. *Parâmetros curriculares nacionais*. MEC, p.174, Brasília, 1998.
- [3] Caio dos Santos Guimarães. *Matemática em Nível IME/ITA- Números Complexos e Polinômios*. Editora VestSeller/www.vestseller.com.br, São José dos Campos SP, 2008.
- [4] Titu Andreescu e Dorin Andrica. *Números complexos de A a . . . Z*. Editora VestSeller, Fortaleza-CE, 2013.
- [5] Augusto C. Morgado e Eduardo Wagner Elon L. Lima, Paulo C. P. Carvalho. *A Matemática do Ensino Médio*. SBM, Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, 1998.
- [6] Augusto C. Morgado e Eduardo Wagner Manfredo P. do Carmo. *Trigonometria e Números Complexos*. SBM, Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, 1992.