



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA**  
**ESCOLA POLITÉCNICA**  
**DEPARTAMENTO DE CONSTRUÇÃO E ESTRUTURAS**

**CARLOS MAGNO SANTOS RIBEIRO DE BRITO**

**MODELAGEM E SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE  
TRELIÇAS ESPACIAIS SUBMETIDAS A  
CARREGAMENTOS ESTÁTICOS E DINÂMICOS EM  
REGIME ELÁSTICO NÃO LINEAR**

Salvador

2018

**CARLOS MAGNO SANTOS RIBEIRO DE BRITO**

**MODELAGEM E SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE  
TRELIÇAS ESPACIAIS SUBMETIDAS A  
CARREGAMENTOS ESTÁTICOS E DINÂMICOS EM  
REGIME ELÁSTICO NÃO LINEAR**

Trabalho de conclusão de curso de Engenharia Civil,  
como pré-requisito para obtenção do grau de Bacharel em  
Engenharia Civil, pela Escola Politécnica da Universidade  
Federal da Bahia.

Orientador: Prof. Dr. Alex Alves Bandeira

Salvador

2018

**CARLOS MAGNO SANTOS RIBEIRO DE BRITO**

**MODELAGEM E SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE  
TRELIÇAS ESPACIAIS SUBMETIDAS A  
CARREGAMENTOS ESTÁTICOS E DINÂMICOS EM  
REGIME ELÁSTICO NÃO LINEAR**

Trabalho de conclusão de curso de Engenharia Civil, como pré-requisito para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Civil, pela Escola Politécnica da Universidade Federal da Bahia.

Trabalho aprovado. Salvador, 10 de agosto de 2018.

**Banca Examinadora**

---

**Prof. Dr. Alex Alves Bandeira**  
Orientador – UFBA

---

Prof. Dr. Paulo Gustavo Cavalcante Lins  
Convidado – UFBA

---

Eng. Antônio Ribeiro Santos Junior  
Convidado – UFBA

---

Eng. Gustavo Canário Gomes  
Convidado – UFBA

Salvador

2018

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Universitário de Bibliotecas (SIBI/UFBA),  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Santos Ribeiro de Brito, Carlos Magno  
Modelagem e simulação numérica de treliças espaciais  
submetidas a carregamentos estáticos e dinâmicos em  
regime elástico não linear / Carlos Magno Santos  
Ribeiro de Brito. -- Salvador, 2018.  
88 f. : il

Orientador: Alex Alves Bandeira.  
TCC (Graduação - Engenharia Civil) -- Universidade  
Federal da Bahia, Escola Politécnica, 2018.

1. Dinâmica Estrutural. 2. Análise quase-estática.  
3. Comportamento não linear. 4. Treliças. I. Bandeira,  
Alex Alves. II. Título.

À minha extensa família, a Luma e a todas as pessoas que me ajudaram nesta longa caminhada.

## AGRADECIMENTOS

Começando pela longa lista de agradecimentos, sem dúvida alguma, meus pais Carlos e Edna merecem esse lugar de destaque. Todo apoio e cobrança desde a infância valeram a pena. Maiores exemplos que pude merecer de ombridade, paciência (meu pai), sabedoria, honestidade, e muitas outras exímias características. Obrigado minha mãe por me dar os limites que uma criança precisa e obrigado meu pai por me ensinar o dever de casa.

Aos meus lindos e problemáticos irmãos. Mais lindos que problemáticos, certamente. Carol, Ianua, Gabi e Kinho, vocês me fizeram entender o quão é necessário saber compartilhar tudo que mais zelamos. Hoje sou um pedaço de cada um de vocês também.

À minha amada Luma, minha namorada, noiva, amor, o que for. São quase sete anos de muita história, muitas vitórias e derrotas também. Obrigado por ter paciência comigo, por saber e me ensinar a escutar, por me ensinar a valorizar cada pequena minúcia das coisas. À toda sua família que foi e é minha família igualmente, Guete, Rafa, Meinho, Ari, Edu (meu sobrinho lindo) e Benício.

Agradeço aos meus tios e suas respectivas famílias. Itana, Maysa, Eduardo e minha segunda mãe, Bene. O Apoio de vocês em Salvador é um dos meus sustentáculos nessa cidade.

Ao professor e orientador Alex e ao grupo de pesquisa da mecânica computacional, em especial Gustavo e Ronei, que me acolheram e acreditaram em mim. O Sr. foi fundamental para minha motivação em uma área tão distante da qual eu trabalhava anteriormente.

Aos meus antigos mestres Heloysa, Raílido e Bob (Química) e F. Gabriel (Poli), lá da época dos materiais e que me introduziram à área científica. Hoje se penso na carreira acadêmica como prioridade é muito por influência de vocês.

Aos meus amigos e colegas da vida, da eng. química (*O Chat*), da eng. civil, dos ics, do intercâmbio, de moradia, etc. Todos vocês têm espaço guardado comigo para sempre.

Um verdadeiro realista, se é incrédulo, encontra sempre em si a força e faculdade de não crer mesmo no milagre e, se este último se apresenta como um fato incontestável, duvidará de seus sentidos em vez mesmo de admitir o fato. Se o admitir, será como um fato natural, mas desconhecido dele até então. No realista, a fé não nasce do milagre, mas o milagre da fé. Se o realista adquire a fé, deve necessariamente, em virtude de seu realismo, admitir também o milagre. O apóstolo Tomé declarou que não acreditaria enquanto não visse; em seguida, diz: “Meu Senhor e meu Deus!”

BRITO, C. M. S. R. Modelagem e simulação numérica de treliças espaciais submetidas a carregamentos estáticos e dinâmicos em regime elástico não linear. 87 f. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso II - Escola Politécnica, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2018.

## RESUMO

O presente trabalho traz como principal objetivo o emprego de uma formulação vetorial não linear geométrica e física para treliças espaciais (3D) apresentada em (BANDEIRA, 1997) em que a sua principal vantagem é a definição de um único sistema de coordenadas nodais, tanto para o elemento isoladamente, quanto para a estrutura como um todo, diferentemente de como é largamente utilizado na literatura. A partir desta formulação, além da análise estática convencional, desenvolve-se também o estudo do comportamento dinâmico da estrutura em resposta a carregamentos variantes no tempo com e sem amortecimento. A matriz de amortecimento é construída tendo como base o modelo viscoso de Rayleigh, fazendo uso das frequências naturais extraídas pelo Método de Jacobi. Seguidamente, as respostas ao longo do tempo são obtidas utilizando o método implícito de integração numérica de Newmark. Para tanto, todos os processos implementados e desenvolvidos foram realizados em linguagem de alto nível C e a composição dos modelos das treliças 2D e 3D feita no GiD.

**Palavras-chave:** Dinâmica Estrutural, Análise quase-estática, Comportamento não linear, Treliças.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Relação entre força e deslocamento em uma mola. . . . .	20
Figura 2 – Viga engastada. . . . .	22
Figura 3 – (B) Deformação no sentido de <i>deformation</i> e (A) Deformação no sentido de <i>strain</i> . . . . .	23
Figura 4 – Deformação ( <i>strain</i> ) de uma barra. . . . .	24
Figura 5 – Caminho de equilíbrio de uma estrutura. . . . .	25
Figura 6 – Tipos de carregamentos dinâmicos. . . . .	27
Figura 7 – Tipos de carregamentos implementados. . . . .	28
Figura 8 – Equações gerais do sistema dinâmico. . . . .	28
Figura 9 – Modos de amortecimentos proporcionais. Amortecimento proporcional à massa, à rigidez e amortecimento de Rayleigh. . . . .	34
Figura 10 – Método de Newton. . . . .	37
Figura 11 – Esquema da mola com dois graus de liberdade. . . . .	39
Figura 12 – Newton-Raphson incremental-iterativo. . . . .	43
Figura 13 – Equações gerais para a aceleração linear de Newmark. . . . .	44
Figura 14 – Configurações de barras 2D e 3D nos estados de referência e atual. . . . .	49
Figura 15 – Gráficos padronizados da <i>tensão</i> $\times$ <i>deformação</i> . . . . .	50
Figura 16 – Configuração atual de uma barra no plano e no espaço. . . . .	51
Figura 17 – Forças internas nas barras das treliças. . . . .	54
Figura 18 – Representação de geometria e nós de treliça definidos. . . . .	63
Figura 19 – Exemplo do <code>problemtyp.eas</code> usado para geração do <code>arquivo.dat</code> . . . . .	63
Figura 20 – Exemplo do <code>arquivo.dat</code> criado com dados do problema. . . . .	64
Figura 21 – Fluxograma com processos de cálculo. . . . .	65
Figura 22 – Viga plana treliçada. . . . .	66
Figura 23 – Caminho de equilíbrio do nó carregado. . . . .	68
Figura 24 – Modelo de treliça deformada ampliado com um carregamento final de $-170$ KN e deformação máxima de $54$ cm no nó carregado. . . . .	69
Figura 25 – Modos de vibrar das três menores frequências naturais da viga treliçada. . . . .	69
Figura 26 – Frequências fundamentais da estrutura variantes no tempo. . . . .	71
Figura 27 – Deslocamentos no tempo para diferentes tipos de carregamento, amortecidos ou não para o grau de liberdade $y$ do nó carregado. $\xi = 5\%$ . . . . .	72
Figura 28 – Comparação entre deslocamento linear $\times$ não linear na direção $x$ do nó carregado. . . . .	73
Figura 29 – Domo treliçado tridimensional. . . . .	74
Figura 30 – Caminho de equilíbrio da cúpula. . . . .	75
Figura 31 – Domo deformado ampliado. Deformação máxima de $4.4$ cm no topo. . . . .	76
Figura 32 – Diferença na deformação em função da atualização da frequência. . . . .	77
Figura 33 – Análise transiente para diferentes tipos de carregamento, amortecidos ou não para o grau de liberdade $z$ do nó carregado. . . . .	78
Figura 34 – Modos de vibrar das três menores frequências naturais do domo. . . . .	79
Figura 35 – Comparação entre deslocamento linear $\times$ não linear na direção $z$ do nó carregado. . . . .	80

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Amortecimento de materiais em condições normais de trabalho. . . . .	35
Tabela 2 – Deslocamentos nodais verticais. . . . .	67
Tabela 3 – Frequências naturais da viga treliçada. . . . .	70
Tabela 4 – Deslocamentos nodais na direção $z$ . . . . .	76
Tabela 5 – Frequências naturais para o domo indeformado (Hz). . . . .	79

## LISTA DE ALGORITMOS

1	Newton-Raphson . . . . .	41
2	Newton-Raphson incremental-iterativo . . . . .	42
3	Integração direta de Newmark . . . . .	47

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{f}_i, f_i$	Vetor das forças internas, força interna
$\mathbf{f}_e, f_e$	Vetor das forças externas, força externa
$\mathbf{u}, u$	Vetor dos deslocamentos nodais, deslocamento nodal
$\varepsilon$	Deformação longitudinal
$L_i$	Comprimento referência, inicial
$L_f$	Comprimento atual
$\lambda$	Alongamento linear ou estiramento
$\mathbf{f}_e(t)$	Vetor das forças externas variantes no tempo
$\omega$	Frequência
$\omega_n$	Frequência natural
$\mathbf{K}, k$	Matriz de rigidez, rigidez
$\mathbf{K}_{tel}$	Matriz de rigidez tangente elementar
$\mathbf{K}_g$	Matriz de rigidez geométrica
$\mathbf{K}_m$	Matriz de rigidez constitutiva
$\mathbf{K}_t$	Matriz de rigidez tangente
$\mathbf{M}, m$	Matriz massa, massa
$\mathbf{C}, c$	Matriz de amortecimento, amortecimento
$\dot{\mathbf{u}}$	Vetor das velocidades, velocidade
$\ddot{\mathbf{u}}$	Vetor das acelerações, aceleração
$\mathbf{f}_m, f_m$	Vetor das forças de inércia, força de inércia
$\mathbf{f}_c, f_c$	Vetor das forças de amortecimento, força de amortecimento
$\mathbf{f}_k, f_k$	Vetor das forças elásticas, força elástica
$\Psi, \psi$	Matriz modal, modo de vibrar
$\Lambda$	Matriz espectral
$\mathbf{D}$	Matriz dinâmica
$\alpha$	Coefficiente de proporcionalidade (Massa)
$\beta$	Coefficiente de proporcionalidade (Rigidez)

$\xi$	Razão de amortecimento
$tol$	Tolerância estabelecida
$P(u)$	Função energia potencial
$\nabla P(u)$	Jacobiano – Equação de equilíbrio
$\nabla^2 P(u)$	Hessiana – Matriz de rigidez
$P_{el}(u)$	Função energia potencial elementar
$\delta \mathbf{f}$	Vetor das forças residuais
$\delta \mathbf{u}$	Vetor dos deslocamentos residuais
$\delta \hat{\mathbf{f}}$	Incremento de força
$\delta t$	Incremento de tempo
$a_0, \dots, a_5$	Coefficientes do Método de Newmark
$\mathbf{K}_p$	Matriz efetiva de rigidez
$\mathbf{f}_p$	Vetor das forças efetivas
$V_i$	Volume de referência, inicial
$A_i$	Área de referência, inicial
$\delta \varepsilon$	Deformações virtuais
$\delta L_f$	Comprimento virtual
$\sigma$	Tensão nominal
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\sigma}_f$	Tensor tensão de Cauchy, Tensão de Cauchy
$\delta \phi$	Energia de deformação por unidade de volume
$\mathbf{D}$	Matriz elástica, módulo tangente de rigidez elástico (Capítulo 4)
$E$	Módulo de elasticidade
$\mathbf{x}_{el}^0$	Vetor de um ponto na configuração de referência
$\mathbf{x}_{el}$	Vetor de um ponto na configuração atual
$\mathbf{b}$	Vetor associado a $\mathbf{x}_{el}$
$\boldsymbol{\Psi}_1$	Matriz auxiliar de transformação
$\delta W_{int}^{el}$	Trabalho virtual das forças internas elementar
$\delta W_{est}^{int}$	Trabalho virtual das forças internas da estrutura
$\delta W_{ext}^{el}$	Trabalho virtual das forças externas elementar
$\delta W_{est}^{ext}$	Trabalho virtual das forças externas da estrutura

$\mathbf{f}_{iel}$	Forças internas na barra da treliça
$\mathbf{x}$	Coordenadas nodais da estrutura
$\mathbf{A}_{el}$	Matriz booleana de transformação de coordenadas
$\mathbf{N}$	Matriz das funções de forma
$\mathbf{B}$	Matriz de deslocamento-deformação
$\mathbf{u}_i, u_i$	Vetor dos deslocamentos nodais internos, deslocamento nodal interno
$\mathbf{u}_e, u_e$	Vetor dos deslocamentos nodais externos, deslocamento nodal externo
$\dot{\mathbf{u}}_i, \dot{u}_i$	Vetor das velocidades nodais internas, velocidade nodal interna
$\dot{\mathbf{u}}_e, \dot{u}_e$	Vetor das velocidades nodais externas, velocidade nodal externa
$\ddot{\mathbf{u}}_i, \ddot{u}_i$	Vetor das acelerações nodais internas, aceleração nodal interna
$\ddot{\mathbf{u}}_e, \ddot{u}_e$	Vetor dos acelerações nodais externas, aceleração nodal externa
$L$	Operador diferencial
$\rho$	Densidade
$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$	Tensor de deformação Green-Lagrange
$\mathbf{M}_c$	Matriz de massa consistente
$\mathbf{M}_d$	Matriz de massa discreta
$\mathbf{I}_d$	Matriz Identidade
$T_{el}(u)$	Energia cinética de um elemento
MEF	Método dos elementos finitos
PTV	Princípio dos trabalhos virtuais
Ansys	Swanson Analysis Systems, Inc.
DTruss	Programa desenvolvido

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>16</b>
1.1	OBJETIVOS	18
1.2	JUSTIFICATIVA	18
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	19
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>20</b>
2.1	CARACTERÍSTICAS DA LINEARIDADE	20
2.2	A NÃO LINEARIDADE	21
<b>2.2.1</b>	<b>Não Linearidade Física</b>	<b>22</b>
<b>2.2.2</b>	<b>Não Linearidade Geométrica</b>	<b>22</b>
2.3	DESLOCAMENTO E DEFORMAÇÃO	23
<b>2.3.1</b>	<b>Deformação de Engenharia</b>	<b>24</b>
2.4	CAMINHOS DE EQUILÍBRIO	24
2.5	DINÂMICA ESTRUTURAL	26
<b>2.5.1</b>	<b>Ações dinâmicas</b>	<b>26</b>
<b>2.5.2</b>	<b>Sistema estrutural dinâmico</b>	<b>28</b>
<b>2.5.3</b>	<b>Expansão para vários graus de liberdade</b>	<b>29</b>
<b>2.5.4</b>	<b>Sistema não amortecido e introdução à análise modal</b>	<b>30</b>
2.6	O AMORTECIMENTO	33
<b>2.6.1</b>	<b>Amortecimento proporcional de Rayleigh</b>	<b>34</b>
<b>3</b>	<b>MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ANÁLISE ESTRUTURAL</b>	<b>37</b>
3.1	MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON	37
<b>3.1.1</b>	<b>Crítérios de parada</b>	<b>38</b>
3.2	MÉTODO DE NEWTON GENERALIZADO	39
<b>3.2.1</b>	<b>Crítérios de parada</b>	<b>41</b>
<b>3.2.2</b>	<b>Solução incremental-iterativa</b>	<b>41</b>
3.3	MÉTODO DE NEWMARK	43
<b>4</b>	<b>FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS</b>	<b>48</b>
4.1	MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE	48
4.2	PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS	58
<b>4.2.1</b>	<b>Matriz de massa</b>	<b>60</b>
<b>5</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL</b>	<b>63</b>
<b>6</b>	<b>EXEMPLOS DE TRELIÇAS TESTADAS</b>	<b>66</b>
6.1	VIGA TRELIÇADA	66
<b>6.1.1</b>	<b>Análise estática</b>	<b>67</b>
<b>6.1.2</b>	<b>Análise dinâmica</b>	<b>69</b>
6.2	DOMO TRELIÇADO	74
<b>6.2.1</b>	<b>Análise estática</b>	<b>75</b>
<b>6.2.2</b>	<b>Análise dinâmica</b>	<b>77</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>81</b>

7.1	SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS . . . . .	82
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>84</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O sentido maior da análise estrutural é a busca de um modelo matemático simplificado que represente com determinada precisão uma estrutura em questão a partir das diversas definições de suas várias características, tais como os materiais constituintes, condições de contorno, tipos e comportamentos das cargas exercentes, etc. Desta forma, obter respostas coerentes a partir de uma simulação concisa é a condição fundamental para o correto dimensionamento da estrutura real *a posteriori*.

Até determinado período do século passado, qualquer formulação e desenvolvimento de modelos eram demasiadamente simplificados, com poucos graus de liberdade e normalmente planares. Apesar do bom funcionamento destes e de terem sido fundamentais para a evolução da engenharia, com o desenvolvimento de ferramentas computacionais e o avanço exponencial da capacidade de processamento dos computadores pessoais, tornou-se então a utilização e concepção de mecanismos e técnicas voltadas a estas novas tecnologias existentes não só prático, mas hoje fundamental. Se por um lado há uma maior confiabilidade em uma aquisição de dados com suporte a maiores detalhes e precisão, há também a necessidade de se construir de forma mais limpa, barata e otimizada. Portanto, ao deparar-se com essas pretensões, justifica-se o aporte e a importância da computação como uma das principais aliadas do engenheiro moderno que busca soluções potencializadas no seu projeto.

Neste contexto, O Método dos Elementos Finitos (MEF) surge então como importante instrumento para a análise estrutural (REDDY, 2005; ZIENKIEWICZ; TAYLOR; FOX, 2014). Diversas formulações já foram exploradas e novas ainda estão surgindo. De acordo com Azevedo (2003), devido ao seu grande desenvolvimento e a banalização da computação, hoje é corrente análises de geometrias extremamente complexas e arbitrárias, com diferentes materiais e submetidos a quaisquer tipos de carregamento. Com isso, métodos anteriormente utilizados na área e que facilitavam o cálculo manual passaram a ser obsoletos ou praticamente deixaram de ser empregados, como é o caso Método de Cross.

No desenvolvimento de um projeto, a análise estática é a forma mais comum e simples. Nela, as ações à qual a estrutura está submetida não variam no decorrer do tempo. Para tanto, quando estas apresentam determinada variabilidade, valores de projetos são utilizados desde que haja significância quanto à probabilidade de ocorrência, mesmo que ainda assim sejam tratados de forma estática na construção de um modelo. Todavia, quando se faz necessário o estudo de cargas dinâmicas (variantes no tempo), a análise estática já não é suficiente e, por razões de segurança, não se deve abrir mão de uma solução mais adequada. No estudo dinâmico, os deslocamentos dependerão também das forças inerciais que fazem oposição às acelerações que as produzem. Por conseguinte, os esforços internos não são somente responsáveis pelo equilíbrio das cargas externas, como

também das forças inerciais resultantes da aceleração que a estrutura produz (CLOUGH; PENZIEN, 2010). A exemplo de ações dinâmicas exercentes em uma estrutura, tem-se: as decorrentes das diversas atividades humanas, ventos, sismos, ondas, equipamentos móveis, etc.

Ao surgir a possibilidade de construções mais esbeltas e de longos vãos, os efeitos variantes no tempo devem sempre que possível ser considerados. Em particular, ao abordar um elemento estrutural com característica normalmente esbelta chamado treliça, necessitar-se-á em muitos casos optar de forma prudente pela análise dinâmica. Segundo Lacerda (2014, p. 1),

Treliça é um arranjo estável de barras delgadas interligadas. As barras são conectadas por pinos sem atrito de forma que nenhum momento possa ser transmitido pela conexão. Desse modo, as treliças caracterizam-se por ser um arranjo de barras que somente transmitem força axial, mas podem estar sujeitas a momento fletor, se submetidas à ação de forças inerciais.

Dois tipos básicos de não linearidades são comuns nessas estruturas. O primeiro deles é chamado de não linearidade física e é gerado por um comportamento elástico não linear, plástico ou viscoelástico do material que compõe a estrutura. Neste caso, a relação deformação-deslocamento é não linear, como exemplo do concreto. O segundo tipo é chamado de não linearidade geométrica e ocorre quando as deformações são suficientemente grandes para causar mudanças significativas nas dimensões estruturais. De acordo com Silva (2009), essa não linearidade também é chamada de *efeitos de segunda ordem* e é responsável por considerar os efeitos globais  $P-\Delta$  e/ou locais  $P-\delta$  oriundos das deformações da estrutura à medida que esta é carregada. Materiais como o aço têm uma relação de não linearidade física muitas vezes declarada como inexistente para cálculos usuais da engenharia; outros, porém, como o concreto, podem apresentar os dois tipos de não linearidades e são contemplados igualmente por esta formulação.

Por fim, em (BANDEIRA, 1997), traz-se a formulação vetorial a qual será abordada neste trabalho. Esta concepção é generalista em regime elástico e considera quaisquer não linearidades na estrutura treliçada. Ela leva em conta a variação de variáveis como, comprimento, estiramento, tensão e área, com equações que são derivadas de forma consistente e matrizes finais geradas sem aproximações decorrentes de multiplicações por cossenos e senos de ângulos diretores. Mais tarde, (CODA, 2003) apresenta uma formulação para sólidos semelhante àquela apresentada por (BANDEIRA, 1997), denominada de Método dos Elementos Finitos Posicionais, isto é, um único sistema de coordenadas é utilizado, diferentemente do método padrão convencional (corrotacional), onde existem sistemas de coordenadas diferentes e, por este motivo, há a necessidade de se utilizar matrizes de rotação. De forma geral, esta característica acarreta em algumas diferenças notadamente percebidas na concepção da formulação e do método. Essa metodologia, por se tratar de

um estudo relativamente recente, apresenta uma menor disponibilidade de publicações na literatura em relação aos já consagrados e tradicionais métodos computacionais de análise estrutural. Sendo assim, a adequação e desenvolvimento de um estudo dinâmico é de fundamental importância para ampliar, melhorar e difundir as suas aplicações.

## 1.1 OBJETIVOS

Como objetivos principais podem ser citados os seguintes:

- Realização de estudos baseados em análise numérica do comportamento não linear estático e dinâmico de treliças espaciais e planas;
- Implementar e simular os elementos de treliça elaboradas no item anterior, a fim de ter uma biblioteca capaz de reproduzir os resultados de diferentes tipos de treliças.

A partir deles, obtém-se os seguintes quesitos específicos:

- Avaliar o comportamento não linear estático de estruturas quando submetidas a incrementos de cargas crescentes e utilizando o método de Newton-Raphson para resolução de problemas não lineares;
- Avaliar carregamentos constantes no tempo e variáveis (senoidais, cossenoidais, crescentes e parabólicos) no estudo dinâmico de treliças adotando o método de integração no tempo de Newmark;
- A influência no item anterior do amortecimento proporcional de Rayleigh, gerado a partir da combinação linear de matrizes e frequências naturais da estrutura e obtidas pelo método de Jacobi para autovalores e autovetores.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

Quando se pretende ter treliças cada vez mais leves e eficientes (menos barras), obedecendo todos os padrões de qualidade e segurança com confiabilidade, a análise não linear deve ser considerada, já que, essas otimizações aumentam as chances de instabilidades não lineares (HRINDA; NGUYEN, 2008 apud LACERDA, 2014, p. 2). Este tipo de estudo também deve contemplar as estruturas próximas ao colapso onde há grandes modificações na geometria e conseqüente perda da linearidade na relação tensão-deformação.

No ramo científico da mecânica computacional, tem acontecido um aumento significativo da busca por métodos e teorias de análise não linear, motivado ainda por alguns fatores (GRECO, 2004):

- Características geométricas e físicas das estruturas estão cada vez mais inovadoras, necessitando assim uma análise não linear para a obtenção de resultados mais realistas;
- Os métodos numéricos e suas variantes, entre eles o MEF, estão cada vez mais com um comportamento aproximativo melhor e eficiente;
- A disponibilidade e expansão da capacidade computacionais e de seus vários recursos.

Apesar de simples, a análise de treliça se justifica porque as principais características, fenômenos e métodos dos elementos mais complexos envolvidos na análise não linear, em geral, podem ser estudados na mesma com a vantagem de evitar toda a complexidade envolvida na formulação destas estruturas mais sofisticadas, como vigas, cascas e sólidos.

Ademais, não são raros diversos tipos de carregamentos variáveis ao longo do tempo no cotidiano das estruturas, tais como máquinas, equipamentos, edifícios, entre outros. Pensando nisso, a necessidade da compreensão detalhada se faz presente. Na prática, conquanto, aproximações destes carregamentos dinâmicos são realizadas os considerando estáticos ou quase-estáticos. Porém, ao se elevar as suas magnitudes, as solicitações também se mostram elevadas, sendo necessário o estudo variante no tempo destas respostas, configurando uma análise suficientemente robusta.

### 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Inicialmente, será apresentada uma revisão da teoria necessária para melhor compreensão dos assuntos fundamentais deste trabalho, isto é, uma visão geral da análise estrutural não linear estática e dinâmica. Posteriormente os métodos numéricos serão abordados, como o método numérico de integração de Newmark, solução do problema de autovalor usando o método de Jacobi e solução de sistemas de equações não lineares por meio do método de Newton-Raphson. No capítulo seguinte, a formulação vetorial do elemento de treliça proposto será apresentada para que, seguidamente, seja discutida a implementação computacional dos métodos supracitados. Em um momento final, os métodos utilizados nas análises serão estudados e avaliados para se deprender a respeito dos objetivos propostos.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

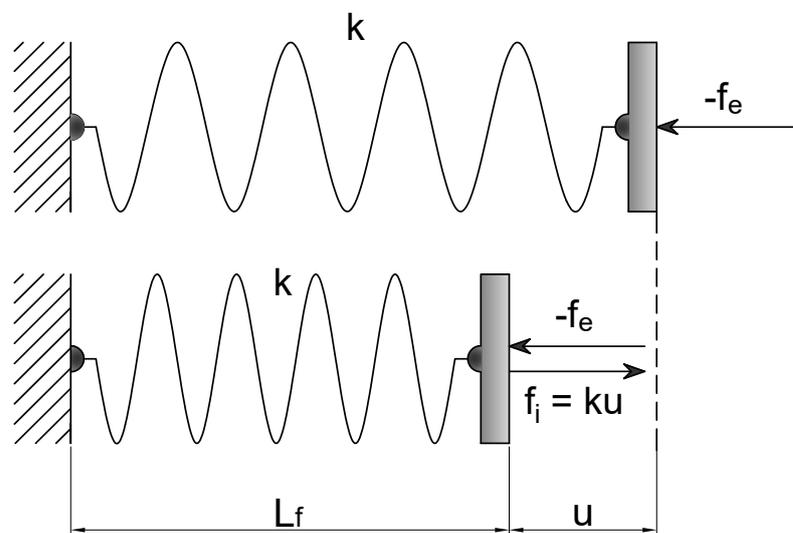
Os conceitos necessários para o embasamento dos estudos e implementações realizadas neste trabalho, fundamentam-se nos textos a seguir. Neste capítulo se descreve os principais conceitos sobre análise não linear de estruturas, tais como os tipos de não linearidades e caminho de equilíbrio, além de eventuais diferenças entre a concepção linear e a não linear. Busca-se também abordar conceitos da dinâmica estrutural e suas principais características através de um modelo de oscilador simples (mola) para descrever o movimento de um corpo e posterior introdução à análise modal.

### 2.1 CARACTERÍSTICAS DA LINEARIDADE

Normalmente, os projetos estruturais são desenvolvidos considerando uma estrutura simplificada, isto é, utilizam a análise essencialmente linear. Deste modo, as equações de equilíbrio são formuladas baseando-se na configuração inicial indeformada do sistema. Neste tipo de análise, segundo Bathe (2006), a formulação do método dos elementos finitos assume algumas hipóteses no modelo estrutural:

1. Os deslocamentos nodais são infinitesimalmente pequenos;
2. As condições de contorno não se modificam durante a aplicação das cargas;
3. O material é linearmente elástico.

Figura 1 – Relação entre força e deslocamento em uma mola.



Fonte: Autor, 2018.

Isto posto, a Figura 1 traz a representação clássica da Lei de Hooke, onde  $f_i$  representa a força interna gerada ao se aplicar uma carga ao sistema. Em condição de equilíbrio estático, a relação entre deslocamento  $u$  e forças externas  $f_e$  se dá linearmente da seguinte maneira:

$$k \cdot u = f_e \quad (2.1)$$

Onde  $k$  corresponde à rigidez do material e  $u$  o deslocamento gerado ao se aplicar uma carga. Em um sistema com maior quantidade de graus de liberdade, como será visto na Subseção 2.5.3, ter-se-á na forma matricial:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}_e \quad (2.2)$$

Sendo  $\mathbf{K}$  a *matriz de rigidez*,  $\mathbf{f}_e$  o *vetor das forças externas* e  $\mathbf{u}$  o *vetor dos deslocamentos nodais*. De acordo com Silva (2009), a principal desvantagem deste tipo de análise é a incapacidade de retratar o comportamento real de determinadas estruturas sob condições não usuais de carregamento ou no limite de carregamentos, isto pois, toda estrutura se comporta de maneira não linear antes de atingir seu limite de resistência. Outrossim, por se tratar de uma relação de proporcionalidade, se a carga é multiplicada por uma constante  $\eta$ , ou seja,  $\eta f_e$ , o deslocamento  $u$  será assim aumentado (ou diminuído) pelo mesmo fator,  $\eta u$ . Se a condição de equivalência entre  $u$  e  $f_e$  não acontece ou, na necessidade de melhor detalhamento de um modelo para se obter respostas mais precisas, as não linearidades do sistema estrutural podem ser consideradas em um estudo mais detalhado.

## 2.2 A NÃO LINEARIDADE

De acordo com Bathe (2006), na não linearidade a configuração de equilíbrio da estrutura se torna o problema em questão a ser solucionado. Isto é:

$$f_i - f_e = \text{resíduo} \quad (2.3)$$

Diferentemente do caso linear, por apresentar um resíduo na diferença entre as forças, faz-se necessário lançar mão de métodos iterativos para minimizá-lo a uma tolerância estabelecida.

De forma geral, a grande parte da literatura sobre análise estrutural por elementos finitos enfatizam a análise linear. Alguns poucos costumam introduzir os conceitos de não linearidade em poucos capítulos ou seções introdutórias, a exemplo de (BATHE, 2006; ZIENKIEWICZ; TAYLOR; FOX, 2014; COOK; MALKUS; PLESHA, 1989). Há alguns outros que se destinam completamente à análise não linear. Dentre eles podem ser destacados (ODEN, 2006; BORST et al., 2012; WRIGGERS, 2008).

Dentre as diversas fontes de não linearidades, existem dois tipos principais<sup>1</sup> abordadas em todos as referências e são elas: a não linearidade física e a não linearidade geométrica.

### 2.2.1 Não Linearidade Física

Esse tipo de não linearidade ocorre nos materiais que não apresentam uma relação tensão-deformação linear, ou seja, não obedecem à lei de Hooke. Em casos como esse, as equações constitutivas são descritas de forma mais complexa, já que a perda de rigidez do material ao longo do carregamento é considerada.

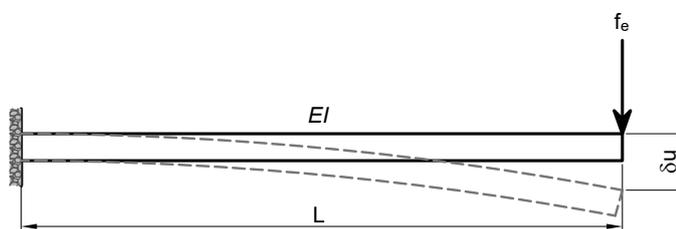
Diversos materiais apresentam esse tipo de comportamento não linear na elasticidade, plasticidade, fluência e viscoelasticidade. Tem-se como exemplo os metais em altas temperaturas, argilas, polímeros e borrachas que se mostram viscoelásticos e o concreto e os solos que são elastoplásticos.

### 2.2.2 Não Linearidade Geométrica

Quando se trata de uma análise linear, todas as equações de equilíbrio são dadas tendo como base a condição inicial indeformada da estrutura. No entanto, quando há uma grande mudança na geometria do sistema em estudo, estas equações já não são suficientemente eficazes em descrever este comportamento e necessitam ser atualizadas para cada nova mudança nessa geometria. Este tipo de não linearidade é chamado de não linearidade geométrica e se trata de uma importante fonte de não linearidade em problemas estruturais. Elas são classificadas em:

- **Grandes deslocamentos e/ou rotações, mas pequenas deformações.**

Figura 2 – Viga engastada.



Fonte: Autor, 2018.

Ou seja, são casos onde a estrutura sofre poucas deformações, mas os seus deslocamentos transversais e/ou rotacionais não são pequenos. Normalmente se faz bastante

<sup>1</sup> Há também as condições de contorno não lineares, isto é, quando estas se alteram durante o deslocamento, por exemplo, nos casos onde há contato ou impacto. Este caso em questão não será levantado neste trabalho.

presente em arcos, treliças, molas, placas e cascas finas. Tem-se como exemplo um viga na Figura 2. Este elemento pode sofrer grandes deslocamentos e ao mesmo tempo ter pequenas deformações. Em outras palavras, aumentando a sua rigidez  $EI$  ao mesmo tempo que se aumenta o seu comprimento  $L$ .

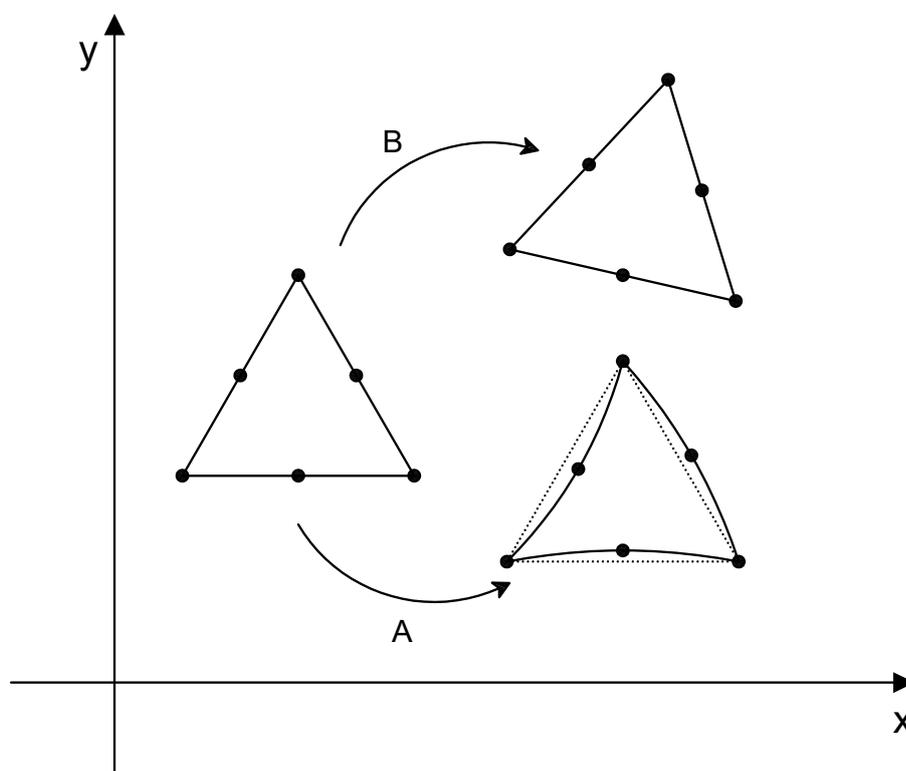
- **Grandes deformações.**

Por se tratar de uma grande deformação, no geral, este tipo de não linearidade também gera não linearidade física. Ocorre na formação de metais e em materiais de borracha. Apesar de relativo, na mecânica computacional como praxe, pode-se considerar uma grande deformação quando esta é acima de 5%. Além disso, alguns autores utilizam preferencialmente o termo deformação infinitesimal para pequenas e deformação finita para as grandes.

### 2.3 DESLOCAMENTO E DEFORMAÇÃO

Devido às diferenças linguísticas, o termo deformação na língua portuguesa pode apresentar uma tradução para duas palavras diferentes no inglês: *strain* e *deformation*.

Figura 3 – (B) Deformação no sentido de *deformation* e (A) Deformação no sentido de *strain*.



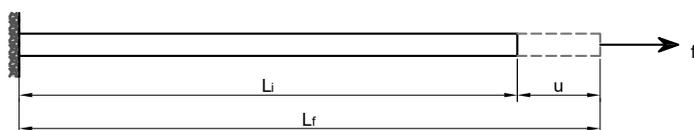
Fonte: Autor, 2018.

De acordo com Lacerda (2014), *deformation* se refere à uma transformação do corpo de uma configuração de referência para uma conformação atual. Porém, este conceito não faz diferenciação entre movimento do corpo rígido e uma modificação em sua forma, sendo assim ambos os casos assumem o mesmo sentido de deformação. Conquanto, *strain* é uma medida adimensional normalizada de deslocamento entre a configuração de referência e os pontos materiais do corpo. Tem-se como exemplo a Figura 3 que representa os conceitos abordados. Na rota **B** a deformação é um *deslocamento* dos pontos, apenas translacional do corpo, encaixando-se no que seria *deformation*. Na rota **A** acontece uma mudança de forma da configuração inicial, sendo apropriada a definição *strain*. Dessarte, a deformação na rota **B** é igual a zero e, diferente de zero na **A**.

Por fim, no sentido de *strain*, tem-se que na formulação contida em (BANDEIRA, 1997) se emprega apenas um tipo de deformação (*Deformação de Engenharia*) e, para o presente trabalho, a mesma também foi utilizada para avaliar o comportamento das barras.

### 2.3.1 Deformação de Engenharia

Figura 4 – Deformação (*strain*) de uma barra.



Fonte: Autor, 2018.

Dentre os tipos de deformações esta é a mais simples. A equação da deformação pode ser definida da seguinte forma e de acordo com a Figura 4:

$$\varepsilon = \frac{u}{L_i} = \frac{L_f - L_i}{L_i} \quad (2.4)$$

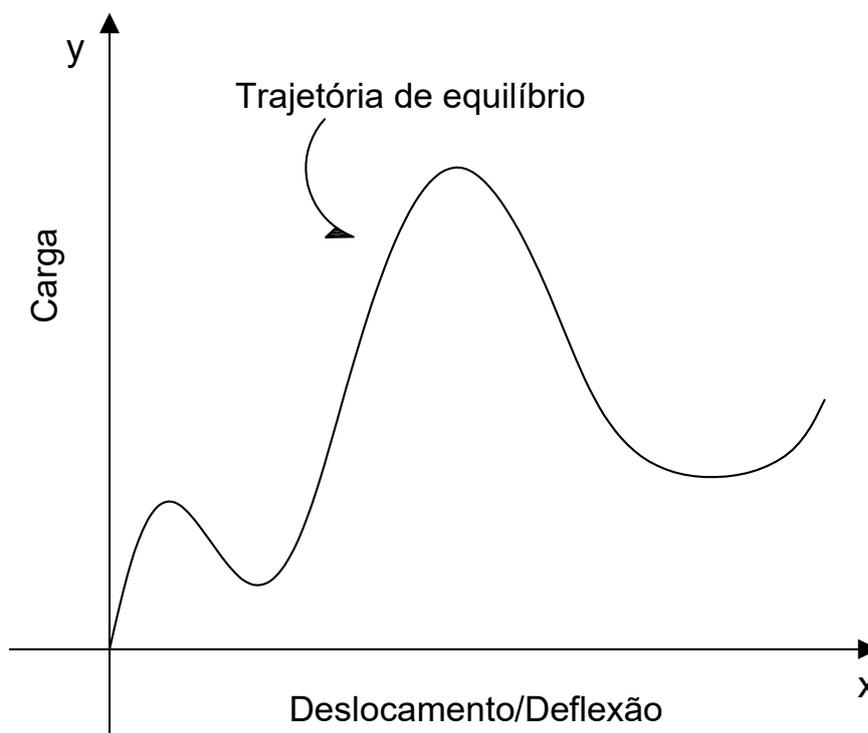
À vista disso, a relação do alongamento linear, que é o quanto ela se deforma em relação ao tamanho inicial, é dada:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{L_f}{L_i} \\ \varepsilon &= \lambda - 1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

## 2.4 CAMINHOS DE EQUILÍBRIO

A fim de avaliar se uma estrutura qualquer é estável, faz-se necessário verificar a configuração de equilíbrio da mesma variando algum parâmetro de controle, obtendo assim um caminho de equilíbrio (ou trajetória de equilíbrio) do sistema estrutural.

Figura 5 – Caminho de equilíbrio de uma estrutura.



Fonte: Autor, 2018.

Tem-se um caminho de equilíbrio<sup>2</sup> ordinário representado pela Figura 5 que relaciona *Carga*  $\times$  *Deslocamento*. É possível destacar alguns pontos de interesse, assim chamados de pontos críticos:

- **Ponto de limite:** se mostra como ponto de máximo ou mínimo da função. É também onde se tem uma tangente horizontal no gráfico;
- **Ponto de bifurcação:** é onde dois ou mais caminhos de equilíbrio se cruzam;
- **Ponto de viragem:** de maior importância computacional do que propriamente física, já que pode afetar o desempenho de alguns métodos numéricos, é onde a tangente se apresenta verticalmente;
- **Ponto de falha:** É onde se finaliza o caminho de equilíbrio, ou seja, onde a estrutura entra em colapso.

Ao atingir os pontos críticos, a estrutura pode instabilizar-se, desta forma, é de substancial importância reconhecê-los para um projeto de engenharia.

<sup>2</sup> Se o comportamento da estrutura for não linear, o gráfico se manifesta não linear. Cada ponto da curva representa uma configuração estática da estrutura para sucessivos carregamentos.

A tangente do caminho de equilíbrio é expressa pela rigidez da estrutura ( $k$ ). Sendo ela negativa, o caminho de equilíbrio é instável.

$$\text{Tangente de rigidez} = \frac{\text{Carga}}{\text{Deslocamento}}$$

## 2.5 DINÂMICA ESTRUTURAL

A maioria dos sistemas mecânicos está sujeita a certo grau vibracional e por isso, seu projeto geralmente necessita de uma análise dinâmica. Estas vibrações são classificadas em duas classes: vibrações forçadas e vibrações livres. No primeiro caso acontece sob constante excitação externa à estrutura. No caso das vibrações livres, distintamente, decorre após curta excitação, quando um sistema oscila na ausência de quaisquer forças externas. O estudo da vibração livre é importante para determinar todas as frequências vibracionais de um corpo, já que o seu movimento oscilatório recebe a contribuição de todas elas. Além disso, quando a sollicitação gera no sistema uma oscilação que coincida com uma das frequências naturais do sistema, forma-se um estado de ressonância, podendo resultar em amplas oscilações e possivelmente causando o colapso estrutural, como no caso célebre da ponte de Tacoma Narrows, nos Estados Unidos, que veio ao colapso após atingir a ressonância devido às cargas dinâmicas do vento. Portanto, faz-se substancial o cálculo das frequências naturais no estudo das vibrações.

De acordo com Gopalakrishnan e Mitra (2010), os problemas dinâmicos estruturais, em geral, também denominados de problemas inerciais, apresentam respostas governadas por baixas frequências que estão entre poucos à centenas de Hz. As altas frequências regem os chamados problemas de propagação de ondas que normalmente ocorrem em cargas explosivas e impactos. Na quase-estática, por sua vez, os efeitos de inércia podem ser desconsiderados devido às baixas frequências de excitação, simplificando assim o processo a uma análise estática (SILVA, 2009).

Na Seção 2.1 foram trazidos os conceitos da linearidade para o equilíbrio estático de uma estrutura. Ao acrescentar forças variáveis neste sistema, as características apontadas que relacionam as forças internas e externas não serão modificadas, ou seja, haverá ainda um equilíbrio entre essas ações na linearidade e um desequilíbrio na não linearidade, como aponta a Equação 2.3. Porém, nessas circunstâncias as forças de inércia ( $\vec{f}_i = m \cdot a$ ) passam a ser relevantes na análise. Aqui, introduzir-se-á estes novos conceitos para um grau de liberdade, expandindo-o para sistemas com  $n$  graus.

### 2.5.1 Ações dinâmicas

Preliminarmente, segundo Clough e Penzien (2010), as ações dinâmicas podem ser classificadas como determinísticas e probabilísticas. Caso haja variação no tempo completamente conhecida, esta ação será determinística e a análise da resposta estrutural

também o será desta maneira. Diferentemente, as ações probabilísticas têm uma variação de tempo determinada estatisticamente.

As ações determinísticas podem ser exemplificadas na Figura 6 e discriminadas da seguinte maneira (SORIANO, 2009):

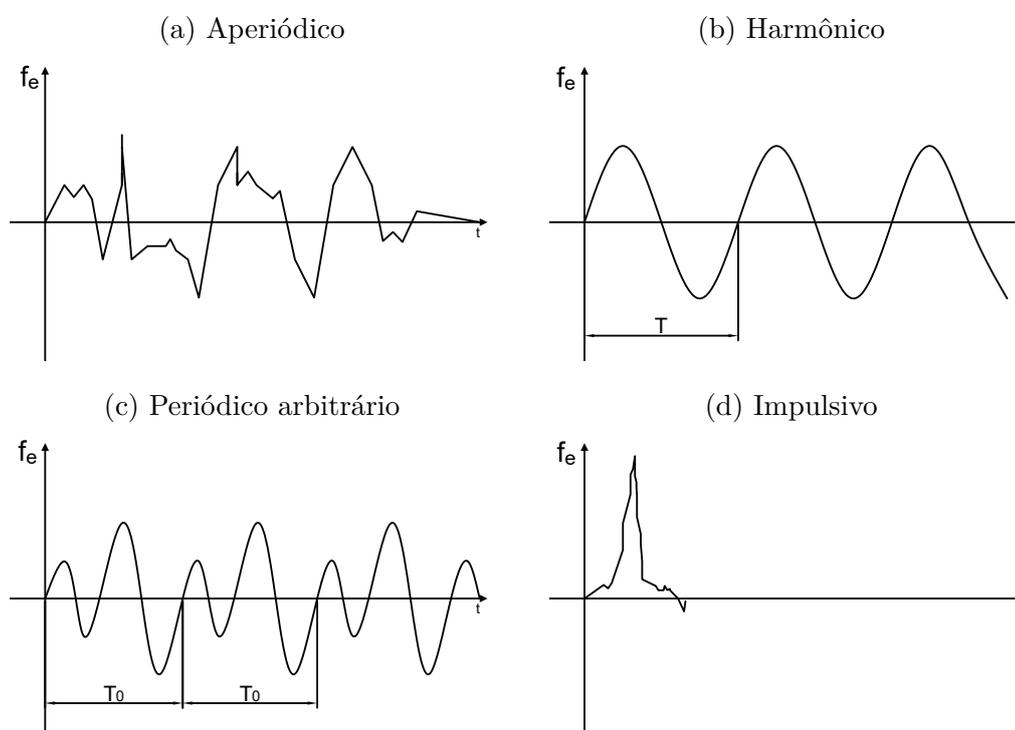
- **Harmônicas:** representadas por meio de funções cossenoidais e senoidais

$$f_e(t) = f_0 \cos(\omega t)$$

$$f_e(t) = f_0 \sin(\omega t)$$

- **Periódicas arbitrarias:** é um tipo de ação que não obedece uma lei específica como no item anterior, todavia, pode ser aproximada por séries de Fourier já que se repete dentro de um período de tempo;
- **Impulsivas:** têm uma intensidade elevada durante um curto intervalo de tempo;
- **Aperiódica arbitrária:** são aleatórias. Não se repetem e não seguem nenhuma lei específica.

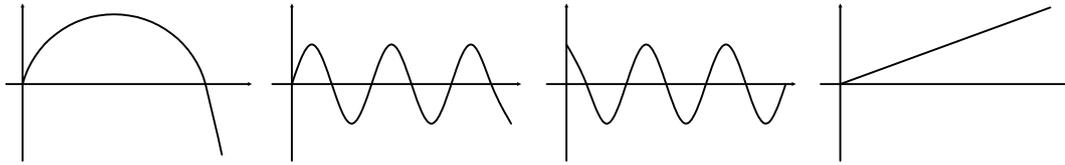
Figura 6 – Tipos de carregamentos dinâmicos.



Fonte: Adaptado de (SORIANO, 2009).

Além dos carregamentos constantes no tempo, a simulação elaborada foi adequada para cargas harmônicas senoidais e cossenoidais, crescentes (função do primeiro grau) e cargas parabólicas (função de segunda ordem) conforme representados na Figura 7.

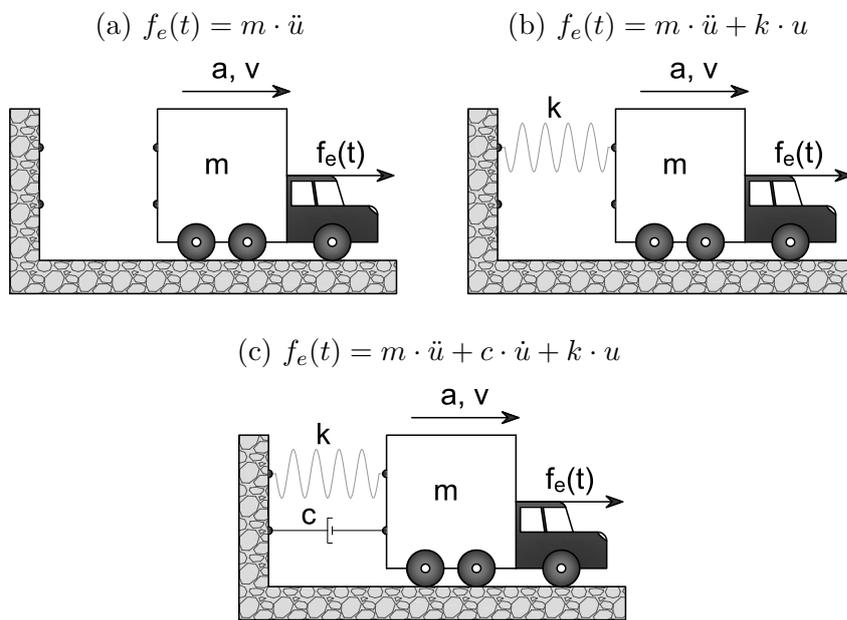
Figura 7 – Tipos de carregamentos implementados.



Fonte: Autor, 2018.

### 2.5.2 Sistema estrutural dinâmico

Figura 8 – Equações gerais do sistema dinâmico.



Fonte: Autor, 2018.

Conforme já explanado, a formação de um problema de dinâmica envolve além da rigidez inerente ao material, as ações inerciais que são também relevantes. Há ainda as forças de amortecimento da estrutura que dissipam a energia durante o movimento, com consequente redução contínua da amplitude das vibrações. Isto posto, a formulação da equação geral de movimento pode ser dada a seguir.

Para um sistema composto por um corpo livre em movimentação no espaço (Figura 8a), a segunda Lei de Newton diz que:

$$f_e = m \cdot \ddot{u} \tag{2.6}$$

Sendo  $m$  a massa e  $\ddot{u}$  a aceleração do corpo, respectivamente.

Ao considerar um sistema em equilíbrio, tem-se que a massa e a aceleração do corpo produzem uma força  $f_i$  que se opõe à ação externa  $f_e$ , ou seja,  $m \cdot \ddot{u} - f_e = 0$ .

O equilíbrio dinâmico pode ser entendido pelo *Princípio D’Alambert* e obedece os mesmos preceitos do equilíbrio estático para a linearidade e não linearidade descritos nas Seção 2.1 e Seção 2.2.

Para tanto, ao considerar também a rigidez do material, conforme a Figura 8b, o equilíbrio dinâmico pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$f_e(t) = m \cdot \ddot{u} + k \cdot u \quad (2.7)$$

Para este caso, o termo  $k \cdot u$  é denominado de força elástica e é abordado anteriormente na Equação 2.1, da Seção 2.1.

Além disso, até aqui se tem um sistema não amortecido (ou conservativo). Quando existe dissipação de energia, faz-se imprescindível o acréscimo da parcela responsável por esta perda, o amortecimento. Posteriormente este parâmetro será elucidado e determinado pelos processos estudados. A equação de equilíbrio é novamente atualizada, concordante com a Figura 8c. Em que  $c$  é o amortecimento e  $\dot{u}$  a velocidade do corpo. A multiplicação  $c \cdot \dot{u}$  é nomeada de força dissipativa de amortecimento.

$$f_e(t) = m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u \quad (2.8)$$

Ou ainda:

$$f_e(t) = f_m + f_c + f_k \quad (2.9)$$

### 2.5.3 Expansão para vários graus de liberdade

Para uma estrutura treliçada espacial cada um dos seus nós possui três graus de liberdade translacionais, um para cada eixo global  $(x, y, z)$ . Na mesma sequência, em um sistema planar haverá dois nos eixos  $x$  e  $y$ . Sendo assim, uma barra possui 6 *gls* e 4 *gls* respectivamente em cada caso, sendo que qualquer grau de liberdade representa um deslocamento possível para uma direção específica relacionada. Logo, para cada grau de liberdade se tem uma Equação 2.9 associada:

$$\begin{aligned} f_{e_1}(t) &= f_{m_1} + f_{c_1} + f_{k_1} \\ f_{e_2}(t) &= f_{m_2} + f_{c_2} + f_{k_2} \\ f_{e_3}(t) &= f_{m_3} + f_{c_3} + f_{k_3} \\ &\vdots \\ f_{e_n}(t) &= f_{m_n} + f_{c_n} + f_{k_n} \end{aligned}$$

Sendo  $f_m = m \cdot \ddot{u}$  a força de inércia,  $f_c = c \cdot \dot{u}$  a força dissipativa de amortecimento e  $f_k = k \cdot u$  a força elástica. Cada uma dessas forças pode ser separada em subsistemas específicos, mais convenientemente bem escritos como combinação linear relacionando os

deslocamentos, velocidades e acelerações e seus respectivos coeficientes de elasticidade, amortecimento e massa:

$$\begin{Bmatrix} f_{m_1}(t) \\ f_{m_2}(t) \\ f_{m_3}(t) \\ \vdots \\ f_{m_n}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \cdots & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \vdots \\ \ddot{u}_n \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\begin{Bmatrix} f_{c_1}(t) \\ f_{c_2}(t) \\ f_{c_3}(t) \\ \vdots \\ f_{c_n}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\begin{Bmatrix} f_{k_1}(t) \\ f_{k_2}(t) \\ f_{k_3}(t) \\ \vdots \\ f_{k_n}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \cdots & k_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

Então, é oportuno ainda representar os sistemas da Equação 2.10, 2.11 e 2.12 na forma matricial:

$$\mathbf{f}_e(t) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (2.13)$$

Onde,  $\mathbf{M}$  é a Matriz Massa,  $\mathbf{C}$  é a Matriz de Amortecimento e  $\mathbf{K}$  a Matriz de Rigidez.

#### 2.5.4 Sistema não amortecido e introdução à análise modal

Tem-se na análise modal de estruturas uma das mais utilizadas ferramentas da comunidade de engenheiros na caracterização das particularidades vibratórias, isto é, consiste em um método de determinação dos autovalores e autovetores de um dado sistema estrutural. A sua plurivalência permite que os dados obtidos na análise sejam utilizados em alguns tipos de aplicações, dentre eles a determinação dos parâmetros de amortecimento do sistema, possibilitando uma concepção da matriz de amortecimento presente na Equação 2.13. Neste contexto, encontra-se a necessidade de compreender as bases dos seus mecanismos de solução e suas particularidades.

O sistema não amortecido é crucial para determinação das frequências naturais e dos modos vibracionais da estrutura. Soriano (2009) afirma que após excitado, o modelo passa a vibrar em movimento harmônico simples e mantém essa vibração ao longo do tempo.

Por conta disso, as frequências naturais e modos de vibrar são dependentes apenas da distribuição de massa ( $m$ ) e rigidez ( $k$ ) e independentes da carga externa aplicada.

O modelo em questão pode ser representado por um oscilador simples, em um sistema não amortecido, uma vez que o amortecimento é o parâmetro a ser determinado posteriormente. Sendo assim, a equação será formada da seguinte maneira:

$$m \cdot \ddot{u} + k \cdot u = 0 \quad (2.14)$$

A Equação 2.14 é uma equação diferencial de segunda ordem homogênea a coeficientes constantes e admite a solução a seguir:

$$u = \psi \cos(\omega_n t) \quad (2.15)$$

Aplica-se então a Equação 2.15 em 2.14:

$$\begin{aligned} -m\psi\omega_n^2 \cos(\omega_n t) + k\psi \cos(\omega_n t) &= 0 \\ (-m\omega_n^2\psi + k\psi) \cos(\omega_n t) &= 0 \\ (-m\omega_n^2\psi + k\psi) &= 0 \\ (k - \omega_n^2 m) \psi &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Tem-se a solução não trivial (Equação 2.16), onde  $\psi$  é o modo de vibração e  $\omega_n$  a frequência natural. Assume-se  $\lambda = \omega_n^2$  e a Equação 2.16 pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$(k - \lambda m) \psi = 0 \quad (2.17)$$

Ademais, a relação para que seja possível expandi-la a um sistema de equações representando os  $n$  graus de liberdade é feita conforme a Equação 2.17 em um sistema de matrizes diretamente correspondente na Equação 2.18 abaixo:

$$(\mathbf{K} - \Lambda \mathbf{M}) \Psi = 0 \quad (2.18)$$

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \Psi = \Lambda \Psi$$

$$\mathbf{D} \Psi = \Lambda \Psi \quad (2.19)$$

A matriz  $\mathbf{D}$  é denominada de Matriz Dinâmica, a matriz  $\Psi$  é dita Matriz Modal, que tem uma ordem  $n \times n$  onde cada coluna representa as formas modais dos  $n$  graus de liberdade correspondentes ao autovalor  $\Lambda_i$ . Tem-se ainda a matriz  $\Lambda$  que é dita Matriz Espectral e costuma ser representada na forma:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \omega_{n_1}^2 & & & \\ & \omega_{n_2}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_{n_n}^2 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (2.20)$$

Para cada autovalor  $\Lambda_i$ , há um respectivo autovetor não nulo  $\Psi_i$ , que satisfaz a Equação 2.19. Os valores de  $\Lambda$  para soluções não nulas dela são os autovalores de  $D$  e assumem apenas valores reais<sup>3</sup>. Além disso, para cada valor  $\Lambda_i$  de  $D$  mais o vetor nulo, formam uma base vetorial, podendo então escrever a solução da Equação 2.19 como combinação linear dos autovetores da transformação.

Como os valores de  $\Lambda$  e  $\Psi$  podem ser obtidos por meio de técnicas iterativas bastante eficientes, principalmente para os modos de baixas frequências (COHEN; MCCALLION, 1967), algumas considerações podem ser feitas:

- É preciso apenas uma parcela dos autovalores e/ou autovetores para a análise;
- São necessários autovalores e autovetores ou somente os autovalores;
- Como a matriz de transformação é simétrica, o custo computacional é consideravelmente reduzido;
- Em uma matriz de ordem elevada, a memória do computador deve ser avaliada para a adequação do algoritmo;
- Por se tratar de uma matriz esparsa ( $D$ ), a mesma possui elementos não nulos em uma banda centrada na diagonal, ou os elementos estão dispostos em todo o corpo da matriz, facilitando a análise, já que os valores menores que uma tolerância estabelecida podem ser ignorados;
- Os resultados devem apresentar uma razoável ou boa precisão dentro da necessidade requerida.

De acordo com Bathe (2006), o principal dilema no uso desses métodos se dá com a acurácia nos cálculos, uma vez que estes tipos de problemas requerem processos iterativos e a solução deve ocorrer ao alcançar os limites aceitáveis. Estas tolerâncias são constituídas usando as sucessivas aproximações dos autovalores e pelos elementos exteriores à diagonal principal da matriz, de forma que estes tenham valores nulos, tendentes a zero.

Para que se possa diminuir o custo computacional utilizando apenas um número suficiente de autovalores e autovetores correspondentes, em alguns casos onde não se requer o uso de todos os modos - a exemplo de determinados tipos de carregamentos dinâmicos e montagens de certos elementos - pode ser negligenciada a contribuição de modos de frequências mais elevadas (BATHE; WILSON, 1973).

Na solução do problema do autovalor e autovetor da Equação 2.19, emprega-se o *método de Jacobi*, que está descrito em (PRESS et al., 1992) juntamente com seu código na

<sup>3</sup> Os autovalores também podem assumir valores complexos, porém, neste tipo de problema é assegurado apenas valores reais, já que uma matriz real simétrica tem apenas autovalores reais (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987).

linguagem C. Trata-se de um método de relativa simplicidade e grande eficiência, que produz uma diminuição progressiva tendendo a zero dos elementos fora da diagonal principal da matriz dinâmica  $\mathbf{D}$ . Todavia, este procedimento pode vir a ser custoso para o caso de uma análise não linear dinâmica, uma vez que para cada incremento de deslocamento calculado pelo método de Newton-Raphson (Algoritmo 1), tem-se uma *nova* estrutura com novos valores de frequências naturais e rigidez, já que o comprimento dos seus elementos é alterado, de acordo com o Algoritmo 3. Assim sendo, faz-se necessário avaliar, quando a estrutura não apresenta grandes deformações (*strain*), se não é satisfatória e suficiente a utilização das frequências naturais da sua condição inicial indeformada.

## 2.6 O AMORTECIMENTO

O amortecimento, fisicamente em um sistema, é a transformação da energia mecânica de vibração em energia térmica. Em diversos trabalhos acadêmicos há uma abrangência vasta de materiais e sistemas estruturais amortecidos em que o foco normalmente é o cálculo de respostas quando há ou não a presença de amortecimento. Porém, a correta identificação desse fenômeno continua a ser um grande desafio à ciência e à sua comunidade, já que esse processo ainda não se dá de forma eficiente se comparado com diversos outros parâmetros de um modelo (DIAS, 2015). Além disso, tem-se uma condição deteriorada quando se leva em consideração os erros de medições experimentais e a complexidade e dimensão das grandes obras da engenharia. Por essa razão, apesar de trazer uma maior confiabilidade aos cálculos, muitos algoritmos desprezam as forças dissipativas de amortecimento presentes no sistema. Todavia, ainda assim, diversos modelos físicos foram desenvolvidos com esta finalidade, podendo-se apontar o modelo viscoelástico proposto por (CHRISTENSEN, 1982), atrito (BERGER, 2002), histerético (BERT, 1973) e, o modelo viscoso de Rayleigh (CLOUGH; PENZIEN, 2010).

De forma geral, as referências utilizadas no presente trabalho trazem em grande parte a metodologias de amortecimentos em sistemas lineares, muito por apresentarem uma boa resposta em situações onde não há um grande nível de tensão e deformação e, além disso, um baixo custo computacional envolvido quando se trata de uma análise puramente linear (BERT, 1973). Esse mesmo autor trouxe resultados de comparações de vários modelos propostos para representação do amortecimento de meios homogêneos em sistemas estruturais dinâmicos.

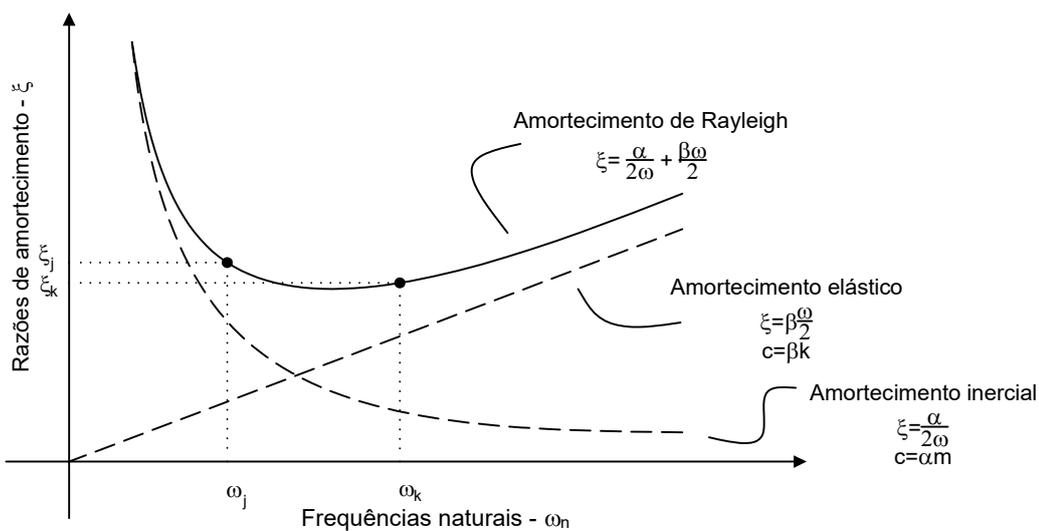
Além de (BERT, 1973), (WOODHOUSE, 1998) escreveu sobre o comportamento vibracional de sistemas com amortecimento linear na presença de pequenos valores de amortecimento. Já em (ORBAN, 2011) há um levantamento com dados numéricos e experimentais sobre até onde a geometria da estrutura afeta no amortecimento dela. E em (JEARY, 1997) se avalia o decaimento energético de um sistema (o amortecimento), relacionando-o com os mecanismos de fratura do mesmo.

Finalmente, tendo em vista este trabalho e a necessidade de se definir os diversos parâmetros da equação de movimento (2.13), o amortecimento deve ser dado para uma situação onde há, além do mais, um sistema não linear a ser solucionado. Isto posto, salienta-se de antemão que a matriz de amortecimento não deve ser obtida pela forma convencional citada na Seção 4.2, por meio das dimensões, coeficientes e membros da estrutura. Assim, um conjunto de métodos para uma maior eficiência na determinação deste parâmetro, baseados em análise modal, tem sido desenvolvido. Nesse contexto, o modelo de combinação linear de amortecimento viscoso, elaborado por Rayleigh, é a aproximação mais comumente utilizada no arranjo da matriz de amortecimento, mesmo com fato de que os amortecimentos estabelecidos com a frequência vibracional possam não ter uma elevada precisão de cálculo.

### 2.6.1 Amortecimento proporcional de Rayleigh

Como já mencionado, o amortecimento proporcional de Rayleigh é o modelo escolhido para este trabalho, com o objetivo de realizar um estudo mais fidedigno, considerando-o como uma variável no sistema. De forma geral, este modelo de combinação linear entre rigidez e massa é a aproximação mais ordinariamente utilizada na composição de matrizes de amortecimento, porém, de acordo com Adhikari (2006) estes amortecimentos proporcionais à massa e à rigidez, baseados em frequências naturais, apresentam limitações e podem não ser calculados com elevada precisão. Na Figura 9 é observado por meio de curvas como o amortecimento do sistema se comporta, sendo ele proporcional ou não.

Figura 9 – Modos de amortecimentos proporcionais. Amortecimento proporcional à massa, à rigidez e amortecimento de Rayleigh.



Fonte: Autor, 2018.

Considera-se então a matriz de amortecimento como a combinação linear das matrizes

de rigidez e de inércia. Ela pode ser representada do seguinte modo:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (2.21)$$

E, para se obter os valores dos coeficientes de proporcionalidade  $\alpha$  e  $\beta$ , levando em conta a taxa de amortecimento  $\xi$  e frequência  $\omega$  (CLOUGH; PENZIEN, 2010), tem-se:

$$\xi = \frac{\alpha}{2\omega_n} + \frac{\beta\omega_n}{2} \quad (2.22)$$

No caso da dinâmica estrutural, considera-se a primeira e menor frequência, além de alguma outra frequência significativa cujo modo contribua substancialmente para a resposta dinâmica da estrutura (CLOUGH; PENZIEN, 2010). Assim, admite-se duas taxas de amortecimento distintas, bem como duas frequências naturais diferentes que são obtidas pelo procedimento da Subseção 2.5.4, a análise modal. É conveniente se rearranjar em forma matricial para se obter o seguinte sistema:

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\omega_{n_1}} & \frac{\omega_{n_1}}{2} \\ \frac{1}{2\omega_{n_2}} & \frac{\omega_{n_2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Ou reagrupando, de modo a se isolar as variáveis de interesse  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \frac{2\omega_{n_1}\omega_{n_2}}{\omega_{n_1}^2 - \omega_{n_2}^2} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{n_2} & -\omega_{n_1} \\ -\frac{1}{2\omega_{n_2}} & \frac{1}{2\omega_{n_1}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

Tabela 1 – Amortecimento de materiais em condições normais de trabalho.

Sistema	$\xi$
Metal em regime elástico	<0,01
Estrutura metálica contínua	0,02 a 0,04
Estrutura metálica com juntas	0,03 a 0,07
Alumínio	0,0004
Tubulação com diâmetros pequenos	0,01 a 0,02
Tubulação com diâmetros grandes	0,02 a 0,03
Absorventes de choques	0,03
Borracha	0,05
Grandes construções durante terremotos	0,01 a 0,05

Fonte: (ORBAN, 2011).

Usualmente se considera os coeficientes de amortecimento iguais para ambas as frequências naturais  $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ . Caso haja um sistema constituído por materiais distintos, é recomendado que haja razões de amortecimento diferenciadas para cada frequência natural (BATHE, 2006). Com essa observação, o sistema 2.24 pode ser representado como:

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \frac{2\xi}{\omega_{n_1} + \omega_{n_2}} \cdot \begin{Bmatrix} \omega_{n_1}\omega_{n_2} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

Ou ainda:

$$\alpha = \frac{2\xi\omega_{n_1}\omega_{n_2}}{\omega_{n_1} + \omega_{n_2}} \quad \beta = \frac{2\xi}{\omega_{n_1} + \omega_{n_2}} \quad (2.26)$$

Além disso, a razão de amortecimento ainda depende de variados fatores, além do material, como a amplitude das tensões, número de ciclos, forças internas, geometria, temperatura, etc. (ORBAN, 2011). Pode-se levantar estes dados experimentalmente em laboratório, porém, para estruturas de elevadas dimensões, complexas sobretudo, a análise experimental é dificultada (HUANG et al., 2007). Por mais este motivo de variadas incertezas, não é incomum representar  $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ . (ORBAN, 2011) lista, conforme a Tabela 1 presente, algumas razões de amortecimento para alguns tipos de materiais.

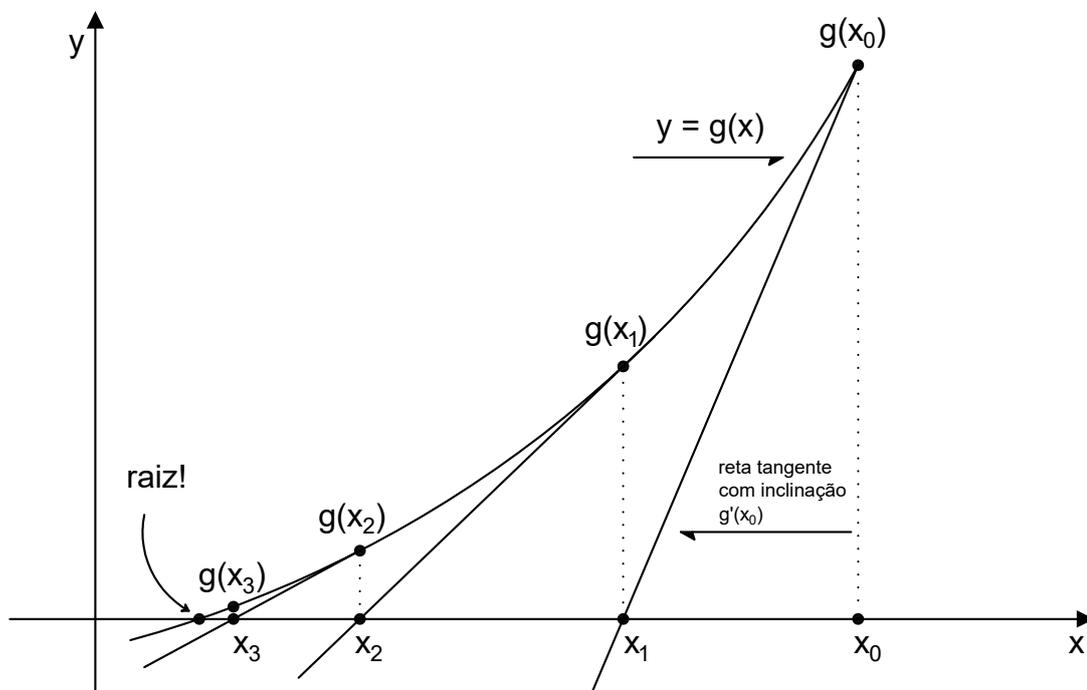
### 3 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ANÁLISE ESTRUTURAL

Visto na Seção 2.2, para o problema da não linearidade se faz necessário um processo de minimização afim de que seja alcançada a condição de equilíbrio do sistema. Isto é, há de se ter a circunstância onde  $\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_e \leq tol$ , sendo  $tol$  uma tolerância estabelecida,  $\mathbf{f}_i$  é o vetor das forças internas e  $\mathbf{f}_e$  o vetor das forças externas.

Isto posto, este capítulo descreve alguns dos métodos numéricos consagrados e aplicados na resolução dos problemas estáticos e dinâmicos. Em primeiro momento se tem o método de Newton-Raphson para resolver sistemas de equações não lineares, posteriormente, a discussão deste método para problemas incrementais-iterativos e, por fim, o método de integração direta no tempo de Newmark utilizado para análise dinâmica na resolução da Equação 2.13.

#### 3.1 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Figura 10 – Método de Newton.



Fonte: Autor, 2018.

O método de Newton-Raphson é um dos mais importantes métodos numéricos clássicos aplicados nas engenharias e ciências exatas e que tem provado ser uma das mais

eficientes técnicas de solução disponível para análise não linear de estruturas. inicialmente o método será visto de forma genérica e, após isso, a solução será distinguida para o caso estrutural não linear objetivando se encontrar a condição de equilíbrio onde  $f_i - f_e = 0$ .

O método de newton é iterativo, ou seja, no decorrer do problema é gerado uma sequência de pontos a partir de um ponto inicial  $x_0$ . Na  $j$ -ésima iteração, o ponto  $x_{j+1}$  é obtido a partir do ponto imediatamente anterior a ele, pela Equação 3.1 (BANDEIRA, 1997).

Para sua definição, suponha que  $g(x)$  é uma função contínua, diferenciável e com raiz próxima a um ponto estimado. Por meio da Figura 10 se pode observar como é encontrada a solução dessa função. O procedimento se inicia com uma primeira estimativa em  $x_0$ , a partir daí, a reta tangente em  $g(x_0)$  dará o novo ponto  $x_1$  onde  $g'(x_0)$  interseccionar o eixo  $x$ . Doravante, os valores de  $x_j$  e  $g(x_j)$  são encontrados consecutivamente em sequência (LACERDA, 2014). A equação geral pode ser dada abaixo:

$$x_{j+1} = x_j - \frac{g(x_j)}{g'(x_j)} \quad (3.1)$$

Além disso, esta equação pode ser encontrada a partir de uma expansão em Série de Taylor de  $g(x)$  em torno de  $x_i$  e, após isso, truncando-a em termos de primeira ordem:

$$\begin{aligned} g(x) &= g(x_j) + (x - x_j)g'(x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_j)^2g''(x_j) + \dots \\ g(x) &\approx g(x_j) + (x - x_j)g'(x_j) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Para encontrar a raiz, faz-se  $g(x) = 0$  na Equação 3.2 e se chega novamente na formulação da Equação 3.1:

$$x \approx x_j - \frac{g(x_j)}{g'(x_j)} \quad (3.3)$$

### 3.1.1 Critérios de parada

Dentre os critérios de parada usados, dois são definidos em (GILAT; SUBRAMANIAM, 2008):

- **Tolerância em  $g(x)$**  - as iterações terminam quando o valor absoluto de  $g(x_j)$  é menor do que um valor de tolerância pré-especificado;

$$|g(x_j)| \leq tol$$

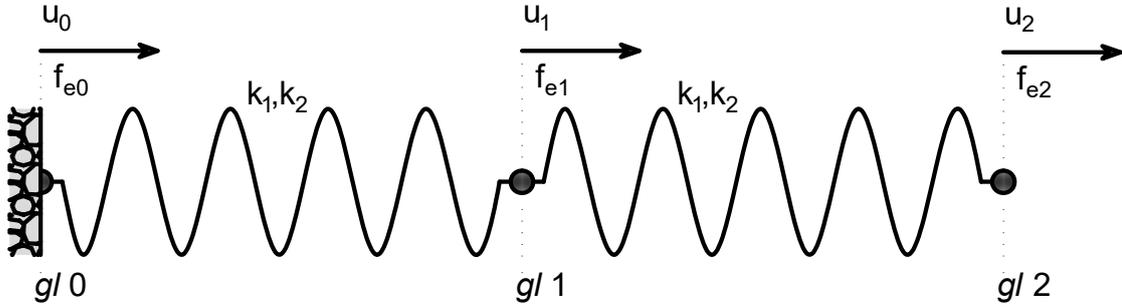
- **Erro relativo estimado** - as iterações terminam quando o erro relativo é menor do que um valor de tolerância pré-especificado.

$$\left| \frac{x_{j+1} - x_j}{x_j} \right| = \left| \frac{\delta x}{x_j} \right| \leq tol$$

### 3.2 MÉTODO DE NEWTON GENERALIZADO

Para um caso geral, onde há uma situação com  $n$  graus de liberdade, o método de Newton-Raphson poderá ser expandido para um sistema com  $n$  equações.

Figura 11 – Esquema da mola com dois graus de liberdade.



Fonte: Autor, 2018.

Para a dedução, tem-se o esquema de um mola não linear genérica, com dois graus de liberdade (Figura 11), e coeficientes de rigidez  $k_1$  e  $k_2$ . A mesma apresenta uma função objetivo ou energia potencial total  $P(x)$  contínua, com derivadas parciais também contínuas até segunda ordem.

$$P(x) = \frac{k_1 x^2}{2} + \frac{k_2 x^4}{4} \quad (3.4)$$

O trabalho realizado pode ser dado entre a diferença do trabalho interno pelo trabalho externo em um sistema de molas com  $n$  graus de liberdade:

$$P(u) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{k_1(u_{i+1} - u_i)^2}{2} + \frac{k_2(u_{i+1} - u_i)^4}{4} - f_{e_{i+1}} \cdot u_{i+1} \quad (3.5)$$

Assim, a *matriz jacobiana* é formada com o primeiro gradiente da equação da energia de deformação e considerando  $u_0 = 0$  e  $f_{e_0} = 0$  devido ao seu engastamento.

$$\begin{aligned} \nabla P(u_1, u_2) &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial P}{\partial u_1} \\ \frac{\partial P}{\partial u_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 u_1 + k_2 u_1^3 - k_1(u_2 - u_1) - k_2(u_2 - u_1)^3 - f_{e1} \\ k_1(u_2 - u_1) + k_2(u_2 - u_1)^3 - f_{e2} \end{Bmatrix} \\ \nabla P(u_1, u_2) &= \begin{Bmatrix} k_1 u_1 + k_2 u_1^3 - k_1(u_2 - u_1) - k_2(u_2 - u_1)^3 \\ k_1(u_2 - u_1) + k_2(u_2 - u_1)^3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_{e1} \\ f_{e2} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.6)$$

A Equação 3.6 assume também a representação seguinte:

$$\begin{aligned} \nabla P(u_1, u_2) &= \delta \mathbf{f} \\ \delta \mathbf{f} &= \mathbf{f}_i - \mathbf{f}_e \end{aligned} \quad (3.7)$$

Na determinação da matriz de rigidez, encontra-se a *matriz hessiana*<sup>1</sup> da energia de deformação  $P(u)$ , derivando-a pela segunda vez parcialmente em relação a  $u_1$  e  $u_2$ .

$$\nabla^2 P(u_1, u_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 P}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 P}{\partial u_1 \partial u_2} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial u_2 \partial u_1} & \frac{\partial^2 P}{\partial u_2^2} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\nabla^2 P(u_1, u_2) = \begin{bmatrix} 2k_1 + 3k_2 u_1^2 + 3k_2 (u_2 - u_1)^2 & -k_1 - 3k_2 (u_2 - u_1)^2 \\ -k_1 - 3k_2 (u_2 - u_1)^2 & k_1 + 3k_2 (u_2 - u_1)^2 \end{bmatrix}$$

Desta forma, a matriz resultante da Equação 3.8 é também a *matriz de rigidez tangente*  $\mathbf{K}_t$  da estrutura. Comumente, em estruturas com comportamento linear a matriz  $\mathbf{K}_t$  é apenas referida como matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ . A matriz de rigidez tangente para vários graus de liberdade é dada:

$$\nabla^2 P(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) = \mathbf{K}_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 P}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 P}{\partial u_1 \partial u_2} & \frac{\partial^2 P}{\partial u_1 \partial u_3} & \cdots & \frac{\partial^2 P}{\partial u_1 \partial u_n} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial u_2 \partial u_1} & \frac{\partial^2 P}{\partial u_2^2} & \frac{\partial^2 P}{\partial u_2 \partial u_3} & \cdots & \frac{\partial^2 P}{\partial u_2 \partial u_n} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial u_3 \partial u_1} & \frac{\partial^2 P}{\partial u_3 \partial u_2} & \frac{\partial^2 P}{\partial u_3^2} & \cdots & \frac{\partial^2 P}{\partial u_3 \partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 P}{\partial u_n \partial u_1} & \frac{\partial^2 P}{\partial u_n \partial u_2} & \frac{\partial^2 P}{\partial u_n \partial u_3} & \cdots & \frac{\partial^2 P}{\partial u_n^2} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Para resolução pelo método de newton, faz-se então a expansão da Equação 3.1.

$$\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j - \mathbf{K}_{t_j}^{-1} \delta \mathbf{f}_j \quad (3.10)$$

Na prática, a matriz inversa não é calculada computacionalmente, a fim de otimizar o uso de memória. Inúmeros métodos podem ser utilizados na resolução da Equação 3.10 sem a necessidade de inversão da matriz  $\mathbf{K}_t$ , podendo-se citar dentre eles o Método de Cholesky, Método do Gradiente Biconjugado Pré-condicionado (PBCG), o Método de Crout e a Decomposição LU. Para este trabalho se utilizou os métodos de Cholesky e Gradiente Biconjugado Pré-condicionado (PBCG). Por se tratar de uma matriz simétrica e definida positiva (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987), a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_t$  pode ser resolvida inicialmente pelo método de Cholesky. Porém, para grandes sistemas, formados por quantidades elevadas de graus de liberdade, este tipo de solução não é adequada por necessitar decompor a matriz em matrizes triangulares. Como os sistemas

<sup>1</sup> Ou ainda a matriz jacobiana da equação de equilíbrio (Equação 3.7).

estruturais estudados são em geral formados por matrizes esparsas, na necessidade de otimizar e agilizar o processamento computacional do código, o método PBCG é o mais recomendado, já que todos os elementos matriciais inferiores a uma *tolerância* definida não serão considerados em um armazenamento prévio em vetores de pré condicionamento. Demais informações, descrições e códigos são encontrados no livro “*Numerical Recipes in C*” de (PRESS et al., 1992). Abaixo se encontra o algoritmo do processo de Newton-Raphson proposto por (BANDEIRA, 1997, p. 18):

```

1 begin
2   // Adote valores iniciais para  $\mathbf{u}$ 
3    $j = 0$ ;
4    $\mathbf{u}_j = 0$ ;
5   repeat
6     // Faça a diferença das forças  $\delta \mathbf{f}$ 
7      $\delta \mathbf{f} = \mathbf{f}_i - \mathbf{f}_e$ ;
8     // Calcule a jacobiana da equação de equilíbrio
9      $\mathbf{K}_t = \nabla F(\mathbf{u})$ ;
10    // Resolva o sistema
11     $\delta \mathbf{u} = \mathbf{K}_t^{-1} \delta \mathbf{f}$ ;
12    // Faça a diferença
13     $\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j - \delta \mathbf{u}$ ;
14    // Atualize as coordenadas nodais
15     $\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}_{j+1}$ ;
16    // Faça
17     $j = j + 1$ ;
18  until  $\|\delta \mathbf{f}\| \leq tol$ ;
19 end

```

Algoritmo 1: Newton-Raphson

### 3.2.1 Critérios de parada

Assim como na Subseção 3.1.1, tratando-se de um sistema com vários graus de liberdade, dentre os critérios de parada usados os mesmos dois casos anteriores são definidos:

- Tolerância em  $\delta \mathbf{f}$ :

$$\|\delta \mathbf{f}\| \leq tol$$

- Erro relativo estimado:

$$\frac{\|\delta \mathbf{u}_j\|}{\|\mathbf{u}_j\|} \leq tol$$

### 3.2.2 Solução incremental-iterativa

Objetificando a construção dos caminhos de equilíbrio (Seção 2.4), faz-se necessário a modificação do método de Newton-Raphson, já que, normalmente, um processo iterativo

apenas fornece a solução de um único ponto da trajetória. Assim, pode-se fazer um procedimento incremental (representado na Figura 12), aumentando sucessivamente níveis de carga em uma progressão aritmética. Isto é, estima-se um incremento  $\delta \hat{\mathbf{f}}$  inicialmente para o primeiro ciclo. Seguidamente, a carga será acrescentada a cada sequência em  $2 \cdot \delta \hat{\mathbf{f}}$ ,  $3 \cdot \delta \hat{\mathbf{f}}$ ,  $4 \cdot \delta \hat{\mathbf{f}}$ , etc.

Nesse sentido, buscou-se adaptar o Algoritmo 1 proposto por (BANDEIRA, 1997) para este procedimento:

```

1 begin
2   // Adota valores iniciais para  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{f}_e$ 
3    $\mathbf{f}_e^{k=1} = \delta \hat{\mathbf{f}}$ ;
4    $\mathbf{u}_j = 0$ ;
5   // Início do processo increm-iterativo
6   for  $k = 1$  to  $k \leq n_{icrem}$  do
7     // Faça a iteração de newton para cada incremento de carga
8      $j = 0$ ;
9     repeat
10      // Faça a diferença das forças  $\delta \mathbf{f}$ 
11       $\delta \mathbf{f} = \mathbf{f}_i - \mathbf{f}_e^k$ ;
12      // Calcule a jacobiana da equação de equilíbrio
13       $\mathbf{K}_t = \nabla F(\mathbf{u})$ ;
14      // Resolva o sistema
15       $\delta \mathbf{u} = \mathbf{K}_t^{-1} \delta \mathbf{f}$ ;
16      // Faça a diferença
17       $\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j - \delta \mathbf{u}$ ;
18      // Atualize as coordenadas nodais
19       $\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}_{j+1}$ ;
20      // Faça
21       $j = j + 1$ ;
22    until  $\|\delta \mathbf{f}\| \leq tol$ ;
23    // Incrementa a força para um novo processo
24     $\mathbf{f}_e^{k+1} = \mathbf{f}_e^k + \delta \hat{\mathbf{f}}$ ;
25  end
26 end

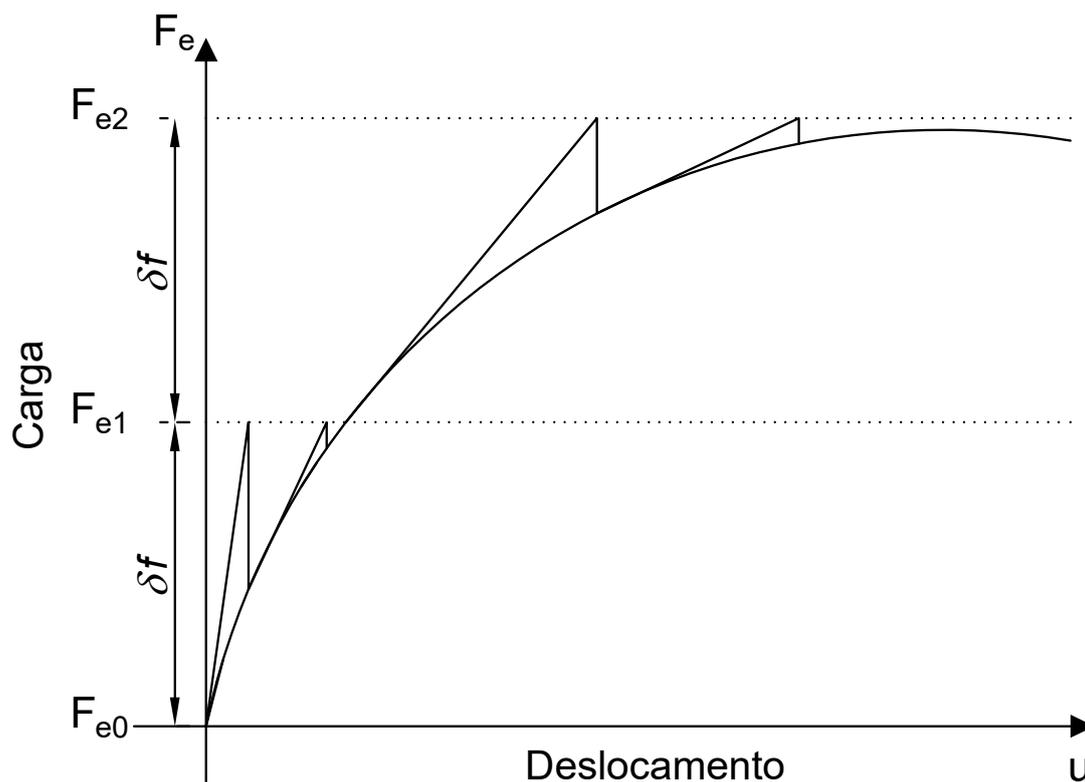
```

**Algoritmo 2:** Newton-Raphson incremental-iterativo

Segundo Lacerda (2014), o procedimento incremental-iterativo deveria ser utilizado mesmo na busca de uma solução para um único ciclo de carga, uma vez que problemas de convergência podem ser gerados no método de Newton-Raphson caso seja imposta uma grande carga  $f$  de uma única só vez. A prática mostra que nesses casos as iterações podem ser difíceis de convergir ou até mesmo não encontrar a solução do problema. Logo, com o incremento gradual, a solução é dividida por níveis e facilitada a sua conversão ao final do processo.

Ademais, essa metodologia tem relevância em materiais com dependência do caminho de equilíbrio da estrutura no processo de deformação. Para tanto, diferentes tensões podem ser encontradas a depender de como as cargas serão aplicadas (BORST et al., 2012). Assim, dividi-las em pequenos pedaços possibilita acompanhar com maiores nuances a sua deformação e obter resultados melhores, corretos e mais confiáveis.

Figura 12 – Newton-Raphson incremental-iterativo.



Fonte: Autor, 2018.

### 3.3 MÉTODO DE NEWMARK

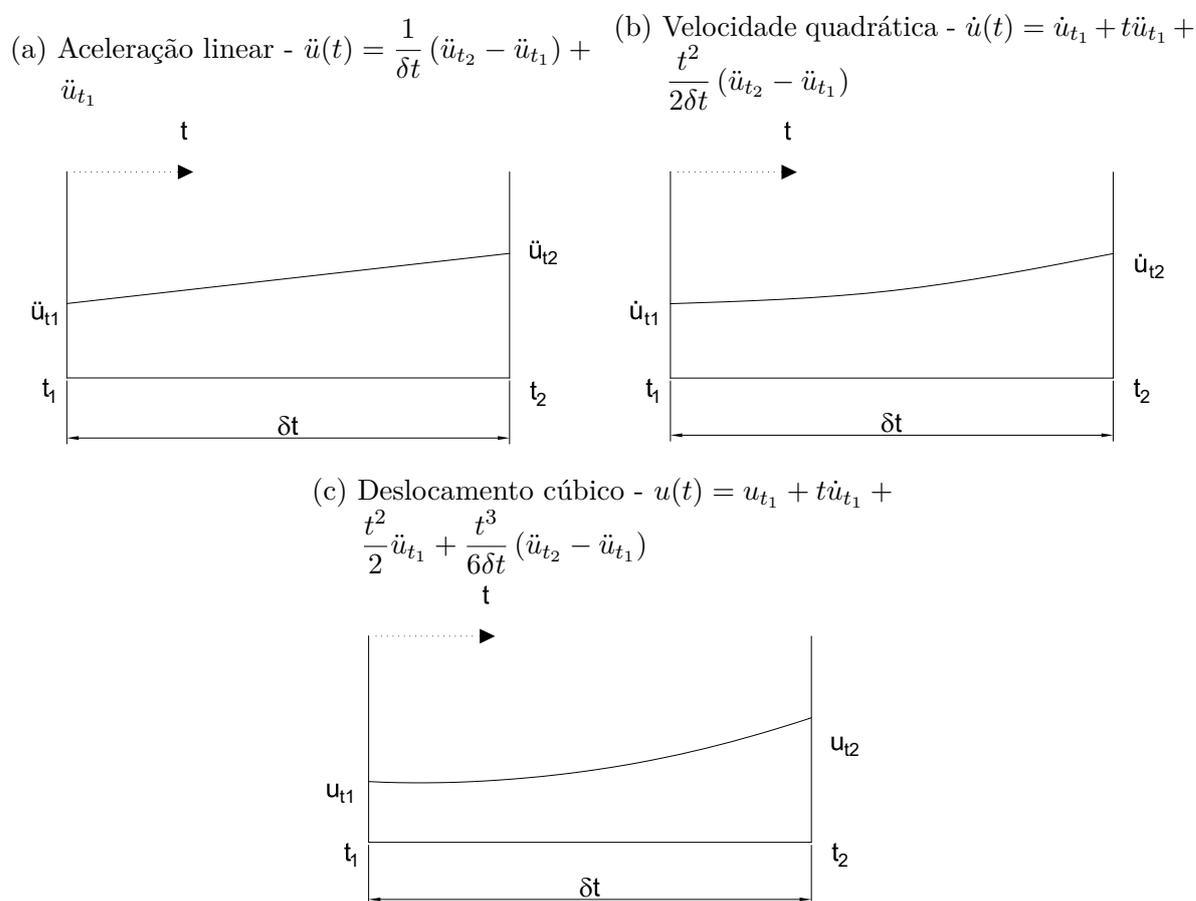
A equação geral da dinâmica é uma formulação formada por equações diferenciais, que tem o espaço e o tempo como variáveis. Com o Método dos Elementos Finitos, essas equações são transformadas em um sistema de equações diferenciais e devem ser discretizadas e posteriormente integradas no tempo por meio de algum algoritmo de integração. Dentre as várias técnicas disponíveis na literatura, cada qual com sua peculiaridade que se adequa melhor a determinados tipos de problema, destaca-se o Método de Newmark (NEWMARK, 1959).

Para análise dinâmica não linear de estruturas, os mais convenientes métodos são os que fazem a integração implícita, particularmente, os métodos de integradores temporais de Newmark (SILVA, 2009). De acordo com Cook, Malkus e Plesha (1989), para problemas

de dinâmica estrutural os algoritmos implícitos se destacam e são mais eficiente que os explícitos. Como visto na Seção 2.5, isso se deve principalmente ao fato de que nessa situação as frequências mais baixas são as de maior interesse, o que permite a utilização de intervalos de tempo mais longos (SILVA, 2009). Neste tipo de algoritmo, a variável deslocamento  $u$  depende da história ao longo de tempos anteriores e é função de seu próprio valor e de suas derivadas no tempo atual. Ou seja, na sua determinação a condição de equilíbrio deve ser respeitada no instante  $t + \delta t$ :

$$u^{(t+\delta t)} = f \left( u^{(t+\delta t)}, \dot{u}^{(t+\delta t)}, \ddot{u}^{(t+\delta t)}, u^t, \dot{u}^t, \ddot{u}^t, \dots \right)$$

Figura 13 – Equações gerais para a aceleração linear de Newmark.



Fonte: Adaptado de (SILVA, 2009)

Em suma, a integração direta se baseia em dois conceitos básicos. O primeiro deles consiste na determinação do equilíbrio estático para cada incremento temporal, adicionando ainda os efeitos da inércia e do amortecimento (Equação 2.13). Além disso, a não linearidade ainda deve ser solucionada para cada um desses acréscimos. O segundo se trata da variação do deslocamento, velocidade e aceleração ao longo do tempo, dado um procedimento incremental, atentando-se que, conforme Bathe (2006), a estabilidade numérica, o rigor

e custo do procedimento devem estar associados ainda a essas variáveis. Em sistemas lineares, em geral, a principal preocupação da técnica de integração se limita à acurácia dos resultados, já que a estabilidade é facilmente satisfeita nestes casos, todavia, em meio não linear é imprescindível a consideração das instabilidade numéricas do algoritmo (KUHL; CRISFIELD, 1999).

Assim, Newmark se baseia em uma expansão da série de Taylor que fornece uma aproximação para deslocamentos e velocidades no instante  $t + \delta t$ . Então, trunca-se a equação em termos de terceira ordem e são representados:

$$u^{(t+\delta t)} = u^t + \delta t \dot{u}^t + \frac{\delta t^2}{2} \ddot{u}^t + \delta t^3 \beta \ddot{\ddot{u}}^t \quad (3.11)$$

$$\dot{u}^{(t+\delta t)} = \dot{u}^t + \delta t \ddot{u}^t + \delta t^2 \gamma \ddot{\ddot{u}}^t \quad (3.12)$$

Para que a aceleração varie linearmente com o tempo (Figura 13), adota-se:

$$\ddot{\ddot{u}}^t = \frac{1}{\delta t} (\ddot{u}^{(t+\delta t)} - \ddot{u}^t) \quad (3.13)$$

Substituindo a Equação 3.13 nas Equação 3.11 e Equação 3.12 se obtém as equações padrão do Método de Newmark que são definidas abaixo:

$$\dot{u}^{(t+\delta t)} = \dot{u}^t + \left[ (1 - \gamma) \ddot{u}^t + \gamma \ddot{u}^{(t+\delta t)} \right] \delta t \quad (3.14)$$

$$u^{(t+\delta t)} = u^t + \delta t \dot{u}^t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{u}^t + \beta \ddot{u}^{(t+\delta t)} \right] \delta t^2 \quad (3.15)$$

É possível encontrar a aceleração a partir da Equação 3.15 e, em posse dela, reescrever a Equação 3.14:

$$\ddot{\ddot{u}}^{(t+\delta t)} = \frac{1}{\beta \delta t^2} (u^{(t+\delta t)} - u^t) - \frac{1}{\beta \delta t} \dot{u}^t - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{u}^t \quad (3.16)$$

$$\dot{u}^{(t+\delta t)} = \frac{\gamma}{\beta \delta t} (u^{(t+\delta t)} - u^t) + \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{u}^t + \frac{\delta t}{2} \left( 2 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \ddot{u}^t \quad (3.17)$$

Sendo:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\beta \delta t^2} & a_1 &= \frac{\gamma}{\beta \delta t} & a_2 &= \frac{1}{\beta \delta t} \\ a_3 &= \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) & a_4 &= \left( \frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) & a_5 &= \frac{\delta t}{2} \left( \frac{\gamma}{\beta} - 2 \right) \end{aligned}$$

Então, na condição dos deslocamentos, velocidades e acelerações sejam conhecidos nos instantes  $t + \delta t$ , a Equação 2.13 pode ser representada da seguinte maneira:

$$\mathbf{f}_e(t) = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}^{(t+\delta t)} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}^{(t+\delta t)} + \mathbf{K} \mathbf{u}^{(t+\delta t)} \quad (3.18)$$

E reescrita:

$$\begin{aligned} (a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{u}^{(t+\delta t)} = \mathbf{M} (a_0\mathbf{u}^t + a_2\dot{\mathbf{u}}^t + a_3\ddot{\mathbf{u}}^t) \\ + \mathbf{C} (a_1\mathbf{u}^t + a_4\dot{\mathbf{u}}^t + a_5\ddot{\mathbf{u}}^t) + \mathbf{f}_e(t)^{(t+\delta t)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ou ainda:

$$\mathbf{K}_p\mathbf{u}^{(t+\delta t)} = \mathbf{f}_p \quad (3.20)$$

A matriz  $\mathbf{K}_p$  se denomina *matriz efetiva de rigidez* e o vetor  $\mathbf{f}_p$  se chama *vetor das forças efetivas*. Para o caso de análise dinâmica não linear, ter-se-á uma reorganização de modo que:

- Para as *forças efetivas*  $\mathbf{f}_p$ :

$$\mathbf{f}_p = \mathbf{f}_e(t)^{(t+\delta t)} + \mathbf{M} (a_2\dot{\mathbf{u}}^t + a_3\ddot{\mathbf{u}}^t) + \mathbf{C} (a_4\dot{\mathbf{u}}^t + a_5\ddot{\mathbf{u}}^t) - \mathbf{f}_i^t \quad (3.21)$$

- E para a *matriz efetiva* de rigidez  $[\mathbf{K}_p]$ :

$$\mathbf{K}_p = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (3.22)$$

As Equação 3.21 e Equação 3.22 se resolvem iterativamente pelo método de Newton-Raphson visto na Seção 3.2.

De acordo com Dokainish e Subbaraj (1989), o método é incondicionalmente estável se  $\gamma \geq \frac{1}{2}$  e  $\beta \geq \frac{(2\gamma+1)^2}{16}$ . Para o trabalho, assume-se  $\beta = \frac{1}{4}$  e  $\gamma = \frac{1}{2}$ . Nessa situação, a amplitude do intervalo de tempo não altera a integridade da solução.

O Algoritmo 3 traz o procedimento a ser adotado em uma análise estrutural não linear dinâmica, adaptado para uma solução vetorial de acordo com (SILVA, 2009), que adequa o processo de Newton-Raphson descrito na Seção 3.2, Algoritmo 1.

```

1 begin
2   Input:  $t, t_f, \delta t, \gamma, \beta, a_0, a_1, \dots, a_5$ , etc.
3   // Montar a matriz de massa  $M$ , amortecimento  $C$  e rigidez  $K$ 
4   // Adote valores iniciais para  $\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$ 
5   // Monta-se a matriz efetiva de rigidez  $\mathbf{K}_p = \mathbf{K} + a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}$ 
6   repeat
7     // Determina-se a força efetiva  $\mathbf{f}_p$ 
8      $\mathbf{f}_p = \mathbf{f}_e^{(t+\delta t)} + \mathbf{M} (a_2\dot{\mathbf{u}}^t + a_3\ddot{\mathbf{u}}^t) + \mathbf{C} (a_4\dot{\mathbf{u}}^t + a_5\ddot{\mathbf{u}}^t) - \mathbf{f}_i$ ;
9     // Obtém os deslocamentos nodais incrementais:  $\delta\mathbf{u} = \mathbf{K}_p^{-1}\mathbf{f}_p$ 
10    // Processo iterativo de Newton-Raphson,  $j = 1$ 
11    repeat
12      // Atualiza as velocidades, acelerações e deslocamentos
13      // para cada iteração
14       $\ddot{\mathbf{u}}_j^{(t+\delta t)} = a_0\delta\mathbf{u}_j^t - a_2\dot{\mathbf{u}}^t - a_3\ddot{\mathbf{u}}^t$ ;
15       $\dot{\mathbf{u}}_j^{(t+\delta t)} = a_1\delta\mathbf{u}_j^t - a_4\dot{\mathbf{u}}^t - a_5\ddot{\mathbf{u}}^t$ ;
16       $\mathbf{u}_j^{(t+\delta t)} = \mathbf{u}^t + \delta\mathbf{u}_j^t$ ;
17      // Atualize as coordenadas nodais
18      // Obtém a matriz de rigidez tangente,  $\mathbf{K}_{t_j}^{(t+\delta t)}$ , a nova
19      // matriz massa  $\mathbf{M}_j^{(t+\delta t)}$ , a nova matriz de amortecimento
20      //  $\mathbf{C}_j^{(t+\delta t)}$ , o vetor das forças internas,  $\mathbf{f}_{i_j}^{t+\delta t}$  e, finalmente,
21      // a nova matriz efetiva de rigidez,  $\mathbf{K}_{p_j}^{(t+\delta t)}$ ,
22      // Calcule o vetor de forças residuais
23       $\mathbf{f}_{d_{j+1}}^{(t+\delta t)} = \mathbf{f}_e^{(t+\delta t)} - (\mathbf{M}_j^{(t+\delta t)}\ddot{\mathbf{u}}_j^{(t+\delta t)} + \mathbf{C}_j^{(t+\delta t)}\dot{\mathbf{u}}_j^{(t+\delta t)} + \mathbf{f}_{i_j}^{(t+\delta t)})$ ;
24      // Corrige os deslocamentos para cada iteração de newton
25       $\mathbf{K}_{p_j}^{(t+\delta t)}\delta\mathbf{u}_{j+1}^t = \mathbf{f}_{d_{j+1}}^{(t+\delta t)}$ ;
26       $\delta\mathbf{u}_{j+1}^t = \delta\mathbf{u}_{j+1}^t + \delta\mathbf{u}_j^t$ ;
27      // Faça
28       $j = j + 1$ ;
29    until  $\|\mathbf{f}_d\| \leq tol$ ;
30    // Atualize as velocidades e as acelerações e deslocamentos
31    // para  $t + \delta t$ 
32     $\ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(t+\delta t)} = a_0\delta\mathbf{u}_{j+1}^t - a_2\dot{\mathbf{u}}^t - a_3\ddot{\mathbf{u}}^t$ ;
33     $\dot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(t+\delta t)} = a_1\delta\mathbf{u}_{j+1}^t - a_4\dot{\mathbf{u}}^t - a_5\ddot{\mathbf{u}}^t$ ;
34     $\mathbf{u}_{j+1}^{(t+\delta t)} = \mathbf{u}^t + \delta\mathbf{u}_{j+1}^t$ ;
35    // Faça
36     $t = t + \delta t$ ;
37  until  $t \leq t_f$ ;
38 end

```

Algoritmo 3: Integração direta de Newmark

## 4 FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS

### 4.1 MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

Nesta seção será apresentada a formulação matemática proposta por (BANDEIRA, 1997) correspondente à teoria geral para a análise não linear das estruturas treliçadas espaciais<sup>1</sup> em regime elástico, sem limites nos deslocamentos e nas deformações.

Como já explanado, a concepção é vetorial, logo, o sistema de coordenadas é único: sistema global de coordenadas, o qual é válido para toda a estrutura.

No geral, considera-se as barras prismáticas com uma seção transversal constante ao longo do eixo, apenas com deformações axiais no que tange a não linearidade geométrica.

Admite-se então duas configurações: A configuração de referência, que é a barra em estado inicial e indeformado, e, a configuração atual, a qual atua uma força  $N$  no seu eixo e é modificada para cada processo de iteração.

Pela Figura 14 se tem  $V_i, A_i, L_i$ , o volume, a área da seção transversal e o comprimento da barra, respectivamente, na configuração de referência e,  $V_f, A_f, L_f$ , o volume, a área da seção transversal e o comprimento da barra, respectivamente, na configuração atual. As relações entre essas medidas são dadas:

$$V_i = A_i \cdot L_i \quad (4.1)$$

$$V_f = A_f \cdot L_f \quad (4.2)$$

Como já foi definido na Equação 2.5 da Subseção 2.3.1, a medida de alongamento linear da barra (*estiramento*) e a sua deformação associada são dadas respectivamente por:

$$\lambda = \frac{L_f}{L_i} \quad (4.3)$$

$$\varepsilon = \lambda - 1 = \frac{L_f - L_i}{L_i} \quad (4.4)$$

A taxa de deformação da Equação 4.4 é calculada fazendo as derivada da deformação ao longo do tempo da seguinte forma:

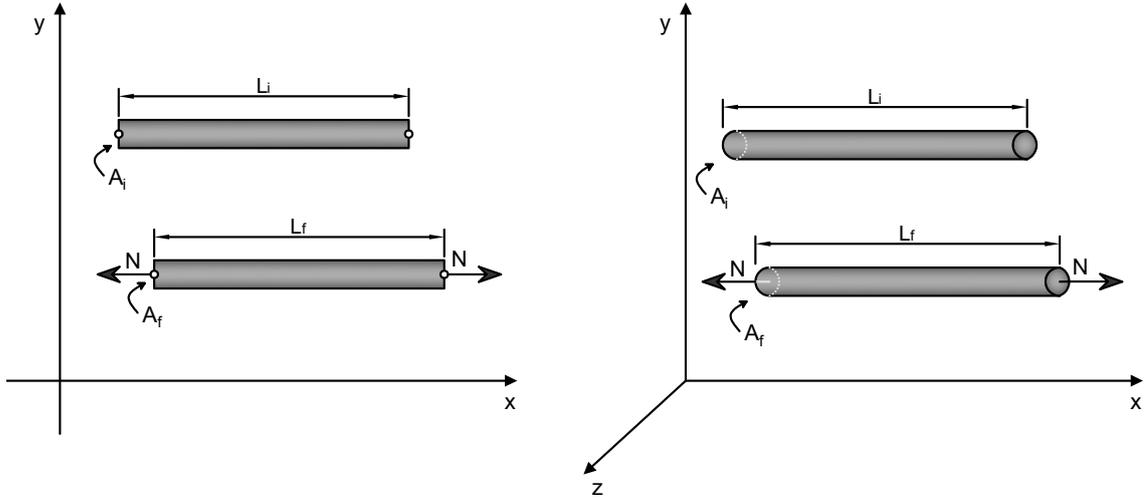
$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial(\lambda - 1)}{\partial t} = \dot{\lambda} = \frac{1}{L_i} \cdot \dot{L}_f \quad (4.5)$$

E a deformação virtual  $\delta\varepsilon$  pode ser definida de forma semelhante à derivada no tempo:

$$\delta\varepsilon = \delta\lambda = \frac{1}{L_i} \cdot \delta L_f \quad (4.6)$$

<sup>1</sup> Com algumas poucas adaptações, também adequada para treliças planares.

Figura 14 – Configurações de barras 2D e 3D nos estados de referência e atual.



Fonte: Autor, 2018.

Onde  $\delta L_f$  é o acréscimo virtual do comprimento da barra. A tensão nominal e a *tensão de Cauchy* atuantes na barra na configuração deformada são definidas respectivamente pelas equações:

$$\sigma = \frac{N}{A_i} \quad (4.7)$$

$$\sigma_f = \frac{N}{A_f} \quad (4.8)$$

Tendo em vista que a formulação é dada para o regime elástico, observa-se que o elemento só estará nesta situação se cada deformação apenas associar uma tensão correspondente, como pode ser visto em Figura 15. A equação constitutiva é expressa da seguinte forma:

$$\sigma = \sigma(\varepsilon) \quad (4.9)$$

Define-se  $\phi$  como sendo a energia de deformação por unidade de volume na configuração de referência:

$$\phi(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma(\eta) d\eta \quad (4.10)$$

A energia de deformação da barra da treliça pode ser dada como:

$$P = A_i \cdot L_i \cdot \phi = V_i \cdot \phi \quad (4.11)$$

A partir de Equação 4.10 se sabe que:

$$\sigma = \frac{d\phi}{d\varepsilon} \quad (4.12)$$

Com esta equação, observa-se que a função  $\phi$  serve de potencial para as tensões. Chama-se de  $D$  o *módulo de rigidez tangente elástico*, o que equivale a:

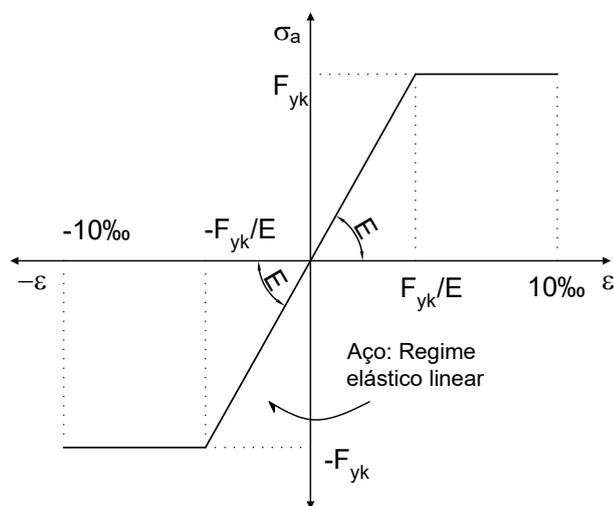
$$D = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \tag{4.13}$$

Ao ser substituída a Equação 4.12 em Equação 4.13, tem-se agora:

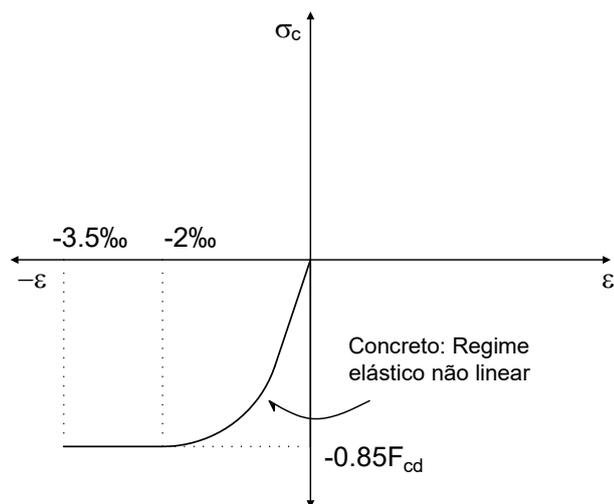
$$D = \frac{d^2\phi}{d\varepsilon^2} \tag{4.14}$$

Figura 15 – Gráficos padronizados da *tensão*  $\times$  *deformação*.

(a) Aço com elasticidade linear



(b) Concreto com elasticidade não linear



Fonte: Autor, 2018.

Toma-se como exemplo clássico da Equação 4.10 o caso particular da equação linear regido pela *lei de Hooke*:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon + \sigma_1 \tag{4.15}$$

Sendo  $E$  o módulo de elasticidade da barra e  $\sigma_1$  a tensão inicial. Integrando esta equação, obtém-se a função  $\phi$ :

$$\phi(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma(\eta) d\eta = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \varepsilon^2 + \sigma_1 \cdot \varepsilon \quad (4.16)$$

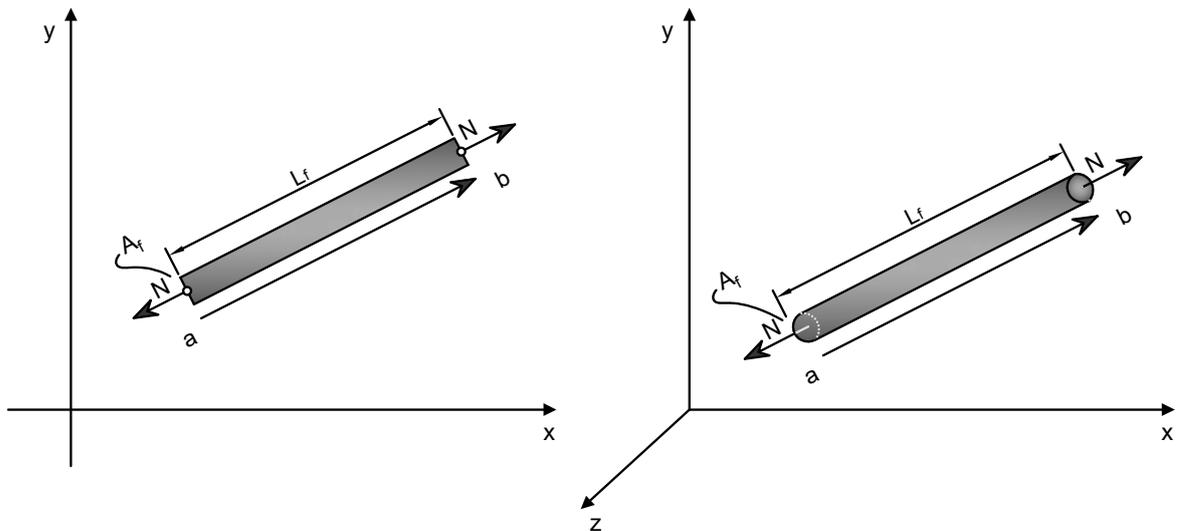
Ao aplicar Equação 4.16 na Equação 4.14 equivale dizer que para a lei de hooke o módulo tangente de rigidez elástica é igual ao módulo de elasticidade da barra.

$$D = E \quad (4.17)$$

Além disso, ao derivar a tensão no tempo se tem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \\ \dot{\sigma} &= D \cdot \dot{\varepsilon} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Figura 16 – Configuração atual de uma barra no plano e no espaço.



Fonte: Autor, 2018.

Conforme a Figura 16, com  $a$  e  $b$  as extremidades da barra, tomando  $\mathbf{x}_{el}^0$  como o vetor posição de um ponto no espaço ou no plano em relação à origem na configuração de referência,  $\mathbf{x}_{el}$  um vetor de um ponto no espaço em relação à origem na configuração atual e  $u$  como vetor deslocamento do ponto no espaço ou plano. Define-se o vetor das coordenadas nodais do elemento de barra na configuração atual:

- Para o espaço:

$$\mathbf{x}_{el} = \{x_a \quad y_a \quad z_a \quad x_b \quad y_b \quad z_b\}_{el} = \{x_a \quad x_b\}_{el} \quad (4.19)$$

- Para o plano:

$$\mathbf{x}_{el} = \{x_a \quad y_a \quad x_b \quad y_b\}_{el} = \{x_a \quad x_b\}_{el}$$

O vetor associado ao elemento que liga as extremidades ( $a$  com  $b$ ) na configuração da Figura 16, com origem na extremidade  $a$ , é definido por  $b$  e é dado por:

$$\mathbf{b} = \Psi_1 \mathbf{x}_{el} \quad (4.20)$$

Com  $\Psi_1$ :

- Para o espaço:

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

- Para o plano:

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como resultado da Equação 4.20, tem-se o seu módulo:

- Para o espaço:

$$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2} \quad (4.22)$$

- Para o plano:

$$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

Pela Equação 4.22 se constata que o módulo do vetor  $\mathbf{b}$  é o comprimento da barra  $L_f$ , portanto:

$$\begin{aligned} L_f^2 &= \mathbf{b}^T \mathbf{b} \\ L_f^2 &= \mathbf{x}_{el}^T \Psi_1^T \Psi_1 \mathbf{x}_{el} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Coloca-se a Equação 4.3 em função do vetor  $\{b\}$ :

$$\lambda = \frac{\sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{b}}}{L_i} \quad (4.24)$$

Com as Equação 4.24 e Equação 4.4 é possível ter qualquer medida de deformação apenas conhecendo as coordenadas dos nós  $a$  e  $b$  da barra na configuração atual.

Substituindo a Equação 4.3 na Equação 4.24:

$$L_f = \sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{b}} \quad (4.25)$$

E derivando-a em relação ao tempo:

$$\begin{aligned}
\dot{L}_f &= \frac{\partial L_f}{\partial t} \\
\dot{L}_f &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{b}}} \cdot (\dot{\mathbf{b}}^T \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \dot{\mathbf{b}}) \\
\dot{L}_f &= \frac{1}{\sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{b}}} \cdot (\mathbf{b}^T \dot{\mathbf{b}}) \\
\dot{L}_f &= \frac{1}{\sqrt{L_f^2}} \cdot \mathbf{x}_{el}^T \Psi_1^T \Psi_1 \dot{\mathbf{x}}_{el} \\
\dot{L}_f &= \frac{1}{L_f} \cdot \mathbf{x}_{el}^T \Psi_1^T \Psi_1 \dot{\mathbf{x}}_{el} \\
&= \frac{1}{L_f} \cdot \mathbf{b}^T \Psi_1 \dot{\mathbf{x}}_{el}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Da mesma maneira se dá o aumento virtual do comprimento da barra, que é definido de forma semelhante à Equação 4.26:

$$\begin{aligned}
\delta L_f &= \frac{1}{L_f} \cdot \mathbf{x}_{el}^T \Psi_1^T \Psi_1 \delta \mathbf{x}_{el} \\
&= \frac{1}{L_f} \cdot \mathbf{b}^T \Psi_1 \delta \mathbf{x}_{el}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Substituindo-a pela Equação 4.6, obtém-se:

$$\delta \varepsilon = \lambda \frac{1}{L_f^2} \cdot \mathbf{b}^T \Psi_1 \delta \mathbf{x}_{el} \tag{4.28}$$

O trabalho virtual das forças internas da treliça é definido como:

$$\begin{aligned}
\delta W_{int}^{el} &= V_i \cdot \sigma \cdot \delta \varepsilon \\
&= V_i \cdot \sigma \cdot \lambda \cdot \frac{1}{L_f^2} \cdot \mathbf{b}^T \Psi_1 \delta \mathbf{x}_{el}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Dessa equação é possível escrever ainda:

$$\delta W_{int}^{el} = \mathbf{f}_{i_{el}}^T \delta \mathbf{x}_{el} \tag{4.30}$$

Com:

- Para o espaço:

$$\mathbf{f}_{i_{el}} = \left\{ f_i^{ax} \quad f_i^{ay} \quad f_i^{az} \quad f_i^{bx} \quad f_i^{by} \quad f_i^{bz} \right\}_{el} = \left\{ f_i^a \quad f_i^b \right\}_{el} \tag{4.31}$$

- Para o plano:

$$\mathbf{f}_{i_{el}} = \left\{ f_i^{ax} \quad f_i^{ay} \quad f_i^{bx} \quad f_i^{by} \right\}_{el} = \left\{ f_i^a \quad f_i^b \right\}_{el}$$

Onde  $\mathbf{f}_{iel}$  é o vetor das forças internas da barra da treliça, assim ilustrado na Figura 17. É possível escrevê-lo como:

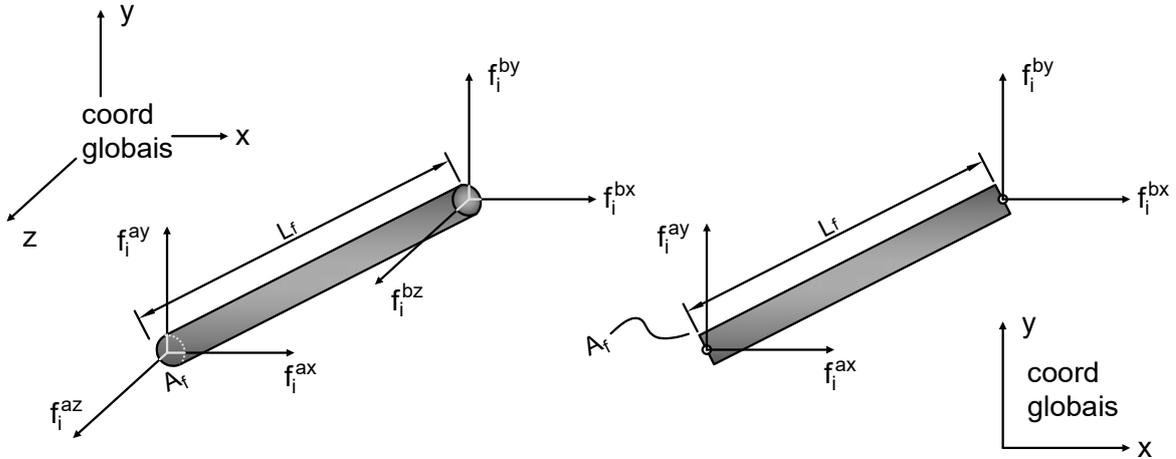
$$\mathbf{f}_{iel} = V_i \cdot \sigma \cdot \lambda \cdot \frac{1}{L_f^2} \cdot \Psi^T \mathbf{b} \quad (4.32)$$

$$= V_i \cdot \sigma \cdot \lambda \cdot \frac{1}{L_f^2} \cdot \Psi_1^T \Psi_1 \mathbf{x}_{el} \quad (4.33)$$

E reescrevê-lo:

$$\mathbf{f}_{iel} = V_i \cdot \sigma \cdot \lambda \cdot \frac{1}{L_f^2} \cdot \begin{pmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \\ z_a - z_b \\ x_b - x_a \\ y_b - y_a \\ z_b - z_a \end{pmatrix} = V_i \cdot \sigma \cdot \lambda \cdot \frac{1}{L_f^2} \cdot \begin{pmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \\ x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

Figura 17 – Forças internas nas barras das treliças.



Fonte: Autor, 2018.

Definindo  $\mathbf{x}$  como o vetor das coordenadas nodais da estrutura, é possível escrever a relação entre  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}_{el}$ :

$$\mathbf{x}_{el} = \mathbf{A}_{el} \mathbf{x} \quad (4.35)$$

Sabendo que  $\mathbf{A}_{el}$  é uma matriz booleana, isto é, uma matriz formada de zeros e uns, que faz a relação dos graus de liberdade do elemento isolado com os graus de liberdade da estrutura completa. Esta matriz pode ser representada como uma tabela de incidência, na qual relaciona um elemento com suas extremidades inicial e final. Da Equação 4.35 é seguro concluir de forma semelhante que:

$$\delta \mathbf{x}_{el} = \mathbf{A}_{el} \delta \mathbf{x} \quad (4.36)$$

Para toda a estrutura, o trabalho interno será então um somatório dos trabalhos internos das  $n$  barras do seguinte modo:

$$\begin{aligned}\delta W_{int}^{est} &= \sum_{el=1}^{el=n} \mathbf{f}_{i_{el}}^T \delta \mathbf{x}_{el} \\ &= \sum_{el=1}^{el=n} \mathbf{f}_{i_{el}}^T \mathbf{A}_{el} \delta \mathbf{x}\end{aligned}\quad (4.37)$$

Por esta equação e definindo  $\mathbf{f}_i$  como o *vetor das forças internas aplicadas nos nós* da estrutura, faz-se:

$$\mathbf{f}_i = \sum_{el=1}^{el=n} \mathbf{A}_{el}^T \mathbf{f}_{i_{el}} \quad (4.38)$$

É necessário o conhecimento das coordenadas dos nós e das tensões nas barras, as duas na configuração atual, para viabilizar o cálculo de  $\mathbf{f}_i$ . Reescrevendo então a Equação 4.37, obtém-se:

$$\delta W_{int}^{est} = \mathbf{f}_i^T \delta \mathbf{x} \quad (4.39)$$

Para o trabalho virtual exercido pelas forças externas, é definido:

$$\delta W_{ext}^{est} = \mathbf{f}_e^T \delta \mathbf{x} \quad (4.40)$$

Com  $\mathbf{f}_e$  sendo o *vetor das forças externas aplicadas nos nós* da estrutura.

Pelo princípio dos trabalhos virtuais, sabe-se que:

$$\delta W_{int}^{est} - \delta W_{ext}^{est} = 0 \quad (4.41)$$

logo, implica dizer que:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_i^T \delta \mathbf{x} - \mathbf{f}_e^T \delta \mathbf{x} &= 0 \\ (\mathbf{f}_i^T - \mathbf{f}_e^T) \delta \mathbf{x} &= 0 \\ \mathbf{f}_i - \mathbf{f}_e &= 0\end{aligned}\quad (4.42)$$

Esta equação é conhecida como equação de equilíbrio da estrutura e já foi definida anteriormente na Seção 3.2, Equação 3.7 considerando um sistema de duas molas. Ao derivá-la em função do tempo, tem-se:

$$\dot{\mathbf{f}}_i - \dot{\mathbf{f}}_e = 0 \quad (4.43)$$

A Equação 4.42 é conhecida como equação do equilíbrio incremental da estrutura. Derivando a Equação 4.38 e em relação ao tempo, obtém-se:

$$\dot{\mathbf{f}}_i = \sum_{el=1}^{el=n} \mathbf{A}_{el}^T \dot{\mathbf{f}}_{i_{el}} \quad (4.44)$$

Deriva-se igualmente as Equação 4.20 e Equação 4.3

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{L}_f}{L_i} = \frac{1}{L_i} \cdot \frac{1}{L_f} \cdot \mathbf{b}^T \Psi_1 \dot{\mathbf{x}}_{el} \quad (4.45)$$

$$\dot{\mathbf{b}} = \Psi_1 \dot{\mathbf{x}}_{el} \quad (4.46)$$

Para que se tenha  $\dot{\mathbf{f}}_{iel}$ , deriva-se a Equação 4.33 e faz as devidas substituições com as equações acima:

$$\dot{\mathbf{f}}_{iel} = \frac{\partial}{\partial t} \left( V_i \cdot \sigma \cdot \lambda \cdot \frac{1}{L_f^2} \cdot \Psi_1 \mathbf{b} \right)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{f}}_{iel} = & V_i \cdot \dot{\sigma} \cdot \lambda \cdot \frac{1}{L_f^2} \cdot \Psi_1^T \mathbf{b} + V_i \cdot \sigma \cdot \dot{\lambda} \cdot \frac{1}{L_f^2} \cdot \Psi_1^T \mathbf{b} + \\ & + V_i \cdot \sigma \cdot \lambda \cdot (-2) \cdot \frac{1}{L_f^3} \cdot \dot{L}_f \cdot \Psi_1^T \mathbf{b} + V_i \cdot \sigma \cdot \lambda \cdot \frac{1}{L_f^2} \cdot \Psi_1^T \dot{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{f}}_{iel} = & V_i \cdot \lambda \cdot \left( \dot{\sigma} \cdot \frac{1}{L_f^2} \cdot \Psi_1^T \mathbf{b} + \sigma \cdot \lambda^{-1} \cdot \dot{\lambda} \cdot \frac{1}{L_f^2} \cdot \Psi_1^T \mathbf{b} + \right. \\ & \left. + \sigma \cdot (-2) \cdot \frac{1}{L_f^3} \cdot \dot{L}_f \cdot \Psi_1^T \mathbf{b} + \sigma \cdot \frac{1}{L_f^2} \cdot \Psi_1^T \dot{\mathbf{b}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{f}}_{iel} = & V_i \cdot \lambda \cdot \left( \dot{\sigma} \cdot \frac{1}{L_f^2} \cdot \Psi_1^T \mathbf{b} + \sigma \cdot \frac{1}{L_f^4} \cdot \mathbf{b}^T \Psi_1 \dot{\mathbf{x}}_{el} \Psi_1^T \mathbf{b} + \right. \\ & \left. - 2 \cdot \sigma \cdot \frac{1}{L_f^4} \cdot \mathbf{b}^T \Psi_1 \dot{\mathbf{x}}_{el} \Psi_1 \mathbf{b} + \sigma \cdot \frac{1}{L_f^2} \cdot \Psi_1^T \Psi_1 \dot{\mathbf{x}}_{el} \right) \end{aligned}$$

Resultando em:

$$\dot{\mathbf{f}}_{iel} = V_i \cdot \lambda \cdot \left( -\frac{1}{L_f^4} \cdot \sigma \cdot \Psi_1^T \mathbf{b} \mathbf{b}^T \Psi_1 \dot{\mathbf{x}}_{el} + \frac{1}{L_f^2} \cdot \dot{\sigma} \cdot \Psi_1^T \mathbf{b} + \sigma \cdot \frac{1}{L_f^2} \cdot \Psi_1^T \Psi_1 \dot{\mathbf{x}}_{el} \right) \quad (4.47)$$

A Equação 4.47 pode ser reescrita com o auxílio das Equação 4.5, Equação 4.18 e Equação 4.26:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{f}}_{iel} = & V_i \cdot \lambda \cdot \left[ -\frac{1}{L_f^4} \cdot \sigma \cdot \Psi_1^T \mathbf{b} \mathbf{b}^T \Psi_1 \dot{\mathbf{x}}_{el} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{L_f^2} \cdot \left( D \cdot \lambda \cdot \frac{1}{L_f^2} \cdot \mathbf{b}^T \Psi_1 \dot{\mathbf{x}}_{el} \right) \Psi_1^T \mathbf{b} + \sigma \cdot \frac{1}{L_f^2} \cdot \Psi_1^T \Psi_1 \dot{\mathbf{x}}_{el} \right] \end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{f}}_{iel} = V_i \cdot \lambda \cdot \left( -\frac{1}{L_f^4} \cdot \sigma \cdot \Psi_1^T \mathbf{b} \mathbf{b}^T \Psi_1 + \lambda \cdot \frac{1}{L_f^4} \cdot D \cdot \Psi_1^T \mathbf{b} \mathbf{b}^T \Psi_1 + \sigma \cdot \frac{1}{L_f^2} \cdot \Psi_1^T \Psi_1 \right) \dot{\mathbf{x}}_{el} \quad (4.48)$$

A matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{K}_g$  do elemento é dada conforme:

$$\mathbf{K}_g = V_i \cdot \sigma \cdot \lambda \left( -\frac{1}{L_f^4} \cdot \Psi_1 \mathbf{b} \mathbf{b}^T \Psi_1 + \frac{1}{L_f^2} \cdot \Psi_1 \Psi_1^T \right) \quad (4.49)$$

E a matriz de rigidez constitutiva  $\mathbf{K}_m$  do elemento é definida como:

$$\mathbf{K}_m = V_i \cdot D \cdot \lambda^2 \cdot \frac{1}{L_f^4} \cdot \Psi_1^T \mathbf{b} \mathbf{b}^T \Psi_1 \quad (4.50)$$

Assim:

$$\dot{\mathbf{f}}_{i_{el}} = (\mathbf{K}_g + \mathbf{K}_m) \dot{\mathbf{x}}_{el} \quad (4.51)$$

Observa-se que a matriz geométrica  $\mathbf{K}_g$  é dependente apenas das coordenadas e tensões das barras, ambas na configuração atual, e que  $\mathbf{K}_m$  depende apenas das coordenadas nodais e do módulo de rigidez da estrutura, do mesmo modo ambas na configuração atual.

A matriz de rigidez do elemento é a soma das matrizes geométrica e constitutiva:

$$\mathbf{K}_{t_{el}} = \mathbf{K}_g + \mathbf{K}_m \quad (4.52)$$

O problema definido na Equação 4.43 é estendido e expresso como:

$$\mathbf{K}_t \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{f}}_e = 0 \quad (4.53)$$

Como já dissertado na Seção 3.2,  $\mathbf{K}_t$  é a matriz de rigidez tangente da estrutura e aqui é definida como:

$$\mathbf{K}_t = \sum_{el=1}^{el=n} \mathbf{A}_{el}^T (\mathbf{K}_g + \mathbf{K}_m) \mathbf{A}_{el} \quad (4.54)$$

O vetor dos deslocamentos dos nós da estrutura é dado como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \quad (4.55)$$

Ou seja:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \mathbf{u} \quad (4.56)$$

Depreende-se então que:

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{u}) \quad (4.57)$$

A energia potencial de cada elemento de treliça  $P_{el}(\mathbf{u})$  é definida como:

$$\begin{aligned} P_{el}(\mathbf{u}) &= V_i \cdot \phi \\ &= V_i \cdot \int_0^\varepsilon \sigma(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (4.58)$$

A energia potencial total  $P(u)$  é contínua, com derivadas parciais contínuas até segunda ordem. Assim, para a condição de otimalidade é dada com  $\nabla P(u) = 0$ :

$$\begin{aligned}\nabla P(u) &= \left( \sum_{el=1}^n \frac{\partial P_{el}(u)}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{x}_{el}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_{el}}{\partial \mathbf{u}} \right) - \mathbf{f}_e = 0 \\ \nabla P(u) &= \left( \sum_{el=1}^n V_i \cdot \sigma \cdot \lambda \cdot \frac{1}{L_f^2} \cdot \mathbf{b}^T \Psi_1 \mathbf{A}_{el} \right) - \mathbf{f}_e = 0 \\ \nabla P(u) &= \left( \sum_{el=1}^n \mathbf{f}_{i_{el}} \mathbf{A}_{el} \right) - \mathbf{f}_e = 0 \\ \delta \mathbf{f} &= \mathbf{f}_i(u) - \mathbf{f}_e = 0\end{aligned}\tag{4.59}$$

A Equação 4.59 é a equação de equilíbrio representada também na Seção 3.2, Equação 3.7. A análise do problema estático consiste em resolver este sistema de equações não-lineares. Utilizando o método de Newton, tem-se então:

$$\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j - \left[ \frac{\partial P(u)}{\partial \mathbf{u}} \right]^{-1} \delta \mathbf{f}_j\tag{4.60}$$

Logo:

$$\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j - \mathbf{K}_{t_j}^{-1} \delta \mathbf{f}_j\tag{4.61}$$

Com:

$$\delta \mathbf{u}_j = \mathbf{K}_{t_j}^{-1} \delta \mathbf{f}_j\tag{4.62}$$

Sendo  $\delta \mathbf{u}$  o incremento em cada iteração de Newton.

Por fim, para a atualização das coordenadas nodais se utiliza a Equação 4.56 da seguinte maneira:

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}_{j+1}\tag{4.63}$$

## 4.2 PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Para os cálculos de estruturas dinâmicas, faz-se necessário definir além da matriz de rigidez, a matriz de massa e a matriz de amortecimento da estrutura.

Considera-se uma solução de acordo com a formulação dada pelo princípio dos trabalhos virtuais (PTV). Alguns conceitos do mesmo já foram utilizados na formulação da matriz de rigidez tangente da Seção 4.1. Dentre os princípios variacionais da mecânica, este é certamente o mais difundido e de fácil explanação. Nele se declara que qualquer variação arbitrária nos deslocamentos acarretará em um trabalho interno que será igual ao trabalho externo também gerado (FILHO, 2013). Com isso, tem-se uma relação intrínseca entre as forças internas  $\mathbf{f}_i$  e forças externas  $\mathbf{f}_e$ .

Os deslocamentos internos do elemento podem ser representados por funções de forma  $\mathbf{N}$  a partir dos deslocamento externos nodais. As *funções de forma* interpolam a

variação destes deslocamentos para o corpo do elemento, ou seja, por meio de uma variável nodal se pode encontrar parâmetros internos do elemento, em particular, e da estrutura como um todo. Dito isto, tem-se que:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{N}\mathbf{u}_e \quad (4.64)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{N}\dot{\mathbf{u}}_e \quad (4.65)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}}_e \quad (4.66)$$

De uma forma prática, ao entender que o deslocamento interno elástico do elemento se trata da sua deformação no sentido de *strain* como clarificado na Seção 2.3, pode-se definir a *matriz de deslocamento-deformação*  $\mathbf{B}$  do elemento como uma derivada das funções de forma correspondentes (FILHO, 2013).

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{L}\mathbf{N} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \mathbf{B}\mathbf{u}_e \end{aligned} \quad (4.67)$$

Sendo  $\mathbf{L}$  um operador diferencial adequado, a deformação no interior do elemento é tida de acordo com a Equação 4.67. As tensões são assim colocadas:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{u}_e \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{D}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (4.68)$$

Com  $\mathbf{D}$  sendo a matriz de elasticidade do material<sup>2</sup>.

O trabalho virtual externo é definido como:

$$\delta W_{ext} = \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e \quad (4.69)$$

O trabalho virtual interno por unidade de volume é concebido pela soma dos trabalhos realizados pelas forças elásticas, de inércia e de amortecimento. Isto é:

$$\delta W_{int} = \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{f}_m + \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{f}_c + \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (4.70)$$

Sabendo ainda que:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_m &= \rho \cdot \ddot{\mathbf{u}}_i \\ &= \rho \cdot \mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}}_e \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_c &= c \cdot \dot{\mathbf{u}}_i \\ &= c \cdot \mathbf{N}\dot{\mathbf{u}}_e \end{aligned} \quad (4.72)$$

<sup>2</sup> A relação tensão-deformação pode acontecer no estado plano e triaxial de tensões, por exemplo. No caso de uma estrutura predominantemente unidimensional como uma treliça, a matriz  $\mathbf{D}$ , o tensor tensão de Cauchy  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  e o tensor de deformação Green-Lagrange  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  serão apenas  $E$ ,  $\varepsilon$  e  $\sigma$ .

O trabalho das forças internas pode ser igualado ao trabalho gerado pelas forças externas, encontrando a equação definidora do princípio dos trabalhos virtuais:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e &= \int_V \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{f}_m dV + \int_V \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{f}_c dV + \int_V \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} dV \\ \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e &= \int_V \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}}_e dV + \int_V \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{N}^T c \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}}_e dV \\ &\quad + \int_V \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u}_e dV \\ \mathbf{f}_e &= \left[ \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \right] \ddot{\mathbf{u}}_e + \left[ \int_V \mathbf{N}^T c \mathbf{N} dV \right] \dot{\mathbf{u}}_e \\ &\quad + \left[ \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{u}_e\end{aligned}\quad (4.73)$$

Na Equação 4.73 os termos destacados entre colchetes formam as matrizes de massa, amortecimento e rigidez respectivamente da Equação 2.13. Ou seja:

$$\mathbf{M} = \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \quad (4.74)$$

$$\mathbf{C} = \int_V \mathbf{N}^T c \mathbf{N} dV \quad (4.75)$$

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (4.76)$$

A matriz de rigidez já foi discutida na Seção 4.1 e apresenta uma formulação diferenciada, baseada nas não linearidades física e geométrica, não sendo representada pela formulação discutida nessa seção. Sua equação geral é dada abaixo:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_g + \mathbf{K}_m$$

Com:

$$\mathbf{K}_g = V_i \cdot \sigma \cdot \lambda \left( -\frac{1}{L_f^4} \cdot \boldsymbol{\Psi}_1 \mathbf{b} \mathbf{b}^T \boldsymbol{\Psi}_1 + \frac{1}{L_f^2} \cdot \boldsymbol{\Psi}_1 \boldsymbol{\Psi}_1^T \right) \quad (4.77)$$

$$\mathbf{K}_m = V_i \cdot D \cdot \lambda^2 \cdot \frac{1}{L_f^4} \cdot \boldsymbol{\Psi}_1^T \mathbf{b} \mathbf{b}^T \boldsymbol{\Psi}_1 \quad (4.78)$$

Para a matriz de amortecimento será feita uma combinação entre as matrizes de rigidez e massa pelo processo de Rayleigh na Subseção 2.6.1 e, para a matriz massa será utilizada a formulação vista nessa seção, de elementos de treliça *bi* e *tri* dimensionais.

#### 4.2.1 Matriz de massa

Conforme visto na Seção 4.2, para obter a *matriz massa consistente*, utilizar-se-á a Equação 4.74. Existe também outra matriz massa, conhecida como *matriz de massa discreta*, esta não utilizada no presente trabalho para concepção dos resultados e nem na formulação do algoritmo.

• **Matriz de massa consistente**

Esta matriz é obtida a partir da formulação do PTV visto na Seção 4.2. Para uma barra prismática unidimensional com dois nós, um grau de liberdade por nó e variável em coordenadas naturais isoparamétricas  $\zeta$  com limite de integração  $-1 \leq \zeta \leq 1$ . As suas funções de forma são tidas como:

$$N_i = 1 - \frac{(x - x_i)}{L} = \frac{1 - \zeta}{2}$$

$$N_j = \frac{(x - x_i)}{L} = \frac{1 + \zeta}{2}$$

Ou seja:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{1 - \zeta}{2} & \frac{1 + \zeta}{2} \end{bmatrix}$$

Sendo  $\zeta = \frac{2(x-x_i)}{L-1}$  e  $dx = \frac{1}{2}L d\zeta$ , a matriz de massa consistente é facilmente obtida em um sistema com dois graus de liberdade, uma barra unidimensional:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_c &= \int_0^L \rho A \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \\ &= \frac{1}{2} \rho L A \cdot \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \frac{1 - \zeta}{2} \\ \frac{1 + \zeta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1 - \zeta}{2} & \frac{1 + \zeta}{2} \end{bmatrix} d\zeta \\ &= \frac{1}{2} \rho L A \cdot \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \frac{1 - 2\zeta + \zeta^2}{4} & \frac{1 - \zeta^2}{4} \\ \frac{1 - \zeta^2}{4} & \frac{1 + 2\zeta + \zeta^2}{4} \end{bmatrix} d\zeta \\ &= \frac{1}{8} \rho L A \cdot \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} 1 - 2\zeta + \zeta^2 & 1 - \zeta^2 \\ 1 - \zeta^2 & 1 + 2\zeta + \zeta^2 \end{bmatrix} d\zeta \\ \mathbf{M}_c &= \frac{1}{6} \rho A L \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.79)$$

Expande-se a Equação 4.79 para um sistema em duas e três dimensões, com dois e três graus de liberdade por nó e se tem então:

$$\mathbf{M}_c = \frac{\rho A L}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \frac{\rho A L}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

Contrariamente à matriz de rigidez em uma formulação corrotacional clássica para uma treliça, com a matriz de massa não é necessário nenhuma *matriz de rotação* pré e pós multiplicando-a para transformá-la de um *sistema local* para um *sistema global* de coordenadas. Dessa maneira, ela é diretamente compatível com a matriz de rigidez tangente vista na Seção 4.1. Essa propriedade é inválida em três cenários, porém, nenhum deles é o caso dos elementos de barras em estudo (FELIPPA, 2013):

- O elemento têm graus de liberdade não translacionais;
- As matrizes elementares são diferentes em conteúdo e/ou tamanho se modelos desiguais são usados em direções diferentes;
- Nós são dados em diferentes sistemas de coordenadas a fim de facilitar a aplicação de condições de contorno.

- **Matriz de massa discreta**

As matrizes de massa discreta são obtidas a partir de um sistema de energia cinética, onde a massa é considerada concentrada nos nós do elemento. Esta matriz tem um menor custo computacional por se tratar de uma matriz identidade, porém, fornece resultados menos precisos (FELIPPA, 2013). No caso de uma barra de treliça se considera a metade da massa concentrada em cada extremidade do elemento. Para a sua formulação, tem-se:

$$T_{el}(u) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}$$

$$T_{el}(u) = \frac{\rho AL}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{I}_d \dot{\mathbf{u}}$$

onde:

$$\mathbf{M}_d = \frac{\rho AL}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

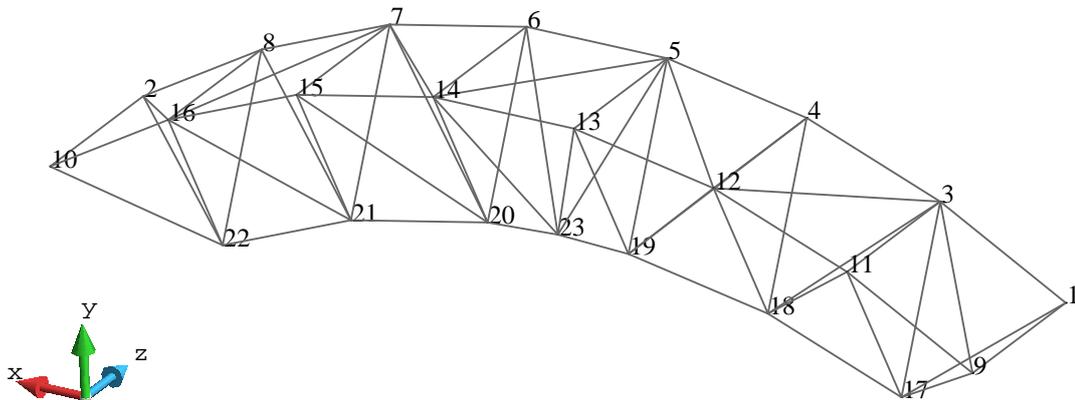
Sendo  $T_{el}(u)$  a energia cinética do elemento,  $\mathbf{I}_d$  a matriz identidade e  $\mathbf{M}_d$  a matriz de massa discreta. Sabe-se então que para dois e três graus de liberdade por nó, a matriz de massa discreta será devidamente representada como:

$$\mathbf{M}_d = \frac{\rho AL}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \frac{\rho AL}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

## 5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Neste capítulo serão apresentadas as características gerais e implementação dos algoritmos utilizados para a criação de um programa de resolução da análise estática e dinâmica não linear, conforme apresentados os conceitos e formulações nos capítulos anteriores.

Figura 18 – Representação de geometria e nós de treliça definidos.



Fonte: Autor, 2018.

Figura 19 – Exemplo do problemtype.bas usado para geração do arquivo.dat.

```

Numero de barras      Numero de nos      Numero de materiais      Numero de dimensoes
*nelem                *npoin             *nmats                    *ndime

.....
Tipo || Penalidade || Erro || Deformacao || Tipo de Solve || Crit. de Conv (PBCG) || Iteracoes(PBCG) || Ti || Tf || deltaT ||
Csi || Amort
*Format "%9s%8.2e%10.2e%11s%11s%18i%22i%12.1f%5.3f%8.4f%6.2f%4i"
*GenData
.....
Coordenadas nos nos
No      X(*Units(length))      Y(*Units(length))      Z(*Units(length))      Fx(*Units(strength))      Fy(*Units(strength))
Fz(*Units(strength))      Funcao Carga      Constante(k)
*Set Cond Cargas *nodes
*loop nodes
*format "%4i%8.2f%8.2f%8.2f%10.2e%10.2e%12s%17.6f"
*NodesNum *NodesCoord(1,real) *NodesCoord(2,real) *NodesCoord(3,real) *Cond(3) *Cond(4) *Cond(5) *Cond(1) *Cond(2)
*end nodes
.....
Restricoes nodais
No      RX      RY      RZ
*set Cond Condições_nos_nós *nodes
*loop nodes
*format "%4i%4i%4i%4i"
*NodesNum *cond(1) *cond(2) *cond(3)
*end nodes
.....
Elementos
Barra i j Material Area(*Units(area))      Eac(*Units(pressure))      fy(*Units(pressure))      densidade(*Units(density))
*loop elems
*format "%4i%4i%4i%4i%11.6f%12.2e%11.3e%14.4e"
*ElemsNum *ElemsConec *ElemsMat *ElemsMatProp(Área) *ElemsMatProp(Eac) *ElemsMatProp(fy) *ElemsMatProp(Densidade)
*end elems

```

Fonte: Autor, 2018.

Visto a necessidade que o estudo trouxe de uma maior aplicabilidade da vasta quantidade de conceitos, desenvolveu-se o programa que foi denominado **DTruss**. Ademais, utilizou-se o *ambiente de desenvolvimento integrado* gratuito da Microsoft, Visual Studio

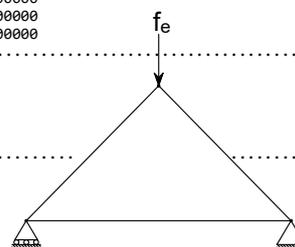
Community 2017, na linguagem C para execução numérica da modelagem feita, além de empregar a versão gratuita do *software* GiD v.13 na composição da geometria, definição das configurações de pré e pós processamento. Preliminarmente, para o caso em questão, este programa permite montar uma estrutura qualquer como a Figura 18, gerar sua malha com os elementos de barra, definir as condições de contorno, tipos de carga, tipos de análise (Dinâmica ou Estática), resolutor de sistema de equações (Cholesky ou PBCG), etc. Posteriormente, após a chamada do módulo de cálculo, na seção de visualização dos resultados gerados, é possível visualizar características diversas como forças internas e externas, reações, tensões, modos de vibrar, frequências naturais, deformações, etc.

Para definição dos resultados, e para que sejam exibidos na condição de que o programa criado possa lê-los, faz-se necessário ainda definir como o GiD irá gerá-los. Dessa forma, é pré-definido um arquivo em formato `.bas` que serve como base na geração do arquivo de leitura `.dat` do programa DTruss. Este procedimento é trazido nas Figura 19 e Figura 20 e é chamado de `problemtype`, devendo ser feito sempre que se planeja atribuir novos parâmetros ou tipos de elementos para o programa criado. Por exemplo, caso se queira fazer uma análise com elementos de casca, as configurações do `problemtype` precisam ser reajustadas a fim de que possam corresponder às características desse elemento.

Finalizando o processo, o programa Dtruss gera um arquivo de leitura no formato `.res` que será lido pelo GiD e exibirá os resultados diversos obtidos, a exemplo de reações, forças internas nos nós, deslocamentos, deformações, forças nas barras, modos de vibrar, tensões, etc.

Figura 20 – Exemplo do arquivo.dat criado com dados do problema.

Numero de barras		Numero de nos		Numero de materiais		Numero de dimensoes							
3		3		1		2							
Tipo	Penalidade	Erro	Deformacao	Tipo de Solve	Crit. de Conv	(PBCG)	Iteracoes	(PBCG)	Ti	Tf	deltaT	Cs1	Amort
Dinâmica	1.00e+16	1.00e-06	Engenharia	PBCG	2		100		0.0	4.500	0.0150	5.00	1
Coordenadas nos nos													
No	X(m)	Y(m)	Z(m)	Fx(N)	Fy(N)	Fz(N)	Funcao Carga	Constante(k)					
1	2.00	4.00	0.00	0.00e+00	-1.50e+04	0.00e+00	A.cos(k.T)	2.000000					
2	4.00	0.00	0.00	0.00e+00	0.00e+00	0.00e+00	k.A	1.000000					
3	0.00	0.00	0.00	0.00e+00	0.00e+00	0.00e+00	k.A	1.000000					
Restricoes nodais													
No	RX	RY	RZ										
1	0	0	0										
2	1	1	0										
3	0	1	0										
Elementos													
Barra	i	j	Material	Area(m^2)	Eac(Pa)	fy(Pa)	densidade(kg/m^3)						
1	3	2	1	0.002500	2.00e+11	4.000e+08	7.8500e+03						
2	2	1	1	0.002500	2.00e+11	4.000e+08	7.8500e+03						
3	1	3	1	0.002500	2.00e+11	4.000e+08	7.8500e+03						



Fonte: Autor, 2018.

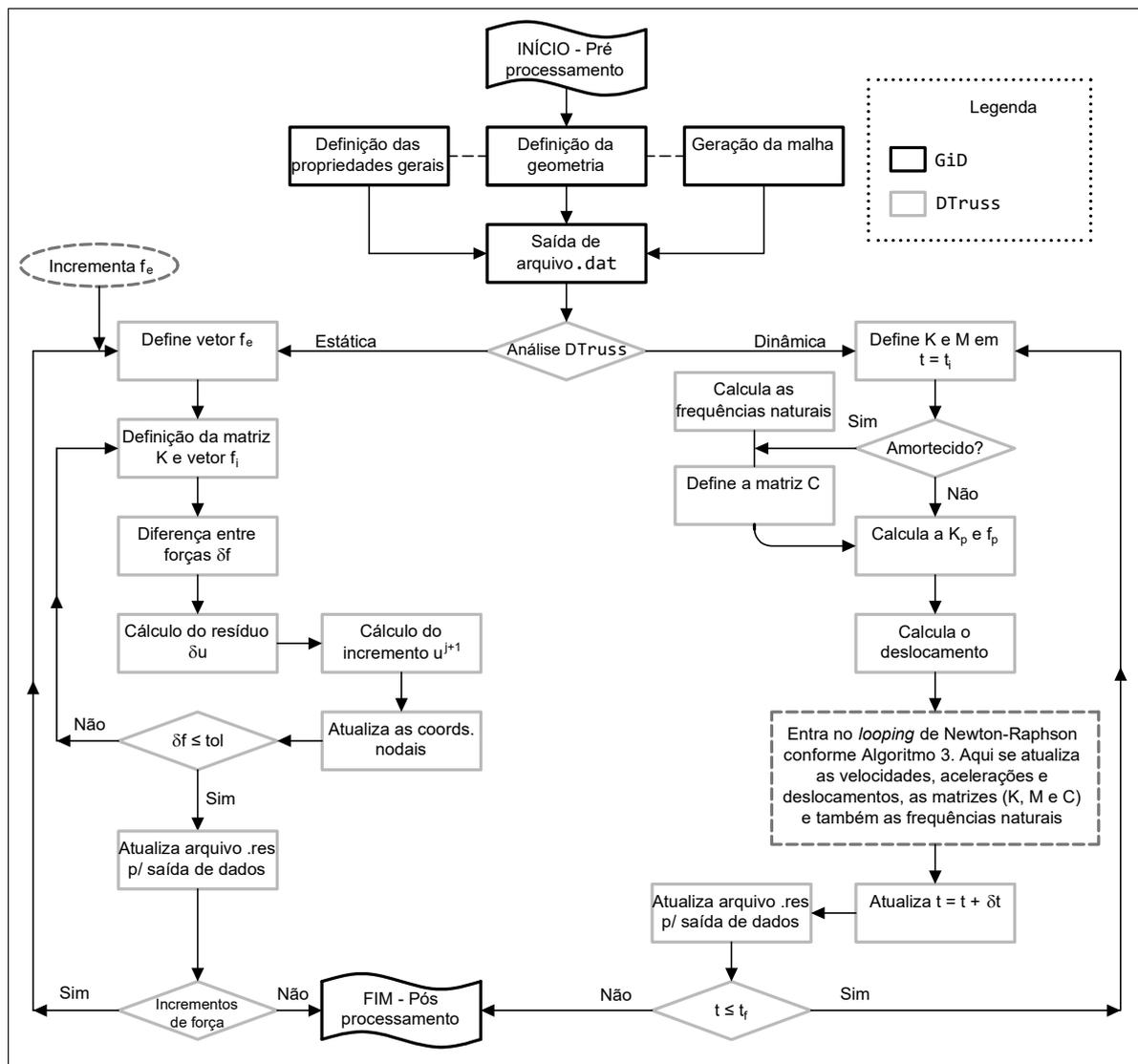
Além dos arquivos `.dat` e `.bas`, cria-se outros documentos de configurações para fazer a ligação entre o software GiD e o programa desenvolvido. São eles:

- `problemtype.cnd` – É onde se define as condições de carregamento, restrições nodais, deslocamentos, etc.

- `problemtyp.mat` – Apresenta os materiais, dimensões, tipos, propriedades, etc.
- `problemtyp.uni` – Algumas unidades padrão já vêm pré-definidas, porém, na necessidade de acrescentar quaisquer novas medidas no sistema, cria-se este documento;
- `problemtyp.prb` – Aqui se define algumas características a serem ajustadas, como por exemplo, o tipo de análise, tipo de *solve*, tempo inicial e tempo final para análise dinâmica, etc.

De modo a exemplificar o funcionamento do programa e a sua interface com o pré e pós processamento, tem-se o fluxograma da Figura 21 que representa a estrutura generalista de funcionamento, ou seja, apresenta como os cálculos são desenvolvidos ao longo da rotina e a sua interface de ligação com o GiD. Para tal, faz-se uso dos Algoritmo 1, Algoritmo 2 e Algoritmo 3.

Figura 21 – Fluxograma com processos de cálculo.



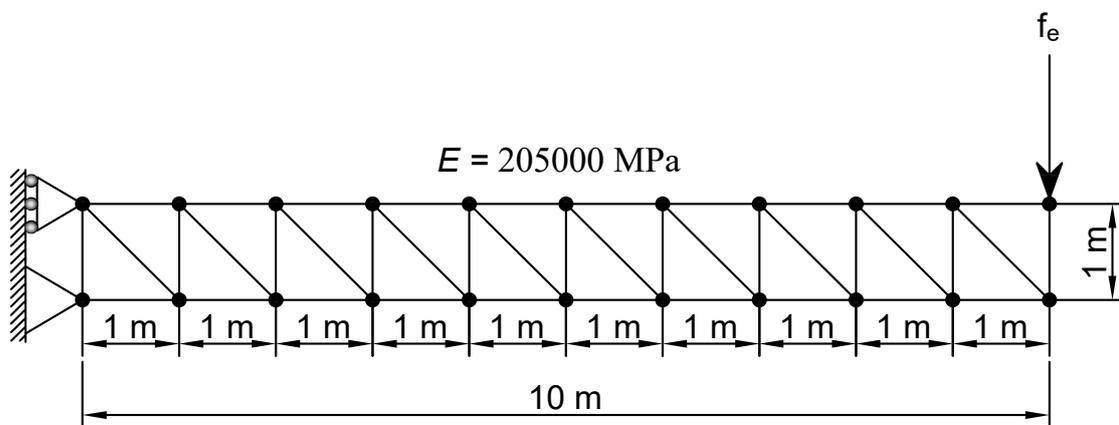
Fonte: Autor, 2018.

## 6 EXEMPLOS DE TRELIÇAS TESTADAS

A fim de validar o programa concebido, alguns exemplos serão testados e comparados com resultados obtidos pelo software *Ansys* e literatura.

### 6.1 VIGA TRELIÇADA

Figura 22 – Viga plana treliçada.



Fonte: Autor, 2018.

Para este primeiro caso, o modelo é bidimensional e foi obtido em (MARTINELLI et al., 2016). Verifica-se aqui o seu caminho de equilíbrio para o nó onde há presença de carga, suas frequências naturais em condição indeformada e sua resposta transiente para alguns tipos de carregamentos dinâmicos.

O exemplo é composto por 41 barras e 22 nós, conforme a Figura 22. Os elementos têm as seguintes características:

$$L_i = L_m = 1 \text{ m} \quad A_i = 12.54 \text{ cm}^2 \quad A_d = A_m = 3.42 \text{ cm}^2$$

$$E = 205000 \text{ MPa} \quad \rho = 7.84 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Sabendo que  $L_i$ ,  $L_m$ , respectivamente, são os comprimentos de cada *unidade* do banzo inferior e superior e dos montantes.  $A_i$ ,  $A_d$ ,  $A_m$  são, respectivamente, as áreas das seções transversais do banzo inferior e superior, diagonais e montantes. Tem-se ainda o valor do módulo de elasticidade e da densidade  $\rho$  para a análise dinâmica. Considera-se a tensão de escoamento do material de ordem elevada para melhor avaliar os deslocamentos e deformações em um procedimento incremental-iterativo, além de alcançar o limite do método numérico de Newton-Raphson (tangente de rigidez igual a zero). A lei constitutiva

do material é linear elástica, a exemplo da Figura 15a, logo, serão analisadas apenas as não linearidades geométricas.

### 6.1.1 Análise estática

Tabela 2 – Deslocamentos nodais verticais.

Deslocamentos verticais (cm)				
Incremento	Força (KN)	Martinelli	DTruss	Ansys
1	-2	-0,635	-0,6347	-0,6346
2	-4	-1,270	-1,2695	-1,2695
3	-6	-1,905	-1,9046	-1,9046
4	-8	-2,540	-2,5399	-2,5399
5	-10	-3,175	-3,1754	-3,1754
6	-12	-3,811	-3,8110	-3,8110
7	-14	-4,447	-4,4469	-4,4469
8	-16	-5,083	-5,0829	-5,0829
9	-18	-5,719	-5,7192	-5,7192
10	-20	-6,356	-6,3557	-6,3557
11	-22	-6,992	-6,9923	-6,9923
12	-24	-7,629	-7,6292	-7,6292
13	-26	-8,266	-8,2662	-8,2662
14	-28	-8,903	-8,9035	-8,9035
15	-30	-9,541	-9,5409	-9,5409

Fonte: Autor, 2018.

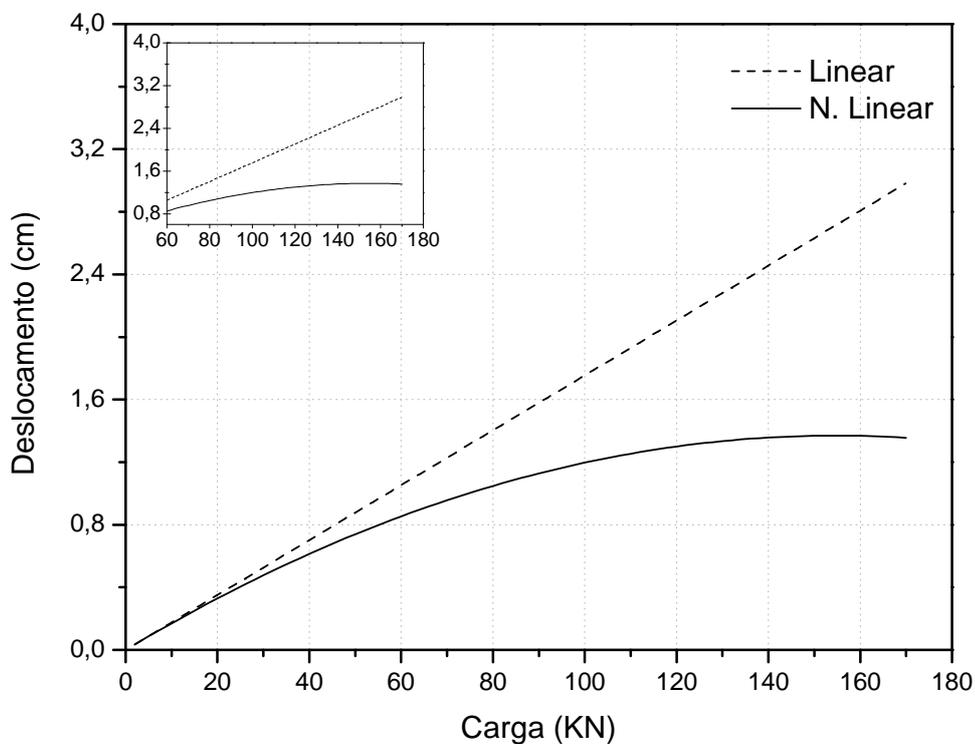
Preliminarmente, traça-se as trajetórias de equilíbrio para ambos graus de liberdade do nó carregado,  $x$  e  $y$ , como está representado na Figura 23, utilizando o Algoritmo 2. Estes gráficos são feitos por meio de incrementos de cargas onde a força pontual mostrada na Figura 22 está sendo exercida. Utiliza-se um carregamento inicial de  $-2.0$  KN e quantidade de incrementos suficientes para alcançar o ponto de tangente zero, onde há falha do método de Newton.

Compara-se também os resultados na Tabela 2 dos deslocamentos obtidos em **DTruss** com os dados de (MARTINELLI et al., 2016) e do **Ansys**. Utiliza-se 15 incrementos de carga com carregamento inicial de  $-2.0$  KN. Por fim, tem-se a representação do modelo

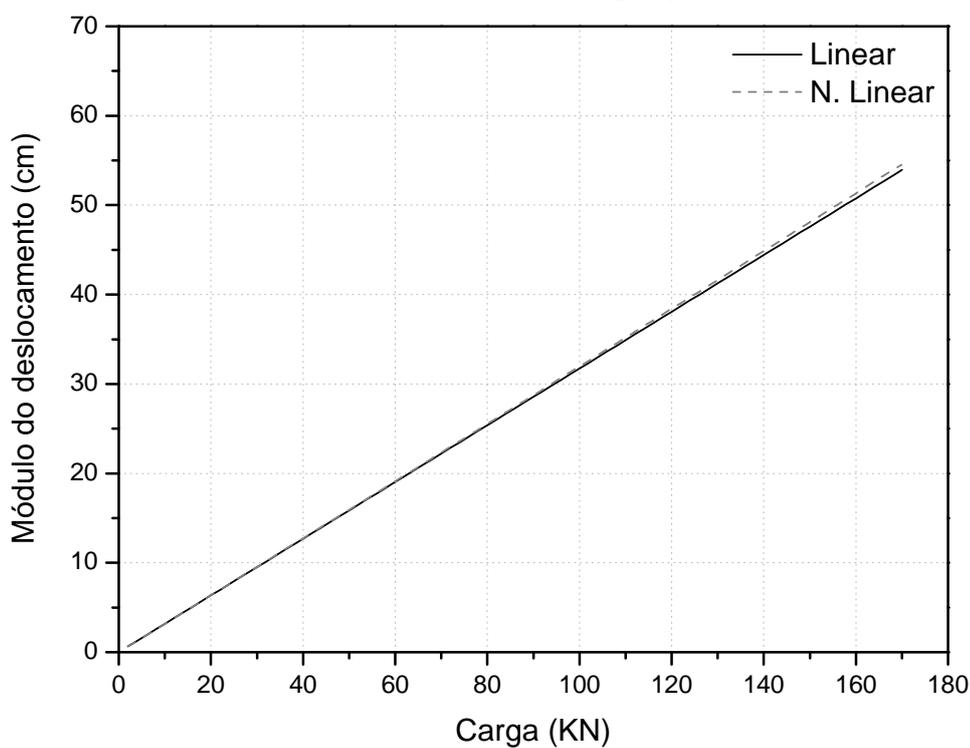
deformado e ampliado 10× da Figura 24 para uma carga final de  $-170$  kN da análise incremental-iterativa

Figura 23 – Caminho de equilíbrio do nó carregado.

(a) Deslocamento na direção  $x$

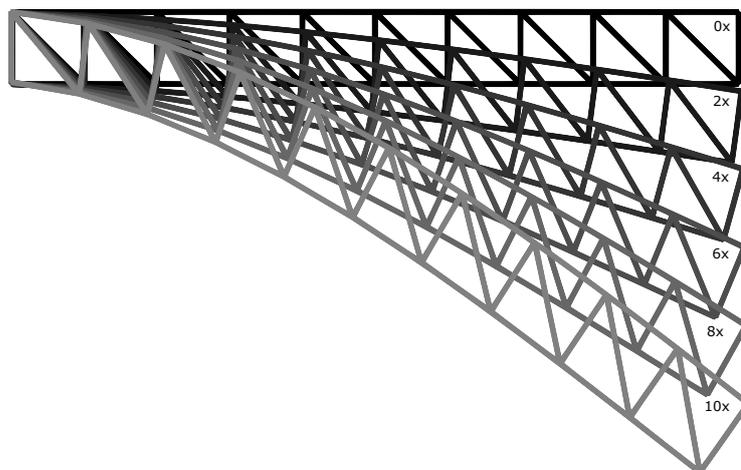


(b) Deslocamento na direção  $y$



Fonte: Autor, 2018.

Figura 24 – Modelo de treliça deformada ampliado com um carregamento final de  $-170$  KN e deformação máxima de  $54$  cm no nó carregado.

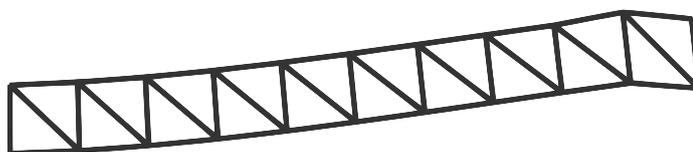


Fonte: Autor, 2018.

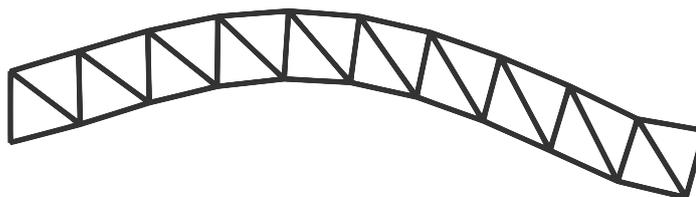
### 6.1.2 Análise dinâmica

Figura 25 – Modos de vibrar das três menores frequências naturais da viga treliçada.

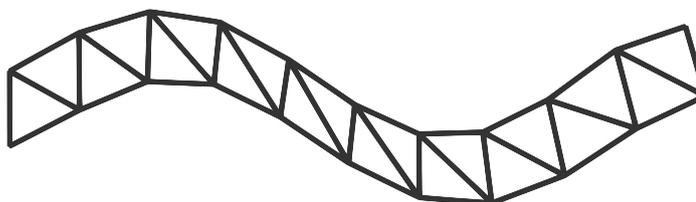
(a) Para a frequência de  $10.56$  Hz



(b) Para a frequência de  $42.12$  Hz



(c) Para a frequência de  $89.06$  Hz



Fonte: Autor, 2018.

Para a análise dinâmica, considera-se o mesmo exemplo anterior, com as mesmas características e valores já mencionados e utilizando incrementos de tempo de  $\delta t = 0.005$  s,  $t_i = 0$  s e  $t_f = 3.6$  s. Além disso, na Figura 27a se apresenta os gráficos para diferentes

tipos de carregamentos amortecidos ou não. A representação dos modos de vibrar para as três menores frequências naturais da estrutura em condição indeformada é verificada na Figura 25. Todas as frequências naturais no estado indeformado são expostas na Tabela 3 e comparados com os resultados do Ansys e de (MARTINELLI et al., 2016).

Tabela 3 – Frequências naturais da viga treliçada.

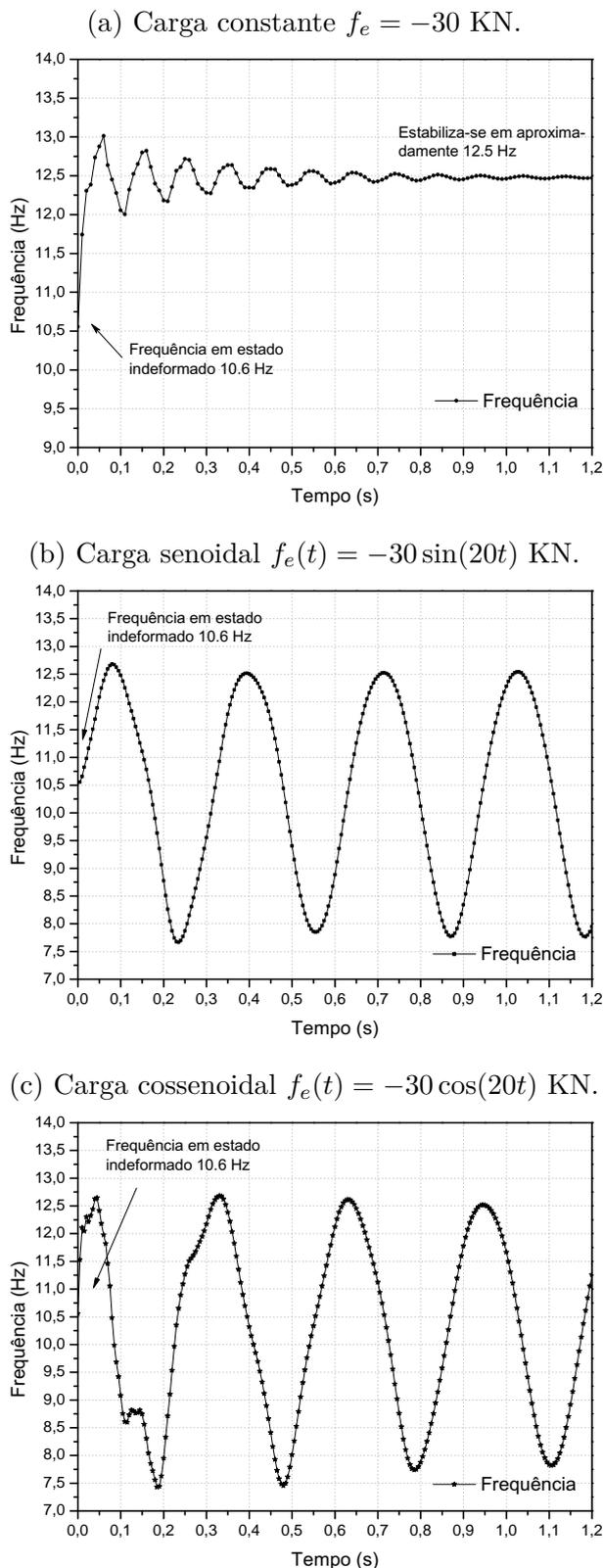
Frequências naturais (Hz)							
$\omega_n$	DTruss	Ansys	Martinelli	$\omega_n$	DTruss	Ansys	Martinelli
<b>1</b>	10,5550	10,5550	10,5042	<b>22</b>	741,1572	741,1572	741,1846
<b>2</b>	42,1432	42,1432	42,1761	<b>23</b>	748,8309	748,8309	748,8240
<b>3</b>	89,0610	89,0610	89,1268	<b>24</b>	769,0464	769,0464	769,0367
<b>4</b>	111,0839	111,0839	111,0902	<b>25</b>	784,2893	784,2893	784,3156
<b>5</b>	136,7790	136,7790	136,7141	<b>26</b>	793,4254	793,4254	793,3874
<b>6</b>	188,4315	188,4315	188,4395	<b>27</b>	841,4825	841,4825	841,4522
<b>7</b>	241,5961	241,5961	241,5972	<b>28</b>	926,6694	926,6694	926,6001
<b>8</b>	290,7519	290,7519	290,7761	<b>29</b>	982,3213	982,3213	982,3043
<b>9</b>	315,4260	315,4260	315,4451	<b>30</b>	1086,3853	1086,3853	1086,3920
<b>10</b>	343,3521	343,3521	343,2972	<b>31</b>	1161,1065	1161,1065	1161,0350
<b>11</b>	370,9679	370,9679	370,9902	<b>32</b>	1351,5562	1351,5562	1351,5440
<b>12</b>	419,7345	419,7345	419,6916	<b>33</b>	1408,5246	1408,5246	1408,5210
<b>13</b>	449,0922	449,0922	449,1352	<b>34</b>	1622,7787	1622,7787	1622,7440
<b>14</b>	467,7323	467,7323	467,7564	<b>35</b>	1655,4653	1655,4653	1655,5300
<b>15</b>	564,3733	564,3733	564,3634	<b>36</b>	1879,7604	1879,7604	1879,7790
<b>16</b>	606,6710	606,6710	606,6986	<b>37</b>	1883,2240	1883,2240	1883,2800
<b>17</b>	680,2902	680,2902	680,2282	<b>38</b>	2063,3507	2063,3507	2063,2850
<b>18</b>	694,4192	694,4192	694,3930	<b>39</b>	2086,5203	2086,5203	2086,5210
<b>19</b>	704,0818	704,0818	704,1015	<b>40</b>	2174,5071	2174,5071	2174,5340
<b>20</b>	715,5934	715,5934	715,5606	<b>41</b>	2246,9507	2246,9507	2246,9490
<b>21</b>	722,4460	722,4460	722,4043	-	-	-	-

Fonte: Autor, 2018.

No procedimento iterativo, ao se aumentar o tamanho das barras para cada incremento, altera-se a matriz de rigidez e matriz massa de estrutura. Como as frequências estruturais são proporcionais a estes dois parâmetros, na Figura 26 faz-se uma análise

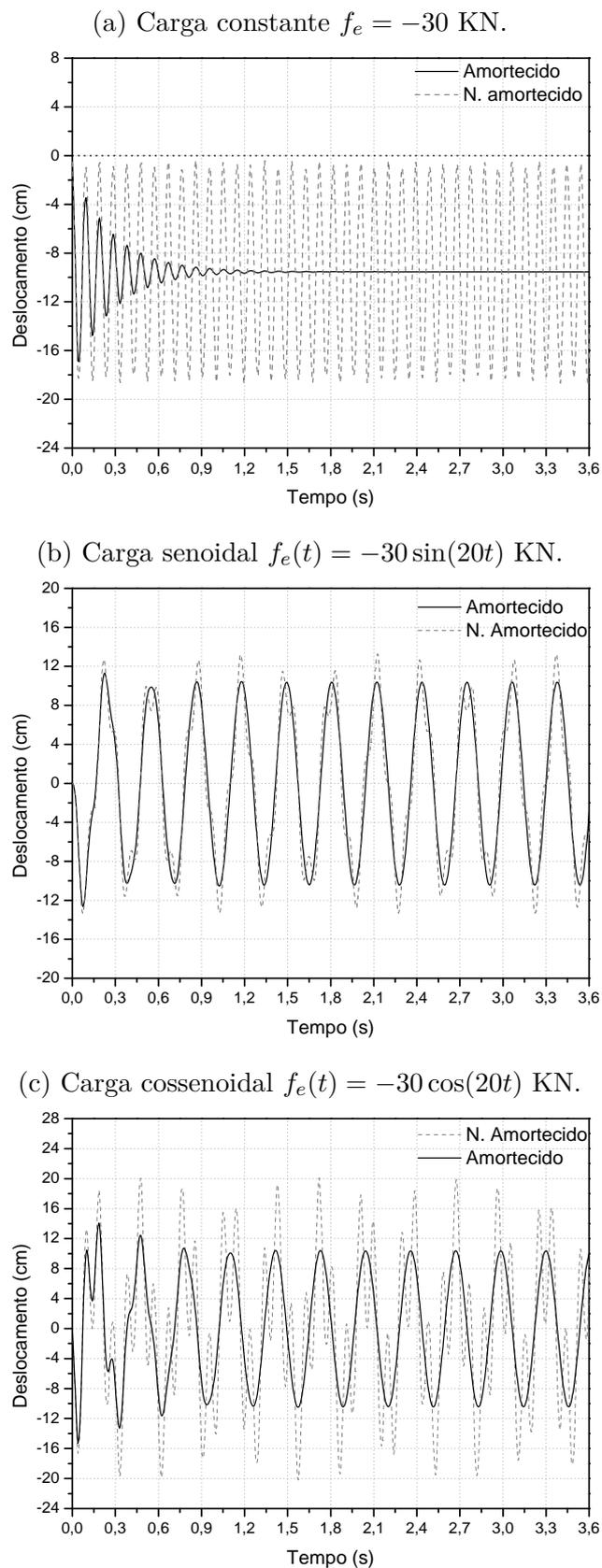
gráfica do comportamento delas com a variação temporal de  $\delta t = 0.01$  s e para variados tipos de carregamentos em regime amortecido de  $\xi = 5\%$ .

Figura 26 – Frequências fundamentais da estrutura variantes no tempo.



Fonte: Autor, 2018.

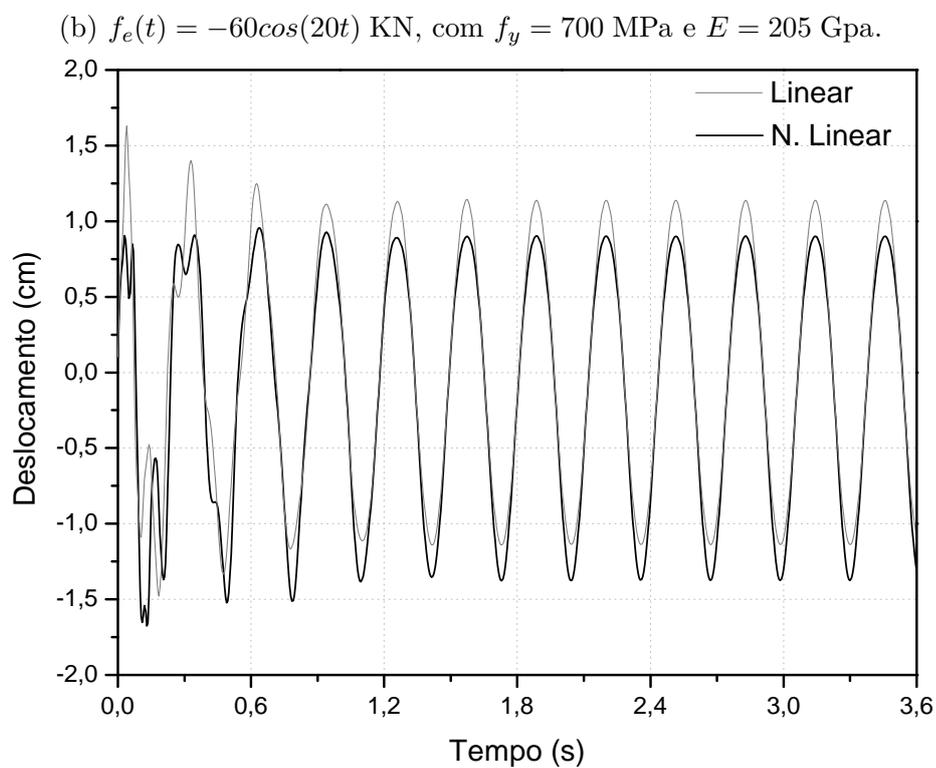
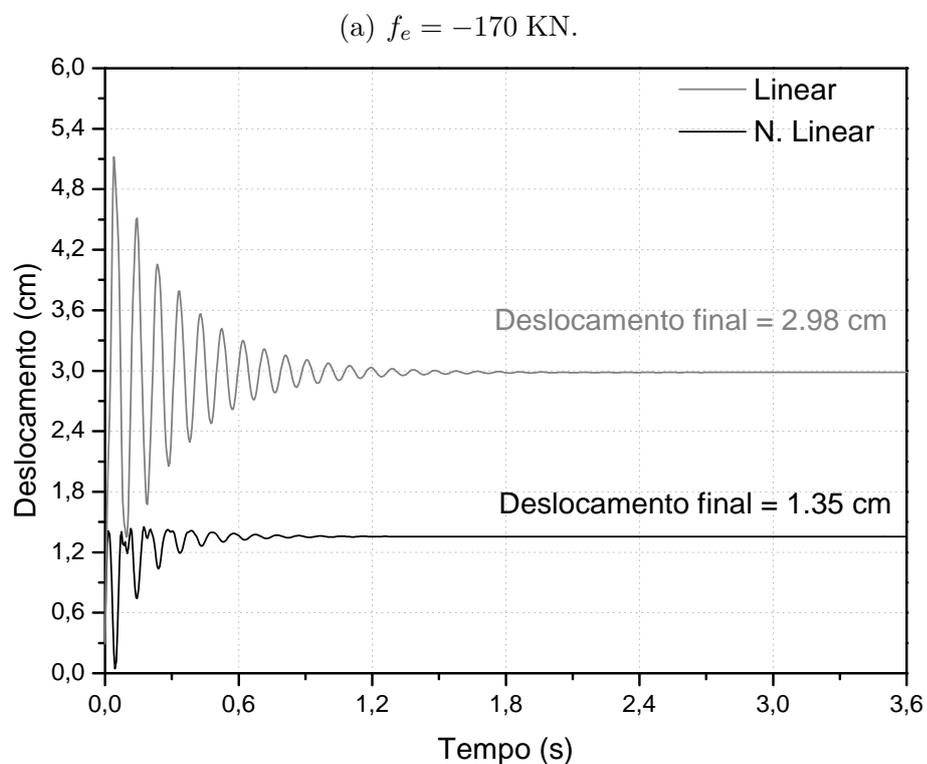
Figura 27 – Deslocamentos no tempo para diferentes tipos de carregamento, amortecidos ou não para o grau de liberdade  $y$  do nó carregado.  $\xi = 5\%$



Fonte: Autor, 2018.

Compara-se o comportamento da estrutura em uma análise linear e não linear em dois casos de carregamento na Figura 28.

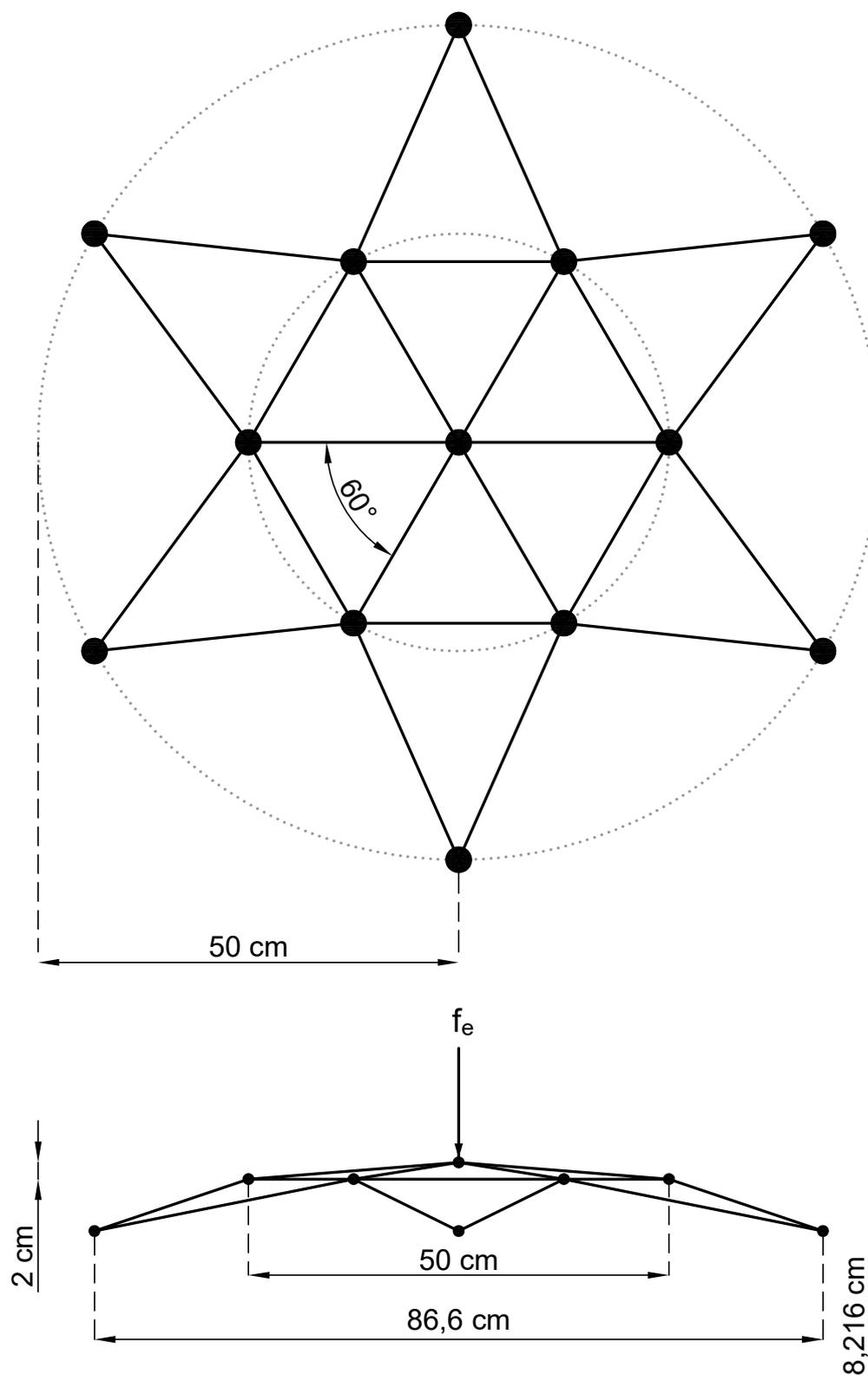
Figura 28 – Comparação entre deslocamento linear  $\times$  não linear na direção  $x$  do nó carregado.



Fonte: Autor, 2018.

6.2 DOMO TRELICADO

Figura 29 – Domo treliçado tridimensional.



Fonte: Autor, 2018.

Para este caso, tem-se uma treliça espacial hipotética adaptada de um exemplo clássico, muito comum na literatura, aparecendo em (BLANDFORD, 1996; KRISHNA-MOORTHY; RAMESH; DINESH, 1996; BONET; GIL; WOOD, 2012; LACERDA, 2014; GRECO et al., 2006). O procedimento aqui será semelhante ao anterior, com a análise estática e dinâmica da estrutura.

O domo original apresenta 24 barras, com 13 nós ao total. Além disso, em (GRECO et al., 2006) se considera as seguintes características e que serão aqui adotadas para todos os elementos:

$$A = 3.17 \text{ cm}^2$$

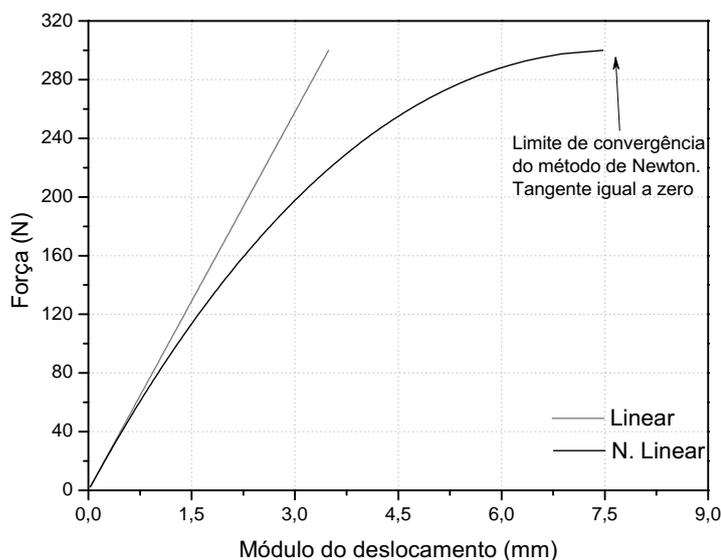
$$E = 30000 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

$$f_y = 200 \frac{\text{KN}}{\text{cm}^2}$$

Onde  $A$  é a área da seção transversal,  $E$  o módulo de elasticidade e  $f_y$  a tensão máxima de escoamento adotada. Para a análise dinâmica, considera-se o problema com as mesmas medidas e dimensões do problema estático e com a densidade de  $\rho = 7.84 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ . Ademais, as medidas necessárias se encontram especificadas na Figura 29.

### 6.2.1 Análise estática

Figura 30 – Caminho de equilíbrio da cúpula.

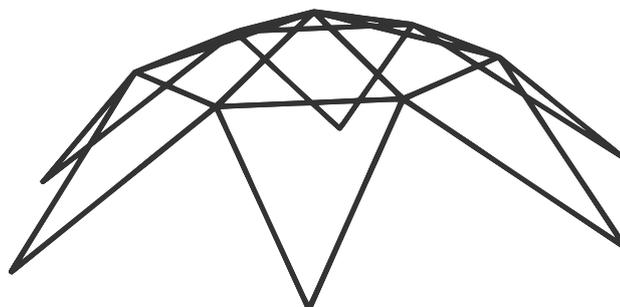


Fonte: Autor, 2018.

Inicialmente, traça-se a trajetória de equilíbrio para apenas um grau de liberdade do nó carregado,  $z$ , já que, para este exemplo, o deslocamento na direção  $y$  e  $x$  é nulo. O caminho de equilíbrio está dado na Figura 30, utiliza-se o Algoritmo 2. O gráfico foi

feito por meio de incrementos de cargas onde a força está sendo exercida. Utiliza-se um carregamento inicial de  $-2.5$  N e quantidade de incrementos suficientes para alcançar o limite de escoamento elástico do material e entrar no regime plástico ou ainda para atingir o ponto de tangente zero, onde há falha do método de Newton.

Figura 31 – Domo deformado ampliado. Deformação máxima de 4.4 cm no topo.



Fonte: Autor, 2018.

Tabela 4 – Deslocamentos nodais na direção  $z$ .

Deslocamentos Verticais (mm)			
Incremento	Força (N)	Dtruss	Ansys
1	-20	-0,2372	-0,2373
2	-40	-0,4842	-0,4842
3	-60	-0,7423	-0,7423
4	-80	-1,0129	-1,0129
5	-100	-1,2979	-1,2979
6	-120	-1,5996	-1,5995
7	-140	-1,9208	-1,9208
8	-160	-2,2656	-2,2657
9	-180	-2,6393	-2,6395
10	-200	-3,0497	-3,0497
11	-220	-3,5088	-3,5088
12	-240	-4,0368	-4,0368
13	-260	-4,6733	-4,6734
14	-280	-5,5203	-5,5203
15	-300	-7,4733	-7,4733

Fonte: Autor, 2018.

Na Tabela 4 se tem a comparação dos deslocamentos obtidos em **DTruss** com os dados do **Ansys**. Utiliza-se 15 incrementos de carga com carregamento inicial de  $-20$  N até uma carga máxima de  $300$  N.

Por fim, com um carregamento de  $10$  KN positivo na direção  $z$  em todos os nós superiores da Figura 31, tem-se a representação do modelo deformado e ampliado.

### 6.2.2 Análise dinâmica

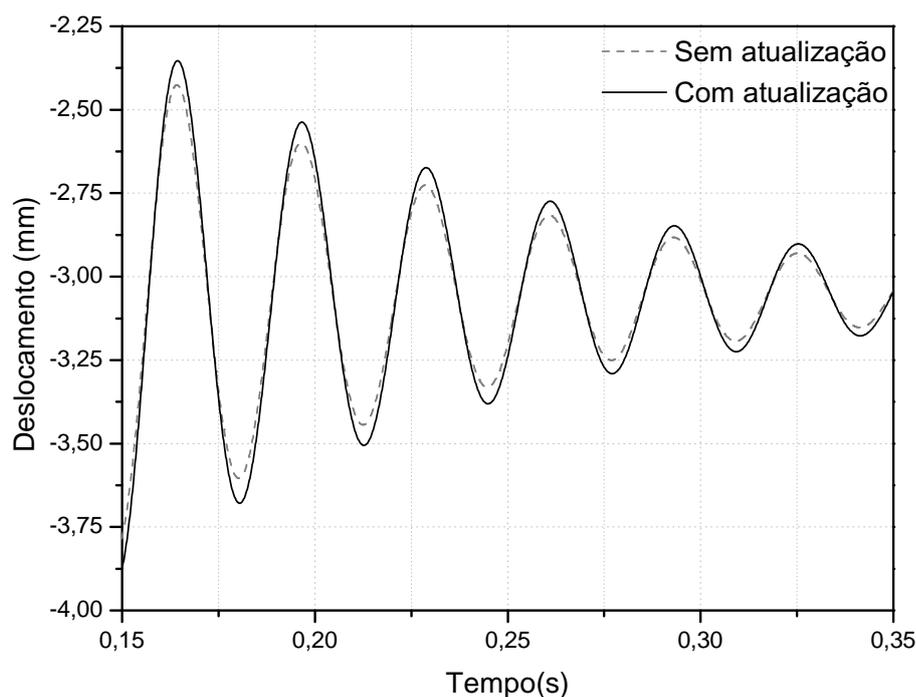
A princípio, os modelos dos três primeiros modos de vibração referentes às frequências da estrutura em estado indeformado são aqui representados na Figura 34. Seguidamente, na Tabela 5 se faz um comparativo de todas essas frequências com os dados do software **Ansys**.

Para a análise dinâmica, utiliza-se um tempo inicial de  $t_i = 0$  s e  $t_f = 1$  s, com um intervalo de tempo igual a  $\delta t = 0.0001$  s. Três tipos de carregamentos foram testados para o caso da Figura 33.

Compara-se o comportamento da estrutura em uma análise linear e não linear em dois casos de carregamento na Figura 35.

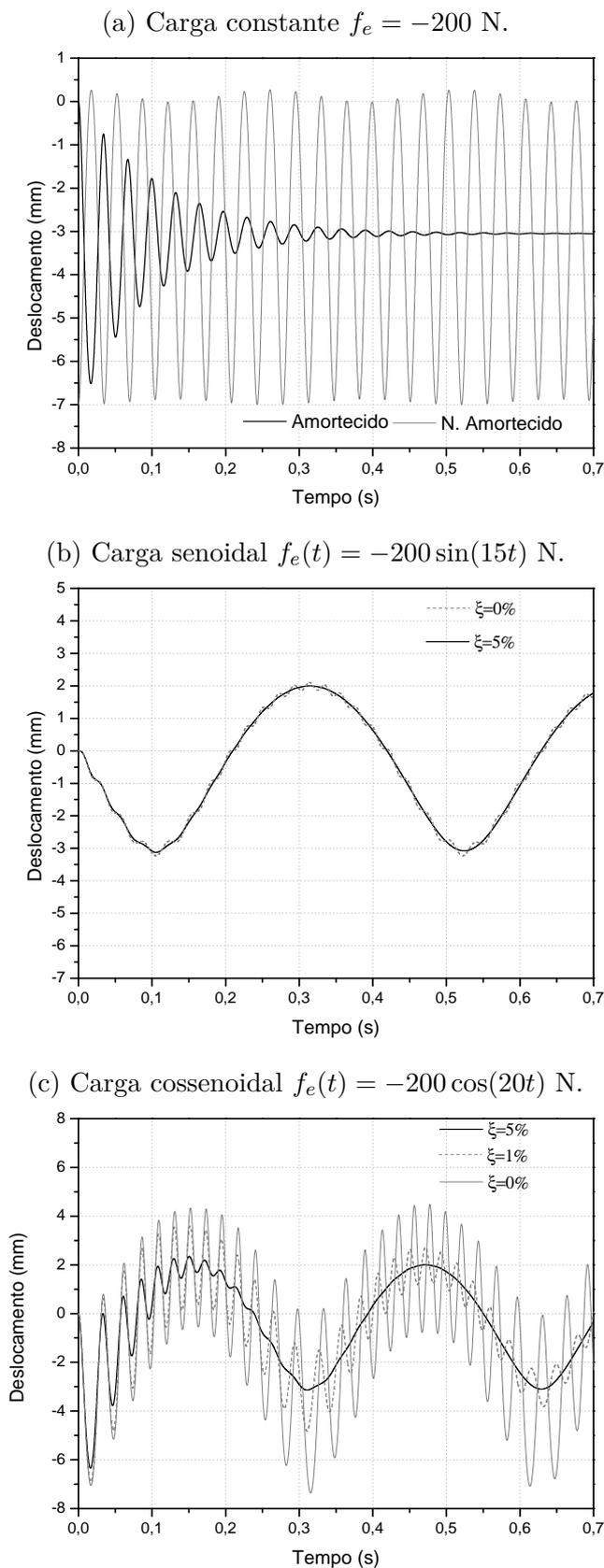
E, na Figura 32, relaciona-se também a análise com variação das frequência ao longo do tempo com a análise sem este tipo de variação, apenas para carregamentos constantes de  $200$  KN com  $\delta t = 0.0001$  s e em um pequeno espaço de tempo, onde há uma quantidade maior de vibrações do objeto quando aplicada, entre,  $t_i = 0.15$  s e  $t_f = 0.35$  s.

Figura 32 – Diferença na deformação em função da atualização da frequência.



Fonte: Autor, 2018.

Figura 33 – Análise transiente para diferentes tipos de carregamento, amortecidos ou não para o grau de liberdade  $z$  do nó carregado.



Fonte: Autor, 2018.

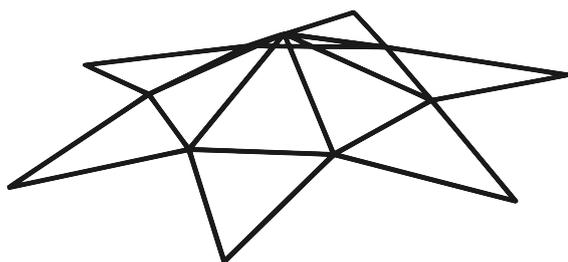
Tabela 5 – Frequências naturais para o domo indeformado (Hz).

Frequências naturais (Hz)					
$\omega_n$	Dtruss	Ansys	$\omega_n$	Dtruss	Ansys
<b>1</b>	42,5459	42,5459	<b>12</b>	380,7237	380,7238
<b>2</b>	45,6940	45,6940	<b>13</b>	383,4155	383,4155
<b>3</b>	47,0120	47,0120	<b>14</b>	436,6418	436,6418
<b>4</b>	49,1997	49,1997	<b>15</b>	440,1356	440,1356
<b>5</b>	50,2207	50,2205	<b>16</b>	480,1921	480,1921
<b>6</b>	51,1774	51,1774	<b>17</b>	589,4038	589,4038
<b>7</b>	58,9805	58,9805	<b>18</b>	604,6253	604,6253
<b>8</b>	216,3049	216,3049	<b>19</b>	624,8391	624,8391
<b>9</b>	225,7257	225,7257	<b>20</b>	653,3473	653,3473
<b>10</b>	300,0073	300,0073	<b>21</b>	656,6950	656,6951
<b>11</b>	344,1172	344,1172	-	-	-

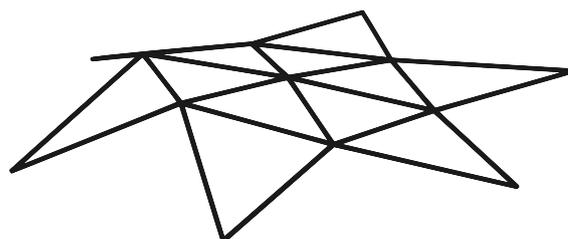
Fonte: Autor, 2018.

Figura 34 – Modos de vibrar das três menores frequências naturais do domo.

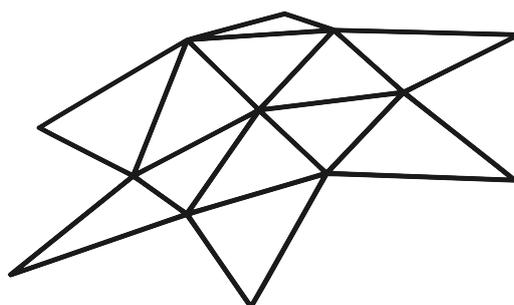
(a) Para a frequência de 42.55 Hz



(b) Para a frequência de 45.69 Hz

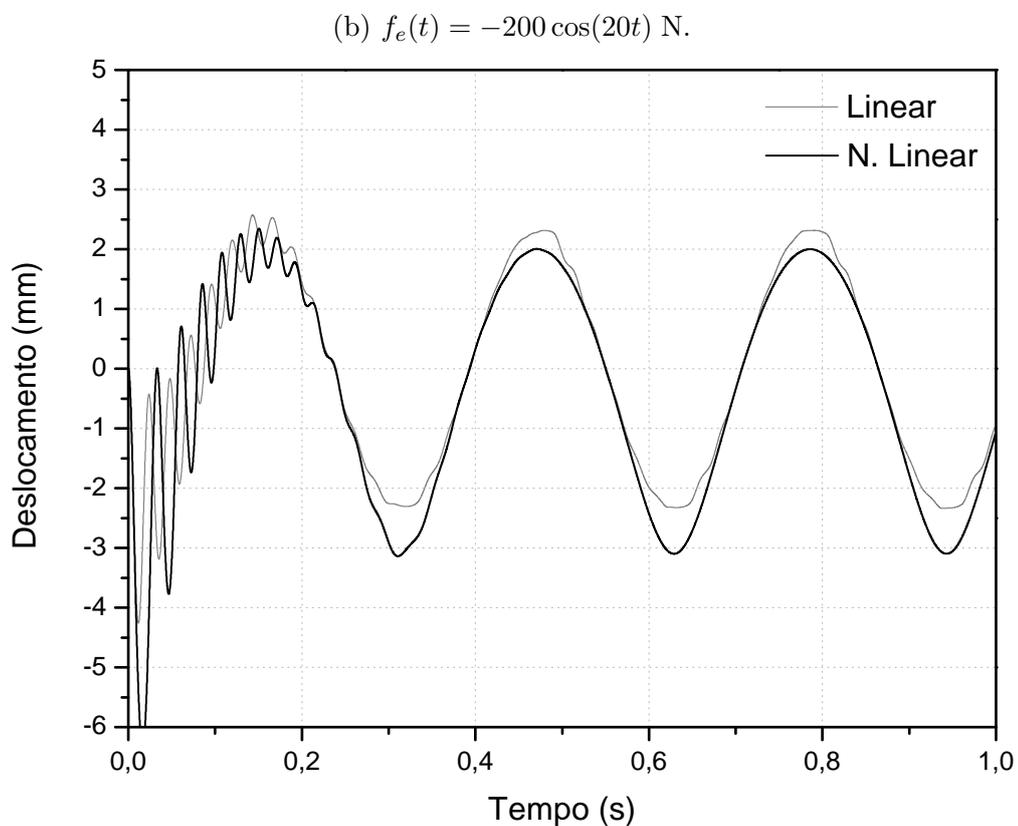
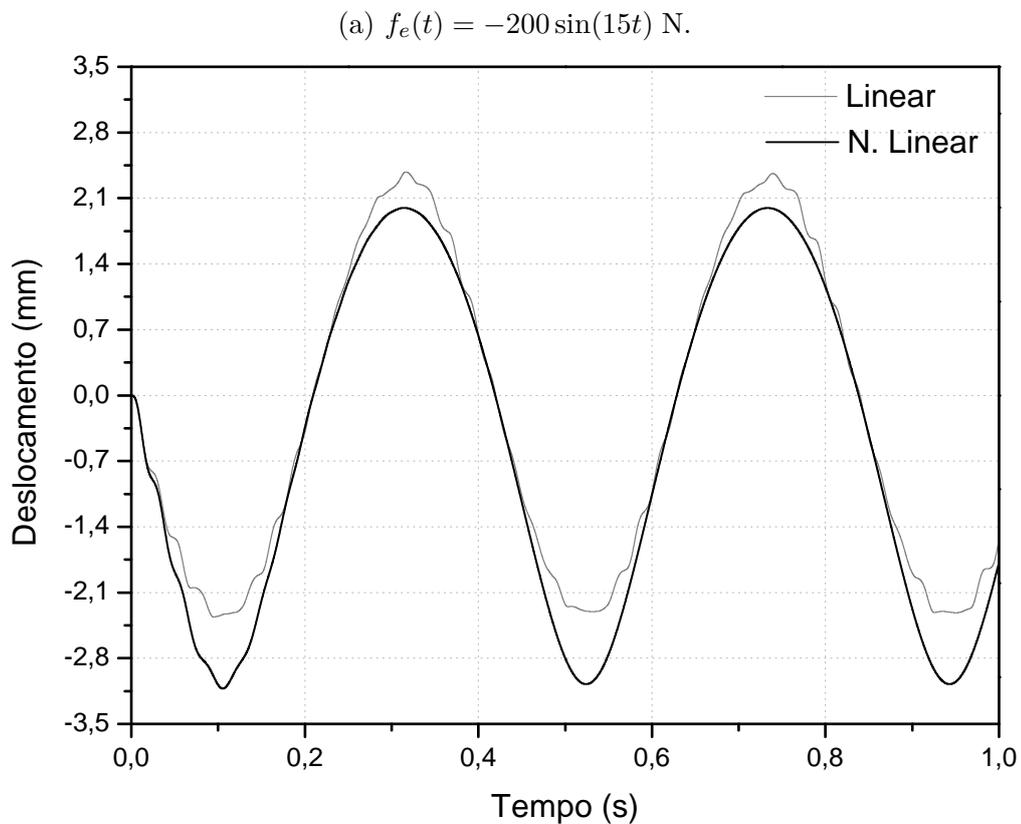


(c) Para a frequência de 47.01 Hz



Fonte: Autor, 2018.

Figura 35 – Comparação entre deslocamento linear × não linear na direção z do nó carregado.



Fonte: Autor, 2018.

## 7 CONCLUSÃO

Após um estudo mais aprofundado, lançando mão de análises das não linearidades em um sistema estrutural, observa-se inicialmente que a solução apresentada, de forma vetorial, se mostra como uma excelente alternativa aos métodos convencionais já consagrados. A utilização de um sistema único de coordenadas, no geral, facilita a implementação e otimiza o uso de memória e processamento da máquina, já que cálculos custosos são processados quando há matrizes de rotação entre eixos locais dos elementos e entre o eixo global. Ainda em relação a uso de memória e processamento de máquina, o método do gradiente biconjugado pré-condicionado (PBCG) para resolução dos muitos sistemas lineares formados em uma análise não linear, é uma excelente alternativa.

Quanto aos resultados obtidos, são bastante satisfatórios dentro dos limites que o Método de Newton impõe. Na análise estática observa-se que os resultados são coerentes com a literatura e com o programa comercial referência em análise estrutural, **Ansys v.14**. No método de Newton, o controle de carga utilizado para traçar o caminho de equilíbrio é satisfatório até determinados pontos limites, causando problemas de convergência ao atingi-los ou saltando zonas de instabilidades da estrutura, os chamados *snap-through* e *snap-back* (LACERDA, 2014). Isso pode levar ao incorreto dimensionamento, tanto de uma forma conservadora ao se tratar de otimização, quanto de maneira desastrosa, ao se zelar pela estabilidade da estrutura. Uma forma de se contornar essa situação é utilizar métodos para controle de deslocamento ou métodos para controle de carga e deslocamento simultâneos, já que pontos limites seriam superados com relativa facilidade e se saberia de forma mais eficiente e eficaz como a treliça se comporta em função dos carregamentos.

Para a análise dinâmica não linear foi observada também boa convergência, com resultados muito adequados, considerando amortecimento ou não e intervalo de tempos diferenciados. Ao se tratar da dinâmica linear  $\times$  não linear, observou-se uma nítida diferença de deslocamentos com carregamentos mais elevados, que ultrapassam o limite onde a não linearidade pode ser aproximada para a linearidade. Essa correlação é muito importante, já que além disso, ainda mostra que houve variação no comportamento de vibração inicialmente. Igualmente, algumas questões podem ser sinalizadas, como por exemplo, a existência de pequenas e diferentes oscilações vibratórias quando se atualiza ou não as frequências estruturais. Naturalmente, estas atualizações devem ser levadas em consideração caso haja grandes deformações que alterem as dimensões dos elementos. Mesmo não se tratando de uma diferença considerável, em determinadas situações pode ocorrer o fenômeno de ressonância com a carga, condição esta que é normalmente prejudicial.

Os modos de vibrar, por outro lado, mesmo que não mostrem quaisquer resultados admissíveis, apenas visuais, é de bom grado se saber como será a configuração de deformação

da estrutura quando em situações em que o sistema seja excitado em alguma de suas frequências naturais. Já o amortecimento, mesmo sendo um parâmetro com grandes imprecisões e de grande aleatoriedade no que diz respeito às taxas de amortecimento e à composição de sua matriz, a literatura recomenda como sendo algo benéfico na análise, mesmo que apenas como um recurso para diminuição de erros associados à convergência. Outrossim, para se ter melhores resultados é interessante analisar a sua presença na formulação em comparação com um estudo de um modelo real simplificado.

Por fim, e não menos importante, o enriquecimento pessoal e profissional devem ser destacados com o aprofundamento nesta temática. A utilização e implementação de ferramentas diversas, dentre elas linguagens de programação, métodos numéricos, programas computacionais, entre outras, gera uma melhor compreensão e aprofundamento do estudo e desenvolve diversas competências. A mecânica computacional vem nesse contexto como uma oportunidade de progresso, abrindo novos caminhos para exploração e contribuindo em diversos aspectos na formação de um engenheiro civil mais a par das atualidades.

## 7.1 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Muitas possibilidades de ampliação do tema podem ser sugeridas com a finalização deste trabalho. Pode-se citar algumas:

- Os exemplos dados se tratam de estruturas com a relação constitutiva linear. Parametrizar uma curva ou estudar novos elementos que apresentem não-linearidades físicas a fim de que se possa avaliar a formulação proposta nesse sentido;
- Propor, implementar e avaliar novos modelos de deformação, como as deformações de *Green*, *Logarítmica* e *Almansi*;
- O estudo comparativo de novos elementos, vigas, cascas, sólidos, etc., na condição vetorial;
- A implementação de outros métodos numéricos na não linearidade, como por exemplo o método do comprimento de arco, que usando incrementos de cargas e deslocamentos, alcança condições onde Newton é ineficaz;
- Métodos para otimizar o processo de determinação das frequências naturais, já que por Jacobi isto é feito para as  $n$  frequências da estrutura, onde  $n$  é a quantidade de graus de liberdade do sistema;
- Um estudo mais aprofundado dos vários tipos de amortecimentos, dentro das suas possibilidades de aplicação, servindo-se de experimentações práticas para isso;

- 
- A aplicação de novos parâmetros para Newmark e a comparação com métodos da Diferença Central e Runge-Kutta, por exemplo;
  - A comparação de resultados do sistema vetorial com o sistema corrotacional clássico e a influência no tempo de processamento que isso impõe;
  - A implementação e estudo de outros tipos de cargas, como a impulsiva, para ampliação da compreensão de como se dá o comportamento nessa situação;
  - Uma análise de contato e impacto com carregamento dinâmico.

## REFERÊNCIAS

- ABRATE, S.; SUN, C. Dynamic analysis of geometrically nonlinear truss structures. **Computers & Structures**, Elsevier BV, v. 17, n. 4, p. 491–497, jan 1983.
- ADHIKARI, S. Damping modelling using generalized proportional damping. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier BV, v. 293, n. 1-2, p. 156–170, may 2006.
- AZEVEDO, A. F. M. **Método dos Elementos Finitos**. 1. ed. Porto, 2003. Disponível em: <<http://www.alvaroazevedo.com/>>.
- BANDEIRA, A. A. **Uma introdução à análise de problemas de contato**. 1997. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 1997.
- BANDEIRA, A. A. **Análise de problemas de contato com atrito entre sólidos 3D**. 2001. 276 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.
- BATHE, K.-J. **Finite Element Procedures**. Cambridge, MA: Klaus-Jürgen Bathe, 2006. ISBN 978-0979004957.
- BATHE, K.-J.; WILSON, E. L. Solution methods for eigenvalue problems in structural mechanics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley, v. 6, n. 2, p. 213–226, 1973.
- BERGER, E. Friction modeling for dynamic system simulation. **Applied Mechanics Reviews**, ASME International, v. 55, n. 6, p. 535, 2002.
- BERT, C. Material damping. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier BV, v. 29, n. 2, p. 129–153, jul 1973.
- BLANDFORD, G. E. Progressive failure analysis of inelastic space truss structures. **Computers & Structures**, Elsevier BV, v. 58, n. 5, p. 981–990, mar 1996.
- BONET, J.; GIL, A. J.; WOOD, R. D. **Worked Examples in Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2012. 136 p. ISBN 9781107603615.
- BORST, R. de et al. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. 2. ed. Chichester, West Sussex, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2012. ISBN 9781118375938.
- CHRISTENSEN, R. M. **Theory of Viscoelasticity: An introduction**. New York: Elsevier, 1982. 378 p. ISBN 978-0-12-174252-2.
- CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of Structures**. 2. ed. [S.l.]: Computers and Structures inc, 2010. ISBN 0923907513.
- CODA, H. B. (Texto complementar para concurso de professor titular EESC USP). **Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no MEF**. São Carlos, 2003.

COHEN, E.; MCCALLION, H. Economical methods for finding eigenvalues and eigenvectors. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier BV, v. 5, n. 3, p. 397–406, maio 1967.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. **Concepts and applications of finite element analysis**. 3. ed. Nova Jersey: John Wiley & Sons, 1989. ISBN 9780471503194.

DIAS, L. F. S. **Estudo numérico do fenômeno do amortecimento em estruturas sólidas submetidas a carregamentos impulsivos**. 2015. 101 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) — Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2015.

DOKAINISH, M. A.; SUBBARAJ, K. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics—i. explicit methods. **Computers & Structures**, Elsevier BV, v. 32, n. 6, p. 1371–1386, jan 1989.

DOMINÍCIO, F. M. **Análise Matricial de Estruturas**. Rio de Janeiro: Editora da Universidade de São Paulo, 1977.

ENGINEERING, I. C. for Numerical Methods in. **GiD The personal pre and post processor (Customization Manual)**. Barcelona, 2017. Disponível em: <<https://www.gidhome.com/>>.

FELIPPA, C. **Matrix Finite Element Methods in Dynamics**: Courses of dynamic systems. 2013. Department of Aerospace Engineering Sciences – University of Colorado at Boulder. Disponível em: <<https://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/MFEMD.d/>>.

FILHO, A. A. **Elementos Finitos – A Base da Tecnologia Cae**. 6. ed. São Paulo: Érica, 2013. Único. 320 p. ISBN 9788571947412.

GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas**. Porto Alegre: Bookman, 2008. ISBN 978-85-7780-297-5.

GOPALAKRISHNAN, S.; MITRA, M. **Wavelet Methods for Dynamical Problems: With Application to Metallic, Composite, and Nano-Composite Structures**. 1. ed. [S.l.]: CRC Press, 2010. 298 p. ISBN 9781439804612.

GRECO, M. **Nonlinear structural contact/impact analysis problems using the finite element method**. 2004. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) — São Carlos school of engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2004.

GRECO, M. et al. Nonlinear positional formulation for space truss analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier BV, v. 42, n. 12, p. 1079–1086, aug 2006.

HRINDA, G. A.; NGUYEN, D. T. Optimization of stability-constrained geometrically nonlinear shallow trusses using an arc length sparse method with a strain energy density approach. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier BV, v. 44, n. 15, p. 933–950, nov 2008.

HUANG, F.-L. et al. A new approach to identification of structural damping ratios. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier BV, v. 303, n. 1-2, p. 144–153, jun 2007.

JEARY, A. P. Damping in structures. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, Elsevier BV, v. 72, p. 345–355, nov 1997.

- KRISHNAMOORTHY, C. S.; RAMESH, G.; DINESH, K. U. Post-buckling analysis of structures by three-parameter constrained solution techniques. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier BV, v. 22, n. 2, p. 109–142, jun 1996.
- KUHL, D.; CRISFIELD, M. A. Energy-conserving and decaying algorithms in non-linear structural dynamics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley, v. 45, n. 5, p. 569–599, jun 1999.
- LACERDA, E. G. M. de. **Análise Não Linear De Treliças Pelo Método Dos Elementos Finitos Posicional**. 2014. 92 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.
- MARTINELLI, L. B.; ALVES, E. C. Programa computacional para análise não-linear de treliças espaciais. In: IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, XXXVIII. **Anais do XXXVIII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**. Florianópolis: ABMEC Brazilian Association of Computational Methods in Engineering, 2017.
- MARTINELLI, L. B. et al. Um sistema para análise dinâmica e não linear de treliças. In: IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, XXXVII. **Anais do XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**. Brasília: ABMEC Brazilian Association of Computational Methods in Engineering, 2016.
- NEWMARK, N. M. A method of computation for structural dynamics. **Journal of the Engineering Mechanics**, ASCE, v. 85, n. 3, p. 67–94, 1959.
- ODEN, J. T. **Finite Elements of Nonlinear Continua**. [S.l.]: Dover Publications, 2006. ISBN 978-0486449739.
- ORBAN, F. Damping of materials and members in structures. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 268, n. 1, p. 012022, 2011.
- PRESS, W. H. et al. **Numerical Recipes in C: The art of scientific computing**. 2. ed. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 1992. ISBN 0-521-43108-5.
- REDDY, J. N. **An Introduction to the Finite Element Method**. [S.l.]: McGraw-Hill Education - Europe, 2005. ISBN 0071267611.
- SILVA, A. R. D. da. **Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas**. 2009. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.
- SORIANO, H. L. **Elementos Finitos. Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009. 432 p. ISBN 8573938803.
- STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. 1. ed. [S.l.]: Pearson, 1987. 596 p. ISBN 9780074504123.
- WOODHOUSE, J. Linear damping models for structural vibration. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier BV, v. 215, n. 3, p. 547–569, aug 1998.

---

WRIGGERS, P. **Nonlinear Finite Element Methods**. 1. ed. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2008. 560 p. ISBN 978-3-540-71001-1.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R.; FOX, D. **The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics**. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2014. 672 p. ISBN 978-1-85617-634-7.