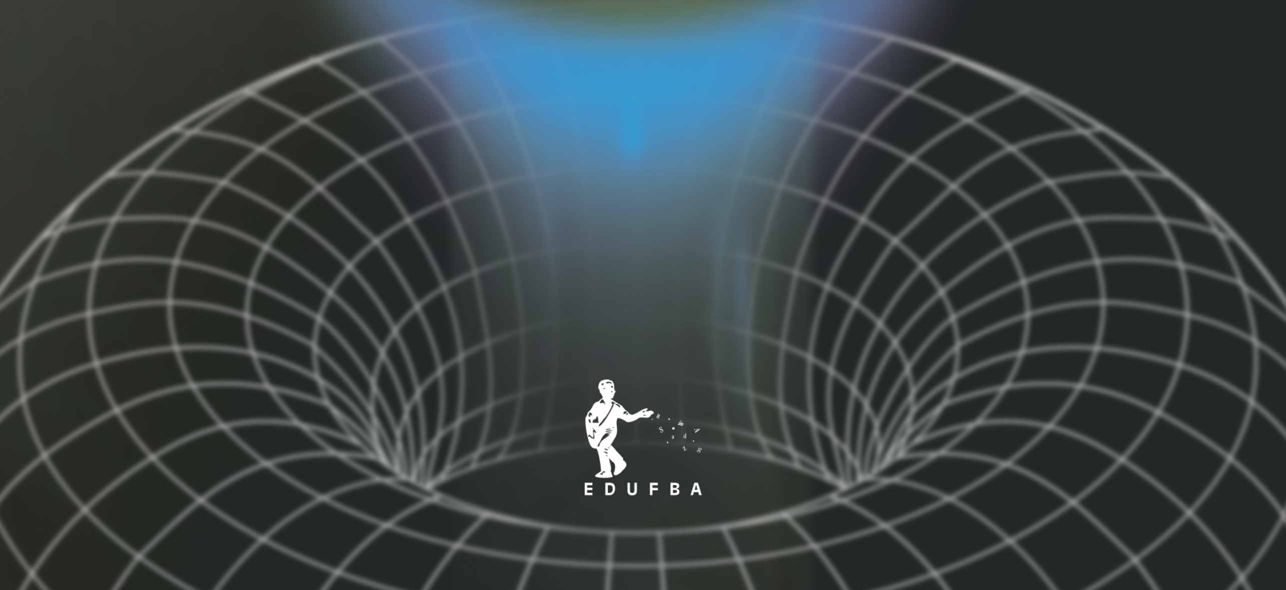
Dorel Fetcu
Ana Lucia Pinheiro

Subvariedades biharmônicas em variedades riemannianas



EDUFBA

SUBVARIEDADES BIHARMÔNICAS EM VARIEDADES RIEMANNIANAS

SUBVARIEDADES BIHARMÔNICAS EM VARIEDADES RIEMANNIANAS

Dorel Fetcu
Ana Lucia Pinheiro

Salvador
EDUFBA
2018

Projeto Gráfico capa
Diogo Balbino

Revisão
dos autores

Capa: Curva próprio-biharmônica em $\mathbb{S}^3$ (geodésico da inclinação irracional em toro de Clifford). Imagem através da projeção estereográfica. (A. Balmuş e C. Oniciuc [**3**])

Sistema de Bibliotecas – SIBI/UFBA

Fetcu, Dorel.
Subvariedades biharmônicas em variedades riemannianas / Dorel Fetcu, Ana Lucia Pinheiro.- Salvador: EDUFBA, 2018.
99 p.

ISBN: 978-85-232-1752-5

1. Variedades (Matemática). 2. Variedades riemanianas. I. Pinheiro, Ana Lucia. II. Título.

CDD – 516.373

Evandro Ramos dos Santos, SIBI/UFBA 32836061

Editora filiada à

Associação Brasileira das Editoras Universitárias
ASOCIACION DE EDITORIALES UNIVERSITARIAS DE AMERICA LATINA Y EL CARIBE
CBaL Câmara Bahiana do Livro

EDUFBA
Rua Barão de Jeremoabo, s/n, Campus de Ondina,
40170-115 Salvador-BA Brasil
Tel/fax: (71)3283-6160/3283-6164
www.edufba.ufba.br | edufba@ufba.br

Sumário

Prefácio

A noção de aplicação biharmônica entre variedades Riemannianas foi apresentada por J. Eells e J. H. Simpson, em 1964, e estudos sobre esse assunto começaram a ser publicados regularmente na década de 1980. Atualmente, a literatura sobre a teoria das subvariedades biharmônicas em variedades Riemannianas e tópicos relacionados continua crescendo. Geômetras de países como China, França, Itália, Japão, Romênia e Estados Unidos contribuiram ativamente para o desenvolvimento e divulgação desse novo assunto. Também no Brasil, existe um crescente interesse nesse campo de pesquisa. Artigos sobre a geometria dessas subvariedades tem sido elaborados por matemáticos trabalhando no IMPA, UFBA e UFSCar.

O núcleo deste livro, e também sua motivação inicial, foi um mini-curso lecionado pelo primeiro autor como parte do Programa de Verão da Posgraduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal da Bahia, em janeiro de 2013. Esse texto foi desenvolvido a partir das notas de aula desse mini-curso e destina-se, principalmente, para estudantes de Mestrado e Doutorado, mas também para pesquisadores interessados em ter um primeiro contato com a biharmonicidade.

O livro está estruturado em quatro capítulos, como segue.

O primeiro capítulo consiste de uma primeira parte introdutória, onde relembramos algumas noções e resultados fundamentais na teoria de aplicações harmônicas entre variedades Riemannianas, e também de uma segunda parte onde apresentamos a definição de aplicações biharmônicas e alguns resultados gerais sobre elas; como, por exemplo, a primeira variação da bienergia e o teorema de caracterização para subvariedades biharmônicas.

No segundo capítulo, consideramos as subvariedades biharmônicas em esferas Euclidianas e apresentamos resultados de classificação, exemplos explícitos e resultados de caracterização para tais subvariedades, com uma ênfase especial sobre curvas e hipersuperfícies.

Nos terceiro e quatro capítulos lidamos com subvariedades biharmônicas em formas espaciais Sasakianas e complexas, que são espaços com curvatura seccional não-constante. Como no caso das esferas Euclidianas no Capítulo 2, apresentamos resultados de classificação para curvas biharmônicas e outras subvariedades biharmônicas nesses espaços; exemplos explícitos de subvariedades biharmônicas (incluindo as equações explícitas das curvas de Legendre biharmônicas em formas espaciais Sasakianas); bem como outros resultados de caracterização de tais subvariedades.

As técnicas utilizadas para provar os resultados apresentados neste livro são, em geral, técnicas clássicas, usadas não somente para estudar a geometria das subvariedades biharmônicas, mas também para o estudo de outros importantes tipos de subvariedades.

De modo a descrever brevemente a geometria das formas espaciais complexas e Sasakianas, nos Capítulos 3 e 4, nossas principais referências foram as monografias [**7**] e [**47**].

O leitor interessado em aprofundar seus estudos sobre subvariedades biharmônicas e tópicos relacionados poderão consultar *The Bibliography of Biharmonic Maps* ([**46**]) bem como, por exemplo, as referências bibliográficas de [**4**] e [**39**].

Esperamos que o leitor deste livro encontre nele tanto uma útil introdução sobre a teoria das subvariedades biharmônicas, como também uma fonte de inspiração em algum trabalho futuro.

Os autores

Preface

The notion of a biharmonic map between Riemannian manifolds was suggested by J. Eells and J. H. Sampson in 1964 and studies on this subject began to be published regularly in the mid 1980s. Nowadays there is an ever growing literature devoted to the theory of biharmonic submanifolds in Riemannian manifolds and related topics. Thus, geometers from countries like China, France, Italy, Japan, Romania, or USA actively contribute to the development and spread of this rather new subject. Also in Brazil there is a growing interest in this field, papers concerned with the geometry of these submanifolds being authored by mathematicians working at IMPA, UFBA, or UFSCar.

The core of this book and also its initial motivation is a mini-course taught by the first author as a part of the Postgraduate Summer Program of the Institute of Mathematics of the Federal University of Bahia in 2013. Beginning with the lecture notes for that mini-course, we developed them into the present course that addresses mainly to Master and PhD students but also to those researchers interested in having a first taste of biharmonicity.

The book is structured into four chapters as follows.

The first chapter consists in a first introductory part where we recall some fundamental notions and results in the theory of harmonic maps between Riemannian manifolds and also a second part where we present the definition of biharmonic maps and some general results on them (as, for example, the first variation of the bienergy and the characterization theorem for biharmonic submanifolds).

The second chapter is devoted to biharmonic submanifolds in Euclidean spheres and we collected here classification results, explicit examples, and characterization results for such submanifolds, with a special emphasis on curves and hypersurfaces.

The third and the fourth chapters deal with biharmonic submanifolds in Sasakian and complex space forms, respectively, that are spaces with non constant sectional curvature. As in the case of the Euclidean sphere in Chapter 2, we present classification results for biharmonic curves and other biharmonic submanifolds in these spaces, explicit examples of biharmonic submanifolds (among them the explicit equations of biharmonic Legendre curves in Sasakian space forms), as well as other characterization results for such submanifolds.

The techniques used to prove the results presented in our book are, in general, classical ones, used not only to study the geometry of biharmonic submanifolds but for the study of other important types of submanifolds too.

In order to briefly describe the geometry of Sasakian and complex space forms in Chapters 3 and 4 our main sources were the monographs [**7**] and [**47**].

The reader interested in finding more studies on biharmonic submanifolds and related subjects should consult *The Bibliography of Biharmonic Maps* ([**46**]) as well as, for example, the works mentioned in the bibliography section in [**4**] and [**39**].

We hope that the reader of this book will find it both an useful introduction to the theory of biharmonic submanifolds and, why not, a source of inspiration in one's future work.

The authors would like to thank Professor Cezar Oniciuc for many discussions and suggestions during the preparation of this textbook.

The authors

Introdução

A teoria das aplicações harmônicas entre variedades Riemannianas, isto é, dos pontos críticos da integral energia, é um dos assuntos mais importantes e bem estudados na moderna Geometria Diferencial. Tais aplicações são caracterizadas por possuírem o campo tensorial nulo. Indicamos os belos artigos [16], de 1978, e [17], de 1988, dos pesquisadores James Eells e Luc Lemaire para um relato sobre alguns dos fatos essenciais sobre aplicações harmônicas.

Em particular, o estudo das imersões harmônicas foi e ainda é um tema de pesquisa muito interessante porque uma imersão harmônica entre duas variedades Riemannianas define uma subvariedade harmônica, que é também uma subvariedade mínima, ou seja, subvariedades harmônicas são, em certo sentido, generalizações de subvariedades mínimas. Por estarem profundamente relacionadas ao problema físico de equilíbrio de forças em uma película, e também por sua grande beleza estética, as superfícies mínimas imersas em $\mathbb{R}^3$ sempre despertaram grande interesse entre os pesquisadores da área de Geometria Diferencial e, ao longo do tempo, desempenharam papel fundamental no desenvolvimento da pesquisa na área da Geometria Diferencial e, cada vez mais, mostraram-se um ponto de contato entre outras áreas de pesquisa em Matemática, como é o caso da Análise Harmônica e Biharmônica aqui tratadas.

Existem excelentes artigos dedicados ao estudo das subvariedades mínimas, mas, sendo este livro indicado principalmente para estudantes de pós-graduação em Matemática, gostaríamos de apenas mencionar aqui o livro clássico [10], de autoria de Manfredo do Carmo como referência para a introdução do estudo das curvas mínimas, chamadas de geodésicas de uma variedade Riemanniana.

Outro importante tópico de pesquisa, muito ativo nas últimas cinco décadas, é caracterizado pelo estudo de certas equações diferencias parciais de quarta ordem, generalizando a noção de aplicações harmônicas.

James Eells e J.H. Sampson, em seus artigo [18], de 1964, sugeriram a noção de aplicação biharmônica entre variedades Riemannianas, definida como ponto crítico do funcional bienergia, que é obtido integrando o quadrado da norma do campo de tensão. A equação de Euler-Lagrange correspondente, obtida por Guo Ying Jiang [29], em 1986, é dada pelo campo de bitensão identicamente nulo. Como qualquer aplicação harmônica também é biharmônica, estamos interessados em estudar aplicações biharmônicas que não são harmônicas.

De maneira similar ao que acontece na teoria das aplicações e subvariedades harmônicas, também estuda-se o caso especial das subvariedades biharmônicas, isto é, daquelas subvariedades cuja imersão é biharmônica. Neste contexto, o campo bitensão tem uma parte tangente e uma parte normal, e como mencionamos acima, ambas as partes se anulam identicamente o que caracteriza as subvariedades biharmônicas. Quando trabalhamos no espao Euclidiano, e apenas nele, esta definição coincide com a definição proposta por Bang-Yen Chen [13], onde a subvariedade biharmônica é caracterizada pelo fato do seu campo curvatura média ser harmônico.

Embora apenas resultados de não-existência tenham sido obtidos no espaço Euclidiano, (ver, por exemplo, [**14**], [**15**], [**29**], and [**33**]), quando o espaço ambiente é não-plano, foram encontrados numerosos exemplos e resultados de caracterização e classificação para subvariedades biharmônicas em tais espaos. Por exemplo, os artigos [**4**], [**5**], [**6**], [**8**], [**9**], [**39**] tratam das subvariedades biharmônicas imersas em esferas; em formas espaciais complexas temos os artigos [**20**], [**25**], [**32**], [**43**]; em forma espaciais Sasakianas, [**21**], [**23**], [**22**], [**19**], [**25**], [**28**].

Todos esses estudos foram publicados nos últimos 30 anos, o que mostra que a teoria da biharmonicidade é atualmente um assunto bem estudado, bem como, um ativo campo de pesquisa, com muitos novos resultados sendo publicados a cada ano, contribuindo para o desenvolvimento desta área.

Esse livro é uma versão estendida das notas de aula de um curso de férias na Universidade Federal da Bahia, no verão de 2013. O pré-requisito necessário para a leitura desse material é conhecimento básico de Geometria Riemanniana e alguma familiaridade com a teoria das aplicações harmônicas.

CAPíTULO 1

Aplicações biharmônicas entre variedades Riemannianas

As aplicações biharmônicas são uma generalização da noção de aplicação harmônica e foram apresentadas inicialmente por J. Eells e J. H. Sampson, em 1964 (ver [**18**]). Neste primeiro capítulo, lembramos algumas definições e resultados gerais da teoria de aplicações harmônicas, apresentamos a noção de aplicação biharmônica e deduzimos a fórmula da primeira variação da bienergia e a fórmula da segunda variação, para o caso particular de aplicações com valores na esfera Euclidiana. Provamos também o teorema de caracterização das subvariedades biharmônicas em variedades Riemannianas.

1. Aplicações harmônicas entre variedades Riemannianas

Seja $f : (M, g) \to (N, h)$ uma aplicação suave, ou seja, de classe C^∞, onde M e N são duas variedades Riemannianas. Então, o diferencial df pode ser considerado como uma secção do fibrado $T^*M \otimes f^{-1}TN$ e, munindo $T^*M \otimes f^{-1}TN$ com a norma de Hilbert-Schmidt, temos as igualdades

$$|df|^2 = \mathrm{trace}_g\, f^*h = \sum_{i=1}^{m} h(f_*e_i, f_*e_i),$$

onde $\{e_1, \ldots, e_m\}$ é um referencial ortonormal em (M, g).

Seja $f^{-1}TN$ o fibrado pull-back de TN sobre M, ou seja, o fibrado cuja fibra sobre $p \in M$ é $T_{f(p)}N$. Então existe uma única conexão linear

$$\nabla^f_X df(Y) - \nabla^f_Y df(X) = df([X, Y]), \quad \forall\ X, Y \in C(TM).$$

Definição 1.1. A *densidade de energia* de f é a função suave dada por

$$e(f) : M \to [0, \infty); \quad e(f) = \frac{1}{2}|df|^2.$$

Definição 1.2. Seja $\Omega \subset M$ um domínio compacto. Então, a *energia* de f sobre Ω é dada por

$$E_\Omega(f) = \int_\Omega e(f)\nu_g = \frac{1}{2}\int_\Omega |df|^2\nu_g.$$

Definição 1.3. Seja $f : (M, g) \to (N, h)$ uma aplicação suave. Uma *variação suave* de f é uma aplicação suave $F : I \times M \to N$, $I = (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$, satisfazendo

$$F(0,p) = f(p), \quad \forall\, p \in M.$$

Uma variação de f será denotada por $\{f_t\}_{t\in I}$, onde $f_t(p) = F(t,p)$, $(t,p) \in I \times M$.

Agora, suponhamos que (M,g) é compacta. Neste caso, podemos enunciar a definição seguinte.

Definição 1.4. Uma aplicação suave $f : (M,g) \to (N,h)$ é chamada de *aplicação harmônica* se ela é um ponto crítico da energia $E : C^\infty(M,N) \to \mathbb{R}$, $E(f) = (1/2)\int_M |df|^2 \nu_g$, ou seja, se para todas as variações suaves $\{f_t\}_{t\in I}$ de f, tivermos

$$D_V E(f) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} E(f_t) = 0,$$

onde $V \in C(f^{-1}TN)$ é o campo variacional de $\{f_t\}_{t\in I}$, dado por

$$V(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_t(p), \quad \forall\, p \in M.$$

Proposição 1.1 (A primeira variação da energia). *Sejam $f : (M,g) \to (N,h)$ uma aplicação suave e $\{f_t\}_{t\in I}$ uma variação suave de f. Então*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} E(f_t) = -\int_M \langle \tau(f), V\rangle \nu_g,$$

onde $\langle \cdot,\cdot\rangle$ é a métrica Riemanniana definida em $f^{-1}TN$,

$$\tau(f) = \operatorname{trace} \nabla df \in C(f^{-1}TN)$$

é o campo de tensão de f e ∇df é a segunda forma fundamental de f dada por

$$\nabla df(X,Y) = \nabla^f_X df(Y) - df(\nabla^M_X Y) = \nabla^N_{df(X)} df(Y) - df(\nabla^M_X Y).$$

Teorema 1.2. *Uma aplicação $f : (M,g) \to (N,h)$ é harmônica se, e somente se, satisfaz a equação de Euler-Lagrange da energia, $\tau(f) = 0$.*

Proposição 1.3. *Sejam $f : M \to N$ e $\varphi : N \to P$ duas aplicações suaves entre variedades Riemannianas. Então*

$$\tau(\varphi \circ f) = d\varphi(\tau(f)) + \operatorname{trace} \nabla d\varphi(df, df).$$

Observação 1.1. Em coordenadas locais, podemos escrever

$$\tau(f) = \Big(-\Delta^M f^\alpha + g^{ij} (\Gamma^\alpha_{\beta\delta})^N \frac{\partial f^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial f^\delta}{\partial x^j} \Big) \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \circ f.$$

Exemplo 1.1. Uma aplicação constante é harmônica, pois é um mínimo absoluto da energia.

Exemplo 1.2. A aplicação identidade $\mathrm{Id}_M : M \to M$ é harmônica.

Exemplo 1.3. Sejam $N = \mathbb{R}^n$ o espaço Euclidiano munido da métrica usual e $f : M \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação suave, escrita como

$$f(p) = (f^1(p), \dots, f^n(p)).$$

A aplicação f é harmônica se, e somente se,

$$\Delta^M f^\alpha = 0, \quad \forall\, \alpha \in \{1, \dots, n\},$$

ou seja, se as funções f^α são harmônicas.

Exemplo 1.4. Sejam $M = (a, b)$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e N uma variedade Riemanniana. Então, uma aplicação $\gamma : (a, b) \to N$ é uma curva em N e $\tau(\gamma) = 0$ se, e somente se,

$$\frac{d^2\gamma^\alpha}{dt^2} + (\Gamma^\alpha_{\beta\delta})^N \frac{d\gamma^\beta}{dt}\frac{d\gamma^\delta}{dt} = 0.$$

Isso mostra que γ é harmônica se, e somente se, γ é uma geodésica.

Exemplo 1.5. Seja $f : (M, g) \to (N, h)$ uma imersão Riemanniana. A segunda forma fundamental de f pode ser escrita como

$$\nabla df(X, Y) = \nabla^N_X Y - \nabla^M_X Y.$$

Assim, $\tau(f) = \operatorname{trace} \nabla df = mH$, onde H é o *campo curvatura média* de f. Segue-se que f é harmônica se, e somente se, f é mínima.

2. Aplicações biharmônicas. A primeira variação da bienergia

Definição 1.5. Sejam $f : (M, g) \to (N, h)$ uma aplicação suave entre duas variedades Riemannianas, $\tau(f) = \operatorname{trace} \nabla df$ seu campo de tensão e $\Omega \subset M$ um domínio compacto. A *bienergia* de f sobre Ω é dada por

$$E_{2,\Omega}(f) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\tau(f)|^2 \nu_g.$$

Definição 1.6. Uma aplicação suave $f : (M, g) \to (N, h)$ é chamada *aplicação biharmônica* se é um ponto crítico da bienergia, para todos os domínios compactos $\Omega \subset M$.

Antes de enunciar o primeiro resultado principal deste livro, enunciaremos o Teorema da Divergência.

Teorema 1.4 (Teorema da Divergência). *Sejam $\Omega \subset M$ um domínio compacto, com fronteira $\partial\Omega$ suave, e ρ uma 1-forma. Então,*

$$\int_\Omega \operatorname{trace} \nabla \rho \nu_g = \int_{\partial\Omega} \rho(\eta) \nu_{i^* g},$$

onde η é o campo vetorial unitário normal à $\partial\Omega$ apontando para o exterior de $\partial\Omega$ em M.

PROPOSIÇÃO 1.5 (A primeira variação da bienergia ([**29**])). *Sejam $f : (M,g) \to (N,h)$ uma aplicação suave e $\{f_t\}_{t\in I}$, com $I = (-\epsilon, \epsilon)$, uma variação suave de f, tal que $f_t = f$ em $M\backslash \mathrm{int}(\Omega)$, onde $\Omega \subset M$ é um domínio compacto. Então,*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} E_{2,\Omega}(f_t) = \int_\Omega \langle \tau_2(f), V\rangle \nu_g,$$

onde V é o campo variacional de $\{f_t\}_{t\in I}$ e

$$\tau_2(f) = -\Delta^f \tau(f) - \mathrm{trace}\, R^N(df, \tau(f))df$$

é o campo de bitensão de f.

DEMONSTRAÇÃO. Inicialmente, lembramos que $\{f_t\}_{t\in I}$ é uma aplicação suave $F : I \times M \to N$ satisfazendo

$$\begin{cases} F(t,p) = f_t(p), \quad \forall\ (t,p) \in I \times M \\ F(0,p) = f_0(p) = f(p), \quad \forall\ p \in M \end{cases}$$

e que o campo de variação $V \in C(f^{-1}TN)$ é dado por

$$V(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_t(p) = dF(0,p)\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big) \in T_{f(p)}N, \quad p \in M.$$

Agora, temos

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} E_{2,\Omega}(f_t) &= \tfrac{1}{2}\textstyle\int_\Omega \Big\{ \tfrac{\partial}{\partial t}\langle \tau(f_t), \tau(f_t)\rangle \Big\}\big|_{t=0}\nu_g \\ &= \textstyle\int_\Omega \langle \nabla^F_{\partial/\partial t}\tau(f_t), \tau(f_t)\rangle\big|_{t=0}\nu_g. \end{aligned}$$

Seja $\{E_1, \ldots, E_m\}$ um referencial ortonormal geodésico em $p \in \Omega$, ou seja, $\{E_1, \ldots, E_m\}$ é um referencial ortonormal tal que $(\nabla_{E_i} E_j)_p = 0$, $\forall\ i,j \in \{1, \ldots, m\}$. Então,

$$\begin{aligned} \nabla^F_{\partial/\partial t}\tau(f_t) &= \nabla^F_{\partial/\partial t}\Big(\textstyle\sum_{i=1}^m \nabla df(E_i, E_i)\Big) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^m \{\nabla^F_{\partial/\partial t}((\nabla_{E_i} dF)E_i)\} \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^m \{\nabla^F_{\partial/\partial t}\nabla_{E_i} dF(E_i) - \nabla^F_{\partial/\partial t} dF(\nabla_{E_i}E_i)\}. \end{aligned}$$

Considere $Z \in C(TM)$ um campo de vetores. Como $[\partial/\partial t, Z] = 0$, temos

$$\nabla^F_{\partial/\partial t} dF(Z) = \nabla^F_Z dF(\partial/\partial t) + dF([\partial/\partial t, Z]) = \nabla^F_Z dF(\partial/\partial t).$$

Então, em p, obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla^F_{\partial/\partial t}\tau(f_t) &= \textstyle\sum_{i=1}^m\{\nabla^F_{\partial/\partial t}\nabla_{E_i}dF(E_i) - \nabla^F_{\nabla_{E_i}E_i}dF(\partial/\partial t)\}\\
&= \textstyle\sum_{i=1}^m \nabla^F_{\partial/\partial t}\nabla_{E_i}dF(E_i)\\
&= \textstyle\sum_{i=1}^m\{\nabla^F_{E_i}\nabla^F_{\partial/\partial t}dF(E_i) + \nabla^F_{[\partial/\partial t,E_i]}dF(E_i)\\
&\quad +R^F(\partial/\partial t, E_i)dF(E_i)\}\\
&= \textstyle\sum_{i=1}^m\{\nabla^F_{E_i}\nabla^F_{E_i}dF(\partial/\partial t) + R^N(dF(\partial/\partial t), dF(E_i))dF(E_i)\}.
\end{aligned}$$

Se μ é o campo vetorial unitário normal à $\partial\Omega$ em M e $i : \partial\Omega \to M$ é a inclusão canônica, podemos aplicar o Teorema da Divergência para $\rho = \langle\tau(f), \nabla V\rangle$ e $\theta = \langle\nabla\tau(f), V\rangle$ e obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}E_{2,\Omega}(f_t) &= \textstyle\int_\Omega\langle \operatorname{trace}\nabla^2 V - \operatorname{trace} R^N(df, V)df, \tau(f)\rangle\nu_g\\
&= \textstyle\int_\Omega\langle\nabla V, d\tau(f)\rangle\nu_g - \int_{\partial\Omega}\langle\nabla_\mu V, \tau(f)\rangle\nu_{i^*g}\\
&\quad - \textstyle\int_\Omega\langle V, \operatorname{trace} R^N(df, \tau(f))df\rangle\nu_g\\
&= \textstyle\int_\Omega\langle V, \operatorname{trace}\nabla^2\tau(f)\rangle\nu_g + \int_{\partial\Omega}\langle V, \nabla_\mu\tau(f)\rangle\nu_{i^*g}\\
&\quad - \textstyle\int_\Omega\langle V, \operatorname{trace} R^N(df, \tau(f))df\rangle\nu_g\\
&= \textstyle\int_\Omega\langle V, \tau_2(f)\rangle\nu_g.
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.6. *Uma aplicação suave $f : (M, g) \to (N, h)$ é biharmônica se, e somente se, satisfaz a equação de Euler-Lagrange da bienergia (ou a equação biharmônica)*

$$\tau_2(f) = -\Delta^f\tau(f) - \operatorname{trace} R^N(df, \tau(f))df = 0. \tag{1.1}$$

Observação 1.2. Em coordenadas locais, a equação biharmônica é um sistema não-linear de EDPs, de ordem 4.

Observação 1.3. Uma aplicação f é biharmônica se, e somente se, $\tau(f) \in \ker J^f$, onde

$$J^f : C(f^{-1}TN) \to C(f^{-1}TN), \quad J^f(V) = \Delta^f V + \operatorname{trace} R^N(df, V)df,$$

é o operador de Jacobi corespondente a f. Como J^f é linear, segue-se que todas as aplicações harmônicas são biharmônicas. Além disso, pode ser mostrado que todas as aplicações harmônicas são mínimas absolutas da bienergia.

Definição 1.7. Uma aplicação que é biharmônica e não é harmônica é chamada *aplicação próprio-biharmônica.*

Exemplo 1.6. Seja $f : (M, g) \to \mathbb{R}^n$, $f(p) = (f^1(p), \ldots, f^n(p))$, uma aplicação suave. Nesta situação, temos

$$\tau(f) = -\Delta f = -(\Delta f^1, \ldots, \Delta f^n).$$

Além disso, a bienergia é dada por

$$E_{2,\Omega}(f) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\Delta f|^2 \nu_g$$

e a equação biharmônica é

$$\tau_2(f) = \Delta^2 f = (\Delta^2 f^1, \ldots, \Delta^2 f^n) = 0.$$

Portanto, f é biharmônica se, e somente se, suas funções componentes são biharmônicas.

Exemplo 1.7. As aplicações polinomiais, de grau 2 ou 3, entre espaços Euclidianos são biharmônicas.

Exemplo 1.8. Um método para obter aplicações biharmônicas é dada pela chamada propriedade de Almansi ([**1**]). Com efeito, se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação harmônica e $r : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é a distância à origem, dada por

$$r(x^1, \ldots, x^m) = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^m)^2},$$

então $r^2 f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é biharmônica, ou seja,

$$\Delta f = 0$$

se, e somente se,

$$\Delta^2(r^2 f) = 0.$$

Por exemplo, a aplicação

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f(z, w) = (|z|^2 + |w|^2)(|z|^2 - |w|^2, 2z\bar{w}),$$

obtida aplicando a propriedade de Almansi sobre a aplicação de Hopf

$$\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(z, w) = (|z|^2 - |w|^2, 2z\bar{w}),$$

é próprio-biharmônica.

Exemplo 1.9. Sejam $\gamma : I \to N$ uma geodésica e $t : J \to I$, $t = t(s)$, $I, J \subset \mathbb{R}$, uma mudança de parâmetro. Então $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ t : J \to N$ é próprio-biharmônica se, e somente se,

$$\frac{d^4 t}{ds^4} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2 t}{ds^2} \neq 0.$$

Definição 1.8. Seja $i : M \to N$ uma subvariedade de uma variedade Riemanniana. Então, M é chamada uma *subvariedade biharmônica* se a imersão i é uma aplicação biharmônica. Se i é próprio-biharmônica, então M é uma subvariedade próprio-biharmônica.

Exemplo 1.10 (Subvariedades biharmônicas em espaço Euclidiano). B.-Y. Chen foi o primeiro a estudar, [**12**], as imersões $f : M \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo

$$\Delta H = \lambda H, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

onde H é o campo curvatura média de M. Como $\Delta f = -mH$ (fórmula de Beltrami), se $\lambda = 0$, então a condição $\Delta H = 0$ pode ser escrita como $\Delta^2 f = 0$. Neste caso, $\tau(f) = mH$ e $\tau_2(f) = -m\Delta H$.

Concluimos assim que M é biharmônica se, e somente se, o campo curvatura média H é harmônico. Esta é a biharmonicidade no sentido de Chen.

Exemplo 1.11. Sejam $\gamma : I \to (N, h)$ uma curva parametrizada por comprimento de arco e $T = \gamma'$. Então, $\tau(\gamma) = \nabla_T T$ e a equação biharmônica pode ser escrita como

$$\nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T = 0. \tag{1.2}$$

A curva γ é chamada uma *curva de Frenet de ordem de osculação* r, $1 \leq r \leq n$, se existem r campos de vetores ortonormais $E_1 = T$, E_2, ..., E_r ao longo de γ, tais que

$$\nabla_T E_1 = \kappa_1 E_2, \quad \nabla_T E_2 = -\kappa_1 E_1 + \kappa_2 E_3, \ldots, \nabla_T E_r = -\kappa_{r-1} E_{r-1},$$

onde as funções curvaturas de γ, $\kappa_1, \ldots, \kappa_{r-1}$, são positivas. Uma *geodésica* é uma curva de Frenet de ordem de osculação 1; um *círculo* é uma curva de Frenet de ordem de osculação 2, com κ_1 constante; uma *hélice de ordem* r, $r \geq 3$, é uma curva de Frenet de ordem de osculação r, com $\kappa_1, ..., \kappa_{r-1}$ constantes; uma hélice de ordem 3 é chamada simplesmente *hélice*.

Agora, usando a equação (1.2), segue-se que uma curva de Frenet de ordem de osculação r é próprio-biharmônica se, e somente se,

$$\begin{cases} \kappa_1 = \text{constante} \neq 0 \\ \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = R(T, E_2, T, E_2) \\ \kappa_2' = -R(T, E_2, T, E_3) \\ \kappa_2 \kappa_3 = -R(T, E_2, T, E_4) \\ R(T, E_2, T, E_i) = 0, \quad \forall\, i \in \{5, \ldots, r\} \\ R(T, E_2, T, U) = 0, \quad \forall\, U \in (L[T, E_2, \ldots, E_r])^{\perp}. \end{cases} \tag{1.3}$$

Demonstração. Um cálculo direto mostra que a equação biharmônica pode ser escrita como

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T \\ &= -3\kappa_1\kappa_1' T + (\kappa_1'' - \kappa_1^3 - \kappa_1\kappa_2^2)E_2 + (2\kappa_1'\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2')E_3 \\ &\quad +\kappa_1\kappa_2\kappa_3 E_4 - \kappa_1 R(T, E_2)T, \end{aligned}$$

o que é equivalente a (1.3). □

3. O teorema de caracterização das subvariedades biharmônicas

TEOREMA 1.7 ([**6**]). *Uma subvariedade M^m em uma variedade Riemanniana N, com tensor de curvatura R^N, é biharmônica se, e somente se,*

$$\begin{cases} \Delta^{\perp} H + \operatorname{trace} \sigma(\cdot, A_H \cdot) + \operatorname{trace}(R^N(\cdot, H)\cdot)^{\perp} = 0 \\ \frac{m}{2} \operatorname{grad} |H|^2 + 2 \operatorname{trace} A_{\nabla^{\perp}_{\cdot} H}(\cdot) + 2 \operatorname{trace}(R^N(\cdot, H)\cdot)^{\top} = 0, \end{cases}$$

onde H é o campo curvatura média, σ é a segunda forma fundamental e A é o operador de Weingarten de M, dados pelas equações de Gauss e Weingarten

$$\nabla^N_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X, Y), \quad \nabla^N_X V = -A_V X + \nabla^{\perp}_X V,$$

para todos $X, Y \in C(TM)$ e $V \in C(NM)$.

DEMONSTRAÇÃO. Os campos de tensão e bitensão da inclusão canônica $i : M \to N$ são

$$\tau(i) = mH \quad \text{e} \quad \tau_2(i) = -m(\Delta H + \operatorname{trace} R^N(\cdot, H)\cdot),$$

respectivamente.

Portanto, M é biharmônica se, e somente se,

$$\Delta H + \operatorname{trace} R^N(\cdot, H)\cdot = 0.$$

Agora, seja $\{E_1, \ldots, E_m\}$ um referencial ortonormal que é geodésico em um ponto $p \in M$. Então, em p, temos

$$\begin{aligned} \Delta H &= -\textstyle\sum_{i=1}^m \nabla^N_{E_i} \nabla^N_{E_i} H = -\sum_{i=1}^m \nabla^N_{E_i} (\nabla^{\perp}_{E_i} H - A_H E_i) \\ &= -\textstyle\sum_{i=1}^m \{\nabla^{\perp}_{E_i} \nabla^{\perp}_{E_i} H - A_{\nabla^{\perp}_{E_i} H} E_i - \nabla_{E_i} A_H E_i - \sigma(E_i, A_H E_i)\} \\ &= \Delta^{\perp} H + \operatorname{trace} \sigma(\cdot, A_H \cdot) + \operatorname{trace} A_{\nabla^{\perp}_{(\cdot)} H}(\cdot) + \operatorname{trace} \nabla A_H. \end{aligned}$$

Além disso, em p, temos

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^m \nabla_{E_i} A_H(E_i) &= \textstyle\sum_{i,j} \langle \nabla_{E_i} A_H(E_i), E_j \rangle E_j = \sum_{i,j} E_i(\langle A_H E_i, E_j \rangle) E_j \\ &= \textstyle\sum_{i,j} E_i(\langle \sigma(E_i, E_j), H \rangle) E_j = \sum_{i,j} E_i(\langle \nabla^N_{E_j} E_i, H \rangle) E_j \\ &= \textstyle\sum_{i,j} \{\langle \nabla^N_{E_i} \nabla^N_{E_j} E_i, H \rangle + \langle \nabla^N_{E_j} E_i, \nabla^N_{E_i} H \rangle\} E_j \\ &= \textstyle\sum_{i,j} \{\langle \nabla^N_{E_i} \nabla^N_{E_j} E_i, H \rangle + \langle \sigma(E_i, E_j), \nabla^{\perp}_{E_i} H \rangle\} E_j \\ &= \textstyle\sum_{i,j} \langle \nabla^N_{E_i} \nabla^N_{E_j} E_i, H \rangle E_j + \sum_i A_{\nabla^{\perp}_{E_i} H} E_i \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^m \langle \nabla^N_{E_i}\nabla^N_{E_j}E_i, H\rangle &= \textstyle\sum_{i=1}^m \langle R^N(E_i,E_j)E_j + \nabla^N_{E_j}\nabla^N_{E_i}E_i \\
&\quad + \nabla^N_{[E_i,E_j]}E_i, H\rangle \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^m (\langle R^N(E_i,E_j)E_j, H\rangle + \langle \nabla^N_{E_j}\sigma(E_i,E_i), H\rangle) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^m \langle R^N(E_j,H)E_j, E_i\rangle + m\langle \nabla^N_{E_j}H, H\rangle \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^m \langle R^N(E_j,H)E_j, E_i\rangle + \frac{m}{2}E_j(|H|^2).
\end{aligned}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \{A_{\nabla^\perp_{E_i}H}E_i + \nabla_{E_i}A_H E_i\} =& 2\operatorname{trace} A_{\nabla^\perp_{(\cdot)}H}(\cdot) + \frac{m}{2}\operatorname{grad}(|H|^2) \\
&+ (\operatorname{trace} R(\cdot,H)\cdot)^\top.
\end{aligned}$$

Concluimos que M é biharmônica se, e somente se,

$$-\Delta^\perp H - \operatorname{trace}\sigma(\cdot, A_H\cdot) - (\operatorname{trace} R(\cdot,H)\cdot)^\perp =$$

$$2\operatorname{trace} A_{\nabla^\perp_{(\cdot)}H}\cdot + \tfrac{m}{2}\operatorname{grad}(|H|^2) + 2(\operatorname{trace} R(\cdot,H)\cdot)^\top.$$

Um termo desta equação é tangente e o outro é normal, o que conclui a demonstração. □

4. Resultados de não-existência

Teorema 1.8 ([**29**]). *Sejam (M,g) uma variedade compacta e orientável e (N,h) uma variedade com curvatura Riemanniana* $\mathrm{Riem}^N \leq 0$. *Então, uma aplicação $f:(M,g)\to(N,h)$ é biharmônica se, e somente se, é harmônica.*

Demonstração. Suponhamos que $f:(M,g)\to(N,h)$ é uma aplicação biharmônica. Então, $\tau_2(f)=0$, o que implica

$$\langle \Delta\tau(f), \tau(f)\rangle = \sum_{i=1}^m \langle R^N(\tau(f), df(E_i))df(E_i), \tau(f)\rangle \leq 0,$$

onde $\{E_1,\ldots,E_m\}$ é um referencial ortonormal em M. Substituindo essa expressão na fórmula de Weitzenböck

$$\frac{1}{2}\Delta|\tau(f)|^2 = \langle \Delta\tau(f), \tau(f)\rangle - |\nabla\tau(f)|^2,$$

obtemos $\Delta|\tau(f)|^2 \leq 0$. Como M é compacta, utilizando o Princípio de Máximo, temos que $|\tau(f)|^2$ é constante e, então, $\nabla\tau(f)=0$ e $\langle\Delta\tau(f),\tau(f)\rangle = 0$.

Finalmente, temos que

$$0 = \int_M \langle \nabla\tau(f), df\rangle \nu_g = -\int_M \langle \tau(f), \nabla df\rangle \nu_g = -\int_M |\tau(f)|^2 \nu_g,$$

ou seja, $\tau(f) = 0$. □

TEOREMA 1.9 ([**37**]). *Seja $i : (M,g) \to (N,h)$ uma imersão Riemanniana com curvatura média constante. Se $\mathrm{Riem}^N \leq 0$, então a imersão i é biharmônica se, e somente se, é harmônica.*

DEMONSTRAÇÃO. Como $i : M \to N$ é uma imersão Riemanniana, temos que

$$\langle df(X), \tau(f)\rangle = m\langle df(X), H\rangle = 0, \quad \forall X \in C(TM), \tag{1.4}$$

e a condição $|H| =$ constante é equivalente a $|\tau(f)|^2 =$ constante.

Se $\tau_2(f) = 0$, a fórmula de Weitzenböck e a condição $\mathrm{Riem}^N \leq 0$ implicam novamente, como na demonstração do teorema anterior, que $\nabla\tau(f) = 0$.

Em seguida, seja $\{E_1, \ldots, E_m\}$ um referencial ortonormal em M. De (1.4), como $\nabla\tau(f) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} |\tau(f)|^2 &= \langle \tau(f), \sum_{i=1}^m \nabla df(E_i, E_i)\rangle = \sum_{i=1}^m \langle \tau(f), \nabla_{E_i} df(E_i)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \{E_i(\langle \tau(f), df(E_i)\rangle) - \langle df(E_i), \nabla_{E_i}\tau(f)\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Existem muitos resultados de não-existência de subvariedades próprio-biharmônicas em espaço Euclidiano. Eles podem ser agrupados como feito no teorema enunciado a seguir, que é apresentado sem demonstração.

TEOREMA 1.10 ([**14, 15, 26**]). *Para cada uma das seguintes classes de subvariedades em espaço Eulidiano $\mathbb{R}^n$, a biharmonicidade é equivalente a minimalidade:*

- *curvas;*
- *subvariedades de tipo finito*;
- *subvariedades com curvatura média constante*;
- *subvariedades pseudo-umbilical com dimensão $m \neq 4$*;
- *hipersuperfícies com menos de três curvaturas principais distintas*;
- *hipersuperfícies conformamente planas*;
- *hipersuperfícies em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$.*

Todos estes resultados levaram a formulação da seguinte conjetura, devida a Chen.

Conjetura de Chen. Todas as imersões Riemannianas biharmônicas em $\mathbb{R}^n$ são mínimas.

5. A segunda variação da bienergia

Nesta seção, vamos apresentar a fórmula da segunda variação da bienergia para aplicações biharmônicas com valores na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$. Esse resultado foi obtido em [**38**] e também foi provado, usando uma técnica diferente, em [**29**].

Seja $\phi : (M, g) \to (N, h)$ uma aplicação biharmônica entre duas variedades Riemannianas, onde M é compacta e orientável, e seja $\{\phi_{s,t}\}_{s,t\in\mathbb{R}}$ uma variação suave, isto é, uma aplicação suave Φ definida por

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M \to \mathbb{S}^n, \quad \Phi(s, t, p) = \phi_{s,t}(p),$$

tal que $\Phi(0, 0, p) = \phi_{0,0}(p)$, $\forall\ p \in M$.

Os campos variacionais de vetores correspondentes são V e W, seções em $\phi^{-1}T\mathbb{S}^n$, dadas pelas igualdades

$$V(p) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\phi_{s,0}(p) = d\Phi_{(0,0,p)}\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big) \in T_{\phi(p)}\mathbb{S}^n$$

e

$$W(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\phi_{0,t}(p) = d\Phi_{(0,0,p)}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big) \in T_{\phi(p)}\mathbb{S}^n.$$

A Hessiana da bienergia E_2, em seu ponto crítico ϕ, é definida por

$$H(E_2)_\phi(V, W) = \frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\Big|_{(s,t)=(0,0)} E_2(\phi_{s,t}).$$

Teorema 1.11 ([**29, 38**]). *Seja $\phi : (M, g) \to \mathbb{S}^n$ uma aplicação biharmônica. Então, a Hessiana da bienergia E_2 em ϕ é*

$$H(E_2)_\phi(V, W) = \int_M \langle I(V), W\rangle \nu_g,$$

onde

$$\begin{aligned}
I(V) =&\Delta^2 V + \Delta\{\mathrm{trace}\langle V, d\phi\cdot\rangle d\phi\cdot - |d\phi|^2 V\} \\
&+ 2\langle d\tau(\phi), d\phi\rangle V + |\tau(\phi)|^2 V \\
&- 2\,\mathrm{trace}\langle V, d\tau(\phi)\cdot\rangle d\phi\cdot - 2\,\mathrm{trace}\langle \tau(\phi), dV\cdot\rangle d\phi\cdot \\
&- \langle \tau(\phi), V\rangle \tau(\phi) + \mathrm{trace}\langle d\phi\cdot, \Delta V\rangle d\phi\cdot \\
&+ \mathrm{trace}\langle d\phi\cdot, \mathrm{trace}\langle V, d\phi\cdot\rangle d\phi\cdot\rangle d\phi\cdot \\
&- 2|d\phi|^2\,\mathrm{trace}\langle d\phi\cdot, V\rangle d\phi\cdot \\
&+ 2\langle dV, d\phi\rangle \tau(\phi) - |d\phi|^2 \Delta V + |d\phi|^4 V.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Demonstração. Começamos calculando $\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}E_2(\phi_{s,t})$ e encontramos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}E_2(\phi_{s,t}) &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\int_M |\tau(\phi_{s,t})|^2\nu_g \\
&= \int_M \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\tau(\phi_{s,t}), \tau(\phi_{s,t})\rangle\Big|_{t=0}\nu_g.
\end{aligned}$$

Para obter a expressão de $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\tau(\phi_{s,t})$, consideramos um campo geodésico $\{X_i\}_{i=1}^m$ num ponto $p \in M$ e obtemos

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\tau(\phi_{s,t}) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\Big\{\textstyle\sum_{i=1}^m(\nabla_{X_i}d\phi_{s,t}(X_i) - d\phi_{s,t}(\nabla_{X_i}X_i))\Big\}\\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\Big\{\textstyle\sum_{i=1}^m(\nabla_{X_i}d\Phi_s(X_i) - d\Phi_s(\nabla_{X_i}X_i))\Big\},\end{aligned}$$

onde $\Phi_s(t,p) = \Phi(s,t,p)$. Como

$$\nabla_{\widetilde{X}}d\Phi_s(\widetilde{Y}) - \nabla_{\widetilde{Y}}d\Phi_s(\widetilde{X}) = d\Phi_s([\widetilde{X},\widetilde{Y}]), \quad \forall\ \widetilde{X},\widetilde{Y} \in C(\Phi_s^{-1}T\mathbb{S}^n),$$

em p e para $t = 0$, temos

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\tau(\phi_{s,t}) &= \textstyle\sum_{i=1}^m(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{X_i}d\Phi_s(X_i) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}d\Phi_s(\nabla_{X_i}X_i))\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^m\Big\{\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{X_i}d\Phi_s(X_i) - \nabla_{\nabla_{X_i}X_i}d\Phi_s\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)\\ &\quad -d\phi_s\Big(\Big[\frac{\partial}{\partial t},\nabla_{X_i}X_i\Big]\Big)\Big\}\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^m\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{X_i}d\Phi_s(X_i)\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^m\Big\{R^{\mathbb{S}^n}\Big(d\Phi_s\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big),d\Phi_s(X_i)\Big)d\Phi_s(X_i)\\ &\quad +\nabla_{X_i}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}d\Phi_s(X_i) + \nabla_{[\frac{\partial}{\partial t},X_i]}d\Phi_s(X_i)\Big\}\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^m\Big\{R^{\mathbb{S}^n}(W_s,d\Phi_s(X_i))d\Phi_s(X_i) + \nabla_{X_i}\Big(\nabla_{X_i}d\Phi_s\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)\\ &\quad +d\Phi_s\Big(\Big[\frac{\partial}{\partial t},X_i\Big]\Big)\Big)\Big\}\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^m R^{\mathbb{S}^n}(W_s,d\Phi_s(X_i))d\Phi_s(X_i) + \sum_{i=1}^m\nabla_{X_i}\nabla_{X_i}W_s\\ &= -\Delta W_s - \textstyle\sum_{i=1}^m R^{\mathbb{S}^n}(d\Phi_s(X_i),W_s)d\Phi_s(X_i),\end{aligned}$$

onde

$$W_s(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\phi_{s,t}(p) = d\Phi_{(s,0,p)}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big), \quad W_s \in C(\phi_{s,0}^{-1}T\mathbb{S}^n), \quad W_0 = W.$$

Daqui, temos que $\frac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0}E_2(\phi_{s,t})$ é dada por

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}E_2(\phi_{s,t}) &= \textstyle\int_M\langle -\Delta W_s - \operatorname{trace} R^{\mathbb{S}^n}(d\phi_{s,0}\cdot,W_s)d\phi_{s,0}\cdot,\tau(\phi_{s,0})\rangle\nu_g\\ &= \textstyle\int_M\langle -\Delta\tau(\phi_{s,0}) - \operatorname{trace} R^{\mathbb{S}^n}(d\phi_{s,0}\cdot,\tau(\phi_{s,0}))d\phi_{s,0}\cdot,W_s\rangle\nu_g.\end{aligned}$$

Como ϕ é biharmônica, segue-se, da equação biharmônica (1.1), que

$$\begin{aligned} H(E_2)_\phi(V,W) &= \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \int_M \langle -\Delta\tau(\phi_{s,0}) \\ &\quad - \operatorname{trace} R^{\mathbb{S}^n}(d\phi_{s,0}\cdot, \tau(\phi_{s,0}))d\phi_{s,0}\cdot, W_s\rangle \nu_g \\ &= \int_M \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\{-\Delta\tau(\phi_{s,0}) \\ &\quad - \operatorname{trace} R^{\mathbb{S}^n}(d\phi_{s,0}\cdot, \tau(\phi_{s,0}))d\phi_{s,0}\cdot\}\big|_{s=0}, W\rangle \nu_g \\ &= \int_M \langle I(V), W\rangle \nu_g, \end{aligned}$$

onde

$$I(V) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\{-\Delta\tau(\phi_{s,0}) - \operatorname{trace} R^{\mathbb{S}^n}(d\phi_{s,0}\cdot, \tau(\phi_{s,0}))d\phi_{s,0}\cdot\}\big|_{s=0}. \tag{1.6}$$

A seguir, como

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\tau(\phi_{s,0})\big|_{s=0} = -\Delta V - \operatorname{trace} R^{\mathbb{S}^n}(d\phi\cdot, V)d\phi\cdot$$

e

$$\operatorname{trace} R^{\mathbb{S}^n}(d\phi\cdot, V)d\phi\cdot = \operatorname{trace}\langle V, d\phi\cdot\rangle d\phi\,\cdot - |d\phi|^2 V,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\{-\Delta\tau(\phi_{s,0})\}|_{s=0} =& \Delta^2 V + \Delta\{\operatorname{trace}\langle V, d\phi\cdot\rangle d\phi\,\cdot - |d\phi|^2 V\} \\ & + 2\langle d\tau(\phi), d\phi\rangle V + |\tau(\phi)|^2 V \\ & + \operatorname{trace}\langle \tau(\phi), d\phi\cdot\rangle dV\cdot \\ & - 2\operatorname{trace}\langle V, d\tau(\phi)\cdot\rangle d\phi\cdot \\ & - \operatorname{trace}\langle \tau(\phi), dV\cdot\rangle d\phi\,\cdot - \langle \tau(\phi), V\rangle \tau(\phi) \end{aligned} \tag{1.7}$$

e

$$\begin{aligned} &\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\{-\operatorname{trace} R^{\mathbb{S}^n}(d\phi_{s,0}\cdot, \tau(\phi_{s,0}))d\phi_{s,0}\cdot\}|_{s=0} = \\ &- \operatorname{trace}\langle \tau(\phi), dV\cdot\rangle d\phi\,\cdot + \operatorname{trace}\langle d\phi\cdot, \Delta V\rangle d\phi\cdot \\ &+ \operatorname{trace}\langle d\phi\cdot, \operatorname{trace}\langle V, d\phi\cdot\rangle d\phi\cdot\rangle d\phi\,\cdot - |d\phi|^2 \operatorname{trace}\langle d\phi\cdot, V\rangle d\phi\cdot \\ &- \operatorname{trace}\langle \tau(\phi), d\phi\cdot\rangle dV\,\cdot + 2\langle dV, d\phi\rangle \tau(\phi) - |d\phi|^2 \Delta V \\ &- |d\phi|^2 \operatorname{trace}\langle V, d\phi\cdot\rangle d\phi\,\cdot + |d\phi|^4 V. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Substituindo (1.7) e (1.8) em (1.6), obtemos (1.5). □

Corolário 1.12 ([**38**]). *Seja $\phi : (M,g) \to \mathbb{S}^n$ uma imersão harmônica. Então I é um operador simétrico, positivo semi-definido e*

$$\operatorname{Ker} I = \{V \in C(\phi^{-1}T\mathbb{S}^n) : \Delta V = mV - V^\top\}, \tag{1.9}$$

onde $V = V^\top + V^\perp$, $V^\top \in C(TM)$ e $V^\perp \in C(NM)$.

Demonstração. Da equação (1.5), segue-se que

$$I(V) = \Delta^2 V - 2m\Delta V + m^2 V + \Delta V^\top + (\Delta V)^\top + (1-2m)V^\top.$$

Primeiro, vamos mostrar que I é simétrico, ou seja, $(I(V), W) = (V, I(W))$, onde $V, W \in C(\phi^{-1}T\mathbb{S}^n)$ e

$$(V, W) = \int_M \langle V, W\rangle \nu_g$$

é o produto interno usual no espaço vetorial $C(\phi^{-1}T\mathbb{S}^n)$. Como Δ é um operador simétrico e $\langle V^\top, W\rangle = \langle W^\top, V\rangle$, temos que mostrar que

$$\int_M \langle \Delta V^\top + (\Delta V)^\top, W\rangle \nu_g = \int_M \langle \Delta W^\top + (\Delta W)^\top, V\rangle \nu_g.$$

Sendo

$$\begin{aligned}\textstyle\int_M \langle \Delta V^\top, W\rangle \nu_g &= \textstyle\int_M \langle V^\top, \Delta W\rangle \nu_g = \int_M \langle V^\top, (\Delta W)^\top\rangle \nu_g \\ &= \textstyle\int_M \langle V, (\Delta W)^\top\rangle \nu_g\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\textstyle\int_M \langle (\Delta V)^\top, W\rangle \nu_g &= \textstyle\int_M \langle (\Delta V)^\top, W^\top\rangle \nu_g = \int_M \langle \Delta V, W^\top\rangle \nu_g \\ &= \textstyle\int_M \langle V, \Delta W^\top\rangle \nu_g,\end{aligned}$$

segue-se que I é um operador simétrico.

Em seguida, vamos mostrar que I é positivo semi-definido, ou seja,

$$(I(V), V) \geq 0.$$

Temos que

$$\int_M \langle \Delta V^\top, V\rangle \nu_g = \int_M \langle (\Delta V)^\top, V\rangle \nu_g$$

e

$$\begin{aligned} I(V) &= \Delta^2 V^\top + \Delta^2 V^\perp - 2m\Delta V^\top - 2m\Delta V^\perp + m^2 V^\top + m^2 V^\perp \\ &\quad + \Delta V^\top + (\Delta V)^\top + (1-2m)V^\top.\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
(I(V),V) &= \textstyle\int_M \{\langle \Delta^2 V^\top, V\rangle + 2(1-m)\langle \Delta V^\top, V\rangle + (m-1)^2\langle V^\top, V\rangle \\
&\quad + \langle \Delta^2 V^\perp, V\rangle - 2m\langle \Delta V^\perp, V\rangle + m^2\rangle V^\perp, V\rangle\}\nu_g \\
&= \textstyle\int_M \{\langle \Delta^2 V^\top, V^\top\rangle + 2(1-m)\langle \Delta V^\top, V^\top\rangle + (m-1)^2|V^\top|^2 \\
&\quad + \langle \Delta^2 V^\perp, V^\perp\rangle - 2m\langle \Delta V^\perp, V^\perp\rangle + m^2|V^{perp}|^2 \\
&\quad + \langle \Delta^2 V^\top, V^\perp\rangle + 2(1-m)\langle \Delta V^\top, V^\perp\rangle \\
&\quad + \langle \Delta^2 V^\perp, V^\top\rangle - 2m\langle \Delta V^\perp, V^\top\rangle\}\nu_g \\
&= \textstyle\int_M \{|\Delta V^\top + (1-m)V^\top|^2 + |\Delta V^\perp - mV^\perp|^2 \\
&\quad + 2\langle \Delta V^\top, \Delta V^\perp\rangle + 2(1-2m)\langle \Delta V^\top, V^\perp\rangle\}\nu_g \\
&= \textstyle\int_M |\Delta V^\top + (1-m)V^\top + \Delta V^\perp - mV^\perp|^2\nu_g \\
&= \textstyle\int_M |\Delta V - mV + V^\top|^2\nu_g.
\end{aligned}$$

Daqui, segue-se que I é um operador positivo semi-definido e que Ker I é dado pela fórmula (1.9). $\square$

Vamos encerrar esta seção mencionando que ainda no artigo [**38**], a fórmula (1.5) de I é usada para mostrar que a aplicação identidade $\mathrm{Id} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ e a inclusão canônica $i : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$, que são aplicações harmônicas, são fracamente estáveis. A nulidade dessas aplicações também são calculadas.

CAPíTULO 2

Subvariedades biharmônicas na esfera Euclidiana

Neste capítulo, vamos apresentar resultados de classificação e exemplos de subvariedades biharmônicas na esfera Euclidiana obtidos em [**4, 5, 6, 8, 9, 39**]. Nestes artigos podem ser encontrados também outros resultados sobre subvariedades biharmônicas nas formas espaciais reais.

1. Curvas biharmônicas

Proposição 2.1 ([**9**]). *Seja $\gamma : I \to \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma curva parametrizada por comprimento de arco. Então, γ é biharmônica em $\mathbb{S}^n$ se, e somente se, vista como uma curva em $\mathbb{R}^{n+1}$, satisfaz a seguinte equação*

$$\gamma^{iv} + 2\gamma'' + (1 - \kappa_1^2)\gamma = 0, \tag{2.1}$$

onde κ_1 é a primeira curvatura de γ.

Demonstração. Usando a equação de Gauss de $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, temos que, para todos os campos de vetores X ao longo de γ, é válido que

$$\nabla_T^{\mathbb{S}^n} X = \nabla_T^{\mathbb{R}^{n+1}} X + \langle T, X\rangle\gamma$$

e então

$$\tau(\gamma) = \nabla_T^{\mathbb{S}^n} T = \nabla_T^{\mathbb{R}^{n+1}} T + \gamma = \gamma'' + \gamma,$$

$$\nabla_T^{\mathbb{S}^n} \tau(\gamma) = \nabla_T^{\mathbb{S}^n} \nabla_T^{\mathbb{S}^n} T = \gamma''' + \gamma' + \langle T, \tau(\gamma)\rangle\gamma = \gamma''' + \gamma',$$

$$\begin{aligned}\nabla_T^{\mathbb{S}^n} \nabla_T^{\mathbb{S}^n} \nabla_T^{\mathbb{S}^n} T &= \gamma^{iv} + \gamma'' + \langle T, \nabla_T^{\mathbb{S}^n} \nabla_T^{\mathbb{S}^n} T\rangle \\ &= \gamma^{iv} + \gamma'' - \langle \nabla_T^{\mathbb{S}^n} T, \nabla_T^{\mathbb{S}^n} T\rangle\gamma \\ &= \gamma^{iv} + \gamma'' - \kappa_1^2\gamma.\end{aligned}$$

Como a curvatura de $\mathbb{S}^n$ é dada por

$$R(X, Y)Z = \langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y,$$

temos que

$$R(T, \nabla_T^{\mathbb{S}^n} T)T = -\langle T, T\rangle \nabla_T^{\mathbb{S}^n} T = -\gamma'' - \gamma.$$

Agora, a equação biharmônica (1.2) pode ser escrita na forma (2.1). $\square$

Teorema 2.2 ([**9**]). *Seja $\gamma : I \to \mathbb{S}^n$, $n \geq 3$, uma curva parametrizada por comprimento de arco. Então, γ é próprio-biharmônica se, e somente se, γ é o círculo*

$$\gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}s)e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}s)e_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_3,$$

ou a hélice

$$\gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(As)e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}(As)e_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(Bs)e_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}(Bs)e_4,$$

onde $A = \sqrt{1+\kappa_1}$, $B = \sqrt{1-\kappa_1}$, $\kappa_1 \in (0,1)$, e $\{e_i\}$ são vetores constantes unitários e ortogonais.

Demonstração. A segunda equação de (1.3) é $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 1$, o que implica $\kappa_1^2 \in (0,1]$.

Agora, suponhamos que $\kappa_1^2 = 1$. Então, a solução geral de (2.1) é

$$\gamma(s) = \cos(\sqrt{2}s)c_1 + \mathrm{sen}(\sqrt{2}s)c_2 + c_3,$$

onde c_i, com $i \in \{1,2,3\}$, são vetores constantes em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Como γ satisfaz

$$\langle\gamma,\gamma\rangle = 1, \quad \langle\gamma',\gamma'\rangle = 1, \quad \langle\gamma,\gamma'\rangle = 0,$$
$$\langle\gamma',\gamma''\rangle = 0, \quad \langle\gamma,\gamma''\rangle = -1$$

e

$$\langle\gamma'',\gamma''\rangle = |\nabla_T^{\mathbb{S}^n} T|^2 + \langle\gamma,\gamma\rangle - 2\langle\gamma,\gamma''+\gamma\rangle = \kappa_1^2 + 1 = 2,$$

e, em $s = 0$, temos $\gamma = c_1 + c_3$, $\gamma' = \sqrt{2}c_2$ e $\gamma'' = -2c_1$, obtemos

$$c_{11} + 2c_{13} + c_{33} = 1, \quad c_{22} = \frac{1}{2}, \quad c_{12} + c_{23} = 0, \quad c_{12} = 0,$$
$$c_{11} = \frac{1}{2}, \quad c_{11} + c_{13} = \frac{1}{2},$$

onde $c_{ij} = \langle c_i, c_j\rangle$. Segue-se que $c_i \perp c_j$ e $|c_i| = 1/\sqrt{2}$, $\forall\, i,j \in \{1,2,3\}$.

Se $\kappa_1^2 \neq 1$, então a solução geral de (2.1) é

$$\gamma(s) = \cos(As)c_1 + \mathrm{sen}(As)c_2 + \cos(Bs)c_3 + \mathrm{sen}(Bs)c_4,$$

onde $A = \sqrt{1+\kappa_1}$, $B = \sqrt{1-\kappa_1}$ e $\{c_i\}$ são vetores constantes em $\mathbb{R}^{n+1}$.

A curva γ satisfaz

$$\langle\gamma,\gamma\rangle = 1, \quad \langle\gamma',\gamma'\rangle = 1, \quad \langle\gamma,\gamma'\rangle = 0,$$
$$\langle\gamma',\gamma''\rangle = 0, \quad \langle\gamma,\gamma''\rangle = -1, \langle\gamma'',\gamma''\rangle = 1 + \kappa_1^2,$$
$$\langle\gamma',\gamma'''\rangle = -1-\kappa_1^2, \quad \langle\gamma'',\gamma'''\rangle = 0, \quad \langle\gamma''',\gamma'''\rangle = 1 + 3\kappa_1^2, \quad \langle\gamma,\gamma'''\rangle = 0$$

e, em $s = 0$, $\gamma = c_1 + c_3$, $\gamma' = Ac_2 + Bc_4$, $\gamma'' = -A^2c_1 - B^2c_3$, $\gamma''' = -A^3c_2 - B^3c_4$.

Obtemos que $c_i \perp c_j$ e $|c_i| = 1/\sqrt{2}$, $\forall\, i,j = \{1,2,3,4\}$. □

2. Uma caracterização, propriedades e exemplos de subvariedades biharmônicas na esfera Euclidiana

Do Teorema 1.7, usando a expressão do tensor da curvatura R de $\mathbb{S}^n$,

$$R(X,Y)Z = \langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y,$$

obtemos, imediatamente, o seguinte teorema, que caracteriza as subvariedades biharmônicas em uma esfera Euclidiana.

TEOREMA 2.3 ([**37**]). *Uma subvariedade M, de dimensão m, na esfera $\mathbb{S}^n$ é biharmônica se, e somente se,*

$$\begin{cases} -\Delta^{\perp} H - \operatorname{trace}\sigma(\cdot, A_H\cdot) + mH = 0 \\ 2\operatorname{trace} A_{\nabla^{\perp}_{(\cdot)}H}\cdot + \frac{m}{2}\operatorname{grad}(|H|^2) = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

COROLÁRIO 2.4. *Uma subvariedade M em $\mathbb{S}^n$ com o campo curvatura média H paralelo, chamada* subvariedade pmc*, ou seja, tal que $\nabla^{\perp} H = 0$, é biharmônica se, e somente se,*

$$\operatorname{trace}\sigma(\cdot, A_H\cdot) = mH.$$

COROLÁRIO 2.5. *Seja M^m uma hipersuperfície orientável em $\mathbb{S}^{m+1}$. Então, M é próprio-biharmônica se, e somente se,*

$$\begin{cases} \Delta f = (m - |A|^2) f \\ A(\operatorname{grad} f) = -fracm2f\operatorname{grad} f, \end{cases} \tag{2.3}$$

onde $f = (\operatorname{trace} A)/m$.

EXEMPLO 2.1 (Hiperesfera $\mathbb{S}^m(1/\sqrt{2}) \subset \mathbb{S}^{m+1}$). Seja a esfera

$$\mathbb{S}^m(a) = \Big\{(x^1, \dots, x^m, x^{m+1}, b) \in \mathbb{R}^{m+2};\ \sum_{i=1}^{m+1} (x^i)^2 = a^2\Big\} \subset \mathbb{S}^{m+1},$$

onde $a^2 + b^2 = 1$. Consideramos o espaço de campos de vetores tangentes a $\mathbb{S}^m(a)$,

$$C(T\mathbb{S}^m(a)) = \Big\{(X^1, \dots, X^{m+1}, 0) \in C(T\mathbb{R}^{m+2});\ \sum_{i=1}^{m+1} x^i X^i = 0\Big\}$$

e uma seção unitária no fibrado normal de $\mathbb{S}^m(a)$ em $\mathbb{S}^{m+1}$

$$\eta = \frac{1}{r}\Big(x^1, \dots, x^{m+1}, -\frac{a^2}{b}\Big),$$

com $r^2 = a^2/b^2$, $r > 0$.

Calculamos

$$\nabla^{\mathbb{S}^{m+1}}_X \eta = \frac{1}{r}\nabla^{\mathbb{R}^{m+2}}_X \Big(x^1, \dots, x^{m+1}, -\frac{a^2}{b}\Big) = \frac{1}{r}X, \quad \forall\ X \in C(T\mathbb{S}^m(a))$$

e obtemos

$$\nabla^{\perp}\eta = 0, \quad A_\eta = -\frac{1}{r}\,\mathrm{Id}$$

e

$$\langle H,\eta\rangle = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\langle\sigma(E_i,E_i),\eta\rangle = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\langle A_\eta E_i,E_i\rangle = -\frac{1}{r},$$

o que mostra que

$$H = -\frac{1}{r}\eta \quad \text{e} \quad |H|^2 = \frac{1}{r^2} = \text{constante}$$

em $\mathbb{S}^{m+1}$. Então, $\nabla^{\perp}H = 0$ e, do Corolário 2.4, segue-se que $\mathbb{S}^m(a)$ é uma subvariedade próprio-biharmônica se, e somente se, $r = 1$, ou seja, $a = 1/\sqrt{2}$. Com efeito, a condição de biharmonicidade neste caso é

$$\begin{aligned} mH &= \operatorname{trace}\sigma(\cdot, A_H\cdot) = \textstyle\sum_{i=1}^{m}\sigma(E_i, A_H E_i) = -\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{m}\sigma(E_i, A_\eta E_i)\\ &= \textstyle\frac{1}{r^2}\sum_{i=1}^{m}\sigma(E_i,E_i) = \frac{m}{r^2}H. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2 (Toro de Clifford generalizado). O toro de Clifford generalizado

$$M = \mathbb{S}^{m_1}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\times\mathbb{S}^{m_2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big), \quad m_1+m_2 = m, \quad m_1\neq m_2,$$

foi o primeiro exemplo de subvariedade próprio-biharmônica em $\mathbb{S}^{m+1}$ (esse resultado foi demonstrado por G. Y. Jiang em [**29**]).

Consideramos

$$\begin{aligned} M &= \{(x^1,\ldots,x^{m_1+1},y^1,\ldots,y^{m_2+1})\in\mathbb{R}^{m+2}; \textstyle\sum_{i=1}^{m_1+1}(x^i)^2 = a_1^2,\\ &\qquad \textstyle\sum_{j=1}^{m_2+1}(y^j)^2 = a_2^2\}\\ &= \mathbb{S}^{m_1}(a_1)\times\mathbb{S}^{m_2}(a_2)\subset\mathbb{S}^{m+1}, \end{aligned}$$

onde $a_1^2 + a_2^2 = 1$, o espaço de campos de vetores tangentes a M,

$$C(TM) = \Big\{(X^1,\ldots,X^{m_1+1},Y^1,\ldots,Y^{m_2+1});\ \sum_{i=1}^{m_1+1}x^iX^i = 0,\ \sum_{j=1}^{m_2+1}y^jY^J = 0\Big\}$$

e

$$\eta = \Big(-\frac{a_2}{a_1}(x^1,\ldots,x^{m_1+1}), \frac{a_1}{a_2}(y^1,\ldots,y^{m_2+1})\Big)$$

uma seção unitária no fibrado normal.

Agora, seja $(X,Y) = (X^1,\ldots,X^{m_1+1},Y^1,\ldots,Y^{m_2+1})\in C(TM)$ e calculemos

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathbb{S}^{m+1}}_{(X,Y)}\eta &= \nabla^{\mathbb{R}^{m+2}}_{(X,Y)} = \big(-\tfrac{a_2}{a_1}(x^1,\ldots,x^{m_1+1}), \tfrac{a_1}{a_2}(y^1,\ldots,y^{m_2+1})\big)\\ &= \big(-\tfrac{a_2}{a_1}X, \tfrac{a_1}{a_2}Y\big). \end{aligned}$$

Assim,

$$\nabla^{\perp}\eta = 0, \quad A_\eta(X,Y) = \Big(\frac{a_2}{a_1}X, -\frac{a_1}{a_2}Y\Big)$$

e temos

$$|A_\eta|^2 = m_1\frac{a_2^2}{a_1^2} + m_2\frac{a_1^2}{a_2^2}$$

e

$$H = \frac{1}{ma_1a_2}(m_1a_2^2 - m_2a_1^2)\eta,$$

o que implica $|H| = \text{constante}$, $\nabla^{\perp}H = 0$.

O toro M será próprio-biharmônico se, e somente se,

$$\operatorname{trace}\sigma(\cdot, A_H\cdot) = mH,$$

ou seja,

$$\langle \operatorname{trace}\sigma(\cdot, A_H\cdot), \eta\rangle = m\langle H, \eta\rangle,$$

ou, equivalente,

$$|A_\eta|^2 = m.$$

Concluimos que $a_1 = a_2 = 1/\sqrt{2}$ e, como $H \neq 0$, que $m_1 \neq m_2$.

Teorema 2.6 ([**9**]). *Seja M uma subvariedade mínima em $\mathbb{S}^m(a) \subset \mathbb{S}^{m+1}$. Então, M é próprio-biharmônica em $\mathbb{S}^{m+1}$ se, e somente se, $a = 1/\sqrt{2}$.*

Demonstração. Consideremos a esfera $\mathbb{S}^m(a)$ e a seção unitária normal η como no Exemplo 2.1. Então,

$$\nabla^{\mathbb{S}^{m+1}}_X\eta = \frac{1}{r}\nabla^{\mathbb{R}^{m+2}}_X\Big(x^1,\dots,x^{m+1}, -\frac{a^2}{b}\Big) = \frac{1}{r}X, \quad \forall\ X \in C(T\mathbb{S}^m(a))$$

e

$$\nabla^{\perp}\eta = 0, \quad A_\eta = -\frac{1}{r}\operatorname{Id}.$$

Agora, sejam $i : M \to \mathbb{S}^m(a)$ e $i_1 : \mathbb{S}^m(a) \to \mathbb{S}^{m+1}$ as inclusões canônicas. Usando a Proposição 1.3, obtemos

$$\tau(i_1\circ i) = \sum_{i=1}^m \nabla di_1(E_i,E_i) = \sum_{i=1}^m -\frac{1}{r}\langle E_i,E_i\rangle\eta = -\frac{m}{r}\eta \neq 0,$$

onde $\{E_1,\dots,E_m\}$ é um referencial ortonormal que é geodésico num ponto $p \in M$, e

$$\begin{aligned}\tau_2(i_1\circ i) &= -\Delta\tau(i_1\circ i) + m\tau(i_1\circ i)\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^m \nabla^{\mathbb{S}^{m+1}}_{E_i}\nabla^{\mathbb{S}^{m+1}}_{E_i}\big(-\frac{m}{r}\eta\big) - \frac{m^2}{r}\eta\\ &= \textstyle -\frac{m}{r^2}\sum_{i=1}^m \sigma(E_i,E_i) - \frac{m^2}{r}\eta\\ &= \textstyle \frac{m^2}{r}\big(\frac{1}{r^2} - 1\big)\eta.\end{aligned}$$

Então, M é próprio-biharmônica se, e somente se, $r = 1$, ou seja, $a = 1/\sqrt{2}$. $\square$

Um resultado obtido em [**30**] mostra que existem superfícies mergulhadas orientáveis fechadas e mínimas, de qualquer gênero, em $\mathbb{S}^3$. Então, usando o Teorema 2.6, obtemos o seguinte teorema.

TEOREMA 2.7 ([**9**]). *Existem superfícies mergulhadas orientáveis fechadas e próprio-biharmônico, de qualquer gênero, em* $\mathbb{S}^4$.

OBSERVAÇÃO 2.1. Todas as subvariedades mínimas em $\mathbb{S}^m(1/\sqrt{2}) \subset \mathbb{S}^{m+1}$ são pseudo-umbílicas, ou seja, $A_H = |H|^2\,\mathrm{Id}$, têm o campo curvatura média H paralelo em $\mathbb{S}^{m+1}$ e $|H| = 1$.

Um exemplo de uma subvariedade próprio-biharmônica, que não é pseudo-umbílica, é dado pelo seguinte resultado, cuja demonstração pode ser feita de modo similar a prova do Teorema 2.6.

TEOREMA 2.8 ([**9**]). *Sejam* $M_1^{m_1}$ *e* $M_2^{m_2}$ *duas subvariedades mínimas nas esferas* $\mathbb{S}^{n_1}(r_1)$ *e* $\mathbb{S}^{n_2}(r_2)$, *onde* $n_1 + n_2 = m$, $r_1^2 + r_2^2 = 1$, *respectivamente. Então,* $M_1 \times M_2$ *é próprio-biharmônica em* $\mathbb{S}^{m+1}$ *se, e somente se,* $r_1 = r_2 = 1/\sqrt{2}$ *e* $m_1 \neq m_2$.

TEOREMA 2.9 ([**39**]). *Seja* M *uma subvariedade próprio-biharmônica em* $\mathbb{S}^n$, *com curvatura média* $|H|$ *constante. Então,* $|H| \in (0, 1]$. *Ainda mais,* $|H| = 1$ *se, e somente se,* M *é uma subvariedade mínima em* $\mathbb{S}^{n-1}(1/\sqrt{2}) \subset \mathbb{S}^n$.

DEMONSTRAÇÃO. A primeira equação de (2.2) implica que

$$\langle \Delta^\perp H, H\rangle = m|H|^2 - |A_H|^2.$$

Então, da fórmula de Weitzenböck,

$$\frac{1}{2}\Delta|H|^2 = \langle \Delta^\perp H, H\rangle - |\nabla^\perp H|^2,$$

como $|H| = \text{constante}$, temos

$$m|H|^2 = |A_H|^2 + |\nabla^\perp H|^2. \tag{2.4}$$

Agora, sejam $p \in M$ e $\{e_1, \ldots, e_m\}$ uma base ortonormal em T_pM tal que $A_He_i = \lambda_i e_i$. Então,

$$\lambda_i = \langle A_He_i, e_i\rangle, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = m|H|^2, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 = |A_H|^2$$

e, em p, da equação (2.4), obtemos

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 + |\nabla^\perp H|^2 \geq \frac{(\sum_{i=1}^m \lambda_i)^2}{m} + |\nabla^\perp H|^2.$$

Finalmente,

$$m|H|^2 \geq m|H|^4 + |\nabla^{\perp} H|^2,$$

o que implica $|H| \in (0,1]$ e, se $|H| = 1$, $\nabla^{\perp} H = 0$. Neste caso, a equação (2.4) mostra que

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 = \frac{(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i)^2}{m} = m,$$

donde $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m$. Portanto, M é pseudo-umbílica, com campo curvatura média paralelo em $\mathbb{S}^n$. Um resultado de B. Y. Chen em [**11**] implica que uma tal subvariedade é mínima em uma hiperesfera $\mathbb{S}^{n-1}(a)$. Como M é próprio-biharmônica, concluimos que $a = 1/\sqrt{2}$. □

TEOREMA 2.10 ([**5**]). *Seja M uma subvariedade pseudo-umbílica de $\mathbb{S}^n$, com $m = \dim M \neq 4$. Se M é biharmônica, então a sua curvatura média é constante.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $p \in M$ e $\{E_1, \ldots, E_m\}$ um referencial ortonormal geodésico em p. A segunda equação de (2.2) pode ser escrita como

$$\operatorname{trace} A_{\nabla^{\perp}_{(\cdot)} H}(\cdot) = -\frac{m}{4} \operatorname{grad}(|H|^2). \tag{2.5}$$

Em p, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{trace} A_{\nabla^{\perp}_{(\cdot)} H}(\cdot) &= \textstyle\sum_{i=1}^{m} A_{\nabla^{\perp}_{E_i} H} E_i = \sum_{i,j} \langle A_{\nabla^{\perp}_{E_i} H} E_i, E_j \rangle E_j \\ &= \textstyle\sum_{i,j} \langle \sigma(E_i, E_j), \nabla^{\perp}_{E_i} H \rangle E_j \\ &= \textstyle\sum_{i,j} \langle \nabla^{\mathbb{S}^n}_{E_j} E_i, \nabla^{\mathbb{S}^n}_{E_i} H \rangle E_j \\ &= \textstyle\sum_{i,j} \{ E_i(\langle \nabla^{\mathbb{S}^n}_{E_j} E_i, H \rangle) - \langle \nabla^{\mathbb{S}^n}_{E_i} \nabla^{\mathbb{S}^n}_{E_j} E_i, H \rangle \} E_j. \end{aligned}$$

Agora,

$$\sum_{i,j} E_i(\langle \nabla^{\mathbb{S}^n}_{E_j} E_i, H \rangle) E_j = \sum_{i=1}^{m} \nabla_{E_i} A_H E_i$$

e

$$\sum_{i,j} \langle \nabla^{\mathbb{S}^n}_{E_i} \nabla^{\mathbb{S}^n}_{E_j} E_i, H \rangle E_j = \frac{m}{2} \operatorname{grad}(|H|^2),$$

como já foi visto na demonstração do Teorema 2.3.

Como M é pseudo-umbílica,

$$\sum_{i=1}^{m} \nabla_{Ei} A_H E_i = \sum_{i=1}^{m} E_i(|H|^2) E_i = \operatorname{grad}(|H|^2)$$

e, então,

$$\operatorname{trace} A_{\nabla^{\perp}_{(\cdot)} H}(\cdot) = \frac{2-m}{2} \operatorname{grad}(|H|^2).$$

Substituindo essa relação na equação (2.5), obtemos

$$\frac{4-m}{4}\operatorname{grad}(|H|^2) = 0,$$

ou seja $|H| =$ constante. □

Um resultado de B. Y. Chen (em [**11**]) afirma que se M, $\dim M = m$, é uma subvariedade pseudo-umbílica em $\mathbb{S}^{m+2}$ com curvatura média constante, então M é mínima em $\mathbb{S}^{m+2}$ ou numa hiperesfera de $\mathbb{S}^{m+2}$. Este resultado e os Teoremas 2.6 e 2.10 garantem a validade do seguinte resultado.

Teorema 2.11 ([**5**]). *Seja M uma subvariedade pseudo-umbílica na esfera $\mathbb{S}^{m+2}$, onde $m = \dim M \neq 4$. Então M é próprio-biharmônica em $\mathbb{S}^{m+2}$ se, e somente se, é mínima na hiperesfera $\mathbb{S}^{m+1}(1/\sqrt{2}) \subset \mathbb{S}^{m+2}$.*

Teorema 2.12 ([**5**]). *Seja M uma hipersuperfície em $\mathbb{S}^{m+1}(a) \subset \mathbb{S}^{m+2}$, onde $\dim M = m$ e $a \in (0,1)$. Suponhamos que M não é mínima em $\mathbb{S}^{m+1}(a)$. Então, ela é próprio-biharmônica em $\mathbb{S}^{m+2}$ se, e somente se, $a > 1/\sqrt{2}$ e M é aberta em $\mathbb{S}^m(1/\sqrt{2}) \subset \mathbb{S}^{m+1}$.*

Demonstração. Se $a > 1/\sqrt{2}$ e M é aberta em $\mathbb{S}^m(1/\sqrt{2}) \subset \mathbb{S}^{m+1}$, então, do Teorema 2.6, obtemos que M é biharmônica.

Agora, sejam $j : M \to \mathbb{S}^{m+1}(a)$ e $i : \mathbb{S}^{m+1}(a) \to \mathbb{S}^{m+2}$ aplicações de inclusão. Consideramos

$$\mathbb{S}^{m+1}(a) = \Big\{(x^1, \dots, x^{m+2}, \sqrt{1-a^2}) \in \mathbb{R}^{m+3}; \sum_{i=1}^{m+2}(x^i)^2 = a^2\Big\} \subset \mathbb{S}^{m+2},$$

o espaço de campos de vetores tangentes a $\mathbb{S}^{m+1}(a)$,

$$C(T\mathbb{S}^{m+1}(a)) = \Big\{(X^1, \dots, X^{m+2}, 0) \in C(T\mathbb{R}^{m+3}); \sum_{i=1}^{m+2} x^i X^i = 0\Big\}$$

e

$$\eta = \frac{1}{r}\Big(x^1, \dots, x^{m+1}, -\frac{a^2}{\sqrt{1-a^2}}\Big),$$

com $r^2 = a^2/(1-a^2)$, $r > 0$, uma seção unitária no fibrado normal de $\mathbb{S}^{m+1}(a)$ em $\mathbb{S}^{m+2}$.

Para $\phi = i \circ j : M \to \mathbb{S}^{m+2}$, podemos calcular (ver [**9**])

$$\tau(\phi) = \tau(j) - \frac{m}{r}\eta$$

e

$$\tau_2(\phi) = \tau_2(j) - \frac{2m}{r^2}\tau(j) + \frac{1}{r}\Big\{|\tau(j)|^2 - \frac{m^2}{r^2}(r^2-1)\Big\}\eta.$$

Como M é próprio-biharmônica em $\mathbb{S}^{m+2}$, obtemos

$$|\tau(j)|^2 = \frac{m^2}{r^2}(r^2-1) = \frac{m^2}{a^2}(2a^2-1) > 0,$$

o que implica $a > 1/\sqrt{2}$.

Além disso, temos que

$$|\tau(\phi)|^2 = |\tau(j)|^2 + \frac{m^2}{r^2} = m^2,$$

e, portanto, a curvatura média de M em $\mathbb{S}^{m+2}$ satisfaz $|H| = 1$. Mas, do Teorema 2.9, segue-se que M é uma subvariedade mínima de $\mathbb{S}^{m+1}(1/\sqrt{2}) \subset \mathbb{S}^{m+2}$, ou seja, ela é pseudo-umbílica e tem o campo curvatura média paralelo em $\mathbb{S}^{m+2}$.

Como $M \subset \mathbb{S}^{m+1}(a)$ é pseudo-umbílica em $\mathbb{S}^{m+2}$, ela é também pseudo-umbílica e, consequentemente, totalmente umbílica, em $\mathbb{S}^{m+1}(a)$. Isto implica que M é um conjunto aberto em uma hiperesfera $\mathbb{S}^m(c)$ em $\mathbb{S}^{m+1}(a)$. Finalmente, como M é próprio-biharmônica em $\mathbb{S}^{m+2}$, segue-se que $c = 1/\sqrt{2}$. $\square$

Teorema 2.13 ([**5**]). *Seja M uma superfície biharmônica em $\mathbb{S}^n$, com campo curvatura média paralelo. Então, M é mínima em $\mathbb{S}^{n-1}(1/\sqrt{2})$.*

Demonstração. S.-T. Yau provou, em [**48**], que uma superfície que não é mínima em $\mathbb{S}^n$, com campo curvatura média paralelo, é mínima em uma esfera pequena $\mathbb{S}^{n-1}(a) \subset \mathbb{S}^n$ ou é uma superfície com curvatura média constante em uma esfera cuja dimensão é igual a 3 em $\mathbb{S}^n$.

Agora, se M é uma superfície em $\mathbb{S}^3(a) \subset \mathbb{S}^n$, $a \in (0, 1]$, consideramos a composição

$$M \to \mathbb{S}^3(a) \to \mathbb{S}^4 \to \mathbb{S}^n,$$

e, então, M é biharmônica em $\mathbb{S}^n$ se, e somente se, é biharmônica em $\mathbb{S}^4$. Dos Teoremas 2.6 e 2.12, segue-se que, para $a \in (0, 1)$, temos duas possibilidades: ou $a = 1/\sqrt{2}$ e M é mínima em $\mathbb{S}^3(1/\sqrt{2})$, ou $a > 1/\sqrt{2}$ e M é um aberto em $\mathbb{S}^2(1/\sqrt{2})$. Para $a = 1$, usando um resultado de [**8**], obtemos novamente que M é um aberto em $\mathbb{S}^2(1/\sqrt{2})$.

Em todos os casos, M é mínima em $\mathbb{S}^{n-1}(1/\sqrt{2})$. $\square$

3. Hipersuperfícies com, no máximo, duas curvaturas principais distintas

Nesta seção, vamos utilizar o seguinte resultado, que foi obtido em [**41**].

Teorema 2.14 ([**41**]). *Seja M uma hipesuperfície na esfera $\mathbb{S}^n$ com, no máximo, duas curvaturas principais distintas, e ambas constantes. Então, M é um aberto numa esfera grande ou pequena, ou num produto de esferas.*

As subvariedades na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$ dadas pelo Teorema 2.14 são descritas, explicitamente, em [**42**].

Teorema 2.15 ([**5**]). *Seja M^m uma hipersuperfície em $\mathbb{S}^{m+1}$. Se M é próprio-bihamônica e tem, no máximo, duas curvaturas principais distintas, então a curvatura média $|H|$ de M é constante.*

Demonstração. Suponhamos que M não tem curvatura média constante. Então, existe um aberto U em M tal que $f = |H| > 0$ e $\operatorname{grad} f$ é injetiva em U. Consideremos $\eta = H/|H|$. Observe que U não contém apenas pontos umbílicos porque, neste caso, ele seria de curvatura média constante. Portanto, podemos supor que existe um ponto $q \in U$ que não é um ponto umbílico. Segue-se, restringindo U se necessário, que $A \neq f\,\mathrm{Id}$ em cada ponto de U, onde A é o operador de Weingarten de M em $\mathbb{S}^{m+1}$, o que significa que A tem exatamente duas curvaturas principais distintas em U. Relembramos que, nesta situação, as multiplicidades das curvaturas principais são constantes e as curvaturas principais são suaves (veja [**42**]). Portanto, A pode ser diagonalizado num referencial local ortonormal $\{E_1, \ldots, E_m\}$. Assim, temos $A(E_i) = \bar{k}_i E_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, onde

$$\bar{k}_1(q) = \ldots = \bar{k}_{m_1}(q) = k_1(q), \quad \bar{k}_{m_1+1}(q) = \ldots = \bar{k}_{m_2}(q) = k_2(q)$$

e $k_1(q) \neq k_2(q)$, para todo $q \in U$. Do Corolário 2.5, podemos supor

$$k_1 = -\frac{m}{2} f \tag{2.6}$$

e $E_1 = \operatorname{grad} f/|\operatorname{grad} f|$, em U. Como $\langle E_i, E_1\rangle = 0$, $i > 1$, segue-se que, em U, temos

$$E_i(f) = 0, \quad i > 1. \tag{2.7}$$

As equações da conexão de Levi-Civita em M são

$$\nabla_{E_i} E_j = \omega_j^k(E_i) E_k. \tag{2.8}$$

Primeiro, vamos provar que a multiplicidade de k_1 é $m_1 = 1$. Suponhamos, por absurdo, que $m_1 > 1$. Neste caso, exite $\alpha \in \{2, \ldots, m_1\}$ tal que $\bar{k}_\alpha = k_1$ em U. Como $\nabla^\perp = 0$, a equação de Codazzi pode ser escrita como

$$(\nabla_{E_i} A)(E_j) = (\nabla_{E_j} A)(E_i), \quad i, j \in \{1, \ldots, m\}. \tag{2.9}$$

Usando (2.8), a equação de Codazzi torna-se

$$E_i(\bar{k}_j)E_j + \sum_{l=1}^{m} (\bar{k}_j - \bar{k}_l)\omega_j^l(E_i)E_l = E_j(\bar{k}_i)E_i + \sum_{l=1}^{m} (\bar{k}_i - \bar{k}_l)\omega_i^l(E_j)E_l. \tag{2.10}$$

Para $i = 1$ e $j = \alpha$, em (2.10), e fazendo o produto com E_α, obtemos $E_1(k_1) = 0$ e, então, usando (2.6) e (2.7), segue-se que $f =$ constante, o que é uma contradição.

Portanto, $\bar{k}_1 = k_1$ e $\bar{k}_\alpha = k_2$, $\alpha \in \{2, \ldots, m\}$, e, como $\operatorname{trace} A = mf$, obtém-se

$$k_2 = \frac{3m}{2(m-1)} f. \tag{2.11}$$

Para $i = 1$ e $j = \alpha$, em (2.10), e fazendo o produto com E_α, E_β e E_1, onde $\beta \neq \alpha$, obtemos

$$\omega_1^\alpha(E_\alpha) = -\frac{3}{m+2} \frac{E_1(f)}{f}, \tag{2.12}$$

$$\omega_1^\alpha(E_\beta) = 0 \tag{2.13}$$

e

$$\omega_1^\alpha(E_1) = 0, \tag{2.14}$$

respectivamente, para todo $\alpha, \beta \in \{2, \dots, m\}$, com $\alpha \neq \beta$.

Da equação de Gauss de U em $\mathbb{S}^{m+1}$,

$$\begin{aligned}\langle R^{\mathbb{S}^{m+1}}(X,Y)Z,W\rangle =& \langle R(X,Y)Z,W\rangle \\ &+ \langle \sigma(X,Z), \sigma(Y,W)\rangle - \langle \sigma(X,W), \sigma(Y,Z)\rangle,\end{aligned}$$

para $X = W = E_1$ e $Y = Z = E_\alpha$, obtemos

$$\sigma(E_1, E_\alpha) = 0, \quad \sigma(E_1, E_1) = k_1\eta, \quad \langle \sigma(E_\alpha, E_\alpha), \sigma(E_1, E_1)\rangle = k_1 k_2.$$

Das equações (2.8), (2.13) e (2.14), usando $\omega_j^k = -\omega_k^j$, obtemos

$$\langle R(E_1, E_\alpha)E_\alpha, E_1\rangle = -E_1(\omega_1^\alpha(E_\alpha)) - (\omega_1^\alpha(E_\alpha))^2.$$

Finalmente, da equação de Gauss e de (2.12), temos

$$fE_1(E_1(f)) = \frac{m+2}{3}f^2 - \frac{m^2(m+2)}{4(m-1)}f^4 + \frac{m+5}{m+2}(E_1(f))^2. \tag{2.15}$$

E, das equações (2.6) e (2.11), obtém-se

$$|A|^2 = k_1^2 + (m-1)k_2^2 = \frac{m^2(m+8)}{4(m-1)}f^2. \tag{2.16}$$

Agora, usando (2.7), (2.8) e (2.12), podemos calcular o Laplaciano de f,

$$\begin{aligned}\Delta f &= -\sum_{i=1}^{m}(E_i(E_i(f)) - (\nabla_{E_i}E_i)(f)) \\ &= -E_1(E_1(f)) + \sum_{\alpha=2}^{m}\omega_\alpha^1(E_\alpha)E_1(f) \\ &= -E_1(E_1(f)) + \frac{3(m-1)}{m+2}\frac{(E_1(f))^2}{f}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Do Corolário 2.5, substituindo (2.16) e (2.17), obtemos

$$fE_1(E_1(f)) = -mf^2 + \frac{m^2(m+8)}{4(m-1)}f^4 + \frac{3(m-1)}{m+2}(E_1(f))^2. \tag{2.18}$$

Seja $\gamma = \gamma(u)$ uma curva integral de E_1 em U. Ao longo de γ, temos $f = f(u)$ e denotamos $w = (E_1(f))^2 = (f')^2$. Então, $dw/df = 2f''$ e (2.15) e (2.16) podem ser escritas como

$$\begin{cases}\frac{1}{2}f\frac{dw}{df} = \frac{m+2}{3}f^2 - \frac{m^2(m+2)}{4(m-1)}f^4 + \frac{m+5}{m+2}w \\ \frac{1}{2}f\frac{dw}{df} = -mf^2 + \frac{m^2(m+8)}{4(m-1)}f^4 + \frac{3(m-1)}{m+2}w.\end{cases} \tag{2.19}$$

Daqui, temos dois casos a considerar. Se $m = 4$, então

$$6f^2 - 28f^4 = 0,$$

o que significa que f é constante. Se $m \neq 4$, temos

$$w = \frac{(m+2)(2m+1)}{3(m-4)}f^2 - \frac{m^2(m+2)(m+5)}{4(m-4)(m-1)}f^4$$

e, derivando essa igualdade e depois substituindo na segunda equação de (2.19), obtém-se

$$\frac{(m-1)(m+5)}{3}f^2 + \frac{3m^2(2m+1)}{4(m-1)}f^4 = 0.$$

Portanto, f é constante ao longo de γ, ou seja, $\operatorname{grad} f = 0$ ao longo de γ, o que é uma contradição. $\square$

TEOREMA 2.16 ([**5**]). *Seja M^m uma hipersuperfície em $\mathbb{S}^{m+1}$. Se M é próprio-biharmônica e com, no máximo, duas curvaturas principais distintas em cada ponto, então M é um aberto em $\mathbb{S}^m(1/\sqrt{2})$ ou em $\mathbb{S}^{m_1}(1/\sqrt{2}) \times \mathbb{S}^{m_2}(1/\sqrt{2})$, com $m_1+m_2 = m$, $m_1 \neq m_2$. Além disso, se M é completa, então M é $\mathbb{S}^m(1/\sqrt{2})$ ou $\mathbb{S}^{m_1}(1/\sqrt{2}) \times \mathbb{S}^{m_2}(1/\sqrt{2})$, com $m_1 + m_2 = m$, $m_1 \neq m_2$ e, neste caso, a aplicação de inclusão de M em $\mathbb{S}^{m+1}$ é um mergulho.*

DEMONSTRAÇÃO. Dos Teoremas 2.15 e 2.9, segue-se que a curvatura média de M é constante e $|H| \in (0, 1]$. Podemos então definir uma seção unitária global $\eta = H/|H|$ no fibrado normal e a função curvatura média $f = |H|$ é definida globalmente. Do Corolário 2.5, também temos $|A|^2 = m$.

Temos dois casos possíveis.

Caso I. Se existe um ponto umbílico $p_0 \in M$ e se denotarmos por $k(p_0)$ a curvatura principal em p_0, então $mk(p_0) = m|H(p_0)|$, e $|A|^2 = m$ implica $mk^2(p_0) = m$. Segue-se que $|H(p_0)| = 1$ e, como $|H|$ é constante, obtemos $|H| = 1$. Então, do Teorema 2.9, podemos ver que M é um aberto em $\mathbb{S}^m(1/\sqrt{2})$.

Caso II. Se M não tem pontos umbílicos, temos as curvaturas principais k_1 e k_2 contínuas e definidas globalmente, com multiplicidades m_1 e m_2, respectivamente, e $k_1(p) \neq k_2(p)$, em cada ponto $p \in M$. Como já vimos no teorema anterior, m_1 e m_2 são constantes. Como k_1 e k_2 satisfazem o sistema

$$\begin{cases} m_1k_1 + m_2k_2 = mf \\ m_1k_1^2 + m_2k_2^2 = m, \end{cases}$$

concluímos que as curvaturas k_1 e k_2 também são constantes. Do Teorema 2.14, segue-se que M é um aberto em $\mathbb{S}^{m_1}(a) \times \mathbb{S}^{m_2}(b)$, com $a^2 + b^2 = 1$, $m_1 + m_2 = m$, e, como M é próprio-biharmônica, temos, pelo Teorema 2.8, que M é um aberto em $\mathbb{S}^{m_1}(1/\sqrt{2}) \times \mathbb{S}^{m_2}(1/\sqrt{2})$, com $m_1+m_2 = m$, $m_1 \neq m_2$.

A última parte segue-se do Teorema 2 em [**35**]. $\square$

Teorema 2.17 ([**5**]). *Seja M^m, $m \geq 3$, uma hipersuperfície próprio-biharmônica em $\mathbb{S}^{m+1}$. As afirmações seguintes são equivalentes*:

(1) *M é quase umbílica*;
(2) *M é conformemente plana*;
(3) *M é um aberto em $\mathbb{S}^m(1/\sqrt{2})$ ou em $\mathbb{S}^{m-1}(1/\sqrt{2}) \times \mathbb{S}^1(1/\sqrt{2})$.*

Demonstração. Do Teorema 2.16, temos que (1) é equivalente a (3). Observamos também que (3) implica (1).

Quando $m \geq 4$, uma hipersuperfície conformemente plana em uma forma espacial é quase umbílica (ver [**11**]) e, neste caso, temos que (2) implica (1).

Para $m = 3$, para uma hipersuperfície conformemente plana, temos que o campo tensorial tipo $(0, 2)$

$$L = -\operatorname{Ricci} + \frac{s}{4}\langle \cdot, \cdot \rangle,$$

onde Ricci é a curvatura Ricci e s a curvatura escalar de M, é um campo tensorial de Codazzi, ou seja,

$$(\nabla_X L)(Y, Z) = (\nabla_Y L)(X, Z), \quad \forall\ X, Y, Z \in C(TM). \tag{2.20}$$

Com as mesmas notações da demonstração do Teorema 2.15, a equação de Gauss implica

$$\operatorname{Ricci}(X, Y) = 2\langle X, Y\rangle + 3f\langle AX, Y\rangle - \langle AX, AY\rangle$$

e

$$s = 6 + 9f^2 - |A|^2. \tag{2.21}$$

Suponhamos que existe um conjunto aberto U em M tal que U tem três curvaturas principais distintas.

Se f é constante, segue-se, usando as expressões acima, que U é plana e que o produto de quaisquer duas curvaturas principais é igual a -1, o que é uma contradição.

Agora, suponhamos que f não é constante em U e então que $\operatorname{grad}_p f \neq 0$, em qualquer ponto $p \in U$. Consideramos $E_1 = \operatorname{grad} f / |\operatorname{grad} f|$. Como M é próprio-biharmônica, temos, do Corolário 2.5, que E_1 é uma direção principal com a curvatura principal $k_1 = -(3/2)f$. De $k_1 + k_2 + k_3 = 3f$, obtemos que $k_2 = (9/4)f + \epsilon$ e $k_3 = (9/4)f - \epsilon$, onde $\epsilon \in C^\infty(U)$. Das equações de Gauss, de Codazzi, (2.20) e (2.21), segue-se que $f = a\epsilon^5$, $a \in \mathbb{R}$, e, além disso, que ϵ é uma constante. Então f é uma constante também, o que já vimos que é uma contradição.

Portanto, M tem, no máximo, duas curvaturas principais distintas, o que, usando o Teorema 2.16, conclui a demonstração. □

CAPíTULO 3

Subvariedades biharmônicas em formas espaciais Sasakianas

Depois do estudo de subvariedades biharmônicas em formas espaciais, o passo seguinte é estudar as subvariedades biharmônicas em espaços com curvatura seccional não-constante, mas com tensores de curvaturas que podem ser escritos de forma conveniente para ser utilizada em cálculos. Exemplos de tais espaços são as formas espaciais complexas e Sasakianas. Neste capítulo, vamos apresentar resultados sobre as subvariedades biharmônicas em formas espaciais Sasakianas obtidos em [**19, 21, 22, 23, 25**]. Para a apresentação geral das formas espaciais complexas usamos, como principal referência, o livro [**7**].

1. Formas espaciais Sasakianas. Noções gerais

Definição 3.1. Uma *estrutura métrica de contato* em uma variedade de dimensão ímpar N^{2n+1} é dada por $(\varphi, \xi, \eta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, onde φ é um campo tensorial tipo $(1,1)$, ξ é um campo de vetores, η é uma 1-forma e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é uma métrica Riemanniana tal que

$$\varphi^2 = -\operatorname{Id} + \eta \otimes \xi, \quad \eta(\xi) = 1$$

e

$$\langle \varphi X, \varphi Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad \langle X, \varphi Y\rangle = d\eta(X,Y), \quad \forall\ X, Y \in C(TN).$$

Uma tal variedade $(N, \varphi, \xi, \eta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é chamada de *variedade métrica de contato.*

Definição 3.2. Uma variedade métrica de contato $(N, \varphi, \xi, \eta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ tal que

$$(\nabla_X \varphi)(Y) = \langle X, Y\rangle \xi - \eta(Y)X, \forall\ X, Y \in C(TN),$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita, é chamada uma *variedade Sasakiana.*

Observação 3.1. Para uma variedade Sasakiana temos $\nabla_X \xi = -\varphi X$.

Definição 3.3. Uma subvariedade M duma variedade Sasakiana N é chamada *subvariedade integral* se $\eta(X) = 0$, para todo campo de vetores $X \in C(TM)$. Uma curva integral é chamada uma *curva de Legendre.*

Definição 3.4. Uma subvariedade M duma variedade Sasakiana N é chamada *subvariedade anti-invariante* se $\varphi(TM) \subset NM$, onde NM é o fibrado normal de M em N.

Observação 3.2. Uma subvariedade integral duma variedade Sasakiana é anti-invariante.

Definição 3.5. Seja $(N, \varphi, \xi, \eta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma variedade Sasakiana. A curvatura seccional dum 2-plano determinado por X e φX, onde X é um vetor unitário ortogonal a ξ, é chamada *φ-curvatura seccional* determinada por X. Uma variedade Sasakiana com curvatura φ-seccional constante c é chamada *forma espacial Sasakiana* e é denotada por $N(c)$.

Definição 3.6. Seja $\bar{N} = N/\xi$ o espaço órbita duma forma espacial Sasakiana $N^{2n+1}(c)$. Então $\bar{N}$ é uma forma espacial complexa com a curvatura seccional holomorfa constante $c{+}3$. Detalhes sobre formas espaciais complexas podem ser encontrados no próximo capítulo deste livro. A fibração $\pi : N \to \bar{N}$ é chamada *fibração de Boothby-Wang*. Um exemplo de uma tal fibração é a fibração de Hopf $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$.

Definição 3.7. Uma superfície $\Sigma^2 = \pi^{-1}(\gamma)$, onde $\pi : N \to \bar{N}$ é a fibração Boothby-Wang e $\gamma : I \to \bar{N}^n(c+3)$ é uma curva de Frenet em $\bar{N}^n(c+3)$, é chamada *cilindro de Hopf*. Para qualquer campo vetorial X tangente a $\bar{N}^n(c+3)$, vamos denotar por X^H seu levantamento horizontal em $N^{2n+1}(c)$.

Teorema 3.1. *O tensor de curvatura duma forma espacial Sasakiana $N(c)$ é dado por*

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)Z = &\frac{c+3}{4}\{\langle Z,Y\rangle X - \langle Z,X\rangle Y\} + \frac{c-1}{4}\{\eta(Z)\eta(X)Y \\
&- \eta(Z)\eta(Y)X + \langle Z,X\rangle\eta(Y)\xi - \langle Z,Y\rangle\eta(X)\xi \\
&+ \langle Z,\varphi Y\rangle\varphi X - \langle Z,\varphi X\rangle\varphi Y + 2\langle X,\varphi Y\rangle\varphi Z\}.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Observação 3.3. Quando $c > -3$, $N(c)$ é isométrica à esfera unitária $\mathbb{S}^{2n+1}$ dotada com a sua estrutura Sasakiana padrão ou com a estrutura Sasakiana deformada introduzida por S. Tanno em [**45**]. A seguir, vamos apresentar tais estruturas.

Seja $\mathbb{S}^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; |z| = 1\}$ a esfera unitária Euclidiana, com dimensão $(2n+1)$. Consideremos a métrica Riemanniana padrão $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ em $\mathbb{S}^{2n+1}$, o campo de vetores $\xi_0(z) = -Jz$, $z \in \mathbb{S}^{2n+1}$, onde J é a estrutura complexa padrão em $\mathbb{C}^{n+1}$ dada por

$$Jz = (-y^1, ..., -y^{n+1}, x^1, ..., x^{n+1}),$$

para $z = (x^1, ..., x^{n+1}, y^1, ..., y^{n+1})$, e o campo tensorial $\varphi_0 = s \circ J$, onde $s : T_z\mathbb{C}^{n+1} \to T_z\mathbb{S}^{2n+1}$ é a projeção ortogonal. Então, $(\mathbb{S}^{2n+1}, \varphi_0, \xi_0, \eta_0, \langle\cdot,\cdot\rangle_0)$ é uma forma espacial Sasakiana, com curvatura φ_0-seccional $c = 1$, denotada por $\mathbb{S}^{2n+1}(1)$.

Agora, consideramos a estrutura Sasakiana deformada de $\mathbb{S}^{2n+1}$, dada por

$$\eta = a\eta_0, \quad \xi = \frac{1}{a}\xi_0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \langle\cdot,\cdot\rangle_a = a\langle\cdot,\cdot\rangle_0 + a(a-1)\eta_0 \otimes \eta_0,$$

onde a é uma constante positiva. Então, $(\mathbb{S}^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, \langle\cdot,\cdot\rangle_a)$ é uma forma espacial Sasakiana, com curvatura φ-seccional $c = 4/a - 3 > -3$, denotada por $\mathbb{S}^{2n+1}(c)$ ([**7, 47**]).

Lema 3.2 ([**24**]). *Sejam M uma subvariedade integral de $\mathbb{S}^{2n+1}$ e X, Y campos de vetores tangentes a M. Então,*

$$\dot{\nabla}_X Y = \nabla_X Y \quad e \quad \dot{\nabla}_X \varphi Y = \nabla_X \varphi Y,$$

onde $\dot{\nabla}$ e ∇ são as conexões de Levi-Civita em $(\mathbb{S}^{2n+1}, \langle\cdot,\cdot\rangle_0)$ e $(\mathbb{S}^{2n+1}, \langle\cdot,\cdot\rangle_a)$, respectivamente.

2. Curvas de Legendre biharmônicas

Definição 3.8. Seja $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to (N, \varphi, \xi, \eta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma curva de Frenet de ordem de osculação r numa variedade Sasakiana. As *φ-torsões* de γ são as funções

$$\tau_{ij} = \langle E_i, \varphi E_j\rangle, \quad 1 \leq i < j \leq r,$$

onde $\{E_1 = T = \gamma', E_2, \ldots, E_r\}$ é o referencial de Frenet da curva γ.

Sejam $(N^{2n+1}(c), \varphi, \xi, \eta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma forma espacial Sasakiana e $\gamma : I \to N$ uma curva de Frenet Legendre de ordem de osculação r. Então,

$$\begin{aligned}\nabla_T^3 T = \; & (-3\kappa_1\kappa_1')E_1 + (\kappa_1'' - \kappa_1^3 - \kappa_1\kappa_2^2)E_2 + (2\kappa_1'\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2')E_3 \\ & +\kappa_1\kappa_2\kappa_3 E_4,\end{aligned}$$

$$R(T, \nabla_T T)T = -\frac{(c+3)\kappa_1}{4}E_2 - \frac{3(c-1)\kappa_1}{4} g(E_2, \varphi T)\varphi T,$$

e

$$\begin{aligned}\tau_2(\gamma) =& \nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T \\ =& (-3\kappa_1\kappa_1')E_1 + \Big(\kappa_1'' - \kappa_1^3 - \kappa_1\kappa_2^2 + \frac{(c+3)\kappa_1}{4}\Big)E_2 \\ & + (2\kappa_1'\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2')E_3 + \kappa_1\kappa_2\kappa_3 E_4 \\ & + \frac{3(c-1)\kappa_1}{4}\langle E_2, \varphi T\rangle\varphi T.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Agora, vamos resolver a equação biharmônica $\tau_2(\gamma) = 0$. O último termo da expressão de $\tau_2(\gamma)$ nos sugere que devemos dividir o estudo em quatro casos distintos.

Caso I: $\mathbf{c = 1}$.

Neste caso, a equação (3.2) mostra que γ é próprio-biharmônica se, e somente se,

$$\kappa_1 = \text{constante} > 0, \quad \kappa_2 = \text{constante}, \quad \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 1, \quad \kappa_2\kappa_3 = 0.$$

Teorema 3.3 ([**22**]). *Seja $\gamma : I \to N^{2n+1}(1)$ uma curva de Frenet Legendre de ordem de osculação r. Então, γ é próprio-biharmônica se, e somente se, $n \geq 2$ e*

(1) *γ é um círculo com $\kappa_1 = 1$; ou*
(2) *γ é uma hélice com $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 1$.*

OBSERVAÇÃO 3.4. Se $n = 1$, temos $\nabla_T T = \pm\kappa_1 \varphi T$ e então $E_2 = \pm\varphi T$ e $\nabla_T E_2 = \pm\nabla_T \varphi T = \pm(\xi \mp \kappa_1 T) = -\kappa_1 T \pm \xi$. Obtemos $\kappa_2 = 1$ e γ não pode ser próprio-biharmônica.

Caso II: $\mathbf{c \neq 1}$, $\mathbf{E_2 \perp \varphi T}$.

Usando a equação (3.2), obtemos que γ é próprio-biharmônica se, e somente se,

$$\kappa_1 = \text{constante} > 0, \quad \kappa_2 = \text{constante}, \quad \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \frac{c+3}{4}, \quad \kappa_2 \kappa_3 = 0.$$

LEMA 3.4. *Seja γ uma curva de Frenet Legendre de ordem de osculação 3, tal que $E_2 \perp \varphi T$. Então, $\{T = E_1, E_2, E_3, \varphi T, \xi, \nabla_T \varphi T\}$ é linearmente independente em todos os pontos de γ e $n \geq 3$.*

DEMONSTRAÇÃO. Como γ é uma curva de Frenet de ordem de osculação 3, temos

$$\begin{cases} E_1 = \gamma' = T \\ \nabla_T E_1 = \kappa_1 E_2 \\ \nabla_T E_2 = -\kappa_1 E_1 + \kappa_2 E_3 \\ \nabla_T E_3 = -\kappa_2 E_2 \end{cases}$$

E fácil ver que o sistema

$$S_1 = \{T = E_1, E_2, E_3, \varphi T, \xi, \nabla_T \varphi T\}$$

tem somente vetores não-nulos e que

$$T \perp E_2, \quad T \perp E_3, \quad T \perp \varphi T, \quad T \perp \xi, \quad T \perp \nabla_T \varphi T.$$

Então, S_1 é linearmente independente se, e somente se,

$$S_2 = \{E_2, E_3, \varphi T, \xi, \nabla_T \varphi T\}$$

é linearmente independente.

Como

$$E_2 \perp \xi, \; E_2 \perp \nabla_T \varphi T, \; E_3 \perp \xi, \; E_3 \perp \nabla_T \varphi T, \; \varphi T \perp \xi, \; \varphi T \perp \nabla_T \varphi T,$$

e

$$E_2 \perp E_3 \perp \varphi T,$$

segue-se que S_2 é linearmente independente se, e somente se, $S_3 = \{\xi, \nabla_T \varphi T\}$ e linearmente independente. Mas, $\nabla_T \varphi T = \xi + \kappa_1 \varphi E_2$, $\kappa_1 \neq 0$, e, portanto, S_3 é linearmente independente. □

Agora, temos o teorema seguinte.

TEOREMA 3.5 ([**22**]). *Seja $\gamma : I \to N^{2n+1}(c)$, $c \neq 1$, uma curva de Frenet Legendre de ordem de osculação r, tal que $E_2 \perp \varphi T$. Então,*

(1) *se $c \leq -3$, então γ é biharmônica se, e somente se, é uma geodésica*;
(2) *se $c > -3$, então γ é próprio-biharmônica se, e somente se,*
  (a) *$n \geq 2$ e γ é um círculo, com $\kappa_1^2 = (c+3)/4$; ou*
  (b) *$n \geq 3$ e γ é uma hélice, com $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = (c+3)/4$.*

Caso III: $\mathbf{c \neq 1}$, $\mathbf{E_2 \parallel \varphi T}$.
Neste caso, γ é próprio-biharmônica se, e somente se,

$$\kappa_1 = \text{constante} > 0, \quad \kappa_2 = \text{constante}, \quad \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = c, \quad \kappa_2\kappa_3 = 0.$$

Podemos supor que $E_2 = \varphi T$ e, então, $\nabla_T T = \kappa_1 E_2 = \kappa_1 \varphi T$, $\nabla_T E_2 = \nabla_T \varphi T = \xi - \kappa_1 T$, o que mostra que $E_3 = \xi$ and $\kappa_2 = 1$. Então, $\nabla_T E_3 = \nabla_T \xi = -\varphi T = -E_2$.

Teorema 3.6 ([**22**]). *Seja $\gamma : I \to N^{2n+1}(c)$, $c \neq 1$, uma curva de Frenet Legendre de ordem de osculação r, tal que $E_2 \parallel \varphi T$. Então, $\{T, \varphi T, \xi\}$ é o referencial de Frenet de γ e*

(1) *se $c < 1$, então γ é biharmônica se, e somente se, é uma geodésica*;
(2) *se $c > 1$, então γ é próprio-biharmônica se, e somente se, é uma hélice com $\kappa_1^2 = c - 1$ e $\kappa_2 = 1$.*

Caso IV: $\mathbf{c \neq 1}$ e $\langle \mathbf{E_2}, \varphi \mathbf{T} \rangle$ não é identicamente constante a $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ ou $\mathbf{-1}$.
É fácil ver que, neste caso, $4 \leq r \leq 2n+1$, $n \geq 2$, e que $\varphi T \in L[E_2, E_3, E_4]$.

Lema 3.7. *A φ-torsão τ_{12} é constante.*

Demonstração. Derivando τ_{12}, obtemos

$$\begin{aligned} \tau_{12}'(s) &= \langle \nabla_T E_2, \varphi T \rangle + \langle E_2, \nabla_T \varphi T \rangle = \langle \nabla_T E_2, \varphi T \rangle + \langle E_2, \xi + \kappa_1 \varphi E_2 \rangle \\ &= \langle \nabla_T E_2, \varphi T \rangle = \langle -\kappa_1 T + \kappa_2 E_3, \varphi T \rangle \\ &= \kappa_2 \langle E_3, \varphi T \rangle. \end{aligned}$$

Como $\varphi T = \langle \varphi T, E_2 \rangle E_2 + \langle \varphi T, E_3 \rangle E_3 + \langle \varphi T, E_4 \rangle E_4$, a curva γ é próprio-biharmônica se, e somente se,

$$\begin{cases} \kappa_1 = \text{constante} > 0 \\ \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \frac{c+3}{4} + \frac{3(c-1)}{4}\tau_{12}^2 \\ \kappa_2' = -\frac{3(c-1)}{4}\tau_{12}\langle \varphi T, E_3 \rangle \\ \kappa_2\kappa_3 = -\frac{3(c-1)}{4}\tau_{12}\langle \varphi T, E_4 \rangle. \end{cases}$$

Da terceira das equações e da expressão de τ_{12}', obtemos

$$\kappa_2^2 = -\frac{3(c-1)}{4}\tau_{12}^2 + \omega_0,$$

onde $\omega_0 =$ constante. Substituindo na segunda equação, segue-se que

$$\kappa_1^2 = \frac{c+3}{4} - \omega_0 + \frac{3(c-1)}{2}\tau_{12}^2,$$

o que implica $\tau_{12} =$ constante. □

Agora, vemos que $\kappa_2 = \text{constante} > 0$, $\langle E_3, \varphi T\rangle = 0$ e, então,

$$\varphi T = \tau_{12} E_2 + \langle \varphi T, E_4\rangle E_4.$$

Segue-se que existe uma única constante $\alpha_0 \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ tal que $\tau_{12} = \cos\alpha_0$ e $\langle \varphi T, E_4\rangle = \operatorname{sen}\alpha_0$.

TEOREMA 3.8 ([**22**]). *Seja $\gamma : I \to N^{2n+1}(c)$, $c \neq 1$, $n \geq 2$, uma curva de Frenet Legendre de ordem de osculação r tal que $\langle E_2, \varphi T\rangle$ não é identicamente constante a $0, 1$ ou -1. Então,*

(1) *se $c \leq -3$, então γ é biharmônica se, e somente se, é uma geodésica*;
(2) *se $c > -3$, então γ é próprio-biharmônica se, e somente se, $\varphi T = \cos\alpha_0 E_2 + \operatorname{sen}\alpha_0 E_4$ e*

$$\begin{cases} \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 = \text{constante} > 0 \\ \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \frac{c+3}{4} + \frac{3(c-1)}{4}\cos^2\alpha_0 \\ \kappa_2\kappa_3 = -\frac{3(c-1)}{8}\operatorname{sen}(2\alpha_0), \end{cases}$$

onde $\alpha_0 \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ é uma constante tal que $c + 3 + 3(c-1)\cos^2\alpha_0 > 0$ e $3(c-1)\operatorname{sen}(2\alpha_0) < 0$.

OBSERVAÇÃO 3.5. Neste caso, é possível encontrar exemplos de curvas de Legendre próprio-biharmônicas que não são hélices. Mas, quando $n = 2$, todas as curvas de Legendre $\gamma : I \to N^5(c)$, $c \neq 1$, tal que $\langle E_2, \varphi T\rangle$ não é identicamente constante a $0, 1$ ou -1, são hélices de ordem 4 ou 5. A demonstração desta última afirmação pode ser encontrada em [**22**].

Portanto, temos o seguinte teorema.

TEOREMA 3.9 ([**22**]). *Seja γ uma curva de Legendre próprio-biharmônica em $N^5(c)$. Então, $c > -3$ e γ é uma hélice de ordem r, com $2 \leq r \leq 5$.*

Da mesma maneira, como no caso de curvas próprio-biharmônicas em $\mathbb{S}^n(1)$, tratadas no Capítulo 2, vamos obter as equações das curvas próprio-biharmônicas de $\mathbb{S}^{2n+1}(c)$ nos Casos II e III.

TEOREMA 3.10 ([**22**]). *Seja $\gamma : I \to (\mathbb{S}^{2n+1}(c), \varphi, \xi, \eta, \langle\cdot,\cdot\rangle_a)$, com $n \geq 2$, $a > 0$, $a \neq 1$, ou seja, $c = 4/a - 3 > -3$ e $c \neq 1$, uma curva de Frenet Legendre próprio-biharmônica tal que $E_2 \perp \varphi T$. Então, a equação de γ no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{2n+2}$ é*

$$\gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\Big(\sqrt{\frac{2}{a}}s\Big)e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\Big(\sqrt{\frac{2}{a}}s\Big)e_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_3,$$

para $n \geq 2$, onde $\{e_i, Je_j\}_{i,j=1}^3$ são vetores constantes unitários e ortogonais, ou

$$\gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(As)e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(As)e_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(Bs)e_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(Bs)e_4,$$

para $n \geq 3$, *onde*

$$A = \sqrt{\frac{1+\kappa_1\sqrt{a}}{a}}, \quad B = \sqrt{\frac{1-\kappa_1\sqrt{a}}{a}}, \quad \kappa_1 \in \Big(0, \frac{1}{a}\Big), \tag{3.3}$$

e $\{e_i, Je_j\}_{i,j=1}^3$ *são vetores constantes unitários e ortogonais.*

Demonstração. Sejam ∇, $\dot{\nabla}$ e $\widetilde{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita nos espaços $(\mathbb{S}^{2n+1}(c), \langle\cdot,\cdot\rangle_a)$, $(\mathbb{S}^{2n+1}(1), \langle\cdot,\cdot\rangle_0)$ e $(\mathbb{R}^{2n+2}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, respectivamente. Do Lema 3.2, temos que

$$\nabla_X Y = \dot{\nabla}_X Y, \quad \forall\ X, Y \in C(T\mathbb{S}^{2n+1}), \tag{3.4}$$

com $X \perp \xi$ e $Y \perp \xi$.

Consideramos o primeiro caso possível, quando γ é um círculo biharmônico, ou seja, γ é um círculo com $\kappa_1^2 = (c+3)/4$. Seja $T = \gamma'$ o vetor tangente unitário, correspondente à métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle_a$, ao longo de γ. Usando (3.4), obtemos $\dot{\nabla}_T T = \nabla_T T$. É fácil ver que $E_2 \perp \xi$ e, usando a definição da conexão de Levi-Civita, que $\dot{\nabla}_T E_2 = \nabla_T E_2$.

Das equações de Gauss e Frenet, obtemos

$$\widetilde{\nabla}_T T = \dot{\nabla}_T T - \langle T, T\rangle\gamma = \kappa_1 E_2 - \frac{1}{a}\gamma$$

e

$$\widetilde{\nabla}_T \widetilde{\nabla}_T T = (-\kappa_1^2 - \frac{1}{a})T = -\frac{2}{a}T.$$

Então, temos a equação do círculo γ,

$$a\gamma''' + 2\gamma' = 0,$$

cuja solução geral é

$$\gamma(s) = \cos\Big(\sqrt{\frac{2}{a}}s\Big)c_1 + \operatorname{sen}\Big(\sqrt{\frac{2}{a}}s\Big)c_2 + c_3,$$

onde $\{c_i\}$ são vetores constantes em $\mathbb{R}^{2n+2}$.

Como γ satisfaz as equações

$$\langle\gamma,\gamma\rangle = 1,\ \langle\gamma',\gamma'\rangle = \frac{1}{a},\ \langle\gamma,\gamma'\rangle = 0,\ \langle\gamma',\gamma''\rangle = 0,\ \langle\gamma'',\gamma''\rangle = \frac{2}{a^2},\ \langle\gamma,\gamma''\rangle = -\frac{1}{a},$$

e, em $s = 0$, $\gamma = c_1 + c_3$, $\gamma' = \sqrt{2/a}c_2$, $\gamma'' = -(2/a)c_1$, obtemos

$$c_{11} + 2c_{13} + c_{33} = 1,\ c_{22} = \frac{1}{2},\ c_{12} + c_{23} = 0,\ c_{12} = 0,\ c_{11} = \frac{1}{2}, c_{11} + c_{13} = \frac{1}{2},$$

onde $c_{ij} = \langle c_i, c_j\rangle$. Segue-se que $\{c_i\}$ são vetores ortogonais em $\mathbb{E}^{2n+2}$ e $|c_1| = |c_2| = |c_3| = 1/\sqrt{2}$.

Finalmente, como γ é uma curva de Legendre e $\langle\nabla_{\gamma'}\gamma', \varphi\gamma'\rangle_a = 0$, é fácil ver que $\langle c_i, Jc_j\rangle = 0$, para todo $i, j \in \{1,2,3\}$.

Agora seja γ uma hélice biharmônica, ou seja, $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = (c+3)/4$, $\kappa_1^2 \in (0, (c+3)/4)$. Temos que $E_i \perp \xi$, $i \in \{1,2,3\}$, e, de (3.4), que $\dot{\nabla}_T T = \nabla_T T$, $\dot{\nabla}_T E_2 = \nabla_T E_2$ e $\dot{\nabla}_T E_3 = \nabla_T E_3$.

Das equações de Gauss e de Frenet, obtemos

$$\widetilde{\nabla}_T T = \dot{\nabla}_T T - \langle T, T\rangle\gamma = \kappa_1 E_2 - \frac{1}{a}\gamma,$$

$$\widetilde{\nabla}_T\widetilde{\nabla}_T T = \kappa_1\widetilde{\nabla}_T E_2 - \frac{1}{a}T = \kappa_1\Big(-\kappa_1 T + \kappa_2 E_3\Big) - \frac{1}{a}T = -\Big(\kappa_1^2 + \frac{1}{a}\Big)T + \kappa_1\kappa_2 E_3,$$

e

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_T\widetilde{\nabla}_T\widetilde{\nabla}_T T &= -\Big(\kappa_1^2 + \tfrac{1}{a}\Big)\widetilde{\nabla}_T T + \kappa_1\kappa_2\widetilde{\nabla}_T E_3 = -\Big(\kappa_1^2 + \tfrac{1}{a}\Big)\widetilde{\nabla}_T T - \kappa_1\kappa_2^2 E_2\\ &= -\tfrac{2}{a}\gamma'' - \tfrac{1}{a}\kappa_2^2\gamma.\end{aligned}$$

Portanto, a equação de γ em $\mathbb{R}^{2n+2}$ é

$$a\gamma^{iv} + 2\gamma'' + \kappa_2^2\gamma = 0.$$

A solução geral desta equação é

$$\gamma(s) = \cos(As)c_1 + \operatorname{sen}(As)c_2 + \cos(Bs)c_3 + \operatorname{sen}(Bs)c_4,$$

onde A, B são dados por (3.3) e $\{c_i\}$ são vetores constantes em $\mathbb{R}^{2n+2}$.
A curva γ satisfaz

$$\langle\gamma,\gamma\rangle = 1,\ \langle\gamma',\gamma'\rangle = \frac{1}{a},\ \langle\gamma,\gamma'\rangle = 0,\ \langle\gamma',\gamma''\rangle = 0,\ \langle\gamma'',\gamma''\rangle = \frac{1 + a\kappa_1^2}{a^2},$$

$$\langle\gamma,\gamma''\rangle = -\frac{1}{a},\ \langle\gamma',\gamma'''\rangle = -\frac{1 + a\kappa_1^2}{a^2},\ \langle\gamma'',\gamma'''\rangle = 0,\ \langle\gamma,\gamma'''\rangle = 0,$$

$$\langle\gamma''',\gamma'''\rangle = \frac{3a\kappa_1^2 + 1}{a^3},$$

e, em $s = 0$, temos

$$\gamma = c_1 + c_3,\quad \gamma' = Ac_2 + Bc_4,\quad \gamma'' = -A^2c_1 - B^2c_3,\quad \gamma''' = -A^3c_2 - B^3c_4.$$

Segue-se que os vetores c_i satisfazem as seguintes equações:

$$c_{11} + 2c_{13} + c_{33} = 1, \tag{3.5}$$

$$A^2c_{22} + 2ABc_{24} + B^2c_{44} = \frac{1}{a}, \tag{3.6}$$

$$Ac_{12} + Ac_{23} + Bc_{14} + Bc_{34} = 0, \tag{3.7}$$

$$A^3c_{12} + AB^2c_{23} + A^2Bc_{14} + B^3c_{34} = 0, \tag{3.8}$$

$$A^4c_{11} + 2A^2B^2c_{13} + B^4c_{33} = \frac{1 + a\kappa_1^2}{a^2}, \tag{3.9}$$

$$A^2c_{11} + (A^2 + B^2)c_{13} + B^2c_{33} = \frac{1}{a}, \tag{3.10}$$

$$A^4c_{22} + (AB^3 + A^3B)c_{24} + B^4c_{44} = \frac{1 + a\kappa_1^2}{a^2}, \tag{3.11}$$

$$A^5c_{12} + A^3B^2c_{23} + A^2B^3c_{14} + B^5c_{34} = 0, \tag{3.12}$$

$$A^3c_{12} + A^3c_{23} + B^3c_{14} + B^3c_{34} = 0, \tag{3.13}$$

$$A^6c_{22} + 2A^3B^3c_{24} + B^6c_{44} = \frac{3a\kappa_1^2 + 1}{a^3}, \tag{3.14}$$

onde $c_{ij} = \langle c_i, c_j \rangle$.
A solução do sistema formado pelas equações (3.7), (3.8), (3.12) e (3.13) é

$$c_{12} = c_{23} = c_{14} = c_{34} = 0.$$

Das equações (3.5), (3.9) e (3.10), obtemos

$$c_{11} = \frac{1}{2}, \quad c_{13} = 0, \quad c_{33} = \frac{1}{2},$$

e, de (3.6), (3.11), (3.14),

$$c_{22} = \frac{1}{2}, \quad c_{24} = 0, \quad c_{44} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, c_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, são vetores ortogonais em $\mathbb{R}^{2n+2}$, com $|c_1| = |c_2| = |c_3| = |c_4| = 1/\sqrt{2}$.

Como γ é uma curva de Legendre, temos que $\langle \nabla_{\gamma'}\gamma', \varphi\gamma' \rangle = 0$ e obtemos a conclusão. $\square$

Para o Caso III, temos o seguinte teorema, cuja demonstração pode ser feita da mesma maneira a feita no Teorema 3.10.

Teorema 3.11 ([**22**]). *Seja $\gamma : I \to (\mathbb{S}^{2n+1}(c), \varphi, \xi, \eta, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$, $0 < a < 1$, ou seja, $c > 1$, uma curva de Frenet Legendre próprio-biharmônica, tal que $E_2 \parallel \varphi T$. Então, a equação de γ no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{2n+2}$ é*

$$\begin{aligned}
\gamma(s) =& \sqrt{\frac{B}{A+B}}\cos(As)e_1 - \sqrt{\frac{B}{A+B}}\operatorname{sen}(As)Je_1 \\
&+ \sqrt{\frac{A}{A+B}}\cos(Bs)e_3 + \sqrt{\frac{A}{A+B}}\operatorname{sen}(Bs)Je_3 \\
=& \sqrt{\frac{B}{A+B}}\exp(-\mathrm{i}As)e_1 + \sqrt{\frac{A}{A+B}}\exp(\mathrm{i}Bs)e_3,
\end{aligned}$$

onde $\{e_1, e_3\}$ são vetores unitários e ortogonais em $\mathbb{R}^{2n+2}$, com e_3 ortogonal a Je_1 e

$$A = \sqrt{\frac{3 - 2a - 2\sqrt{(a-1)(a-2)}}{a}}, \quad B = \sqrt{\frac{3 - 2a + 2\sqrt{(a-1)(a-2)}}{a}}.$$

3. Curvas não-Legendre biharmônicas

Seja $\gamma : I \to (N^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma curva de Frenet não-Legendre com $\eta(T) = f$, onde f é uma função definida ao longo de γ tal que $f \neq 0$. Como

$$\begin{aligned} R^N(T, \nabla_T T)T \;=\; & \Big(-\tfrac{(c+3)\kappa_1}{4} + \tfrac{(c-1)\kappa_1}{4} f^2 \Big) E_2 - \tfrac{(c-1)}{4} f f' T + \tfrac{(c-1)}{4} f' \xi \\ & - \tfrac{3(c-1)\kappa_1}{4} \langle E_2, \varphi T\rangle \varphi T, \end{aligned}$$

obtemos a equação biharmônica de γ, dada por

$$\begin{aligned} \tau_2(\gamma) =& \nabla_T^3 T - R^N(T, \nabla_T T)T \\ =& (-3\kappa_1\kappa_1' + \frac{c-1}{4} f f')E_1 \\ & + \Big(\kappa_1'' - \kappa_1^3 - \kappa_1\kappa_2^2 + \frac{(c+3)\kappa_1}{4} - \frac{(c-1)\kappa_1}{4} f^2 \Big) E_2 \\ & + (2\kappa_1'\kappa_2 + \kappa_1\kappa_2')E_3 + \kappa_1\kappa_2\kappa_3 E_4 - \frac{c-1}{4} f'\xi \\ & + \frac{3(c-1)\kappa_1}{4} \langle E_2, \varphi T\rangle \varphi T \\ =& 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Se $c = 1$, então a curva γ é próprio-biharmônica se, e somente se,

$$\kappa_1 = \text{constante} > 0, \quad \kappa_2 = \text{constante}, \quad \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 1 \quad \text{e} \quad \kappa_2\kappa_3 = 0$$

e, portanto, temos o próximo teorema.

TEOREMA 3.12 ([**19**]). *Seja $\gamma : I \to N^{2n+1}(1)$ uma curva de Frenet não-Legendre. Então γ é próprio-biharmônica se, e somente se, ou é um círculo com $\kappa_1 = 1$, ou uma hélice com $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 1$.*

Em seguida, suponhamos que $c \neq 1$. Da equação biharmônica (3.15), segue-se que a curva γ é próprio-biharmônica se, e somente se, $\kappa_1 > 0$ e

(1) $f' = 0$ ou $\xi \in \operatorname{span}\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ em cada ponto de γ;
(2) $\varphi T \perp E_2$ ou $\varphi T \in \operatorname{span}\{E_2, E_3, E_4\}$;
(3) $g(\tau_2(\gamma), E_i) = 0$, $\forall\, i \in \{1, 4\}$.

Calculando $\langle \tau_2(\gamma), E_i\rangle = 0$, $\forall\, i \in \{1, 4\}$, obtemos que a curva γ é próprio-biharmônica se, e somente se,

(1) $f' = 0$ ou $\xi \in \operatorname{span}\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ em cada ponto de γ;
(2) $\varphi T \perp E_2$ ou $\varphi T \in \operatorname{span}\{E_2, E_3, E_4\}$; e
(3)

$$\begin{cases} \kappa_1 = \text{constante} > 0 \\ \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \frac{c+3}{4} - \frac{c-1}{4} f^2 - \frac{1}{\kappa_1^2}\frac{c-1}{4}(f')^2 + \frac{3(c-1)}{4}\langle E_2, \varphi T\rangle^2 \\ \kappa_2' - \frac{1}{\kappa_1}\frac{c-1}{4} f'\eta(E_3) + \frac{3(c-1)}{4}\langle E_2, \varphi T\rangle\langle E_3, \varphi T\rangle = 0 \\ \kappa_2\kappa_3 - \frac{1}{\kappa_1}\frac{c-1}{4} f'\eta(E_4) + \frac{3(c-1)}{4}\langle E_2, \varphi T\rangle\langle E_4, \varphi T\rangle = 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

Para obter a segunda equação, usamos que $\eta(E_2) = \langle E_2, \xi\rangle = f'/\kappa_1$, que segue de $\eta(T) = \langle T, \xi\rangle = f$ e da primeira equação de Frenet de γ.

A fim de resolver estas equações e encontrar exemplos de curvas não-Legendre biharmônicas vamos considerar, a seguir, alguns casos particulares.

3.1. Curvas não-Legendre biharmônicas com $\eta(\mathbf{T})$ constante. Se o ângulo $\beta_1 \in (0, \pi)\backslash\{\pi/2\}$, entre o campo vetorial tangente T e o campo vetorial característico ξ, é constante, o que implica que $f = \eta(T) = \cos\beta_1$ também é constante, temos que as equações (3.16) tornaram-se significativamente mais simples. Por isso, primeiro vamos estudar este caso.

TEOREMA 3.13 ([**19**]). *Seja $\gamma : I \to N$ uma curva de Frenet não-Legendre em $N^{2n+1}(c)$, $c \neq 1$, tal que $f = \eta(T) = \cos\beta_1$ é uma constante diferente de -1, 0 e 1. Então, γ é próprio-biharmônica se, e somente se,*

(1) *γ é um círculo satisfazendo $\varphi T = \pm \operatorname{sen}\beta_1 E_2$ e*

$$\kappa_1^2 = 1 + (c-1)\operatorname{sen}^2\beta_1 > 0;$$

ou

(2) *γ é uma hélice satisfazendo $\varphi T = \pm\operatorname{sen}\beta_1 E_2$ e $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 1 + (c-1)\operatorname{sen}^2\beta_1 > 0$; ou*

(3) *$n \geq 2$ e γ é uma curva de Frenet de ordem de osculação r, onde $r \geq 4$, satisfazendo*

$$\varphi T = \operatorname{sen}\beta_1\cos\beta_2 E_2 + \operatorname{sen}\beta_1\operatorname{sen}\beta_2 E_4$$

e

$$\begin{cases} \kappa_1 = \text{constante} > 0, \quad \kappa_2 = \text{constante} \\ \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \frac{c+3}{4} - \frac{c-1}{4}\cos^2\beta_1 + \frac{3(c-1)}{4}\operatorname{sen}^2\beta_1\cos^2\beta_2 \\ \kappa_2\kappa_3 = -\frac{3(c-1)}{8}\operatorname{sen}^2\beta_1\operatorname{sen}(2\beta_2), \end{cases}$$

onde $\beta_2 \in (0, 2\pi)$ é uma constante tal que

$$c + 3 - (c-1)\cos^2\beta_1 + 3(c-1)\operatorname{sen}^2\beta_1\cos^2\beta_2 > 0 \quad e \quad 3(c-1)\operatorname{sen}(2\beta_2) < 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Podemos ver que $\eta(E_2) = \langle E_2, \xi\rangle = (1/\kappa_1)f' = 0$. Consideremos $\alpha = \langle E_2, \varphi T\rangle$ uma função definida ao longo de γ. Então, da segunda equação de Frenet de γ, obtemos

$$\alpha' = \langle\nabla_T E_2, \varphi T\rangle + \langle E_2, \nabla_T\varphi T\rangle = \kappa_2\langle E_3, \varphi T\rangle + \langle E_2, \kappa_1\varphi E_2 + \xi - fT\rangle$$

e, como o segundo termo do lado direito é igual a zero, segue-se que

$$\kappa_2\langle E_3, \varphi T\rangle = \alpha'.$$

Agora, suponhamos que a curva γ é próprio-biharmônica. Substituindo $\langle E_3, \varphi T\rangle$ na terceira equação de (3.16), temos que

$$\kappa_2\kappa_2' + \frac{3(c-1)}{4}\alpha\alpha' = 0$$

e, então,

$$\kappa_2^2 + \frac{3(c-1)}{4}\alpha^2 + \omega_0 = 0,$$

onde ω_0 é uma constante. A segunda equação de (3.16) torna-se

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \frac{c+3}{4} - \frac{c-1}{4}f^2 - \kappa_2^2 - \omega_0,$$

o que significa que κ_2 = constante e, portanto, α = constante. Além disso, obtemos que

$$\kappa_2\langle E_3, \varphi T\rangle = 0. \tag{3.17}$$

Se $\kappa_2 = 0$, então, da equação biharmônica (3.15), temos que $E_2 \parallel \varphi T$ e, como $\langle \varphi T, \varphi T\rangle = 1 - f^2 = \operatorname{sen}^2\beta_1$, segue-se que $\varphi T = \pm \sin\beta_1 E_2$. Portanto, γ é um círculo com

$$\kappa_1^2 = \frac{c+3}{4} - \frac{c-1}{4}\cos^2\beta_1 + \frac{3(c-1)}{4}\operatorname{sen}^2\beta_1 = 1 + (c-1)\operatorname{sen}^2\beta_1.$$

Se $\kappa_2 \neq 0$, da equação (3.17), segue-se que $\langle E_3, \varphi T\rangle = 0$ e então, se $\kappa_3 = 0$, a curva γ é uma hélice com

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \frac{c+3}{4} - \frac{c-1}{4}\cos^2\beta_1 + \frac{3(c-1)}{4}\operatorname{sen}^2\beta_1 = 1 + (c-1)\operatorname{sen}^2\beta_1,$$

pois, usando novamente a equação (3.15), temos que $E_2 \parallel \varphi T$, o que significa que $\varphi T = \pm\operatorname{sen}\beta_1 E_2$, neste caso também.

A seguir, suponhamos que $n \geq 2$, $\kappa_2 \neq 0$ e $\kappa_3 \neq 0$. Então, a ordem de osculação da curva γ é $r \geq 4$ e, de (3.17), temos que $\langle E_3, \varphi T\rangle = 0$. Da equação (3.15), segue-se que $\varphi T \in \operatorname{span}\{E_2, E_4\}$. Como

$$\langle \varphi T, \varphi T\rangle = 1 - f^2 = \operatorname{sen}^2\beta_1,$$

pode-se ver que

$$\varphi T = \operatorname{sen}\beta_1\cos\beta_2 E_2 + \operatorname{sen}\beta_1\operatorname{sen}\beta_2 E_4,$$

onde

$$\langle E_2, \varphi T\rangle = \alpha = \operatorname{sen}\beta_1\cos\beta_2 \quad \text{e} \quad \langle E_4, \varphi T\rangle = \operatorname{sen}\beta_1\operatorname{sen}\beta_2,$$

com $\beta_2 \in (0, 2\pi)$, β constante. Concluímos a prova usando (3.16). $\square$

Observação 3.6. Se γ é uma curva de Frenet de ordem de osculação $r > 1$, não necessariamente biharmônica, com $\eta(T) = f$ = constante, numa forma espacial Sasakiana de dimensão 3, então pode-se ser considerado um sistema ortogonal de campos de vetores $\{E = T - f\xi, \varphi T, \xi\}$ ao longo de γ e, usando este sistema, e fácil ver que, neste caso, $E_2 \parallel \varphi T$.

3.2. Curvas não-Legendre biharmônicas com $E_2 \perp \varphi T$ ou $E_2 \parallel \varphi T$. Seja $\gamma : I \to N^{2n+1}(c)$, $c \neq 1$, $n \geq 2$, uma curva de Frenet numa forma espacial Sasakiana.

Nesta seção, vamos estudar os dois casos especiais quando $E_2 \perp \varphi T$ ou $E_2 \parallel \varphi T$ e $\eta(T) = f(s) = \cos(\beta(s)) \neq 0$ não é necessariamente constante. Porém, vamos ver que estas hipóteses, junto com a biharmonicidade, implicam $\eta(T) = f =$ constante.

Caso I: $\mathbf{c \neq 1}$ e $\mathbf{E_2 \perp \varphi T}$. Neste caso, γ é próprio-biharmônica se, e somente se,

(1) $f' = 0$ ou $\xi \in \operatorname{span}\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ em cada ponto de γ; e

(2)

$$\begin{cases} \kappa_1 = \text{constante} > 0 \\ \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \frac{c+3}{4} - \frac{c-1}{4} f^2 - \frac{1}{\kappa_1^2}\frac{c-1}{4}(f')^2 \\ \kappa_2' - \frac{1}{\kappa_1}\frac{c-1}{4} f'\eta(E_3) = 0 \\ \kappa_2\kappa_3 - \frac{1}{\kappa_1}\frac{c-1}{4} f'\eta(E_4) = 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Como $\langle E_2, \xi\rangle = (1/\kappa_1)f'$, obtemos $\langle \nabla_T E_2, \xi\rangle - \langle E_2, \varphi T\rangle = (1/\kappa_1)f''$ e, então, $\kappa_2\eta(E_3) = (1/\kappa_1)f'' + \kappa_1 f$. Substituindo na terceira equação de (3.18), temos

$$\kappa_2\kappa_2' - \frac{1}{\kappa_1^2}\frac{c-1}{4}(f'f'' + \kappa_1^2 f f') = 0,$$

o que significa que

$$\kappa_2^2 - \frac{1}{\kappa_1^2}\frac{c-1}{4}((f')^2 + \kappa_1^2 f^2) + \omega_1 = 0,$$

onde ω_1 é uma constante.

Agora, da segunda equação de (3.18), temos

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \frac{c+3}{4} - \kappa_2^2 - \omega_1$$

e, portanto, $\kappa_2 =$ constante e $(f'' + \kappa_1^2 f)f' = 0$.

Das equações de Frenet e de $\langle E_2, \varphi T\rangle = 0$, obtemos

$$\kappa_2\langle E_3, \varphi T\rangle = -(1/\kappa_1)f'.$$

Então, usando $\kappa_2\langle E_3, \xi\rangle = (1/\kappa_1)f'' + \kappa_1 f$, segue-se que

$$\kappa_2\kappa_3\langle E_4, \xi\rangle = \frac{1}{\kappa_1}(f''' + (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)f').$$

Como $\tau_2(\gamma) = 0$ implica $\eta(\tau_2(\gamma)) = 0$, temos, depois um cálculo direito, que $f'f''' = 0$. Usando este resultado e derivando $(f'' + \kappa_1^2 f)f' = 0$ ao longo de γ, obtemos

$$\kappa_1^2(f')^2 + (f'' + \kappa_1^2 f)f'' = 0.$$

Portanto, $\eta(T) = f =$ constante. Então, da equação (3.15), usando novamente a Observação 3.6, obtemos nosso próximo resultado.

Teorema 3.14 ([**19**]). *Seja* $\gamma : I \to N$ *uma curva de Frenet não-Legendre em* $N^{2n+1}(c)$, $c \neq 1$, $n \geq 2$, *tal que* $E_2 \perp \varphi T$. *Então,* γ *é próprio-biharmônica se, e somente se,*

(1) γ *é um círculo satisfazendo* $\eta(T) = \cos\beta_0$ *e* $\kappa_1^2 = (c+3)/4 - ((c-1)/4)\cos^2\beta_0$; *ou*

(2) γ *é uma hélice satisfazendo* $\eta(T) = \cos\beta_0$ *e* $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = (c+3)/4 - ((c-1)/4)\cos^2\beta_0$, *onde* $\beta_0 \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ *é uma constante tal que* $(c+3)/4 - ((c-1)/4)\cos^2\beta_0 > 0$.

Caso II: $\mathbf{c \neq 1}$ **e** $\mathbf{E_2 \parallel \varphi T}$**.** Neste caso, temos $\langle E_2, \xi\rangle = (1/\kappa_1)f' = 0$ e, então, $f = \cos\beta_0 =$ constante. Como $\langle \varphi T, \varphi T\rangle = 1 - |T|^2 = \operatorname{sen}^2\beta_0$, segue-se que $\varphi T = \pm \operatorname{sen}\beta_0 E_2$ e temos, usando a equação (3.15), a seguinte proposição.

Proposição 3.15. *Seja* $\gamma : I \to N$ *uma curva de Frenet não-Legendre em* $N^{2n+1}(c)$, $c \neq 1$, *tal que* $E_2 \parallel \varphi T$. *Então,* γ *é próprio-biharmônica se, e somente se,*

(1) γ *é um círculo satisfazendo* $\eta(T) = \cos\beta_0$ *e* $\kappa_1^2 = c - (c-1)\cos^2\beta_0$; *ou*

(2) γ *é uma hélice satisfazendo* $\eta(T) = \cos\beta_0$ *e* $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = c - (c-1)\cos^2\beta_0$, *onde* $\beta_0 \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ *é uma constante tal que* $c - (c-1)\cos^2\beta_0 > 0$.

Agora, seja γ uma curva próprio-biharmônica não-Legendre tal que $E_2 \parallel \varphi T$. Como $\varphi T = \pm \operatorname{sen}\beta_0 E_2$, obtém-se, depois um cálculo direito, que

$$\nabla_T E_2 = -\frac{1}{\operatorname{sen}\beta_0}\Big(\frac{\kappa_1}{\operatorname{sen}\beta_0} \pm \cos\beta_0\Big)T + \frac{1}{\operatorname{sen}\beta_0}\Big(\frac{\kappa_1\cos\beta_0}{\operatorname{sen}\beta_0} \pm 1\Big)\xi.$$

Usando a equação segunda de Frenet da curva γ, temos

$$\kappa_2^2 = \frac{(\kappa_1\cos\beta_0 \pm \operatorname{sen}\beta_0)^2}{\operatorname{sen}^2\beta_0}.$$

Portanto, γ é um círculo se, e somente se, $\kappa_1 = \mp\tan\beta_0 > 0$. Da Proposição 3.15, é fácil ver que γ é um círculo próprio-biharmônico se, e somente se,

$$\kappa_1^2 = \frac{c - 1 + \sqrt{c^2 - 2c + 5}}{2} \quad \text{e} \quad \cos^2\beta_0 = \frac{c + 1 - \sqrt{c^2 - 2c + 5}}{2(c-1)}.$$

Se $\kappa_2 \neq 0$, da expresão de κ_2 e da terceira equação de Frenet, segue-se que $\kappa_3 = 0$ e, então, γ é uma hélice. Agora, γ é próprio-biharmônica se, e somente se, κ_1 satisfaz

$$\kappa_1^2 \pm \cos(2\beta_0)\kappa_1 + (1-c)\operatorname{sen}^4\beta_0 = 0,$$

onde $\beta_0 \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\}$, se $c > 1$, ou $\beta_0 \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ tal que $\cos\beta_0 \in (-\sqrt{(c-1)/(c-2)}, \sqrt{(c-1)/(c-2)})$, se $c < 1$.

Concluímos essa seção com o seguinte teorema.

Teorema 3.16 ([**19**]). *Seja* $\gamma : I \to N$ *uma curva de Frenet não-Legendre em* $N^{2n+1}(c)$, $c \neq 1$, *tal que* $E_2 \parallel \varphi T$. *Então,* γ *é próprio-biharmônica se, e somente se,*

(1) *γ é um círculo satisfazendo*

$$\eta(T) = \pm\sqrt{\frac{c+1-\sqrt{c^2-2c+5}}{2(c-1)}}$$

e $\kappa_1^2 = (c-1+\sqrt{c^2-2c+5})/2$; *ou*

(2) *γ é uma hélice tal que* $\eta(T) = \cos\beta_0$ *e* κ_1 *satisfaz*

$$\kappa_1^2 \pm \cos(2\beta_0)\kappa_1 + (1-c)\,\mathrm{sen}^4\,\beta_0 = 0,$$

onde $\beta_0 = \text{constante} \in (0,2\pi)\setminus\{\pi/2,\pi,3\pi/2\}$, *se* $c>1$; *ou* $\beta_0 = \text{constante} \in (0,2\pi)\setminus\{\pi/2,\pi,3\pi/2\}$ *tal que*

$$\cos\beta_0 \in \Big(-\sqrt{\frac{c-1}{c-2}}, \sqrt{\frac{c-1}{c-2}}\Big),$$

se $c<1$. *Neste caso, temos* $\kappa_2^2 = (\kappa_1\cot\beta_0 \pm 1)^2$.

3.3. Curvas biharmônicas em $\mathbb{R}^{2n+1}(-3)$. Como já vimos, enquanto curvas Legendre biharmônicas existem apenas em formas espaciais Sasakianas $N^{2n+1}(c)$ com curvatura φ-seccional constante $c>1$, se $n=1$, ou $c>-3$, se $n>1$, curvas próprio-biharmônicas não-Legendre existem em formas espaciais Sasakianas com qualquer curvatura φ-seccional.

Neste seção, vamos obter as equações explícitas de círculos próprio-biharmônicos satisfazendo $E_2 \perp \varphi T$ e as equações explícitas de curvas próprio-biharmônicas com $E_2 \parallel \varphi T$ em $\mathbb{R}^{2n+1}(-3)$. Em seguida, consideraremos a forma espacial Sasakiana $\mathbb{R}^{2n+1}(-3)$ com curvatura φ-seccional constante -3.

Em $\mathbb{R}^{2n+1}$, com coordenadas

$$(x^1,\ldots,x^n,y^1,\ldots,y^n,z),$$

sejam os campos de vetores $X_i = 2(\partial/\partial y^i)$, $X_{n+i} = \varphi X_i = 2(\partial/\partial x^i) + y^i(\partial/\partial z)$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, e $\xi = 2(\partial/\partial z)$. Então, $\{X_i, Y_i, \xi\}$ é um referencial ortonormal em $\mathbb{R}^{2n+1}(-3)$ satisfazendo

$$[X_i,X_j] = [X_{n+i},X_{n+j}] = [X_i,\xi] = [X_{n+i},\xi] = 0, \quad [X_i,X_{n+j}] = 2\delta_{ij}\xi$$

e

$$\nabla_{X_i}X_j = \nabla_{X_{n+i}}X_{n+j} = 0, \quad \nabla_{X_i}X_{n+j} = \delta_{ij}\xi, \quad \nabla_{X_{n+i}}X_j = -\delta_{ij}\xi,$$
$$\nabla_{X_i}\xi = \nabla_\xi X_i = -X_{n+i}, \quad \nabla_{X_{n+i}}\xi = \nabla_\xi X_{n+i} = X_i, \quad \forall i,j\in\{1,\ldots,n\}.$$

Agora, seja $\gamma: I \to \mathbb{R}^{2n+1}(-3)$ uma curva de Frenet de ordem de osculação $r>1$ e o campo vetorial tangente $T=\gamma'$, dado por

$$T = \sum_{i=1}^n (T_iX_i + T_{n+i}X_{n+i}) + \cos\beta_0\xi, \tag{3.19}$$

onde β_0 é uma constante. Usando as fórmulas de conexão Levi-Civita, obtemos

$$\nabla_T T = \sum_{i=1}^n ((T_i' + 2\cos\beta_0 T_{n+i})X_i + (T_{n+i}' - 2\cos\beta_0 T_i)X_{n+i}). \tag{3.20}$$

Teorema 3.17 ([**19**]). *As equações paramétricas dos círculos próprio-biharmônicos, parametrizados por comprimento de arco, em* $\mathbb{R}^{2n+1}(-3)$*,* $n \geq 2$*, satisfazendo* $E_2 \perp \varphi T$*, são*

(3.21)
$$\begin{cases} x^i(s) = & \pm\frac{1}{\kappa_1}\{2\operatorname{sen}(\kappa_1 s)c_1^i \mp 2\cos(\kappa_1 s)c_2^i - \cos(2\kappa_1 s)d_1^i - \operatorname{sen}(2\kappa_1 s)d_2^i\} \\ & +a^i \\ y^i(s) = & \frac{1}{\kappa_1}\{2\cos(\kappa_1 s)c_1^i \pm 2\operatorname{sen}(\kappa_1 s)c_2^i + \operatorname{sen}(2\kappa_1 s)d_1^i - \cos(2\kappa_1 s)d_2^i\} + b^i \\ z(s) \;= & \pm\frac{2}{\kappa_1}\{1+\sum_{i=1}^n((c_1^i)^2+(c_2^i)^2)\}s \\ & +\frac{1}{2\kappa_1^2}\sum_{i=1}^n\{\pm\cos(4\kappa_1 s)d_1^i d_2^i - 2\cos(2\kappa_1 s)c_1^i c_2^i \\ & +4\cos(3\kappa_1 s)c_2^i d_2^i - 4\operatorname{sen}(3\kappa_1 s)c_1^i d_2^i\} \\ & \mp\frac{1}{\kappa_1}\sum_{i=1}^n b^i\{-2\operatorname{sen}(\kappa_1 s)c_1^i \pm 2\cos(\kappa_1 s)c_2^i \\ & +\cos(2\kappa_1 s)d_1^i + \operatorname{sen}(2\kappa_1 s)d_2^i\} + e, \end{cases}$$

onde $\kappa_1^2 = \cos^2\beta_0$*,* $\beta_0 \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ *é uma constante e* a^i*,* b^i*,* c_1^i*,* c_2^i*,* d_1^i*,* d_2^i*, e são constantes tal que os vetores constantes* $c_j = (c_j^1, \ldots, c_j^n)$ *e* $d_j = (d_j^1, \ldots, d_j^n)$*,* $j \in \{1, 2\}$*, satisfazem*

$$\begin{cases} |c_1|^2 + |c_2|^2 + |d_1|^2 + |d_2|^2 = \operatorname{sen}^2\beta_0 \\ \langle c_1, d_1\rangle \pm \langle c_2, d_2\rangle = 0, \quad \langle c_1, d_2\rangle \mp \langle c_2, d_1\rangle = 0. \end{cases}$$

Demonstração. Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^{2n+1}(-3)$ um círculo parametrizado por comprimento de arco, com campo vetorial tangente $T = \gamma'$ dado pela equação (3.19) e $E_2 \perp \varphi T$. Da equação (3.20), obtemos

$$E_2 = \frac{1}{\kappa_1}\sum_{i=1}^n((T_i' + 2\cos\beta_0 T_{n+i})X_i + (T_{n+i}' - 2\cos\beta_0 T_i)X_{n+i})$$

e, como $\langle E_2, \varphi T\rangle = 0$, temos

$$\begin{aligned}\nabla_T E_2 =& \frac{1}{\kappa_1}(\sum_{i=1}^n((T_i' + 2\cos\beta_0 T_{n+i})' + (T_{n+i}' - 2\cos\beta_0 T_i)\cos\beta_0)X_i \\ &+ ((T_{n+i}' - 2\cos\beta_0 T_i)' - (T_i' + 2\cos\beta_0 T_{n+i})\cos\beta_0)X_{n+i})\end{aligned}$$

e, já que γ é um círculo, segue-se que

$$A_i' + B_i\cos\beta_0 = 0 \quad \text{and} \quad B_i' - A_i\cos\beta_0 = 0, \tag{3.22}$$

onde $A_i = (1/\kappa_1)(T_i' + 2\cos\beta_0 T_{n+i})$ e $B_i = (1/\kappa_1)(T_{n+i}' - 2\cos\beta_0 T_i)$.

Resolvendo as equações (3.22) e usando que γ é próprio-biharmônica (pelo Teorema 3.14, isto significa que $\kappa_1 = \pm\cos\beta_0 > 0$), temos as seguintes equações

$$\begin{cases} T_i' \pm 2\kappa_1 T_{n+i} = \kappa_1\cos(\kappa_1 s)c_1^i \pm \kappa_1\operatorname{sen}(\kappa_1 s)c_2^i \\ T_{n+i}' \mp 2\kappa_1 T_i = \pm\kappa_1\operatorname{sen}(\kappa_1 s)c_1^i - \kappa_1\cos(\kappa_1 s)c_2^i, \end{cases}$$

cuja solução geral é

$$\begin{cases} T_i = -\operatorname{sen}(\kappa_1 s)c_1^i \pm \cos(\kappa_1 s)c_2^i + \cos(2\kappa_1 s)d_1^i + \sin(2\kappa_1 s)d_2^i \\ T_{n+i} = \pm\cos(\kappa_1 s)c_1^i + \operatorname{sen}(\kappa_1 s)c_2^i \pm \operatorname{sen}(2\kappa_1 s)d_1^i \mp \cos(2\kappa_1 s)d_2^i, \end{cases}$$

onde c_1^i, c_2^i, d_1^i e d_2^i são constantes tais que

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n ((c_1^i)^2 + (c_2^i)^2 + (d_1^i)^2 + (d_2^i)^2) = \operatorname{sen}^2\beta_0 \\ \sum_{i=1}^n ((c_1^i)(d_1^i) \pm (c_2^i)(d_2^i)) = 0 \\ \sum_{i=1}^n ((c_1^i)(d_2^i) \mp (c_2^i)(d_1^i)) = 0, \end{cases}$$

pois $|T| = 1$. Substituindo essas relações na expressão de γ' e integrando, obtemos (3.21). $\square$

Pelo mesmo método, podemos mostrar o seguinte resultado.

TEOREMA 3.18 ([**19**]). *As curvas próprio-biharmônicas parametrizadas por comprimento de arco em $\mathbb{R}^{2n+1}(-3)$, tais que $E_2 \parallel \varphi T$, são*

(1) *círculos próprio-biharmônicos dados por*

$$\begin{cases} x^i(s) = & (\sqrt{5}+1)\Big(\cos\Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}s\Big)c_1^i + \operatorname{sen}\Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}s\Big)c_2^i\Big) + a^i \\ y^i(s) = & (\sqrt{5}+1)\Big(\operatorname{sen}\Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}s\Big)c_1^i - \cos\Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}s\Big)c_2^i\Big) + b^i \\ z(s) = & \frac{1-\sqrt{5}\pm 2\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2}s + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\sum_{i=1}^n\{((c_1^i)^2 - (c_2^i)^2)\operatorname{sen}((\sqrt{5}-1)s) \\ & -2\cos((\sqrt{5}-1)s)c_1^i c_2^i\} + (1+\sqrt{5})\sum_{i=1}^n b_i\Big\{\operatorname{sen}\Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}s\Big)c_2^i \\ & +\cos\Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}s\Big)c_1^i\Big\} + d, \end{cases}$$

onde a^i, b^i, c_1^i, c_2^i e d são constantes e os vetores constantes $c_j = (c_j^1, \ldots, c_j^n)$, $j \in \{1, 2\}$, satisfazem $|c_1|^2 + |c_2|^2 = (3-\sqrt{5})/4$; ou

(2) *hélices próprio-biharmônicas dadas por*

$$\begin{cases} x^i(s) = & -\frac{2\kappa_1}{\kappa_1 \pm \sin(2\beta_0)}\Big(\cos\Big(\frac{\kappa_1 \pm \operatorname{sen}(2\beta_0)}{\kappa_1}s\Big)c_1^i + \operatorname{sen}\Big(\frac{\kappa_1 \pm \operatorname{sen}(2\beta_0)}{\kappa_1}s\Big)c_2^i\Big) + a^i \\ y^i(s) = & \frac{2\kappa_1}{\kappa_1 \pm \operatorname{sen}(2\beta_0)}\Big(\operatorname{sen}\Big(\frac{\kappa_1 \pm \operatorname{sen}(2\beta_0)}{\kappa_1}s\Big)c_1^i - \cos\Big(\frac{\kappa_1 \pm \operatorname{sen}(2\beta_0)}{\kappa_1}s\Big)c_2^i\Big) + b^i \\ z(s) = & 2\Big(\cos\beta_0 + \frac{\kappa_1 \operatorname{sen}^2\beta_0}{\kappa_1 \pm \operatorname{sen}(2\beta_0)}\Big)s + \frac{\kappa_1^2}{(\kappa_1 \pm \operatorname{sen}(2\beta_0))^2} \\ & \Big\{\operatorname{sen}\Big(\frac{2(\kappa_1 \pm \operatorname{sen}(2\beta_0))}{\kappa_1}s\Big)\sum_{i=1}^n((c_1^i)^2 - (c_2^i)^2) \\ & +\cos\Big(\frac{2(\kappa_1 \pm \operatorname{sen}(2\beta_0))}{\kappa_1}s\Big)\sum_{i=1}^n(c_1^i c_2^i)\Big\} \\ & -\frac{2\kappa_1}{\kappa_1 \pm \operatorname{sen}(2\beta_0)}\sum_{i=1}^n b^i\Big\{\cos\Big(\frac{\kappa_1 \pm \operatorname{sen}(2\beta_0)}{\kappa_1}s\Big)c_1^i \\ & +\operatorname{sen}\Big(\frac{\kappa_1 \pm \operatorname{sen}(2\beta_0)}{\kappa_1}s\Big)c_2^i\Big\} + d, \end{cases}$$

onde $\beta_0 \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ é uma constante tal que

$$\cos\beta_0 \in \Big(-1, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\Big) \cup \Big(\frac{2\sqrt{5}}{5}, 1\Big),$$

κ_1 é uma solução positiva da equação

$$\kappa_1^2 \pm \operatorname{sen}(2\beta_0)\kappa_1 + 4\operatorname{sen}^4\beta_0 = 0,$$

a^i, b^i, c_1^i, c_2^i, d são constantes e os vetores constantes

$$c_j = (c_j^1, \ldots, c_j^n), \quad j \in \{1, 2\},$$

satisfazem $|c_1|^2 + |c_2|^2 = \operatorname{sen}^2\beta_0$.

4. Subvariedades anti-invariantes biharmônicas

O resultado principal desta seção fornece um método para construir subvariedades anti-invariantes biharmônicas em uma forma espacial Sasakiana.

Teorema 3.19 ([**22**]). *Sejam $(N^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma forma espacial Sasakiana com curvatura φ-seccional constante c e $f : \Sigma^r \to N$ uma subvariedade integral r-dimensional de N, $1 \leq r \leq n$. Consideremos*

$$F : \widetilde{\Sigma} = I \times \Sigma^r \to N, \quad F(t,p) = \phi_t(p) = \phi_p(t),$$

onde $I = \mathbb{S}^1$ ou $I = \mathbb{R}$ e $\{\phi_t\}_{t\in I}$ é o fluxo de campo de vetores ξ. Então, temos que $F : (\widetilde{\Sigma}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\widetilde{\Sigma}} = dt^2 + f^*\langle\cdot,\cdot\rangle) \to N$ é uma imersão Riemanniana que é próprio-biharmônica se, e somente se, Σ^r é uma subvariedade próprio-biharmônica em N.

Demonstração. Da definição do fluxo de ξ, temos

$$dF(t,p)\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=t}\{\phi_p(s)\} = \dot{\phi}_p(t) = \xi(\phi_p(t)) = \xi(F(t,p)),$$

ou seja, $\partial/\partial t$ é F-correlacionado com ξ e

$$\Big|dF(t,p)\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)\Big| = |\xi(F(t,p))| = 1 = \Big|\frac{\partial}{\partial t}\Big|.$$

O vetor $X_p \in T_p\Sigma^r$ pode ser identificado com $(0, X_p) \in T_{(t,p)}(I \times \Sigma^r)$ e, assim, obtemos

$$dF_{(t,p)}(X_p) = (dF)_{(t,p)}(\dot{\gamma}(0)) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\{\phi_t(\gamma(s))\} = (d\phi_t)_p(X_p).$$

Como ϕ_t é isométrica, também temos $|dF_{(t,p)}(X_p)| = |(d\phi_t)_p(X_p)| = |X_p|$. Além disso,

$$\begin{aligned}\Big\langle dF_{(t,p)}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big), dF_{(t,p)}(X_p)\Big\rangle &= \langle \xi(\phi_p(t)), (d\phi_t)_p(X_p)\rangle \\ &= \langle (d\phi_t)_p(\xi_p), (d\phi_t)_p(X_p)\rangle = \langle \xi_p, X_p\rangle = 0 \\ &= \Big\langle \frac{\partial}{\partial t}, X_p\Big\rangle_{\widetilde{\Sigma}},\end{aligned}$$

e, portanto, $F : (I \times \Sigma^r, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\widetilde{\Sigma}}) \to N$ é uma imersão Riemanniana.

Sejam $F^{-1}(TN)$ o fibrado pull-back sobre $\widetilde{\Sigma}$ e ∇^F a conexão pull-back determinada pela conexão de Levi-Civita em N. Vamos mostrar que

$$\tau(F)_{(t,p)} = (d\phi_t)_p(\tau(f)) \quad \text{and} \quad \tau_2(F)_{(t,p)} = (d\phi_t)_p(\tau_2(f))$$

e, portanto, do ponto de vista da harmonicidade e biharmonicidade, $\widetilde{\Sigma}$ e Σ^r têm o mesmo comportamento.

Inicialmente, vamos fazer duas observações. Primeiro, seja ν uma seção em $F^{-1}(TN)$ definida por $\nu_{(t,p)} = (d\phi_t)_p(Z_p)$, onde Z é um campo de vetores ao longo de Σ^r, ou seja, $Z_p \in T_pN$, $\forall\ p \in \Sigma^r$. É fácil verificar que

$$(\nabla^F_X \nu)_{(t,p)} = (d\phi_t)_p(\nabla^N_X Z), \quad \forall\ X \in C(T\Sigma^r). \tag{3.23}$$

Então, se $\nu \in C(F^{-1}(TN))$, segue-se que $\varphi\nu$, dada por $(\varphi\nu)_{(t,p)} = \varphi_{\phi_p(t)}(\nu_{(t,p)})$ é uma seção em $F^{-1}(TN)$ e

$$\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}} \varphi\nu = \varphi\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}} \nu. \tag{3.24}$$

Agora, consideremos $\{X_1, ..., X_r\}$ um referencial local ortonormal em U, onde U é um subconjunto aberto de Σ^r. O campo de tensão de F é dado por

$$\tau(F) = \nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}} dF\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big) - dF\Big(\nabla^{\widetilde{\Sigma}}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t}\Big) + \sum_{i=1}^{r} \Big\{\nabla^F_{X_i} dF(X_i) - dF(\nabla^{\widetilde{\Sigma}}_{X_i} X_i)\Big\}. \tag{3.25}$$

Como

$$\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}} dF\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big) = \nabla^N_\xi \xi = 0, \quad \nabla^{\widetilde{\Sigma}}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} = \nabla^I_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} = 0,$$

$$(\nabla^F_{X_a} dF(X_a))_{(t,p)} = (d\phi_t)_p(\nabla^N_{X_a} X_a), \quad dF_{(t,p)}(\nabla^{\widetilde{\Sigma}}_{X_i} X_i) = (d\phi_t)_p(\nabla^{\Sigma^r}_{X_i} X_i),$$

substituindo essas expressões em (3.25), temos

$$\tau(F)_{(t,p)} = (d\phi_t)_p(\tau(f)).$$

Para mostrar que $\tau_2(F)_{(t,p)} = (d\phi_t)_p(\tau_2(f))$, vamos primeiro provar que

$$\nabla^F_{\partial/\partial t} \tau(F) = -\varphi(\tau(F)).$$

Como $[\partial/\partial t, X_i] = 0$, $i \in \{1, ..., r\}$, segue-se que

$$\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}} dF(X_i) = \nabla^F_{X_i} dF\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big).$$

Também temos

$$\begin{aligned}\Big(\nabla^F_{X_i} dF\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)\Big)_{(t,p)} &= \nabla^N_{dF_{(t,p)}X_i} \xi = \nabla^N_{(d\phi_t)_p X_i} \xi = -\varphi((d\phi_t)_p(X_i)) \\ &= -(d\phi_t)_p(\varphi X_i)\end{aligned}$$

e, então,

$$\Big(\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}} dF(X_i)\Big)_{(t,p)} = -(d\phi_t)_p(\varphi X_i). \tag{3.26}$$

Observamos que

$$R^F\Big(\frac{\partial}{\partial t}, X_i\Big) dF(X_i) = \nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^F_{X_i} dF(X_i) - \nabla^F_{X_i} \nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}} dF(X_i)$$

e, como N é uma forma espacial Sasakiana,

$$\Big(R^F\Big(\frac{\partial}{\partial t}, X_i\Big)dF(X_i)\Big)_{(t,p)} = R^N_{\phi_t(p)}(\xi, (d\phi_t)_p(X_i))(d\phi_t)_p(X_i) = \xi.$$

Portanto,

$$\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla^F_{X_i}dF(X_i) - \nabla^F_{X_i}\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}}dF(X_i) = \xi. \tag{3.27}$$

Usando (3.23) e (3.26), o termo $\nabla^F_{X_a}\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}}dF(X_a)$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\Big(\nabla^F_{X_i}\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}}dF(X_i)\Big)_{(t,p)} &= -(d\phi_t)_p(\nabla^N_{X_i}\varphi X_i)\\ &= -(d\phi_t)_p(\xi + \varphi\nabla^N_{X_i}X_i).\end{aligned} \tag{3.28}$$

Além disso, da equação (3.26), temos

$$\begin{aligned}\Big(\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}}dF(\nabla^{\widetilde{\Sigma}}_{X_i}X_i)\Big)_{(t,p)} &= \Big(\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}}dF(\nabla^{\Sigma^r}_{X_i}X_i)\Big)_{(t,p)}\\ &= -(d\phi_t)_p(\varphi\nabla^{\Sigma^r}_{X_i}X_i).\end{aligned} \tag{3.29}$$

Substituindo (3.28) em (3.27) e usando (3.29), obtemos

$$\begin{aligned}\xi =&\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla^F_{X_i}dF(X_i) - \nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}}dF(\nabla^{\widetilde{\Sigma}}_{X_i}X_i) + \nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}}dF(\nabla^{\widetilde{\Sigma}}_{X_i}X_i) - \nabla^F_{X_i}\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}}dF(X_i)\\ =&\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla dF(X_i, X_i) - (d\phi_t)_p(\varphi\nabla^{\Sigma^r}_{X_i}X_i) + (d\phi_t)_p(\xi + \varphi\nabla^N_{X_i}X_i)\\ =&\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla dF(X_i, X_i) + \varphi(d\phi_t)_p(\nabla^N_{X_i}X_i - \nabla^{\Sigma^r}_{X_i}X_i) + \xi\end{aligned}$$

e, então,

$$\Big(\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla dF(X_i, X_i)\Big)_{(t,p)} = -\varphi(d\phi_t)_p(\nabla df(X_i, X_i)). \tag{3.30}$$

Como $\nabla dF(\partial/\partial t, \partial/\partial t) = 0$, somando em (3.30), obtemos

$$\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}}\tau(F) = -\varphi(\tau(F)). \tag{3.31}$$

De (3.24) e (3.31), temos

$$\begin{aligned}\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}}\tau(F) &= -\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}}\varphi(\tau(F)) = -\varphi\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}}\tau(F) = \varphi^2\tau(F)\\ &= -\tau(F),\end{aligned} \tag{3.32}$$

e, de (3.23), encontramos

$$(\nabla^F_{X_i}\nabla^F_{X_i}\tau(F))_{(t,p)} = (d\phi_t)_p(\nabla^N_{X_i}\nabla^N_{X_i}\tau(f)) \tag{3.33}$$

e

$$\Big(\nabla^F_{\nabla^{\widetilde{\Sigma}}_{X_i}X_i}\tau(F)\Big)_{(t,p)} = (d\phi_t)_p\Big(\nabla^N_{\nabla^{\Sigma^r}_{X_i}X_i}\tau(f)\Big). \tag{3.34}$$

De (3.32), (3.33) e (3.34), obtém-se

$$
\begin{aligned}
(3.35)\quad -(\Delta^F \tau(F))_{(t,p)} =&\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}} \tau(F) + \sum_{i=1}^{r} \{\nabla^F_{X_i} \nabla^F_{X_i} \tau(F) - \nabla^F_{\nabla^{\widetilde{\Sigma}}_{X_i} X_i} \tau(F)\} \\
=& - \tau(F)_{(t,p)} - (d\phi_t)_p(\Delta^f \tau(f)).
\end{aligned}
$$

Usando a expressão do campo tensorial da curvatura R^N, depois realizando um cálculo direito, temos

$$
(3.36)\qquad \operatorname{trace} R^F_{(t,p)}(dF, \tau(F))dF = -\tau(F) + (d\phi_t)_p(\operatorname{trace} R^N_p(df, \tau(f))df).
$$

Finalmente, de (3.35) e (3.36), obtém-se

$$
\tau_2(F)_{(t,p)} = (d\phi_t)_p(\tau_2(f)),
$$

o que conclui a prova. $\square$

Teorema 3.20 ([**25**]). *Seja $\widetilde{\Sigma}^2$ uma superfície em $N^{2n+1}(c)$ invariante sob a ação do fluxo de campo de vetores característico ξ. Então, $\widetilde{\Sigma}^2$ é próprio-biharmônica se, e somente se, é dada (localmente) por $x(t,s) = \phi_t(\gamma(s))$, onde γ é uma curva de Legendre próprio-biharmônica.*

Demonstração. Uma superfície $\widetilde{\Sigma}^2$ que é invariante sob a ação de fluxo de ξ, ou seja, $\phi_t(p) \in \widetilde{\Sigma}^2$ para cada t e $p \in \widetilde{\Sigma}^2$, pode ser escrita (localmente) como $x(t,s) = \phi_t(\gamma(s))$, onde γ é uma curva de Legendre em N. Então, o Teorema 3.19 implica que uma tal superfície é próprio-biharmônica se, e somente se, γ é próprio-biharmônica. $\square$

Corolário 3.21. *Seja $\widetilde{\Sigma}^2$ uma superfície em $\mathbb{S}^{2n+1}(1)$ invariante sob a ação de fluxo de ξ. Então, $\widetilde{\Sigma}^2$ é próprio-biharmônica se, e somente se, é dada localmente por $x(t,s) = \phi_t(\gamma(s))$, onde γ é uma curva de Legendre dada por Teorema 2.2.*

Observação 3.7. Quando o espaço ambiente é $\mathbb{S}^{2n+1}$ com sua estrutura Sasakiana canônica ou deformada, o fluxo de ξ é $\phi_t(z) = \exp(-\mathrm{i}(t/a))z$, e, pelos Teoremas 3.10, 3.11 e 3.19, podemos obter exemplos explícitos de superfícies próprio-biharmônicas com curvatura média constante no espaço $(\mathbb{S}^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, \langle\cdot,\cdot\rangle_a)$, $a \geq 0$. Um tal resultado, fornecendo a equação explícita de cilindros de Hopf próprio-biharmônicos em $\mathbb{S}^3$ com a estrutura Sasakiana deformada, foi obtido, usando um método diferente, em [**21**].

A seguir, consideramos $\widetilde{\Sigma}^2$ uma superfície em $N^{2n+1}(c)$ invariante sob a ação de fluxo de ξ. Sejam $T = \gamma'$ e E_2 os primeiros dois campos de vetores definidos pelas equações de Frenet da curva de Legendre γ. Como $\nabla^F_{\partial/\partial t}\tau(F) = -\varphi(\tau(F))$, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.22. *Seja $\widetilde{\Sigma}^2$ uma superfície próprio-biharmônica na forma espacial Sasakiana $N^{2n+1}(c)$ invariante sob a ação de fluxo de ξ. Então, $\widetilde{\Sigma}^2$ tem o campo de curvatura média paralelo se, e somente se, $c > 1$ e $\varphi T = \pm E_2$.*

Corolário 3.23. *As superfícies próprio-biharmônicas em* $\mathbb{S}^{2n+1}(1)$*, invariantes sob a ação de fluxo de* ξ_0*, não tem o campo de curvatura média paralelo.*

Vamos encerrar esta seção encontrando a equação paramétrica explícita de um cilindro Hopf próprio-biharmônico. Primeiro, vamos precisar do seguinte resultado obtido em [**28**].

Teorema 3.24 ([**28**]). *Seja* $S_{\bar{\gamma}} = \pi^{-1}(\bar{\gamma})$ *um cilindro de Hopf próprio-biharmônico numa forma espacial Sasakiana* $N^3(c)$*, sobre uma curva* $\bar{\gamma} : I \to \bar{N} = N/\xi$ *parametrizada por comprimento de arco. Então,* $c > 1$ *e* $\bar{\gamma}$ *é um círculo com a curvatura* $\bar{\kappa} = \sqrt{c-1}$*.*

Demonstração. Denotamos $f_1 = \bar{\gamma}'$. O levantamento horizontal f_1^H de f_1 e ξ formam um referencial ortonormal em $S_{\bar{\gamma}}$ e φf_1^H é normal à $S_{\bar{\gamma}}$. Usando um resultado obtido em [**36**], temos que

$$\nabla_{f_1^H} f_1^H = (\bar{\nabla}_{f_1} f_1)^H - \langle f_1^H, \varphi f_1^H \rangle = \bar{\kappa} \varphi f_1^H,$$

onde ∇ e $\bar{\nabla}$ são as conexões Levi-Civita em N e $\bar{N}$, respectivamente, e $\bar{\kappa}$ é a curvatura de $\bar{\gamma}$.

Como $\nabla_\xi \xi = 0$, obtém-se $H = (\bar{\kappa}/2)\varphi f_1^H$ e

$$\nabla_{f_1^H} H = \frac{\bar{\kappa}'}{2}\varphi f_1^H - \frac{\bar{\kappa}^2}{2} f_1^H + \frac{\bar{\kappa}}{2}\xi \quad \text{e} \quad \nabla_\xi H = \frac{\bar{\kappa}}{2} f_1^H.$$

Segue-se, depois de um cálculo direito, que

$$\Delta^\perp H = -\frac{\bar{\kappa}''}{2}\varphi f_1^H, \quad \operatorname{trace}\sigma(\cdot, A_H \cdot) = \Big(\frac{\bar{\kappa}^3}{2} - \bar{\kappa}\Big)\varphi f_1^H, \quad \operatorname{trace} A_{\nabla^\perp_\cdot H}\cdot = \frac{\bar{\kappa}\bar{\kappa}'}{2} f_1^H$$

e, utilizando a fórmula (3.1), encontramos

$$\operatorname{trace} R^N(\cdot, H)\cdot = -(c+1)\frac{\bar{\kappa}}{2}\varphi f_1^H.$$

Do Teorema 1.7, obtemos que $S_{\bar{\gamma}}$ é próprio-biharmônico se, e somente se, $\bar{\kappa} = \sqrt{c-1} = \text{constante}$. □

Teorema 3.25 ([**21**]). *A equação paramétrica de um cilindro de Hopf próprio-biharmônico* $S_{\bar{\gamma}} = \pi^{-1}(\bar{\gamma})$ *em* $(\mathbb{S}^3, \varphi, \xi, \eta, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$*, visto como uma superfície em* $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$*, é dada por*

(3.37)

$$\begin{aligned} x = x(u,v) \quad &= \quad \sqrt{\tfrac{B}{A+B}}\cos(Au + \tfrac{1}{a}v)e_1 - \sqrt{\tfrac{B}{A+B}}\operatorname{sen}(Au + \tfrac{1}{a}v)Je_1 + \\ &\quad + \sqrt{\tfrac{A}{A+B}}\cos(Bu - \tfrac{1}{a}v)e_3 + \sqrt{\tfrac{A}{A+B}}\operatorname{sen}(Bu - \tfrac{1}{a}v)Je_3, \end{aligned}$$

onde $\{e_1, e_3\}$ *são vetores constantes ortogonais no espaço Euclidiano* $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *tais que* e_3 *é ortogonal a* Je_1 *e* A *e* B *são dados por*

$$A = \sqrt{\frac{3 - 2a - 2\sqrt{(a-1)(a-2)}}{a}}, \quad B = \sqrt{\frac{3 - 2a + 2\sqrt{(a-1)(a-2)}}{a}}.$$

Demonstração. Seja $\pi : (\mathbb{S}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle_a) \to \mathbb{C}P^1$ a fibração de Boothby-Wang, onde $\mathbb{C}P^1$ é o espaço projetivo complexo com a curvatura seccional holomorfa constante $4/a$. Denotamos por $\bar{\nabla}$, ∇, $\dot{\nabla}$ e $\widetilde{\nabla}$ as conexões Levi-Civita em $\mathbb{C}P^1$, $(\mathbb{S}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle_a)$, $(\mathbb{S}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle_0)$ e $(\mathbb{R}^4, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, respectivamente.

Seja $S_{\bar{\gamma}}$ um cilindro de Hopf próprio-biharmônico em $(\mathbb{S}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle_a)$, onde $\bar{\gamma} : I \to \mathbb{C}P^1$ é a curva base parametrizada por comprimento de arco. Do Teorema 3.24, temos que $\bar{\gamma}$ é um círculo com a curvatura $\bar{\kappa} = \sqrt{c-1}$.

Consideremos, novamente, $f_1 = \bar{\gamma}'$ e o seu levantamento horizontal f_1^H. Como no Teorema 3.24, $\{f_1^H, \xi\}$ é um referencial ortonormal global em $S_{\bar{\gamma}}$ e $f_2^H = \varphi f_1^H$ é normal à $S_{\bar{\gamma}}$, onde $\{f_1, f_2\}$ é um referencial ortogonal em $\bar{N}$ ao longo de $\bar{\gamma}$.

A fim de encontrar a parametrização explícita de $S_{\bar{\gamma}}$ como uma superfície em $\mathbb{R}^4$, temos que obter as expressões para $\widetilde{\nabla}_{f_1^H} f_1^H$, $\widetilde{\nabla}_{f_1^H}\xi$, $\widetilde{\nabla}_{f_1^H} f_2^H$ e $\widetilde{\nabla}_\xi f_2^H$.

Primeiro, temos

$$\nabla_{f_1^H} f_1^H = (\bar{\nabla}_{f_1} f_1)^H - \langle f_1^H, \varphi f_1^H\rangle_a = \bar{\kappa} f_2^H.$$

Agora, usando o Lema 3.2, obtemos

$$\dot{\nabla}_{f_1^H} f_1^H = \bar{\kappa} f_2^H,\ \dot{\nabla}_{f_1^H}\xi = -\frac{1}{a} f_2^H,\ \dot{\nabla}_{f_1^H} f_2^H = -\bar{\kappa} f_1^H + \xi,\ \dot{\nabla}_\xi f_2^H = \frac{1}{a} f_1^H$$

e, então,

$$\widetilde{\nabla}_{f_1^H} f_1^H = \bar{\kappa} f_2^H - \frac{1}{a}x,\ \widetilde{\nabla}_{f_1^H}\xi = -\frac{1}{a} f_2^H,\ \widetilde{\nabla}_{f_1^H} f_2^H = -\bar{\kappa} f_1^H + \xi,\ \widetilde{\nabla}_\xi f_2^H = \frac{1}{a} f_1^H.$$

É fácil ver que $[\xi, f_1^H] = 0$ e, portanto, podemos escolher uma parametização local $x = x(u,v)$ de $S_{\bar{\gamma}}$ tal que $f_1^H = x_u$ e $\xi = x_v$.

Depois de um cálculo direito, usando $\bar{\kappa} = \sqrt{c-1}$, obtém-se

$$\begin{cases} a^2 x_{uuuu} + a(6-4a)x_{uu} + x = 0 \\ a x_{uuv} - \sqrt{c-1}\,x_u + x_v = 0. \end{cases} \tag{3.38}$$

Resolvendo a primeira equação de (3.38) e substituindo na segunda, temos

$$\begin{aligned} x = x(u,v) = &\cos(Au + \frac{1}{a}v)c_1 + \operatorname{sen}(Au + \frac{1}{a}v)c_2 + \\ &+ \cos(Bu - \frac{1}{a}v)c_3 + \operatorname{sen}(Bu - \frac{1}{a}v)c_4, \end{aligned} \tag{3.39}$$

onde $\{c_i\}$ são vetores constantes em $\mathbb{R}^4$. Como

$$\langle x,x\rangle = 1,\ \langle x,x_u\rangle = 0,\ \langle x,x_v\rangle = 0,\ \langle x_u,x_v\rangle = 0,$$

$$\langle x_u,x_u\rangle = \frac{1}{a},\ \langle x_v,x_v\rangle = \frac{1}{a^2},\ \langle x_v,x_{uv}\rangle = 0,\ \langle x_u,x_{uv}\rangle = 0,$$

obtemos, em $(u,v) = (0,0)$,

$$c_{11} + 2c_{13} + c_{33} = 1, \tag{3.40}$$

$$Ac_{12} + Bc_{14} + Ac_{23} + Bc_{34} = 0, \tag{3.41}$$

$$-c_{12}+c_{14}-c_{23}+c_{34}=0, \tag{3.42}$$

$$-Ac_{22}+(A-B)c_{24}+Bc_{44}=0, \tag{3.43}$$

$$A^2c_{22}+2ABc_{24}+B^2c_{44}=\frac{1}{a}, \tag{3.44}$$

$$c_{22}-2c_{24}+c_{44}=1, \tag{3.45}$$

$$-Ac_{12}+Ac_{14}+Bc_{23}-Bc_{34}=0, \tag{3.46}$$

$$-A^2c_{12}-ABc_{14}+ABc_{23}+B^2c_{34}=0, \tag{3.47}$$

onde $c_{ij}=\langle c_i,c_j\rangle$.

De $\langle x_u,x_u\rangle=1/a$, $\langle x_u,x_v\rangle=0$, obtém-se, para $(u,v)=(0,a\pi/2)$, que

$$A^2c_{11}-2ABc_{13}+B^2c_{33}=\frac{1}{a}, \tag{3.48}$$

$$-Ac_{11}+(B-A)c_{13}+Bc_{33}=0. \tag{3.49}$$

Das equações (3.41), (3.42), (3.46) e (3.47), temos $c_{12}=c_{14}=c_{23}=c_{34}=0$. De (3.40), (3.48) e (3.49), segue-se que $c_{11}=B/(A+B)$, $c_{13}=0$, $c_{33}=A/(A+B)$. Finalmente, das equações (3.43), (3.44) e (3.45), obtemos $c_{22}=B/(A+B)$, $c_{24}=0$, $c_{44}=A/(A+B)$. Portanto, c_i, $i\in\{1,2,3,4\}$, são vetores ortogonais em $\mathbb{R}^4$, com $\|c_1\|=\|c_2\|=\sqrt{B/(A+B)}$ e $\|c_3\|=\|c_4\|=\sqrt{A/(A+B)}$. Então, $c_1=\sqrt{B/(A+B)}e_1$, $c_2=\sqrt{B/(A+B)}e_2$, $c_3=\sqrt{A/(A+B)}e_3$, $c_4=\sqrt{A/(A+B)}e_4$, onde e_i, $i\in\{1,2,3,4\}$, são vetores ortogonais em $\mathbb{R}^4$.

Como $\xi=x_v(u,v)$ e $\xi=(1/a)\xi_0$, segue-se que $e_2=-Je_1$ and $e_4=Je_3$. □

Observação 3.8. Seja $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ uma base ortonormal em $\mathbb{R}^4$, com $e_2=-Je_1$ e $e_4=Je_3$, e consideremos $S_{\bar\gamma}$ o cilindro de Hopf correspondente. Observamos que as geodésicas

$$\begin{aligned} u\to x(u,v_0)= &\sqrt{\tfrac{B}{A+B}}\cos(Au+\tfrac{1}{a}v_0)e_1+\sqrt{\tfrac{B}{A+B}}\sin(Au+\tfrac{1}{a}v_0)e_2+\\ &+\sqrt{\tfrac{A}{A+B}}\cos(Bu-\tfrac{1}{a}v_0)e_3+\sqrt{\tfrac{A}{A+B}}\sin(Bu-\tfrac{1}{a}v_0)e_4, \end{aligned}$$

podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \gamma(s)= &\sqrt{\tfrac{B}{A+B}}\cos(As)f_1+\sqrt{\tfrac{B}{A+B}}\sin(As)f_2+\\ &+\sqrt{\tfrac{A}{A+B}}\cos(Bs)f_3+\sqrt{\tfrac{A}{A+B}}\sin(Bs)f_4, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{cases} f_1 = \cos(\frac{1}{a}v_0)e_1 + \operatorname{sen}(\frac{1}{a}v_0)e_2 \\ f_2 = -\operatorname{sen}(\frac{1}{a}v_0)e_1 + \cos(\frac{1}{a}v_0)e_2 \\ f_3 = \cos(\frac{1}{a}v_0)e_3 - \operatorname{sen}(\frac{1}{a}v_0)e_4 \\ f_4 = \operatorname{sen}(\frac{1}{a}v_0)e_3 + \cos(\frac{1}{a}v_0)e_4. \end{cases}$$

Observamos que $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ é uma base ortonormal em $\mathbb{R}^4$ com $f_2 = -Jf_1$ e $f_4 = Jf_3$. Portanto, as únicas curvas de Legendre próprio-biharmônicas em $(\mathbb{S}^3, \varphi, \xi, \eta, \langle\cdot,\cdot\rangle_a)$ são as geodésicas dos cilindros de Hopf próprio-biharmônicos ortogonais à ξ.

Observação 3.9. De fato, a aplicação x da observação anterior é um mergulho isométrico $\mathcal{T}$ em $(\mathbb{S}^3, g)$, onde $\mathcal{T}$ é o toro $\mathcal{T} = \mathbb{R}^2/\Lambda$, Λ sendo a treliça gerada pelos vetores

$$w_1 = \Big(\frac{2\pi}{A+B}, \frac{2\pi}{A(A+B)}\Big) \quad \text{e} \quad w_2 = \Big(\frac{2\pi}{A+B}, -\frac{2\pi}{B(A+B)}\Big).$$

5. Subvariedades integrais $\mathcal{C}$-paralelas biharmônicas

Seja Σ^m uma subvariedade integral numa variedade Sasakiana N^{2n+1}, com a estrutura Sasakiana $(\varphi, \xi, \eta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Lembramos que, neste caso, $\varphi(T\Sigma^m) \subset N\Sigma^m$ e $m \leq n$. Além disso, quando $m = n$, segue-se que $\varphi(N\Sigma^m) = T\Sigma^m$. Se σ é a segunda forma fundamental de Σ^m, então, depois de um cálculo direito, obtém-se

$$\langle \varphi Z, B(X,Y)\rangle = \langle \varphi Y, B(X,Z)\rangle,$$

para todos os campos de vetores X, Y, Z tangente à Σ^m (veja também [**2**]). Além disso, temos $A_\xi = 0$, onde A é o operador de Weingarten de Σ^m (veja [**4**]).

Definição 3.9. Uma subvariedade integral Σ^m é chamada uma subvariedade *integral $\mathcal{C}$-paralela* se $\nabla^\perp\sigma \parallel \xi$.

Portanto, Σ^m é uma subvariedade integral $\mathcal{C}$-paralela se $(\nabla^\perp\sigma)(X,Y,Z) = S(X,Y,Z)\xi$, para todos os campos de vetores X, Y, Z tangentes à Σ^m, onde $S(X,Y,Z) = \langle \varphi X, \sigma(Y,Z)\rangle$ é um campo tensorial totalmente simétrico tipo $(0,3)$ em Σ^m. É fácil ver que, quando $m = n$, $\nabla^\perp\sigma = 0$ se, e somente se, $\sigma = 0$, ou seja, Σ^n é totalmente geodésica.

Agora, seja Σ^m uma subvariedade integral e denotamos por H seu campo curvatura média. Dizemos que H é *$\mathcal{C}$-paralelo* se $\nabla^\perp H \parallel \xi$, ou seja, $\nabla^\perp_X H = \theta(X)\xi$, onde θ é uma 1-forma em Σ^m. Vamos ver que $\theta(X) = \langle H, \varphi X\rangle$ para qualquer campo de vetores X tangente à Σ^m.

Os dois resultados seguintes serão utilizados mais tarde nesta seção.

Proposição 3.26 ([**25**]). *Se o campo curvatura média H duma subvariedade integral Σ^n numa variedade Sasakiana $(N^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é paralelo, então Σ^n é mínima.*

Demonstração. Sejam X e Y dois campos de vetores tangentes à Σ^n. Como

$$\langle\sigma(X,Y),\xi\rangle = \langle\nabla^N_X Y,\xi\rangle = -\langle Y,\nabla^N_X\xi\rangle = \langle Y,\varphi X\rangle = 0$$

temos $\sigma(X,Y)\in\varphi(T\Sigma^n)$ e, em particular, $H\in\varphi(T\Sigma^n)$. Então,

$$\langle\nabla^\perp_X H,\xi\rangle = \langle\nabla^N_X H,\xi\rangle = -\langle H,\nabla^N_X\xi\rangle = \langle H,\varphi X\rangle.$$

Portanto, se $\nabla^\perp H = 0$, segue-se que $\langle H,\varphi X\rangle = 0$, para todos os campos de vetores X tangentes à Σ^n, o que implica $H = 0$, pois Σ^n tem dimensão máxima. □

Proposição 3.27 ([**25**]). *Sejam $(N^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma variedade Sasakiana e Σ^m uma subvariedade integral $\mathcal{C}$-paralela com o campo curvatura média H. Então, temos que*

(1) $\nabla^\perp_X H = \langle H,\varphi X\rangle\xi$, *para qualquer campo de vetores X tangente à Σ^m, ou seja, H é $\mathcal{C}$-paralelo*;
(2) *a curvatura média $|H|$ é constante*;
(3) *se $m = n$, então $\Delta^\perp H = -H$.*

Demonstração. A fim de provar (1), consideramos $\{X_i\}_{i=1}^m$ um referencial local geodésico em $p\in\Sigma^m$. Então, em p, temos

$$(\nabla^\perp\sigma)(X_i,X_j,X_j) = \nabla^\perp_{X_i}\sigma(X_j,X_j) = \langle\sigma(X_j,X_j),\varphi X_i\rangle\xi$$

e, somando para $j = 1,\dots,m$, obtemos $\nabla^\perp_{X_i}H = \langle H,\varphi X_i\rangle\xi$. Para provar (2), temos que

$$X(|H|^2) = 2\langle H,\nabla^\perp_X H\rangle = 2\langle H,\varphi X\rangle\langle H,\xi\rangle = 0,$$

para qualquer campo de vetores X tangente à Σ^m, ou seja, $|H|$ é constante.

Para o último ponto, suponhamos que $m = n$. Como $\nabla^N_X\xi = -\varphi X$, usando a equação de Weingarten, obtemos que $A_\xi = 0$ e $\nabla^\perp_X\xi = \nabla^N_X\xi = -\varphi X$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\Delta^\perp H &= -\sum_{i=1}^n \nabla^\perp_{X_i}\nabla^\perp_{X_i}H = -\sum_{i=1}^n \nabla^\perp_{X_i}(\langle H,\varphi X_i\rangle\xi)\\
&= -\sum_{i=1}^n X_i(\langle H,\varphi X_i\rangle)\xi - \sum_{i=1}^n(\langle H,\varphi X_i\rangle)\nabla^N_{X_i}\xi\\
&= -\sum_{i=1}^n X_i(\langle H,\varphi X_i\rangle)\xi + \sum_{i=1}^n(\langle H,\varphi X_i\rangle)\varphi X_i\\
&= -\sum_{i=1}^n X_i(\langle H,\varphi X_i\rangle)\xi + H.
\end{aligned}$$

Como $\nabla^N_{X_i}\varphi X_i = \varphi\nabla^N_{X_i}X_i + \xi$, segue-se que

$$\begin{aligned}X_i(\langle H,\varphi X_i\rangle) &= \langle\nabla^N_{X_i}H,\varphi X_i\rangle + \langle H,\varphi\nabla^N_{X_i}X_i+\xi\rangle\\ &= \langle -A_H X_i + \nabla^\perp_{X_i}H,\varphi X_i\rangle + \langle H,\varphi\sigma(X_i,X_i)\rangle\\ &= 0,\end{aligned}$$

o que implica que $\Delta^\perp H = H$. $\square$

Quando o espaço ambiente é uma forma espacial Sasakiana com dimensão 7, as subvariedades integrais $\mathcal{C}$-paralelas com dimensão 3 foram classificadas em [**2**]. Para obter esta classificação, foi usada uma base local ortonormal especial que será descrita a seguir.

Seja $\jmath : \Sigma^3 \to N^7(c)$ uma subvariedade integral com curvatura média constante $|H| \neq 0$. Seja p um ponto qualquer de Σ^3. Consideraremos uma função $f_p : U_p\Sigma^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_p(u) = \langle\sigma(u,u),\varphi u\rangle,$$

onde $U_p\Sigma^3 = \{u \in T_p\Sigma^3; |u| = 1\}$ é a esfera unitária no espaço tangente $T_p\Sigma^3$. Se $f_p(u) = 0$, para todo $u \in U_p\Sigma^3$, então, para todo $v_1, v_2 \in U_p\Sigma^3$ tal que $\langle v_1, v_2\rangle = 0$, temos

$$\langle\sigma(v_1,v_1),\varphi v_1\rangle = 0 \quad \text{and} \quad \langle\sigma(v_1,v_1),\varphi v_2\rangle = 0.$$

Daí, obtém-se $\sigma(v_1,v_1) = 0$ e segue-se que σ é igual a zero em p.

Suponhamos a seguir que f_p não é identicamente igual a zero. Como $U_p\Sigma^3$ é compacta, f_p atinge um máximo absoluto em um vetor unitário X_1. Seque-se que

$$\begin{cases}\langle\sigma(X_1,X_1),\varphi X_1\rangle > 0, & \langle\sigma(X_1,X_1),\varphi X_1\rangle \geq |\langle\sigma(w,w),\varphi w\rangle|\\ \langle\sigma(X_1,X_1),\varphi w\rangle = 0, & \langle\sigma(X_1,X_1),\varphi X_1\rangle \geq 2\langle\sigma(w,w),\varphi X_1\rangle,\end{cases}$$

onde w é um vetor unitário tangente à Σ^3 em p e ortogonal a X_1. É fácil ver que X_1 é um vetor próprio do operador $A_1 = A_{\varphi X_1}$ com o valor próprio correspondente λ_1. Então, como A_1 é simétrico, podemos considerar X_2 e X_3 vetores próprios unitários de A_1, ortogonais entre si e a X_1, com o valores próprios correspondente λ_2 e λ_3. A seguir, temos dois casos.

Se $\lambda_2 \neq \lambda_3$, podemos escolher X_2 e X_3 tais que

$$\begin{cases}\langle\sigma(X_2,X_2),\varphi X_2\rangle \geq 0, & \langle\sigma(X_3,X_3),\varphi X_3\rangle \geq 0\\ \langle\sigma(X_2,X_2),\varphi X_2\rangle \geq \langle\sigma(X_3,X_3),\varphi X_3\rangle.\end{cases}$$

Se $\lambda_2 = \lambda_3$, consideramos $f_{1,p}$ a restrição da f_p ao conjunto $\{w \in U_p\Sigma^3; \langle w, X_1\rangle = 0\}$, e temos mais dois subcasos.

(1) A função $f_{1,p}$ é identicamente igual a zero. Neste caso, temos

$$\begin{cases}\langle\sigma(X_2,X_2),\varphi X_2\rangle = 0, & \langle\sigma(X_2,X_2),\varphi X_3\rangle = 0\\ \langle\sigma(X_2,X_3),\varphi X_3\rangle = 0, & \langle\sigma(X_3,X_3),\varphi X_3\rangle = 0.\end{cases}$$

(2) A função $f_{1,p}$ não é identicamente igual a zero. Então, escolhemos X_2 tal que $f_{1,p}(X_2)$ é um máximo absoluto e, assim, temos

$$\begin{cases} \langle\sigma(X_2,X_2),\varphi X_2\rangle > 0, & \langle\sigma(X_2,X_2),\varphi X_2\rangle \geq \langle\sigma(X_3,X_3),\varphi X_3\rangle \geq 0 \\ \langle\sigma(X_2,X_2),\varphi X_3\rangle = 0, & \langle\sigma(X_2,X_2),\varphi X_2\rangle \geq 2\langle\sigma(X_3,X_3),\varphi X_2\rangle. \end{cases}$$

Agora, com respeito à base ortonormal $\{X_1, X_2, X_3\}$, os operadores A_1, $A_2 = A_{\varphi X_2}$ e $A_3 = A_{\varphi X_3}$, em p, podem ser escritos como

(3.50)
$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_2 & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \mu \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & \beta & \mu \\ \lambda_3 & \mu & \delta \end{pmatrix}.$$

Também $A_0 = A_\xi = 0$. Com estas notações, temos

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_1 \geq |\alpha|, \quad \lambda_1 \geq |\delta|, \quad \lambda_1 \geq 2\lambda_2, \quad \lambda_1 \geq 2\lambda_3.$$

Quando $\lambda_2 \neq \lambda_3$, obtemos

$$\alpha \geq 0, \quad \delta \geq 0 \quad \text{e} \quad \alpha \geq \delta.$$

Quando $\lambda_2 = \lambda_3$, obtém-se

$$\alpha = \beta = \mu = \delta = 0$$

ou

$$\alpha > 0, \quad \delta \geq 0, \quad \alpha \geq \delta, \quad \beta = 0 \quad \text{e} \quad \alpha \geq 2\mu.$$

Podemos estender X_1 numa vizinhança V_p de p tal que $X_1(q)$ seja um máximo de $f_q : U_q\Sigma^3 \to \mathbb{R}$, para cada $q \in V_p$.

Se os valores próprios de A_1 tem multiplicidade constante, então a base $\{X_1, X_2, X_3\}$, definida em p, pode ser estendida de modo suave e, portanto, podemos trabalhar no conjunto aberto e denso de Σ^3 definido por esta propriedade.

Usando esta base, em [**2**] os autores provaram que, quando Σ^3 é $\mathcal{C}$-paralela, as funções λ_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, e α, β, μ, δ são constantes em V_p, e, a partir deste fato, eles classificaram estas subvariedades numa forma espacial Sasakiana, com dimensão 7. De acordo com esta classificação, quando $c > -3$, Σ^3 é uma subvariedade integral $\mathcal{C}$-paralela e não-mínima se, e somente se,

Caso I. Σ^3 é uma subvariedade plana que é, localmente, um produto de três curvas que são hélices de ordem de osculação $r \leq 4$, e $\lambda_1 = (\lambda^2 - (c+3)/4)/\lambda$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda = \text{constante} \neq 0$, $\alpha = \text{constante}$, $\beta = 0$, $\mu = \text{constante}$, $\delta = \text{constante}$, tais que $-\sqrt{c+3}/2 < \lambda < 0$, $0 < \alpha \leq \lambda_1$, $\alpha > 2\mu$, $\alpha \geq \delta \geq 0$, $(c+3)/4 + \lambda^2 + \alpha\mu - \mu^2 = 0$ e $((3\lambda^2 - (c+3)/4)/\lambda)^2 + (\alpha+\mu)^2 + \delta^2 > 0$; ou

Caso II. Σ^3 é localmente isométrica ao produto $\gamma \times \bar{\Sigma}^2$, onde γ é uma curva e $\bar{\Sigma}^2$ é uma superfície $\mathcal{C}$-paralela, e

(1) $\lambda_1 = 2\lambda_2 = -\lambda_3 = \sqrt{c+3}/(2\sqrt{2})$, $\alpha = \mu = \delta = 0$, $\beta = \pm\sqrt{3(c+3)}/(4\sqrt{2})$. Neste caso, γ é uma hélice em N com as curvaturas $\kappa_1 = 1/\sqrt{2}$ e $\kappa_2 = 1$, e $\bar{\Sigma}^2$ é localmente isométrica à esfera Euclidiana de dimensão 2 e raio $\rho = \sqrt{8/(3(c+3))}$; ou
(2) $\lambda_1 = (\lambda^2 - (c+3)/4)/\lambda$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda =$ constante, $\alpha = \beta = \mu = \delta = 0$, tal que $-\sqrt{c+3}/2 < \lambda < 0$ and $\lambda^2 \neq (c+3)/12$. Neste caso, γ é uma hélice em N com as curvaturas $\kappa_1 = \lambda_1$ e $\kappa_2 = 1$, e $\bar{\Sigma}^2$ é a esfera Euclidiana de dimensão 2 e raio $\rho = 1/\sqrt{(c+3)/4+\lambda^2}$.

No mesmo artigo [**2**], foram encontradas as equações paramétricas explicitas das subvariedades integral $\mathcal{C}$-paralelas planas de dimensão 3 em $\mathbb{S}^7(1)$. Pelo mesmo método e usando Lema 3.2, este resultado foi estendido à esfera $\mathbb{S}^7(c)$, $c > -3$.

Teorema 3.28 ([**2, 24**]). *O vetor posição no espaço Euclidiano* $(\mathbb{R}^8, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *duma subvariedade integral* $\mathcal{C}$*-paralela, de dimensão* 3*, em* $\mathbb{S}^7(c)$*,* $c > -3$*, é dado por*

$$\begin{aligned} x(u,v,w) =& \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\frac{1}{a}}} \exp\Big(\mathrm{i}\Big(\frac{1}{a\lambda}u\Big)\Big)\mathcal{E}_1 \\ &+ \frac{1}{\sqrt{a(\mu-\alpha)(2\mu-\alpha)}} \exp(-\mathrm{i}(\lambda u - (\mu-\alpha)v))\mathcal{E}_2 \\ &+ \frac{1}{\sqrt{a\rho_1(\rho_1+\rho_2)}} \exp(-\mathrm{i}(\lambda u + \mu v + \rho_1 w))\mathcal{E}_3 \\ &+ \frac{1}{\sqrt{a\rho_2(\rho_1+\rho_2)}} \exp(-\mathrm{i}(\lambda u + \mu v - \rho_2 w))\mathcal{E}_4, \end{aligned}$$

onde $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^4$ *é uma base ortonormal em* $\mathbb{C}^4$*.*

Após todas estas preparações, a seguir, vamos estudar a biharmonicidade das subvariedades integrais, de dimensão máxima, numa forma espacial Sasakiana $N^{2n+1}(c)$.

O primeiro resultado obtém-se imediatamente do Teorema 1.7 e da expressão (3.1) do campo tensorial de curvatura R^N.

Teorema 3.29 ([**25**]). *Uma subvariedade integral* Σ^n *em* $N^{2n+1}(c)$ *é biharmônica se, e somente se,*

$$\begin{cases} -\Delta^{\perp}H + \operatorname{trace}\sigma(\cdot, A_H\cdot) - \frac{c(n+3)+3n-3}{4}H = 0 \\ 4\operatorname{trace} A_{\nabla^{\perp}_{(\cdot)}H}(\cdot) + n\operatorname{grad}(|H|^2) = 0. \end{cases}$$

Corolário 3.30. *Seja* $N^{2n+1}(c)$ *uma forma espacial Sasakiana com a curvatura* φ*-seccional constante* $c \leq (3-3n)/(n+3)$*. Então, uma subvariedade integral* Σ^n*, com curvatura média constante, é biharmônica se, e somente se, é mínima.*

Demonstração. Suponhamos que Σ^n é uma subvariedade integral biharmônica, com curvatura média constante $|H|$, em $N^{2n+1}(c)$. Do Teorema 3.29, temos

$$\begin{aligned}\langle \Delta^{\perp} H, H\rangle &= \langle \operatorname{trace}\sigma(\cdot, A_H\cdot), H\rangle - \frac{c(n+3)+3n-3}{4}|H|^2\\ &= |A_H|^2 - \frac{c(n+3)+3n-3}{4}|H|^2.\end{aligned}$$

Portanto, da fórmula de Weitzenböck

$$\frac{1}{2}\Delta|H|^2 = \langle \Delta^{\perp} H, H\rangle + |\nabla^{\perp} H|^2,$$

obtém-se

$$\frac{c(n+3)+3n-3}{4}|H|^2 - |A_H|^2 - |\nabla^{\perp} H|^2 = 0.$$

Se $c < (3-3n)/(n+3)$, esta equação é equivalente a $H = 0$. Quando $c = (3-3n)/(n+3)$, como para subvariedades integrais de dimensão máxima $\nabla^{\perp} H = 0$ é equivalente a $H = 0$, a equação acima implica novamente que $H = 0$. □

Corolário 3.31. *Seja $N^{2n+1}(c)$ uma forma espacial Sasakiana, com curvatura φ-seccional constante $c \leq (3-3n)/(n+3)$. Então, uma subvariedade integral compacta Σ^n é biharmônica se, e somente se, é mínima.*

Demonstração. Suponhamos que Σ^n é uma subvariedade integral compacta e biharmônica. De modo análogo ao feito na demonstração do Corolário 3.30, temos

$$\langle \Delta^{\perp} H, H\rangle = -\frac{c(n+3)+3n-3}{4}|H|^2 + |A_H|^2$$

e, portanto, $\Delta|H|^2 \geq 0$, o que implica que $|H|^2$ é constante. Segue-se que Σ^n é mínima. □

Observação 3.10. Dos Corolários 3.30 e 3.31 é fácil ver que numa forma espacial Sasakiana $N^{2n+1}(c)$, com curvatura φ-seccional constante c satisfazendo $c+3 \leq 0$, uma subvariedade integral Σ^n, que é compacta ou tem curvatura média constante, é biharmônica se, e somente se, é mínima.

Proposição 3.32 ([**25**]). *Seja $\jmath : \Sigma^n \to N^{2n+1}(c)$ uma subvariedade integral $\mathcal{C}$-paralela. Então $(\tau_2(\jmath))^{\top} = 0$.*

Demonstração. Da Proposição 3.27, temos que $|H|$ é constante e $\nabla^{\perp} H \parallel \xi$, o que implica que $A_{\nabla^{\perp}_X H} = 0$, para todos os campos de vetores X tangentes a Σ^n, pois $A_\xi = 0$. □

Proposição 3.33 ([**25**]). *Uma subvariedade $\mathcal{C}$-paralela Σ^n não-mínima em $N^{2n+1}(c)$ é próprio-biharmônica se, e somente se, $c > (7-3n)/(n+3)$ e*

$$\operatorname{trace}\sigma(\cdot, A_H\cdot) = \frac{c(n+3)+3n-7}{4}H.$$

Demonstração. Da Proposição 3.27, temos que $\Delta^{\perp}H = -H$. Portanto, do Teorema 3.29, segue-se que Σ^n é biharmônica se, e somente se,

$$\operatorname{trace}\sigma(\cdot, A_H\cdot) = \frac{c(n+3)+3n-7}{4}H.$$

Se Σ^n verifica as condições acima, fazendo o produto interno com H, obtemos

$$|A_H|^2 = \frac{c(n+3)+3n-7}{4}|H|^2.$$

Como A_H e H não são iguais a zero, temos que $c > (7-3n)/(n+3)$. □

Agora, seja $\{X_i\}_{i=1}^n$ um referencial local ortonormal na subvariedade integral $\mathcal{C}$-paralela Σ^n, numa forma espacial Sasakiana $N^{2n+1}(c)$, e seja $A_i = A_{\varphi X_i}$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, os operadores de Weingarten correspondentes. Então, da Proposição 3.33, obtemos o próximo resultado.

Proposição 3.34 ([**25**]). *Uma subvariedade integral $\mathcal{C}$-paralela Σ^n em $N^{2n+1}(c)$, $c > (7-3n)/(n+3)$, é próprio-biharmônica se, e somente se,*

$$\begin{pmatrix} g(A_1,A_1) & \ldots & g(A_1,A_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g(A_n,A_1) & \ldots & g(A_n,A_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{trace}A_1 \\ \vdots \\ \operatorname{trace}A_n \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \operatorname{trace}A_1 \\ \vdots \\ \operatorname{trace}A_n \end{pmatrix},$$

onde $k = (c(n+3)+3n-7)/4$.

A seguir, vamos trabalhar novamente numa forma espacial Sasakiana, de dimensão 7, e vamos usar a base $\{X_1, X_2, X_3\}$ descrita no início desta seção.

Primeiro, podemos identificar os operadores A_i com as matrizes correspondentes e, da Proposição 3.34, temos o resultado seguinte.

Proposição 3.35 ([**25**]). *Uma subvariedade integral $\mathcal{C}$-paralela Σ^3 em $N^7(c)$, $c > -1/3$, é próprio-biharmônica se, e somente se,*

$$\left(\sum_{i=1}^{3} A_i^2\right)\begin{pmatrix} \operatorname{trace}A_1 \\ \operatorname{trace}A_2 \\ \operatorname{trace}A_3 \end{pmatrix} = \frac{3c+1}{2}\begin{pmatrix} \operatorname{trace}A_1 \\ \operatorname{trace}A_2 \\ \operatorname{trace}A_3 \end{pmatrix}, \tag{3.51}$$

onde as matrizes A_i são dadas por (3.50).

Agora, podemos enunciar nosso próximo teorema.

Teorema 3.36 ([**25**]). *Uma subvariedade integral $\mathcal{C}$-paralela Σ^3 em $N^7(c)$ é próprio-biharmônica se, e somente se,*

(1) *$c > -1/3$ e Σ^3 é uma subvariedade plana que é (localmente) um produto de três curvas:*
- *uma hélice, com curvaturas $\kappa_1 = (\lambda^2 - (c+3)/4)/\lambda$ e $\kappa_2 = 1$,*
- *uma hélice de ordem 4, com curvaturas*

$$\kappa_1 = \sqrt{\lambda^2+\alpha^2}, \quad \kappa_2 = (\alpha/\kappa_1)\sqrt{\lambda^2+1}, \quad \kappa_3 = -(\lambda/\kappa_1)\sqrt{\lambda^2+1},$$

- *uma hélice de ordem* 4*, com curvaturas*

$$\kappa_1=\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\delta^2},\quad \kappa_2=(\delta/\kappa_1)\sqrt{\lambda^2+\mu^2+1},\quad \kappa_3=(\kappa_2/\delta)\sqrt{\lambda^2+\mu^2},$$

se $\delta\neq 0$*, ou um círculo de curvatura* $\kappa_1=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$*, se* $\delta=0$*,*

onde $\lambda,\alpha,\mu,\delta$ *são constantes dadas por*

(3.52)
$$\begin{cases}\left(3\lambda^2-\frac{c+3}{4}\right)\left(3\lambda^4-2(c+1)\lambda^2+\frac{(c+3)^2}{16}\right)+\lambda^4((\alpha+\mu)^2+\delta^2)=0,\\ (\alpha+\mu)\left(5\lambda^2+\alpha^2+\mu^2-\frac{7c+5}{4}\right)+\mu\delta^2=0\\ \delta\left(5\lambda^2+\delta^2+3\mu^2+\alpha\mu-\frac{7c+5}{4}\right)=0\\ \frac{c+3}{4}+\lambda^2+\alpha\mu-\mu^2=0,\end{cases}$$

tais que $-\sqrt{c+3}/2<\lambda<0$, $0<\alpha\leq(\lambda^2-(c+3)/4)/\lambda$, $\alpha\geq\delta\geq 0$, $\alpha>2\mu$*, and* $\lambda^2\neq(c+3)/12$*; ou*

(2) Σ^3 *é localmente isométrica a um produto* $\gamma\times\bar{\Sigma}^2$ *entre uma curva e uma superfície* $\mathcal{C}$*-paralela em* N*, e*

(a) $c=5/9$*,* γ *é uma hélice em* $N^7(5/9)$*, com curvaturas* $\kappa_1=1/\sqrt{2}$ *e* $\kappa_2=1$*, e* $\bar{\Sigma}^2$ *é localmente isométrica à esfera Euclidiana de dimensão* 2 *e raio* $\sqrt{3}/2$*; ou*

(b) $c\in[(-7+8\sqrt{3})/13,+\infty)\setminus\{1\}$*,* γ *é uma hélice em* $N^7(c)$*, com curvaturas* $\kappa_1=(\lambda^2-(c+3)/4)/\lambda$ *e* $\kappa_2=1$*, e* $\bar{\Sigma}^2$ *é localmente isométrica à esfera Euclidiana de dimensão* 2 *e raio* $2/\sqrt{4\lambda^2+c+3}$*, onde*

$$\lambda<0 \quad e \quad \lambda^2=\begin{cases}\frac{4c+4\pm\sqrt{13c^2+14c-11}}{12}, & se \quad c<1\\ \frac{4c+4-\sqrt{13c^2+14c-11}}{12}, & se \quad c>1.\end{cases} \tag{3.53}$$

Demonstração. Primeiro, da Proposição 3.35, podemos ver que $c>-1/3$. Também, a equação (3.51) é equivalente a

(3.54)
$$\begin{cases}t\left(\sum_{i=1}^3\lambda_i^2-r\right)+(\alpha+\mu)(\alpha\lambda_2+\mu\lambda_3)+(\beta+\delta)(\beta\lambda_2+\delta\lambda_3)=0\\ t(\alpha\lambda_2+\mu\lambda_3)+(\alpha+\mu)\left(2\lambda_2^2+\alpha^2+3\beta^2+\mu^2+\beta\delta-r\right)+\mu(\beta+\delta)^2=0\\ t(\beta\lambda_2+\delta\lambda_3)+\beta(\alpha+\mu)^2+(\beta+\delta)\left(2\lambda_3^2+\delta^2+3\mu^2+\beta^2+\alpha\mu-r\right)=0\end{cases}$$

onde $t=\operatorname{trace}A_1=\sum_{i=1}^3\lambda_i$ e $r=(3c+1)/2$.

Vamos dividir o estudo deste sistema nos casos dados pela classificação das subvariedades integrais $\mathcal{C}$-paralelas não-mínimas.

Caso I. O sistema (3.54) é equivalente ao sistema formado pelas três primeiras equações de (3.52). Agora, Σ^3 não é mínima se, e somente se, um componente do campo de curvatura média H não é igual a zero e, da primeira equação de (3.52), segue-se que λ^2 deve ser diferente de $(c+3)/12$. Portanto, usando novamente um resultado em [**2**] para as expressões das curvaturas das três curvas, obtemos o primeiro caso do teorema.

Caso II. (1) Neste caso, a segunda equação de (3.54) é satisfeita automaticamente e as outras duas são equivalente a $c = 5/9$. Portanto, da classificação das subvariedades integrais $\mathcal{C}$-paralelas, obtemos o segundo caso do teorema.

(2) A segunda e a terceira equação de (3.54) são satisfeitas. A primeira equação é equivalente a

$$3\lambda^4 - 2(c+1)\lambda^2 + \frac{(c+3)^2}{16} = 0.$$

Esta equação tem soluções se, e somente se,

$$c \in \left(-\infty, \frac{-7-8\sqrt{3}}{13}\right] \cup \left[\frac{-7+8\sqrt{3}}{13}, +\infty\right),$$

e estas soluções são dadas por

$$\lambda^2 = \frac{4c+4 \pm \sqrt{13c^2+14c-11}}{12}.$$

Como $c > -1/3$, segue-se que $c \in [(-7+8\sqrt{3})/13, +\infty)$. Ainda mais, se $c = 1$, temos que λ^2 deve ser igual a 1 ou 1/3, o que é uma contradição, e, então, $c \in [(-7+8\sqrt{3})/13, +\infty) \setminus \{1\}$. É fácil verificar que $\lambda^2 = (4c+4+\sqrt{13c^2+14c-11})/12 < (c+3)/4$ se, e somente se, $c \in [(-7+8\sqrt{3})/13, 1)$ e $\lambda^2 = (4c+4-\sqrt{13c^2+14c-11})/12 < (c+3)/4$ se, e somente se, $c \in [(-7+8\sqrt{3})/13, +\infty) \setminus \{1\}$. □

Em seguida, consideraremos a esfera $\mathbb{S}^7$ com sua estrutura Sasakiana canônica ou deformada. Usando os Teoremas 3.28 e 3.36, é fácil obter o seguinte teorema.

TEOREMA 3.37 ([**25**]). *Uma subvariedade integral $\mathcal{C}$-paralela Σ^3 em $\mathbb{S}^7(c)$, $c = 4/a - 3 > -3$, é próprio-biharmônica se, e somente se,*[1]

(1) *$c > -1/3$ e Σ^3 é uma subvariedade plana que é, localmente, um produto de três curvas e seu vetor de posição em $\mathbb{C}^4$ é*

$$\begin{aligned} x(u,v,w) =& \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\frac{1}{a}}} \exp\left(\mathrm{i}\left(\frac{1}{a\lambda}u\right)\right)\mathcal{E}_1 \\ &+ \frac{1}{\sqrt{a(\mu-\alpha)(2\mu-\alpha)}} \exp(-\mathrm{i}(\lambda u - (\mu-\alpha)v))\mathcal{E}_2 \\ &+ \frac{1}{\sqrt{a\rho_1(\rho_1+\rho_2)}} \exp(-\mathrm{i}(\lambda u + \mu v + \rho_1 w))\mathcal{E}_3 \\ &+ \frac{1}{\sqrt{a\rho_2(\rho_1+\rho_2)}} \exp(-\mathrm{i}(\lambda u + \mu v - \rho_2 w))\mathcal{E}_4, \end{aligned}$$

[1] O teorema de classificação em [**25**] é baseado no resultado de classificação obtido em [**2**]. Muito recentemente, T. Sasahara [**44**] encontrou um erro em [**2**] e também um terceiro caso de subvariedade integral $\mathcal{C}$-paralela próprio-biharmônica em $\mathbb{S}^7(1)$ que não é plana.

onde $\rho_{1,2} = (\sqrt{4\mu(2\mu - \alpha) + \delta^2} \pm \delta)/2$ *e* $\lambda, \alpha, \mu, \delta$ *são constantes dadas por* (3.52), *tais que* $-1/\sqrt{a} < \lambda < 0$, $0 < \alpha \leq (\lambda^2 - 1/a)/\lambda$, $\alpha \geq \delta \geq 0$, $\alpha > 2\mu$, $\lambda^2 \neq 1/3a$, *e* $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^4$ *é uma base ortonormal em* $\mathbb{C}^4$; *ou*

(2) Σ^3 *é localmente isométrica a um produto* $\gamma \times \bar{\Sigma}^2$ *entre uma curva e uma superfície integral* $\mathcal{C}$*-paralela de* N *e*
   (a) $c = 5/9$, γ *é uma hélice em* $\mathbb{S}^7(5/9)$, *com curvaturas* $\kappa_1 = 1/\sqrt{2}$ *e* $\kappa_2 = 1$, *e* $\bar{\Sigma}^2$ *é localmente isométrica à esfera Euclidiana de dimensão* 2 *e raio* $\sqrt{3}/2$; *ou*
   (b) $c \in [(-7+8\sqrt{3})/13, +\infty) \setminus \{1\}$, γ *é uma hélice em* $\mathbb{S}^7(c)$, *com curvaturas* $\kappa_1 = (\lambda^2 - (c+3)/4)/\lambda$ *e* $\kappa_2 = 1$, *e* $\bar{\Sigma}^2$ *é localmente isométrica à esfera Euclidiana de dimensão* 2 *e raio* $2/\sqrt{4\lambda^2 + c + 3}$, *onde*

$$\lambda < 0 \quad e \quad \lambda^2 = \begin{cases} \frac{4c+4\pm\sqrt{13c^2+14c-11}}{12}, & se \quad c < 1 \\ \frac{4c+4-\sqrt{13c^2+14c-11}}{12}, & se \quad c > 1. \end{cases}$$

Quando $c = 1$, podemos resolver o sistema (3.52) e, usando o teorema acima, obtemos o próximo corolário.

Corolário 3.38 ([**25**]). *Uma subvariedade integral* $\mathcal{C}$*-paralela* Σ^3 *em* $\mathbb{S}^7(1)$ *é próprio-biharmônica se, e somente se,* Σ^3 *é uma subvariedade plana que é (localmente) um produto de três curvas e seu vetor de posição em* $\mathbb{C}^4$ *é*

$$\begin{aligned} x(u,v,w) = &- \frac{1}{\sqrt{6}} \exp(-\mathrm{i}\sqrt{5}u)\mathcal{E}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} \exp\Big(\mathrm{i}\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}u - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{10}}v\Big)\Big)\mathcal{E}_2 \\ &+ \frac{1}{\sqrt{6}} \exp\Big(\mathrm{i}\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}u + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}v - \frac{3\sqrt{2}}{2}w\Big)\Big)\mathcal{E}_3 \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\Big(\mathrm{i}\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}u + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}v + \frac{\sqrt{2}}{2}w\Big)\Big)\mathcal{E}_4, \end{aligned}$$

onde $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^4$ *é uma base ortonormal em* $\mathbb{C}^4$. *Além disso, a* x_u*-curva é uma hélice, com curvaturas* $\kappa_1 = 4\sqrt{5}/5$ *e* $\kappa_2 = 1$, *a* x_v*-curva é uma hélice de ordem* 4, *com curvaturas* $\kappa_1 = \sqrt{29}/\sqrt{10}$, $\kappa_2 = 9\sqrt{2}/\sqrt{145}$ *e* $\kappa_3 = 2\sqrt{3}/\sqrt{145}$, *e a* x_w*-curva é uma hélice de ordem* 4, *com curvaturas* $\kappa_1 = \sqrt{5}/\sqrt{2}$, $\kappa_2 = 2\sqrt{3}/\sqrt{10}$ *e* $\kappa_3 = \sqrt{3}/\sqrt{10}$.

Observação 3.11. Por um cálculo direito, podemos provar que a aplicação x fatoriza para uma aplicação do toro $\mathcal{T}^3 = \mathbb{R}^3/\Lambda$ em $\mathbb{R}^8$, onde Λ é a treliça gerada por $a_1 = (6\pi/\sqrt{5}, \sqrt{3}\pi/\sqrt{10}, \pi/\sqrt{2})$, $a_2 = (0, -3\sqrt{5}\pi/\sqrt{6}, -\pi/\sqrt{2})$ e $a_3 = (0, 0, -4\pi/\sqrt{2})$ e a aplicação quociente é uma imersão.

Do Teorema 3.19, temos que o cilindro sobre x dado por

$$y(t,u,v,w) = \phi_t(x(u,v,w)),$$

é uma aplicação próprio-biharmônica em $\mathbb{S}^7(1)$.

Proposição 3.39 ([**25**]). *O cilindro sobre x determina um mergulho próprio-biharmônico do toro $\mathcal{T}^4 = \mathbb{R}^4/\Lambda$ em $\mathbb{S}^7$, onde a treliça Λ é gerada por $a_1 = (2\pi/\sqrt{6}, 0, 0, 0)$, $a_2 = (0, 2\pi/\sqrt{6}, 0, 0)$, $a_3 = (0, 0, 2\pi/\sqrt{6}, 0)$ e $a_4 = (0, 0, 0, 2\pi/\sqrt{2})$. A imagem deste mergulho é o produto entre um círculo de raio $1/\sqrt{2}$ e três outros círculos, cada um de raio $1/\sqrt{6}$.*

Demonstração. Como o fluxo de campo de vetores ξ é dado por $\phi_t(z) = \exp(-\mathrm{i}t)z$, obtemos

$$\begin{aligned} y(t,u,v,w) = &-\frac{1}{\sqrt{6}}\exp(-\mathrm{i}(t+\sqrt{5}u))\mathcal{E}_1 \\ &+\frac{1}{\sqrt{6}}\exp\Big(\mathrm{i}\Big(-t+\frac{1}{\sqrt{5}}u-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{10}}v\Big)\Big)\mathcal{E}_2 \\ &+\frac{1}{\sqrt{6}}\exp\Big(\mathrm{i}\Big(-t+\frac{1}{\sqrt{5}}u+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}v-\frac{3\sqrt{2}}{2}w\Big)\Big)\mathcal{E}_3 \\ &+\frac{1}{\sqrt{2}}\exp\Big(\mathrm{i}\Big(-t+\frac{1}{\sqrt{5}}u+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}v+\frac{\sqrt{2}}{2}w\Big)\Big)\mathcal{E}_4, \end{aligned}$$

onde $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^4$ é uma base ortonormal em $\mathbb{C}^4$.

Agora, consideramos as seguintes transformações ortogonais de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}t+\frac{1}{\sqrt{10}}u+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}v+\frac{1}{2}w=t' \\ \frac{2}{\sqrt{5}}u-\frac{\sqrt{6}}{4\sqrt{5}}v-\frac{\sqrt{2}}{4}w=u' \\ \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}v-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}w=v' \\ \frac{1}{\sqrt{2}}t-\frac{1}{\sqrt{10}}u-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}v-\frac{1}{2}w=w' \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}t'+\frac{2}{\sqrt{6}}u'=\widetilde{t} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}t'+\frac{1}{\sqrt{6}}u'-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}v'=\widetilde{u} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}t'+\frac{1}{\sqrt{6}}u'+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}v'=\widetilde{v} \\ w'=\widetilde{w}. \end{cases}$$

Então, obtém-se

$$\begin{aligned} \widetilde{y}(\widetilde{t},\widetilde{u},\widetilde{v},\widetilde{w}) = &-\frac{1}{\sqrt{6}}\exp(-\mathrm{i}(\sqrt{6}\widetilde{t}))\mathcal{E}_1+\frac{1}{\sqrt{6}}\exp(\mathrm{i}(\sqrt{6}\widetilde{u}))\mathcal{E}_2 \\ &+\frac{1}{\sqrt{6}}\exp(\mathrm{i}(\sqrt{6}\widetilde{v}))\mathcal{E}_3+\frac{1}{\sqrt{2}}\exp(\mathrm{i}(\sqrt{2}\widetilde{w}))\mathcal{E}_4, \end{aligned}$$

o que termina a demonstração. □

CAPíTULO 4

Subvariedades biharmônicas em formas espaciais complexas

Neste capítulo, vamos estudar as subvariedades biharmônicas em formas espacias complexas e obter resultados de classificação e exemplos explícitos de tais subvariedades. Os resultados apresentados aqui foram obtidos em [**20, 25**]. Para a apresentação geral das formas espaciais complexos usamos principalmente o livro [**47**].

1. Formas espaciais complexas. Noções gerais

Definição 4.1. Seja N uma variedade diferenciável. Uma *estrutura quase complexa* em N é um campo tensorial $\bar{J}$, tipo $(1,1)$, tal que $\bar{J}^2 = -\operatorname{Id}$, quando é visto como um isomorfismo $\bar{J} : TN \to TN$. Uma tal variedade $(N, \bar{J})$ é chamada *variedade quase complexa*.

Observação 4.1. Uma variedade quase complexa tem dimensão par.

Definição 4.2. Uma variedade Riemanniana quase complexa $(N, \bar{J}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tal que

$$\langle \bar{J}X, \bar{J}Y \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad \forall X, Y \in C(TM).$$

é chamada *variedade quase Hermitiana*.

Definição 4.3. Uma *variedade de Kähler* é uma variedade quase Hermitiana $(N, \bar{J}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, tal que $\nabla \bar{J} = 0$, onde ∇ é a sua conexão de Levi-Civita.

Definição 4.4. Sejam $(N, \bar{J}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade de Kähler, um vetor unitário $X \in T_pN$ tangente num ponto $p \in N$ e o 2-plano determinado por X e $\bar{J}X$. A curvatura deste plano é chamada *curvatura seccional holomorfa* de M em p determinada por X. Se todas as curvaturas seccionais holomorfas de M são iguais a uma constante ρ, então M é chamada uma *forma espacial complexa* e, neste caso, será denotada por $N(\rho)$.

Observação 4.2. Existem três classes de formas espacias complexas:

- o espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n(\rho)$, se $\rho > 0$;
- o espaço complexo $\mathbb{C}^n$, se $\rho = 0$;
- o espaço hiperbólico complexo $\mathbb{C}H^n(\rho)$, se $\rho < 0$.

Teorema 4.1. *O tensor de curvatura duma forma espacial complexa $M(\rho)$ é dado por*

$$\bar{R}(X,Y)Z = \frac{\rho}{4}\{\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y + \langle \bar{J}Y,Z\rangle \bar{J}X - \langle \bar{J}X,Z\rangle \bar{J}Y + 2\langle X,\bar{J}Y\rangle \bar{J}Z\}. \tag{4.1}$$

Definição 4.5. Seja $\mathbb{C}^{n+1} = \{z = (z_0,\ldots,z_n); z_j \in \mathbb{C}, 0 \leq j \leq n\}$. Definimos uma relação de equivalência em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ da seguinte maneira

$$z = (z_0,\ldots,z_n) \sim w = (w_0,\ldots,w_n),$$

se existe $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ tal que $z_j = \lambda w_j, \forall\, j \in \{0,\ldots,n\}$. A classe de equivalência de z é o conjunto $[z] = \{w \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}; \exists\, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, z = \lambda w\}$. O conjunto destas classes é chamado *espaço projetivo complexo* e é denotado por $\mathbb{C}P^n$.

Observação 4.3. O espaço projetivo complexo admite uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão real $2n$.

Observação 4.4. Existe uma métrica Riemanniana, chamada métrica de Fubini-Study, em $\mathbb{C}P^n$ que torna este espaço uma forma espacial complexa com curvatura seccional holomorfa constante $\rho = 4$.

Definição 4.6. Seja $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^n$ a projeção natural. Então, a restrição de π à esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{2n+1}$ é chamada *aplicação de Hopf* (ou *fibração de Hopf*) .

Observação 4.5. A aplicação de Hopf é uma submersão Riemanniana. O *levantamento horizontal* $X^H \in C(T\mathbb{S}^{2n+1})$ de um campo de vetores $X \in C(T\mathbb{C}P^n)$ é o campo horizontal definido por $d\pi(X^H) = X$ e temos

$$\nabla^{\mathbb{S}^{2n+1}}_{X^H} Y^H = (\nabla^{\mathbb{C}P^n}_X Y)^H + \frac{1}{2}[X^H, Y^H]^V, \forall X, Y \in C(T\mathbb{C}P^n),$$

onde Z^V é o componente vertical de Z, ou seja, o componente tangente à fibra $\pi^{-1}(p)$, em todos os pontos $p \in \mathbb{C}P^n$.

2. Resultados gerais de biharmonicidade em formas espaciais complexas

Seja $N^n(c)$ uma forma espacial complexa, de curvatura seccional holomorfa constante c, com estrutura complexa $\bar{J}$, métrica Riemanniana $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e tensor da curvatura $\bar{R}$.

Seja $\bar{\jmath} : \bar{\Sigma} \to N^n(c)$ a inclusão canônica duma subvariedade $\bar{\Sigma}$ em $N^n(c)$, de dimensão real $\bar{m}$.

Do Teorema 1.7, usando a equação (4.1), é fácil de obter a seguinte proposição.

Proposição 4.2 ([**20**]). *Seja $\bar{\Sigma}$ uma subvariedade real de $N^n(c)$ de dimensão $\bar{m}$, tal que $\bar{J}\bar{H}$ é tangente a $\bar{\Sigma}$. Então $\bar{\Sigma}$ é biharmônica se, e somente se,*

$$\begin{cases} -\Delta^{\perp}\bar{H} + \operatorname{trace}\bar{\sigma}(\cdot, \bar{A}_{\bar{H}}(\cdot)) - \frac{c(\bar{m}+3)}{4}\bar{H} = 0 \\ 4\operatorname{trace}\bar{A}_{\nabla^{\perp}_{(\cdot)}\bar{H}}(\cdot) + \bar{m}\operatorname{grad}(|\bar{H}|^2) = 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

onde $\bar{A}$ é o operador de Weingarten e $\bar{\sigma}$ é a segunda forma fundamental.

Se $\bar{\Sigma}$ é uma hipersuperfície, $\bar{J}\bar{H}$ é tangente a $\bar{\Sigma}$ e, da proposição anterior, obtemos o seguinte resultado publicado, pela primeira vez, em [**27**].

Corolário 4.3 ([**27**]). *Seja $\bar{\Sigma}$ uma hipersuperfície de $N^n(c)$ de curvatura média constante não nula. Então, $\bar{\Sigma}$ é próprio-biharmônica se, e somente se,*

$$|\bar{\sigma}|^2 = \frac{c(n+1)}{2}.$$

Podemos usar também a Proposição 4.2 para estudar a biharmonicidade das *subvariedades Lagrangianas*, ou seja, subvariedades $\bar{\Sigma}$ de dimensão n em $N^n(c)$, tais que $\bar{\jmath}^*\Omega = 0$, onde Ω é a 2-forma fundamental em $N^n(c)$ definida por $\Omega(X, Y) = \langle X, \bar{J}Y\rangle$, para todos os campos de vetores X e Y tangentes a $N^n(c)$.

Corolário 4.4 ([**20**]). *Seja $\bar{\Sigma}$ uma subvariedade Lagrangiana em $N^n(c)$ com campo curvatura média paralelo. Então, $\bar{\Sigma}$ é biharmônica se, e somente se,*

$$\operatorname{trace}\bar{\sigma}(\cdot, \bar{A}_{\bar{H}}(\cdot)) = \frac{c(n+3)}{4}\bar{H}.$$

Agora, consideraremos somente o caso quando o espaço ambiente é o espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$, com a métrica de Fubini-Study, e com curvatura seccional holomorfa constante 4.

Proposição 4.5 ([**20**]). *Seja $\bar{\Sigma}$ uma subvariedade não-mínima de curvatura média constante em $\mathbb{C}P^n$, de dimensão $\bar{m}$, tal que $\bar{J}\bar{H}$ é tangente a $\bar{\Sigma}$. Então, temos que*

(1) *se $\bar{\Sigma}$ é próprio-biharmônica, entâo $|\bar{H}|^2 \in (0, (\bar{m}+3)/\bar{m}]$;*
(2) *se $|\bar{H}|^2 = (\bar{m}+3)/\bar{m}$, então $\bar{\Sigma}$ é próprio-biharmônica se, e somente se, é pseudo-umbilical e $\nabla^{\perp}\bar{H} = 0$.*

Demonstração. Seja $\bar{\Sigma}$ uma subvariedade próprio-biharmônica de curvatura média constante em $\mathbb{C}P^n$, de dimensão $\bar{m}$, tal que $\bar{J}\bar{H}$ é tangente a $\bar{\Sigma}$. Então, obtemos

$$\Delta^{\perp}\bar{H} = -(\bar{m}+3)\bar{H} + \operatorname{trace}\bar{\sigma}(\cdot, \bar{A}_{\bar{H}}(\cdot)),$$

e, portanto,

$$\langle\Delta^{\perp}\bar{H}, \bar{H}\rangle = -(\bar{m}+3)|\bar{H}|^2 + \sum_{i=1}^{\bar{m}}\langle\bar{\sigma}(X_i, \bar{A}_{\bar{H}}(X_i)), \bar{H}\rangle = -(\bar{m}+3)|\bar{H}|^2 + |\bar{A}_{\bar{H}}|^2.$$

Substituindo essa expressão na fórmula de Weitzenböck

$$\frac{1}{2}\Delta|\bar{H}|^2 = \langle \Delta^\perp \bar{H}, \bar{H} \rangle + |\nabla^\perp \bar{H}|^2,$$

e, como $|\bar{H}| =$ constante, obtém-se

$$(\bar{m}+3)|\bar{H}|^2 = |\bar{A}_{\bar{H}}|^2 + |\nabla^\perp \bar{H}|^2. \tag{4.3}$$

Agora, sejam p um ponto qualquer em $\bar{\Sigma}$ e $\{X_i\}_{i=1}^{\bar{m}}$ uma base ortonormal em $T_p\bar{\Sigma}$ tal que $\bar{A}_{\bar{H}}(X_i) = \lambda_i X_i$. Temos

$$\lambda_i = \langle \bar{A}_{\bar{H}}(X_i), X_i \rangle = \langle \bar{\sigma}(X_i, X_i), \bar{H} \rangle,$$

o que implica $\sum_{i=1}^{\bar{m}} \lambda_i = \bar{m}|\bar{H}|^2$, ou, equivalentemente,

$$|\bar{H}|^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\bar{m}} \lambda_i}{\bar{m}}.$$

A norma de $\bar{A}_{\bar{H}}$ é dada por

$$|\bar{A}_{\bar{H}}|^2 = \sum_{i=1}^{\bar{m}} \langle \bar{A}_{\bar{H}}(X_i), \bar{A}_{\bar{H}}(X_i) \rangle = \sum_{i=1}^{\bar{m}} (\lambda_i)^2$$

e, substituindo essa expressão em (4.3), obtemos

$$\frac{\bar{m}+3}{\bar{m}} \sum_{i=1}^{\bar{m}} \lambda_i = \sum_{i=1}^{\bar{m}} (\lambda_i)^2 + |\nabla^\perp \bar{H}|^2 \geq \frac{(\sum_{i=1}^{\bar{m}} \lambda_i)^2}{\bar{m}} + |\nabla^\perp \bar{H}|^2.$$

Portanto, temos

$$(\bar{m}+3)|\bar{H}|^2 \geq \bar{m}|\bar{H}|^4 + |\nabla^\perp \bar{H}|^2 \geq \bar{m}|\bar{H}|^4$$

e, então, $|\bar{H}|^2 \in (0, (\bar{m}+3)/\bar{m}]$.

Se $|\bar{H}|^2 = (\bar{m}+3)/\bar{m}$, como $\bar{\Sigma}$ é biharmônica, as desigualdades acima tornam-se igualdades e, então, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{\bar{m}}$ e $\nabla^\perp \bar{H} = 0$, ou seja, $\bar{\Sigma}$ é pseudo-umbílica e tem campo curvatura média paralelo.

Reciprocamente, se $|\bar{H}|^2 = (\bar{m}+3)/\bar{m}$ e $\bar{\Sigma}$ é pseudo-umbílica com $\nabla^\perp \bar{H} = 0$, então $\bar{\Sigma}$ é próprio-biharmônica. □

Do Corolário 4.3, depois de um cálculo direito, obtemos a próxima proposição.

Proposição 4.6 ([**20**]). *Seja $\bar{\Sigma}$ uma hipersuperfície real próprio-biharmônica em $\mathbb{C}P^n$, com curvatura média constante. Então sua curvatura escalar s é dada por*

$$s = 4n^2 - 2n - 4 + (2n-1)^2|\bar{H}|^2 = \text{constante}.$$

Uma outra família importante de subvariedades em $\mathbb{C}P^n$ é a de subvariedades $\bar{\Sigma}$ tais que $J\bar{H}$ é normal a $\bar{\Sigma}$. Neste caso, usando, novamente, o Teorema 1.7 e a fórmula (4.1), obtemos o seguinte resultado.

Proposição 4.7 ([**20**]). *Seja $\bar{\Sigma}$ uma subvariedade real em $\mathbb{C}P^n$, de dimensão $\bar{m}$, tal que $\bar{J}\bar{H}$ é normal a $\bar{\Sigma}$. Então $\bar{\Sigma}$ é biharmônica se, e somente se,*

$$\begin{cases} -\Delta^{\perp}\bar{H} + \operatorname{trace}\bar{\sigma}(\cdot, \bar{A}_{\bar{H}}(\cdot)) - \bar{m}\bar{H} = 0 \\ 4\operatorname{trace}\bar{A}_{\nabla^{\perp}_{(\cdot)}\bar{H}}(\cdot) + \bar{m}\operatorname{grad}(|\bar{H}|^2) = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Além disso, se $\bar{J}\bar{H}$ é normal a $\bar{\Sigma}$ e o campo curvatura média é paralelo, então $\bar{\Sigma}$ é biharmônic se, e somente se,

$$\operatorname{trace}\bar{\sigma}(\cdot, \bar{A}_{\bar{H}}(\cdot)) = \bar{m}\bar{H}.$$

Trabalhando como na Proposição 4.5, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 4.8 ([**20**]). *Seja $\bar{\Sigma}$ uma subvariedade real em $\mathbb{C}P^n$, de dimensão $\bar{m}$ e curvatura média constante, tal que $\bar{J}\bar{H}$ é normal a $\bar{\Sigma}$. Temos que*

(1) *se $\bar{\Sigma}$ é próprio-biharmônica, então $|\bar{H}|^2 \in (0,1]$;*
(2) *se $|\bar{H}|^2 = 1$, então $\bar{\Sigma}$ é próprio-biharmônica se, e somente se, é pseudo-umbílica e $\nabla^{\perp}\bar{H} = 0$.*

3. A fibração de Hopf e a biharmonicidade

Seja $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n(4)$ a fibração de Hopf, que é uma submersão Riemanniana. Nesta seção, vamos considerar $\mathbb{S}^{2n+1}$ como uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{2n+2}$ e denotaremos por $\hat{J}$ a estrutura complexa de $\mathbb{R}^{2n+2}$.

Seja $\bar{\Sigma}$ uma subvariedade real em $\mathbb{C}P^n$, de dimensão $\bar{m}$, e denotemos por $\Sigma := \pi^{-1}(\bar{\Sigma})$ o cilindro de Hopf sobre $\bar{\Sigma}$ e por $\bar{\jmath} : \bar{\Sigma} \to \mathbb{C}P^n$ e $\jmath : \Sigma \to \mathbb{S}^{2n+1}$ suas inclusões.

Agora, vamos obter a relação entre os campos de bitensão de $\bar{\jmath}$ e de $\jmath$. Consideramos um referencial local ortonormal $\{\bar{X}_k\}_{k=1}^{\bar{m}}$ tangente a $\bar{\Sigma}$, $1 \leq \bar{m} \leq 2n-1$, e um referencial local ortonormal $\{\bar{\eta}_\alpha\}_{\alpha=\bar{m}+1}^{2n}$ normal a $\bar{\Sigma}$. Denotamos por $X_k = \bar{X}_k^H$ e $\eta_\alpha = \bar{\eta}_\alpha^H$ o levantamento horizontal via a aplicação de Hopf e por ξ campo vetorial de Hopf em $\mathbb{S}^{2n+1}$ que é tangente às fibras da fibração de Hopf, ou seja, $\xi(p) = -\hat{J}p$, para cada $p \in \mathbb{S}^{2n+1}$. Então, $\{X_k, \xi\}$ é um referencial local ortonormal tangente a Σ e $\{\eta_\alpha\}$ é um referencial local ortonormal normal a Σ.

Lema 4.9 ([**20**]). *Sejam $X = \bar{X}^H \in C(T\Sigma)$, onde $\bar{X} \in C(T\bar{\Sigma})$ e $V = \bar{V}^H \in C(\jmath^{-1}(T\mathbb{S}^{2n+1}))$, com $\bar{V} \in C((\bar{\jmath})^{-1}(T\mathbb{C}P^n))$. Então, temos que*

$$\nabla^{\jmath}_X V = (\nabla^{\bar{\jmath}}_{\bar{X}}\bar{V})^H + \langle V, \hat{J}X\rangle\xi = (\nabla^{\bar{\jmath}}_{\bar{X}}\bar{V})^H + (\langle \bar{V}, \bar{J}\bar{X}\rangle \circ \pi)\xi,$$

onde $\nabla^{\jmath}$ e $\nabla^{\bar{\jmath}}$ denotam as conexões pull-back em $\jmath^{-1}(T\mathbb{S}^{2n+1})$ e $(\bar{\jmath})^{-1}(T\mathbb{C}P^n)$, respectivamente.

Demonstração. Identificando os componentes horizontal e vertical de $\nabla^{\jmath}_X V$, obtemos

$$\nabla^{\jmath}_X V = \nabla^{\jmath}_{\bar{X}^H}\bar{V}^H = (\nabla^{\bar{\jmath}}_{\bar{X}}\bar{V})^H + \langle\nabla^{\jmath}_X V, \xi\rangle\xi$$

e, então, como

$$\begin{aligned}\langle\nabla^{\jmath}_X V, \xi\rangle =& -\langle V, \nabla^{\jmath}_X \xi\rangle = -\langle V, \hat{\nabla}_X \xi + \langle X, \xi\rangle p\rangle\\ =&\langle V, \hat{\nabla}_X \hat{J}p\rangle = \langle V, \hat{J}X\rangle = \langle\bar{V}, \bar{J}\bar{X}\rangle \circ \pi,\end{aligned}$$

onde $\hat{\nabla}$ é conexão Levi-Civita em $\mathbb{E}^{2n+2}$, concluímos a prova. □

Lema 4.10 ([**20**]). *Seja $V = \bar{V}^H \in C(\jmath^{-1}(T\mathbb{S}^{2n+1}))$ o levantamento horizontal de $\bar{V} \in C((\bar{\jmath})^{-1}(T\mathbb{C}P^n))$. Então, temos que*

$$\Delta^{\jmath} V = (\Delta^{\bar{\jmath}}\bar{V})^H + 2\,\mathrm{div}((\hat{J}V)^\top)\xi + \langle V, \hat{J}\tau(\jmath)\rangle\xi + V - \hat{J}(\hat{J}V)^\top,$$

onde $\Delta^{\jmath}$ e $\Delta^{\bar{\jmath}}$ denotam os Laplacianos em $\jmath^{-1}(T\mathbb{S}^{2n+1})$ e $(\bar{\jmath})^{-1}(T\mathbb{C}P^n)$, respectivamente, e $V^\top$ é o componente de V tangente a Σ.

Demonstração. O Laplaciano $\Delta^{\jmath}$ é dado por

$$-\Delta^{\jmath} V = \sum_{i=1}^{\bar{m}}\{\nabla^{\jmath}_{X_i}\nabla^{\jmath}_{X_i} V - \nabla^{\jmath}_{\nabla^M_{X_i}X_i} V\} + \nabla^{\jmath}_{\xi}\nabla^{\jmath}_{\xi} V - \nabla^{\jmath}_{\nabla^M_{\xi}\xi} V.$$

Vamos, então, calcular os termos da expressão acima.
Do Lema 4.9, temos

$$\begin{aligned}\nabla^{\jmath}_{X_i}\nabla^{\jmath}_{X_i} V =&(\nabla^{\bar{\jmath}}_{\bar{X}_i}\nabla^{\bar{\jmath}}_{\bar{X}_i}\bar{V})^H + \langle\nabla^{\jmath}_{X_i} V, \hat{J}X_i\rangle\xi + \nabla^{\jmath}_{X_i}(\langle V, \hat{J}X_i\rangle\xi)\\ =&(\nabla^{\bar{\jmath}}_{\bar{X}_i}\nabla^{\bar{\jmath}}_{\bar{X}_i}\bar{V})^H + 2\langle\nabla^{\jmath}_{X_i} V, \hat{J}X_i\rangle\xi + \langle V, \nabla^{\jmath}_{X_i}\hat{J}X_i\rangle\xi + \langle\hat{J}V, X_i\rangle\hat{J}X_i.\end{aligned}$$

Usando o fato que $\nabla^{\jmath}_{X_i}\hat{J}X_i = \hat{J}\nabla^{\jmath}_{X_i}X_i + \xi$, obtemos

$$\begin{aligned}\nabla^{\jmath}_{X_i}\nabla^{\jmath}_{X_i} V \;=\;& (\nabla^{\bar{\jmath}}_{\bar{X}_i}\nabla^{\bar{\jmath}}_{\bar{X}_i}\bar{V})^H + 2\langle\nabla^{\jmath}_{X_i} V, \hat{J}X_i\rangle\xi + \langle V, \hat{J}\nabla^{\jmath}_{X_i}X_i\rangle\xi\\ &+\hat{J}(\langle\hat{J}V, X_i\rangle X_i).\end{aligned} \tag{4.5}$$

Além disso,

$$\nabla^{\jmath}_{\nabla^M_{X_i}X_i} V = (\nabla^{\bar{\jmath}}_{\nabla^{\bar{M}}_{\bar{X}_i}\bar{X}_i}\bar{V})^H + \langle V, \hat{J}\nabla^M_{X_i}X_i\rangle\xi. \tag{4.6}$$

Somando (4.5) e (4.6), obtém-se

$$\begin{aligned} -\Delta^{\jmath} V &= -(\Delta^{\bar{\jmath}}\bar{V})^H + 2\sum_{i=1}^{\bar{m}}\langle \nabla^{\jmath}_{X_i} V, \hat{J}X_i\rangle\xi + \langle V, \hat{J}\sum_{i=1}^{\bar{m}}(\nabla^{\jmath}_{X_i} X_i - \nabla^{M}_{X_i} X_i)\rangle\xi \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\bar{m}} \hat{J}(\langle \hat{J}V, X_i\rangle X_i) + \nabla^{\jmath}_{\xi}\nabla^{\jmath}_{\xi} V \\ &= -(\Delta^{\bar{\jmath}}\bar{V})^H + 2\sum_{i=1}^{\bar{m}}\langle \nabla^{\jmath}_{X_i} V, \hat{J}X_i\rangle\xi + \langle V, \hat{J}\tau(\jmath)\rangle\xi \\ &\quad + \hat{J}(\hat{J}V)^{\top} + \nabla^{\jmath}_{\xi}\nabla^{\jmath}_{\xi} V. \end{aligned}$$

Também obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\bar{m}}\langle \nabla^{\jmath}_{X_i} V, \hat{J}X_i\rangle &= \sum_{i=1}^{\bar{m}}\{-X_i\langle \hat{J}V, X_i\rangle + \langle \hat{J}V, \nabla^{\jmath}_{X_i} X_i\rangle\} \\ &= \langle \hat{J}V, \tau(\jmath)\rangle - \sum_{i=1}^{\bar{m}}\{X_i\langle \hat{J}V, X_i\rangle - \langle \hat{J}V, \nabla^{M}_{X_i} X_i\rangle\} \\ &= \langle \hat{J}V, \tau(\jmath)\rangle - \operatorname{div}((\hat{J}V)^{\top}). \end{aligned}$$

Finalmente, obtém-se

$$\begin{aligned} \nabla^{\jmath}_{\xi} V &= H(\nabla^{\jmath}_{\xi} V) + \langle \nabla^{\jmath}_{\xi} V, \xi\rangle\xi = H(\nabla^{\jmath}_{\xi} V) \\ &= H(\nabla^{\jmath}_{V}\xi) = H(\hat{\nabla}_V \xi + \langle V, \xi\rangle p) = H(-\hat{J}V) = -\hat{J}V, \end{aligned}$$

e, daqui, segue-se que $\nabla^{\jmath}_{\xi}\nabla^{\jmath}_{\xi} V = -V$ e, usando todas as equações acima, provamos o lema. □

Antes de determinar a relação entre os campos de bitensão precisamos calcular os traços dos operadores de curvatura. Depois de um cálculo direito, obtemos

$$\operatorname{trace} R^{\mathbb{S}^{2n+1}}(d\jmath, \tau(\jmath))d\jmath = -(\bar{m}+1)\tau(\jmath) \tag{4.7}$$

e

$$\operatorname{trace} R^{\mathbb{C}P^n}(d\bar{\jmath}, \tau(\bar{\jmath}))d\bar{\jmath} = -\bar{m}\tau(\bar{\jmath}) + 3\bar{J}(\bar{J}\tau(\bar{\jmath}))^{\top}. \tag{4.8}$$

Agora, podemos provar o resultado principal desta seção.

Teorema 4.11 ([**20**]). *Sejam $\bar{\jmath} : \bar{M} \to \mathbb{C}P^n$ uma subvariedade real de dimensão $\bar{m}$ e $\jmath : \Sigma = \pi^{-1}(\bar{\Sigma}) \to \mathbb{S}^{2n+1}$ o cilindro de Hopf correspondente. Então, temos*

$$(\tau_2(\bar{\jmath}))^H = \tau_2(\jmath) - 4\hat{J}(\hat{J}\tau(\jmath))^{\top} + 2\operatorname{div}((\hat{J}\tau(\jmath))^{\top})\xi. \tag{4.9}$$

Demonstração. De (4.7), temos $\tau_2(\jmath) = \Delta^{\jmath}\tau(\jmath) + (\bar{m}+1)\tau(\jmath)$ e, então, como $\tau(\jmath) = (\tau(\bar{\jmath}))^H$, usando a Lema 4.10 e a fórmula (4.8), concluímos a prova. □

Observação 4.6. Temos algumas aplicações direitas do Teorema 4.11.

- Usando o levantamento horizontal, é fácil verificar que a equação (4.9) pode ser escrita como
$$(\tau_2(\bar\jmath))^H = \tau_2(\jmath) - 4(\bar J(\bar J\tau(\bar\jmath))^\top)^H + 2(\mathrm{div}_{\bar\Sigma}((\bar J\tau(\bar\jmath))^\top)\circ\pi)\xi.$$
- Se $\hat J\tau(\jmath)$ é normal a Σ, então $\tau_2(\bar\jmath)=0$ se, e somente se, $\tau_2(\jmath)=0$.
- Se $\hat J\tau(\jmath)$ é tangente a Σ, então $\tau_2(\bar\jmath)=0$ e $\mathrm{div}_{\bar M}((\bar J\tau(\bar\jmath))^\top)=0$ se, e somente se, $\tau_2(\jmath)+4\tau(\jmath)=0$.
- Suponhamos que (localmente) $\Sigma=\pi^{-1}(\bar\Sigma)=\mathbb{S}^1\times\widetilde\Sigma$, onde $\widetilde\Sigma$ é uma subvariedade integral de $\mathbb{S}^{2n+1}$, ou seja, $\langle\widetilde X_{\widetilde p},\xi(\widetilde p)\rangle=0$, para cada vetor $\widetilde X_{\widetilde p}$ tangente a $\widetilde\Sigma$. Denotamos por $\widetilde\jmath:\widetilde\Sigma\to\mathbb{S}^{2n+1}$ a inclusão canônica e $\{\phi_t\}$ o fluxo de ξ. Do Teorema 3.19, temos que $\tau_2(\jmath)_{(t,\widetilde p)} = (d\phi_t)_{\widetilde p}(\tau_2(\widetilde\jmath))$, e podemos verificar que, em $\widetilde p$,
$$(\tau_2(\bar\jmath))^H = \tau_2(\widetilde\jmath) - 4\hat J(\hat J\tau(\widetilde\jmath))^\top + 2\,\mathrm{div}_{\widetilde\Sigma}((\hat J\tau(\widetilde\jmath))^\top)\xi.$$

Relembramos agora que uma aplicação suave $\psi: M\to N$ entre duas variedades Riemannianas é chamada λ-*biharmônica* se é um ponto crítico da λ-*bienergia*
$$E_2(\psi)+\lambda E(\psi),$$
onde λ é uma constante real. Os pontos críticos da λ-bienergia satisfazem a equação
$$\tau_2(\psi)-\lambda\tau(\psi)=0.$$

Proposição 4.12 ([**20**]). *Sejam $\bar\Sigma$ uma hipersuperfície real de curvatura média constante em $\mathbb{C}P^n$ e $\Sigma=\pi^{-1}(\bar\Sigma)$ o cilindro de Hopf sobre $\bar\Sigma$. Então, $\tau_2(\bar\jmath)=0$ se, e somente se, $\tau_2(\jmath)+4\tau(\jmath)=0$, ou seja, $\jmath$ é (-4)-biharmônica.*

Demonstração. Temos $(\bar J\tau(\bar\jmath))^\top=\bar J\tau(\bar\jmath)$ e, portanto, só precisamos provar que $\mathrm{div}_{\bar M}(\bar J\tau(\bar\jmath))=0$.

Seja $\bar\eta$ uma seção local unitária no fibrado normal de $\bar\Sigma$ em $\mathbb{C}P^n$ e consideremos $\{\bar X_1,\bar J\bar X_1,\dots,\bar X_{n-1},\bar J\bar X_{n-1},\bar J\bar\eta\}$ um referencial local ortonormal tangente a $\bar\Sigma$. Como $\bar\Sigma$ é uma hipersuperfície de curvature média constante, é suficiente mostrar que $\mathrm{div}_{\bar M}(\bar J\bar\eta)=0$. Denotamos por $\bar A_{\bar\eta}$ o operador de Weingarten de $\bar\Sigma$ e obtemos
$$\langle\nabla^{\bar\Sigma}_{\bar X_a}\bar J\bar\eta,\bar X_a\rangle=\langle\bar A_{\bar\eta}(\bar X_a),\bar J\bar X_a\rangle,\quad \langle\nabla^{\bar\Sigma}_{\bar J\bar X_b}\bar J\bar\eta,\bar J\bar X_b\rangle=-\langle\bar A_{\bar\eta}(\bar X_b),\bar J\bar X_b\rangle,$$
para $1\le a,b\le n-1$ e $\langle\nabla^{\bar\Sigma}_{\bar J\bar\eta}\bar J\bar\eta,\bar J\bar\eta\rangle=0$, o que termina a demonstração. □

Proposição 4.13 ([**20**]). *Sejam $\bar\Sigma$ uma subvariedade Lagrangiana em $\mathbb{C}P^n$, com o campo curvatura média paralelo, e $\Sigma=\pi^{-1}(\bar\Sigma)$ o cilindro de Hopf sobre $\bar\Sigma$. Então $\bar\jmath$ é biharmônica se, e somente se, $\jmath$ é (-4)-biharmônica.*

Demonstração. Como $\bar\Sigma$ é Lagrangiana, temos que $\dim\bar\Sigma=n$ e também que $\bar J(T\bar\Sigma)=N\bar\Sigma$ e, portanto, $\bar J(N\bar\Sigma)=T\bar\Sigma$. Obtemos que $\bar J\tau(\bar\jmath)\in C(T\bar\Sigma)$

e vamos provar que $\nabla^{\bar{\Sigma}} \bar{J}\tau(\bar{\jmath}) = 0$, o que implica $\mathrm{div}_{\bar{\Sigma}}(\bar{J}\tau(\bar{\jmath})) = 0$. Para dois campos de vetores $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ tangente a $\bar{\Sigma}$ temos

$$\begin{aligned}\langle \nabla^{\bar{\Sigma}}_{\bar{X}} \bar{J}\tau(\bar{\jmath}), \bar{Y}\rangle =& \langle \nabla^{\bar{\jmath}}_{\bar{X}} \bar{J}\tau(\bar{\jmath}), \bar{Y}\rangle = \langle \bar{J}\nabla^{\bar{\jmath}}_{\bar{X}} \tau(\bar{\jmath}), \bar{Y}\rangle = \langle -\bar{J}\bar{A}_{\tau(\bar{\jmath})}(\bar{X}), \bar{Y}\rangle \\ =& 0\end{aligned}$$

e a prova está concluida. □

O último resultado desta seção é a seguinte proposição.

Proposição 4.14 ([**20**]). *Sejam $\bar{\Sigma}$ uma subvariedade real de $\mathbb{C}P^n$ tal que $\bar{J}\tau(\bar{\jmath})$ é normal a $\bar{\Sigma}$ e $\Sigma = \pi^{-1}(\bar{\Sigma})$ o cilindro de Hopf sobre $\bar{\Sigma}$. Então $\bar{\jmath}$ é biharmônica se, e somente se, $\jmath$ é biharmônica.*

4. Curvas biharmônicas em $\mathbb{C}P^n$

Nesta seção, estabeleceremos a seguinte proposição, que introduz a noção de levantamento horizontal duma curva no espaço projetivo complexo.

Proposição 4.15 ([**40**]). *Sejam $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ a fibração de Hopf e $\bar{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{C}P^n$ uma curva de Frenet, com $\bar{\gamma}(0) = \bar{p}_0$ e $\bar{\gamma}(1) = \bar{p}_1$. Para um ponto $p_0 \in \pi^{-1}(\bar{p}_0)$, existe uma única curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^{2n+1}$ tal que $\gamma(0) = p_0$ e o campo de vetores tangente à curva γ é horizontal. Uma tal curva γ é chamada um* levantamento horizontal *de $\bar{\gamma}$.*

Definição 4.7. Seja $\bar{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{C}P^n$ uma curva de Frenet de ordem de osculação r. As funções

$$\bar{\tau}_{ij} = \langle \bar{E}_i, \bar{J}\bar{E}_j\rangle, \quad 1 \le i < j \le r,$$

são chamadas as *torsões complexas* de $\bar{\gamma}$, onde $\{\bar{E}_1 = \bar{\gamma}' = T, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_r\}$ é o referencial de Frenet ao longo de $\bar{\gamma}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica de Fubini-Study e $\bar{J}$ é a estrutura complexa em $\mathbb{C}P^n$. Uma hélice de ordem r é chamada *hélice holomorfa de ordem* r, se suas torsões complexas são constantes.

Agora, seja $\bar{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}P^n$ uma curva de Frenet de ordem de osculação r, parametrizada por comprimento de arco. Das equações de Frenet, obtemos

$$\begin{aligned}\tau_2(\bar{\gamma}) = \; & -3\bar{k}_1\bar{k}_1'\bar{E}_1 + (\bar{k}_1'' - \bar{k}_1^3 - \bar{k}_1\bar{k}_2^2 + \bar{k}_1)\bar{E}_2 \\ & +(2\bar{k}_1'\bar{k}_2 + \bar{k}_1\bar{k}_2')\bar{E}_3 + \bar{k}_1\bar{k}_2\bar{k}_3\bar{E}_4 - 3\bar{k}_1\bar{\tau}_{12}\bar{J}\bar{E}_1.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Caso I: $\bar{\tau}_{12} = \pm 1$**.** Neste caso, temos $\bar{J}\bar{E}_2 = \pm\bar{E}_1$ e, das equações de Frenet, encontramos

$$\bar{J}(\bar{\nabla}_{\bar{E}_1}\bar{E}_1) = \pm\bar{k}_1\bar{E}_1 = \bar{\nabla}_{\bar{E}_1}(\mp\bar{E}_2) = \mp\bar{\nabla}_{\bar{E}_1}\bar{E}_2.$$

Então,

$$\bar{\nabla}_{\bar{E}_1}\bar{E}_2 = -\bar{k}_1\bar{E}_1.$$

Portanto, $\bar{k}_i = 0$, $i \ge 2$, e a equação (4.10) prova a seguinte afirmação.

Proposição 4.16 ([**20**]). *Uma curva de Frenet $\bar{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}P^n$, parametrizada por comprimento de arco e tal que $\bar{\tau}_{12} = \pm 1$, é próprio-biharmônica se, e somente se, é um círculo com $\bar{k}_1 = 2$.*

Em seguida, consideramos a curva $\gamma : I \to \mathbb{S}^{2n+1}$, um levantamento horizontal de $\bar{\gamma}$. Sejam $\dot{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{S}^{2n+1}$e J a estrutura complexa de $\mathbb{R}^{2n+2}$. Então, $\gamma' = E_1 = (\bar{E})^H$ e

$$\dot{\nabla}_{E_1} E_1 = (\bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \bar{E}_1)^H = \bar{k}_1 \bar{E}_2^H = k_1 E_2,$$

ou seja, $k_1 = \bar{k}_1$ and $E_2 = \bar{E}_2^H = \mp(\bar{J}\bar{E}_1)^H = \mp J E_1$. Segue-se que

$$\begin{aligned}\dot{\nabla}_{E_1} E_2 &= (\bar{\nabla}_{\bar{E}_1} \bar{E}_2)^H + \langle \dot{\nabla}_{E_1} E_2, \xi \rangle \xi \\ &= -k_1 E_1 - \langle E_2, \dot{\nabla}_{E_1} \xi \rangle \xi = -k_1 E_1 - \langle E_2, J E_1 \rangle \\ &= -k_1 E_1 \mp \langle E_2, E_2 \rangle \xi \\ &= -k_1 E_1 \mp \xi,\end{aligned}$$

onde ξ é o campo de Hopf em $\mathbb{S}^{2n+1}$, tangente às fibras, ou seja, $\xi(p) = -Jp$. Portanto, $k_2 = 1$ e $E_3 = \mp \xi$ e, então, $\dot{\nabla}_{E_1} E_3 = \mp \dot{\nabla}_{E_1} \xi = -E_2$.

Proposição 4.17 ([**20**]). *Uma curva de Frenet $\bar{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}P^n$, parametrizada por comprimento de arco e tal que $\bar{\tau}_{12} = \pm 1$, é próprio-biharmônica se, e somente se, seu levantamento horizontal $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{S}^{2n+1}$ é uma hélice com $k_1 = 2$ e $k_2 = 1$.*

Como no caso de curvas biharmônicas em formas espacias Sasakianas, obtemos o teorema seguinte.

Teorema 4.18 ([**20**]). *Seja $\bar{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}P^n$ uma curva de Frenet próprio-biharmônica parametrizada por comprimento de arco e tal que $\bar{\tau}_{12} = \pm 1$. Então, a equação de seu levantamento horizontal $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{S}^{2n+1}$ em $\mathbb{R}^{2n+2}$ é dada por*

$$\begin{aligned}\gamma(s) = &\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \cos((\sqrt{2}+1)s) e_1 - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \operatorname{sen}((\sqrt{2}+1)s) J e_1 \\ &+ \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cos((\sqrt{2}-1)s) e_3 + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \operatorname{sen}((\sqrt{2}-1)s) J e_3,\end{aligned}$$

onde e_1 e e_3 são vetores constantes unitários em $\mathbb{R}^{2n+2}$, tais que e_3 é ortogonal a e_1 e a Je_1.

Observação 4.7. A curva γ é (-4)-biharmônica, ou seja, ela é um ponto crítico de

$$E_2(\gamma) - 4E(\gamma),$$

onde, $E_2(\gamma)$ é a bienergia e $E(\gamma)$ a energia de γ, ou, equivalentemente, uma solução da equação de Euler-Lagrange

$$\tau_2(\gamma) + 4\tau(\gamma) = 0.$$

Caso II: $\bar{\tau}_{12} = 0$. Neste caso, a curva $\bar{\gamma}$ é próprio-biharmônica se, e somente se,

$$\bar{k}_1 = \text{constante} > 0, \quad \bar{k}_2 = \text{constante}, \quad \bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2 = 1, \quad \bar{k}_2\bar{k}_3 = 0.$$

PROPOSIÇÃO 4.19 ([**20**]). *Uma curva de Frenet $\bar{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}P^n$, parametrizada por comprimento de arco e tal que $\bar{\tau}_{12} = 0$, é próprio-biharmônica se, e somente se,*

(1) *$n = 2$ e $\bar{\gamma}$ é um círculo com $\bar{k}_1 = 1$; ou*
(2) *$n \geq 3$ e $\bar{\gamma}$ é um círculo com $\bar{k}_1 = 1$, ou uma hélice com $\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2 = 1$.*

DEMONSTRAÇÃO. Precisamos mostrar apenas a afirmação sobre a dimensão do espaço ambiente. Temos que o sistema $\{\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{J}\bar{E}_2\}$ é linearmente independente. Se $\bar{\gamma}$ é uma curva de Frenet de ordem de osculação 3, tal que $\bar{J}\bar{E}_2 \perp \bar{E}_1$, então as equações de Frenet mostram que o sistema

$$\{\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3, \bar{J}\bar{E}_1\bar{J}\bar{E}_2\}$$

é linearmente independente e $n \geq 3$, neste caso. □

Agora, consideramos um levantamento horizontal $\gamma : I \to \mathbb{S}^{2n+1}$ da curva $\bar{\gamma}$. Como no primeiro caso, obtemos $\gamma' = E_1 = \bar{E}_1^H$, $E_2 = \bar{E}_2^H$ e, então, $JE_1 \perp E_2$, $\kappa_1 = \bar{\kappa}_1$, $\kappa_2 = \bar{\kappa}_2$, $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 1$, ou seja, $\bar{\gamma}$ é próprio-biharmônica se, e somente se, γ é próprio-biharmônica, ou seja, dada pelo Teorema 3.11.

Caso III: $\bar{\tau}_{12}$ não é constante $-1, 0$, ou 1. Inicialmente, vamos mostrar que a ordem de osculação r duma curva de Frenet $\bar{\gamma} : I \to \mathbb{C}P^n$, próprio-biharmônica e tal que $\bar{\tau}_{12}$ não é constante $-1, 0$, ou 1, satisfaz $r \geq 4$.

Se $r = 2$, da equação biharmônica $\tau_2(\bar{\gamma}) = 0$, obtemos que

$$\bar{k}_1 = \text{constante} > 0$$

e, então, $(-\bar{k}_1^3 + \bar{k}_1)\bar{E}_2 - 3\bar{k}_1\bar{\tau}_{12}\bar{J}\bar{E}_1 = 0$. Segue-se que $\bar{E}_2 \parallel \bar{J}\bar{E}_1$, ou seja, $\bar{\tau}_{12}^2 = 1$.

Agora, se $r = 3$, temos novamente $\bar{k}_1 = \text{constante} > 0$ e, então,

$$(-\bar{k}_1^2 - \bar{k}_2^2 + 1)\bar{E}_2 + \bar{k}_2'\bar{E}_3 - 3\bar{\tau}_{12}\bar{J}\bar{E}_1 = 0. \tag{4.11}$$

Diferenciando a equação $-\bar{\tau}_{12}(s) = \langle \bar{E}_2, \bar{J}\bar{E}_1 \rangle$, temos

$$\begin{aligned} -\bar{\tau}_{12}'(s) &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1}\bar{E}_2, \bar{J}\bar{E}_1 \rangle + \langle \bar{E}_2, \bar{\nabla}_{\bar{E}_1}\bar{J}\bar{E}_1 \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1}\bar{E}_2, \bar{J}\bar{E}_1) + \langle \bar{E}_2, \bar{k}_1\bar{J}\bar{E}_2) \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1}\bar{E}_2, \bar{J}\bar{E}_1 \rangle = \langle -\bar{k}_1\bar{E}_1 + \bar{k}_2\bar{E}_3, \bar{J}\bar{E}_1 \rangle \\ &= \bar{k}_2\langle \bar{E}_3, \bar{J}\bar{E}_1 \rangle. \end{aligned}$$

Multiplicando (4.11) por $\bar{k}_2\bar{E}_3$, segue-se que $\bar{k}_2'\bar{k}_2 + 3\bar{\tau}_{12}\bar{\tau}_{12}' = 0$ e, então, $\bar{k}_2^2 = -3\bar{\tau}_{12}^2 + \omega_0$, onde $\omega_0 = \text{constante}$, o que mostra que $\bar{k}_1^2 = 1 - \omega_0 + 6\bar{\tau}_{12}^2$, ou seja, $\bar{\tau}_{12} = \text{constante}$ e $\bar{k}_2 = \text{constante}$. Finalmente, a equação (4.11) pode ser reescrita como $(-\bar{k}_1^2 - \bar{k}_2^2 + 1)\bar{E}_2 - 3\bar{\tau}_{12}\bar{J}\bar{E}_1 = 0$, donde vemos que $\bar{E}_2 \parallel \bar{J}\bar{E}_1$.

Proposição 4.20 ([**20**]). *Seja $\bar{\gamma}$ uma curva de Frenet próprio-biharmônica, de ordem de osculação r em $\mathbb{C}P^n$, tal que $\bar{\tau}_{12}$ não é constante* 0*,* 1 *or* -1. *Então, temos que* $r \geq 4$.

A seguir, vamos mostrar que $\bar{\tau}_{12}$ e $\bar{k}_1$ são constantes, para qualquer ordem de osculação. Tal como já foi visto, temos $-\bar{\tau}'_{12}(s) = \bar{k}_2\langle \bar{E}_3, J\bar{E}_1\rangle$. Então $\tau_2(\bar{\gamma}) = 0$ se, e somente se,

$$J\bar{E}_1 = \langle J\bar{E}_1, \bar{E}_2\rangle \bar{E}_2 + \langle J\bar{E}_1, \bar{E}_3\rangle \bar{E}_3 + \langle J\bar{E}_1, \bar{E}_4\rangle \bar{E}_4$$

e

$$\begin{cases} \bar{k}_1 = \text{constante} > 0, \quad \bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2 = 1 + 3\bar{\tau}_{12}^2 \\ \bar{k}_2\bar{k}'_2 = -3\bar{\tau}_{12}\bar{\tau}'_{12}, \quad \bar{k}_2\bar{k}_3 = 3\bar{\tau}_{12}\langle J\bar{E}_1, \bar{E}_4\rangle. \end{cases}$$

Da terceira equação desse ultímo sistema, obtemos

$$\bar{k}_2^2 = -3\bar{\tau}_{12}^2 + \omega_0,$$

onde $\omega_0 =$ constante. Substituindo na segunda equação, vemos que

$$\bar{k}_1^2 = 1 + 6\bar{\tau}_{12} - \omega_0,$$

o que implica $\bar{\tau}_{12} =$ constante e, portanto, $\bar{k}_2 =$ constante > 0.

Como $-\bar{\tau}'_{12}(s) = \bar{k}_2\langle \bar{E}_3, J\bar{E}_1\rangle$, obtemos $\langle J\bar{E}_1, \bar{E}_3\rangle = 0$ e, então, $J\bar{E}_1 = -\bar{\tau}_{12}\bar{E}_2 + \langle J\bar{E}_1, \bar{E}_4\rangle \bar{E}_4$.

Segue-se que existe uma única constante $\alpha_0 \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\}$, tal que $-\bar{\tau}_{12} = \cos\alpha_0$ e $\langle J\bar{E}_1, \bar{E}_4\rangle = \operatorname{sen}\alpha_0 = \bar{k}_2\bar{k}_3/(3\bar{\tau}_{12})$.

Proposição 4.21 ([**20**]). *Uma curva de Frenet $\bar{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}P^n$, $n \geq 2$, parametrizada por comprimento de arco e tal que $\bar{\tau}_{12}$ não é constante* 0*,* 1 *ou* -1*, é próprio-biharmônica se, e somente se,* $J\bar{E}_1 = \cos\alpha_0 \bar{E}_2 + \operatorname{sen}\alpha_0 \bar{E}_4$ *e*

$$\begin{cases} \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3 = \text{constante} > 0, \quad \bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2 = 1 + 3\cos^2\alpha_0 \\ \bar{k}_2\bar{k}_3 = -\frac{3}{2}\operatorname{sen}(2\alpha_0), \quad \bar{\tau}_{12} = -\cos\alpha_0, \end{cases}$$

onde $\alpha_0 \in (\pi/2, \pi) \cup (3\pi/2, 2\pi)$ é uma constante.

Consideraremos agora as curvas próprio-biharmônicas, de ordem de osculação $r \leq 4$ em $\mathbb{C}P^n$. A fim de classificar estas curvas, inicialmente vamos provar a seguinte proposição.

Proposição 4.22 ([**20**]). *Seja $\bar{\gamma}$ uma curva de Frenet próprio-biharmônica, de ordem de osculação $r < 4$, em $\mathbb{C}P^n$. Então, $\bar{\gamma}$ é um círculo holomorfo com a curvatura $\bar{k}_1 = 2$, ou um círculo holomorfo, com a curvatura $\bar{k}_1 = 1$, ou uma hélice holomorfa, satisfazendo $\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2 = 1$.*

Demonstração. Seja $\bar{\gamma}$ uma curva de Frenet próprio-biharmônica de ordem de osculação $r < 4$. Então, da Proposição 4.20, temos $\bar{\tau}_{12} = \pm 1$ ou $\bar{\tau}_{12} = 0$. Se $\bar{\tau}_{12} = \pm 1$, da Proposição 4.16, segue-se que $\bar{\gamma}$ é um círculo de curvatura $\bar{k}_1 = 2$. Se $\bar{\tau}_{12} = 0$, então $\bar{\gamma}$ é um círculo holomorfo, de curvatura $\bar{k}_1 = 1$, ou uma hélice. Temos que mostrar que, no segundo caso, a curva é uma hélice holomorfa. Vamos provar que $\bar{\tau}_{13}$ e $\bar{\tau}_{23}$ são constantes. Primeiro, temos

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{13} =&\langle \bar{E}_1, J\bar{E}_3\rangle = -\frac{1}{\bar{k}_2}\langle \bar{\nabla}_{\bar{E}_1}\bar{E}_2, J\bar{E}_1\rangle = \frac{1}{\bar{k}_2}\langle \bar{E}_2, \bar{\nabla}_{\bar{E}_1}J\bar{E}_1\rangle = \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\langle \bar{E}_2, J\bar{E}_2\rangle\\ =&0.\end{aligned}$$

Como para uma curva de Frenet, de ordem de osculação 3, temos $\bar{k}_1\bar{\tau}_{23} = \bar{\tau}_{13}' + \bar{k}_2\bar{\tau}_{12}$, é fácil ver que $\bar{\tau}_{23}$ é constante também. □

Quando a ordem de osculação duma curva biharmônica é 4, (4.21) possui quatro soluções, o que é mostrado do próximo resultado.

PROPOSIÇÃO 4.23 ([**20**]). *Seja $\bar{\gamma}$ uma curva de Frenet próprio-biharmônica, de ordem de osculação $r = 4$, em $\mathbb{C}P^n$. Então, $\bar{\gamma}$ é uma hélice holomorfa. Além disso,*

(1) *se $\bar{\tau}_{12} = -\cos\alpha_0 > 0$, então as curvaturas de $\bar{\gamma}$ são dadas por*

$$(4.12)\qquad \begin{cases}\bar{k}_2 = \frac{\operatorname{sen}\alpha_0}{\sqrt{2}}\sqrt{1-3\cos^2\alpha_0 \pm \sqrt{9\cos^4\alpha_0 - 42\cos^2\alpha_0 + 1}}\\ \bar{k}_3 = -\frac{3}{2\bar{k}_2}\operatorname{sen}(2\alpha_0)\\ \bar{k}_1 = -\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha_0}(\bar{k}_2\cos\alpha_0 - \bar{k}_3\operatorname{sen}\alpha_0)\end{cases}$$

e

$$\bar{\tau}_{34} = -\bar{\tau}_{12} = \cos\alpha_0,\quad \bar{\tau}_{14} = -\bar{\tau}_{23} = -\operatorname{sen}\alpha_0,\qquad \bar{\tau}_{13} = \bar{\tau}_{24} = 0,$$

onde $\alpha_0 \in (\pi/2, \arccos(-(2-\sqrt{3})/\sqrt{2}))$.

(2) *se $\bar{\tau}_{12} = -\cos\alpha_0 < 0$, então as curvaturas de $\bar{\gamma}$ são dadas por*

$$(4.13)\qquad \begin{cases}\bar{k}_2 = -\frac{\operatorname{sen}\alpha_0}{\sqrt{2}}\sqrt{1-3\cos^2\alpha_0 \pm \sqrt{9\cos^4\alpha_0 - 42\cos^2\alpha_0 + 1}}\\ \bar{k}_3 = -\frac{3}{2\bar{k}_2}\operatorname{sen}(2\alpha_0)\\ \bar{k}_1 = -\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha_0}(\bar{k}_2\cos\alpha_0 - \bar{k}_3\operatorname{sen}\alpha_0),\end{cases}$$

e

$$\bar{\tau}_{34} = -\bar{\tau}_{12} = \cos\alpha_0,\quad \bar{\tau}_{14} = -\bar{\tau}_{23} = -\operatorname{sen}\alpha_0,\quad \bar{\tau}_{13} = \bar{\tau}_{24} = 0,$$

onde $\alpha_0 \in (3\pi/2, \pi + \arccos(-(2-\sqrt{3})/\sqrt{2}))$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\bar{\gamma}$ uma curva de Frenet próprio-biharmônica, de ordem de osculação $r = 4$. Então $\bar{\tau}_{12} = -\cos\alpha_0$ é diferente de 0, 1 ou -1 e $J\bar{E}_1 = \cos\alpha_0\bar{E}_2 + \operatorname{sen}\alpha_0\bar{E}_4$. Segue-se que

$$\bar{\tau}_{12} = -\cos\alpha_0,\quad \bar{\tau}_{13} = 0,\quad \bar{\tau}_{14} = -\operatorname{sen}\alpha_0\quad \text{e}\quad \bar{\tau}_{24} = 0.$$

A fim de provar que $\bar{\tau}_{23}$ é constante, diferenciamos a expressão de $J\bar{E}_1$ e, usando as equações de Frenet, obtemos

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\bar{E}_1}J\bar{E}_1 =&\cos\alpha_0\bar{\nabla}_{\bar{E}_1}\bar{E}_2 + \operatorname{sen}\alpha_0\bar{\nabla}_{\bar{E}_1}\bar{E}_4\\ =&-\bar{k}_1\cos\alpha_0\bar{E}_1 + (\bar{k}_2\cos\alpha_0 - \bar{k}_3\operatorname{sen}\alpha_0)\bar{E}_3.\end{aligned}$$

Temos também $\bar{\nabla}_{\bar{E}_1} J\bar{E}_1 = \bar{k}_1 J\bar{E}_2$ e, então,

$$\bar{k}_1 J\bar{E}_2 = -\bar{k}_1 \cos\alpha_0 \bar{E}_1 + (\bar{k}_2 \cos\alpha_0 - \bar{k}_3 \operatorname{sen}\alpha_0)\bar{E}_3. \tag{4.14}$$

Fazendo o produto interno de (4.14) com $\bar{E}_3$, $J\bar{E}_2$ e $J\bar{E}_4$, temos, respectivamente,

$$\bar{k}_1 \bar{\tau}_{23} = -(\bar{k}_2 \cos\alpha_0 - \bar{k}_3 \operatorname{sen}\alpha_0), \tag{4.15}$$

$$\bar{k}_1 \operatorname{sen}^2\alpha_0 = -(\bar{k}_2 \cos\alpha_0 - \bar{k}_3 \operatorname{sen}\alpha_0)\bar{\tau}_{23} \tag{4.16}$$

e

$$0 = \bar{k}_1 \cos\alpha_0 \operatorname{sen}\alpha_0 + (\bar{k}_2 \cos\alpha_0 - \bar{k}_3 \operatorname{sen}\alpha_0)\bar{\tau}_{34}. \tag{4.17}$$

De (4.15) e (4.16), obtemos

$$\bar{k}_1^2 \operatorname{sen}^2\alpha_0 = (\bar{k}_2 \cos\alpha_0 - \bar{k}_3 \operatorname{sen}\alpha_0)^2 \tag{4.18}$$

e $\tau_{23}^2 = \operatorname{sen}^2\alpha_0$. Como $\tau_{23}^2 = \operatorname{sen}^2\alpha_0$ e $\alpha_0 \in (\pi/2, \pi) \cup (3\pi/2, 2\pi)$, usando (4.15), obtém-se

$$\bar{\tau}_{23} = \operatorname{sen}\alpha_0.$$

De $\bar{\tau}_{23} = \operatorname{sen}\alpha_0$, (4.15) e (4.17), temos

$$\bar{\tau}_{34} = \cos\alpha_0.$$

Finalmente, do Teorema 4.21 e da equação (4.18), segue-se que

$$\bar{k}_2^4 + \bar{k}_2^2 \operatorname{sen}^2\alpha_0(3\cos^2\alpha_0 - 1) + 9\operatorname{sen}^4\alpha_0 \cos^2\alpha_0 = 0.$$

A solução desta equação é

$$\bar{k}_2 = \frac{\operatorname{sen}\alpha_0}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - 3\cos^2\alpha_0 \pm \sqrt{9\cos^4\alpha_0 - 42\cos^2\alpha_0 + 1}},$$

se $\alpha_0 \in (\pi/2, \arccos(-(2-\sqrt{3})/\sqrt{2}))$, ou

$$\bar{k}_2 = -\frac{\operatorname{sen}\alpha_0}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - 3\cos^2\alpha_0 \pm \sqrt{9\cos^4\alpha_0 - 42\cos^2\alpha_0 + 1}},$$

se $\alpha_0 \in (3\pi/2, \pi + \arccos(-(2-\sqrt{3})/\sqrt{2}))$. Observamos que, em ambos os casos, $\bar{k}_2^2 \in (0,4)$ e, portanto, ambas soluções são compatíveis com $\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2 = 1 + 3\cos^2\alpha_0$. □

Corolário 4.24 ([**20**]). *Uma curva de Frenet próprio-biharmônica em $\mathbb{C}P^2$ é um círculo holomorfo ou uma hélice holomorfa de ordem 4.*

Vamos encerrar esta seção classificando as curvas de Frenet próprio-biharmônicas em $\mathbb{C}P^2$. Dos resultados anteriores, segue-se que devemos apenas classificar as curvas de Frenet próprio-biharmônicas de ordem de osculação 4.

Na Proposition 4.23, vimos que

$$\bar{\tau}_{34} = -\bar{\tau}_{12} = \cos\alpha_0, \quad \bar{\tau}_{14} = -\bar{\tau}_{23} = -\operatorname{sen}\alpha_0, \quad \bar{\tau}_{13} = \bar{\tau}_{24} = 0,$$

e

$$\bar{k}_1 \operatorname{sen}\alpha_0 = -(\bar{k}_2 \cos\alpha_0 - \bar{k}_3 \operatorname{sen}\alpha_0),$$

o que implica que $\bar{k}_1 - \bar{k}_3 = -\bar{k}_2 \cot \alpha_0$. Ainda mais, se $\alpha_0 \in (\pi/2, \arccos(-(2-\sqrt{3})/\sqrt{2}))$, temos

$$\frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_3}{\sqrt{\bar{k}_2^2 + (\bar{k}_1 - \bar{k}_3)^2}} = -\cos \alpha_0 = \bar{\tau}_{12}, \quad \frac{\bar{k}_2}{\sqrt{\bar{k}_2^2 + (\bar{k}_1 - \bar{k}_3)^2}} = \operatorname{sen} \alpha_0 = \bar{\tau}_{23}$$

e, se $\alpha_0 \in (3\pi/2, \pi + \arccos(-(2-\sqrt{3})/\sqrt{2}))$, então

$$\frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_3}{\sqrt{\bar{k}_2^2 + (\bar{k}_1 - \bar{k}_3)^2}} = \cos \alpha_0 = -\bar{\tau}_{12}, \quad \frac{\bar{k}_2}{\sqrt{\bar{k}_2^2 + (\bar{k}_1 - \bar{k}_3)^2}} = -\operatorname{sen} \alpha_0 = -\bar{\tau}_{23}.$$

A fim de concluir esta seção vamos precisar de um resultado obtido em [**31**], que mostra que, para três constantes positives dadas $\bar{k}_1, \bar{k}_2$ e $\bar{k}_3$, existem quatro classes de equivalência de hélices holomorfas de ordem 4 em $\mathbb{C}P^2$ com curvaturas $\bar{k}_1, \bar{k}_2$ e $\bar{k}_3$. Estas classes são dadas por dois casos distintos.

Quando $\bar{k}_1 \neq \bar{k}_3$, temos

	$k_1 \neq k_3$		
I_1	$\bar{\tau}_{12} = \bar{\tau}_{34} = \mu$	$\bar{\tau}_{23} = \bar{\tau}_{14} = \bar{k}_2\mu/(\bar{k}_1 + \bar{k}_3)$	$\bar{\tau}_{13} = \bar{\tau}_{24} = 0$
I_2	$\bar{\tau}_{12} = \bar{\tau}_{34} = -\mu$	$\bar{\tau}_{23} = \bar{\tau}_{14} = -k_2\mu/(k_1 + k_3)$	$\bar{\tau}_{13} = \bar{\tau}_{24} = 0$
I_3	$\bar{\tau}_{12} = -\bar{\tau}_{34} = \nu$	$\bar{\tau}_{23} = -\bar{\tau}_{14} = k_2\nu/(k_1 - k_3)$	$\bar{\tau}_{13} = \bar{\tau}_{24} = 0$
I_4	$\bar{\tau}_{12} = -\bar{\tau}_{34} = -\nu$	$\bar{\tau}_{23} = -\bar{\tau}_{14} = -k_2\nu/(k_1 - k_3)$	$\bar{\tau}_{13} = \bar{\tau}_{24} = 0$

onde

$$\mu = \frac{\bar{k}_1 + \bar{k}_3}{\sqrt{\bar{k}_2^2 + (\bar{k}_1 + \bar{k}_3)^2}} \quad \text{e} \quad \nu = \frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_3}{\sqrt{\bar{k}_2^2 + (\bar{k}_1 - \bar{k}_3)^2}}.$$

Quando $\bar{k}_1 = \bar{k}_3$, as classes I_3 e I_4 são substituídas por

	$k_1 = k_3$	
I'_3	$\bar{\tau}_{12} = \bar{\tau}_{34} = \bar{\tau}_{13} = \bar{\tau}_{24} = 0$	$\bar{\tau}_{23} = -\bar{\tau}_{14} = 1$
I'_4	$\bar{\tau}_{12} = \bar{\tau}_{34} = \bar{\tau}_{13} = \bar{\tau}_{24} = 0$	$\bar{\tau}_{23} = -\bar{\tau}_{14} = -1$

Usando esta classificação, obtemos o seguinte teorema.

TEOREMA 4.25 ([**20**]). *Seja $\bar{\gamma}$ uma curva de Frenet próprio-biharmônica, de ordem de osculação 4, em $\mathbb{C}P^2$. Então, $\bar{\gamma}$ é uma hélice holomorfa de ordem 4 e classe I_3, se $\bar{\tau}_{12} < 0$ e $\bar{\tau}_{23} < 0$, ou I_4, se $\bar{\tau}_{12} > 0$ e $\bar{\tau}_{23} > 0$. Reciprocamente,*

(1) *para cada $\alpha_0 \in (\pi/2, \arccos(-(2-\sqrt{3})/\sqrt{2}))$, existem duas hélices holomorfas de ordem 4, próprio-biharmônicas de ordem 4 e classe I_3, com*

$$\begin{cases} \bar{k}_2 = \frac{\operatorname{sen} \alpha_0}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - 3\cos^2 \alpha_0 \pm \sqrt{9\cos^4 \alpha_0 - 42 \cos^2 \alpha_0 + 1}} \\ \bar{k}_3 = -\frac{3}{2\bar{k}_2} \operatorname{sen}(2\alpha_0) \\ \bar{k}_1 = -\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha_0} (\bar{k}_2 \cos \alpha_0 - \bar{k}_3 \operatorname{sen} \alpha_0). \end{cases}$$

(2) *para cada* $\alpha_0 \in (3\pi/2, \pi+\arccos(-(2-\sqrt{3})/\sqrt{2}))$, *existem duas hélices holomorfas de ordem* 4, *próprio-biharmônicas de ordem* 4 *e classe* I_4, *com*

$$\begin{cases} \bar{k}_2 = -\frac{\operatorname{sen}\alpha_0}{\sqrt{2}}\sqrt{1-3\cos^2\alpha_0 \pm \sqrt{9\cos^4\alpha_0 - 42\cos^2\alpha_0 + 1}} \\ \bar{k}_3 = -\frac{3}{2\bar{k}_2}\operatorname{sen}(2\alpha_0) \\ \bar{k}_1 = -\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha_0}(\bar{k}_2\cos\alpha_0 - \bar{k}_3\operatorname{sen}\alpha_0). \end{cases}$$

5. Subvariedades Lagrangianas paralelas biharmônicas em $\mathbb{C}P^3$

Consideramos, novamente, a fibração de Hopf $\pi : \mathbb{S}^{2n+1}(1) \to \mathbb{C}P^n(4)$ e $\bar{\Sigma}$ uma subvariedade Lagrangiana em $\mathbb{C}P^n$. Consideramos a estrutura Sasakiana canônica $(\varphi, \eta_0, \xi_0, \langle\cdot,\cdot\rangle_0)$ na esfera $\mathbb{S}^{2n+1}$ e, então, $\Sigma = \pi^{-1}(\bar{\Sigma})$ é uma subvariedade anti-invariante, de dimensão $n+1$, em $\mathbb{S}^{2n+1}$, invariante sob o fluxo do campo vetorial ξ_0 e, localmente, Σ é isometrica a $\mathbb{S}^1 \times \widetilde{\Sigma}^n$. Como a subvariedade $\bar{\Sigma}$ é Lagrangiana, $\bar{\Sigma}$ é paralela, ou seja, $\nabla^\perp\sigma = 0$, onde σ é a forma segunda fundamental, se, e somente se, $\widetilde{\Sigma}$ é uma subvariedade integral $\mathcal{C}$-paralela (ver [**34**]) e, como já vimos na Proposição 4.13, uma subvariedade paralela Lagrangiana $\bar{\Sigma}$ é biharmônica se, e somente se, $\widetilde{\Sigma}$ é (-4)-biharmônica.

Portanto, a fim de determinar as subvariedades Lagrangianas paralelas própria-biharmônicas em $\mathbb{C}P^3$, é suficiente determinar as subvariedades integrais $\mathcal{C}$-paralelas (-4)-biharmônicas em $\mathbb{S}^7(1)$.

Como feito, a partir dos Teoremas 3.29 e 3.36, conseguimos obter os seguintes resultados.

Teorema 4.26 ([**25**]). *Uma subvariedade integral* $\jmath : \widetilde{\Sigma}^3 \to \mathbb{S}^7(1)$ *é* (-4)-*biharmônica se, e somente se,*

$$\begin{cases} \Delta^\perp H + \operatorname{trace}\sigma(\cdot, A_H\cdot) - 7H = 0 \\ 4\operatorname{trace} A_{\nabla^\perp_{(\cdot)}H}(\cdot) + 3\operatorname{grad}(|H|^2) = 0, \end{cases}$$

onde σ *é a segunda forma fundamental* $\widetilde{\Sigma}$ *e* A *é o operador de Weingarten.*

Proposição 4.27 ([**25**]). *Uma subvariedade integral* $\mathcal{C}$-*paralela* $\widetilde{\Sigma}^3$ *em* $\mathbb{S}^7(1)$, *que não é mínima, é* (-4)-*biharmônica se, e somente se,*

$$\operatorname{trace}\sigma(\cdot, A_H\cdot) = 6H. \tag{4.19}$$

Teorema 4.28 ([**25**]). *Uma subvariedade integral* $\mathcal{C}$-*paralela* $\widetilde{\Sigma}^3$ *em* $\mathbb{S}^7(1)$ *é* (-4)-*biharmônica se, e somente se,*

(1) *é uma subvariedade plana que é, localmente, um produto de três curvas:*
- *uma hélice, com curvaturas* $\kappa_1 = (\lambda^2-1)/\lambda$ *e* $\kappa_2 = 1$,
- *uma hélice de ordem* 4, *com curvaturas* $\kappa_1 = \sqrt{\lambda^2+\alpha^2}$, $\kappa_2 = (\alpha/\kappa_1)\sqrt{\lambda^2+1}$ *e* $\kappa_3 = -(\lambda/\kappa_1)\sqrt{\lambda^2+1}$,

- *uma hélice de ordem* 4*, com curvaturas*

$$\kappa_1 = \sqrt{\lambda^2+\mu^2+\delta^2}, \quad \kappa_2 = (\delta/\kappa_1)\sqrt{\lambda^2+\mu^2+1}, \quad \kappa_3 = (\kappa_2/\delta)\sqrt{\lambda^2+\mu^2},$$

se $\delta \neq 0$*, ou um círculo, com curvatura* $\kappa_1 = \sqrt{\lambda^2+\mu^2}$*, se* $\delta = 0$*,*

onde $\lambda, \alpha, \mu, \delta$ *são constantes reais dadas por*

$$\begin{cases} (3\lambda^2-1)(3\lambda^4-8\lambda^2+1)+\lambda^4((\alpha+\mu)^2+\delta^2)=0, \\ (\alpha+\mu)(5\lambda^2+\alpha^2+\mu^2-7)+\mu\delta^2=0, \\ \delta(5\lambda^2+\delta^2+3\mu^2+\alpha\mu-7)=0, \\ 1+\lambda^2+\alpha\mu-\mu^2=0 \end{cases} \tag{4.20}$$

tais que $-1 < \lambda < 0$*,* $0 < \alpha \leq (\lambda^2-1)/\lambda$*,* $\alpha \geq \delta \geq 0$*,* $\alpha > 2\mu$ *e* $\lambda^2 \neq 1/3$*; ou*

(2) *é, localmente, um produto* $\gamma \times \Sigma^2$ *entre uma hélice, com curvaturas* $\kappa_1 = (\sqrt{13}-1)/\sqrt{12-3\sqrt{13}}$ *e* $\kappa_2 = 1$*, e uma superfície integral* $\mathcal{C}$*-paralela em* $\mathbb{S}^7(1)$*, que é localmente isometrica à esfera Euclidiana de dimensão* 2 *e raio* $\sqrt{3/(7-\sqrt{13})}$*.*

Demonstração. É fácil ver, usando (3.50), que a equação (4.19) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} t\Big(\sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 - 6\Big) + (\alpha+\mu)(\alpha\lambda_2+\mu\lambda_3)+(\beta+\delta)(\beta\lambda_2+\delta\lambda_3)=0, \\ t(\alpha\lambda_2+\mu\lambda_3)+(\alpha+\mu)(2\lambda_2^2+\alpha^2+3\beta^2+\mu^2+\beta\delta-6)+\mu(\beta+\delta)^2=0, \\ t(\beta\lambda_2+\delta\lambda_3)+\beta(\alpha+\mu)^2+(\beta+\delta)(2\lambda_3^2+\delta^2+3\mu^2+\beta^2+\alpha\mu-6)=0, \end{cases} \tag{4.21}$$

onde $t = \sum_{i=1}^3 \lambda_i$.

Como Σ pode ser dada pelo primeiro ou pelo segundo caso da classificação das subvariedades integrais $\mathcal{C}$-paralelas e não mínimas (ver Seção 5, Capítulo 3), vamos estudar cada um destes casos.

Caso I. O sistema (4.21) é equivalente ao sistema formado pelas três primeiras equações de (4.20) e, como feito no Teorema 3.36, concluímos a prova.

Case II. (1) É fácil verificar que este caso não é possível sob a hipótese considerada.

(2) As segunda e terceira equações do sistema (4.21) são satisfeitas e a primeira equação é equivalente a $3\lambda^4-8\lambda^2+1=0$, cujas soluções são $\lambda^2 = (4\pm\sqrt{13})/3$. Como $\lambda^2 < 1$, segue-se que $\lambda^2 = (4-\sqrt{13})/3$, o que conduz à conclusão. □

Quando $c = 1$, resolvendo (4.21) e usando a equação explícita duma subvariedade integral $\mathcal{C}$-paralela plana em $\mathbb{S}^7(1)$, dada em [**2**], obtemos o próximo corolário.

Corolário 4.29 ([**25**]). *Uma subvariedade integral $\mathcal{C}$-paralela $\widetilde{\Sigma}^3$ plana em $\mathbb{S}^7(1)$ é (localmente) dada por*

$$
\begin{aligned}
x(u,v,w) =& \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}} \exp\Big(\mathrm{i}\Big(\frac{1}{\lambda}u\Big)\Big)\mathcal{E}_1 \\
&+ \frac{1}{\sqrt{(\mu-\alpha)(2\mu-\alpha)}} \exp(-\mathrm{i}(\lambda u - (\mu-\alpha)v))\mathcal{E}_2 \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\rho_1(\rho_1+\rho_2)}} \exp(-\mathrm{i}(\lambda u + \mu v + \rho_1 w))\mathcal{E}_3 \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\rho_2(\rho_1+\rho_2)}} \exp(-\mathrm{i}(\lambda u + \mu v - \rho_2 w))\mathcal{E}_4,
\end{aligned}
$$

onde $\rho_{1,2} = (\sqrt{4\mu(2\mu-\alpha)+\delta^2} \pm \delta)/2$, $-1 < \lambda < 0$, $0 < \alpha \leq (\lambda^2-1)/\lambda$, $\alpha \geq \delta \geq 0$, $\alpha > 2\mu$, $\lambda^2 \neq 1/3$, $(\lambda,\alpha,\mu,\delta)$ *sendo um das seguintes quádruplas*

$$
\left(-\sqrt{\frac{4-\sqrt{13}}{3}},\ \sqrt{\frac{7-\sqrt{13}}{6}},\ -\sqrt{\frac{7-\sqrt{13}}{6}},\ 0\right),
$$

$$
\left(-\sqrt{\frac{1}{5+2\sqrt{3}}},\ \sqrt{\frac{45+21\sqrt{3}}{13}},\ -\sqrt{\frac{6}{21+11\sqrt{3}}},\ 0\right),
$$

ou

$$
\left(-\sqrt{\frac{1}{6+\sqrt{13}}},\ \sqrt{\frac{523+139\sqrt{13}}{138}},\ -\sqrt{\frac{79-17\sqrt{13}}{138}},\ \sqrt{\frac{14+2\sqrt{13}}{3}}\right);
$$

e $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^4$ *é uma base ortonormal em* $\mathbb{C}^4$.

Observação 4.8 ([**25**]). Um cálculo direito mostra que as imagens dos cilindros sobre x são: o produto entre um círculo de raio $\sqrt{5-\sqrt{13}}/(2\sqrt{3})$ e três círculos, cada um de raio $\sqrt{7+\sqrt{13}}/6$; o produto entre dois círculos, cada um de raio $\sqrt{3+\sqrt{3}}/(2\sqrt{3})$, e dois círculos, cada um de raio $\sqrt{3-\sqrt{3}}/(2\sqrt{3})$; e o produto entre um círculo de raio $\sqrt{5+\sqrt{13}}/(2\sqrt{3})$ e três círculos, cada um deles com raio $\sqrt{7-\sqrt{13}}/6$.

Bibliografia

[1] E. Almansi, *Sull'integrazione dell'equazione differenziale* $\Delta^{2n} = 0$, Ann. di Matematica, Novembre 1898.

[2] C. Baikoussis, D. E. Blair, T. Koufogiorgos, *Integral submanifolds of Sasakian space forms* $\bar{M}^7$, Results Math. 27 (1995), 207–226.

[3] A. Balmuş, C. Oniciuc, *Some remarks on the biharmonic submanifolds of* $\mathbb{S}^3$ *and their stability*, An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N.S.) 51 (2005), 171–190.

[4] A. Balmuş, *Biharmonic maps and submanifolds*, Geometry Balkan Press, Bucharest, 2009, `www.mathem.pub.ro/dgds/mono/ba-vol.pdf`

[5] A. Balmuş, S. Montaldo, C. Oniciuc, *Classification results for biharmonic submanifolds in spheres*, Israel J. Math. 168 (2008), 201–220.

[6] A. Balmuş, S. Montaldo, C. Oniciuc, *Biharmonic PNMC submanifolds in spheres*, Ark. Mat. 51 (2013), 197–221.

[7] D. E. Blair, *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Progress in Mathematics 203, Birkhäuser, Boston, 2002.

[8] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds of* $\mathbb{S}^3$, Internat. J. Math. 12 (2001), 867–876.

[9] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds in spheres*, Israel J. Math. 130 (2002), 109–123.

[10] M. P. do Carmo, *Geometria riemanniana*, Projeto Euclides, 10. Instituto de Matemtica Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979. ix+238 pp.

[11] B.-Y. Chen, *Geometry of submanifolds*, Pure and Applied Mathematics, N. 22. Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.

[12] B.-Y. Chen, *Null* 2*-type surfaces in Euclidean space*, Algebra, analysis and geometry (Taipei, 1988), 1–18, World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989.

[13] B.-Y. Chen, *A report on submanifolds of finite type*, Soochow J. Math. 22 (1996), 117–337.

[14] B.-Y. Chen, S. Ishikawa, *Biharmonic pseudo-Riemannian submanifolds in pseudo Euclidean spaces*, Kyushu J. Math. 52 (1998), 167–185.

[15] I. Dimitric, *Submanifolds of* $\mathbb{E}^m$ *with harmonic mean curvature vetor*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 20 (1992), 53–65.

[16] J. Eells, L. Lemaire, *A report on harmonic maps*, Bull. London Math. Soc. 10 (1978), 1–68.

[17] J. Eells, L. Lemaire, *Another report on harmonic maps*, Bull. London Math. Soc. 20 (1988), 385–524.

[18] J. Eells, J. H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. 86 (1964), 109–160.

[19] D. Fetcu, *A note on biharmonic curves in Sasakian space forms*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 189 (2010), 591–603.

[20] D. Fetcu, E. Loubeau, S. Montaldo, C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds of* $\mathbb{C}P^n$, Math. Z. 266 (2010), 505–531.

[21] D. Fetcu, C. Oniciuc, *Explicit formulas for biharmonic submanifolds in non- Euclidean 3-spheres*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 77 (2007), 179–190.

[22] D. Fetcu, C. Oniciuc, *Explicit formulas for biharmonic submanifolds in Sasakian space forms*, Pacific J. Math. 240 (2009), 85–107.

[23] D. Fetcu, C. Oniciuc, *Biharmonic hypersurfaces in Sasakian space forms*, Differential Geom. Appl. 27 (2009), 713–722.

[24] D. Fetcu, C. Oniciuc, *A note on integral C–parallel submanifolds in $\mathbb{S}^7(c)$*, Rev. Un. Mat. Argentina 52 (2011), 33–45.

[25] D. Fetcu, C. Oniciuc, *Biharmonic integral $\mathcal{C}$–parallel submanifolds in 7–dimensional Sasakian space forms*, Tohoku Math. J. 64 (2012), 195–222.

[26] Th. Hasanis, Th. Vlachos, *Hypersurfaces in $\mathbb{E}^4$ with harmonic mean curvature vector field*, Math. Nachr. 172 (1995), 145–169.

[27] T. Ichiyama, J. Inoguchi, H. Urakawa, *Bi-harmonic maps and bi-Yang-Mills fields*, Note Mat. 28 (2009), suppl. 1, 233–275.

[28] J. Inoguchi, *Submanifolds with harmonic mean curvature in contact 3-manifolds*, Colloq. Math. 100 (2004), 163–179.

[29] G. Y. Jiang, 2-*harmonic maps and their first and second variation formulas*, Chinese Ann. Math. Ser. A 7 (1986), 389–402.

[30] H. B. Lawson, *Complete minimal surfaces in $\mathbb{S}^3$*, Ann. of Math. 92 (1970), 335–374.

[31] S. Maeda and T. Adachi, *Holomorphic helices in a complex space form*, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), 1197–1202.

[32] S. Maeta and H. Urakawa, Biharmonic Lagrangian submanifolds in Khler manifolds, Glasg. Math. J. 55 (2013), 465-480.

[33] S. Montaldo, C. Oniciuc, *A short survey on biharmonic maps between Riemannian manifolds*, Rev. Un. Mat. Argentina 47 (2006), 1–22.

[34] H. Naitoh, *Parallel submanifolds of complex space forms I*, Nagoya Math. J. 90 (1983), 85–117.

[35] K. Nomizu, B. Smyth, *A formula of Simons' type and hypersurfaces with constant mean curvature*, J. Differential Geometry 3 (1969), 367–377.

[36] K. Ogiue, *On fiberings of almost contact manifolds*, Kōdai Math. Sem. Rep. 17 (1965), 53–62.

[37] C. Oniciuc, *Biharmonic maps between Riemannian manifolds*, An. Stiint. Univ. Al.I. Cuza Iasi Mat (N.S.), 48 (2002), 237–248.

[38] C. Oniciuc, *On the second variation formula for biharmonic maps to a sphere*, Publ. Math. Debrecen 61 (2002), 613–622.

[39] C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds in space forms (Habilitation Thesis)*, 2012, `www.researchgate.net`

[40] H. Reckziegel, *Horizontal lifts of isometric immersions into the bundle space of a pseudo-Riemannian submersion*, Global differential geometry and global analysis 1984 (Berlin, 1984), 264–279, Lecture Notes in Math., 1156, Springer, Berlin, 1985.

[41] P. J. Ryan, *Hypersurfaces with parallel Ricci tensor*, Osaka J. Math. 8 (1971), 251–259.

[42] P. J. Ryan, *Homogeneity and some curvature conditions for hypersurfaces*, Tôhoku Math. J. 21 (1969), 363–388.

[43] T. Sasahara, *Biharmonic Lagrangian surfaces of constant mean curvature in complex space forms*, Glasg. Math. J. 49 (2007), 497–507.

[44] T. Sasahar, *Biharmonic C-parallel Legendrian submanifolds in 7-dimensional Sasakian space forms*, preprint 2016, `arXiv:1603.02808`.

[45] S. Tanno, *Sasakian manifolds with constant φ-holomorphic sectional curvature*, Tôhoku Math. J. 21 (1969), 501–507.

[46] *The Bibliography of Biharmonic Maps*, http://people.unica.it/ biharmonic/.

[47] K. Yano, M. Kon, *Structures on Manifolds*, Series in Pure Mathematics 3, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1984.
[48] S.-T. Yau, *Submanifolds with constant mean curvature*, Amer. J. Math. 96 (1974), 346–366.

Colofão

Formato: 17,0 x 24,0
Fonte: Bodoni MT Std