Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Rigidez de difeomorfismos do círculo de classe $C^{2+\alpha}$

Rodrigo Mazzei Carvalho

Salvador-Bahia
Março de 2017

Rigidez de difeomorfismos do círculo de classe $C^{2+\alpha}$

Rodrigo Mazzei Carvalho

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Kleyber Mota da Cunha.

Salvador-Bahia

Março de 2017

Carvalho, Rodrigo Mazzei.

Rigidez de difeomorfismos do círculo de classe $C^{2+\alpha}$ / Rodrigo Mazzei Carvalho. – Salvador: UFBA/IME, 2017.

xxf, : il

Orientação: Prof. Dr. Kleyber Mota da Cunha.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Pós-graduação em Mateática, 2017.

Referências bibliográficas.

1. Sistemas dinâmicos. 2. Difeomorfismos do círculo. I. Cunha, Kleyber Mota. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU : 517

: 517.9

Rigidez de difeomorfismos do círculo de classe $C^{2+\alpha}$

Rodrigo Mazzei Carvalho

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Mateática, aprovada em 30 de Março de 2017.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Kleyber Mota da Cunha (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Tertuliano Franco Santos Franco
UFBA

Prof. Dr. Márcio Ricardo Alves Gouveia
UNESP

Agradecimentos

Ao Departamento de Matemática da UFBA e seus funcionários e equipe, por todo o auxílio durante o mestrado e todos os meus professores que contribuíram para minha formação.

Ao meu orientador Professor Dr. Kleyber Mota da Cunha por toda competência, apoio e atenção que permitiram que esse trabalho fosse concluído.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia pelo apoio financeiro concedido.

À todos os novos colegas e amigos que me acompanharam durante esta jornada. Em especial, a meus amigos Clesio Lima, Isabella Duarte,Vinicius Coelho e Matheus Silva.

À toda minha família e amigos que me incentivaram e motivaram durante todo esse caminho.

Resumo

Neste trabalho iremos estudar a dinâmica de homeomorfismos do círculo. Vamos definir o número de rotação por frações contínuas de um homeomorfismo do círculo, e o usaremos para estabelecer condições sobre as quais o homeomorfismo considerado é semi-conjugado ou conjugado a uma rotação, pelos teoremas de Poincaré e de Denjoy. Por fim, estudaremos condições sobre as quais a conjugação do Teorema de Denjoy é de classe C^1.

Palavras-Chave — Homeomorfismos do círculo; Conjugações topológicas; Rigidez; Número de rotação;

Abstract

We are going to study the dynamics of circle homeomophisms. First, we'll define the rotation number by continuous fractions of a circle homeomorphism, then we'll use it to establish the conditions on which the given homeomorphism is semi-conjugated or conjugated to a rotation, by using the theorems of Poincaré and Denjoy. Finally, we will study the conditions necessary so that the Denjoy's conjugation is C^1.

Palavras-Chave— Circle homeomorphisms; Topological conjugacies; Rigidity; Rotation number;

Conteúdo

1 Introdução

O primeiro e segundo capítulos deste trabalho se direcionarão a estudar as condições sobre as quais um homeomorfismo do círculo $f : S^1 \longrightarrow S^1$ é conjugado a uma rotação do círculo. Para isto, iremos definir o chamado número de rotação do homeomorfismo f, $\rho(f)$, cujo primeiro uso foi feito por Poincaré (POINCARÉ, 1885). Provaremos o teorema de Poincaré, que mostra que se o número de rotação de um homeomorfismo é irracional, então este homeomorfismo é semi-conjugado a uma rotação com mesmo número de rotação. Ou seja, dado um homeomorfismo do círculo $f : S^1 \longrightarrow S^1$ com número de rotação irracional, existe uma rotação $R : S^1 \longrightarrow S^1$ e uma função $h : S^1 \longrightarrow S^1$ injetiva e monótona tal que $f \circ h = h \circ R$. A seção 2 se destinará a resultados que serão necessários ao longo do resto do trabalho, além de apresentar a formalização clássica do número de rotação, como definido pelo limite:

$$\rho(f) = \pi \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\bar{f}^n(x) - x}{n} \right)$$

para todo $x \in S^1$ e todo levantamento $\bar{f}$ de f. Por outro lado, para provar o Teorema de Poincaré, iremos usar uma outra abordagem do número de rotação, conhecido como número de rotação por frações contínuas, definido como:

$$\omega = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_m + \dots}}}}$$

em que a_n é uma sequência de números inteiros que dependerá do homeomorfismo f. Esta construção do número de rotação e a prova do Teorema de Poincaré serão feitas na seção 3.

Naturalmente, podemos nos perguntar sobre quais condições a semi-conjugação acima é uma conjugação, ou seja, em que condições h é sobrejetiva. Isso é resolvido no teorema provado por Arnaud Denjoy em 1932 (DENJOY, 1932), que afirma que se caso f seja um difeomorfismo de classe C^1 e sua derivada tenha variação limitada, então h é uma conjugação topológica entre f e a rotação R. Em particular, temos que todo difeomorfismo do círculo de classe C^2 é topologicamente conjugado à rotação R, pois podemos mostrar que todos possuirão variação limitada. Estes resultados serão provados na seção 4.

Finalmente, iremos estudar sobre quais condições a conjugação h é de classe C^1, uma propriedade conhecida como rigidez. O primeiro resultado relacionado à rigidez foi provado por Arnold (ARNOLD, 1961) para números de rotação diofantinos, onde um número ξ é dito diofantino se existem $k \in \mathbb{R}^+$ e $\varepsilon > 0$ tais que:

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{\varepsilon}{q^k}$$

para todo racional $\frac{p}{q}$. Arnold mostrou que se um difeomorfismo analítico do círculo possui número de rotação irracional diofantino e sua derivada é próxima de 1, então o difeomorfismo é conjugado a uma rotação. Anos mais tarde, em 1979, Herman provou o resultado para difeomorfismos do círculo de classe $C^{3+\alpha}$ (HERMAN, 1979; HERMAN, 1980). Este resultado foi melhorado posteriormente para difeomorfismos de classe $C^{2+\alpha}$ (KHANIN & SINAI, 1987), e será a demonstração apresentada neste trabalho na seção 5.

2 Homeomorfismos do Círculo

Definiremos o círculo como o quociente $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Desta forma, o círculo está identificado com o intervalo $[0,1)$, que contém todos os representantes das classes de equivalência *mod* 1. Considere a aplicação π como a projeção canônica:

$$\pi\colon R \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$
$$x \mapsto x(mod\ 1)$$

essa aplicação é um recobrimento. Consideraremos a distância entre dois pontos do círculo como o comprimento do menor arco determinado pelos pontos. Dessa forma, vamos definir a aplicação distância $d : S^1 \times S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$d([x].[y]) = \begin{cases} |frac(x) - frac(y)| & \text{se } |frac(x) - frac(y)| \leq \frac{1}{2} \\ 1 - |frac(x) - frac(y)| & \text{se } |frac(x) - frac(y)| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

em que $frac(x)$ é a parte fracionária de x. Observe que a aplicação acima está bem definida, pois todos os representantes da mesma classe diferem por um inteiro, logo a parte fracionária de todo representante para a mesma classe de equivalência é a mesma. Vamos provar que d é uma métrica em S^1. Note que $d([x],[y]) \geq 0$, pois $0 \leq |frac(x) - frac(y)| \leq 1$. Se $d([x],[y]) = 0$, então temos dois casos possíveis. Se $|frac(x) - frac(y)| = 0$, então $[x] = [y]$. No segundo caso, temos $|frac(x) - frac(y)| = 1$, e novamente temos que $[x] = [y]$. A simetria é imediata, pois $|x - y| = |y - x|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Resta provar que para todo $[x],[y],[z] \in S^1$, temos que $d([x].[y]) \leq d([x],[z]) + d([z],[y])$. Vamos ter três possibilidades, e as outras serão análogas.

Para simplificar a notação, suponha sem perda de generalidade que $0 \leq x, y, z < 1$.Suponha que $|x - y|, |x - z|, |y - z| \leq \frac{1}{2}$. Daí, temos que:

$$d([x],[y]) = |x - y| \leq |x - z| + |z - y| = d([x],[z]) + d([z],[y])$$

e segue o que queríamos. Suponha agora que $|x - y|, |x - z| \leq \frac{1}{2}$, mas $|y - z| > \frac{1}{2}$. Daí, temos que:

$$1 - |x - y| \geq |x - y| \geq -|x - z| + |z - y|$$
$$1 - |z - y| + |x - y| \geq |x + y|$$

e novamente segue o resultado. Finalmente, se $|x - y| \leq \frac{1}{2}$ e $|x - z|, |y - z| > \frac{1}{2}$, então basta aplicar o argumento acima, mas considerando $2 - |x - y|$. Os outros casos seguem diretamente de pelo menos um destes 3. Em particular, note que os mesmos argumentos provam que $\bar{d} : [0,1) \times [0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida da mesma forma é uma métrica.

Utilizando um recobrimento π, também podemos definir uma ordem em S^1 da seguinte forma: dados $x, y \in S^1$, diremos que $x \leq y$ se $(\pi^{-1} \mid_{[0,1)})^{-1}(x) \leq (\pi \mid_{[0,1)})^{-1}(y)$.

Definição 2.1. *Sejam $x, y \in S^1$. Definiremos o intervalo $[x, y]$ do círculo como $\pi[\bar{x}, \bar{y}]$ em que $\bar{x} = (\pi \mid_{[0,1)})^{-1}(x)$ e $\bar{y} = (\pi \mid_{[0,1)})^{-1}(y)$. Podemos definir os intervalos abertos e semi-abertos de maneira semelhante.*

Apresentaremos agora alguns resultados importantes relacionados a homeomorfismos sobre o círculo.

2.1 Levantamentos

Definição 2.2. *Dada $f : S^1 \longrightarrow S^1$ uma aplicação contínua, dizemos que $\bar{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é um levantamento de f em $\mathbb{R}$ se $\bar{f}$ é contínua, e $\pi \circ \bar{f} = f \circ \pi$.*

Proposição 2.3. *Seja $f : S^1 \longrightarrow S^1$ uma aplicação contínua. Se f_1 e f_2 são levantamentos de f, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f_1(x) = k + f_2(x)$, para todo $x \in S^1$.*

Demonstração. Como $\pi \circ f_1 = f \circ \pi = \pi \circ f_2$, então $f_1(x)$ e $f_2(x)$ estão na mesma classe de equivalência módulo 1, logo $f_1(x) - f_2(x) \in \mathbb{Z}$. Como f_1 e f_2 são contínuas, então $f_1 - f_2$ é contínua. Além disso, como $\mathbb{R}$ é conexo, segue que a imagem de $f_1 - f_2$ é um conjunto conexo em $\mathbb{Z}$, portanto $f_1 - f_2$ é constante. □

Proposição 2.4. *Se $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é um levantamento de $f : S^1 \longrightarrow S^1$, então $f_1(x+1) = f_1(x) + n_1$, para algum inteiro n_1 e para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Note que $\pi \circ f_1(x+1) = f \circ \pi(x+1) = f \circ \pi(x) = \pi \circ f_1(x)$. Usando o argumento anterior, $f_1(x+1) - f_1(x) \in \mathbb{Z}$, portanto existe $n_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $f_1(x+1) = f_1(x) + n_1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. □

Observe que o número n_1 encontrado na proposição anterior independe do levantamento escolhido. Com efeito, se f_2 é outro levantamento de f, pela proposição existe $n_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $f_2(x+1) = f_2(x) + n_2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f_1 - f_2$ é constante, segue que

$$f_1(x+1) - f_2(x+1) = f_1(x) + n_1 - f_2(x) - n_2$$

de onde temos que $n_1 = n_2$.

Definição 2.5. *Se f_1 é um levantamento da aplicação contínua $f : S^1 \longrightarrow S^1$ tal que $f_1(x+1) = f_1(x) + n$, dizemos que o grau topológico de f é n. Denotaremos o grau de f por $deg(f)$.*

Proposição 2.6. *Sejam $f, g : S^1 \longrightarrow S^1$ aplicações contínuas com levantamentos $\bar{f}$ e $\bar{g}$, respectivamente. Então $\bar{f} \circ \bar{g}$ é um levantamento de $f \circ g$, e $deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$.*

Demonstração. Note que:

$$\pi \circ \bar{f} \circ \bar{g} = f \circ \pi \circ \bar{g} = f \circ g \circ \pi$$

logo $\bar{f} \circ \bar{g}$ é levantamento de $f \circ g$. Além disso:

$$\bar{f} \circ \bar{g}(x+1) = \bar{f}(\bar{g}(x) + deg(g))$$

Afirmação: Se f_1 é um levantamento de f, então $f_1(x+n) = f_1(x) + n deg(f)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Já provamos o resultado se $n = 1$. Suponha que o resultado vale para $n \in \mathbb{N}$. Logo:

$$f_1(x+n+1) = f_1(x+n) + deg(f) = f_1(x) + n deg(f) + deg(f) = f_1(x) + (n+1) deg(f)$$

Além disso:

$$f_1(x) = f_1(x+n-n) = f_1(x-n) + n\, deg(f)$$

de onde vem que $f_1(x-n) = f_1(x) - n deg(f)$, e provamos a afirmação. Portanto, $\bar{f}(\bar{g}(x) + deg(g)) = \bar{f} \circ \bar{g}(x) + deg(g) deg(f)$, como queríamos. □

Proposição 2.7. *Se $f : S^1 \longrightarrow S^1$ é um homeomorfismo do círculo, então $deg(f) = \pm 1$.*

Demonstração. Observe que $Id : S^1 \longrightarrow S^1$ a aplicação identidade no círculo tem como levantamento $Id : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Além disso, $Id(x+1) = x + 1 = Id(x) + 1$, logo $deg(Id) = 1$. Como f é um homeomorfismo, existe uma aplicação f^{-1} que é contínua, e temos que:

$$deg(f \circ f^{-1}) = deg(f) deg(f^{-1}) = deg(Id) = 1$$

Como sabemos que $deg(f)$ e $deg(f^{-1})$ são inteiros, então $deg(f) = deg(f^{-1}) = \pm 1$. □

Definição 2.8. *Diremos que $f : S^1 \longrightarrow S^1$ é um difeomorfismo de classe C^k se seus levantamentos forem difeomorfismos de classe C^k.*

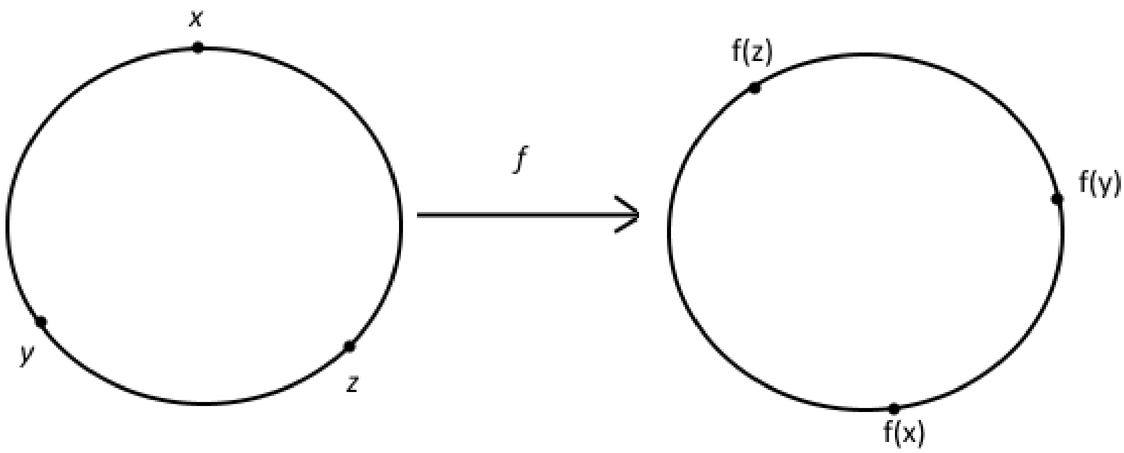

Figura 1: Exemplo de um homeomorfismo do círculo que preserva orientação. Note que partindo do ponto x no sentido anti-horário, atingimos o ponto y e depois o ponto z. Da mesma forma, partindo no sentido anti-horário do ponto $f(x)$, atingimos $f(y)$ e depois $f(z)$.

Definição 2.9. *Se $f : S^1 \longrightarrow S^1$ é um homeomorfismo, diremos que f preserva orientação se $deg(f) = 1$. Caso $deg(f) = -1$ diremos que f inverte orientação.*

Observe que uma consequência da definição acima é que se f preserva orientação, então seus levantamentos são funções não-decrescentes. Da mesma forma, se f inverte orientação, então seus levantamentos são funções não-crescentes. Geometricamente, um homeomorfismo do círculo preserva orientação se, dados três pontos x, y e z do círculo, a ordem dos pontos $f(x), f(y)$ e $f(z)$ não é alterada, partindo do ponto x e $f(x)$, respectivamente (Figura 1).

Definição 2.10. *Definimos os conjuntos:*

$$Dif_+^r(S^1) := \{f : S^1 \longrightarrow S^1; f\ difeomorfismo\ de\ classe\ C^r\ \text{e}\ deg(f) = 1\}$$

$$Dif_-^r(S^1) := \{f : S^1 \longrightarrow S^1; f\ difeomorfismo\ de\ classe\ C^r\ \text{e}\ deg(f) = -1\}$$

A proposição seguinte será útil para caracterizar os levantamentos de homeomorfismos do círculo que preservam orientação:

Proposição 2.11. *Seja $f : S^1 \longrightarrow S^1$ um homeomorfismo do círculo que preserva orientação. Se $\bar{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é um levantamento de f, então $\bar{f}$ pode ser escrito como*

$\bar{f} = Id + \phi$, onde ϕ é periódica de período 1, ou seja, $\phi(x+1) = \phi(x)$.

Demonstração. Como f preserva orientação, então $deg(f) = 1$. Defina $\phi := \bar{f} - Id$. Daí, temos que:

$$\phi(x+1) = \bar{f}(x+1) - (x+1) = \bar{f}(x) - x = \phi(x)$$

Portanto, ϕ é periódica de período 1, e podemos escrever $\bar{f} = \phi + Id$. □

2.2 Homeomorfismos que invertem orientação

Nessa seção veremos como podemos descrever completamente a dinâmica de homeomorfismos que invertem orientação. Para isto, precisamos de algumas definições adicionais:

Definição 2.12. *Dizemos que $x \in S^1$ é um ponto periódico de $f : S^1 \longrightarrow S^1$ de período $n \in \mathbb{N}$, se $f^n(x) = x$, e $f^i(x) \neq x$, para todo $0 < i < n$. Se $f(x) = x$, então dizemos que x é um ponto fixo de f.*

Definição 2.13. *Seja $f : X \longrightarrow X$ uma função definida em um espaço métrico X. Definiremos a semi-órbita positiva de $x \in X$ por f como:*

$$O_f^+(x) := \{f^n(x); n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$$

Caso f seja invertível, podemos definir:

$$O_f^-(x) := \{f^{-n}(x); n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$$

como a semi-órbita negativa de x por f. Em geral, definimos a órbita como $O_f(x) := \{f^n(x); n \in \mathbb{Z}\}$.

Definição 2.14. *Definimos o conjunto $\omega - limite$ de f como o conjunto dos pontos de acumulação de $O_f^+(x)$ e o conjunto $\alpha - limite$ como o conjunto dos pontos de acumulação de $O_f^-(x)$. Iremos representá-los por $\omega(x)$ e $\alpha(x)$, respectivamente.*

Observe que se f inverte orientação, então o segundo iterado f^2 preserva orientação, pois $deg(fof) = deg(f)^2$. Dessa forma, antes de estudar a dinâmica de homeomorfismos que invertem orientação, precisaremos do seguinte Lema para homeomorfismos que preservam orientação:

Lema 2.15. *Seja $f : S^1 \longrightarrow S^1$ um homeomorfismo do círculo que preserva orientação. Se f possui um ponto fixo, então o conjunto $\omega - limite$ da órbita de todo ponto de f é formada por um ponto fixo.*

Demonstração. Seja $y \ mod \ 1 \in S^1$ o ponto fixo de f. Observe que como y é um ponto fixo de f, então existe um levantamento $\bar{f}$ tal que $\bar{f}(y+k) = y+k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Com efeito, sabemos que se $\bar{f}$ é um levantamento de f, então $\pi \circ \bar{f}(y) = f \circ \pi(y)$, de onde $\pi \circ \bar{f}(y) = y \ mod \ 1$, ou seja, $\bar{f}(y) = y + k_1$, para algum $k_1 \in \mathbb{Z}$. Considere $f_1 := \bar{f} - k_1$. Note que como k_1 é inteiro, f_1 ainda é um levantamento de f, e, por construção, $f_1(y) = y$. Além disso, como f preserva orientação, temos que $f_1(y+k) = f_1(y) + k = \bar{f}(y) - k_1 + k = y + k$, como queríamos. Considere $\bar{f} := f_1$ de agora em diante. Tome $x \in S^1$ um ponto qualquer, e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tal que $\pi(\bar{x}) = x$. Como f preserva orientação, segue que $\bar{f}^n(\bar{x})$ é uma sequência não-decrescente. Além disso, observe que o conjunto $\pi^{-1}(y)$ é ilimitado superiormente, daí existe $\bar{y} \in \pi^{-1}(y)$ tal que $\bar{x} < \bar{y}$. Em particular, $\bar{f}^n(\bar{x}) < \bar{f}^n(\bar{y}) = \bar{y}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implica que a sequência é limitada, e temos que $\bar{f}^n(\bar{x})$ converge, digamos, para $z \in \mathbb{R}$. Como $\bar{f}$ é contínua, então $z = \lim_{n\to\infty} \bar{f}^{n+1}(\bar{x}) = \bar{f}(\lim_{n\to\infty} \bar{f}^n(\bar{x})) = \bar{f}(z)$, e segue que z é um ponto fixo de $\bar{f}$. Finalmente, temos que como π é contínua, $\pi(z) = \lim_{n\to\infty} \pi \circ \bar{f}^n(\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} f^n \circ \pi(\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} f^n(x)$, e como temos que $\pi(z) = \pi \circ \bar{f}(z) = f \circ \pi(z)$, segue que $\pi(z)$ é um ponto fixo de f. □

Considere agora f um homeomorfismo do círculo que inverte orientação e possui um ponto fixo. Pelo que falamos anteriormente, f^2 preserva orientação, e pelo Lema segue que as órbitas de f^2 são assintóticas a um ponto fixo. Em particular, temos que todas as órbitas de f também serão assintóticas a um ponto fixo ou a um ponto periódico de período 2. Com efeito, dado $x \in S^1$, sabemos que $f^{2n}(x) \to y$, para algum $y \in S^1$ ponto fixo de f^2. Como f é contínua, $\lim_{n\to\infty} f \circ f^{2n}(x) = f(\lim_{n\to\infty} f^{2n}(x)) = f(y) = y$. Observe que as subsequências $f^{2n}(x)$ e $f^{2n+1}(x)$ possuem todos os termos da sequência $f^n(x)$ (a menos do primeiro). Portanto, se existe uma sequência convergente $(f^m(x))_{m\in\mathbb{N}_1}$ de termos da órbita de x por f que converge para um ponto de $\omega(x)$, ela deve possuir infinitos termos de pelo menos uma das subsequências $f^{2n}(x)$ e $f^{2n+1}(x)$, e pela unicidade do limite, segue que a sequência $(f^m(x))_{m\in\mathbb{N}_1}$ deve convergir para um ponto fixo ou para um ponto periódico de período 2. Dessa forma, vemos que se um homeomorfismo possui um ponto fixo, podemos conhecer a dinâmica de qualquer um de seus pontos. A seguir, veremos que no caso de homeomorfismos que invertem orientação, sempre podemos aplicar este argumento.

Proposição 2.16. *Seja f um homeomorfismo do círculo que inverte orientação. Então f tem precisamente dois pontos fixos.*

Demonstração. Seja $x \in S^1$ com $x \neq f(x)$. Considere $p, q \in S^1$ pertencentes a diferentes componentes conexas de $S^1 - \{x, f(x)\}$. Sejam $A := (x, p)$ e $B := (q, x)$ os arcos determinados por estes pontos. Considere A e B maximais, de forma que $A \bigcap f(A) = \emptyset = B \bigcap f(B)$. Observe que, como por hipótese f inverte orientação, então A e $f(A)$ estarão contidos em uma componente conexa de $S^1 - \{x, f(x)\}$, enquanto $f(B)$ e B estarão contidos em outra componente conexa. Pela maximalidade de A e B, temos que $f(p) = p$ e $f(q) = q$. Ademais, nenhum outro ponto pode ser ponto fixo, pois se $y \in A$, então $f(y) \in f(A)$, e A e $f(A)$ são disjuntos a menos do ponto p. □

Dessa forma o conjunto $\omega - limite$ de homeomorfismos do círculo que invertem orientação fica completamente descrito: como f^2 preservará orientação e sempre possuirá um ponto fixo, como vimos, qualquer ponto será assintótico a um dos dois pontos fixos da proposição ou a um ponto periódico de período 2.

Podemos usar argumentos similares ao que fizemos acima para homeomorfismos que preservam orientação e possuem ponto periódico. Neste caso, se f possui um ponto periódico $y \in S^1$ de período k, então y é ponto fixo de f^k. Portanto, f^k preserva orientação e possui um ponto fixo. Daí, pelo Lema, todas as órbitas de f^k serão assintóticas a um ponto fixo x de f^k. Em particular, o conjunto $\omega - limite$ de f é uma órbita periódica de período k. De fato, note que dado qualquer $y \in S^1$, teríamos que $f^{nk}(y) \to x$ se $n \to \infty$. Daí, segue que como f é contínua, $f^{nk-t}(y) \to f^{-t}(x)$ para todo $0 \leq t < k$. Resta mostrar que estes são os únicos pontos de acumulação da órbita de y por f. Com efeito, note que dado qualquer outro ponto de acumulação $w \in S^1$ da órbita de y por f, existe uma sequência com infinitos pontos distintos que converge para w. Esta sequência deverá ter infinitos pontos de pelo menos uma das sequências $(f^{nk-t}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ para algum $0 \leq t < k$, logo o resultado segue pela unicidade do limite.

Para estudar homeomorfismos do círculo que não possuem pontos periódicos ou pontos fixos (E, pela proposição anterior, preservam orientação), precisaremos definir o chamado número de rotação.

2.3 Rotações

Antes de definir o número de rotação, iremos estudar o comportamento das órbitas de uma rotação do círculo, que também serão importantes para estudar a dinâmica de homeomorfismos do círculo que não possuem pontos periódicos. Primeramente, definiremos uma rotação:

Definição 2.17. *Definimos uma rotação do círculo por um ângulo $\alpha \in \mathbb{R}$ com $0 \leq \alpha \leq 1$ como a aplicação*

$$\begin{aligned} R_\alpha : & S^1 \longrightarrow S^1 \\ & x \longrightarrow (x+\alpha)\, mod\, 1 \end{aligned}$$

Queremos mostrar que as rotações do círculo são homeomorfismos. Antes disso, uma obsevação: dado $x, y \in \mathbb{R}$, se $0 \leq x < 1$ e $0 \leq y < 1$, então $frac(x-y) = frac(x) - frac(y)$. De fato, da hipótese temos que $-1 < -y \leq x - y < 1 - y < 1$. Logo $frac(x-y) = x - y - \lfloor x - y \rfloor = x - y$. Seja agora $R_\alpha : S^1 \longrightarrow S^1$ uma rotação do círculo. Note que podemos definir uma aplicação:

$$\begin{aligned} R_{-\alpha} : & S^1 \longrightarrow S^1 \\ & x \longrightarrow (x-\alpha)\, mod\, 1 \end{aligned}$$

e temos que $(R_{-\alpha}(x))$ é a inversa de R_α. Vamos provar que $R_{-\alpha}$ é uma isometria, e então seguirá que rotações do círculo são isometrias, portanto homeomorfismos. Sejam $[x], [y] \in S^1$ tais que $d([x],[y]) = \epsilon$ e suponha sem perda de generalidade que $0 \leq x, y < 1$. Temos dois casos: se $|R_{-\alpha}(frac(x)) - R_{-\alpha}(frac(y))| < \frac{1}{2}$, temos que:

$$\begin{aligned} d(R_{-\alpha}(x), R_{-\alpha}(y)) &= |frac(R_{-\alpha}(x)) - frac(R_{-\alpha}(y))| = |frac(x-\alpha) - frac(y-\alpha)| \\ &= |frac(x) - frac(\alpha) - frac(y) + frac(\alpha)| = |frac(x) - frac(y)| = \epsilon \end{aligned}$$

Portanto $R_{-\alpha}$ é uma isometria, logo é um homeomorfismo.

Observe que dada uma rotação do círculo R_α, um levantamento desta é dado pela translação $T_\alpha(x) = x + \alpha$. Com efeito:

$$R_\alpha \circ \pi(x) = (x+\alpha)\,(mod\, 1) = \pi \circ T_\alpha(x)$$

Como este levantamento é crescente, então ele preserva orientação. Por abuso de notação, chamaremos as translações que definimos de rotações, e as denotaremos por R_α. Observe que se uma rotação R_α tem um ponto periódico de período n, então todos os seus pontos são periódicos de período n. Com efeito, se $x \in S^1$ é um ponto periódico de período n, então segue que $x = R_\alpha^n(x) = (x + n\alpha)\, mod\, 1$. Isso implica que $n\alpha \in \mathbb{Z}$, portanto dado qualquer outro ponto $y \in S^1$, segue que $R_\alpha^n(y) = (y + n\alpha)\, mod\, 1 = y\, mod\, 1$. Logo y também é periódico de período n.

Proposição 2.18. *Se α é irracional, então a órbita de $R_\alpha(x)$ é densa em S^1, para todo $x \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Seja $x \in S^1$ e $F := O_{R_\alpha}(x)$. Observe que F é um conjunto invariante por R_α. Afirmamos que $\bar{F}$ também é invariante por R_α. Com efeito, consideremos $y \in \bar{F}$ e tome uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos em F tal que $y_n \longrightarrow y$. Note que como R_α é uma isometria cuja inversa é $R_{-\alpha}$, então é um homeomorfismo, e portanto:

$$R_\alpha(y) = R_\alpha(\lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} R_\alpha(y_n)$$

Como F é invariante, então $R_\alpha(y_n) \in F$, $\forall n \in \mathbb{N}$, de onde temos que $R_\alpha(y) \in \bar{\mathbb{F}}$. Logo $R_\alpha(\bar{F}) \subset \bar{F}$. Por outro lado, para todo $z \in \bar{F}$, utilizando o argumento anterior para $R_{-\alpha}$, teríamos que $R_{-\alpha}(z) \in \bar{F}$, de onde $R_\alpha(R_{-\alpha}(z)) = z \in R_\alpha(\bar{F})$, ou seja, $\bar{F} \subset R_\alpha(\bar{F})$, o que conclui a afirmação.

Como R_α é injetiva (pois é homeomorfismo), segue que $A = S^1 - \bar{F}$ é invariante. Suponha, por absurdo, que a órbita de R_α não seja densa em S^1. Daí, teríamos que A é um conjunto aberto, pois é o complementar de um fechado, e não vazio. Considere uma componente conexa (arco) A_0 de A, com comprimento $\epsilon > 0$. Como A é invariante e R_α é um homeomorfismo, então $R_\alpha^n(A_0)$ também é uma componente conexa de A, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que os conjuntos $R_\alpha^n(A_0)$ são dois a dois disjuntos. Com efeito, suponha que $R_\alpha^n(A_0) \bigcap R_\alpha^m(A_0) \neq \emptyset$, com $m > n$. Daí, como homeomorfismos levam componentes conexas em componentes conexas, então $R_\alpha^n(A_0) = R_\alpha^m(A_0)$. Como as rotações preservam orientação, os pontos de $R_\alpha^n(A_0)$ são periódicos de período $m - n$. Portanto, tomando $x \in R_\alpha^n(A_0)$, existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $x + (m - n)\alpha = x + z$, e daí teríamos que $\alpha = z/(m - n) \in \mathbb{Q}$, um absurdo. Concluímos que os conjuntos $R_\alpha^n(A_0)$ são dois a dois disjuntos.

Por outro lado, como R_α é uma isometria e A_0 tem comprimento $\epsilon > 0$, então o comprimento de A é maior que $n\epsilon$, para todo n, um absurdo. $\square$

2.4 Definição clássica do número de rotação

Nesta seção iremos definir o número de rotação e estudar algumas de suas propriedades. Seja $f : S^1 \longrightarrow S^1$ um homeomorfismo do círculo que preserva orientação. Pelo que vimos antes, existe um levantamento $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\pi \circ F = f \circ \pi$, e para todo $x_0 \in \pi^{-1}(f(0))$, existe um levantamento F_{x_0} no qual $F_{x_0}(0) = x_0$, ou seja, basta compor F com uma rotação adequada. Desta forma, para cada x_0, o levantamento correspondente irá diferir dos outros por um inteiro.

Teorema 2.19. *Seja $f : S^1 \longrightarrow S^1$ um homeomorfismo do círculo que preserva orientação. Seja $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ um levantamento de f. Então para todo ponto $x \in \mathbb{R}$, o limite*

$$\rho(f) = \pi\left(\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}\right)$$

existe e independe do ponto x. O número de rotação $\rho(f) = \pi(\rho(F))$ é independente do levantamento F, e é chamado de número de rotação de f. Se f possui um ponto periódico, então $\rho(f)$ é racional.

Demonstração. Suponha que o limite existe para algum $x \in \mathbb{R}$. Note que F leva intervalos de comprimento 1 em intervalos de comprimento 1, pois caso contrário a relação $\pi \circ F = f \circ \pi$ não seria satisfeita. Segue então que para qualquer $y \in \mathbb{R}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, temos que $|F^n(x) - F^n(y)| \leq 1$, pois $F^n(x)$ e $F^n(y)$ sempre estarão contidos em algum intervalo de comprimento 1. Daí, temos que

$$|(F^n(x) - x) - (F^n(y) - y)| \leq |F^n(x) - F^n(y)| + |x - y| \leq 2,$$

então temos que

$$\frac{|F^n(x) - x|}{n} - \frac{|F^n(y) - y|}{n} \leq \frac{2}{n}$$

e fazendo $n \to \infty$, vem que

$$\rho(f) = \pi\left(\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}\right) = \rho(f) = \pi\left(\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(y) - y}{n}\right)$$

Observe que como $F^n(y + k) = F^n(y) + k$ e F é um homeomorfismo, $|F^n(x) - F^n(y + k)| = |F^n(x) - F^n(y) - k| \leq k + 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall k \in \mathbb{Z}$. Então, como fizemos antes, teremos que:

$$\frac{|F^n(x) - x|}{n} - \frac{|F^n(y + k) - (y + k)|}{n} \leq \frac{k + 2}{n}$$

e temos que

$$\rho(f) = \pi\left(\lim_{n\to\infty}\frac{F^n(x)-x}{n}\right) = \rho(f) = \pi\left(\lim_{n\to\infty}\frac{F^n(y)-y}{n}\right)$$

para todo $y \in \mathbb{R}$. Isto prova que o limite não depende do ponto x escolhido.

Suponha agora que $F^q(x) = x + p$ para algum $x \in [0,1)$ para $p, q \in \mathbb{N}$. Ou seja, temos que $\pi(x)$ é um ponto periódico de f de período q, pois $\pi \circ F(x) = \pi(x+p) = \pi(x) = f \circ \pi(x)$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, tome $n = kq + r$, em que $0 \leq r < q$. Daí, temos que $F^n(x) = F^r(F^{kq}(x) = F^r(x+kp) = F^r(x) + kp$, e como temos que $|F^r(x) - x| \leq p$, então vale que

$$\frac{F^n(x)-x}{n} = \frac{F^r(x)+kp-x}{kq+r} = \frac{F^r(x)-x}{kq+r} + \frac{p}{q+\frac{r}{k}}$$

De onde, fazendo $k \to \infty$, vem que

$$\rho(f) = \lim_{n\to\infty}\frac{F^n(x)-x}{n} = \frac{p}{q}$$

Logo se f tem um ponto periódico, o número de rotação é racional.

Suponha agora que $F^q(x) \neq x + p$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $p, q \in \mathbb{N}$, isto é, f não tem pontos periódicos. Para cada par $p, q \in \mathbb{N}$ temos que $F^q(x) > x + p$ ou $F^q(x) < x + p$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolha $p_n \in \mathbb{Z}$ tal que $p_n - 1 < F^n(x) - x < p_n$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dessa forma para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$m(p_n - 1) < F^{mn}(x) - x < mp_n$$

e dividindo por mn, temos

$$\frac{p_n}{n} - \frac{1}{n} < \frac{F^{mn}(x)-x}{mn} < \frac{p_n}{n}$$

Aplicando o mesmo argumento para m, teremos que existe $p_m \in \mathbb{Z}$ tal que para o n considerado, temos:

$$\frac{p_m}{m} - \frac{1}{m} < \frac{F^{mn}(x)-x}{mn} < \frac{p_m}{m}$$

Daí, subtraindo ambas as expressões temos que $|\frac{p_m}{m} - \frac{p_n}{n}| < |\frac{1}{m} + \frac{1}{n}|$, portanto a sequência $\{\frac{p_n}{n}\}$ é de Cauchy. Pela forma como construímos p_n, segue que $\frac{F^n(x)-x}{n}$ converge se $n \to \infty$. □

Observe que o número de rotação $\rho(f) \in S^1$, mas, por abuso de notação, como $S^1 = \mathbb{R} \pmod 1$, escreveremos $\rho(f) = x$ para algum $x \in [0,1]$.

Proposição 2.20. *O número de rotação depende continuamente de f na topologia C^0.*

Demonstração. Seja f um homeomorfismo do círculo que preserva orientação. Escolha $p, q, p', q' \in \mathbb{N}$ tais que $q > p, q' > p'$ e $\frac{p}{q} < \rho(f) < \frac{p'}{q'}$. Seja F um levantamento de f tal que $p < F^q(x) - x < p + q$, para algum $x \in \mathbb{R}$. Então $p < F^q(x) - x < p + q$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Suponha, por absurdo, que não. Então caso exista $y \in \mathbb{R}$ tal que $F^q(y) - y < p$, teríamos que

$$\frac{F^q(y) - y}{q} < \frac{p}{q} < \frac{F^q(x) - x}{q}$$

o que implica que $\rho(f) = 0$ se $q \to \infty$, um absurdo, pois tomamos $\rho(f) > \frac{p}{q} > 0$.

Por outro lado, se $F^q(y) - y > p + q$, então

$$\frac{F^q(x) - x}{q} < \frac{p}{q} + 1 < \frac{F^q(y) - y}{q}$$

o que implica que $\rho(f) = 1 \pmod 1 = 0 \pmod 1$, se $q \to \infty$, novamente um absurdo.

Note agora que podemos definir $d(f, g) = \sup_{x \in S^1} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f \circ \pi(x) - g \circ \pi(x)|$ para toda f e g homeomorfismos do círculo. Suponha que para algum $\epsilon > 0$, vale que $d(f, g) < \epsilon$, então para G e F levantamentos de g e f, temos que

$$|f \circ \pi(x) - g \circ \pi(x)| = |\pi \circ F(x) - \pi \circ G(x)| = |\pi'(x)||F(x) - G(x)| = \frac{1}{2\pi}|F(x) - G(x)|$$

O que implica que podemos escolher g suficientemente próximo de f tal que a desigualdade $p < G^q(x) - x < p + q$ é válida, e temos que $\frac{p}{q} < \rho(g)$. Podemos aplicar o mesmo argumento, mas utilizando p' e q', de onde obteríamos que $\rho(g) < \frac{p'}{q'}$, e segue o resultado.

□

Proposição 2.21. *O número de rotação é um invariante sobre conjugações topológicas.*

Demonstração. Sejam f e h homeomorfismos do círculo que preservam orientação. Sejam F e H os levantamentos de f e h, respectivamente. Então $H \circ F \circ H^{-1}$ é um levantamento de $h \circ f \circ g^{-1}$, então para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{(HFH^{-1})^n(x) - x}{n} = \frac{(HF^nH^{-1})(x) - x}{n} = \frac{H(F^nH^{-1}(x)) - F^nH^{-1}(x)}{n}$$

$$= \frac{H(F^nH^{-1}(x)) - F^nH^{-1}(x)}{n} + \frac{F^nH^{-1}(x) - H^{-1}(x)}{n} + \frac{H^{-1}(x) - x}{n}$$

Note que o primeiro termo da expressão acima tende a 0, pois $H(x) = x + \phi(x)$, onde $\phi(x) < C$, para algum $C > 0$. O terceiro termo da expressão também tende a 0 se $n \to \infty$, e temos que

$$\rho(hfh^{-1}) = \frac{(HFH^{-1})^n(x) - x}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n H^{-1}(x) - H^{-1}(x)}{n} = \rho(f)$$

□

Proposição 2.22. *Se $f : S^1 \longrightarrow S^1$ é um homeomorfismo, então $\rho(f)$ é racional se, e somente se, f possui um ponto periódico. Além disso, se $\rho(f) = \frac{p}{q}$, onde p e q são inteiros não nulos e primos entre si, então todo ponto periódico de f tem período minimal q.*

Demonstração. Já fizemos o caso em que f possuir pontos periódicos implicar que $\rho(f)$ é racional. Suponha que $\rho(f) = \frac{p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{N}$. Se F e $\bar{F} = F + l$ são dois levantamentos de f, onde $l \in \mathbb{Z}$, então $\bar{F}^q = F^q + lq$. Dessa forma, podemos escolher F o único levantamento tal que $p \leq F^q(0) < p+q$. Para mostrar a existência de um ponto periódico de f, é suficiente provar que existe $x \in [0,1]$ tal que $F^q(x) = x+k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Se para algum $x \in [0,1]$, $F^q(x) < x + p$, então por continuidade temos que existe $y \in [0,1]$ tal que $F^q(y) = y + p$. Da mesma forma, se existe x tal que $F^q(x) > x + p + q$, então teríamos que $F^q(x) = x + p + q$. Vamos supor então que $x + p < F^q(x) < x + p + q$ para todo $x \in [0,1]$

Escolha $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in [0,1]$, $x + p + \epsilon < F^q(x) < x + p + q - \epsilon$. A mesma desigualdade será válida para todo $x \in \mathbb{R}$, pois como F é um levantamento, $F^q(x+k) = F^q(x) + k$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Daí, temos que:

$$\frac{p+\epsilon}{q} = \frac{(p+\epsilon)}{kq} < \frac{F^{kq}(x) - x}{kq} < \frac{k(p+q-\epsilon}{kq} = \frac{p+q-\epsilon}{q}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, contradizendo o fato que $\rho(f) = \frac{p}{q}$, se tomarmos $k \to \infty$. Concluímos que $F^q(x) = x + p$ ou $F^q(x) = x + p + q$, para algum x, de onde temos que x é periódico de período q.

Agora assuma que $\rho(f) = \frac{p}{q}$, para p e q relativamente primos. Seja $x \in [0,1)$ um ponto periódico de f. Logo existem inteiros p' e q' tais que $F^{q'} = x + p'$. Pela prova do teorema 1.1, $\rho(f) = \frac{p'}{q'}$. Então se $d \in \mathbb{Z}$ é o maior divisor comum de p' e q', como p e q são relativamente primos, segue que $q' = qd$ e $p' = pd$. Afirmamos que $F^q(x) = x + p$, pois, caso contrário, teríamos que $F^q(x) < x + p$ ou $F^q(x) > x + p$. Supondo o primeiro caso, então temos que $F^d q(x) > x + qd$, o que contradiz nossa hipótese de que $F^{q'} = x + p'$. Analogamente provamos o outro caso, e concluímos que x é periódico de período q. □

Teorema 2.23. *Seja $f : S^1 \longrightarrow S^1$ um homeomorfismo do círculo que preserva orientação com número de rotação racional $\rho(f) = \frac{p}{q}$, onde p e q são relativamente primos. Então para todo ponto periódico $x \in S^1$, a ordem de $\{x, f(x), f^2(x), ..., f^{q-1}(x)\}$ é a mesma ordem do conjunto $\{0, \frac{p}{q}, \frac{2p}{q}, ..., (q-1)\frac{p}{q}\}$, que é a órbita de 0 sobre a rotação $R_{\rho(f)}$.*

Demonstração. Seja x um ponto periódico de f, e seja $i \in \{0, .., q-1\}$ o único número tal que $f^i(x)$ é o primeiro ponto à direita de x na órbita de x por f. Então $f^{2i}(x)$ deve ser o primeiro ponto à direita de $f^i(x)$, pois caso $f^l(x) \in (f^i(x), f^{2i}(x))$, então $l > i$ e $f^{l-i}(x) \in (x, f^i(x))$, contradizendo a hipótese de que $f^i(x)$ é o primeiro ponto à direita de x. Dessa forma, os pontos da órbita de x estão ordenados como $x, f^i(x), f^{2i}(x), ..., f^{(q-1)i}(x)$.

Seja $\bar{x}$ um levantamento de x. Note que f^i leva cada intervalo $[f^{ki}(x), f^{(k+1)i}(x)]$ em seu intervalo sucessor e existem q intervalos, pois x é ponto periódico de período q. Logo, existe um levantamento $\bar{F}$ de f^i tal que $\bar{F}^q(\bar{x}) = \bar{x} + 1$, pois como x também é ponto periódico de f^i de período q. Seja F o levantamento de f tal que $F^q(\bar{x}) = \bar{x} + p$. Então F^i é um levantamento de f^i, e temos que $F^i = \bar{F} + k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Portanto temos que:

$$\bar{x} + ip = F^{qi}(\bar{x}) = (\bar{F} + k)^q)(\bar{x}) = \bar{F}^q(\bar{x}) + qk = x + 1 + qk$$

Portanto $ip = 1 + qk$, logo i é o único número entra 0 e q tal que $ip = 1 \pmod{q}$. Como os pontos do conjunto $\{0, \frac{p}{q}, \frac{2p}{q}, ..., (q-1)\frac{p}{q}\}$ são ordenados como $0, \frac{ip}{q}, ..., \frac{(q-1)ip}{q}$, segue o teorema. $\square$

3 O Teorema de Poincaré

Em vista do que estudamos no capítulo anterior, à partir de agora consideraremos um homeomorfismo do círculo $f : S^1 \longrightarrow S^1$ que não contém pontos periódicos, isto é, preserva orientação. Neste capítulo apresentaremos uma outra construção do número de rotação, chamada de número de rotação por frações contínuas, a qual coincide com a apresentação clássica apresentada anteriormente. Antes de enunciar o teorema de Poincaré, será conveniente identificar homeomorfismos do círculo com certas aplicações $g : [a, b] \longrightarrow [a, b]$.

3.1 O conjunto de funções S(J)

Fixemos um homeomorfismo do círculo $f : S^1 \longrightarrow S^1$ sem pontos fixos ou periódicos que preserva orientação. Observe que a aplicação $\pi \mid_{[0,1)}$ é uma bijeção contínua. Vamos provar que $\pi \mid_{[0,1)}: [0, 1) \longrightarrow S^1$ é uma isometria. Lembre-se que já definimos métricas em S^1 e $[0, 1)$ no início do capítulo anterior. Dessa forma, para todo $x, y \in [0, 1)$, temos que se $|x - y| \leq \frac{1}{2}$, então $d(\pi(x), \pi(y)) = |x - y| = \bar{d}(x, y)$. Por outro lado, se $|x - y| > \frac{1}{2}$, então $d(\pi(x), \pi(y)) = 1 - |x - y| = \bar{d}(x, y)$, logo $\pi \mid_{[0,1)}$ é uma isometria. Observe que podemos utilizar os mesmos argumentos para $\pi \mid_{(0,1]}$.

A menos de uma rotação, podemos considerar $\pi_{x_0} : [0, 1) \longrightarrow S^1$, tal que $\pi_{x_0}(0) = x_0$, para todo $x_0 \in S^1$. Essa aplicação ainda é uma isometria, pois como vimos, rotações são isometrias. Note que como π^{-1} ainda é uma isometria, é continua, e temos que $\lim_{t\to x_0^+} \pi_{x_0}^{-1}(t) = 0$. Pelos mesmos argumentos, usando a isometria $\pi_{x_0} : (0, 1] \longrightarrow S^1$ com $\pi_{x_0}(1) = x_0$, temos que $\lim_{t\to(x_0)^-} \pi_{x_0}^{-1}(t) = 1$. Utilizando a restrição $\phi_{x_0} := \pi_{x_0}^{-1} \mid_{S^1-\{x_0\}}$ vamos definir uma aplicação $g : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ da seguinte forma:

$$g(t) = \begin{cases} \phi_{f(x_0)} \circ f \circ \phi_{f(x_0)}^{-1}(t), & \text{se } t \in (0,1) \text{e } t \neq \phi_{f(x_0)}(x_0) \\ 0, & \text{se } t = \phi_{f(x_0)}(x_0) \\ \lim_{t\to 0^+} g(t), & \text{se } t = 0 \\ \lim_{t\to 1^-} g(t), & \text{se } t = 1 \end{cases}$$

O limite $\lim_{t\to 0^+} g(t)$ existe pois a aplicação $\pi_{f(x_0)}^{-1} \circ f \circ \pi_{f(x_0)} \mid_{[0,1)}$ é contínua em 0, além disso, como $[0, 1]$ é fechado, temos $\lim_{x\to 0^+} g(x) \in [0, 1]$. Analogamente, vemos que $\lim_{t\to 1^-} g(t)$ também existe já que $\pi_{f(x_0)} \mid_{(0,1]}$ e $\pi_{f(x_0)}^{-1}$ são contínuas em 1. Em particular, esses limites são iguais. Definiremos $c = c(g) := \phi_{f(x_0)}(x_0)$ diferentemente dos outros pontos, pois $\phi_{f(x_0)} \circ f \circ \phi^{-1}_{f(x_0)}(c(g)) = \phi_{f(x_0)}(f(x_0))$ não está bem definida.

Pela construção que fizemos e usando o fato que $\lim_{t\to f(x_0)^+} \pi^{-1}_{f(x_0)}(t) = 0$ e $\lim_{t\to f(x_0)^-} \pi^{-1}_{f(x_0)}(t) = 1$, segue que os os limites laterais em c irão existir, e $\lim_{t\to c^+} g(t) = 0$ e $\lim_{t\to c^-} g(t) = 1$.

O que fizemos acima foi "abrir" o círculo em um ponto arbitrário $f(x_0)$ e identificá-lo com o intervalo fechado $[0,1]$. Podemos fazer essa mesma construção para qualquer intervalo $J = [a,b]$ da reta. Essa construção motiva a seguinte definição:

Definição 3.1. *Dado um intervalo $J := [a,b]$, defiimos o conjunto de funções $S(J)$ como as funções $g : J \longrightarrow J$ tais que:*

1. *$g(a) = g(b)$.*

2. *Existe um único ponto $c(g) \in (a,b)$ de descontinuidade de g.*

3. *g é estritamente crescente em cada componente conexa de $J - \{c(g)\}$.*

4. *$\lim_{t\to c^+} g(t) = a$ e $\lim_{t\to c^-} g(t) = b$. Em particular, $g(c(g)) = a$ ou $g(c(g)) = b$.*

De maneira similar, dada uma aplicação $g \in S(J)$, podemos associá-la a um homeomorfismo do círculo. Também podemos definir analogamente um conjunto $S'(J)$ aos quais são associados homeomorfismos que invertem orientação.

3.2 Aplicações de primeiro retorno

Definição 3.2. *Seja $f : J \longrightarrow J$ uma função e $I \subset J$ um intervalo fechado tal que para todo $x \in I$ existe um inteiro positivo n tal que $f^n(x) \in I$. Definimos a aplicação de primeiro retorno de f a I como a aplicação:*

$$\Re(f) = f^{n(x)}(x),$$

em que $n(x) = min\{n \in \mathbb{Z}, n > 0; f^n(x) \in I\}$.

Fixemos um ponto $x_0 \in S^1$, um intervalo $J = [a,b]$ e considere um homeomorfismo $f \in S(J)$ tal que f não tem pontos periódicos. Observe que se $c = c(f)$, então o interior de J pode ser dividido nas componentes conexas (a,c) e (c,b). Vamos definir os intervalos J' e J'' da seguinte forma: se $f(a)$ é tal que $f^2(a) \leq c$, ou seja, se o intervalo $f^2(a,c)$ intercepta o intervalo (a,c), então definiremos $J' = (c,b)$ e $J'' = (a,c)$. Caso

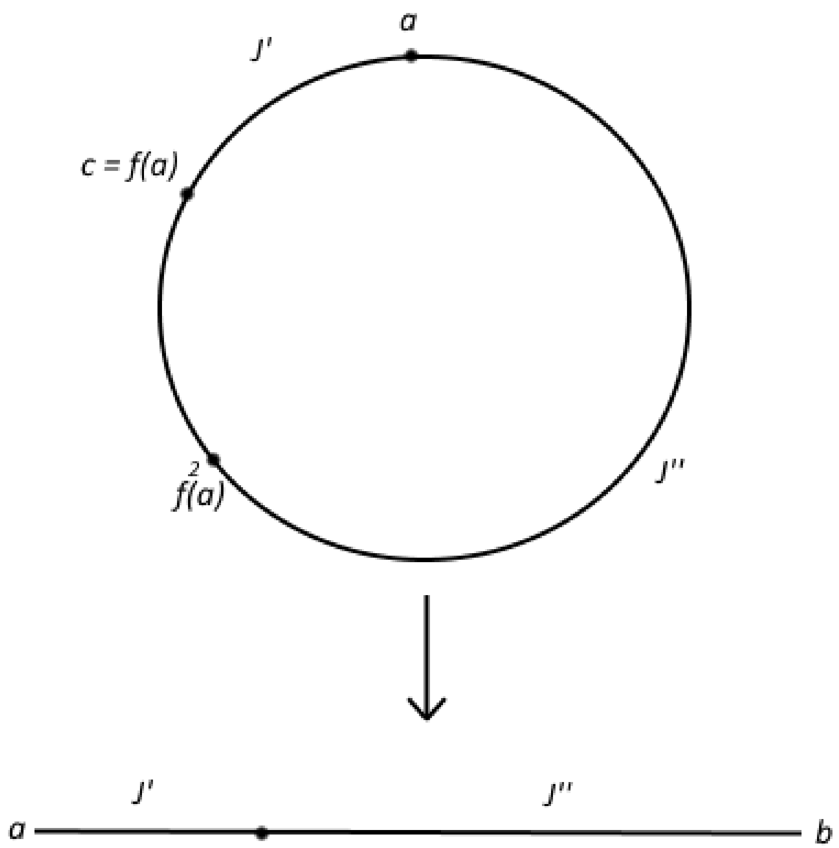

Figura 2: Intuitivamente, estamos "cortando" o círculo no ponto $a = x_0$ e o "esticando" no intervalo $[a, b]$. Note que como $f^2(a)$ não ultrapassou o ponto a, então J' está à esquerca de c e J'' está à direita.

contrário, definiremos $J' = (a, c)$ e $J'' = (c, b)$. Além disso, pela construção que fizemos temos que em ambos os casos:

$$f(J') \subset J''$$
$$f(J'') \supset J'$$

Suponha que $J' = (a, c)$ e $J'' = (c, b)$. Defina $p_0 = f(a) = f(b)$. Como a aplicação $f\mid_{J'}$ é contínua e injetora, sua imagem por f é o intervalo aberto (p_0, b). Como $f\mid_{J''}$ também é contíua e injetora, a imagem de $f((p_0, b))$ por f também será um interalo aberto, que definiremos como $f((p_0, b)) = (p_1, p_0)$, para algum $p_1 \in J$. Assim, indutivamente nos construímos os intervalos $(p_k, p_{k-1}), ..., (p_0, b)$ adjacentes abertos, daí temos que $f^k(J') = (p_{k-1}, p_{k-2})$, para $k \geq 2$.

Proposição 3.3. *Seja um homeomorfismo do círculo $f \in S(J)$ tal que $f : J \longrightarrow J$ tal* *que f não tem pontos periódicos e que J' está à esquerda de J''. Existe um inteiro $a(f)$ tal que $f^{a(f)}(J') \bigcap J' \neq \emptyset$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que este inteiro não existe. Daí, os pontos p_k formam uma sequência estritamente decrescente em J'', que é limitado inferiormente por c, portanto a sequência é convergente. Defina $p = \lim_{j\to\infty} p_j$. Logo:

$$f(p) = f(\lim_{j\to\infty} p_j) = f(\lim_{j\to\infty} f^j(p_0)) = \lim_{j\to\infty} f^{j+1}(p_0) = \lim_{j\to\infty} p_{j+1} = p$$

que é um absurdo, pois f não possui pontos periódicos, em particular, não possui pontos fixos. $\square$

Podemos utilizar argumentos similares para o caso $J' = (c, b)$ e $J'' = (a, c)$. Vamos definir $J(f)$ como fecho de $f^{a(f)+1}(J') \bigcup J'$, que será um intervalo fechado.A próxima proposição nos dará exatamente qual a aplicação de primeiro retorno do homeomorfismo f a $J(f)$.

Proposição 3.4. *Sejam $f \in S(J)$ sem pontos periódicos, $c = c(f)$ e J', J'' as componentes conexas de $J - \{c\}$ tais que $f(J') \subset J''$ e $f(J'') \supset J'$. Seja $a(f)$ o menor inteiro positivo tal que $J' \bigcap f^{a(f)+1}(J') \neq \emptyset$. Seja $J(f)$ o fecho de $f^{a(f)+1}(J') \bigcup J'$. Então:*

1. *$a(f)$ é o menor inteiro positivo tal que o fecho de $J' \bigcup f(J') \bigcup ... \bigcup f^{a(f)+1}(J')$ cobre J.*

2. *Se $f^{a(f)}(J')$ contém c em seu fecho, então $f^{a(f)+1}(J') = J' = J(f)$, $f^{a(f)+1}(c) = c$ e $f^{a(f)+1}(a) = a$. A aplicação de primeiro retorno de f em $J(f)$ é $R(f) = f^{a(f)+1}$, a qual possui dois pontos fixos nos extremos de $J(f)$*

3. *Caso $f^{a(f)}(J')$ não contém c em seu fecho, então $J(f)$ contém estritamente J', e a aplicação de primeiro retorno de f a $J(f)$ é dada por:*

$$R(f) = f^{a(f)} \mid_{J''} \circ f \mid_{J'}$$

4. *$R(f) \in S(J(f))$*

Demonstração. Se c está no fecho de $f^{a(f)}(J')$, então $c = p_{a(f)-1}$, portanto $f^{a(f)+1}(J') = f((c, p_{a(f)})) = (a, c) = J'$. Dessa forma, temos que a aplicação de primeiro retorno de f a $J(f) = [a, b]$ é dada por $f^{a(f)+1}$. Além disso, pelo que vismo, a e c são pontos fixos dessa aplicação.

Se c não está no fecho de $f^{a(f)}(J')$, então c pertence ao interior de $f^{a(f)+1}(J')$, e $J(f) = [a, p_{a(f)+a}]$. Observe que $J(f) \bigcap J'' = (c, p_{a(f)-1}]$ e $f((c, p_{a(f)-1})) = (a, p_{a(f)}) \subset J(f)$. Logo a restrição de $R(f)$ ao subconjunto $J(f) \bigcap J''$ é dado pela própria f. Por outro lado, note que $f^{a(f)+1}([a, c)) \subset J(f)$, e que $f^i([a, c)) \bigcap J(f) = \emptyset$, para $i < a(f) + 1$, portanto a restrição de $R(f)$ ao subconjunto $[a, c)$ é a função $f^{a(f)+1}$.

Dessa forma, $R(f)$ está definida em $J(f) = [a, p_{a(f)-1}]$ e temos que:

$$R(f)(a) = f^{a(f)+1}(a) = f^{a(f)}(p_0) = p_{a(f)} = f(p_{a(f)-1}) = R(f)(p_{a(f)-1})$$

Além disso, c é o único ponto de descontinuidade de $R(f)$, e c está no interior de $J(f)$. Por ser composição de aplicações crescentes em cada componente conexa, temo que $R(f)$ é monótona crescente em cada componente conexa de $J(f) - \{c\}$. Finalmente, temos que:

$$\lim_{x \to c^+} R(f)(x) = a$$

$$\lim_{x \to c^-} R(f)(x) = p_{a(f)-1}$$

E concluímos que $R(f) \in S(J(f))$. $\square$

Observe que podemos fazer uma construção análoga se considerarmos J' à direita de J''.

Definição 3.5. *Seja $f \in S(J)$. Definiremos $J_0 = J$, $\phi_0 : J_0 \longrightarrow J_0$, $\phi_0 = f$ e $a_1 = \infty$, se f possui pontos fixos. Caso contrário, temos os seguintes casos:*

Se J' está à esquerda de J'', definimos $a_1 = 1$, $J_1 = J$ e $\phi_1 = f$.

Se J' está à direita de J'', definimos $a_1 = a(f) + 1$, $J_1 = J(\phi_0) = (f)$ e $\phi_1 = R(\phi_0) = R(f)$.

Vamos supor agora que $J_1, J_2, ..., J_{n-1}$ e $\phi_1, ..., \phi_{n-1}$ estejam definidas indutivamente, e $\phi_{n-1} : J_{n-1} \longrightarrow J_{n-1}$ não tem pontos fixos. Definiremos J_n, a aplicação de primeiro retorno ϕ_n e a_n da seguinte forma: $J_n = J(\phi_{n-1})$, $\phi_n = R(\phi_{n-1}) : J_n \longrightarrow J_n$ e $a_n = a(\phi_{n-1})$. Se ϕ_{n-1} possui pontos fixos, definiremos $a_n = \infty$ e interrompemos o processo. Por outro lado, se ϕ_n não tem pontos fixos para todo $n \in \mathbb{N}$, este processo nunca terminará.

Se $J \supset J_1 \supset J_2$ e $r_1 : J_1 \longrightarrow J_1$ é a aplicação de primeiro retorno de f a J_1, e $r_2 : J_2 \longrightarrow J_2$ é a aplicação de primeiro retorno de r_1 para I_2, então r_2 também é aplicação de primeiro retorno de f a I_2, pois $I_1 \supset I_2$. Aplicando o argumento anterior, podemos concluir que para todo $n \in \mathbb{N}$ na construção anterior, temos que se ϕ_n é a aplicação de primeiro retorno de ϕ_{n-1} a J_n, então também o é para f.

Observe agora que se J' está à direita de J'', então pela nossa construção temos que $\phi_1 = R(f)$ e $J_1 = J(f)$, e pela proposição anterior, $\phi_1(J_1 \bigcap J'') = R(f)(J_1 \bigcap J'') \subset J'$, ou seja, o interior da componente conexa esquerda de $J_1 - \{c\}$ é levado na componente direita. De maneira similar, se J' está à esquerda de J'', então $\phi_1 = f$ e $J_1 = J$. Daí $\phi_1(J') = f(J') \subset J''$. Portanto, em ambos os casos temos que o interior da componente conexa esquerda de $J_1 - \{c\}$ é levado na componente direita por ϕ_1.

Vamos denotar J'_n pelo interior da componente conexa esquerda de $J_n - \{c\}$, se n é impar, ou da componente direita, se n é par. Denotaremos por J''_n como o interior da outra componente conexa. Observe que:

$$J'_n = J''_{n-1} \bigcap J_n$$
$$J''_n = J'_{n-1} \bigcap J_n = J'_{n-1}$$

Ou seja, a ordem de J'_n e J''_n é alterada a cada passo do processo que construímos. Utilizando a proposição anterior novamente, temos que ϕ_n leva J'_n em J''_n para todo n tal que ϕ_n está definida. Novamente pela proposição:

$$\phi_n \mid_{J''_n} = R(\phi_{n-1}) \mid_{J'_{n-1}} = \phi_{n-1}^{a(\phi_{n-1})} \mid_{f''_{n-1}} \circ \phi_{n-1} \mid_{J'_{n-1}}$$
$$\phi_n \mid_{J'_n} = R(\phi_{n-1})$$

Proposição 3.6. *Sejam $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$ e $q_{n+1} = q_{n-1} + a_{n+1}q_n$, para $n \geq 1$, tal que $a_n = a(\phi_{n-1})$. Então:*

$$\phi_n \mid_{J'_n} = f^{q_n - 1}$$
$$\phi_n \mid_{J''_n} = f^{q_n}$$

Demonstração. Consideraremos dois casos possíveis: suponha que J' está à direita de J''. Para n=1, temos que $a_1 = a(f) + 1$, $J_1 = J(f)$, $\phi_1 = R(f)$, $J'_1 = J'' \bigcap J(f)$ e $J''_1 = J'$, portanto temos que:

$$\phi_1 \mid_{J'_1} = R(f) \mid_{J'' \bigcap J(f)} = f \mid_{J''} = f = f^{q_0}$$
$$\phi_1 \mid_{J''_1} = R(f) \mid_{J'} = f^{a(f)} \mid_{J''} \circ f \mid_{J'} = f^{a(f)+1} = f^{a_1} = f^{q_1}$$

Suponha agora que J' está à esquerda de J'', então $a_1 = 1$, $J_1 = J$ e $\phi_1 = f$, portanto temos que:

$$\phi_1 \mid_{J_1'} = f = f^{q_0}$$
$$\phi_1 \mid_{J_1''} = f = f^{a_1} = f^{q_1}$$

Concluímos que o resultado vale para $n = 1$. Vamos supor agora que o resultado vale para $n = k$, daí, para $n = k + 1$, temos que:

$$\phi_{k+1} \mid_{J''_{k+1}} = R(\phi_k) \mid_{J_k'} = (\phi_k \mid_{J_k''})^{a(\phi_k)} \circ \phi_k \mid_{J_k'} = (f^{q_k})^{a(\phi_k)} \circ f^{q_{k-1}} = f^{(q_{k-1}+a(\phi_k)q_k)} = f^{q_{k+1}}$$
$$\phi_{k_1} \mid_{J'_{k+1}} = \phi_k \mid_{J_k''} = f^{q_k}$$

e o resultado segue por indução. □

Proposição 3.7. *Para $n \geq 2$, temos que:*

1. *Se n é par, então $J_n = [f^{q_n}(c), f^{q_{n-1}}(c)]$, $J_n' = (f^{q_n}(c), c)$ e $J_n'' = (c, f^{q_{n-1}}(c))$.*

2. *Se n é ímpar, então $J_n = [f^{q_{n-1}}(c), f^{q_n}(c)]$, $J_n' = (c, f^{q_n}(c))$ e $J_n'' = (f^{q_{n-1}}(c), c)$.*

Demonstração. Provaremos apenas para o caso n ímpar, pois o outro caso será análogo. Como temos que $\phi_n \in S(S_n)$, observe que os extremos do intervalo J_n coincidem com os limites $\lim_{x\to c^+} \phi_n(x)$ e $\lim_{x\to c^-} \phi_n(x)$, pela definição de $S(J_n)$. Utilizando a proposição anterior, segue que $\phi_n \mid_{J_n'} = f^{q_{n-1}}$ e $\phi_n \mid_{J_n''} = f^{q_n}$ e, como J_n' está à esquerda de J_n'', obtemos que:

$$\lim_{x\to c^+} \phi_n(x) = \lim_{x\to c^+} f^{q_n}(x)$$
$$\lim_{x\to c^-} \phi_n(x) = \lim_{x\to c^-} f^{q_{n-1}}(x)$$

Observe que f^{q_n} e $f^{q_{n-1}}$ são contínuas em c. Com efeito, caso contrário, como c é o único ponto de descontinuidade de f, então teríamos que $f^{q_{n-1}}(c) = c$, e o limite $\lim_{x\to c^+} f^{q_n}(x)$ coincidiria com um dos extremos de J, um absurdo, pois para $n \geq 2$ os extremos de J_n são distintos dos extremos de J. Portanto f^{q_n} é contínua em c. Analogamente vemos que $f^{q_{n-1}}$ é contínua em c, daí:

$$\lim_{x\to c^+} \phi_n(x) = \lim_{x\to c^+} f^{q_n}(x) = f^{q_n}(c)$$
$$\lim_{x\to c^-} \phi_n(x) = \lim_{x\to c^-} f^{q_{n-1}}(x) = f^{q_n}(c)$$

Logo, $J_n = [f^{q_n}(c), f^{q_{n-1}}(c)]$. Como J_n' está à esquerda de J_n'', então temos que $J_n' = (f^{q_n}(c), c)$ e $J_n'' = (c, f^{q_{n-1}}(c))$, o que conclui a demonstração. □

Proposição 3.8. *A união dos conjuntos* $\bigcup\limits_{i=0}^{q_{n-1}-1} f^i(J'_n)$ *e* $\bigcup\limits_{i=0}^{q_{n-1}} f^i(J''_n)$ *é formada por intervalos dois a dois disjuntos. Além disso, o fecho desta união é igual a* J.

Demonstração. Por construção, já sabemos que os intervalos $J'_{n+1} = J''_n \bigcap f(\phi_n)$, $\phi_n(J'_n)$,...,$\phi_n^{a(\phi_n)}(J'_n)$ são dois a dois disjuntos, adjacentes e seu fecho é justamente o intervalo J''_n, a menos dos pontos extremos.

Por indução, temos que se J' está à esquerda de J'', então $a_1 = q_1 = 1$, $J_1 = J$,$J'_1 = J'$ e $J''_1 = J''$. Portanto, para $n = 1$ os dois termos da união são dados por:

$$\bigcup_{i=0}^{1-1} f^i(J'_1) = f^0(J') = J'$$
$$\bigcup_{i=0}^{1-1} f^i(J''_1) = f^0(J'') = J''$$

e concluímos que a união é $J' \bigcup J'' = J$, como queríamos.

Se J' está à direita de J'', temos que $a_1 = q_1 = a(f) + 1$, $J_1 = J(f)$, $J'_1 = (f^{(a(f)+1)}(c), c)$ e $J''_1 = J'$. Logo a união será dada por $J'_1 \bigcup \bigcup\limits_{i=0}^{a(f)} f^i(J')$, e o resultado segue como queríamos.

Provamos para o caso $n = 1$, agora suponha que o resultado é verdadeiro para n, logo vale para a união:

$$\bigcup_{i=0}^{q_{n-1}-1} f^i(J'_n) \cup \bigcup_{i=0}^{q_n-1} f^i(J''_n) \tag{1}$$

Lembrando que $J'_n = J''_{n+1}$, e observe que:

$$J''_n \subset J'_{n+1} \bigcup \bigcup_{i=1}^{a(\phi_n)} \phi_n^i(J'_n) = J'_{n+1} \bigcup \bigcup_{i=0}^{a_{n+1}-1} f^{iq_n+q_{n-1}}(J'_n)$$

além disso, J''_n difere da união da direita apenas em seus pontos extremos dos intervalos $\phi_n^i(J'_n)$. Portanto, o fecho de (1) é o mesmo fecho de:

$$\bigcup_{i=0}^{q_{n-1}-1} f^i(J'_n) \bigcup \bigcup_{i=0}^{q_{n-1}} f^i(J'_{n+1} \bigcup \bigcup_{j=0}^{q_{n+1}-1} (J'_n)) \tag{2}$$

Tome então:

$$\bigcup_{i=0}^{q_{n-1}} f^i(J'_{n+1} \bigcup \bigcup_{j=0}^{a_{n+1}-1} f^{jq_n+q_{n-1}}(J'_n)) = \bigcup_{i=0}^{q_{n-1}} f^i(J'_{n+1}) \bigcup \bigcup_{i=0}^{q_{n-1}} f^i(\bigcup_{j=0}^{q_{n+1}-1} f^{jq_n+q_{n-1}}(J'_n))$$

Daí, façamos:

$$\bigcup_{i=0}^{q_n-1} f^i(\bigcup_{j=0}^{q_{n+1}-1} f^{jq_n+q_{n-1}}(J'_n)) = \bigcup_{i=0}^{q_n-1} f^i(f^{q_{n-1}}(J'_n))\bigcup f^{q_n+q_{n-1}}(J'_n)\bigcup f^{2q_n+q_{n-1}}(J'_n)\bigcup ...$$

$$...\bigcup f^{(a_{n+1}-1)q_n+q_{n-1}}(f'_n)) = \bigcup_{i=0}^{q_n-1} f^{i+q_{n-1}}(J'_n)\bigcup \bigcup_{i=0}^{q_{n-1}} f^{i+q_n+q_{n-1}}(J'_n)\bigcup ... \bigcup_{i=0}^{q_{n-1}} f^{i+(a_{n+1}-1)q_n+q_{n-1}}(J'_n)$$

$$= \bigcup_{i=q_{n-1}}^{a_{n+1}q_n+q_{n-1}-1} f^i(J'_n) = \bigcup_{i=q_{n-1}}^{q_{n+1}-1} f^i(J'_n)$$

logo (2) pode ser escrito como:

$$\bigcup_{i=0}^{q_{n-1}-1} f^i(J''_{n+1})\bigcup \bigcup_{i=0}^{q_n-1} f^(J'_{n+1})\bigcup \bigcup_{i=q_{n-1}}^{q_{n+1}-1} f^i(J'_n) = \bigcup_{i=0}^{q_{n+1}-1} f^i(J''_{n+1})\bigcup \bigcup_{i=0}^{q_{n-1}} f^i(J'_{n+1})$$

o que conclui a demonstração. $\square$

3.3 Dinâmica simbólica

Vamos definir o conjunto $\Sigma = \{E, c, D\}^N$ como sendo o conjunto de sequências de símbolos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_0, x_1, ...)$ tal que $x_j \in \{E, c, D\}, \forall j \in \mathbb{N}$. Vamos associar uma sequência dessa forma a cada função $f \in S(J)$ e $x \in J$.

Definição 3.9. *Definimos o itinerário de $x \in J$ com respeito a $f \in S(J)$ como a sequência $(i_f(x)) = (i_0(x), i_1(x), ...)$, em que:*

$$i_j(x) = \begin{cases} E, & se\ f^j(x) < c(f) \\ c, & se\ f^j(x) = c(f) \\ D, & se\ f^j(x) > c(f) \end{cases}$$

Construiremos uma ordem no conjunto Σ da seguinte forma:

Definição 3.10. *Sejam $(x_n), (y_n) \in \Sigma$. Diremos que $(x_n) \prec (y_n)$ se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_j = y_j$ para $j < k$ e $x_k < y_k$. No conjunto $\{(E, c, D)\}$, consideraremos a ordem $E < c < D$.*

Veremos agora alguns resultados relacionados à dinâmica simbólica que construímos.

Lema 3.11. *Sejam $f \in S(J)$ e $x, y \in J$, então:*

1. $x < y \Longrightarrow (i_f(x)) \preceq (i_f(y))$

2. $(i_f(x)) \prec (i_f(y)) \Longrightarrow x < y$

3. $(i_f(f^j(x))) = \sigma^j((i_f(x))), \forall j \in \mathbb{Z}, j \geq 0,$ *em que* $\sigma((x_0, x_1, ...)) = (x_1, x_2, ...)$

Demonstração. Para o item 1, suponha por absurdo que $(i_f(x)) \neq (i_f(y))$. Portanto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $i_j(x) = i_j(y)$, com $j = 0, 1, ..., k-1$, mas $i_k(x) \neq i_k(y)$. Note que que, em particular, temos que $f^j(x)$ e $f^j(y)$ estão na mesma componente conexa de $J - \{c(f)\}$, e sabemos que f é monótona crescente nesta componente conexa, pois $f\ inS(J)$. Daí, temos que f^k também é monótona crescente, logo $f^k(x) < f^k(y)$, de onde segue que $i_k(x) < i_k(y)$, e temos que $(i_f(x)) \prec (i_f(y))$.

Agora iremos provar o item 2. Observe que como $(i_f(x)) \prec (i_f(y))$, então por definição existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $i_j(x) = i_j(y)$ para $j = 0, 1, ..., k-1$ e $i_k(x) < i_k(y)$. Portanto, $f^k(x) < f^k(y)$, e $f^{k-1}(y)$ e $f^{k-1}(x)$ estão na mesma componente conexa de $J - \{c(f)\}$. Utilizando novamente que f^k é monótona crescente nestas componentes conexas, então $f^{k-1}(x) < f^{k-1}(y)$. Segue que $x < y$ pelo mesmo argumento que utilizamos antes.

Para o item 3, observe que $i_k(f^j(x)) = i_{k+j})(x)$, daí, temos que:

$$(i_f(f^j(x))) = (i_0(f^j(x)), i_1(f^j(x)), ...) = (i_j(x), i_{1+j}(x), ...) = \sigma^j(i_0(x), i_1(x), ...) = \sigma^j((i_f(x)))$$

o que conclui a demonstração. □

Definição 3.12. *Sejam* $y_1, ..., y_m \in \{E, c, D\}$ *e* $x_n \in \Sigma$. *Definimos:*

$$(y_1, ..., y_m) \cdot (x_n) = (y_1, ..., y_m, x_0, x_1, ...)$$

Além disso, denotaremos $(x_0, ..., x_{m-1})$ *por* $(x_n)_m$. *Defina também*

$$(x_n)_m^1 = (x_n)_m,$$
$$(x_n)_m^k = (x_n)_m \cdot (x_n)_m^{k-1}, \text{ se } k \geq 2$$

Definição 3.13. *Sejam* $J = [a, b]$, $f \in S(J)$ *e* $c = c(f)$. *Definimos:*

$$k^+(f) := (D, E) \cdot (i_f(f^2(c)))$$
$$k^-(f) := (E, D) \cdot (i_f(f^2(f)))$$

Lema 3.14. *Seja* $f \in S(J)$ *um homeomorfismo do círculo sem pontos periódicos. Então para* $n \geq 1$, *temos que:*

$$k^+(f)_{q_{2n+2}} = k^+(f)_{q_{2n}} \cdot (k^+(f)_{q_{2n+1}})^{a_{2n+2}} \qquad k^+(f)_{q_{2n+1}} = k^+(f)_{q_{2n-1}} \cdot (k^-(f)_{q_{2n}}^{a_{2n+1}}$$

Demonstração. Na primeira igualdade, é suficiente mostrar que:

$$i_f(f_{q_{2n+1}}^{q_{2n}+iq_{2n+1}(c)}) = k^+(f)_{q_{2n+1}}$$

para todo $i \in \{0, ..., a_{2n+1}-1\}$. Lembre-se que já provamos na proposição 3.7 que $J'_{2n+1} = (f^{q_{2n+1}}(c), c)$ e $J''_{2n+1} = (c, f^{q_{2n}}(c))$. Além disso, pela proposição 3.8, temos que a união:

$$\left(\bigcup_{i=0}^{q_{2n}-1} f^i((f^{q_{2n+1}}(c), c))\right) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{q_{2n+1}-1} f^i((c, f^{q_{2n}}(c)))\right)$$

é densa em J e é formada por intervalos dois a dois disjuntos. Em particular, temos que o intervalo $(f^{q_{2n+1}}(c), c) \cup (c, f^{q_{2n}}(c)) \cup \{c\} = (f^{q_{2n+1}}(c), f^{q_{2n}}(c))$ é disjunto com o intervalo $f^i(c, f^{q_{2n}}(c), c)$, $\forall i = 1, ..., q_{2n_1} - 1$. Como $f^{q_{2n}}(c) > c$, segue que se $x \in (c, f^{q_{2n}}(c), c)$, então $i_0(x) = D$ e $i_1(x) = f(x) = E$, logo $(i_f(x))_{q_{2n+1}} = k^+(f)_{q_{2n+1}}$. Agora, como $\phi^i_{2n+1}(J'_{2n_1} \subset J''_{2n+1}$, para todo $i = 1, ..., q_{2n+2}$, $\phi_{2n+1} \mid'_{J)2n+1} = f^{q_{2n}}$, $\phi_{2n+1} \mid_{J''_{2n+1}} = f^{q_{2n}+1}$, então $f^{q_{2n}+iq_{2n+1}}(c) \in (c, f^{q_{2n}}(c)]$, para todo $i = 1, ..., q_{2n+2}$, de onde segue a igualdade como queríamos. A demonstração da segunda igualdade é análoga. □

Observe que na igualdade do lema anterior, se trocarmos o segundo símbolo do lado direito da igualdade de D por E, o resultado ainda é válido se $n = 0$. Com efeito, vamos tomar os 2 casos possíveis: se J' está à esquerda de J'', então $a_1 = 1$ e $a_2 = a(f)$, logo $q_0 = 1$, $q_1 = 1$ e $q_2 = a(f) + 1$. Daí, temos que $k^+(f)_{q_0} = k^+(f)_{q_1} = D$, e $k^+(f)_{q_2} = (D, E) \cdot D^{q_2-2} = k^+(f)_{q_0} \cdot (k^+(f)_{q_1})^{a_2} = D \cdot D^{q_2}$, a menos do segundo símbolo.

Vamos supor agora que J' está à direita de J''. Daí, como vimos anteriormente, sabemos que $a_1 = a(f) + 1$ e $a_2 = a(R(f))$. Portanto:

$$k^+_{q_1}(f) = (D, E) \cdot E^{a_1-2} = D \cdot E^{q_1-1} = D \cdot E^{q_1-1}$$

Além disso, note que como $k^+_{q_0}(f) = D, K^+_{q_1}(f) = D \cdot E^{q_1-1}$ e $k^+_{q_2}(f) = (D, E) \cdot i_f(f^2(c))_{q_2-2}$, então as expressões coincidem até o termo q_1, a menos do segundo símbolo. Supondo que $J = [a, b]$, então temos que $J_1 = [f^{q_1}(c), b]$, $J'_1 - (f^{q_1}(c), c)$ e $J''_1 = (c, b)$. Como vimos na seção anterior, sabemos que $\phi_1 \mid_{J'_1} = f$ e $\phi_1 \mid_{J''_1} = f^{q_1}$. Também temos que $\phi^i(J'_1) \subset J''_1$, $\forall i = 1, ..., a_2$, portanto $f^{iq_1+1}(c) \in J'_1$, $\forall i = 1, ..., a_2$. Como $i_f(f^2(c))_{q_{i-1}} = i_f(f^2(x))_{q_1-1}$, para todo $x \in [c, b)$, segue que $i_f(f^{q_0+iq_1}(c))_{q_1} = k^+(f)_{q_1}$, para todo $i = 1, ..., a_2 - 1$. Portanto, temos que a menos do segundo símbolo, vale que:

$$k^+(f)_{q_2} = k^+(f)_{q_0} \cdot (k^+(f)_{q_1})^{a_2}$$

o que conclui a demonstração desta observação.

Proposição 3.15. *Se $f, g \in S(J)$ não possuem pontos periódicos e $a_i(f) = a_i(g)$, para todo $i \geq 1$, então $k^+(f) = k^+(g)$.*

Demonstração. Note que como por hipótese $a_i(f) = a_i(g)$, então temos que $q_n(f) = q_n(g)$, para todo $n \geq 0$. Em particular, como $a_1(f) = a_1(g)$, então $J'(f) = J'(g)$ estão na mesma posição relativa a $J''(f)$ e $J''(g)$. Vamos supor que J' está à direita de J''. O outro caso será análogo. Daí, temos que $a_1 = 1$, $a_2 = a(f) = a(g)$ e, dessa forma, $q_0 = 1$, $q_1 = 1$ e $q_2 = a(f) + 1 = a(g) + 1$. Daí, segue que:

$$k^+(f)_{q_0} = k^+(f)_{q_1} = D = k^+(g)_{q_0} = k^+(g)_{q_1}$$

e, pela observação que fizemos acima, $k^+(f)_{q_2} = k^+(g)_{q_2}$, e temos que $k^-(f)_{q_2} = k^-(g)_{q_2}$, e pelo lema anterior, temos que:

$$k^+(f)_{q_{2n+1}} = k^+(f)_{q_{2n-1}} \cdot (k^-(f)_{q_{2n}})^{a_{2n+1}(f)}, \text{se } n = 1, \text{ e}$$
$$k^+(f)_{q_3} - k^+(f)_{q_1} \cdot (k^-(f)_{q_2})^{a_3(f)} = k^+(g)_{q_1} \cdot (k^+(g)_{q_2})^{a_3(g)} = k^+(g)_{q_{2n+1}}$$

e aplicando o mesmo argumento para um n qualquer, concluímos que:

$$k^+(f)_{q_n} = k^+(g)_{q_n}$$

para todo $n \geq 0$, logo $k^+(f) = k^+(g)$. $\square$

3.4 Número de rotação por frações contínuas

Nesta seção iremos apresentar outra construção do número de rotação. Também provaremos que esta construção é equivalente com a que fizemos anteriormente. Seja $\alpha \in [0, 1)$ e $R_\alpha \in S(J)$, tomando $J = [0, 1]$. Defina:

$$\theta_0 = \alpha, \text{ e}$$
$$\theta_n = |J'_n|$$

em que $|J'_n|$ representa o comprimento de J'_n.

Proposição 3.16. *Nas condições acima, vale que para todo $n \geq 1$:*

$$\theta_n q_{n-1} + \theta_{n-1} q_n = 1$$

Demonstração. Suponha que $a \in (0, 1/2)$. Daí, temos que $J' = (c, 1)$ e $J'' = (0, c)$, em que $c = c(R_\alpha) = 1-\alpha$. Além disso, $a_1 = a(R_\alpha)+1$ e $J_1 = J(R_\alpha)$. Dessa forma, temos que $\alpha(a(R_\alpha + 1) + \theta_1 = a_1\theta_0 + \theta_1 = 1$, como queríamos. Agora iremos supor que $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$. Daí, temos que $J' = (0, c)$ e $J'' = (c, 1)$, logo $a_1 = 1$, $J_1 = J$ e $|J_1'| = |J'| = 1-\alpha$, portanto $\theta_0 + \theta_1 = a_1\theta_0 + \theta_1 = 1$. Para $n > 1$, por construção temos que:

$$J'_{n+1} = J''_n - \{\phi_n(J'_n) \cup ... \cup \phi_n^{a_{n+1}}(J'_n)\}, \text{ e}$$
$$J'_{n-1} = J'_n$$

então temos que $\theta_{n+1} = \theta_{n-1} - a_{n+1}\theta_n$. Já vimos também que o fecho da união:

$$\bigcup_{i=0}^{q_{n-1}-1} R^i(J'_n) \cup \bigcup_{i=0}^{q_{n-1}} R^i(J''_n)$$

é igual a $[0, 1]$. Além disso, os intervalos das uniões acima são dois a dois disjuntos a menos do bordo. Os intervalos da primeira união possuem comprimento θ_n, enquanto os da segunda θ_{n-1}, então segue que para $n \geq 1$, vale:

$$\theta_n q_{n-1} + \theta_{n-1} q_n = 1$$

o que conclui a demonstração. □

Definição 3.17. *Seja $\alpha \in [0, 1]$. Definiremos os números $p_n = p_n(\alpha)$ como:*

$$p_0 = 0$$
$$p_1 = 1$$
$$p_n = \lfloor \alpha q_n \rfloor, \ \textit{se } n \geq 1$$

em que a $\lfloor . \rfloor$ é a função máximo inteiro, definida como:

$$\lfloor x \rfloor = max\{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\}$$

Iremos agora provar algumas proposições que relacionam as sequências p_n e q_n que nos ajudarão a definir o número de rotação.

Proposição 3.18. *Para todo $n \geq 1$, vale que:*

$$(-1)^n\theta_n = \alpha q_n - p_n$$

Demonstração. Observe que se n é ímpar, então o intervalo $J'_n = (R_\alpha^{q_n}(c), c)$. Portanto:

$$\theta_n = c - R_\alpha^{q_n}(c) = c - R_\alpha^{q_n}(c) = c - c + \alpha q_n \, mod \, 1 = -\alpha q_n \, mod \, 1$$

daí, temos que:

$$-\theta_n = \alpha q_n \, mod \, 1 = \alpha q_n - p_n$$

No caso em que n é par, temos que $J'_n = (c, R_\alpha^{q_n}(c))$, e dessa forma:

$$\theta_n = R_\alpha^{q_n}(c) - c = \alpha q_n \, mod \, 1 = \alpha q_n - p_n$$

□

Proposição 3.19. *Para todo $n > 1$, vale que:*

$$p_{n+1} q_{n+1} p_n + p_{n-1}$$

Demonstração. Por definição, temos que $q_{n-1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$ e pela proposição anterior, segue que:

$$p_{n+1} = \alpha q_{n+1} - (-1)^{n+1}\theta_{n+1} = \alpha(q_{n-1} + a_{n+1}q_n) - (-1)^{n+1}(\theta_{n-1} - \alpha_{n+1}\theta_n)$$
$$= a_{n+1}(\alpha q_n - (-1)^n\theta_n) + (\alpha q_{n-1} - (-1)^{n+1}\theta_{n-1}) = a_{n+1}p_n + p_{n-1}$$

o que conclui a demonstração. □

Proposição 3.20. *Para todo $n \geq 0$, vale que:*

$$a_{n+1}p_n - q_n p_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

Demonstração. Suponha que $n = 0$. Daí, temos que:

$$q_1 p_0 - q_0 p_1 = a_1 0 - 1 = -1$$

e temos o resultado. Suponha que $n \geq 1$. Como já vimos que:

$$\theta_n q_{n-1} + \theta_{n-1} q_n = 1$$

então:

$$q_{n+1}p_n - q_n p_{n+1} = q_{n+1}(\alpha q_n - (-1)^n\theta_n) - q_n(\alpha q_{n+1} - (-1)^{n+1}\theta_{n+1})$$
$$= (-1)^{n+1}(q_{n+1}\theta_n + q_n\theta_{n+1}) = (-1)^{n+1}$$

□

Note que da proposição acima, temos que p_n e q_n são primos entre si $\forall n \in \mathbb{N}$. Com efeito, qualquer termo em comum entre p_n e q_n deverá dividir ± 1.

Definição 3.21. *Fixado $\alpha \in [0,1]$, definimos a fração $\frac{p_n}{q_n}$ como o n-ésimo convergente de α.*

Os resultados abaixo irão demonstrar que dado α, os convergentes de α são as melhores aproximações racionais para α.

Proposição 3.22. *Seja $\alpha \in [0,1]$. Os convergentes de α seguem a seguinte ordenação:*

$$\frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots < \alpha < \dots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$$

Demonstração. Por proposição anterior, sabemos que:

$$(-1)^(n)\theta_n = \alpha q_n - p_n$$

de onde segue que:

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = (-1)^n \frac{\theta_n}{q_n}$$

Portanto, como cada fração $\frac{\theta_n}{q_n}$ é positiva para todo $n \in \mathbb{N}$, então se n é par, temos que $\frac{p_n}{q_n}$ está à direita de α. Por outro lado, se n é ímpar, então temos que $\frac{p_n}{q_n}$ está à esquerda de α. Além disso, por proposição anterior, já vimos que $q_{n+1}p_n - q_n p_{n+1} = (-1)^{n+1}$, daí, temos que:

$$\left|\frac{q_{n+1}p_n}{q_n q_{n+1}} - \frac{q_n p_{n+1}}{q_n q_{n+1}}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n+1}}\right|, \text{ e } \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \left|\frac{1}{q_n q_{n+1}}\right|$$

Observe que a sequência q_n é estritamente crescente, por definição. Dessa forma, segue que as distâncias entre os pontos $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ e $\frac{p_n}{q_n}$ diminuem à medida em que n cresce, de onde temos o resultado. $\square$

Proposição 3.23. *Seja $q \in \mathbb{Z}$ tal que $0 < q < q_n$, então para todo $p \in \mathbb{Z}$, temos que:*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right|$$

Demonstração. Seja I o intervalo determinado pelos pontos $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. Como $\frac{p_n}{q_n}$ é irredutível e $q < q_n$, então temos que $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$, portanto:

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{pq_n - p_n q}{qq_n}\right| \geq \frac{1}{q_n q} > \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = |I|$$

de maneira análoga, podemos mostrar que:

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| > |I|$$

dessa maneira, temos que a distância de $\frac{p}{q}$ até qualquer ponto de I é menor que o comprimento do intervalo I. Em particular, como temos que $\alpha \in I$, então:

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \alpha\right| < |I| < \left|\frac{p}{q} - \alpha\right|$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Vamos supor agora que tomamos $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$. Daí, teríamos que $J'' = (0, c)$ e $J' = (c, 1)$. Além disso, como já vimos, temos que:

$$J(R_\alpha) = [R_\alpha^{(R_\alpha)+1}](c), 1] = [1 - \alpha + (a(R_\alpha + 1)\, mod\, 1, 1] = [\alpha a(R_\alpha), 1]$$

Além disso, como temos que $|J'| = \alpha$ e R_α é uma isometria, então $a(R_\alpha)$ é o maior inteiro tal que:

$$(a(R_\alpha + 1)\alpha < 1$$

portanto:

$$a(R_\alpha) + 1 < \frac{1}{\alpha}$$

de onde temos que:

$$a(R_\alpha) + 1 = \lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor$$

Estamos interessados em calcular o ângulo de rotação da composição de rotações, α', e pelo que fizemos acima, temos que:

$$\alpha' = \frac{1 - c}{1 - \alpha a(R_\alpha} = \frac{\alpha}{1 - \alpha(\lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor - 1)} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - (\lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor - 1)} = \frac{1}{G(\alpha) + 1}$$

em que a aplicação $G : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ é chamada de transformação de Gauss, e é definida como:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

de maneira análoga, no caso em que tomamos $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, então:

$$|J'| = 1 - \alpha = c$$

e daí, nesse caso $a(R_\alpha)$ é o maior inteiro que satisfaz:

$$(a(R_\alpha)+1)c < 1$$

se onde segue que:

$$a(R_\alpha) = \lfloor \frac{1}{c} \rfloor - 1$$

E podemos concluir que o ângulo da aplicação $R(R_\alpha)$ é dada por:

$$\alpha' = \frac{1 - a(R_\alpha)(1-\alpha) - (1-\alpha)}{1 - a(R_\alpha)(1-\alpha)} = \frac{1 - (\lfloor \frac{1}{c} \rfloor - 1)c - c}{1 - (\lfloor \frac{1}{c} \rfloor - 1)c} = \frac{\frac{1}{c} - \lfloor \frac{1}{c} \rfloor}{\frac{1}{c} - \lfloor \frac{1}{c} \rfloor + 1} = \frac{G(1-\alpha)}{G(1-\alpha)+1}$$

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos calcular todos os $\alpha(n)$ relativos à aplicação de primeiro retorno $\phi_n : J_n \longrightarrow J_n$. Observe que se $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, então $\alpha' \in (\frac{1}{2}, 1)$, e se $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, então $\alpha' \in (0, \frac{1}{2})$.

Note que para $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$, pela construção que fizemos, J' está à direita de J'', e, como vimos, $\alpha(1) = \alpha' = \frac{1}{G(\alpha)+1}$, $a_1 = a(f) + 1 = \lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor$. Para $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$. J' está à esquerda de J'', e, por definição, $a_1 = 1$, $\phi_1 = f$, porém nesse caso temos $\lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor = 1$. Dessa forma, $a_1 = \lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor$ e $\alpha(1) = \alpha = \frac{1}{G(\alpha)+1}$. Ademais, pelo que vimos acima segue que $\alpha(1) \in (\frac{1}{2})$, e da mesma forma, $\alpha(2) \in (0, \frac{1}{2})$. Indutivamente, concluímos que $\alpha(n) \in (\frac{1}{2}, 1)$ para n ímpar e $\alpha(n) \in (0, \frac{1}{2}$ se n é par. Dessa forma, definimos:

$$a(n+1) = \begin{cases} \frac{G(1-\alpha(n))}{1+G(1+\alpha(n))} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{1}{1+G(\alpha(n))} & \text{se n é par} \end{cases}$$

Vamos demonstrar a relação acima por indução. Já provamos para $n = 0$. Vamos supoer que o resultado acima seja verdadeiro para $n = k$. Suponha que k é ímpar, daí $\alpha(k) \in (\frac{1}{2}, 1)$. Portanto:

$$\alpha(k+1) = \alpha(k)' = \frac{G(1-\alpha(k))}{1+G(1-\alpha(k))}$$

logo vale para $k+1$. De maneira similar, provamos para k par tomando $\alpha(k) \in (0, \frac{1}{2})$ e $\alpha(k+1) = \frac{1}{1+G(1-\alpha(k))}$

Proposição 3.24. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que:*

$$\alpha(n) = \begin{cases} \frac{1}{1+G^n(\alpha)} \in (\frac{1}{2}, 1) & \textit{se } n \textit{ é ímpar} \\ \frac{G^n(\alpha)}{1+G^n(\alpha)} \in (0, \frac{1}{2}) & \textit{se } n \textit{ é par} \end{cases}$$

Demonstração. A formula é válida se $n = 1$ imediatamente pelo que vimos. Suponha que $n = k$ é par, daí temos que:

$$\alpha(k+1) = \frac{1}{1 + G(\alpha(k))} = \frac{1}{1 + G(\frac{G^k(\alpha)}{1+G^k(\alpha)})} = \frac{1}{1 + G^{k+1}(\alpha)}$$

Por outro lado, caso $n = k$ seja ímpar, então:

$$\alpha(k+1) = \frac{G(1 - \alpha(k))}{1 + G(1 - \alpha(k))} = \frac{G(1 - \frac{1}{1+G^k(\alpha)})}{1 + G(1 - \frac{1}{1+G^k(\alpha)})} = \frac{G^{k+1}(\alpha)}{1 + G^{k+1}(\alpha)}$$

o que prova o caso geral. □

Proposição 3.25. *$\forall n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 1$, temos que:*

$$a_n = \left\lfloor \frac{1}{G^{n-1}(\alpha)} \right\rfloor$$

Demonstração. Lembre-se que já provamos que:

$$a(R_\alpha) = \begin{cases} \lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor, & \text{se } \alpha \in (0, \frac{1}{2}] \\ \lfloor \frac{1}{1-\alpha} \rfloor & \text{se } \alpha \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

Vimos anteriormente que $\alpha_1 = \lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor$. Suponhamos agora que $n \geq 2$. Temos duas possibilidades. Caso n seja par, então $\alpha(n-1) \in (\frac{1}{2}, 1)$, e daí temos que:

$$a_n = a(R_{\alpha(n-1)}) = \left\lfloor \frac{1}{1 - \alpha(n-1)} - 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{1 - \frac{1}{1+G^{n-1}(\alpha)}} - 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\frac{G^{n-1}(\alpha)}{1+G^{n-1}(\alpha)}} \right\rfloor - 1 =$$
$$\left\lfloor \frac{G^{n-1}(\alpha) + 1}{G^{n-1}(\alpha)} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{G^{n-1}(\alpha) + 1}{G^{n-1}(\alpha)} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{1}{G^{n-1}(\alpha)} \right\rfloor + 1 - 1 = \left\lfloor \frac{1}{G^{n-1}(\alpha)} \right\rfloor$$

Por outro lado, caso n seja ímpar, então obtemos que:

$$a_n = a(R_{\alpha(n-1)}) = \left\lfloor \frac{1}{\alpha(n-1)} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{1 + G^{n-1}(\alpha)}{G^{n-1}(\alpha)} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{1}{G^{n-1}(\alpha)} \right\rfloor$$

e temos o resultado, como queríamos. □

Proposição 3.26. *Seja $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números naturais. Existe $\alpha \in (0,1)$ tal que a sequência $b_n = a_n(\alpha), \forall n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Observe que:

$$\{\alpha \in (0,1); a_1(\alpha)\} = \left\{ \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor = b_1 \right\} = \left\{ \left(\frac{1}{b_1 + 1}, \frac{1}{b_1} \right] \right\} = E_{b_1}$$

E cada intervalo E_{b_1} é levado sobrejetivamente sobre o intervalo $[0,1]$ pela aplicação G, o que significa que sempre podemos escolher um $\alpha \in E_{b_1}$ de maneira a obter $a_2(\alpha) = b_2$, e assim sucessivamente. Com efeito, observe que:

$$G(\frac{1}{b_1}) = b_1 - \lfloor b_1 \rfloor = 0$$

uma vez que $b_1 \in \mathbb{N}$. Dessa forma, fixado $x \in [0,1]$, note que:

$$G(\frac{1}{b_1 + x}) = b_1 + x - \lfloor b_1 + x \rfloor = b_1 + x - b_1 = x$$

e temos a sobrejetividade. □

Fixado $\alpha \in (0,1)$, mostramos que podemos definir uma sequência $a_n(\alpha)$ relativa à rotação R_α. Essa sequência será utilizada para definir o número de rotação. Primeiro iremos relacionar o que provamos acima com a definição de frações contínuas.

Definição 3.27. *Dados $\omega \in (0,1)$ e uma sequência de números inteiros $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, definimos a fração contínua de ω como a expressão:*

$$\omega = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_m + \dots}}}}$$

Observe que se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_i = 0$ sempre que $i > k$, então expressão acima pode ser finita. Iremos utilizar a notação:

$$[n_0, n_1, ..., n_s]$$

para expressar a fração contínua truncada no termo s.

Proposição 3.28. *Seja $\alpha \in (0,1)$ e $x \in \mathbb{N}$, então:*

$$[0, a_1, ..., a_n, x] = \frac{xp_n + p_{n-1}}{xq_n + q_{n-1}}$$

Demonstração. Vamos fazer a demonstração por indução. Lembre-se que pelas definições de p_n e q_n, temos que $p_0 = 0$, $p_1 = q$,$q_0 = 1$ e $q_1 = a_1$. Para $n = 1$, obtemos que:

$$[0, a_1, x] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x}} = \frac{x}{a_1 x + 1} = \frac{xp_1 + p_0}{xq_1 + q_0}$$

Agora vamos supor que a fórmula acima é verdadeira para $n = k$, daí temos:

$$[0, a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}, x] = [0, a_1, a_2, .., a_{k+1} + \frac{1}{x}] = \frac{(a_{k+1} + \frac{1}{x})p_k + p_{k-1}}{(a_{k+1} + \frac{1}{x})q_k + q_{k-1}} =$$
$$\frac{a_{k+1}p_k + p_{k-1} + \frac{p_k}{x}}{a_{k+1}q_k + q_{k-1} + \frac{q_k}{x}} = \frac{p_{k+1} + \frac{p_k}{x}}{q_{k+1} + \frac{q_k}{x}} = \frac{xp_{k+1} + p_k}{xq_{k+1} + q_k}$$

logo o resultado é verdadeiro para $k + 1$. □

Proposição 3.29. *Para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que:*

$$[0, a_1, ..., a_k] = \frac{p_k}{q_k}$$

Além disso, $\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{q_k} = \alpha$.

Demonstração. A expressão segue diretamente como caso particular da proposição anterior, pois:

$$[0, a_1, ..., a_k] = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}} = \frac{p_k}{q_k}$$

por definição. O limite segue diretamente pela proposição 3.22.

□

Pela construção que fizemos anteriormente, podemos obter a sequência de termos $a_1, a_2, ...a_k, ...$ para qualquer homeomorfismo do círculo, e, da mesma forma, construir frações contínuas associadas a estes homeomorfismos. Com isso podemos definir o número de rotação naturalmente como:

Definição 3.30. *Seja $f \in S(J)$ um homeomorfismo do círculo e números naturais a_n construídos como fizemos anteriormente. Definiremos o número de rotação de f como a fração contínua:*

$$\rho(f) := [0, a_1, ..., a_n, ...]$$

caso f não possua pontos periódicos, e:

$$\rho(f) = [0, a_1, ..., a_n]$$

caso f possui pontos periódicos. Isso ocorre pois existirá $i \in \mathbb{N}$ tal que $a_i = +\infty$. Em particular, para rotações R_α o número de rotação é exatamente α, pelo que vimos, e a fração contínua é finita se, e somente se, α é racional.

3.5 Teorema de Poincaré

antes de seguirmos para a demonstração do Teorema de Poincaré, vamos precisar do seguinte Lema:

Lema 3.31. *Seja $\alpha \in (0,1)$ um número irracional e considere R a rotação de ângulo α. Seja $c = c(R)$. Para quaisquer $n, m \in \mathbb{Z}$, positivos, temos que $(i_R(R^m(c))) = (i_R(R^n(c)))$ se, e somente se, $n = m$.*

Demonstração. A volta é trivialmente verdadeira. Para a ida, faremos a demonstração por absurdo. Suponha os itinerários são iguais, mas $n \neq m$. Como, por hipótese, α é irracional, então temos que $R^{n(c)} \neq R^m(c)$, pois caso contrário, R teria pontos periódicos. Suponha, sem perda de generalidade, que $R^n(c) < R^m(c)$ e defina $B := |R^m(c) - R^n(c)|$. Como, por hipótese, temos que $(i_R(D^m(c))) = (i_R(R^n(c)))$, isso significa que $R^{n+k}(c)$ e $R^{m+k}(c)$ devem estar na mesma componente conexa do intervalo $[0,1] - \{c\}$. Como R é uma rotação, então R preserva orientação, portanto $R^{n+k}(c) < R^{m+k}(c)$. Lembre-se que provamos que se α é irracional, então a órbita positiva $O_R^+(R^n(c))$ é densa no intervalo $[0,1]$. Isso significa que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c - R^{n+k}(c) < B$. Como já vimos que toda rotação é uma isometria, então, em particular, teríamos que $i_{k_0}(R^n(c)) = E$, mas $i_{k_0}(R^m(c)) = D$. Isso contraria a hipótese de que os itinerários são iguais, um absurdo. □

Agora já podemos enunciar e provar o Teorema de Poincaré.

Teorema 3.32. *Dado um homeomorfismo do círculo $f \in S(J)$ sem pontos periódicos, existe uma única rotação R_α e uma função $h : J \longrightarrow [0,1]$ contínua, monótona e sobrejetiva tal que:*

$$h \circ f = R \circ h$$

Além disso, α é irracional e $\rho(f) = \alpha$.

Demonstração. Dada $f \in S(J)$, considere $\alpha = \rho(f)$ e defina uma rotação R_α. Por definição, segue que $a_i(f) = a_i(R_\alpha)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, o que implica que α é irracional, uma vez que f não possui pontos periódicos por hipótese. Como vimos na seção anterior, se α é irracional então R_α também não possui pontos periódicos, e vimos que $k^+(f) = k^+(R_\alpha)$. Vamos definir a seguinte função:

$$\begin{aligned} h :& O_f^+(c(f)) \longrightarrow O_{R_\alpha}^+(c(R_\alpha)) \\ & f^n(c(f)) \longrightarrow R_\alpha^n(c(R_\alpha)) \end{aligned}$$

Afirmamos que f é não-decrescente. De fato, suponha que $f^n(c(f)) < f^m(c(f)) \in O_f^+(c(f))$. Aplicando o lema anterior, segue que:

$$(i_f(f^n(c(f)))) \preceq (i_f(f^m(c(f))))$$

e utilizando o fato que $k^+(f) = k^+(R_\alpha)$, então:

$$(i_{R_\alpha}(R_\alpha^n(c(R_\alpha)))) \preceq (i_{R_\alpha}(R_\alpha^m(c(R_\alpha))))$$

Temos dois casos possíveis. Se $(i_{R_\alpha}(R_\alpha^n(c(R_\alpha)))) \prec (i_{R_\alpha}(R_\alpha^m(c(R_\alpha))))$, então temos que $R_\alpha^n(c(R_\alpha)) < R_\alpha^m(c(R_\alpha))$. Por outro lado, caso tenhamos que $(i_{R_\alpha}(R_\alpha^n(c(R_\alpha)))) = (i_{R_\alpha}(R_\alpha^m(c(R_\alpha))))$, então $n = m$ o que implica que $R_\alpha^n(c(R_\alpha)) = R_\alpha^m(c(R_\alpha))$. Portanto, concluímos que:

$$h(f^n(c(f))) \leq h(f^m(c(f)))$$

logo h é não-decrescente. Observe também que h é sobrejetiva, por definição, e injetora, pois se:

$$h(f^n(c(f))) = h(f^m(c(f)))$$

então:

$$R^n(c(R)) = R^m(c(R))$$

o que implica que $n = m$, pois, caso contrário, R_α teria pontos periódicos, um absurdo. Vamos provar agora que h é contínua. De fato, dada uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in O_f^+(c(f))$ tal que $x_n \to x \in O_f^+(c(f))$. Observe que como $O_{R_\alpha}^+(c(R_\alpha))$ é densa em $[0,1]$, então para todo $\varepsilon > 0$ existem $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$ tais que:

$$h(x) - \varepsilon < R_\alpha^{t_1}(c(R_\alpha)) < h(x) < R_\alpha^{t_1}(c(R_\alpha)) < h(x) + \varepsilon$$

de onde, como h é não-decrescente, segue que:

$$f^{t_1}(c(f)) < x < f^{t_2}(c(f))$$

defina $\delta := min\{|f^{t_1}(c(f)) - x|, |f^{t_2}(c(f)) - x|\}$. Como $x_n \to x$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $|x_n - x| < \delta$,e, como h é não-decrescente, então:

$$R_\alpha^{t_1}(c(R_\alpha)) \leq h(x_n) \leq R_\alpha^{t_2}(c(R_\alpha))$$

para todo $n > n_0$, portanto $h(x) - \varepsilon < h(x_n) < h(x) + \varepsilon$. Concluímos que h é contínua, bijetiva e não decrescente. Vamos mostrar agora que podemos estender a aplicação h ao feixo do domínio e contradomínio. Defina:

$$\bar{h} : O_f^+(\bar{c}(f)) \longrightarrow O_{R_\alpha}^+(\bar{c}(R_\alpha)) = [0,1]$$

$$\bar{h}(x) = \begin{cases} h(x), & \text{se } x \in O_f^+(c(f)) \\ \lim_{n\to\infty} h(x_n) & \text{se } x \in O_f^+(\bar{c}(f)) - O_f^+(c(f)) = K \end{cases}$$

em que x_n é uma sequência qualquer de $O_f^+(c(f))$ tal que $x_n \to x \in K$. Vamos mostrar que a função acima está bem definida, ou seja, dadas duas sequências $x_n \to x$ e $x'_n \to x$, então $h(x_n)$ e $h(x'_n)$ convergem para o mesmo ponto. De fato, observe que como $[0,1]$ é limitado, então $h(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente, digamos, $\lim_{k\to\infty} h(x_{n_k}) = y$. Vamos mostrar que $h(x'_n) \to y$. Tome $\varepsilon > 0$. Como $O_{R_\alpha}^+(c(R_\alpha))$ é densa em $[0,1]$, existem $t_1, t_2 \in O_{R_\alpha}^+(c(R_\alpha))$ tais que:

$$y - \varepsilon < t_1 < y < t_2 < y + \varepsilon$$

Defina $\delta = min\{|t_1 - y|, |t_2 - y|\}$. Como $\lim_{k\to\infty} h(x_{n_k}) = y$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k > k_0$ então:

$$|h(x_{n_k}) - y| < \delta$$

de onde temos que:

$$t_1 < h(x_{n_k}) < t_2$$

e como h é não-decrescente e $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$, temos que:

$$h^{-1}(t_1) < x < h^{-1}(t_2)$$

Note que a desigualdade acima é estrita, pois $x \in K$ e $h^{-1}(t_1), h^{-1}(t_2) \in O_f^+(c(f))$. Defina $\eta := min\{|h^{-1}(t_1) - x|, h^{-1}(t_2) - x|\}$. Como, por hipótese, $x'_n \to x$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então $|x'_n - x| < \eta$. Novamente usando o fato que h é não-decrescente, segue que:

$$y - \varepsilon < t_1 \leq h(x'_n) \leq t_2 < y + \varepsilon$$

o que implica que $h(x'_n) \to y$, como queríamos.

Provamos que $\bar{h}$ está bem definida. Além disso, ela é contínua diretamente da sua definição, uma vez que h também o é. Agora iremos mostrar que $\bar{h}$ é não-decrescente. Temos três casos a considerar: se $x, y \in O_f^+(c(f))$, então o resultado segue pois h é não-decrescente. Suponha que $x \in O_f^+(c(f))$ e $y \in K$. Logo existe $y_n \to y$ para $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $O_f^+(c(f))$. Suponha, sem perda de generalidade, que $x < y$ e defina $\varepsilon := \frac{|y-x|}{2}$. Como $y_n \to y$, existe n_0 tal que se $n > n_0$ então $|y_n - y| < \varepsilon$, de onde temos que $x < y_n$. como h é não-decrescente, então temos que se $n > n_0$:

$$\bar{h}(x) \leq \lim_{n\to\infty} \bar{h}(y_n) = \bar{h}(y)$$

De maneira análoga provamos o caso em que $x > y$. Finalmente, vamos supor que $x, y \in K$ e $x < y$. Logo existem sequências em $O_f^+(c(f))$ tais que $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Defina $\varepsilon := \frac{|y-x|}{3}$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então:

$$|x_n - x|$$

$$|y_n - x|$$

portanto $x_n < y_n$ e como h é não-decrescente, $h(x_n) \leq h(y_n)$ de onde segue que $\bar{h}(x) \leq \bar{h}(y)$.

Agora vamos provar que $\bar{h}$ é sobrejetiva. Seja $y \in [0,1] - O_{R_\alpha}^+(c(R_\alpha))$. Como $O_{R_\alpha}^+(c(R_\alpha))$ é denso em $[0,1]$, existe sequência $y_n = \bar{h}(x_n) \to y$, o que define uma sequência x_n em $O_f^+(c(f))$. Como J é um intervalo, então x_n é limitada, portanto existe uma subsequência convergente $x_{n_k} \to x$. Como $\bar{h}$ é contínua, então $\lim_{k\to\infty} \bar{h}(x_{n_k}) = y$ de onde segue que $\bar{h}(x) = y$. Observe que estendemos a função h ao conjunto $F := O_f^+(\bar{c}(f))$, mas esse conjunto não necessariamente é todo o J. Vamos provar agora que podemos estender $\bar{h}$ a todo o J. Como F é fechado, então $J - F$ é aberto, logo podemos considerar uma componente conexa (x, y) de $J - f$. Em particular, $\bar{h}(x) \leq \bar{h}(y)$, pois h é não-decrescente. Suponha que $\bar{h}(x) < \bar{h}(y)$. Como $O_{R_\alpha}^+(c(R_\alpha))$ é densa em $[0,1]$, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{h}(x) < R_\alpha^m(c(R_\alpha)) < \bar{h}(y)$, de onde teríamos que $f^m(c(f)) \in (x, y)$, um absurdo. Dessa forma, para cada componente conexa $(x, y) \in J - F$, definimos $\bar{h}(x, y) := \bar{(}x)$. Daí, a função $barh : J \longrightarrow [0,1]$ satisfaz todas as condições do teorema. $\square$

Definição 3.33. *A aplicação $\bar{h}$ definida no teorema anterior é chamada de semi-conjugação entre o homeomorfismo do círculo f e a rotação R_α.*

4 O Teorema de Denjoy

4.1 Conjugações topológicas

Definição 4.1. *Sejam f, g homeomorfismos do círculo. Dizemos que f e g são topologicamente conjugados se existe um homeomorfismo do círculo h tal que:*

$$h \circ f = g \circ h$$

Já mostramos que dado um homemorfismo do círculo f, se $\rho(f)$ é irracional, então f é semi-conjugada a uma rotação de ângulo $\alpha = \rho(f)$. Nesta seção, iremos estabelecer uma condição para que a semi-conjugação que encontramos seja uma conjugação topológica.

Proposição 4.2. *Seja f um homeomorfismo do círculo tal que $\rho(f)$ é irracional e $z \in S^1$. O conjunto $K := \omega(z)$ é fechado, não vazio e positivamente invariante. Além disso, não existe nenhum subconjunto de K com estas três propriedades. Em outras palavras, K é um conjunto minimal.*

Demonstração. Vamos mostrar que K é fechado. Seja $x \in S^1 - K$. Logo temos que x não é ponto de acumulação de $O_f^+(z)$, o que significa que existe uma vizinhança V_x de x tal que $V_x \cap O_f^+(z) = \emptyset$. Em particular, note que $V_x \subset S^1 - K$, logo $S^1 - K$ é aberto, o que significa que K é fechado.

Para ver que K é não vazio, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência tal que $x_n = f^n(z)$. Como f não tem pontos periódicos, então segue que $f^n(z) \neq f^m(z)$, se $n \neq m$. Além disso, como $O_f^+(z) \subset S^1$, então essa sequência é limitada, portanto possui uma subsequência convergente, digamos, $x_{n_k} \to x \in S^1$, pois S é compacto. Daí, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então $f^n(z) \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Como os termos da sequência são todos dois a dois distintos, então para todo $n > n_0$, o intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ possui uma infinidade de termos da sequência. Como ε é arbitrário, então a é um ponto de acumulação.

Além disso, para ver que K é positivamente invariante, basta notar que se $x \in K$, então existe sequência de números naturais $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $f^{n_i}(z) \to x$. Em particular, temos que como f é um homeomorfismo, então:

$$f(f^{n_i}(z)) = f^{n_i+1}(z) \to f(x)$$

e temos que como f é bijetiva e x é um ponto de acumulação, então $f(x)$ também será um ponto de acumulação. Portanto K é invariante por f. $\square$

Definição 4.3. *Dizemos que um conjunto K é de Cantor se K é perfeito,ou seja, não possui pontos interiores, e é totalmente desconexo.*

Proposição 4.4. *Existe um conjunto $K \in S^1$ tal que $\alpha(z) = \omega(z) = K$ para todo $z \in S^1$. Além disso, se K possui pontos interiores, então $K = S^1$, caso contrário, K é um conjunto de Cantor.*

Demonstração. Fixe $z \in S^1$ e defina $K = \omega(z)$. Tome $y \in S^1 - K := A$ e note que como f é um homeomorfismo, então f leva componentes conexas de A em componentes conexas de A. Além disso, os iterados destas componentes devem ser dois a dois disjuntos, pelo mesmo argumento que utilizamos na proposição 2.18.. Dessa forma, a órbita de y possui, no máximo, um único ponto em cada componente conexa de A, pois são dois a dois disjuntas. Portanto nenhum ponto de acumulação da órbita de y está em $S^1 - K$, donde $\omega(y), \alpha(y) \subset K = \omega(z)$. De maneira análoga, temos que $\omega(y), \alpha(y) \subset \alpha(z)$. Como y, z são arbitrários, temos que $K = \omega(z) = \alpha(z)$ para todo $z \in S^1$.

Se K possui pontos interiores, então existe $y \in K$ e $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(y) \subset K$. Como todo ponto de K é ponto de acumulação da órbita de y e $f^i(B_\varepsilon(y))$ é aberto, então todo ponto de K é ponto interior. De fato, dado $w \in K$, existe sequência $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $f^{n_i}(y) \to w$. Logo, para i suficientemente grande, temos que:

$$w - \frac{\varepsilon}{3} < f^{n_i}(y) - w < w + \frac{\varepsilon}{3}$$

portanto $w \in f^{n_i}(B_\varepsilon(y))$ para i suficientemente grande, e temos que w é ponto interior de K. Concluímos que K é aberto, e pela proposição anterior, K é fechado, como S^1 é conexo, então $K = S^1$. Por outro lado, suponha que K não possui pontos interiores. Se K não fosse totalmente desconexo, poderíamos aplicar o argumento anterior e concluir que $K = S^1$, um absurdo, pois K não possui pontos interiores por hipótese. Concluímos que K é um conjunto de Cantor. $\square$

Proposição 4.5. *Seja f um homeomorfismo do círculo sem pontos periódicos. Então f é conjugada a uma rotação de ângulo irracional se, e somente se, o seu conjunto minimal K for S^1.*

Demonstração. Suponha que f seja conjugada a uma rotação R de ângulo irracional. Então existe um homeomorfismo do círculo $h : S^1 \longrightarrow S^1$ tal que $h \circ f = R \circ h$. Daí, por indução, temos que $h \circ f^n = R^n \circ h$. Note que como R tem ângulo de rotação irracional então as órbitas de seus pontos são densas em S^1. Afirmamos que como h é um homeomorfismo, então as órbitas de f também serão densas em S^1, ou seja, $K = S^1$.

De fato, Tome $x, s \in S^1$ e considere $O_R^+(x)$, que é densa em S^1. Como h é uma bijeção, existem $y, w \in S^1$ tais que $x = h(x)$ e $s = h^{-1}(y)$. Além disso, existe sequência $y_n := R^{n_k}(x) \to y$. Daí, temos que:

$$s = h^{-1}(y) = h^{-1}(lim_{k\to\infty} R^{n_k}(h(w))) = \lim_{k\to\infty} h^{-1}(R^{n_k}(h(w))) = \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(w)$$

portanto $s \in \overline{O_g^+(w)}$. Concluímos que $K = S^1$.

Suponha agora que $\omega(z) = S^1$, para todo $z \in S^1$. Seja R a rotação de ângulo $\rho(f)$ e h a semiconjugação que existe pelo teorema de Poincaré que provamos na seção anterior. Basta mostrar que h é injetiva. Suponha, por absurdo, que não. Logo, pela demonstração do Teorema de Poincaré, existe um intervalo aberto $J \subset S^1$ tal que $h(J) = \{x\}$. Como a órbita de todo ponto por f é densa em S^1, existem pontos $f^i(z)$ e $f^j(z)$ distintos. Logo, teríamos que $h \circ f^i(z) = h \circ f^j(z)$, e, consequentemente, $R^i \circ h(z) = R^j \circ h(z)$, um absurdo, pois R não possui pontos periódicos. □

Definição 4.6. *Seja $f : J \longrightarrow J$ um homeomorfismo do círculo. Dizemos que $T \subset J$ é um intervalo errante de f, se os intervalos $T, f(T), ..., f^n(T), ...$ são dois a dois disjuntos, e o conjunto ω-limite não é uma órbita periódica de f.*

Proposição 4.7. *Seja f um homeomorfismo do círculo sem pontos periódicos. Então f é conjugada a uma rotação se, e somente se, f não possui intervalos errantes.*

Demonstração. Pela proposição anterior, temos que se f é conjugada a uma rotação de ângulo irracional, então $K = S^1$. Em particular, os intervalos $J, f(J), ..., f^n(J), ...$ não podem ser dois a dois disjuntos, uma vez que dados $x, y \in J$, então y é ponto de acumulação para a órbita de x por f. Reciprocamente, se f não tem intervalos errantes, então seu conjunto minimal K é S^1, e pela proposição anterior, segue que f é conjugada a uma rotação de ângulo irracional. □

4.2 Teorema e Lema de Denjoy

O Teorema de Denjoy nos dará uma condição sobre um homeomorfismo do círculo f para que ele seja conjugado à rotação $R_{\rho(f)}$. O lema de Denjoy também será extensivamente utilizado no próximo capítulo.

Definição 4.8. *Seja $f : J \longrightarrow J$ um homeomorfismo do círculo de classe C^1. Se $T \subset J$ é um intervalo tal que $Df(x) \neq 0$ para todo $x \in T$, então definimos a distorção de f em T como sendo:*

$$Dist(f,T) := \sup_{x,y \in T} log \frac{|Df(x)|}{|Df(y)|}$$

Lema 4.9. *Seja $f : J \longrightarrow J$ uma aplicação tal que f restrita ao intervalo $T \subset J$ seja um difeomorfismo de classe C^1, então:*

$$Dist(f^n,T) \leq \sum_{i=0}^{n-1} Dist(f, f^i(T))$$

Demonstração. Considere $x, y \in T$. Aplicando a regra da cadeia, obtemos:

$$D(f^n(x)) = Df(f^{n-1}(x))Df^{n-1}(x) = Df(f^{n-2}(x))Df(f^{n-1}(x))D(f^{n-3}(x)) = \prod_{i=0}^{n-1} Df(f^i(x))$$

Daí, temos que:

$$log \frac{|D(f^n(x))|}{|D(f^n(y))|} = log \prod_{i=0}^{n-1} \frac{|Df(f^i(x))|}{|Df(f^i(y))|} = \sum_{i=0}^{n-1} log \frac{|Df(f^i(x))|}{|Df(f^i(y))|}$$

usando o fato que $f^i(x), f^i(y) \in f^i(T)$, temos que:

$$Dist(f^n,T) = \sup_{x,y \in T} log \frac{|Df(f^n(x))|}{|Df(f^n(y))|} = \sup_{x,y \in T} \sum_{i=0}^{n-1} log \frac{|Df(f^n(x))|}{|Df(f^n(y))|} \leq \sum_{i=0}^{n-1} Dist(f, f^i(T))$$

□

Definição 4.10. *Dado um intervalo $J \subset \mathbb{R}$ e $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos a variação de f no intervalo $[a,b] \subset J$ como:*

$$Var(f,[a,b]) = \sup\{\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_i) - f(x_{i+1})| \text{ em que } a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.\}$$

Se $Var(f,[a,b])$ é finita, então dizemos que f tem variação limitada em $[a,b]$. Além disso, definimos:

$$Dif_+^{1+vl}(S^1) := \{f \in Dif_+^1(S^1); Df \text{ é de variação limitada}\}$$

Corolário 4.11. *Seja $f : J \longrightarrow J$ uma função de classe C^1 tal que a aplicação $x \rightarrow log|Df(x)|$ tem variação limitada por $C > 0$. Então para todo intervalo $T \subset J$ tal que $T, f(T), ..., f^{n-1}(T)$ são dois a dois disjuntos, temos que:*

$$Dist(f^n, T) \leq C$$

Demonstração. Basta observar que:

$$Dist(f, T) = \sup_{x,y \in J} log\frac{|Df(x)|}{|Df(y)|} = \sup_{x,y \in J}(log|Df(x)| - log|Df(y)|) \leq var(log|Df|, J)$$

ou seja, a distorção de f em J é limitada pela variação de $log|Df|$. Portanto,

$$Dist(f^n, T) \leq \sum_{i=0}^{n-1}(f, f^i(T)) \leq \sum_{i=0}^{n-1} Var(log|Df|, f^i(T)) \leq Var(log|Df|, J) \leq C$$

como queríamos. □

Teorema 4.12. *Seja $f \in Dif_+^{1+vl}(S^1)$ tal que $\rho(f)$ é irracional. Então f é conjugada a rotação R de número de rotação $\rho(f)$.*

Demonstração. Pela proposição 4.7, segue que é suficiente mostrar que f não possui intervalos errantes. Suponha, por absurdo, que existe um intervalo errante de f em S^1. Pelo Teorema de Poincaré, sabemos que existe uma semiconjugação h entre f e a rotação R de ângulo $\rho(f)$. Em particular, sabemos que h não é injetiva, logo existe um intervalo $J \subset S^1$ de forma que ao aplicar h em$J$, a imagem é formada por apenas um ponto x. Observe agora que, como já fizemos anteriormente, por indução temos que $h \circ f^n(J) = R^n \circ h(J) = R^n(x)$. Como R possui número de rotação irracional, então não possui pontos periódicos, logo cada $R^n(x)$ é distinto, portanto suas pré-imagens por h são disjutas e são iguais a $f^n(J)$, para cada n. Considere $\frac{p_n}{q_n}$ o n-ésimo convergente de $\rho(f)$ e defina $T \subset S^1 - \{f^{q_n}(J)\}$ como o menor intervalo que contém J e $f^{-q_n}(J)$, que existe pois as pré-imagens são disjuntas. Além disso, temos que $h(T)$ é limitado por x e $R^{-q_n}(x)$ e não contém o ponto $R^{q_n}(x)$.

Defina I como o interior do intervalo T. Já provamos anteriormente que os intervalos J' são da forma $(c, f^{q_n}(c))$ ou $(f^{q_n}(c), c)$, e podemos identificar R como uma função em $S(J)$ tal que $J' = I$. Além disso, já provamos que os intervalos $I, R(I), ..., R^{q_n-1}(I)$ são dois a dois disjuntos. Logo, as pré-imagens destes intervalos por h também são disjuntas, e, em particular, a pré-imagem por h dos intervalos $\bar{I}, R(\bar{I}), ..., R^{q_n-1}(\bar{I})$ também serão disjuntas.

Como, por hipótese, Df tem variação limitada e a função logarítimo é uma função crescente, então a aplicação $x \to log|Df(x)|$ também tem variação limitada por alguma constante $C \in \mathbb{R}$. Pelo corolário anterior, temos que:

$$Dist(f^{q_n}, T) \leq C$$

Aplicando o Teorema do valor médio de Lagrange, temos que existem $a \in J$ e $b \in f^{-q_n}(J)$ tais que:

$$|Df^{q_n}(a)| = \frac{|f^{q_n}(J)|}{|J|}, \text{ e}$$
$$|Df^{q_n}(b)| = \frac{|J|}{|f^{-q_n}(J)|}$$

e aplicando o logarítimo, obtemos:

$$C \geq Dist(f^{q_n}, T) \geq \frac{log|Df^{q_n}(a)|}{log|Df^{q_n}(b)|} = log\frac{|J|^2}{|f^{q_n}(J)||f^{-q_n}(J)|}$$

Como cada intervalo $f^n(J)$ é disjunto, então temos que ao tomarmos o limite quando $n \to \infty$, o lado direito da equação acima tende a infinito, um absurdo. □

Iremos provar agora o chamado Lema de Denjoy. Iremos apresentá-lo pois ele será importante para concluirmos as demonstrações no capítulo seguinte.

Lema 4.13. *Existe uma constante $C > 0$ dependente de f tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que:*

$$e^{-C} \leq \prod_{i=0}^{q_n-1} f'(x_i) \leq e^C$$

Demonstração. Defina $C = Var\, ln\, f' = \int_0^1 |\frac{d\, ln\, f'}{dx}|dx$ e tome um ponto $z_0 \in S^1$. Considere a soma $\sum\limits_{j=0}^{q_n-1} ln\, f'(z_j)$ em que $z_j = f^j(z_0)$. Iremos provar que:

$$\left| \sum_{j=0}^{q_n-1} ln\, f'(z_j) - \sum_{j=0}^{q_n-1} ln\, f'(x_j) \right| < C$$

Isso é suficiente para concluir o lema de Denjoy. Com efeito, note que pela regra da cadeia:

$$\frac{d}{dx}\phi^{q_n}(z_0) = \prod_{i=0}^{q_n-1} \phi'(z_i) = 1$$

daí:

$$\int_{S^1} \prod_{i=0}^{q_n-1} \phi'(z_i) = 1$$

e então pelo teorema fundamental do cálculo existe um ponto z_0 tal que $\sum_{j=0}^{q_n-1} ln\, f'(z_j) = 0$. Suponha que $z_0 \in C_i^{n-1}(x_0)$ para $1 \leq i \leq q_n$. Para cada z_j, $0 \leq j \leq q_n - i$, corresponda o ponto $x_{i+j} \in C_{1+j}^{n-1}(x_0)$ e para cada z_j, $q_n - i < j \leq q_n$, tome o ponto x_{i+j-q_n}. Por construção das partições, os intervalos formados pelos pontos z_j e x_{i+j} e z_j com x_{i+j-q_n}, são disjuntos a menos do bordo. Portanto podemos particionar o intervalo $[0, 1]$ o qual identificamos com o círculo em partições formadas por estes pontos, e escrever:

$$\left|\sum_{j=0}^{q_n-1} ln\, f'(z_j) - \sum_{j=0}^{q_n-1} f'(x_j)\right| \leq \left|\sum_{j=0}^{q_n-i} ln\, f'(z_j) - f'(x_j)\right|$$

$$+ \left|\sum_{q_n-i+1}^{q_n-1} ln\, f'(z_j) - f'(x_j)\right| \leq Var\, ln\, f' = C$$

Por outro lado, caso $z_0 \in C_i^{(}n)(x_0)$, $1 \leq i \leq q_{n-1}$, então utilizamos o mesmo argumento que acima, mas usando os intervalos entre z_j e x_{i+j}, se $0 \leq j \leq q_n - i$, e entre z_j e x_{i+j-q_n}, se $q_n - i < j \leq q_n$. $\square$

5 Rigidez de difeomorfismos do círculo

5.1 Enunciado do Teorema de Herman

Seja $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação contínua monótona tal que $\phi(x+1) = \phi(x) + 1$. Podemos definir um homeomorfismo de S^1 através de $T_\phi(x) = \{\phi(x)\}$, $x \in [0,1)$. Vamos denotar o número de rotação de T_ϕ por ρ.

Definição 5.1. *Seja $f : X \longrightarrow X$ uma aplicação. Dizemos que f é $\alpha -$ holder, se $|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|^\alpha$, para todo $x, y \in X$ e para algum $K \in [0,1)$. Se $f \in C^2$, para indicar que $D^2 f$ é $\alpha -$ holder, escrevemos que $f \in C^{2+\alpha}$.*

Definição 5.2. *Motivados pela proposição 3.7, fixado um ponto x_0 do círculo e um homeomorfismo do círculo $f : S^1 \longrightarrow S^1$, vamos definir os conjuntos:*

$$C_i^n = f^i([c, f^{q_n}(c)]) = [f^i(c), f^{q_n+i}(c)]$$

se n é ímpar, e:

$$C_i^n = f^i([f^{q_n}, c]) = [f^{i+q_n}(c), f^i(c)]$$

em que $n \in \mathbb{N}$ e $i \geq 0$.

Teorema 5.3 (Herman)**.** *Supondo que vale:*
A.1. $\phi \in C^{2+\alpha}, \gamma > 0, \phi' \geq C > 0$, para alguma constante $C \in \mathbb{R}$.
A. 2. ρ é irracional, e se $\rho = [k_1, k_2, ..., k_n, ...]$, então $k_n \leq Cn^v$ para algum $v > 0$.
então a aplicação ψ que conjuga T_ϕ com uma rotação de ângulo ρ é de classe C^1.

Observe que como ϕ é C^2, podemos aplicar o teorema de Denjoy. Dessa forma, existe um homeomorfismo ψ, tal que $\psi(\phi(x)) = \psi + \rho$. Essa última igualdade implica que $T_\psi \circ T_\phi = T_{R_\rho} \circ T_\psi$. Com efeito, note que

$$T_{(\psi(\phi(x)))} = \{\psi(\phi(x))\} = \{\psi(\{\phi(x)\} + \lfloor \phi(x) \rfloor)\} = \{\psi(\{\phi(x)\})\} = T_\psi \circ T_\phi$$

e, por outro lado,

$$T_{\psi+\rho} = \{\psi(x) + \rho\} = \{\{\psi(x)\} + \{\rho\}\} = \{\{\psi(x)\} + \rho\} = T_{R_\rho} \circ T_\psi$$

Seja $\ell : [0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ a medida de lebesgue definida sobre $S^1 = [0,1)$. Como R_ρ é uma isometria, temos que ℓ é invariante para R_ρ. Utilizando ℓ e o homeomorfismo T_ψ, podemos definir uma medida invariante para T_ϕ como $\mu : [0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $\mu(A) = \ell(T_\psi(A))$, para todo $A \subseteq [0,1)$ na σ-algebra de Borel. De fato,

$$\mu(\emptyset) = \ell(T_\psi(\emptyset)) = \ell(\emptyset) = 0$$
$$\mu(\dot\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \ell(T_\psi(\dot\cup_{i=1}^{\infty} A_i)) = \ell(\dot\cup_{i=1}^{\infty} T_\psi(A_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \ell(T_\psi(A_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

e segue que μ é uma medida. Além disso, note que μ é invariante por T_ϕ, pois:

$$\mu(T_\phi(A)) = \ell(T_\psi \circ T_\phi(A)) = \ell(T_\psi \circ T_\psi^{-1} \circ T_{R_\rho} \circ T_\psi(A)) = \ell(T_\psi(A)) = \mu(A)$$

Supondo que μ é absolutamente contínua em relação à ℓ, pelo teorema de Radom-Nykodim (Bartle, 1966), segue que para todo $A \subseteq [0,1)$ na σ-algebra de Borel, temos que existe uma aplicação $\pi : [0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que:

$$\mu(A) = \int_0^x \pi(x) d\ell$$

em particular, para todo $x \in S^1$, segue que:

$$\mu([0,x]) = \int_0^x \pi(x) d\ell$$

Note que $\mu([0,x]) = \ell(T_\psi(0,x)) = T_\psi(x) - T_\psi(0) = T_\psi(x)$, de onde temos a igualdade $\psi(x) = \displaystyle\int_0^x \pi(x)dy$. A aplicação π acima é chamada de densidade da medida absolutamente contínua μ. Nesta seção iremos fazer o caminho contrário: iremos construir uma aplicação densidade e usá-la para mostrar que existe uma medida μ absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue, de onde teremos que T_ψ é absolutamente contínua, logo diferenciável em quase todo ponto. Ou seja, mostraremos que o seguinte resultado:

Teorema 5.4. *Sobre as condições A.1 e A.2, a equação*

$$\frac{\pi(T_\phi(x))}{\pi(x)} = \frac{1}{\phi'(x)} \tag{3}$$

tem uma solução contínua estritamente positiva.

o que implicará no Teorema de Herman. Com efeito, se existe a aplicação π acima, defina $\mu(A) = \int_0^x \pi(x) d\ell$ onde A está na σ-álgebra de Borel restrita ao intervalo $[0,1]$, de onde temos que $\mu << \ell$. Pela igualdade (1) e pelo teorema de mudança de variáveis, segue que que μ é T_ϕ-invariante, e pelo mesmo argumento que usamos antes, temos a igualdade $\psi(x) = \displaystyle\int_0^x \pi(x) dy$. Segue então que ψ é C^1.

Considere um ponto $x_0 \in S^1$ e sua semi-órbita positiva $O = \{x_n\}_0^\infty, x_n = T_\phi^n(x_0)$, que é densa em S^1. Tome $\pi(x_0) = 1$ e $\pi(x_i) = \prod_{k=0}^{i-1} (\phi'(x_k))^{-1}$. Essa aplicação está definida em O e satisfaz (1). Vamos provar que ela pode ser estendida para uma aplicação contínua positiva em todo o círculo. Observe que pelo Lema de Denjoy, existe uma constante $C > 0$ tal que fixado $x_0 \in S^1$, então para todo $n > 0$,

$$e^{-C} \leq \prod_{i=0}^{q_n-1} (\phi'(x_i))^{-1} \leq e^C$$

Onde todas as constantes dependem de ϕ, mas não dependem de n. Suponha que possamos estender o Lema de Denjoy ao seguinte caso:

$$e^{-\xi_n} \leq \prod_{i=0}^{q_n-1} (\phi'(x_i))^{-1} \leq e^{\xi_n}$$

onde $\sum_n k_{n+1}\xi_n < \infty$ e ξ_n é uma sequência de números reais. Isso implica no teorema de Herman. Com efeito, considere $\pi(x_i)$ e $C_i^{(n)}$ para $0 \leq i \leq q_{n+1}$. Cada $C_i^{(n)}$ contém k_{n+2} pontos $x_{i+q_n+jq_{n+1}}$, para $1 \leq j \leq k_{n+2}$. Observe que:

$$\frac{\pi(x_{i+q_n+jq_{n+1}})}{\pi(x_{i+q_n+(j-1)q_{n+1}})} = \prod_{t=i+q_n+(j-1)q_{n+1}}^{i+q_n+jq_{n+1}-1} (\phi'(x_t))^{-1}$$

Além disso, temos que $(i + q_n + (j)q_{n+1} - 1) - (i + q_n + (j-1)q_{n+1}) = q_{n+1} - 1$, então definindo $x_0' = i + q_n + (j-1)q_{n+1}$, podemos escrever a expressão anterior como:

$$\prod_{t=i+q_n+(j-1)q_{n+1}}^{i+q_n+jq_{n+1}-1} (\phi'(x_t))^{-1} = \prod_{t=0}^{q_{n+1}-1} (\phi'(x_t'))^{-1}$$

e, usando nossa hipótese, segue que:

$$e^{-\xi_{n+1}} \leq \frac{\pi(x_{i+q_n+jq_{n+1}})}{\pi(x_{i+q_n+(j-1)q_{n+1}})} \leq e^{\xi_{n+1}} \tag{4}$$

Pelo mesmo argumento, temos também que:

$$e^{-\xi_n} \leq \prod_{i=0}^{q_n-1} (\phi'(x_i))^{-1} \leq e^{\xi_n} \tag{5}$$

Utilizando estas duas últimas desigualdades, temos que:

$$\left|\frac{\pi(x_{i+q_n+jq_{n+1}})}{\pi(x_i)}\right| = \left|\prod_{s=0}^{j}\frac{\pi(x_{i+q_n+sq_{n+1}})}{\pi_{(x_{i+q_n+(s-1)q_{n+1}})}}\frac{\pi(x_{i+q_n})}{\pi(x_i)}\right| \leq e^{k_{n+2}\xi_{n+1}+\xi_n} \tag{6}$$

Considere $x_j \in C_i^{(n)}$. Note que como x_j é um iterado de x_0, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_j \in \partial C_j^m$. Isso significa que existe $s \in \mathbb{N}$ com $0 \leq s \leq K_{m+1}$ tal que $j = i + q_m + sq_{m+1}$. Considere então:

$$\frac{\pi(x_j)}{\pi(x_i)} = \frac{\pi(x_j)}{\pi(x_{i+q_n})}\frac{\pi(i+q_n)}{\pi(x_i)} \tag{7}$$

Já sabemos estimar o segundo termo da expressão acima. Para o primeiro termo, observe que, multiplicando e dividindo pelos termos adequados, podemos escrevê-lo como:

$$\frac{\pi(x_{i+q_m+sq_{m+1}})}{\pi(x_{i+q_n})} = \frac{\pi(x_{i+q_m+sq_{m+1}})}{\pi(x_{i+q_m+(s-1)q_{m+1}})}\frac{\pi(x_{i+q_m+(s-1)q_{m+1}})}{\pi(x_{i+q_{m-1}+q_m})}\prod_{r=1}^{m-n-1}\frac{\pi(x_{i+q_{m-r}+q_{m+1-r}})}{\pi(x_{i+q_{m-r-1}+q_{m-r}})}\frac{\pi(x_{i+q_n+q_{n+1}})}{\pi(x_{i+q_n})}$$

Vamos estimar cada termo da expressão acima. O primeiro termo do lado direito da equação é limitado por $e^{\xi_{m+1}}$ por (2), assim como o último termo é limitado por ξ_{n+1}. Para o resto, vamos usar a seguinte observação utilizando (4):

$$\begin{aligned}\frac{\pi(x_{i+q_{m-r}+q_{m+1-r}})}{\pi(x_{i+q_{m-r-1}+q_{m-r}})} &= \frac{\pi(x_{i+q_{m-r}+q_{m+1-r}})}{\pi(x_i)}\frac{\pi(x_i)}{\pi(x_{i+q_{m-r-1}+q_{m-r}})}\\ &\leq e^{(k_{m-r+2}\xi_{m-r+1}+\xi_{m-r})+(k_{m-r+1}\xi_{m-r}+\xi_{m-r+1})}\end{aligned}$$

Usaremos esta observação para o segundo termo da expressão e para cada termo do produtório. No caso do produtório, obtemos que:

$$\prod_{r=1}^{m-n-1}\frac{\pi(x_{i+q_{m-r}+q_{m+1-r}})}{\pi(x_{i+q_{m-r-1}+q_{m-r}})} \leq e^{\sum_{s=0}^{m-n-1}(k_{m-s+2}\xi_{m-s+1}+\xi_{m-s})+(k_{m-r+1}\xi_{m-r}+\xi_{m-r+1})}$$

Portanto, resulta que $\frac{\pi(x_{i+q_m+sq_{m+1}})}{\pi(x_{i+q_n})}$ é limitado pela exponencial de:

$$\begin{aligned}&\xi_{m+1} + k_{m+2}\xi_{m+1} + \xi_m + k_{m+1}\xi_m + \xi_{m-1} + \sum_{r=1}^{m-n-1}[(k_{m-r+2}\xi_{m-r+1} + \xi_{m-r})\\ &+ (k_{m-r+1}\xi_{m-r} + \xi_{m-r+1)})] + \xi_{n+1}\end{aligned}$$

Como a sequência $\xi_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (uma vez que $e^{-\xi_n} \leq e^{\xi_n}$), então podemos limitar a expressão acima por:

$$\begin{aligned}&2\xi_{m+1} + 2k_{m+2}\xi_{m+1} + 2\xi_m + k_{m+1}\xi_m + \xi_{m-1} + \sum_{r=1}^{m-n-1}[(k_{m-r+2}\xi_{m-r+1} + \xi_{m-r})\\ &+ (k_{m-r+1}\xi_{m-r} + \xi_{m-r+1)})] + \xi_{n+1}\end{aligned}$$

Podemos então escrever a soma acima como:

$$2\sum_{s=3}^{m-n+1}[(k_{n+s}+1)\xi_{n+s-1})]+k_{n+2}\xi_{n+1}+\xi_{n+1}+\xi_n \leq 2\sum_{s=2}^{m-n+1}((k_{n+s}+1)\xi_{n+s-1})+\xi_n \quad (8)$$

Finalmente, podemos agora limitar (5). Já limitamos o primeiro termo de (5) por (6), e o segundo termo de (5) é limitado por ξ_n, por (3). Obtemos então que (5) é limitado por:

$$2\sum_{s=2}^{m-n+1}((k_{n+s}+1)\xi_{n+s-1})+2\xi_n$$

Concluímos que:

$$e^{-2\xi_n-\sum\limits_{m>n+1}2(k_{m+2}+1)\xi_{m+1}} \leq \frac{\pi(x_j)}{\pi(x_i)} \leq e^{2\xi_n+\sum\limits_{m>n+1}2(k_{m+2}+1)\xi_{m+1}}$$

de onde temos que π é contínua e positiva em O. Com efeito, para ver que π é positiva basta tomar $i=0$ na desigualdade anterior, uma vez que $\pi(x_0)=1$. Para ver que π é contínua, note que

$$-2\xi_n-\sum_{m>n+1}2(k_{m+2}+1)\xi_{m+1} \leq \log(\pi(x_j))-log(\pi(x_i)) \leq +2\xi_n+\sum_{m>n+1}2(k_{m+2}+1)\xi_{m+1}\}$$

E sabemos que a série $\sum\limits_{m>n+1}(k_{m+2}\xi_{m+1})$ é convergente por hipótese, e $\sum\limits_{m>n+1}\xi_{m+1}$ é convergente pois como $k_n \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a série converge pelo teste da comparação. Concluímos que a aplicação $log(\pi(x))$ é contínua, então $\pi(x)$ também é contínua, daí temos o resultado do teorema de Herman.

5.2 Lemas necessários

Nessa seção iremos definir uma sequência ξ_n que satisfaz as condições da seção anterior, o que implicará no resultado que queremos. Primeiro, consideramos a seguinte proposição:

Proposição 5.5. *Denote $\rho_n = \frac{p_n}{q_n}$, onde p_n, q_n são como definimos anteriormente. Para todo inteiro $0 \leq m \leq q_{n+1}$, podemos escrever:*

$$m = a_n q_n + a_{n-1}q_{n-1} + ... + a_0 q_0$$

em que $0 \leq a_i \leq k_{i+1}$ e $0 \leq i \leq n$.

Demonstração. Vamos fazer a prova por indução. Suponha que $n=0$. Logo, se temos que $0 \leq m \leq q_1 = k_1$, então $m = a_0 = a_0 q_0$, para algum $0 \leq a_0 \leq k_1$. Suponha que o resultado seja válido para n, ou seja, se $0 \leq m \leq q_{n+1}$, então $m = a_n q_n + a + n - 1 q_{n-1} + ... + a_0 q_0$, para constantes $0 \leq a_i \leq k_{i+1}$. Considere um inteiro $0 \leq m \leq q_{n+2}$. Se $m \leq q_{n+1}$, basta tomar $a_{n+1} = 0$ e aplicar a hipótese de indução. Se $q_{n+1} < m \leq q_{n+2}$, então fazendo a divisão euclidiana por q_{n+1} temos $q_{n+2} = s q_{n+1} + r$, onde $0 \leq r < q_{n+1}$. Como $r < q_{n+1}$, pela hipótese de indução, sabemos que $r = m = a_n q_n + a + n - 1 q_{n-1} + ... + a_0 q_0$, para certas constantes $0 \leq a_i \leq k_{i+1}$. Portanto, podemos escrever m como:

$$m = s q_{n+1} + r = s q_{n+1} + a_n q_n + a_{n-1} q_{n-1} + ... + a_0 q_0$$

Além disso, como $q_{n+2} = k_{n+2} q_{n+1} + q_n$, então $s \leq k_{n+2}$, pois, caso contrário, teríamos que $m > q_{n+2}$, um absurdo. □

A sequência que queremos será definida como: $\xi_n = const\, n^{e\nu+3} \bar{\lambda}^{\sqrt{n}}$, para uma constante $0 \leq \bar{\lambda} < 1$. Precisaremos provar alguns lemas para conseguir provar que $e^{-\xi_n} \leq \prod_{i=0}^{q_n-1} (\phi'(x_i))^{-1} \leq e^{\xi_n}$ e $\sum_n \xi_n k_{n+1} < \infty$, o que, como vimos anteriormente, implicará no teorema de Herman.

Lema 5.6. *Existe uma constante $\lambda < 1$ que não depende de k, n e x_0 tal que se para j temos $C_j^{(n)} \subset C_{i(k)}^{(n-k)}$, para algum $i(k) \in \mathbb{N}$, então:*

$$\ell(C_j^{(n)}(x_0)) \leq \lambda^k \ell(C_{i(k)}^{n-k}(x_0))$$

Demonstração. Começaremos provando uma observação:

$$\frac{\ell(C_j^{(n)}(x_0))}{\ell(C_i^{(n-1)}(x_0))} \leq (1 + e^{-C})^{-1}$$

Com efeito, considere a partição ξ_{n-1} e tome um elemento $C_i^{(n-1)}(x_0)$. Sabemos que $C_i^{(n+1)}(x_0) \subset C_i^{(n-1)}(x_0)$. Observe que tomando $j := i + q_n + (k_{n+1}) q_n$, segue que $C_j^{(n)}(x_0) \subset C_i^{(n-1)}(x_0)$ e $C_{j+q_n}^{(n)}(x_0) \supset C_i^{(n+1)}(x_0)$. Observe agora que pelo teorema do valor médio, segue que:

$$\frac{\ell(C_{j+q_n}^{(n)}(x_0))}{\ell(C_j^{(n)}(x_0))} = \frac{|\phi^{q_n}(C_j^{(n)}(x_0))|}{|C_j^{(n)}(x_0)|} = D\phi^{q_n}(x^*) = \prod_{j=0}^{q_n-1} \phi'(\phi^j(x^*))$$

de onde, pelo lema de Denjoy, temos que:

$$e^C \leq \frac{\ell(C_{j+q_n}^{(n)}(x_0))}{\ell(C_j^{(n)}(x_0))} \leq e^C$$

Além disso, como $C_j^{(n)}(x_0) \subset C_i^{(n-1)}(x_0)$ e $C_{j+q_n}^{(n)}(x_0) \supset C_i^{(n+1)}(x_0)$, obtemos:

$$\frac{\ell(C_i^{(n+1)}(x_0))}{\ell(C_i^{(n-1)}(x_0))} \leq \frac{\ell(C_i^{(n+1)}(x_0))}{\ell(C_j^{(n)}(x_0)) + \ell(C_i^{(n+1)}(x_0))} = \frac{1}{1 + \frac{\ell(C_j^{(n)}(x_0))}{\ell(C_i^{(n+1)}(x_0))}} \leq \frac{1}{1 + \frac{\ell(C_j^{(n)}(x_0))}{\ell(C_{j+q_n}^{(n)}(x_0))}} \leq (1 + e^{-C})^{-1}$$

Suponha agora que para algum j temos $C_j^{(n)}(x_0) \subset C_i^{(n-1)}(x_0)$. Temos dois casos possíveis: se $k_{n+1} > 1$, então $C_{j\pm q_n}^{(n)}(x_0) \subset C_j^{(n-1)}(x_0)$ para alguma escolha do sinal. Assim, novamente utilizando o lema de Denjoy temos que:

$$\frac{\ell(C_j^{(n)}(x_0))}{\ell(C_i^{(n-1)}(x_0))} \leq \frac{\ell(C_j^{(n)}(x_0))}{\ell(C_j^{(n)}(x_0)) + \ell(C_{j\pm q_n}^{(n)}(x_0))} = \frac{1}{1 + \frac{\ell(C_{j\pm q_n}^{(n)}(x_0))}{\ell(C_j^{(n)}(x_0))}} \leq (1 + e^{-C})^{-1}$$

Suponha agora que $k_{n+1} = 1$. Desta forma $C_i^{(n-1)}(x_0) = C_i^{(n+1)}(x_0) + C_{i+q_{n-1}}^{n}(x_0)$. Aplicando a medida de lebesgue e dividindo por $\ell(C_i^{(n-1)}(x_0))$ obtemos:

$$\frac{\ell(C_i^{(n-1)}(x_0))}{\ell(C_i^{(n-1)}(x_0))} = \frac{\ell(C_i^{(n+1)}(x_0))}{\ell(C_i^{(n-1)}(x_0))} + \frac{\ell(C_{i+q_{n-1}}^{n}(x_0))}{\ell(C_i^{(n-1)}(x_0))}$$

e usamos a observação que fizemos antes, temos que:

$$\frac{\ell(C_{i+q_{n-1}}^{n}(x_0))}{\ell(C_i^{(n-1)}(x_0))} \leq 1 - (1 + e^{-C})^{-1}$$

Defina $\lambda = max\{1 - (1 + e^{-C})^{-1}, (1 + e^{-C})^{-1}\}$, logo obtemos o caso geral:

$$\frac{\ell(C_j^{(n)}(x_0))}{\ell(C_i^{(n-1)}(x_0))} \leq \lambda$$

sempre que for satisfeita a condição que $C_j^{(n)}(x_0) \subset C_i^{(n-1)}(x_0)$ para algum j e i tal que $C_i^{(n-1)}(x_0)$ é um elemento da partição ξ_{n-1}. Fixemos agora $0 < k < n$ e considere $C_i^{(n)}(x_0) \subset C_{i(k)}^{(n-k)}(x_0)$ como na hipótese do lema. Observe que utilizando o caso geral que provamos, podemos escrever:

$$\frac{\ell(C_i^{(n)}(x_0))}{\ell(C_{i(k)}^{(n-k)}(x_0))} = \frac{\ell(C_i^{(n)}(x_0))}{\ell(C_{j_1}^{(n-1)}(x_0))} \frac{\ell(C_{j_1}^{(n-1)}(x_0))}{\ell(C_{j_2}^{(n-2)}(x_0))} \cdots \frac{\ell(C_{j_k}^{(n-k+1)}(x_0))}{\ell(C_{i(k)}^{(n-k)}(x_0))} \leq \lambda^k$$

no qual j_1 é tal que $C_i^{(n)}(x_0) \subset C_{j_1}^{(n-1)}(x_0)$, e, analogamente, tomamos j_s adequados tais que $1 < s \leq k$ com $C_{j_{s-1}}^{(n+1-s)}(x_0) \subset C_{j_s}^{(n-s)}(x_0)$. Note que $C_{j_k}^{(n-k+1)}(x_0) \subset C_{i(k)}^{(n-k)}(x_0)$ por construção e usando a hipótese que $C_i^{(n)}(x_0) \subset C_{i(k)}^{(n-k)}(x_0)$, uma vez que cada intervalo de uma partição só pode estar contido em um único intervalo da partição anterior. Segue o resultado como queríamos. $\square$

Tome $y \in S^1$ e defina $H_m(y) = \sum\limits_{i=0}^{q_m-1} log\phi'(y_i)$.

Lema 5.7. *Sejam $y_0^1, y_0^2 \in C_i^{(n)}(x_0)$ e $k < n$. Temos que $|H_{n-k}(y_0^1) - H_{n-k}(y_0^2)| \leq const\lambda^k$, onde λ é a mesma constante do lema anterior.*

Demonstração. Como $y_0^1, y_0^2 \in C_i^{(n)}(x_0)$ e sabemos que $C_i^{(n)}(x_0) = C_0^{(n)}(x_i)$, então podemos escrever que $y_0^1, y_0^2 \in C_0^{(n)}(x_i)$. Tomando $m = k$ ou $m = k+1$ de forma que m seja um número par, temos que $C_0^{(n)}(x_i) \subset C_0^{(n-m)}(x_i)$. Dessa forma, segue que $y_i^1, y_i^2 \in C_i^{(n)}(x_i)$, daí, temos que:

$$|H_{n-k}(y_0^1) - H_{n-k}(y_0^2)| \leq \sum_{j=0}^{q_{n-k}-1} |log\phi'(y_j^1) - log\phi'(y_j^2)|$$

Sabemos que $\phi \in C^2$, logo pelo teorema do valor médio temos que para cada j existe algum $\bar{x}_j$ tal que:

$$\sum_{j=0}^{q_{n-k}-1} |log\phi'(y_j^1) - log\phi'(y_j^2)| \leq \sum_{j=0}^{q_{n-k}-1} \left|\frac{\phi''(\bar{x}_j)}{\phi'(\bar{x}_j)}\right| |y_j^1 - y_j^2| \leq sup \left|\frac{\phi''(x)}{\phi'(x)}\right| \sum_{j=0}^{q_{n-k}-1} |y_j^1 - y_j^2|$$

onde a última desigualdade segue pois S^1 é compacto e $\phi \in C^2$. Como $|y_j^1 - y_j^2| \leq \ell(C_j^{(n)}(x_i))$, então $|y_j^1 - y_j^2| \leq \ell(C_j^{(n)}(x_i))$, de onde:

$$sup \left|\frac{\phi''(x)}{\phi'(x)}\right| \sum_{j=0}^{q_{n-k}-1} \ell(C_j^{(n)}(x_i)) \left|\frac{\ell(C_j^{(n-m)}(x_i))}{\ell(C_j^{(n-m)}(x_i))}\right| \leq sup \left|\frac{\phi''(x)}{\phi'(x)}\right| \sum_{j=0}^{q_{n-k}-1} \lambda^m \ell(C_j^{(n-m)}(x_i))$$

Observe que se $m = k+1$, então sabemos que $\sum\limits_{j=0}^{q_{n-k}-1} \ell(C_j^{(n-m)}(x_i)) < 1$. Se $m = k$, note que $q_{n-k} < q_{n-k+1}$, pois a sequência de termos q_n é crescente. Além disso, ℓ é uma medida positiva, portanto temos que $\sum\limits_{j=0}^{q_{n-k}-1} \ell(C_j^{(n-m)}(x_i)) \leq \sum\limits_{j=0}^{q_{n-k+1}-1} \ell(C_j^{(n-m)}(x_i)) \leq 1$. Além disso, como $C_j^{(n)}(x_i) \subset C_j^{(n-m)}(x_i)$, pelo lema anterior, segue que:

$$|H_{n-k}(y_0^1) - H_{n-k}(y_0^2)| \leq sup \left|\frac{\phi''(x)}{\phi'(x)}\right| \lambda^m \leq const\lambda^m \leq const\lambda^k$$

pois $m = k$ ou $m = k+1$, e como $\lambda < 1$, então $\lambda^{k+1} < \lambda^k$. $\square$

Lema 5.8. *Fixado $x_0 \in S^1$, temos que $|H_n(y_0) - H_n(x_0)| \leq const\, b_n$ para todo $y_0 \in C_0^{(n+1)}(x_0)$. Em que b_n é dado por:*

$$\Delta^{(n)} x_j = |x_{j+q_{n+1}} - x_j|$$

$$b_n = max\left\{\max_{\{0 \leq p < q_n, x_0\}} \left|\sum_{j=0}^{p} \frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)} \Delta^{(n)} x_j\right|; \lambda^{n\gamma}\right\}$$

Demonstração. Defina $I := \sum_{i=0}^{q_n-1}[log\phi'(y_i) - log\phi'(x_i)]$, aplicando o teorema do valor médio como no lema anterior, temos que:

$$log\phi'(y_i) - log\phi'(x_i) = \frac{\phi''(\bar{x}_i)}{\phi'(\bar{x}_i)}|y_i - x_i|$$

Como ϕ'' é $\gamma - holder$, então $\frac{\phi''}{\phi'}$ também o é. Usando este fato e somando e subtraindo o termo $\frac{\phi''(\bar{x}_i)}{\phi'(x_i)}|y_i - x_i|$ na expressão acima, obtemos que:

$$\frac{\phi''(\bar{x}_i)}{\phi'(x_i)}|y_i - x_i| + \left(\frac{\phi''(\bar{x}_i)}{\phi'(\bar{x}_i)} - \frac{\phi''(\bar{x}_i)}{\phi'(x_i)}\right)|y_i - x_i| \leq \frac{\phi''(\bar{x}_i)}{\phi'(x_i)}|y_i - x_i| + \alpha|\bar{x} - x_i|^{\gamma}|y_i - x_i|$$

em que α é uma constante que vem do fato de $\frac{\phi''}{\phi'}$ ser $\gamma - holder$. Observe que $\bar{x} \in (x_i, y_i)$, portanto $|\bar{x} - x_i| \leq |y_i - x_i|$. De onde temos que:

$$\sum_{i=0}^{q_n-1} log\phi'(y_i) - log\phi'(x_i) \leq \sum_{i=0}^{q_n-1} \frac{\phi''(\bar{x}_i)}{\phi'(x_i)}|y_i - x_i| + \sum_{i=0}^{q_n-1} \alpha|y_i - x_i|^{\gamma+1} = I_1 + I_2$$

Considere primeiro I_2. Para cada n, seja $|y_{i_n} - x_{i_n}| = max|y_i - x_i|$ para $0 \leq i \leq q_n - 1$. Como $y_0 \in C_0^{(n+1)}(x_0)$, então $y_{i_n}, x_{i_n} \in C_{i_n}^{n+1}(x_0)$. Daí, temos que:

$$\sum_{i=0}^{q_n-1} \alpha|y_i - x_i|^{\gamma+1} \leq \alpha|y_{i_n} - x_{i_n}|^{\gamma} \sum_{i=0}^{q_n-1} |y_i - x_i|$$

Usando o fato que os intervalos $C_i^{(n+1)}(x_0)$ são par a par disjuntos para $0 \leq i \leq q_n - 1$, temos que:

$$\alpha|y_{i_n} - x_{i_n}|^{\gamma} \sum_{i=0}^{q_n-1} |y_i - x_i| \leq \alpha|y_{i_n} - x_{i_n}|^{\gamma}$$

Note agora que $|y_{i_n} - x_{i_n}|^{\gamma} \leq \ell(C_{i_n}^{n+1}(x_0))^{\gamma} \leq \lambda^{n\gamma}\ell(C_{i(k)}^{1}(x_0))^{\gamma} < \lambda^{n\gamma}$, utilizando o Lema 5.6. Portanto, $I_2 \leq \alpha\lambda^{n\gamma}$.

Consideremos agora I_1. Primeiramente, provemos a seguinte afirmação: dados $x_i, y_i \in C_i^{(n+1)}(x_0)$, podemos escrever:

$$\phi(y_i) = \phi(x_i) + \phi'(x_i)(y_i - x_i) + \frac{\phi''(x_i)}{2}(y_i - x_i)^2 + O(y_i - x_i)^{2+\gamma}$$

Note que a afirmação acima é como uma versão da série de Taylor para funções $C^{2+\gamma}$. Para prová-la, note que como $\phi \in C^2$, então pela série de Taylor, temos:

$$\begin{aligned}\phi(y_i) =& \phi(x_i) + \phi'(x_i)(y_i - x_i) + \frac{\phi''(x_i)}{2}(y_i - x_i)^2 + R, e\\ \phi(y_i) =& \phi(x_i) + \phi'(x_i)(y_i - x_i) + \frac{\phi''(\xi)}{2}(y_i - x_i)^2\end{aligned}$$

em que R é o resto na série de Taylor para aplicações C^2, e o segundo caso é utilizando $R = \frac{\phi''(\xi)}{2}(y_i - x_i)^2$ para aplicações C^1, para algum $\xi \in (x_i, y_i)$. Subtraindo as expressões acima e tomando o módulo, temos:

$$|R| = \left|\frac{\phi''(\xi)}{2}(y_i - x_i)^2 - \frac{\phi''(x_i)}{2}(y_i - x_i)^2\right| \leq \frac{1}{2}|y_i - x_i|^2|\phi''(\xi) - \phi''(x_i)|$$

Usando o fato que ϕ'' é $\gamma - holder$, segue que $|\phi''(\xi) - \phi''(x_i)| \leq C|\xi - x_i|^\gamma \leq \alpha|y_i - x_i|^\gamma$, de onde segue que:

$$|R| \leq \frac{1}{2}|y_i - x_i|^2|\phi''(\xi) - \phi''(x_i)| \leq\leq \frac{\alpha}{2}|y_i - x_i|^{2+\gamma}$$

como queríamos.

Para concluir a demonstração do Lema precisaremos definir os seguintes termos:

$$\varrho_i := \frac{y_i - x_i}{\Delta^{(n)}x_i}$$

Usando a afirmação, obtemos a relação:

$$\begin{aligned}\varrho_{i+1} &= \frac{\phi(y_i) - \phi(x_i)}{\phi(x_{i+q_{n+1}}) - \phi(x_i)} = \frac{\phi'(x_i)(y_i - x_i) + \frac{\phi''(x_i)}{2}(y_i - x_i)^2 + \alpha_i^I(y_i - x_i)^{2+\gamma}}{\phi'(x_i)\Delta^{(n)}x_i + \frac{\phi''(x_i)}{2}(\Delta^{(n)}x_i)^2 + \alpha_i^{II}(\Delta^{(n)}x_i)^{2+\gamma}} \\ &= \frac{(y_i - x_i)}{\Delta^{(n)}x_i}\frac{1 + \frac{\phi''(x_i)}{2\phi'(x_i)}(y_i - x_i) + \frac{\alpha_i^I}{\phi'(x_i)}(y_i - x_i)^{1+\gamma}}{1 + \frac{\phi''(x_i)}{2\phi'(x_i)}(\Delta^{(n)}x_i) + \frac{\alpha_i^{II}}{\phi'(x_i)}(\Delta^{(n)}x_i)^{1+\gamma}}\end{aligned}$$

Definindo $\alpha_i^{III} := \frac{\alpha_i^I}{\phi'(x_i)}$ e $\alpha_i^{IV} := \frac{\alpha_i^{II}}{\phi'(x_i)}$, obtemos:

$$\varrho_{i+1} = \varrho_i \frac{1 + \frac{\phi''(x_i)}{2\phi'(x_i)}(y_i - x_i) + \alpha_i^{III}(y_i - x_i)^{1+\gamma}}{1 + \frac{\phi''(x_i)}{2\phi'(x_i)}(\Delta^{(n)}x_i) + \alpha_i^{IV}(\Delta^{(n)}x_i)^{1+\gamma}}$$

Vamos definir agora os termos:

$$\varrho_i' := \varrho_i \prod_{j<i}\left[1 + \frac{\phi''(x_j)}{2}(\Delta^{(n)}x_j) + \alpha_j^{IV}(\Delta^{(n)}x_j)^{1+\gamma}\right]$$

Afirmamos que ϱ_i' pode ser escrito como $\varrho_i(1 + b_i')$, para algum b_i' tal que $|b_i'| \leq const\, b_n$. Vamos fazer a demonstração por indução. Se $i = 1$, temos que:

$$\varrho_1' := \varrho_1\left[1 + \frac{\phi''(x_1)}{2}(\Delta^{(n)}x_1) + \alpha_1^{IV}(\Delta^{(n)}x_1)^{1+\gamma}\right]$$

Vamos definir b_1' como:

$$\begin{aligned}b_1' :&= \frac{\phi''(x_1)}{2}(\Delta^{(n)}x_1) + \alpha_1^{IV}(\Delta^{(n)}x_1)^{1+\gamma} = \frac{\phi''(x_1)}{\phi'(x_1)}(\Delta^{(n)}x_1)\left[\frac{\phi'(x_1)}{2} + \frac{\alpha_1^{IV}\phi'(x_1)}{\phi''(x_1)}(\Delta^{(n)}x_1)^\gamma\right] \\ &\leq b_n\, const\end{aligned}$$

em que a última desigualdade vem do fato de $\phi \in C^2$ e $\Delta^{(n)}x_1 \leq 1$. Suponha agora que o resultado é válido para i, ou seja, $\varrho'_i = \varrho_i(1+b'_i)$ com $|b'_i| \leq b_n$. Usando a hipótese de indução, escrevemos:

$$\varrho'_{i+1} := \varrho_{i+1}(1+b'_i)(1+\frac{\phi''(x_i)}{2}(\Delta^{(n)}x_i) + \alpha_i^{IV}(\Delta^{(n)}x_i)^{1+\gamma}) = \varrho_{i+1}(1+b'_{i+1})$$

em que b'_{i+1} é dado por:

$$\begin{aligned} b'_{i+1} &= b'_i + b'_i\left[\frac{\phi''(x_i)}{2}(\Delta^{(n)}x_i) + \alpha_i^{IV}(\Delta^{(n)}x_i)^{1+\gamma}\right] + \frac{\phi''(x_i)}{2}(\Delta^{(n)}x_i) + \alpha_i^{IV}(\Delta^{(n)}x_i)^{1+\gamma} \\ &\leq b_n + const\, b_n + b_n\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha_i^{IV}\phi'(x_i)}{\phi''(x_i)}(\Delta^{(n)}x_i)^{\gamma}\right) \leq const\, b_n \end{aligned}$$

o que conclui a prova da afirmação.

Iremos escrever agora ϱ'_{i+1} em função de ϱ'_i, como fizemos antes com ϱ. Note que usando a relação que encontramos entre ϱ_i e ϱ_{i+1}, segue que:

$$\begin{aligned} \varrho'_{i+1} &:= \varrho_{i+1}\prod_{j<i}\left[1+\frac{\phi''(x_j)}{2}(\Delta^{(n)}x_j) + \alpha_j^{IV}(\Delta^{(n)}x_j)^{1+\gamma}\right](1+\frac{\phi''(x_i)}{2}(\Delta^{(n)}x_i) + \alpha_i^{IV}(\Delta^{(n)}x_i)^{1+\gamma}) \\ &= \varrho_i\prod_{j<i}\left[1+\frac{\phi''(x_j)}{2}(\Delta^{(n)}x_j) + \alpha_j^{IV}(\Delta^{(n)}x_j)^{1+\gamma}\right](1+\frac{\phi''(x_i)}{2\phi'(x_i)}(y_i-x_i) + \alpha_i^{III}(y_i-x_i)^{1+\gamma}) \\ &= \varrho'_i(1+\frac{\phi''(x_i)}{2\phi'(x_i)}(y_i-x_i) + \alpha_i^{III}(y_i-x_i)^{1+\gamma}) \end{aligned}$$

Pela definição de ϱ_i, sabemos que $(y_i - x_i) = \varrho_i\Delta^{(n)}x_i$, de onde segue que:

$$\varrho'_{i+1} = \varrho'_i\left(1+\frac{\phi''(x_i)}{2\phi'(x_i)}\varrho'_i(1+b'_i)^{-1}\Delta^{(n)}x_i + \alpha_i^{III}(\varrho'_i(1+b'_i)^{-1})^{1+\gamma}(\Delta^{(n)}x_i)^{1+\gamma}\right)$$

Dessa relação, usando a expressão de séries geométricas, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho'_{i+1}} &= \frac{1}{\varrho'_i}\left(1-\frac{\phi''(x_i)}{2\phi'(x_i)}\varrho'_i(1+b'_i)^{-1}\Delta^{(n)}x_i + \alpha_i^{V}(\varrho'_i(1+b'_i)^{-1})^{1+\gamma}(\Delta^{(n)}x_i)^{1+\gamma}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\varrho'_i} - \frac{\phi''(x_i)}{2\phi'(x_i)}(1+b'_i)^{-1}\Delta^{(n)}x_i + \alpha_i^{V}\varrho_i'^{\gamma}((1+b'_i)^{-1-\gamma}(\Delta^{(n)}x_i)^{1+\gamma}\right) \end{aligned}$$

Note que fixado i podemos aplicar esta última relação i vezes para estimar $\frac{1}{\varrho'_i} - \frac{1}{\varrho'_0}$, de onde teríamos:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{\varrho'_i} - \frac{1}{\varrho'_0}\right| &= \left|\sum_{j<i}\left[-\frac{\phi''(x_j)}{2\phi'(x_j)}(\Delta^{(n)}x_j) + \alpha_j^{V}\varrho_j'^{\gamma}((1+b'_j)^{-1-\gamma}(\Delta^{(n)}x_j)^{1+\gamma}\right]\right| \\ &\leq \left|\sum_{j<i} -\frac{\phi''(x_j)}{2\phi'(x_j)}(\Delta^{(n)}x_j)\right| + \left|\sum_{j<i}\alpha_j^{V}\varrho_j'^{\gamma}((1+b'_j)^{-1-\gamma}(\Delta^{(n)}x_j)^{1+\gamma}\right| \\ &\leq b_n + const\sum_{j<i}\lambda^{n+1+\gamma} \leq b_n + const\lambda^{n\gamma} \leq const\, b_n \end{aligned}$$

onde utilizamos o Lema 5.6 para $k = n$ em $\Delta^{(n)}x_j = |x_{j+q_{n+1}} - x_j| \leq \lambda^n$. Utilizando a relação acima, obtemos $\left|\frac{1}{\varrho_i'}\right| \leq const\, b_n + \left|\frac{1}{\varrho_0'}\right|$, de onde temos $|\varrho_0' - \varrho_i'| \leq \varrho_0'\varrho_i' const\, b_n \leq const\, b_n \varrho_0$. Dessa última desigualdade temos $|\varrho_0 - \varrho_i| \leq const\, b_n \varrho_0$. Iremos utilizar esta estimativa para limitar $|I_1|$. Com efeito:

$$|I_1| = \left|\sum_{i=0}^{q_n-1} \frac{\phi''(x_i)}{\phi'(x_i)} \Delta^{(n)} x_i \varrho_i\right| = \left|\sum_{i=0}^{q_n-1} \frac{\phi''(x_i)}{\phi'(x_i)} \Delta^{(n)} x_i (\varrho_i \pm \varrho_0)\right| \leq \varrho_0 \left|\sum_{i=0}^{q_n-1} \frac{\phi''(x_i)}{\phi'(x_i)} \Delta^{(n)} x_i\right|$$
$$+ \left|\sum_{i=0}^{q_n-1} \frac{\phi''(x_i)}{\phi'(x_i)} \Delta^{(n)} x_i (\varrho_i - \varrho_0)\right| \leq const\, b_n \varrho_0$$

□

Lema 5.9. *Para todo $x_0, y_0 \in S^1$ vale que: $|H_n(y_0) - H_n(x_0)| \leq const \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} b_{n-k}(n-k)^\nu + const\, n^{\nu+1}\lambda^{n/2}$.*

Demonstração. Fixado $x_0 \in S^1$, construa a sequência de intervalos $C_i^{(m)}(x_0)$ para $m = n$ e $n+1$. Dado um ponto $y_0 \in S^1$, então temos que $y_0 \in C_i^{(n+1)}(x_0)$ para algum $0 \leq i < q_n$ ou $y_0 \in C_j^{(n)}(x_0)$ para algum $0 \leq j < q_{n+1}$. Suponha que o primeiro caso seja verdade e tome $i \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq i < q_n$ com $y_0 \in C_i^{(n+1)}(x_0)$. Queremos estimar:

$$|J_n| := |H_n(y_0) - H_n(x_0)| = \left|\sum_{s=0}^{q_n-1} log\phi'(y_s) - \sum_{s=0}^{q_n-1} log\phi'(x_s)\right|$$

Vamos separar cada uma das somas acima em duas e reordená-las da seguinte forma:

$$\left|\sum_{s=0}^{q_n-1-i} log\phi'(y_s) - \sum_{s=i}^{q_n-1} log\phi'(x_s) + \sum_{s=q_n-i}^{q_n-1} log\phi'(y_s) - \sum_{s=0}^{i-1} log\phi'(x_s)\right|$$

As duas primeiras somas acima podem ser escritas em um único somatório, assim como as duas últimas somas, logo obtemos pela desigualdade triangular:

$$|J_n| \leq \left|\sum_{s=0}^{q_n-1-i} [log\phi'(y_s) - log\phi'(x_{s+i})]\right| + \left|\sum_{s=q_n-i}^{q_n-1} [log\phi'(y_s) - log\phi'(x_{s-q_n+i})]\right| \qquad (9)$$

Afirmamos que cada uma das somas em (9) pode ser escrita na forma: $|\bar{J}_r| := |\sum_{s=0}^{r} [log\phi'(z_s^1) - log\phi'(z_s^2)]|$ satisfazendo $z_0^1, z_0^2 \in C_0^{(n)}(z_0^2)$ e $0 \leq r \leq q_n - 1$. Com efeito, considere a primeira soma em (9). Neste caso, trocaremos a posição de y_s e x_{s+i}:

$$\left|\sum_{s=0}^{q_n-1-i} [log\phi'(y_s) - log\phi'(x_{s+i})]\right| = \left|\sum_{s=0}^{q_n-1-i} [log\phi'(x_{s+i})) - log\phi'(y_s)]\right| \qquad (10)$$

e definimos $z_0^1 := x_i$ e $z_0^2 := y_0$, com $r := q_n - i - 1 \leq q_n - 1$. Resta mostrar que $z_0^1, z_0^2 \in C_0^{(n)}(z_0^2)$. Como $x_0 \in C_0^{(n+1)}(x_0)$, então $x_i \in C_i^{(n+1)}(x_0) = C_0^{(n+1)}(x_i)$. Além disso, por hipótese $y_0 \in C_0^{(n+1)}(x_i)$. Concluímos que $y_0, x_i \in C_0^{(n+1)}(x_i)$. Isso implicará que $x_i \in C_0^{(n)}(y_0)$. Suponha que não, por absurdo. Caso n seja par, então $y_0 \in C_0^{(n+1)}(x_i) = [x_i, x_{i+q_{n+1}}]$ e teríamos que $C_0^{(n)}(y_0) = [y_{q_n}, y_0] \subset (x_i, x_{i+q_{n+1}}]$, pois caso contrário $C_0^{(n)}(y_0)$ iria conter x_i. Observe agora que o ponto $x_{i+q_{n+1}}$ está entre y_0 e $x_{i+(k_{n+1}-1)q_n+q_{n-1}}$, e como ϕ^{q_n} preserva orientação, então $\phi^{q_n}(x_{i+q_{n+1}}) = x_{i+q_{n+1}+q_n} = x_{i+(k_{n+1}+1)q_n+q_{n-1}}$ está entre y_{q_n} e $x_{i+q_{n+1}}$, o que contrariaria a maximalidade de k_{n+1}. Finalmente, temos então que $x_i, y_0 \in C_0^{(n)}(y_0)$, como queríamos. Caso n seja ímpar, usamos os mesmos argumentos para $C_0^{(n)}(y_0) = [y_0, y_{q_n}]$ e $C_0^{(n+1)}(x_i) = [x_{i+q_{n+1}}, x_i]$.

Considere agora a segunda soma em (9). Definimos então $y_{q_n - i} := z_0^1$ e $x_0 := z_0^2$ com $r = (q_{n-1}) - (q_n - i) = i - 1 \leq q_n - 1$. Resta mostrar que $z_0^1, z_0^2 \in C_0^{(n)}(z_0^2)$. De fato, observe que $y_{q_n - i} \in C_{q_n}^{(n+1)}(x_0) \subseteq C_0^{(n)}(x_0)$. Com efeito, como sabemos que $y_0 \in C_i^{(n+1)}(x_0)$ então $y_{-i+q_n} \in C_{q_n}^{(n+1)}(x_0)$. Suponha agora que n é par, logo $C_{q_n}^{(n+1)}(x_0) = [x_{q_n}, x_{i+(k_{n+1}+1)q_n+q_{n-1}}]$ e $C_0^{(n)}(x_0) = [x_{q_n}, x_0]$. Note então que por definição de k_{n+1} e como ϕ^{q_n} preserva orientação, sabemos que $x_{i+(k_{n+1}+1)q_n+q_{n-1}}$ está entre x_{q_n} e x_0, logo $C_{q_n}^{(n+1)}(x_0) \subseteq C_0^{(n)}(x_0)$. O caso para n ímpar é análogo. Portanto, temos que $y_{q_n - i}, x_0 \in C_0^{(n)}(x_0)$, como queríamos.

Fixemos uma soma da forma $|\bar{J}_r| := |\sum_{s=0}^{r}[log\phi'(z_s^1) - log\phi'(z_s^2)]|$ satisfazendo $z_0^1, z_0^2 \in C_0^{(n)}(z_0^2)$ e $0 \leq r \leq q_n - 1$. Como r é inteiro, pela proposição 5.5 sabemos que podemos escrevê-lo como:

$$r = a_{n-1}q_{n-1} + a_{n-2}q_{n-2} + ... + a_0 q_0$$

no qual $0 \leq a_j \leq k_{i+1}$. Iremos escrever a soma $|\bar{J}_r|$ da seguinte forma: fixado $0 \leq j \leq q_{n-1}$, a considere o termo a_j associado, e vamos somar os termos $s = a_{n-1}q_{n-1} + ... + a_{j+1}q_{j+1}$ até $s = a_{n-1}q_{n-1} + ... + a_{j+1}q_{j+1} + a_j q_j - 1$. Dessa forma, escrevemos $|\bar{J}_r|$ como:

$$|\bar{J}_r| = \left| \sum_{j=0}^{q_n - 1} \sum_{s} [log\phi'(z_s^1) - log\phi'(z_s^2)] \right|$$

$$a_{n-1}q_{n-1} + ... + a_{j+1}q_{j+1} \leq s < a_{n-1}q_{n-1} + ... + a_{j+1}q_{j+1} + a_j q_j$$

Observe que a soma interna possui $(a_{n-1}q_{n-1} + ... + a_{j+1}q_{j+1} + a_j q_j - 1) - (a_{n-1}q_{n-1} + ... + a_{j+1}q_{j+1}) = a_j q_j - 1$ termos. Iremos separá-la em $a_j - 1$ somas da seguinte forma: começaremos somando de $s = a_{n-1}q_{n-1} + ... + a_{j+1}q_{j+1}$ até $s = a_{n-1}q_{n-1} + ... + a_{j+1}q_{j+1} +$

$q_j - 1$, então somaremos de $s = a_{n-1}q_{n-1} + ... + a_{j+1}q_{j+1} + q_j$ até $s = a_{n-1}q_{n-1} + ... + a_{j+1}q_{j+1} + 2q_j - 1$, e assim por diante. Portanto, ao final deste processo, obtemos:

$$|\bar{J}_r| = \left| \sum_{j=0}^{q_n-1} \sum_{i=1}^{a_j} \sum_{s} [log\phi'(z_s^1) - log\phi'(z_s^2)] \right| \tag{11}$$

$$a_{n-1}q_{n-1} + ... + a_{j+1}q_{j+1} + (i-1)q_j \leq s \leq a_{n-1}q_{n-1} + ... + a_{j+1}q_{j+1} + iq_j - 1 \tag{12}$$

Considere a soma interna em (11) e observe que cada uma delas possui

$$(a_{n-1}q_{n-1} + ... + a_{j+1}q_{j+1} + iq_j - 1) - (a_{n-1}q_{n-1} + ... + a_{j+1}q_{j+1} + (i-1)q_j) = q_j - 1$$

termos, por (12). Fixemos $0 \leq j \leq q_{n-1}$ e $1 \leq i \leq a_j$ e defina:

$$\bar{z}_0^1 := z^1_{a_{n-1}q_{n-1}+...+a_{j+1}q_{j+1}+(i-1)q_j}$$
$$\bar{z}_0^2 := z^2_{a_{n-1}q_{n-1}+...+a_{j+1}q_{j+1}+(i-1)q_j}$$

Logo para um j e i fixos, a soma interna de (10) correspondente pode ser escrita como:

$$\left| \sum_{s=0}^{q_j-1} [log\phi'(\bar{z}_s^1) - log\phi'(\bar{z}_s^2)] \right| = |H_j(\bar{z}_0^1) - H_j(\bar{z}_0^2)|$$

Em particular, sabemos que como $z_0^1, z_0^2 \in C_0^{(n)}(z_0^2)$, então $\bar{z}_0^1, \bar{z}_0^2 \in C_0^{(n)}(\bar{z}_0^2)$.

Vamos estudar duas possibilidades: podemos separar a soma (10) em $j < \left[\frac{n}{2}\right]$ ou $j \geq \left[\frac{n}{2}\right]$. Vamos ao primeiro caso, onde usaremos o lema 5.7. Observe que para todo $j < \left[\frac{n}{2}\right]$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n - k = j$, logo $k = n - j \geq n - n/2 = n/2$. Dessa forma, como $\bar{z}_0^1, \bar{z}_0^2 \in C_0^{(n)}(\bar{z}_0^2)$, podemos aplicar o lema 5.7 e obter:

$$|H_j(\bar{z}_0^1) - H_j(\bar{z}_0^2)| = |H_{n-k}(\bar{z}_0^1) - H_{n-k}(\bar{z}_0^2)| \leq const\,\lambda^k \leq const\,\lambda^{\frac{n}{2}}$$

Portanto se $j < \left[\frac{n}{2}\right]$ temos que:

$$\left| \sum_{j<\frac{n}{2}} \sum_{i=1}^{a_j} \sum_{s=0}^{q_i-1} [log\phi'(z_s^1) - log\phi'(z_s^2)] \right| \leq \sum_{j=0}^{q_n-1} \sum_{i=1}^{a_j} const\,\lambda^{\frac{n}{2}} \leq \sum_{j<\frac{n}{2}} (\max_{j<\frac{n}{2}}\{a_j\}) const\,\lambda^{\frac{n}{2}}$$

então como $a_j \leq k_{j+1}$, temos que se $j_0 := (\max_{j<\frac{n}{2}}\{a_j\})$ então $a_{j_0} \leq k_{j_0+1} \leq const\,(j_0+1)^\nu$, com $j_0 + 1 \leq n$, então :

$$\sum_{j<\frac{n}{2}} (\max_{j<\frac{n}{2}}\{a_j\}) const\,\lambda^{\frac{n}{2}} \leq \left[\frac{n}{2}\right] k_{j_0+1}\, const \lambda^{\frac{n}{2}} \leq n\, const\,(j_0+1)^\nu\, const\,\lambda^{\frac{n}{2}}$$
$$\leq n\, const\,(n)^\nu\, const\,\lambda^{\frac{n}{2}} = const\, n^{\nu+1} \lambda^{\frac{n}{2}}$$

Suponha agora que $j \geq \left[\frac{n}{2}\right]$. Neste caso, iremos utilizar o lema 5.8 . Note que agora para cada $\left[\frac{n}{2}\right] \leq j \leq n-1$ existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $j = n-k$ para $0 < k \leq \left[\frac{n}{2}\right]$. Como fizemos antes, para cada j definiremos $\bar{z}_0^1$ e $\bar{z}_0^2$ com $\bar{z}_0^1, \bar{z}_0^2 \in C_0^{(n)}(\bar{z}_0^2)$ e temos que:

$$|H_j(\bar{z}_0^1) - H_j(\bar{z}_0^2)| = |H_{n-k}(\bar{z}_0^1) - H_{n-k}(\bar{z}_0^2)|$$

Observe que se $k = 1$, como $\bar{z}_0^1, \bar{z}_0^2 \in C_0^{(n)}(\bar{z}_0^2)$ podemos aplicar diretamente o lema 5.8 e obter:

$$|H_{n-1}(\bar{z}_0^1) - H_{n-1}(\bar{z}_0^2)| \leq const\, b_{n-1}$$

Da mesma forma, sempre que k é ímpar, sabemos que, por construção das partições de S^1, temos que $\bar{z}_0^1, \bar{z}_0^2 \in C_0^{(n)}(\bar{z}_0^2) \subset C_0^{(n-(k+1))}(\bar{z}_0^2)$ e novamente estamos nas hipóteses do lema 5.8, portanto obtemos que:

$$|H_{n-k}(\bar{z}_0^1) - H_{n-k}(\bar{z}_0^2)| \leq const\, b_{n-k}$$

Suponha agora que k seja par. Como já provamos anteriormente, sabemos que como $\bar{z}_0^1, \bar{z}_0^2 \in C_0^{(n)}(\bar{z}_0^2) \subset C_0^{(n-k+2)}(\bar{z}_0^2)$, então temos que $\bar{z}_0^1, \bar{z}_0^2 \in C_0^{(n-k+1)}(\bar{z}_0^1)$. Agora estamos nas hipóteses do lema 5.8, e obtemos que:

$$|H_{n-k}(\bar{z}_0^1) - H_{n-k}(\bar{z}_0^2)| = |H_{n-k}(\bar{z}_0^2) - H_{n-k}(\bar{z}_0^1)| \leq const\, b_{n-k}$$

Voltando agora para a soma (11) com $j \geq \left[\frac{n}{2}\right]$, temos que:

$$\left|\sum_{j\geq\frac{n}{2}}\sum_{i=1}^{a_j}\sum_{s=0}^{q_i-1}[log\phi'(z_s^1) - log\phi'(z_s^2)]\right| \leq \sum_{j\geq\frac{n}{2}}\sum_{i=1}^{a_j} const\, b_j \leq$$
$$\sum_{j\geq\frac{n}{2}} const\, n^\nu b_j = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} const\,(n-k)^\nu b_{n-k}$$

como queríamos. Concluímos então que se $y_0 \in C_i^{(n+1)}(x_0)$ então:

$$|J_n| \leq \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} const\,(n-k)^\nu b_{n-k} + const\, n^{\nu+1}\lambda^{\frac{n}{2}}$$

No outro caso, vamos supor agora que $y_0 \in C_j^{(n)}(x_0)$ para algum $0 \leq j < q_{n+1}$. Se $j < q_n$ aplicamos o mesmo argumento que usamos anteriormente. Caso contrário, então existe $1 \leq k \leq k_{n+1} - 1$ tal que $q_n k \leq j < q_n(k+1)$. Neste caso, vamos escrever $|J_n|$ da seguinte forma:

$$\left|\sum_{s=0}^{q_n-1} log\phi'(y_s) - \sum_{s=0}^{q_n-1} log\phi'(x_s)\right| = \left|\sum_{s=0}^{q_n-1} log\phi'(y_s) - \sum_{s=0}^{q_n-1} log\phi'(x_s) + \sum_{t=1}^{k}\left(\pm\sum_{s=0}^{q_n-1} log\phi'(y_{s-t_{q_n}})\right)\right|$$

reordenando a soma acima e depois utilizando a desigualdade triangular, obtemos:

$$|J_n| \leq \left|\sum_{s=0}^{q_n-1} log\phi'(y_{s-k_{q_n}}) - log\phi'(x_s)\right| + \sum_{t=1}^{k}\left|\sum_{s=0}^{q_n-1} log\phi'(y_{s-(t-1)q_n}) - log\phi'(y_{s-t_{q_n}})\right| \quad (13)$$

Considere agora o seguinte termo da soma acima:

$$\left|\sum_{s=0}^{q_n-1} log\phi'(y_{s-k_{q_n}}) - log\phi'(x_s)\right| = |H_n(y_{s-k_{q_n}}) - H_n(x_0)|$$

Neste caso, observe que como $q_n k \leq j < q_n(k+1)$, então existe $0 \leq \tau < q_n$ tal que $j = kq_n + \tau$. Como $y_0 \in C^{(n)}_{kq_n+\tau}(x_0) = C^{(n)}_0(x_{kq_n+\tau})$ então $y_{-kq_n} \in C^{(n)}_0(x_\tau)$, com $\tau < q_n$. Assim, para esta soma podemos usar o argumento anterior. Agora em (13) considere as somas da forma:

$$\left|\sum_{s=0}^{q_n-1} log\phi'(y_{s-(t-1)q_n}) - log\phi'(y_{s-t_{q_n}})\right| = |H_n(y_{s-(t-1)q_n}) - H_n(y_{s-t_{q_n}})|$$

e note que como $y_0 \in C^{(n)}_0(y_0)$ então $y_{s-(t-1)q_n} \in C^{(n)}_0(y_{s-(t-1)q_n})$. Por outro lado, sabemos que $C^{(n)}_0(y_{s-(t-1)q_n}) = [y_{s-(t-1)q_n}, y_{s-tq_n}]$ ou $C^{(n)}_0(y_{s-(t-1)q_n}) = [y_{s-tq_n}, y_{s-(t-1)q_n}]$. Portanto, temos que $y_{s-tq_n} \in C^{(n)}_0(y_{s-(t-1)q_n})$. Dessa forma, também podemos aplicar os mesmos argumentos que fizemos anteriormente e limitamos $|J_n|$ como queríamos. □

O Lema 5.9 será importante para concluirmos a prova do Teorema de Herman. O Lema 5.10 não depende dos Lemas que usamos anteriormente, e será utilizado mais a frente para derivar outros resultados importantes.

Lema 5.10. *Fixado $x_0 \in S^1$, temos que:*

$$\left|\sum_{j=0}^{q_n-1} \frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)} \Delta^{(n)} x_j\right| \leq const\, \lambda_1^{\sqrt{n}}$$

em que $\lambda < \lambda_1 < 1$.

Demonstração. Tome $k := \left[\frac{n}{2}\right]$. Note que podemos escrever:

$$S^1 = \bigcup_{i=0}^{q_{n-k}-1} C_i^{(n-k+1)}(x_0) \bigcup \bigcup_{i=0}^{q_{n-k+1}-1} C_i^{(n-k)}(x_0)$$

Vamos usar a igualdade anterior para reescrever a soma da hipótese da seguinte forma:

$$I_n := \sum_{j=0}^{q_n-1} \frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)}\Delta^{(n)}x_j = \sum_{s=0}^{q_{n-k+1}-1} \sum_{j:C_j^{(n+1)}\subset C_s^{n-k}} \frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)}\Delta^{(n)}x_j$$
$$+ \sum_{t=0}^{q_{n-k}-1} \sum_{j:C_j^{(n+1)}\subset C_t^{(n-k+1)}} \frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)}\Delta^{(n)}x_j$$

Escolheremos pontos arbitrários $y_s^{(n-k)} \in C_s^{(n-k)}$ e $y_t^{(n-k+1)}$ e defina os termos:

$$p_s^{(n-k)} = \frac{1}{\ell(C_s^{(n-k)})} \sum_{j:C_j^{(n+1)}\subset C_s^{n-k}} \Delta^{(n)}x_j$$
$$p_t^{(n-k+1)} = \frac{1}{\ell(C_t^{(n-k+1)})} \sum_{j:C_j^{(n+1)}\subset C_t^{(n-k+1)}} \Delta_j^{(n)}$$

Daí, podemos reescrever I_n como:

$$I_n = \sum_{s=0}^{q_{n-k+1}-1} \sum_j \frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)}\Delta^{(n)}x_j + \sum_{s=0}^{q_{n-k}-1} \sum_j \frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)}\Delta^{(n)}x_j$$
$$\pm \sum_{t=0}^{q_{n-k}-1} \sum_j \frac{\phi''(y_t^{(n-k+1)})}{\phi'(y_t^{(n-k+1)})}\Delta^n x_j \pm \sum_{s=0}^{q_{n-k+1}-1} \sum_j \frac{\phi''(y_s^{(n-k)})}{\phi'(y_s^{(n-k)})}\Delta^n x_j$$
$$= \sum_{s=0}^{q_{n-k+1}-1} \frac{\phi''(y_s^{(n-k)})}{\phi'(y_s^{(n-k)})}\ell(C_s^{(n-k)})p_s^{(n-k)} + \sum_{t=0}^{q_{n-k}-1} \frac{\phi''(y_t^{(n-k+1)})}{\phi'(y_t^{(n-k+1)})}\ell(C_t^{(n-k+1)})p_t^{(n-k+1)}$$
$$+ \sum_{s=0}^{q_{n-k+1}-1} \sum_j \left(\frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)} - \frac{\phi''(y_s^{(n-k)})}{\phi'(y_s^{(n-k)})}\right)\Delta^{(n)}x_j + \sum_{t=0}^{q_{n-k}-1} \sum_j \left(\frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)} - \frac{\phi''(y_t^{(n-k+1)})}{\phi'(y_t^{(n-k+1)})}\right)\Delta^{(n)}x_j$$

Note que $\sum_{s=0}^{q_{n-k+1}-1} \sum_j \Delta^{(n)}x_j \leq 1$ e $\sum_{t=0}^{q_{n-k}-1} \sum_j \Delta^{(n)}x_j \leq 1$ para todo n. Além disso, usando o fato que $\frac{\phi''}{\phi'}$ $\gamma - holder$ e o Lema 5.6, podemos limitar as duas somas em (15) por $const\,\lambda^{\gamma n}$, e sabemos que $const\,\lambda^{\gamma n} \leq const\,\lambda_1^{\sqrt{n}}$ para n suficientemente grande, pois $\lambda < \lambda_1$ e $\sqrt{n} \leq \gamma n$ para n suficientemente grande.

Suponha que tenhamos provado que $|p_s^{(n-k)} - p|, |p_t^{(n-k+1)} - p| \leq const\,\lambda_1^{\sqrt{n}}$ para alguma constante positiva $p \in \mathbb{R}$. Iremos usar este resultado para estimar as duas somas restantes em (14) de I_n da seguinte forma:

$$\sum_{s=0}^{q_{n-k+1}-1} \frac{\phi''(y_s^{(n-k)})}{\phi'(y_s^{(n-k)})}\ell(C_s^{(n-k)})(p_s^{(n-k)} \pm p) + \sum_{t=0}^{q_{n-k}-1} \frac{\phi''(y_t^{(n-k+1)})}{\phi'(y_t^{(n-k+1)})}\ell(C_t^{(n-k+1)})(p_t^{(n-k+1)} \pm p)$$
$$= p\left[\sum_{s=0}^{q_{n-k+1}-1} \frac{\phi''(y_s^{(n-k)})}{\phi'(y_s^{(n-k)})}\ell(C_s^{(n-k)}) + \sum_{t=0}^{q_{n-k}-1} \frac{\phi''(y_t^{(n-k+1)})}{\phi'(y_t^{(n-k+1)})}\ell(C_t^{(n-k+1)})\right] + \tag{14}$$
$$\sum_{s=0}^{q_{n-k+1}-1} \frac{\phi''(y_s^{(n-k)})}{\phi'(y_s^{(n-k)})}\ell(C_s^{(n-k)})(p_s^{(n-k)} - p) + \sum_{t=0}^{q_{n-k}-1} \frac{\phi''(y_t^{(n-k+1)})}{\phi'(y_t^{(n-k+1)})}\ell(C_t^{(n-k+1)})(p_t^{(n-k+1)} - p)$$

A expressão em colchete é uma aproximação da Integral de Riemann $\int_{S^1} \frac{\phi''(x)}{\phi'(x)} dx = 0$ Como $\phi \in C^{2+\gamma}$, essa aproximação é limitada por $\lambda^{\frac{n\gamma}{2}}$. Além disso, como supomos que $|p_s^{(n-k)} - p|, |p_t^{(n-k+1)} - p| \leq const\, \lambda_1^{\sqrt{n}}$, resulta que (16) é limitada por:

$$p\lambda^{\frac{n\gamma}{2}} + \lambda_1^{\sqrt{n}} \left[\sum_{s=0}^{q_{n-k+1}-1} \frac{\phi''(y_s^{(n-k)})}{\phi'(y_s^{(n-k)})} \ell(C_s^{(n-k)}) + \sum_{t=0}^{q_{n-k}-1} \frac{\phi''(y_t^{(n-k+1)})}{\phi'(y_t^{(n-k+1)})} \ell(C_t^{(n-k+1)}) \right] \leq const\, \lambda_1^{\sqrt{n}}$$

para n suficientemente grande.

Utilizando as estimativas que encontramos para (14) e (15), segue o resultado. $\square$

Antes de prosseguir, precisamos provar a afirmação que fizemos na prova do Lema anterior: $|p_s^{(n-k)} - p|, |p_t^{(n-k+1)} - p| \leq const\, \lambda_1^{\sqrt{n}}$ para algum p. Para isto, precisaremos introduzir uma dinâmica simbólica em S^1.

Fixemos $x_0 \in S^1$ e considere $x \in S^1$ qualquer. Defina:

$$a_0 := A,\ se\ x \in C_0^0(x_0)$$

$$a_0 := 0,\ se\ x \in C_0^1(x_0)$$

$$a_0 := k_1 - j,\ se\ x \in C_j^0(x_0)$$

Indutivamente, iremos colocar a_{n+1} como A, se $x \in C_i^{(n+1)}(x_0)$ para $0 \leq i < q_n$. Diremos que $a_{n+1} = k_{n+2} - j$, se $x \in C_{i+q_n+jq_{n+1}}^{(n+1)}(x_0) \subset C_i^{(n)}(x_0)$ para $0 \leq i < q_{n+1}$ e $0 \leq j < k_{n+1}$. Finalmente:

$$a_{n+1} = 0,\ se\ x \in C_i^{(n)}(x_0) - \bigcup_{j_0}^{k_{n+2}-1} C_{i+q_n+jq_{n+2}}^{(n+1)}(x_0) = C_i^{(n+2)}(x_0)$$

Isso define uma dinâmica simbólica em S^1, ou seja, cada ponto $x \in S^1$ está associado a uma palavra a:

$$x \leftrightarrow (a_0, a_1, ..., a_n, ...) = a$$

Note que utilizando a medida de Lebesgue ℓ, podemos definir uma medida de probabilidade em S^1, uma vez que $\ell(S^1) = 1$ e já sabemos que ℓ restrita $[0,1]$ é uma medida. Note também que por construção temos que $a_{n+1} = A$ se, e somente se, $a_n = 0$. As probabilidades condicionais $\ell(a_n | a_{n+1}, ..., a_0)$ serão dadas por $\frac{\ell(a_0, a_1, ..., a_n)}{\ell(a_0, a_1, ..., a_{n-1})}$.

Lema 5.11. *A seguinte desigualdade é verdadeira:*

$$e^{-const\lambda^s} \leq \frac{\ell(a_n | a_{n-1}, ..., a_{n-s}, a''_{n-s-1}, ..., a''_0)}{\ell(a_n | a_{n-1}, ..., a_{n-s}, a'_{n-s-1}, ..., a'_0)} \leq e^{const\lambda^s}$$

Demonstração. Note que as palavras $(a'_0, ..., a'_{n-s-1}, a_{n-s}, ..., a_n)$, $(a'_0, .., a'_{n-s-1}, a_{n-s}, ..., a_{n-1})$ e $(a'_0, .., a'_{n-s-1})$ correspondem a intervalos $C_{i_0}^{(m_0)} \subset C_{i_1}^{m_1} \subset C_{i_2}^{(m_2)}$ em que $m_0 = n, n+1$, $m_1 = n-1, n$ e $m_2 = n-s-1, n-s$, respectivamente. Da mesma forma, temos que as palavras $(a''_0, ..., a''_{n-s-1}, a_{n-s}, ..., a_n)$ e $(a''_0, .., a''_{n-s-1}, a_{n-s}, ..., a_{n-1})$ correspondem a intervalos $C_{i_0+j}^{(m_0)} \subset C_{i_1+k}^{m_1} \subset C_{i_2+j}^{(m_2)}$para algum $j \in \mathbb{N}$ tal que $i_2 + j < q_{n-s-1}$, se $m_2 = n-s$ e $i_2 + j < q_{n-s}$ se $m = n-s-1$. Defina:

$$\varrho_k := \frac{\ell(C_{i_0+k}^{(m_0)})}{\ell(C_{i_1+k}^{(m_1)})} : \frac{\ell(C_{i_0}^{(m_0)})}{\ell(C_{i_1}^{(m_1)})}$$

para $1 \le k \le j$. Note que pelo teorema cundamental do cálculo, temos que:

$$\varrho_{k+1} = \frac{\ell(C_{i_0+k+1}^{(m_0)})}{\ell(C_{i_1+k+1}^{(m_1)})} : \frac{\ell(C_{i_0}^{(m_0)})}{\ell(C_{i_1}^{(m_1)})} = \frac{\int\limits_{C_{i_0+k}^{(m_0)}} \phi'(x)dx}{\int\limits_{C_{i_1+k}^{(m_1)}} \phi'(x)dx} : \frac{\ell(C_{i_0}^{(m_0)})}{\ell(C_{i_1}^{(m_0)})}$$

Utilizando o teorema do valor médio, existem pontos $y_{i_0+k}^{(m_0)} \in C_{i_0+k}^{(m_0)}$ e $y_{i_1+k}^{(m_1)} \in C_{i_1+k}^{(m_1)}$ tais que podemos escrever:

$$\varrho_{k+1} = \frac{\phi'(y_{i_0+k}^{(m_0)})}{\phi'(y_{i_1+k}^{(m_1)})} \varrho_k$$

Utilizando a relação acima j vezes, temos que:

$$\varrho_j = \prod_{t=0}^{j-1} \frac{\phi'(y_{i_0+t}^{(m_0)})}{\phi'(y_{i_1+t}^{(m_1)})} \varrho_0 = \prod_{t=0}^{j-1} \frac{\phi'(y_{i_0+t}^{(m_0)})}{\phi'(y_{i_1+t}^{(m_1)})}$$

pois segue direto da definição que $\varrho_0 = 1$. Por outro lado, pelo teorema do valor médio, também temos que existe $w \in [y_{i_0+k}^{(m_0)}, y_{i_1+k}^{(m_1)}]$ tal que:

$$\begin{aligned} &\left| \ln \frac{\phi'(y_{i_0+k}^{(m_0)})}{\phi'(y_{i_1+k}^{(m_1)})} \right| = \left| \ln \phi'(y_{i_0+k}^{(m_0)}) - \ln \phi'(y_{i_1+k}^{(m_1)}) \right| = \left| \frac{\phi''(w)}{\phi'(w)} \right| y_{i_0+k}^{(m_0)} - y_{i_1+k}^{(m_1)}| \\ &\le C|y_{i_0+k}^{(m_0)} - y_{i_1+k}^{(m_1)}| \le C\ell(C_{i_1+k}^{(m_1)}) \end{aligned}$$

em que $C \in \mathbb{R}$ é uma constante, portanto:

$$e^{-C\ell(C_{i_1+k}^{(m_1)})} \le \frac{\phi'(y_{i_0+k}^{(m_0)})}{\phi'(y_{i_1+k}^{(m_1)})} \le e^{C\ell(C_{i_1+k}^{(m_1)})}$$

Daí, concluímos que:

$$e^{-C\sum\limits_{t=0}^{j-1} \ell(C_{i_1+k}^{(m_1)})} \le \varrho_j \le e^{C\sum\limits_{t=0}^{j-1} \ell(C_{i_1+k}^{(m_1)})}$$

Finalmente, como $m_1 - m_2 = s$, observe que pelo Lema 3.5 temos $\frac{\ell(C^{(m_1)}_{i_1+t})}{\ell(C^{(m_2)}_{i_2+t})} \leq \lambda^s$, de onde segue que:

$$\sum_{t=0}^{j-1} \ell(C^{(m_1)}_{i_1+k}) \leq \sum_{t=0}^{j-1} \ell(C^{(m_2)}_{i_2+k}) \frac{\ell(C^{(m_1)}_{i_1+t})}{\ell(C^{(m_2)}_{i_2+t})} \leq const\, \lambda^s$$

o que conclui a demonstração, pois observe que, por construção:

$$\ell(a_n|a_{n-1},...,a_{n-s},a'_{n-s-1},...,a'_0) = \frac{\ell(C^{(m_0)}_{i_0})}{\ell(C^{(m_1)}_{i_1})}$$
$$\ell(a_n|a_{n-1},...,a_{n-s},a''_{n-s-1},...,a''_0) = \frac{\ell(C^{(m_0)}_{i_0+k})}{\ell(C^{(m_1)}_{i_1+k})}$$

e por definição:

$$\varrho_j = \frac{\ell(C^{(m_0)}_{i_0+k})}{\ell(C^{(m_1)}_{i_1+k})} : \frac{\ell(C^{(m_0)}_{i_0})}{\ell(C^{(m_1)}_{i_1})} = \frac{\ell(a_n|a_{n-1},...,a_{n-s},a''_{n-s-1},...,a''_0)}{\ell(a_n|a_{n-1},...,a_{n-s},a'_{n-s-1},...,a'_0)}$$

□

Lema 5.12. *Existe uma constante $C_1 > 0$ tal que para todo m e n temos que:*

$$e^{-C_1} \leq \frac{\ell(a_{n+m},...,a_n|a'_{n-1},...,a'_0)}{\ell(a_{n+m},...,a_n|a''_{n-1},...,a''_0)} \leq e^{C_1}$$

Demonstração. Observe que:

$$\ell(a_{n+1},a_n|a'_{n-1},...,a'_0) = \ell(a_{n+1}|a_n,a'_{n-1},...,a'_0)\ell(a_n|a'_{n-1},...,a'_0)$$

Portanto, aplicando o argumento anterior, podemos escrever que:

$$\ell(a_{n+m},...,a_n|a'_{n-1},...,a'_0) = \prod_{i=0}^{m} \ell(a_{n+1}|a_{n+i-1},...,a'_{n-1},...,a'_0)$$
$$\ell(a_{n+m},...,a_n|a''_{n-1},...,a''_0) = \prod_{i=0}^{m} \ell(a_{n+1}|a_{n+i-1},...,a''_{n-1},...,a''_0)$$

Agora, aplicando o lema anterior nos termos do produtório, obtemos:

$$e^{\sum_{i=0}^{m} -const\lambda^i} \leq \prod_{i=0}^{m} \ell(a_{n+1}|a_{n+i-1},...,a'_{n-1},...,a'_0) \leq e^{\sum_{i=0}^{m} const\lambda^i}$$
$$e^{\sum_{i=0}^{m} -const\lambda^i} \leq \prod_{i=0}^{m} \ell(a_{n+1}|a_{n+i-1},...,a''_{n-1},...,a''_0) \leq e^{\sum_{i=0}^{m} const\lambda^i}$$

Portanto, segue que:

$$e^{\sum_{i=0}^{m} -2const\lambda^i} \leq \frac{\ell(a_{n+m},...,a_n|a'_{n-1},...,a'_0)}{\ell(a_{n+m},...,a_n|a''_{n-1},...,a''_0)} \leq e^{\sum_{i=0}^{m} 2const\lambda^i}$$

De onde segue o resultado. □

Lema 5.13. *Existe uma constante* $C_2 > 0$ *tal que para todo* n *e* m *e todas as palavras admissíveis* $(a'_0, ..., a'_{n-3}), (a''_0, ..., a''_{n-3})$ *e* $(a_n, ..., a_{n+m})$*, temos:*

$$e^{-C_2} \leq \frac{\ell(a_{n+m}, ..., a_n | a'_{n-3}, ..., a'_0)}{\ell(a_{n+m}, ..., a_n | a''_{n-3}, ..., a''_0)} \leq e^{C_2}$$

Demonstração. Observe que:

$$\ell(a_{n+m}, ..., a_n | a'_{n-3}, ..., a'_0) = \sum_{\alpha,\beta} \ell(a_{n+m}, ..., a_n, \alpha, \beta | a'_{n-3}, ..., a'_0) \tag{15}$$

em que a soma em α e β representa todas as palavras admissíveis. Utilizando o Lema anterior, segue que:

$$\ell(a_{n+m}, ..., a_n | a'_{n-3}, ..., a'_0) = \sum_{\alpha,\beta} \ell(a_{n+m}, ..., a_n, \alpha, \beta | a'_{n-3}, ..., a'_0)$$
$$\leq \sum_{\alpha,\beta} e^{C_1} \ell(a_{n+m}, ..., a_n, \alpha, \beta | a''_{n-3}, ..., a''_0) = e^{C_1} \ell(a_{n+m}, ..., a_n | a''_{n-3}, ..., a''_0)$$

de onde o resultado segue imediatamente. □

Lema 5.14. *Se* $k := \left[\frac{n}{2}\right]$*, então* $|\ell(a_n = 0 | a_{n-k}, ..., a_0) - \ell(a_n = 0)| \leq const\, \lambda_3^{\sqrt{k}}$ *para alguma constante* $\lambda_3 \leq 1$*.*

Demonstração. Este Lema é provado utilizando métodos da teoria de cadeias de Markov (Ruelle, 2005).

Fixado um inteiro m próximo a $\sqrt{k}$, introduza uma medida de probabilidade nas palavras:

$$\bar{a} = (a_n, a_{n-1}, ..., a_{n-m+3}, a_{n-m}, ..., a_{n-2m+3},$$
$$a_{n-2m}, ..., a_{n-3m+3}, ..., a_{n-(i-1)m}, ..., a_{n-im+3}, a_{n-im}, ..., a_0)$$

da seguinte forma:

$$\ell'(\bar{a}) = \ell(a_0, ..., a_{n-im}) \ell(a_{n-(i-1)m}, ..., a_{n-im+3} | a_{n-im}, ..., a_0)$$
$$\prod_{j=0}^{i-2} \ell(a_{n-jm}, ..., a_{n-(j+1)m+3} | a_{n-(j+1)m}, ..., a_{n-(j-2)m+3})$$

em que $i\ \sqrt{k}$. Essa medida de uma cadeia de Markov com memória m. Segue do Lema 3.10 que:

$$e^{-const\, \lambda^m i} \leq \frac{\ell'(\bar{a})}{\ell(\bar{a})} \leq e^{const\, \lambda^m i}$$

Se considerarmos o operador de transição de Markov correspondente a ℓ' para a transição de m passos, então segue do Lema anterior que ℓ' é uma contração com coeficiente uniforme menor que 1. Daí, o teorema ergódico de cadeias de Markov mostra que a diferença entre as probabilidades concidionais $\ell(a_n|a_{n-im},...,a_0)$ para diferentes $a_{n-im},...,a_0$ é menor que $\lambda_4^i, \lambda_4 < 1$. Isto garante o resultado desejado. □

O resultado do Lema 5.14 conclui a demonstração da afirmação feita no Lema 5.10. Antes de seguir para o Teorema de Herman, provaremos o último Lema necessário, que utilizará o Lema 5.9:

Lema 5.15. *Para todo $0 \leq p \leq q_n$, temos que:*

$$\left|\sum_{j=0}^{p} \frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)} \Delta^{(n)} x_j\right| \leq const\, n^{2\nu+2} \lambda_2^{\sqrt{n}}$$

para $\lambda_1 < \lambda_2 < 1$.

Demonstração. Considere a soma:

$$I_{n-2i} = \sum_{j=0}^{q_{n-2i}-1} \frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)} \Delta^{(n)} x_j$$

Defina as expressões:

$$p_s^{(n-k)} = \frac{1}{\ell(C_s^{(n-k)})} \sum_{\substack{j>:C_j^{(n+1)} \subset C_s^{(n-k)} \\ 0 \leq j < q_{n-2i}}} \ell(C_j^{(n+1)})$$

e:

$$p_t^{(n-k+1)} = \frac{1}{\ell(C_t^{(n-k+1)})} \sum_{\substack{j>:C_j^{(n+1)} \subset C_s^{(n-k+1)} \\ 0 \leq j < q_{n-2i}}} \ell(C_j^{(n+1)})$$

Observe que como estamos tomando j tal que $C_j^{(n+1)} \subset C_s^{(n-k)}$, então, em particular, $C_j^{(n)+1} \subset C_j^{(n-1)} \subset C_j^{(n-3)}$.... Analogamente para o caso $C_j^{(n+1)} \subset C_s^{(n-k+1)}$. Utilizando as definições da dinâmica simbólica que construímos, isso implica que:

$$p_s^{(n-k)}, p_t^{n-k+1} = \ell(0, A, 0, A, ..., 0|a_{n-k}, ..., a_0)$$

note que isso permite que, para cada $i < \frac{m}{2}$, possamos utilizar o lema 5.14, como fizemos na demonstração do lema 5.10, e temos que $|p_s^{(n-k)} - p|, |p_t^{(n-k+1)} - p| \leq const\, \lambda_1^{\sqrt{n}}$ para algum p. Além disso, da mesma forma que fizemos no lema 5.10, separaremos a soma I_{n-2i} da seguinte forma:

$$I_{n-2i} := \sum_{j=0}^{q_{n-2i}-1} \frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)} \Delta^{(n)} x_j = \sum_{s=0}^{q_{n-2i-k+1}-1} \sum_{j:C_j^{(n+1)} \subset C_s^{n-k}} \frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)} \Delta^{(n)} x_j$$
$$+ \sum_{t=0}^{q_{n-2i-k}-1} \sum_{j:C_j^{(n+1)} \subset C_t^{(n-k+1)}} \frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)} \Delta^{(n)} x_j$$

e daí escolheremos pontos arbitrários $y_s^{(n-k)} \in C_s^{(n-k)}$ e $y_t^{(n-k+1)}$ e reescreveremos I_{n-2i}:

$$I_n = \sum_{s=0}^{q_{n-k-2i+1}-1} \sum_j \frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)} \Delta^{(n)} x_j + \sum_{s=0}^{q_{n-k-2i}-1} \sum_j \frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)} \Delta^{(n)} x_j$$
$$\pm \sum_{t=0}^{q_{n-k-2i}-1} \sum_j \frac{\phi''(y_t^{(n-k+1)})}{\phi'(y_t^{(n-k+1)})} \Delta^n x_j \pm \sum_{s=0}^{q_{n-k-2i+1}-1} \sum_j \frac{\phi''(y_s^{(n-k)})}{\phi'(y_s^{(n-k)})} \Delta^n x_j$$
$$= \sum_{s=0}^{q_{n-k-2i+1}-1} \frac{\phi''(y_s^{(n-k)})}{\phi'(y_s^{(n-k)})} \ell(C_s^{(n-k)}) p_s^{(n-k)} + \sum_{t=0}^{q_{n-k-2i}-1} \frac{\phi''(y_t^{(n-k+1)})}{\phi'(y_t^{(n-k+1)})} \ell(C_t^{(n-k+1)}) p_t^{(n-k+1)}$$
$$+ \sum_{s=0}^{q_{n-k-2i+1}-1} \sum_j \left(\frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)} - \frac{\phi''(y_s^{(n-k)})}{\phi'(y_s^{(n-k)})} \right) \Delta^{(n)} x_j + \sum_{t=0}^{q_{n-k-2i}-1} \sum_j \left(\frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)} - \frac{\phi''(y_t^{(n-k+1)})}{\phi'(y_t^{(n-k+1)})} \right) \Delta^{(n)} x_j$$

e os mesmos argumentos que utilizamos no lema 5.10 para cada termo da soma acima nos dá a estimativa:

$$|I_{n-2i}| \leq const\, \lambda_1^{\sqrt{n}}$$

se $i < \frac{m}{2}$. Observe também que para $i \geq m$, temos que utilizando o lema 5.6, como fizemos no lema 5.7, obtemos:

$$I_{n-i} = \sum_{j=0}^{q_{n-i}-1} \frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)} |\Delta^n(x_i)| \leq sup \left| \frac{\phi''(x)}{\phi'(x)} \right| \sum_{j=0}^{q_{n-k}-1} |\Delta^n(x_i)| \leq$$
$$sup \left| \frac{\phi''(x)}{\phi'(x)} \right| \sum_{j=0}^{q_{n-k}-1} \ell(C_j^{(n)}(x_i)) \left| \frac{\ell(C_j^{(n-i)}(x_i))}{\ell(C_j^{(n-i)}(x_i))} \right| \leq sup \left| \frac{\phi''(x)}{\phi'(x)} \right| \sum_{j=0}^{q_{n-k}-1} \lambda^i \ell(C_j^{(n-i)}(x_i))$$
$$\leq const\, \lambda^i$$

portanto:

$$|I_{n-i}| \leq const\, \lambda^i$$

se $i \geq m$. Fixe $p \leq q_n$. A proposição 5.5 nos diz que podemos escrever p da seguinte forma:

$$p = a_{n-1} q_{n-1} + ... + a_0 q_0$$

em que $a_j \leq k_{j+1}$, para $0 \leq j \leq n-1$. Iremos escrever a soma acima da seguinte forma: para cada termo $i < \frac{m}{2}$, iremos agrupar dois termos desta soma. Dessa forma, os dois primeiros termos serão escritos como:

$$a_{n-1}q_{n-1} + a_{n-2}q_{n-2} = a_{n-1}(k_{n-1}q_{n-2} + q_{n-3}) + a_{n-2}q_{n-2} = (a_{n-1}k_{n-1} + a_{n-2})q_{n-2} + a_{n-1}q_{n-3}$$

e note que podemos limitar o termo $(a_{n-1}k_{n-1} + a_{n-2})$ por:

$$a_{n-1}k_{n-1} + a_{n-2} \leq k_n k_{n-1} + k_{n-1} = k_{n-1}(k_n + 1) \leq const\, n^{2\nu+1}$$

Enquanto o termo $a_{n-1}q_{n-3}$ será incorporado nos dois termos seguintes da soma que consideramos. Portanto, podemos escrever p da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} a_1 q_{n-2i} + \sum_{j=m}^{n} b_j q_{n-j}$$

Em que $a_i \leq const\, n^{2\nu+1}$, $b_m \leq const\, n^{\nu+1}$ e $b_j \leq const\,(n-j)^{\nu}$. Agora iremos dividir a soma $\sum_{j=0}^{p} \frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)} \Delta^{(n)}(x_j)$ em uma soma tripla como fizemos no lema 5.9, porém dessa vez separaremos os termos $j < \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ e $j > m$. Para o primeiro caso, teremos:

$$\sum_{j<\frac{m}{2}} \sum_{i=1}^{a_j} \sum_{s=0}^{q_i-1} \frac{\phi''(x_s)}{\phi'(x_s)} \Delta^{(n)}(x_s) \leq \sum_{j<\frac{m}{2}} \sum_{i=1}^{a_j} const\, \lambda_1^{\sqrt{n}} \leq const\, \frac{m}{2} n^{2\nu+1} \lambda_1^{\sqrt{n}} \leq const\, n^{2\nu+2} \lambda_1^{\sqrt{n}}$$

Por outro lado, caso $j > m$, teremos:

$$\sum_{j\geq m} \sum_{i=1}^{a_j} \sum_{s=0}^{q_i-1} \frac{\phi''(x_s)}{\phi'(x_s)} \Delta^{(n)}(x_s) \leq \sum_{j\geq m} \sum_{i=1}^{b_j} const\, \lambda^j \leq const\, n^{2\nu+2} \lambda^j$$

Note que pelo lema 5.14, sabemos que m é próximo a $\sqrt{\frac{n}{2}}$, portanto:

$$const\, n^{2\nu+2} \lambda^j \leq const\, n^{2\nu+2} \lambda^{\frac{\sqrt{n}}{4}}$$

Tomando $\lambda_2 := max\{\lambda^{\frac{1}{4}}, \lambda_1\}$, segue que:

$$\sum_{j=0}^{p} \frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)} \Delta^{(n)}(x_j) \leq const\, n^{2\nu+2} \lambda_2^{\sqrt{n}}$$

como queríamos. □

5.3 Prova do Teorema

Usaremos os Lemas 5.15 e 5.9 da seção anterior para provar o seguinte corólário, que implicará no resultado que queremos:

Corolário 5.16. *Fixado $x_0 \in S^1$, temos que:*

$$|H_n(x_0)| = \left| \sum_{i=0}^{q_n-1} log\, \phi'(x_i) \right| \leq const\, n^{3\nu+3} \lambda_2^{\sqrt{n}}$$

Demonstração. Note que utilizando o Teorema do valor médio, temos que:

$$\phi^{q_n}(x_0+1) - \phi^{q_n}(x_0) = \frac{d}{dx}\phi^{q_n}(y_0)$$

e já vimos anteriormente que:

$$\frac{d}{dx}\phi^{q_n}(y_0) = \prod_{i=0}^{q_n-1} \phi'(x_i) = 1$$

de onde segue que $\sum_{i=0}^{q_n-1} log\, \phi'(x_i) = 0$. Portanto, provamos que existe y_0 tal que $H_n(y_0) = 0$. Aplicando o Lema 5.9 para x_0 e y_0, obtemos:

$$|H_n(x_0)| \leq const \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} b_{n-k}(n-k)^\nu + const\, n^{\nu+1}\lambda^{\frac{n}{2}}$$

Na soma acima, já temos que $const\, n^{\nu+1}\lambda^{\frac{n}{2}} \leq const\, n^{3\nu+3}\lambda_2^{\sqrt{n}}$. Para limitar o primeiro termo da soma acima, lembre-se que $b_n := max \left\{ \max_{\{0 \leq p < q_n, x_0\}} \left| \sum_{j=0}^{p} \frac{\phi''(x_j)}{\phi'(x_j)} \Delta^{(n)} x_j \right| ; \lambda^{n\gamma} \right\}$. Além disso, observe que $\lambda^{n\gamma} \leq const\, n^{2\nu+2}\lambda_2^{\sqrt{n}}$, e pelo Lema 3.14, segue que $b_n \leq const\, n^{2\nu+2}\lambda_2^{\sqrt{n}}$. Definindo $\bar{\lambda} := \lambda_2^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, segue que:

$$\begin{aligned} const \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} b_{n-k}(n-k)^\nu &\leq const \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} const\, (n-k)^{2\nu+2}\lambda_2^{\sqrt{n-k}}(n-k)^\nu \\ &\leq const \left[\frac{n}{2}\right](n-k)^{3\nu+2}\lambda_2^{\sqrt{n-\left[\frac{n}{2}\right]}} \leq const\, n^{3\nu+3}\bar{\lambda}^{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Portanto, segue que $|H_n(x_0)| \leq const\, n^{3\nu+3}\bar{\lambda}^{\sqrt{n}}$, como queríamos. □

Segue imediatamente do corólario que:

$$e^{-\xi_n} = e^{-const\, n^{3\nu+3}\lambda_2^{\sqrt{n}}} \leq \prod_{i=0}^{q_n-1} \phi'(x_i) \leq e^{const\, n^{3\nu+3}\lambda_2^{\sqrt{n}}} = e^{\xi_n}$$

Logo esta ξ_n satisfaz a condição que queríamos. Para concluirmos o resultado do Teorema de Herman, resta apenas provar que: $\sum_n \xi_n k_{n+1} \leq \infty$. Por hipótese, sabemos que $k_{n+1} \leq const\,(n+1)^\nu$, portanto basta verificar que $\sum_n (n+1)^{4\nu+3}\bar{\lambda}^{\sqrt{n}} \leq \infty$. Antes disso, provaremos a afirmação: Para n suficientemente grande, temos que $n^k << a^{\sqrt{n}}$, para todo $a \in \mathbb{R}$ com $a > 1$ e $k \in \mathbb{N}$.

Com efeito, queremos provar que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^{\sqrt{n}}} = 0$. Por (Lima, 2013, [p.29]), temos que dada uma sequência (x_n) com $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se $\lim_{n\to+\infty}(x_{n+1}/x_n) < 1$, então $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. Dessa forma, note que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^k a^{\sqrt{n}}}{a^{\sqrt{n+1}} n^k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}{a^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}} \longrightarrow 0$$

pois $\left(1+\frac{1}{n}\right)^k$ é limitada e $1/a^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ tende a 0, e concluímos a prova da afirmação.

Observe também que como $\lambda < 1$, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha > 1$ tal que $\lambda = \frac{1}{\alpha}$. Portanto, utilizando a afirmação que provamos, obtemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{4\nu+3}}{\alpha^{\sqrt{n}}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{4\nu+3}}{n^{2(4\nu+3)}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{4\nu+3}} \leq \infty$$

em que a última sequência converge pois é uma p-série com $p > 1$.

6 Referências

ANTUNES, L. Comportamento genérico de difeomorfismos do círculo. Dissertação de Mestrado. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - São Carlos. 2012.

ARNOL'D, V.I. Small denominators. I. Mappings of the circumference onto itself. Izv. Mat.Nauk. p. 25-96. 1961.

BARTLE, R. G. Elements of Integration. Primeira Edição, 1996.

DENJOY, A. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. J. Math. Pures Appl., v. 9, n. 11, p. 333–376, 1932.

LIMA, E. L. Análise Real, Vol. 1. Rio de Janeiro, IMPA. Coleção Matemática Universitária, 2013.

HERMAN, M. R. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. Publ. Math. IHES, 49 , p. 5-234, 1979.

HERMAN, M. R. Simple proofs of local conjugacy theorems for diffeomorphisms of the circle with almost every rotation number. Bol. Soc. Brasil. Mat., v. 16, n. 1, p. 45–83, 1985.

RUELLE, D. Thermodynamic Formalism. Math Structure of Equilibrium Statistical Mechanics. CUP, 2005.

POINCARÉ, J. H. Sur les courbes définies par les équations différentielles (III). J. Math. Pures Appl., v. 4, n. 1, p. 167 – 244, 1885.

KHANIN, K. M.; SINAI, Y. G. A new proof of Herman theorem. Comm. Math. Phys. p. 89-101. 1987.

SINAI, Y. G.; KHANIN, K. M. Smoothness of conjugacies of diffeomorphisms of the circle with rotations. Uspekhi Mat. Nauk. 1989

SINAI, Y. G. Topics in Ergodic Theorey. Princeton University Press. 1994.

MELO, W. de; STRIEN, S. van. One-dimensional dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1993.