Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

O LEMA DE SPERNER COMO UMA FERRAMENTA PARA REALIZAR DIVISÕES

JULIO CESAR SANTOS DA FONSECA

Salvador - Bahia
JANEIRO de 2017

Modelo de ficha catalográfica fornecido pelo Sistema Universitário de Bibliotecas da UFBA para ser confeccionada pelo autor

Fonseca, Julio Cesar
O Lema de Sperner como uma ferramenta para realizar divisões / Julio Cesar Fonseca. -- Salvador, 2017.
38 f.

Orientador: Joseph Yartey.
Dissertação (Mestrado - Profmat) -- Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, 2017.

1. O Lema de Sperner. 2. O Jogo de Sperner. 3. O Teorema do ponto fixo de Brouwer. I. Yartey, Joseph. II. Título.

O LEMA DE SPERNER COMO UMA FERRAMENTA PARA REALIZAR DIVISÕES

Julio Cesar Santos da Fonseca

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey.

Salvador - Bahia

Janeiro de 2017

O Lema de Sperner como uma ferramenta para realizar divisões

Julio Cesar Santos da Fonseca

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 13/01/2017.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey (orientador)
UFBA

Prof. Dr. Oscar Eduardo Ocampo Uribe UFBA

Prof. Dr. Antônio Teófilo Ataíde do Nascimento
UNEB

À minha familia

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me conduzido e me dado forças para concluir mais uma etapa da minha vida acadêmica.

À minha família que sempre me incentivou a lutar pelos meus sonhos, principalmente à minha filha Ana Clara que tanto amo e jamais conseguirei expressar o tamanho desse amor por meio de palavras. Aos meus pais, Filomeno e Maria Rosalia, que me deram suporte, amor e motivação para sempre estudar, me apoiando em todos os momentos.

À todos os meus professores do Profmat que me proporcionaram um pouco mais de conhecimento nessa disciplina que tanto amo e me capacitaram para chegar até aqui. Principalmente, aos professores Joseph e Rita de Cássia, pois me deram o privilégio de conviver com eles tanto na graduação quanto no mestrado.

Ao meu orientador, Joseph Yartey, que sempre se mostrou disponível e me deu um grande suporte nos estudos. Sua didática motiva o estudante a participar das aulas, isto pois, sempre procura ouvir nossas sugestões.

Aos meus colegas do Profmat, que vivenciaram as dificuldades e as alegrias comigo em cada etapa, na aprovação nas disciplinas, no exame nacional de qualificação e agora neste momento de conclusão.

*"A matemática apresenta invenções
tão sutis que poderão servir não só
para satisfazer os curiosos como,
também para auxiliar as artes e poupar
trabalho aos homens".*
Descartes

Resumo

A principal proposta deste trabalho é usar o Lema de Sperner como uma ferramenta matemática para realizar divisões de objetos formado por partes que apresentam particularidades em que todos os envolvidos se sintam satisfeitos. Apesar deste lema ser usado também na topologia para provar o teorema do ponto fixo, evitaremos usar os conceitos topológicos e limitaremos o número de participantes nas divisões a três para não ultrapassarmos o nível compreensível ao Ensino Médio. Apresentaremos alguns jogos relacionados com o lema de Sperner mostrando através de tal lema que nesses jogos não existe a possibilidade de empate. Por fim, mostraremos o Teorema do ponto fixo de Brouwer, em dimensão dois, usando o Lema de Sperner para um triângulo.

Abstract

The main purpose of this work is to use the Sperner's Lemma as a mathematical tool for performing divisions of objects formed by parts that present particularities in which all involved feel satisfied. We will limit the number of participants in the division to three so as to be understandabe to High School Students. In spite of the fact that this lemma is also used in topology to prove the fixed point theorem, we evited using the topological concepts and limit the number of participants in the divisions the three for not exceed the comprehensible level to high school. We will present some games related to the Sperner's Lemma and prove that through this lemma that in these games there is no possibility of a tie. Finally, we prove the Brouwer Fixed point Theorem, in two dimension, using the Sperner's Lemma for a triangle.

Conteúdo

Introdução

Em diversos momentos da vida nos deparamos com situações em que precisamos dividir coisas com amigos, parentes, conhecidos e até com pessoas com quem não nos relacionamos. Em algumas dessas situações percebemos que um ou mais dos envolvidos na divisão ficam insatisfeitos com o resultado e se sentem prejudicados.

Um exemplo bem simples, que se tornou matéria do jornal "The New York Times", [1], se refere a um problema bastante comum onde algumas pessoas passam a morar juntas para dividir o custo do aluguel. Uma situação que também vivencio, pois eu e um amigo moramos em uma cidade e trabalhamos em outra e, para economizar, resolvemos dividir a moradia e o custo do aluguel. No nosso caso e na maioria dos casos a divisão é feita apenas dividindo o valor total pelo número de participantes em partes iguais e esta maneira nem sempre é considerada a mais justa.

Esse problema pode se tornar muito complicado já que cada pessoa pode avaliar o que é importante em um quarto de uma forma diferente, ou seja, um pode preferir o que tiver suíte, outro pode achar mais interessante o que tem uma ventilação melhor ou até o que tiver mais espaço. Uma negociação sem um método eficiente pode levar a conflitos e até a ressentimentos entre os envolvidos.

Uma ferramenta matemática que serve para resolver este e muitos outros problemas relacionados com divisões é o Lema de Sperner. Essa proposição demonstrada pelo Alemão Emmanuel Sperner em 1928 é chamada Lema por anteceder o teorema do ponto fixo de Brouwer. Tal lema associa duas áreas distintas da matemática: a topologia e a análise combinatória.

No capitulo I iremos enunciar e demonstrar o Lema de Sperner para um segmento e, em seguida, definiremos os conceitos de triangulação e de Rotulagem de Sperner para depois enunciarmos o Lema de Sperner para um triângulo. Apresentaremos duas maneiras de demonstração para este Lema.

No capitulo II trabalharemos com as aplicações deste Lema relacionadas com divisões entre três participantes. O primeiro tipo de divisão envolve um bolo formado por três pedaços com características distintas de acordo com o tamanho de cada pedaço. O segundo tipo será o valor de um bolo que já foi dividido entre três pedaços e o terceiro tipo é a divisão do aluguel de uma casa que possui três quartos com particularidades.

No capitulo III mostraremos duas atividades Lúdicas, usando o Lema de Sperner para o segmento e para o triângulo, que pode ser facilmente aplicada com os alunos para os alunos do ensino médio. O jogo de Sperner para o triângulo que foi realizado nas turmas de terceiro ano do IFBA, campus Paulo Afonso, e o jogo dos Impactos.

Já no capitulo IV iremos enunciar o teorema do ponto fixo de Brouwer e forneceremos a demonstração deste teorema para dimensões 1 e 2. Usaremos o Lema de Sperner para o triângulo na demonstração deste teorema para dimensão 2.

Capítulo 1

O Lema de Sperner

Neste capitulo apresentaremos o conceito de triangulação e demonstraremos o Lema de Sperner para triângulos de duas maneiras. Inicialmente, mostraremos também este lema na versão para segmentos pois será necessário para a abordagem com os triângulos.

1.1 O Lema de Sperner para um segmento

Lema 1.1.1. *Considere um segmento AB, chamado de segmento principal, subdividido em segmentos menores, chamados de subsegmentos, tal que a interseção de quaisquer dois subsegmentos consecutivos é um vértice. Rotule os vértices de cada um destes subsegmentos com A ou B. Existe um número ímpar de subsegmentos com vértices distintos.*

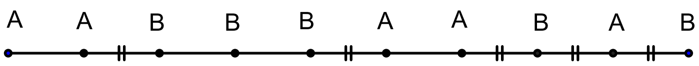


Figura 1.1

Chamaremos os subsegmentos que possuem vértices distintos de *subsegmentos bons*. Os subsegmentos do tipo AB serão chamados de *fortes* e os do tipo BA serão chamados de *fracos*.

Demonstração. Em uma marcação aleatória dos vértices de todos os subsegmentos podemos ter os seguintes casos:

i. Todos os vértices são marcados por A (Veja na Figura 1.2).

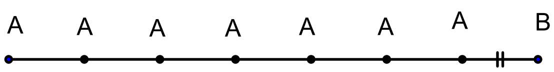


Figura 1.2

Note que nesse caso temos apenas um subsegmento bom que é o subsegmento forte ao fim do segmento. Portanto, temos um número ímpar de subsegmentos bons.

ii. Pelo menos um dos vértices foi marcado por B. Como o vértice inicial do segmento é A, o primeiro subsegmento bom que haverá é necessariamente um subsegmento forte. Se depois do primeiro vértice B não existir vértice A, teremos um único subsegmento bom do tipo forte (veja na Figura 1.3).

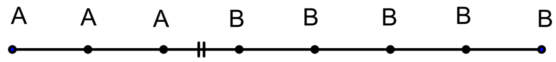


Figura 1.3

Caso contrário, os segmentos bons que sucederão sempre se alternaram em fraco e forte. Como o primeiro subsegmento bom é forte, numerando os segmentos bons, teremos que os subsegmentos fortes serão associados aos números ímpares. Agora, note que o último subsegmento bom é, obrigatoriamente, um subsegmento forte pois ao fim do segmento temos um vértice B. Portanto, podemos concluir que o último subsegmento bom será associado a um número ímpar, ou seja, a quantidade de subsegmentos bons é ímpar(veja a Figura 1.4).

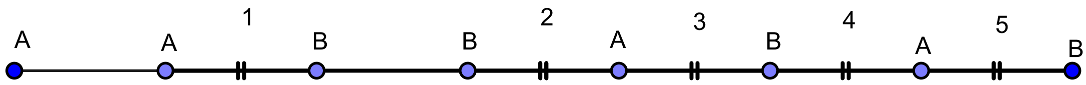


Figura 1.4

□

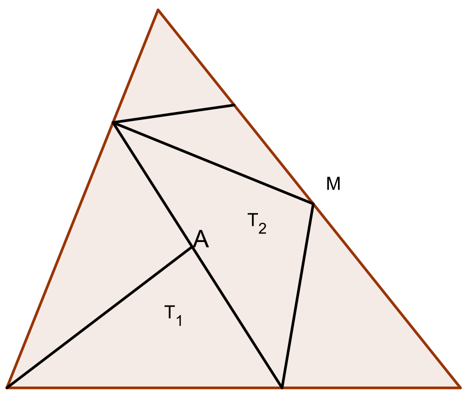
1.2 Triangulações

O conceito de triangulação surge como uma maneira de relacionarmos pontos com uma certa organização seguindo critérios para obtermos uma subdivisão adequada do espaço que ocupam. Embora tal conceito possa ser estendido para um espaço n-dimensional, nos limitaremos ao estudo de uma triangulação no plano, já que evitaremos usar conceitos topológicos no nosso estudo.

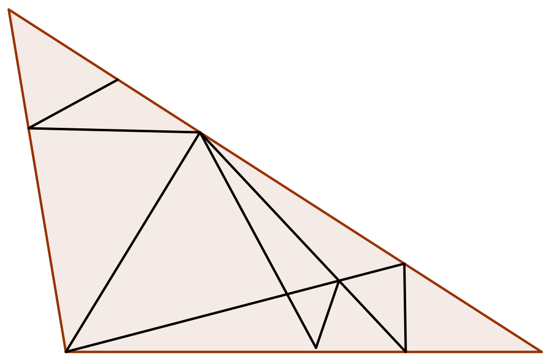
Definição 1.2.1. *Considere um determinado triângulo subdividido em triângulos menores. Dizemos que tal triângulo possui uma triangulação se para quaisquer dois destes triângulos menores que se interceptam tenhamos que a interseção entre eles seja um vértice comum ou um lado comum.*

Chamaremos os lados do triângulo maior de *arestas principais.*

Na Figura 2 temos um exemplo de triangulação. Já na Figura 1 não existe triangulação pois os triângulos T_1 e T_2 possuem como interseção entre eles parte de uma aresta de T_2. Para criar uma triangulação, neste caso, bastaríamos ligar o vértice A de T_1 até o vértice M de T_2.



(a) Figura 1



(b) Figura 2

1.3 O Lema de Sperner para um triângulo

Antes de enunciarmos e demonstrarmos o Lema de Sperner para um triângulo, precisamos falar sobre uma determinada marcação de vértices em uma triangulação que chamaremos de *Rotulagem de Sperner*.

Definição 1.3.1. *Considere um triângulo ABC com uma certa triangulação. Dizemos que essa triangulação possui uma Rotulagem de Sperner se ela obedecer aos seguintes critérios:*

1. *Vértices ao longo das arestas principais só podem ser marcados apenas por um dos vértices nos extremos da aresta. Ou seja, para vértices situados no segmento AB só podemos marcar A ou B, se tiverem situados no segmento AC só podemos marcar A ou C e se tiver no segmento BC só podemos usar B ou C(veja a Figura 1.5).*

2. *Vértices no interior do triângulo podem ser marcados com A, B ou C.*

Chamaremos os triângulos menores que possuem os três vértices distintos de ***triângulos principais***. Na Figura 1.6 indicamos alguns triângulos principais.

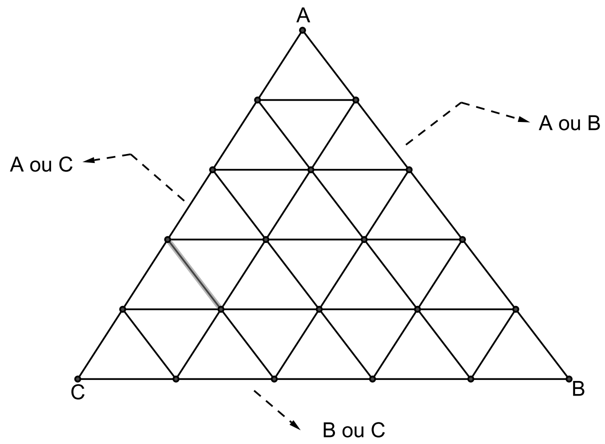


Figura 1.5

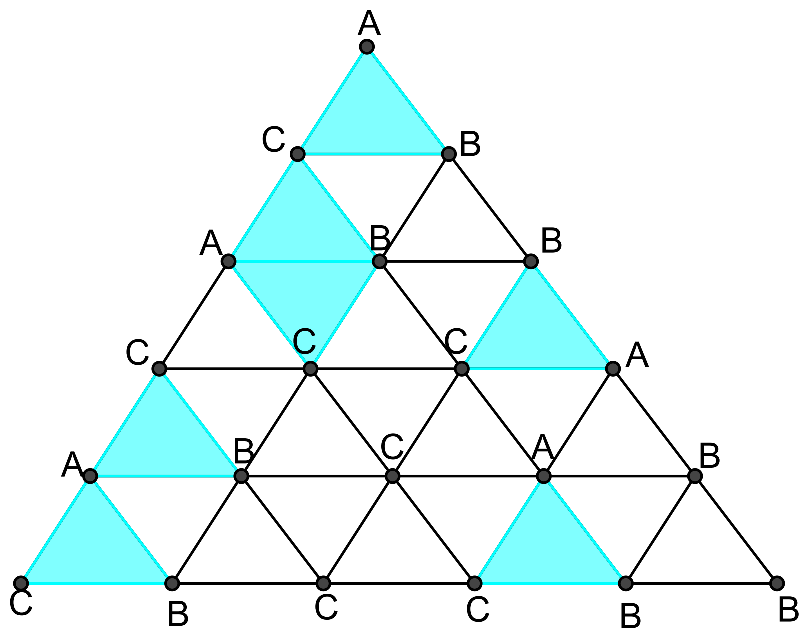


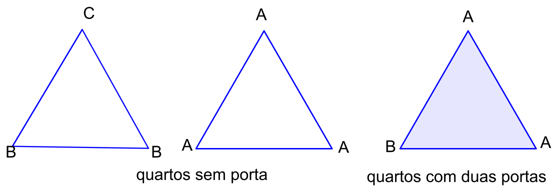
Figura 1.6

Lema 1.3.1. (Lema de Sperner): *Seja ABC um triângulo com uma triangulação que possui uma Rotulagem de Sperner. Temos que existe um número ímpar de triângulos principais.*

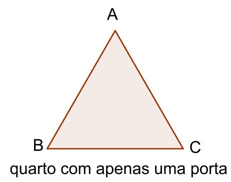
Demonstração. Vamos fazer a demonstrações nos seguintes passos:

Primeiro passo: Primeiramente, imaginaremos que o triângulo maior é uma "mansão" formada por "quartos" que são os triângulos menores e os segmentos AB e BA são as possíveis "portas" para os quartos.

- Cada um dos quartos pode ter nenhuma, uma ou no máximo duas portas (veja figuras 1 e 2 abaixo). Os quartos com apenas uma porta são os triângulos principais.



(a) Figura 1



(b) Figura 2

- As portas que estiverem nas arestas principais serão chamadas de “portas de contorno”. Observe que o número de portas de contorno é **ímpar** pela Lema 1.1.1.

Segundo passo: Iremos realizar passeios nessa mansão atravessando os quartos quando eles tiverem uma porta em comum.

- Os passeios devem ser iniciados de fora da mansão ou de um quarto que possua apenas uma porta (triângulo principal).

- Nesses passeios não podemos andar para trás, portanto, ao entrarmos em um quarto o passeio só continuará se ele possuir uma outra porta.

- Se entrarmos em um quarto e ele possuir apenas uma porta então o passeio é finalizado, com isso podemos concluir que um passeio só é finalizado em um quarto quando ele for um triângulo principal (veja os passeios p_1 e p_2 na Figura 1.7).

- Uma outra forma de finalizarmos um passeio é saindo da mansão por uma porta de contorno (veja o passeio p_3 na Figura 1.7).

- Não diferenciaremos os passeios pelo sentido do percurso, ou seja, um passeio que comece no lugar X e termine no lugar Y é o mesmo do que começa no lugar Y e termina no lugar X. Nesse caso, iremos dizer que os lugares X e Y são *conectados* por esse passeio, sendo estes lugares quartos (triângulos principais) ou portas de contorno.

Afirmação: Dois passeios distintos não podem se cruzar, ou seja, não podemos chegar em um mesmo quarto por mais de um passeio.

De fato, suponha que passeios originados de lugares distintos se encontraram em um mesmo quarto. Observe, no entanto, que um passeio precisa de duas portas, uma para entrar e outra para sair. Nesse caso, precisamos de uma terceira porta para que o outro passeio chegue ao mesmo quarto. Isso é um absurdo, pois cada quarto tem no máximo duas portas.

Terceiro passo:

Observe que uma porta de contorno pode ser conectada com uma outra porta de contorno ou com um triângulo principal. Os passeios que iniciem por uma porta de contorno e

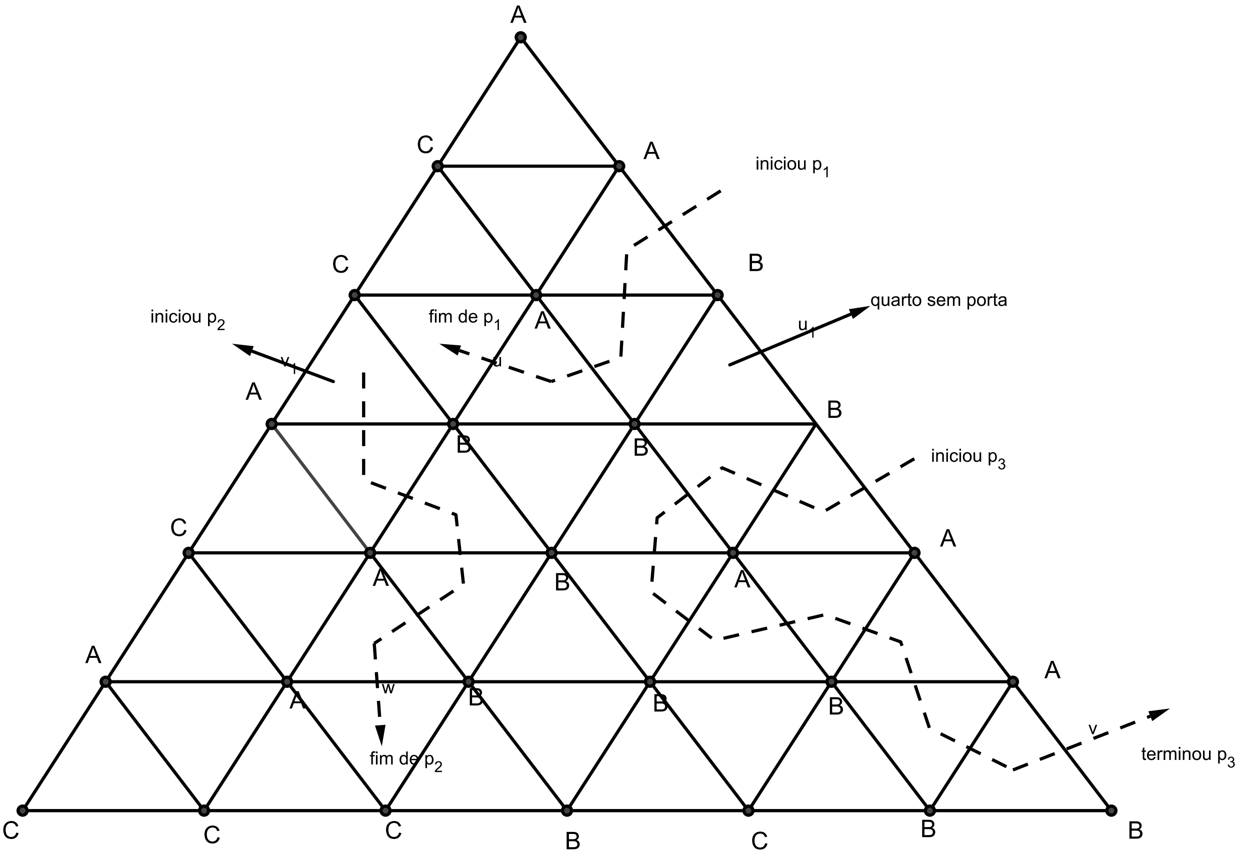


Figura 1.7

terminem saindo por outra irá conectar este par de portas e, portanto, existe um número par de portas em tais condições.

Sabemos, pelo lema 1.1.1, existe um número ímpar de portas de contorno. Como o número de portas de contorno conectadas entre si é par, isto nos garante que haverá um número ímpar de portas de contorno conectadas a triângulos principais. Logo, haverá também um número ímpar de triângulos principais conectados com portas de contorno.

Outra possibilidade é que um triângulo principal seja conectado com outro. Podemos observar que, nesse caso, sempre serão utilizados pares de triângulos principais, um para iniciar e outro para finalizar o passeio. Logo, a quantidade de triângulos principais nessa situação é par.

O total de triângulos principais é a soma de um número ímpar (número de triângulos principais conectados com portas de contorno) com um número par (número de triângulos principais conectados entre si). Portanto, o total de triângulos principais é ímpar.

□

1.4 Outra demonstração para o Lema de Sperner

Para essa demonstração consideramos o zero como número par e chamaremos segmentos com vértices distintos de "segmentos especiais". Seja T o número de segmentos especiais para cada um dos triângulos menores que formam a triangulação, iremos determinar a paridade deste número.

Afirmação: A paridade de T é ímpar.

De fato, como os segmentos especiais no interior são comuns a exatamente dois triângulos, eles serão contados duas vezes. Já os que se encontram nas arestas principais pertencem a apenas um triângulo. Portanto, temos que $T = m+2p$ com p sendo o número de segmentos especiais no interior e m nas arestas principais. Pelo lema 1.1.1 temos que em cada um das arestas principais existe um número ímpar, ou seja, m é a soma de três números ímpares e, portanto, é um número ímpar. Como $2p$ é par, significa que T é a soma de um ímpar com um par, logo T é um número ímpar.

Podemos escrever $T = t_1+t_2$ com t_1 sendo o número de segmentos especiais obtidos com os triângulos principais e t_2 com os triângulos não principais.

Observe que um triângulo principal possui três segmentos especiais e os outros triângulos que não são principais possuem nenhum ou dois segmentos especiais (veja a Figura 1.8). Logo, t_2 é igual ao número de triângulos com dois segmentos especiais multiplicado por 2 e portanto, t_2 é um número par. Como T é ímpar, temos que t_1 também é ímpar, caso contrário, teríamos que a soma de números pares seria ímpar. Se houvesse um número par de triângulos principais, como t_1 é tal número multiplicado por três, teríamos que t_1 seria par e isto já sabemos que não ocorre. Logo, o número de triângulos principais é ímpar, como queríamos demonstrar.

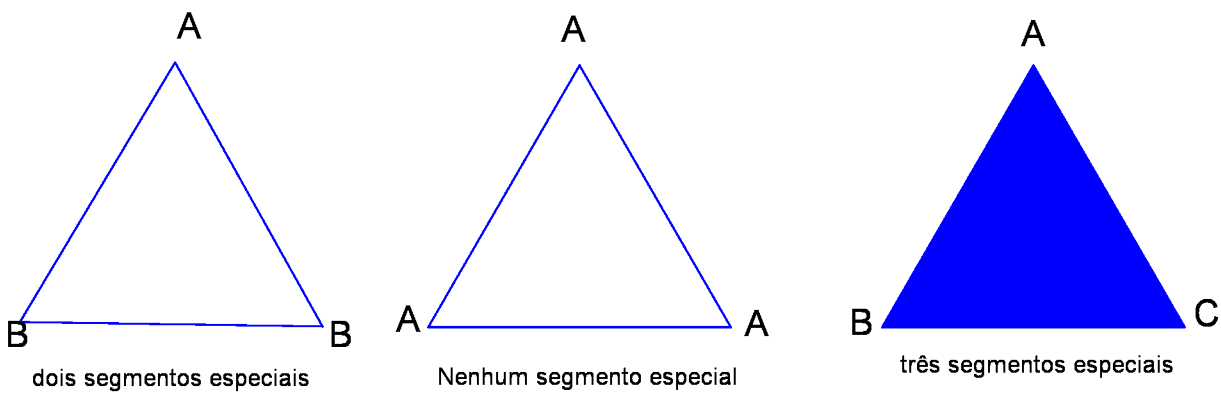


Figura 1.8

Capítulo 2

Como dividir de maneira justa

Iniciamos este capitulo enunciando o Teorema de Cantor aplicado em triângulos que será importante tanto neste capítulo como no capítulo IV. Depois, mostraremos como utilizar o Lema de Sperner em um triângulo para dividirmos entre três pessoas um bolo formado por três pedaços e também o aluguel de uma casa com três quartos

Teorema 2.0.1. *Se T_n é uma sequência infinita de triângulos satisfazendo $T_1 \supset T_2 \supset T_3 ...$, então a interseção destes triângulos é um ponto.*

2.1 Um bolo formado por características e tamanhos distintos

Suponha que três pessoas desejam dividir um bolo e que para a confecção desse bolo existam três possibilidades, ou seja, coberturas ou recheios de três tipos. Fixando o tamanho total do bolo por 70 unidades de comprimento e os três tipos que serão usados nos pedaços que formarão o bolo, chamando o tamanho de cada pedaço de x_i com $1 \leq i \leq 3$, temos que a soma $x_1 + x_2 + x_3 = 70$ e cada x_i está entre 0 e 70.

Definiremos a tripla ordenada (x_1, x_2, x_3) como o *conjunto de corte* realizado do bolo, sendo x_1 o tamanho do pedaço do tipo 1, x_2 o do tipo 2 e x_3 do tipo 3.

Nesta situação faremos as seguintes hipóteses iniciais:

1. Cada participante está com fome, ou seja, ele sempre vai preferir algum pedaço com tamanho maior que zero.

2. Cada participante possui preferência por certo pedaço sempre que ele for maior do que um dado tamanho. Esta condição exclui que um jogador possa desejar apenas um tipo de pedaço.

Teorema 2.1.1. *Nas condições apresentadas acima existe um conjunto de cortes onde cada um dos três participantes são satisfeitos com o seu pedaço e não deseja os pedaços dos outros participantes.*

Demonstração. Suponha inicialmente que as pessoas envolvidas se chamem André, Bruno e Carla. Construímos um triângulo marcando cada um dos vértices pelas iniciais dos nomes deles. Em seguida, obtemos uma triangulação de modo que os três vértices de cada um dos triângulos menores sejam distintos, usando A, B ou C.

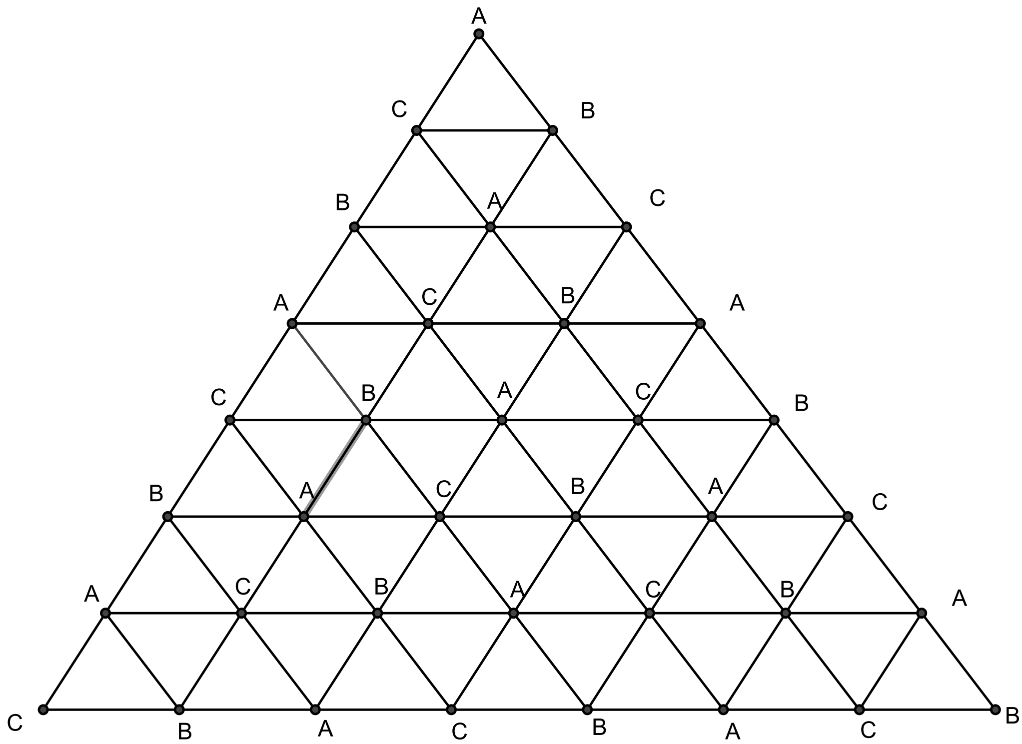


Figura 2.1

Nos vértices principais associaremos as triplas ordenadas $(70, 0, 0)$, $(0, 70, 0)$ e $(0, 0, 70)$. Na aresta principal AB o pedaço 1 e 2 variam de tamanho em quanto o pedaço 3 é de dimensão nula. Nas outras arestas principais fazemos um procedimento análogo.

Para marcação dos vértices internos adotamos o seguinte procedimento. Observamos, inicialmente, que ele pertence à interseção de três segmentos com vértices em arestas principais, um segmento paralelo à aresta principal AB, ou paralelo à aresta principal BC e outro paralelo à aresta principal AC. Olhamos para as coordenadas dos extremos desses segmentos. Em cada uma delas, uma das três coordenadas se manterá fixa e esta coordenada terá este valor naquele vértice.

Com isso, ao transladarmos entre segmentos paralelos à aresta principal BC, variamos o valor do primeiro pedaço. Ao transladarmos entre segmentos paralelos à aresta principal AB variamos o valor do terceiro pedaço e quando transladamos entre segmentos paralelos à aresta principal AC variamos o preço do segundo pedaço. Veja na Figura 2.2.

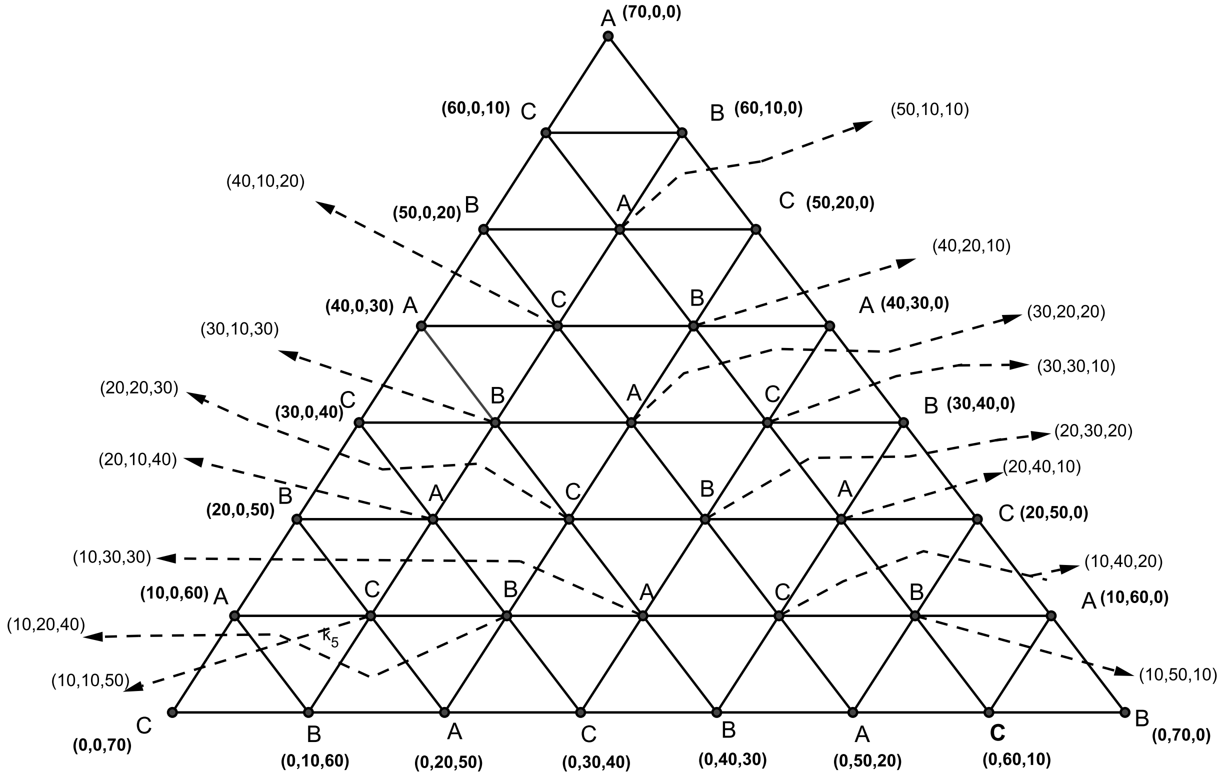


Figura 2.2

Feito isto teremos cada um dos vértices associados a uma tripla ordenada. Iremos agora perguntar ao proprietário de cada vértice "com a divisão do bolo feita desta maneira qual o pedaço que você prefere"e marcaremos tal vértice com o número correspondente ao pedaço escolhido. Pelas hipóteses iniciais garantimos que essa marcação é, de fato, uma rotulagem de sperner, pois para os vértices principais teremos que no vértice A o pedaço escolhido será o 1, no B será o 2 e no C será o 3. Além disso, nas arestas principais AB só poderá ser escolhido 1 ou 2, na BC haverá 2 ou 3 e na AC será marcado apenas por 1 ou 3. Portanto, pelo Lema 1.3.1, haverá um triângulo que possui os três vértices distintos, ou seja, um triângulo onde cada participante aceitará um pedaço diferente do seu colega. □

Dentro de todos os triângulos disponíveis este triângulo oferece uma divisão que agrada a todos, mas não significa que tais valores serão utilizados pois a soma dos tamanhos de cada pedaço pode não corresponder ao tamanho total do bolo. No entanto, na parte interna deste triângulo existe um ponto onde a soma das três coordenadas é 70.

Isto significa que precisamos de uma triangulação com triângulos bem estreitos para que o nível de satisfação dos participantes seja maior e a sobra (ou o excesso) seja o menor possível e possa ser dividido em partes iguais. Nesse caso, o ponto interno do triângulo principal tomado é o baricentro.

No entanto, se desejarmos encontrar uma divisão que seja a mais agradável possível para os participantes, fazemos novas triangulações com as dimensões dos triângulos menores tenderem a zero. Pelo Teorema de Cantor podemos garantir que os triângulos com três vértices distintos convergirão para um ponto com extrema satisfação dos participantes e cuja soma dos pedaços é exatamente igual ao tamanho do bolo.

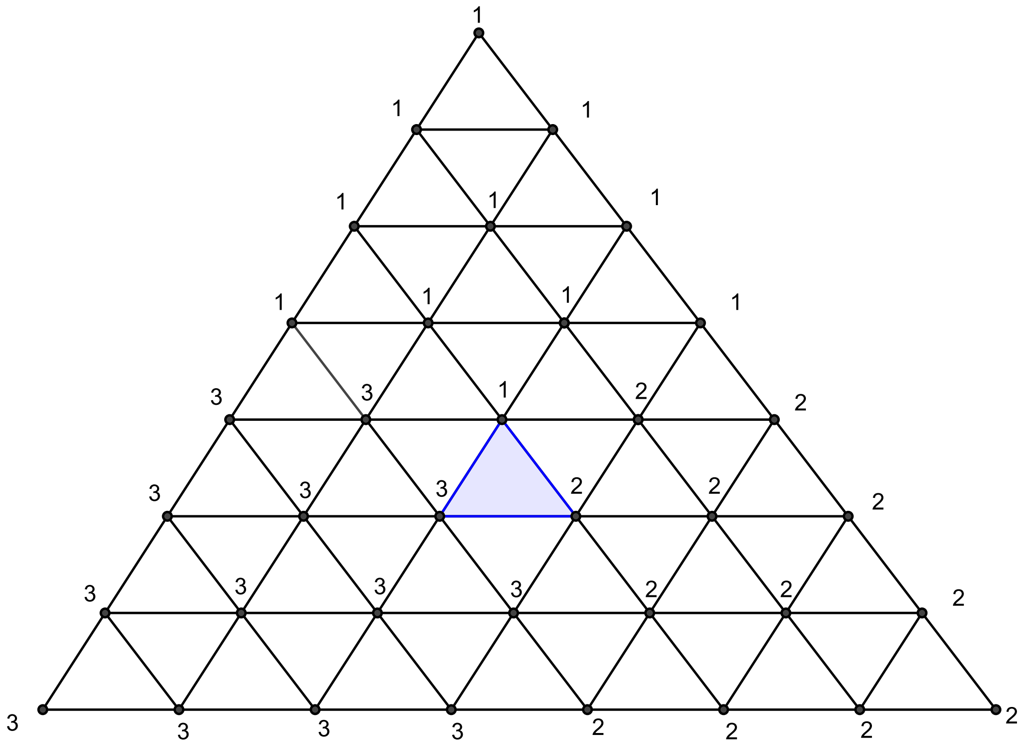


Figura 2.3

Nessa situação ocorreu que André escolheu o primeiro pedaço com tamanho 30, Bruno o segundo também com tamanho 30 e Carla o terceiro medindo 30. Observamos que excedeu em 20 unidades o total e para usar o baricentro, dividimos 20 em três partes iguais e subtraímos esse valor de cada pedaço, obtendo com isso o seguinte resultado:

André ficará com primeiro, Bruno com o segundo e Carla com o terceiro pedaço todos medindo $\frac{70}{3}$.

2.2 Dividindo o valor de um bolo com o corte já realizado

Suponha que exista um bolo que já foi dividido em três pedaços que possuem características distintas. Ou seja, um pode ter recheio, outro uma cobertura e outro um tamanho maior. Três amigos querem dividir o valor do bolo entre eles relacionando o valor que cada um deve pagar com o pedaço selecionado.

Nessa situação assumiremos às seguintes hipóteses:

1. Na divisão o pedaço escolhido dependerá do valor cobrado. Ou seja, uma pessoa é disposta a ficar com determinado pedaço até um preço limite.

2. Qualquer participante sempre preferirá um pedaço gratuito em relação a um outro com preço maior que zero.

Primeiramente, suponha que as pessoas envolvidas se chamem André, Bruno e Cecília e que o custo total do bolo seja 42 reais. Iniciaremos o processo de divisão tomando um triângulo ABC, com as iniciais de cada participante, subdividido em triângulos menores e marcaremos os vértices com as iniciais de cada um dos participantes de modo que o triângulo principal e cada um dos triângulos menores tenham os três vértices distintos.

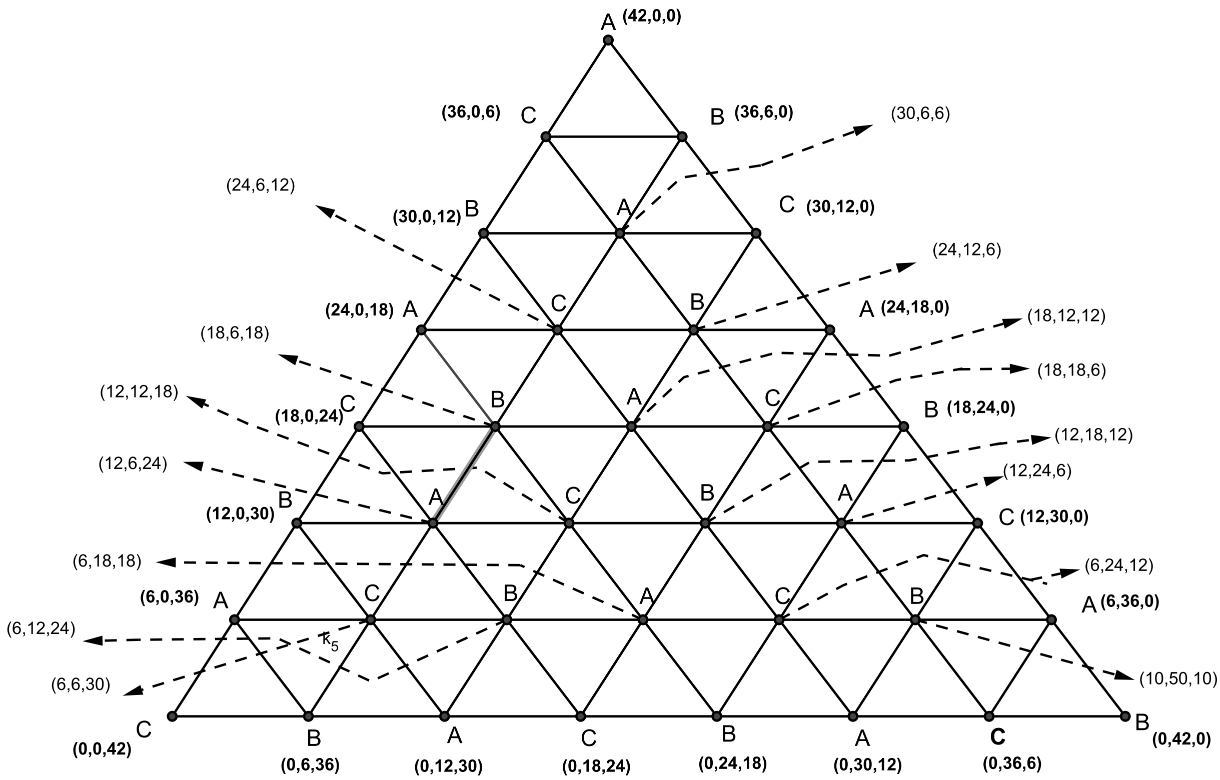


Figura 2.4

Associaremos cada vértice à uma tripla ordenada com cada coordenada indicando o preço de um pedaço. Ou seja, rotularemos cada vértice com (x_1, x_2, x_3) com $x_1+x_2+x_3 = 42$. Nos vértices principais o valor de um dos pedaços corresponde ao valor total do bolo e nas arestas principais um dos pedaços será gratuito.

Em cada triângulo menor iremos ao vértice, perguntaremos ao participante com esta inicial o seguinte: "com esta divisão do preço, qual pedaço você prefere?". Logo após, marcamos o vértice com o número que indica a posição do pedaço escolhido.

Mediante as hipóteses apresentadas acima teremos que em cada um dos vértices principais o participante poderá escolher entre dois pedaços que são gratuitos e nas arestas principais, entre estes vértices, ele escolherá o único pedaço gratuito (veja a Figura 2.5).

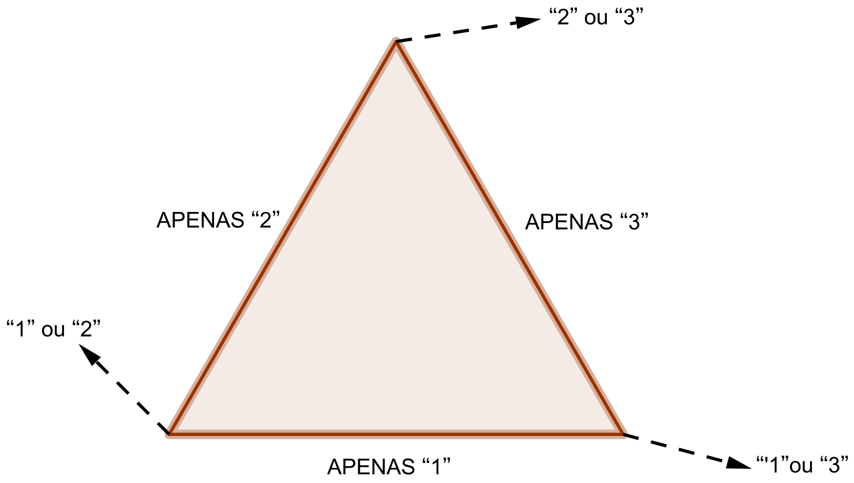


Figura 2.5

Percebemos com isso que esta nova marcação não atende aos critérios da rotulagem vista no Lema de Sperner. Portanto, precisamos provar que nessa nova rotulagem haverá um triângulo principal.

Lema 2.2.1. *Considere um triângulo com uma triangulação que possui uma rotulagem com os seguintes critérios:*

1. *No primeiro vértice principal podemos marcar A ou B, no segundo B ou C e no terceiro C ou A.*

2. *Entre cada um destes vértices, nas arestas principais, deve ser marcado pela opção disponível comum nestes vértices.*

Nessas condições temos que existe um número ímpar de triângulos principais.

Demonstração. A prova deste lema segue o argumento parecido com a primeira demonstração do Lema de Sperner. Primeiramente, contaremos quantas portas de contorno existem. Observe que, no caso, de marcarmos A no primeiro vértice principal teremos uma única porta ao lado direito do vértice A. Já se marcarmos B teremos uma única porta ao lado esquerdo do vértice B (veja a Figura 2.6).

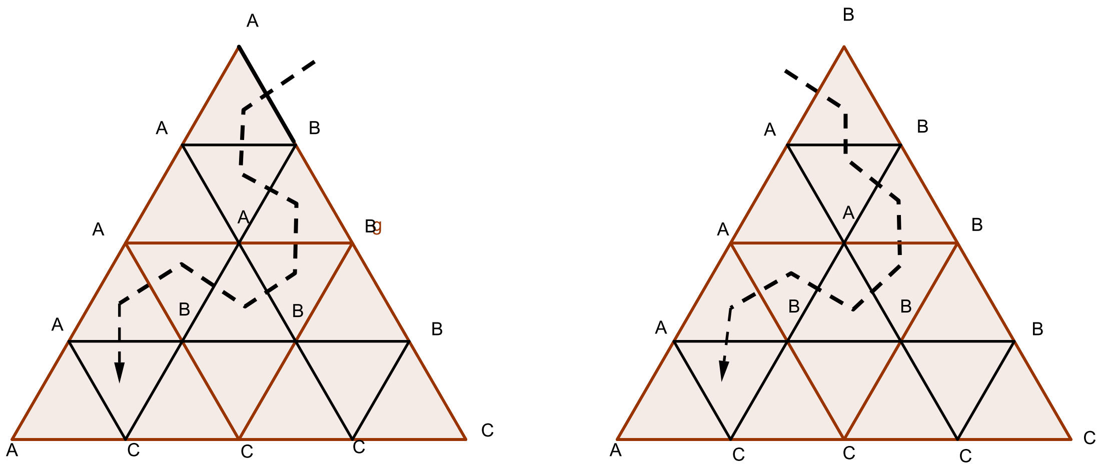


Figura 2.6

Iremos realizar passeios e observar que existem duas possibilidades:

1. Os passeios podem ser iniciados e finalizados em triângulos principais e conectaram um número par desses triângulos, podendo também tal número ser zero no caso de não existirem passeios possíveis de serem realizados desta maneira.

2. Os passeios podem ser iniciados em uma porta de contorno e terminados em um triângulo principal(ou vice versa). Como só existe uma porta de contorno, só existe um passeio nessas condições.

Como um triângulo principal não pode ser alcançado por dois passeios distintos, não existem quartos que sejam alcançados por essas duas possibilidades. Observe, agora, que temos pares de triângulos principais conectados do primeiro modo mais um triângulo principal no segundo modo e portanto, temos um número ímpar de triângulos principais.

□

Através deste lema, garantimos que haverá um triângulo principal nesta triangulação, ou seja, ocorrerá um momento em que os três participantes escolherão pedaços distintos. Observe na Figura 2.5 que independente da marcação escolhida para os vértices circulados obteremos um triângulo principal. Na Figura 2.6 mostramos uma possível marcação após os participantes escolherem os seus pedaços. Nesse exemplo, usando a triangulação da Figura 2.3, chegamos ao seguinte resultado para a divisão:

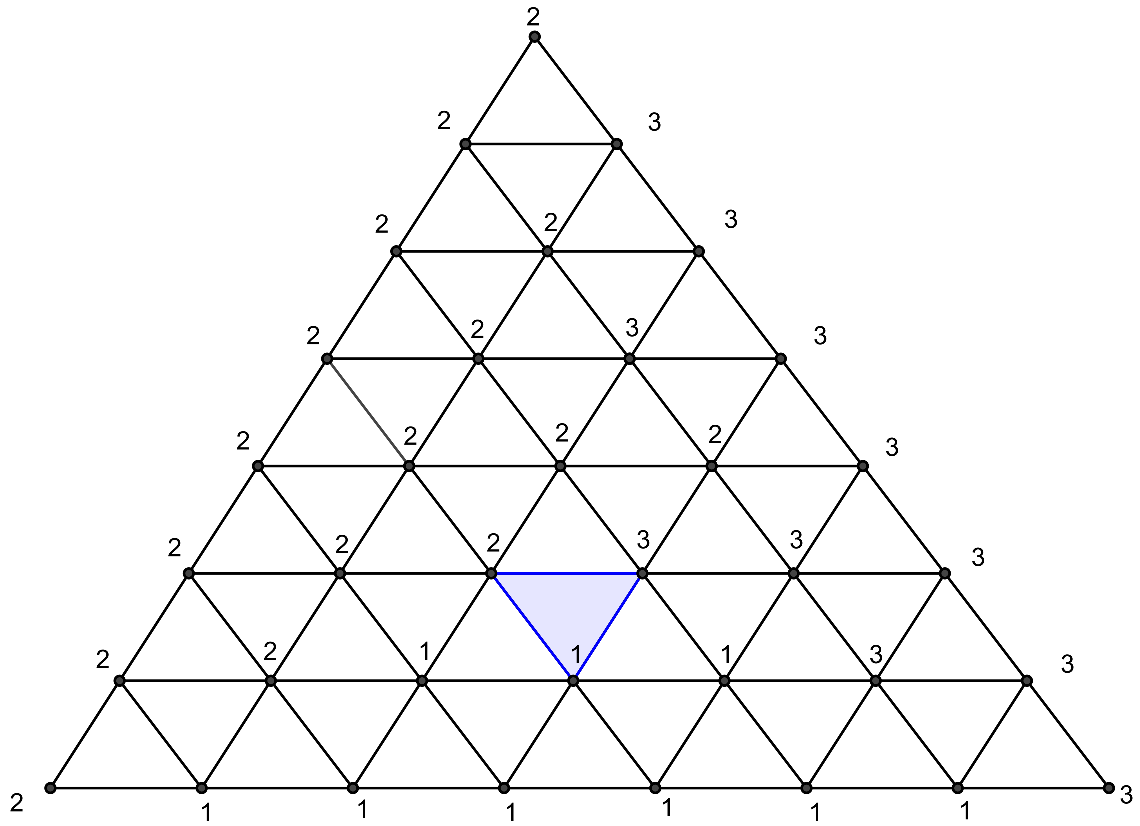


Figura 2.7

Cecília pagará 6 reais para o segundo pedaço, André 6 reais para o primeiro e Bruno pagará 12 reais para o terceiro. A soma dos três valores corresponde a 24 reais faltando ainda 18 reais para completar o custo do bolo. Portanto, usando o baricentro deste triângulo, dividiremos esse valor em partes iguais, ou seja, acrescentaremos 6 reais a cada um.

2.3 Dividindo um aluguel entre três pessoas

Suponha que três colegas trabalham na mesma cidade e possuem residência em outro lugar com uma distância razoável do local de trabalho de modo que não dá para retornar diariamente para a cidade em que moram.

Nessa situação, uma alternativa econômica para eles é dividir uma mesma moradia. Ao tomarem essa decisão, eles encontraram uma casa com três quartos com características específicas. Ou seja, um quarto 1 com suíte, outro quarto 2 com uma ventilação melhor e outro quarto 3 com um tamanho maior. Entretanto, eles não sabem como definir o quarto que cada um vai ficar e também, o valor que cada um terá que pagar.

Sem dúvida nenhuma, essa é uma situação em que o lema de Sperner pode ajudar a resolver. Suponhamos que as pessoas envolvidas se chamem André, Bruno e Carlos. Precisamos estabelecer as seguintes hipóteses:

1. Cada participante terá sempre a preferência por um quarto gratuito em relação a um quarto com custo maior que zero.

2. Cada participante prefere um certo quarto desde que o valor dele não ultrapasse um limite imposto pele próprio participante.

Iremos considerar um triângulo ABC com uma triangulação em triângulos bem pequenos de modo que cada um deles tenham os três vértices distintos e marcados com A, B e C. Veja a Figura 2.8.

Supondo que o valor do aluguel seja 600 reais, associaremos cada vértice à triplas ordenadas (x_1, x_2, x_3), com x_1 sendo o preço do primeiro quarto, x_2 do segundo e x_3 do terceiro. Logo teremos que $x_1 + x_2 + x_3 = 600$. Usaremos a mesma ideia do problema anterior para associarmos cada um dos vértices a uma tripla ordenada.

Consultaremos os proprietários dos vértices sobre a preferência do quarto com a divisão do aluguel realizada com os valores marcados em seus vértices e faremos uma nova marcação com o número do quarto de sua preferência.

A nova rotulagem obtida atende ao Lema 2.2.1 e, com isso, garantimos que existirá um triângulo com os três vértices distintos nessa marcação. Veja a Figura 2.9.

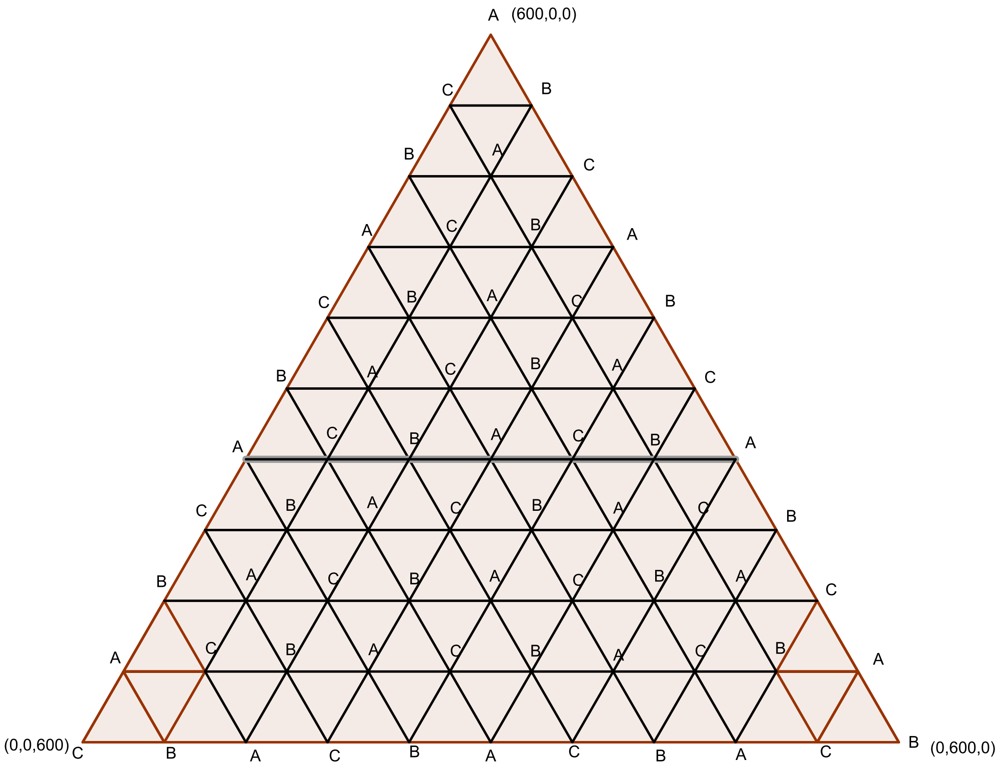


Figura 2.8

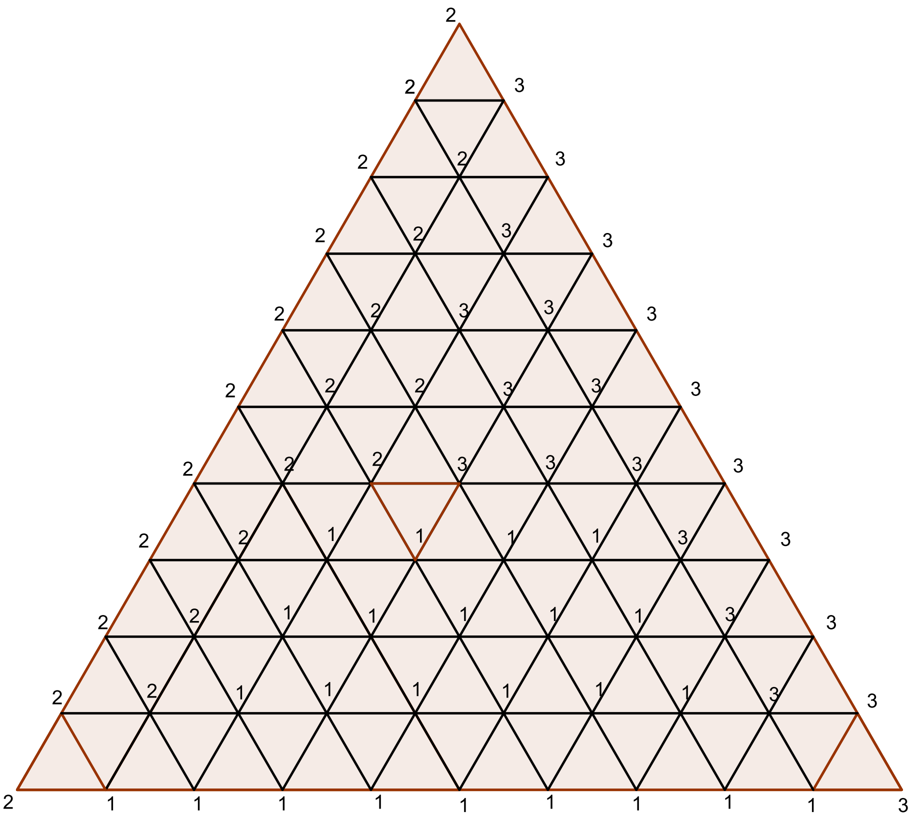


Figura 2.9

Como resultado da divisão, visto na Figura 2.9, temos que Carlos decidiu pagar 180 reais pelo quarto 1, Bruno pagar 120 pelo quarto 2 e André 180 pelo quarto 3. Usando o baricentro deste triângulo menor, obteremos que Carlos pagará 220 reais e ocupará o quarto 1, Bruno pagará 160 reais e ocupará o quarto 2 e André pagará 220 reais e ficará no quarto 3.

É importante salientar que para os participantes na divisão se sintam o mais satisfeito possível os tamanhos dos triângulos menores devem se aproximar de zero, para que ocorra o comum acordo entre eles em utilizar o baricentro do triângulo principal encontrado. No entanto, existe um interessante aplicativo on-line disponível em http://www.spliddit.org que pode ser utilizado para realizar divisões de aluguel.

Capítulo 3

Jogos de Sperner

Neste capitulo apresentarei o Jogo de Sperner para o triângulo e a realização de uma atividade envolvendo este jogo com os alunos do ensino médio integrado do IFBA, campus Paulo Afonso. Mostrarei, também, uma outra possibilidade lúdica, chamada de jogo dos Impactos, que usa o Lema de Sperner para o segmento.

3.1 O Jogo de Sperner para o triângulo

Uma das atividades avaliativas em 2016 para as turmas do 3º ano do IFBA, campus Paulo Afonso, foi a elaboração do jogo de Sperner para o triângulo. Em cada turma, formaram-se equipes de quatro pessoas e cada equipe ficou com a responsabilidade de confeccionar tal jogo. A apresentação do jogo ocorreu com a participação de todos os alunos em um campeonato.

Para a elaboração do jogo foram utilizadas folhas de cartolinas, onde cada equipe desenhou um triângulo equilátero subdivido em triângulos menores, também equiláteros e congruentes, de modo que em cada vértice desses triângulos aparecesse um pequeno circulo. Veja na Figura 3.1.

Para preencher os círculos foram confeccionadas fichas de três cores.

3.2 Instruções para o jogo de Sperner

O jogo de Sperner pode ser realizado com dois ou três participantes. No entanto, é importante ressaltar que ele indica o perdedor e, por isso, ao ser realizado por três jogadores é necessário que haja mais uma partida entre os dois vencedores para que seja determinado o vencedor final.

As regras do jogo são as seguintes:

Figura 3.1

1. Os participantes jogarão alternadamente escolhendo uma ficha entre as três disponíveis para preencher algum vértice dos triângulos menores. Não existe uma ordem para o preenchimento, portanto o jogador poderá preencher qualquer vértice que esteja desocupado.

2. Os três vértices do triângulo maior devem ser preenchidos antes de iniciar a partida com as três cores distintas.

3. Em cada lado do triângulo maior, os vértices só podem ser preenchidos por uma das duas cores usadas nos extremos deste lado.

Um jogador perde a partida quando depois de realizar uma jogada aparecer um triângulo tricolor, isto é, com os três vértices com cores distintas.

Obedecendo tais regras e iniciando as primeiras partidas, os estudantes perceberam que se tratava de um jogo bem estratégico. Depois de algumas partidas realizadas os participantes notaram que nunca ocorria o empate, ou seja, eles visualizaram na prática o resultado do lema de Sperner. Independente das marcações, ao término de todas as jogadas, sempre ocorrerá um triângulo com os três vértices distintos.

Figura 3.2

A atividade se iniciou com alguns alunos um pouco distraídos e perdendo os jogos facilmente. Nos confrontos mais adiante os jogos ficaram bem disputados e os alunos perceberam que tomando os devidos cuidados o jogo sempre se encerraria na última jogada como na Figura 3.4. Observe que independente da cor escolhida para preencher o vértice em branco haverá um triângulo tricolor.

Isto levou alguns alunos a tentar determinar a paridade do número de jogadas e concluírem que sendo par o iniciante vence a partida e sendo ímpar ele perde pois será o último a jogar. Para determinar a paridade observamos que o número de vértices nesta triangulação corresponde a seguinte soma: $V = 1 + 2 + 3 + ... + n$ com n sendo o número de vértices nos lados do triângulo maior. Usando a soma dos termos de uma P.A temos que $V = \dfrac{(1+n)n}{2}$ e percebemos, facilmente, que se n é par o número V será ímpar e se n é ímpar o número V é par.

Figura 3.3

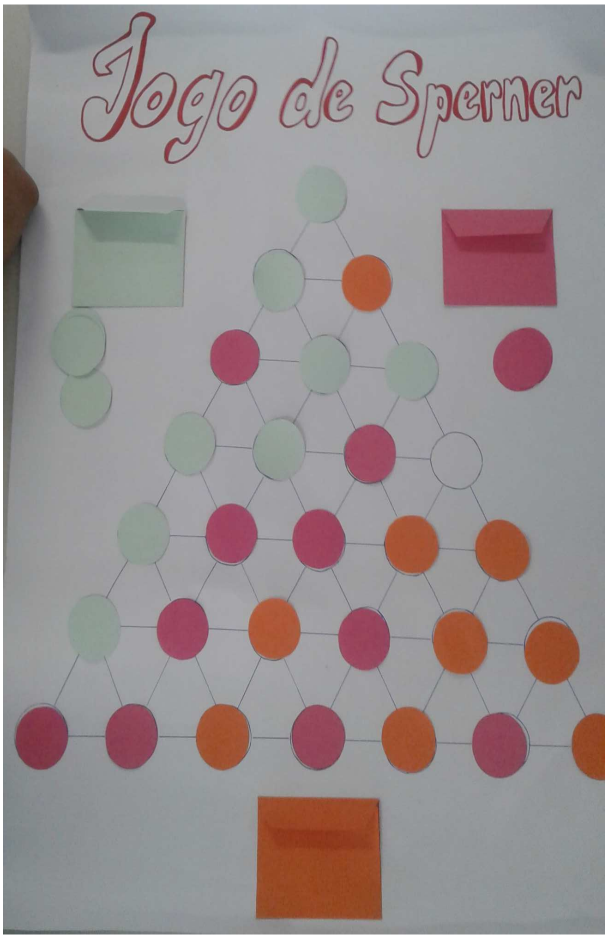


Figura 3.4

3.3 Jogo dos Impactos

O formato do jogo consiste em um retângulo inicial subdividido em retângulos menores de mesmas dimensões e com altura igual a do retângulo inicial conforme a figura abaixo:

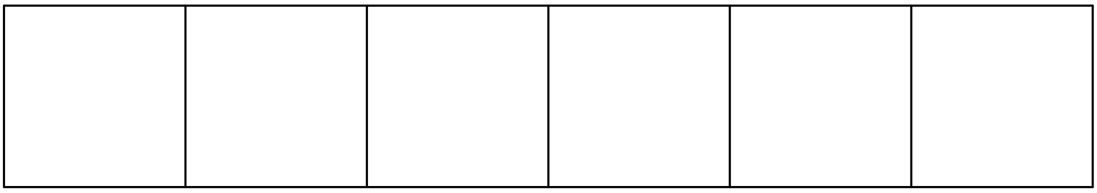


Figura 3.5

Esse jogo deve ser realizado por dois participantes, os quais, inicialmente, deverão escolher par ou ímpar. Haverá fichas de duas cores que deverão preencher os retângulos menores e cada jogador, escolherá, uma das fichas para preencher um destes retângulos.

Chamaremos de *Impacto* quando dois retângulos consecutivos tiverem cores distintas. Após o jogo estar completo, perceberemos a paridade do número de impactos que ocorreu no jogo. Ganha o jogo a pessoa que tiver escolhido tal paridade.

Percebemos com este jogo a validade do Lema de Sperner para um segmento pois podemos associar os vértices de cada subsegmento a um retângulo. Com isso, quando os extremos tiverem marcações distintas, independente da sequência de jogadas realizadas, haverá um número ímpar de impactos. Portanto, a principal estratégia para o jogador que escolher ímpar é preencher os extremos com cores distintas e para o jogador que escolher par é tentar preencher os extremos com as mesmas cores.

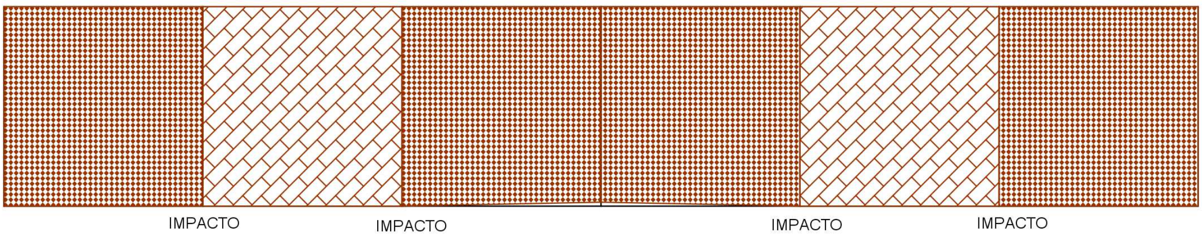


Figura 3.6

Capítulo 4

Lema de Sperner e O teorema do ponto Fixo

Iremos neste capítulo fornecer uma prova do teorema do ponto fixo de Brouwer para espaços com uma e com duas dimensões. Nessa demonstração usaremos como ferramenta o lema de Sperner e essa utilização é uma das aplicações mais importantes de tal lema.

Definição 4.0.1. *Seja $f : R^n \to R^n$. Então:*

(a) Um ponto p é um ponto fixo da função f se $f(p) = p$.

(b) Um ponto p é uma raiz da função $f(x)$ se $f(p) = 0$.

Exemplo 4.0.1. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x(1-x)$ tem pontos fixos $x = 0, x = \frac{1}{2}$ e raízes em $x = 0, x = 1$.*

Lema 4.0.1.

(a) $f(x)$ tem uma raiz em p se, e somente se $g(x) = x - f(x)$ tem ponto fixo em p.

(a) $g(x)$ tem um ponto fixo em p se, e somente se $f(x) = x - g(x)$ tem uma raiz em p.

Teorema 4.0.1. *(Teorema do Valor Intermediário)*
Seja f uma função contínua de $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ com $f(a) < f(b)$. Se c é um número real tal que $f(a) < c < f(b)$ então existe $x_0 \in I$ tal que $f(x_0) = c$.

Seja $D_n = \{x \in R^n; |x| \leq 1\}$.

Teorema 4.0.2. *(Teorema do ponto fixo de Brouwer)*
Considere $f : D_n \to D_n$ uma função contínua. Então existe $x \in D_n$ tal que $x = f(x)$.

Demonstração. Iremos provar para n=1 e para n=2.

Iniciaremos com n = 1. Ou seja, temos $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$. Defina $g(x) = x - f(x)$ então $g(1) \geq 0$ e $g(-1) \leq 0$ e pelo teorema do valor intermediário deve haver um ponto x_0 de modo que $g(x_0) = 0$, ou seja, $f(x_0) = x_0$.

Para n = 2, por simplicidade, usaremos $D_2 = T$, onde T é um triângulo qualquer tal que $T \subseteq [-1, 1]^2$. Logo, deveremos mostrar que a função $f : T \to T$ possui um ponto q tal que $f(q) = q$

Marque os vértices deste triângulo com A, B e C tomando uma triangulação de T em pequenos triângulos.

Considere agora em cada vértice V desta triangulação o sentido do vetor $f(V) - V$ em relação ao lado AC do triângulo T e faça às seguintes marcações:

i Se este vetor tiver sentido noroeste, norte ou oeste marque com C.

ii Se o vetor tiver sentido nordeste ou leste marque com A.

iii Se ele tiver qualquer outro sentido marque com B.

Veja um exemplo na Figura 4.1.

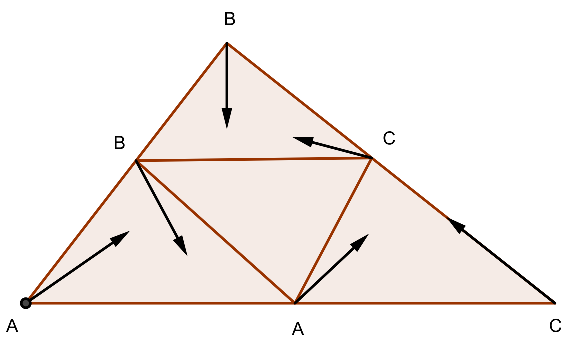


Figura 4.1

Observe que para os vértices em cima do segmento AC não podemos usar uma marcação B pois isso ocasionaria que $f(V) - V$ teria direção para fora do triângulo. Isto pois $f(V) - V$ indica o sentido de V até $f(V)$ e temos que $f(V)$ pertence ao triângulo T. De modo análogo podemos ver que não pode ocorrer uma marcação A no lado BC e nem uma marcação B no lado AC. Logo, temos nesta triangulação uma rotulagem de Sperner.

Com isto, garantimos haver nesta triangulação um triângulo com os três vértices distintos. Neste novo triângulo ABC podemos fazer uma outra triangulação formada por triângulos cada vez menores e, obedecendo o mesmo procedimento, encontraremos um novo triângulo menor do tipo ABC. Por compacidade do triângulo, repetindo esse processo infinitas vezes, teremos uma sequência de triângulos com os três vértices distintos convergindo para um ponto q. Observamos agora que $f(q)-q$ só pode ser o vetor nulo, já que os vetores $f(A)-A$, $f(B)-B$ e $f(C)-C$ tem direções distintas e convergem para o mesmo ponto. Logo, $f(q)-q=0$, e portanto q é um ponto fixo.

$\square$

Capítulo 5

Considerações Finais

Percebemos com esse trabalho que a matemática é, realmente, surpreendente e que é possível aplicar em problemas do nosso cotidiano muitos dos resultados descobertos por grandes matemáticos ao longo da história. Além disso, podemos construir atividades lúdicas em sala de aula com tais resultados e tornar a matemática muito mais atrativa para os alunos do ensino médio.

Dividir valores e objetos formados por partes possuindo particularidades pode gerar atritos e insatisfação por parte de um ou mais dos envolvidos. Uma possibilidade para evitar esse tipo de situação é o uso do Lema de Sperner nessas divisões.

O Jogo de Sperner foi uma atividade que alcançou um resultado expressivo nas turmas em que ele foi aplicado. A participação dos alunos e a motivação foram enormes, percebi que tal jogo oferece a oportunidade de desenvolver o raciocínio lógico e a percepção. Segundo relato dos alunos, este jogo possibilitou a interação entre eles e tornou a aula de matemática mais interessante.

Bibliografia

[1] Sun, Albert. "To Divide the Rent, Start With a Trinagle"; The New York Times. Disponível em: <http://www.nytimes.com/2014/04/29/science/to-divide-the-rent-start-with-a-triangle.html>

[2] Su, Francis Edward. "Rental Harmony: Sperner's Lemma in Fair division", Amer. Math. Monthly, 107 (2000), 185-188. 106 (1999), 930-642.

[3] Kleinman, Aaron. "RATIONAL RENT-SPLITTING". Disponível em: <http://mathcircle.berkeley.edu/archivedocs/2015/lecture/BMC_Adv_Oct20.pdf>

[4] Palmieri, John H. "The Brouwer fixed point theorem", ACMS seminar, 3 March 2011