Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Dissertação de Mestrado

Grupos Finitos e Profinitos Quase Engel

Genildo de Jesus Nery

Salvador - Bahia
Março de 2017

Grupos Finitos e Profinitos Quase Engel

Genildo de Jesus Nery

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof. Drª. Carmela Sica.

Salvador - Bahia

Março 2017

Nery, Genildo de Jesus.

Grupos Finitos e Profinitos Quase Engel / Genildo de Jesus Nery . –
Salvador: UFBA - 2017.

105f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Salvador, 2017.

Orientador: Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Carmela Sica.

1. Grupos Finitos. 2.Grupos de Engel. 3. Grupos Profinitos.

CDD : 512

CDU : 512.54

Grupos Finitos e Profinitos Quase Engel

Genildo de Jesus Nery

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 31 de Março de 2017.

Banca examinadora:

Prof. Drª. Carmela Sica (Orientadora)
UFBA

Prof. Drª. Manuela da Silva Souza
UFBA

Prof. Dr. Oscar Eduardo Ocampo Uribe
UFBA

Aos meus pais,
Maria Gracelina de Jesus e
Israel dos Santos Nery.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente a Deus, pela inteligência e por ter me proporcionado força e determinação durante esse período.

Aos meus pais e familiares pelo apoio e incentivo aos estudos.

A Érica Santana Silveira, pelas suas palavras de incentivo e apoio para que tentasse a seleção do Mestrado e por toda compreensão durante o período do curso.

A minha orientadora, professora Carmela Sica, por ter me aceitado como seu orientando, agradeço pelo suporte, pelas correções e incentivo que foram fundamentais para realização deste trabalho.

Aos professores do programa, em especial, aos professores: Carmela Sica, Ciro Russo, Kleyber Mota da Cunha, Luciana Silva Salgado, Manuela da Silva Souza, Mathieu Molitor, Thierry Corrêa Petit Lobão e Vilton Jeovan Viana Pinheiro. Que foram meus professores durante o curso, agradeço por todo o conhecimento proporcionado.

Aos amigos Gideone Oliveira Ribeiro e Vanderlei Lopes de Jesus, aos quais tive a honra de conviver durante todo o curso, agradeço pela amizade.

A minha turma, que foi composta por: Gideone Oliveira Ribeiro, Isabella Silva Duarte, Josyclesio Lima da Silva, Raiana Cristina de Souza Gouveia, Rodrigo Mazzei Carvalho, Vinicius Coelho dos Santos, Vanderlei Lopes de Jesus e Wallace de Oliveira. Agradeço pela amizade.

Por fim, agradeço a CAPES e a FAPESB pelo apoio financeiro.

"Seja forte e corajoso, não fique desanimado, nem tenha medo, porque Eu o Senhor seu Deus, estarei com você em qualquer lugar por onde você passar. "

Josué 1:9.

RESUMO

A presente dissertação é baseada no artigo *Almost Engel Finite and Profinite Groups* de E.I.Khukhro e P.Shumyatsky [9]. Seja g elemento de um grupo G e n um número inteiro positivo. Neste trabalho provamos resultados em termos dos subgrupos $E_n(g)$, os quais, são gerados pelos comutadores $[x, g, \ldots, g]$, para cada $x \in G$, onde g aparece n vezes no comutador. Denotamos por $E(g)$ a interseção dos subgrupos $E_n(g)$, com n variando no conjunto dos números naturais. Primeiro, provamos que, se G é um grupo finito e existe um inteiro positivo m tal que $|E(g)| \leq m$ para cada $g \in G$, então a ordem do residual nilpotente $\gamma_\infty(G)$ é limitado em termos de m. Por fim, mostramos que, se G é um grupo profinito tal que para cada $g \in G$ existe um inteiro positivo $n = n(g)$ onde o subgrupo $E_n(g)$ é finito, então G tem um subgrupo normal N finito tal que o quociente G/N é localmente nilpotente.

Palavras-chave: Grupos Finitos; Grupos de Engel; Grupos Profinitos.

ABSTRACT

The present thesis is based on the article Almost Engel Finite and Profinite Groups written by E.I.Khukhro and P.Shumyatsky [9]. Let g be an element of a group G and n a positive integer. In this thesis, we prove results in terms of the subgroups $E_n(g)$, which are generated by commutators $[x, g, \ldots, g]$, for each $x \in G$, where g appears n time in the commutator. We denote by $E(g)$ the intersection of the subgroups $E_n(g)$, with n varying in the set of the natural numbers. First, we prove that if G is a finite group and there is a positive integer number m such that $|E(g)| \leq m$ for each $g \in G$, then, the order of the nilpotent residual $\gamma_\infty(G)$ is bounded in terms of m. Lastly, we showed for if G is a profinite group such that for each $g \in G$, there is a positive integer $n = n(g)$ which the subgroup $E_n(g)$ is finite, so G has a finite normal subgroup N with the quotient G/N locally nilpotent.

Keywords: Finite groups; Engel group; Profinite groups.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Seja G um grupo. Dizemos que G é um **grupo de Engel** se para cada $x, g \in G$ existe um inteiro positivo n dependendo da escolha dos elementos x e y, que denotaremos por $n = n(x, g)$, tal que $[x, g, g, \ldots, g] = 1$, onde g aparece n vezes no comutador. Em particular, um elemento $g \in G$ será chamado **elemento de Engel** se para cada $x \in G$, existe um inteiro positivo $n = n(x, g)$, de modo que $[x, g, g, \ldots, g] = 1$, onde g aparece n vezes no comutador. Chamaremos G de **localmente nilpotente** se cada subconjunto finito gera um subgrupo nilpotente. Evidentemente, todo grupo nilpotente é localmente nilpotente e todo grupo localmente nilpotente é um grupo de Engel. O seguinte diagrama ilustra bem o que acabamos de afirmar.

$$\{\text{grupos nilpotentes}\} \subseteq \{\text{grupos localmente nilpotentes}\} \subseteq \{\text{grupos de Engel}\} \qquad (1)$$

Em [14] existe um exemplo apresentado por Golod de grupos que são de Engel e não são localmente nilpotentes. Assim, os grupos de Engel representam uma vasta generalização dos grupos nilpotentes. Em geral não vale as inclusões contrárias de (1), mas sobre certas condições algumas dessas inclusões valem. Por exemplo, Zorn provou que grupos finitos de Engel são nilpotentes [14] e Wilson e Zelmanov provaram que grupos profinitos de Engel são localmente nilpotentes [18].

Neste trabalho provaremos resultados relacionados em termos dos subgrupos

$$E_n(g) = \langle [x, \underbrace{g, g, \ldots, g}_{n}] \mid x \in G \rangle.$$

Usaremos esses subgrupos para generalizar as condições de Engel, que aparecem na definição acima. Assim, entendemos neste trabalho que um grupo G é **quase Engel** se para cada $g \in G$ existem inteiros positivos, $n = n(g)$ e $m = m(g)$, tais que $|E_n(g)| \leq m$. Observe que, todo grupo de Engel é quase Engel.

O objetivo desta dissertação é provar dois resultados, sendo um para grupos finitos e outro para grupos profinitos. O primeiro é para grupos profinitos.

Teorema A (Khukhro-Shumyatsky). *Suponha que G é um grupo profinito tal que para cada $g \in G$ exista um número inteiro positivo $n = n(g)$ onde o subgrupo $E_n(g)$ é finito. Então, G tem um subgrupo normal N finito tal que G/N é localmente nilpotente.*

Veremos, como decorrência do teorema A, que G possui um subgrupo aberto localmente nilpotente. Na verdade, esse fato será uma das etapas da prova, a qual, também usa o já mencionado teorema de Wilson-Zelmanov.

O segundo resultado será para grupos finitos. Para isso, consideremos os subgrupos $E(g) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(g)$. Também é conveniente denotar o residual nilpotente de um grupo G por $\gamma_\infty(G) = \bigcap_i \gamma_i(G)$, onde $\gamma_i(G)$ são os termos da série central de G.

Teorema B (Khukhro-Shumyatsky). *Suponha que G é um grupo finito e que existe um inteiro positivo m tal que $|E(g)| \leq m$ para cada $g \in G$. Então, a ordem do residual nilpotente $\gamma_\infty(G)$ é limitado em termos de m.*

Dizer que um número inteiro k é limitado em termos de um inteiro positivo m (ou simplesmente, k é m-limitado), significa que k é limitado por uma função que depende apenas de m.

Como consequência do teorema B, veremos que o índice do subgrupo de Fitting é limitado em termos de m. Esse teorema implica o seguinte resultado para grupos profinitos, se há uma uniformidade ligadas as ordens dos subgrupos $E_n(g)$.

Corolário C. *Suponha que G é um grupo profinito e que existe um inteiro positivo m tal que, para todo $g \in G$, existe $n = n(g)$ de modo que $|E_n(g)| \leq m$. Então, G tem um subgrupo normal finito N de ordem limitada em termos de m tal que G/N é localmente nilpotente.*

Para apresentarmos as demonstrações desses resultados, organizamos a dissertação em dois capítulos. No primeiro, que denominamos por grupos finitos, iniciamos apresentando o conceito de ação de grupos. Depois, definimos grupos solúveis, nilpotentes, subgrupo de Fitting e subgrupo de Frattini e apresentamos as principais caracterizações dessas classes de grupos. Finalizamos esse capítulo com a demonstração do teorema B e suas consequências.

No capítulo dois, que intitulamos por grupos profinitos, definimos grupos pro-$\mathcal{C}$ e apresentamos alguns resultados dessa teoria que nos interessa nesse trabalho. Antes, definimos espaço topológico, grupos topológicos e limites inversos. Encerramos esse capítulo com a prova do teorema A e suas consequências.

CAPÍTULO 1

GRUPOS FINITOS

Neste capítulo apresentamos os principais conceitos e resultados que serão úteis para o desenvolvimento do nosso trabalho e provamos o Teorema B de Khukhro-Shumyatsky. Para isso, assumimos como conhecido algumas definições e resultados da teoria de grupos, por exemplo, a definição de grupo, subgrupo, subgrupo normal, p-grupo, entre outras. Resultados como: os Teoremas de isomorfismos, os Teoremas de Sylow, entre outros. Na primeira seção, dissertamos sobre ação de grupos, apresentamos o conceito e os principais resultados que serão usados nesses trabalho. Na seção seguinte, definimos grupos solúveis, grupos nilpotentes e alguns objetos necessários para exibirmos as principais caracterizações dessas classes de grupos. Na terceira seção, definimos subgrupo de Fitting, subgrupo de Fitting generalizado e subgrupo de Frattini de um grupo, juntamente com alguns resultados que serão futuramente usados nesse trabalho. Finalizamos, com a seção de grupos finitos quase Engel, onde provamos o Teorema B.

Os livros de B. Huppert [5], Daniel Gorenstein [2], Derek J.S. Robinson [14], Hans Kurzweil [10] e I. Martin Isaacs [7] foram as principais referências usadas. Nessas obras encontra-se todas demonstrações que serão omitidas neste capítulo.

1.1 Ações de Grupos

Sejam G um grupo e Ω um conjunto não vazio. Suponha que exista uma operação "." tal que, para cada elemento $g \in G$ e $\alpha \in \Omega$ é bem definido um elemento $\alpha . g \in \Omega$. Dizemos que essa operação define uma **ação** de G sobre Ω se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $\alpha.1 = \alpha$ para todo $\alpha \in \Omega$;

(ii) $(\alpha.g).h = \alpha.(gh)$ para todo $\alpha \in \Omega$ e $g, h \in G$.

Neste caso, dizemos que o grupo G age sobre o conjunto Ω. Essa ação será chamada **fiel** se, $\alpha.g = \alpha$ apenas quando $g = 1$. Já se, $\alpha.g = \alpha$ para todo $g \in G$ e $\alpha \in \Omega$, dizemos que a ação é **trivial**. Um elemento $\alpha \in \Omega$ é dito ***G*-invariante**, se todo $g \in G$ fixa α, isto é, $\alpha.g = \alpha$, para cada $g \in G$. De maneira mais geral, se G age sobre um subconjunto $X \subseteq \Omega$, dizemos que X é G-invariante, se $x.g \in X$, para cada $x \in X$ e $g \in G$. O conjunto

$$\mathcal{N} = \{g \in G \mid \alpha.g = \alpha, \text{ para todo } \alpha \in \Omega\}$$

é chamado de **núcleo** da ação de G sobre Ω. Afirmamos que $\mathcal{N} \trianglelefteq G$. De fato, sejam $x \in \mathcal{N}$, $g \in G$ e $\alpha \in \Omega$. Note que,

$$\alpha.(g^{-1}xg) = [(\alpha.g^{-1}).x].g = (\alpha.g^{-1}).g = \alpha.(g^{-1}g) = \alpha.1 = \alpha.$$

Então, $g^{-1}xg \in \mathcal{N}$ para todo $x \in \mathcal{N}$ e $g \in G$.

O conjunto formado pelos elementos $g \in G$ que agem sobre $\alpha \in \Omega$, o deixando fixo é chamado **estabilizador** de α. Denotaremos esse conjunto por $stab_G(\alpha) = \{g \in G \mid \alpha.g = \alpha\}$. Vamos mostrar que $stab_G(\alpha) \leq G$ para todo $\alpha \in \Omega$. Claramente o elemento identidade 1 de G está em $stab_G(\alpha)$. Sejam $a, b \in stab_G(\alpha)$, então $\alpha.a = \alpha = \alpha.b$. Note que,

$$\alpha.b^{-1} = (\alpha.b).b^{-1} = \alpha.(bb^{-1}) = \alpha.1 = \alpha \;\Rightarrow\; b^{-1} \in stab_G(\alpha).$$

Assim,

$$\alpha.(ab^{-1}) = (\alpha.a).b^{-1} = \alpha.b^{-1} = \alpha \;\Rightarrow\; ab^{-1} \in stab_G(\alpha).$$

Portanto, $stab_G(\alpha) \leq G$ para todo $\alpha \in \Omega$.

Suponha que o grupo G age sobre o conjunto $\Omega \neq \emptyset$. Seja $\sim$ uma relação, tal que, para todo $x, y \in \Omega$, $x \sim y$ se existe algum $g \in G$ de modo que, $x.g = y$. Vamos mostrar que $\sim$ é uma relação de equivalência, ou seja, que a relação $\sim$ é reflexiva, simétrica e transitiva.

- <u>Reflexividade</u>: Para cada $x \in \Omega$ tem-se que, $x.1 = x$. Logo, $x \sim x$;

- <u>Simetria</u>: Se para cada $x, y \in \Omega$ tem-se que, $x \sim y$, então existe $g \in G$ tal que, $x.g = y$. Note que,

  $$x = x.1 = x.(gg^{-1}) = (x.g).g^{-1} = y.g^{-1}.$$

  Logo, $y \sim x$;

- <u>Transitividade</u>: Se para cada $x, y, z \in \Omega$ tem-se que, $x \sim y$ e $y \sim z$, então existem $g, h \in G$ tais que, $x.g = y$ e $y.h = z$. Assim,

  $$z = y.h = (x.g).h = x.(gh).$$

Portanto, $x \sim z$.

Logo, a relação $\sim$ determina uma partição em Ω. Para cada $x \in \Omega$, chamaremos o conjunto

$$orb(x) = \{x.g \mid g \in G\}$$

de **órbita** de x. O seguinte resultado nos fornece informações referente a cardinalidade da $orb(x)$.

Proposição 1.1.1. *Seja G um grupo que age sobre um conjunto Ω. Então, para cada $x \in \Omega$ tem-se que, $|orb(x)| = [G : stab_G(x)]$.*

Demonstração. Será omitida, mas pode ser consultada em [10], página 58. □

Um exemplo de ação que usaremos com muita frequência neste trabalho é a seguinte. Seja G um grupo. Considere $\Omega = G$ e defina para cada $x, g \in G$, $x.g := g^{-1}xg = x^g$. Como

(i) $x.1 = x^1 = x$ para cada $x \in G$;

(ii) $x.(gh) = x^{gh} = (x^g)^h = (x^g).h = (x.g).h$ para cada $x, g, h \in G$.

temos que G age sobre si mesmo. Esta ação será chamada de **ação por conjugação**. Perceba que o núcleo desta ação é

$$\mathcal{N} = \{g \in G \mid x^g = x \text{ para cada } x \in G\}.$$

Neste caso, chamaremos o núcleo de G de **centro** do grupo G e o denotaremos por $Z(G)$. Já o

$$stab_G(g) = \{x \in G \mid g^x = g\}$$

será denominado de **centralizador de um elemento** g em G e o denotaremos por $C_G(g)$. Se $X \subseteq G$, definimos

$$C_G(X) := \bigcap_{x \in X} C_G(x)$$

como o **centralizador** de X em G. Por fim, chamaremos a

$$orb(g) = \{g^x \mid x \in G\}$$

de **classe de conjugação** do elemento $g \in G$ e o denotaremos por $\mathcal{C}l(g)$. Segue pela Proposição 1.1.1 que, $|\mathcal{C}l(g)| = [G : C_G(g)]$, para cada $g \in G$. Um grupo G, onde para cada $g \in G$, $|\mathcal{C}l(g)|$ é finito, será chamado de ***FC*-grupo**. Se H é um subgrupo do grupo G, chamaremos o subgrupo

$$\langle H^G \rangle = \langle h^g \mid h \in H \text{ e } g \in G \rangle$$

de **fecho normal** de H em G. Claramente, $H \leq \langle H^G \rangle$ e $\langle H^G \rangle \trianglelefteq G$.

Considere agora Ω como sendo o conjunto formado por todos os subconjuntos do grupo G. Para cada $X \in \Omega$ e $g \in G$, definimos a operação $X.g := X^g = \{x^g \mid g \in G\}$. Observe que com essa definição, G age por conjugação sobre Ω. Para cada $X \in \Omega$, chamaremos o $stab_G(X) = \{g \in G \mid X^g = X\}$ de **normalizador** de X em G e o denotaremos por $N_G(X)$. Cada elemento da $orb(X)$ será chamado de **conjugado** de X em G. Segue pela Proposição 1.1.1 que $|orb(X)| = [G : N_G(X)]$, para cada $X \in \Omega$.

Proposição 1.1.2. *Seja H um subgrupo de um grupo G. Então, $C_G(H) \trianglelefteq N_G(H)$ e $N_G(H)/C_G(H)$ é isomorfo a um subgrupo do $Aut(H)$.*

Demonstração. Será omitida, mas pode ser consultada em [14], página 38. □

Sejam G um grupo, $H \leq G$ e Ω o conjunto formado por todas as classes laterais à direita de H em G. Observe que, para cada $x, g \in G$ a operação $Hx.g := Hxg$ define uma ação de G sobre Ω. Note que

$$\begin{aligned} stab_G(Hx) &= \{g \in G \mid Hx.g = Hx\} \\ &= \{g \in G \mid Hxg = Hx\} \\ &= \{g \in G \mid xg \in Hx\} = H^x. \end{aligned}$$

Assim, o núcleo desta ação é

$$\mathcal{N} = \bigcap_{x \in G} H^x.$$

O subgrupo $\mathcal{N}$, neste caso, será chamado de **core** de H em G e o denotaremos por H_G. Como $\mathcal{N} \trianglelefteq G$, segue que $H_G \trianglelefteq G$. Claramente $H_G \leq H$. Se $K \trianglelefteq G$ tal que $K \leq H$, então para todo $g \in G$ tem-se que, $K^g \leq H^g$, então $K \leq H^g$ para todo $g \in G$ e, portanto, $K \leq H_G$. Com isso, acabamos de mostrar que H_G é o maior subgrupo normal de G contido em H.

Sejam A e G grupos. Dizemos que A age por **automorfismo** sobre G, se A age sobre G como conjunto e além disso, $(g_1g_2).a = (g_1.a)(g_2.a)$, para quaisquer $g_1, g_2 \in G$ e $a \in A$. Como $(g_1g_2)^a = g_1^a g_2^a$ para cada $g_1, g_2 \in G$ e $a \in A$, temos que a ação por conjugação é uma ação por automorfismo. Se A e G são grupos finitos, a ação de A sobre G será chamada **coprima** quando as ordens de A e G são relativamente primas, ou seja, se $(|A|, |G|) = 1$.

Nos casos em que A é um grupo que age sobre um grupo G, o centralizador de A em G é definido como

$$C_G(A) := \{g \in G \mid g \text{ é } A\text{-invariante}\}.$$

Lema 1.1.3. *Suponha que A age por automorfismos em G, onde A e G são grupos finitos, e seja N um subgrupo normal A-invariante de G. Assuma que $(|A|, |G|) = 1$. Escrevendo*

$\overline{G} = G/N$, *temos que*

$$C_{\overline{G}}(A) = \overline{C_G(A)}$$

Demonstração. Disponível em [7], página 101. □

Abriremos agora um parêntese, para apresentar algumas definições e resultados da Teoria de Grupos, que nos proporcionará condições suficientes para exibir alguns resultados referentes a ações por automorfismo.

Sejam $x_1, x_2, \cdots$ elementos de um grupo G. Definimos o **comutador** de x_1 e x_2 por

$$[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2 = x_1^{-1}x_1^{x_2}.$$

Por indução, definimos o comutador de $x_1, \cdots, x_n$, $n \geq 3$, por

$$[[x_1, \cdots, x_{n-1}], x_n]$$

Por convenção, $[x_1] = x_1$. Com o intuito de facilitar a escrita, introduziremos a seguinte notação

$$[x_{1,m}\, x_2] = [x_1, \underbrace{x_2, \cdots, x_2}_{m}].$$

A seguir, apresentamos uma Observação que ajudará na caracterização de alguns grupos.

Observação 1.1.4. *Sejam H um grupo finito e A um subgrupo do $Aut(H)$. O conjunto $G = \{(\phi, x) \in A \times H\}$ munido da operação $(\phi, x)(\psi, y) := (\phi\psi, \psi(x)y)$ é um grupo onde o elemento identidade é $(1_A, 1_H)$ e o inverso de (ϕ, x) é o elemento $(\phi^{-1}, \phi^{-1}(x^{-1}))$. Note que a aplicação de inclusão $i : A \hookrightarrow G$ dada por, $\phi \longmapsto (\phi, 1_H)$, é um homomorfismo de grupo injetor. Assim, podemos identificar o grupo A em G, ou seja, podemos considerar A como um subgrupo de G. Analogamente, podemos considerar H como um subgrupo de G. Note que, para $\phi \in A$ e $x \in H$ tem-se que,*

$$\begin{aligned}
[(1_A, x), (\phi, 1_H)] &= (1_A, x)^{-1}(\phi, 1_H)^{-1}(1_A, x)(\phi, 1_H) \\
&= (1_A, x^{-1})(\phi^{-1}, 1_H)(1_A, x)(\phi, 1_H) \\
&= (\phi^{-1}, \phi^{-1}(x^{-1}))(1_A, x)(\phi, 1_H) \\
&= (\phi^{-1}, \phi^{-1}(x^{-1})x)(\phi, 1_H) \\
&= (1_A, x^{-1}\phi(x)).
\end{aligned}$$

Usando a identificação temos que $[x, \phi] = x^{-1}\phi(x)$ com $x \in H$ e $\phi \in A$.

Apresentamos agora, algumas das principais propriedades das operações com comutadores.

Lema 1.1.5. *Sejam x, y e z elementos de um grupo G. Então:*

(i) $x^y = x[x, y]$;

(ii) $xy = yx[x, y]$;

(iii) $[x, y] = [y, x]^{-1}$;

(iv) $[x, y]^z = [x^z, y^z]$;

(v) $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$ *e* $[xy, z] = [x, z]^y[y, z]$;

(vi) $[x, y^{-1}] = ([x, y]^{y^{-1}})^{-1}$ *e* $[x^{-1}, y] = ([x, y]^{x^{-1}})^{-1}$;

(vii) $[x, y^{-1}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z[z, x^{-1}, y]^x = 1$ *(identidade de Hall-Witt).*

Demonstração. Será omitida, mas pode ser consultada em [14], página 123. □

Utilizando os itens (ii) e (v) do Lema 1.1.5, prova-se que $[xy, z] = [x, z][x, z, y][y, z]$, onde x, y e z são elementos de um grupo G.

O **subgrupo derivado** G' de um grupo G é definido como

$$G' := \langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle.$$

Mostra-se que G' é um subgrupo normal de G e que G' é o menor subgrupo tal que o grupo quociente G/G' é abeliano. Se $(G')' = \{1\}$, dizemos que o grupo G é **metabeliano**. Um grupo G onde $G = G'$ e $G/Z(G)$ é um grupo simples não abeliano é chamado de **quase simples**.

Teorema 1.1.6 (Schur)**.** *Se G é um grupo cujo o centro tem índice finito n, então G' é finito e para cada $g \in G'$ tem-se que $g^n = 1$.*

Demonstração. Será omitida, mas pode ser consultada em [14], página 287. □

Sejam $X_1, X_2, \cdots$ subgrupos de um grupo G. O subgrupo gerado

$$[X_1, X_2] := \langle [x_1, x_2] \mid x_1 \in X_1 \text{ e } x_2 \in X_2 \rangle$$

é chamado o **subgrupo comutador** de X_1 e X_2. Por indução, definimos o subgrupo comutador de $X_1, \cdots, X_n$, $n \geq 3$, por

$$[X_1, \cdots, X_n] = [[X_1, \cdots, X_{n-1}], X_n].$$

Note que, $[X_1, X_2] = [X_2, X_1]$ e se $X_1, X_2, X_3 \trianglelefteq G$ então $[X_1X_2, X_3] = [X_1, X_3][X_2, X_3]$. Novamente, com objetivo de facilitar a escrita, introduziremos a seguinte notação,

$$[X_{1,m}\, X_2] = [X_1, \underbrace{X_2, \cdots, X_2}_{m}].$$

Definimos, $G^{(0)} := G$ e por indução, $G^{(i+1)} := [G^{(i)}, G^{(i)}]$, ou seja, $G^{(i+1)}$ é o subgrupo gerado pelos comutadores do grupo $G^{(i)}$, para cada $i = 0, 1, 2, \cdots$. Chamamos a série

$$G = G^{(0)} \trianglerighteq G^{(1)} \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G^{(i+1)} \trianglerighteq \cdots$$

de **série derivada**. Note que, $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ é um grupo abeliano para todo $i = 0, 1, 2, \cdots$. Usando indução é possível provar que, se H é subgrupo de um grupo G, então $H^{(n)} \leq G^{(n)}$ e se N é subgrupo normal de um grupo G, então $(G/N)^{(n)} = G^{(n)}N/N$.

Agora estamos aptos para finalizarmos nossa explanação sobre ações de grupos.

Lema 1.1.7. *Suponha que A age por automorfismos sobre G, onde A e G são grupos e seja $H \leq G$. São equivalentes:*

(a) Toda classe lateral à direita de H em G é um conjunto A-invariante;

(b) Toda classe lateral à esquerda de H em G é um conjunto A-invariante;

(c) O conjunto $[G, A] \leq H$.

Demonstração. Disponível em [7], página 132. □

Lema 1.1.8. *Seja A um grupo que age por automorfismos sobre um grupo G, onde A e G são grupos finitos e assuma que $(|A|, |G|) = 1$. Então $[G, A, A] = [G, A]$.*

Demonstração. Disponível em [7], página 138. □

Teorema 1.1.9 (Fitting)**.** *Seja A um grupo que age por automorfismo sobre um grupo abeliano G, assuma que A e G são finitos e que $(|G|, |A|) = 1$. Então $G = C_G(A) \times [G, A]$.*

Demonstração. Disponível em [7], página 140. □

1.2 Grupos Solúveis e Nilpotentes

Um grupo G é **solúvel** se possui uma série de subgrupos

$$\{1\} = H_0 \leq \cdots \leq H_n = G,$$

onde cada H_i é um subgrupo normal de H_{i+1} e cada quociente H_{i+1}/H_i é um grupo abeliano, isso para todo $i = 0, \cdots, n-1$.

A série derivada é muito útil no estudo dos grupos solúveis, pois fornece a seguinte caracterização para essa classe de grupos.

Proposição 1.2.1. *Um grupo G é solúvel se, e somente se, existe um inteiro n positivo tal que $G^{(n)} = \{1\}$.*

Demonstração. Será omitida, mas pode ser consultada em [2], página 25. □

Usando a Proposição 1.2.2, mostra-se facilmente que todo grupo abeliano é solúvel, todo subgrupo e quocientes de um grupo solúvel são solúveis.

Proposição 1.2.2.

(a) Sejam G um grupo e $N \trianglelefteq G$. Se N e G/N são solúveis, então G é solúvel;

(b) Produto direto de um número finito de grupos solúveis é solúveis;

(c) Se H e K são subgrupos normais solúveis de um grupo G, então o subgrupo HK é solúvel.

Demonstração. A prova dos itens (a) e (b) podem ser consultadas em [2], página 23. Já (c) é consequência de (a), pois HK/K e K são solúveis. □

Segue da Proposição 1.2.2 (c), que um grupo finito G possui um único subgrupo normal solúvel maximal. Este subgrupo é o produto de todos os subgrupos normais solúveis de G. Chamaremos tal subgrupo de **radical solúvel** e denotaremos por $R(G)$.

Apresentaremos agora uma classe de grupos que se encontra entre a classe dos grupos abelianos e a classe dos grupos solúveis.

Um grupo G diz-se **nilpotente** se possui uma série de subgrupos

$$\{1\} = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_n = G$$

onde cada subgrupo H_{i-1} é normal em G e cada quociente H_i/H_{i-1} está contido no centro de G/H_{i-1}, isso para todo $i = 1, \cdots, n$. Uma série que satisfaz a essas propriedades é chamada de **série central**. Um grupo G que possui uma série central crescente que estabiliza em G é chamado de **hipercentral**. Consequentemente, todo grupo nilpotente é hipercentral.

Uma vez que as condições exigidas na definição de nilpotência são mais restritas que aquelas que aparecem na definição de solubilidade, segue imediatamente que todo grupo nilpotente é, em particular, um grupo solúvel.

Decorre da definição acima que o subgrupo H_1 está contido no centro do grupo G. Se, por ventura, $H_1 = \{1\}$, então o subgrupo H_2 está contido no centro de G, e assim sucessivamente. Como a série central termina em G, podemos concluir que todo grupo nilpotente possui centro não trivial.

Vamos agora apresentar duas caracterizações para a nilpotência. Para isso, definiremos indutivamente duas novas séries. A primeira é construída usando comutadores.

$$\gamma_1(G) := G,\ \gamma_2(G) := G' \text{ e } \gamma_i(G) := [\gamma_{i-1}(G), G].$$

Já a segunda, é apoiada no conceito de centro de um grupo.

$$Z_0(G) := \{1\},\ Z_1(G) := Z(G) \text{ e } \frac{Z_i(G)}{Z_{i-1}(G)} := Z\left(\frac{G}{Z_{i-1}(G)}\right).$$

Sem muita dificuldade é possível mostrar que as séries

$$\{1\} = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \cdots \leq Z_i(G) \cdots$$

e

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \cdots \geq \gamma_i(G) \geq \cdots$$

são séries centrais de um grupo G. Chamaremos a primeira de **série central superior** e a segunda de **série central inferior**.

Teorema 1.2.3 (Lema de Grün)**.** *Seja G um grupo finito tal que $Z(G) \lneqq Z_2(G)$, então $G' \lneqq G$. Em particular, G tem um quociente abeliano isomorfo a um subgrupo não trivial de $Z(G)$.*

Demonstração. Será omitida, mas poder ser consultada em [4], página 03. □

Sejam i e j inteiros positivos. Por indução sobre i, mostra-se a seguinte propriedade: $Z_i(G/Z_j(G)) = Z_{i+j}(G)/Z_j(G)$. Usando os termos da série central inferior, definimos o subgrupo

$$\gamma_\infty(G) := \bigcap_{i=1}^{\infty} \gamma_i(G)$$

que chamaremos de **residual nilpotente** do grupo G.

Lema 1.2.4. *Sejam G um grupo nilpotente e $\{1\} = H_0 \leq \cdots \leq H_n = G$ uma série central de G. Então, $H_i \leq Z_i(G)$ e $\gamma_{i+1}(G) \leq H_{n-i}$, para cada $i = 0, \cdots, n$.*

Demonstração. Será omitida, mas pode ser consultada em [14], página 125. □

Decorre deste resultado a seguinte caracterização para os grupos nilpotentes: um grupo G é nilpotente se, e somente se, existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma_{c+1}(G) = \{1\}$ se, e somente se, existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $Z_c(G) = G$. Chamaremos o menor desses $c \in \mathbb{N}$, que possui a propriedade anterior, de **classe de nilpotência** e o denotaremos por $cl(G)$. Evidentemente, se o grupo é nilpotente tem-se que $\gamma_\infty(G) = \{1\}$. Observe que todo grupo G abeliano é nilpotente, pois $\gamma_2(G) = \{1\}$.

Usando indução, prova-se que: se G é um grupo, $H \leq G$ e $N \trianglelefteq G$, então $\gamma_i(H) \leq \gamma_i(G)$ e $\gamma_i(G/N) = \gamma_i(G)N/N$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Usando esse fato, mostra-se que todo subgrupo e quociente de um grupo nilpotente são nilpotentes .

Lema 1.2.5.

(a) Imagens homomórficas de grupos nilpotentes são nilpotentes;

(b) O produto direto de um número finito de grupos nilpotentes é nilpotente;

(C) Todo p-grupo finito, p primo, é nilpotente.

Demonstração. Será omitida, mas pode ser consultada em [2], página 22. □

O resultado seguinte é muito útil para estabelecer propriedades do comutador de termos das séries centrais inferiores e superiores.

Proposição 1.2.6 (Lema dos três subgrupos)**.** *Sejam H, K e L subgrupos de um grupo G. Se $N \trianglelefteq G$ e $[H,K,L],[K,L,H] \leq N$, então $[L,H,K] \leq N$.*

Demonstração. Será omitida, mas pode ser consultada em [14], página 126. □

Apresentaremos agora uma outra caracterização para os grupos nilpotentes.

Proposição 1.2.7. *Seja G um grupo finito. São equivalentes:*

(i) G é nilpotente;

(ii) Para cada $H \leq G$, existe uma série de subgrupos $H = H_0 \leq \cdots \leq H_n = G$, onde $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$ para todo $i = 1, \cdots, n$. Se essa propriedade é válida, dizemos que H é ***subnormal*** *em G;*

(iii) Para cada $H \lneqq G$, tem-se que $H \lneqq N_G(H)$;

(iv) Se M é um subgrupo maximal de G, então $M \trianglelefteq G$;

(v) G é produto direto dos seus subgrupos de Sylow.

Demonstração. Será omitida, mas pode ser consultada em [14], página 130. □

Em relação a subgrupos subnormais, abriremos um parêntese para apresentar o seguinte resultado, o qual, será muito útil futuramente.

Proposição 1.2.8. *Sejam $K_1, \cdots, K_n$ todos os grupos quase simples subnormais de um grupo finito G. Considere $E(G) = \langle K_1, \cdots, K_n \rangle$ e denote por*

$$Z := Z(E(G)),\ Z_i := Z(K_i),\ E_i := \frac{K_i Z}{Z} \quad (i = 1, \cdots, n).$$

Então:

(a) $E(G)$ é o produto central de $K_1, \cdots, K_n$, em particular $Z = Z_1 \cdots Z_n$;

(b) $Z_i = Z \cap K_i$ e $E_i \cong K_i/Z_i \quad (i = 1, \cdots, n)$;

(c) $E(G)/Z = E_1 \times \cdots \times E_n$.

Demonstração. Será omitida, mas pode ser consultada em [10], página 144. $\square$

O próximo Teorema, mostra que vale um resultado similar ao da Proposição 1.2.2 (c) para grupos nilpotentes.

Teorema 1.2.9 (Fitting)**.** *Sejam H e K subgrupos normais nilpotentes de um grupo G com classe de nilpotência c e d, respectivamente. Então, o subgrupo HK é nilpotente de classe menor ou igual a $c+d$.*

Demonstração. Será omitida, mas pode ser consultada em [14], página 133. $\square$

Provaremos agora uma generalização do Teorema de nilpotência de Hall.

Proposição 1.2.10. *Suponhamos que B é um subgrupo normal de um grupo A tal que B é nilpotente de classe c e $\gamma_d(A/B')$ é finito de ordem k. Então o subgrupo*

$$C = C_A\left(\gamma_d\left(\frac{A}{B'}\right)\right) = \{a \in A \mid [\gamma_d(A), a] \leq B'\}$$

tem índice k-limitado e é nilpotente de classe (c, d)-limitada.

Demonstração. Vamos iniciar provando que $C_A(\gamma_d(A/B')) = \{a \in A \mid [\gamma_d(A), a] \leq B'\}$. Por definição, $C_A(\gamma_d(A/B')) = \{a \in A \mid \overline{x}^a = \overline{x}$ para todo $\overline{x} \in \gamma_d(A/B')\}$. Usando que $\gamma_d(A/B') = \gamma_d(A)B'/B'$ temos que,

$$\begin{aligned} C_A\left(\gamma_d\left(\frac{A}{B'}\right)\right) &= \{a \in A \mid (xB')^a = xB' \text{ para todo } x \in \gamma_d(A)\} \\ &= \{a \in A \mid x^{-1}x^aB' = B' \text{ para todo } x \in \gamma_d(A)\} \\ &= \{a \in A \mid [x, a] \in B' \text{ para todo } x \in \gamma_d(A)\}. \end{aligned}$$

Portanto, $C_A(\gamma_d(A/B')) = \{a \in A \mid [\gamma_d(A), a] \leq B'\}$.

Afirmamos que $A = N_A(\gamma_d(A/B'))$. De fato, como $\gamma_d(A/B') \trianglelefteq A/B'$, então existe $H \trianglelefteq A$ tal que $\gamma_d(A/B') = H/B'$. Sejam $a \in A$ e $hB' \in H/B'$. Note que,

$$(hB')^a = \underbrace{h^a}_{\in H} B' \in H/B'.$$

O que prova a afirmação. Segue pela Proposição 1.1.2 que,

$$\frac{A}{C} \lesssim Aut\left(\gamma_d\left(\frac{A}{B'}\right)\right).$$

Como $|\gamma_d(A/B')| = k$, implica que $|Aut(\gamma_d(A/B'))|$ é k-limitado e, portanto, $[A : C]$ é k-limitado.

Vamos mostrar agora que C é nilpotente de classe (c,d)-limitada. Note que,

$$\begin{aligned}
[\underbrace{C,\cdots,C}_{d+1},C,C,\cdots] &\leq [[\gamma_d(C),C],C,\cdots] \\
&\leq [[\gamma_d(A),C],C,\cdots] \\
&\overset{[\gamma_d(A),C]\leq B'}{\leq} [[B,B],C,\cdots].
\end{aligned}$$

Provaremos agora por indução que

$$[[B,B],\underbrace{C,\cdots,C}_{2d-1},C,\cdots] \leq \prod_{i+j=2d-1}[[B,_i C],[B,_j C],C,\cdots]. \tag{1.1}$$

Suponha que $2d-1=1$. Uma vez que $B,C \trianglelefteq A$, então qualquer subgrupo comutador envolvendo esses subgrupos são, claramente, normais em A. Segue pelo Lema dos três subgrupos (Proposição 1.2.6) que,

$$\begin{aligned}
[[B,B,C],C,\cdots] &\leq [[B,C,B][C,B,B],C,\cdots] \\
&= [[[B,C],B]][B,[B,C]],C,\cdots] \\
&\overset{(*)}{=} [[[B,C],B],C,\cdots][[B,[B,C]],C,\cdots] \\
&= \prod_{i+j=1}[[B,_i C],[B,_j C],C,\cdots].
\end{aligned}$$

Em $(*)$ usamos que $[B,C,B] \trianglelefteq A$. Suponha que $[[B,B],_n C] \leq \prod_{i+j=n}[[B,_i C],[B,_j C]]$ sempre que $n<2d-1$. Vamos provar que (1.1) é verdade. Note que,

$$\begin{aligned}
&[[B,B],\underbrace{C,\cdots,C}_{2d-1},C,\cdots] \\
&\quad= [[[B,B],\underbrace{C,\cdots,C}_{2d-2}],C,C,\cdots] \\
&\quad\overset{\text{Hipótese de indução}}{\leq} \left[\prod_{i+j=2d-2}[[B,_i C],[B,_j C]],C,C,\cdots\right] \\
&\quad\overset{(**)}{=} \prod_{i+j=2d-2}[[[B,_i C],[B,_j C],C],C,\cdots] \\
&\quad\overset{\text{Proposição 1.2.6}}{\leq} \prod_{i+j=2d-2}[[[B,_j C],C,[B,_i C]][C,[B,_i C],[B,_j C]],C,\cdots] \\
&\quad= \prod_{i+j=2d-2}[[[B,_j C,C],[B,_i C]][[B,_i C,C],[B,_j C]],C,\cdots] \\
&\quad= \prod_{i+j=2d-2}[[[B,_{j+1} C],[B,_i C]][[B,_{i+1} C],[B,_j C]],C,\cdots]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(***)}{=} \prod_{i+j=2d-2} [[[B,_{j+1} C],[B,_i C]],C,\cdots][[[B,_{i+1} C],[B,_j C]],C,\cdots] \\
&= \prod_{i+j=2d-1} [[B,_i C],[B,_j C],C,\cdots].
\end{aligned}
$$

Em $(**)$ usamos que $[[B,_i C],[B,_j C]] \trianglelefteq A$ para $i+j = 2d-2$. Já em $(***)$ usamos que $[[B,_{j+1} C],[B,_i C]],[[B,_{i+1} C],[B,_j C]] \trianglelefteq A$. Portanto, segue por indução que (1.1) é verdade. Perceba agora que,

$$
\begin{aligned}
&\prod_{i+j=2d-1} [[B,_i C],[B,_j C],C,\cdots] \\
&\overset{i \text{ ou } j \geq d}{\leq} [[[B,_d C],B],C,\cdots] \\
&\leq [[[\gamma_d(A),C],B],C,\cdots] \\
&\leq [[[B,B],B],C,\cdots].
\end{aligned}
$$

Assim, $\gamma_{d+1}(C) \leq \gamma_2(B)$, então $\gamma_{(d+1)+(2d-1)}(C) \leq \gamma_3(B)$. Um cálculo similar mostra que $\gamma_{(d+1)+(2d-1)+(3d-2)}(C) \leq \gamma_4(B)$, assim por diante. Provaremos por indução sobre c que $\gamma_{f(c,d)+1}(C) \leq \gamma_{c+1}(B)$, onde $1+f(c,d) = 1+dc(c+1)/2 - c(c-1)/2$. Para $c=1$, tem-se que $1+f(1,d) = d+1$. Vimos anteriormente que $\gamma_{1+f(1,d)}(C) \leq \gamma_2(B)$. Suponha com hipótese de indução que $\gamma_{f(k,d)+1}(C) \leq \gamma_{k+1}(B)$, sempre que $k < c$. Note que,

$$
\begin{aligned}
\gamma_{f(c,d)+1}(C) &= [\gamma_{f(c-1,d)+1}(C), \underbrace{C,\cdots,C}_{cd-(c-1)}] \\
&\overset{\text{Hipótese de indução}}{\leq} [\gamma_c(B), \underbrace{C,\cdots,C}_{cd-(c-1)}] \\
&\overset{(*)}{\leq} \gamma_{c+1}(B).
\end{aligned}
$$

Em $(*)$ usamos um raciocínio similar do feito acima. Por hipótese, B é nilpotente de classe c, então $\gamma_{c+1}(B) = 1$, o que implica em $\gamma_{f(c,d)+1}(C) = 1$. Portanto, C é nilpotente de classe $f(c,d)$. □

Teorema 1.2.11 (Schmidt)**.** *Se todo subgrupo próprio de um grupo G é nilpotente, então G é solúvel.*

Demonstração. Será omitida, mas pode ser consultada em [5], página 280. □

Seja $\mathcal{K}$ uma classe de grupos que contém o grupo trivial e todas as imagens isomórficas de grupos que estão em $\mathcal{K}$. Para qualquer grupo G

$$\mathcal{O}_{\mathcal{K}}(G) := \prod_{A \trianglelefteq G} A \quad (A \in \mathcal{K})$$

é um subgrupo característico de G chamado de **$\mathcal{K}$-radical**.

Proposição 1.2.12. *$\mathcal{K}$ é a classe de grupos nilpotentes. Para cada grupo G finito*

$$\mathcal{O}_{\mathcal{K}}(G) = \langle A \mid A \textit{ subnormal em } G, A \in \mathcal{K}\rangle.$$

Em particular, $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}(G)$ é o maior subgrupo subnormal de G que está em $\mathcal{K}$.

Demonstração. Será omitida, mas pode ser consultada em [10], página 130. □

Apresentaremos agora um resultado que é conhecido como extensão dos Teoremas de Sylow para grupos solúveis. Para isso, exibiremos alguns conceitos.

Sejam π um conjunto de números primos e π' o complementar de π no conjunto de todos os números primos. Dizemos que um elemento x de um grupo G é chamado um **π-elemento** se a ordem de x é divisível apenas por primos em π. Em particular, temos a noção de um p-elemento, p primo. Dizemos que um grupo G é um **π-grupo** se todo elemento de G é um π-elemento, em particular, se G é um grupo finito, G é um π-grupo se $|G|$ é divisível apenas por primos em π. Similarmente, temos a noção de π'-grupo. Um subgrupo H de um grupo finito G é um **π-subgrupo de Hall** se H é um π-grupo e se para todo primo q que divide $[G : H]$ tem-se que $q \in \pi'$. Se $\pi = \{p\}$, p primo, o π-subgrupo de Hall é chamado de p-subgrupo de Sylow. Para um dado primo p, dizemos que um elemento x de um grupo G é um **p'-elemento** quando p não divide a ordem de x e dizemos que G é um **p'-grupo** quando p não divide a ordem de G. Desse modo, tem-se a noção de p'-subgrupo de Hall. Finalmente, o mínimo múltiplo comum entre as ordens dos elementos do grupo finito G é chamado **expoente** de G.

Teorema 1.2.13 (P. Hall)**.** *Se G é um grupo solúvel finito, então*

(i) Para cada conjunto de primos π, existe um π-subgrupo de Hall de G;

(ii) Quaisquer dois π-subgrupos de Hall de G são conjugados;

(iii) Qualquer π-subgrupo de G está contido em um π-subgrupo de Hall de G.

Demonstração. Será omitida, mas pode ser consultada em [2], página 231. □

Na definição de $\mathcal{K}$-radical, se a classe $\mathcal{K}$ é igual a classe $\mathcal{P}$ de todos os p-grupos, denotaremos o subgrupo $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}(G)$ por $\mathcal{O}_p(G)$. Observe que $\mathcal{O}_p(G)$ é o maior p-subgrupo normal do grupo G.

Sejam G um grupo finito e p um primo divisor da ordem de G. Definimos a **p-série** de G como

$$1 \leq \mathcal{O}_{p'}(G) \leq \mathcal{O}_{p',p}(G) \leq \mathcal{O}_{p',p,p'}(G) \leq \cdots$$

onde $\mathcal{O}_{p'}$ é o maior p'-subgrupo normal de G e $\mathcal{O}_{p',p}(G)$ é a imagem inversa de $\mathcal{O}_p(G/\mathcal{O}_{p'}(G))$ em G, isto é,

$$\mathcal{O}_p\left(\frac{G}{\mathcal{O}_{p'}(G)}\right) = \frac{\mathcal{O}_{p',p}(G)}{\mathcal{O}_{p'}(G)}.$$

De maneira semelhante, $\mathcal{O}_{p',p,p'}(G)$ será a imagem inversa de $\mathcal{O}_{p'}(G/\mathcal{O}_{p',p}(G))$ em G e assim por diante. Se G é um grupo finito solúvel, chamaremos o número de fatores da p-série de **p-comprimento** de G e o denotaremos por $l_p(G)$.

Seja p um número primo. Um grupo finito G será chamado **p-solúvel** se G possui uma série de composição cujos fatores são p-grupos ou p'-grupos.

Finalizaremos essa seção com o seguinte Teorema.

Teorema 1.2.14. *Se um grupo finito G é p-solúvel e $exp(P)$ é o expoente do seu p-subgrupo de Sylow P, então o p-comprimento $l_p(G)$ é limitado em termos de $exp(P)$.*

Demonstração. Será omitida, mas pode ser consultada em [8], página 264. □

1.3 Subgrupo de Fitting e subgrupo de Frattini

Na definição de $\mathcal{K}$-radical, se $\mathcal{K}$ é a classe dos grupos nilpotentes, chamaremos o subgrupo $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}(G)$ de **de Fitting** de G. Nesse caso denotaremos esse subgrupo por $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}(G) := F(G)$. Se o grupo G é finito, segue pelo Teorema de Fitting que $F(G)$ é nilpotente e evidentemente é o único maior subgrupo nilpotente normal de G. Usando esse conceito, a **série de Fitting** é assim definida: fixamos $F_0(G) := \{1\}$ e definimos

$$\frac{F_{i+1}(G)}{F_i(G)} := F\left(\frac{G}{F_i(G)}\right) \quad (i \geq 1).$$

Se existir um número inteiro positivo n tal que $F_n(G) = G$, chamaremos o menor desses números que tem essa propriedade de **comprimento de Fitting**. O **subgrupo de Fitting generalizado** de um grupo G é o produto do subgrupo de Fitting e todos os subgrupos quase simples subnormais de G. Uma propriedade importante é: o subgrupo de Fitting generalizado de um grupo finito contém o seu centralizador (a prova desta propriedade pode ser consultada em [10], página 144).

Um elemento g de um grupo G é chamado **elemento de Engel à direita** se para cada $x \in G$ existe um inteiro positivo $n = n(g, x)$ tal que, $[g,_n x] = 1$. Por outro lado, dizemos que g é um **elemento de Engel à esquerda** se para cada $x \in G$ existe um inteiro positivo $n = n(g, x)$ de modo que, $[x,_n g] = 1$. Porém, se g é simultaneamente um elemento de Engel à direita e à esquerda, dizemos apenas que g é um elemento de Engel, como visto na introdução.

Teorema 1.3.1 (Baer)**.** *Seja G um grupo finito. Então os elementos de Engel à direita são exatamente os elementos do subgrupo de Fitting de G.*

Demonstração. Será omitida, mas pode ser consultada em [5], página 298. □

Outro subgrupo importante para nosso estudo, é o **subgrupo de Frattini** $\Phi(G)$, que é definido como o resultante da interseção de todos os subgrupos maximais de um grupo G. Se G não possui subgrupos maximais, por convenção $\Phi(G) = G$. O subgrupo $\Phi(G)$ é característico em G (veja [14], página 135). A seguir apresentaremos mais algumas propriedades desse subgrupo.

Proposição 1.3.2 (Frattini)**.** *Em qualquer grupo G, o subgrupo de Frattini é igual ao conjunto formado pelos elementos não geradores de G. Aqui um elemento $g \in G$ é chamado **não gerador** se $G = \langle g, X\rangle$ sempre implica em $G = \langle X\rangle$, onde X é um subconjunto de G.*

Demonstração. Será omitida, mas pode ser consultada em [14], página 135. □

Dizemos que um grupo abeliano G é **abeliano elementar** se existe um primo p tal que os elementos de G, diferentes da identidade, são de ordem p.

Proposição 1.3.3. *Se G é um p-grupo finito, então $G/\Phi(G)$ é um p-grupo abeliano elementar. Em particular, se $\Phi(G) = 1$, então G é abeliano elementar.*

Demonstração. Será omitida, mas pode ser consultada em [2], página 174. □

Teorema 1.3.4. *Seja α um automorfismo de G onde $(|\alpha|, |\Phi(G)|) = 1$. Suponha que, $\alpha(g)\Phi(G) = g\Phi(G)$ para todo $g \in G$, ou seja, α analisado em $G/\Phi(G)$ é o automorfismo identidade. Então $\alpha = 1$.*

Se G é um p-grupo e α é um automorfismo de G onde $\alpha(g)\Phi(G) = g\Phi(G)$ para todo $g \in G$, então a ordem de α é uma potência de p.

Demonstração. Disponível em [5], página 275. □

1.4 Grupos Finitos Quase Engel

Iniciaremos essa seção fazendo algumas observações referente ao subgrupo

$$E_n(g) = \langle [x,_n g] \mid x \in G\rangle$$

onde n é um inteiro positivo e G é um grupo finito. Seja N um subgrupo normal de G. Como no homomorfismo canônico $\pi : G \longrightarrow G/N$ vale que $\pi([x,_n g]) = [\pi(x),_n \pi(g)]$, para cada $x, g \in G$, temos que o subgrupo $E_n(\pi(g)) = \pi(E_n(g))$. Para cada elemento g de um subgrupo H de G tem-se que $E_n(g)$ construído em H está contido em $E_n(g)$ construído em G. Recorde-se da introdução que, $E(g) = \cap_{n=1}^{\infty} E_n(g)$. Assim, para cada elemento g de um subgrupo H de G, tem-se que $E(g)$ construído em H está contido em $E(g)$ construído em G. Se $|E(g)| \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, então $|E(\pi(g))| \leq m$. Consequentemente, essa desigualdade é preservada para todo subgrupo de G/N.

Vamos agora enunciar e provar quatro Lemas que serão utilizados na demonstração do Teorema B.

Lema 1.4.1. *Sejam G um grupo finito de comprimento de Fitting 2 e I o conjunto dos primos que divide a ordem de $F(G)$. Então,*

$$\gamma_\infty(G) = \prod_{q \in I} [F_q, G_{q'}] \qquad (1)$$

onde F_q é um q-subgrupo de Sylow de $F(G)$ e $G_{q'}$ é um q'-subgrupo de Hall de G.

Demonstração. Por hipótese, G é um grupo finito e o comprimento de série de Fitting é 2, ou seja,

$$\frac{G}{F(G)} = F\left(\frac{G}{F(G)}\right) \tag{1.2}$$

então $G/F(G)$ é nilpotente. Perceba que $G_{q'}F(G)/F(G)$ é normal em $G/F(G)$, o que implica em, $G_{q'}F(G)$ ser normal em G. Note que, $G_{q'}F(G) = G_{q'}F_q$. Assim, para todo $x \in G$ tem-se que

$$(G_{q'})^x F_q = (G_{q'}F_q)^x = G_{q'}F_q.$$

Logo, $(G_{q'})^x \leq G_{q'}F_q$ para cada $x \in G$. Uma vez que $[F_q, G_{q'}] \trianglelefteq F_q$ e $[F_q, G_{q'}] \trianglelefteq G_{q'}$, então $[F_q, G_{q'}] \trianglelefteq G_{q'}F_q$. Consideremos o grupo $G_{q'}F_q/[F_q, G_{q'}]$. Observe que para cada $f \in F_q$ e $g \in G_{q'}$ tem-se que

$$f^g[F_q, G_{q'}] = ff^{-1}f^g[F_q, G_{q'}] = f[F_q, G_{q'}].$$

Como $(G_{q'})^x \cong G_{q'}$ e $F_q = (F_q)^x$, para cada $x \in G$, concluímos que $(G_{q'})^x$ tem a mesma ação de $G_{q'}$ sobre F_q no quociente $G_{q'}F_q/[F_q, G_{q'}]$. Desse modo,

$$\begin{aligned}\frac{[(G_{q'})^x, F_q][F_q, G_{q'}]}{[F_q, G_{q'}]} &= \left[\frac{(G_{q'})^x}{[F_q, G_{q'}]}, \frac{F_q}{[F_q, G_{q'}]}\right] \\ &= \left[\frac{G_{q'}}{[F_q, G_{q'}]}, \frac{F_q}{[F_q, G_{q'}]}\right] \\ &= \frac{[G_{q'}, F_q][F_q, G_{q'}]}{[F_q, G_{q'}]} \\ &= [F_q, G_{q'}].\end{aligned}$$

Assim,

$$[G_{q'}, F_q] = [(G_{q'})^x, F_q] = [G_{q'}, F_q]^x \quad \text{para cada} \quad x \in G.$$

Logo, $[F_q, G_{q'}] \trianglelefteq G$. Decorre desse fato que subgrupo comutador $[F_q, G_{q'}]$ não depende da escolha de um q'-subgrupo de Hall de G de modo que o produto em (1) é bem definido, pois G é solúvel por (1.2) e assim seus q'-subgrupos de Hall são conjugados (Teorema 1.2.13).

Seja q qualquer primo e G_q um q-subgrupo de Sylow de G. Afirmamos que módulo $[F_q, G_{q'}]$ o grupo $G = G_q G_{q'}$ age sobre $F_q/[F_q, G_{q'}]$ como a imagem de G_q. De fato, sejam $g \in G$ e $f \in F_q$. De $g \in G$ implica que existem $g_1 \in G_q$ e $g_2 \in G_{q'}$ tais que $g = g_1 g_2$. Note que,

$$\begin{aligned} f^g &= f^{g_1 g_2} \\ &= g_2^{-1} g_1^{-1} f g_1 g_2 \\ &= g_2^{-1} f^{g_1} g_2 \\ &= f^{g_1} (f^{g_1})^{-1} g_2^{-1} f^{g_1} g_2 \\ &= f^{g_1} [f^{g_1}, g_2].\end{aligned}$$

Como F_q é característico em $F(G)$ e $F(G) \trianglelefteq G$, tem-se que $f^{g_1} \in F_q$, assim $[f^{g_1}, g_2] \in [F_q, G_{q'}]$. Logo, $f^g \equiv f^{g_1} (mod\ [F_q, G_{q'}])$. Considere agora $\overline{g} = \overline{g_1 g_2} \in G/[F_q, G_{q'}]$ e $\overline{f} \in F_q/[F_q, G_{q'}]$. Observe que,

$$\overline{f}^{\overline{g}} = \overline{f}^{\overline{g_1 g_2}} = \overline{f^{g_1 g_2}} = \overline{f^{g_1}} = \overline{f}^{\overline{g_1}}.$$

Então, segue que a imagem de G_q no grupo $G/[F_q, G_{q'}]$ age por conjugação sobre $F_q/[F_q, G_{q'}]$.

Mostraremos agora que o grupo quociente $G/\prod_q [F_q, G_{q'}]$ é nilpotente. Consideremos os grupos G, G_q e F_q módulo $[F_q, G_{q'}]$. Dizer que G possui a mesma ação de G_q sobre F_q é equivalente a afirmar que $[G, F_q] = [G_q, F_q]$. Como G_q é um q-grupo, então G_q é nilpotente. Assim, existe $t(q) \in \mathbb{N}$ tal que, $1 = [F_{q},_{t(q)} G_q] = [F_{q},_{t(q)} G]$. Daí, $F_q \leq Z_{t(q)}(G)$. A partir de agora, até o final deste parágrafo, todos os grupos serão considerados módulo $\prod_q [F_q, G_{q'}]$. Tomemos $t = \max\{t(q) \mid q \text{ primo divisor da ordem de } F(G)\}$.

Então, $F_q \leq Z_t(G)$ para todo q primo divisor da ordem de $F(G)$. Desse modo, $F(G) = F_{q_1} \times \cdots \times F_{q_n} \leq Z_t(G)$, onde todos os q_i são primos e divisores de $|F(G)|$. Como G é um grupo que possui comprimento de Fitting 2, temos que $F(G/F(G)) = G/F(G)$, ou seja, $G/F(G)$ é nilpotente. Note que, $Z_t(G)/F(G) \trianglelefteq G/F(G)$ e que

$$\frac{\frac{G}{F(G)}}{\frac{Z_t(G)}{F(G)}} \cong \frac{G}{Z_t(G)}.$$

Assim, $G/Z_t(G)$ é nilpotente, o que implica que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\frac{Z_{m+t}(G)}{Z_t(G)} = Z_m\left(\frac{G}{Z_t(G)}\right) = \frac{G}{Z_t(G)} \ \Rightarrow \ Z_{m+t}(G) = G.$$

Portanto, G módulo $\prod_q [F_q, G_{q'}]$ é nilpotente.

Observe que,

$$\frac{\gamma_\infty(G)\prod_q[F_q, G_{q'}]}{\prod_q[F_q, G_{q'}]} \leq \gamma_\infty\left(\frac{G}{\prod_q[F_q, G_{q'}]}\right) = \prod_q[F_q, G_{q'}] \Rightarrow \gamma_\infty(G) \leq \prod_q[F_q, G_{q'}].$$

Para mostrar a outra inclusão, note que $G_{q'}$ age por conjugação sobre F_q. Uma vez que $(|F_q|, |G_{q'}|) = 1$, tem - se que essa ação é coprima. Então, segue pelo Lema 1.1.8 que $[[F_q, G_{q'}], G_{q'}] = [F_q, G_{q'}]$. Assim, $[F_q, G_{q'}] \leq \gamma_\infty(G)$ para cada q. Logo $\prod_q[F_q, G_{q'}] \leq \gamma_\infty(G)$. O que prova o Lema. □

Lema 1.4.2. *Sejam G um grupo finito, $P \trianglelefteq G$ um p-grupo e $g \in G$ um p'-elemento. Então, $[P, g] \leq E(g)$.*

Demonstração. Uma vez que $P \trianglelefteq G$, temos que $[P, g] \leq P$, em outras palavras, $[P, g]$ é um p-grupo. Então, $V = [P, g]/\Phi\left([P, g]\right)$ é um p-grupo abeliano elementar.

Note que $\alpha_g : x \in P \longmapsto x^g \in P$ é um automorfismo. Assim $\alpha_g|_{[P,g]}$ é um automorfismo de $[P, g]$ onde $\Phi([P, g])$ é $\alpha_g|_{[P,g]}$-invariante. Como $\Phi([P, g]) \trianglelefteq [P, g]$, então para cada $x \in [P, g]$ é bem definida uma aplicação $\overline{\alpha}_g : x\Phi([P, g]) \in V \longmapsto x^g\Phi([P, g]) \in V$. Claramente $\overline{\alpha}_g$ é um automorfismo de V.

Como $(|\alpha_g|, |P|) = 1$, segue pelo Lema 1.1.8 que,

$$[P, \alpha_g] = [[P, \alpha_g], \alpha_g].$$

Segue da Observação 1.1.4 que, $[P, \alpha_g] = [P, g]$. Uma vez que $\Phi([P, g])$ é $\alpha_g|_{[P,g]}$-invariante, então para todo $v \in [P, g]$, tem-se que,

$$\overline{[v, \alpha_g]} = \overline{(v^{-1})\alpha_g(v)} = (\overline{v})^{-1}\overline{\alpha}_g(\overline{v}) = [\overline{v}, \overline{\alpha}_g] \quad (\overline{v} \in V).$$

Daí,
$$\frac{[P,g]}{\Phi([P,g])} = \frac{[P,\alpha_g]}{\Phi([P,g])} = \frac{[[P,\alpha_g],\alpha_g]}{\Phi([P,g])} = \left[\frac{[P,\alpha_g]}{\Phi([P,g])}, \overline{\alpha}_g\right] = [V,\overline{\alpha}_g].$$
Logo $V = [V,g]$, uma vez que $[V,\overline{\alpha}_g] = [V,g]$, pela Observação 1.1.4. Como $(|\overline{\alpha}_g|, |V|) = 1$ e V é um grupo abeliano, segue pelo Teorema 1.1.9 de Fitting que, $V = [V,\overline{\alpha}_g] \times C_V(\overline{\alpha}_g)$. Segue pelo produto direto anterior que $C_V(\overline{\alpha}_g) = 1$. Assim,

$$C_V(\overline{\alpha}_g) = \{v \in V \mid \overline{\alpha}_g(v) = v\} = \{v \in V \mid v^g = v\} = C_V(g)$$

e, então, $C_V(g) = 1$.

Sejam $v, w \in V$. Como V é abeliano tem-se que,

$$[vw, g] = [v,g]^w[w,g] = [v,g][w,g]$$

e
$$[v,g]^{-1} = [g,v] = (v^{-1})^g v = v(v^{-1})^g = [v^{-1}, g].$$

Desse modo, $V = [V,g] = \{[v,g] \mid v \in V\}$ e por consequência $V = \{[v,_n g] \mid v \in V\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, considere o subgrupo $E(\overline{g})$ construído pela imagem de $g \in G$ no grupo $\langle P, g\rangle/\Phi([P,g])$. Uma vez que $E(\overline{g})$ é a imagem de $E(g)$ em $\langle P,g\rangle/\Phi([P,g])$, então $E(\overline{g}) = E(g)\Phi([P,g])/\Phi([P,g])$. Segue que $V \leq E(\overline{g})$, o que implica em $[P,g] \leq E(g)\Phi([P,g])$, e portanto, $[P,g] \leq E(g)$, já que $\Phi([P,g])$ é construído pelos elementos não geradores de $[P,g]$ (Proposição 1.3.2).

□

Lema 1.4.3. *Sejam V um q-grupo abeliano elementar e U um q'-grupo de automorfismos de V. Se $|[V,u]| \leq m$ para cada $u \in U$, então $|[V,U]|$ é m-limitado e por consequência, $|U|$ é também m-limitado.*

Demonstração. Inicialmente, suponha que U é abeliano. Perceba que se $U = \{1\}$, o resultado é óbvio. Então vamos assumir que $U \neq \{1\}$. Desse modo, existe $u_1 \in U$ tal que $[V,u_1] \neq 1$. Como V é um q-grupo abeliano elementar e u_1 é um automorfismo de V que é um q'-elemento, segue pelo Teorema 1.1.9 de Fitting que

$$V = [V,u_1] \oplus C_V(u_1). \tag{1.3}$$

Para cada $v \in V,\ w \in C_V(u_1)$ e $u \in U$ vale que,

$$\begin{aligned} u([v,u_1]) &\overset{\text{Observação 1.1.4}}{=} u(v^{-1}u_1(v)) \\ &= u(v^{-1})u(u_1(v)) \\ &\overset{U \text{ é abeliano}}{=} u(v)^{-1}u_1(u(v)) \\ &= [u(v),u_1] \in [V,u_1] \end{aligned} \tag{1.4}$$

e

$$\begin{aligned} u(w) &\overset{w\in C_V(u_1)}{=} u(u_1(w)) \\ &\overset{U \text{ é abeliano}}{=} u_1(u(w)) \;\Rightarrow\; u(w) \in C_V(u_1). \end{aligned}$$

Assim, concluímos que $[V, u_1]$ e $C_V(u_1)$ são subgrupos U-invariantes. Consequentemente, para cada $u \in U$, a aplicação $\varphi_u : v \in [V, u_1] \longmapsto v^u \in [V, u_1]$ é um automorfismo. Se

$$C_U([V, u_1]) = \{u \in U \mid u(v) = v, \text{ para cada } v \in [V, u_1]\} = \{1\}.$$

Então, a aplicação

$$\varphi : u \in U \longmapsto \varphi_u \in Aut([V, u_1]) \tag{1.5}$$

é um monomorfismo. De fato, sejam $u, w \in U$. Para cada $v \in [V, u_1]$ temos que,

$$\varphi_{uw}(v) = v^{uw} = (uw)(v) = u(w(v)) = (\varphi_u \circ \varphi_w)(v).$$

Desse modo,

$$\varphi(uw) = \varphi_{uw} = \varphi_u \varphi_w = \varphi(u)\varphi(w).$$

Logo, φ é um homomorfismo de grupos. Com $C_U([V, u_1]) = \{1\}$, tem-se que $Ker(\varphi) = \{1\}$ e, portanto, φ é um monomorfismo. Por hipótese, $|[V, u_1]| \leq m$, então $|Aut([V, u_1])|$ é m-limitado. Segue do monomorfismo (1.5), que $|U|$ é m-limitado. Uma vez que,

$$[V, U] = \langle [V, u] \mid u \in U \rangle$$

então $|[V, U]|$ é também m-limitado. Se $C_U([V, u_1]) \neq \{1\}$, então existe $u_2 \in C_U([V, u_1])$ tal que $u_2 \neq 1$. Como $\langle u_1, u_2 \rangle \leq U \leq Aut(V)$, então $\langle u_1, u_2 \rangle$ age por automorfismo sobre V. Como $(|\langle u_1, u_2 \rangle|, |V|) = 1$, segue novamente pelo Teorema 1.1.9 de Fitting que

$$V = [V, \langle u_1, u_2 \rangle] \oplus C_V(\langle u_1, u_2 \rangle).$$

Afirmamos que $[V, \langle u_1, u_2 \rangle] = [V, u_1] \oplus [V, u_2]$. De fato,

(i) $[V, \langle u_1, u_2 \rangle] = [V, u_1][V, u_2]$;

Sejam $v \in V$ e $s, r \in \mathbb{N}$. Note que,

$$\begin{aligned}
&[v, u_1^s u_2^r] \\
&= [v, u_2^r][v, u_1^s]^{u_2^r} \\
&= [v, u_2 u_2^{r-1}][u_2^r(v), u_1 u_1^{s-1}] \\
&= [v, u_2^{r-1}][v, u_2]^{u_2^{r-1}}[u_2^r(v), u_1^{s-1}][u_2^r(v), u_1]^{u_1^{s-1}} \\
&= [v, u_2 u_2^{r-2}][u_2^{r-1}(v), u_2][u_2^r(v), u_1 u_1^{s-2}][(u_1^{s-1}u_2^r)(v), u_1] \\
&= [v, u_2^{r-2}][v, u_2]^{u_2^{r-2}}[u_2^{r-1}(v), u_2][u_2^r(v), u_1^{s-2}][u_2^r(v), u_1]^{u_1^{s-2}}[(u_1^{s-1}u_2^r)(v), u_1] \\
&= [v, u_2^{r-2}][u_2^{r-2}(v), u_2][u_2^{r-1}(v), u_2][u_2^r(v), u_1^{s-2}][(u_1^{s-2}u_2^r)(v), u_1][(u_1^{s-1}u_2^r)(v), u_1] \\
&\quad \vdots \\
&= [v, u_2][u_2(v), u_2]\cdots[u_2^{r-1}(v), u_2][u_2^r(v), u_1][(u_1 u_2^r)(v), u_1]\cdots[(u_1^{s-1}u_2^r)(v), u_1]
\end{aligned}$$

é um elemento de $[V, u_1][V, u_2]$. Logo, $[V, \langle u_1, u_2 \rangle] \subseteq [V, u_1][V, u_2]$. Por outro lado, temos que

$$[V, \langle u_1, u_2 \rangle] = \langle [V, x] \mid x \in \langle u_1, u_2 \rangle \rangle$$

então, claramente $[V, u_1], [V, u_2] \subseteq [V, \langle u_1, u_2 \rangle]$ e, portanto, $[V, \langle u_1, u_2 \rangle] = [V, u_1][v, u_2]$.

(ii) $[V, u_1], [V, u_2] \trianglelefteq [V, \langle u_1, u_2 \rangle]$;

Segue do fato de V ser um grupo abeliano.

(iii) $[V, u_1] \cap [V, u_2] = \{1\}$.

Suponha que $[V, u_1] \cap [V, u_2] \neq \{1\}$. Então, existe $v \in [V, u_1] \cap [V, u_2]$ tal que $v \neq 1$. De $v \in [V, u_2]$, segue do produto direto $V = [V, u_2] \oplus C_V(u_2)$ que $u_2(v) \neq v$. Por outro lado, $v \in [V, u_1]$ e $1 \neq u_2 \in C_U([V, u_1])$, então $u_2(v) = v$. O que é uma contradição. Logo, $[V, u_1] \cap [V, u_2] = \{1\}$.

Segue de (i), (ii) e (iii) que

$$[V, \langle u_1, u_2 \rangle] = [V, u_1] \oplus [V, u_2].$$

Assim,

$$V = [V, u_1] \oplus [V, u_2] \oplus C_V(\langle u_1, u_2 \rangle).$$

Se $C_U([V, u_1] \oplus [V, u_2]) \neq \{1\}$, então existe $u_3 \in C_U([V, u_1] \oplus [V, u_2])$, $u_3 \neq 1$, de modo que

$$V = [V, u_1] \oplus [V, u_2] \oplus [V, u_3] \oplus C_V(\langle u_1, u_2, u_3 \rangle)$$

e assim por diante. Como V é um grupo finito, existe um inteiro positivo k tal que $C_U([V, u_1] \oplus \cdots \oplus [V, u_k]) = \{1\}$. Afirmamos que k é m-limitado. Com efeito, suponha que k não seja m-limitado e considere o elemento $w = u_1 \cdots u_k \in U$. Para cada $i = 1, \cdots, k$

note que,

$$
\begin{aligned}
&[[V,u_i],w]\\
&= [[V,u_i],u_1\cdots u_k]\\
&= [[V,u_i],u_2\cdots u_k][[V,u_i],u_1]^{u_2\cdots u_k}\\
&= [[V,u_i],u_3\cdots u_k][[V,u_i],u_2]^{u_3\cdots u_k}[[V,u_i],u_1]^{u_2\cdots u_k}\\
&\quad\vdots\\
&= [[V,u_i],u_k][[V,u_i],u_{k-1}]^{u_k}\cdots[[V,u_i],u_i]^{u_{i+1}\cdots u_k}\cdots[[V,u_i],u_1]^{u_2\cdots u_k}\\
&= [[V,u_i],u_k][[u_k(V),u_i],u_{k-1}]\cdots[[(u_{i+1}\cdots u_k)(V),u_i],u_i]\cdots[[(u_2\cdots u_k)(V),u_i],u_1]\\
&= \underbrace{[[V,u_i],u_k]}_{\subseteq[V,u_i]}\underbrace{[[V,u_i],u_{k-1}]}_{\subseteq[V,u_i]}\cdots\underbrace{[[V,u_i],u_i]}_{=[V,u_i]}\cdots\underbrace{[[V,u_i],u_1]}_{\subseteq[V,u_i]}\\
&= [V,u_i].
\end{aligned}
$$

Assim temos que $[V,u_i]\subseteq[V,w]$ para cada $i=1\cdots k$. Então

$$[V,u_1]\oplus\cdots\oplus[V,u_k]\leq[V,w]$$

Como $[V,u_i]\neq\{1\}$ para todo $i=1\cdots k$, implica que $|[V,w]|>m$. O que é uma contradição. Segue que k é m-limitado e, assim, $|[V,u_1]\oplus\cdots\oplus[V,u_k]|$ é m-limitado. Como $[V,u_1]\oplus\cdots\oplus[V,u_k]$ é U-invariante, então para cada $u\in U$ a aplicação

$$\psi_u : v\in[V,u_1]\oplus\cdots\oplus[V,u_k]\longmapsto v^u\in[V,u_1]\oplus\cdots\oplus[V,u_k]$$

é um automorfismo. De maneira análoga a prova de (1.5) mostra-se que a aplicação

$$\psi : u\in U\longmapsto\psi_u\in Aut([V,u_1]\oplus\cdots\oplus[V,u_k])$$

é um monomorfismo. Então, $U\lesssim Aut([V,u_1]\oplus\cdots\oplus[V,u_k])$. Uma vez que $|[V,u_1]\oplus\cdots\oplus[V,u_k]|$ é m-limitado, segue que $|Aut([V,u_1]\oplus\cdots\oplus[V,u_k])|$ também é. Consequentemente, $|U|$ e $|[V,U]|$ são m-limitados.

Consideraremos agora o caso geral. Vamos iniciar mostrando que cada elemento $u\in U$ age fielmente sobre $[V,u]$. Seja $u^t\in\langle u\rangle$, onde $t\in\mathbb{N}$. De maneira análoga a (1.4), mostra-se que $[V,u]$ é $\langle u\rangle$-invariante. Desse modo, a aplicação $\phi_{u^t} : v\in[V,u]\longmapsto v^{u^t}\in[V,u]$ é um automorfismo. Considere a aplicação

$$\phi : u^t\in\langle u\rangle\longmapsto\phi_{u^t}\in Aut([V,u]). \tag{1.6}$$

De maneira análoga a prova de (1.5) mostra-se que ϕ é um homomorfismo. Seja $u^t\in Ker(\phi)$. Então, u^t fixa todos os elementos de $[V,u]$. Segue pelo Teorema 1.1.9 de Fitting que $V = [V,u] \oplus C_V(u)$. Vamos mostrar que u^t fixa todos os elementos de V. Perceba que para isso, resta mostrar que u^t fixa todos os elementos de $C_V(u)$. Tomemos $v \in C_V(u)$ arbitrário. Note que,

$$u^t(v) = u^{t-1}(u(v)) = u^{t-2}(u(v)) = \cdots = u(v) = v.$$

Logo u^t fixa todos os elementos de $C_V(u)$ e, portanto, fixa todos os elementos de V. Como $u^t \in Aut(V)$, segue que $u^t = 1$. Assim, provamos que essa ação é fiel. De (1.6) podemos concluir também que $\langle u \rangle \lesssim Aut([V,u])$, assim, segue que $|\langle u \rangle|$ é m-limitado. Uma vez que o expoente de um grupo é o mínimo múltiplo comum entre as ordens de todos seus elementos, segue claramente que o expoente de U é m-limitado.

Sejam P um p-subgrupo de Sylow de U e M um subgrupo abeliano normal maximal de P. Segue da parte inicial desta prova que $|[V,M]|$ é m-limitado. Vamos mostrar agora que M age fielmente sobre $[V,M]$. De maneira similar aos casos anteriores, mostra-se que para cada $u \in M$ a aplicação $\rho_u : v \in [V,M] \longmapsto v^u \in [V,M]$ é um automorfismo. De maneira semelhante a prova (1.6), mostra-se que a aplicação

$$\rho : u \in M \longmapsto \rho_u \in Aut([V,M]) \tag{1.7}$$

é um monomorfismo. Então, $Ker(\rho) = \{1\}$ e, portanto, M age fielmente sobre $[V,M]$. Resulta também do monomorfismo (1.7) que $M \lesssim Aut([V,M])$. Como $|[V,M]|$ é m-limitado, então $|Aut([V,M])|$ também é. Consequentemente, $|M|$ é m-limitado. Provaremos agora que $|P|$ é m-limitado. Para isso, mostraremos inicialmente que $C_P(M) = M$. Como M é abeliano, então $M \leq C_P(M) \trianglelefteq P$. Suponha que $|C_P(M)/M| > p$. Como

$$Z\left(\frac{C_P(M)}{M}\right) \trianglelefteq \frac{P}{M}$$

então existe um subgrupo normal abeliano H de P tal que, $Z(C_P(M)/M) = H/M$, o que implica em $M \lneqq H \trianglelefteq P$. Assim, temos uma contradição em relação a maximalidade do subgrupo M. Então, segue que $C_P(M) \leq M$ e portanto, $C_P(M) = M$. Pela Proposição 1.1.2 temos que

$$\frac{P}{M} = \frac{N_P(M)}{C_P(M)} \lesssim Aut(M).$$

Então $|P/M|$ é m-limitado, pois a ordem do $Aut(M)$ é m-limitado. Como $|P| = |P/M||M|$, temos que $|P|$ é m-limitado. Como o número de divisores primos da ordem de U é m-limitado, decorre que $|U|$ é m-limitado. Uma vez que

$$[V,U] = \sum_{u \in U} [V,u]$$

obtemos que $|[V,U]|$ é m-limitado.

□

Lema 1.4.4. *Se G é um grupo finito tal que $|E(g)| \leq m$ para todos os $g \in G$, então $G/F(G)$ tem expoente m-limitado.*

Demonstração. Sejam $g, x \in G$ e $n, k \in \mathbb{N}$. Como

$$\left[x,_n g^k\right]^g = \left[x^g,_n (g^k)^g\right] = \left[x^g,_n g^k\right] \in E(g^k)$$

segue que o subgrupo $E(g^k)$ é g-invariante para qualquer k inteiro positivo.

Seja k o máximo expoente de $Aut(H)$, onde H são os grupos de ordem no máximo m. Então, $|Aut(H)|$ é m-limitado, o que implica em k ser m-limitado. Note que $\alpha_g : E(g^k) \longrightarrow E(g^k)$, dada por $x \longmapsto x^g$, é um automorfismo. Como $|E(g^k)| \leq m$, segue pelas considerações acima que $\alpha_g^k = 1$. Assim, para cada $x \in E(g^k)$ tem-se que,

$$\left[x, \alpha_g^k\right] = x^{-1}\alpha_g^{(k)}(x) = x^{-1}x = 1.$$

Daí, $[E(g^k), \alpha_g^k] = 1$. Segue da Observação 1.1.4 que $[E(g^k), \alpha_g^k] = [E(g^k), g^k]$, assim $[E(g^k), g^k] = 1$. Isso implica que g^k é um elemento de Engel de G. Pelo Teorema 1.3.1 de Baer, tem - se que g^k pertence ao subgrupo de Fitting de G. Logo o expoente do grupo $G/F(G)$ é menor ou igual a k. Como k é m-limitado, concluímos que o expoente de $G/F(G)$ é m-limitado. □

Enfim, agora estamos em condições para provar o Teorema B.

Teorema B (Khukhro-Shumyatsky). *Suponha que G é um grupo finito e que existe um inteiro m tal que $|E(g)| \leq m$ para cada $g \in G$. Então, a ordem do residual nilpotente $\gamma_\infty(G)$ é limitado em termos de m.*

Demonstração.

<u>**Caso em que G é um grupo solúvel:**</u>

Passo 1: Mostraremos que o comprimento de Fitting de G é finito;

Sejam p e q primos divisores da ordem de G. Como $\mathcal{O}_p(G) \leq F(G)$ temos que,

$$\frac{\mathcal{O}_{p,q}(G)F(G)}{F(G)} \cong \frac{\mathcal{O}_{p,q}(G)}{F(G) \cap \mathcal{O}_{p,q}(G)} \cong \frac{\frac{\mathcal{O}_{p,q}(G)}{\mathcal{O}_p(G)}}{\frac{F(G)\cap\mathcal{O}_{p,q}(G)}{\mathcal{O}_p(G)}}.$$

Uma vez que o grupo

$$\mathcal{O}_q\left(\frac{G}{\mathcal{O}_p(G)}\right) = \frac{\mathcal{O}_{p,q}(G)}{\mathcal{O}_p(G)}$$

é um q-grupo, então é nilpotente. Assim, $\mathcal{O}_{p,q}(G)F(G)/F(G)$ é normal e nilpotente em $G/F(G)$, o que implica, $\mathcal{O}_{p,q}(G)F(G)/F(G) \leq F(G/F(G)) = F_2(G)/F(G)$. Logo, $\mathcal{O}_{p,q}(G) \leq F_2(G)$ e assim por diante. Decorre do Teorema 1.2.14 que o p-comprimento $l_p(G)$ é limitado em termos do expoente $exp(P)$ de um p-subgrupo de Sylow P de G. Logo, o comprimento de Fitting de G é limitado em termos do $exp(P)$. Como G é um grupo finito, então $exp(P)$ é finito e, assim, o comprimento de Fitting de G também é finito

Passo 2: Usando indução sobre o comprimento de Fitting de G, mostraremos que a ordem do residual nilpotente $\gamma_\infty(G)$ é m-limitado.

Uma vez que o comprimento de Fitting de G é finito, podemos usar indução sobre esse comprimento. Se esse comprimento for 1, então $F(G) = G$. Como G é um grupo finito, então $F(G)$ é nilpotente. Logo, $\gamma_\infty(G) = 1$ e, obviamente, sua ordem é m-limitada. Quando o comprimento de Fitting é pelo menos 2, considere o segundo subgrupo de Fitting $F_2(G)$. Pelo Lema 1.4.1, temos que

$$\gamma_\infty\left(F_2(G)\right) = \prod_q [F_q, H_{q'}]$$

onde F_q é um q-subgrupo de Sylow de $F(G)$ e $H_{q'}$ é um q'-subgrupo de Hall de $F_2(G)$, esse produto é feito tomando divisores primos de $|F(G)|$. Para um dado primo q, sejam $\overline{H}_{q'} = H_{q'}/C_{H_{q'}}(F_q)$ e V o quociente de Frattini $F_q/\Phi(F_q)$. Afirmamos que $\overline{H}_{q'}$ age fielmente sobre V. De fato, inicialmente, como F_q é um subgrupo característico de $F(G)$ e $F(G) \trianglelefteq F_2(G)$ implica que $F_q \trianglelefteq F_2(G)$, em particular, $H_{q'} \leq N_{F_2(G)}(F_q)$. Uma vez que $\Phi(F_q)$ é um subgrupo característico de F_q e $F_q \trianglelefteq F_2(G)$, então $H_{q'} \leq N_{F_2(G)}(\Phi(F_q))$. Sejam $c \in C_{H_{q'}}(F_q)$, $h \in H_{q'}$ e $f\Phi(F_q) \in V$. Note que,

$$(f\Phi(F_q))^{hc} = f^{hc}\Phi(F_q) = f^h\Phi(F_q)$$

é um elemento de V. Assim, para todo $\bar{h} \in \overline{H}_{q'}$ e $\bar{v} \in V$ é bem definido um elemento $\bar{v}.\bar{h} := \overline{v^h}$ em V. Segue claramente que $\overline{H}_{q'}$ age por automorfismo sobre V. Como $(|\overline{H}_{q'}|, |V|) = 1$, tem-se que essa ação é coprima. Considere $\Phi(V) \leq V$, segue pelo Lema 1.1.7 que toda classe de $\Phi(V)$ em V é um conjunto $\overline{H}_{q'}$-invariante. Desse modo, para cada $\bar{h} \in \overline{H}_{q'}$, tem-se que, $\varphi_{\bar{h}} : V \longrightarrow V$, dada por $v \longmapsto v^{\bar{h}}$, é um automorfismo de V onde, $\varphi_{\bar{h}}(v)\Phi(V) = v^{\bar{h}}\Phi(V) = (v\Phi(V))^{\bar{h}} = v\Phi(V)$. Como V é um q-grupo, segue pelo Teorema 1.3.4 que a ordem de $\varphi_{\bar{h}}$ é uma potência de q, em outras palavras, a ação de $\overline{H}_{q'}$ sobre V é fiel.

Para cada $x \in \overline{H}_{q'}$ temos que $|[V, x]| \leq m$, isso porque

$$[V, x] = \frac{[F_q, x]\Phi(F_q)}{\Phi(F_q)} \leq \frac{E(x)\Phi(F_q)}{\Phi(F_q)}$$

pelo Lema 1.4.2. Então, $|\overline{H}_{q'}|$ é m-limitada pelo Lema 1.4.3. Para todos $f \in F_q, h \in H_{q'}$ e $c \in C_{H_{q'}}(F_q)$ tem-se que,

$$[f,h] = f^{-1}h^{-1}fh = f^{-1}c^{-1}\underbrace{h^{-1}fh}_{\in F_q}c = f^{-1}(hc)^{-1}f(hc) = [f,hc].$$

Então, concluímos que $|[F_q, H_{q'}]| = |[F_q, \overline{H}_{q'}]|$. Vamos mostrar que a igualdade anterior é m-limitada. Perceba que $[F_q, \overline{H}_{q'}]$ é o produto de muitos subgrupos $[F_q, \bar{h}]$, $h \in H_{q'}$. Segue pelo Lema 1.4.2 que $|[F_q, h]| \leq |E(h)| \leq m$. Consequentemente, $|[F_q, \overline{h}]| \leq m$. Como $|\overline{H}_{q'}|$ é m-limitado, implica que $|[F_q, \overline{H}_{q'}]|$ também é. Se $[F_q, H_{q'}] \neq 1$, então existe $h \in H_{q'}$ tal que, $[F_q, h] \neq 1$. Como $[F_q, h] \leq F_q$, tem-se que a ordem de $[F_q, h]$ é uma potência de q e, assim, $q \leq m$. Logo, a cardinalidade do conjunto formado pelos primos q que são divisores da ordem de $F(G)$ é m-limitada. Portanto, $|\gamma_\infty(F_2(G))| = |\prod_q [F_q, H_{q'}]|$ é m-limitado.

Suponha, como hipótese de indução, que o Teorema seja válido para todos os grupos solúveis que possuem comprimento de Fitting menor que o do grupo G. Uma vez que G é solúvel e $\gamma_\infty(F_2(G)) \trianglelefteq G$, tem-se que o grupo $G/\gamma_\infty(F_2(G))$ é solúvel. Como $F_2(G)/\gamma_\infty(F_2(G))$ é nilpotente, então $F_2(G)/\gamma_\infty(F_2(G)) \leq F(G/\gamma(F_2(G)))$. Daí, o comprimento de Fitting de $G/\gamma_\infty(F_2(G))$ é menor que o comprimento de Fitting de G. Segue pela hipótese de indução que $|\gamma_\infty(G/\gamma_\infty(F_2(G)))|$ é m-limitado. Note que,

$$\frac{\gamma_\infty(G)}{\gamma_\infty(F_2(G))} = \gamma_\infty\left(\frac{G}{\gamma_\infty(F_2(G))}\right).$$

Assim, $[\gamma_\infty(G) : \gamma_\infty(F_2(G))]$ é m-limitado. Pelo Teorema de Lagrange temos que,

$$|\gamma_\infty(G)| = [\gamma_\infty(G) : \gamma_\infty(F_2(G))]|\gamma_\infty(F_2(G))|.$$

Então, $|\gamma_\infty(G)|$ é m-limitado. O que completa a prova do Teorema para o caso solúvel

Caso geral:

Passo 3: Provaremos que a ordem do grupo quociente G sobre o radical solúvel $R(G)$ é m-limitado;

Recorde-se que o subgrupo de Fitting generalizado é o produto do subgrupo de Fitting e todos os subgrupos quase simples subnormais. Seja E o subgrupo de Fitting generalizado de $G/R(G)$. É suficiente mostrar que $|E|$ é m-limitado, pois pela Proposição 1.1.2, tem - se que,

$$\frac{\frac{G}{R(G)}}{C_{\frac{G}{R(G)}}(E)} = \frac{N_{\frac{G}{R(G)}}(E)}{C_{\frac{G}{R(G)}}(E)} \lesssim Aut(E).$$

Se $|E|$ é m-limitado, então o $|Aut(E)|$ é m-limitado, assim, $[G/R(G) : C_{G/R(G)}(E)]$ é m-limitado. Uma vez que o centralizador de E no grupo $G/R(G)$ está contido em E, tem-se que $|C_{G/R(G)}(E)|$ é m-limitado. Pelo Teorema de Lagrange

$$\left|\frac{G}{R(G)}\right| = \left[\frac{G}{R(G)} : C_{\frac{G}{R(G)}}(E)\right] \left|C_{\frac{G}{R(G)}}(E)\right|.$$

Portanto, $|G/R(G)|$ é m-limitado. Afirmamos que E é produto direto de grupos finitos simples não abelianos. De fato, seja H um subgrupo normal nilpotente de $G/R(G)$. Note que existe $K \trianglelefteq G$ tal que $H = K/R(G)$. Uma vez que H é nilpotente, tem-se também que H é solúvel. Como $R(G)$ é um subgrupo normal solúvel maximal de G, então K é solúvel e necessariamente $K \leq R(G)$. Portanto, $H = 1$ e assim concluímos que $F(G/R(G)) = 1$. Desse modo,

$$E = F\left(\frac{G}{R(G)}\right) \langle S_1, \cdots, S_r \rangle = \langle S_1, \cdots, S_k \rangle$$

onde $S_1, \cdots, S_k$ são os subgrupos quase simples subnormais de $G/R(G)$. Note que $Z(S_i)$ é subnormal em $G/R(G)$ para cada $i = 1, \cdots, k$. Decorre da Proposição 1.2.12 que $Z(S_i) \leq F(G/R(G))$, para cada $i = 1, \cdots, k$. Logo $Z(S_i) = 1$, para cada $i = 1, \cdots, k$. Como

$$\frac{S_i}{Z(S_i)} \cong S_i \quad (i = 1, \cdots, k)$$

segue que S_i é um grupo simples não abeliano, uma vez que S_i é quase simples. Pela Proposição 1.2.8 tem-se que $Z(E) = 1$ e que

$$\frac{E}{Z(E)} = S_1 \times \cdots \times S_k = E.$$

O que prova a afirmação. Decorre do Lema 1.4.4 que o expoente de $G/F(G)$ é m-limitado, o que implica em, expoente de $G/R(G)$ ser m-limitado. Assim, o expoente do grupo $E = S_1 \times \cdots \times S_k$ é m-limitado e, consequentemente, cada S_i também tem expoente m-limitado. Seja $l = \max\{\text{expoente de } S_i \mid i = 1, \cdots, k\}$. Segue como consequência da classificação dos grupos simples finitos, que para um dado inteiro positivo j existe apenas um número finito de grupos simples que possuem expoente igual a j (ver [3]). Sendo assim, seja

$$\Omega = \{H \mid H \text{ é um grupo simples de expoente menor e igual a } l\}.$$

Claramente, $S_i \in \Omega$ para cada $i = 1, \cdots, k$. Denotemos por $r = \max\{|H| \mid H \in \Omega\}$. Note que r depende apenas de l. Como l é m-limitado, então r também é. Portanto, $|S_i|$ é m-limitado, para cada $i = 1, \cdots, k$. Mostraremos agora que o número de fatores é igualmente m-limitado. Note que, cada S_i possui um subgrupo não nilpotente minimal, então decorre do Teorema 1.2.11 de Schmidt que cada S_i tem um subgrupo não nilpotente R_i que é solúvel, para o qual $\gamma_\infty(R_i) \neq 1$. Aplicando o Teorema que já foi provado para grupos solúveis a $T = R_1 \times \cdots \times R_k$, obtemos que $|\gamma_\infty(T)|$ é m-limitado. Como $\gamma_\infty(R_i) \leq \gamma_\infty(T)$, para todo $i = 1, \cdots, k$, então k é m-limitado, caso contrário, teremos que $|\gamma_\infty(T)|$ não é m-limitado. Então, como o número de fatores do produto de E é m-limitado e a ordem de cada S_i é m-limitado, concluímos que $|E|$ é limitado em termos de m.

Passo 4: Notaremos que é suficiente mostrar que a ordem do residual nilpotente do grupo $G/\gamma_\infty(R(G))$ é m-limitado;

Uma vez que $|\gamma_\infty(R(G))|$ é m-limitado, pelo que já foi provado no caso solúvel, podemos considerar $G/\gamma_\infty(R(G))$. Agora, é suficiente mostrarmos que $|\gamma_\infty(G/\gamma_\infty(G))|$ é m-limitado para concluirmos a prova do Teorema, pois

$$|\gamma_\infty(G)| = |\gamma_\infty(G/\gamma_\infty(R(G)))||\gamma_\infty(R(G))|.$$

Passo 5 Mostraremos que $R(G/\gamma_\infty(R(G)))$ é nilpotente;

Com efeito, note que existe $H \trianglelefteq G$ tal que $R(G/\gamma_\infty(R(G))) = H/\gamma_\infty(R(G))$. Então, que H é solúvel e, assim, $H \leq R(G)$. Como $R(G)/\gamma_\infty(R(G)) \leq R(G/\gamma_\infty(R(G)))$, implica que $H/\gamma_\infty(R(G)) = R(G)/\gamma_\infty(R(G))$. Logo, $R(G)/\gamma_\infty(R(G)) = R(G/\gamma_\infty(R(G)))$ e, portanto, $R(G/\gamma_\infty(R(G)))$ é nilpotente.

A partir de agora escreveremos G para representar o grupo $G/\gamma_\infty(R(G))$. Decorre do passo 5 que $R(G) = F(G)$.

Passo 6: Se existir $F(G) < N \lhd G$, concluiremos por indução sobre $|G/F(G)|$ que a ordem do residual nilpotente de G é m-limitado;

Já sabemos que $|G/F(G)|$ é m-limitado, para que possamos usar indução sobre $|G/F(G)|$. Se $|G/F(G)| = 1$, então $G = F(G)$, assim, G é nilpotente e, portanto, $\gamma_\infty(G) = 1$, que é obviamente m-limitado. Suponhamos, como hipótese de indução, que o Teorema seja válido para todos os grupos cuja ordem do seu quociente pelo subgrupo de Fitting seja menor que $|G/F(G)|$. Seja $F(G) < N \lhd G$. Como $F(G)$ é normal e nilpotente em N, então $F(G) \leq F(N)$. Claramente, $|N/F(G)| < |G/F(G)|$. Uma vez que $F(G) \leq F(N) \leq N$, tem-se que

$$\left|\frac{N}{F(G)}\right| = \left|\frac{N}{F(N)}\right|\left|\frac{F(N)}{F(G)}\right|.$$

Assim, $|N/F(N)| < |G/F(G)|$ e, portanto, temos por hipótese de indução que $|\gamma_\infty(N)|$ é m-limitado. Considere agora o grupo $G/\gamma_\infty(N)$. Note que existe $H \trianglelefteq G$

tal que $F(G/\gamma_\infty(N)) = H/\gamma_\infty(N)$. Como $N/\gamma_\infty(N)$ é nilpotente e normal em $G/\gamma_\infty(N)$, implica que $N/\gamma_\infty(N) \leq F(G/\gamma_\infty(N))$. Note que,

$$\frac{\frac{G}{\gamma_\infty(N)}}{F\left(\frac{G}{\gamma_\infty(N)}\right)} \cong \frac{\frac{G/\gamma_\infty(N)}{N/\gamma_\infty(N)}}{\frac{H/\gamma_\infty(N)}{N/\gamma_\infty(N)}} \cong \frac{\frac{G}{N}}{\frac{H}{N}} \cong \frac{G}{H}.$$

Como $F(G) < H \leq G$, implica que $|G/H| < |G/F(G)|$. Portanto, por hipótese de indução temos que $|\gamma_\infty(G/\gamma_\infty(N))|$ é m-limitado. Uma vez que,

$$\gamma_\infty\left(\frac{G}{\gamma_\infty(N)}\right) = \frac{\gamma_\infty(G)\gamma_\infty(N)}{\gamma_\infty(N)}$$

e

$$|\gamma_\infty(G)| \leq |\gamma_\infty(G)\gamma_\infty(N)| = \left|\gamma_\infty\left(\frac{G}{\gamma_\infty(N)}\right)\right| |\gamma_\infty(N)|$$

segue que, $|\gamma_\infty(G)|$ é m-limitado.

Assim, podemos assumir que $G/F(G)$ é um grupo simples não abeliano de ordem m-limitado.

Seja $\{t_1, \cdots, t_k\}$ uma transversal de G módulo $F(G)$.

Passo 7: Mostraremos que o grupo $K = \prod_{i=1}^{k}\langle\gamma_\infty(F(G)\langle t_i\rangle)^G\rangle$ é normal em G e possui ordem m-limitada;

Seja $g \in G$ um elemento arbitrário. Afirmamos que o grupo $F(G)\langle g\rangle$ é solúvel. Com efeito, perceba que $F(G) \trianglelefteq F(G)\langle g\rangle$ e $F(G)\langle g\rangle/F(G)$ é cíclico, logo abeliano e, portanto, solúvel. Então, $F(G)\langle g\rangle$ é solúvel. Assim $|\gamma_\infty(F(G)\langle g\rangle)|$ é m-limitado, pelo que já foi provado no caso em que G é solúvel. Como $F(G)\langle g\rangle/F(G)$ é abeliano, então o subgrupo derivado $(F(G)\langle g\rangle)' \leq F(G)$. Isso implica que $\gamma_\infty(F(G)\langle g\rangle) \trianglelefteq F(G)$, então $F(G) \leq N_G(\gamma_\infty(F(G)\langle g\rangle)) \leq G$. Sabemos que

$$\#\{\text{conjugados de } \gamma_\infty(F(G)\langle g\rangle) \text{ em } G\} = [G : N_G(\gamma_\infty(F(G)\langle g\rangle))]$$

Logo, podemos considerar que o fecho normal $\langle(\gamma_\infty(F(G)\langle g\rangle))^G\rangle$ é o produto de no máximo $|G/F(G)|$ conjugados de G, onde cada um é normal em $F(G)$. Para cada $x \in G$, $(\gamma_\infty(F(G)\langle g\rangle))^x \cong \gamma_\infty(F(G)\langle g\rangle)$, então $|(\gamma_\infty(F(G)\langle g\rangle))^x|$ é m-limitado. Escolha uma transversal $\{t_1, \cdots, t_k\}$ de G módulo $F(G)$ e considere o conjunto

$$K = \prod_{i=1}^{k}\langle\gamma_\infty(F(G)\langle t_i\rangle)^G\rangle$$

que é um subgrupo normal de G de ordem m-limitado.

Passo 8: Notaremos que é suficiente mostrar que a ordem do residual nilpotente do grupo G/K é m-limitado;

Isso porque $|K|$ é m-limitado e

$$|\gamma_\infty(G)| \leq |\gamma_\infty(G)K| = |\gamma_\infty(G/K)||K|.$$

Assim, podemos assumir que $K = 1$.

Passo 9: Provaremos que $[F(G), G, \cdots, G] = 1$;

Observe que para cada $g \in G$ existe $n(g) \in \mathbb{N}$ tal que,

$$[F(G),_{n(g)} g] \leq K \;\Rightarrow\; [F(G),_{n(g)} g] = 1. \tag{1.8}$$

Na verdade, $g \in F(G)t_i$, para algum t_i, e o subgrupo $F(G)\langle t_i \rangle$ é nilpotente, pois note que existe $n(t_i) \in \mathbb{N}$ tal que,

$$[x,_{n(t_i)} t_i] = 1 \text{ para cada } x \in F(G)\langle t_i \rangle.$$

Então, t_i é um elemento de Engel de $F(G)\langle t_i \rangle$. Segue pelo Teorema 1.3.1 de Baer que $t_i \in F(F(G)\langle t_i \rangle)$, logo $\langle t_i \rangle \leq F(F(G)\langle t_i \rangle)$. Uma vez que $F(G)$ é normal e nilpotente em $F(G)\langle t_i \rangle$, tem - se que $F(G) \leq F(F(G)\langle t_i \rangle)$. Daí, $F(G)\langle t_i \rangle \leq F(F(G)\langle t_i \rangle)$, e portanto, $F(G)\langle t_i \rangle$ é nilpotente.

Afirmamos agora que

$$[F(G), G, \cdots, G] = 1 \tag{1.9}$$

onde G é repetido um número suficiente de vezes. É suficiente provarmos que $[F_q, G, \cdots, G] = 1$, para cada q-subgrupo de Sylow F_q de $F(G)$, uma vez que $F(G)$ é nilpotente e pode ser escrito como o produto direto dos seus subgrupos de Sylow. Para cada q'-elemento $h \in G$, note que h age por conjugação sobre um q-subgrupo de Sylow F_q de $F(G)$. Consequentemente, temos uma ação coprima, já que $(|h|, |F_q|) = 1$. Resulta do Lema 1.1.8 que $[F_q, h] = [F_q, h, h]$ e, portanto, $[F_q, h] = 1$, em vista de (1.8). Seja H um subgrupo de G gerado por todos os q'-elementos. Afirmamos que $G = F_qH$. De fato, note que $H \trianglelefteq G$, o que implica, $HF(G)/F(G) \trianglelefteq G/F(G)$. Como $G/F(G)$ é um grupo simples, então $HF(G) = F(G)$ ou $HF(G) = G$. Se $HF(G) = F(G)$, temos que G é um q-grupo, logo G é nilpotente e, portanto, G é solúvel. O que é uma contradição. Então, $HF(G) = G$. Uma vez que, $F(G) = F_qF_{q'}$ e $F_{q'} \leq H$, implica que, $G = F_qH$. O que prova a afirmação. Daí, $[F_q, H] = 1$. Como F_q é característico em $F(G)$ e

$F(G) \trianglelefteq G$, então $F_q \trianglelefteq G$. Daí, note que

$$\begin{aligned}
[F_q, G, \cdots, G] &= [F_q, F_qH, \cdots, F_qH] \\
&= [[F_q, F_qH], F_qH, \cdots, F_qH] \\
&= [[F_q, F_q][F_q, H], F_qH, \cdots, F_qH] \\
&\overset{[F_q,H]=1}{=} [[F_q, F_q], F_qH, \cdots, F_qH] \\
&= [[[F_q, F_q], F_qH], \cdots, F_q] \\
&= [[[F_q, F_q], F_q][[F_q, F_q], H], \cdots, F_qH] \\
&\overset{[F_q,H]=1}{=} [F_q, F_q, F_q, \cdots, F_qH] \\
&\quad \vdots \\
&= [F_q, F_q, \cdots, F_q] \overset{F_q \ nilpotente}{=} 1
\end{aligned}$$

isso para um comutador suficientemente longo.

Denotaremos $D = \gamma_\infty(G)$.

Passo 10: Provaremos que a ordem de D é m-limitado.

Primeiro, mostraremos que $D = [D, D]$. Como estamos assumindo $G/F(G)$ não abeliano simples, então $Z(G/F(G)) = 1$, o que implica que $G/F(G)$ não é nilpotente, assim

$$1 \neq \gamma_\infty\left(\frac{G}{F(G)}\right) = \frac{DF(G)}{F(G)}.$$

Então, $D \nleq F(G)$. Desse modo, D não é solúvel, pois se D fosse solúvel teríamos que $D \leq R(G)$ e como $R(G) = F(G)$, então $D \leq F(G)$, o que é uma contradição. Uma vez que D é totalmente invariante em G, tem-se $[D, D]$ também é. Assim, $[D, D] \trianglelefteq G$. Daí, $[D, D]F(G) \trianglelefteq G$. Desse modo

$$\frac{[D, D]F(G)}{F(G)} \trianglelefteq \frac{G}{F(G)}.$$

Como D não é solúvel, implica que $[D, D] \nleq F(G)$. Como $G/F(G)$ é um grupo simples, tem-se necessariamente que $G = [D, D]F(G)$. Suponhamos $D \neq [D, D]$. Perceba que,

$$\begin{aligned}
[D, G, G, \cdots, G] &= [[D, G], G, \cdots, G] \\
&= [[G, D], G, \cdots, G] \\
&\overset{G=[D,D]F(G)}{=} [[D, D]F(G), D, G, \cdots, G] \\
&= [[D, D], D, G, \cdots, G][F(G), D, G, \cdots, G] \\
&\overset{(1.9)}{=} [D, D, D, G, \cdots, G] \leq [D, D] \lneqq D.
\end{aligned}$$

Isso para um comutador suficientemente longo. Mas, isso é uma contradição, pois como $[D,G] = D$, então $[D,G,\cdots,G] = D$. Logo, $D = [D,D]$.

Já que $F(G) \cap D \leq F(G)$, então $F(G) \cap D$ é nilpotente e, portanto, é hipercentral em D. Como $D' = D$, segue pelo Teorema 1.2.3 de Grün que $Z(D) = Z_2(D)$. Isso implica que, $Z(D) = Z_i(D)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por (1.9) tem-se que, $F(G) \cap D \leq Z(D)$. Assim, $F(G) \cap D \leq Z(D) \cap D'$. Por um dos Teoremas de isomorfismo de grupos temos que,

$$\frac{D}{F(G) \cap D} \cong \frac{DF(G)}{F(G)} = \frac{G}{F(G)}.$$

Então, $D/(F(G) \cap D)$ é um grupo simples não abeliano. Assim, $Z(D) \leq F(G) \cap D$, o que implica, $Z(D) = F(G) \cap D$. Desse modo,

$$\frac{D}{Z(D)} = \{d_1 Z(D), \cdots, d_n Z(D)\}$$

é um grupo simples não abeliano de ordem m-limitado. Note que, para cada $c_i \in Z(D)$, utilizando as propriedades do Lema 1.1.5, obtêm-se que, $[d_i c_i, d_j c_j] = [d_i, d_j]$. Logo, $D' = D$ é gerado por no máximo $\binom{n}{2}$ elementos. Consequentemente, o número de geradores de D é m-limitado. Decorre pelo Teorema 1.1.6 de Schur que o expoente de D é m-limitado. Desse modo, $Z(D)$ tem o número de geradores e expoente m-limitados. Segue desse fato que $|Z(D)|$ é m-limitado. Pelo Teorema de Lagrange, tem-se que,

$$|D| = \left|\frac{G}{F(G)}\right| |F(G) \cap D|.$$

Portanto, $|D|$ é m-limitado.

$\square$

Vamos finalizar esse capítulo apresentando algumas consequências do Teorema B.

Assuma que G é um grupo finito que satisfaz as hipóteses do Teorema B. Segue como consequência desse Teorema que o índice do subgrupo de Fitting é limitado em termos de m. Com efeito, perceba que $\gamma_\infty(G)$ é exatamente o último termo da série central inferior. Desse modo, segue da Proposição 1.2.10 que $C_G(\gamma_\infty(G))$ é nilpotente. Como $C_G(\gamma_\infty(G)) \trianglelefteq N_G(\gamma_\infty(G)) = G$, implica que $C_G(\gamma_\infty(G))$ está contido no subgrupo de Fitting $F(G)$ de G. Assim, pela Proposição 1.1.2 tem-se que,

$$\left|\frac{G}{F(G)}\right| \leq \left|\frac{G}{C_G(\gamma_\infty(G))}\right| \leq |Aut(\gamma_\infty(G))|$$

Uma vez que $|\gamma_\infty(G)|$ é m-limitado, implica que $|Aut(\gamma_\infty(G))|$ também é. Logo, $[G : F(G)]$ é m-limitado.

Por fim, o Teorema B pode ser visto como uma generalização do Teorema de Zorn, que diz: grupos finitos de Engel são nilpotentes. Com efeito, se os subgrupos $E(g)$ são triviais, decorre da demonstração do Lema 1.4.4 que cada $g \in G$ é um elemento de Engel de G. Pelo Teorema 1.3.1 de Baer, tem-se que todo elemento de $g \in G$ pertence ao subgrupo de Fitting $F(G)$. Então, $G = F(G)$ e, portanto, G é nilpotente.

CAPÍTULO 2

GRUPOS PROFINITOS

Neste capítulo provaremos o Teorema A. Antes, definiremos Grupos Pro-C e exibiremos algumas caracterizações para essa classe de grupos, juntamente com alguns resultados importantes que serão usados futuramente nesse trabalho. Para isso, dividimos esse capítulo nas seguintes seções: Espaço Topológico, Produtos de Espaços Topológicos, Grupos Topológicos, Limites Inverso, Grupos Pro-C, Teoria de Sylow e Grupos Profinitos Quase Engel.

Os livros de Elon L. Lima [11], John S. Wilson [17], L. Pontrjagin [12], L. Ribes e P. Zalesskii [13], Taqdir Husain [6] e Tej B. Singh [16] foram as principais referências utilizadas aqui.

2.1 Espaço Topológico

Uma **topologia** num conjunto X é uma coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X, chamados os **subconjuntos abertos** satisfazendo as seguintes condições:

(1) X e o subconjunto vazio $\emptyset$ são abertos;

(2) A união de uma coleção qualquer de subconjuntos abertos é também um subconjunto aberto;

(3) A interseção de uma coleção finita de subconjuntos abertos é também um subconjunto aberto.

Um **espaço topológico** é um par $(X, \mathcal{T})$ onde X é um conjunto e $\mathcal{T}$ é uma topologia em X. Frequentemente, diremos apenas "o espaço topológico X", mencionando $\mathcal{T}$ somente quando for necessário.

Uma **base para a topologia** em X é uma coleção β de subconjuntos abertos de X, com a seguinte propriedade: todo subconjunto aberto $A \subseteq X$ pode ser escrito como a união $A = \cup B_\lambda$ onde $B_\lambda \in \beta$.

Proposição 2.1.1. *Seja X um espaço topológico. Uma coleção β de subconjuntos abertos de X constitui uma base em X se, e somente se, para cada subconjunto aberto $A \subseteq X$ e cada elemento $x \in A$ existe um conjunto $B_x \in \beta$ tal que $x \in B_x \subseteq A$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se todo subconjunto aberto $A \subseteq X$ pode ser escrito como $A = \cup B_\lambda$, $B_\lambda \in \beta$, então dado $x \in A$ existe algum λ tal que $x \in B_\lambda \subseteq A$. Faça $B_x = B_\lambda$.

($\Leftarrow$) $x \in B_x \subseteq A$ significa $\{x\} \subseteq B_x \subseteq A$ e, portanto, $A = \bigcup_{x \in A}\{x\} \subseteq \bigcup_{x\in A} B_x \subseteq A$, então $A = \bigcup_{x\in A} B_x$. Logo, todo subconjunto aberto $A \subseteq X$ pode ser escrito como a união de elementos de β e, portanto, β é uma base para a topologia em X. □

Proposição 2.1.2. *Sejam β uma coleção de subconjuntos de um conjunto X. Para que β seja uma base de uma topologia em X é necessário e suficiente que se cumpra as condições abaixo:*

(1) Para cada $x \in X$, existe $B \in \beta$ tal que $x \in B$;

(2) Se $x \in B_1 \cap B_2$, onde $B_1, B_2 \in \beta$, então existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$. (Esta condição é cumprida, em particular, quando $B_1 \cap B_2 \in \beta$)

Demonstração. Será omitida, mas pode ser consultada em [11], página 73. □

Um subconjunto F de um espaço topológico X é **fechado** quando seu complementar $X - F$ é um subconjunto aberto. É fácil verificar que os subconjuntos fechados gozam das seguintes propriedades:

(1) O conjunto vazio $\emptyset$ e o espaço topológico X são fechados;

(2) A interseção de uma coleção qualquer de subconjuntos fechados é também um subconjunto fechado de X;

(3) A união de uma coleção finita de subconjuntos fechados de X é um subconjunto fechado de X.

O **fecho** $\overline{Y}$ de um subconjunto Y de um espaço topológico X é a interseção de todos os subconjuntos fechados de X, contendo Y. Evidentemente, $\overline{Y}$ é um subconjunto fechado. Um subconjunto Y de X é chamado **denso** em X se $\overline{Y} = X$.

Uma **vizinhança** de um elemento $x \in X$ é um subconjunto aberto que contém x. Um **sistema fundamental de vizinhanças** de um elemento x num espaço topológico X é uma coleção $\mathcal{V}$ de vizinhanças de x com a seguinte propriedade: dada qualquer vizinhança U de x no espaço topológico X, existe uma vizinhança $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subseteq U$.

Qualquer conjunto X pode ser considerado como um espaço topológico definindo a topologia $\mathcal{T}_O$ em X tomando todos os subconjuntos de X como abertos. A topologia $\mathcal{T}_O$ é chamada **topologia discreta** e o espaço topológico X é chamado de **espaço discreto**.

Seja $f : Y \longrightarrow X$ uma aplicação de um conjunto arbitrário Y num espaço topológico X. A coleção $\mathcal{T}$ das imagens inversas $f^{-1}(A)$ dos subconjuntos abertos $A \subseteq X$ pela aplicação f é uma topologia em Y. Isso pode ser visto através das relações:

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(A_\lambda) = f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)$$

e

$$f^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap f^{-1}(A_n) = f^{-1}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$

A topologia $\mathcal{T}$ chama-se a **topologia induzida** em Y pela aplicação $f : Y \longrightarrow X$. O caso particular mais importante da topologia induzida é aquele em que $Y \subseteq X$ e f reduz-se à aplicação de inclusão $i : Y \hookrightarrow X$. Neste caso, dado $A \subseteq X$, tem-se que $i^{-1}(A) = A \cap Y$ de modo que a topologia induzida por i em Y tem como subconjuntos abertos as interseções $A \cap Y$, dos abertos $A \subseteq X$ com o subconjunto Y. Munido desta topologia, Y chama-se um **subespaço** do espaço topológico X.

Um espaço topológico X é chamado **compacto**, se dada qualquer família $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de subconjuntos abertos cuja união é igual a X, existe um subfamília finita $(A_{\lambda_1}, \cdots, A_{\lambda_n})$ cuja união é igual a X.

Um família $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tem a **propriedade da interseção finita** quando qualquer subfamília finita $(F_{\lambda_1}, \cdots, F_{\lambda_n})$ tem interseção não vazia. Assim, para que um espaço topológico X seja compacto, é necessário e suficiente que a seguinte condição se cumpra: se uma família $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de subconjuntos fechados em X possui a propriedade da interseção finita, então a interseção $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ é não vazia. De fato, seja X um espaço topológico compacto e $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de subconjuntos fechados em X tal que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \emptyset$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, seja $A_\lambda = X - F_\lambda$. Cada A_λ é aberto e $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(X - F_\lambda) = X - \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = X$. Pela compacidade de X existe um subconjunto finito $L \subseteq \Lambda$ tal que $X = \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$. Logo, $\bigcap_{\lambda\in L} F_\lambda = \emptyset$ e portanto a família $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ não satisfaz a propriedade da interseção finita. Reciprocamente, se X não é compacto, existe uma família $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ que não possui nenhuma subfamília finita tal que a união é igual a X. Portanto, $(F_\lambda = X - A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma família de subconjuntos fechados em X que satisfaz a propriedade da interseção finita, mas $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(X - A_\lambda) = X - \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \emptyset$.

Um espaço topológico X chama-se um **espaço de Hausdorff** quando dados dois pontos arbitrários $x \neq y$ em X, existem subconjuntos abertos $A, B \subseteq X$ tais que $x \in A, y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$. Resulta da definição anterior que num espaço de Hausdorff X, o subconjunto $\{x\}$ é fechado para cada $x \in X$.

Um espaço topológico X chama-se **conexo** se não pode ser escrito como união disjunta de dois subconjuntos abertos não vazios. Por outro lado, X é **totalmente des-**

conexo se todo subespaço conexo tem no máximo um elemento. Os espaços que estamos mais interessados são os espaços de Hausdorff, compactos e totalmente desconexos.

Proposição 2.1.3. *São válidas as seguintes propriedades:*

(a) Todo subconjunto fechado F de um espaço topológico compacto X é compacto;

(b) Todo subconjunto compacto C de um espaço topológico de Hausdorff X é fechado;

(c) Todo subespaço Y de um espaço de Hausdorff X é um espaço de Hausdorff;

(d) Sejam C e D subconjuntos fechados de um espaço de Hausdorff compacto X tais que $C \cap D = \emptyset$, então existem subconjuntos abertos U, V, tais que, $C \subseteq U, D \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$;

(e) Sejam x um elemento de um espaço de Hausdorff compacto X e A a interseção de todos os subconjuntos de X contendo x, que são simultaneamente abertos e fechados. Então A é conexo;

(f) Se X é um espaço de Hausdorff, compacto e totalmente desconexo, então todo subconjunto aberto pode ser escrito como a união de subconjuntos que são simultaneamente abertos e fechados;

(g) Seja X um espaço totalmente desconexo. Então $\{x\}$ é fechado em X, para cada $x \in X$.

Demonstração. (a) $F = \bigcup_{\lambda \in \Lambda}(F \cap A_\lambda)$, onde A_λ é um subconjunto aberto em X, para cada $\lambda \in \Lambda$. Note que $A = X - F$ é um subconjunto aberto em X. Como X é compacto, existe uma subfamília $(A_{\lambda_1}, \cdots, A_{\lambda_n}, A)$ tal que $F = (F \cap A_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup (F \cap A_{\lambda_n})$. O que prova a compacidade de F.

(b) Seja $x \in X - C$. Decorre da definição de espaço de Hausdorff que para cada $y \in C$ existem subconjuntos abertos A_y, contendo x, e B_y, contendo y, tais que $A_y \cap B_y = \emptyset$. Obtém-se desse modo que $C \subseteq \bigcup_{y \in C} B_y$. Segue da compacidade de C que existe uma subfamília $(B_{y_1}, \cdots, B_{y_n})$ tal que $C \subseteq B_{y_1} \cup \cdots \cup B_{y_n}$. Correspondentemente, definimos $A_x = A_{y_1} \cap \cdots \cap A_{y_n}$. Claramente A_x é aberto, contendo x, e nenhum elemento de A_x pode pertencer a C. Logo, $X - C = \bigcup_{x \in X - C} A_x$ é aberto e assim C é fechado.

(c) Sejam $y_1, y_2 \in Y \subseteq X$. Como X é um espaço de Hausdorff, existem abertos A_1 e A_2 em X tais que $y_1 \in A_1, y_2 \in A_2$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Note que, $V_1 = A_1 \cap Y$ e $V_2 = A_2 \cap Y$ são subconjuntos abertos disjuntos em Y contendo y_1 e y_2, respectivamente.

(d) Inicialmente, afirmamos que para cada $c \in C$ existem subconjuntos abertos disjuntos U_c, V_c com $c \in U_c$ e $D \subseteq V_c$. Fixe $c \in C$. Para cada $d \in D$ existem subconjuntos abertos disjuntos O_d, P_d com $c \in O_d$ e $d \in P_d$. Uma vez que X é igual a união dos subconjuntos $X - D$ e P_d, com $d \in D$, segue da compacidade de X que há um número finito de elementos $d_1, \cdots, d_m \in D$ tais que X é igual a união dos subconjuntos $P_{d_1}, \cdots, P_{d_m}$ e $X - D$. Claramente os conjuntos

$$U_c = O_{d_1} \cap \cdots \cap O_{d_m} \text{ e } V_c = P_{d_1} \cup \cdots \cup P_{d_m}$$

tem as propriedades afirmadas. Agora façamos c variar. Uma vez que X é igual a união de $X - C$ com os subconjuntos U_c, $c \in C$, novamente pela compacidade de X, existem elementos $c_1, \cdots, c_n \in C$ tais que X é igual a união dos subconjuntos $U_{c_1}, \cdots, U_{c_n}$ e $X - C$. Defina U e V como

$$U = U_{c_1} \cup \cdots \cup U_{c_n} \text{ e } V = V_{c_1} \cap \cdots \cap V_{c_n}.$$

(e) Seja $(C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ a família de todos os subconjuntos abertos e fechados contendo x. Suponhamos que $A = C \cup D$ onde C e D são abertos disjuntos de A. Como $A - C = D$ e $A - D = C$ são abertos, então C e D são também fechados em A. Afirmamos que C e D são fechados em X. De fato, de C ser fechado em A, implica que $A - C$ é aberto em A. Por definição da topologia induzida, existe um subconjunto W aberto em X tal que $A - C = A \cap W$. Uma vez que A é fechado em X, tem-se que $X - A$ é aberto em X. Note que,

$$\begin{aligned} W \cup (X - A) &= ((W \cap A) \cup (W \cap (X - A))) \cup (X - A) \\ &= (W \cap A) \cup (X - A) \\ &= (A - C) \cup (X - A) \\ &\overset{C \subseteq A}{=} X - C. \end{aligned}$$

Como $W \cup (X - A)$ é aberto em X, resulta que $X - C$ é aberto em X. Portanto, C é fechado em X. De maneira análoga, mostra-se também que D é fechado em X. Decorre de (d) que existem subconjuntos abertos U, V em X tais que $C \subseteq U, D \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$. Considere o subconjunto fechado $B = X - (U \cup V)$. A interseção da família $\{B\} \cup (C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de conjuntos fechados é igual ao vazio, pois $A = \cap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ e $A \subseteq U \cup V$. Segue da compacidade de X que existe uma subfamília $(C_{\lambda_1}, \cdots, C_{\lambda_n})$ tal que $B \cap C_{\lambda_1} \cap \cdots \cap C_{\lambda_n} = \emptyset$. Assim, o conjunto $I = C_{\lambda_1} \cap \cdots \cap C_{\lambda_n}$ satisfaz: $I \subseteq U \cup V$, de modo que I é igual a união disjunta de $I \cap U$ com $I \cap V$. Note que, cada um destes subconjuntos é aberto em I e, portanto, também são fechados em I. Uma vez que I é aberto e fechado em X, resulta que $I \cap U$ e $I \cap V$ são aberto em X e por argumentos análogos da parte inicial dessa prova, esses conjuntos também são fechados em X . Portanto, se $x \in I \cap U$ devemos ter $A \subseteq I \cap U$, assim, $D \subseteq A \cap V \subseteq (I \cap U) \cap V \subseteq U \cap V = \emptyset$ e, portanto, $D = \emptyset$. Por outro lado, se $x \in I \cap V$, concluí-se de maneira análoga que $C = \emptyset$. Portanto, A é conexo.

(f) Sejam U um subconjunto aberto em X e $x \in U$. Como X é um espaço de Hausdorff e totalmente desconexo, então para cada $y \in X - \{x\}$ existe um subconjunto F_y que é aberto e fechado e satisfaz: $x \in F_y$ e $y \notin F_y$. Note que X é a união do subconjunto aberto U com os subconjuntos $X - F_y$. Resulta da compacidade de X que existe um número finito de elementos $y_1, \cdots, y_n$ tais que,

$$X = U \cup (X - F_{y_1}) \cup \cdots \cup (X - F_{y_n})$$

Como $(X - F_{y_1}) \cup \cdots \cup (X - F_{y_n}) = X - (F_{y_1} \cap \cdots \cap F_{y_n})$, então necessariamente $F_{y_1} \cap \cdots \cap F_{y_n} \subseteq U$, $x \in F_{y_1} \cap \cdots \cap F_{y_n}$ e $F_{y_1} \cap \cdots \cap F_{y_n}$ é aberto. Portanto, segue o resultado.

(g) Seja C o fecho de $\{x\}$. Suponha que C é igual a união de dois subconjuntos abertos disjuntos A, B, com $x \in A$. Note que $C - A = B \cap C = B$ é aberto em C, então A é fechado em C. Por argumentos análogos da parte inicial da prova de (e), mostra-se que A é fechado em X. Logo, $A = C$. Portanto, o conjunto C é conexo. Como X é totalmente desconexo, então $C = \{x\}$.

□

Teorema 2.1.4 (Teorema de categoria de Baire). *Se X é um espaço topológico regular compacto e $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma família de conjuntos fechados tais que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ contém um conjunto aberto não vazio, então algum conjunto C_n contém um conjunto aberto não vazio. Aqui, X é chamado **regular** se cada vizinhança aberta U, de um ponto, contém uma vinhança aberta V cujo fecho em X está contido em U.*

Demonstração. Será omitida, mas pode ser consultada em [1]. □

Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$, de um espaço topológico X num espaço topológico Y, diz-se **contínua** quando a imagem inversa $f^{-1}(B)$ de todo subconjunto aberto $B \subseteq Y$ for um subconjunto aberto em X. A relação $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$ mostra que a composta $g \circ f : X \longrightarrow Z$ de duas aplicações contínuas $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ é uma aplicação contínua.

Um **homeomorfismo** $h : X \longrightarrow Y$, de um espaço topológico X sobre um espaço topológico Y é uma aplicação contínua, bijetora, cuja inversa $h^{-1} : Y \longrightarrow X$ também é contínua.

Lema 2.1.5.

(a) Sejam X e Y espaços topológicos. Para que uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa $f^{-1}(F)$ de todo subconjunto fechado $F \subseteq Y$ seja um subconjunto fechado em X;

(b) Se $f : X \longrightarrow Y$ é uma aplicação contínua e X é compacto, então $f(X)$ é compacto;

(c) Se $f : X \longrightarrow Y$ é uma bijeção contínua de um espaço compacto X para um espaço de Hausdorff Y, então f é um homeomorfismo;

(d) Se $f : X \longrightarrow Y$ e $g : X \longrightarrow Y$ são aplicações contínuas e Y é um espaço de Hausdorff, então o conjunto $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ é um subconjunto fechado em X.

Demonstração. (a) ($\Rightarrow$) Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua. Dado $F \subseteq Y$ fechado, tem-se que $Y - F$ é um subconjunto aberto. Então $f^{-1}(Y-F) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(F) = X - f^{-1}(F)$ é aberto e, portanto, $f^{-1}(F)$ é fechado em X.

($\Leftarrow$) Se a imagem inversa de cada subconjunto fechado em Y é um subconjunto fechado em X, então dado um subconjunto aberto $A \subseteq Y$, tem-se que $f^{-1}(Y-A) = X - f^{-1}(A)$ é um subconjunto fechado em X, donde $f^{-1}(A)$ é um subconjunto aberto. Portanto, f é contínua.

(b) Seja $f(X) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, onde $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma família de subconjuntos abertos em Y. Sendo f contínua, $(f^{-1}(A_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ é uma família de subconjuntos abertos em X onde $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(A_\lambda)$. Como X é compacto, existe uma subfamília finita $(f^{-1}(A_{\lambda_1}), \cdots, f^{-1}(A_{\lambda_n}))$ tal que $X = f^{-1}(A_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(A_{\lambda_n})$. Então, $f(X) = f(f^{-1}(A_{\lambda_1})) \cup \cdots \cup f(f^{-1}(A_{\lambda_n})) = A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$. Portanto, $f(X)$ é compacto.

(c) Seja $F \subseteq X$ fechado. Decorre da Proposição 2.1.3 (a) que F é compacto. Pelo item (b), deste Lema, $f(F)$ é compacto. Pela Proposição 2.1.3 (b), tem-se que $f(F)$ é fechado. Finalmente, por (a) deste Lema, segue que $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ é contínua. Portanto, f é um homeomorfismo.

(d) Tome $N = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$. Seja $y \in N$. Como Y é espaço de Hausdorff existem subconjuntos abertos U e V em Y tais que $f(y) \in U$, $g(y) \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Claramente, $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ é um vizinhança aberta de y contida em N. Logo, N é igual a união de subconjuntos abertos e assim é aberto. Portanto, $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} = X - N$ é fechado.

□

Sejam X um espaço topológico, Q um conjunto qualquer e $\varphi : X \longrightarrow Q$ uma aplicação de X em Q. Indicaremos por $\mathcal{T}$ a coleção dos subconjuntos $B \subseteq Q$ tais que

$\varphi^{-1}(B)$ é um subconjunto aberto em X. Verifica-se facilmente que $\mathcal{T}$ é uma topologia em Q, chamada a **topologia co-induzida** pela aplicação φ. Relativamente à essa topologia, a aplicação $\varphi : X \longrightarrow Q$ é contínua.

Um caso frequente de topologia co-induzida é o seguinte. X é um espaço topológico e E uma relação de equivalência em X. No conjunto $Q = X/E$, quociente de X pela relação E, consideremos a topologia co-induzida pela aplicação canônica $\varphi : X \longrightarrow X/E$, que associa a cada $x \in X$ a classe de equivalência $\varphi(x)$ que o contém. Esta é a **topologia quociente** em X/E. O espaço topológico X/E é o **espaço quociente** de X pela relação de equivalência E. A aplicação φ chama-se **aplicação quociente**. É fácil verificar que φ tem a seguinte propriedade: se $f : X \longrightarrow Y$ é uma aplicação contínua, sobre Y, tal que elementos equivalentes, com respeito a relação E, tem a mesma imagem sobre f, então existe uma única aplicação contínua $\overline{f} : X/E \longrightarrow Y$ tal que $\overline{f}(\varphi(x)) = f(x)$.

2.2 Produtos de Espaços Topológicos

Seja $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de conjuntos. Seu produto cartesiano $C = \prod X_\lambda$ é o conjunto de todas as aplicações $x : \Lambda \longrightarrow \bigcup_\lambda X_\lambda$ tal que $x(\lambda) \in X_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Escrevemos $x(\lambda) = x_\lambda$ e denotaremos x por (x_λ). Entenderemos os elementos de C como vetores com entradas indexadas pelos elementos de Λ. Se qualquer $X_\lambda = \emptyset$, então $\prod X_\lambda = \emptyset$. Então devemos assumir que $X_\lambda \neq \emptyset$ para cada $\lambda \in \Lambda$ (aqui estamos usando o axioma da escolha). Note que no caso em que cada conjunto $X_\lambda = X$, o produto $\prod X_\lambda$ é o conjunto de todas as aplicações $\Lambda \longrightarrow X$. Este produto pode ser entendido como o produto cartesiano de Λ cópias de X.

A **função projeção** é uma aplicação $\pi_\alpha : \prod X_\lambda \longrightarrow X_\alpha$, dada por $(x_\lambda) \longmapsto x_\alpha$. Considerando cada X_λ como um espaço topológico, diremos que $\pi_\alpha^{-1}(A_\alpha) = A_\alpha \times \prod_{\lambda\neq\alpha} X_\lambda$ é aberto em C se A_α é aberto em X_α. Segue da Proposição 2.1.2 que o conjunto β de todas as interseções finitas

$$\pi_{\lambda_1}^{-1}(A_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap \pi_{\lambda_k}^{-1}(A_{\lambda_k}) = A_{\lambda_1} \times \cdots \times A_{\lambda_k} \times \prod_{\lambda\neq\lambda_i} X_\lambda$$

onde $A_{\lambda_1} \subseteq X_{\lambda_1}, \cdots, A_{\lambda_k} \subseteq X_{\lambda_k}$ são subconjuntos abertos, formam uma base para a topologia em C. Esta topologia é chamada a **topologia produto**. Se C está munido desta topologia, tem-se claramente que as funções projeções π_α são contínuas.

Seja Y um espaço topológico e $f : Y \longrightarrow C$ uma aplicação. Temos que f é uma aplicação contínua se, e somente se, cada função $\pi_\lambda \circ f$ é contínua. De fato, se f é contínua, então cada função $\pi_\lambda \circ f$, sendo a composição de duas aplicações contínuas, é contínua. Reciprocamente, se $\pi_\lambda \circ f$ é contínua para cada $\lambda \in \Lambda$, então para qualquer conjunto aberto $A_\lambda \subseteq X_\lambda$, $f^{-1}(\pi_\lambda^{-1}(A_\lambda)) = (\pi_\lambda \circ f)^{-1}(A_\lambda)$ é aberto em Y. Como a coleção das interseções finitas dos subconjuntos $\pi_\lambda^{-1}(A_\lambda)$, $A_\lambda \subseteq X_\lambda$ aberto, constituem uma base para topologia em C, segue que f é contínua.

A seguinte Proposição, descreve algumas propriedades gerais do produto cartesiano.

Proposição 2.2.1. *Sejam $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de espaços topológicos e C o seu produto cartesiano.*

(a) Se cada X_λ é espaço de Hausdorff, C também o é;

(b) Se cada X_λ é totalmente desconexo, C também o é;

(c) Se cada X_λ é compacto, C também o é.

Demonstração. Será omitida, mas pode ser consultada [17], página 4. □

2.3 Grupos Topológicos

Um **grupo topológico** é um conjunto G que é simultaneamente um grupo e um espaço topológico satisfazendo as seguintes condições:

(1) A aplicação $m : G \times G \longrightarrow G$ dada por $(x, y) \longmapsto xy$, é contínua quando consideramos $G \times G$ com a topologia produto;

(2) A aplicação $i : G \longrightarrow G$ dada por $x \longmapsto x^{-1}$, é contínua.

A continuidade das aplicações m e i são equivalentes a continuidade da aplicação $\mu : G \times G \longrightarrow G$ definida por, $(x, y) \longmapsto xy^{-1}$. De fato, se G é um grupo topológico de modo que a aplicação $\mu : G\times G \longrightarrow G$ é contínua, então a restrição $\mu|_H$, onde $H =\{1\}\times G$ é contínua. Claramente a aplicação $f : G \longrightarrow G \times G$ dada por $x \longmapsto (1, x)$, é contínua. Então $\mu|_H \circ f = i : G \longrightarrow G$ é contínua. Considere agora $id_G : G \longrightarrow G$, dada por $x \longmapsto x$, ou seja, a aplicação identidade em G. Como i é contínua, segue que a aplicação $(id_G \times i) : G \times G \longrightarrow G \times G$ definida por $(x, y) \longmapsto (x, y^{-1})$, é contínua. Portanto, $m = \mu \circ (id_G \times i) : G \times G \longrightarrow G$, $(x, y) \longmapsto xy$, é contínua. Reciprocamente, temos que $\mu = m \circ (id_G \times i) : G \times G \longrightarrow G$. Logo, μ é contínua.

Um grupo topológico G é **gerado topologicamente** por um subconjunto X de G se o subgrupo $\langle X\rangle$ é denso em G, isto é, se $G = \overline{\langle X\rangle}$.

Na seguinte Proposição apresentamos alguns resultados elementares sobre grupos topológicos.

Proposição 2.3.1. *Seja G um grupo topológico.*

(a) A aplicação $x \longmapsto x^{-1}$ de G para G é um homeomorfismo. Para cada $g \in G$ as aplicações $x \longmapsto xg$ e $x \longmapsto gx$, ambas de G para G, são homeomorfismos;

(b) *Se H é um subgrupo aberto de G (respectivamente fechado), então toda classe Hg ou gH de H em G é aberta (respectivamente fechada);*

(c) *Todo subgrupo aberto de G é fechado e todo subgrupo fechado de índice finito é aberto. Se G é compacto, então todo subgrupo aberto de G tem índice finito;*

(d) *Se H é um subgrupo contendo um subconjunto aberto não vazio U de G, então H é aberto em G;*

(e) *Se H é um subgrupo de G e K é um subgrupo normal de G, então H é um grupo topológico, com relação a subgrupo topológico, G/K é um grupo topológico, com relação a quocientes topológicos, e a aplicação quociente $q : G \longrightarrow G/K$ leva subconjuntos abertos em subconjuntos abertos;*

(f) *G é Hausdorff se, e somente se, {1} é um subconjunto fechado de G e se K é um subgrupo normal de G então G/K hausdorff se, e somente se, K é fechado em G. Se G é totalmente desconexo, então G é Hausdorff;*

(g) *Se G é compacto e Hausdorff e se C, D são subconjuntos fechados em G, então CD é fechado em G;*

(h) *Suponha que G é compacto e seja $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de subconjuntos fechados com a seguinte propriedade: para todos $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ existe um elemento $\mu \in \Lambda$ tal que $X_\mu \subseteq X_{\lambda_1} \cap X_{\lambda_2}$. Se Y é um subconjunto fechado de G, então $(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda)Y = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda Y$.*

Demonstração.

(a) A aplicação $i : G \longrightarrow G$, $x \longmapsto x^{-1}$, é claramente uma bijeção e sua inversa é ela mesma. Portanto, i é um homeomorfismo.

Uma aplicação $f : X \longrightarrow G \times G$ é contínua se, e somente se, a composição de cada função projeção com f é contínua; desse modo, se $\theta : G \longrightarrow G$ e $\varphi : G \longrightarrow G$ são aplicações contínuas, então, assim é a aplicação $x \longmapsto (\theta(x), \varphi(x))$ de G para $G \times G$. Agora, tomemos θ como a aplicação identidade em G e φ a aplicação constante, $x \longmapsto g^{-1}$, considere a aplicação $f : G \longrightarrow G \times G$, dada por $x \longmapsto (\theta(x), \varphi(x))$ e a aplicação $\mu : G \times G \longrightarrow G$, $(x, y) \longmapsto xy^{-1}$. Daí, $\mu \circ f : G \longrightarrow G$, $x \longmapsto xg$, é contínua e sua inversa $x \longmapsto xg^{-1}$ também é contínua. Logo, $x \longmapsto xg$ é homeomorfismo. De maneira análoga, mostra-se que a aplicação $x \longmapsto gx$ é um homeomorfismo.

(b) Note que dado um homeomorfismo $f : X \longrightarrow Y$, vale que: para todo subconjunto aberto (respectivamente fechado) $A \subseteq X$, tem-se que $f(A)$ é um subconjunto aberto (respectivamente fechado) em Y. De fato, seja $A \subseteq X$ um conjunto aberto. Como

$f^{-1} : Y \longrightarrow X$ é contínua, então $f(A)$ é aberto em Y. De maneira análoga, mostra-se que se $F \subseteq X$ é fechado, então $f(F)$ é fechado em Y.

Então (b) segue imediatamente por (a).

(c) Seja H um subgrupo aberto de G. Note que, $G - H = \bigcup(Hg \mid g \notin H)$. Por (b) $G - H$ é aberto. Então H é fechado.

Se H possui índice finito, então $G - H = \bigcup(Hg \mid g \notin H)$ é uma união de uma quantidade finita de classes. Assim, se H é fechado, então segue por (b) que $G - H$ é fechado. Logo, H é aberto.

Se H é aberto, então os subconjuntos Hg são abertos e disjuntos e sua união é igual a G. Decorre da definição de compacidade que se G é compacto, então H tem índice finito em G.

(d) Segue por (a) que para cada $h \in H$ o subconjunto $Uh = \{uh \mid u \in U\}$ é aberto. Então, se $U \subseteq H$, tem-se que $H = \bigcup(Uh \mid h \in H)$. Portanto, H é aberto.

(e) A afirmação sobre H é clara. Seja V um subconjunto aberto em G. Por (a) kV é aberto para cada $k \in K \subseteq G$. Então, $V_1 = KV = \bigcup_{k\in K} kV$ é aberto. Desde que $q(V) = q(V_1)$ e $q^{-1}(q(V_1)) = V_1$ tem-se que $q(V)$ é aberto em G/K, em relação a topologia co-induzida pela aplicação q. Resta mostrar que a aplicação $m : G/K \times G/K \longrightarrow G/K$ definida por, $(\varepsilon, \zeta) \longmapsto \varepsilon\zeta^{-1}$, é uma aplicação contínua. Seja U aberto em G/K e seja $(K\omega_1, K\omega_2) \in m^{-1}(U)$. Uma vez que as aplicações q e $(x, y) \longmapsto xy^{-1}$, de $G \times G$ para G, são contínuas, existem vizinhanças abertas W_1, W_2 em G de ω_1, ω_2, respectivamente, tais que, $W_1W_2^{-1} \subseteq q^{-1}(U)$, e assim $q(W_1) \times q(W_2)$ é uma vizinhança aberta de $(K\omega_1, K\omega_2)$ em $G/K \times G/K$ contida em $m^{-1}(U)$. Logo, $m^{-1}(U)$ pode ser escrito como uma união de abertos, assim $m^{-1}(U)$ é aberto. Portanto, m é contínua.

(f) Vimos anteriormente que se um espaço topológico X é Hausdorff, então todo subconjunto $\{x\}$ é fechado para cada $x \in X$. Assim, se G é Hausdorff, tem-se, em particular, que $\{1\}$ é um subconjunto fechado em G. Mostraremos agora que, se $\{1\}$ é um subconjunto fechado, então G é Hausdorff. Sejam a e b elementos distintos de G. Por (a), a aplicação $x \longmapsto xab^{-1}$, de G para G, é um homeomorfismo. Então $\{ab^{-1}\}$ é um subconjunto fechado em G. Assim, $U = G - \{ab^{-1}\}$ é um subconjunto aberto em G contendo 1. Como a aplicação $(x, y) \longmapsto xy^{-1}$, de $G \times G$ para G, é contínua, então a imagem inversa de U é um subconjunto aberto em $G \times G$. Desse modo segue que existem subconjuntos abertos V, W, contendo 1, tais que $VW^{-1} \subseteq U$. Como, $a^{-1}b \notin VW^{-1}$, tem-se que, $aV \cap bW = \emptyset$. Por (a), aV e bW são abertos. Logo, G é Hausdorff. A segunda e a terceira afirmações são consequências imediatas da primeira afirmação, juntamente com a definição da topologia quociente e também da Proposição 2.1.3 (g).

(g) Como C, D são subconjuntos fechados de um espaço compacto G, segue da Proposição 2.1.3 (a) que C, D são conjuntos compactos. Daí, $C \times D$ é um conjunto compacto (Proposição 2.2.1 (c)). Assim, a imagem de $C \times D$ pela aplicação contínua, $(x, y) \longmapsto xy$, é compacto (Lema 2.1.5 (b)). Esta imagem é claramente CD. Como G é Hausdorff, então CD é um subconjunto fechado (Proposição 2.1.3 (b)).

(h) Claramente $(\bigcap X_\lambda)Y \subseteq \bigcap(X_\lambda Y)$. Suponha que $g \notin (\bigcap X_\lambda)Y$. Então $gY^{-1} \cap (\bigcap X_\lambda) = \emptyset$. Como G é compacto e gY^{-1} e os conjuntos X_λ são fechados, então essa família de subconjuntos não pode satisfazer a propriedade da interseção finita. Assim, $gY^{-1} \cap X_{\lambda_1} \cdots \cap X_{\lambda_n} = \emptyset$, para alguns $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Por hipótese, existe $\mu \in \Lambda$ tal que $X_\mu \subseteq X_{\lambda_1} \cap \cdots \cap X_{\lambda_n}$. Desse modo, $gY^{-1} \cap X_\mu = \emptyset$ e $g \notin X_\mu Y$.

□

Lema 2.3.2.

(a) Se S é um subconjunto de um grupo topológico de Hausdorff G, então $C_G(S)$ é fechado em G;

(b) Se H é um subgrupo fechado de um grupo topológico de Hausdorff G, então $N_G(H)$ é fechado em G;

(c) Se H é um subgrupo aberto de um grupo topológico compacto G, então o core H_G é normal e aberto em G.

Demonstração. (a) Fixe $s \in S$. Pela Proposição 2.3.1 (a) tem-se que as aplicações $g \longmapsto gs$ e $g \longmapsto sg$, ambas de G para G, são contínuas. Uma vez que G é um espaço de Hausdorff, segue pelo Lema 2.1.5 (d) que o conjunto $C_s = \{g \in G \mid gs = sg\}$ é fechado. Note que,

$$C_G(S) = \bigcap_{s \in S} C_s.$$

Portanto, $C_G(S)$ é fechado em G.

(b) Fixe $h \in H$. Defina uma aplicação $f_h : g \in G \longmapsto g^{-1}hg \in G$. Perceba que f_h é contínua, pois é igual composição da aplicação $g \longmapsto hg$ com $g \longmapsto g^{-1}h$, ambas de G para G, que são contínuas (Proposição 2.3.1 (a)). Como H é fechado em G, então $N_h = f_h^{-1}(H)$ é fechado em G (Lema 2.1.5 (a)). Note que

$$N_G(H) = \bigcap_{h \in H} N_h.$$

Portanto, $N_G(H)$ é fechado em G.

(c) Já sabemos que $H_G \trianglelefteq G$. Por definição

$$H_G = \bigcap_{x \in G} H^x.$$

Afirmamos que x varia em uma transversal à direita de H em G. De fato, seja $T = \{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$ uma transversal à direita de H em G. Observe que, para cada $h \in H$ e $x \in T$ tem-se que,

$$H^{hx} = x^{-1}h^{-1}Hhx = H^x.$$

Logo, segue a afirmação. Como G é compacto e H é aberto, então o índice de H em G é finito (Proposição 2.3.1 (c)). Isso implica que T é um conjunto finito. Decorre da Proposição 2.3.1 (a) que para todo $g \in G$ a aplicação $x \longmapsto g^{-1}xg$ é um homeomorfismo. Então, para cada $x \in T$ o conjunto H^x é aberto e, portanto,

$$H_G = \bigcap_{x \in T} H^x$$

é aberto.

□

Lema 2.3.3. *Seja G um grupo topológico compacto. Se C é um subconjunto que é aberto e fechado, contendo 1, então C contém um subgrupo normal aberto.*

Demonstração. Para cada $x \in C$ o subconjunto $W_x = Cx^{-1}$ é uma vizinhança aberta de 1, tal que, $W_x x \subseteq C$. Desde que a multiplicação seja uma aplicação contínua de $G \times G$ para G, existem subconjuntos abertos L_x, R_x, contendo 1, tais que, a imagem de $L_x \times R_x$ está contida em W_x, isto é, tal que $L_x R_x \subseteq W_x$. Denotaremos $S_x = L_x \cap R_x$. Assim, $S_x S_x \subseteq W_x$ e S_x é aberto. Como C é compacto e é igual a união dos subconjuntos abertos $C \cap S_x x$, então, por isso existe um número finito desses subconjuntos tais que $C \subseteq \bigcup_{i=1}^n S_{x_i} x_i$. O conjunto $S = \bigcap_{i=1}^n S_{x_i}$, é aberto e contém 1. Assim temos,

$$SC \subseteq \bigcup_{i=1}^n SS_i x_i \subseteq \bigcup_{i=1}^n W_{x_i} x_i \subseteq C \qquad (*)$$

e assim, $S \subseteq C$. Seja $T = S \cap S^{-1}$. Logo, T é aberto, $T = T^{-1}$ e $1 \in T$. Escrevemos $T^1 = T$, para $n > 1$ escrevemos $T^n = TT^{n-1}$ e $H = \bigcup_{n>0} T^n$. Com isso, H é um grupo gerado por T e sendo um união de conjuntos da forma Ty, é aberto. Por indução, usando $(*)$, temos que $T^n \subseteq C$, para todo $n > 0$. Segue que, $H \subseteq C$. Uma vez que G é compacto e H é um subgrupo aberto de G, resulta pelo Lema 2.3.2 (c) que, o core H_G de H em G é um subgrupo normal e aberto de G contido em H. Portanto, H_G é o subgrupo desejado. □

Proposição 2.3.4. *Seja G um grupo topológico compacto, totalmente desconexo.*

(a) Todo subconjunto aberto em G é uma união de classes laterais de subgrupos normais e abertos;

(b) Um subconjunto de G é aberto e fechado se, e somente se, é uma união de uma quantidade finita de classes de subgrupos normais abertos;

(c) Se X é um subconjunto fechado de G, então

$$X = \bigcap(NX \mid N \ \ \textit{um subgrupo normal aberto de } G).$$

Particularmente, a interseção de todos os subgrupos normais abertos de G é um subgrupo trivial.

Demonstração. (a) Segue da Proposição 2.3.1 (f) que G é Hausdorff. Seja U um subconjunto aberto não vazio de G. Se $x \in U$, então Ux^{-1} é um subconjunto aberto, contendo 1. Segue da Proposição 2.1.3 (f) e Lema 2.3.3 que Ux^{-1} contém um subgrupo normal aberto K_x. Portanto, $U = \bigcup_{x \in U} K_x x$.

(b) Se P é um subconjunto que é simultaneamente aberto e fechado, por (a), tem-se que P é igual a união de uma família de classes laterais de subgrupos normais e abertos. Uma vez que P é compacto, P é igual a união de uma subfamília finita dessas classes. Reciprocamente, é claro que a união de uma quantidade finita de classes laterais de subgrupos normais e abertos é tanto aberto como fechado.

(c) Claramente $X \subseteq \bigcap(NX \mid N \text{ um subgrupo normal e aberto de } G)$. Reciprocamente, seja $y \in G$ tal que, $y \notin X$. Como G é totalmente desconexo, então y tem uma vizinhança aberta disjunta de X e assim, por (a), há um subgrupo normal aberto N satisfazendo $Ny \cap X = \emptyset$. Logo, $y \notin NX$ e, portanto,

$$X = \bigcap(NX \mid N \text{ um subgrupo normal aberto de } G). \qquad (*)$$

Observe que, como G é totalmente desconexo, então G é Hausdorff, assim $\{1\}$ é fechado em G (Proposição 2.3.1 (f)). Tomando $X = \{1\}$ em $(*)$, concluímos a prova de (c).

$\square$

Sejam G e H grupos topológicos. Dizemos que uma aplicação $f : G \longrightarrow H$ é um **isomorfismo topológico** se f é um isomorfismo de grupos e um homeomorfismo de espaços topológicos.

2.4 Limites Inverso

Nesta seção, vamos definir limite inverso e apresentar suas principais propriedades. Ao invés de desenvolver o conceito sob condições mais gerais, nos restringiremos a limites inversos de grupos topológicos, pois esse é o ambiente, em que, estamos interessados neste trabalho.

Um conjunto I é **parcialmente ordenado dirigido** ou **Poset dirigido** se I é um conjunto com uma relação binária $\preceq$ satisfazendo as seguintes condições:

(1) $i \preceq i$, para $i \in I$;

(2) $i \preceq j$ e $j \preceq i \Rightarrow i = j$, para $i, j \in I$;

(3) $i \preceq j$ e $j \preceq k \Rightarrow i \preceq k$, para $i, j, k \in I$;

(4) se $i, j \in I$ existe algum $k \in I$ tal que $i, j \preceq k$.

Um **sistema inverso** de grupos topológicos sobre um poset I, consiste de uma coleção $\{G_i \mid i \in I\}$ de grupos topológicos indexados por I e uma coleção de homomorfismos contínuos de grupos $\varphi_{ij} : G_i \longrightarrow G_j$, definido sempre que $i \succeq j$, de tal forma que o diagrama

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[rr, "\varphi_{ik}"] \arrow[dr, "\varphi_{ij}"'] & & G_k \\ & G_j \arrow[ur, "\varphi_{jk}"'] & \end{tikzcd}$$

comuta sempre que os homomorfismos são definidos, ou seja, sempre que $i, j, k \in I$ e $i \succeq j \succeq k$. Além disso, assumimos que φ_{ii} é a aplicação identidade id_{G_i} em G_i. Denotaremos tal sistema por $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ ou $\{G_i, \varphi_{ij}\}$ se o conjunto de índices I é claramente entendido. Se G é um grupo topológico fixo, denotaremos por $\{G, id\}$ o sistema inverso $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$, onde $G_i = G$ para todo $i \in I$ e φ_{ij} é a aplicação identidade id_G em G. Diremos que $\{G, id\}$ é o **sistema inverso constante** em G.

Sejam Y um grupo topológico, $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ um sistema inverso de grupos topológicos sobre um poset dirigido I e seja $\psi_i : Y \longrightarrow G_i$ um homomorfismo contínuo de grupos, para cada $i \in I$. A aplicação ψ_i diz ser **compatível** se $\varphi_{ij}\psi_i = \psi_j$ sempre que $j \preceq i$.

Diz-se que um grupo topológico G, juntamente com os homomorfismos contínuos compatíveis $\varphi_i : G \longrightarrow G_i,\ i \in I$, é um **limite inverso** do sistema inverso $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ se a seguinte propriedade universal é satisfeita: sempre que Y é um grupo topológico e $\psi_i : Y \longrightarrow G_i,\ i \in I$, é um conjunto de homomorfismos contínuos compatíveis, então existe um único homomorfismo contínuo $\psi : Y \longrightarrow G$ tal que $\varphi_i\psi = \psi_i$ para cada $i \in I$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, dotted, "\psi"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & G \arrow[d, "\varphi_i"] \\ & G_i \end{tikzcd}$$

As funções $\varphi_i : G \longrightarrow G_i$ são chamadas de **projeções**. Tais projeções, não são necessariamente sobrejetivas. Denotaremos o limite inverso por (G, φ_i).

No seguinte resultado, mostramos que exitem limites inverso e que são únicos.

Proposição 2.4.1. *Seja $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ um sistema inverso de grupos topológicos sobre um poset dirigido I. Então,*

(a) Existe um limite inverso do sistema inverso $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$;

(b) Este limite é único no seguinte sentido. Se (G, φ_i) e (H, ψ_i) são dois limites inverso do sistem inverso $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$, então existe um isomorfismo topológico $\varphi : G \longrightarrow H$ tal que $\psi_i\varphi = \varphi_i$ para cada $i \in I$.

Demonstração.

(a) Defina G como sendo,

$$G = \{(x_i) \in \prod_{i \in I} G_i \mid \varphi_{ij}\pi_i((x_i)) = \pi_j((x_i)), \forall\, i, j \in I, \text{ com } i \succeq j\}$$

onde $\pi_i : \prod_{i \in I} G_i \longrightarrow G_i,\ i \in I$, são as funções projeções. Note que G é um subgrupo do produto cartesiano $\prod_{i \in I} G_i$. Definimos $\varphi_i := \pi_i|_G$, para cada $i \in I$. Vamos mostrar que (G, φ_i) é o limite inverso do sistema inverso $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$. Para isso, temos que mostrar que:

(i) Para cada $i \in I$, $\varphi_i : G \longrightarrow G_i$ é um homomorfismo contínuo;

(ii) $\varphi_i : G \longrightarrow G_i,\ i \in I$, é uma família de homomorfismos compatíveis;

(iii) Vale a propriedade universal da definição de limite inverso.

Verifiquemos:

(i) Note que cada $\pi_i : \prod_{i \in I} G_i \longrightarrow G_i$ é um homomorfismo contínuo. Então sua restrição ao subgrupo G, $\pi_i|_G = \varphi_i : G \longrightarrow G_i$, é claramente um homomorfismo contínuo.

(ii) Para todo $i, j \in I$, com $i \succeq j$ temos que,

$$\varphi_{ij}\varphi_i = \varphi_{ij}\pi_i|_G = \pi_j|_G = \varphi_j$$

o que mostra que a família de homomorfismos, $\varphi_i : G \longrightarrow G_i$, são compatíveis.

(iii) Provaremos primeiro a existência. Sejam H um grupo topológico, $\psi_i : H \longrightarrow G_i$ uma família de homomorfismos contínuos compatíveis e a aplicação $\overline{\psi} : H \longrightarrow \prod_{i \in I} G_i$ definida por, $h \longmapsto (\psi_i(h))$. Note que, $\pi_i \overline{\psi} = \psi_i$, para todo $i \in I$. Como cada ψ_i é contínua, segue que $\overline{\psi}$ é contínua. Dados $a, b \in H$, tem-se que $\overline{\psi}(ab) = (\psi_i(ab)) = (\psi_i(a)\psi_i(b)) = (\psi_i(a))(\psi_i(b)) = \overline{\psi}(a)\overline{\psi}(b)$, ou seja, $\overline{\psi}$ é um homomorfismo de grupos. Para cada $i \succeq j$, vale que

$$\pi_j \overline{\psi} = \psi_j \overset{(*)}{=} \varphi_{ij}\psi_i = \varphi_{ij}\pi_i\overline{\psi}$$

em $(*)$ usamos o fato que cada ψ_i é compatível. Daí, concluímos que a imagem da aplicação $\overline{\psi}$ está em G, em outras palavras, $\overline{\psi}$ é uma aplicação de H para G. Agora defina a aplicação $\psi : H \longrightarrow G$ por, $\psi(h) = \overline{\psi}(h)$, para cada $h \in H$. Claramente ψ é um homomorfismo contínuo e satisfaz

$$\varphi_i \psi = \pi_i|_G \overline{\psi} = \psi_i, \ \forall \ i \in I,$$

o que mostra a existência do homomorfismo contínuo.

Provaremos agora a unicidade do homomorfismo $\psi : H \longrightarrow G$. Suponha que existe um outro homomorfismo contínuo $\phi : H \longrightarrow G$ satisfazendo $\varphi_i \phi = \psi_i$, para cada $i \in I$. Então, teremos que

$$\varphi_i \phi = \psi_i = \varphi_i \psi \ \forall \ i \in I \ \Rightarrow \phi = \psi.$$

Portanto, (G, φ_i) é o limite inverso do sistema inverso $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$.

(b) Suponhamos que (G, φ_i) e (H, ψ_i) são dois limites inversos do sistema inverso $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$. Uma vez que as aplicações $\psi : H \longrightarrow G_i$ são compatíveis, a propriedade universal do limite inverso (G, φ_i) mostra que existe um único homomorfismo contínuo $\psi : H \longrightarrow G$ tal que, $\varphi_i \psi = \psi_i$, para cada $i \in I$. Do mesmo modo, uma vez que as aplicações $\varphi_i : G \longrightarrow G_i$ são compatíveis e (H, ψ_i) é um limite inverso do sistema inverso $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$, segue pela propriedade universal deste limite inverso, que existe um único homomorfismo contínuo $\varphi : G \longrightarrow H$ tal que, $\psi_i \varphi = \varphi_i$, para cada $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, bend left, dotted, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & & H \arrow[ll, bend left, dotted, "\psi"] \arrow[dl, "\psi_i"] \\
& G_i &
\end{tikzcd}$$

Então, observe que o diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, dotted, bend left=10, "\psi\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & & G \arrow[ll, dotted, bend left=10, "id_G"] \arrow[dl, "\varphi_i"] \\ & G_i & \end{tikzcd}$$

comuta para todo $i \in I$. Uma vez que, por definição, existe apenas um único homomorfismo satisfazendo esta propriedade, então, tem-se necessariamente que, $\psi\varphi = id_G$. Da mesma forma, tem-se que, $\varphi\psi = id_H$. Portanto, φ é um isomorfismo topológico.

$\square$

Observação 2.4.2. *Se cada G_i é apenas um espaço topológico e as aplicações $\varphi_{ij} : G_i \longrightarrow G_j$, $i \succeq j$, são contínuas, temos que $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ é um sistema inverso de espaços topológicos. Do mesmo modo, se G é apenas um espaço topológico e as aplicações $\varphi_i : G \longrightarrow G_i$ são contínuas e compatíveis, temos que (G, φ_i) é um sistema inverso de espaços topológicos. Vale salientar, que todos os resultados apresentados, nesta seção, valem para tais sistemas e limites inversos.*

Se $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ é um sistema inverso, vamos denotar, a partir de agora, seu limite inverso por: $\varprojlim_{i\in I} G_i$, ou $\varprojlim_I G_i$, ou $\varprojlim G_i$, dependendo do contexto.

Lema 2.4.3. *Se $\{G_i, \varphi_{ij}\}$ é um sistema inverso de grupos topológicos de Hausdorff, então $\varprojlim G_i$ é um subgrupo fechado de $\prod_{i\in I} G_i$.*

Demonstração. Seja $(x_i) \in (\prod G_i) - (\varprojlim G_i)$. Então existem $r, s \in I$, com $r \succeq s$, tal que, $\varphi_{rs}\pi_r((x_i)) \neq \pi_s((x_i))$. Como cada G_i é, em particular, um espaço de Hausdorff, existem vizinhanças abertas disjuntas U e V de $\varphi_{rs}\pi_r((x_i))$ e $\pi_s((x_i))$ em G_s, respectivamente. Seja U' uma vizinhança aberta de $\pi_r((x_i))$ em G_r tal que, $\varphi_{rs}(U') \subseteq U$. Considere o subconjunto aberto $W_{(x_i)} = \prod_{i\in I} V_i$ de $\prod_{i\in I} G_i$, onde $V_r = U'$, $V_s = V$ e $V_i = G_i$, para $i \neq r, s$. Então, $W_{(x_i)}$ é uma vizinhança aberta de (x_i) em $\prod_{i\in I} G_i$ disjunto de $\varprojlim G_i$. Como $(x_i) \in (\prod G_i) - (\varprojlim G_i)$ foi tomado arbitrariamente, tem-se que,

$$\bigcup_{(x_i)\in(\prod G_i)-(\varprojlim G_i)} W_{(x_i)} = \left(\prod G_i\right) - (\varprojlim G_i)$$

é um subconjunto aberto em $\prod_{i\in I} G_i$. Logo, $\varprojlim G_i$ é um subgrupo fechado em $\prod_{i\in I} G_i$.

$\square$

Proposição 2.4.4. *Seja $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ um sistema inverso de grupos topológicos de Hausdorff, compacto e totalmente desconexo sobre um poset dirigido I. Então, $\varprojlim_{i\in I} G_i$ é também um grupo topológico de Hausdorff, compacto e totalmente desconexo.*

Demonstração. Segue das proposições 2.2.1 e 2.1.3 juntamente com o Lema 2.4.3. □

Proposição 2.4.5.

(a) *Sejam $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ um sistema inverso de espaços topológicos de Hausdorff, compactos e X um espaço de Hausdorff, compacto. Suponha que $\{\varphi_i : X \longrightarrow X_i\}_{i \in I}$ é um conjunto de aplicações contínuas, compatíveis e sobrejetivas. Então a aplicação correspondente induzida $\theta : X \longrightarrow \varprojlim X_i$ é sobrejetora.*

(b) *Seja $\{X_i, \varphi_{ij}, I\}$ um sistema inverso de espaços topológicos sobre um poset dirigido I e sejam $\rho_i : X \longrightarrow X_i$ aplicações contínuas, compatíveis e sobrejetivas, do espaço X para os espaços X_i $(i \in I)$. Então, $\varprojlim X_i = \emptyset$ ou corresponde a aplicação induzida $\rho : X \longrightarrow \varprojlim X_i$, de X para um subconjunto denso de $\varprojlim X_i$.*

Demonstração. Será omitida, mas pode ser consultada em [13], página 7. □

Lema 2.4.6. *Sejam $\{G_i, \varphi_{ij}\}$ um sistema inverso de grupos topológicos compactos de Hausdorff, $G = \varprojlim G_i$ e $\varphi_i : G \longrightarrow G_i$ as projeções.*

(a) *Se Y é um subespaço fechado de G, então $Y = \varprojlim \varphi_i(Y)$;*

(b) *Se Y é um subespaço de G, então $\overline{Y} = \varprojlim \varphi_i(Y)$, em que $\overline{Y}$ é o fecho de Y em G;*

(c) *Se Y e Y' são subespaços de G e $\varphi_i(Y) = \varphi_i(Y')$, para cada i, então $\overline{Y} = \overline{Y'}$.*

Demonstração.

(a) Observe que há uma inclusão óbvia,

$$Y \hookrightarrow \varprojlim \varphi_i(Y) \hookrightarrow \varprojlim G_i = G.$$

Pela Proposição 2.4.4, tem-se que G é um grupo topológico compacto e de Hausdorff. Note que,

- decorre da Proposição 2.1.3, itens (a) e (c), que Y é um espaço compacto de Hausdorff;
- $\{\varphi_i : Y \longrightarrow \varphi_i(Y)\}$ é um conjunto de aplicações contínuas, sobrejetivas e compatíveis.

Então, segue da Proposição 2.4.5 (a) que a aplicação $Y \longrightarrow \varprojlim \varphi_i(Y)$ é sobrejetiva. Portanto, $Y = \varprojlim \varphi_i(Y)$.

(b) De acordo com a Proposição 2.4.5 (b), Y está incluso em $\varprojlim \varphi_i(Y)$ como um subconjunto denso. De maneira análoga a demostração do Lema 2.4.3, mostra-se que $\varprojlim \varphi_i(Y)$ é fechado em G. Então, $\overline{Y} = \varprojlim \varphi_i(Y)$.

(c) Como $\varphi_i(Y) = \varphi_i(Y^{'})$, para cada i, então

$$\overline{Y} = \varprojlim \varphi_i(Y) = \varprojlim \varphi_i(Y^{'}) = \overline{Y^{'}}$$

$\square$

Seja $(I, \preceq)$ um poset dirigido. Considere I' um subconjunto de I de tal forma que $(I', \preceq)$ é um poset dirigido. Dizemos que I' é **cofinal** em I, se para todo $i \in I$, existe algum $i' \in I'$ tal que, $i \preceq i'$.

Seja $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ um sistema inverso e I' cofinal em I, $\{G_i, \varphi_{ij}, I'\}$ torna-se um sistema inverso de forma óbvia e dizemos que $\{G_i, \varphi_{ij}, I'\}$ é um **sistema cofinal** de $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$.

Proposição 2.4.7. *Seja $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ um sistema inverso de grupos topológicos compactos de Hausdorff sobre um poset dirigido I e seja I' um subconjunto cofinal de I. Então*

$$\varprojlim_{i\in I} G_i \cong \varprojlim_{i'\in I'} G_{i'}$$

Demonstração. Para cada $j \in I$, seja $j' \in I'$ tal que, $j' \succeq j$. Defina

$$\overline{\varphi_j} : \varprojlim_{I'} G_{i'} \longrightarrow G_j$$

como a composição dos homomorfismos canônicos $\varphi_{j'j}\varphi'_{j'}$, onde $\varphi'_{j'} : \varprojlim_{i'\in I'} G_{i'} \longrightarrow G_{j'}$ são as funções projeções do limite inverso $(\varprojlim_{i'\in I'} G_{i'}, \varphi'_{i'})$. Observe que as aplicações $\overline{\varphi_j}$ são bem definidas e são compatíveis. Daí, elas induzem a seguinte aplicação

$$\overline{\varphi} : \varprojlim_{I'} G_{i'} \longrightarrow \varprojlim_{I} G_i$$

tal que, $\varphi_j\overline{\varphi} = \overline{\varphi_j}$ $(j \in I)$, onde $\varphi_j : \varprojlim_{i\in I} G_i \longrightarrow G_j$ são as funções projeções do limite inverso $(\varprojlim_{i\in I} G_i, \varphi_i)$. Afirmamos que a aplicação $\overline{\varphi}$ é uma bijeção. De fato, sejam $(x_{i'})$, $(y_{j'}) \in \varprojlim_{i'\in I'} G_{i'}$ tais que, $(x_i) = \overline{\varphi}((x_{i'})) = \overline{\varphi}((y_{j'})) = (y_j)$. Isso implica que $x_{i'} = y_{i'}$ para todo $i' \in I'$. Como I' é cofinal em I, segue que $\overline{\varphi}$ é injetora. Para ver que $\overline{\varphi}$ é sobrejetora, seja $(y_i) \in \varprojlim_{i\in I} G_i$ e considere o elemento $(x_{i'})$ em que, $x_{i'} = y_{i'}$, para cada $i' \in I'$. Então, $(x_{i'}) \in \varprojlim_{i'\in I'} G_{i'}$ e claramente, $\overline{\varphi}((x_{i'})) = (y_i)$. O que prova a afirmação. Segue pela construção da $\overline{\varphi}$ que a mesma é um homomorfismo contínuo. Daí, $\overline{\varphi}$ é um isomorfismo contínuo de grupos. Segue da Proposição 2.4.4, que $\varprojlim_{i'\in I'} G_{i'}$ e $\varprojlim_{i\in I} G_i$ são grupos topológicos compactos de Hausdorff. Pelo Lema 2.1.5 (c), tem-se que $\overline{\varphi}$ é um homeomorfismo. Portanto, $\overline{\varphi}$ é um isomorfismo topológico.

$\square$

Um sistema inverso $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ é chamado **sistema sobrejetivo** se cada aplicação φ_{ij} $(i \succeq j)$ é sobrejetora. Pelo Lema 2.4.6 (a), para qualquer sistema inverso $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ existe um sistema inverso $\{\varphi_i(G), \varphi'_{ij}, I\}$ sobrejetivo correspondente (onde φ'_{ij} é a restrição de φ_{ij} para $\varphi_i(G)$) com o mesmo limite inverso G.

Seja $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ um sistema inverso de grupos topológicos sobre um poset dirigido I. Considere $G = \varprojlim G_i$ e seja $\varphi_j : G \longrightarrow G_j$ as funções projeções. Se φ_j é sobrejetiva para cada $j \in I$, evidentemente, $\varphi_{rs} : G_r \longrightarrow G_s$ será sobrejetiva, para todos $r, s \in I$, $r \succeq s$. A reciproca não é necessariamente verdadeira. No entanto, como mostra a seguinte Proposição, a reciproca vale nas seguintes condições.

Proposição 2.4.8. *Seja $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ um sistema inverso sobrejetivo de grupos topológicos compactos de Hausdorff sobre um poset dirigido I. Então, para cada $j \in I$, a função projeção $\varphi_j : \varprojlim G_i \longrightarrow G_j$ é sobrejetiva.*

Demonstração. Fixe $j \in I$. O conjunto $I_j = \{i \in I \mid i \succeq j\}$ é cofinal em I. Pela Proposição 2.4.7 tem-se que, $\varprojlim_{i \in I_j} G_i \cong \varprojlim_{i \in I} G_i$. Portanto podemos supor que $i \succeq j$, para cada $i \in I$. Seja $x_j \in G_j$ e $Y_r = \varphi_{rj}^{-1}(x_j)$, para cada $r \in I$. Uma vez que φ_{rj} é sobrejetora e contínua, Y_r é um subconjunto não vazio e compacto de G_r $(r \in I)$. Além disso, se $r \succeq s$, $r, s \in I$, tem-se que, $\varphi_{rs}(Y_r) \subseteq Y_s$. Daí, $\{Y_r, \varphi_{rs}, I\}$ é um sistema inverso. Afirmamos que $\varprojlim Y_r \neq \emptyset$. De fato, para cada $j \in I$, defina o subconjunto X_j de $\prod Y_r$ como,

$$X_j = \{(y_r) \in \prod Y_r \mid \varphi_{jk}\pi_j((y_r)) = \pi_k((y_r)),\ \forall\ j \succeq k\}$$

usando o axioma da escolha e um argumento similar ao do Lema 2.4.3, mostra-se que cada X_j é um subconjunto fechado não vazio de $\prod Y_r$. Observe que, se $j' \succeq j$, então $X_{j'} \subseteq X_j$. Segue que a coleção de subconjuntos $\{X_j \mid j \in I\}$ tem a propriedade da interseção finita, já que I é um poset dirigido. Uma vez que $\prod_{r \in I} Y_r$ é compacto, segue que $\bigcap X_j$ é não vazio. Então,

$$\varprojlim_{r \in I} Y_r = \bigcap_{j \in I} X_j$$

(veja demonstração da Proposição 2.4.1 (a)). O que prova a afirmação. Desse modo, existe um elemento $(y_r) \in \varprojlim Y_i \subseteq \varprojlim X_i$, tal que, $\varphi_j((y_r)) = x_j$. Portanto, φ_j é sobrejetora para cada $j \in I$. $\square$

2.5 Grupos Pro-$\mathcal{C}$

Seja $\mathcal{C}$ uma classe não vazia de grupos finitos (isso sempre significa que $\mathcal{C}$ contém todas as imagens de isomorfismos de grupos de $\mathcal{C}$). Definimos um **grupo pro-$\mathcal{C}$** G como o limite inverso

$$G = \varprojlim_{i \in I} G_i$$

de um sistema inverso sobrejetivo $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ de grupos G_i em $\mathcal{C}$, onde cada grupo esta munido da topologia discreta. Entendemos um grupo pro-$\mathcal{C}$ G como um grupo topológico, cuja topologia é herdada do produto $\prod_{i\in I} G_i$.

Algumas classes importantes são:

- a classe de todos os grupos finitos. Neste caso, chamamos o grupo pro-$\mathcal{C}$ de **profinito**;
- a classe de todos os p-grupos finitos, onde p é primo. Neste caso, chamamos o grupo pro-$\mathcal{C}$ de **pro-p**;
- a classe de todos os grupos nilpotentes finitos. Neste caso, chamamos o grupo pro-$\mathcal{C}$ de **pronilpotente**.

Se $\mathcal{C}$ é uma das classes mencionada acima, então $\mathcal{C}$ satisfaz as seguintes propriedades:

(P1) $\mathcal{C}$ é **fechada para subgrupos**, isto é, se $G \in \mathcal{C}$ e $H \leq G$ então $H \in \mathcal{C}$;

(P2) $\mathcal{C}$ é **fechada para quocientes**, isto é, se $G \in \mathcal{C}$ e $K \trianglelefteq G$ então $G/K \in \mathcal{C}$;

(P3) $\mathcal{C}$ é **fechada para produto direto finito**, isto é, se $G_i \in \mathcal{C}$ $(i = 1, \cdots, n)$, então $\prod_{i=1}^{n} G_i \in \mathcal{C}$.

Vamos exibir agora um exemplo de grupo profinito.

Exemplo 2.5.1. *Seja p um número primo. A coleção $\{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}\}$ de grupos topológicos ($\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ está munido de topologia discreta) indexados por $\mathbb{N}$, juntamente com os homomorfismos*

$$\varphi_{nm} : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$$

definidos por $\varphi_{nm}(x + p^n\mathbb{Z}) = x + p^m\mathbb{Z}$, sempre que $n \geq m$, que são claramente contínuos, é um sistema inverso de grupos topológicos finitos, pois o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \arrow[rr, "\varphi_{nk}"] \arrow[dr, "\varphi_{nm}"'] & & \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \\
& \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \arrow[ur, "\varphi_{mk}"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta sempre que $n \geq m \geq k$. Então,

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

é um grupo profinito, mais ainda, $\mathbb{Z}_p$ é um grupo pro-p, pois cada $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ é um p-grupo finito.

$\mathbb{Z}_p$ pode ser identificado como o conjunto de todas as sequências (classes de equivalências) $(a_n) = (a_1, a_2, \cdots)$ de números naturais tal que $a_n \equiv a_m (mod\ p^m)$, $n \geq m$, pois,

$$\mathbb{Z}_p = \{(a_n) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \mid \varphi_{nm}(a_n) = a_m, n \geq m\}$$

Então,

$$\varphi_{nm}(a_n) = a_m \Leftrightarrow a_n + p^m\mathbb{Z} = a_m + p^m\mathbb{Z} \Leftrightarrow a_n \equiv a_m (mod\ p^m)$$

sempre que, $n \geq m$.

Lema 2.5.2. *Seja $G = \varprojlim_{i \in I} G_i$, onde $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ é um sistema inverso de grupos finitos G_i e seja*

$$\varphi_i : G \longrightarrow G_i \ (i \in I)$$

o homomorfismo projeção. Então,

$$\{S_i \mid S_i = ker(\varphi_i)\}$$

é um sistema fundamental de vizinhanças abertas do elemento 1 em G.

Demonstração. Considere a família de vizinhanças de 1 em $\prod_{i \in I} G_i$ da forma

$$\left(\prod_{i \neq i_1, \cdots, i_t} G_i \right) \times \{1\}_{i_1} \times \cdots \times \{1\}_{i_t}$$

para qualquer conjunto finito de índices $i_1, \cdots, i_t \in I$, onde $\{1\}_i$ denota o subconjunto de G_i que consiste do elemento identidade. Uma vez que cada G_i está munido da topologia discreta, esta família é um sistema fundamental de vizinhanças do elemento identidade de $\prod_{i \in I} G_i$. Seja $i_0 \in I$ tal que $i_0 \succeq i_1, \cdots, i_t$. Afirmamos que

$$G \bigcap \left[\left(\prod_{i \neq i_0} G_i \right) \times \{1\}_{i_0} \right] = G \bigcap \left[\left(\prod_{i \neq i_1, \cdots, i_t} G_i \right) \times \{1\}_{i_1} \times \cdots \times \{1\}_{i_t} \right]$$

De fato, note que o conjunto $I' = \{i \in I \mid i \succeq i_0\}$ é cofinal em I. Como cada grupo finito G_i está munido da topologia discreta, tem-se claramente que cada G_i é um grupo topológico compacto de Hausdorff, assim, $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ é um sistema inverso de grupos topológicos compactos de Hausdorff. Segue pela Proposição 2.4.7, que

$$G = \varprojlim_{i \in I} G_i \cong \varprojlim_{i \in I'} G_i$$

usando o fato que $\varprojlim_{i \in I'} G_i$ é um subgrupo fechado de $\prod_{i \in I'} G_i$ e identificando $\prod_{i \in I'} G_i$

em $\prod_{i\in I} G_i$, tem-se que,

$$\varprojlim_{i\in I'} G_i \bigcap \left[\left(\prod_{i\neq i_0} G_i\right) \times \{1\}_{i_0}\right] = \varprojlim_{i\in I'} G_i \bigcap \left[\left(\prod_{i\neq i_1,\cdots,i_t} G_i\right) \times \{1\}_{i_1} \times \cdots \times \{1\}_{i_t}\right]$$

o que prova a afirmação. Portanto, a família de vizinhanças de 1 em G é da forma

$$G \bigcap \left[\left(\prod_{i\neq i_0} G_i\right) \times \{1\}_{i_0}\right]$$

é um sistema fundamental de vizinhanças abertas de 1. Finalmente, observe que

$$G \bigcap \left[\left(\prod_{i\neq i_0} G_i\right) \times \{1\}_{i_0}\right] = ker(\varphi_{i_0}) = S_{i_0}.$$

□

Apresentaremos agora uma caracterização para os grupos pro-$\mathcal{C}$, onde $\mathcal{C}$ é uma das classes de grupos apresentadas anteriormente, ou seja, $\mathcal{C}$ é a classe de todos os grupos finitos ou $\mathcal{C}$ é a classe de todos os p-grupos finitos ou $\mathcal{C}$ é a classe de todos os grupos nilpotentes finitos.

Proposição 2.5.3. *As seguintes condições, em um grupo topológico G são equivalentes:*

(a) G é um grupo pro-$\mathcal{C}$;

(b) G é compacto, de Hausdorff e totalmente desconexo, e para cada subgrupo normal aberto U de G, $G/U \in \mathcal{C}$;

(c) G é compacto e o elemento identidade 1 de G admite um sistema fundamental $\mathcal{U}$ de vizinhanças abertas U, tal que, $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} U = 1$ e U é um subgrupo normal e aberto de G com, $G/U \in \mathcal{C}$;

(d) O elemento identidade 1 de G admite um sistema fundamental $\mathcal{U}$ de vizinhanças abertas U tal que U é um subgrupo normal de G com $G/U \in \mathcal{C}$ e

$$G = \varprojlim_{U\in\mathcal{U}} G/U.$$

Demonstração.

(a) $\Rightarrow$ (b) Seja $G = \varprojlim_{i\in I} G_i$, onde $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ é um sistema inverso sobrejetivo de grupos topológicos, de modo que cada G_i pertence a $\mathcal{C}$. Denote por $\varphi_i : G \longrightarrow G_i$ $(i \in I)$ a função projeção. Como cada grupo finito G_i está munido da topologia discreta, segue que cada G_i é um grupo compacto, de Hausdorff e totalmente desconexo. Pela

Proposição 2.4.4, G é um grupo topológico compacto, de Hausdorff e totalmente desconexo. Uma vez que $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ é um sistema inverso sobrejetivo de grupos topológicos compactos de Hausdorff, tem-se pela Proposição 2.4.8 que a função projeção $\varphi_i : G \longrightarrow G_i$ é sobrejetiva. Seja U um subgrupo normal e aberto de G. Segue do Lema 2.5.2, que para algum $i \in I$, existe um subgrupo normal $S_i = ker(\varphi_i)$ onde $S_i \leqslant U$. Note que,

- $\varphi_i : G \longrightarrow G_i$ $(i \in I)$ é um epimorfismo, então $G/S_i \cong G_i \in \mathcal{C}$;
- Para cada $i \in I$, $S_i \trianglelefteq U$, $U/S_i \trianglelefteq G/S_i$ e por um dos Teoremas de isomorfismo

$$\frac{\frac{G}{S_i}}{\frac{U}{S_i}} \cong \frac{G}{U},$$

como $G/S_i \in \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ é fechada para quociente, então $G/U \in \mathcal{C}$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Segue do Lema 2.5.2, que G admite um sistema fundamental de vizinhanças abertas do elemento identidade 1. Pela Proposição 2.1.3 (f), G admite uma base de subconjuntos que são simultaneamente abertos e fechados para sua topologia. Desse modo, G possui um sistema fundamental $\mathcal{U}$ de vizinhanças, abertas e fechadas, do elemento identidade 1 de G tal que,

$$\bigcap_{V \in \mathcal{U}} V = 1.$$

Então, é suficiente mostrar que para cada $V \in \mathcal{U}$, V contém um subgrupo normal e aberto de G. Seja X um subconjunto de G e n um número natural. Para os fins da presente prova somente, denotaremos por X^n o conjunto de todos os produtos $x_1 \cdots x_n$, onde $x_1, \cdots, x_n \in X$. Além disso, denotaremos por X^{-1} o conjunto de todos os elementos x^{-1}, onde $x \in X$.

Defina $F = (G - V) \cap V^2$. Como G é compacto e V é fechado, tem-se que V é compacto, consequentemente V^2 também é compacto. Uma vez que G é um espaço de Hausdorff, tem-se que V^2 é fechado em G (Proposição 2.1.3). Assim, F é fechado no compacto G, e portanto, também é compacto. Seja $x \in V$, então $x \notin F$, isso implica que $x \in G - F$. Pela continuidade da multiplicação, existem vizinhanças abertas V_x e S_x de x e 1, respectivamente, de tal modo que, V_x, $S_x \subseteq V$ e $V_x S_x \subseteq G - F$. Pela compacidade de V existe uma quantidade finita de $x_1, \cdots, x_n$ tais que a união dos $V_{x_1}, \cdots, V_{x_n}$ é igual a V. Considere $S = \bigcap_{i=1}^{n} S_{x_i}$ e $W = S \cap S^{-1}$. Então W é uma vizinhança simétrica de 1 (isto é, $w \in W$ se, e somente se, $w^{-1} \in W$), $W \subseteq V$ e $VW \subseteq G - F$. Portanto, $VW \cap F = \emptyset$. Uma vez que $VW \subseteq V^2$, então $VW \cap (G - V) = \emptyset$, caso contrário $VW \cap F \neq \emptyset$, o que é uma contradição. Assim, $VW \subseteq V$. Consequentemente, $VW^n \subseteq V$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que W é simétrico, tem-se que $R = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W^n$ é um subgrupo aberto de G contido em V. Assim, o core de R em G

$$R_G = \bigcap_{x\in G} R^x$$

é um subgrupo normal e aberto de G (Lema 2.3.2 (c)). Finalmente, observe que $R_G \subseteq V$ pois,

$$R_G \leq R \subseteq VR \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} VW^n \subseteq V.$$

Então, R_G é um subgrupo normal e aberto de G contido em V.

(c) $\Rightarrow$ (d) Seja $\mathcal{U}$ como em (c). Observe que $\mathcal{U}$ é um poset dirigido, com a seguinte definição: $U \succeq V$ se, e somente se, $U \leq V$, para cada $U,\ V \in \mathcal{U}$. De fato,

- $U \preceq U$, pois $U \leq U$ para cada $U \in \mathcal{U}$;
- se $U \preceq V$ e $V \preceq U$, então $V \leq U$ e $U \leq V \Rightarrow U = V$, para cada $U,\ V \in \mathcal{U}$;
- se $U \preceq V$ e $V \preceq W$, então $W \leq V \leq U \Rightarrow U \preceq W$, para cada $U,\ V,\ W \in \mathcal{U}$;
- Seja $U,\ V \in \mathcal{U}$, temos que existe $W = U \cap V \in \mathcal{U}$ tal que, $W \leq U,\ V \Rightarrow U,\ V \preceq W$.

Vamos mostrar que $\{G/U, \varphi_{UV}, \mathcal{U}\}$ é um sistema inverso de grupos $G/U \in \mathcal{C}$, $U \in \mathcal{U}$, onde $\varphi_{UV} : G/U \longrightarrow G/V$ é o epimorfismo natural, para $U \succeq V$. Claramente $\{G/U \mid U \in \mathcal{U}\}$ é uma coleção de grupos topológicos e $\{\varphi_{UV} : G/U \longrightarrow G/U \mid U \succeq V,\ U \text{ e } V \in \mathcal{U}\}$ é uma família de homomorfismos contínuos onde o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\frac{G}{U} \arrow[rr, "\varphi_{UW}"] \arrow[dr, "\varphi_{UV}"'] & & \frac{G}{W} \\
& \frac{G}{V} \arrow[ur, "\varphi_{VW}"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta, sempre que $U \succeq V \succeq W$. Além disso, $\varphi_{UU} = id_{G/U}$, para cada $U \in \mathcal{U}$. Logo, $\{G/U, \varphi_{UV}, \mathcal{U}\}$ é um sistema inverso.

Considere agora o epimorfismo canônico,

$$\psi_U : G \longrightarrow \frac{G}{U}$$

como $\varphi_{UV}\psi_U = \psi_V$, sempre que $U \succeq V$, então

$$\left\{\psi_U : G \longrightarrow \frac{G}{U} \mid U \in \mathcal{U}\right\}$$

é uma família de homomorfismos compatíveis. Note que $\psi_U : G \longrightarrow G/U$ induz um homomorfismo contínuo

$$\psi : G \longrightarrow \varprojlim_{U \in \mathcal{U}} \frac{G}{U}.$$

Vamos mostrar que ψ é um isomorfismo topológico. Segue pela Proposição 2.4.5 (a), que ψ é um epimorfismo. Para ver que ψ é um homeomorfismo, basta provar que ψ é um monomorfismo, uma vez que G é compacto e $\varprojlim_{U\in\mathcal{U}} G/U$ é Hausdorff (ver Lema 2.1.5 (c)). Perceba que se $x \in G$ e $\psi(x) = 1$, então $x \in U$ para todo $U \in \mathcal{U}$, o que implica em $x \in \bigcap_{U\in\mathcal{U}} U = 1$, então $x = 1$. Logo, o $ker(\psi) = 1$ e, então, ψ é um monomorfismo. Portanto, ψ é um isomorfismo topológico.

(d) $\Rightarrow$ (a) Segue diretamente da definição de grupo pro-$\mathcal{C}$.

□

Introduziremos agora uma notação, que será muito útil para o que está por vim. Seja G um grupo topológico e H um subgrupo de G. Então,

$$H \leq_\circ G, \quad H \leq_c G, \quad H \lhd_\circ G, \quad H \lhd_c G, \quad H \leq_f G, \quad H \lhd_f G$$

indicará respectivamente: H subgrupo aberto de G, H subgrupo fechado de G, H subgrupo normal e aberto de G, H subgrupo normal e fechado de G, H subgrupo de índice finito de G e H subgrupo normal de índice finito de G.

Lema 2.5.4. *Seja G um grupo pro-$\mathcal{C}$, onde $\mathcal{C}$ é uma das classes de grupos apresentadas no início desta seção, então*

(a) Todo grupo quociente G/K, onde $K \lhd_c G$, é um grupo pro-$\mathcal{C}$;

(b) Todo subgrupo fechado H de G é um grupo pro-$\mathcal{C}$;

(c) Todo subgrupo finito H de um grupo profinito G é um grupo profinito.

Demonstração. (a) Seja $\mathcal{V} = \{KU \mid U \lhd_\circ G\}$. Considerando $\mathcal{V}$ com a seguinte definição: $KU \succeq KV$ se, e somente se, $V \leq U$, para cada $U, V \lhd_\circ G$. Mostra-se de maneira análoga à demonstração da implicação (c)$\Rightarrow$(d) da Proposição 2.5.3, que $\mathcal{V}$ é um poset dirigido. Como G é um grupo pro-$\mathcal{C}$, segue pela Proposição 2.5.3 (b), que $G/U \in \mathcal{C}$ para todo $U \lhd_\circ G$. Por um dos Teoremas de isomorfismos de grupos temos que

$$\frac{\frac{G}{U}}{\frac{KU}{U}} \cong \frac{G}{KU}.$$

Uma vez que $\mathcal{C}$ é fechada para quocientes, tem-se que $G/KU \in \mathcal{C}$. Seguindo os mesmos passos da demonstração da implicação (c)$\Rightarrow$(d) da Proposição 2.5.3, obteremos um epimorfismo contínuo

$$\psi : G \longrightarrow \varprojlim_{U \lhd_\circ G} \frac{G}{KU}.$$

Vamos determinar o núcleo da ψ. Se $x \in G$ e $\psi(x) = 1$, então $x \in KU$ para todo $U \lhd_\circ G$, então

$$x \in \bigcap_{U \lhd_\circ G} KU.$$

Uma vez que $K \leq_c G$, segue pela Proposição 2.3.4 (c), que

$$K = \bigcap_{U \lhd_\circ G} KU.$$

Logo, $K = Ker(\psi)$. Novamente, por um dos Teoremas de isomorfismos de grupos, temos que

$$\frac{G}{K} \cong \varprojlim_{U \lhd_\circ G} \frac{G}{KU}.$$

Como G/K é compacto e $\varprojlim_{U \lhd_\circ G} G/KU$ é Hausdorff, segue pelo Lema 2.1.5 (c), que o isomorfismo acima é uma isomorfismo topológico. Portanto, G/K é um grupo pro-$\mathcal{C}$.

(b) Como $H \leq_c G$, segue pelo Lema 2.4.6 (a) que

$$H = \varprojlim \varphi_i(H)$$

onde $\varphi_i : G \longrightarrow G_i$ é a função projeção e $G_i \in \mathcal{C}$. Por hipótese, $\mathcal{C}$ é fechada para subgrupos, então cada $\varphi_i(H) \in \mathcal{C}$. Portanto, H é um grupo pro-$\mathcal{C}$.

(c) Como G é um grupo profinito, então G é um espaço de Hausdorff (Proposição 2.5.3 (b)). Assim, o subconjunto $\{x\}$ é fechado para cada $x \in G$. Logo, H pode ser escrito como uma união finita de subconjuntos fechados e, portanto, é fechado. Segue por (b) que H é um grupo profinito.

$\square$

Lema 2.5.5. *Sejam G um grupo profinito e H um subgrupo normal e fechado de G. Se*

$$\left|\frac{HU}{U}\right| \leq j \quad \textit{para todo} \quad U \lhd_\circ G$$

então, $|H| \leq j$.

Demonstração. Como G é profinito, então o elemento identidade 1 de G admite um sistema fundamental $\mathcal{U}$ de vizinhanças abertas U tal que $U \lhd_\circ G$ (Proposição 2.5.3). Suponha que $|H| \geq j+1$. Sejam $h_1, \cdots, h_{j+1}$ elementos distintos de H. Perceba que existem $U_{a,b} \in \mathcal{U}$ tais que $h_a^{-1}h_b \notin U_{a,b}$, $a, b \in I = \{1, \cdots, j+1\}$ com $a \neq b$. Note que, $\bigcap_{a,b \in I, a \neq b} U_{a,b}$ é um subgrupo normal e aberto de G. Uma vez que $\mathcal{U}$ é um sistema fundamental de vizinhanças do elemento identidade 1 de G, existe $U \in \mathcal{U}$ de modo que

$U \leq \bigcap_{a,b \in I, a \neq b} U_{a,b}$. Por construção, tem-se que $h_a^{-1} h_b \notin U, a \neq b$. Então, as classes laterais $h_a U$ e $h_b U$ são distintas, $a, b \in I$ com $a \neq b$. Assim,

$$\left| \frac{HU}{U} \right| \geq j + 1.$$

O que prova o Lema.

□

Um grupo profinito G é chamado **procíclico** se contém um elemento x tal que $G = \overline{\langle x \rangle}$. Observe se G é um grupo profinito procíclico, então G é igual ao limite inverso de grupos cíclicos finitos.

Finalizaremos essa seção com os seguintes resultados.

Teorema 2.5.6. *Se G é um FC-grupo profinito, então G' é finito.*

Demonstração. Será omitida, mas pode ser consultada em [15], página 1281. □

Teorema 2.5.7. *Grupos profinitos de Engel são localmente nilpotentes.*

Demonstração. Será omitida, mas pode ser consultada em [18], página 105. □

2.6 Teoria de Sylow

Considere um grupo profinito $G = \varprojlim_{i \in I} G_i$, onde cada G_i é um grupo finito munido da topologia discreta. Se G é infinito, o conhecimento da sua cardinalidade traz consigo poucas informações. Porém, há uma noção muito útil de ordem para um grupo profinito G que reflete, de forma global, as propriedades aritméticas dos grupos finitos G_i e é independente da apresentação de G como limite inverso de grupos finitos.

Para explicar este conceito, precisamos primeiro introduzir a noção de número de Steinitz. Um **número de Steinitz** é um produto formal

$$n = \prod_p p^{n(p)}$$

onde p pertence ao conjunto de todos os números primos e $n(p)$ é um inteiro não negativo ou ∞. Por convenção, dizemos que $n < \infty$, $\infty + \infty = \infty + n = n + \infty = \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se

$$m = \prod_p p^{m(p)}$$

é um outro número de Steinitz e $m(p) \leq n(p)$ para cada p, então dizemos que m divide n e escrevemos $m|n$.

Se

$$\left\{n_i = \prod_p p^{n(p,i)} \mid i \in I\right\}$$

é uma coleção de números de Steinitz, então definimos seu **produto**, **máximo divisor comum** e **mínimo múltiplo comum** de forma natural,

- $\prod_I n_i = \prod_p p^{n(p)}$, onde $n(p) = \sum_i n(p,i)$;
- MDC$\{n_i\}_{i\in I} = \prod_p p^{n(p)}$, com $n(p) = min\{n(p,i) \mid i \in I\}$;
- MMC$\{n_i\}_{i\in I} = \prod_p p^{n(p)}$, onde $n(p) = max\{n(p,i) \mid i \in I\}$.

Aqui $\sum_i n(p,i)$, $min_i\{n(p,i)\}$ e $max_i\{n(p,i)\}$ tem significados óbvios; note que os resultados destes operadores podem ser inteiros não negativos ou ∞.

Seja G um grupo profinito e H um subgrupo fechado de G. Denotaremos por $\mathcal{U}$ o conjunto de todos os subgrupos normais e abertos de G. Definimos o **índice** $[G : H]$ de H em G como sendo o número de Steinitz

$$[G:H] = \text{MMC}\left\{\left[\frac{G}{U} : \frac{HU}{U}\right] \mid U \in \mathcal{U}\right\}.$$

A **ordem** $|G|$ de G é o número de Steinitz $|G| = [G : 1]$, ou seja,

$$|G| = \text{MMC}\left\{\left|\frac{G}{U}\right| \mid U \in \mathcal{U}\right\}.$$

Lema 2.6.1. *Sejam H um subgrupo fechado de um grupo profinito G e $\mathcal{U}'$ um sistema fundamental de vizinhanças de 1 em G formado por subgrupos normais e abertos, então*

$$[G : H] = MMC\{[G/U : HU/U] \mid U \in \mathcal{U}'\}$$

Demonstração. Por definição

$$[G:H] = \text{MMC}\left\{\left[\frac{G}{U} : \frac{HU}{U}\right] \mid U \in \mathcal{U}\right\}$$

onde $\mathcal{U}$ é a coleção de todos os subgrupos normais e abertos de G. Perceba que para todo $U \in \mathcal{U}$ existe um subgrupo $U' \in \mathcal{U}'$ tal que $U' \leq U$. Segue da Proposição 2.5.3 que para cada $U \in \mathcal{U}$, G/U é um grupo finito. Então

$$\frac{\frac{G}{U}}{\frac{HU}{U}} \cong \frac{G}{HU} \quad \text{e} \quad \frac{\frac{G}{U'}}{\frac{HU'}{U'}} \cong \frac{G}{HU'}$$

são grupos finitos. De $U' \leq U$ implica que $HU' \leq HU$. então

$$\left|\frac{G}{HU}\right| \leq \left|\frac{G}{HU'}\right|.$$

Segue da definição de mínimo múltiplo comum, apresentada anteriormente, que

$$\mathrm{MMC}\left\{\left[\frac{G}{U} : \frac{HU}{U}\right] \mid U \in \mathcal{U}\right\} = \mathrm{MMC}\left\{\left[\frac{G}{U'} : \frac{HU'}{U'}\right] \mid U' \in \mathcal{U}'\right\}.$$

□

Provaremos agora uma versão do Teorema de Lagrange para grupos profinitos.

Proposição 2.6.2. *Sejam G um grupo profinito e $K \leq_c H \leq_c G$. Então,*

$$[G : K] = [G : H][H : K].$$

Demonstração. Seja $\mathcal{U}$ a coleção de todos os subgrupos normais e abertos de G. Então,

$$[G : K] = \mathrm{MMC}\left\{\left[\frac{G}{U} : \frac{KU}{U}\right] \mid U \in \mathcal{U}\right\} \overset{(*)}{=} \mathrm{MMC}\left\{\left[\frac{G}{U} : \frac{HU}{U}\right]\left[\frac{HU}{U} : \frac{KU}{U}\right] \mid U \in \mathcal{U}\right\}.$$

Em $(*)$ usamos a tese da Proposição para grupos finitos. Agora, $\{H \cap U \mid U \in \mathcal{U}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 1 em H. Pelo Lema 2.6.1, temos que

$$[H : K] = \mathrm{MMC}\left\{\left[\frac{H}{H \cap U} : \frac{K(H \cap U)}{H \cap U}\right] \mid U \in \mathcal{U}\right\} \overset{(**)}{=} \mathrm{MMC}\left\{\left[\frac{HU}{U} : \frac{KU}{U}\right] \mid U \in \mathcal{U}\right\}$$

em $(**)$ usamos o fato que,

$$\left[\frac{H}{H \cap U} : \frac{K(H \cap U)}{H \cap U}\right] = [H : K(H \cap U)]$$

como $K \leq H$, segue por Dedekind (ver [14], página 15) que $K(H \cap U) = H \cap KU$. Assim,

$$\begin{aligned}
[H : K(H \cap U)] &= [H : H \cap KU] \\
&= [HKU : KU] \\
&= [HU : KU] \\
&= \left[\frac{HU}{U} : \frac{KU}{U}\right].
\end{aligned}$$

Assim, basta provar que,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{MMC}\left\{\left[\frac{G}{U}:\frac{HU}{U}\right]\left[\frac{HU}{U}:\frac{KU}{U}\right]\mid U\in\mathcal{U}\right\}\\
&= \mathrm{MMC}\left\{\left[\frac{G}{U}:\frac{HU}{U}\right]\mid U\in\mathcal{U}\right\}\mathrm{MMC}\left\{\left[\frac{HU}{U}:\frac{KU}{U}\right]\mid U\in\mathcal{U}\right\}.
\end{aligned}$$

Seja p um número primo e sejam p^n, p^{n_1} e p^{n_2} as maiores potências de p tais que,

$$p^n \;\Big|\; \mathrm{MMC}\left\{\left[\frac{G}{U}:\frac{HU}{U}\right]\left[\frac{HU}{U}:\frac{KU}{U}\right]\mid U\in\mathcal{U}\right\}$$

$$p^{n_1} \;\Big|\; \mathrm{MMC}\left\{\left[\frac{G}{U}:\frac{HU}{U}\right]\mid U\in\mathcal{U}\right\}$$

e

$$p^{n_2} \;\Big|\; \mathrm{MMC}\left\{\left[\frac{HU}{U}:\frac{KU}{U}\right]\mid U\in\mathcal{U}\right\}$$

respectivamente ($n,\ n_1,\ n_2 \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$). Então, claramente $n \leq n_1+n_2,\ n\geq n_1$ e $n\geq n_2$. Portanto, se $n=\infty,\ n=n_1+n_2$. Se $n<\infty$, segue que $n_1,\ n_2<\infty$. Então, existem $U_1,\ U_2\in\mathcal{U}$ tais que,

$$p^{n_1} \;\Big|\; \left[\frac{G}{U_1}:\frac{HU_1}{U_1}\right] \quad \text{e} \quad p^{n_2} \;\Big|\; \left[\frac{HU_2}{U_2}:\frac{KU_2}{U_2}\right].$$

Seja $U=U_1\cup U_2$. Desse modo, $U\in\mathcal{U}$ e

$$p^{n_1+n_2} \;\Big|\; \left[\frac{G}{U}:\frac{HU}{U}\right]\left[\frac{HU}{U}:\frac{KU}{U}\right].$$

Por isso, $n\geq n_1+n_2$ e assim, $n=n_1+n_2$. Como queríamos. □

Sejam π um conjunto de números primos e π' o conjunto dos números primos que não estão em π. Dizemos que um número de Steinitz, $n=\prod_p p^{n(p)}$, é um **π-número**, sempre que para $n(p)\neq 0$, tem-se que $p\in\pi$.

Um grupo profinito G é chamado **grupo pro-π** ou **π-grupo** se sua ordem $|G|$ é um π-número, isto é, G é o limite inverso de grupos finitos cujas ordens são divisíveis apenas por números primos em π. Se $\pi=\{p\}$, então escrevemos geralmente **grupo pro-p** em vez de grupo pro-$\{p\}$. Um subgrupo fechado H de um grupo profinito G é um **π-subgrupo de Hall** se $|H|$ é um π-número e $[G:H]$ é um π'-número. Quando $\pi=\{p\}$, um π-subgrupo de Hall é chamado de **p-subgrupo de Sylow** .

Lema 2.6.3. *Seja π um conjunto de números primos. Suponha que G é um grupo profinito e $H\leq_c G$.*

(a) *Suponhamos que* $G = \varprojlim_I G_i$, *onde* $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ *é um sistema inverso sobrejetivo de grupos finitos. Então,* H *é um* π*-subgrupo de Hall de* G *se, e somente se, cada* $\varphi_i(H)$ *é um* π*-subgrupo de Hall de* G_i*;*

(b) H *é um* π*-subgrupo de Hall de* G *se, e somente se,* HU/U *é um* π*-subgrupo de Hall de* G/U *para cada subgrupo normal aberto* U *de* G.

Demonstração. Será omitida, mas pode ser consultada em [13], página 36. $\square$

Proposição 2.6.4. *Seja* π *um conjunto fixo de números primos e seja* $G = \varprojlim_{i\in I} G_i$ *um grupo profinito, onde* $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ *é um sistema inverso de grupos finitos. Suponha que cada grupo* G_i $(i \in I)$ *satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) G_i *contém um* π*-subgrupo de Hall;*

(b) *Qualquer* π*-subgrupo de* G_i *está contido em um* π*-subgrupo de Hall;*

(c) *Quaisquer dois* π*-subgrupos de Hall de* G_i *são conjugados.*

Então:

(a') G *contém um* π*-subgrupo de Hall;*

(b') *Qualquer* π*-subgrupo fechado de* G *está contido num* π*-subgrupo de Hall;*

(c') *Quaisquer dois* π*-subgrupos de Hall de* G *são conjugados.*

Demonstração.

(a') Seja $\mathcal{H}_i$ o conjunto de todos os π-subgrupo de Hall de G_i. Por (a), $\mathcal{H}_i \neq \emptyset$. Desde que φ_{ij} é um epimorfismo, $\varphi_{ij}(\mathcal{H}_i) \subseteq \mathcal{H}_j$, sempre que $i \succeq j$. Portanto, $\{\mathcal{H}_i, \varphi_{ij}, I\}$ é um sistema inverso de conjuntos finitos não vazio. De maneira análoga a prova de uma afirmação feita durante a demonstração da Proposição 2.4.8, mostra-se que,

$$\varprojlim_{i\in I} \mathcal{H}_i \neq \emptyset$$

Seja $(H_i) \in \varprojlim \mathcal{H}_i$. Então, H_i é um π-subgrupo de Hall de G_i, para cada $i \in I$, e $\{H_i, \varphi_{ij}, I\}$ é um sistema inverso de grupos finitos. Pelo Lema 2.6.3, $H = \varprojlim H_i$ é um π-subgrupo de Hall de G.

(b') Seja H um π-subgrupo de G. Note que, $\varphi_i(H)$ é um π-subgrupo de G_i $(i \in I)$. Pela hipótese (b), existe algum π-subgrupo de Hall de G_i que contém $\varphi_i(H)$, de modo que o conjunto,

$$\mathcal{S}_i = \{S \mid \varphi_i(H) \leq S \leq G_i,\ S \text{ é um } \pi\text{-subgrupo de Hall de } G_i\}$$

é não vazio. Além disso, $\varphi_{ij}(\mathcal{S}_i) \subseteq \mathcal{S}_j$. Então $\{\mathcal{S}_i, \varphi_{ij}, I\}$ é um sistema inverso não vazio de conjuntos finitos. Novamente, como na demostração do item anterior, temos que

$$\varprojlim_{i \in I} \mathcal{S}_i \neq \emptyset.$$

Seja $(S_i) \in \varprojlim \mathcal{S}_i$. Então, $\{S_i, \varphi_{ij}\}$ é um sistema inverso de grupos finitos. Finalmente,

$$H = \varprojlim \varphi_i(H) \leq \varprojlim S_i = S$$

e S é um π-subgrupo de Hall de G, pelo Lema 2.6.3.

(c') Sejam H e K π-subgrupos de Hall de G. Então $\varphi_i(H)$ e $\varphi_i(K)$ são π-subgrupos de Hall de G_i $(i \in I)$, e assim, por hipótese, eles são conjugados em G_i. Seja

$$Q_i = \{q_i \in G_i \mid q_i^{-1}\varphi_i(H)q_i = \varphi_i(K)\}.$$

Claramente $\varphi_{ij}(Q_i) \subseteq Q_j$ $(i \succeq j)$. Portanto, $\{Q_i, \varphi_{ij}\}$ é um sistema inverso de conjuntos finitos não vazio. Novamente, pelo mesmo argumento da demonstração do item (a'), tem-se,

$$\varprojlim_{i \in I} Q_i \neq \emptyset.$$

Seja $q \in \varprojlim Q_i$. Então, $q^{-1}Hq = K$, pois $\varphi_i(q^{-1}Hq) = \varphi_i(K)$, para cada $i \in I$.

□

Se $\pi = \{p\}$, p primo, então os Teoremas de Sylow, para grupos finitos, garante que as hipóteses da Proposição 2.6.4 são satisfeitas para todos os grupos finitos. Como consequência, obtemos a seguinte generalização dos Teoremas de Sylow.

Corolário 2.6.5 (O Teorema de Sylow para grupos profinitos)**.** *Sejam G um grupo profinito e p um número primo fixo. Então,*

(a) G contém um p-subgrupo de Sylow;

(b) Qualquer p-subgrupo fechado de G está contido num p-subgrupo de Sylow;

(c) Quaisquer dois p-subgrupos de Sylow de G são conjugados.

Se uma propriedade é compartilhada a todos os grupos de um sistema inverso $\{G_i, \varphi_{ij}\}$ e essa propriedade é preservada pelos homomorfismos φ_{ij} de alguma maneira, então pelo método utilizado na demostração da Proposição 2.6.4, é possível provar um análogo criterioso dessa propriedade para o limite inverso $\varprojlim G_i$. Através dessa ideia, obtém - se a seguinte caracterização para grupos pronilpotentes.

Proposição 2.6.6. *Um grupo profinito G é pronilpotente se, e somente se, para cada número primo p, G contém um único p-subgrupo de Sylow.*

Denote por G_p o único p-subgrupo de Sylow de um grupo pronilpotente G. Então, G é o produto direto $G = \prod_p G_p$ de seus p-subgrupos de Sylow.

No que se segue, a menos de uma menção, um subgrupo de um grupo profinito vai sempre significar um subgrupo fechado e quocientes serão por subgrupos normais fechados.

Lema 2.6.7. *Seja G um grupo profinito.*

(a) Sejam $K_1, K_2 \lhd_c G$ pronilpotentes, então o produto K_1K_2 é pronilpotente.

(b) G tem um subgrupo normal pronilpotente que contém todos os subgrupos normais pronilpotente de G.

Demonstração.

(a) Seja $G = \varprojlim_{i\in I} G_i$, onde $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ é um sistema inverso sobrejetivo de grupos finitos. Denote por $\varphi_i : G \longrightarrow G_i$ a função projeção. Pela Proposição 2.4.8, φ_i é um epimorfismo. Como K_1K_2 é um subgrupo fechado de G (Proposição 2.3.1 (g)), segue do Lema 2.4.6 (a), que

$$K_1K_2 = \varprojlim \varphi_i(K_1K_2) \overset{(*)}{=} \varprojlim \varphi_i(K_1)\varphi_i(K_2).$$

Em $(*)$ usamos o fato que φ_i é homomorfismo de grupos. Note que,

$$\varphi_i(K_1) \trianglelefteq G_i \quad \text{e} \quad \varphi_i(K_2) \trianglelefteq G_i, \quad \text{para cada } i \in I$$

é são nilpotentes. Decorre do Teorema 1.2.9 de Fitting que $\varphi_i(K_1)\varphi_i(K_2)$ é nilpotente. Portanto, K_1K_2 é pronilpotente.

(b) Seja H um subgrupo normal pronilpotente de G. Então, $H = \varprojlim \varphi_i(H)$ onde $\{\varphi_i(H), \varphi_{ij}, I\}$ é um sistema inverso sobrejetivo de grupos nilpotentes finitos. Temos que cada $\varphi_i(H) \trianglelefteq G_i$. Uma vez que cada G_i é um grupo finito, então $\varphi_i(H) \leq F(G_i)$, onde $F(G_i)$ é o subgrupo de Fitting de G_i. Isso porque o subgrupo de Fitting de um grupo finito é o maior subgrupo nilpotente.

Considere a família $\{F(G_i) \mid i \in I\}$. Note que, $\varphi_{ij}(F(G_i)) \subseteq F(G_j)$, sempre que $i \succeq j$. Então $\{F(G_i), \varphi_{ij}, I\}$ é um sistema inverso sobrejetivo de grupos nilpotentes finitos, onde

$$F = \varprojlim_{i\in I} F(G_i)$$

é um subgrupo normal pronilpotente de G. Claramente $H \leq F$. Como H foi tomado arbitrariamente, segue a afirmação (b).

$\square$

Corolário 2.6.8. *Se $K_1, \cdots, K_n$ são subgrupos normais fechados pronilpotentes de um grupo profinito G, então $K_1K_2\cdots K_n$ é pronilpotente.*

Seja G um grupo profinito. Definimos os subgrupos fechados $\gamma_n(G)$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ de G da seguinte maneira:

$$\gamma_1(G) = G, \qquad \gamma_{n+1}(G) = \overline{[G, \gamma_n(G)]}.$$

Então, $G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \cdots \geq \gamma_n(G) \geq \cdots$ é chamada **série central inferior** de G. Chamaremos

$$\gamma_\infty(G) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(G)$$

de **residual pronilpotente** de G.

Lema 2.6.9. *Seja G um grupo profinito. Então,*

(a) $\gamma_\infty(G)$ é o menor subgrupo normal cujo quociente $G/\gamma_\infty(G)$ é pronilpotente.

(b) G é pronilpotente se, e somente se, $\gamma_\infty(G) = 1$;

Demonstração.

(a) Segue da demonstração do Lema 2.5.4 (a) que

$$\frac{G}{\gamma_\infty(G)} \cong \varprojlim_{U \lhd_\circ G} \frac{G}{\gamma_\infty(G)U} \tag{2.1}$$

onde $G/\gamma_\infty(G)U$ são grupos finitos para todo $U \lhd_\circ G$. Note que, para cada $U \lhd_\circ G$ existe $k(U) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\gamma_\infty\left(\frac{G}{\gamma_\infty(G)U}\right) = \gamma_{k(U)}\left(\frac{G}{\gamma_\infty(G)U}\right).$$

Assim,

$$\gamma_\infty\left(\frac{G}{\gamma_\infty(G)U}\right) = \frac{\gamma_{k(U)}(G)\gamma_\infty(G)U}{\gamma_\infty(G)U}.$$

Perceba que, para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > k(U)$ tem-se que

$$\gamma_\infty\left(\frac{G}{\gamma_\infty(G)U}\right) = \frac{\gamma_k(G)\gamma_\infty(G)U}{\gamma_\infty(G)U}.$$

Logo,

$$\gamma_\infty\left(\frac{G}{\gamma_\infty(G)U}\right) = \frac{\gamma_\infty(G)\gamma_\infty(G)U}{\gamma_\infty(G)U} = \{\gamma_\infty(G)U\}.$$

Isso implica que, para cada $U \lhd_\circ G$, o grupo $G/\gamma_\infty(G)U$ é nilpotente. Portanto, $G/\gamma_\infty(G)$ é pronilpotente, em vista de (2.1).

Vamos provar agora que $\gamma_\infty(G)$ é o menor subgrupo normal e fechado de G com essa propriedade. Suponha que exista $H \lhd_c G$ tal que G/H é pronilpotente. Novamente, pela demostração do Lema 2.5.4 (a), tem-se que

$$\frac{G}{H} \cong \varprojlim_{U \lhd_\circ G} \frac{G}{HU}$$

onde, para cada $U \lhd_\circ G$, o grupo finito G/HU é nilpotente. Assim, existe $n(U) \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\gamma_{n(U)}\left(\frac{G}{HU}\right) = \frac{\gamma_{n(U)}(G)HU}{HU} = \{HU\}.$$

Logo, para cada $U \lhd_\circ G$, tem-se que $\gamma_\infty(G) \leq \gamma_{n(U)}(G) \leq HU$. Então,

$$\gamma_\infty(G) \leq \bigcap_{U \lhd_\circ G} HU.$$

Decorre da Proposição 2.3.4 (c) que, $\gamma_\infty(G) \leq H$. Portanto, segue (a).

(b) ($\Rightarrow$) Uma vez que G é pronilpotente e $\{1\} \lhd_c G$, então $G/\{1\} \cong G$ é pronilpotente e, por (a), $\gamma_\infty(G) = 1$.

($\Leftarrow$) Segue diretamente por (a).

$\square$

Lema 2.6.10.

(a) O residual pronilpotente $\gamma_\infty(G)$ de um grupo profinito G é igual ao subgrupo gerado por todos os comutadores $[x, y]$, onde x e y são elementos de G de ordens coprimas.

(b) Para qualquer subgrupo normal N de um grupo profinito G temos

$$\gamma_\infty\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{\gamma_\infty(G)N}{N}.$$

Demonstração. (a) Seja H o subgrupo gerado por todos os comutadores $[x, y]$, onde x e y são elementos de G de ordens coprimas. Claramente as imagens dos elementos x e y no grupo quociente $G/\gamma_\infty(G)$ são também elementos de ordens coprimas. Pelo Lema 2.6.9 (a), $G/\gamma_\infty(G)$ é pronilpotente. Segue pela Proposição 2.6.6 que, para cada primo p, o p-subgrupo de Sylow de G é normal. Assim,

$$[x, y]\gamma_\infty(G) = [x\gamma_\infty(G), y\gamma_\infty(G)] = \gamma_\infty(G) \;\Rightarrow\; [x, y] \in \gamma_\infty(G).$$

Logo, $H \subseteq \gamma_\infty(G)$. Como $\gamma_\infty(G)$ é fechado em G, tem-se que $\overline{H} \subseteq \gamma_\infty(G)$.

Por outro lado, segue pelo Lema 2.5.4 (a) que, $G/\overline{H}$ é um grupo profinito. Sejam x um p-elemento e y um p'-elemento de G. Então, $[x, y] \in \overline{H}$ e, assim, $[x, y]\overline{H} = \overline{H}$. Desse modo, o p-subgrupo de Sylow de $G/\overline{H}$ é normal. Pela Proposição 2.6.6 tem-se que, $G/\overline{H}$ é pronilpotente. Então, $\gamma_\infty(G) \subseteq \overline{H}$ (Lema 2.6.9 (a)).

Portanto, $\gamma_\infty(G) = \overline{H}$.

(b) Sejam xN e yN elementos de ordens coprimas do grupo profinito G/N. Isso significa que $|xN|$ é um π-número e $|yN|$ é um π'-número. Considere os subgrupos procíclico $\langle x\rangle$ e $\langle y\rangle$ do grupo profinito G. Como esses subgrupos são pronilpotentes, decorre da Proposição 2.6.6 que $\langle x\rangle = \prod_p S_p$, onde S_p é um p-subgrupo de Sylow de $\langle x\rangle$, e $\langle y\rangle = \prod_q S_q$, onde S_q é um q-subgrupo de Sylow de $\langle y\rangle$. Assim,

- $x = x_1x_2$, onde $|x_1|$ é um π-número e $|x_2|$ é um π'-número;
- $y = y_1y_2$, onde $|y_1|$ é um π'-número e $|y_2|$ é um π-número.

Uma vez que $|\langle x\rangle N/N|$ é um π-número e $|\langle y\rangle N/N|$ é um π'-número, tem-se que $x_2, y_2 \in N$. Assim, $xN = x_1N$, $yN = y_1N$ e os elementos x_1 e y_1 possuem ordens coprimas em G.

Então, $[x_1, y_1] \in \gamma_\infty(G)$, o que implica em, $[xN, yN] \in \gamma_\infty(G)N/N$. Portanto, $\gamma_\infty(G/N) \subseteq \gamma_\infty(G)N/N$.

Por outro lado, se x e y são elementos de ordens coprimas de G, então $[x, y] \in \gamma_\infty(G)$. Claramente, xN e yN são elementos de ordens coprimas de G/N. Assim, $[xN, yN] \in \gamma_\infty(G/N)$. Logo, $\gamma_\infty(G)N/N \subseteq \gamma_\infty(G/N)$.

Portanto, $\gamma_\infty(G/N) = \gamma_\infty(G)N/N$.

□

2.7 Grupos Profinitos Quase Engel

Nesta seção provaremos resultados relacionados em termos dos subgrupos

$$E_n(g) = \langle [x,_n g] \mid x \in G\rangle$$

No que se segue, a menos de uma menção, um subgrupo de um grupo profinito vai sempre significar um subgrupo fechado e quocientes será por subgrupos normais fechados. Todo os subgrupos gerados por um subconjunto X de um grupo profinito G serão gerados por X como grupo topológico.

Lema 2.7.1. *Seja G um grupo profinito onde para cada elemento $g \in G$ existe um inteiro positivo $n = n(g)$ tal que o subgrupo $E_n(g)$ é finito. Então, G é pronilpotente se, e somente se, é localmente nilpotente.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que G é um grupo pronilpotente. Segue da Proposição 2.5.3 (c), que para cada $g \in G$ existe um subgrupo normal e aberto N com quociente G/N nilpotente, tal que, $E_n(g) \cap N = 1$. Uma vez que $E_n(g)$ é finito, a imagem gN de g no grupo nilpotente G/N é um elemento de Engel, ou seja, existe um inteiro positivo m, que pode ser a classe de nilpotência de G/N, tal que,

$$[xN,_m gN] = N \text{ para todo } xN \in \frac{G}{N}.$$

Perceba que,

$$[xN,_m gN] = [x,_m g]N = N \quad \Rightarrow \quad [x,_m g] \in N.$$

Se $m \leq n$, tem-se que,

$$[x,_n g] \in N \text{ e } [x,_n g] \in E_n(g) \quad \Rightarrow \quad [x,_n g] \in E_n(g) \cap N = 1 \quad \Rightarrow \quad [x,_n g] = 1, \quad \forall\, x \in G.$$

Porém, se $n < m$, note que,

$$[x,_m g] = [\underbrace{[x,_k g]}_{\in G},_n g] \text{ onde } m = k + n.$$

Então, $[x,_m g] \in E_n(g)$. Daí, $[x,_m g] \in E_n(g) \cap N = 1 \ \Rightarrow\ [x,_m g] = 1$ para cada $x \in G$. De qualquer forma g é um elemento de Engel do grupo G. Como g foi tomado arbitrariamente em G, concluímos que todo elemento do grupo G é um elemento de Engel. Portanto, G é um grupo profinito de Engel. Segue pelo Teorema 2.5.7 de Wilson-Zelmanov, que G é um grupo localmente nilpotente.

($\Leftarrow$) Seja G um grupo profinito localmente nilpotente. Suponha que $G = \varprojlim_{i\in I} G_i$, onde $\{G_i, \varphi_{ij}, I\}$ é um sistema inverso sobrejetivo de grupos finitos. Considere $\varphi_i : G \longrightarrow G_i$ a função projeção. Pela Proposição 2.4.8, φ_i é um epimorfismo. Note que existe um subconjunto finito X de G tal que $\varphi_i|_X : X \longrightarrow G_i$ é uma bijeção. Como G é um grupo localmente nilpotente então $\langle X\rangle$ é um grupo nilpotente. Uma vez que imagens homomórficas de grupos nilpotentes são também grupos nilpotentes, temos que $\varphi_i(\langle X\rangle) = G_i$ é um grupo nilpotente. Então, concluímos que para todo $i \in I$, G_i é um grupo nilpotente. Portanto, G é um grupo pronilpotente. □

Provaremos agora uma versão da Proposição 1.2.10 para grupos profinitos.

Proposição 2.7.2. *Suponhamos que B é um subgrupo normal de um grupo profinito A*

tal que B é pronilpotente e $\gamma_\infty(A/B')$ é finito. Então o subgrupo

$$D = C_A\left(\gamma_\infty\left(\frac{A}{B'}\right)\right) = \{a \in A \mid [\gamma_\infty(A), a] \leq B'\}$$

é aberto e pronilpotente.

Demonstração. De maneira análoga a prova da Proposição 1.2.10, mostra-se que

$$D = C_A\left(\gamma_\infty\left(\frac{A}{B'}\right)\right) = \{a \in A \mid [\gamma_\infty(A), a] \leq B'\}.$$

Como B' é um subgrupo fechado característico em B e $B \lhd_c A$, então $B' \lhd_c A$. Assim, o quociente A/B' é um grupo profinito (Lema 2.5.4 (a)). Uma vez que $\gamma_\infty(A/B')$ é um subgrupo finito de A/B', segue pelo Lema 2.5.4 (c) que $\gamma_\infty(A/B')$ é um grupo profinito.

Afirmamos que D é um subgrupo fechado de A. De fato, fixe $y \in \gamma_\infty(A/B')$ e considere as aplicações $r_y, l_y : A/B' \longrightarrow A/B'$ dadas por, $x \longmapsto xy$ e $x \longmapsto yx$, respectivamente. Segue pela Proposição 2.3.1 (a) que essas aplicações são contínuas. Já sabemos que a aplicação quociente $\pi : A \longrightarrow A/B'$ é contínua. Assim, as aplicações $r_y \circ \pi, l_y \circ \pi : A \longrightarrow A/B'$ são contínuas. Como A/B' é, em particular, um espaço de Hausdorff, segue pelo Lema 2.1.5 (d) que o conjunto

$$X_y = \{a \in A \mid (r_y \circ \pi)(a) = (l_y \circ \pi)(a)\}$$

é fechado. Assim,

$$X = \bigcap_{y \in \gamma_\infty(\frac{A}{B'})} X_y$$

é fechado. Para concluir a prova da afirmação, vamos mostrar que $D = X$. Seja $a \in X$. Então,

$$\begin{aligned} aB'xB' = xB'aB',\ \forall\, xB' \in \gamma_\infty(A/B') \quad &\Leftrightarrow \quad B' = x^{-1}x^aB',\ \forall\, x \in \gamma_\infty(A) \\ &\Leftrightarrow \quad [x, a] \in B',\ \forall\, x \in \gamma_\infty(A) \\ &\Leftrightarrow \quad a \in C_A\left(\gamma_\infty\left(\frac{A}{B'}\right)\right). \end{aligned}$$

Logo, $D = X$.

De maneira análoga a prova da Proposição 1.2.10, mostra-se que,

$$\frac{A}{D} \lesssim Aut\left(\gamma_\infty\left(\frac{A}{B'}\right)\right).$$

Como $\gamma_\infty(A/B')$ é finito, implica que $Aut(\gamma_\infty(A/B'))$ é finito. Assim, $[A : D]$ é finito. Segue pela Proposição 2.3.1 (c) que D é aberto.

Vamos mostrar agora que a imagem de D em qualquer quociente finito $\overline{A}$ de A é nilpotente. As barras denotam as imagens em $\overline{A}$. Afirmamos que $\gamma_\infty(\overline{A}/\overline{B'}) = \overline{\gamma_\infty(A/B')}$. Com efeito, seja $N \trianglelefteq A$ tal que $N \leq B'$. Pelo Lema 2.6.10 tem-se que,

$$\gamma_\infty\left(\frac{\overline{A}}{\overline{B}}\right) = \gamma_\infty\left(\frac{\frac{A}{N}}{\frac{B'}{N}}\right) = \frac{\gamma_\infty\left(\frac{A}{N}\right)\frac{B'}{N}}{\frac{B'}{N}} = \frac{\frac{\gamma_\infty(A)N}{N}\frac{B'}{N}}{\frac{B'}{N}}.$$

Por outro lado,

$$\overline{\gamma_\infty\left(\frac{A}{B'}\right)} = \frac{\overline{\gamma_\infty(A)B'}}{\overline{B'}} = \frac{\frac{\gamma_\infty(A)B'}{N}}{\frac{B'}{N}} = \frac{\frac{\gamma_\infty(A)N}{N}\frac{B'}{N}}{\frac{B'}{N}}.$$

Portanto, segue a afirmação. Seja $\overline{a} \in \overline{D}$. Note que,

$$\overline{x}^{\overline{a}} = \overline{x^a} = \overline{x} \text{ para cada } \overline{x} \in \overline{\gamma_\infty\left(\frac{A}{B'}\right)}.$$

Então $\overline{a} \in C_{\overline{A}}(\overline{\gamma_\infty(A/B')})$. Isso implica que,

$$\overline{D} \leq C_{\overline{A}}\left(\overline{\gamma_\infty\left(\frac{A}{B'}\right)}\right) = C_{\overline{A}}\left(\gamma_\infty\left(\frac{\overline{A}}{\overline{B'}}\right)\right).$$

Como $\overline{A}/\overline{B'}$ é finito, existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma_\infty(\overline{A}/\overline{B'}) = \gamma_d(\overline{A}/\overline{B'})$. Por hipótese, B é pronilpotente, então $\overline{B}$ é nilpotente. Logo, $\overline{D}$ é nilpotente pela Proposição 1.2.10.

Uma vez que A é um grupo profinito, segue pela Proposição 2.5.3 (d) que o elemento identidade 1 de A admite um sistema fundamental $\mathcal{U}$ de vizinhanças abertas U tal que U é um subgrupo normal de A onde A/U é finito e

$$A = \varprojlim_{U \in \mathcal{U}} \frac{A}{U}.$$

Seja $\varphi_U : A \longrightarrow A/U$, $U \in \mathcal{U}$, a função projeção. Como $D \leq_c A$, segue pelo Lema 2.4.6 que

$$D = \varprojlim_{U \in \mathcal{U}} \varphi_U(D).$$

Vimos que $\varphi_U(D)$ é nilpotente para cada $U \in \mathcal{U}$. Portanto, D é pronilpotente.

□

Antes de iniciar a prova do Teorema A, provaremos que se um grupo profinito satisfaz as hipóteses desse Teorema, então ele possui um subgrupo aberto localmente nilpotente.

Proposição 2.7.3. *Seja G um grupo profinito onde para cada $g \in G$, existe um inteiro positivo $n = n(g)$ tal que $E_n(g)$ é finito. Então, existe um subgrupo normal aberto de G que é pronilpotente.*

Naturalmente, tal subgrupo será localmente nilpotente pelo Lema 2.7.1.

Demonstração. Segue da Proposição 2.5.3, que para cada $g \in G$ podemos escolher um subgrupo $N_g \lhd_0 G$ tal que, $E_n(g) \cap N_g = 1$. Afirmamos que g é um elemento de Engel de $N_g\langle g\rangle$. De fato, seja $x \in N_g\langle g\rangle$, então $x = mh$, onde $m \in N_g$ e $h \in \langle g\rangle$. Perceba que,

$$\begin{array}{rcl} [x,g] = [mh,g] & = & (mh)^{-1}g^{-1}(mh)g \\ & = & h^{-1}m^{-1}(hh^{-1})g^{-1}mhg \\ & \overset{\langle g\rangle \text{ é abeliano}}{=} & \underbrace{(m^{-1})^h}_{\in N_g}\underbrace{(hg)^{-1}m(hg)}_{\in N_g} \in N_g \end{array}$$

como $N_g \lhd_0 G$, tem - se que,

$$[x,_n g] = [\underbrace{[x,g]}_{\in N_g},_{n-1} g] \in N_g$$

Uma vez que $[x,_n g] \in E_n(g)$ tem-se que $[x,_n g] \in E_n(g) \cap N_g = 1$, então $[x,_n g] = 1$ para cada $x \in N_g\langle g\rangle$. Logo, g é um elemento de Engel de $N_g\langle g\rangle$. Note que em cada quociente finito de $N_g\langle g\rangle$, $\overline{g}$, a imagem de g, é um elemento de Engel. Decorre do Teorema 1.3.1 de Baer que $\overline{g}$ pertence ao subgrupo de Fitting desse quociente. Assim, o (fecho do) subgrupo $[N_g, g]$ é pronilpotente. Com efeito, como $N_g\langle g\rangle$ é um subgrupo fechado do grupo profinito G, segue da Proposição 2.5.3 (d) que

$$N_g\langle g\rangle = \varprojlim_{U\in\mathcal{V}} \frac{N_g\langle g\rangle}{U \cap N_g\langle g\rangle}$$

onde $\mathcal{V}$ é um sistema fundamental de vizinhanças do elemento identidade 1 de G. Assim, $\{N_g\langle g\rangle/(U \cap N_g\langle g\rangle), \varphi_{UV}, \mathcal{V}\}$ é um sistema inverso de grupos finitos (aqui estamos considerando $\mathcal{V}$ com a seguinte definição: $U \succ V$ se, e somente se, $V \subseteq U$. Com essa definição $\mathcal{V}$ é um poset dirigido). Considere a função projeção

$$\varphi_U : N_g\langle g\rangle \longrightarrow \frac{N_g\langle g\rangle}{U \cap N_g\langle g\rangle}.$$

Pela Proposição 2.4.8, φ_U é um epimorfismo, para cada $U \in \mathcal{V}$. Como $\varphi_U(g)$ pertence a um subgrupo de Fitting F_U de $N_g\langle g\rangle/(U \cap N_g\langle g\rangle)$, então $[\varphi_U(N_g), \varphi_U(g)] \subseteq F_U$ para cada $U \in \mathcal{V}$. Uma vez que $N_g\langle g\rangle/(U \cap N_g\langle g\rangle)$ é finito tem-se que F_U é nilpotente. Como $[N_g, g]$ é um subgrupo fechado de $N_g\langle g\rangle$, segue pelo Lema 2.4.6 que,

$$[N_g, g] = \varprojlim_{U\in\mathcal{V}} \varphi_U([N_g, g]) = \varprojlim_{U\in\mathcal{V}} [\varphi_U(N_g), \varphi_U(g)].$$

Segue que $[N_g, g]$ é pronilpotente.

Seja $\tilde{N}_g$ o fecho normal de $[N_g, g]$ em G, ou seja,

$$\tilde{N}_g = \langle [N_g, g]^x \mid x \in G \rangle$$

Notemos que para todo $x, y \in N_g$ vale que

$$\begin{aligned} [x,g]^y &= [x,g][[x,g],y] \\ &\overset{(*)}{=} [x,g][x,g]^{-1}[xy,g][y,g]^{-1} \\ &= [xy,g][y,g]^{-1} \in [N_g, g]. \end{aligned}$$

Em $(*)$ usamos que $[xy, z] = [x, z][x, z, y][y, z]$, onde x, y e z são elementos de um grupo. Então, $[N_g, g] \lhd N_g$. Como $N_g \leq_\circ G$, então $N_g \leq_c G$ (Proposição 2.3.1 (c)). Segue pelo Lema 2.3.2 (b) que, $N_G([N_g, g]) \leq_c G$. Uma vez que

$$[N_g, g] \lhd N_g \quad \Rightarrow \quad N_g \leq_c N_G([N_g, g]) \leq_c G.$$

Pela versão do Teorema de Lagrange para grupos profinitos (Proposição 2.6.2) tem-se que,

$$[G : N_g] = [G : N_G([N_g, g])][N_G([N_g, g]) : N_g].$$

Como G é compacto e N_g é aberto, então N_g tem índice finito em G (Proposição 2.3.1 (c)). Isso implica que $[G : N_G([N_g, g])]$ é finito. Sabemos que

$$\#\{\text{conjugados de } [N_g, g] \text{ em } G\} = [G : N_G([N_g, g])].$$

Daí, $[N_g, g]$ tem um número finito de conjugados. Assim,

$$\tilde{N}_g = \langle [N_g, g]^x \mid x \in G \rangle = [N_g, g]^{x_1} \cdots\ [N_g, g]^{x_k} \ \text{ onde } \ x_1, \cdots, x_k \in G.$$

Como,

$$[N_g, g] \cong [N_g, g]^{x_i} \quad (i = 1, \cdots, k)$$

então, $\tilde{N}_g$ é o produto de um número finito de subgrupos normais de N_g, onde cada um é pronilpotente. Segue do corolário 2.6.8, que $\tilde{N}_g$ é pronilpotente e cada subgrupo $\tilde{N}_g$ está contido no maior subgrupo normal pronilpotente K de G (Lema 2.6.7 (b)).

Afirmamos que G/K é um FC-grupo. De fato, como $K \lhd_c G$, então G/K é um grupo profinito (Lema 2.5.4 (a)). Denotaremos por $\overline{g}$ a imagem de g no quociente G/K. Segue pelo Lema 2.3.2 (a) que, $G_{G/K}(\overline{g}) \leq_c G/K$. Pela Proposição 2.3.1 (e) tem-se que, a imagem $\overline{N}_g$ de N_g no quociente G/K é aberta, logo, $\overline{N}_g$ é fechado em G/K (Proposição

2.3.1 (c)). Como

$$
\begin{aligned}
C_{\frac{G}{K}}(\overline{g}) &= \left\{\overline{x} \in \frac{G}{K} \mid \overline{g}^{\overline{x}} = \overline{g}\right\} \\
&= \left\{xK \in \frac{G}{K} \mid g^{-1}x^{-1}gxK = K\right\} \\
&= \left\{xK \in \frac{G}{K} \mid [x,g] \in K\right\}
\end{aligned}
$$

e $[N_g, g] \leq K$, então $\overline{N}_g \leq_c C_{G/K}(\overline{g})$. Pela versão do Teorema de Lagrange para grupos profinitos (Proposição 2.6.2) temos que,

$$
\left[\frac{G}{K} : \overline{N}_g\right] = \left[\frac{G}{K} : C_{G/K}(\overline{g})\right]\left[C_{G/K}(\overline{g}) : \overline{N}_g\right]
$$

Uma vez que,

$$
\frac{\frac{G}{K}}{\overline{N}_g} \cong \frac{G}{N_g}
$$

concluímos que $[G/K : \overline{N}_g]$ é finito. Consequentemente, $[G/K : C_{G/K}(\overline{g})]$ é finito. Logo, G/K é um FC-grupo. Segue do Teorema 2.5.6 que G/K possui subgrupo derivado finito. Daí podemos escolher um subgrupo aberto B de G/K tal que, a interseção com $(G/K)'$ é trivial (Proposição 2.5.3). Claramente B é abeliano. Deixe H ser sua imagem inversa completa em G. Pela continuidade do homomorfismo canônico, H é um subgrupo aberto em G tal que, seu subgrupo derivado $H' \leq K$. Como,

$$
\left(\frac{H}{K'}\right)' = \frac{H'K'}{K'} \subseteq \frac{K}{K'}
$$

temos que $(H/K')'$ é abeliano. Então, $M = H/K'$ é metabeliano. Uma vez que, para todo $h \in H \leq G$ existe $n = n(h)$ tal que, o subgrupo $E_n(h)$ é finito, então a imagem de $E_n(h)$ em M é finito. Logo, M satisfaz as hipóteses da Proposição. Temporariamente usaremos a notação $E_i(g)$ para os subgrupos e elementos de M correspondentes. Afirmamos que para cada par de inteiros positivos i, j, o conjunto

$$
E_{i,j} = \{x \in M \mid |E_i(x)| \leq j\}
$$

é fechado. Com efeito, como M é um grupo profinito, o elemento identidade 1 de M admite um sistema fundamental $\mathcal{L}$ de vizinhanças L tal que $L \lhd_\circ M$. Pela Proposição 2.5.3 (d) tem-se que

$$
M = \varprojlim_{L \in \mathcal{L}} \frac{M}{L}.
$$

Decorre do Lema 2.4.6 (b) que

$$\overline{E}_{i,j} = \varprojlim_{L\in\mathcal{L}} \frac{E_{i,j}L}{L}$$

É claro que $E_{i,j} \subseteq \overline{E}_{i,j}$. Para provar a inclusão contrária, é suficiente mostrar que se $|E_i(x)L/L| \leq j$ ($L \in \mathcal{L}$), então $|E_i(x)| \leq j$. Isso decorre do Lema 2.5.5. Logo, $\overline{E}_{i,j} \subseteq E_{i,j}$ e, portanto, $E_{i,j} = \overline{E}_{i,j}$. O que prova a afirmação.

Por hipótese, temos que

$$M = \bigcup_{i,j} E_{i,j}$$

Pelo Teorema 2.1.4 de categoria de Baire, tem-se que um desses subconjuntos contém um subconjunto aberto, ou seja, existe um subgrupo aberto U e uma classe lateral aU, tal que, $aU \subseteq E_{n,m}$ para alguns $n,\ m$. Em outras palavras, $|E_n(au)| \leq m$ para cada $u \in U$.

Vamos mostrar que $|E_{2n+1}(u)| \leq m^2$, para cada $u \in U$. Note que os subgrupos

$$E_{M',n}(a) = \langle [x,_n a] \mid x \in M' \rangle$$

e

$$E_{M',n} = \langle [x,_n au] \mid x \in M' \rangle$$

estão contidos em $E_n(a)$ e $E_n(au)$, respectivamente e, portanto, tem ordem no máximo m. Afirmamos que $E_{M',n}(a)$ e $E_{M',n}(au)$ são subgrupos normais em M. De fato, sejam $x \in M'$ e $h \in M$. Note que,

$$\begin{aligned}
[x,_n a]^h &= [[x,a]^h,_{n-1} a^h] \\
&= [[x^h,a^h],_{n-1} a^h] \\
&= [[x^h,a[a,h]],_{n-1} a^h] \\
&= [\underbrace{[x^h,[a,h]]}_{=1}[x^h,a]^{[a,h]},_{n-1} a^h] \\
&\overset{M' \text{ é abeliano}}{=} [[x^h,a],_{n-1} a^h] \\
&\ \ \vdots \\
&= [x^h,_n a] \in E_{M',n}(a).
\end{aligned}$$

Logo, $E_{M',n}(a) \lhd M$. De maneira análoga, mostra-se que $E_{M',n}(au) \lhd M$.

Mostraremos agora que no quociente

$$\overline{M} = \frac{M}{E_{M',n}(a)E_{M',n}(au)}$$

ambos $\overline{M'}\langle\bar{a}\rangle$ e $\overline{M'}\langle\bar{a}\bar{u}\rangle$ são normais e nilpotentes de comprimento no máximo n. Com efeito,

- $\overline{M'}\langle\bar{a}\rangle \lhd \overline{M} \Leftrightarrow [\overline{M'}\langle\bar{a}\rangle, \overline{M}] \leq \overline{M'}\langle\bar{a}\rangle$

  Sejam $\bar{m'}\bar{b} \in \overline{M'}\langle\bar{a}\rangle$, $\bar{m'} \in \overline{M'}$ e $\bar{b} \in \langle\bar{a}\rangle$, $\bar{m} \in \overline{M}$. Note que,

  $$[\bar{m'}\bar{b}, \bar{m}] = [\bar{m'}, \bar{m}]^{\bar{b}}[\bar{b}, \bar{m}]$$

  como $\overline{M'} \lhd \overline{M}$ implica que, $[\bar{m'}, \bar{m}]^{\bar{b}} \in \overline{M'}$ e $[\bar{b}, \bar{m}] \in \overline{M'}$. Então, $[\overline{M'}\langle\bar{a}\rangle, \overline{M}] \leq \overline{M'}\langle\bar{a}\rangle$. De maneira análoga, mostra-se que, $\overline{M'}\langle\bar{a}\bar{u}\rangle \lhd \overline{M}$.

- Faça $E = E_{M',n}(a)E_{M',n}(au)$. Vamos provar agora que $\overline{M'}\langle\bar{a}\rangle$ é nilpotente de classe no máximo n. Perceba que,

  $$\gamma_{n+1}(\overline{M'}\langle\bar{a}\rangle) = \langle[\overline{m}_1\overline{a}^{t_1}, \cdots, \overline{m}_{n+1}\overline{a}^{t_{n+1}}] \mid \overline{m}_i \in \overline{M'},\ t_i \in \mathbb{N},\ i = 1, \cdots, n+1\rangle.$$

  Note que,

  $$\begin{aligned}
  &[[m_1a^{t_1}, \cdots, m_na^{t_n}], m_{n+1}a^{t_{n+1}}]E\\
  &= [[[m_1a^{t_1}, \cdots, m_{n-1}a^{t_{n-1}}], m_na^{t_n}], a^{t_{n+1}}]\underbrace{[[m_1a^{t_1}, \cdots, m_na^{t_n}], m_{n+1}]^{a^{t_{n+1}}}}_{=1}E\\
  &= [[[m_1a^{t_1}, \cdots, m_{n-1}a^{t_{n-1}}], a^{t_n}]\underbrace{[[m_1a^{t_1}, \cdots, m_{n-1}a^{t_{n-1}}], m_n]^{a^{t_n}}}_{=1}, a^{t_{n+1}}]E\\
  &\ \ \vdots\\
  &= [m_1a^{t_1}, a^{t_2}, \cdots, a^{t_{n+1}}]E.
  \end{aligned}$$

  Aplicando sucessivamente a propriedade do Lema 1.1.5 (v), obtêm-se que,

  $$[m_1a^{t_1}, a^{t_2}, \cdots, a^{t_{n+1}}] \in E_{M',n}(a) \leq E.$$

  Portanto, $\overline{M'}\langle\bar{a}\rangle$ é nilpotente de classe no máximo n. De maneira análogo, mostra-se que $\overline{M'}\langle\bar{a}\bar{u}\rangle$ é também nilpotente de classe no máximo n.

Segue do Teorema 1.2.9 de Fitting que o produto $\overline{M'}\langle\bar{a}\rangle\overline{M'}\langle\bar{a}\bar{u}\rangle$ é nilpotente de classe no máximo $2n$. Claramente, $\bar{u} \in \overline{M'}\langle\bar{a}\rangle\overline{M'}\langle\bar{a}\bar{u}\rangle$. Então, para todo $x \in M$ temos que,

$$[x, \underbrace{u,\ \cdots,\ u}_{2n+1}] \in [M', \underbrace{u,\ \cdots,\ u}_{2n}] \leq E_{M',n}(a)E_{M',n}(au).$$

Assim, $E_{2n+1}(u) \leq E_{M',n}(a)E_{M',n}(au)$ e $|E_{2n+1}(u)| \leq |E_{M',n}(a)||E_{M',n}(au)| \leq m^2$. Uma vez que $M' \leq K/K'$, então para cada $x \in M$ tem-se que,

$$\begin{aligned}
[x,_{2n+1} uk] &= [\underbrace{[x, uk]}_{:=y \in M'},_{2n} uk] \\
&= [[y, uk],_{2n-1} uk] \\
&= [\underbrace{[y, k]}_{=1}(\underbrace{[y, u]}_{\in M'})^k,_{2n-1} uk] \\
&\overset{K/K' \text{ é abeliano}}{=} [[y, u],_{2n-1} uk] \\
&\vdots \\
&= [y,_{2n} u] \in [M',_{2n} u] \leq E_{M',n}(a)E_{M',n}(au)
\end{aligned}$$

para cada $u \in U$ e $k \in K/K'$. Consequentemente, $|E_{2n+1}(uk)| \leq m^2$ para cada $u \in U$ e $k \in K/K'$.

Defina $V := U(K/K')$. Então, os subgrupos $E_{2n+1}(v)$ satisfazem a desigualdade $|E_{2n+1}(v)| \leq m^2$, para cada $v \in V$. A mesma desigualdade vale em cada quociente finito $\overline{V}$ de V. Então vale que,

$$\left| \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{2n+1}(\bar{v}) \right| \leq m^2, \ \forall \ \bar{v} \in \overline{V}.$$

Segue pelo Teorema B, que $|\gamma_\infty(\overline{V})| \leq l$, para algum número $l = l(m)$ dependendo apenas de m. Como $U \leq_\circ V$, decorre da Proposição 2.3.1 (d) que $V \leq_\circ M$, então, $V \leq_c M$. Logo, $\gamma_\infty(V) \leq_c M$. Note que, para cada $L \lhd_\circ M$ tem-se que

$$\left| \frac{\gamma_\infty(V)L}{L} \right| = \left| \gamma_\infty\left(\frac{VL}{L}\right) \right| \leq l.$$

Segue do Lema 2.5.5 que $|\gamma_\infty(V)| \leq l$.

Seja W a imagem inversa completa de V em G. Como $V \leq_\circ M$, então $W \leq_\circ H \leq_\circ G$, o que implica em, $W \leq_\circ G$. Logo, $W \leq_c G$ e, assim, W é um grupo profinito contendo o subgrupo normal e pronilpotente K. Denotemos por Γ a imagem inversa completa de $\gamma_\infty(V)$ em G. Então, pela Proposição 2.7.2 (b), tem-se que

$$F = C_W(\gamma_\infty(V)) = \{w \in W \mid [\Gamma, w] \leq K'\}$$

é um subgrupo normal e aberto pronilpotente de G.

□

Finalmente, vamos provar o Teorema A.

Teorema A (Khukhro-Shumyatsky). *Suponha que G é um grupo profinito tal que para* *cada $g \in G$ exista um número inteiro positivo $n = n(g)$ onde o subgrupo $E_n(g)$ é finito. Então, G tem um subgrupo normal N finito tal que G/N é localmente nilpotente.*

Decorre do lema 2.7.1, que para provar o Teorema A é suficiente mostrar que o residual pronilpotente é finito.

Demonstração.

Passo 1: Denotaremos por $F(G)$ o maior subgrupo pronilpotente de G. Mostraremos que o índice $[G : F(G)]$ é finito;

Pela Proposição 2.7.3, G tem um subgrupo normal aberto pronilpotente. Segue da Proposição 2.3.1 (d), que o maior subgrupo normal pronilpotente $F(G)$ é um subgrupo aberto de G. Como G é, em particular, um grupo topológico compacto e $F(G)$ é um subgrupo aberto de G, tem-se pela Proposição 2.3.1 (c), que o grupo quociente $G/F(G)$ é finito.

Passo 2: Se existir um subgrupo $F(G) < N \lhd G$, por indução sobre o índice $[G : F(G)]$, provaremos que o residual pronilpotente de G é finito;

Como $[G : F(G)]$ é finito, podemos usar indução sobre $|G/F(G)| = n$. Se $n = 1$, então $G = F(G)$ e, portanto, $\gamma_\infty(G) = 1$. Suponha, como hipótese de indução que o Teorema seja válido para todos os grupos cujo quociente pelo seu maior subgrupo pronilpotente tenha ordem menor que n. Seja $F(G) < N \lhd G$. Como $F(G) \leq F(N)$ tem-se que

$$\left|\frac{N}{F(G)}\right| = \left|\frac{N}{F(N)}\right|\left|\frac{F(N)}{F(G)}\right|.$$

Logo, $|N/F(N)| < |G/F(G)|$. Segue pela hipótese de indução que $\gamma_\infty(N)$ é finito. Considere agora o grupo $G/\gamma_\infty(N)$. Uma vez que $N/\gamma_\infty(N)$ é normal e pronilpotente em $G/\gamma_\infty(N)$, então $N/\gamma_\infty(N) \leq F(G/\gamma_\infty(N))$. Perceba que existe um subgrupo normal H de G tal que $F(G/\gamma_\infty(N)) = H/\gamma_\infty(N)$. Note que

$$\frac{\frac{G}{\gamma_\infty(N)}}{F\left(\frac{G}{\gamma_\infty(N)}\right)} \cong \frac{\frac{G/\gamma_\infty(N)}{N/\gamma_\infty(N)}}{\frac{H/\gamma_\infty(N)}{N/\gamma_\infty(N)}} \cong \frac{\frac{G}{N}}{\frac{H}{N}} \cong \frac{G}{H}.$$

Uma vez que $F(G) < N \leq H$, tem-se que

$$\left|\frac{G}{H}\right| \leq \left|\frac{G}{N}\right| < \left|\frac{G}{F(G)}\right|.$$

Então, segue pela hipótese de indução que $\gamma_\infty(G/\gamma_\infty(N))$ é finito. Como $\gamma_\infty(G/\gamma_\infty(N)) =$

$\gamma_\infty(G)/\gamma_\infty(N)$ então

$$|\gamma_\infty(G)| = \left|\gamma_\infty\left(\frac{G}{\gamma_\infty(N)}\right)\right| |\gamma_\infty(N)|.$$

Assim, $\gamma_\infty(G)$ é finito.

Assim, podemos assumir que $G/F(G)$ é um grupo simples (abeliano ou não abeliano).

Sejam p um número primo que divide a ordem do grupo $G/F(G)$ e $g \in G - F(G)$ um elemento de ordem p^n (p^n é um número de Steinitz).

Passo 3: Provaremos que o subgrupo $R = \prod \langle [Q,g]^G \rangle$, onde Q é um q-subgrupo de Sylow de $F(G)$, com $q \neq p$, é finito;

Uma vez que $F(G)$ é pronilpotente, para qualquer primo $q \neq p$, o elemento g age por conjugação em um q-subgrupo de Sylow Q de $F(G)$ como um automorfismo de ordem dividindo p^n.

Afirmamos que o subgrupo $[Q,g]$ é normal em Q e consequentemente é normal em $F(G)$. De fato, sejam $h, x \in Q$. Note que,

$$[hx, g] = [h,g]^x [x,g] \quad \Rightarrow \quad [h,g]^x = [hx,g][x,g]^{-1}.$$

Assim, $[h,g]^x$ é um elemento de $[Q,g]$. Então, $[Q,g]$ é normal em Q. Isso implica que $Q \leq N_G([Q,g])$. Como $F(G)$ é pronilpotente, então para todo primo p, divisor da ordem de $F(G)$, tem-se que $F(G) = \prod_p S_p$, onde S_p um p-subgrupo de Sylow de $F(G)$ (Proposição 2.6.6). Perceba que para todo $x \in S_p$, $p \neq q$, x centraliza $[Q,g]$. Desse modo, $S_p \leq N_G([Q,g])$ para todo $p \neq q$, onde $p||F(G)|$. Assim, $F(G) \leq N_G([Q,g])$ e, portanto, $[Q,g]$ é normal em $F(G)$. Perceba que a imagem de $[Q,g]$ em qualquer quociente finito está contida na imagem de $E_{n(g)}(g)$ pelo Lema 1.4.2. Note que,

$$|[Q,g]| = \mathrm{MMC}\left\{\left|\frac{[Q,g]}{N \cap [Q,g]}\right| \mid N \lhd_\circ G\right\}$$

e

$$|E_{n(g)}(g)| = \mathrm{MMC}\left\{\left|\frac{E_{n(g)}(g)}{N \cap E_{n(g)}(g)}\right| \mid N \lhd_\circ G\right\}.$$

Como,

$$\frac{[Q,g]}{N \cap [Q,g]} \cong \frac{[Q,g]N}{N} \quad \text{e} \quad \frac{E_{n(g)}(g)}{N \cap E_{n(g)}(g)} \cong \frac{E_{n(g)}(g)N}{N}$$

e

$$\frac{[Q,g]N}{N} \leq \frac{E_{n(g)}(g)N}{N}$$

para cada $N \lhd_\circ G$, concluímos que, $|[Q,g]| \leq |E_{n(g)}(g)|$. Por hipótese, $E_{n(g)}(g)$ é finito, então $[Q,g]$ também é. Como $[Q,g] \lhd F(G)$ implica que, $F(G) \leq_c N_G([Q,g]) \leq_c G$. Pela Proposição 2.6.2, temos que,

$$[G : F(G)] = [G : N_G([Q,g])][N_G([Q,g]) : F(G)]$$

como $[G : F(G)]$ é finito, então $[G : N_G([Q,g])]$ também é finito. Assim,

$$\#\{\text{conjugados de}[Q,g] \text{ em } G\} = [G : N_G([Q,g])]$$

é finito. Logo, o fecho normal $\langle [Q,g]^G \rangle$ é o produto de um número finito de conjugados e portanto, também é finito. Seja R o produto destes fechos $\langle [Q,g]^G \rangle$ sobre todos os q-subgrupos de Sylow Q de $F(G)$, para $q \neq p$. Uma vez que $[Q,g] \leq E_{n(g)}(g)$, há apenas um número finito de primos q, tal que, $[Q,g] \neq 1$ para os q-subgrupos de Sylow Q. Portanto, R é finito.

Passo 4: Notaremos que é suficiente provar que o residual pronilpotente do grupo G/R é finito;

Isso porque $\gamma_\infty(G/R) = \gamma_\infty(G)R/R$ e

$$|\gamma_\infty(G)| \leq |\gamma_\infty(G)R| = |\gamma_\infty(G/R)||R|.$$

Assim, podemos assumir $R = 1$. Como $[Q, g^a] \leq R$, implica que $[Q, g^a] = 1$ para qualquer conjugado de g e qualquer q-subgrupo de Sylow Q, $q \neq p$.

Sejam $T = \prod_{q \neq p} S_q$, onde S_q é um q-subgrupo de Sylow de $F(G)$ e $\{t_1, \cdots, t_k\}$ uma transversal de G módulo $F(G)$. Consideraremos o subgrupo $G_1 = \langle g^{t_1}, \cdots, g^{t_k} \rangle$ e seja P um p-subgrupo de Sylow de $F(G)$ (Possivelmente trivial).

Passo 5: Provaremos que $G = G_1F(G)$;

Note que

$$\begin{aligned} \frac{G_1F(G)}{F(G)} &= \frac{\langle g^{t_1}, \cdots, g^{t_k} \rangle F(G)}{F(G)} \\ &= \langle g^{t_1}F(G), \cdots, g^{t_k}F(G) \rangle \\ &= \langle (gF(G))^{t_1F(G)}, \cdots, (gF(G))^{t_kF(G)} \rangle. \end{aligned}$$

Isso significa que, $G_1F(G)/F(G)$ é gerado pela classe de conjugação da imagem de g. Note que, $G_1F(G)/F(G) \lhd G/F(G)$. Como $G/F(G)$ é simples e $G_1F(G)/F(G) \neq 1$, implica que $G_1F(G) = G$.

Passo 6: Provaremos que $[PG_1, T] = 1$;

Pelo nosso pressuposto, o produto cartesiano T de todos os q-subgrupos de Sylow de $F(G)$, para $q \neq p$, está centralizado por todos os elementos g^{t_i}. De fato, se $x \in T$, então $x = x_1 \cdots x_n \cdots$ onde cada x_n pertence a um q_n-subgrupo de Sylow Q_n, $q_n \neq p$. Note que

$$\begin{array}{rcl} x^{g^{t_i}} & = & (x_1 \cdots x_n \cdots)^{g^{t_i}} \\ & = & x_1^{g^{t_i}} \cdots x_n^{g^{t_i}} \cdots \\ & \overset{[Q_n, g^{t_i}]=1}{=} & x_1 \cdots x_n \cdots \\ & = & x. \end{array}$$

Assim, $[g^{t_i}, T] = 1$, para todo $i = 1, \cdots, k$. Então $[x, T] = 1$, para todo $x \in G_1$. Desse modo, segue que $[G_1, T] = 1$. Seja P um p-subgrupo de Sylow de $F(G)$ (possivelmente, trivial). Tomemos $h \in P, g_1 \in G_1$ e $x \in T$. Perceba que

$$\begin{array}{rcl} [hg_1, x] & = & [h, x]^{g_1}[g_1, x] \\ & \overset{[G_1,T]=1}{=} & [h, x]^{g_1}. \end{array}$$

Como $P, T \trianglelefteq F(G)$, então $[h, x] \in P$ e $[h, x] \in T$. Isso implica que $[h, x] \in P \cap T = 1$, assim, $[h, x] = 1$. Então, $[hg_1, x] = 1$. Isso mostra que $[PG_1, T] = 1$.

Passo 7 Mostraremos que $\gamma_\infty(G) = \gamma_\infty(PG_1)$;

Vamos mostrar agora que $\gamma_\infty(G) = \gamma_\infty(PG_1)$. Perceba que $G = G_1F(G) = G_1PT$. Sejam $x_1, x_2 \in G_1$, $y_1, y_2 \in P$ e $z_1, z_2 \in T$. Note que,

$$\begin{array}{rcl} [x_1y_1z_1, x_2y_2z_2] & = & [x_1y_1, x_2y_2z_2]^{z_1}[z_1, x_2y_2z_2] \\ & = & (\underbrace{[x_1y_1, z_2]}_{=1}[x_1y_1, x_2y_2]^{z_2})^{z_1}[z_1, z_2]\underbrace{[z_1, x_2y_2]}_{=1}{}^{z_2} \\ & \overset{[PG_1,T]=1}{=} & [x_1y_1, x_2y_2][z_1, z_2]. \end{array} \tag{2.2}$$

Então, $\gamma_2(G) = \gamma_2(PG_1)\gamma_2(T)$. Por indução, vamos provar que $\gamma_n(G) = \gamma_n(PG_1)\gamma_n(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponha que $\gamma_k(G) = \gamma_k(PG_1)\gamma_k(T)$ para todo $k < n$. Provaremos que a igualdade anterior vale para n.

$$\begin{array}{rcl} \gamma_n(G) & = & [\gamma_{n-1}(G), G] \\ & \overset{\text{Hipótese de indução}}{=} & [\gamma_{n-1}(PG_1)\gamma_{n-1}(T), G_1PT] \\ & \overset{(*)}{=} & [\gamma_{n-1}(PG_1), PG_1][\gamma_{n-1}(T), T] \\ & = & \gamma_n(PG_1)\gamma_n(T). \end{array}$$

Em $(*)$ usamos um raciocínio análogo ao de (2.2). Logo, acabamos de provar por indução que $\gamma_n(G) = \gamma_n(PG_1)\gamma_n(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostraremos agora que $\gamma_\infty(G) = \gamma_\infty(PG_1)\gamma_\infty(T)$. É claro que $\gamma_\infty(PG_1)\gamma_\infty(T) \leq \gamma_\infty(G)$. Seja $x \in \gamma_\infty(G) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\gamma_n(G)$. Como $\gamma_n(G) = \gamma_n(PG_1)\gamma_n(T)$, então $x \in \gamma_n(PG_1)\gamma_n(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, existem $a \in \gamma_n(PG_1)$ e $b \in \gamma_n(T)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tais que $x = ab$. Desse modo, $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\gamma_n(PG_1)$ e $b \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\gamma_n(T)$, o que implica em, $x = ab \in \gamma_\infty(PG_1)\gamma_\infty(T)$. Logo, $\gamma_\infty(G) \leq \gamma_\infty(PG_1)\gamma_\infty(T)$ e, portanto, $\gamma_\infty(G) = \gamma_\infty(PG_1)\gamma_\infty(T)$. Pela construção de T, segue que para cada primo q, divisor da ordem de T, existe um único q-subgrupo de Sylow contido em T. Então, T é pronilpotente pela Proposição 2.6.6. Assim, $\gamma_\infty(T) = 1$ e, portanto, $\gamma_\infty(G) = \gamma_\infty(PG_1)$.

Passo 8: Mostraremos que $\gamma_\infty(G) \cap T$ é finito;

Note que,

$$\begin{aligned}
\left[\frac{PT}{P} \cap \frac{G_1P}{P}, \frac{G_1P}{P}\right] &\leq \left[\frac{PT}{P}, \frac{G_1P}{P}\right] \\
&= \frac{[G_1,T]P}{P} \\
&\overset{[G_1,T]=1}{=} P \Rightarrow \frac{PT}{P} \cap \frac{G_1P}{P} \leq Z\left(\frac{G_1P}{P}\right).
\end{aligned}$$

Uma vez que,

$$\frac{\frac{G_1P}{P}}{Z\left(\frac{G_1P}{P}\right)} \cong \frac{\frac{\frac{G_1P}{P}}{\frac{TP}{P}\cap\frac{G_1P}{P}}}{\frac{Z\left(\frac{G_1P}{P}\right)}{\frac{TP}{P}\cap\frac{G_1P}{P}}} \tag{2.3}$$

e

$$\frac{\frac{G_1P}{P}}{\frac{TP}{P}\cap\frac{G_1P}{P}} \cong \frac{\frac{G_1PT}{P}}{\frac{PT}{P}} \cong \frac{G}{F(G)}.$$

Como $\frac{G}{F(G)}$ é finito, então o grupo em (2.3) é finito. Decorre do Teorema 1.1.6 de Schur que $(G_1P/P)'$ é finito. Como

$$\frac{G_1P}{P} \leq N_{\frac{G}{P}}\left(\frac{G_1P}{P}\right) \quad \text{e} \quad \frac{TP}{P} \leq N_{\frac{G}{P}}\left(\frac{G_1P}{P}\right) \quad \text{pois} \quad \left[\frac{G_1P}{P}, \frac{TP}{P}\right] \leq \frac{G_1P}{P}$$

então,

$$\frac{G_1TP}{P} \leq N_{\frac{G}{P}}\left(\frac{G_1P}{P}\right) \Rightarrow \frac{G_1P}{P} \lhd_c \frac{G}{P}.$$

Claramente

$$\frac{TP}{P} \lhd_c \frac{G}{P}.$$

Considere agora o grupo

$$\frac{\frac{G}{P}}{\left(\frac{G_1P}{P}\right)'}.$$

Note que,

$$\frac{\frac{G_1P}{P}}{\left(\frac{G_1P}{P}\right)'} \leq \frac{\frac{G}{P}}{\left(\frac{G_1P}{P}\right)'}$$

é abeliano, assim, é pronilpotente. Já sabemos que T é pronilpotente, então

$$\frac{\frac{TP}{P}}{\left(\frac{G_1P}{P}\right)'}$$

é pronilpotente. Decorre da Lema 2.6.7 (a) que o grupo

$$\frac{\frac{G}{P}}{\left(\frac{G_1P}{P}\right)'} = \frac{\frac{G_1TP}{P}}{\left(\frac{G_1P}{P}\right)'}$$

é pronilpotente. Segue do Lema 2.6.9 (a) que

$$\gamma_\infty\left(\frac{G}{P}\right) \leq \left(\frac{G_1P}{P}\right)'.$$

Logo, $\gamma_\infty(G/P)$ é finito. Como

$$\frac{(\gamma_\infty(G_1P)\cap T)P}{P} \leq \frac{\gamma_\infty(G_1P)P}{P} = \gamma_\infty\left(\frac{G_1P}{P}\right) \leq \gamma_\infty\left(\frac{G}{P}\right)$$

então, $(\gamma_\infty(G_1P)\cap T)P/P$ é finito. Note que,

$$\frac{(\gamma_\infty(G_1P)\cap T)P}{P} \cong \frac{\gamma_\infty(G_1P)\cap T}{\gamma_\infty(G_1P)\cap T\cap P} = \frac{\gamma_\infty(G_1P)\cap T}{1} \cong \gamma_\infty(G_1P)\cap T.$$

Então, $\gamma_\infty(PG_1)\cap T$ é finito.

Assim podemos assumir que $T = 1$, em outras palavras, que $F(G)$ é um p-grupo.

Passo 9: Se $|G/F(G)| = p$, notaremos que G é pronilpotente. Então, $\gamma_\infty(G) = 1$;

Se $|G/F(G)| = p$, então G é um grupo pro-p. Logo, G é o limite inverso de p-grupos finitos, uma vez que os p-grupos finitos são nilpotentes, então G é igual ao limite inverso de grupos nilpotentes finitos. Portanto, G é pronilpotente e pelo Lema 2.6.9 (b), tem-se que $\gamma_\infty(G) = 1$. Segue do Lema 2.7.1, que G é localmente nilpotente. O que prova o Teorema.

Passo 10: Caso contrário, notaremos que temos o caso trivial em que $F(G) = 1$, o que implica em, G ser um grupo finito e, portanto, $\gamma_\infty(G)$ é finito.

Porém, se $G/F(G)$ é um grupo simples não abeliano, então escolhemos um outro primo, $r \neq p$, dividindo $|G/F(G)|$ e repetimos os mesmos argumentos acima para o primo r, no lugar de p. Como resultado, reduzimos a prova para o caso $F(G) = 1$, onde o resultado é óbvio, pois

$$\frac{G}{F(G)} \cong G.$$

Então, G é finito e, portanto, $\gamma_\infty(G)$ é finito. Assim, $G/\gamma_\infty(G)$ é pronilpotente e satisfaz as hipóteses do Teorema A. Segue pelo Lema 2.7.1 que $G/\gamma_\infty(G)$ é localmente nilpotente.

□

Vamos finalizar esse capítulo apresentando algumas consequências do Teorema A. Usamo aqui as mesmas notações empregada no enunciado desse Teorema.

Seja G um grupo profinito satisfazendo as hipóteses do Teorema A. Segue como consequência desse Teorema que G possui um subgrupo aberto localmente nilpotente. Afirmamos que $C_G(N)$ é um subgrupo aberto localmente nilpotente de G. De fato, como N é um subgrupo finito de G, segue pela demonstração do Lema 2.5.4 (c) que N é fechado. Então G/N é um grupo profinito localmente nilpotente satisfazendo as hipóteses do Teorema A. Pelo Lema 2.7.1 tem-se que G/N é pronilpotente. Então $\gamma_\infty(G) \leq N$ (Lema 2.6.9 (a)). Assim, podemos considerar $N = \gamma_\infty(G)$. Pela Proposição 2.7.2, tem-se que $C_G(N)$ é um subgrupo aberto e pronilpotente. Uma vez que $C_G(N)$ é aberto em G, então $C_G(N)$ é fechado em G (Proposição 2.3.1 (c)). Então, $C_G(N)$ é um grupo profinito que satisfaz as hipóteses do Teorema A (Lema 2.5.4 (b)). Portanto, segue do Lema 2.7.1 que $C_G(N)$ é um subgrupo aberto e localmente nilpotente de G.

Por fim, o Teorema B tem uma outra consequência, agora para grupos profinitos, se há uma uniformidade nas ordens dos subgrupos $E_n(g)$.

Corolário C. *Suponha que G é um grupo profinito e que existe um inteiro positivo m tal que para todo $g \in G$ existe $n = n(g)$ de modo que $|E_n(g)| \leq m$. Então, G tem um subgrupo normal finito N de ordem limitada em termos de m tal que G/N é localmente nilpotente.*

Demonstração. Para cada subgrupo U normal e aberto do grupo profinito G tem-se que, para todo $g \in G/U$ existe um inteiro positivo $n = n(g)$ de modo que o subgrupo $E_n(g)$, construído no quociente G/U, tem ordem menor ou igual a m. Assim, $|E(g)| \leq m$ para cada $g \in G/U$. Decorre do Teorema B que $|\gamma_\infty(G/U)|$ é m-limitado. Como

$$\left|\gamma_\infty\left(\frac{G}{U}\right)\right| = \left|\frac{\gamma_\infty(G)U}{U}\right|$$

é m-limitado, segue pelo Lema 2.5.5 que $|\gamma_\infty(G)|$ é m-limitado. O que conclui a prova do corolário.

$\square$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Baire, R. *Sur les fonctions de variables réelles.* Ann. di Mat., 3:1-123, 1899.

[2] Gorenstein, D. *Finite Groups.* New York: Copyright, 1968.

[3] Gorenstein, D. *Finite Simple Groups - An Introduction to their Classification.* New York, Springer, 1982.

[4] Grün, O. Beitrge zur Gruppentheorie. *I, J. Reine Angew. Math* . 174, 1935, 1-14

[5] Huppert, B. *Endliche Gruppen I.* Springer: Berlin, 1967.

[6] Husain, T. *Introduction to Topological de Groups.* Toppan Company: Tokyo, 1966.

[7] Isaacs, I. M. *Finite Group Theory.* Amer. Math. Soc: Providence, 2008.

[8] Khukhro, E.I. *Problems of bounding the p-length and Fitting height of finite soluble groups.* Journal of Siberian Federal University. 2009, 258-270.

[9] Khukhro, E.I e Shumyatsky, P. *Almost Engel Finite and profinite groups.* International Journal of Algebra and Computation. 2016, 973-983.

[10] Kurzweil, H.; Stellmacher, B. *The theory of Finite Groups - An Introduction.* Springer: New York, 2004.

[11] Lima, E. L. *Elementos de Topologia Geral.* Editora SBM: Rio de Janeiro, 2009.

[12] Pontrjagin, L. *Topological Groups.* Oxford University Press: Princeton, 1946.

[13] Ribes, L.; Zalesskii, P. *Profinite Groups.* Springer: Berlim, 2000.

[14] Robinson, D. J.S. *A course in the theory of groups.* Springer: New York, 1995.

[15] Shalev, A. *Profinite Groups with Restricted Centralizers*, Proc. Amer. Math. Soc. 122, no. 4 (1994), 1279-1284.

[16] Singh, T. B. *Elements of Topology.* CRC Press: New York, 2013.

[17] Wilson, J.S.*Profinite Groups.* Clarendon Press: Oxford, 1998.

[18] Wilson, J.S. e Zelmanov, E.I. *Identities for Lie algebras of pro-p groups.* J. Pure Appl. Algebra 81, no. 1 (1992), 103-109.

ÍNDICE REMISSIVO