Ciências Contábeis
UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Renata de Moura Issa Vianna

MATC14

Matemática Financeira

MATEMÁTICA FINANCEIRA

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
FACULDADE DE CIÊNCIAS CONTÁBEIS
CURSO DE CIÊNCIAS CONTÁBEIS

Renata de Moura Issa Vianna

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Salvador
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
Reitor: João Carlos Salles Pires da Silva
Vice-Reitor: Paulo César Miguez de Oliveira

Pró-Reitoria de Ensino de Graduação
Pró-Reitor: Penildon Silva Filho

Faculdade de Ciências Contábeis
Diretor: Prof. Joséilton Silveira da Rocha

Superintendência de Educação a Distância -SEAD
Superintendente: Márcia Tereza Rebouças Rangel

Coordenação de Tecnologias Educacionais CTE-SEAD
Haenz Gutierrez Quintana

Coordenação de Design Educacional CDE-SEAD
Lanara Souza

Coordenadora Adjunta UAB
Andréa Leitão
UAB -UFBA

Bacharelado em Ciências Contábeis EaD
Coordenadora:
Profª Inês Teresa Lyra Gaspar da Costa

Produção de Material Didático
Coordenação de Tecnologias Educacionais CTE-SEAD

Núcleo de Estudos de Linguagens & Tecnologias - NELT/UFBA

Coordenação
Prof. Haenz Gutierrez Quintana

Projeto gráfico
Prof. Haenz Gutierrez Quintana
Projeto da Capa: Prof. Alessandro Faria

Arte da Capa: Prof. Alessandro Faria
Foto de capa: Designed by ijeab / Freepik

Equipe de Revisão:
Edivalda Araujo
Julio Neves Pereira
Márcio Matos

Equipe Design
Supervisão
Alessandro Faria
Editoração / Ilustração
Sofia Guimarães
Marcone Pereira
Design de Interfaces
Raissa Bomtempo

Equipe Audiovisual
Direção:
Prof. Haenz Gutierrez Quintana

Produção:
Letícia Moreira de Oliveira
Câmera
Maria Christina Souza
Edição:
Deniere Rocha
Animação e videografismos:
Filipe Araújo Caldas
Edição de áudio
Pedro Queiroz
Trilha Sonora:
Pedro Queiroz

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFBA

V617 Vianna, Renata de Moura Issa.
Matemática financeira / Renata de Moura Issa Vianna. - Salvador: UFBA, Faculdade de Ciências Contábeis; Superintendência de Educação a Distância, 2018.
131 p. : il.

Esta obra é um Componente Curricular do Curso de Bacharelado em Ciências Contábeis na modalidade EaD da UFBA/SEAD/UAB.

ISBN: 978-85-8292-166-1

1. Matemática financeira - Estudo e ensino. 2. Contabilidade - Estudo e ensino (Superior). I. Universidade Federal da Bahia. Faculdade de Ciências Contábeis. II. Universidade Federal da Bahia. Superintendência de Educação a Distância. III. Título.

CDU: 657

SUMÁRIO

Ilustração: Marcone da Silva

Mini Currículo da Professora

A Profa. Renata de Moura Issa Vianna é graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal da Bahia, Especialista em Matemática pela AVM - Faculdade Integrada e Mestra em Matemática pela Universidade Federal da Bahia. Atualmente, é Professora do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico do Instituto Federal Baiano desde 2018.

Carta de Apresentação da Disciplina

Caro(a) estudante,

Vivemos em um mundo onde precisamos estar sempre capacitados para resolver os diversos tipos de problemas que possam surgir. Desenvolver o raciocínio de maneira rápida e objetiva é um dom bastante necessário para edificarmos uma solução para quaisquer tipos de dificuldades. O estudo da Matemática Financeira o habilitará a encontrar, com mais facilidade, a solução para diversos desafios, tanto no campo profissional, quanto no campo pessoal.

Controlar as finanças é um dos maiores desafios de um empreendedor. A Matemática Financeira possui ferramentas necessárias para a análise do cotidiano financeiro, por diversos pontos de vista, com o objetivo de planejar a vida financeira tanto de uma empresa como de um indivíduo. Ela tem bastante importância para a tomada de decisões em uma empresa e, quando bem aplicada, traz maior rentabilidade, possibilitando o processo de maximização nos resultados. Ela também pode ser aplicada em diversas situações cotidianas, como financiamentos de móveis e imóveis, empréstimos, aplicações financeiras, investimentos em bolsas de valores, entre outras situações.

Com o objetivo de possibilitar uma compreensão gradativa e completa sobre a Matemática Financeira, inicialmente analisaremos as capitalizações simples e compostas. Depois, veremos os tipos de descontos e como encontrar capitais equivalentes. Também vamos verificar os vários tipos de séries e de sistemas de amortizações que são utilizados no mercado financeiro, além de analisar algumas alternativas de investimentos.

O módulo está organizado em quatro unidades. A 1ª unidade é introdutória e visa o aprendizado de conceitos e princípios importantes para a Matemática Financeira. A 2ª unidade define as séries de recebimentos e pagamentos. Na 3ª unidade estudaremos um pouco sobre a Análise de Alternativa de Investimentos. A 4ª unidade apresenta os sistemas de amortização mais utilizados.

Bons estudos!

Renata de Moura Issa Vianna

Ilustração: Marcone da Silva

UNIDADE 1 – Capitalização Simples e Composta

Considere que duas empresas de calçados, a empresa **X** e a empresa **Y**, tenham a receber R$200,00 cada. A empresa **X** deve receber seus R$200,00 em 30 dias e a empresa **Y** em 360 dias.

Será que os R$200,00 da empresa **X** valem o mesmo que os R$200,00 da empresa **Y**?

Claro que não! Os R$200,00 da empresa **X** valem mais do que os R$200,00 da empresa **Y**, pois o valor do dinheiro varia no tempo. Isso é chamado "valor temporal" do dinheiro.

A matemática financeira é a ciência que estuda o valor do dinheiro no tempo.

São em situações como essas que percebemos como a matemática financeira é uma ferramenta útil na análise de algumas alternativas de investimento ou financiamento de bens. Ela consiste em empregar procedimentos matemáticos para simplificar a operação financeira.

1.1 - Conceitos Fundamentais

Vamos começar com os conceitos fundamentais necessários para uma melhor compreensão.

1. Capital: É a quantia em dinheiro na "data zero", ou seja, no início da aplicação. Pode ser o dinheiro investido em uma atividade econômica, o valor financiado de um bem ou de um empréstimo tomado. É também chamado de valor presente, valor inicial, valor principal, entre outros.

Notação: C

Atenção!

Para evitar problemas com mudanças de unidades monetárias, utilizaremos sempre uma unidade fictícia, chamada de unidade monetária, abreviada por u.m. ou representada por "**$**" antes do valor.

2. Juros: É a remuneração obtida pelo uso do capital por um intervalo de tempo, isto é, é o custo do crédito obtido. Pode ser entendido também como sendo o aluguel pelo uso do dinheiro.

Notação: *J*

3. Prazo: É o período ao fim do qual os juros são calculados. É também chamado de período de capitalização. Os mais usados são: dia, mês, bimestre, trimestre, semestre e ano.

Notação: *n*

4. Taxa de Juros: É o coeficiente resultante da razão entre o juro e o capital. A cada taxa deverá vir anexado o período a que ela se refere. Assim, elas devem estar de acordo com o prazo. Podem ser apresentadas de duas formas:

- **Forma Unitária:** a taxa refere-se à unidade do capital. Assim calculamos o rendimento da aplicação de uma unidade do capital no intervalo de tempo referido pela taxa. Para efeito de cálculo, sempre é utilizada a taxa na forma unitária.

Exemplo: 0,05 ao mês significa que cada $1,00 de capital aplicado rende $0,05 de juro, a cada mês de aplicação.

- **Forma Percentual:** aplicada a centos do capital, ou seja, representa os rendimentos de 100 unidades de capital, durante o período de tempo referido pela taxa.

Exemplo: 10% ao ano significa que cada $100,00 de capital aplicado rende $14,00 de juros, a cada ano de aplicação.

Notação: *i*

Simbolicamente, temos que

$$i = \frac{J}{C}$$

Observação: Para simplificar, utilizaremos, em alguns momentos, as seguintes abreviações:

ao dia: a.d.
ao mês: a.m.
ao bimestre: a.b.
ao trimestre: a.t.
ao semestre: a.s.
ao ano: a.a.

5. Montante: É a quantia em dinheiro no fim da aplicação, sendo a soma do capital aplicado e o juro produzido em um determinado período. É também chamado de valor futuro, valor final, saldo, entre outros.

Notação: M

Matematicamente, temos que

$$M=C+J$$

1.1.1 - Calendários

Com o objetivo de simplificar o cálculo com datas, existem várias formas de calendários na matemática financeira. Vejamos alguns exemplos.

- **Calendário Civil:** O ano tem 365 dias e cada mês tem o número exato de dias.
- **Calendário Comercial:** O ano tem 360 dias e cada mês tem 30 dias.

ATENÇÃO!
Utiliza-se o Calendário Civil quando o prazo é dado em datas. Neste caso, contam-se os dias corridos acrescentando uma das extremidades.

- **Calendário de Dias Úteis:** Retira-se do período os sábados, domingos e feriados. Neste tipo de calendário, usa-se a Agenda Redoma, que facilita a contagem dos dias úteis num período.

- **Calendário de Operações:** O dia pode ter até 36h.

Exemplo: Considere uma aplicação na poupança feita em 07 de agosto de 2018 que será resgatada em 07 de janeiro de 2019. Vamos calcular o prazo.

Agosto	25 dias (conta o primeiro dia)
Setembro	30 dias
Outubro	31 dias
Novembro	30 dias
Dezembro	31 dias
Janeiro	6 dias (não conta o último dia)

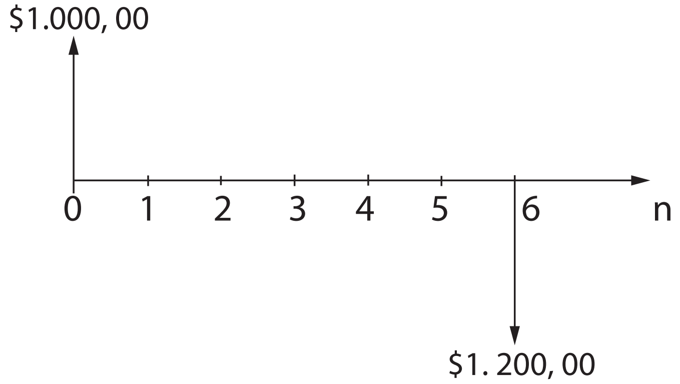
Assim, o prazo é de 153 dias.

1.1.2 - Fluxo de Caixa

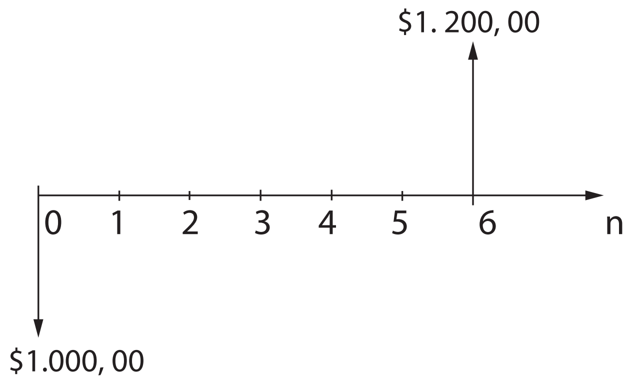
O Fluxo de Caixa é um registro de uma sequência de movimentações financeiras ao longo do tempo. É representado por um eixo horizontal no qual marcamos o tempo, seja em ano, semestre, trimestre, bimestre, mês ou dia. As entradas de recursos são representadas por setas orientadas para cima, perpendiculares ao eixo horizontal. Já as saídas de recursos são representadas da mesma forma, porém as setas serão colocadas para baixo.

Exemplo: Suponha que uma pessoa fez um empréstimo em um banco de $1.000,00, pagando, no final do período de 6 meses, $1.200,00.

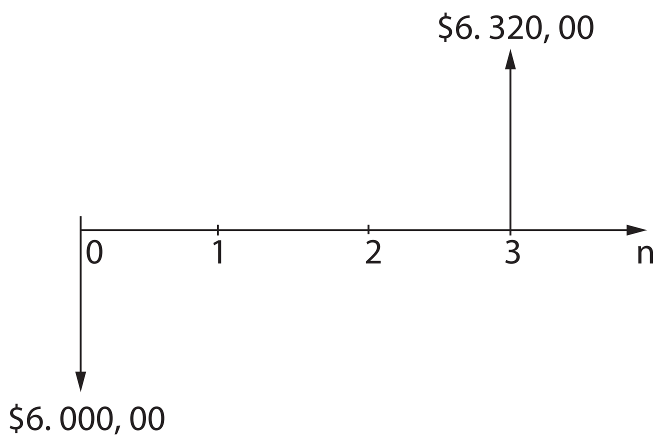
Do ponto de vista do recebedor do empréstimo, teremos o seguinte fluxo de caixa:



Do ponto de vista do banco, obtemos o seguinte fluxo de caixa:



Exemplo: Um investidor aplicou $6.000,00 e resgatou $6.320,00 após 3 meses. A representação do fluxo de caixa no ponto de vista do investidor é:



1.2 - Regimes de Capitalização

Considere um capital que é aplicado a uma determinada taxa por período ou por vários períodos. Quando queremos calcular qual é o valor de um montante, estamos querendo saber o resultado da capitalização do valor atual. O montante pode ser calculado de acordo com os seguintes critérios:

1. Regime de Capitalização Simples;
2. Regime de Capitalização Composta;
3. Regime de Capitalização Mista.

Analisemos cada uma das capitalizações.

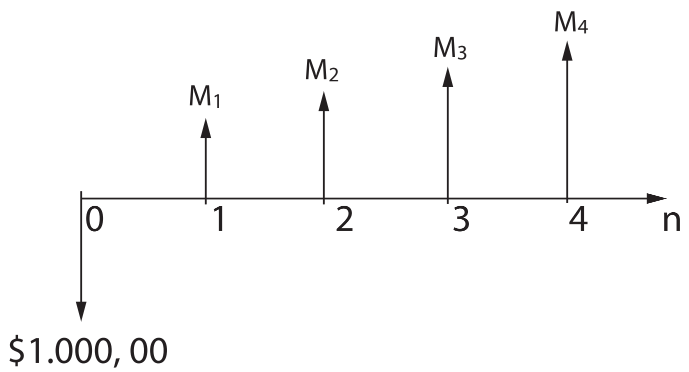
1.2.1 - Regime de Capitalização Simples

No Regime de Capitalização Simples, a taxa de juros incide diretamente sobre o valor do capital. Em cada período, o juro é obtido pelo produto do capital inicial pela taxa unitária. Desta forma, os juros são iguais em cada período. É também chamado de Juros Simples.

Exemplo: Um investidor aplica $1.000,00 por um prazo de 4 meses a uma taxa mensal de 10%. Encontre o valor do saldo ao final de cada período usando o Regime de Capitalização Simples.

Resolução:

Primeiramente, façamos o fluxo de caixa correspondente.



Usando que M=C+J, calculamos o montante M_n ao final de cada mês n:

$$M_1=1.000+1.000(0,1)=\$1.100$$
$$M_2=1.100+1.000(0,1)=\$1.200$$
$$M_3=1.200+1.000(0,1)=\$1.300$$
$$M_4=1.300+1.000(0,1)=\$1.400$$

Podemos montar uma tabela com os respectivos valores de *J* e de *M* em cada período *n*.

n	***J***	***M***
0	-	1.000,00
1	100,00	1.100,00
2	100,00	1.200,00
3	100,00	1.300,00
4	100,00	1.400,00

Observe que, a cada mês, o montante é acrescido de \$100,00. Assim, podemos afirmar que os montantes formam uma Progressão Aritmética de razão 100.

No caso geral, para um capital C aplicado a juros simples durante n períodos a uma taxa unitária i referida nesse período, tem-se uma Progressão Aritmética cujo primeiro termo é C+C*i* e a razão é C*i*. Assim, lembrando que a equação que relaciona um termo qualquer a_n de uma Progressão Aritmética com o primeiro termo a_1 e a razão *r* é dada por

$$a_n = a_1\ (n\text{-}1)r,$$

temos que o montante será dado por

$$M = (C+Ci) + (n-1)Ci$$

$$M = C+Ci + Cin-Ci$$

$$M = C + Cin$$

$$M = C\,(1+in)$$

Como M=C+J, temos que C+Cin=C+J. Logo,

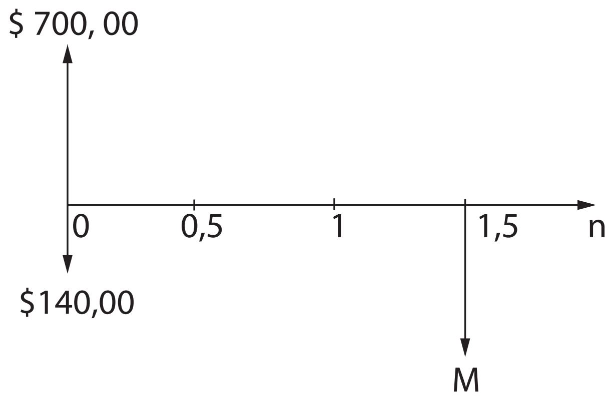
$$\boldsymbol{J = Cin}$$

Portanto, na Capitalização Simples, a cada período, aplicamos a taxa de juros sobre o capital e obtemos o valor do juro daquele período. Quando há mais de um período envolvido, basta somar todos os juros obtidos ou, de forma mais simples, multiplicar o juro de um período pelo número de períodos da aplicação.

Vejamos alguns exemplos envolvendo juros simples.

Exemplo: Um artigo de preço à vista igual a \$700,00 pode ser adquirido com entrada de 20% mais um pagamento para 45 dias. Se o vendedor cobra juros simples de 8% ao mês, qual o valor do pagamento devido?

Resolução:



Valor à Vista: \$700,00

Valor a Prazo: $\underbrace{R\$140{,}00}_{\text{20\% de \$700,00 de entrada}} + M$

$C = \$700{,}00 - \$140{,}00 = \$560{,}00$

$n = 45 \text{ dias} = 1{,}5 \text{ mês}$

$i = 0{,}08 \text{ ao mês}$

$M = ?$

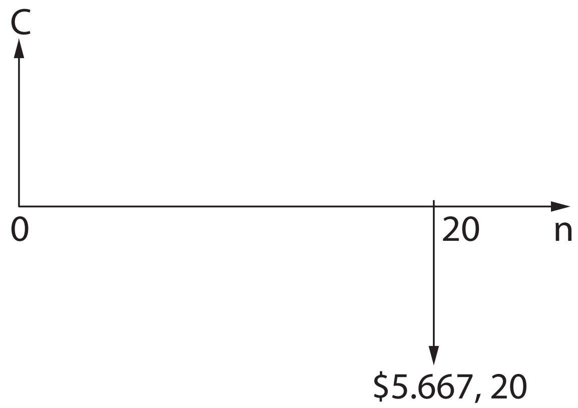
$M = C(1+in)$

$M = 560[1+0{,}08(1{,}5)]$

$M = \$627{,}20$

Exemplo: Um empréstimo foi efetuado a uma taxa linear de 1,8% ao mês e pago um montante de \$5.667,20 após 20 dias. Qual é o valor do empréstimo?

Resolução:



$M = \$5.667{,}20$

$i = 0{,}018$

$n = \dfrac{20}{30} = \dfrac{2}{3} \text{ mês}$

$C = ?$

$M = C(1+in)$

$$5.667{,}20 = C\left[1 + 0{,}018\left(\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$C = \frac{5.667{,}20}{1{,}012}$$

$C = \$5.600$

Exemplo: Um investidor aplicou \$4.000,00 com capitalização simples à taxa de 5% ao mês. O montante que ele irá receber será de \$7.000,00. Determine o prazo de aplicação.

Resolução:

C=$4.000	$M=C+J$
i=0,05	$7.000=4.000+J$
M=$7.000,00	$J=\$3.000$
n= ?	$J=Cin$
	$3.000=4.000(0,05)n$
	$n=\dfrac{3.000}{200}$
	n=15 meses

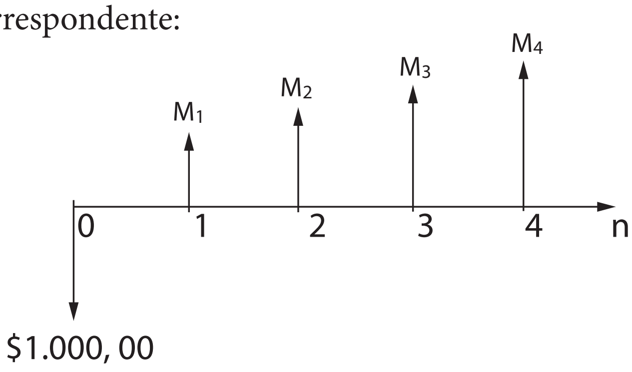
1.2.2 - Regime de Capitalização Composta

No Regime de Capitalização Composta, a taxa de juros incide diretamente sobre o valor do montante do período anterior. É também chamado de Juros Compostos.

Exemplo: Um investidor aplica $1.000,00 por um prazo de 4 meses a uma taxa mensal de 10%. Encontre o valor do saldo ao final de cada período usando o Regime de Capitalização Composta.

Resolução:

O Fluxo de caixa correspondente:



Calculando o montante M_n ao final de cada mês n, obtemos:

$$M_1 = 1.000(0,1) + 1.000 = 1.100$$

$$M_2 = 1.100(0,1) + 1.100 = 1.210$$

$$M_3 = 1.210(0,1) + 1.210 = 1.331$$

$$M_4 = 1.331(0,1) + 1.331 = 1.464,10$$

Montando uma tabela com os respectivos valores de J e de M em cada período n, temos

n	*J*	*M*
0	-	1.000,00
1	100,00	1.100,00
2	110,00	1.210,00
3	121,00	1.331,00
4	133,10	1.464,10

Note que, a cada mês, o montante é acrescido de 10% do seu valor. Assim, podemos afirmar que os montantes formam uma Progressão Geométrica de razão 1,1.

De maneira geral, para um capital C, aplicado a juros compostos durante n períodos a uma taxa unitária i referida nesse período, tem-se uma Progressão Geométrica cujo primeiro termo é $C(1+i)$ e a razão é $(1+i)$. Portanto, lembrando que a equação que relaciona um termo qualquer a_n de uma Progressão Geométrica com o primeiro termo a_1 e a razão q é dada por

$$a_n = a_1 . q^{(n-1)},$$

temos que o montante M será dado por

$$M = C(1+i)(1+i)^{(n-1)}$$

$$\boldsymbol{M = C(1+i)^n}$$

Como podemos observar, o mesmo capital calculado sob as formas de ambos os regimes produz um total de juros de $400,00, na capitalização simples, e $464,10, na capitalização composta. Esta diferença entre as formas de cálculo é fruto da remuneração de juros sobre juros dos juros compostos.

Sabendo um pouco mais

A expressão $(1+i)^n$ é chamada de fator de capitalização ou fator de acumulação de capital. Antes do advento das calculadoras avançadas, este fator ocupava várias páginas no final dos livros.

Essa diferença é exponencial, pois, com o transcurso do tempo, o coeficiente angular dos juros compostos aumenta cada vez mais, enquanto que o valor dos juros simples permanece o mesmo até o final da operação. O gráfico traz um comparativo entre ambos os sistemas de capitalização.

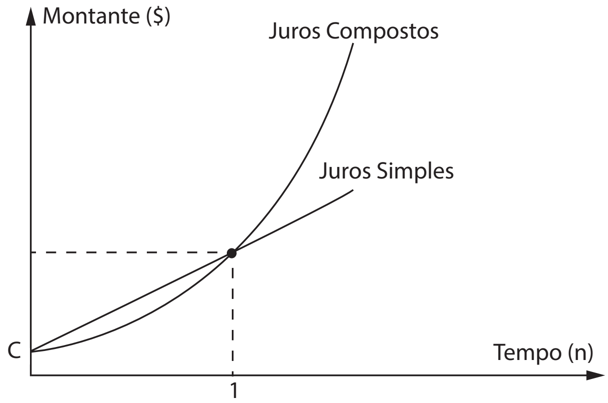


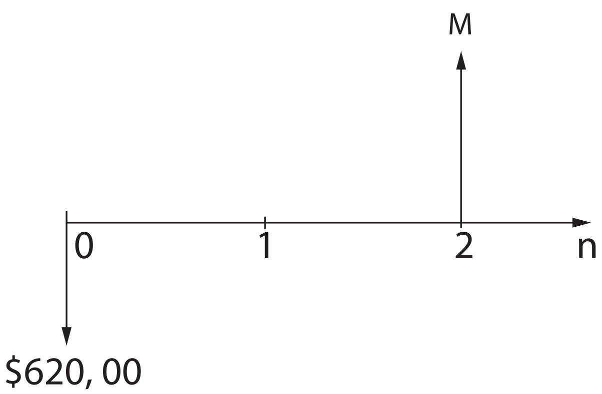
Gráfico 1: Comparação das Capitalizações Simples e Composta

Observa-se pelo gráfico que:

- Para n > 1: Capitalização Composta > Capitalização Simples;
- Para 0<*n*<1: Capitalização Composta < Capitalização Simples;
- Para *n*=1: Capitalização Composta = Capitalização Simples.

Exemplo: Uma aplicação especial rende 1,5% ao mês em regime de juros compostos. Certa pessoa deseja aplicar a quantidade $620,00 durante 2 anos. Qual é o montante gerado por essa aplicação?

Resolução:



$C = \$620$

$n = 2 \text{ anos} = 24 \text{ meses}$

$i = 0{,}015$

$M = ?$

$M = C(1+i)^n$

$M = 620(1+0{,}015)^{24}$

$M = 620(1{,}015)^{24}$

$M = 620(1{,}4295)$

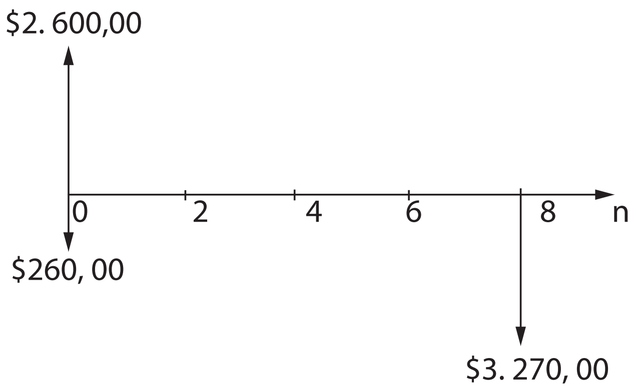
$M = \$886{,}29$

Exemplo: Uma loja financia a venda de uma mercadoria no valor de \$2.600,00 da seguinte forma:

Entrada:	10% de \$2.600,00
Ao final de 8 meses:	\$3.270,00

Qual é a taxa exponencial mensal cobrada pela loja?

Resolução:



$M = \$3.270$

$C = \$2.600 - \underbrace{\$260}_{10\% \text{ de } \$2.600} = \$2.340$

$n = 8 \text{ meses}$

$i = ?$

$M = C(1+i)^n$

$3.270 = 2.340(1+i)^8$

$$\left(\frac{3.270}{2.340}\right)^{\frac{1}{8}} = [(1+i)^8]^{\frac{1}{8}}$$

$(1{,}397^{4)(1/8)} = 1+i$

$i = 1{,}0427-1$

$i = 0{,}0427$

$i = 4{,}27\% \text{ ao mês}$

Exemplo: Determine o tempo necessário para o capital de $20.000,00 gerar um montante de $28.142,00 quando aplicado à taxa composta de 5% ao mês.

Resolução:

$M = \$28.142$	$M = C(1+i)^n$
$C = \$20.000$	$28.142 = 20.000(1+0,05)^n$
$i = 0,05$ *ao mês*	$\frac{28.142}{20.000} = (1,05)^n$
$n = ?$	$1.4071 = (1,05)^n$
	$\log(1.4071) = \log(1,05)^n$
	$n = \frac{\log(1.4071)}{\log(1,05)}$
	$n = \frac{\log(1.4071)}{\log(1,05)}$
	$n \approx 7$ *meses*

1.2.3 - Regime de Capitalização Mista

Quando o período de pagamento da dívida for não inteiro, utiliza-se a capitalização composta na parte inteira e a capitalização simples para a não inteira. Isto é o que chamamos de **Capitalização Mista** ou **Convenção Linear.**

Observação: Mesmo o prazo não sendo um número inteiro, é possível utilizar a capitalização composta em todo período. Neste caso, chamamos esse tipo de capitalização de **Convenção Exponencial.**

Segundo Belo (2008, p.25), "A adoção de uma dessas hipóteses dependerá exclusivamente do que for acordado entre as partes interessadas."

Exemplo: Um capital de $35.000,00 foi emprestado por 2 anos e 7 meses a uma taxa bimestral de 12%. Calcule o valor pago no final desse período usando:

a) Convenção Linear;

b) Convenção Exponencial.

Resolução:

a)	$M_1 = C(1+i)^n$
$C = \$35.000$	$M_1 = 35.000(1+0,12)^{15}$
$i = 0,12$	$M_1 = 35.000(5,4736)^{15}$
$n = 2$ *anos e* 7 *meses* $= 15$ *bimestres e 1 mês*	$M_1 = \$191.576$
$M = ?$	$M = C(1+in)$
	$M = 191.576[1+0,12(0,5)]$
	$M = \$203.070,56$
b)	$M = C(1+i)^n$
C = \$35.000	$M = 35.000(1+0,12)^{15,5}$
i = 0,12	$M = \$202.743,71$
n = 2 anos e 7 meses = 15 bimestres e 1 mês	
M = ?	

Veja que o montante é maior na convenção linear. Isto se deve ao fato de que o juro simples é maior que o juro composto quando calculado num tempo menor do que um período de capitalização.

1.3 - Estudo das Taxas

1.3.1 - Taxas Proporcionais

As taxas i_1 e i_2 são ditas proporcionais se, com relação aos períodos n_1 e n_2, expressos na mesma unidade de tempo, ocorrer $\frac{i_1}{n_1} = \frac{i_2}{n_2}$.

Exemplo: As taxas 48% ao ano, 24% ao semestre, 12% ao trimestre são proporcionais, pois, se tomarmos meses como unidade de tempo, teremos $\frac{48\%}{12} = \frac{24\%}{6} = \frac{12\%}{3} = \frac{4\%}{1}$.

1.3.2 - Taxas Equivalentes

Taxas equivalentes são taxas que são dadas em referências temporais diferentes, mas produzem o mesmo montante se aplicadas ao mesmo capital, em um mesmo período.

Observação: Esta definição vale para qualquer tipo de capitalização.

A juros simples, duas taxas equivalentes são também proporcionais. Porém, isso não acontece quanto se trata de juros compostos.

Taxas Equivalentes na Capitalização Simples

Considere que um capital C é aplicado por 1 ano a taxas equivalentes nas referências descritas na tabela abaixo.

Período	**Taxa**
Ano	i_a
Semestre	i_s
Trimestre	i_t
Bimestre	i_b
Mês	i_m
Dia	i_d

Utilizando a fórmula dos Juros Simples, $M=C(1+in)$, temos que

$$C[1+i_a(1)] = C[1+i_s(2)] = C[1+i_t(4)] = C[1+i_b(6)]=C[1+i_m(12)] = C[1+i_d(360)]$$

Daí,

$$i_a=2i_s=4i_t=6i_b=12i_m=360i_d$$

Portanto, na capitalização simples, taxas equivalentes são proporcionais.

Exemplo: Na capitalização simples, qual é a taxa equivalente mensal à taxa 12% ao ano?

Resolução:

$$i_a = 12i_m$$
$$0,12 = 12i_m$$
$$i_m = 0,12/12$$
$$i_m = 0,01$$
$$i_m = 1\%\ ao\ mês$$

Exemplo: Na capitalização simples, qual é a taxa equivalente semestral à taxa 2% ao mês?

Resolução:

$$2i_s = 12i_m$$
$$2i_s = 12(0{,}02)$$
$$i_s = 0{,}12$$
$$i_m = 12\% \text{ ao semestre}$$

Exemplo: Na capitalização simples, qual é a taxa equivalente mensal à taxa 0,5% ao dia?

Resolução:

$$12i_m = 360i_d$$
$$12i_m = 360(0{,}005)$$
$$i_m = 0{,}15$$
$$i_m = 15\% \text{ ao mês}$$

Taxas Equivalentes na Capitalização Composta

Considere que um capital C é aplicado por 1 ano a taxas equivalentes nas referências descritas na tabela abaixo.

Período	**Taxa**
Ano	i_a
Semestre	i_s
Trimestre	i_t
Bimestre	i_b
Mês	i_m
Dia	i_d

Utilizando a fórmula dos Juros Compostos, $M = C(1+i)^n$, temos que

$C(1+i_a)^1 = C(1+i_s)^2 = C(1+i_t)^4 = C(1+i_b)^6 = C(1+i_m)^{12} = C(1+i_d)^{360}$.

Daí,

$$(1+i_a) = (1+i_s)^2 = (1+i_t)^4 = (1+i_b)^6 = (1+i_m)^{12} = (1+i_d)^{360}$$

Portanto, na capitalização composta, taxas equivalentes não são proporcionais.

Exemplo: Na capitalização composta, qual é a taxa equivalente mensal à taxa 12% ao ano?

Resolução:

$$(1 + i_a) = (1 + i_m)^{12}$$
$$(1 + 0{,}12) = (1 + i_m)^{12}$$
$$(1{,}12)^{\frac{1}{12}} = [(1 + i_m)^{12}]^{\frac{1}{12}}$$
$$1 + i_m = 1{,}009489$$
$$i_m = 0{,}009489$$
$$i_m = 0{,}95\% \; ao \; mês$$

Exemplo: Na capitalização composta, qual é a taxa equivalente semestral à taxa 20% ao ano?

Resolução:

$$(1 + i_a) = (1 + i_s)^{2}$$
$$(1 + 0{,}2) = (1 + i_s)^{2}$$
$$(1{,}2)^{\frac{1}{2}} = [(1 + i_s)^{2}]^{\frac{1}{2}}$$
$$1 + i_s = 1{,}095445$$
$$i_m = 0{,}0954445$$
$$i_m = 9{,}54\% \; ao \; semestre$$

Exemplo: Um corretor de títulos propõe a seu cliente uma aplicação cuja rentabilidade é 40% de ao ano. Se o investidor souber de outra alternativa onde é possível ganhar 9% ao trimestre, qual é a melhor escolha?

Resolução:

Para comparar as duas alternativas, vamos verificar se suas taxas são equivalentes. É possível calcular, por exemplo, a taxa anual equivalente a ao trimestre.

$$(1 + i_a) = (1 + i_t)^4$$
$$(1 + i_a) = (1 + 0{,}09)^4$$
$$1 + i_a = 1{,}411582$$
$$i_a = 0{,}411582$$
$$i_a = 41{,}16\%\ ao\ ano$$

Portanto, aplicar a ao trimestre é melhor do que aplicar a 40% ao ano.

1.3.3 - Taxa Nominal e Taxa Efetiva

Taxa nominal é aquela que está definida em período de tempo diferente do período de capitalização.

Exemplo: Considere que uma quantia qualquer é emprestada e paga a juros compostos de **12% ao ano, capitalizados mensalmente**.

Já vimos que 12% ao ano é equivalente a 0,95% ao mês. Porém, quando aparece a expressão "capitalizados mensalmente", a taxa acima é a Taxa Nominal.

A taxa nominal não representa a taxa de juros que efetivamente está sendo utilizada na operação.

Taxa efetiva é aquela utilizada no cálculo dos juros.

Há a seguinte convenção no mercado financeiro:

"A Taxa Efetiva por período de capitalização é proporcional à taxa nominal."

Assim, a Taxa Efetiva usada na operação é a proporcional à Taxa Nominal, sendo adquirida através da divisão da taxa pelo número de capitalizações para um período da taxa nominal.

No exemplo acima, $\frac{12\%}{12} = 1\%$ ao mês. Esta é a Taxa Efetiva. Para saber qual é a Taxa Efetiva anual, usamos a equivalência entre taxas.

$$(1 + i_a) = (1 + i_m)^{12}$$
$$(1 + i_a) = (1 + 0{,}01)^{12}$$
$$i_a = (1{,}01)^{12} - 1$$
$$i_a = 0{,}126825$$
$$i_a = 12{,}68\%\ ao\ ano$$

Exemplo: Encontre a taxa efetiva no mesmo período da taxa nominal 36% ao ano, capitalizada mensalmente.

Resolução:

Taxa nominal: 36% ao ano, capitalizados mensalmente

Taxa efetiva mensal: $\frac{36\%}{12} = 3\%$ ao mês

$$(1 + i_a) = (1 + i_m)^{12}$$
$$(1 + i_a) = (1 + 0{,}03)^{12}$$
$$i_a = (1{,}03)^{12} - 1$$
$$i_a = 0{,}425761$$
$$i_a = 42{,}58\% \text{ ao ano}$$

Exemplo: Qual é a taxa efetiva no mesmo período da taxa nominal ao mês, capitalizada diariamente?

Resolução:

Taxa nominal:30% ao mês, capitalizados diariamente

Taxa efetiva diária: $\frac{30\%}{30} = 1\%$ ao dia

$$(1 + i_m) = (1 + i_d)^{30}$$
$$(1 + i_m) = (1 + 0{,}01)^{30}$$
$$i_m = 0{,}347849$$
$$i_a = 34{,}79\% \text{ ao mês}$$

Exemplo: Qual é o montante pago por um empréstimo de R$6.000,00 durante 3 meses, sendo que a taxa utilizada de operação foi de 60% ao ano, capitalizados diariamente.

Resolução:

C = $6.000
n = 3 meses = 90 dias
Taxa nominal: 60% a.a.,capitalizados diariamente
Taxa efetiva: $\frac{60\%}{360} = \frac{1}{6}\%$ *ao dia*

M= ?

$$M = C(1 + i)^n$$
$$M = 6.000\left(1 + \frac{1}{6}\right)^{90}$$
$$M = 6.000\left(\frac{7}{6}\right)^{90}$$
$$M = \$6.970{,}13$$

1.3.4 - Taxas Resultantes

Na Capitalização Composta, se em um determinado período tivermos $k, k \in \mathbb{R}$, taxas distintas e sucessivas, então a taxa resultante i_r, no período total, é dada por

$$M = C(1+i_r)^1 = C(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)\dots(1+i_k)$$

$$i_r = (1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)\dots(1+i_k) - 1$$

Exemplo: Um capital foi aplicado da seguinte forma:

Inicialmente, durante um trimestre, rendendo 8% nesse período. Em seguida, por um bimestre, com rendimento de 5% no período. Finalmente, por mais um mês, com rendimento mensal de 1%. Calcule a taxa de juros total da operação.

Resolução:

$$i_r = (1+i_1)(1+i_2)(1+i_3) - 1$$

$$i_r = (1+0{,}08)(1+0{,}05)(1+0.01) - 1$$

$$i_r = 14{,}53\%\ ao\ semestre$$

1.3.5 - Taxa Real e Taxa Aparente

Os rendimentos financeiros fazem a correção de capitais investidos perante uma determinada taxa de juros. As taxas de juros são corrigidas pelo governo de acordo com os índices inflacionários referentes a um período. O objetivo disso é corrigir a desvalorização dos capitais aplicados durante uma crescente alta da inflação.

Se um capital C é aplicado durante certo prazo, à taxa i por período, o capital acumulado será $M_1 = C(1+i)$. A taxa i é chamada de taxa de juros aparente, que é o índice responsável pelas operações correntes. Se no mesmo período a taxa de inflação (desvalorização da moeda) for j, o capital corrigido pela inflação será $M_2 = C(1+j)$. Note que se $M_1 = M_2$, a taxa de juros i apenas recompôs o poder aquisitivo do capital C, criando uma estabilidade. Se $M_1 > M_2$, houve um ganho real. Se $M_1 < M_2$, ocorreu uma perda real. É chamado de valor real a diferença $M_1 - M_2$, que poderá ser positiva (ganho real), nula ou negativa (perda real).

Chama-se taxa real de juros, sendo indicada por r, aquela que, aplicada ao montante M_2, produzirá o montante M_1. Ela reflete com maior precisão o ganho real de um investimento por considerar a perda com a desvalorização causada pela inflação do período. Podemos então escrever que

$$M_1 = M_2(1+r)$$

substituindo e , encontramos a fórmula da Taxa Real de Juros.

$$C(1+i) = C(1+j)(1+r)$$
$$(1+i) = (1+j)(1+r)$$
$$\frac{(1+i)}{(1+j)} = (1+r)$$
$$\frac{(1+i)}{(1+j)} - 1 = r$$
$$r = \frac{1+i-1-j}{(1+j)}$$
$$r = \frac{i-j}{(1+j)}$$

Sabendo um pouco mais

Um aspecto interessante sobre a taxa real de juros é que ela pode ser, inclusive, negativa, no caso que j>i.

Exemplo: Um capital aplicado por um ano rendeu 20% ao ano. No mesmo período, a taxa de inflação foi de 5%. Qual é a taxa real de juros?

Resolução:

i=0,2 ao ano
j=0,05 ao ano
r=?

$$r = \frac{i-j}{(1+j)}$$
$$r = \frac{0,2-0,05}{1+0,05}$$
$$r = \frac{0,15}{1,05}$$
$$r = 0,142857$$
$$r = 14,29\% \; ao \; ano$$

Exemplo: Uma pessoa comprou um imóvel por $120.000,00, vendendo 6 meses depois por $180.000,00. Se a inflação desse semestre foi de 20%, encontre:

a) a rentabilidade aparente;

b) a rentabilidade real.

Resolução:

$C = \$120.000$ $M = \$180.000$ $n = 6\ meses$ $j = 0{,}2\ ao\ ano$ $a) i_s = ?$ $b) r = ?$	a) $M = C(1+i)^n$ $180.000 = 120.000(1+i_s)^1$ $18 = 12 + 12i_s$ $i_s = 0{,}5$ $i_s = 50\%\ ao\ semestre$ b) $r = \frac{i-j}{(1+j)}$ $r = \frac{0{,}5 - 0{,}2}{1 + 0{,}2}$ $r = \frac{0{,}3}{1{,}2}$ $r = 0{,}25$ $r = 25\%\ ao\ semestre$

Exemplo: Pedro deposita em uma conta poupança uma certa quantia em dinheiro a juros de 6% ao ano, com uma inflação estimada em 7,8% ao ano. Calcular a taxa real do investimento.

Resolução:

$i = 0{,}06\ ao\ ano$ $j = 0{,}078\ ao\ ano$ $r = ?$	$r = \frac{i-j}{(1+j)}$ $r = \frac{0{,}06 - 0{,}078}{1 + 0{,}078}$ $r = \frac{0{,}018}{1{,}078}$ $r = -0{,}016697$ $r = -1{,}67\%\ ao\ ano$

Com a taxa de inflação maior que os rendimentos da poupança no período, a taxa real ficou negativa em 1,67%, ocasionando uma depreciação do capital investido por Pedro.

1.4 – Descontos

No sistema financeiro, as operações de empréstimo são muito utilizadas pelas pessoas. Essas movimentações geram ao credor um título de crédito, que é a justificativa da dívida. Os títulos possuem datas de vencimento, mas o devedor tem o direito de antecipar o pagamento. Este abatimento é chamado de desconto. Assim, os descontos, como o próprio nome diz, é um desconto cedido a alguém ou uma instituição, por quitar sua dívida antecipadamente. O conceito de desconto é o antônimo de juro, enquanto o juro é dado para estender o prazo para pagamento, o desconto é dado por antecipação desse prazo.

Existem vários produtos utilizados nas operações financeiras.

Vejamos alguns exemplos:

> **Nota promissória:** título que comprova uma aplicação com vencimento determinado. Este produto é muito utilizado entre pessoas físicas e ou pessoas físicas e instituições financeiras credenciadas.
>
> **Duplicata:** papel emitido por pessoas jurídicas contra clientes físicos ou jurídicos, especificando vendas de mercadorias com prazo ou prestação de serviços a serem pagos mediante contrato firmado entre as partes.
>
> **Letra de câmbio:** como a promissória, é um título que comprova uma aplicação com estabelecimento prévio do vencimento. No caso da letra, o título ao portador somente é emitido por uma instituição financeira credenciada.

1.4.1 - Valor Nominal, Valor Descontado e Prazo de Antecipação

O valor nominal (ou futuro) de um compromisso é quanto ele vale na data de vencimento, enquanto valor descontado (ou atual) é o valor que ele adquire numa data que antecede o seu vencimento. O intervalo de tempo entre a data em que o título é negociado e a data de vencimento do mesmo é o prazo de antecipação.

Notações:

- FV: Valor Nominal ou Futuro;
- PV: Valor Descontado ou Atual;
- n: Prazo de Antecipação.

Assim, o Desconto pode ser definido como a diferença entre o valor nominal de um título e seu valor descontado, isto é, o abatimento a que o devedor faz jus quando antecipa o pagamento de um título.

Matematicamente:

$$D = FV - PV$$

Existem basicamente dois tipos de desconto: o desconto racional e o desconto comercial. Os dois tipos podem ser aplicados em operações de juros simples (desconto simples) e de juros compostos (desconto composto).

Inicialmente, analisemos os descontos racional e comercial.

Desconto Racional ("Por Dentro")

No desconto racional, que também é chamado de desconto "por dentro", o cálculo é realizado com os mesmos critérios do cálculo de juros. A diferença é que o desconto corresponde a uma operação de descapitalização, ou seja, é necessário retroceder a capitalização calculada para o período de antecipação. Nele, o valor de referência para o cálculo percentual do desconto é o valor atual.

Desconto Comercial ("Por Fora")

O desconto comercial, também chamado "desconto por fora", difere do desconto racional principalmente por que se trata de uma taxa aplicada ao valor nominal do título. Em seu cálculo, não ocorre uma descapitalização, como no caso do desconto racional.

1.4.2 - Desconto na Capitalização Simples

Desconto Racional Simples

Como a base do desconto racional é o valor atual PV, considerando a taxa de desconto d_r, o prazo de antecipação n e usando a Capitalização Simples, temos que o desconto D será dado por

$$D = PVd_r n$$

Além disso, $D = FV - PV$.

Então,

$$PVd_r n = FV - PV$$

$$FV = PV(1+d_r n)$$

Exemplo: Um título no valor nominal de \$6.500,00 foi descontado 45 dias antes de seu vencimento a uma taxa mensal de 1,3%. Encontre o valor descontado e o desconto utilizando o Desconto Racional Simples.

Resolução:

$$FV = \$6.500$$

$$n = 45 \text{ } dias = \frac{45}{30} \text{ } meses$$

$$d_r = 0{,}013 \text{ } ao \text{ } mês$$

$$PV = ?$$

$$D = ?$$

$$FV = PV(1 + d_r n)$$

$$6.500 = PV\left[1 + 0{,}013\left(\frac{45}{30}\right)\right]$$

$$6.500 = 1{,}0195PV$$

$$PV = \$6.375{,}67$$

$$D = FV - PV$$

$$D = 6.500 - 6.375{,}67$$

$$D = \$124{,}33$$

Exemplo: Um título com valor nominal de foi resgatado dois meses antes do seu vencimento, sendo-lhe por isso concedido um Desconto Racional Simples à taxa de ao 60% mês. Nesse caso, qual foi o valor pago pelo título?

Resolução:

$FV = \$8.800$ $n = 2$ meses $d_r = 0{,}6$ ao mês $PV = ?$	$FV = PV(1+d_r n)$ $8.800 = PV[1+0{,}6(2)]$ $8.800 = 2{,}2PV$ $PV = \$4.000{,}00$

Exemplo: Determine o valor nominal de uma letra, descontada por dentro, à taxa linear de 8% ao mês, um mês e quinze dias antes de seu vencimento, e que apresentou o desconto de R$ 400,00.

Resolução:

$D = \$400$ $n = 1$ mês e 15 dias $= 1 + \frac{15}{30}$ meses $d_r = 0{,}08$ ao mês $FV = ?$	$D = PVd_r n$ $400 = PV(0{,}08)\left(1+\frac{15}{30}\right)$ $PV = \$3.333{,}33$ $FV = PV(1+d_r n)$ $FV = 3.333{,}33\left[1+0{,}08\left(1+\frac{15}{30}\right)\right]$ $FV = \$3.733{,}33$

Desconto Comercial Simples

Como a base do desconto comercial é o valor nominal FV, considerando a taxa de desconto d, o prazo de antecipação n e utilizando a Capitalização Simples, temos que o desconto D será dado por

$$D = FVd_c n$$

Ademais $D = FV - PV$. Logo,

$$FVdn = FV - PV$$

$$PV = FV(1 - d_c n)$$

Exemplo: Um título no valor nominal de \$6.500,00 foi descontado 45 dias antes de seu vencimento a uma taxa mensal de 1,3%. Encontre o valor descontado e o desconto utilizando o Desconto Comercial Simples.

Resolução:

$FV = \$6.500$	$PV = FV(1 - d_c n)$
$n = 45\ dias = \frac{45}{30}\ meses$	$PV = 6.500\left[1 - 0{,}013\left(\frac{45}{30}\right)\right]$
$d_c = 0{,}013\ ao\ mês$	$PV = \$6.373{,}25$
$PV = ?$	$D = FV - PV$
$D = ?$	$D = 6.500 - 6.373{,}25$ $D = \$126{,}75$

Observação: De acordo com Belo (2008), do ponto de vista da instituição financeira, foi feito um investimento na operação de desconto comercial simples. Ela antecipa o pagamento do título mediante um desconto, para recebr no vencimento o seu valor de nominal. Isto quer dizer que o desconto dado é o juro recebido pela instituição financeira na operação. Assim, a taxa de juros efetiva da operação será dada por

$$i = \frac{D}{PV}$$

A taxa efetiva de juros é calculada com base no valor que será creditado ao cliente (PV), enquanto a taxa de desconto é encontrada a partir do valor do título no seu vencimento (FV). Portanto, numa operação de desconto comercial, a taxa de desconto é sempre menor que a taxa efetiva de juros, considerando um mesmo prazo.

Exemplo: Uma letra de valor nominal igual a \$2.400,00 sofre um Desconto Comercial Simples à taxa de ao mês, cem dias antes do seu vencimento. Determine o desconto, o valor descontado e a taxa efetiva da operação.

Resolução:

$$FV = \$2.400$$
$$n = 100\ dias = \frac{100}{30}\ meses$$
$$d_c = 0{,}06\ ao\ mês$$
$$PV = ?$$
$$D = ?$$

$$PV = FV(1 - d_c n)$$
$$PV = 2.400\left[1 - 0{,}06\left(\frac{100}{30}\right)\right]$$
$$PV = \$1.920{,}00$$
$$D = FV - PV$$
$$D = 2.400 - 1.920$$
$$D = \$480{,}00$$
$$i = \frac{D}{PV}$$
$$i = \frac{480}{1.920}$$
$$i = 0{,}25\ em\ 100\ dias$$
$$0{,}25 - 100\ dias$$
$$x\ ao\ mês - 30\ dias$$
$$x = 0{,}075\ ao\ mês$$
$$x = 7{,}5\%\ ao\ mês$$

Observação: Outra forma de determinar a taxa efetiva:

No exemplo anterior, a instituição financeira aplicou $1.920,00 em 100 dias e recebeu um montante $2.400,00. Portanto, a taxa linear *i* dessa operação será dada por

$$2.400 = 1.920(1+100i)$$
$$i = 0{,}0025\ ao\ dia$$
$$i_m = 30 i_d$$
$$i_m = 0{,}075$$
$$i_m = 7{,}5\%\ ao\ mês$$

Exemplo: Uma duplicata no valor de $6.800,00 é descontada por fora, por um banco, gerando um crédito de $6.000,00 na conta do cliente. Sabendo-se que a taxa cobrada pelo banco é de 3,2% ao mês, determine o prazo de vencimento em dias da duplicata.

Resolução:

$$FV = \$6.800$$
$$PV = \$6.000$$
$$d_c = 0{,}032\ ao\ mês$$
$$n = ?$$

$$D = 6.800 - 6.000$$
$$D = \$800{,}00$$
$$D = FV d_c n$$
$$800 = 6.800(0{,}032)n$$
$$n = 3{,}676471\ meses$$
$$1\ mês - 30\ dias$$
$$3{,}676471\ meses - x\ dias$$
$$x \approx 110\ dias$$

Observação: Se consideradas as mesmas condições, isto é, o mesmo valor nominal FV, o mesmo prazo de antecipação n e a mesma taxa de desconto d_c, o desconto comercial é sempre maior do que o desconto racional, ou seja, o valor atual racional é sempre maior do que o valor atual comercial.

Desconto Comercial Bancário

Segundo Assaf Neto,

> [...] em operações de desconto com bancos comerciais são geralmente cobradas taxas adicionais de desconto a pretexto de cobrir certas despesas administrativas e operacionais incorridas pela instituição financeira. Estas taxas são geralmente prefixadas e incidem sobre o valor nominal do título uma única vez no momento do desconto. (2000, p. 41)

Assim, no Desconto Comercial, o banco cobra uma taxa de serviços (taxa administrativa ou bancária) que incide sobre o valor nominal. Denotaremos esta taxa por h. Assim,

$$D = FVd_c n + FVh$$

Substituindo em $D = FV - PV$, obtemos

$$FVd_c n + FVh = FV - PV$$

$$PV = FV(1 - d_c n - h)$$

Este desconto é chamado de Desconto Comercial Bancário.

Além disso, o IOF(Imposto sobre Operações Financeiras) é repassado e calculado sobre o valor nominal FV. Então,

$$PV = FV(1 - d_c n - h - IOF.n)$$

Exemplo: Um título de \$100.000,00 é descontado em um banco, seis meses antes do vencimento, à taxa de desconto comercial de 5% ao mês. O banco cobra uma taxa de 2% sobre o valor nominal do título com despesas administrativas e 1,5% ao ano de IOF. Calcule o valor líquido a ser recebido pelo proprietário do título e a taxa de juros efetiva mensal da operação.

Resolução:

$$FV = \$100.000$$

$$d_c = 0{,}05 \ ao\ mês$$

$$h = 0{,}02$$

$$IOF = 0{,}015\ a.a. = \frac{0{,}015}{12} a.m.$$

$$PV = FV(1 - d_c n - h - IOF.n)$$

$$PV = 100.000\left[1 - 0{,}05(6) - 0{,}02 - \frac{0{,}015}{12}(6)\right]$$

$$PV = 100.000(0{,}6725)$$

$$PV = \$67.250{,}00$$

$n = 6\ meses$ $PV = ?$ $i = ?$	$i = \frac{D}{PV}$ $i = \frac{32.750}{67.250}$ $i = 0{,}486989$ $i = 48{,}7\%\ em\ 6\ meses$ $6\ mês - 0{,}486989$ $1\ meses - x\ ao\ mês$ $x = 0{,}081165$ $x = 8{,}12\%\ ao\ mês$

Observe que a taxa de juros efetiva da operação é muito superior à taxa de desconto, o que é amplamente favorável ao banco.

Exemplo: Uma duplicata de valor nominal de \$60.000,00 foi descontada num banco dois meses antes do vencimento. A taxa de desconto comercial simples usada na operação foi de 2,8% ao mês. Sabe-se ainda que o banco cobra uma taxa de 1,5% sobre o valor nominal do título para cobrir despesas administrativas, descontadas e pagas integralmente no momento da liberação dos recursos administrativos. Determine o desconto, o valor descontado e a taxa efetiva da operação.

Resolução:

$FV = \$60.000$ $d_c = 0{,}028\ ao\ mês$ $h = 0{,}015$ $n = 2\ meses$ $D = ?$ $PV = ?$ $i = ?$	$PV = FV(1 - d_c n - h)$ $PV = 60.000[1 - 0{,}028(2) - 0{,}015]$ $PV = 60.000(0{,}929)$ $PV = \$55.740{,}00$ $D = FV - PV$ $D = 60.000 - 55.740$ $D = \$4.260{,}00$

Do ponto de vista do banco, esta foi uma operação de um empréstimo de \$55.740,00 que renderá, com juros simples em dois meses, um montante de \$60.000,00, isto é, um juro de \$4.260,00. Logo, a taxa de juros simples mensal *i* dessa operação será obtida por

$$4.260 = 55.740(2)i$$

$$i = 0{,}038213$$

$$i = 3{,}82\%\ ao\ mês$$

1.4.3 - Desconto na Capitalização Composta

Desconto Racional Composto

Como a base do desconto racional é o valor atual PV, considerando a taxa de desconto d_r, o prazo de antecipação n e usando a Capitalização Composta, temos que

$$FV = PV(1+d_r)^n$$

e

$$D = FV - PV$$

Observação: Fazendo algumas substituições, podemos encontrar fórmulas para encontrar o valor atual e o valor nominal a partir do desconto.

$$D + PV = PV(1+d_r)^n$$

$$PV[(1+d_r)^n - 1] = D$$

$$PV = \frac{D}{(1+d_r)^n - 1}$$

$$FV = (FV - D)(1+d_r)^n$$

$$FV = FV(1+d_r)^n - D(1+d_r)^n$$

Porém apenas as fórmulas e são suficientes para resolver os problemas.

Exemplo: Antecipando em dois meses o pagamento de um título, obtive um desconto racional composto que foi calculado com base na taxa de 4% ao mês. Sendo \$5.408,00 o valor nominal do título, quanto pagarei por ele?

Resolução:

$$FV = \$5.408$$

$$d_r = 0{,}04 \text{ ao mês}$$

$$n = 2 \text{ meses}$$

$$PV = ?$$

$$FV = PV(1+d_r)^n$$

$$5.408 = PV(1+0{,}04)^2$$

$$PV = \frac{5.408}{1{,}0816}$$

$$PV = \$5.000{,}00$$

Exemplo: Uma duplicata de valor nominal de foi resgatada meses antes do seu vencimento, tendo sido contratada à taxa de ao ano, capitalizados mensalmente. Qual foi o desconto racional composto concedido?

Resolução:

$$FV = \$300.000$$

$$d_r = \frac{24\%}{12} = 2\%\ a.m. = 0{,}02\ a.m.$$

$$n = \ 3\ meses$$
$$D = ?$$

$$FV = PV(1 + d_r)^n$$

$$300.000 = PV(1 + 0{,}02)^3$$

$$PV = \frac{300.000}{1{,}061208}$$

$$PV = \$282.696.70$$

$$D = 300.000 - 282.696.70$$
$$D = \$17.303{,}30$$

Desconto Comercial Composto

Como a base do desconto comercial é o valor nominal *FV*, considerando a taxa de desconto *d*, o prazo de antecipação *n* e utilizando a Capitalização Composta, temos que

$$PV = FV(1 - d_c)^n$$

e

$$D = FV - PV$$

Observação: Analogamente, fazendo algumas substituições, podemos encontrar fórmulas para encontrar o valor atual e o valor nominal a partir do desconto.

$$PV = (D + PV)(1+dc)n$$

$$PV[1 - (1 + d_c)^n] = D(1+d_c)^n$$

$$PV = \frac{D(1 + d_c)^n}{1 - (1 + d_c)^n}$$

Podemos encontrar o valor nominal em função do desconto.

$$FV - D = FV(1+d_c)^n$$

$$FV = \frac{D}{1 - (1 + d_c)^n}$$

Porém apenas as fórmulas $PV = FV(1 - d_c)^n$ e $D = FV - PV$ são suficientes para resolver os problemas.

Exemplo: Uma duplicata de valor nominal de \$10.000,00 foi resgatada 3 meses antes do seu vencimento, pelo regime de desconto comercial composto. Tendo sido contratada à 10% taxa de ao mês, qual é valor atual do título na época do resgate e qual foi o desconto comercial composto concedido?

Resolução:

$$FV = \$10.000$$
$$d_c = 0{,}1 \ ao\ mês$$
$$n = 3\ meses$$
$$PV = ?$$
$$D = ?$$

$$PV = FV(1 - d_c)^n$$
$$PV = 10.000(1 - 0{,}1)^3$$
$$PV = \$7.290{,}00$$
$$D = FV - PV$$
$$D = 10.000 - 7.290$$
$$D = \$2.710{,}00$$

Exemplo: Um título de \$2.000,00 será resgatado três anos antes do vencimento pelo critério do desconto comercial composto à taxa de ao ano com capitalizações semestrais. Qual será o valor líquido e o desconto?

Resolução:

$$FV = \$2.000$$
$$d_c = \frac{20\%}{2} = 10\%\ a.s. = 0{,}1\ a.s.$$
$$n = 3\ anos = 6\ semestres$$
$$PV = ?$$
$$D = ?$$

$$PV = FV(1 - d_c)^n$$
$$PV = 2.000(1 - 0{,}1)^6$$
$$PV = \$1.062{,}88$$
$$D = FV - PV$$
$$D = 2.000 - 1.062{,}88$$
$$D = \$937{,}12$$

Relação entre as taxas de desconto racional e comercial

Duas taxas de descontos são equivalentes se produzirem descontos iguais para um mesmo prazo de antecipação a um mesmo título.

Sendo d_r a taxa de desconto racional composto e d_c a taxa de desconto comercial composto, para um mesmo período de capitalização n, teremos que, se elas forem equivalentes, os descontos serão iguais. Logo, os valores atuais também serão iguais. Assim,

$$\frac{FV}{(1 + d_r)^n} = FV(1 - d_c)^n$$

$$(1 + d_r)^n(1 - d_c)^n = 1$$

$$(1 + d_r)(1 - d_c) = 1$$

Exemplo: Determinar a taxa mensal de desconto racional equivalente à taxa de desconto comercial de ao mês.

Resolução:

$$(1 + d_r)(1 - 0{,}2) = 1$$

$$(1 + d_r) = 1{,}25$$

$$d_r = 0{,}25$$

$$d_r = 25\% \text{ ao mês}$$

1.5 - Equivalência de Capitais

Considere que temos a necessidade de substituir um título financeiro ou mais por outros com vencimento diferente, sem prejuízo para ambas as partes do contrato. Esse problema está ligado à equivalência de capitais.

Dois ou mais capitais com datas de vencimentos distintas são ditos **capitais equivalentes** quando, transportados para uma mesma data, a uma mesma taxa, produzirem valores iguais. Esta data que é considerada como base para comparação dos capitais é chamada de **data focal** ou data de referência.

Observação: para determinar a equação de equivalência de capitais, é preciso saber se a capitalização é simples ou composta. Além disso, é necessário saber se o desconto que será utilizado é racional ou comercial. Todas essas condições são estipuladas pelas partes envolvidas no contrato. Caso o problema não especifique o tipo de capitalização e de desconto, deverão ser utilizados os juros compostos e o desconto racional, respectivamente.

1.5.1 - Equivalência na Capitalização Simples

Considere dois conjuntos de capitais, como na tabela abaixo, referidos a uma mesma taxa de juros simples , com seus respectivos prazos contados a partir da mesma data de origem.

1º Conjunto		2º Conjunto	
Capital	Data de Vencimento	Capital	Data de Vencimento
C_1	m_1	C'_1	m'_1
C_2	m_2	C'_2	m'_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
C_n	m_n	C'_p	m'_p

Esses dois conjuntos de capitais são equivalentes considerando a capitalização simples, desconto racional e fixada uma data focal. No nosso caso, considerando a data zero como data focal, se

$$\frac{C_1}{(1+im_1)}+\frac{C_2}{(1+im_2)}+\cdots+\frac{C_n}{(1+im_n)}=\frac{C'_1}{(1+im'_1)}+\frac{C'_2}{(1+im'_2)}+\cdots+\frac{C'_p}{(1+im'_p)}$$

Já considerando a capitalização simples, o desconto comercial e fixando a data zero como data focal, obtemos

$$C_1(1-im_1)+C_2(1-im_2)+\cdots+C_n(1-im_n)=$$
$$=C'_1(1-im'_1)+C'_2(1-im'_2)+\cdots+C'_n(1-im'_n)$$

Observação: Segundo Belo (2008), para resolver os problemas de equivalência de capitais, iremos utilizar a equação que relaciona o valor nominal de um título e seu valor atual. Isso dependerá do critério de desconto a ser utilizado, racional ou comercial. Se o capital for deslocado para o futuro, o problema dará o valor atual e devemos encontrar o valor nominal. Se o capital for deslocado para o passado, o problema dará o valor nominal e será necessário determinar o valor atual.

Exemplo: Um título com valor nominal de \$7.200,00 vence 120 em dias. Para uma taxa de 31,2% juros linear de ao ano, calcule o valor deste título:

a) hoje;

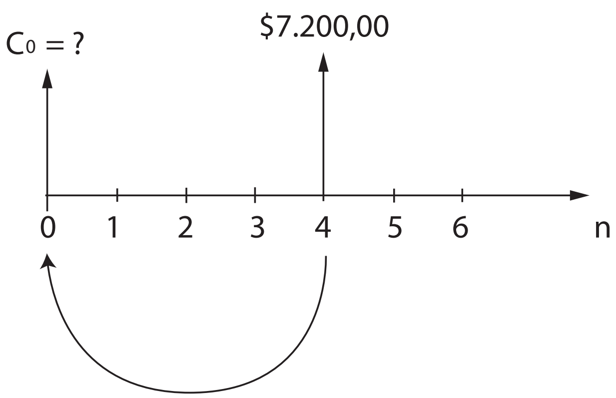
b) dois meses antes do vencimento;

c) um mês após o seu vencimento.

Resolução:

Como a taxa de juros é linear, estamos diante do regime de capitalização simples. Além disso, o problema não especifica o tipo de desconto. Logo, usaremos o desconto racional.

a) Para a data de hoje, estamos deslocando o capital para o passado. Assim, o problema nos dá o valor nominal e vamos encontrar o valor atual.

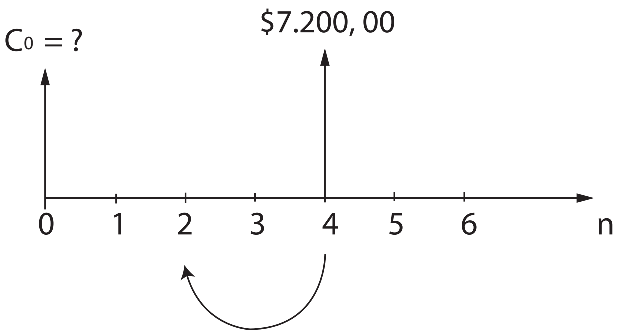


$$C_0=\frac{7.200}{[1+\frac{0,312}{12}(4)]}$$

$$C_0=\frac{7.200}{1,104}$$

$$C_0=\$6.521,74$$

b) Analogamente, para dois meses antes do vencimento, estamos deslocando o capital para o passado. Então,

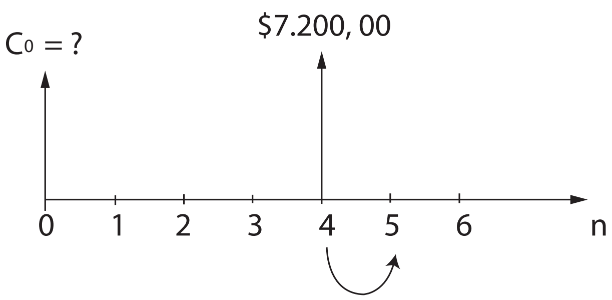


$$C_2 = \frac{7.200}{[1 + \frac{0,312}{12}(2)]}$$

$$C_2 = \frac{7.200}{1,052}$$

$$C_2 = \$6.844,74$$

c) Para um mês depois do vencimento, estamos deslocando o capital para o futuro. Portanto, o problema nos dá o valor atual e vamos encontrar o valor nominal.



$$C_5 = 7.200[1 + \frac{0,312}{12}(1)]$$

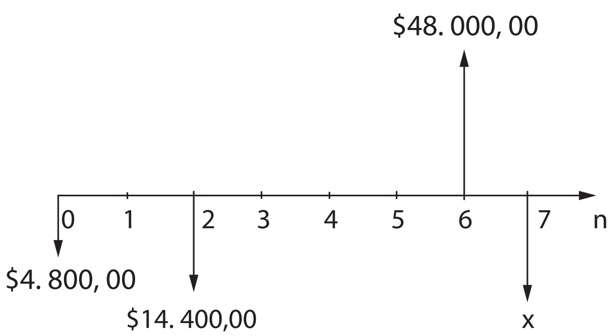
$$C_5 = \$7.387,20$$

Exemplo: Uma dívida no valor de vence daqui a seis meses. O devedor pretende resgatar a dívida pagando hoje, de hoje a dois meses, e o restante um mês após a data de vencimento. Sendo o momento deste último pagamento definido como a data focal da operação, e sabendo-se ainda que é de ao ano a taxa linear de juros adotada nessa operação, determinar o valor do último pagamento, se for adotado o critério do:

a) desconto racional;

b) desconto comercial.

Resolução:



No fluxo acima, a seta para cima representa o conjunto do capital da dívida original e as setas para baixo representam o conjunto de capitais da nova proposta de pagamento. Para que não ocorra prejuízo para nenhuma das partes, é necessário que os dois conjuntos sejam equivalentes. Dois ou mais capitais com vencimentos em datas diferentes são equivalentes, em uma data focal, quando a soma dos seus valores nessa data é o mesmo valor. No exemplo, a data focal é $n = 7$.

Na capitalização simples, as taxas equivalentes são proporcionais. Logo,

$$34{,}8\%\ ao\ ano = \frac{34{,}8\%}{12}\ ao\ mês = 2{,}9\%\ ao\ mês$$

a) No desconto racional simples, sabemos que

$$FV = PV(1 + d_r n)$$

Assim, a equação de equivalência será dada por

$$48.000[(1 + 0{,}029(1)] = 4.800[(1 + 0{,}029(7)] + 14.000[(1 + 0{,}029(5)] + x$$

$$49.392 = 5.774{,}40 + 16.030 + x$$

$$49.392 = 21.804{,}40 + x$$

$$x = \$27.587{,}60$$

b) No desconto comercial simples

$$PV = FV(1 - d_c n)$$

Portanto, a equação de equivalência será dada por

$$\frac{48.000}{[(1 - 0{,}029(1)]} = \frac{4.800}{[(1 - 0{,}029(7)]} + \frac{14.000}{[(1 - 0{,}029(5)]} + x$$

$$x = \$27.036{,}72$$

Sabendo um pouco mais

A definição da data focal, em problemas de substituição de pagamentos no regime de juros simples, deve ser decidida pelas partes.

Observação: Na equivalência de capitais a juros simples, o saldo se altera quando a data focal é modificada. Isso ocorre porque não é aceito o fracionamento dos prazos. Refazendo a letra a) do exemplo anterior considerando a data focal como $n = 0$, segue que

$$\frac{48.000}{[(1+0{,}029(6)]} = 4.800 + \frac{14.000}{[(1+0{,}029(2)]} + \frac{x}{[(1+0{,}029(7)]}$$

$$\frac{48.000}{1{,}174} = 4.800 + \frac{14.000}{1{,}058} + \frac{x}{1{,}203}$$

$$x = \frac{22.853{,}35}{0{,}831255}$$

$$x = \$27.492{,}57$$

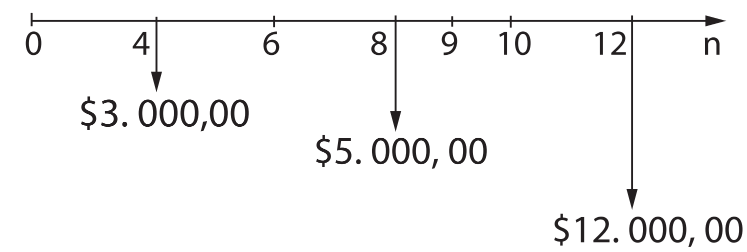
Exemplo: Um empresário tem os seguintes compromissos a pagar

- $3.000,00 daqui a 4 meses;
- $5.000,00 daqui a 8 meses;
- $12.000,00 daqui a 12 meses.

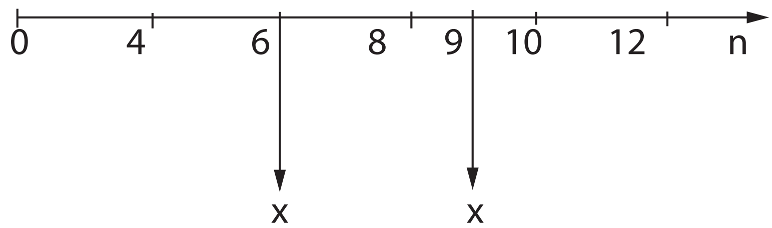
O empresário propõe trocar esses débitos por dois pagamentos iguais, um para daqui a 6 meses e outro para daqui a 9 meses. Considerando a taxa de juros simples de 5% a.m. e a data focal 270º no dia, calcular o valor de cada pagamento.

Resolução:

Antes



Depois



No primeiro fluxo acima, as setas para baixo representam a forma de pagamento do compromisso do empresário. Já no segundo fluxo, representam como ele se propõe a pagar. Como a data focal é $n = 9$, a equação de equivalência será dada por

$$3.000[(1+0{,}05(5)] + 5.000[(1+0{,}05(1)] + \frac{12.000}{[1-0{,}05(3)]} = x[(1+0{,}05(3)] + x$$

$$1{,}15x + x = 3.750 + 5.250 + 10.434{,}78$$

$$2{,}15x = 19.434{,}78$$

$$x = \$9.039{,}43$$

1.5.2 - Equivalência na Capitalização Composta

Considere dois conjuntos de capitais, como na tabela abaixo, referidos a uma mesma taxa de juros compostos i, com seus respectivos prazos contados a partir da mesma data de origem.

1º Conjunto		2º Conjunto	
Capital	Data de Vencimento	Capital	Data de Vencimento
C_1	m_1	C'_1	m'_1
C_2	m_2	C'_2	m'_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
C_n	m_n	C'_p	m'_p

Esses dois conjuntos de capitais são equivalentes considerando a capitalização composta, desconto racional e fixada uma data focal. No nosso caso, considerando a data zero como data focal, se

$$\frac{C_1}{(1+i)^{m_1}} + \frac{C_2}{(1+i)^{m_2}} + \cdots + \frac{C_n}{(1+i)^{m_n}} = \frac{C'_1}{(1+i)^{m'_1}} + \frac{C'_2}{(1+i)^{m'_2}} + \cdots + \frac{C'_p}{(1+i)^{m'_p}}$$

Já considerando a capitalização composta, o desconto comercial e fixando a data zero como data focal, temos que

$$C_1(1-i)^{m_1} + C_2(1-i)^{m_2} + \cdots + C_n(1-i)^{m_n} =$$
$$= C'_1(1-i)^{m'_1} + C'_2(1-i)^{m'_2} + \cdots + C'_n(1-i)^{m'_j}$$

Atenção!

No Regime de Capitalização Composta, a solução do problema não depende da escolha da data focal.

Exemplo: Uma pessoa tem uma nota promissória a receber com valor de $15.000,00, que vencerá em 2 anos. Além disso, possui R$20.0000,00 hoje, que irá aplicar à taxa de ao 2% mês, durante 2 anos. Considerando que o custo de oportunidade do capital hoje é de 2% ao mês, pergunta-se:

a) quanto possui hoje?

b) quanto possuirá daqui a um ano?

c) quanto possuirá daqui a dois anos?

Resolução:

Como o problema não especifica o tipo de capitalização e de desconto, os juros serão compostos e o desconto será racional.

Considere que é a quantia na data zero, é quantia na data e é a quantia na data . Desta forma, resulta que

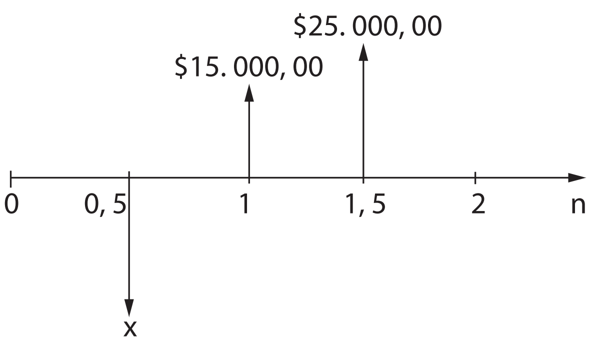
a) $x = 20.000 + \dfrac{15.000}{(1+0{,}02)^{24}} = \$29.325{,}82$

b) $y = 20.000(1+0{,}02)^{12} + \frac{15.000}{(1+0{,}02)^{12}} = \$37.192{,}23$

c) $z = 20.000(1+0{,}02)^{24} + 15.000 = \$47.168{,}74$

Exemplo: Uma financeira oferece a um cliente dois títulos, vencendo o primeiro em 1 ano, no valor de $15.000,00 e o segundo em 1 ano e meio, no valor de $25.000,00. O cliente aceita assinando uma Nota Promissória, com vencimento para 6 meses. Sabendo-se que a taxa de 30% juros considerada na operação foi de ao ano, qual é o valor da Nota Promissória em seu vencimento?

Resolução:



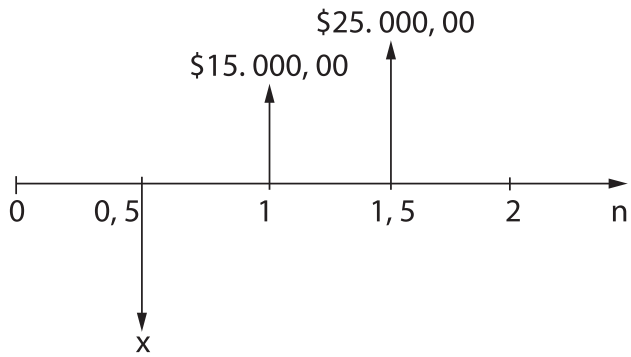
$$x = \frac{15.000}{(1+0{,}3)^{0{,}5}} + \frac{25.000}{(1+0{,}3)^{1}}$$

$$x = \frac{15.000}{1{,}140175} + \frac{25.000}{1{,}3}$$

$$x = \$32.386{,}64$$

Exemplo: Uma pessoa contraiu uma dívida, comprometendo-se a saldá-la em dois pagamentos: o primeiro de \$2.500,00 e o segundo, seis meses após o primeiro, de \$3.500,00. Contudo, no vencimento da primeira parcela, não dispondo de recursos, o devedor propôs adiamento de sua dívida. O esquema apresentado foi: pagamento de \$4.000,00 daqui a três meses e o saldo em nove meses. Se a taxa de juros considerada foi 2,5% de ao mês, qual é o saldo restante, sendo adotados os descontos racional e comercial?

Resolução:



a) No desconto racional composto, sabemos que

$$FV = PV(1 + d_r)^n$$

Considerando a data focal $n = 9$, a equação de equivalência de capitais é dada por:

$$4.000(1 + 0{,}025)^6 + x = 2.500(1 + 0{,}025)^9 + 3.500(1 + 0{,}025)^3$$

$$x = \$2.252{,}50$$

b) No desconto comercial composto, sabemos que

$$PV = FV(1 - d_c)^n$$

Considerando a data focal $n = 9$, a equação de equivalência de capitais é dada por:

$$\frac{4.000}{(1 - 0{,}025)^6} + x = \frac{2.500}{(1 - 0{,}025)^9} + \frac{3.500}{(1 - 0{,}025)^3}$$

$$x = \$1.496{,}00$$

Síntese da Unidade

1. Regimes de Capitalização:

- Simples: $M = C(1+in)$ e $J = Cin$.
- Composta: $M = C(1 + i)^n$.
- Mista ou Convenção Linear: utilizamos a capitalização composta na parte inteira e a capitalização simples para a não inteira.

2. Estudo das Taxas de Juros:

- **Taxas Proporcionais:** $\frac{i_1}{n_1} = \frac{i_2}{n_2}$;
- **Taxas Equivalentes:**

a) Na Capitalização Simples:

$$i_a = 2i_s = 4i_t = 6i_b = 12i_m = 360i_d$$

b) Na Capitalização Composta:

$$(1 + i_a) = (1 + i_s)^2 = (1 + i_t)^4 = (1 + i_b)^6 = (1 + i_m)^{12} = (1 + i_d)^{360}$$

- **Taxa Nominal:** é aquela que está definida em período de tempo diferente do período de capitalização.
- **Taxa Efetiva** é aquela utilizada no cálculo dos juros. A Taxa Efetiva usada na operação é a proporcional à Taxa Nominal, sendo adquirida através da divisão da taxa pelo número de capitalizações para um período da taxa nominal.
- **Taxas Resultantes:** $i_r = (1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)\ldots(1 + i_k) - 1$
- **Taxa Aparente (i), Taxa Real (r) e Taxa de Inflação (j):** $r = \frac{i - j}{(1 + j)}$

3. Desconto na Capitalização Simples:

- **Desconto Racional Simples:** $FV = PV(1 + d_r n)$ e $D = F.V - PV$.
- **Desconto Comercial Simples:** $PV = FV(1 - d_c n)$ e $D = FV - PV$.
- **Taxa Efetiva da operação:** $i = \frac{D}{PV}$
- **Desconto Comercial Bancário:** $PV = FV(1 - d_c n - h - IOF.n)$ e $D = FV - PV$.

4. Desconto na Capitalização Composta:

- **Desconto Racional Composto:** $FV = PV(1 + d_r)^n$ e $D = FV - PV$.
- **Desconto Comercial Composto:** $PV = FV(1 - d_c)n$ e $D = FV - PV$.
- **Relação entre as taxas de desconto racional e comercial**:

$$(1 + d_r)^n \, (1 - d_c)^n = 1$$

5. Equivalência de Capitais: dependerá do critério de desconto a ser utilizado, racional ou comercial. Se o capital for deslocado para o futuro, o problema dará o valor atual e devemos encontrar o valor nominal. Se o capital for deslocado para o passado, o problema dará o valor nominal e será necessário determinar o valor atual.

Exercícios de Fixação da Unidade

1. Represente um fluxo de caixa de uma compra a prazo cujo valor à vista é de $1.420,00 e será adquirido com entrada de 10% do preço à vista, seguido de 6 parcelas mensais iguais a R&250,00 cada.

2. Determine os montantes ao final de 12 dias, a partir de um principal de $1.000,00, no regime de juros simples, com as seguintes taxas de juros:

a) 8% ao mês;

Resp.: $1.032,00.

b) 0,4% ao dia.

Resp.: $1.048,00.

3. Uma empresa utilizou $4.000,00 do seu limite do cheque especial, do dia 15/06/2018 ao dia 21/06/2018, e pagou juros de $42,00. Qual foi a taxa mensal de juros dessa operação, considerando as capitalizações simples e composta?

Resp.: 4,50% e 4,58%.

4. Qual o montante produzido pela aplicação de $58.000,00, a uma taxa de juros compostos de 125% ao ano, pelo prazo de 220 dias?

Resp.: $1.194,05.

5. Determine o capital, ao final de 18 meses, resultante da aplicação de uma quantia de $1.000,00 à taxa exponencial de 3% ao trimestre.

Resp.: $1.194,05.

6. Uma pessoa recebe uma proposta de investir hoje uma quantia de $1.000,00 para receber $1.343,92 daqui a 10 meses. Calcular as taxas de juros compostos mensal e anual desse investimento.

Resp.: 3% ao mês e 42,58% ao ano.

7. Por quanto tempo devo aplicar a quantia de $245.966,88 para que, a juros compostos de 3% ao trimestre, eu resgate $500.000,00?

Resp.: 6 anos.

8. Um imóvel está sendo vendido por $60.000,00 à vista ou 30% de entrada mais uma parcela de $50.000,00 ao final de 6 meses. Sabendo-se que a taxa média de juros compostos para aplicações prefixadas gira em torno de 3,5% ao mês, com o imposto de renda já computado, determinar a melhor opção para o interessado que possua recursos disponíveis para comprá-lo à vista.

Resp.: A prazo.

9. Que taxa de juros mensal fará um capital triplicar em 1 ano,

a) no regime de capitalização composta?

Resp.: ~ 9,59% ao mês.

b) no regime de capitalização simples?

Resp.:~ 16,67% ao mês.

10. Em quanto tempo um capital, aplicado à taxa de 5% ao mês, duplica seu valor,

a) no regime de capitalização composta?

Resp.: 14,21 meses.

b) no regime de capitalização simples?

Resp.: 20 meses.

11. Um capital de $1.000,00 é emprestado a uma taxa de juros de 18% ao ano, pelo prazo de 2 anos e 4 meses. Calcule o montante, utilizando a convenção linear.

Resp.: $1.475,94.

12. Qual o valor futuro de uma quantia de $2.000,00, emprestado por 1 ano e 8 meses, à taxa de 8% ao semestre, considerando a capitalização mista.

Resp.: $2.586,61..

13. A aplicação de um capital, à taxa de 10% ao ano, pela convenção exponencial, gerou um montante de $1.689,12 ao final de 5 anos e 6 meses. Calcule o valor dos juros

Resp.: $689,12..

14. Qual o valor do capital, que aplicado à taxa exponencial de 15% ao trimestre, durante 21 dias, produziu um montante de $6.000,00?

Resp.: $5.807,49 .

15. Uma aplicação de \$280.000,00 proporcionou um rendimento de \$120.000,00 no final de 202 dias. Determine:

a) a taxa diária de juros compostos da operação;

Resp.: a) 0,17673% ao dia.

b) as taxas mensal, trimestral e anual equivalentes.

Resp.: b) 5,44% a.m.,17,22% a.t., 88,83% a.a.

16. Se uma instituição financeira cobra 65% ao ano de juros compostos numa operação, quanto cobrará para uma operação em 183 dias?

Resp.: 28,99%.

17. Qual o montante de uma aplicação de \$4.000,00 durante 91 dias, a uma taxa nominal de 60% ao ano, capitalizada diariamente?

Resp.: \$4.654,50.

18. Numa venda a prazo, uma loja exige 30% do valor da mercadoria como entrada e o restante a ser liquidado em 3 meses, com o acréscimo de 10% do valor da mercadoria a título de despesas administrativas. Qual a taxa de juros compostos anual dessa loja?

Resp.: 70,6% a.a.

19. Um banco propõe a um cliente a taxa de juros de 40% ao ano, sendo a capitalização anual. O cliente, entretanto, opta pelo financiamento em outro banco, com taxa de 36,5% ao ano e capitalização diária. O cliente fez a melhor escolha?

Resp.: Não, pois a taxa efetiva anual paga foi de 44,02%.

20. Um capital de \$1.000,00 é emprestado a uma taxa de juros de 24% ao ano, capitalizados trimestralmente, pelo prazo de 2 anos e 4 meses. Determine o montante desse empréstimo considerando a convenção linear.

Resp.: \$1.723,27.

21. Dado um capital de \$900,00, determinar o valor futuro, adotando a convenção exponencial e considerando a taxa de 24% ao ano, com capitalização semestral, no prazo de 2 anos e 2 meses.

Resp.: \$1.470,69.

22. Alguém compra um aparelho pagando $400,00 de entrada mais uma prestação mensal de $200,00. Sabendo-se que a taxa de juros exponencial usada foi de 25% ao ano, quanto custaria o aparelho à vista?

Resp.: $596,32.

23. Um capital foi aplicado da seguinte forma: inicialmente durante um trimestre, rendendo 10% nesse período; em seguida por um bimestre com rendimento de 6% no período; e, finalmente, por mais um mês com rendimento mensal de 1,5%. Calcular a taxa de juros semestral da operação.

Resp.: 18,35% ao semestre.

24. Um capital de $4.000,00 foi aplicado por 12 meses. Nos primeiros 3 meses à taxa de 24% ao ano, capitalizada mensalmente e, nos meses restantes, à taxa de 36% ao semestre, capitalizada trimestralmente. Calcular a taxa efetiva anual e o rendimento da aplicação.

Resp.: 74,36% ao ano e $2.974,39.

25. Um capital de $1.000,00, aplicado por um certo prazo, rende juros de $340,10. Caso o mesmo capital fosse aplicado por mais 4 meses, mantendo-se a mesma taxa, o juro obtido seria de $628,90. Determine a taxa de juros mensal da operação.

Resp.: 5% ao mês.

26. Um capital foi aplicado, por um ano, à taxa de juros de 22% ao ano. No mesmo período, a taxa de inflação foi de 12%. Qual a taxa real de juros do período?

Resp.: 8,93% a. a.

27. Um título, com valor de face igual a $1.000,00, será descontado 2 meses antes do vencimento. Sabendo-se que a taxa de desconto simples racional é de 4% ao mês, calcule o desconto e o valor descontado.

Resp.: $74,07 e $925,93.

28. Determinar o valor nominal de um título que, descontado 250 dias antes do vencimento, à taxa de desconto simples comercial de 37% ao ano, proporcionou um valor atual de $928,82.

Resp.: $1.250,00.

29. O desconto comercial de uma duplicata no valor de \$22.000,00, com vencimento em 4 meses e 12 dias, gerou um crédito de \$19.822,00. Determinar a taxa anual de desconto.

Resp.: 27% ao ano.

30. Uma duplicata no valor de \$20.000,00 foi descontada hoje à taxa de 28% ao ano. Se o desconto comercial foi de \$3.733,33, quantos dias faltam para o seu vencimento?

Resp.: 240 dias.

31. Se o valor de face de um título é igual a 15 vezes o desconto comercial, considerando uma taxa de desconto de 30% ao ano, qual o prazo de antecipação em dias?

Resp.: 80 dias.

32. Uma pessoa tomou emprestado \$6.000,00 para pagar em um ano, com taxa de juros compostos de 30% ao ano. Três meses antes do vencimento do empréstimo essa pessoa resolveu pagar a dívida, propondo um desconto comercial à taxa de 34% ao ano. Qual o valor líquido que o devedor se propõe a pagar?

Resp.: \$7.137,00.

33. Se uma instituição financeira deseja ganhar efetivamente 36% ao ano de juros compostos, que taxa de desconto comercial simples anual deverá aplicar para operações com prazo de 3 meses?

Resp.: 29,6% ao ano.

34. João possui um título com valor nominal de \$23.000,00 e vencimento em 3 meses e propõe vendê-lo a Pedro. Quanto Pedro oferecerá pelo título, se quer ganhar uma taxa exponencial de juros de 39,5% ao ano? Qual a taxa de desconto comercial simples anual dessa operação?

Resp.: \$21.163,34 e 31,94% ao ano.

35. Uma empresa desconta uma duplicata no valor de \$25.000,00, com 72 dias de prazo até o vencimento. Sabendo-se que a taxa de desconto comercial é de 6,2% ao mês, calcular o valor a ser creditado na conta da empresa e a taxa mensal de juros compostos utilizada na operação.

Resp.: \$21.280,00 e 6,94% ao mês.

36. No desconto de um a duplicata no valor de \$7.200,00 e vencimento para 7 meses, o banco cobra uma taxa de desconto comercial de 24% ao ano e uma taxa de serviços de 0,05%. Determinar o valor líquido recebido e a taxa efetiva mensal de juros compostos da operação.

Resp.: \$6.188,40 e 2,19% ao mês.

37. Um título, com valor nominal \$10.000,00 e vencimento em 13/06/2018, foi descontado no dia 05/03/2018. Considerando o valor descontado igual a \$9.100,00 e taxa de serviço bancário de 2%, qual a taxa de desconto anual adotada?

Resp.: 25,2% ao ano.

38. Aplicando uma taxa de desconto racional simples de 20% ao ano, um título sofreu um desconto de \$250,00, três meses antes do vencimento. Caso fosse descontado comercialmente, mantendo-se as mesmas condições, qual seria o valor do desconto?

Resp.: \$262,50.

39. Necessitando de capital de giro, um comerciante pode descontar comercialmente uma duplicata, com vencimento para daqui a 4 meses, a uma taxa de 34% ao ano, pagando uma taxa de serviços bancários de 0,5% e IOF anual de 1,8% aplicado sobre o valor nominal. Desse modo, receberá um valor descontado de \$13.135,00. Outra alternativa para levantar recursos é tomar um empréstimo neste valor, pelo mesmo prazo, a uma taxa de juro exponencial mensal de 4%. Qual a melhor opção para o comerciante?

Resp.: descontar a duplicata.

40. Um comerciante tem duas opções para conseguir recursos junto a um banco. A primeira é descontar comercialmente uma duplicata, com vencimento em 60 dias, a uma taxa de 3,8% ao mês, pagando uma taxa de serviços bancários de 0,4% e IOF anual de 1,6% aplicado sobre o valor nominal. A segunda opção é tomar um empréstimo, no mesmo prazo, a uma taxa de juro exponencial mensal de 4,2%. Em qual das duas operações a taxa de juros é melhor para o comerciante?

Resp.: tomar o empréstimo.

41. Ana tomou um empréstimo no valor de \$6.000,00 para pagar no prazo de 3 meses, a uma taxa de juros de 6,12% no período. Passados 2 meses, resolveu quitar a dívida e nesta época foi cobrada uma taxa exponencial mensal 10% menor que a taxa exponencial mensal do empréstimo. Calcule o valor pago para quitar a dívida.

Resp.: \$6.254,62.

42. Uma pessoa tomou emprestada certa quantia à taxa exponencial de 28,8% ao ano e os juros previstos eram de \$648,00. A dívida foi saldada 2 meses antes do seu vencimento, pelo valor de \$2.061,42. Sabendo-se que nesta data a taxa de juros compostos de mercado era de 25,2% ao ano, determine o valor do empréstimo e o prazo inicial.

Resp.: \$1.492,10; 17 meses e 3 dias.

43. Um fornecedor oferece 3 meses de prazo em suas vendas. O cliente que optar pelo pagamento à vista receberá um desconto de 10% sobre o valor nominal. Que taxa de juros compostos mensal está sendo cobrada?

Resp.: 3,57% ao mês.

44. Um desconto de 20% para pagamento à vista de um produto, cujo preço é dado para pagamento em 4 meses, corresponde a que taxa efetiva de juros no período?

Resp.: 25%.

45. Determine a que taxa mensal devem ser descontados comercialmente 3 títulos, no valor de \$6.000,00 cada um, com vencimentos para 30, 60 e 90 dias, para que se tenha um valor atual global de \$16.524,00.

Resp.: 4,1% ao mês.

46. Calcular o valor líquido correspondente ao desconto bancário de 12 títulos, no valor de \$1.680,00 cada um, com vencimentos mensais, o primeiro em 30 dias, sendo a taxa de desconto de 2,5% ao mês.

Resp.: \$16.884,00.

47. Um título no valor nominal de \$8.500,00, com vencimento para 5 meses, é trocado por outro de \$7.934,84, com vencimento para 3 meses. Sabendo-se que a taxa de juros compostos do mercado é de 3,5% a.m., pergunta-se: a substituição foi vantajosa?

Resp.: Não, títulos equivalentes.

48. João irá receber \$6.600,00 dentro de 1 ano, como parte de seus direitos na venda de um barco. Contudo, necessitando de dinheiro, transfere seus direitos a um amigo que os compra, entregando-lhe uma Nota Promissória no valor de \$6.000,00, com vencimento para 6 meses. Considerando uma taxa exponencial de 20% ao ano, João fez um bom negócio?

Resp.: Não.

49. A que taxa anual de juros, o capital de $2.000,00 hoje é equivalente a $2.300,00 daqui a 1 ano?

Resp.: 15% ao ano.

50. Uma pessoa tomou emprestado $50.000,00 para pagamento no prazo de 3 meses a juros compostos de 6% ao mês e $15.000,00 para pagamento no prazo de 9 meses a juros compostos de 8% ao mês. Se a taxa corrente do mercado é de 10% ao mês, qual o pagamento único efetuado ao fim de 6 meses que liquidaria seus débitos?

Resp.: $101.790,30.

51. Uma empresa comprou uma máquina nas seguintes condições: $2.000,00 três meses após a compra e mais 2 prestações mensais no valor de $1.500,00 cada uma. Sabendo-se que a taxa de juros exponencial mensal usada foi de 4%, qual o valor à vista da máquina?

Resp.: $4.293,09.

52. Uma pessoa deve 3 prestações de $3.500,00 a vencer daqui a 1 mês, 2 meses e 3 meses, respectivamente. Se resolvesse pagar a dívida com um único pagamento para 60 dias, qual seria o valor desse pagamento considerando uma taxa de juros compostos de 12% ao mês?

Resp.: $10.545,00.

53. Uma financeira oferece a um cliente dois títulos, vencendo o primeiro em 1 ano, no valor de $15.000,00, e o segundo em 1 ano e meio, no valor de $25.000,00. O cliente aceita assinando uma nota promissória, com vencimento para 6 meses. Sabendo-se que a taxa de juros efetiva considerada na operação foi de 30% ao ano, qual o valor nominal da nota promissória?

Resp.: $32.386,64.

54. Na compra de um bem, um cliente pagaria $1.500,00 de entrada, $1.000,00 em 30 dias e $500,00 em 60 dias. Propõe outra forma de pagamento, em três prestações iguais, nas mesmas datas anteriores. Calcular o valor das prestações, considerando a taxa de juros compostos de 5% ao mês.

Resp.: $1.016,25.

55. Oferta para venda de um aparelho de TV: à vista $399,00 ou duas vezes (1+1) de $210,79. Determinar os juros e a taxa de juros compostos mensal do pagamento a prazo.

Resp.: $22,58 e 12% ao mês.

56. Oferta para venda de aparelho de som: à vista \$780,00 ou dois cheques pré-datados de \$413,00 para 30 e 60 dias. Determinar a taxa de juros compostos mensal.

Resp.: 3,91% ao mês.

57. Na compra de um eletrodoméstico cujo valor à vista é de \$200,00, o comprador deve pagar uma entrada, seguida de duas prestações mensais iguais no valor de \$80,00 Qual deverá ser o valor da entrada se a loja cobra juros compostos de 5% ao mês?

Resp.: \$51,25.

58. O valor da compra de um bem à vista é \$20.000,00. Para pagamento a prazo, o valor da compra tem um acréscimo de 4%, devendo o comprador pagar uma entrada que representa 2% deste valor majorado, mais 2 prestações mensais iguais no valor de \$10.580,00 cada uma. Qual a taxa exponencial mensal cobrada pela loja?

Resp. 5,32% ao mês.

59. Uma compra pode ser paga à vista por \$1.400,00 ou financiada por meio de uma entrada de 30% do valor à vista mais dois pagamentos mensais, sendo o segundo 50% maior que o primeiro. Sabendo-se que o início dos pagamentos será no quarto mês e que a taxa de juros efetiva é de 5% ao mês, calcular o valor dos pagamentos mensais.

Resp.: \$490,49 e \$735,74.

Ilustração: Marcone da Silva

UNIDADE 2 - Rendas Certas

Renda é todo valor utilizado sucessivamente para compor um capital ou pagar uma dívida. O objetivo de constituir um capital em uma data futura leva ao processo de capitalização. Caso contrário, quando queremos pagar uma dívida, temos um processo de amortização. Pode ocorrer também o caso em que tenhamos realizado o pagamento pelo uso, sem que tenhamos amortização: é o caso dos aluguéis.

Estas situações caracterizam a existência de rendas, que podem ser de dois tipos:

1. **Rendas Certas ou Determinísticas:** Define-se anuidade, renda certa ou série, a uma sucessão de pagamentos ou recebimentos exigíveis em épocas pré-determinadas, destinada a extinguir uma dívida ou constituir um capital.

2. **Rendas Aleatórias ou Probabilísticas:** Os valores e/ou as datas de pagamentos ou de recebimentos podem ser variáveis aleatórias. É o que ocorre, por exemplo, com os seguros de vida: os valores de pagamentos (mensalidades) são certos, sendo aleatório o valor do seguro a receber e a data de recebimento. Rendas com essas características são estudadas pela Matemática Atuarial.

As rendas certas são estudadas pela Matemática Financeira. Assim, neste módulo, será abordado apenas este tipo de renda.

Definições Importantes

- Chamamos de renda certa, de série de pagamentos ou recebimentos, série de prestações ou anuidades, toda sequência finita ou infinita de pagamentos ou recebimentos em datas previamente estipuladas;

- Cada um destes pagamentos ou recebimentos, referidos a uma mesma taxa de juros compostos, será chamado de termo da série ou termo da anuidade;

- O intervalo de tempo entre dois termos chama-se período, e a soma dos períodos define a duração da série de pagamentos ou anuidades;
- O valor atual ou valor presente de uma série de pagamentos ou anuidades é a soma dos valores atuais dos seus termos, soma esta realizada para uma mesma data e à mesma taxa de juros compostos;
- Analogamente, o montante ou valor futuro de uma série de pagamentos ou anuidades é a soma dos montantes ou valores futuros de seus termos, consideradas uma dada taxa de juros compostos e uma data.

Classificação das Séries

Quanto à periodicidade:

- **Periódica:** se todos os períodos são iguais;
- **Não periódica:** se os períodos não são iguais entre si.

Quanto ao prazo:

- **Temporárias:** quando a duração for limitada;
- **Perpétuas:** quando a duração for ilimitada.

Quanto ao valor dos termos:

- **Uniforme ou Constante:** se todos os termos são iguais;
- **Variável:** se os termos não são iguais entre si.

Quanto à forma de pagamento ou recebimento:

- **Imediatas:** quando os termos são exigíveis a partir do primeiro período.

  1. **Postecipadas ou Vencidas:** quando os termos ocorrerem ao final de cada período;

  2. **Antecipadas:** quando os termos ocorrerem no início de cada período;

- **Diferidas:** se os termos forem exigíveis a partir de uma data que não seja o primeiro período e a este prazo damos o nome de prazo de diferimento ou prazo de carência.

  1. **Postecipadas ou Vencidas:** se os termos são exigíveis no fim dos períodos;

  2. **Antecipadas:** se os termos são exigíveis no início dos períodos.

2.1 - Séries Periódicas Uniformes

Notações que serão adotadas:

PV: Valor presente, capital no dia de hoje (principal);

FV: Valor futuro, capital no fim do período n (montante);

i: Taxa de juros por período de capitalização;

n: Número de períodos de capitalização (número de pagamentos);

R: Cada um dos termos da série de pagamento ou recebimento.

2.1.1 - Série Uniforme Postecipada

Nas séries uniformes com termos postecipados, os pagamentos ou recebimentos são efetuados no fim de cada intervalo de tempo a que se refere a taxa de juros considerada. Segue abaixo o fluxo de caixa desse tipo de operação.

Fator de Acumulação de Capitais

Vamos determinar o montante *FV* a partir da série de pagamentos abaixo.

Observe que

$$FV = R(1 + i)^{(n-1)} + R(1 + i)^{(n-2)} + R(1 + i)^{(n-3)} + \ldots + R(1+i)^{1} + R$$

Colocando-se *R* em evidência e invertendo-se a ordem das parcelas, segue que:

$$FV = R[1+ (1 + i)^{1} + \ldots + (1 + i)^{(n-3)} + (1 + i)^{(n-2)} + (1 + i)^{(n-1)}]$$

O fator entre colchetes corresponde à soma dos primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $(1 + i)$.

Como esta soma é dada por $S_n = a_1 \frac{(1-q^n)}{(1-q)}$, sendo $a_1 = 1$ o primeiro termo e $q = (1 + i)$ a razão, temos que

$$FV = R\frac{[1-(1+i)^n]}{1-(1+i)}$$

$$FV = R\frac{[(1+i)^n - 1]}{i}$$

O fator $FRS(i,n) = \frac{[(1+i)^n - 1]}{i}$, denominado Fator de Acumulação de Capital, permite determinar o montante *FV*, sendo dado o valor de *R*, isto é:

$$FV = R.FRS(i,n)$$

O fator de acumulação de capital aparece na tabela anexa a este material, calculado para diversas taxas e prazos. Com o conhecimento deste fator, obtido através de uma tabela financeira, a solução torna-se muito mais simples.

Em alguns exemplos, vamos calcular utilizando a fórmula e a tabela financeira. Entretanto, com o avanço das calculadoras, já podemos fazer os cálculos sem precisar das tabelas financeiras. Os exercícios devem ser feitos com o auxílio da calculadora.

Sabendo um pouco mais

O conhecimento dos fatores e de suas respectivas tabelas é necessário, pois muitos concursos públicos fazem uso deles, devido ao fato de não se poder usar calculadoras nas provas.

Exemplo: Determine o montante que será obtido no fim de dois anos, com 24 depósitos mensais iguais de $5.000,00, à taxa de 6% ao mês, no regime de juros compostos.

Resolução:

$$i = 0{,}06 \text{ ao mês.}$$

$$n = 2 \text{ anos}$$

$$R = \$5.000$$

$$FV = ?$$

Utilizando a Fórmula:

$$FV = R\frac{[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$FV = 5.000\frac{[(1+0{,}06)^{24} - 1]}{0{,}06}$$

$$FV = \$254.077{,}89$$

Utilizando a Tabela Financeira:

$$FV = R.FRS(i,n)$$

$$FV = 5.000.FRS(6\%, 24)$$

$$FV = 5.000.(50{,}815577)$$

$$FV = \$254.077{,}89$$

Fator de Formação de Capitais

Vamos determinar o valor do pagamento *R* capaz de formar o montante *FV* no fim do período *n*.

Partindo da fórmula $FV = R\frac{[(1+i)^n - 1]}{i}$ e isolando o valor de *R*, segue que

$$R = FV\frac{i}{[(1+i)^n - 1]}$$

O fator $FSR(i,n) = \frac{i}{[(1+i)^n - 1]}$ é chamado de Fator de Formação de Capital. Ele permite calcular o valor de *R*, sendo conhecido o valor de *FV*, isto é:

$$R = FV.FSR(i,n)$$

Exemplo: Quanto uma pessoa terá que aplicar mensalmente num "Fundo de Renda Fixa", durante um ano, para que possa resgatar \$20.000,00 ao fim deste prazo, sabendo que o Fundo proporciona um rendimento de 6% ao mês?

Resolução:

$$i = 0{,}06 \text{ } ao \text{ } mês.$$

$$n = 1 \text{ } ano = 12 \text{ } meses$$

$$FV = \$20.000$$

$$R = ?$$

Utilizando a Fórmula:

$$R = FV\frac{i}{[(1+i)^n - 1]}$$

$$R = 20.000\frac{0{,}06}{[(1+0{,}06)^{12} - 1]}$$

$$R = \$1.185{,}54$$

Utilizando a Tabela Financeira:

$$R = FV.FSR(i,n)$$

$$R = 20.000.FSR(6\%, 12)$$

$$R = 20.000.(0{,}059277)$$

$$R = \$1.185{,}54$$

Fator de Valor Atual

Vamos determinar o valor presente *PV* que deve ser aplicado para que se possa retirar *R* em cada um dos n períodos subsequentes.

Partindo da expressão $FV = R\frac{[(1+i)^n - 1]}{i}$ e substituindo *FV* por $PV(1+i)^n$, resulta que

$$PV(1+i)^n = R\frac{[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$PV = R\frac{[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^n}$$

O fator $FRP(i,n) = \frac{[(1+i)^n-1]}{i(1+i)^n}$, denominado Fator de Valor Atual, permite calcular o valor atual *PV*, sendo conhecido o valor de *R*, isto é:

$$PV = R.FRP(i,n)$$

Observação: Considerando que

$$\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n} = \frac{\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n} - \frac{1}{(1+i)^n}}{\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

segue que

$$PV = R\frac{[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

Exemplo: Uma pessoa, possuidora de 10 títulos, com vencimentos mensais e sucessivos, sendo o vencimento do primeiro de hoje a 30 dias, vende estes títulos com desconto de 8% ao mês, no regime de juros compostos. Quanto apurou com a venda, se o valor nominal de cada título é de $2.500,00?

Resolução:

$i = 0{,}08\ ao\ mês.$ $n = 10\ meses$ $R = \$2.500$ $PV = ?$	Utilizando a Fórmula: $PV = R\frac{[1-(1+i)^{-n}]}{i}$ $PV = 2.500\frac{[1-(1+0{,}08)^{-10}]}{0{,}08}$ $PV = \$16.775{,}20$ Utilizando a Tabela Financeira: $PV = R.FRP(i,n)$ $PV = 2.500.FRP(8\%,10)$ $PV = 20.000.(6{,}710081)$ $PV = \$16.775{,}20$

Exemplo: Uma pessoa depositou $1.000,00 abrindo uma conta em uma instituição que paga 1,5% ao mês sobre o saldo credor. Em seguida, efetuou uma série de 24 depósitos mensais de $300,00, sendo que o primeiro foi feito 4 meses após a abertura da conta. Supondo que não seja efetuada nenhuma retirada, quanto terá 3 anos após a abertura da conta?

Resolução:

Vamos encontrar incialmente PV_1, valor atual dos 24 depósitos mensais de $300,00, na data $n = 3$:

$$PV_1 = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$PV_1 = 300\frac{1-(1+0{,}015)^{-24}}{0{,}015}$$

$$PV_1 = \$6.009{,}12$$

Agora, vamos encontrar o valor equivalente a este valor e o do depósito de $1.000,00, lembrando que 3 anos = 36 meses.

$$FV = 6.009{,}12(1+0{,}015)^{33} + 1.000(1+0{,}015)^{36}$$

$$FV = 11.530{,}92$$

Fator de Recuperação de Capitais

Vamos determinar a quantia *R* que deve ser retirada em cada período para que se recupere o investimento *PV*.

Considerando a fórmula $PV = R\frac{[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^n}$ e explicitando o valor de *R*, obtemos

$$R = PV\frac{i(1+i)^n}{[(1+i)^n - 1]}$$

O fator $FPR(i,n) = \frac{i(1+i)^n}{[(1+i)^n - 1]}$, denominado Fator de Recuperação de Capital, permite calcular o valor de *R*, sendo conhecido o valor de *PV*, isto é:

$$R = PV.FPR(i,n)$$

Observação: Usando $PV = R\frac{[1-(1+i)^{-n}]}{i}$, temos que

$$R = PV\frac{i}{[1-(1+i)^{-n}]}$$

Exemplo: Qual o valor da prestação mensal que amortiza, em 6 meses, uma dívida de $12.000,00 a juros compostos de 4% ao mês?

Resolução:

$$i = 0{,}04 \text{ ao mês}$$

$$n = 6 \text{ meses}$$

$$PV = \$12.000$$

$$R = ?$$

Utilizando a Fórmula:

$$R = PV\frac{i}{[1-(1+i)^{-n}]}$$

$$R = 12.000\frac{0{,}04}{[1-(1+0{,}04)^{-6}]}$$

$$R = \$2.289{,}14$$

Utilizando a Tabela Financeira:

$$R = PV.FPR(i,n)$$

$$R = PV.FPR(4\%,6)$$

$$R = 12.000.(0{,}190762)$$

$$R = \$2.289{,}14$$

2.1.2 - Série Uniforme Antecipada

Nas séries uniformes com termos antecipados, os pagamentos ou recebimentos são efetuados no início de cada intervalo de tempo a que se refere a taxa de juros considerada. Assim, a primeira prestação é sempre paga ou recebida no momento "zero", ou seja, na data do contrato, do empréstimo, do financiamento ou de qualquer outra operação que implique pagamentos ou recebimentos de prestações. Segue abaixo o fluxo de caixa desse tipo de operação.

Cálculo do montante *FV* sendo conhecido o valor de *R*

Vamos determinar a quantia *FV* acumulada no fim do período *n*, a uma taxa *i* de juros compostos, a partir de n parcelas iguais a *R*, de pagamentos antecipados.

$$FV = R(1+i)^n + R(1+i)^{(n-1)} + R(1+i)^{(n-2)} + \dots + R(1+i)^1$$

$$FV = R[(1+i)^1 + \dots + (1+i)^{(n-2)} + (1+i)^{(n-1)} + (1+i)^n]$$

O fator entre colchetes corresponde à soma dos primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $(1+i)$. Logo,

$$FV = R(1+i)\frac{[1-(1+i)^n]}{[1-(1+i)]}$$

$$FV = R(1+i)\frac{[(1+i)^n - 1]}{i}$$

Como $\frac{[(1+i)^n-1]}{i} = FRS(i,n)$ e $(1+i) = FPS(i,1)$, temos que

$$FV = R.FPS(i,1).FRS(i,n)$$

Exemplo: Qual o montante, no fim do décimo mês, resultante da aplicação de 10 parcelas mensais iguais e consecutivas de $5.000,00, à taxa de 4% ao mês, de juros compostos, sabendo-se que a primeira aplicação é feita no início do primeiro mês?

Resolução:

$$i = 0{,}04 \text{ ao mês.}$$

$$n = 10 \text{ meses}$$

$$R = \$5.000$$

$$FV = ?$$

Utilizando a Fórmula:

$$FV = R(1+i)\frac{[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$FV = 5.000(1+0{,}04)\frac{[(1+0{,}04)^{10} - 1]}{0{,}04}$$

$$FV = \$62.431{,}70$$

Utilizando a Tabela Financeira:

$$FV = R.FPS(i,1).FRS(i,n)$$

$$FV = 5.000.FPS(4\%,1).FRS(4\%,10)$$

$$FV = 5.000(1{,}040000)(12{,}00611)$$

$$FV = \$62.431{,}77$$

Cálculo do valor de *R* sendo conhecido o montante *FV*

Considerando a fórmula $FV = R(1+i)\frac{[(1+i)^n - 1]}{i}$ e isolando o valor de *R*, segue que

$$R = FV(1+i)^{-1}\frac{i}{[(1+i)^n - 1]}$$

Como $\frac{i}{[(1+i)^n - 1]} = FSR(i,n)$ e $(1+i)^{-1} = FSP(i,1)$, temos que

$$R = FV.FSP(i,1).FSR(i,n)$$

Exemplo: Quanto terei de aplicar mensalmente, a partir de hoje, para acumular, no final de 12 meses, um montante no valor de $30.000,00, sabendo-se que a taxa de juros compostos a ser firmada é de 3% ao mês e que as aplicações serão iguais e em número de 12?

Resolução:

$FV = \$30.000$

$i = 0{,}03 \; ao \; mês.$

$n = \; 12 \; meses$

$R = ?$

Utilizando a Fórmula:

$$R = FV(1+i)^{-1}\frac{i}{[(1+i)^n - 1]}$$

$$R = 30.000(1+0{,}03)^{-1}\frac{0{,}03}{[(1+0{,}03)^{12} - 1]}$$

$$R = \$2.052{,}29$$

Utilizando a Tabela Financeira:

$$R = FV.FSP(i,1).FSR(i,n)$$

$$R = 30.000.FSP(3\%,1).FSR(3\%,12)$$

$$R = 30.000(0{,}970874)(0{,}070462)$$

$$R = \$2.052{,}29$$

Cálculo do valor atual *PV* sendo conhecido o valor de *R*

Considerando a fórmula $FV = R(1+i)\frac{[(1+i)^n - 1]}{i}$ e substituindo o valor de *FV* por $PV(1+i)^n$, resulta que

$$PV(1+i)^n = R(1+i)\frac{[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$PV = R(1+i)\frac{[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^n}$$

Como $(1+i) = FPS(i,1)$ e $\frac{[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^n} = FRP(i,n)$, temos que

$$PV = R.FPS(i,1).FRP(i,n)$$

Observação: Novamente, considerando que

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

temos que

$$PV = R(1+i)\frac{[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

Exemplo: Um equipamento está sendo oferecido, no crediário, para pagamento em 8 prestações mensais iguais e consecutivas de $5.800,00. Sabendo-se que a taxa de juros compostos cobrada é de 10% ao mês e que a primeira prestação deve ser paga no ato da compra, determinar o preço à vista desse equipamento.

Resolução:

$$R = \$5.800$$

$$i = 0{,}1 \; ao \; mês.$$

$$n = 8 \; meses$$

$$PV = ?$$

Utilizando a Fórmula:

$$PV = R(1+i)\frac{[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

$$PV = 5.800(1+0{,}1)\frac{[1-(1+0{,}1)^{-8}]}{0{,}1}$$

$$PV = \$34.036{,}83$$

Utilizando a Tabela Financeira:

$$PV = R.FPS(i,1).FRP(i,n)$$

$$PV = 5.800.FPS(10\%,1).FRP(10\%,8)$$

$$PV = 5.800(1{,}100000)(5{,}334926)$$

$$PV = \$34.036{,}83$$

Cálculo do valor de *R* sendo conhecido o valor atual *PV*

Partindo da fórmula $PV = R(1+i)\frac{[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^n}$ e isolando o valor de *R*, temos que

$$R = PV(1+i)^{-1}\frac{i(1+i)^n}{[(1+i)^n - 1]}$$

Como $(1 + i)^{-1} = FSP(i,1)$ e $\frac{i(1+i)^n}{[(1+i)^n - 1]} = FPR(i,n)$, segue que

$$R = PV.FSP(i,1).FPR(i,n)$$

Observação: Analogamente, como

$$\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1} = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

temos que

$$R = PV(1+i)^{-1}\frac{i}{[1-(1+i)^{-n}]}$$

Exemplo: Um fogão, no valor de \$420,00, é financiado por uma loja, para pagamento em 12 prestações mensais iguais e consecutivas. Determinar o valor da prestação sabendo-se que a taxa de juros compostos cobrada é de 9,5% ao mês.

Resolução:

$$PV = \$420$$

$$i = 0{,}095 \ ao\ mês.$$

$$n = 12\ meses$$

$$R = ?$$

Utilizando a Fórmula:

$$R = PV(1+i)^{-1}\frac{i}{[1-(1+i)^{-n}]}$$

$$R = 420(1+0{,}095)^{-1}\frac{0{,}095}{[1-(1+0{,}095)^{-12}]}$$

$$R = \$54{,}92$$

Utilizando a Tabela Financeira:

$$R = PV.FSP(i,1).FPR(i,n)$$

$$R = 420.FSP(9{,}5\%,1).FPR(9{,}5\%,12)$$

$$R = 420(0{,}913242)(0{,}143188)$$

$$R = \$54{,}92$$

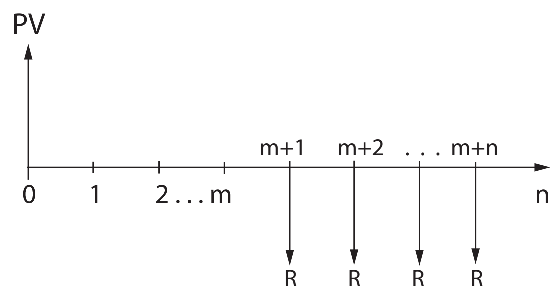
2.1.3 - Série Uniforme Diferida

Uma série é diferida ou com carência, quando o primeiro pagamento só ocorre depois de decorridos *m*, períodos de tempo a que se refere a taxa de juros considerada, com $m \geq 2$.

As séries diferidas envolvem apenas cálculos relativos ao valor atual, pois o montante é igual ao montante de uma série de pagamentos iguais com termos vencidos, uma vez que, durante o prazo de carência, não há pagamentos e capitalizações

Cálculo do valor atual *PV* sendo conhecido o valor de *R*

Considere o seguinte fluxo de caixa, de uma série com períodos de carência:



Para o cálculo do valor atual *PV* procede-se da seguinte forma:

1. Calcula-se, inicialmente, o valor de na data com a fórmula do valor atual de uma série uniforme postecipada, isto é:

$$(PV)_m = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

ou

$$(PV)_m = R.FRP(i,n)$$

2. Calcula-se o capital , na data 0, equivalente ao valor futuro , isto é:

$$PV = (PV)_m\ (1+i)^{-m}$$

ou

$$PV = (PV)_m\ FSP(i,m)$$

Substituindo o valor de $(PV)_m$, segue que

$$PV = R(1+i)^{-m}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

e

$$PV = R.FRP(i,n).FSP(i,m)$$

Exemplo: Calcular o valor atual de uma série de 10 pagamentos mensais iguais e consecutivos, de \$20.000,00, com carência de 3 meses, à taxa de 4,5% ao mês, no regime de juros compostos.

Resolução:

$$R = \$20.000$$
$$i = 0{,}045\ ao\ mês$$
$$n = 10\ meses$$
$$m = 3\ meses$$
$$PV = ?$$

Utilizando a Fórmula:

$$PV = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{-m}$$

$$PV = 20.000\frac{1-(1+0{,}045)^{-10}}{0{,}045}(1+0{,}045)^{-3}$$

$$PV = \$138.677{,}76$$

Utilizando a Tabela Financeira:

$$PV = R.FRP(i,n).FSP(i,m)$$

$$PV = 20.000.FRP(4{,}5\%,10).FSP(4{,}5\%,3)$$

$$PV = 20.000(7{,}912718)(0{,}876297)$$

$$PV = \$138.677{,}76$$

Cálculo do valor de R sendo conhecido o valor atual *PV*

Para o cálculo do valor de R procede-se da seguinte forma:

1. Inicialmente, calcula-se o valor de PV na data m, isto é:

$$(PV)_m = PV(1+i)^m$$

ou

$$(PV)_m = PV.FPS(i,m)$$

2. Calcula-se o valor de R correspondente ao valor $(PV)_m$, isto é:

$$R = (PV)_m \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

ou

$$R = (PV)_m.FPR(i,n)$$

Substituindo o valor de $(PV)_m$, resulta que

$$R = PV(1+i)^m \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

e

$$R = PV.FPS(i,m).FPR(i,n)$$

Exemplo: Um empréstimo de \$10.000,00 vai ser amortizado com 12 prestações mensais iguais, com 5 meses de carência. Calcular o valor das prestações à taxa de 4,5% ao mês, no regime de juros compostos.

Resolução:

$$PV = \$10.000$$
$$i = 0{,}045 \text{ ao mês.}$$
$$n = 12 \text{ meses}$$
$$m = 5 \text{ meses}$$
$$R = ?$$

Utilizando a Fórmula:

$$R = 10.000(1+0{,}045)^5 \frac{0{,}045}{1-(1+0{,}045)^{-12}}$$

$$R = \$1.366{,}64$$

Utilizando a Tabela Financeira:

$$R = \text{PV.FPS(i,m)}.FPR(i,n)$$

$$R = 10.000.\text{FPS}(4{,}5\%,5).FPR(4{,}5\%,12)$$

$$R = 10.000(1{,}246182)(0{,}109666)$$

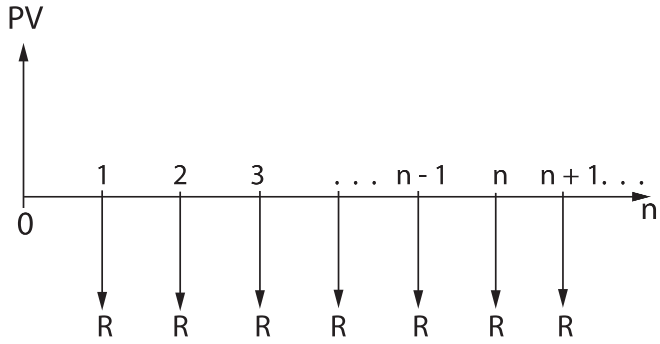
$$R = \$1.366{,}64$$

2.1.4 - Série Uniforme Infinita (Perpetuidade)

Se um investimento *PV* é feito à taxa *i* para gerar rendimentos *R* indefinidamente, temos o que se denomina perpetuidade.

Valor Atual de uma série perpétua

Considere uma série uniforme de pagamentos com pagamentos postecipados e com número infinito de termos.



$$PV = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + \dots + R(1+i)^{-(n-1)} + R(1+i)^{-n} + \dots$$

Como podemos observar, o valor atual da série é o limite da soma dos valores atuais de seus termos, quando o número destes tende ao infinito, isto é:

$$PV = \lim_{n\to\infty} R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

Considerando que

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = \frac{\dfrac{(1+i)^n}{(1+i)^n} - \dfrac{1}{(1+i)^n}}{\dfrac{i(1+i)^n}{(1+i)^n}} = \frac{1 - \dfrac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

segue que

$$PV = \lim_{n\to\infty} R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = \lim_{n\to\infty} R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{R}{i}$$

Portanto,

$$PV = \frac{R}{i}$$

Exemplo: Quanto devemos investir hoje para criar uma fundação que irá premiar, anualmente, o melhor aluno de matemática financeira de uma Instituição de Ensino com a quantia de $2.000,00? A fundação terá duração infinita e a taxa de juros compostos para este tipo de aplicação é de 10% ao ano.

Resolução:

$$R = \$2.000$$
$$i = 0{,}1 \ ao\ mês.$$
$$PV = ?$$

$$PV = \frac{R}{i}$$
$$PV = \frac{2.000}{0{,}1}$$
$$PV = \$20.000{,}00$$

Séries Temporárias Variáveis

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo: A juros nominais de 36% ao ano, encontre o tempo necessário para liquidar um financiamento de $840,00 por meio de prestações mensais de $120,00.

Resolução:

$$PV = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$
$$840 = 120\,\frac{1-(1+0{,}03)^{-n}}{0{,}03}$$
$$0{,}21 = 1-(1{,}03)^{-n}$$
$$(1{,}03)^{-n} = 0{,}79$$
$$\ln(1{,}03)^{-n} = \ln(0{,}79)$$
$$-n = \frac{\ln(0{,}79)}{\ln(1{,}03)}$$
$$n \approx 8 \text{ prestações}$$

Exemplo: A juros de 4% ao mês, encontre o número de prestações necessárias para liquidar um financiamento de \$6.500,00 através de prestações mensais de 319,00. Em seguida, encontre o valor da última prestação.

Resolução:

$$PV = R\frac{[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

$$6.500 = 319\frac{1-(1+0{,}04)^{-n}}{0{,}04}$$

$$0{,}815047 = 1-(1{,}04)^{-n}$$

$$(1{,}04)^{-n} = 0{,}184953$$

$$\ln(1{,}04)^{-n} = \ln 0{,}184953$$

$$-n = \frac{\ln 0{,}184953}{\ln(1{,}04)}$$

$$n \approx 43{,}02965$$

Como n não é um valor exato, vamos calcular o valor futuro majorado para $n = 44$ e o valor futuro real para $n = 44$.

$$FV_{majorado} = 319\frac{[(1+0{,}04)^{44}-1]}{0{,}04}$$

$$FV_{majorado} = \$36.816{,}70$$

$$FV_{real} = 6.500(1+0{,}04)^{44}$$

$$FV_{real} = \$36.507{,}35$$

Assim,

$$FV_{majorado} - FV_{real} = 36.816{,}70 - 36.507{,}35 = \$309{,}35$$

Esta diferença que devemos abater da parcela final. Logo,

$$R_{última} = 319 - 309{,}35 = \$9{,}65$$

Exemplo: Uma empresa contraiu uma dívida de \$50.000,00 para pagamento a juros bimestrais de 4%. Decorridos um trimestre, a empresa paga \$20.000 dessa dívida e combina liquidar o saldo em 10 prestações mensais. Qual o valor das prestações?

Resolução:

Primeiramente, vamos encontrar o valor \$50.000,00 depois de um trimestre, tirado o valor pago nesta data. Para isso, precisamos da taxa mensal.

$$(1+i_m)^2 = (1+0{,}04)^1$$

$$i_m = 1{,}9803\%\ ao\ mês$$

Daí,

$$PV = 50.000(1 + 0{,}019803)^3 - 20.000$$

$$PV = \$33.029{,}80$$

Agora, encontremos o valor das prestações.

$$33.029{,}80 = R\frac{[1-(1+0{,}019803)^{-10}]}{0{,}019803}$$

$$R = \$3.673{,}32$$

Síntese da Unidade

1. Série Uniforme Postecipada:

$$FV = R\frac{[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$PV = R\frac{[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

2. Série Uniforme Antecipada:

$$FV = R(1+i)\frac{[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$PV = R(1+i)\frac{[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

3. Série Uniforme Diferida:

$$PV = R(1+i)^{-m}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

4. Série Uniforme Infinita (Perpetuidade):

$$PV = \frac{R}{i}$$

Exercícios para Fixação da Unidade

1. Um empréstimo deve ser pago por meio de uma entrada no valor de $3.017,84 mais duas prestações mensais postecipadas. Sabendo-se que a segunda prestação representa 25% do valor do empréstimo e a primeira prestação é 10% maior que a segunda, calcular o valor do empréstimo, considerando uma taxa de juro nominal anual de 76,08%.

Resp.: $5.800,00.

2. Um financiamento no valor de $450.000,00 foi contratado a juros nominais de 20% ao ano, devendo ser amortizado em 12 prestações mensais iguais. Calcule o valor das prestações.

Resp.: $41.685,53.

3. Uma pessoa depositou a mesma quantia, a cada final de mês, durante 13 meses, em uma aplicação financeira que paga juros nominais de 24% ao ano. Sabendo-se que o total dos juros ganhos no período foi de $1.060,00, calcule o valor dos depósitos mensais.

Resp.: $318,13.

4. Uma pessoa deposita mensalmente $150,00 em uma conta remunerada que paga juros nominais de 26% ao ano. Qual o valor acumulado na data do vigésimo depósito?

Resp.: $3.705,71.

5. Um bem é vendido por $15.000,00 à vista. Pode ser adquirido também em prestações mensais de $912,28, com juros de 3% ao mês. Sabendo que as prestações vencem a partir do mês seguinte ao da compra, calcular o número de prestações e o valor da última prestação.

Resp.: 23 prestações e $R_{23} = 909,96$.

6. Para liquidar um financiamento no valor de $850,00 por meio de prestações mensais postecipadas de $118,00, a uma taxa de juros de 48% ao ano, determinar o número de prestações e o valor da última prestação.

Resp.: 9 prestações e $R_9 = 79,04$.

7. Nas vendas a prazo, uma loja de confecções exige como entrada 40% do valor à vista, e cobra juros de 5% ao mês. Uma pessoa fez compras nessa loja, pagou $1.200,00 de entrada e pagará o restante em 6 prestações mensais, sendo a 1ª prestação 30 dias após a compra. Determine o valor de cada prestação.

Resp.: $354,63.

8. Um clube vende títulos de sócio mediante uma entrada de $500,00 e 36 prestações mensais de $200,00. Para facilitar a venda, permite que o pagamento da 1ª prestação ocorra 4 meses após a compra. Qual é o valor do título à vista, se a taxa de juros é de 2,5% ao mês?

Resp.: $4.874,86.

9. Uma loja financia compras cobrando uma taxa de juros efetiva de 8% ao mês e oferece as seguintes opções de pagamento:

a) 12 parcelas mensais iguais postecipadas;

b) 15 parcelas mensais iguais, com entrada;

c) 20% do valor da compra de entrada e o restante em 8 parcelas mensais iguais, a primeira com vencimento em 90 dias. Se o valor da compra é de $3.200,00, determinar o valor de cada prestação.

Resp.: a) $424,62 b) $346,16 c) $519,61.

10. Quanto se deve aplicar hoje em um investimento de forma que se possa retirar $1000,00 no fim de todo mês, durante os próximos 20 meses, considerando uma taxa de juros nominal de 120% ao ano?

Resp.: $8 513,56.

11. Uma financeira cobra uma taxa de juros de 9% ao mês. Encontrar o valor atual de cada um dos empréstimos pagos da seguinte forma:

a) Dez prestações mensais de $450,00, sendo o vencimento da primeira daqui a um mês.

b) Cinco prestações trimestrais de $250,00, sendo o vencimento da primeira daqui a 2 meses.

c) Oito prestações mensais, as três primeiras de $200,00 e as demais de $350,00, sendo o vencimento da primeira em 3 meses.

Resp.: a) $2.887,95; b) $670,06; c) $1.310,91.

12. Calcular o valor das prestações mensais postecipadas iguais e consecutivas que liquidam um débito de $200.000,00 no prazo de 6 meses, sendo a taxa de juros efetiva de 1,8% ao mês para os 3 primeiros meses e de 2% para os demais.

Resp.: $35.531,86.

13. Uma pessoa deposita periodicamente $170,00 numa aplicação que remunera a uma taxa mensal de juros de 7,5%. Calcular o montante um período após o último depósito, considerando:

a) Doze prestações trimestrais;

Resp.: $10.905,29.

b) Cinco prestações semestrais.

Resp.: $3.744,88.

14. Quanto se deverá depositar no início de cada mês para que, ao final de 3 anos, não se processando nenhuma retirada, se tenha $60.000,00? Considerar que a instituição paga juros de 3,2% ao mês.

Resp.: $882,61.

15. Um indivíduo deseja obter $180.000,00 ao fim de 1 ano para comprar um apartamento e, para isso, faz um contrato com um banco, em que se compromete a depositar no início de cada mês, durante um ano, a quantia de $7.118,93, com rendimento acertado de 2,4% ao mês, iniciando o primeiro depósito hoje. Transcorrido 1 ano, o banco se compromete a financiar o saldo restante dos $180.000,00, à taxa de 4% ao mês, em 24 parcelas mensais iguais, vencendo a primeira na data do contrato. Calcular o valor da prestação mensal desse financiamento.

Resp.: $5.045,14.

16. Um executivo, pretendendo viajar durante 12 meses, resolve fazer 6 depósitos mensais iguais em uma aplicação, para que sua esposa possa efetuar 12 retiradas mensais de $5.000,00, durante o período de sua viagem. A primeira retirada ocorrerá 1 mês após o último depósito. Se a aplicação paga 3,5% ao mês, de quanto devem ser os depósitos?

Resp.: $7.376,42.

17. Uma imobiliária oferece, em lançamento, uma pequena chácara nas seguintes condições: entrada de $20.000,00, 36 prestações mensais de $1.000,00 e 6 prestações semestrais intermediárias de $4.000,00. Qual o preço à vista da chácara, se a taxa de juros do mercado é de 3% ao mês?

Resp.: $55.333,10.

18. Determinar o preço de um televisor que é vendido em 10 prestações iguais e mensais de $80,00, sendo a primeira prestação a ser paga 3 meses após a data da compra. Considere uma taxa de juros de 4% ao mês.

Resp.: $599,92.

19. Uma casa, cujo valor à vista é de $150.000,00, é vendida nas seguintes condições: entrada de $50.000,00 mais prestações mensais de $11.460,12, sendo o pagamento da primeira prestação 2 meses após a compra. Sabendo-se que a taxa de juros contatada é de 4,5% ao mês, qual o número de prestações?

Resp.: 12.

20. Considerando juros nominais de 36% ao ano, determinar o tempo necessário para liquidar um financiamento de $842,36 por meio de prestações mensais antecipadas de $120,00.

Resp.: 7 meses.

21. Uma pessoa resolveu aplicar ao final de cada mês a quantia de $800,00, durante 5 anos, a uma taxa de 3,55% ao mês. Além das aplicações mensais ela fará uma aplicação extra de $3.000,00, ao final de cada ano, aproveitando o 13° salário. Qual o valor do montante na data do 60º mês?

Resp.: $201.248,53.

22. Uma ponte tem um custo de construção de $30.000,00 e sua vida útil é de 10 anos. Desse modo, deve ser reformada a cada década, indefinidamente, a um custo de $15.000,00. Calcular seu custo total capitalizado à taxa efetiva de 1% ao mês.

Resp.: $36.520,64.

23. Uma universidade receberá uma doação à perpetuidade. O primeiro importe, no ato, no valor de $50.000,00, será aplicado na compra de livros e os seguintes, no valor de $10.000,00, a serem entregues ao final de cada ano, que serão usados na manutenção. A uma taxa de juros efetiva de 2% ao ano, calcular o valor presente da doação.

Resp.: $550.000,00.

24. Uma pessoa contribuiu durante 30 anos para um plano de aposentadoria privada, inicialmente com 300 depósitos mensais de $350,00, seguidos de 60 depósitos mensais de $400,00. Um mês após o último depósito começou a receber a sua aposentadoria. Calcular o valor dos recebimentos supondo uma taxa de juros exponencial mensal de 0,7%.

Resp.: $3.987,97.

25. Ana completou hoje 24 anos e analisou a possibilidade de contribuir para um plano de aposentadoria privada. Pensa em aposentar-se ao completar 55 anos, quando gostaria de contar, a partir do seu aniversário, com uma renda mensal de $3.700,00. Sabendo que a taxa em vigor no mercado para planos de aposentadoria é de 0,64% ao mês, quanto ela deverá começar a depositar hoje de forma a ter o que deseja?

Resp.: $380,20.

Ilustração: Marcone da Silva

UNIDADE 3 - Análise de Alternativa de Investimentos e Métodos de Depreciação

3.1 - Análise de Alternativa de Investimentos

Investimento é toda aplicação de dinheiro visando a ganhos. A aplicação pode ser no mercado financeiro, através da caderneta de poupança, fundos e ações ou em unidades produtivas de empresas em geral. Chamamos análise de investimento ao conjunto de determinados métodos utilizados para otimizar as alternativas propostas. A análise de investimentos envolve decisões de aplicação de recursos com prazos longos, com o objetivo de propiciar retorno adequado aos donos desse capital.

Veremos dois métodos de avaliação de investimentos:

- Método do Valor Presente Líquido (VPL);
- Método da Taxa Interna de Retorno (TIR).

3.1.1 - Método do Valor Presente Líquido (VPL)

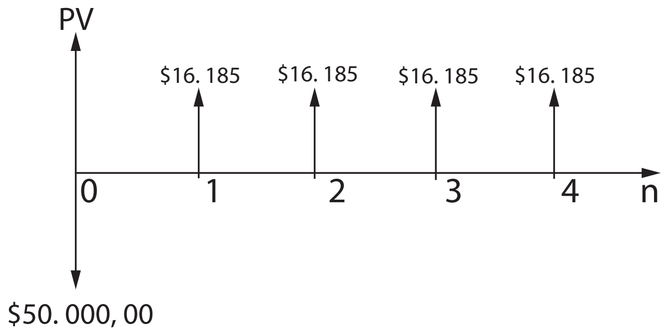
O Valor Presente Líquido (VPL) de um fluxo de caixa é igual ao valor presente de suas parcelas futuras levadas para data zero (data do investimento) a uma taxa de mercado (ou taxa de atratividade) e somada algebricamente com o seu investimento.

Daí, se VPL > 0, então o projeto é viável. Se VPL < 0, o projeto não é viável.

Observação: No cálculo do VPL deve-se observar o sinal valor; se for uma saída, deve ser negativo; e, se for entrada, deve ser positivo.

Exemplo: Devo investir hoje num projeto cujo retorno será de 4 parcelas mensais e iguais de , sendo a primeira dias após o investimento. Considerando uma taxa de mercado de ao mês, verifique se o projeto é viável.

Resolução:



Usando a equação para encontrar *PV*, temos que:

$$PV = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$PV = 16.185\left[\frac{1-(1+0{,}1)^{-4}}{0{,}1}\right]$$

$$PV = \$51.304{,}27$$

Usando o Método do VPL, segue que:

$$\text{VPL} = \oplus\ \$51.304{,}27\ \ominus\ \$50.000{,}00 = \$1.304{,}27 > 0.$$

Logo, o projeto é viável.

3.1.2 - Método da Taxa Interna de Retorno (TIR)

A Taxa Interna de retorno de uma proposta de investimento é definida como sendo a taxa de juros para a qual o valor presente dos recebimentos resultante do projeto é exatamente igual ao valor presente dos desembolsos. Logo, Método da Taxa Interna de Retorno (TIR) consiste em determinar, para cada investimento que se pretenda realizar, a taxa de juros que proporciona um fluxo de caixa equivalente ao que se espera obter com o projeto.

No exemplo anterior, sendo i_{TIR} a Taxa Interna e Retorno, temos que:

$$50.000 = 16.185\,\frac{[(1+i_{TIR})^4 - 1]}{i_{TIR}(1+i_{TIR})^4}$$

Em geral, para calcular a taxa i_{TIR}, é preciso resolver um tipo de equação polinomial que não pode ser resolvida por métodos clássicos. Além disso, este cálculo é bastante dispendioso, pois teremos de usar o método da tentativa e interpolações.

Portanto, para calcular a taxa i_{TIR}, é necessário o uso do Excel ou da calculadora HP12C.

Vamos analisar como calcular a TIR usando a HP12C. Vejamos as funções a serem utilizadas.

Funções Azuis:

CF_0: registra o valor do termo no fluxo no tempo zero com sinal adequado;

CF_j: registra os valores dos outros termos em ordem sequencial;

N_j: registra o número de termos CF_j iguais e consecutivos;

Funções Laranjas:

NPV: valor presente líquido (VPL)

IRR: Taxa Interna de Retorno (TIR)

Observação: Lembre-se que $\boxed{f}\boxed{REG}$ limpa a memória da HP12C.

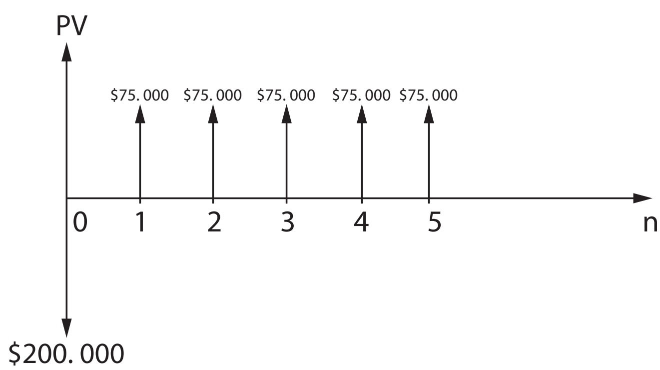
Na HP12C, vamos utilizar a seguinte sequência de comandos:

$$50000\ \boxed{CHS}\boxed{g}\boxed{CF_0}$$
$$16185\ \boxed{g}\boxed{CF_j}$$
$$4\ \boxed{g}\boxed{N_j}$$
$$\boxed{f}\boxed{IRR}$$

Assim, $i_{TIR} = 11,2\%$ ao mês.

Exemplo: Uma empresa estuda a possibilidade de reformar as máquinas. A reforma está orçada em \$200.000,00 e dará uma sobrevida de 5 anos ao equipamento, proporcionando uma diminuição nos custos operacionais na ordem de \$75.000/ano. Considerando um custo de capital de 15% ao ano, analise a viabilidade econômica da reforma do equipamento.

Resolução:



Usando a equação para encontrar *PV*, temos que:

$$PV = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$PV = 75.000\left[\frac{1-(1+0{,}15)^{-5}}{0{,}15}\right]$$

$$PV = \$251.411{,}63$$

Usando o Método do VPL, segue que:

$$\text{VPL} = \oplus\ \$251.411{,}63 \ominus \$200.000{,}00 = \$51.411{,}63 > 0.$$

Logo, a reforma das máquinas é viável.

Usando a calculadora HP12C:

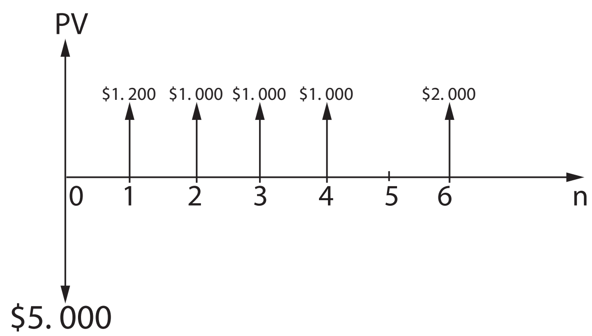
$$200000\ \boxed{CHS}\boxed{g}\boxed{CF_0}$$
$$75000\ \boxed{g}\boxed{CF_j}$$
$$5\ \boxed{g}\boxed{N_j}$$
$$\boxed{f}\boxed{IRR}$$

Daí, $i_{TIR} = 25{,}41\%$ ao ano.

VPL e TIR para séries variáveis

Exemplo: Um investimento de \$5.000,00 gerou um fluxo de caixa, que vemos abaixo. Encontre VPL e TIR, considerando a taxa de mercado de 10% ao ano.

Resolução:



Usando equivalência de capitais, a equação para encontrar *PV* será:

$$PV = \frac{1.200}{(1+0{,}1)^1} + \frac{1.000}{(1+0{,}1)^2} + \frac{1.000}{(1+0{,}1)^3} + \frac{1.000}{(1+0{,}1)^4} + \frac{2.000}{(1+0{,}1)^6}$$

$$PV = \$4.480{,}63$$

Usando o Método do VPL, segue que:

$$\text{VPL} = \ominus\ \$5.000 \oplus \$4.480{,}63 = -\$519{,}37 < 0\ .$$

Logo, o projeto não é viável.

Usando a calculadora HP12C para encontrar VPL:

$5000\ \boxed{CHS}\boxed{g}\boxed{CF_0}$

$1200\ \boxed{g}\boxed{CF_j}$

$1000\ \boxed{g}\boxed{CF_j}$

$3\ \boxed{g}\boxed{N_j}$

$0\ \boxed{g}\boxed{CF_j}$

$2000\ \boxed{g}\boxed{CF_j}$

$10\ \boxed{i}$

$\boxed{f}\boxed{NPV}$

Logo, VPL = −\$519,37

Usando a calculadora HP12C para encontrar a TIR:

$5000\ \boxed{CHS}\boxed{g}\boxed{CF_0}$

$1200\ \boxed{g}\boxed{CF_j}$

$1000\ \boxed{g}\boxed{CF_j}$

$3\ \boxed{g}\boxed{N_j}$

$0\ \boxed{g}\boxed{CF_j}$

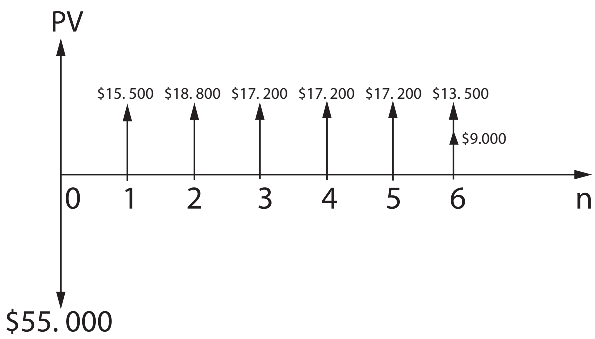
$2000\ \boxed{g}\boxed{CF_j}$

$\boxed{f}\boxed{IRR}$

Daí, i_{TIR} = 6,4% ao ano

Exemplo: Uma indústria pretende comprar equipamentos de \$55.000,00, que deverão proporcionar receitas líquidas de 15.500,00 no 1o ano, \$18.800,00 no 2o ano, \$17.200,00 nos 3o, 4oe 5o anos e \$13.500,00 no 6o ano. Sabendo-se que o valor da revenda dos equipamentos no final do 6o ano é estimado em \$9.000,00 e que a taxa de atratividade é de 21% ao ano, verifique se a compra dos equipamentos é uma boa alternativa para a empresa.

Resolução:



Usando equivalência de capitais, a equação para encontrar PV será:

$$PV = \frac{15.500}{(1+0{,}21)^1} + \frac{18.800}{(1+0{,}21)^2} + 17.200\left[\frac{1-(1+0{,}21)^{-3}}{0{,}21}\right].\left[\frac{1}{(1+0{,}21)^2}\right] + \frac{22.500}{(1+0{,}21)^6}$$

$$PV = \$57.183{,}99$$

Usando o Método do VPL, segue que:

VPL = $\oplus$ \$57.183,99 $\ominus$ \$55.000 = \$2.183,99 > 0.

Logo, o projeto é viável.

Usando a calculadora HP12C para encontrar VPL:

$55000\ \boxed{CHS}\boxed{g}\boxed{CF_0}$

$15500\ \boxed{g}\boxed{CF_j}$

$18800\ \boxed{g}\boxed{CF_j}$

$17200\ \boxed{g}\boxed{CF_j}$

$3\ \boxed{g}\boxed{N_j}$

$22500\ \boxed{g}\boxed{CF_j}$

$21\ \boxed{i}$

$\boxed{f}\boxed{NPV}$

Logo, VPL = \$2.183,99

Usando a calculadora HP12C para encontrar a TIR:

$55000\ \boxed{CHS}\boxed{g}\boxed{CF_0}$

$15500\ \boxed{g}\boxed{CF_j}$

$18800\ \boxed{g}\boxed{CF_j}$

$17200\ \boxed{g}\boxed{CF_j}$

$3\ \boxed{g}\boxed{N_j}$

$22500\ \boxed{g}\boxed{CF_j}$

$\boxed{f}\boxed{IRR}$

Daí, i_{TIR} = 22,55% ao ano

3.2 - Métodos para o Cálculo do Fundo de Depreciação

A depreciação é a perda de valor dos bens que pode ocorrer por desgaste físico, pelas ações da natureza ou pelo próprio uso, envelhecimento ou obsolescência, devido às inovações tecnológicas. Assim, a depreciação é a diferença entre o preço da compra de um bem e seu valor de troca, depois de um tempo de uso.

Com o fim de gerar fundos que irão possibilitar a substituição de itens necessários à empresa no final de sua vida útil, o valor de depreciação deve ser uma reserva contábil da empresa. Desta forma, este será reposto com mais facilidade quando não tiver mais capacidade de uso ou ficar obsoleto. Portanto, a depreciação é um custo operacional na empresa, devendo estar incluída no custo total de produção, o que chamamos de fundo de depreciação.

A depreciação pode ser calculada por diferentes métodos. Vejamos os mais utilizados.

3.2.1 - Método de Depreciação Linear

Neste método, o bem deprecia ao longo de sua vida útil de modo constante. O cálculo da depreciação é dado por:

$$D_L = \frac{PV - VR}{n}$$

Na fórmula acima,

PV: é o valor inicial ou presente, ou seja, que o bem foi adquirido;

VR: é o valor final, ou seja, valor residual;

n: tempo de vida útil do bem.

Exemplo: Vamos considerar que o produtor adquiriu um equipamento, que tem uma vida útil estimada em 5 anos, por $2.000,00. Depois de 5 anos, esse equipamento será vendido, como sucata, por $100,00. Calcule o valor da depreciação e a taxa de depreciação.

Resolução:

$$PV = \$2.000$$
$$VR = \$100$$
$$n = 5$$
$$D_L = ?$$

$$D_L = \frac{PV - VR}{n}$$
$$D_L = \frac{2.000 - 100}{5}$$
$$D_L = \$380{,}00$$

Podemos montar uma tabela com todos os dados para cada período, que chamamos de Plano de Depreciação.

n	Depreciação	Depreciação Acumulada	Valor Residual
0	-	-	2.000,00
1	380,00	380,00	1.620,00
2	380,00	760,00	1.240,00
3	380,00	1.140,00	860,00
4	380,00	1.520,00	480,00
5	380,00	1.900,00	100,00

3.2.2 - Método de Depreciação da Taxa Constante

O Método de Depreciação da Taxa Constante estabelece uma taxa constante de depreciação, a qual é calculada sobre o valor do bem no fim de cada exercício. Considerando um equipamento com custo PV, vida útil n e valor residual R, sendo i a taxa de percentagem, depois do primeiro ano, a depreciação será PVi. Portanto, o valor do equipamento será $PV - PVi$. Depois do segundo ano, a depreciação será $PV - PVi$. Consequentemente, o valor do equipamento será

$$PV(1 - i) - PVi(1 - i) = PV - PVi - PVi + PVi^2 = PV(1 - 2i + i^2) = PV(1 - i)^2$$

No caso geral, depois do enésimo ano, o valor do equipamento é $PV(1 - i)^n$. Este valor é igual ao valor residual. Logo, temos que

$$(1 - i)^n = \frac{VR}{PV}$$

Esta equação que utilizamos para encontrar o valor de i.

Exemplo: Determinar a taxa constante e elaborar o plano de depreciação de um bem adquirido por \$100.000,00, com vida útil de 5 anos e valor residual de \$10.000,00.

Resolução:

$$PV = \$100.000$$
$$VR = \$10.000$$
$$n = 5$$
$$i = ?$$

$$(1-i)^n = \frac{VR}{PV}$$
$$(1-i)^5 = \frac{10.000}{100.000}$$
$$(1-i)^5 = 0{,}1$$
$$1 - i = (0{,}1)^{\frac{1}{5}}$$
$$i = 1 - 0{,}630957$$
$$i = 0{,}369043$$
$$i = 36{,}9043\%\ ao\ ano$$

Calculando a Depreciação, temos que

Para o 1º ano: 100.000.(0,369043) = \$36.904,30

Para o 2º ano: 63.095,70.(0,369043) = \$23.285,03

Para o 3º ano: 39.810,67.(0,369043) = \$14.691,85

Para o 4º ano: 25.118,82.(0,369043) = \$9.269,93

Para o 5º ano: 15.848,90.(0,369043) = '\$5.848,92

Segue abaixo o Plano de Depreciação.

n	Depreciação	Depreciação Acumulada	Valor Residual	Taxa
0	-	-	100.000	0,369043
1	36.904,30	36.904,30	63.095,70	0,369043
2	23.285,03	60.189,33	39.810,67	0,369043
3	14.691,85	74.881,18	25.118,82	0,369043
4	9.269,93	84.151,10	15.848,90	0,369043
5	5.848,92	90.000,03	9.999,97	0,369043

3.2.3 - Método da Soma dos Algarismos dos Anos ou de Cole

No Método da Soma dos Algarismos dos Anos ou de Cole, uma fração do custo depreciável de um ativo é baixada a cada ano. A fração é composta pelo numerador igual à quantidade de depreciação e o denominador igual à soma do número dos anos de vida útil do equipamento.

Assim, temos o seguinte roteiro:

1. Somamos os algarismos que compõem o número de anos da vida útil do bem;
2. Multiplicamos o valor a ser depreciado a cada ano pela fração, cujo denominador é a soma calculada anteriormente. O numerador, para o primeiro ano, é o tempo de vida útil do bem, n, para o segundo, é $n - 1$, para o terceiro ano é $n - 2$. Continuamos desta forma até o último ano de vida útil, quando o numerador será igual a 1.

Neste método, a despesa de depreciação menor nos últimos anos é compensada pelo aumento das despesas de manutenção.

Exemplo: Monte o plano de depreciação de um equipamento adquirido por \$ 400.000,00, cujo valor residual, após 5 anos, é de \$50.000,00, utilizando o Método de Cole.

Resolução:

$$PV = \$400.000$$

$$VR = \$50.000$$

$$n = 5$$

Soma dos dígitos: 1+2+3+4+5 = 15 anos
Calculemos a depreciação para cada ano:

Para o 1º ano: $\frac{5}{15}.(350.000) = \$116.666,67$

Para o 2º ano: $\frac{4}{15}.(350.000) = \$93.333,33$

Para o 3º ano: $\frac{3}{15}.(350.000) = \$70.000,00$

Para o 4º ano: $\frac{2}{15}.(350.000) = \$46.666,67$

Para o 5º ano: $\frac{1}{15}.(350.000) = \$23.333,33$

Segue abaixo o Plano de Depreciação.

n	Fração	Depreciação	Depreciação Acumulada	Valor Residual
0	-	-	-	400.000,00
1	5/15	116.666,67	116.666,67	283.333,33
2	4/15	93.333,33	210.000,00	190.000,00
3	3/15	70.000,00	280.000,00	120.000,00
4	2/15	46.666,67	326.666,67	73.333,33
5	1/15	23.333,33	350.000,00	50.000,00

Observação: O Método de Cole pode ser crescente ou decrescente. No exemplo anterior, usamos o Método de Cole decrescente. Para o crescente, a depreciação em cada ano fica:

Para o 1º ano: $\frac{1}{15}.(350.000) = \$23.333,33$

Para o 2º ano: $\frac{2}{15}.(350.000) = \$46.666,67$

Para o 3º ano: $\frac{3}{15}.(350.000) = \$70.000,00$

Para o 4º ano: $\frac{4}{15}.(350.000) = \$93.333,33$

Para o 5º ano: $\frac{5}{15}.(350.000) = \$116.666,67$

O cálculo é diferente para cada método utilizado, mas o valor total depreciado é sempre o mesmo. Fica como exercício para o leitor fazer o Plano de Depreciação utilizando o método crescente.

Síntese da Unidade

1. Método do Valor Presente Líquido (VPL): é igual ao valor presente de suas parcelas futuras levadas para data zero (data do investimento) a uma taxa de mercado (ou taxa de atratividade) e somada algebricamente com o seu investimento. Daí, se VPL > 0, então o projeto é viável. Se VPL < 0, o projeto não é viável.

2. Método da Taxa Interna de Retorno (TIR): consiste em determinar, para cada investimento que se pretenda realizar, a taxa de juros que proporciona um fluxo de caixa equivalente ao que se espera obter com o projeto.

3. Método de Depreciação Linear

$$D_L = \frac{PV - VR}{n}$$

4. Método de Depreciação da Taxa Constante

$$(1 - i)^n = \frac{VR}{PV}$$

5. Método da Soma dos Algarismos dos Anos ou de Cole

1. Somamos os algarismos que compõem o número de anos da vida útil do bem;
2. Multiplicamos o valor a ser depreciado a cada ano pela fração, cujo denominador é a soma calculada anteriormente. O numerador, para o primeiro ano, é o tempo de vida útil do bem, *n*, para o segundo, é *n - 1*, para o terceiro ano é *n - 2*. Continuamos desta forma até o último ano de vida útil, quando o numerador será igual a 1.

Exercícios de Fixação para Unidade

1. Um bem é vendido à vista por $318.000,00 ou a prazo por $90.000,00 de entrada, mais três prestações mensais e iguais de $80.000,00 cada uma, vencendo a primeira um mês após a entrada. Qual a melhor alternativa para um comprador que pode aplicar seu dinheiro à taxa de 3% ao mês?

Resp.: VPL = 1.711,09 >0 e TIR = 2,6% ao mês, melhor a prazo.

2. Uma empresa estuda a possibilidade de reformar uma máquina. A reforma está orçada em $260.000,00 e dará uma sobrevida de 5 anos ao equipamento, proporcionando uma diminuição nos custos operacionais da ordem de $75.000,00 ao ano. Considerando um custo de capital de 15% ao ano, analisar a viabilidade econômica da reforma do equipamento.

Resp.: VPL = -8.588,37 < 0 e TIR = 13,60% ao ano, logo não é viável a reforma.

3. Investiu-se hoje $50.000,00 num projeto cujo retorno será de 4 parcelas mensais de $16.100,00, sendo a primeira após 30 dias do investimento. Considerando a taxa de atratividade de mercado de 10,80% ao mês, verifique se o projeto é viável.

Resp.: É viável pois VPL = 163,42 > 0 e TIR = 10,95% ao mês.

4. Investiu-se hoje $500,00 num projeto cujo retorno será de duas parcelas mensais iguais de $261,30, sendo a primeira após 30 dias do investimento. Determine a taxa interna de retorno e, considerando a taxa de atratividade do mercado de 2,5% ao mês, verifique se o projeto é viável.

Resp.: TIR = 3% ao mês, VPL = 3,63 > 0, logo o projeto é viável.

5. O Sr. Pedro possui uma propriedade que lhe dará uma renda média mensal estimada em $1.000,00 por mais 5 anos. Ele calcula que, passado esse período, sua propriedade poderá ser vendida por $20.000,00. Surgiu-lhe a oportunidade de aplicação do capital a 2% ao mês, que ele considera boa, face às suas aplicações atuais. Por outro lado, o Sr. Antônio possui capital aplicado em ações que lhe rendem 1% ao mês e deseja comprar a propriedade do Sr. Pedro.

a) Qual o preço de venda mínimo que satisfaz o Sr. Pedro?

b) Qual o preço de compra máximo que satisfaz o Sr. Antônio?

c) Há viabilidade na negociação?

Resp.: a) $40.856,53; b) $55.964,03; c) sim.

6. Um imóvel é vendido à vista por $200.000,00. A prazo, são oferecidas as seguintes opções:

Opção A: $50.000,00 de entrada; $55.181,96 seis meses após a compra; $126.824,18 doze meses após a compra.

Opção B: $60.000,00 de entrada; $102.480,77 seis meses após a compra; $63.412,06 doze meses após a compra.

Se a taxa de juros compostos corrente for de 2% ao mês, qual será a melhor alternativa para o comprador?

Resp.: Opção A pois VPLA= 1.000,00 e VPLB=- 999,97.

7. A Imobiliária Barracão S/A vende um apartamento de 3 (três) quartos por $150.000,00 à vista. Como alternativas de pagamento a prazo, oferece dois planos: Plano A: Entrada de $55.000,00 mais 4 prestações trimestrais de $31.000,00. Plano B: Entrada de $30.000,00 mais 8 prestações trimestrais de $23.000,00. O Sr. João de Sousa, capitalista que aplica seu dinheiro a 10% ao trimestre, deseja saber qual é a melhor opção de compra.

Resp.: à vista. VPLA=-3.265,83 e VPLB =-2.703,30.

8. Para a venda de um imóvel, são apresentadas duas propostas:

Proposta 1 - $100.000,00 de entrada, 36 prestações mensais de $3.000,00 e 3 parcelas anuais intermediárias de $20.000,00.

Proposta 2 - entrada de $80.000,00, 12 parcelas mensais de $4.000,00, seguidas de 12 parcelas mensais de $9.000,00. Sabendo-se que a taxa de juros vigente é de 2,5% ao mês, qual é a melhor opção para o comprador?

Resp.: A proposta 2 pois PV_1 = $204.819,25 e PV_2 = $189.676,05.

9. Um veículo foi adquirido por uma empresa por $50.000,00. Se para este tipo de ativo é permitida uma depreciação total linear em 5 anos, qual é o valor da depreciação por ano? Monte uma tabela contendo o Plano de Depreciação.

Resp.: $10.000,00.

10.Uma empresa adquiriu o equipamento de $12.000,00, vida útil de 15 anos e valor residual de $4.000,00. Determine a taxa anual e faça o Plano de Depreciação pelo Método da Taxa Constante até o quinto ano.

Resp.: $i = 7{,}062301\%$.

11. Uma máquina de 73.000,00, vida útil de 15 anos e valor residual de $28.000,00, será depreciada pelo Método da Taxa Constante. Calcule a taxa anual.

Resp.: i = 6,188587%.

12. Uma empresa adquiriu o equipamento de $12.000,00, vida útil de 15 anos e valor residual de $4.000,00. Faça o Plano de Depreciação pelo Método de Cole até o quinto ano.

13. Uma empresa adquiriu o equipamento de $24.000,00, vida útil de 14 anos, valor residual de $10.000,00. Qual é o valor da depreciação por ano? Faça o Plano de Depreciação pelo Método Linear até o sétimo ano.

Resp.: $1.000,00.

14. Uma máquina de $25.000,00, vida útil de 10 anos e valor residual de $12.000,00, será depreciada pelo Método de Cole. Calcule o valor da depreciação referente ao 5o ano.

Resp.: $1.181,82.

15. Uma empresa adquiriu a máquina de $40.000,00, valor residual de $15.000,00, vida útil de 6 anos. Determine a taxa anual e faça o Plano de Depreciação pelo Método da Taxa Constante.

Resp.: i = 15,080934%.

16. Uma empresa adquiriu um equipamento de $35.000,00, residual $15.000,00, vida útil de 6 anos. Faça o Plano de Depreciação pelo Método de Cole.

Ilustração: Marcone da Silva

UNIDADE 4 - Sistemas de Amortização

Amortização é o mesmo que redução da dívida. Amortizar é pagar uma parte da dívida para que ela reduza de tamanho até a sua eliminação. Porém, em toda dívida, há cobrança de juros. Assim, para amortizar uma dívida, é necessário que o pagamento seja maior que os juros cobrados no período. Ou seja, o valor amortizado é o que sobra do pagamento depois de descontados os juros.

No Brasil, os mercados comercial e financeiro adotam diversos sistemas de amortização de empréstimos. Eles diferem pelo critério de devolução do valor atual (PV) e pelo cálculo e pagamento dos juros (J). Nos sistemas de amortização a serem estudados, os juros serão calculados sempre sobre o saldo devedor. Isto significa que consideraremos apenas o regime de capitalização composta.

Para uma melhor compreensão, daremos os principais conceitos de uso corrente nas operações de empréstimos e financiamentos.

Definições Importantes

- **Mutuante ou credor:** aquele que fornece o empréstimo;
- **Mutuário ou devedor:** aquele que recebe o empréstimo;
- **Amortizar uma dívida:** significa diminuir gradualmente, até a extinção total, o principal de uma dívida;
- **Parcelas de amortização:** corresponde às parcelas de devolução do capital emprestado. Indicaremos por A;
- **Prazo de amortização:** é o intervalo de tempo durante o qual são pagas as amortizações;

- **Prestação:** é a soma da amortização com os juros e outros encargos, pagos em dado período. Indicaremos por *R*;

- **Planilha:** é um quadro, padronizado ou não, onde são colocados os valores referentes ao empréstimo, ou seja, o cronograma dos valores de recebimento e de pagamentos;

- **Saldo devedor:** é o estado da dívida, ou seja, do débito, em um determinado instante de tempo t. Indicaremos por $(PV)_t$;

- **Período de amortização:** é o intervalo de tempo existente entre duas amortizações sucessivas.

Dentre os principais e mais utilizados sistemas de amortização de empréstimos, abordaremos o sistema de amortização:

- Sistema de Amortização Francês;
- Sistema de Amortização Constante;
- Sistema de Amortização Misto;
- Sistema Americano de Amortização.

4.1 - Sistema de Amortização Francês (SAF)

O Sistema Francês foi desenvolvido pelo matemático e físico belga Simon Stevin no século XVI. Foi utilizado pelo economista e matemático inglês Richard Price, no século XVIII, no cálculo previdenciário inglês da época, e ficou conhecido no Brasil como Sistema Price.

O Sistema Francês ou Sistema Price é o mais utilizado pelas instituições financeiras e pelo comércio em geral. O empréstimo é pago em prestações periódicas iguais e postecipadas. Cada prestação é constituída pela soma da amortização do principal com os juros do período. A amortização é obtida por diferença entre os valores da prestação e os juros do período. Os juros decrescem com o tempo. O principal no início de cada período vai se tornando cada vez menor e as amortizações vão crescendo de modo que a soma dessas parcelas permaneça constante ao longo do tempo. A amortização é crescente em progressão geométrica de razão igual a $(1 + i)$.

Exemplo: Um financiamento de \$20.000,00 deverá ser amortizado, através do Sistema Francês de Amortização, em 8 prestações mensais, com juros compostos de 2% ao mês.

a) Calcule o valor da prestação;

b) Calcule o saldo devedor após o pagamento da terceira prestação;

c) Calcule as parcelas de juro e de amortização da quinta prestação;

d) Faça uma planilha com o desenvolvimento mensal das prestações, os juros pagos, a evolução das quotas de amortização e o saldo devedor.

Resolução:

$$\boxed{\begin{array}{c} PV = \$20.000 \\ i = 0{,}02 \; ao \; mês. \\ n = 8 \; meses \end{array}}$$

a) Como no Sistema de Amortização Francês o empréstimo é pago em prestações periódicas iguais e postecipadas, podemos encontrar o valor da prestação através da seguinte fórmula:

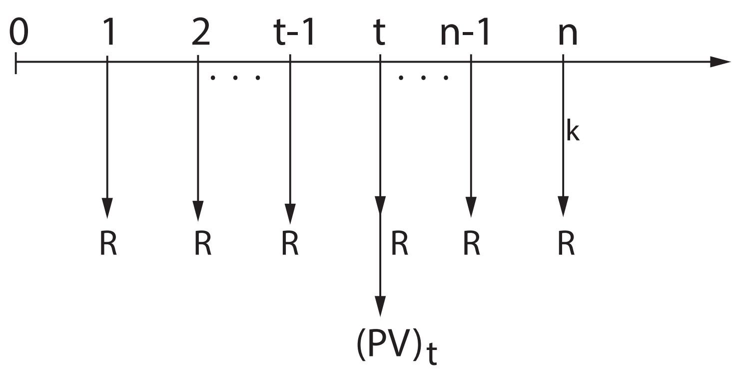
$$R = PV \frac{i}{[1 - (1 + i)^{-n}]}$$

$$R = 20.000 \frac{0{,}02}{[1 - (1 + 0{,}02)^{-8}]}$$

$$R = 20.000(0{,}136510)$$

$$R = \$2.730{,}20$$

b) Ao efetuar o pagamento da prestação de ordem t, ficará restando *(n - t)* prestações a serem pagas, conforme mostra o diagrama abaixo. Assim, o saldo devedor $(PV)_t$, naquele instante, será representado pelo valor atual das prestações restantes.



Portanto,

$$(PV)_t = R \frac{(1 + i)^{n-t} - 1}{i(1 + i)^{n-t}}$$

Assim, o saldo devedor após o pagamento da terceira prestação será:

$$(PV)_3 = 2.730{,}20\,\frac{(1+0{,}02)^{8-3}-1}{0{,}02(1+0{,}02)^{8-3}}$$

$$(PV)_3 = 2.730{,}20(4{,}713460)$$

$$(PV)_3 = \$12.868{,}69$$

c) Para se obter as parcelas de juros e de amortização da prestação de ordem *t*, calcula-se inicialmente o saldo devedor após o pagamento da prestação de ordem *(t –1)*, pois, assim, o cálculo das parcelas de juros e de amortização da prestação de ordem t serão dadas por:

$$J_t = i.(PV)_{(t-1)}$$

e

$$A_t = R - J_t$$

Então, para calcular as parcelas de juros e de amortização da quinta prestação, devemos, inicialmente, calcular o saldo devedor após o pagamento da quarta prestação, isto é:

Daí, a parcela de juros da quinta prestação é dada por:

$$J_5 = i.(PV)_4$$

$$J_5 = 0{,}02(10.395{,}86)$$

$$J_5 = \$207{,}92$$

E a amortização da quinta prestação é:

$$A_5 = R - J_5$$

$$A_5 = 2.730{,}20 - 207{,}92$$

$$A_5 = \$2.522{,}28$$

d)

n	Prestações R	Juros $J_t = i.(PV)_{t-1}$	Amortizações $A_t = R - J_t$	Saldo Devedor $(PV)_t = (PV)_{t-1} - A_t$
0				20.000,00
1	2.730,20	400,00	2.330,20	17.669,80
2	2.730,20	353,40	2.376,80	15.293,00
3	2.730,20	305,86	2.424,34	12.868,66
4	2.730,20	257,37	2.472,83	10.395,83
5	2.730,20	207,92	2.522,28	7.873,55
6	2.730,20	157,47	2.572,73	5.300,82
7	2.730,20	106,02	2.624,18	2.676,63
8	2.730,20	53,53	2.676,67	-0,03
Total	21.841,60	1.841,57	20.000,03	-

4.2 - Sistema de Amortização Constante (SAC)

No Sistema de Amortização Constante, as parcelas de amortização do principal são sempre iguais (ou constantes). O valor da amortização A é calculado através da divisão do capital emprestado PV pelo número de amortizações n. Os juros são calculados, a cada período, multiplicando-se a taxa de juros contratada pelo saldo devedor existente sobre o período anterior, assumindo valores decrescentes nos períodos. A prestação, a cada período, é igual à soma da amortização e dos encargos financeiros (juros, comissões, entre outros), sendo periódica, sucessiva e decrescente em progressão aritmética, de razão igual ao produto da taxa de juros pela parcela de amortização.

Assim,

$$A = \frac{PV}{n}$$

O saldo devedor de ordem t é dado por:

$$(PV)_t = (PV)_{(t-1)} - A$$

A parcela de juros de ordem t é:

$$J_t = i.(PV)_{(t-1)}$$

Exemplo: O financiamento de $20.000,00 deverá ser amortizado, através do Sistema de Amortização Constante, em 8 prestações mensais, com juros compostos de 2% ao mês. Faça uma planilha com o desenvolvimento mensal das prestações, os juros pagos, a evolução das quotas de amortização e o saldo devedor.

Resolução:

$$PV = \$20.000$$
$$i = 0{,}02 \text{ ao mês.}$$
$$n = 8 \text{ meses}$$

Calculemos a parcela de amortização:

$$A = \frac{20.000}{8}$$
$$A = \$2.500{,}00$$

Portanto, teremos a seguinte planilha:

n	Prestações $R_t = J_t + A$	Juros $J_t = i.(PV)_{t-1}$	Amortizações A	Saldo Devedor $(PV)_t = (PV)_{t-1} - A_t$
0				20.000,00
1	2.900,00	400,00	2.500,00	17.500,00
2	2.850,00	350,00	2.500,00	15.000,00
3	2.800,00	300,00	2.500,00	12.500,00
4	2.750,00	250,00	2.500,00	10.000,00
5	2.700,00	200,00	2.500,00	7.500,00
6	2.650,00	150,00	2.500,00	5.000,00
7	2.600,00	100,00	2.500,00	2.500,00
8	2.550,00	50,00	2.500,00	0,00
Total	21.800,00	1.800,00	20.000,00	-

4.3 - Sistema de Amortização Misto (SAM)

O Sistema de Amortização Mista, conforme a própria denominação, é um misto do Sistema de Amortização Constante (SAC) com o Sistema de Amortização Francês (SAF). É também conhecido de Sistema de Amortização Crescente (SACRE).

Esse misto dos dois sistemas se caracteriza pelo fato de a prestação ser igual à média aritmética entre as prestações dos dois sistemas. Sendo as prestações do SAM as médias aritméticas dos dois sistemas, SAC e SAF, respectivamente, os juros também serão as médias aritméticas dos juros correspondentes dos dois sistemas, a cota de amortização serão as médias aritméticas correspondentes e o saldo, bem como o saldo devedor. Além disso, os juros são decrescentes e as cotas de amortizações crescentes, permitindo que a dívida seja paga mais rapidamente.

No SACRE, a partir de um determinado período, durante o prazo de financiamento, a prestação tende a cair continuamente até o final do empréstimo. Exatamente por isto, o percentual de comprometimento da renda neste tipo de mecanismo de amortização tende a ser mais alto, em cerca de 30%, pois, no decorrer do prazo do financiamento, as prestações devem cair e com isto diminuirá o grau de comprometimento da renda.

Exemplo: Na compra de um sítio, Roberta quer financiar a importância de \$25.000,00 em uma instituição financeira que cobra juros compostos de 5% ao mês. Esse empréstimo será amortizado pelo sistema SAM, em 5 prestações mensais e consecutivas, vencendo a primeira um mês após a compra. Elabore a planilha de financiamento.

Resolução:

$$PV = \$25.000$$
$$i = 0,05 \text{ ao mês.}$$
$$n = 5 \text{ meses}$$

Como o sistema SAM depende dos sistemas SAC e SAF, vamos calcular o valor das prestações pelo sistema SAC:

$$A = \frac{25.000}{5}$$
$$A = \$5.000,00$$

e

$$J_t = i.(PV)_{(t-1)}$$
$$J_{SAC1} = 0,05(25.000)$$
$$J_{SAC1} = \$1.250,00$$

Assim, a primeira prestação será

$$R_{SAC1} = A + J_{SAC1}$$
$$R_{SAC1} = 5.000 + 1.250$$
$$R_{SAC1} = \$6.250,00$$

Já o saldo devedor será

$$(PV)_{SAC1} = PV - A$$
$$(PV)_{SAC1} = 25.000 - 5.000$$
$$(PV)_{SAC1} = \$20.000,00$$

Para o cálculo da segunda prestação, segue que

$$J_{SAC2} = i.(PV)_{SAC1}$$
$$J_{SAC2} = 0,05(20.000)$$
$$J_{SAC2} = \$1.000,00$$

e

$$R_{SAC2} = A + J_{SAC2}$$
$$R_{SAC2} = 5.000 + 1.000$$
$$R_{SAC2} = \$6.000,00$$

Daí, o saldo devedor fica

$$(PV)_{SAC2} = (PV)_{SAC1} - A$$
$$(PV)_{SAC2} = 20.000 - 5.000$$
$$(PV)_{SAC2} = \$15.000,00$$

Como, no sistema SAF, as prestações são iguais, vamos determiná-las:

$$R_{SAF} = 25.000\frac{0,05}{[1-(1+0,05)^{-5}]}$$

$$R_{SAF} = 25.000(0,230975)$$

$$R_{SAF} = \$5.774,37$$

Agora, vamos encontrar a primeira prestação no sistema SAM:

$$R_{SAM1} = \frac{R_{SAC1} + R_{SAF}}{2}$$

$$R_{SAM1} = \frac{6.250 + 5.774,37}{2}$$

$$R_{SAM1} = \$6.012,19$$

Agora, é a vez de calcular a amortização correspondente à primeira prestação. Sabendo que $J_{SAC1} = J_{SAM1}$:

$$R_{SAM1} = A_{SAM1} + J_{SAM1}$$
$$6.012,19 = A_{SAM1} + 1.250$$
$$A_{SAM1} = \$4.762,19$$

O saldo devedor ao final do primeiro mês será de:

$$(PV)_{SAM1} = PV - A_{SAM1}$$
$$(PV)_{SAM1} = 25.000 - 4.762,19$$
$$(PV)_{SAM1} = \$20.237,81$$

Já calculado o saldo devedor ao final da primeira prestação, podemos calcular a segunda prestação e o juro correspondente:

$$R_{SAM2} = \frac{R_{SAC2} + R_{SAF}}{2}$$

$$R_{SAM2} = \frac{6.000 + 5.774,37}{2}$$

$$R_{SAM2} = \$5.887,19$$

e

$$J_{SAM2} = i.(PV)_{SAM1}$$
$$J_{SAC2} = 0,05(20.237,81)$$
$$J_{SAC2} = \$1.011,89$$

Calculando a amortização correspondente à segunda prestação:

$$R_{SAM2} = A_{SAM2} + J_{SAM2}$$
$$5.887,19 = A_{SAM2} + 1.011,89$$
$$A_{SAM2} = \$4.875,30$$

O saldo devedor ao final do segundo mês será de:

$$(PV)_{SAM2} = (PV)_{SAM1} - A_{SAM2}$$
$$(PV)_{SAM2} = 20.237,81 - 4.875,30$$
$$(PV)_{SAM2} = \$15.362,51$$

Para determinar a terceira, quarta e quinta prestações, devemos, inicialmente, calculá-las nos dois sistemas, SAC e SAF, e depois proceder de forma análoga. Assim, a tabela do financiamento fica da seguinte forma:

n	**Prestações** $R_t = J_t + A$	**Juros** $J_t = i.(PV)_{t-1}$	**Amortizações** A	**Saldo Devedor** $(PV)_t = (PV)_{t-1} - A_t$
0				25.000,00
1	6.012,19	1.250,00	4.762,19	20.237,82
2	5.887,19	1.011,89	4.875,29	15.362,52
3	5.762,19	768,13	4.994,06	10.368,46
4	5.637,19	518,42	5.118,76	5.249,70
5	5.512,19	262,48	5.249,70	0,00
Total	28.810,93	3.810,92	25.000,00	-

4.4 - Sistema Americano de Amortização (SAA)

No Sistema Americano de Amortização, o devedor obriga-se a pagar periodicamente apenas os juros do capital emprestado e a restituí-lo, integralmente, no final do prazo estabelecido.

Os juros sempre incidem sobre o valor original da dívida. Com isso o devedor pode quitar sua dívida quando quiser. Este sistema tem como desvantagem que o pagamento de juros pode, em tese, ser perpétuo mesmo quando já se pagou o equivalente à dívida em si.

Assim,

$$J = i.PV$$

Com a finalidade de evitar o desembolso violento no final do prazo combinado, o devedor procura formar, por sua conta e, mediante depósitos periódicos de parcelas constantes, um fundo de amortização, chamado Fundo de Reserva, com o qual, no fim do prazo, possa pagar a dívida sem maiores problemas. É importante notar que este fundo será constituído concomitantemente aos pagamentos dos juros do principal através do uso do Fator de Acumulação de Capital.

Este sistema não é muito utilizado no Brasil, mas é largamente utilizado nos empréstimos internacionais.

Exemplo: Uma pessoa toma emprestada a quantia de \$15.000,00 com a condição de pagar mensalmente os juros à taxa de juros compostos de 2,5% ao mês e a restituí-la integralmente no final de 10 meses. O devedor pretende constituir um fundo de amortização com quotas mensais, calculadas à taxa de juros compostos de 2% ao mês. Calcule o dispêndio mensal e construa a planilha de reembolso.

Resolução:

$$\boxed{\begin{array}{c} PV = \$15.000 \\ i = 0{,}025 \text{ ao mês} \\ i_f = 0{,}02 \text{ ao mês} \\ n = 10 \text{ meses} \end{array}}$$

Vamos calcular os juros mensais:

$$J = i.PV$$
$$J = 0{,}025(15.000)$$
$$J = \$375{,}00$$

Agora, calculemos a quota mensal do fundo de amortização. Como o valor PV é pago no final, temos que

$$R = FV \frac{i_f}{[(1 + i_f)^n - 1]}$$
$$R = 15.000 \frac{0{,}02}{[(1 + 0{,}02)^{10} - 1]}$$
$$R = \$1.369{,}90$$

Outra forma fazer este cálculo é utilizando a tabela financeira:

$$R = FV.FSR\ (i,n)$$
$$R = 15.000.FSR\ (2\%,10)$$
$$R = 15.000.(0{,}091327)$$
$$R = \$1.369{,}90$$

Finalmente, o dispêndio mensal é dado pelos juros somado à quota de amortização:

$$Dispêndio\ Mensal = 375,00 + 1.369,90 = \$1.744,90$$

Portanto, temos a seguinte planilha:

n	Cota Mensal do Fundo	Juros	Dispêndio Mensal (Parcela)	Saldo Devedor	Amortização
0				15.000,00	
1	1.369,90	375,00	1.744,90	15.000,00	0,00
2	1.369,90	375,00	1.744,90	15.000,00	0,00
3	1.369,90	375,00	1.744,90	15.000,00	0,00
4	1.369,90	375,00	1.744,90	15.000,00	0,00
5	1.369,90	375,00	1.744,90	15.000,00	0,00
6	1.369,90	375,00	1.744,90	15.000,00	0,00
7	1.369,90	375,00	1.744,90	15.000,00	0,00
8	1.369,90	375,00	1.744,90	15.000,00	0,00
9	1.369,90	375,00	1.744,90	15.000,00	0,00
10	1.369,90	375,00	16.744,90	0,00	15.000,00
Total	13.699,00	3.750,00	32.449,00	-	-

Síntese da Unidade

1. Sistema de Amortização Francês (SAF):

- Prestações periódicas iguais e postecipadas: $R = PV \dfrac{i}{[1-(1+i)^{-n}]}$
- Saldo devedor no instante t : $(PV)_t = R\dfrac{(1+i)^{n-t}-1}{i(1+i)^{n-t}}$
- Parcelas de juros: $J_t = i.(PV)_{t-1}$
- Amortização da prestação de ordem : $A_t = R - J_t$
- Saldo devedor no instante t a cada mês: $(PV)_t = (PV)_{t-1} - A_t$

2. Sistema de Amortização Constante (SAC):

- Amortização: $A = \dfrac{PV}{n}$
- Parcelas de Juros: $J_t = i.(PV)_{t-1}$
- O saldo devedor de ordem t: $(PV)_t = (PV)_{t-1} - A_t$
- Prestações: $R_t = J_t + A$

3. Sistema de Amortização Misto (SAM): as prestações, os juros, a amortização e o saldo devedor são iguais à média aritmética entre os respectivos valores no SAC e SAF.

4. Sistema Americano de Amortização (SAA): o devedor obriga-se a pagar periodicamente apenas os juros do capital emprestado e a restituí-lo, integralmente, no final do prazo estabelecido. O devedor procura formar um fundo de amortização, chamado Fundo de Reserva, com o qual, no fim do prazo, possa pagar a dívida sem maiores problemas.

- Juros: $J = i.PV$
- Quota Mensal do Fundo de Reserva: $R = FV \dfrac{i_f}{\left[\left(1+i_f\right)^n - 1\right]}$

Exercícios para Fixação da Unidade

1. Um empréstimo de $100.000,00 será saldado em 25 amortizações trimestrais pelo SAC. Considerando uma taxa de juros de 5% ao trimestre, calcular o saldo devedor, os juros e a prestação, referentes ao 16º trimestre.

Resp.: SD_{16}= $36.000,00, J_{6}= $2.000,00 e R_{16}= $6.000,00.

2. Uma loja de equipamentos de informática está anunciando a venda de impressoras laser por $1.200,00 à vista ou em 5 parcelas mensais iguais sem entrada. Se a taxa de juros compostos cobrada pela loja é de 4% ao mês, construir a planilha de amortização pelo SAF.

3. Um bem no valor de $52.000,00 foi financiado em 8 parcelas mensais, calculadas de acordo com o SAC. Sabendo-se que a taxa de juros vigente no mercado é de 5% ao mês e a 1ª parcela será paga 90 dias após a aquisição do bem, construa a planilha de amortização do financiamento considerando que os juros serão incorporados ao saldo devedor.

4. Considerando a amortização de uma dívida de $35.000,00 em 180 meses, com juros de 1,2% ao mês. Determine:

a) pelo Sistema Francês, o valor da 100ª amortização e o saldo devedor nessa época;

b) pelo SAC, o valor da 100ª prestação e o estado da dívida nessa época.

Resp.: a) A_{100}= $180,96; SD_{100}= $24.368,63 b) R_{100}= $383,44; SD_{100}=$15.555,55.

5. Considere a amortização de uma dívida em 150 meses, com juros de 1% ao mês, pelo Sistema Francês. Determine, em termos percentuais:

a) de quanto se reduzirá a prestação dobrando-se o prazo;

b) a fração da dívida já amortizada na época do 75º pagamento.

Resp.: a) 18,35%; b) 32,16%.

6. Uma dívida de $150.000,00 contratada a juros nominais de 36% ao ano, capitalizados bimestralmente, será amortizada pelo SAC em 8 anos por meio de pagamentos bimestrais. Determine o saldo devedor no fim do terceiro ano e os juros contidos na 19º prestação.

Resp.: $93.750,00 e $5.625,00.

7. Uma pessoa comprou um carro financiando \$13.000,00 para pagar em 24 prestações mensais e iguais, pelo SAF, a uma taxa de juros de 3% a. m. Pergunta-se:

a) qual o valor de cada prestação?

b) qual foi a parcela de juros e a parcela de amortização paga na 12ª prestação?

c) se, após pagar a 15ª prestação, a pessoa resolver liquidar a dívida, quanto deverá pagar?

Resp.: a) R = 767,62 b) J_{12}= \$244,90 e A_{12}= \$522,71 c) SD_{15}= \$5.976,74.

8. Um empréstimo de \$50.000,00 deve ser amortizado em 48 parcelas mensais pela Tabela Price. Sabendo que a taxa de juros será de 20% ao ano, calcular os juros embutidos na 8ª prestação.

Resp.: J_8= \$748,92.

9. O financiamento de um equipamento no valor de \$57.000,00 é feito pela Tabela Price, em 6 meses, a uma taxa de 15% a.a., com a primeira prestação vencendo daqui a 1 mês. Determine:

a) o principal amortizado nos 3 primeiros meses;

b) o juro, a amortização e o saldo devedor correspondentes à 4ª prestação;

Resp.: a) \$27.969,00; b) \$362,89; \$9.557,04; \$19.473,96.

10. Suponhamos um financiamento de \$180.000,00 em 100 meses, pelo SAF, à taxa de 1% ao mês. Encontrar a prestação, juros, amortização e saldo devedor correspondentes ao 71º o mês.

Resp.: a) \$2.855,83; b) \$737,03; c) \$2.118,80; d) \$71.583,72.

11. Um banco empresta \$50.000,00 a uma empresa, cobrando taxa de 18% ao ano. O sistema de amortização é o Americano, com juros pagos anualmente e prazo de 5 anos. Admitindo-se que, para pagamento do principal, será constituído um fundo de reserva, com depósitos anuais iguais postecipados, a uma taxa de aplicação de 15% ao ano, pede-se:

a) determinar o desembolso anual da empresa;

b) elaborar a planilha do Fundo de Reserva.

Resp.: a) \$16.415,78.

12. Um empréstimo de $60.000,00 foi pago pela Tabela Price, em 6 prestações mensais com uma carência de 3 meses, a uma taxa de juros de 45% ao ano. Construir as planilhas nas seguintes situações:

a) juros pagos durante a carência;

b) juros capitalizados e incorporados ao principal durante a carência.

13. Um empréstimo no valor de $100.000,00 pode ser quitado por uma das opções:

1a pelo SAF, a uma taxa de 18% ao ano, a ser liquidado em 6 prestações anuais;

2a pelo Sistema Americano, à taxa de 16% ao ano, prazo 6 anos, juros pagos anualmente.

Neste caso, para pagamento do principal será constituído um fundo de reserva, com depósitos anuais iguais postecipados, a uma taxa de aplicação anual de 12%.

Do ponto de vista do tomador do empréstimo, qual a melhor opção?

Resp.: 2ª opção pois o desembolso anual no SAF é igual a $28.591,01 e no Sistema Americano $28.322,57.

14. Um montante de $450.000,00 é financiado em 5 anos à taxa de 18% ao ano pelo Sistema Americano, com pagamento anual de juros. Além disso, para pagamento do principal, será constituído um fundo de reserva, com depósitos anuais iguais postecipados, a uma taxa de aplicação de 15% ao ano. Se o tomador do empréstimo pudesse optar pelo Sistema Francês, mantendo-se a taxa de juros e o prazo, quanto ganharia no final do prazo?

Resp.: $25.904,00.

15. Um montante de $200.000,00 é financiado em 10 anos à taxa de 12% ao ano pelo Sistema Americano. Supondo que não haverá pagamento periódico dos juros e que será constituído um fundo de reserva para pagamento do total, com depósitos anuais iguais postecipados, a uma taxa de aplicação de 10% ao ano, calcular o valor dos depósitos.

Resp.: $38.975,53.

Fator de Acumulação de Capitais

n/i	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%	20%
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	2,010000	2,020000	2,030000	2,040000	2,050000	2,060000	2,070000	2,080000	2,090000	2,100000	2,110000	2,120000	2,130000	2,140000	2,150000	2,200000
3	3,030100	3,060400	3,090900	3,121600	3,152500	3,183600	3,214900	3,246400	3,278100	3,310000	3,342100	3,374400	3,406900	3,439600	3,472500	3,640000
4	4,060401	4,121608	4,183627	4,246464	4,310125	4,374616	4,439943	4,506112	4,573129	4,641000	4,709731	4,779328	4,849797	4,921144	4,993375	5,368000
5	5,101005	5,204040	5,309136	5,416323	5,525631	5,637093	5,750739	5,866601	5,984711	6,105100	6,227801	6,352847	6,480271	6,610104	6,742381	7,441600
6	6,152015	6,308121	6,468410	6,632975	6,801913	6,975319	7,153291	7,335929	7,523335	7,715610	7,912860	8,115189	8,322706	8,535519	8,753738	9,929920
7	7,213535	7,434283	7,662462	7,898294	8,142008	8,393838	8,654021	8,922803	9,200435	9,487171	9,783274	10,089012	10,404658	10,730491	11,066799	12,915904
8	8,285671	8,582969	8,892336	9,214226	9,549109	9,897468	10,259803	10,636628	11,028474	11,435888	11,859434	12,299693	12,757263	13,232760	13,726819	16,499085
9	9,368527	9,754628	10,159106	10,582795	11,026564	11,491316	11,977989	12,487558	13,021036	13,579477	14,163972	14,775656	15,415707	16,085347	16,785842	20,798902
10	10,462213	10,949721	11,463879	12,006107	12,577893	13,180795	13,816448	14,486562	15,192930	15,937425	16,722009	17,548735	18,419749	19,337295	20,303718	25,958682
11	11,566835	12,168715	12,807796	13,486351	14,206787	14,971643	15,783599	16,645487	17,560293	18,531167	19,561430	20,654583	21,814317	23,044516	24,349276	32,150419
12	12,682503	13,412090	14,192030	15,025805	15,917127	16,869941	17,888451	18,977126	20,140720	21,384284	22,713187	24,133133	25,650178	27,270749	29,001667	39,580502
13	13,809328	14,680332	15,617790	16,626838	17,712983	18,882138	20,140643	21,495297	22,953385	24,522712	26,211638	28,029109	29,984701	32,088654	34,351917	48,496603
14	14,947421	15,973938	17,086324	18,291911	19,598632	21,015066	22,550488	24,214920	26,019189	27,974983	30,094918	32,392602	34,882712	37,581065	40,504705	59,195923
15	16,096896	17,293417	18,598914	20,023588	21,578564	23,275970	25,129022	27,152114	29,360916	31,772482	34,405359	37,279715	40,417464	43,842414	47,580411	72,035108
16	17,257864	18,639285	20,156881	21,824531	23,657492	25,672528	27,888054	30,324283	33,003399	35,949730	39,189948	42,753280	46,671735	50,980352	55,717472	87,442129
17	18,430443	20,012071	21,761588	23,697512	25,840366	28,212880	30,840217	33,750226	36,973705	40,544703	44,500843	48,883674	53,739060	59,117601	65,075093	105,930555
18	19,614748	21,412312	23,414435	25,645413	28,132385	30,905653	33,999033	37,450244	41,301338	45,599173	50,395936	55,749715	61,725138	68,394066	75,836357	128,116666
19	20,810895	22,840559	25,116868	27,671229	30,539004	33,759992	37,378965	41,446263	46,018458	51,159090	56,939488	63,439681	70,749406	78,969235	88,211811	154,740000
20	22,019004	24,297370	26,870374	29,778079	33,065954	36,785591	40,995492	45,761964	51,160120	57,274999	64,202832	72,052442	80,946829	91,024928	102,443583	186,688000
21	23,239194	25,783317	28,676486	31,969202	35,719252	39,992727	44,865177	50,422921	56,764530	64,002499	72,265144	81,698736	92,469917	104,768418	118,810120	225,025600
22	24,471586	27,298984	30,536780	34,247970	38,505214	43,392290	49,005739	55,456755	62,873338	71,402749	81,214309	92,502584	105,491006	120,435996	137,631638	271,030719
23	25,716302	28,844963	32,452884	36,617889	41,430475	46,995828	53,436141	60,893296	69,531939	79,543024	91,147884	104,602894	120,204837	138,297035	159,276384	326,236863
24	26,973465	30,421862	34,426470	39,082604	44,501999	50,815577	58,176671	66,764759	76,789813	88,497327	102,174151	118,155241	136,831465	158,658620	184,167841	392,484236
25	28,243200	32,030300	36,459264	41,645908	47,727099	54,864512	63,249038	73,105940	84,700896	98,347059	114,413307	133,333870	155,619556	181,870827	212,793017	471,981083
26	29,525631	33,670906	38,553042	44,311745	51,113454	59,156383	68,676470	79,954415	93,323977	109,181765	127,998771	150,333934	176,850098	208,332743	245,711970	567,377300
27	30,820888	35,344324	40,709634	47,084214	54,669126	63,705766	74,483823	87,350768	102,723135	121,099942	143,078636	169,374007	200,840611	238,499327	283,568766	681,852760
28	32,129097	37,051210	42,930923	49,967583	58,402583	68,528112	80,697691	95,338830	112,968217	134,209936	159,817286	190,698887	227,949890	272,889233	327,104080	819,223312

Fator de Formação de Capitais

n/i	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%	20%
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	0,497512	0,495050	0,492611	0,490196	0,487805	0,485437	0,483092	0,480769	0,478469	0,476190	0,473934	0,471698	0,469484	0,467290	0,465116	0,454545
3	0,330022	0,326755	0,323530	0,320349	0,317209	0,314110	0,311052	0,308034	0,305055	0,302115	0,299213	0,296349	0,293522	0,290731	0,287977	0,274725
4	0,246281	0,242624	0,239027	0,235490	0,232012	0,228591	0,225228	0,221921	0,218669	0,215471	0,212326	0,209234	0,206194	0,203205	0,200265	0,186289
5	0,196040	0,192158	0,188355	0,184627	0,180975	0,177396	0,173891	0,170456	0,167092	0,163797	0,160570	0,157410	0,154315	0,151284	0,148316	0,134380
6	0,162548	0,158526	0,154598	0,150762	0,147017	0,143363	0,139796	0,136315	0,132920	0,129607	0,126377	0,123226	0,120153	0,117157	0,114237	0,100706
7	0,138628	0,134512	0,130506	0,126610	0,122820	0,119135	0,115553	0,112072	0,108691	0,105405	0,102215	0,099118	0,096111	0,093192	0,090360	0,077424
8	0,120690	0,116510	0,112456	0,108528	0,104722	0,101036	0,097468	0,094015	0,090674	0,087444	0,084321	0,081303	0,078387	0,075570	0,072850	0,060609
9	0,106740	0,102515	0,098434	0,094493	0,090690	0,087022	0,083486	0,080080	0,076799	0,073641	0,070602	0,067679	0,064869	0,062168	0,059574	0,048079
10	0,095582	0,091327	0,087231	0,083291	0,079505	0,075868	0,072378	0,069029	0,065820	0,062745	0,059801	0,056984	0,054290	0,051714	0,049252	0,038523
11	0,086454	0,082178	0,078077	0,074149	0,070389	0,066793	0,063357	0,060076	0,056947	0,053963	0,051121	0,048415	0,045841	0,043394	0,041069	0,031104
12	0,078849	0,074560	0,070462	0,066552	0,062825	0,059277	0,055902	0,052695	0,049651	0,046763	0,044027	0,041437	0,038986	0,036669	0,034481	0,025265
13	0,072415	0,068118	0,064030	0,060144	0,056456	0,052960	0,049651	0,046522	0,043567	0,040779	0,038151	0,035677	0,033350	0,031164	0,029110	0,020620
14	0,066901	0,062602	0,058526	0,054669	0,051024	0,047585	0,044345	0,041297	0,038433	0,035746	0,033228	0,030871	0,028667	0,026609	0,024688	0,016893
15	0,062124	0,057825	0,053767	0,049941	0,046342	0,042963	0,039795	0,036830	0,034059	0,031474	0,029065	0,026824	0,024742	0,022809	0,021017	0,013882
16	0,057945	0,053650	0,049611	0,045820	0,042270	0,038952	0,035858	0,032977	0,030300	0,027817	0,025517	0,023390	0,021426	0,019615	0,017948	0,011436
17	0,054258	0,049970	0,045953	0,042199	0,038699	0,035445	0,032425	0,029629	0,027046	0,024664	0,022471	0,020457	0,018608	0,016915	0,015367	0,009440
18	0,050982	0,046702	0,042709	0,038993	0,035546	0,032357	0,029413	0,026702	0,024212	0,021930	0,019843	0,017937	0,016201	0,014621	0,013186	0,007805
19	0,048052	0,043782	0,039814	0,036139	0,032745	0,029621	0,026753	0,024128	0,021730	0,019547	0,017563	0,015763	0,014134	0,012663	0,011336	0,006462
20	0,045415	0,041157	0,037216	0,033582	0,030243	0,027185	0,024393	0,021852	0,019546	0,017460	0,015576	0,013879	0,012354	0,010986	0,009761	0,005357
21	0,043031	0,038785	0,034872	0,031280	0,027996	0,025005	0,022289	0,019832	0,017617	0,015624	0,013838	0,012240	0,010814	0,009545	0,008417	0,004444
22	0,040864	0,036631	0,032747	0,029199	0,025971	0,023046	0,020406	0,018032	0,015905	0,014005	0,012313	0,010811	0,009479	0,008303	0,007266	0,003690
23	0,038886	0,034668	0,030814	0,027309	0,024137	0,021278	0,018714	0,016422	0,014382	0,012572	0,010971	0,009560	0,008319	0,007231	0,006278	0,003065
24	0,037073	0,032871	0,029047	0,025587	0,022471	0,019679	0,017189	0,014978	0,013023	0,011300	0,009787	0,008463	0,007308	0,006303	0,005430	0,002548
25	0,035407	0,031220	0,027428	0,024012	0,020952	0,018227	0,015811	0,013679	0,011806	0,010168	0,008740	0,007500	0,006426	0,005498	0,004699	0,002119
26	0,033869	0,029699	0,025938	0,022567	0,019564	0,016904	0,014561	0,012507	0,010715	0,009159	0,007813	0,006652	0,005655	0,004800	0,004070	0,001762
27	0,032446	0,028293	0,024564	0,021239	0,018292	0,015697	0,013426	0,011448	0,009735	0,008258	0,006989	0,005904	0,004979	0,004193	0,003526	0,001467
28	0,031124	0,026990	0,023293	0,020013	0,017123	0,014593	0,012392	0,010489	0,008852	0,007451	0,006257	0,005244	0,004387	0,003664	0,003057	0,001221

Fator de Valor Atual

n/i	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%	20%
1	0,990099	0,980392	0,970874	0,961538	0,952381	0,943396	0,934579	0,925926	0,917431	0,909091	0,900901	0,892857	0,884956	0,877193	0,869565	0,833333
2	1,970395	1,941561	1,913470	1,886095	1,859410	1,833393	1,808018	1,783265	1,759111	1,735537	1,712523	1,690051	1,668102	1,646661	1,625709	1,527778
3	2,940985	2,883883	2,828611	2,775091	2,723248	2,673012	2,624316	2,577097	2,531295	2,486852	2,443715	2,401831	2,361153	2,321632	2,283225	2,106481
4	3,901966	3,807729	3,717098	3,629895	3,545951	3,465106	3,387211	3,312127	3,239720	3,169865	3,102446	3,037349	2,974471	2,913712	2,854978	2,588735
5	4,853431	4,713460	4,579707	4,451822	4,329477	4,212364	4,100197	3,992710	3,889651	3,790787	3,695897	3,604776	3,517231	3,433081	3,352155	2,990612
6	5,795476	5,601431	5,417191	5,242137	5,075692	4,917324	4,766540	4,622880	4,485919	4,355261	4,230538	4,111407	3,997550	3,888668	3,784483	3,325510
7	6,728195	6,471991	6,230283	6,002055	5,786373	5,582381	5,389289	5,206370	5,032953	4,868419	4,712196	4,563757	4,422610	4,288305	4,160420	3,604592
8	7,651678	7,325481	7,019692	6,732745	6,463213	6,209794	5,971299	5,746639	5,534819	5,334926	5,146123	4,967640	4,798770	4,638864	4,487322	3,837160
9	8,566018	8,162237	7,786109	7,435332	7,107822	6,801692	6,515232	6,246888	5,995247	5,759024	5,537048	5,328250	5,131655	4,946372	4,771584	4,030967
10	9,471305	8,982585	8,530203	8,110896	7,721735	7,360087	7,023582	6,710081	6,417658	6,144567	5,889232	5,650223	5,426243	5,216116	5,018769	4,192472
11	10,367628	9,786848	9,252624	8,760477	8,306414	7,886875	7,498674	7,138964	6,805191	6,495061	6,206515	5,937699	5,686941	5,452733	5,233712	4,327060
12	11,255077	10,575341	9,954004	9,385074	8,863252	8,383844	7,942686	7,536078	7,160725	6,813692	6,492356	6,194374	5,917647	5,660292	5,420619	4,439217
13	12,133740	11,348374	10,634955	9,985648	9,393573	8,852683	8,357651	7,903776	7,486904	7,103356	6,749870	6,423548	6,121812	5,842362	5,583147	4,532681
14	13,003703	12,106249	11,296073	10,563123	9,898641	9,294984	8,745468	8,244237	7,786150	7,366687	6,981865	6,628168	6,302488	6,002072	5,724476	4,610567
15	13,865053	12,849264	11,937935	11,118387	10,379658	9,712249	9,107914	8,559479	8,060688	7,606080	7,190870	6,810864	6,462379	6,142168	5,847370	4,675473
16	14,717874	13,577709	12,561102	11,652296	10,837770	10,105895	9,446649	8,851369	8,312558	7,823709	7,379162	6,973986	6,603875	6,265060	5,954235	4,729561
17	15,562251	14,291872	13,166118	12,165669	11,274066	10,477260	9,763223	9,121638	8,543631	8,021553	7,548794	7,119630	6,729093	6,372859	6,047161	4,774634
18	16,398269	14,992031	13,753513	12,659297	11,689587	10,827603	10,059087	9,371887	8,755625	8,201412	7,701617	7,249670	6,839905	6,467420	6,127966	4,812195
19	17,226008	15,678462	14,323799	13,133939	12,085321	11,158116	10,335595	9,603599	8,950115	8,364920	7,839294	7,365777	6,937969	6,550369	6,198231	4,843496
20	18,045553	16,351433	14,877475	13,590326	12,462210	11,469921	10,594014	9,818147	9,128546	8,513564	7,963328	7,469444	7,024752	6,623131	6,259331	4,869580
21	18,856983	17,011209	15,415024	14,029160	12,821153	11,764077	10,835527	10,016803	9,292244	8,648694	8,075070	7,562003	7,101550	6,686957	6,312462	4,891316
22	19,660379	17,658048	15,936917	14,451115	13,163003	12,041582	11,061240	10,200744	9,442425	8,771540	8,175739	7,644646	7,169513	6,742944	6,358663	4,909430
23	20,455821	18,292204	16,443608	14,856842	13,488574	12,303379	11,272187	10,371059	9,580207	8,883218	8,266432	7,718434	7,229658	6,792056	6,398837	4,924525
24	21,243387	18,913926	16,935542	15,246963	13,798642	12,550358	11,469334	10,528758	9,706612	8,984744	8,348137	7,784316	7,282883	6,835137	6,433771	4,937104
25	22,023156	19,523456	17,413148	15,622080	14,093945	12,783356	11,653583	10,674776	9,822580	9,077040	8,421745	7,843139	7,329985	6,872927	6,464149	4,947587
26	22,795204	20,121036	17,876842	15,982769	14,375185	13,003166	11,825779	10,809978	9,928972	9,160945	8,488058	7,895660	7,371668	6,906077	6,490564	4,956323
27	23,559608	20,706898	18,327031	16,329586	14,643034	13,210534	11,986709	10,935165	10,026580	9,237223	8,547800	7,942554	7,408556	6,935155	6,513534	4,963602
28	24,316443	21,281272	18,764108	16,663063	14,898127	13,406164	12,137111	11,051078	10,116128	9,306567	8,601622	7,984423	7,441200	6,960662	6,533508	4,969668

Fator de Recuperação de Capitais

n/i	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%	20%
1	1,010000	1,020000	1,030000	1,040000	1,050000	1,060000	1,070000	1,080000	1,090000	1,100000	1,110000	1,120000	1,130000	1,140000	1,150000	1,200000
2	0,507512	0,515050	0,522611	0,530196	0,537805	0,545437	0,553092	0,560769	0,568469	0,576190	0,583934	0,591698	0,599484	0,607290	0,615116	0,654545
3	0,340022	0,346755	0,353530	0,360349	0,367209	0,374110	0,381052	0,388034	0,395055	0,402115	0,409213	0,416349	0,423522	0,430731	0,437977	0,474725
4	0,256281	0,262624	0,269027	0,275490	0,282012	0,288591	0,295228	0,301921	0,308669	0,315471	0,322326	0,329234	0,336194	0,343205	0,350265	0,386289
5	0,206040	0,212158	0,218355	0,224627	0,230975	0,237396	0,243891	0,250456	0,257092	0,263797	0,270570	0,277410	0,284315	0,291284	0,298316	0,334380
6	0,172548	0,178526	0,184598	0,190762	0,197017	0,203363	0,209796	0,216315	0,222920	0,229607	0,236377	0,243226	0,250153	0,257157	0,264237	0,300706
7	0,148628	0,154512	0,160506	0,166610	0,172820	0,179135	0,185553	0,192072	0,198691	0,205405	0,212215	0,219118	0,226111	0,233192	0,240360	0,277424
8	0,130690	0,136510	0,142456	0,148528	0,154722	0,161036	0,167468	0,174015	0,180674	0,187444	0,194321	0,201303	0,208387	0,215570	0,222850	0,260609
9	0,116740	0,122515	0,128434	0,134493	0,140690	0,147022	0,153486	0,160080	0,166799	0,173641	0,180602	0,187679	0,194869	0,202168	0,209574	0,248079
10	0,105582	0,111327	0,117231	0,123291	0,129505	0,135868	0,142378	0,149029	0,155820	0,162745	0,169801	0,176984	0,184290	0,191714	0,199252	0,238523
11	0,096454	0,102178	0,108077	0,114149	0,120389	0,126793	0,133357	0,140076	0,146947	0,153963	0,161121	0,168415	0,175841	0,183394	0,191069	0,231104
12	0,088849	0,094560	0,100462	0,106552	0,112825	0,119277	0,125902	0,132695	0,139651	0,146763	0,154027	0,161437	0,168986	0,176669	0,184481	0,225265
13	0,082415	0,088118	0,094030	0,100144	0,106456	0,112960	0,119651	0,126522	0,133567	0,140779	0,148151	0,155677	0,163350	0,171164	0,179110	0,220620
14	0,076901	0,082602	0,088526	0,094669	0,101024	0,107585	0,114345	0,121297	0,128433	0,135746	0,143228	0,150871	0,158667	0,166609	0,174688	0,216893
15	0,072124	0,077825	0,083767	0,089941	0,096342	0,102963	0,109795	0,116830	0,124059	0,131474	0,139065	0,146824	0,154742	0,162809	0,171017	0,213882
16	0,067945	0,073650	0,079611	0,085820	0,092270	0,098952	0,105858	0,112977	0,120300	0,127817	0,135517	0,143390	0,151426	0,159615	0,167948	0,211436
17	0,064258	0,069970	0,075953	0,082199	0,088699	0,095445	0,102425	0,109629	0,117046	0,124664	0,132471	0,140457	0,148608	0,156915	0,165367	0,209440
18	0,060982	0,066702	0,072709	0,078993	0,085546	0,092357	0,099413	0,106702	0,114212	0,121930	0,129843	0,137937	0,146201	0,154621	0,163186	0,207805
19	0,058052	0,063782	0,069814	0,076139	0,082745	0,089621	0,096753	0,104128	0,111730	0,119547	0,127563	0,135763	0,144134	0,152663	0,161336	0,206462
20	0,055415	0,061157	0,067216	0,073582	0,080243	0,087185	0,094393	0,101852	0,109546	0,117460	0,125576	0,133879	0,142354	0,150986	0,159761	0,205357
21	0,053031	0,058785	0,064872	0,071280	0,077996	0,085005	0,092289	0,099832	0,107617	0,115624	0,123838	0,132240	0,140814	0,149545	0,158417	0,204444
22	0,050864	0,056631	0,062747	0,069199	0,075971	0,083046	0,090406	0,098032	0,105905	0,114005	0,122313	0,130811	0,139479	0,148303	0,157266	0,203690
23	0,048886	0,054668	0,060814	0,067309	0,074137	0,081278	0,088714	0,096422	0,104382	0,112572	0,120971	0,129560	0,138319	0,147231	0,156278	0,203065
24	0,047073	0,052871	0,059047	0,065587	0,072471	0,079679	0,087189	0,094978	0,103023	0,111300	0,119787	0,128463	0,137308	0,146303	0,155430	0,202548
25	0,045407	0,051220	0,057428	0,064012	0,070952	0,078227	0,085811	0,093679	0,101806	0,110168	0,118740	0,127500	0,136426	0,145498	0,154699	0,202119
26	0,043869	0,049699	0,055938	0,062567	0,069564	0,076904	0,084561	0,092507	0,100715	0,109159	0,117813	0,126652	0,135655	0,144800	0,154070	0,201762
27	0,042446	0,048293	0,054564	0,061239	0,068292	0,075697	0,083426	0,091448	0,099735	0,108258	0,116989	0,125904	0,134979	0,144193	0,153526	0,201467
28	0,041124	0,046990	0,053293	0,060013	0,067123	0,074593	0,082392	0,090489	0,098852	0,107451	0,116257	0,125244	0,134387	0,143664	0,153057	0,201221

REFERÊNCIAS BÁSICAS

ASSAF NETO, Alexandre. *Matemática financeira e suas aplicações*. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2000.

BELO, Haroldo da Costa. *Matemática financeira*. Volume I. Rio de Janeiro: Fundação CEDERJ, 2008.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

AYRES Jr., Frank. *Matemática financeira*. São Paulo: Mcgraw-Hill do Brasil, 1981. Coleção Schaum.

BORNATTO, Gilmar. Matemática financeira. Material de Apoio para o Curso de Administração da Business & Marketing School Faculdade Internacional.

HAZZAN, Samuel; POMPEO, José Nicolau. *Matemática financeira*. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2007.

MATEMÁTICA Financeira, Equivalência de Capitais a Juros Simples. Disponível em: < http://matematicafinanceira.webnode.com.br/capitaliza%C3%A7%C3%A3o%20simples/equival%C3%AAncia%20de%20capitais%20a%20juros%20simples-/ >. Acesso em 10 de janeiro de 2017.

VIEIRA SOBRINHO, José Dutra. *Matemática financeira*. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2006.

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

Universidade Federal da Bahia

Matemática Financeira

Vivemos em um mundo onde precisamos estar sempre capacitados para resolver os diversos tipos de problemas que possam surgir. Desenvolver o raciocínio de maneira rápida e objetiva é um dom bastante necessário para edificarmos uma solução para quaisquer tipos de dificuldades.

O estudo da Matemática Financeira o habilitará a encontrar, com mais facilidade, a solução para diversos desafi os, tanto no campo profi ssional, quanto no campo pessoal. Controlar as finanças é um dos maiores desafios de um empreendedor.

A Matemática Financeira possui ferramentas necessárias para a análise do cotidiano financeiro, por diversos pontos de vista, com o objetivo de planejar a vida financeira tanto de uma empresa como de um indivíduo.

PROGRAD
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
Ciências Contábeis
UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
SEAD
Superintendência de Educação a Distância | UFBA
UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
NELT NÚCLEO DE ESTUDOS DE Linguagens & Tecnologias