



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - IME  
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

# UMA CONEXÃO ENTRE BINÔMIO DE NEWTON E PROBABILIDADE

LEANDRO SOLANO CARNEIRO DA CUNHA

SALVADOR - BAHIA  
ABRIL DE 2017

# UMA CONEXÃO ENTRE BINÔMIO DE NEWTON E PROBABILIDADE

LEANDRO SOLANO CARNEIRO DA CUNHA

Dissertação de Mestrado apresentada à  
Comissão Acadêmica Institucional do  
PROFMAT-UFBA como requisito parcial para  
obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Kleyber Mota da Cunha

**Salvador - Bahia**  
Abril de 2017

Modelo de ficha catalográfica fornecido pelo Sistema Universitário de Bibliotecas da UFBA para ser confeccionada pelo autor

Solano Carneiro da Cunha, Leandro  
Uma conexão entre Binômio de Newton e Probabilidade /  
Leandro Solano Carneiro da Cunha. -- Salvador, 2017.  
51 f. : il

Orientador: Kleyber Mota da Cunha.  
Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática  
em Rede Nacional) -- Universidade Federal da Bahia,  
Universidade Federal da Bahia, 2017.

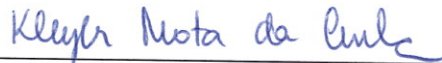
1. Combinatória e Números Binomiais. 2. Probabilidade. 3.  
Teorema Binomial. 4. Teorema Multinomial. I. Mota da Cunha,  
Kleyber. II. Título.

# Uma conexão entre Binômio de Newton e Probabilidade

Leandro Solano Carneiro da Cunha

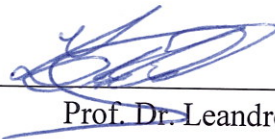
Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 12/04/2017.

## Banca Examinadora:



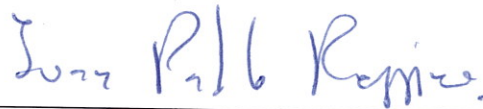
---

Prof. Dr. Kleyber Mota da Cunha (orientador)  
UFBA



---

Prof. Dr. Leandro Suguitani  
UFBA



---

Prof. Dr. Juan Pablo Roggiero Ayala  
UFBA

*à minha esposa Gilmara  
e à minha mãe Margarida,  
com muito carinho e amor.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus em primeiro lugar, à minha mãe Margarida Lopes Carneiro da Cunha, ao meu falecido pai Aristóteles Solano Carneiro da Cunha e aos meus irmãos Leonardo Solano Carneiro da Cunha e Josemar Lopes Sampaio pela força e apoio cruciais dados.

Agradeço, em especial, à minha amável e querida esposa Gilmara Jesus de Souza Cunha pelo incentivo e compreensão durante o tempo dedicado a este curso.

Ao Professor e Orientador Dr. Kleyber Mota da Cunha pela sua disponibilidade nos momentos que me levaram a execução e conclusão deste trabalho.

À todos os colegas do mestrado que contribuíram diretamente nesta etapa de novos conhecimentos. Em especial, aos colegas Etinevaldo, Ivanilton e Marcelo por terem sido companheiros em todos os momentos de que mais precisei.

Agradeço também a todos os Professores da Universidade Federal da Bahia que contribuíram para o ótimo andamento do curso compartilhando conhecimento e experiência no ensino da Matemática, tornando nosso aprendizado mais interessante e enriquecedor.

Dedico também agradecimentos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pelo apoio e incentivo disponibilizados durante esse curso.

Agradeço também, em especial, ao Coordenador do curso Dr. Marco Antônio Nogueira Fernandes pela dedicação e atenção dadas no decorrer deste período do Profmat.

Enfim, à todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho e a todos que me incentivaram a participar do certame que abriu as portas para o ingresso neste tão sonhado curso. Ficam meus sinceros agradecimentos.

*"Você nunca sabe que resultados virão da sua ação.  
Mas se não fizer nada, não existirão resultados."  
Mahatma Gandhi*

A PROPOSTA deste trabalho, a princípio, é utilizar o Teorema Binomial para cálculos de probabilidade, estabelecendo uma conexão entre esses conteúdos. A ideia é viabilizar aplicações do Teorema Binomial utilizando exemplos práticos como, por exemplo, lançamento de dados, viciados ou não, lançamento de moedas, entre outros. Será feita, também, uma extensão para o teorema multinomial, que possibilitará, através de expressões do tipo  $(a + b + c + \dots)^n$ , determinar probabilidades quando da ocorrência de três ou mais eventos. Para tanto, deve-se ter como base conceitos referentes aos conteúdos de Combinatória e Probabilidade, que são estudados no Ensino Médio, para que os objetivos do trabalho sejam alcançados de maneira satisfatória.

**Palavras-chave:** Teorema Binomial, Probabilidade, Teorema Multinomial, Combinatória.



## ABSTRACT

THE purpose of this work is, basically, using the Binomial Theorem to calculate probabilities, establishing a connection between these contents. The idea is to enable applications of the theorem using practical examples, for instance, throwing of dice, flipping of coins, among others. There will be done an extension to the multinomial theorem, that is going to provide, through expressions such as  $(a + b + c + \dots)^n$ , determine probabilities in case of three or more goings on happening. To do so, basic concepts referring to contents of combinatory and probability, which is studying at high school, are essential to achieve the objectives of this work in a satisfactory way.

**Keywords:** Binomial Theorem, Probabilities, Multinomial Theorem, Combinatory.

<b>Introdução</b>		<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Combinatória e Números Binomiais</b>	<b>3</b>
1.1	Breve Histórico . . . . .	3
1.2	Fatorial . . . . .	3
1.3	O princípio fundamental da contagem . . . . .	3
1.4	Agrupamentos simples . . . . .	4
1.4.1	Permutações simples . . . . .	4
1.4.2	Arranjos simples . . . . .	5
1.4.3	Combinações simples . . . . .	6
1.5	Números binomiais . . . . .	8
1.6	Triângulo Aritmético de Pascal . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Probabilidade</b>	<b>12</b>
2.1	História da Probabilidade . . . . .	12
2.2	Conceitos iniciais . . . . .	13
2.3	Álgebras de eventos . . . . .	13
2.3.1	$\sigma$ - Álgebra de Eventos . . . . .	14
2.4	Definição de probabilidade . . . . .	14
2.4.1	Consequências da definição . . . . .	14
2.5	Experimentos equiprováveis . . . . .	15
2.5.1	Evento unitário . . . . .	15
2.5.2	Probabilidade de um evento ocorrer . . . . .	15
2.6	Probabilidade da união de dois eventos . . . . .	16
2.7	Probabilidade condicional . . . . .	18
2.8	Eventos Independentes . . . . .	19
2.9	Probabilidade do evento complementar . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Teorema Binomial e aplicações na Probabilidade</b>	<b>22</b>
3.1	Breve Histórico . . . . .	22
3.2	Binômio de Newton . . . . .	22
3.3	Conexão entre a Probabilidade e o Teorema Binomial . . . . .	25
3.4	Exemplos práticos de Aplicações . . . . .	26

<b>4</b>	<b>O Teorema Multinomial e aplicações na Probabilidade</b>	<b>32</b>
4.1	Introdução . . . . .	32
4.2	O Teorema Multinomial . . . . .	32
4.3	Conexão entre o Teorema Multinomial e a probabilidade . . . . .	34
4.4	Exemplos Práticos de Aplicação . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>41</b>

A IMPORTÂNCIA de se aplicar os conceitos matemáticos na vida real com o intuito de tornar o ensino mais interessante e significativo desencadeia discussões de conectar temas estritamente teóricos com a prática e aplicações.

O docente, em sua prática cotidiana, busca estabelecer ligações entre o cotidiano e os conteúdos ensinados, visando criar um vínculo mais interessante e atraente para os educandos.

Nesse sentido, a conexão entre o Binômio de Newton e a Probabilidade é uma das aplicabilidades que podem ser feitas na matemática através de exemplos práticos encontrados no cotidiano.

Atualmente, há uma necessidade por parte dos docentes que atuam no Ensino Público de utilizar uma metodologia inovadora, com o intuito de proporcionar aos alunos do Ensino Médio um aprendizado mais significativo.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's): "Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo". Dessa forma, a contextualização dos conteúdos trabalhados com o cotidiano dos alunos é de extrema importância para um aprendizado mais interessante.

Com base nesse propósito, este trabalho consiste, basicamente em estabelecer conexões entre os conteúdos Binômio de Newton e Probabilidade com o intuito de utilizar exercícios contextualizados encontrados no cotidiano, com o objetivo de proporcionar ao aluno um aprendizado mais dinâmico, através da viabilização de uma prática diferenciada.

No capítulo 1 serão abordados conceitos básicos de Combinatória e definição, abrangendo também algumas propriedades dos Números Binomiais com suas respectivas demonstrações e exemplos. No intuito de tornar o aprendizado mais enriquecedor, serão mostradas algumas propriedades envolvendo o famoso triângulo aritmético de Pascal para um melhor entendimento e compreensão dos respectivos conteúdos que serão vistos posteriormente.

O capítulo 2 será destinado ao estudo da Probabilidade abrangendo conceitos básicos e propriedades inerentes que serão fundamentais para a sequência deste trabalho.

O capítulo 3 será dedicado à apresentação do Teorema Binomial com sua respectiva demonstração e posteriormente haverá uma abordagem estabelecendo uma conexão com cálculos de probabilidade, através de exemplos práticos contextualizados, os quais serão realizados com suas respectivas resoluções comentadas.

A proposta do capítulo 4 é utilizar o Teorema Binomial para obtenção do Teorema Multinomial, permitindo assim uma abordagem mais ampla, haja vista o fato de trabalhar com a possibilidade de ocorrência de três ou mais eventos considerando uma quantidade  $n$  de observações. Posteriormente, serão trabalhados alguns exemplos de questões contextualizadas cujas resoluções terão como base o teorema Multinomial.

Nas considerações finais deste trabalho, serão citados os principais pontos que merecem destaque, entre outros comentários pertinentes.

# CAPÍTULO 1

## COMBINATÓRIA E NÚMEROS BINOMIAIS

### 1.1 Breve Histórico

A O que tudo indica, foi a necessidade de calcular o número de possibilidades existentes nos resultados de jogos que incentivou o estudo dos métodos de contagem. A Análise Combinatória é uma consequência do desenvolvimento de métodos que permitem contar, de forma indireta, o número de elementos de um conjunto, estando esses agrupados sob certas condições.

Para uma melhor compreensão e estudo dos conceitos básicos da análise combinatória é de extrema importância destacar uma ferramenta de estudo imprescindível conhecida como fatorial. A operação fatorial é encontrada em muitas áreas da matemática como na álgebra e teoria dos números.

### 1.2 Fatorial

Chama-se fatorial de  $n$  e indica-se por  $n!$  o número natural definido por:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n \cdot (n - 1)! & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

**Exemplo 1.1.**

$$6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$$

### 1.3 O princípio fundamental da contagem

Supondo que uma sequência seja formada por  $j$  elementos  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_j)$ , onde:

- $a_1$  pode ser escolhido de  $n_1$  maneiras distintas;
- $a_2$  pode ser escolhido de  $n_2$  maneiras distintas, a partir de cada uma das escolhas anteriores;

- $a_3$  pode ser escolhido de  $n_3$  maneiras distintas, a partir de cada uma das escolhas anteriores;
- $a_j$  pode ser escolhido de  $n_j$  maneiras distintas, a partir de cada uma das escolhas anteriores.

Assim, o número de possibilidades para se obter a sequência  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_j)$  é dado por:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_j$$

Esse resultado é conhecido como Princípio Fundamental da Contagem (PFC) ou princípio multiplicativo.

**Exemplo 1.2.** *Um homem possui 4 ternos, 8 camisas e 5 pares de sapatos. De quantas maneiras distintas poderá ele vestir um terno, uma camisa e um par de sapatos?*

**Resolução:**

$a_1$  pode ser escolhido de 4 formas,  $a_2$  de 8 formas,  $a_3$  de 5 maneiras. Pelo PFC, o total de maneiras distintas é dado por

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3.$$

Portanto,  $4 \cdot 8 \cdot 5 = 160$ . Assim, o homem poderá vestir um terno, uma camisa e um par de sapatos de 160 maneiras distintas.

## 1.4 Agrupamentos simples

### 1.4.1 Permutações simples

Dado um conjunto com  $n$  objetos distintos, cada ordenação dos  $n$  objetos é chamada de uma permutação simples desses  $n$  objetos. O número total de permutações simples desses  $n$  objetos é representado por  $P_n$ , onde  $P_n = n!$ .

A demonstração a seguir será feita pelo método da indução matemática.

**Demonstração:**

Para provar a fórmula  $P_n = n!$  pelo método de indução matemática, deve-se verificar se é válida para  $n = 1$  e então se vale para um natural  $k$ , também será verificada para  $k + 1$ .

Para  $n = 1$  o resultado é óbvio uma vez que considerando apenas um objeto, só há uma possibilidade de posicioná-lo.

Assim,  $P_1 = 1! = 1$ . Portanto verifica-se que a fórmula vale para  $n = 1$ .

Considerando válida a proposição  $P_k = k!$  com  $k \geq 1$  e  $k \in \mathbb{N}$  deve-se mostrar que a proposição vale para  $k + 1$ .

Fixando um objeto na primeira posição entre os  $k + 1$  disponíveis, tem-se que existem  $k$  objetos restantes que serão permutados entre si. Dessa forma, ocorrem  $k!$  permutações com esse objeto fixo de acordo com a hipótese de indução. Assim, percorrendo as demais posições, tem-se também que o total de permutações tomando um elemento fixo em cada uma das  $k + 1$  posições é dado por  $k!$ .

Portanto, o total de permutações desses  $k + 1$  objetos será igual a  $(k + 1) \cdot k!$ . Conclui-se que  $P_{k+1} = (k + 1)!$ , confirmando a validade da fórmula para  $k + 1$ . Assim, a fórmula  $P_n = n!$  é válida  $\forall n \in \mathbb{N}$  com  $n \geq 1$ .

**Exemplo 1.3.** De quantas maneiras pode-se dispor cinco pessoas lado a lado em uma mesa de cinco lugares?

**Resolução:**

Tem-se que, pelo enunciado do problema, os agrupamentos formados serão obtidos trocando-se a ordem dos cinco elementos. Assim, tem-se:

$$P_n = n! \Rightarrow P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

## 1.4.2 Arranjos simples

Dado um conjunto com  $n$  elementos distintos, chama-se arranjo simples dos  $n$  elementos, tomados  $p$  a  $p$ , com  $n \geq p$ , cada agrupamento ordenado de  $p$  elementos distintos escolhidos entre os  $n$  existentes.

A quantidade de arranjos simples desses  $n$  elementos é obtida pela fórmula:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Será usada a fórmula equivalente  $A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-p+1)$  e a demonstração será feita através do método de indução matemática.

**Demonstração:**

Seja  $P_n$ : O número de arranjos simples de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$  é igual a  $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-p+1)$ .

Para  $p = 1$ , tem-se que  $A_{n,1} = n = (n-1+1)$ , ou seja, a proposição é válida para  $p = 1$ .

Supondo válida a proposição  $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-p+1)$  para  $1 < p < n$ , deve-se mostrar que a proposição é válida para  $p + 1$ , ou seja,  $A_{n,p+1} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-p)$ .

Ao escolher os arranjos de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ , acrescentando ao final de cada um deles um dos  $n - p$  elementos restantes, serão obtidos os arranjos de  $n$  elementos tomados  $p + 1$  a  $p + 1$ .

Além disso, os arranjos de  $n$  elementos, tomados  $p + 1$  a  $p + 1$  dessa forma são distintos e qualquer arranjo de  $n$  elementos tomados  $p + 1$  a  $p + 1$  figura entre estes.

Assim, conclui-se que o número de arranjos dos  $n$  elementos tomados  $p + 1$  a  $p + 1$  é  $A_{n,p} \cdot (n-p) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-p+1) \cdot (n-p)$ , e a proposição vale para  $p + 1$ .

Logo, por indução matemática,  $A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-p+1)$ , que é análoga a  $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ .



As permutações são um caso particular de arranjo, pois para  $p = n$ , tem-se que:

$$A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! = P_n.$$

**Exemplo 1.4.** Quantos números de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1,2,3,4,5 e 6?

**Resolução:**

Constata-se que é um caso de arranjo pelo fato da ordem de escolha dos elementos determinar agrupamentos distintos, assim, tem-se que  $p = 3$  e  $n = 6$ . Aplicando a fórmula do arranjo, vem:

$$\begin{aligned} A_{6,3} &= \frac{6!}{(6-3)!} \\ &= \frac{6!}{3!} \\ &= 120. \end{aligned}$$

Portanto, há um total de 120 números de três algarismos.

### 1.4.3 Combinações simples

Dado um conjunto com  $n$  elementos distintos, chama-se combinação simples dos  $n$  elementos, tomados  $p$  a  $p$ , com  $n \geq p$ , cada subconjunto formado por  $p$  elementos distintos escolhidos entre os  $n$  existentes. O total de combinações simples desses  $n$  elementos é dado pela fórmula que segue:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Por conveniência, será considerada a relação análoga:

$$C_{n,p} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}$$

**Demonstração:**

Seja  $P_n$  a proposição: O número de combinações de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$  é  $C_{n,p} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p}$ .

- Para  $p = 1$ , tem-se que  $C_{n,1} = m = \frac{m-1+1}{1}$ , tornando válida a proposição.

- Considerando válida a proposição  $P_n$  para  $p \geq 1$ , deve-se mostrar que também vale para  $p + 1$ , com  $1 < p < n$ , ou seja, para  $p + 1$ ,  $C_{n,p+1} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - p)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p \cdot (p + 1)}$ .

Ao escolher as combinações de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$  e acrescentando a cada uma delas, como o  $n + 1$ -ésimo elemento, um dos  $n - p$  elementos restantes, tomam-se assim todas as combinações dos  $n$  elementos tomados  $p + 1$  a  $p + 1$ .

Dessa maneira, serão contadas  $C_{n,p} \cdot (n - p)$  combinações.

Nesse caso, cada uma dessas combinações aparece  $n + 1$  vezes.

Daí, para contar o número correto de combinações de  $n$  elementos tomados  $p + 1$  a  $p + 1$ , basta realizar o cálculo  $C_{n,p} \cdot (n - p)$  e excluir os conjuntos contados a mais, ou seja, dividir  $C_{n,p} \cdot (n - p)$  por  $p + 1$ .

Logo, o total de combinações será dado por:

$$\begin{aligned} C_{n,p+1} &= \frac{C_{n,p} \cdot (n - p)}{p + 1} \\ &= \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - p)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p \cdot (p + 1)}. \end{aligned}$$

Assim, por indução matemática, a proposição também é válida para  $p + 1$ .

$$\text{Portanto, } C_{n,p} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - p + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p}.$$

Conclui-se que a relação  $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n - p)!}$  é válida.

**Exemplo 1.5.** *Quantas comissões compostas por 4 pessoas, escolhidas entre 7 podem ser formadas?*

**Resolução:**

*Constata-se que é um caso de combinação pelo fato da ordem de escolha dos elementos determinar os mesmos subconjuntos.*

*Assim, tem-se que  $p = 4$  e  $n = 7$ .*

*Aplicando a fórmula da combinação, vem:*

$$\begin{aligned} C_{7,4} &= \frac{7!}{4!(7 - 4)!} \\ &= \frac{7!}{4!3!} \\ &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 3 \cdot 2} \\ &= 35. \end{aligned}$$

*Portanto, há um total de 35 comissões que podem ser formadas.*

## 1.5 Números binomiais

Um número binomial, também chamado de coeficiente binomial,  $n$  sobre  $k$ , com  $n \geq k$  e  $n, k \in \mathbb{N}$ , consiste no total de combinações de  $n$  elementos tomados  $k$  a  $k$  e é simbolizado por  $\binom{n}{k}$ , onde  $n$  é também chamado de numerador e  $k$ , de denominador.

Assim,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

**Exemplo 1.6.**

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10.$$

## 1.6 Triângulo Aritmético de Pascal

Os coeficientes binomiais podem ser dispostos em uma tabela, chamada de triângulo aritmético ou triângulo de Pascal.

O nome deste triângulo é uma homenagem ao físico e matemático francês Blaise Pascal (1623 - 1662) devido ao fato dele ter descoberto a maioria de suas propriedades e relações.

Neste triângulo, os coeficientes binomiais de mesmo numerador ocupam a mesma linha e os de mesmo denominador ocupam a mesma coluna. Assim, a linha  $k$  representa todos os coeficientes desde  $\binom{k}{0}$  até  $\binom{k}{k}$ .

Abaixo está representado o triângulo aritmético de Pascal com os respectivos coeficientes binomiais:

Linha 0

$$\binom{0}{0}$$

Linha 1

$$\binom{1}{0} \binom{1}{1}$$

Linha 2

$$\binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2}$$

Linha 3

$$\binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3}$$

Linha 4

$$\binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4}$$

...

Linha  $n$

$$\binom{n}{0} \binom{n}{1} \binom{n}{2} \cdots \binom{n}{n-1} \binom{n}{n}$$

Existem algumas propriedades inerentes ao triângulo aritmético de Pascal que são importantes para a sua construção pois permitem determinar os coeficientes binomiais sem a necessidade de calcular todos eles. Abaixo seguem algumas dessas propriedades:

1. Toda linha começa e termina por 1

**Demonstração:**

Os coeficientes binomiais que iniciam cada linha são do tipo

$$\binom{p}{0} = \frac{p!}{0!p!} = 1, \forall p \in \mathbb{N}$$

2. Em uma mesma linha, os coeficientes binomiais equidistantes dos extremos são iguais.

**Demonstração:**

Sejam  $\binom{n}{p}$  e  $\binom{n}{n-p}$  dois números binomiais equidistantes dos extremos, situados na linha  $n$  do triângulo de Pascal. Nota-se que  $\binom{n}{p}$  é precedido de  $p$  termos:  $\binom{n}{0}\binom{n}{1}\dots\binom{n}{p-1}$  e que  $\binom{n}{n-p}$  é sucedido de  $p$  termos:  $\binom{n}{n-p+1}\binom{n}{n-p+2}\dots\binom{n}{n}$ .

Assim,

$$\begin{aligned} \binom{n}{p} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{[n-(n-p)]!(n-p)!} \\ &= \binom{n}{n-p}. \end{aligned}$$

3. A partir da linha 2 do triângulo aritmético, cada número binomial  $p$ , excluindo o primeiro, é dado pela soma dos dois binomiais consecutivos da linha anterior, cujo último encontra-se acima de  $p$ . (Relação de Stifel)

Esta propriedade ficou conhecida como relação de Stifel.<sup>1</sup> Sintetizando tal relação, tem-se que:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

---

<sup>1</sup> Matemático alemão Michael Stifel que viveu entre 1.487 e 1.567.

**Demonstração:**

$$\begin{aligned}
 \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\
 &= \frac{(k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
 &= \frac{[k + (n-k)](n-1)!}{k!(n-k)!} \\
 &= \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
 &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
 &= \binom{n}{k}.
 \end{aligned}$$

4. Soma dos binomiais em uma mesma linha.

Retomando os binomiais no triângulo aritmético, observa-se que:

Linha 0

$$\binom{0}{0} = 1 = 2^0$$

Linha 1

$$\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2 = 2^1$$

Linha 2

$$\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 4 = 2^2$$

Linha 3

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 8 = 2^3$$

$$\vdots + \vdots + \vdots + \vdots + \vdots$$

Linha n

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n-1}{n} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Assim sendo, em uma mesma linha  $n$ , a soma dos números binomiais resulta em  $2^n, n \in \mathbb{N}$ .



## 2.1 História da Probabilidade

O INTERESSE do homem em estudar os fenômenos que envolviam determinadas possibilidades fez surgir a probabilidade. Indícios mostram que o surgimento da teoria das probabilidades teve início com os jogos de azar disseminados na Idade Média. Esse tipo de jogo é comumente praticado através de apostas. Na ocasião o jogo era utilizado no intuito de antecipar o futuro.

O desenvolvimento das referidas teorias e os avanços dos cálculos probabilísticos devem ser atribuídos a vários matemáticos. Atribui-se aos algebristas italianos Pacioli, Cardano, Tartaglia (séc XVI) as primeiras considerações matemáticas acerca dos jogos e das apostas. Através de estudos aprofundados, outros matemáticos contribuíram para a sintetização de uma ferramenta muito utilizada cotidianamente.

Cardano foi o primeiro a introduzir técnicas de Combinatória para calcular a quantidade de possibilidades favoráveis em um evento aleatório e, assim, poder calcular a probabilidade da ocorrência de tal evento. Em sua obra intitulada *Liber de ludo aleae* ("O livro dos jogos de azar"), pela primeira vez na história da matemática, foi introduzida a noção de probabilidade (em jogos de azar) com aceitável objetividade.

Cardano também estabeleceu resultados como o que segue: "A probabilidade de que um evento cuja probabilidade é  $p$  ocorra independentemente  $n$  vezes é  $p^n$ ". Por exemplo, como no lançamento de uma moeda a probabilidade de dar coroa é  $\frac{1}{2}$ , em  $n$  lançamentos consecutivos da mesma moeda é  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

Os alicerces da teoria do cálculo das probabilidades e da análise combinatória foram estabelecidos por Pascal e Fermat, marcando o início da teoria das probabilidades como ciência.

As contribuições de Bernoulli enfatizaram os grandes números, abordando as combinações, permutações e a classificação binomial. Laplace formulou a regra de sucessão e Gauss estabelecia o método dos mínimos quadrados e a lei das distribuições de probabilidades.



## 2.2 Conceitos iniciais

A noção primitiva de experimento probabilístico requer pouca elaboração além da apresentação de alguns exemplos simples representativos, tais como:

- (1) Observar a face voltada para cima após cada lançamento de um dado.
- (2) Lançar uma moeda e verificar o resultado do lançamento.

Tais experimentos acima descritos são obviamente idealizados pelo fato de apresentar um conjunto conhecido de resultados. No caso do exemplo 2, dois são os resultados possíveis - cara ou coroa. Porém, outros resultados, tais como a moeda cair em pé ou rolar indefinidamente, por exemplo, são possibilidades físicas de um experimento real, mas não no caso de um experimento ideal.

O conjunto de resultados possíveis de um experimento probabilístico ideal é denominado espaço amostral e é usualmente denotado por  $\Omega$ , onde seus elementos são conhecidos como eventos elementares. No exemplo 1 anterior, o espaço amostral é de fácil percepção, sendo dado por  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Um evento probabilístico, ou simplesmente evento, é um subconjunto de um espaço amostral  $\Omega$ .

Ainda com relação ao exemplo 1 anterior, o evento correspondente à ocorrência de um número primo na face voltada para cima é dado por  $E = \{2, 3, 5\}$ , ou seja,  $E$  ocorre se e só se uma das faces 2, 3 ou 5 ocorre.

## 2.3 Álgebras de eventos

O objetivo básico da Teoria das Probabilidades consiste em atribuir a cada evento  $E \subseteq \Omega$  um número que corresponda à noção intuitiva de probabilidade de ocorrência do evento  $E$ , que será apresentada mais adiante ainda neste capítulo.

Infelizmente, se for adotado o ponto de vista segundo o qual todo e qualquer subconjunto do espaço amostral é um evento, não será possível cumprir este objetivo de maneira satisfatória.

No intuito de contornar essa dificuldade, que é de natureza essencialmente técnica, faz-se necessário restringir um pouco essa classe de eventos admissíveis.

**Definição 2.1.** *Uma classe não vazia  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  é uma álgebra se  $\mathcal{A}$  é fechada por complementos e uniões finitas.*



Nota-se que não há necessidade de exigir que  $\mathcal{A}$  seja fechada por interseções finitas, uma vez que tal fato é uma consequência das chamadas leis de De Morgan.

Se  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  então  $A_1^c, A_2^c, \dots, A_n^c \in \mathcal{A}$ , pois  $\mathcal{A}$  é fechada por complementos. Logo  $A_1^c \cup A_2^c \cup \dots \cup A_n^c \in \mathcal{A}$ , pois  $\mathcal{A}$  é fechada por uniões finitas; em particular:

$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = (A_1^c \cup A_2^c \cup \dots \cup A_n^c)^c$  também pertence a  $\mathcal{A}$ , pois, novamente,  $\mathcal{A}$  é fechada por complementos.

### 2.3.1 $\sigma$ - Álgebra de Eventos

**Definição 2.2.** Uma classe não-vazia  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  é uma  $\sigma$  - álgebra de as seguintes condições são satisfeitas:

- (1)  $\emptyset \in \mathcal{A}$
- (2) Se  $A \in \mathcal{A}$ , então  $A^c \in \mathcal{A}$ .
- (3) Se  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}$  então  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ .

Assim, uma  $\sigma$  - álgebra é uma classe de conjuntos que é fechada por complementos e uniões enumeráveis.

## 2.4 Definição de probabilidade

Para definir probabilidade, deve-se, basicamente, atribuir a cada evento do espaço amostral  $\Omega$  (ou pelo menos a cada evento pertencente a uma  $\sigma$  - álgebra  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ) um número que corresponda intuitivamente às chances de que este evento ocorra.

**Definição 2.3.** Um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  consiste de um espaço amostral  $\Omega$ , uma  $\sigma$  - álgebra de eventos  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  e uma medida de probabilidade  $P: \mathcal{A} \rightarrow [0,1]$  com as seguintes propriedades:

- (1)  $P(\Omega) = 1$
- (2) Dada uma sequência  $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$  de eventos  $E_n \in \mathcal{A}$  mutuamente exclusivos (ou seja, tais que  $E_i \cap E_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ ), tem-se:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n).$$

### 2.4.1 Consequências da definição

Pode-se obter algumas consequências imediatas dos axiomas vistos anteriormente. Assim, num espaço de probabilidade qualquer  $(\Omega, \sigma, P)$ , valem as seguintes propriedades.

- (1) Se  $E \in \mathcal{A}$ , então  $P(E^c) = 1 - P(E)$ .

- (2) Se  $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots, E_n \in \mathcal{A}$  são eventos mutuamente exclusivos, então  $P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_n)$ .
- (3) Se  $A \subseteq B$  são eventos em  $\mathcal{A}$ , então  $P(A) \leq P(B)$ .
- (4) Se  $A, B \in \mathcal{A}$ , então  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

Considerado um experimento aleatório de um espaço amostral  $\Omega$ , tem-se que o conjunto vazio  $\emptyset$  e o próprio espaço amostral são subconjuntos de  $\Omega$ , ou seja, são eventos desse experimento, denominados, respectivamente, evento impossível e evento certo.

## 2.5 Experimentos equiprováveis

**Definição 2.4.** Um experimento aleatório é dito equiprovável quando todos os resultados possíveis têm a mesma probabilidade de ocorrência.

**Exemplo 2.1.** Considerando o lançamento de um dado não viciado, isto é, sem favorecimento para nenhuma das faces, espera-se que, repetindo-se o experimento uma quantidade grande de vezes, a quantidade de ocorrência para cada uma de suas faces seja muito próxima da igualdade, de modo que

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}).$$

Portanto, esse experimento é equiprovável.

### 2.5.1 Evento unitário

É dado um experimento aleatório equiprovável, com espaço amostral  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}$ .

Pela definição, tem-se que:  $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = P(\{\omega_3\}) = \dots = P(\{\omega_n\})$

Denotando por  $p$  a probabilidade de cada evento unitário  $\{\omega_i\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\text{vem: } \underbrace{p + p + p + \dots + p}_{n \text{ parcelas}} = 1 \Rightarrow n \cdot p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{n}$$

$$\text{Portanto, } P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n} \text{ com } i \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \leq i \leq n.$$

### 2.5.2 Probabilidade de um evento ocorrer

Seja  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}$ , um espaço amostral finito. Considerando um espaço amostral equiprovável, tem-se que:  $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = P(\{\omega_3\}) = \dots = P(\{\omega_n\})$ .

Fazendo  $P(\{\omega_1\}) = p_1$ ,  $P(\{\omega_2\}) = p_2$ , e assim sucessivamente, pode-se escrever:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1.$$

Considerando  $E$  um evento de  $\Omega$ , formado por  $r$  elementos ( $r \leq n$ ), isto é:

$$E = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_r\}.$$

$$\text{Daí, } P(E) = p_1 + p_2 + \dots + p_r.$$

Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned} p(E) &= \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{r \text{ vezes}} \\ &= \frac{r}{n} \\ &= \frac{n(E)}{n(\Omega)}. \end{aligned}$$

**Exemplo 2.2.** Uma comissão é formada por três pessoas, escolhidas entre seis, incluindo Marta. Qual é a probabilidade de se escolher, ao acaso, uma comissão na qual Marta faz parte?

**Resolução:**

Para obter a quantidade de elementos do espaço amostral, deve-se calcular a combinação simples de três elementos, tomados 3 a 3, escolhidos dentre seis elementos, uma vez que a ordem de escolha não importa.

Assim,

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3 \cdot 2} = 20.$$

Logo,  $n(\Omega) = 20$ .

O evento  $E$  é composto pelas comissões que incluem Marta, ou seja, deve-se escolher 2 elementos (pessoas) dentre um total de 5, considerando que Marta já faz parte. Equivale a obter a combinação de 5 elementos, tomados 2 a 2.

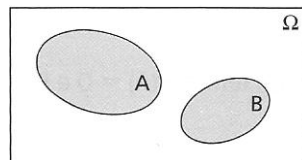
Logo,

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} = 10.$$

Portanto,  $P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ .

## 2.6 Probabilidade da união de dois eventos

Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos de um espaço amostral  $\Omega$  finito, não vazio e equiprovável. A probabilidade da união desses eventos é dada por:



(1) Se  $A \cap B = \emptyset$ .

Nesse caso, tem-se que:  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ . Como  $n(\Omega) \neq 0$ , pode-se escrever:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)}.$$

Portanto,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

A e B, nesse caso, são chamados de eventos mutuamente exclusivos.

**Exemplo 2.3.** Determinar a probabilidade de se obter, ao acaso, no lançamento de um dado, um número primo ou um número múltiplo de 4.

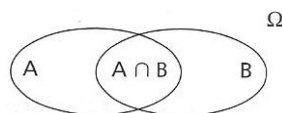
**Resolução:**

O espaço amostral, nesse caso, é dado por:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  O evento A (obtenção de um número primo) é dado por:  $A = \{2, 3, 5\}$  O evento B (retirada de um número múltiplo de 4) é dado por:  $B = \{4\}$ . Temos, portanto, que  $A \cap B = \emptyset$ , logo  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ .

Assim,

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= p(A) + p(B) \\ &= \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} \\ &= \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{4}{6} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(2)  $A \cap B \neq \emptyset$ .



Da teoria dos conjuntos, tem-se que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Dividindo a expressão acima por  $n(\Omega) \neq 0$ , vem:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}.$$

Daí,

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

**Exemplo 2.4.** Em uma caixa, há bolas numeradas de 1 a 30. Qual é a probabilidade de se retirar, ao acaso, uma bola contendo um número par ou um número múltiplo de 5?

**Resolução:**

O espaço amostral, nesse caso, é dado por:  $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 29, 30\}$ . O evento  $A$  (obtenção de um número par) é dado por:  $A = \{2, 4, 6, \dots, 28, 30\}$ , ou seja,  $n(A) = 15$ .

O evento  $B$  (obtenção de um número múltiplo de 5) é dado por:  $B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ . Assim,  $n(B) = 6$ .

Ocorre que existe o evento  $A \cap B$  (retirada de um número par e múltiplo de 5) dado por  $A \cap B = \{10, 20, 30\}$ . Tem-se que  $n(A \cap B) = 3$ .

Portanto,

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - p(A \cap B). \\ &= \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}. \\ &= \frac{15}{30} + \frac{6}{30} - \frac{3}{30}. \\ &= \frac{18}{30}. \\ &= \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

## 2.7 Probabilidade condicional

Considera-se um espaço amostral  $\Omega$  finito e não vazio, e sejam  $A$  e  $B$  eventos quaisquer desse espaço amostral.

A probabilidade condicional do evento  $A$ , sabendo que ocorreu o evento  $B$  é indicada por  $p(A/B)$  e dada por:

$$p(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}.$$

Dividindo o numerador e o denominador da expressão acima por  $n(\Omega)$ , tem-se que:

$$p(A/B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}}.$$

Portanto,

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

**Exemplo 2.5.** Lança-se uma moeda não viciada três vezes seguidas. Sabendo que foi obtido cara no segundo lançamento, qual é a probabilidade de ocorrência de exatamente duas caras?

**Resolução:**

O espaço amostral  $\Omega$  anterior à condição imposta era composto por:  $\{CCC, CCK, CKC, KCC, CKK, KCK, KKC, KKK\}$ .

No entanto, o evento  $B$  (ocorrência de exatamente duas caras), está condicionado à ocorrência do evento  $A$  (aparecimento de cara no segundo lançamento).

Tem-se portanto que as combinações em que aparecem cara no segundo lançamento são:  $\{CCC, CCK, KCC, KCK\}$ .

Assim,  $n(A) = 4$ .

O evento  $B$  será então composto por:  $\{CCK, KCC\}$ . Logo,  $n(A \cap B) = 2$  Daí:

$$\begin{aligned} p(A/B) &= \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \\ &= \frac{2}{4} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

## 2.8 Eventos Independentes

Sejam  $\Omega$  um espaço amostral finito e não vazio, e  $A$  e  $B$  eventos quaisquer desse espaço amostral. De acordo com o que foi visto na seção anterior, a probabilidade condicional do evento  $A$ , sabendo que ocorreu o evento  $B$ , é indicada por  $p(A/B)$  e dada por:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Assim, decorre que:

$$p(A \cap B) = p(A/B) \cdot p(B).$$

De um modo geral, ocorre que  $p(A/B) = p(A)$  pois o fato de ter ocorrido o evento  $B$  não altera a probabilidade de ocorrência do evento  $A$ . Nesse caso,  $A$  e  $B$  são considerados eventos independentes.

Portanto, vale a relação:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B).$$

Generalizando, sendo  $A_1, A_2, \dots, A_n$  eventos independentes, tem-se:

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot \dots \cdot p(A_n).$$

**Exemplo 2.6.** A probabilidade de um atirador  $A$  acertar um alvo é de 60 % e a probabilidade de um atirador  $B$  acertar o mesmo alvo é de 90 % . Se os dois atirarem uma vez, qual é a probabilidade de que pelo menos um atinja o alvo?

**Resolução:**

Sabe-se que, pelo enunciado do problema, tem-se que há três possibilidades:

(1) O atirador  $A$  acerta e o atirador  $B$  erra. Nesse caso, a probabilidade é dada por:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)}.$$

$$\begin{aligned}
 p_1 &= p(A) \cdot p(\bar{B}). \\
 &= \frac{60}{100} \cdot \frac{10}{100}. \\
 &= \frac{3}{50}.
 \end{aligned}$$

(2) O atirador A erra e o atirador B acerta. Tem-se, portanto, que a probabilidade é dada por:

$$\begin{aligned}
 p_2 &= p(\bar{A}) \cdot p(B). \\
 &= \frac{40}{100} \cdot \frac{90}{100}. \\
 &= \frac{18}{50}.
 \end{aligned}$$

(3) Os atiradores A e B acertam. A probabilidade, nesse caso, é dada por:

$$\begin{aligned}
 p_3 &= p(A) \cdot p(B). \\
 &= \frac{60}{100} \cdot \frac{90}{100}. \\
 &= \frac{27}{50}.
 \end{aligned}$$

Unindo os três casos, tem-se que a probabilidade de que pelo menos um atirador acerte o alvo é dada por:

$$\begin{aligned}
 p_1 + p_2 + p_3 &= \frac{3}{50} + \frac{18}{50} + \frac{27}{50}. \\
 &= \frac{48}{50}. \\
 &= \frac{96}{100}.
 \end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade será igual a 96 %.

## 2.9 Probabilidade do evento complementar

Se A é um evento de  $\Omega$ , então  $p(A) = 1 - p(\bar{A})$ , onde  $\bar{A}$  é o evento complementar de A.

Nesse caso,  $n(A) + n(\bar{A}) = n(\Omega)$ .

Dividindo-se ambos os membros da relação por  $n(\Omega)$ , tem-se:

$$\frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)}.$$

Assim,

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1.$$

Portanto, a probabilidade de ocorrência do evento complementar de um certo evento A é dada por:

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A).$$

**Exemplo 2.7.** Uma urna contém 40 bolas, sendo 15 amarelas e o restante vermelhas. Duas bolas serão retiradas sem reposição. Determinar a probabilidade de se retirar pelo menos uma bola amarela.

**Resolução:**

Existem a possibilidade de retirada de uma bola amarela, duas bolas ou nenhuma bola amarela nas condições acima descritas.

Assim, o evento  $\bar{A}$  é o evento retirada de nenhuma bola amarela, que é, de fato, o complementar de  $A$ .

Daí, o evento  $A$  é o evento retirada de pelo menos uma bola amarela.

Assim,

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}).$$

A probabilidade de não ser retirada uma bola amarela é justamente a probabilidade da bola retirada ser vermelha.

A probabilidade de se retirar duas bolas vermelhas é dada por  $p(\bar{A}) = p(1) \cdot p(2)$ , onde  $p(1)$  e  $p(2)$  são as probabilidades de retirada da primeira e segunda bola vermelhas, respectivamente.

Assim,

$$p(\bar{A}) = \frac{25}{40} \cdot \frac{24}{39}.$$

Portanto,

$$p(\bar{A}) = \frac{5}{13}.$$

A probabilidade de se retirar pelo menos uma bola amarela será dada por:

$$\begin{aligned} p(A) &= 1 - p(\bar{A}) \\ &= 1 - \frac{5}{13} \\ &= \frac{8}{13}. \end{aligned}$$



## CAPÍTULO 3

# TEOREMA BINOMIAL E APLICAÇÕES NA PROBABILIDADE

### 3.1 Breve Histórico

O TERMO Binômio de Newton na matemática é dedicado ao grande cientista inglês Isaac Newton, também físico e matemático, nascido em Woolsthorpe Manor, localizado na Grã-Bretanha.

Entretanto, deve-se ressaltar que tal conteúdo não foi o objeto de estudos por parte do cientista, uma vez que ele estudou as regras que valem para  $(a + b)^n$  quando o expoente  $n$  é fracionário ou inteiro negativo. Nesse último caso, desencadeou no estudo das séries infinitas (cálculo infinitesimal).

Na verdade, diversos foram os matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento do teorema Binomial com expoente natural. Casos especiais já eram conhecidos desde o século 4 a.C. O matemático grego Euclides já mencionara caso especial do teorema para expoente 2.

Os coeficientes binomiais, como quantidades combinatórias que expressam o número de maneiras de selecionar  $k$  objetos de  $n$  sem substituição eram de interesse para os hindus antigos.

O teorema binomial como tal pode ser encontrado no trabalho do matemático persa do século XI Al-Karaji, que descreveu o padrão triangular dos coeficientes binomiais e também forneceu uma prova matemática do teorema binomial e triângulo de Pascal usando uma forma primitiva de indução matemática.

### 3.2 Binômio de Newton

O desenvolvimento de potências com expoente natural de um binômio é conhecido como Binômio de Newton ou Teorema Binomial. Dessa forma, pode-se desenvolver expressões do tipo  $(x + a)^n$ , com  $n$  natural. Assim, fazendo  $n$  variar, obtém-se:

- Para  $n = 0$ , tem-se que:

$$(x + a)^0 = 1.$$

- Para  $n = 1$ , tem-se que:

$$(x + a)^1 = 1x + 1a.$$

- Para  $n = 2$ , tem-se que:

$$(x + a)^2 = 1x^2 + 2xa + 1a^2.$$

- Para  $n = 3$ , tem-se que:

$$(x + a)^3 = 1x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + 1a^3.$$

- Para  $n = 4$ , tem-se que:

$$(x + a)^4 = 1x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + 1a^4.$$

Nota-se que neste desenvolvimento os coeficientes dos respectivos termos são os números binomiais cujas linhas representam o expoente do binômio correspondentes, ou seja, essas linhas são exatamente as do triângulo de Pascal, conteúdo estudado no primeiro capítulo deste trabalho.

Portanto, pode-se reescrever o desenvolvimento da seguinte maneira:

- Para  $n = 0$ , tem-se que:

$$(x + a)^0 = \binom{0}{0} x^0 a^0.$$

- Para  $n = 1$ , tem-se que:

$$(x + a)^1 = \binom{1}{0} x^1 a^0 + \binom{1}{1} x^0 a^1.$$

- Para  $n = 2$ , tem-se que:

$$(x + a)^2 = \binom{2}{0} x^2 a^0 + \binom{2}{1} x^1 a^1 + \binom{2}{2} x^0 a^2.$$

- Para  $n = 3$ , tem-se que:

$$(x + a)^3 = \binom{3}{0} x^3 a^0 + \binom{3}{1} x^2 a^1 + \binom{3}{2} x^1 a^2 + \binom{3}{3} x^0 a^3.$$

- Para  $n = 4$ , tem-se que:

$$(x + a)^4 = \binom{4}{0} x^4 a^0 + \binom{4}{1} x^3 a^1 + \binom{4}{2} x^2 a^2 + \binom{4}{3} x^1 a^3 + \binom{4}{4} x^0 a^4.$$

Devem ser consideradas algumas importantes observações:

- O desenvolvimento de  $(x + a)^n$  apresenta  $(n + 1)$  termos.
- Os expoentes de  $x$  decrescem de  $n$  até 0 e os expoentes de  $a$  crescem de 0 até  $n$ .
- Cada expoente de  $x$  é igual à diferença entre o numerador e o denominador do coeficiente (número binomial) correspondente e cada expoente de  $a$  é igual ao respectivo denominador do número binomial correspondente.
- A soma dos expoentes das variáveis, em cada termo, é sempre  $n$ .

Dessa forma, pode-se escrever a **forma canônica do Teorema Binomial** da seguinte forma:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^n a^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \dots + \binom{n}{n-1}x^1 a^{n-1} + \binom{n}{n}x^0 a^n.$$

É possível, entretanto, abreviar, escrevendo o Teorema Binomial da seguinte maneira:

$$(x + a)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} a^i.$$

### Demonstração:

Utilizando indução em  $n$ , e fazendo  $n = 0$ , vem:  $(x + a)^0 = \binom{0}{0}x^0 y^0 = 1$ , ou seja, a igualdade é satisfeita para  $n = 0$ .

Para  $n = 1$ , tem-se:  $(x + a)^1 = \binom{1}{0}x^1 a^0 + \binom{1}{1}x^0 a^1 = x + a$ .

Portanto a igualdade é válida para  $n = 1$ .

Seja  $n$  um inteiro maior ou igual a 1, deve-se mostrar que a relação vale também para  $n + 1$ .

Pela Hipótese de indução, tem-se:

$$(x + a)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} a^i.$$

Para  $n + 1$ , vem:

$$(x + a)^{n+1} = (x + a) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} a^i.$$

Usando distributiva do produto em relação à soma, tem-se:

$$(x + a)^{n+1} = x^{n+1} + x \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} x^{n-i} a^i + a \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} x^{n-i} a^i + a^{n+1}.$$

Reescrevendo:

$$(x + a)^{n+1} = x^{n+1} + x \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} x^{n-i} a^i + a \sum_{i=1}^n \binom{n}{i-1} x^{n-i+1} a^{i-1} + a^{n+1}.$$

Que é equivalente a:

$$(x + a)^{n+1} = x^{n+1} + \sum_{i=1}^n \left[ \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right] x^{n-i+1} a^i + a^{n+1}.$$

Pela Relação de Stifel, vem:

$$(x + a)^{n+1} = x^{n+1} + \sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} x^{n-i+1} a^i + a^{n+1}.$$

Arrumando e reescrevendo o somatório, tem-se:

$$(x + a)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} x^{n+1-i} a^i.$$

Portanto, a relação também é válida para  $n + 1$ .

### 3.3 Conexão entre a Probabilidade e o Teorema Binomial

O Teorema Binomial pode ser utilizado em conexão com cálculos de probabilidade envolvendo dois eventos mutuamente exclusivos onde não importa a ordem de ocorrência de tais eventos. O Teorema Binomial, conforme visto anteriormente, é dado por:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} x^n a^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} a^1 + \dots + \binom{n}{n-1} x^1 a^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 a^n,$$

Verifica-se para  $n = 3$  a seguinte configuração:

$$(x + a)^3 = \binom{3}{0} x^3 a^0 + \binom{3}{1} x^2 a^1 + \binom{3}{2} x^1 a^2 + \binom{3}{3} x^0 a^3$$

Percebe-se que há 4 possibilidades distintas considerando  $n = 3$ . Se, por exemplo, fosse lançado um dado 3 vezes,  $x$  fosse considerado o evento retirada da face 6, e  $a$  fosse considerado o evento complementar de  $x$ , os termos do desenvolvimento acima poderiam ser descritos através da tabela abaixo, onde a ocorrência da face 6 seria considerada como sucesso e sua não ocorrência (evento complementar) seria considerada como um fracasso.

Sucessos	Fracassos	Probabilidade
0	3	$1a^3$
1	2	$3x^1a^2$
2	1	$3x^2a^1$
3	0	$1x^3$

Conforme visto no Capítulo 1, a soma dos binomiais de cada linha  $n$  é dada por  $2^n$ .

Assim, tem-se, para este caso ( $n = 3$ ),  $2^3 = 8$ . Verifica-se, portanto, que são 8 possíveis combinações: SSS, FSS, SFS, SSF, FFS, FSE, SFF, FFF.

Cada terna é considerada uma possibilidade de ocorrência, e como os eventos são independentes, a probabilidade de ocorrência, seja um sucesso ou um fracasso de cada terna, será dada pelo produto das probabilidades parciais.

Tem-se, portanto, que há 4 grupos distintos de combinações ( $S^3, S^2F^1, S^1F^2eF^3$ ), onde há  $\binom{3}{0}$  quantidades do tipo  $S^3$ ,  $\binom{3}{1}$  do tipo  $S^2F^1$ ,  $\binom{3}{2}$  do tipo  $S^1F^2$  e  $\binom{3}{3}$  do tipo  $F^3$ .

Pode-se então escrever o Método Binomial por meio de uma função de probabilidade, onde são observadas ocorrências de um evento  $k$  vezes, através da expressão abaixo:

$$p(X = k) = \binom{n}{n-k} x^k a^{n-k}.$$

Os binomiais do tipo  $\binom{n}{n-k}$  representam as quantidades de combinações de  $n$  elementos tomados  $n-k$  a  $n-k$ , sendo  $k$  a quantidade de elementos do primeiro evento considerado e  $(n-k)$  a quantidade de elementos do evento complementar.

O desenvolvimento binomial para esta situação é dado por:

$$(S + F)^3 = \binom{3}{0} S^3 F^0 + \binom{3}{1} S^2 F^1 + \binom{3}{2} S^1 F^2 + \binom{3}{3} S^0 F^3.$$

Assim, considerando esse exemplo, tem-se:

$x =$  probabilidade de retirada um seis (Sucesso)  $= \frac{1}{6}$ ;

$a =$  probabilidade da não retirada de um seis (Fracasso)  $= \frac{5}{6}$ .

Para uma suposta retirada de apenas um seis ( $k = 1$ ) em três ( $n = 3$ ) lançamentos do dado, tem-se a seguinte probabilidade:

$$p(X = 1) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2.$$

Logo,

$$p(X = 1) = \frac{75}{216}.$$

Salienta-se que esta fórmula coincide com o cálculo do terceiro termo do desenvolvimento visto acima substituindo-se os respectivos valores.

A seção a seguir será destinada a exemplos práticos de exercícios envolvendo esses cálculos de probabilidade de ocorrência de eventos em que tais eventos são mutuamente exclusivos, considerando também o fato de não importar a ordem de acontecimento deles.

### 3.4 Exemplos práticos de Aplicações

**Exemplo 3.1.** *A probabilidade de um saltador atingir seu objetivo em um campeonato mundial é de 40 % em cada salto. Considere que ele efetuou 3 saltos.*

**Resolução:**

*Considerando que o saltador atinge ou não o seu objetivo, os eventos dados são mutuamente exclusivos.*

Denota-se por  $p$  a probabilidade do saltador atingir seu objetivo e  $q$  a probabilidade dele não atingir (evento complementar).

Tem-se que  $p = 40\% = 0,4$  e, como  $q = 1 - p$ ,  $q = 1 - 0,4 = 0,6$ .

Além disso,  $n = 3$ .

Há 4 situações possíveis nesse caso:

1. O saltador atinge nos 3 saltos o seu objetivo.
2. O saltador atinge o seu objetivo em dois saltos.
3. O saltador atinge o seu objetivo em apenas um salto.
4. O saltador não atinge, em nenhum dos 3 saltos, o seu objetivo.

Do teorema binomial, tem-se:

$$(p + q)^3 = \binom{3}{0} p^3 q^0 + \binom{3}{1} p^2 q^1 + \binom{3}{2} p^1 q^2 + \binom{3}{3} p^0 q^3.$$

1. Esta situação é representada pelo primeiro termo do desenvolvimento acima. Dessa forma, tem-se que  $k = 3$  e  $(n - k) = 0$ . Substituindo, vem:

$$\binom{3}{0} (0,4)^3 (0,6)^0 = 0,064 = 6,4\%.$$

2. Esta situação é representada pelo segundo termo do desenvolvimento acima. Dessa forma, tem-se que  $k = 2$  e  $(n - k) = 1$ . Substituindo, vem:

$$\binom{3}{1} (0,4)^2 (0,6)^1 = 0,288 = 28,8\%.$$

3. Esta situação é representada pelo terceiro termo do desenvolvimento acima. Dessa forma, tem-se que  $k = 1$  e  $(n - k) = 2$ . Substituindo, vem:

$$\binom{3}{2} (0,4)^1 (0,6)^2 = 0,432 = 43,2\%.$$

4. Esta situação é representada pelo quarto termo do desenvolvimento acima. Dessa forma, tem-se que  $k = 0$  e  $(n - k) = 3$ . Substituindo, vem:

$$\binom{3}{3} (0,4)^0 (0,6)^3 = 0,216 = 21,6\%.$$

Nota-se, portanto que a probabilidade total será dada por:

$$(6,4 + 28,8 + 43,2 + 21,6)\% = 100\% = 1.$$

**Exemplo 3.2.** Uma moeda não viciada é lançada 4 vezes e observa-se o número correspondente à face voltada para cima. Obtenha a probabilidade de ocorrência de exatamente duas caras.

**Resolução:**

Denotando por  $c$  a probabilidade de se obter cara em um lançamento e por  $q$  a probabilidade de se obter coroa, o desenvolvimento binomial para  $n = 4$  será dado por:

$$(c + q)^4 = \binom{4}{0}c^4q^0 + \binom{4}{1}c^3q^1 + \binom{4}{2}c^2q^2 + \binom{4}{3}c^1q^3 + \binom{4}{4}c^0q^4.$$

Cada termo neste desenvolvimento representa o cálculo da probabilidade de ocorrência de tantas caras e coroas de tal forma que sua soma resulte em 4.

Assim, a probabilidade de se obter exatamente 2 caras é dada calculando-se o valor do terceiro termo. Nesse caso, tem-se 2 caras e 2 coroas.

A probabilidade de sair cara ou coroa é a mesma:  $c = q = \frac{1}{2}$ .

Substituindo  $c$  e  $q$  no termo de ordem 3, tem-se:

$$\binom{4}{2}c^2q^2.$$

Assim,

$$p = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Portanto,

$$p = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

Assim, a probabilidade de ocorrência de exatamente duas caras em 4 lançamentos de uma moeda não viciada vale  $\frac{3}{8}$ , ou seja, 37,5%.

Há casos em que uma moeda pode estar viciada. Nesses casos, a probabilidade de ocorrência de um dos eventos (sair cara ou sair coroa) é maior.

O próximo exemplo prático será com base em uma moeda viciada.

**Exemplo 3.3.** Uma moeda é viciada de tal forma que a probabilidade de sair cara é o dobro da de sair coroa. Suponha que essa moeda seja lançada 3 vezes e observa-se o número correspondente à face voltada para cima. Pede-se obter a probabilidade de ocorrência de pelo menos uma cara.

**Resolução:**

Denotando por  $c$  a probabilidade de se obter cara em um lançamento e por  $k$  a probabilidade de se obter coroa, tem-se que  $c + k = 1$ .

Como  $c = 2k$ , segue que  $c = \frac{2}{3}$  e  $k = \frac{1}{3}$ .

O desenvolvimento binomial para  $n = 3$  será dado por:

$$(c + k)^3 = \binom{3}{0}c^3k^0 + \binom{3}{1}c^2k^1 + \binom{3}{2}c^1k^2 + \binom{3}{3}c^0k^3.$$

A probabilidade de sair pelo menos uma cara é dada por  $1 - p_0$ , onde  $p_0$  é a probabilidade de não sair cara.

$p_0$  é obtida calculando-se o termo de ordem 4 do desenvolvimento acima. Assim,

$$\begin{aligned} p_0 &= \binom{3}{3}c^0k^3 \\ &= \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\ &= \frac{1}{27}. \end{aligned}$$

Tem-se, portanto, que a probabilidade solicitada é:

$$\begin{aligned} p &= 1 - \frac{1}{27} \\ &= \frac{26}{27} \\ &= 96,3\%. \end{aligned}$$

Assim, a probabilidade de se obter pelo menos uma cara em 3 lançamentos de uma moeda viciada nas condições impostas acima é um valor muito próximo de 100%. Este valor tende a aumentar, aproximando-se cada vez mais de 100%, caso a moeda seja ainda mais viciada, ou seja, quando a probabilidade de sair cara for o triplo, quádruplo, quántuplo, ... da probabilidade de sair coroa.

**Exemplo 3.4.** Um casal planeja ter cinco filhos. Obtenha a probabilidade de nascer pelo menos duas meninas dentre os cinco filhos.

**Resolução:**

Seja  $p$  a probabilidade de nascimento de uma menina e  $q = 1 - p$  a probabilidade de nascimento de um menino.

Como  $p + q = 1$  e  $p = q$ , decorre que

$$p = q = \frac{1}{2}.$$

Pode-se calcular a probabilidade solicitada utilizando o fato de:

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1,$$

em que  $p_i$ , com  $i \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq i \leq 5$ , representa a probabilidade de nascimento de  $i$  meninas.

Dessa forma, basta calcular  $p_0 + p_1$  e subtrair o resultado de 1 para obter a probabilidade pedida.

O desenvolvimento binomial para  $n = 5$  será dado por:



$$(p + q)^5 = \binom{5}{0} p^5 q^0 + \binom{5}{1} p^4 q^1 + \binom{5}{2} p^3 q^2 + \binom{5}{3} p^2 q^3 + \binom{5}{4} p^1 q^4 + \binom{5}{5} p^0 q^5.$$

$p_0$  é dada pelo último termo da expansão do binômio  $(p + q)^5$ .

Assim,

$$\begin{aligned} p_0 &= \binom{5}{5} p^0 q^5 \\ &= 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ &= \frac{1}{32}. \end{aligned}$$

$p_1$  é calculada substituindo os valores devidos no quinto termo da expansão.

Assim,

$$\begin{aligned} p_1 &= \binom{5}{4} p^1 q^4 \\ &= 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &= \frac{5}{32}. \end{aligned}$$

Segue que a probabilidade de nascimento de até 1 menina é dada por:

$$\begin{aligned} p_0 + p_1 &= \frac{1}{32} + \frac{5}{32} \\ &= \frac{6}{32} \\ &= \frac{3}{16}. \end{aligned}$$

Usando complementar, vem:

$$p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 - (p_0 + p_1).$$

Fazendo  $p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = p$ , tem-se que:

$$p = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}.$$

Logo a probabilidade do referido casal ter pelo menos duas meninas é igual a  $\frac{13}{16}$ .

**Exemplo 3.5.** *A probabilidade de um certo tenista A vencer seu oponente B em uma partida disputada é de 90%. Encontrar a probabilidade de uma derrota do tenista A em três partidas disputadas.*

**Resolução:**

Denotando por  $v$  a probabilidade de vitória do tenista A e por  $d$  a probabilidade de derrota do tenista A, tem-se que  $p + v = 1$ .

Como  $p = 90\% = 0,9$ , segue que  $d = 1 - 0,9 = 0,1$ . Pode-se escrever tal situação acima através do binômio:

$$(v + d)^3 = \binom{3}{0}v^3d^0 + \binom{3}{1}v^2d^1 + \binom{3}{2}v^1d^2 + \binom{3}{3}v^0d^3.$$

Assim, a probabilidade  $p$  solicitada corresponde ao cálculo do segundo termo deste desenvolvimento.

Logo,

$$\begin{aligned} p &= \binom{3}{1}v^2d^1 \\ &= \binom{3}{1}(0,9)^2(0,1)^1 \\ &= 0,243 \\ &= 24,3\%. \end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade do tenista A ser derrotado em uma das três partidas disputadas é igual a 24,3%.

## CAPÍTULO 4

# O TEOREMA MULTINOMIAL E APLICAÇÕES NA PROBABILIDADE

### 4.1 Introdução

O CAPÍTULO anterior foi dedicado ao cálculo de probabilidades envolvendo dois eventos mutuamente exclusivos através do teorema binomial utilizando a expansão  $(a + b)^n$ , onde  $n$  representava a quantidade de ocorrências de tais eventos.

Neste capítulo serão estudados casos em que mais de dois eventos são possíveis de ocorrer dentro de uma quantidade  $n$  de observações.

Será obtida uma expansão multinomial do tipo  $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n$ , através da expressão do teorema binomial, para viabilizar os cálculos de probabilidades para esses casos.

A seção a seguir destina-se ao estudo e apresentação do Teorema Multinomial.

### 4.2 O Teorema Multinomial

O Teorema Multinomial, também conhecido como multinômio de Newton é, na verdade, uma generalização do Teorema Binomial.

Consiste, basicamente, no desenvolvimento de potências com expoente  $n$  natural de um polinômio do tipo  $(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m)^n$ .

Assim,

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}.$$

Nesse caso,

$$\sum_{i=1}^w k_i = n.$$

O termo  $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m}$  é conhecido como coeficiente multinomial, onde  $n$  é a quantidade total da ocorrência dos eventos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

$k_1, k_2, \dots, k_m$  representam o número de ocorrências dos eventos  $x_1, x_2, \dots, x_m$  respectivamente.

Portanto, tem-se que  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ .

Para o cálculo do coeficiente, utiliza-se a fórmula a seguir:

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}.$$

A demonstração do Teorema Multinomial a seguir será feita por indução.

### Demonstração:

Para cada  $m \in \mathbb{N}$  com  $m \geq 1$ , tem-se que:  $\forall n \in \mathbb{N}$  com  $n \geq 1$ , é válida a proposição  $P_m$ :

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}.$$

Fazendo  $m = 1$  vem:

$$\begin{aligned} (x_1)^n &= \sum_{k_1 = n} \frac{n!}{k_1!} x_1^{k_1} \\ &= \frac{n!}{n!} x_1^n \\ &= x_1^n. \end{aligned}$$

Logo  $p_1$  é válida.

Considerando válida para  $m \geq 2$ , deve-se mostrar que também vale para  $m + 1$ .

Pela hipótese de indução,  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}.$$

Deve-se mostrar que  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m + x_{m+1})^n =$$

$$\sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m + k_{m+1} = n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m, k_{m+1}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m} x_{m+1}^{k_{m+1}}.$$

$$\begin{aligned}
&= (x_1 + x_2 + \cdots + x_m + x_{m+1})^n \\
&= ((x_1 + x_2 + \cdots + x_m) + x_{m+1})^n \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x_{m+1}^j (x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x_{m+1}^j \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n-j} \binom{n-j}{k_1, k_2, \dots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m} \\
&= \sum_{j=0}^n \left( \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n-j} \binom{n}{j} \binom{n-j}{k_1, k_2, \dots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m} x_{m+1}^j \right) \\
&= \sum_{k_{m+1}=0}^n \left( \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n-k_{m+1}} \binom{n}{k_{m+1}} \binom{n-k_{m+1}}{k_1, k_2, \dots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m} x_{m+1}^{k_{m+1}} \right) \\
&= \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m+k_{m+1}=n} \binom{n}{k_{m+1}} \binom{n-k_{m+1}}{k_1, k_2, \dots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m} x_{m+1}^{k_{m+1}}.
\end{aligned}$$

Usando as definições de coeficiente binomial e coeficiente multinomial, vem:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k_{m+1}} \binom{n-k_{m+1}}{k_1, k_2, \dots, k_m} &= \frac{n!}{k_{m+1}!(n-k_{m+1})!} \frac{(n-k_{m+1})!}{k_1!k_2!\cdots k_m!} \\
&= \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!k_{m+1}!} \\
&= \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m, k_{m+1}}.
\end{aligned}$$

Logo a proposição é válida para  $m + 1$ .

Assim,  $P_m \Rightarrow P_{m+1}$ .

Portanto,  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}.$$

### 4.3 Conexão entre o Teorema Multinomial e a probabilidade

O Teorema Multinomial pode ser aplicado a situações-problema envolvendo cálculo de probabilidades. O que difere da conexão anterior (Teorema Binomial x Probabilidade) é o fato de haver mais de dois eventos possíveis de ocorrer.

Deve-se, portanto, observar a ocorrência de possíveis repetições dos eventos envolvidos e, neste caso, o coeficiente multinomial é basicamente o cálculo da permutação com repetição de elementos (no caso aqui, a repetição dos eventos).

Além disso, há uma preocupação referente às quantidades de combinações existentes em algumas situações, que pode tornar os cálculos um tanto quanto exaustivos.

No intuito de minimizar esses impactos, exemplos práticos serão apresentados de uma forma mais dinâmica, visando uma melhor praticidade para manter o foco deste trabalho.

Na seção anterior, foi apresentado o Teorema Multinomial da seguinte maneira:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}.$$

Tem-se, portanto que:

- $x_1, x_2, \dots, x_m$  são as probabilidades de ocorrência dos eventos  $1, 2, \dots, m$
- $k_1, k_2, \dots, k_m$  são as quantidades de ocorrência dos eventos  $1, 2, \dots, m$ .
- $n$  é o número de repetições do experimento.

## 4.4 Exemplos Práticos de Aplicação

Esta seção será exclusivamente dedicada à exemplos contextualizados de aplicações do Teorema Multinomial através do uso do cálculo de probabilidades.

**Exemplo 4.1.** *Em uma partida de futebol entre dois times A e B, estima-se que a probabilidade do time A vencer é de 50%, de haver empate é de 20% e do time B vencer é de 30%. Encontrar a probabilidade do time A vencer pelo menos três de quatro partidas disputadas.*

**Resolução:**

*Tem-se que a probabilidade do time A vencer é dada por  $v = 50\% = 0,5$ , a probabilidade de haver empate é dada por  $e = 20\%$  e a probabilidade do time A ser derrotado é dada por  $d = 30\%$ .*

*O Teorema Multinomial, referente a essa situação, pode ser escrito como:*

$$(v + e + d)^4 = \sum_{k_1+k_2+k_3=4} \binom{4}{k_1, k_2, k_3} v^{k_1} e^{k_2} d^{k_3}.$$

*Observa-se, nesse caso, a ocorrência de três possibilidades:*

- (1) *O time A vence três partidas e empata uma. Nesse caso, tem-se que  $k_1 = 3, k_2 = 1$  e  $k_3 = 0$ . Assim,*

$$\begin{aligned} p_1 &= \binom{4}{3, 1, 0} (0,5)^3 (0,2)^1 (0,3)^0 \\ &= \frac{4!}{3!1!0!} (0,125)(0,2) \\ &= 0,10. \end{aligned}$$

(2) O time A vence três partidas e perde uma. Tem-se que  $k_1 = 3$ ,  $k_2 = 0$  e  $k_3 = 1$ . Assim,

$$\begin{aligned} p_2 &= \binom{4}{3,0,1} (0,5)^3 (0,2)^0 (0,3)^1 \\ &= \frac{4!}{3!0!1!} (0,125)(0,3) \\ &= 0,15. \end{aligned}$$

(3) O time A vence as quatro partidas. Nesse caso,  $k_1 = 4$ ,  $k_2 = 0$  e  $k_3 = 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} p_3 &= \binom{4}{4,0,0} (0,5)^4 (0,2)^0 (0,3)^0 \\ &= \frac{4!}{4!0!0!} (0,0625) \\ &= 0,0625. \end{aligned}$$

Segue que a probabilidade solicitada é dada pela soma das probabilidades acima descritas e calculadas. Portanto,

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_2 + p_3 \\ &= 0,10 + 0,15 + 0,0625 \\ &= 0,3125 \\ &= 31,25\%. \end{aligned}$$

Logo, a probabilidade do time A vencer pelo menos três partidas é igual a 31,25%.

**Exemplo 4.2.** Um tetraedro, cujas faces são numeradas de 1 a 4, é viciado de tal forma que a probabilidade de sair a face 2 é o dobro da probabilidade de sair a face 4. Em três lançamentos deste tetraedro, obter a probabilidade de ocorrência de pelo menos duas faces numeradas com 2.

**Resolução:**

Se fosse considerado um tetraedro não viciado, a probabilidade de sair qualquer uma das faces seria igual a  $\frac{1}{4}$ .

Como a probabilidade de sair a face 2 é o dobro da probabilidade de sair a face 4 e considerando a probabilidade de obter face 1 ou face 3 igual a  $\frac{1}{4}$ , denotando por  $p$  a probabilidade de sair a face 4, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 p_1 + p_2 + p_3 + p_4 &= 1 \\
 \frac{1}{4} + 2p + \frac{1}{4} + p &= 1 \\
 3p + \frac{1}{2} &= 1 \\
 3p &= 1 - \frac{1}{2} \\
 p &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 p_2 &= 2p \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{6} \\
 &= \frac{2}{6} \\
 &= \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Portanto,  $p_1 = p_3 = \frac{1}{4}$ ,  $p_2 = \frac{1}{3}$  e  $p_4 = \frac{1}{6}$ .

Recorrendo à fórmula do Teorema Multinomial, vem:

$$(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)^3 = \sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=3} \binom{3}{k_1, k_2, k_3, k_4} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} p_4^{k_4}.$$

Pelo enunciado do exercício, quatro são as possibilidades de se obter ao menos duas ocorrências da face 2:

- (1) Duas faces numeradas com 2 e uma face numerada com 1. Nesse caso,  $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = k_4 = 0$ .

Assim, a probabilidade é dada por:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \binom{3}{1, 2, 0, 0} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \\
 &= 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} \\
 &= \frac{1}{12}.
 \end{aligned}$$



(2) Duas faces iguais a 2 e uma face igual a 3. Aqui, tem-se:  $k_1 = k_4 = 0$ ,  $k_2 = 2$  e  $k_3 = 1$ . Calculando a probabilidade, vem:

$$\begin{aligned} p_2 &= \binom{3}{0,2,1,0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \\ &= 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

(3) Duas faces iguais a 2 e uma face igual a 4.

Nesse caso,  $k_1 = k_3 = 0$ ,  $k_2 = 2$  e  $k_4 = 1$ .

Calculando a probabilidade, tem-se:

$$\begin{aligned} p_3 &= \binom{3}{0,2,0,1} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \\ &= 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

(4) Três faces iguais a 2.

Nesse item,  $k_1 = k_3 = k_4 = 0$  e  $k_2 = 3$ .

A probabilidade é dada por:

$$\begin{aligned} p_4 &= \binom{3}{0,3,0,0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \\ &= 1 \cdot \left(\frac{1}{27}\right) \\ &= \frac{1}{27}. \end{aligned}$$

Somando as quatro possibilidades, vem:

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 &= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} \\ &= \frac{14}{54} \\ &= \frac{7}{27}. \end{aligned}$$

Segue, portanto, que a probabilidade de ocorrência de pelo menos duas faces iguais a 2 é  $\frac{7}{27}$ .

**Exemplo 4.3.** Uma urna contém 10 bolas amarelas, 15 brancas, 20 pretas e 5 vermelhas. Retirando-se, ao acaso, 5 bolas, com reposição, qual é a probabilidade de se obter pelo menos uma bola de cada cor?

**Resolução:**

Somando-se o total de bolas, vem:

$$n(\Omega) = 10 + 15 + 20 + 5 = 50.$$

Denotando por  $a$ ,  $b$ ,  $p$  e  $v$  as probabilidades de sortear bola amarela, branca, preta e vermelha, respectivamente, e utilizando a probabilidade de ocorrência de um evento

$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$ , tem-se que:

$$a = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}, b = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}, p = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}, v = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}.$$

Tem-se, pelo Teorema Multinomial, que :

$$(a + b + p + v)^5 = \sum_{k_a+k_b+k_p+k_v=5} \binom{5}{k_1, k_2, k_3, k_4} [a]^{k_a} [b]^{k_b} [p]^{k_p} [v]^{k_v}.$$

Para a ocorrência de pelo menos uma bola de cada cor em cinco retiradas ( $n = 5$ ), com reposição, quatro casos são considerados:

(1) Duas bolas amarelas, uma branca, uma preta e uma vermelha.

Nesse caso,  $k_a = 2$ ,  $k_b = 1$ ,  $k_p = 1$  e  $k_v = 1$ .

Assim, a probabilidade é dada por:

$$\begin{aligned} p_1 &= \binom{5}{2, 1, 1, 1} \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{10}\right)^1 \left(\frac{2}{5}\right)^1 \left(\frac{1}{10}\right)^1 \\ &= 60 \cdot \frac{1}{25} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{18}{625}. \end{aligned}$$

(2) Uma bola amarela, duas brancas, uma preta e uma vermelha.

Aqui, tem-se:

$k_a = 1$ ,  $k_b = 2$ ,  $k_p = 1$  e  $k_v = 1$ .

Calculando a probabilidade, vem:

$$\begin{aligned} p_2 &= \binom{5}{1, 2, 1, 1} \left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^1 \left(\frac{1}{10}\right)^1 \\ &= 60 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{9}{100}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{10}\right) \\ &= \frac{27}{625}. \end{aligned}$$

(3) *Uma bola amarela, uma branca, duas pretas e uma vermelha.*

Nesse caso,  $k_a = 1$ ,  $k_b = 1$ ,  $k_p = 2$  e  $k_v = 1$ .

Calculando a probabilidade, tem-se:

$$\begin{aligned} p_3 &= \binom{5}{1,1,2,1} \left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(\frac{3}{10}\right)^1 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{10}\right)^1 \\ &= 60 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{10}\right) \cdot \left(\frac{4}{25}\right) \cdot \left(\frac{1}{10}\right) \\ &= \frac{36}{625}. \end{aligned}$$

(4) *Uma bola amarela, uma branca, uma preta e duas vermelhas.*

Nesse caso,  $k_a = 1$ ,  $k_b = 1$ ,  $k_p = 1$  e  $k_v = 2$ .

Calculando a probabilidade, tem-se:

$$\begin{aligned} p_4 &= \binom{5}{1,1,1,2} \left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(\frac{3}{10}\right)^1 \left(\frac{2}{5}\right)^1 \left(\frac{1}{10}\right)^2 \\ &= 60 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{10}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{100}\right) \\ &= \frac{9}{625}. \end{aligned}$$

A probabilidade solicitada será dada pela soma dos resultados das probabilidades ( $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ ) encontradas através do Multinômio  $(a + b + p + v)^5$ .

Assim,

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 &= \frac{18}{625} + \frac{27}{625} + \frac{36}{625} + \frac{9}{625} \\ &= \frac{90}{625} \\ &= \frac{18}{125}. \end{aligned}$$

Segue, portanto, que a probabilidade de se retirar pelo menos uma bola de cada cor na situação acima descrita é de  $\frac{18}{125}$ .

## CAPÍTULO 5

### CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi desenvolvido de forma minuciosa, na qual houve uma grande preocupação em retomar alguns conceitos e propriedades referentes aos conteúdos de Análise Combinatória que servem como pré-requisitos para o desenvolvimento do estudo do Teorema Binomial e da Probabilidade.

De fato, há uma estreita correlação entre esses conteúdos que estão presentes na Álgebra. Assim, tornou-se necessário realizar esse estudo mais detalhado acerca de seus tópicos principais.

Para alcançar um dos objetivos, que foi estabelecer a conexão do Teorema Binomial com a Probabilidade, foram trabalhados inicialmente os conteúdos da Análise Combinatória e da própria Probabilidade, através de um estudo que combinou teoria e prática, permitindo que o aprendizado se tornasse mais dinâmico e interessante.

Esta conexão inicial permitiu uma maior aproximação desses conteúdos, através da viabilização de exercícios práticos com o intuito de proporcionar ao estudante do Ensino Médio um aprendizado diferenciado.

Posteriormente ficou estabelecida uma conexão do Teorema Multinomial com a Probabilidade. Nesse caso, foi apresentado o Teorema Multinomial através da expansão do Teorema Binomial, permitindo assim a conexão esperada com a Probabilidade, através do cálculo dos termos presentes no Multinômio.

Esses cálculos permitiram determinar probabilidades quando da possibilidade de ocorrência de mais de dois eventos em situações contextualizadas mostradas no quarto capítulo deste trabalho.

Pode-se apresentar como uma vantagem desta dissertação o fato de obter probabilidades através do cálculo de alguns termos de uma expansão binomial e também multinomial.

Outra vantagem é poder utilizar o evento complementar para auxiliar na resolução de exercícios envolvendo tais teoremas.

De um modo geral, os objetivos deste trabalho foram alcançados de maneira satisfatória considerando o fato de poder transmitir aos discentes do Ensino Médio uma visão diferenciada e enriquecedora dos conteúdos trabalhados.

Pode-se dizer que este trabalho serve como um ponto de partida para um estudo mais abrangente do Teorema Multinomial utilizando outros tipos de abordagens.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] DANTE, L, R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. Volume Único. Editora Ática. 3ª Edição. São Paulo-SP, 2009.
- [2] IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIGO, R. **Matemática: Volume Único**. Atual Editora. 5ª Edição. São Paulo, 2011.
- [3] HAZZAN, S.. **Fundamentos de Matemática Elementar. Combinatória e Probabilidade..** Atual Editora. 8ª Edição. São Paulo, 2013.
- [4] OLIVEIRA, K. I. M., Fernández, A. J. C.. **Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções**. SBM, Coleção Olimpíadas de Matemática. Rio de Janeiro, 2010.
- [5] Binomial Theorem. **Proof of Binomial Theorem**. Disponível em: <https://www.math.hmc.edu/calculus/tutorials/binomial%26induction.html>
- [6] FARIA, E. de. **Tópicos de Matemática II: Resumo de Probabilidade**. Departamento de Matemática. IME-USP. 14 de Agosto de 2013.
- [7] Multinomial Theorem. **Proof of Multinomial Theorem**. Disponível em: [https://en.wikipedia.org/wiki/Multinomial\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Multinomial_theorem)
- [8] SILVA, B. T. **Indução Matemática: Discussão teórica e uma proposta de ensino**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal. Instituto de Ciências Exatas e da Terra. Fevereiro de 2015.