



Universidade Federal da Bahia  
Instituto de Matemática / Escola Politécnica

Programa de Pós-Graduação em Mecatrônica

**CONTROLE PREDITIVO COM GARANTIA  
DE ESTABILIDADE APLICADO EM  
SISTEMAS INSTÁVEIS E INTEGRADORES**

Odilon Santana Luiz de Abreu

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Salvador  
23 de Março de 2018



ODILON SANTANA LUIZ DE ABREU

**CONTROLE PREDITIVO COM GARANTIA DE ESTABILIDADE  
APLICADO EM SISTEMAS INSTÁVEIS E INTEGRADORES**

Esta Dissertação de Mestrado foi apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mecatrônica da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Mecatrônica.

Orientador: Prof. Dr. Márcio André Fernandes Martins

Salvador  
23 de Março de 2018

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Universitário de Bibliotecas (SIBI/UFBA),  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Abreu, Odilon Santana Luiz de  
Controle preditivo com garantia de estabilidade  
aplicado em sistemas instáveis e integradores /  
Odilon Santana Luiz de Abreu. -- Salvador, 2018.  
69 f. : il

Orientador: Márcio André Fernandes Martins.  
Dissertação (Mestrado - Pós-graduação em Mecatrônica) -  
- Universidade Federal da Bahia, Escola Politécnica,  
2018.

1. Controle Preditivo. 2. Estabilidade . 3.  
Pêndulo invertido. 4. Reator químico . I. Martins,  
Márcio André Fernandes. II. Título.

## TERMO DE APROVAÇÃO

ODILON SANTANA LUIZ DE ABREU

### CONTROLE PREDITIVO COM GARANTIA DE ESTABILIDADE APLICADO EM SISTEMAS INSTÁVEIS E INTEGRADORES

Esta Dissertação de Mestrado foi julgada adequada à obtenção do título de Mestre em Mecatrônica e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Mecatrônica da Universidade Federal da Bahia.

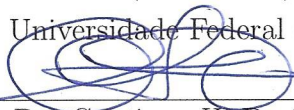
Salvador, 23 de Março de 2018



Prof. Dr. Márcio André F. Martins

(Orientador)

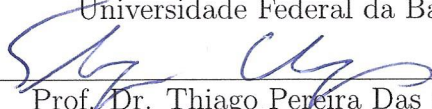
Universidade Federal da Bahia



Prof. Dr. Cristiano H. De Oliveira Fontes

(Examinador)

Universidade Federal da Bahia



Prof. Dr. Thiago Pereira Das Chagas

(Examinador)

Universidade Estadual de Santa Cruz



## AGRADECIMENTOS

Primeiramente a **Deus**, pela saúde e por esta oportunidade de vida e sabedoria.

À minha mãe (**Eugênia**), meu pai (**Odmar**), meus irmãos (**Odilton** e **Odílio**) e minha esposa (**Aline**), pela compreensão das horas nas quais tive de abdicar de vossa atenção e carinho, para a concretização deste árduo trabalho.

Também gostaria de agradecer aos meus orientadores, **Prof. Dr. Márcio André Fernandes Martins** que acompanhou e contribuiu de forma primordial à confecção deste trabalho e ao **Prof. Dr. Leizer Schnitman**, por todo o conhecimento e incentivo que me deu durante o desenvolvimento da dissertação.

Ao Centro de Capacitação Tecnológica em Automação Industrial, pela oportunidade de estudo e pela utilização de suas instalações e aos amigos em especial **Tiago, Marcos, Lúcia, Flávio, William, Orlando e Ricardo**.

Aos amigos do PEI **Erbet, Prof. Raony, Prof. Daniel, Rodrigo e Cibele**, pelas excelentes dicas e auxílios que foram fundamentais para o desenvolvimento do trabalho.

À toda equipe do LEA que de maneira indireta ajudou nos momentos de diversão e brincadeiras.

A todo o corpo docente, discente e funcionários do PPGM, que de forma direta e indireta contribuíram para a realização da pesquisa.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro durante os 24 meses necessários à realização deste trabalho.





## RESUMO

Este trabalho apresenta uma estratégia de controle preditivo com garantia de estabilidade para sistemas constituídos de modos instáveis e integradores. Tais características dinâmicas tornam mais difícil o controle do sistema, principalmente quando a síntese do controlador busca a garantia de estabilidade do sistema em malha fechada. Neste trabalho, é proposta uma lei de controle livre de erro de regime permanente baseada em um único problema de otimização, sendo que a estabilidade em malha fechada é alcançada adotando um horizonte de predição infinito, que juntamente com a imposição de um conjunto de restrições terminais suavizadas associadas estados instáveis e integradores do sistema, garante sua viabilidade. Os resultados obtidos a partir dos cenários simulados, apontam uma solução eficiente para melhorar sistematicamente a malha de controle em dois sistemas, reator químico e pêndulo invertido.

**Palavras-chave:** Controle Preditivo, Estabilidade, Pêndulo Invertido e Reator Químico



## ABSTRACT

This study presents a stabilizing nominally model predictive control strategy of systems composed of unstable and integrating modes. Such dynamic features make more difficult the systems control, mainly when the controller synthesis seeks to guarantee the closed loop stability. In this work, it is proposed an offset-free law control based on an only optimization problem, and the closed-loop stability is achieved by adopting an infinite prediction horizon, along with imposing of suitable set of slacked terminal constraints associated with the unstable and integrating states of system, thus assuring the controller feasibility. The results obtained from the simulated scenarios, point to an efficient solution to systematically improve the control mesh in two systems, chemical reactor and inverted pendulum.

**Keywords:** Predictive Control, Stability, Inverted Pendulum and Chemical Reactor



# SUMÁRIO

<b>Lista de Figuras</b>	xiii
<b>Lista de Tabelas</b>	xv
<b>Capítulo 1—Introdução</b>	1
1.1 MPC com estabilidade nominal garantida . . . . .	2
1.2 Objetivos do trabalho . . . . .	5
1.3 Publicação . . . . .	6
1.4 Estrutura do trabalho . . . . .	6
<b>Capítulo 2—Modelo em espaço de estados</b>	9
2.1 Espaço de estados para um sistema SISO . . . . .	9
2.2 Espaço de estados para sistemas MIMO . . . . .	12
2.3 Comentários . . . . .	14
<b>Capítulo 3—Controle IHMPC por faixas e com targets econômicos</b>	15
3.1 IHMPC para sistemas estáveis, instáveis e integradores . . . . .	15
3.2 Extensão do Problema P1 . . . . .	22
3.3 Extensão do Problema P2 . . . . .	24

3.4	Extensão do Problema P3 . . . . .	27
3.5	Comentários . . . . .	30
<b>Capítulo 4—Resultados</b>		<b>31</b>
4.1	Estudo de Caso: Sistema Reator Químico . . . . .	31
4.1.1	Modelo em estudo . . . . .	31
4.1.2	Modelo matemático . . . . .	32
4.1.3	Simulação em malha fechada . . . . .	34
4.2	Estudo de Caso: Sistema Pêndulo invertido . . . . .	40
4.2.1	Modelo em estudo . . . . .	40
4.2.2	Modelo matemático . . . . .	41
4.2.3	Simulação em malha fechada . . . . .	45
4.3	Comentários . . . . .	53
<b>Capítulo 5—Conclusões</b>		<b>55</b>
5.1	Contribuições . . . . .	55
5.2	Comentários finais . . . . .	56
5.3	Trabalhos futuros . . . . .	57
<b>Apêndice A—Programação quadrática</b>		<b>59</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>		<b>67</b>

## LISTA DE FIGURAS

1.1	Controle por faixa: variável do processo (-) e os limites (--) . . . . .	4
2.1	Trajetória $[y(t)]_k$ (-); Trajetória atualizada $[y(t)']_k$ (-) . . . . .	10
3.1	Estrutura do novo controlador . . . . .	26
4.1	Representação esquemática do sistema CSTR . . . . .	32
4.2	Esquema da malha de controle CSTR . . . . .	34
4.3	Desempenho das controladas (-) e as faixas (--) . . . . .	36
4.4	Desempenho das manipuladas (-); às restrições (--) e o <i>target</i> $\mathbf{u}_3$ (--) . . . . .	37
4.5	Função objetivo - $V_{4,k}$ . . . . .	38
4.6	Atuação das variáveis de folga nas saídas ( $\delta_{\mathbf{y}}$ ) e no <i>target</i> ( $\delta_{\mathbf{u}}$ ) . . . . .	39
4.7	Atuação das variáveis de folga nos modos instáveis ( $\delta_{\mathbf{un}}$ ) e integradores ( $\delta_{\mathbf{i}}$ ) . . . . .	39
4.8	Pêndulo invertido e os seus componentes: <b>a)</b> base; <b>b)</b> braço e <b>c)</b> haste . . . . .	41
4.9	Resposta em malhada aberta para $G(s)$ (-), OPOM (*) e Não linear (o) . . . . .	44
4.10	Esquema de malha de controle do pêndulo invertido . . . . .	45
4.11	Controlada com peso $\mathbf{S}_y$ (-), Controlada sem o peso $\mathbf{S}_y$ (-) e as faixas (--) . . . . .	48
4.12	Manipulada com peso $\mathbf{S}_y$ (-), Manipulada sem peso $\mathbf{S}_y$ (-) e a restrição (--) . . . . .	49
4.13	Função objetivo com peso $\mathbf{S}_y$ (-) e Função objetivo sem peso $\mathbf{S}_y$ (-) . . . . .	50
4.14	Controlada para massa nominal (-), massa 50% (-) e massa 80% (-) . . . . .	51
4.15	Manipulada para massa nominal (-), massa 50% (-) e massa 80% (-) e a restrição (--) . . . . .	52





## LISTA DE TABELAS

4.1	Parâmetros nominais do sistema CSTR . . . . .	33
4.2	Faixas desejáveis . . . . .	35
4.3	Restrições das entradas do sistema . . . . .	35
4.4	Parâmetros de sintonia . . . . .	35
4.5	Parâmetros nominais do sistema pêndulo invertido . . . . .	42
4.6	Restrições da entrada do sistema em volts . . . . .	47
4.7	Faixas desejáveis . . . . .	51



## NOMENCLATURA

**A** - Matriz característica do modelo incremental em malha aberta

**B** - Matriz de distribuição das entradas do modelo incremental em malha aberta

**C** - Matriz característica do modelo incremental em malha aberta

$c$  - Constante da função objetivo

**D**<sup>0</sup> - Matriz dos ganhos de regime permanente

**D**<sup>st</sup> - Matriz dos ganhos de regime permanente modos estáveis

**D**<sup>num</sup> - Matriz dos ganhos de regime permanente modos instáveis

$d$  - Coeficientes obtidos pela expansão em frações parciais de  $G_{i,j}(s)$

**F**<sup>st</sup> - Submatriz da matriz **A** relativa aos estados estáveis

**F**<sup>num</sup> - Submatriz da matriz **A** relativa aos estados instáveis

**F** - Vetor gradiente da função objetivo

$G_{i,j}(s)$  - Função de transferência entre uma saída  $i$  e uma entrada  $j$

**H** - Matriz Hessiana da função objetivo do problema de programação quadrática

**I**<sub>ny</sub> - Matriz identidade de dimensão  $n_y \times n_y$

**I**<sub>nu</sub> - Matriz identidade de dimensão  $n_u \times n_u$

**J** - Matriz empilhamento

$k$  - Instante qualquer de tempo discreto

- Kf** - *Ganho do observador de estados (Filtro de Kalman)*
- $\bar{\mathbf{M}}$  - *Matriz de empilhamento nas predições das entradas*
- M** - *Matriz auxiliar para empilhamento*
- m* - *Horizonte de controle das variáveis manipuladas*
- $na_{i,j}$  - *Número de polos da função de transferência entre a saída  $y_i$  e a entrada  $u_j$*
- $nc_{i,j}$  - *Número de polos da função de transferência entre a saída  $y_i$  e a entrada  $u_j$*
- nx* - *Número de estados*
- nst* - *Número de estados estáveis*
- nun* - *Número de estados instáveis*
- ni* - *Número de estados integradores*
- nu* - *Número de entradas (variável manipulada)*
- ny* - *Número de saídas (variável controlada)*
- P** - *Matriz auxiliar para empilhamento*
- $\bar{\mathbf{Q}}$  - *Matriz de Lyapunov*
- $\mathbf{Q}_y$  - *Matriz de ponderação das variáveis controladas*
- $\mathbf{Q}_u$  - *Matriz de ponderação do target*
- R** - *Matriz de supressão das variáveis manipuladas*
- r* - *Polo da função de transferência*
- S* - *Resposta ao degrau*
- $\mathbf{S}_y$  - *Matriz de ponderação da variável de folga  $\delta_y$*
- $\mathbf{S}_u$  - *Matriz de ponderação da variável de folga  $\delta_u$*
- $\mathbf{S}_{un}$  - *Matriz de ponderação da variável de folga  $\delta_{un}$*

- $\mathbf{S}_i$  - Matriz de ponderação da variável de folga  $\delta_i$
- $t$  - Tempo
- $u$  - Variáveis manipuladas
- $u_{des}$  - Targets na variáveis manipuladas
- $u_{max}$  - Valores máximos para as variáveis manipuladas
- $u_{min}$  - Valores mínimos para as variáveis manipuladas
- $\mathbb{U}$  - Espaço de região viável de solução das variáveis manipuladas
- $\mathbf{y}_{sp}$  - Referências ou “targets” para variáveis controladas
- $y_{min}$  - Valores mínimos para as variáveis controladas
- $y_{max}$  - Valores máximos para as variáveis controladas
- $V_k$  - Função objetivo num dado instante de tempo  $k$
- $V_k^*$  - Função objetivo ótimo num dado instante de tempo  $k$
- $\tilde{V}_k$  - Função objetivo herdada num dado instante de tempo  $k$
- $\mathbf{x}$  - Vetor de estados do modelo
- $\mathbf{x}^s$  - Vetor de estados artificiais
- $\mathbf{x}^{st}$  - Vetor de estados estáveis
- $\mathbf{x}^{un}$  - Vetor de estados instáveis
- $\mathbf{x}^i$  - Vetor de estados integradoras
- $\tilde{\mathbf{x}}^s$  - Vetor de estados artificiais usando a solução herdada
- $\tilde{\mathbf{x}}^{st}$  - Vetor de estados estáveis usando a solução herdada
- $\tilde{\mathbf{x}}^{un}$  - Vetor de estados instáveis usando a solução herdada
- $\tilde{\mathbf{x}}^i$  - Vetor de estados integradoras usando a solução herdada

### Símbolos Gregos

$\Delta t$  - *Período de amostragem*

$\Delta \mathbf{u}$  - *Vetor de variações nas variáveis manipuladas*

$\Psi^{\text{st}}$  - *Matriz da parcela dinâmica associada aos estados estáveis*

$\Psi^{\text{un}}$  - *Matriz da parcela dinâmica associada aos estados instáveis*

$\delta_s$  - *Variável de folga relacionada forma incremental do modelo*

$\delta_u$  - *Variável de folga relacionada ao targets*

$\delta_{\text{un}}$  - *Variável de folga relacionadas ao estados instáveis*

$\delta_i$  - *Variável de folga relacionadas ao estados integradores*

$\theta$  - *Valor de rotação do braço (pêndulo invertido)*

$\alpha$  - *Valor de translação da haste (pêndulo invertido)*

### Siglas

CSTR - *Continuous Stirred Tank Reactor*

QP - *Quadratic Programming*

MPC - *Model Predictive Control*

IHMPC - *Infinite Horizon Model Predictive Control*

MIMO - *Multi-Input Multi-Output*

OPOM - *Output Prediction Oriented Model*

SISO - *Single-Input Single-Output*

RTO - *Real-Time Optimization*

## Capítulo

# 1

*Neste capítulo é apresentada uma revisão bibliográfica que aborda sobre os controladores com estabilidade nominal garantida, usualmente empregados na engenharia de processos. Em seguida é retratada a contextualização do problema na qual conduziu o desenvolvimento de um controlador com propriedades estabilizantes, e por fim, são apresentados os objetivos e a estrutura da dissertação.*

## INTRODUÇÃO

MPC (*Model Predictive Control*) pertence a uma classe de controladores, que a partir de um modelo pré-definido do processo, é capaz de prever o comportamento futuro de um sistema para determinar uma sequência de controle ótima ao longo de um horizonte móvel, de forma a minimizar ou maximizar uma função objetivo em cada instante de amostragem (CAMACHO; ALBA, 2013).

As técnicas de controle preditivo foram inicialmente desenvolvidas no final da década de setenta por grupos de engenheiros e pesquisadores associados à indústria química e petrolífera, devido à necessidade de manter os processos em pontos de operações com maiores lucratividades e confiabilidade (MACIEJOWSKI, 2002). Por conta disso, o controlador se destacou e o motivo desse sucesso pode ser atribuído ao fato de que o MPC pode resolver de forma sistemática sistemas multivariáveis, desde aqueles com dinâmicas relativamente simples até outros mais complexos. Outras relevâncias importantes do controle preditivo são: a maneira natural de introduzir controle *feedforward* para compensar distúrbios, tratar de forma natural as restrições do processo, compensar os tempos mortos com facilidade, dentre outros (CAMACHO; ALBA, 2013).

Uma questão essencial na aplicação do MPC aos processos industriais é a estabilidade. Nas principais literaturas, a busca por controladores preditivos com estabilidade nominal vem crescendo nos últimos anos e uma das características mais relevantes deste

controlador consiste que, independentemente dos parâmetros de sintonia, e desde que o modelo do processo seja perfeito, ou seja, o modelo do controlador deve descrever exatamente a planta, a lei de controle vai ser sempre convergente. Mayne (2014) apresenta diversas tecnologias dos MPCs, e aponta os principais métodos essenciais para alcançar a estabilidade do sistema em malha fechada. Segundo o autor, os primeiros algoritmos implementados nas indústrias não garantiam a estabilidade do sistema, no entanto, a academia conduziu os esforços para investigar de forma minuciosa os efeitos do controlador quanto à estabilidade.

## 1.1 MPC COM ESTABILIDADE NOMINAL GARANTIDA

Rossiter (2003) destaca as propriedades necessárias para a síntese de controladores preditivos com estabilidade nominal garantida, a saber: adotar um horizonte de predição infinito e a viabilidade recursiva. Segundo o autor, deve-se seguir duas abordagens possíveis como sendo: conjuntos invariantes terminais, e restrições terminais. Na primeira abordagem, dois modos de controle são definidos. O primeiro deles é utilizado quando o sistema está longe do ponto de operação na qual é responsável por levar o sistema para uma região dentro do conjunto terminal e o segundo modo de controle baseia-se numa lei de controle ótimo para rastrear o valor desejado. Todavia há aspectos que limitam o uso desta abordagem, quais sejam: *i*) cálculos *off-line* e não triviais dos parâmetros do conjunto invariante, *ii*) o sistema pode ser tornar ineficaz se não conseguir conduzir a planta ao conjunto terminal, *iii*) a lei de controle adotada dentro do conjunto terminal é irrestrita, ou seja, as restrições são adotadas em modo *ad hoc* no cálculo dos parâmetros do conjunto, o que não garante efetivamente sua satisfação.

Uma forma de sobrepujar as limitações dos conjuntos invariantes terminais, é sintetizar um controlador preditivo com estabilidade nominal garantida através da segunda abordagem com o uso do custo e restrições terminais, a qual será o foco deste trabalho.

Os primeiros estudos sobre controladores MPC com estabilidade nominal baseada na abordagem de restrições terminais foram apresentados nos trabalhos de Rawlings e Muske (1993); Muske e Rawlings (1993a); Muske e Rawlings (1993b). A estratégia do controlador consiste em adotar um horizonte de predição infinito na função objetivo, na qual passa a conter uma série infinita de termos relacionados ao erro entre saídas previstas e o sinal de referência. Segundo os autores, a ideia é reescrever a função objetivo de horizonte de predição infinito em um termo de horizonte finito (até o horizonte de controle) e a parcela infinita, associada aos modos estáveis, passam a ser reformulada como um termo de custo terminal, ao passo que aos modos instáveis ou integradores desta



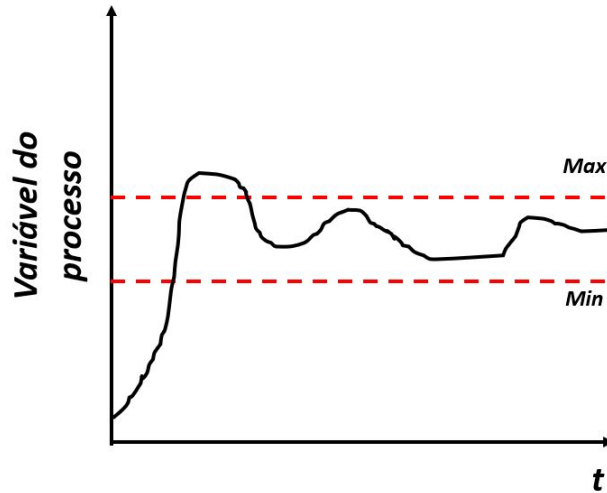
parcela, são impostas restrições terminais para limitar o crescimento da função objetivo. Alguns aspectos limitam a aplicação desse controlador, a saber: *i)* na arquitetura do controlador, duas camadas de otimização são utilizadas para resolver controle regulatório e servo-mecanismo; *ii)* problemas de infactibilidade são encontrados quando as restrições terminais não atendem aos estados instáveis; *iii)* a lei de controle não considerava explicitamente objetivos econômicos, dentre outros.

Diante disso, para contornar algumas restrições do controlador de Rawlings e Muske (1993); Muske e Rawlings (1993a); Muske e Rawlings (1993b), Odloak (2004) apresentou uma formulação alternativa, cujas principais vantagens são: *i)* o controlador utiliza uma camada de otimização para caso regulatório ou rastreador; *ii)* garantia de factibilidade com a inclusão das variáveis de folga na função objetivo *iii)* o erro em regime permanente é eliminado em virtude de adotar uma ação integral introduzida pela forma incremental das entradas. Para isso, Odloak (2004) utilizou uma nova formulação proveniente do trabalho Tvrzská de Gouvêa e Odloak (1997). Nesse artigo, os autores abordaram uma representação de modelo em espaço de estados, denominado como OPOM (*Output Prediction Oriented Model*), obtida através de uma expressão analítica da resposta ao degrau do sistema. O surgimento desse modelo teve como motivação a redução dos estados sem perdas das informações. Ao invés de se usar, como antes, extensos vetores de dados, como por exemplo no algoritmo DMC (*Dynamic Matrix Control*), esta formatação fez uso dos parâmetros das funções de transferência para gerar modelos em variáveis de estado a cada instante, na qual requerem menor tempo computacional e não comprometem a avaliação da estabilidade do sistema.

Contudo, Odloak (2004) só abordou esse tipo de controlador apenas para sistemas com os modos estáveis em malha aberta. Posteriormente Carrapiço e Odloak (2005) apresentaram uma extensão do controlador para sistemas com modos estáveis e integradores. Com essa nova abordagem, as infactibilidades geradas pela presença de distúrbios com magnitudes grandes são completamente eliminadas através da inserção de um conjunto de variáveis de folga que suavizam as restrições terminais, ampliando a região de viabilidade do controlador e garantindo assim as propriedades estabilizantes em um sistema da indústria de processos químicos com polos estáveis e integradores.

Posteriormente Alvarez et al. (2009) combinam as abordagens de Odloak (2004) e Carrapiço e Odloak (2005) e contribuem com a extensão do controlador com estabilidade nominal garantida para sistemas estáveis e modos integradores com características adicionais baseado no trabalho de González e Odloak (2009), a saber: inclusão de faixas nas variáveis controladas e definição dos objetivos econômicos (*targets*) nas manipuladas.

Segundo González e Odloak (2009) a estratégia de controle por faixa é implementada em aplicações em que os valores das referências das saídas controladas não são importantes, desde que eles permaneçam dentro dos limites mínimo e máximo especificados. A Figura 1.1 ilustra um exemplo.



**Figura 1.1** Controle por faixa: variável do processo (-) e os limites (- -)

Uma vez que uma ou mais variáveis controladas estejam dentro da faixa, o controlador não irá tomar ações de controle relacionadas a estas variáveis, e estas irão oscilar livremente enquanto estiverem dentro de sua faixa permitida. Nessas condições, haverá graus de liberdade adicionais para o sistema de controle atuar no *target* escolhido, no melhor ponto de operação de modo a maximizar ou minimizar um sistema, sem violar as suas restrições operacionais durante as transições.

Com o passar dos anos, Santoro e Odloak (2012) compreenderam que até então, a formulação do controlador por faixas e *targets* proposto por Alvarez et al. (2009) só aludiam a sistemas com modos estáveis e integradores. Nesse caso, visto que nos processos industriais as plantas apresentam atrasos nas entradas e nas saídas, os autores propuseram um novo MPC (*Infinite Horizon Model Predictive Control*) com estabilidade nominal e que abrange as faixas e *targets* para um sistemas com modos estáveis, integradores e com atrasos. Neste trabalho, os autores seguem os passos iniciais do modelo OPOM de Odloak (2004) com uma extensão que permite a incorporação dos tempos mortos no processo. Além disso, esse destaca a formulação do IHMPC em dois passos para provar a estabilidade do sistema. Um estudo de caso estudado por Carrapiço e Odloak (2005) é utilizado para avaliar o desempenho do controlador proposto.

Estendendo a abordagem anterior, Martins e Odloak (2016) desenvolveu uma nova formulação de IHMPC robusto com garantia de estabilidade, associando objetivos econômicos e faixas específicas em um sistema composto por modos estáveis, instáveis e tempos mortos. Neste trabalho, os autores destacam a formulação do controlador principalmente nos processos instáveis os quais não tinham sido abordados nas referências anteriores. Outras características desse controlador são: *i)* o modelo de predição é baseado na descrição multi-planta; *ii)* a estabilidade de Lyapunov é assegurada pela inclusão das restrições terminais; *iii)* o problema de otimização é tratado por apenas uma camada. Para efeito de comparação, Martins e Odloak (2016) sintonizam um MPC convencional e os resultados apresentaram uma superioridade do controlador robusto em relação ao MPC, principalmente quando são consideradas as incertezas do modelo em um sistema de reator químico industrial.

Com as abordagens de Odloak (2004), Carrapiço e Odloak (2005) e Martins e Odloak (2016), Yamashita et al. (2015) formularam um novo modelo OPOM para sistemas compostos por modos estáveis, instáveis e integradores. Por conta disso, um novo controlador IHMPC com estabilidade nominal foi sintetizado para um reator químico CSTR (*Continuous Stirred Tank Reactor*). Os resultados apontaram que o controlador proposto conseguiu manter o sistema em malha fechada nos pontos operacionais definidos, no entanto, a função objetivo não representava uma função de Lyapunov e a estabilidade assintótica do controlador não foi comprovada. Além disso, a lei de controle proposta não abrangia faixas e *targets*, proposto inicialmente por González e Odloak (2009).

Por conta disso, o trabalho de Yamashita et al. (2015) apresentou algumas lacunas, a saber: *i)* a questão de estabilidade em malha fechada para sistemas com modos instáveis e integradores; *ii)* controle por faixa; *iii)* a inclusão de objetivos econômicos na função objetivo. Dessa forma, aqui, é desenvolvida uma lei de controle IHMPC com estabilidade nominal garantida para sistemas com modos estáveis, instáveis e integradores, contemplando *targets* nas manipuladas e faixas nas controladas. A prova de estabilidade do controlador proposto em malha fechada é demonstrada, seguindo os passos padrão de Rawlings e Muske (1993), no entanto a factibilidade é garantida empregando-se a relaxação gradual das restrições terminais, resultantes do problema de otimização em um único passo.

## 1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO

Desenvolvimento de uma estratégia de controle preditivo de horizonte infinito com estabilidade nominal garantida a qual abrange *targets* nas manipuladas e faixas nas controladas

em um único problema de otimização para sistemas com polos estáveis, instáveis e integradores.

A seguir são apresentados alguns objetivos complementares deste trabalho:

- (i) Detalhamento de um modelo em espaço de estados que abrange os modos estáveis, instáveis e integradores baseado na expressão analítica da resposta ao degrau.
- (ii) A inclusão das variáveis de folga no problema de controle e a demonstração da estabilidade do controlador, adotando-se as restrições terminais, que são suficientes para cancelar o efeito dos modos instáveis e integradores no final do horizonte de controle.
- (iii) Avaliação do controlador em dois sistemas, a saber: *i*) verificação das propriedades estabilizantes do controlador proposto em um reator CSTR para o caso de controle regulatório e servo-mecanismo na forma nominal; *ii*) investigação do desempenho do controlador quando a planta não corresponde ao modelo, ou seja, quando há incertezas no sistema, sendo que o presente trabalho contemplará o sistema de pêndulo invertido.

### 1.3 PUBLICAÇÃO

1. Abreu, O. S. L.; Martins, M.A.F.; Schnitman, L.; Controle preditivo com garantia de estabilidade aplicado em um pêndulo invertido. XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente SBAI 2017. Anais... Porto Alegre - RS: UFRGS, 2017;

### 1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

Os demais capítulos deste trabalho estão organizados da forma como segue.

- **Capítulo 2:** Formulação do modelo em espaço de estados para sistemas constituídos de polos estáveis, instáveis e integradores que descrevem o comportamento dinâmico semelhante ao sistema em estudo. Entretanto faz-se uma revisão do modelo OPOM para um sistema SISO (*Single-Input Single-Output*) para uma melhor compreensão.
- **Capítulo 3:** Inicialmente faz-se apresentação de uma lei de controle IHMPC associada aos modos estáveis, instáveis e integradores sem o uso da variável de folga

na lei de controle. Em seguida uma nova extensão é agregada ao problema de controle, retratando as propriedades estabilizantes do controlador com a utilização das variáveis de folga. Posteriormente, é apresentado mais uma extensão com novas variáveis de folga no problema de otimização. Por fim, são demonstrados o desenvolvimento de uma lei de controle preditivo com estabilidade nominal garantida, contemplando faixas nas controladas e *targets* nas manipuladas.

- **Capítulo 4:** Descrição dos sistemas que caracterizam os modos estáveis, instáveis e integradores. Adicionalmente, são apresentados os modelos matemáticos que descrevem o comportamento dinâmico de cada planta e em sequência, simulações são realizadas em cada cenário proposto.
- **Capítulo 5:** Comentários finais sobre os resultados obtidos, contribuições e indicações de possíveis extensões do trabalho.



*Neste capítulo, inicialmente, será abordada a construção em detalhes do modelo em espaço de estados que contempla um polo estável, instável e integrador, através de uma expressão analítica da resposta ao degrau do sistema, contemplando a forma incremental das entradas, e portanto, uma ação integral, necessária para a síntese do controlador proposto em uma camada de otimização. Posteriormente, apresenta-se o modelo em espaço de estados para o caso multivariável.*

## MODELO EM ESPAÇO DE ESTADOS

### 2.1 ESPAÇO DE ESTADOS PARA UM SISTEMA SISO

Uma forma alternativa de representar o comportamento de um sistema dinâmico é através da função de transferência no domínio de Laplace, como sendo:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s(s - r^{st})(s - r^{un})}, \quad (2.1)$$

na qual:  $Y(s)$  é o valor da saída;  $U(s)$  a entrada;  $s$  é o integrador;  $K$  uma constante;  $r^{st}$  é um polo estável e  $r^{un}$  um polo instável. A resposta ao degrau unitário dessa função, ou seja,  $U(s) = \frac{1}{s}$ , é dada por:

$$Y(s) = \frac{K}{s^2(s - r^{st})(s - r^{un})}. \quad (2.2)$$

Segundo Ogata (2003) e Nise (2010), uma maneira de verificar a resposta no domínio do tempo na equação (2.2) é por meio da transformada inversa de Laplace, com o auxílio da técnica de expansão em frações parciais. Dessa forma a resposta no tempo passa a ser:

$$S(t) = -K + Ke^{r^{st}t} + Ke^{r^{un}t} + Kt, \quad (2.3)$$

ou de maneira simplificada

$$S(t) = d^0 + d^{st}e^{rst} + d^{un}e^{runt} + d^i t. \quad (2.4)$$

Os parâmetros  $d^0$ ,  $d^{st}$ ,  $d^{un}$  e  $d^i$  são constantes. Em seguida, discretizando a equação (2.4) no intervalo de amostragem  $\Delta t$ , pode-se gerar um modelo em espaço de estados na forma incremental das entradas do sistema, detalhado como segue.

1. Admita-se que no instante de amostragem  $k$ , a saída do sistema (curva da sua dinâmica) possa ser representada por uma função similar (parametrizada) à da resposta ao degrau dada pela equação (2.4), na seguinte forma:

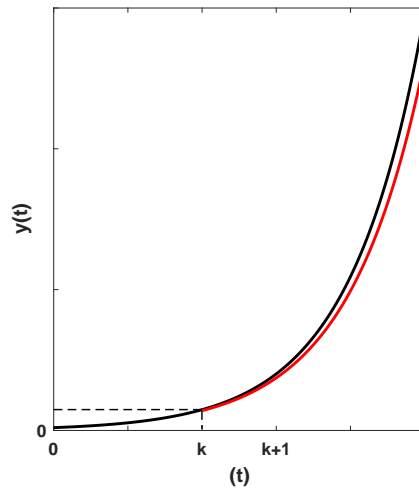
$$[y(t)]_k = [x^s]_k + [x^{st}]_k e^{rst} + [x^{un}]_k e^{runt} + [x^i]_k t, \quad (2.5)$$

em que  $[x^s]_k$ ,  $[x^{st}]_k$ ,  $[x^{un}]_k$  e  $[x^i]_k$ , são os parâmetros de trajetória do sistema no instante  $k$ .

2. Em seguida, atualize a trajetória de saída com a entrada atual do sistema (ação de controle)  $\Delta u(k|k)$ , cuja a expressão resultante da convolução torna-se:

$$[y(t)']_k = [y(t)]_k + S(t)\Delta u(k|k). \quad (2.6)$$

A título de exemplo, a Figura 2.1 ilustra a ideia do item 1 e 2.



**Figura 2.1** Trajetória  $[y(t)]_k$  (-); Trajetória atualizada  $[y(t)']_k$  (-)



3. Agora mova-se a saída em (2.6) para o próximo instante de amostragem em  $k + 1$ , e recalcule a trajetória usando esse novo instante como nova origem, o que implica em:

$$[y(t)]_{k+1} \approx [y'(t + \Delta t)]_k = [y(t + \Delta t)]_k + S(t + \Delta t)\Delta u(k|k). \quad (2.7)$$

Agora, substituindo as equações (2.4) e (2.5) na (2.7), resulta em:

$$\begin{aligned} y(t)_{k+1} = & [x^s]_k + [x^{st}]_k e^{r^{st}(t+\Delta t)} + [x^{un}]_k e^{r^{un}(t+\Delta t)} + [x^i]_k(t + \Delta t) \\ & + (d^0 + d^{st} e^{r^{st}(t+\Delta t)} + d^{un} e^{r^{un}(t+\Delta t)} + d^i(t + \Delta t))\Delta u(k|k). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Rescrevendo a curva do sistema em  $k + 1$  na forma parametrizada padrão, como na equação (2.4) tem-se:

$$[y(t)]_{k+1} = [x^s]_{k+1} + [x^{st}]_{k+1} e^{r^{st}t} + [x^{un}]_{k+1} e^{r^{un}t} + [x^i]_{k+1}t, \quad (2.9)$$

em que:

$$[x^s]_{k+1} = [x^s]_k + [x^i]_k \Delta t + (d^0 + d^i t + \Delta t)\Delta u(k|k), \quad (2.10)$$

$$[x^{st}]_{k+1} = [x^{st}]_k e^{r^{st}\Delta t} + (d^{st} e^{r^{st}\Delta t})\Delta u(k|k), \quad (2.11)$$

$$[x^{un}]_{k+1} = [x^{un}]_k e^{r^{un}\Delta t} + (d^{un} e^{r^{un}\Delta t})\Delta u(k|k), \quad (2.12)$$

$$[x^i]_{k+1} = [x^i]_k + d^i \Delta u(k|k). \quad (2.13)$$

A partir da equação (2.5) pode-se observar que o valor da saída do sistema no instante  $k$  é calculado da seguinte forma:

$$[y]_k = [y(0)]_k = [x^s]_k + [x^{st}]_k + [x^{un}]_k. \quad (2.14)$$

Portanto as equações (2.10), (2.11), (2.12), (2.13) e (2.14), podem ser agrupadas na forma de variáveis de estado, a saber:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}^s(k+1) \\ \mathbf{x}^{st}(k+1) \\ \mathbf{x}^{un}(k+1) \\ \mathbf{x}^i(k+1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta t \\ 0 & e^{r^{st}\Delta t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{r^{un}\Delta t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}^s(k) \\ \mathbf{x}^{st}(k) \\ \mathbf{x}^{un}(k) \\ \mathbf{x}^i(k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} d^0 + d^i \Delta t \\ d^{st} e^{r^{st}\Delta t} \\ d^{un} e^{r^{un}\Delta t} \\ d^i \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \Delta \mathbf{u}(k|k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}^s(k) \\ \mathbf{x}^{st}(k) \\ \mathbf{x}^{un}(k) \\ \mathbf{x}^i(k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(k)}. \quad (2.15)$$

O estado  $\mathbf{x}^s$  corresponde a forma incremental; o estado  $\mathbf{x}^{st}$  define o modo estável do sistema;  $\mathbf{x}^{un}$  define o modo instável e  $\mathbf{x}^i$  condiz com o polo integrador do próprio sistema. Esses parâmetros que correspondem a trajetória do sistema são visualmente observados na diagonal da matriz  $\mathbf{A}$ . Assim, é definido um modelo em espaço de estados para um sistema SISO (*Single-Input Single-Output*) com um polo estável, instável e integrador. A seguir, será abordado uma formulação abrangente para o caso MIMO (*Multi-Input Multi-Output*).

## 2.2 ESPAÇO DE ESTADOS PARA SISTEMAS MIMO

Após o entendimento preliminar do modelo em espaço de estados de um sistema SISO apresentado em (2.15), nesta seção será apresentado um modelo OPOM para o caso MIMO, seguindo a formulação análoga ao trabalho de Yamashita et al. (2015). Considere um sistema multivariável definido com  $nu$  entradas e  $ny$  saídas, é representado pela seguinte função de transferência  $G(s)$ :

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{1,1}(s) & \cdots & G_{1,nu}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{ny,1}(s) & \cdots & G_{ny,nu}(s) \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Para cada par  $(y_i, u_j)$ , a função de transferência possui a seguinte expressão:

$$G_{i,j}(s) = \frac{b_{i,j,0} + b_{i,j,1}s + \dots + b_{i,j,nb}s^{nb}}{s(s - r_{i,j,na}^{st})(s - r_{i,j,nc}^{un})}, \quad (2.17)$$

em que:  $\{na\}$ ,  $\{nb\}$  e  $\{nc\} \in \mathbb{N} \mid \{nb\} < (na + nc)$ , enquanto  $(r_{i,j,1}^{st}), \dots, (r_{i,j,na}^{st})$  são os polos distintos estáveis e  $(r_{i,j,1}^{un}), \dots, (r_{i,j,nc}^{un})$  polos distintos instáveis. A resposta ao degrau

unitário pode ser escrita da seguinte forma:

$$S_{i,j}(t) = d_{i,j}^0 + \sum_{l=1}^{na} [d_{i,j,l}^{st}] [e^{r^{st}t}] + \sum_{l=1}^{nc} [d_{i,j,l}^{un}] [e^{r^{un}t}] + d_{i,j}^i t, \quad (2.18)$$

onde no somatório o índice  $l=1$  até  $\{na\}$ , representa a quantidade dos polos estáveis,  $l=1$  até  $\{nc\}$  os polos instáveis, sendo que os parâmetros  $d_{i,j}^0$ ,  $d_{i,j}^{st}$ ,  $d_{i,j}^{un}$  e  $d_{i,j}^i$  são obtidos através da expansão por frações parciais da função de transferência  $G_{i,j}$ . Por conseguinte, discretizando (2.18), no período de tempo  $\Delta t$ , a nova expressão pode ser observada a seguir:

$$S_{i,j}(k) = d_{i,j}^0 + d_{i,j,1}^{st} e^{r_{i,j,1}^{st} \cdot k \cdot \Delta t} + \dots + d_{i,j,na}^{st} e^{r_{i,j,na}^{st} \cdot k \cdot \Delta t} + d_{i,j,1}^{un} e^{r_{i,j,1}^{un} \cdot k \cdot \Delta t} + \dots + d_{i,j,nc}^{un} e^{r_{i,j,nc}^{un} \cdot k \cdot \Delta t} + d_{i,j}^i k \Delta t \quad (2.19)$$

Em seguida, considerando a ação de controle  $\Delta u(k)$  e transladando o sistema para  $k + 1$ , um modelo de espaço de estados pode ser consolidado, conforme procedimento apresentado para o caso SISO, a saber:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}^s(k+1) \\ \mathbf{x}^{st}(k+1) \\ \mathbf{x}^{un}(k+1) \\ \mathbf{x}^i(k+1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times nun} & \Delta t \mathbf{I}_{ny} \\ 0_{nst \times ny} & \mathbf{F}^{st} & 0_{nst \times nun} & 0_{nst \times ny} \\ 0_{nun \times ny} & 0_{nun \times nst} & \mathbf{F}^{un} & 0_{nun \times ny} \\ 0_{ny} & 0_{ny \times nd} & 0_{ny \times nun} & \mathbf{I}_{ny} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}^s(k) \\ \mathbf{x}^{st}(k) \\ \mathbf{x}^{un}(k) \\ \mathbf{x}^i(k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}^s \\ \mathbf{B}^{st} \\ \mathbf{B}^{un} \\ \mathbf{B}^i \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \Delta \mathbf{u}(k|k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ny} & \mathbf{\Psi}^{st} & \mathbf{\Psi}^{un} & 0_{ny \times nu} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}^s(k) \\ \mathbf{x}^{st}(k) \\ \mathbf{x}^{un}(k) \\ \mathbf{x}^i(k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(k)}, \quad (2.20)$$

em que:  $\mathbf{x}^s(k) \in \mathbb{R}^{ny}$  representa os estados integradores gerados pela forma incremental das entradas do sistema;  $\mathbf{x}^{st}(k) \in \mathbb{C}^{nst}$  são os modos estáveis;  $\mathbf{x}^{un}(k) \in \mathbb{C}^{nun}$  representa os estados instáveis;  $\mathbf{x}^i(k) \in \mathbb{R}^{ny}$  os modos integradores do próprio sistema;  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{nx \times nx}$ ;  $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{nx \times nu}$ ;  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{ny \times nx}$ ;  $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^{ny}$ .

Vale ressaltar que as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  são compostas por diversas submatrizes. Por abuso de notação,  $\mathbf{0}_{n \times n}$  são todas as submatrizes nulas com suas respectivas dimensões e  $\mathbf{I}_{ny}$  a matriz identidade de dimensão  $ny$ . As outras submatrizes podem ser observadas a seguir:

$$\mathbf{B}^s = \mathbf{D}^0 + \Delta t \mathbf{B}^i; \quad \mathbf{B}^{st} = \mathbf{D}^{st} \mathbf{F}^{st} \mathbf{N}^{st}; \quad \mathbf{B}^{un} = \mathbf{D}^{un} \mathbf{F}^{un} \mathbf{N}^{un},$$

em que:

$$\mathbf{D}^0 = \begin{bmatrix} d_{1,1}^0 & \cdots & d_{1,ny}^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{ny,1}^0 & \cdots & d_{ny,ny}^0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^0 \in \mathbb{R}^{ny \times nu}; \quad \mathbf{B}^i = \begin{bmatrix} d_{1,1}^i & \cdots & d_{1,ny}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{ny,1}^i & \cdots & d_{ny,ny}^i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^i \in \mathbb{R}^{ny \times nu},$$

$$\mathbf{D}^{st} = \text{diag} \left( d_{1,1,1}^{st} \cdots d_{1,1,na}^{st} \cdots d_{ny,nu,1}^{st} \cdots d_{ny,nu,na}^{st} \right), \quad \mathbf{D}^{st} \in \mathbb{C}^{nst \times nst};$$

$$\mathbf{F}^{st} = \text{diag} \left( e^{\Delta t \cdot r_{1,1,1}^{st}} \cdots e^{\Delta t \cdot r_{1,1,na}^{st}} \cdots e^{\Delta t \cdot r_{ny,nu,1}^{st}} \cdots e^{\Delta t \cdot r_{ny,nu,na}^{st}} \right), \quad \mathbf{F}^{st} \in \mathbb{C}^{nst \times nst};$$

$$\mathbf{D}^{un} = \text{diag} \left( d_{1,1,1}^{un} \cdots d_{1,1,nc}^{un} \cdots d_{ny,nu,1}^{un} \cdots d_{ny,nu,nc}^{un} \right), \quad \mathbf{D}^{un} \in \mathbb{C}^{nun \times nun};$$

$$\mathbf{F}^{un} = \text{diag} \left( e^{\Delta t \cdot r_{1,1,1}^{un}} \cdots e^{\Delta t \cdot r_{1,1,nc}^{un}} \cdots e^{\Delta t \cdot r_{ny,nu,1}^{un}} \cdots e^{\Delta t \cdot r_{ny,nu,nc}^{un}} \right), \quad \mathbf{F}^{un} \in \mathbb{C}^{nun \times nun}.$$

Mais detalhes sobre as matrizes  $\mathbf{N}^{st}$ ,  $\mathbf{N}^{un}$ ,  $\Psi^{st}$  e  $\Psi^{un}$  podem ser encontrados no trabalho de Yamashita et al. (2015).

**Observação (1):** Para sintetizar um controlador IHMPC com estabilidade nominal, utilizando a construção do modelo em espaço de estados apresentado anteriormente, é necessário garantir que o modelo formulado seja estabilizável e detectável. Segundo Hespanha (2009), o teste utilizado é o de Popov-Belevitch-Hautus, na qual pode ser verificado na propriedade o posto das matrizes  $\mathbf{M}_e$  e  $\mathbf{M}_d$  através da seguinte formulação:

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{M}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix},$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $|\lambda| \geq 0$ , sendo que  $\mathbf{M}_e$  e  $\mathbf{M}_d = nx$ .

## 2.3 COMENTÁRIOS

Neste capítulo foi abordado um detalhamento matemático de um modelo em espaço de estados para o caso SISO em um sistema com um polo estável, instável e integrador na qual contempla a forma incremental, ou seja, o sistema em malha fechada não apresentará erro de regime permanente no final do horizonte de controle. Os detalhes abordados no caso SISO, foram de suma importância para melhor compreensão do modelo em espaço de estados MIMO proposto Yamashita et al. (2015). Além disso, as propriedades de estabilizável e detectável são sinalizadas, as quais são importantes no estudo do modelo em espaço de estados para sintonia de uma lei de controle de horizonte infinito que será apresentada no próximo capítulo.

*Este capítulo tem como objetivo apresentar o desenvolvimento de uma lei de controle IHMPC com garantia da estabilidade nominal para sistemas associados aos modos estáveis, instáveis e integradores, contemplando as faixas nas variáveis controladas e objetivos econômicos (targets) nas manipuladas. Além disso, teoremas e provas são demonstradas seguindo os passos padrão do artigo seminal do Rawlings e Muske (1993).*

## CONTROLE IHMPC POR FAIXAS E COM TARGETS ECONÔMICOS

### 3.1 IHMPC PARA SISTEMAS ESTÁVEIS, INSTÁVEIS E INTEGRADORES

A lei de controle de um controlador de horizonte infinito é dada pela solução de um problema de otimização que consiste na minimização da diferença entre os valores preditos para o sistema e sua referência ao longo de um horizonte de predição infinito. As trajetórias futuras desejadas para cada saída, são obtidas por um conjunto adequado de valores através das variáveis manipuladas. O problema de otimização para sistemas com polos estáveis, instáveis e integradores, associado ao modelo em espaço de estados apresentado na equação (2.20), possui a seguinte função objetivo:

$$V_{1,k} = \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} \right\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \left\| \Delta \mathbf{u}(k+j|k) \right\|_{\mathbf{R}}^2, \quad (3.1)$$

em que:  $\mathbf{y}(k+j) \in \mathbb{R}^{ny}$  é predição de saída referente ao modelo;  $\Delta \mathbf{u}(k+j)$  são os incrementos das ações de controle;  $\mathbf{y}_{sp} \in \mathbb{R}^{ny}$  o vetor de referência (*setpoints*);  $\mathbf{Q}_y \in \mathbb{R}^{ny \times ny}$  o parâmetro de ajuste do controlador na variável controlada;  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{nu \times nu}$  o parâmetro de ajuste do controlador para o esforço de controle e  $m$  define o horizonte de

controle. Segundo Rawlings e Muske (1993), é fundamental separar o primeiro termo da função objetivo (3.1) em dois, um referente ao somatório do erro gerado nos instantes correspondentes ao horizonte de controle  $m$ , e outro que computa o erro até o infinito. A função objetivo passa a ser:

$$\begin{aligned}
V_{1,k} = & \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \left\| \mathbf{y}(k+m+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} \right\|_{\mathbf{Q}_y}^2}_{\mathbf{Z}_1} + \underbrace{\sum_{j=1}^m \left\| \mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} \right\|_{\mathbf{Q}_y}^2}_{\mathbf{Z}_2} \\
& + \underbrace{\sum_{j=0}^{m-1} \left\| \Delta \mathbf{u}(k+j|k) \right\|_{\mathbf{R}}^2}_{\mathbf{Z}_3}. \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Uma vez que o termo  $\mathbf{Z}_1$  tende ao infinito e para que as predições das saídas sejam limitadas, é necessária a anulação do efeito dos estados incrementais artificiais em  $\mathbf{x}^s$ , estados instáveis  $\mathbf{x}^{un}$  e os incrementais do próprio sistema em  $\mathbf{x}^i$  no instante  $k+m$ . Para isso, é preciso estabelecer no termo  $\mathbf{Z}_1$  as restrições terminais de igualdade, definidas nas equações (3.3), (3.4) e (3.5).

$$\mathbf{x}^s(k+m|k) - \mathbf{y}_{sp,k} = 0, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{x}^{un}(k+m|k) = 0, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{x}^i(k+m|k) = 0. \quad (3.5)$$

Para inserir as restrições (3.3) à (3.5) no problema de otimização, é necessário reescrever as predições do termo  $\mathbf{Z}_1$  a partir do modelo em espaço de estados definido em (2.20), como sendo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(k+m+1|k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k+m+1|k) \\
&= \mathbf{x}^s(k+m|k) + \Psi^{\text{st}}\mathbf{F}^{\text{st}}\mathbf{x}^{\text{st}}(k+m|k) + \Psi^{\text{un}}\mathbf{F}^{\text{un}}\mathbf{x}^{\text{un}}(k+m|k) \\
&\quad + \Delta t\mathbf{x}^i(k+m|k) \\
\mathbf{y}(k+m+2|k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k+m+2|k) \\
&= \mathbf{x}^s(k+m|k) + \Psi^{\text{st}}(\mathbf{F}^{\text{st}})^2\mathbf{x}^{\text{st}}(k+m|k) + \Psi^{\text{un}}(\mathbf{F}^{\text{un}})^2\mathbf{x}^{\text{un}}(k+m|k). \quad (3.6) \\
&\quad + 2\Delta t\mathbf{x}^i(k+m|k) \\
&\quad \vdots \\
\mathbf{y}(k+m+j|k) &= \mathbf{x}^s(k+m|k) + \Psi^{\text{st}}(\mathbf{F}^{\text{st}})^j\mathbf{x}^{\text{st}}(k+m|k) + \Psi^{\text{un}}(\mathbf{F}^{\text{un}})^j\mathbf{x}^{\text{un}}(k+m|k) \\
&\quad + j\Delta t\mathbf{x}^i(k+m|k)
\end{aligned}$$

Em seguida, substituindo a predição  $\mathbf{y}(k+m+j|k)$  no termo  $\mathbf{Z}_1$ , obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\| \mathbf{x}^s(k+m|k) - \mathbf{y}_{sp,k} + \Psi^{\text{st}}(\mathbf{F}^{\text{st}})^j \mathbf{x}^{\text{st}}(k+m|k) + \Psi^{\text{un}}(\mathbf{F}^{\text{un}})^j \mathbf{x}^{\text{un}}(k+m|k) + j(\Delta t) \mathbf{x}^i(k+m|k) \right\|_{\mathbf{Q}_y}^2. \quad (3.7)$$

Logo, limita-se a série infinita em (3.7) substituindo as restrições (3.3) à (3.5), resultando na seguinte expressão:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\| \Psi^{\text{st}}(\mathbf{F}^{\text{st}})^j \mathbf{x}^{\text{st}}(k+m|k) \right\|_{\mathbf{Q}_y}^2. \quad (3.8)$$

A equação (3.8) forma uma série convergente por causa dos estados estáveis  $\mathbf{x}^{\text{st}}$ . Neste caso, o valor limitado é calculado através da solução da equação de Lyapunov para esses estados, qual seja:

$$\mathbf{x}^{\text{st}}(k+m|k)^{\top} \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \left[ \Psi^{\text{st}} \right]^{\top} \left[ (\mathbf{F}^{\text{st}})^j \right]^{\top} \mathbf{Q}_y \Psi^{\text{st}}(\mathbf{F}^{\text{st}})^j}_{\bar{\mathbf{Q}}} \mathbf{x}^{\text{st}}(k+m|k), \quad (3.9)$$

em que  $\bar{\mathbf{Q}}$  é a matriz de peso terminal obtida da solução da equação de Lyapunov, escrita da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{Q}} = (\Psi^{\text{st}})^{\top} (\mathbf{F}^{\text{st}})^{\top} \mathbf{Q}_y \mathbf{F}^{\text{st}} \Psi^{\text{st}} + (\mathbf{F}^{\text{st}})^{\top} \bar{\mathbf{Q}} (\mathbf{F}^{\text{st}}). \quad (3.10)$$

Portanto, a função objetivo passa a ser escrita através da seguinte expressão:

$$V_{1,k} = \sum_{j=1}^m \left\| \mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} \right\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \left\| \mathbf{x}^{\text{st}}(k+m|k) \right\|_{\bar{\mathbf{Q}}}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \left\| \Delta \mathbf{u}(k+j|k) \right\|_{\mathbf{R}}^2. \quad (3.11)$$

Assim, a lei de controle IHMPC em (3.11) para sistemas estáveis, instáveis e integradores pode ser resolvida através do seguinte problema de otimização:

### Problema P1

$$\underbrace{\min}_{\Delta \mathbf{u}_k} V_{1,k}, \quad (3.12)$$

sujeito às restrições (3.3), (3.4), (3.5) e:

$$\Delta \mathbf{u}(k+j|k) \in \mathbb{U}, \quad j = 0, \dots, m-1, \quad (3.13)$$

$$\mathbb{U} = \left\{ \begin{array}{l} -\Delta \mathbf{u}_{max} \leq \Delta \mathbf{u}(k+j|k) \leq \Delta \mathbf{u}_{max} \\ \Delta \mathbf{u}(k+j|k) = 0, j \geq m \\ \mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}(k-1) + \sum_{i=0}^j \Delta \mathbf{u}(k+i|k) \leq \mathbf{u}_{max} \end{array} \right\}. \quad (3.14)$$

A garantia de estabilidade do sistema em malha fechada, que resulta da solução do **Problema P1** é assegurada pelo teorema apresentado a seguir.

**Teorema 1:** Dado um sistema com polos estáveis, instáveis e integradores distintos, e o par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  da equação (2.20) sendo controlável, se o **Problema P1** tiver uma solução viável no instante de amostragem  $k$ , ele será viável nos instantes sucessivos, de modo que a lei de controle conduz a planta assintoticamente ao seu valor de referência.

**Prova 1:** A prova de estabilidade do **Problema P1** segue dois caminhos usuais demonstrados no trabalho de Rawlings e Muske (1993). O primeiro está relacionado à viabilidade recursiva do controlador e o segundo à prova de convergência da função objetivo. Para um sistema não perturbado, a função objetivo do controlador proposto tende a decrescer a zero se o ponto de equilíbrio desejado é alcançável. Assim, suponha que no instante  $k$ , o **Problema P1** é resolvido e sua solução ótima é representada por:

$$\Delta \mathbf{u}_k^* = \left[ \Delta \mathbf{u}^*(k|k)^\top \cdots \Delta \mathbf{u}^*(k+1|k)^\top \cdots \Delta \mathbf{u}^*(k+m-1|k)^\top \right]^\top.$$

No caso nominal (presenta cenário), o modelo de predição do controlador descreve com exatidão a planta, logo pode-se demonstrar que a solução ótima no instante  $k+1$  é uma solução herdada do instante  $k$ , a saber, como  $\Delta \mathbf{u}^*(k|k)$  é inserida na planta, a solução disponível é

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}}_{k+1} = \left[ \Delta \mathbf{u}^*(k+1|k)^\top \cdots \Delta \mathbf{u}^*(k+m-1|k)^\top \mathbf{0}^\top \right]^\top.$$

Para demonstrar que esta solução herdada satisfaz as restrições, é preciso lembrar que no caso nominal os estados do sistema terão os mesmos valores que a predições do modelo, ou seja:  $\tilde{\mathbf{x}}(k+1|k+1) = \mathbf{x}(k+1|k)$ , logo as restrições terminais em  $k+1$ , devem ser escritas como

$$\tilde{\mathbf{x}}^i(k+m+1|k) = 0, \quad (3.15)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{un}(k+m+1|k) = 0, \quad (3.16)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^s(k+m+1|k) - \tilde{\mathbf{y}}_{sp} = 0. \quad (3.17)$$



Partindo do modelo (2.20) a predição associada aos estados integradores no fim do horizonte de controle, no instante  $k$ , é dada por

$$\mathbf{x}^i(k+m|k) = \mathbf{x}^{in}(k|k) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}^i & \dots & \mathbf{B}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^*(k|k) \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}^*(k+m-1|k) \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

- Avaliando no instante  $k+1$  com a solução herdada de  $k$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}^i(k+m+1|k+1) &= \underbrace{\mathbf{x}^i(k+1|k+1)}_{\mathbf{x}^i(k+1|k)} + \underbrace{\mathbf{W}}_{\begin{bmatrix} \mathbf{B}^i & \dots & \mathbf{B}^i & \mathbf{B}^i \end{bmatrix}} \Delta \tilde{\mathbf{u}}_{k+1} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}^i(k|k) + \mathbf{B}^i \Delta \mathbf{u}^*(k|k) \end{bmatrix} + \mathbf{W} \Delta \tilde{\mathbf{u}}_{k+1} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}^i(k|k) + \mathbf{W} \Delta \mathbf{u}_k^* \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}^i(k+m|k)} \\ &= \mathbf{x}^i(k+m|k) = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Portanto, em  $k+1$  a solução herdada na (3.15) satisfaz a restrição (3.5). Em seguida, analisa-se a restrição terminal associada aos estados instáveis, a saber:

$$\mathbf{x}^{un}(k+m|k) = (\mathbf{F}^{un})^m \mathbf{x}^{un}(k|k) + \begin{bmatrix} (\mathbf{F}^{un})^{m-1} \mathbf{B}^{un} & \dots & \mathbf{B}^{un} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^*(k|k) \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}^*(k+m-1|k) \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

- No instante  $k+1$ , a predição é expressa como

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}^{un}(k+m+1|k+1) &= (\mathbf{F}^{un})^{m+1} \underbrace{\mathbf{x}^{un}(k+1|k+1)}_{\mathbf{x}^{un}(k+1|k)} + \mathbf{Z} \Delta \tilde{\mathbf{u}}_{k+1} \\ &= (\mathbf{F}^{un})^{m+1} \left[ \mathbf{F}^{un} \mathbf{x}^{un}(k|k) + \mathbf{B}^{un} \Delta \mathbf{u}^*(k|k) \right] + \mathbf{Z} \Delta \tilde{\mathbf{u}}_{k+1} \\ &= (\mathbf{F}^{un}) \underbrace{\left[ (\mathbf{F}^{un})^m \mathbf{x}^{un}(k|k) + \mathbf{Z} \Delta \mathbf{u}_k^* \right]}_{\mathbf{x}^{un}(k+m|k)} \\ &= (\mathbf{F}^{un}) \mathbf{x}^{un}(k+m|k) = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

sendo:  $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} (\mathbf{F}^{un})^m \mathbf{B}^{un} & \dots & \mathbf{F}^{un} \mathbf{B}^{un} & \mathbf{B}^{un} \end{bmatrix}$ .

Com relação à restrição dos estados  $\mathbf{x}^s$ , sua expressão para o instante  $k$  pode ser escrita com a solução ótima da forma como segue:

$$\mathbf{x}^s(k+m|k) = \mathbf{x}^s(k) + m \Delta t \mathbf{x}^i(k) + \mathbf{T} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^*(k|k) \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}^*(k+m-1|k) \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

sendo  $\mathbf{T} = \left( \left[ \mathbf{B}^s \dots \mathbf{B}^s \right] + \left[ m\Delta t\mathbf{B}^i \ (m-1)\Delta t\mathbf{B}^i \dots \Delta t\mathbf{B}^i \right] \right)$ .

- No instante  $k+1$ , com a solução herdada, a restrição resulta em

$$\tilde{\mathbf{x}}^s(k+m+1|k+1) = \mathbf{x}^s(k+1|k+1) + m\Delta t\mathbf{x}^i(k+1|k+1) + \mathbf{T}\Delta\tilde{\mathbf{u}}_{k+1} \quad , \quad (3.23)$$

substituindo as predições um passo a frente, obtém-se:

$$\tilde{\mathbf{x}}^s(k+m+1|k+1) = \underbrace{\mathbf{x}^s(k) + \Delta t\mathbf{x}^i(k) + \mathbf{B}^s\Delta\mathbf{u}_k^* + \mathbf{B}^i\Delta\mathbf{u}_k^*}_{\mathbf{x}^s(k+1|k+1)=\mathbf{x}^s(k+1/k)} + m\Delta t \underbrace{\left( \mathbf{x}^i(k) + \mathbf{B}^i\Delta\mathbf{u}_k^* \right)}_{\mathbf{x}^i(k+1|k+1)=\mathbf{x}^i(k+1/k)} + \bar{\mathbf{T}} \quad , \quad (3.24)$$

em que:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}} = & \mathbf{B}^s\Delta\mathbf{u}_{k+1}^* + m\Delta t\mathbf{B}^i\Delta\mathbf{u}_{k+1}^* + \mathbf{B}^s\Delta\mathbf{u}_{k+2}^* + (m-1)\Delta t\mathbf{B}^i\Delta\mathbf{u}_{k+2}^* \\ & + \dots + \mathbf{B}^s\Delta\mathbf{u}_{k+m-1}^* + 2\Delta t\mathbf{B}^i\Delta\mathbf{u}_{k+m-1}^* \end{aligned}$$

Somando e subtraindo o termo  $\bar{\mathbf{T}}$  por  $\left( \Delta t\mathbf{B}^i\Delta\mathbf{u}_{k+1}^* + \Delta t\mathbf{B}^i\Delta\mathbf{u}_{k+2}^* + \dots + \Delta t\mathbf{B}^i\Delta\mathbf{u}_{k+m-1}^* \right)$ , assim tem-se os seguintes termos agrupados:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}^s(k+m+1|k+1) = & \underbrace{\mathbf{x}^s(k) + m\Delta t\mathbf{x}^i(k) + \left( \left[ \mathbf{B}^s \dots \mathbf{B}^s \right] + \left[ m\Delta t\mathbf{B}^i \ (m-2)\Delta t\mathbf{B}^i \dots \Delta t\mathbf{B}^i \right] \right)}_{\mathbf{x}^s(k+m|k)} \Delta\mathbf{u}_k^* \\ & + \Delta t \underbrace{\left( \mathbf{x}^i(k) + \left[ \mathbf{B}^i \dots \mathbf{B}^i \right] \Delta\mathbf{u}_k^* \right)}_{\mathbf{x}^i(k+m|k)} \\ = & \underbrace{\mathbf{x}^s(k+m|k) + \Delta t\mathbf{x}^i(k+m|k)}_{\mathbf{x}^s(k+m+1|k)} - \mathbf{y}_{sp} = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Vale ressaltar que os estados incrementais artificiais  $\mathbf{x}^s$  dependem dos modos integradores  $\mathbf{x}^i$  e devem ter uma atenção especial. As demonstrações apresentadas ratificam a viabilidade recursiva do **Problema P1**, isto é, se houver uma solução viável no instante  $k$ , o problema continuará factível nos instantes sucessivos.

A segunda parte da prova de estabilidade está relacionada à convergência assintótica da função objetivo. Dessa forma, cabe aqui mostrar que a função objetivo é assintoticamente decrescente. Para isso, considere a solução ótima na função  $V_{1,k}^*$ , como sendo:

$$V_{1,k}^* = \sum_{j=1}^m \left\| \mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} \right\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \left\| \Delta\mathbf{u}^*(k+j|k) \right\|_{\mathbf{R}}^2 \quad , \quad (3.26)$$

ao passo que a função objetivo em  $k+1$  para a solução herdada do instante  $k$ , torna-se:

$$\tilde{V}_{1,k+1} = \sum_{j=1}^m \left\| \mathbf{y}(k+1+j|k+1) - \mathbf{y}_{sp,k+1} \right\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \left\| \Delta \tilde{\mathbf{u}}(k+1+j|k+1) \right\|_{\mathbf{R}}^2. \quad (3.27)$$

Subtraindo a (3.27) de (3.26), pode-se verificar que

$$V_{1,k}^* - \tilde{V}_{1,k+1} = \left\| \mathbf{y}(k+1|k) - \mathbf{y}_{sp,k} \right\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \left\| \Delta \mathbf{u}^*(k|k) \right\|_{\mathbf{R}}^2, \quad (3.28)$$

uma vez que  $\mathbf{Q}_y$  e  $\mathbf{R}$  são matrizes definidas positivas, os termos do lado direito da equação (3.28) serão positivos, então  $\tilde{V}_{1,k+1} \leq V_{1,k}^*$ . Assim, como a solução ótima no instante  $k+1$  é de fato a solução herdada do instante  $k$ , vale que  $V_{1,k+1}^* = \tilde{V}_{1,k+1}$ , o que isso implica que  $V_{1,k+1}^* \leq V_{1,k}^*$ , ou seja, se o sistema é controlável no ponto de equilíbrio desejado a sequência dos custos ótimos aplicados à planta estão diminuindo e convergindo para zero e a estabilidade em malha fechada do **Problema P1** é assegurada.

**Observação (2):** O **Problema P1** pode torna-se inviável na prática. Logo pode ocorrer conflitos entre as restrições terminais (3.3) à (3.5), por exemplo, quando o controlador é submetido a grandes variações nos *setpoints* ou quando o sistema sofre perturbações de magnitudes elevadas.

Para contornar as problemáticas citadas na **Observação (2)**, a prática comum seria aumentar o horizonte de controle, entretanto, esta medida ao mesmo tempo que diminui o desempenho do controlador, pode contribuir com o aumento do custo computacional e dificultar a convergência do problema de otimização (acréscimo do número de variáveis de decisão do problema). Uma solução proposta pelos autores (CARRAPIÇO; ODLOAK, 2005) (ALVAREZ et al., 2009) (GONZÁLEZ; ODLOAK, 2009) (SANTORO; ODLOAK, 2012) (MARTINS; ODLOAK, 2016) (COSTA, 2016) para superar as limitações, envolve a inserção das variáveis de folga no problema de otimização as quais possuem as seguintes características: *i*) relaxam as restrições terminais; *ii*) aumentam o domínio de atração; *iii*) mantém as propriedades estabilizantes do controlador; *iv*) garantia de factibilidade na lei de controle.

Sob essa perspectiva, a seguir será abordada inicialmente a extensão do **Problema P1** com a inclusão da variável de folga sobre a restrição terminal associada ao erro de predição, conforme proposto em Rodrigues e Odloak (2003).

### 3.2 EXTENSÃO DO PROBLEMA P1

A função objetivo após a inclusão da variável de folga mencionada anteriormente pode ser escrita como:

$$V_{2,k} = \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_{\mathbf{y},k} \right\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \left\| \Delta \mathbf{u}(k+j|k) \right\|_{\mathbf{R}}^2 + \left\| \delta_{\mathbf{y},k} \right\|_{\mathbf{S}_y}^2, \quad (3.29)$$

em que:  $\delta_{\mathbf{y},k} \in \mathbb{R}^{ny}$  é introduzida no problema de controle na qual se torna um conjunto de variáveis de decisão adicional no problema de otimização e amplia substancialmente o domínio de atração da solução do sistema em malha fechada com maiores graus de liberdade.

Esta variável de folga é obrigatoriamente ponderada por uma matriz  $\mathbf{S}_y \in \mathbb{R}^{ny \times ny}$ , definida positiva e deve ser sintonizada com altos valores do peso para forçar a condição de usá-la quando necessário.

Para limitar a função objetivo em (3.29), a restrição terminal deve ser imposta conforme a equação (3.30), e também as restrições associadas aos modos instáveis e integradores apresentados em (3.4) e (3.5).

$$\mathbf{x}^s(k+m|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_{\mathbf{y},k} = 0. \quad (3.30)$$

Dessa forma, após as manipulações algébricas a função objetivo resulta em

$$\begin{aligned} V_{2,k} = & \sum_{j=1}^m \left\| \mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_{\mathbf{y},k} \right\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \left\| \mathbf{x}^{st}(k+m|k) \right\|_{\bar{\mathbf{Q}}}^2 \\ & + \sum_{j=0}^{m-1} \left\| \Delta \mathbf{u}(k+j|k) \right\|_{\mathbf{R}}^2 + \left\| \delta_{\mathbf{y},k} \right\|_{\mathbf{S}_y}^2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Assim, a lei de controle definida na função  $V_{2,k}$  pode ser formulada através da seguinte problema do otimização:

#### Problema P2

$$\underbrace{\min}_{\Delta \mathbf{u}_k, \delta_{\mathbf{y},k}} V_{2,k}, \quad (3.32)$$

sujeito às restrições (3.4), (3.5), (3.13), (3.14) e (3.30).

A convergência e a estabilidade em malha fechada definido no **Problema P2** é assegurada pelo seguinte teorema.

**Teorema 2:** Dado um sistema não perturbado com modos estáveis, instáveis e integradores distintos, cujas matrizes de estados são controláveis. Se no instante de amostragem  $k$  há uma solução viável para o **Problema P2**, então as ações de controle obtidas através da solução nos instantes  $k + 1, k + 2, \dots$ , levarão a saída do sistema assintoticamente aos valores da referência desejado, caso este seja atingível, do contrário, o controlador conduzirá o sistema a um ponto de equilíbrio com a menor distância possível entre o atingido e desejado.

**Prova 2:** A prova segue os passos do **Teorema 1**. Então, se o **Problema P2** tem uma solução viável em  $k$ , existe uma solução ótima representada por:

$$\Delta \mathbf{u}_k^* = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^*(k|k)^\top \cdots \Delta \mathbf{u}^*(k+1|k)^\top \cdots \Delta \mathbf{u}^*(k+m-1|k)^\top \end{bmatrix}^\top, \\ \delta_{\mathbf{y},k}^* \quad .$$

Ao mover ação de controle  $\Delta \mathbf{u}^*(k|k)$ , na planta no próximo instante  $k + 1$ , a solução herdada será:

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}}_{k+1} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^*(k+1|k)^\top \cdots \Delta \mathbf{u}^*(k+m-1|k)^\top \mathbf{0}^\top \end{bmatrix}^\top; \\ \tilde{\delta}_{\mathbf{y},k+1} = \delta_{\mathbf{y},k}^* .$$

O próximo passo é então verificar se esta solução herdada satisfaz todas as restrições do **Problema P2**. Por exemplo, para restrição (3.30), tem-se:

$$\tilde{\mathbf{x}}^s(k+m+1|k+1) - \mathbf{y}_{sp,k} - \tilde{\delta}_{\mathbf{y},k+1} = \tilde{\mathbf{x}}^s(k+m+1|k+1) - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_{\mathbf{y},k}^* . \quad (3.33)$$

Uma vez que o primeiro movimento de controle ótimo é aplicado no instante de tempo  $k$ , o estado inicial no tempo  $k + 1$ , é dado por  $\tilde{\mathbf{x}}(k+1|k+1) = \mathbf{x}(k+1|k)$ , então, isso implica que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}^s(k+m+1|k+1) - \mathbf{y}_{sp,k} - \tilde{\delta}_{\mathbf{y},k+1} &= \tilde{\mathbf{x}}^s(k+m+1|k+1) - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_{\mathbf{y},k}^* \\ &= \mathbf{x}^s(k+m|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_{\mathbf{y},k}^* \quad . \quad (3.34) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, as soluções herdadas também satisfazem as restrições (3.4), (3.5) e (3.30) e produz uma solução viável em  $k + 1$ , pois consideramos que os estados são conhecidos e o sistema não é perturbado. Então é fácil mostrar que a função objetivo apresentada na equação (3.35) será estritamente decrescente se um dos termos  $\mathbf{Qy}$  e  $\mathbf{R}$  for não-nulo, uma vez que a solução herdada neste caso é apenas uma solução viável ao problema de

otimização, porém não necessariamente é a ótima, logo o valor da função objetivo com a solução ótima em  $k + 1$  deve ser menor ou igual ao valor da função objetivo com a solução herdada,  $V_{2,k+1}^* \leq \tilde{V}_{2,k+1}$ , o que implica, portanto, que  $V_{2,k+1}^* \leq V_{2,k}^*$ , de modo que esta se comportará como uma função de Lyapunov e será convergente a zero, se o ponto de equilíbrio desejado for atingível, do contrário esta convergirá a um mínimo igual a  $V_{2,\infty}^* = \left\| \delta_{\mathbf{y},\infty} \right\|_{\mathbf{S}_y}^2$ , representando a distância mínima entre o ponto de equilíbrio desejado e o atingível.

$$\tilde{V}_{2,k+1} = V_{2,k}^* - \left\| \mathbf{y}(k+1|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_{\mathbf{y},k}^* \right\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \left\| \Delta \mathbf{u}^*(k|k) \right\|_{\mathbf{R}}^2. \quad (3.35)$$

**Observação (3):** A variável de folga apresentada neste problema de controle suaviza a restrição terminal e por conta disso, o **Problema P2** será viável para uma região maior de atração em relação ao **Problema P1** quando ocorrem maiores mudanças de *setpoint* e/ou perturbações. Entretanto, dependendo do tamanho das perturbações ou das variações dos valores de referência, ainda poderá haver conflito entre as restrições (3.4) e (3.5). Nesse caso, o **Problema P2** pode tornar-se inviável e o controlador de horizonte infinito não pode ser mais implementado.

Sendo assim, é necessário aumentar a região de atração do controlador com a inclusão de novas variáveis de folga para os estados  $\mathbf{x}^{un}$  e  $\mathbf{x}^i$ . Para tal, será adotada uma nova extensão à função objetivo (3.29), aglutinando as ideias impostas no trabalho de Carrapiço e Odloak (2005), para os estados integradores, e do trabalho de Martins e Odloak (2016), para os estados instáveis.

A principal modificação em relação às formulações anteriores, é a adequação do termo da função objetivo que inclui as variáveis de decisão, ou seja, as variáveis de folga para o caso de polos instáveis e integradores distintos. É importante destacar que no trabalho de Yamashita et al. (2015), os autores sintetizaram um controlador com as mesmas características, ou seja, modos instáveis e integradores, porém a lei de controle não considerava a inclusão da variável  $\delta_{\mathbf{un},k}$  na função objetivo e por conta disso não foi possível provar a estabilidade assintótica do controlador. Contudo, essa lacuna será preenchida conforme apresentado no **Problema P3** e **Problema P4**, uma vez em que serão as principais contribuições deste trabalho.

### 3.3 EXTENSÃO DO PROBLEMA P2

Seguindo a mesma estrutura da formulação do **Problema P2**, no entanto incluindo as novas variáveis de folga com  $nun$  modos instáveis e  $ni$  modos integradores, o problema

de otimização do controlador deve possuir a seguinte função objetivo:

$$V_{3,k} = \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_{\mathbf{y},k} - \Psi_{\mathbf{un}} \mathbf{F}_{\mathbf{un}}^{(j-m)} \delta_{\mathbf{un},k} - (j-m) \Delta \mathbf{t} \delta_{\mathbf{i},k} \right\|_{\mathbf{Qy}}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \left\| \Delta \mathbf{u}(k+j|k) \right\|_{\mathbf{R}}^2 + \left\| \delta_{\mathbf{y},k} \right\|_{\mathbf{Sy}}^2 + \left\| \delta_{\mathbf{un},k} \right\|_{\mathbf{Sun}}^2 + \left\| \delta_{\mathbf{i},k} \right\|_{\mathbf{Si}}^2. \quad (3.36)$$

O problema de controle apresentado na equação (3.36), contém as variáveis de folga  $\delta_{\mathbf{un},k}$  e  $\delta_{\mathbf{i},k}$  nas quais proporcionam os graus de liberdade necessários para que o problema de controle seja viável quando ocorrem grandes variações nos *setpoints*, e/ou perturbações significativas. As matrizes  $\mathbf{Sun} \in \mathbb{R}^{nun \times nun}$  e  $\mathbf{Si} \in \mathbb{R}^{ni \times ni}$  são as matrizes que irão ponderar o uso de tais variáveis e serão selecionados de ordens de grandeza superiores aos valores atribuídos para as matrizes  $\mathbf{Qy}$  e  $\mathbf{R}$  para força a condição de usá-las quando necessário.

Adotado um horizonte de predição infinito em (3.36), a função objetivo apenas será limitada, somente se, aderir a restrição terminal em (3.30) e as demais restrições

$$\mathbf{x}^{un}(k+m|k) - \delta_{\mathbf{un},k} = 0, \quad (3.37)$$

$$\mathbf{x}^i(k+m|k) - \delta_{\mathbf{i},k} = 0. \quad (3.38)$$

Neste sentido, a lei de controle resultante busca resolver o problema de otimização em (3.39) como segue.

### Problema P3

$$\underbrace{\min}_{\Delta \mathbf{u}_k, \delta_{\mathbf{y},k}, \delta_{\mathbf{un},k}, \delta_{\mathbf{i},k}} V_{3,k}, \quad (3.39)$$

sujeito às restrições (3.13), (3.14), (3.30), (3.37) e (3.38). Apesar do **Problema P3** possuir sempre uma solução viável, a lei de controle oriunda das soluções sequenciais desse problema de otimização não necessariamente produz uma convergência assintótica, enquanto as variáveis de folga associadas aos estados integradores e instáveis não forem zeradas.

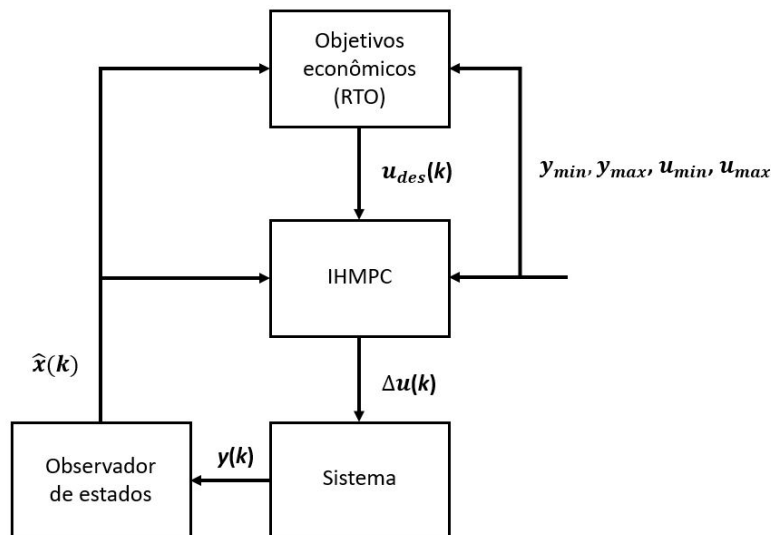
**Observação (4):** Para que o sistema em malha fechada alcance um ponto de equilíbrio qualquer, os estados integradores e instáveis devem ser necessariamente zerados. Portanto, com a seleção adequada de pesos  $\mathbf{Sun}$  e  $\mathbf{Si}$  grande o suficiente para forçar que o otimizador utilize as variáveis de folga somente quando for necessário, então, na prática, as variáveis de folga associadas aos estados integradores e instáveis são zeradas em finitos

passos, ou seja, no final do horizonte de controle.

**Teorema 3:** Considere um sistema com modos estáveis, instáveis e integradores e o par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  da equação (2.20) é controlável. Se num dado tempo de amostragem  $k$  os estados instáveis e integradores forem zerados, aludindo a **Observação (4)**, então as ações de controle obtidas nos instantes de amostragem sucessivos conduzirão de forma convergente a solução do **Problema P3** para o estado estacionário de referência, se for atingível, senão a saída em malha fechada do sistema convergirá a um estado estacionário situado entre a menor distância do ponto de equilíbrio desejado.

**Prova 3:** Se as variáveis de folga associadas aos estados instáveis e integradores são zeradas, em um dado instante de tempo  $k$ , as restrições (3.15) e (3.16) tornam-se ativas e permanecerá nos instantes subsequentes. Dessa forma o **Problema P3** se reduz ao **Problema P2** e a convergência da malha fechada é assegurada pelo **Teorema 2**.

Após a inclusão das variáveis de folga no controlador proposto para os modos estáveis, instáveis e integradores, a seguir será abordada uma nova extensão do **Problema P3**, contemplando o controle por faixa na variável controlada e *targets* nas variáveis manipuladas. A estrutura do controle está representada na Figura 3.1, na qual o IHMPC integra-se a camada de otimização em tempo real (RTO - *Real-Time Economic Optimization*) numa planta. Assim, seria interessante acoplar esses critérios econômicos ao controlador proposto, preservando as propriedades estabilizantes.



**Figura 3.1** Estrutura do novo controlador



É importante destacar que estratégia de controle por faixa é implementada em aplicações onde os valores exatos das saídas controladas não são importantes, desde que permaneçam dentro de um intervalo com limites especificados. Além disso, o controle por faixa na saída, empregado também aqui tem um apelo prático já que os principais sistemas são subatuados, ou seja, sistema que possuem um número maior de graus de liberdade do que atuadores, por exemplo, pêndulo invertido. A seguir a extensão do novo controlador será demonstrada.

### 3.4 EXTENSÃO DO PROBLEMA P3

Esta seção irá apresentar a terceira expansão do controlador IHMPC para sistemas com estados estáveis, instáveis e integradores. A função objetivo é similar ao **Problema P3** com dois termos adicionais, a saber:

$$\begin{aligned}
V_{4,k} = & \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_{\mathbf{y},k} - \Psi_{\mathbf{un}} \mathbf{F}_{\mathbf{un}}^{(j-m)} \delta_{\mathbf{un},k} - (j-m) \Delta \mathbf{t} \delta_{\mathbf{i},k} \right\|_{\mathbf{Q}_y}^2 \\
& + \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \mathbf{u}(k+j|k) - \mathbf{u}_{des,k} - \delta_{\mathbf{u},k} \right\|_{\mathbf{Q}_u}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \left\| \Delta \mathbf{u}(k+j|k) \right\|_{\mathbf{R}}^2 + \left\| \delta_{\mathbf{y},k} \right\|_{\mathbf{S}_y}^2, \quad (3.40) \\
& + \left\| \delta_{\mathbf{u},k} \right\|_{\mathbf{S}_u}^2 + \left\| \delta_{\mathbf{un},k} \right\|_{\mathbf{S}_{un}}^2 + \left\| \delta_{\mathbf{i},k} \right\|_{\mathbf{S}_i}^2
\end{aligned}$$

em que:  $\mathbf{u}_{des,k}$  é a nova variável que será definida como *target* na variável manipulada;  $\delta_{\mathbf{u},k}$  é a variável de folga associada; e  $\mathbf{S}_u \in \mathbb{R}^{nu \times nu}$  é mais uma matriz de ponderação definida positiva para sintonia do controlador. Contudo, limita-se o custo (3.40) através da imposição das restrições (3.30), (3.37), (3.38) e

$$\mathbf{u}(k+m-1|k) - \mathbf{u}_{des,k} - \delta_{\mathbf{u},k} = 0. \quad (3.41)$$

Assim, a lei de controle resume-se a resolver o seguinte problema de otimização, a saber:

#### Problema P4

$$\underbrace{\min}_{\Delta \mathbf{u}_k, \mathbf{y}_{sp,k}, \delta_{\mathbf{y},k}, \delta_{\mathbf{u},k}, \delta_{\mathbf{un},k}, \delta_{\mathbf{i},k}} V_{4,k}, \quad (3.42)$$

sujeito às restrições (3.13), (3.14), (3.30), (3.37), (3.38), (3.41) e

$$\mathbf{y}_{min} \leq \mathbf{y}_{sp,k} \leq \mathbf{y}_{max}. \quad (3.43)$$

**Observação (5):** Na estratégia de controle por faixa, o vetor de referência  $\mathbf{y}_{sp,k}$  é incluso como variável de decisão no **Problema P4**, sendo capaz de assumir qualquer valor dentro da faixa de saída predeterminada.

A garantia da estabilidade em malha fechada da lei de controle produzida por meio da solução sequencial do **Problema P4** é formalizada através do teorema que segue.

**Teorema 4:** Seja um sistema com estados estáveis, instáveis e integradores distintos com um par de matrizes controláveis e observáveis  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  da equação (2.20). Caso a solução do **Problema P4** um dado instante de amostragem  $k$  produz uma solução ótima na qual as variáveis de folga associado aos estados instáveis e integradores são zeradas, então, as ações de controle obtidas nos instantes de amostragem sucessivos conduzirão de forma convergente a solução do **Problema P4** para seus *targets* de entrada e faixas de saída desejadas, se eles forem atingíveis, caso contrário o sistema atingirá um ponto com a menor distância possível entre o alcançado e o desejável.

**Prova 4:** Para um sistema não perturbado, a função objetivo do controlador proposto tende a decrescer a zero se o ponto de equilíbrio desejado é alcançável. Assim, suponha que no instante  $k$ , o **Problema P4** é resolvido e sua solução ótima é representada por  $\Delta \mathbf{u}_k^*$ ,  $\mathbf{y}_{sp,k}^*$ ,  $\delta_{\mathbf{y},k}^*$  e  $\delta_{\mathbf{u},k}^*$ .

Atendendo ao **Teorema 4**, no momento em que as variáveis de folga  $\delta_{\mathbf{u},k}^* = 0$  e  $\delta_{\mathbf{y},k}^* = 0$  são zeradas, então a função objetivo com a solução ótima no instante  $k$  será:

$$\begin{aligned}
V_{4,k}^* &= \sum_{j=1}^m \left\| \mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k}^* - \delta_{\mathbf{y},k}^* \right\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \left\| \mathbf{x}^{st}(k+m|k) \right\|_{\mathbf{Q}}^2 \\
&+ \sum_{j=1}^m \left\| \mathbf{u}^*(k+j|k) - \mathbf{u}_{des,k} - \delta_{\mathbf{u},k}^* \right\|_{\mathbf{Q}_u}^2 + \sum_{j=1}^{m-1} \left\| \Delta \mathbf{u}^*(k+j|k) \right\|_{\mathbf{R}}^2. \\
&+ \left\| \delta_{\mathbf{y},k}^* \right\|_{\mathbf{S}_y}^2 + \left\| \delta_{\mathbf{u},k}^* \right\|_{\mathbf{S}_u}^2.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Como o primeiro movimento de controle  $\Delta \mathbf{u}^*(k|k)$  é introduzido na planta e no próximo instante  $k+1$  os estados do sistema reproduzem com exatidão o comportamento da planta, ou seja,  $\tilde{\mathbf{x}}(k+1|k+1) = \mathbf{x}(k+1|k)$ , então as soluções herdadas que deverão ser usadas são:

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}}_{k+1} = \left[ \Delta \mathbf{u}^*(k+1|k)^\top \dots \quad \Delta \mathbf{u}^*(k+m-1|k)^\top \quad \mathbf{0}^\top \right]^\top,$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_{sp,k+1} = \mathbf{y}_{sp,k}^*,$$

$$\tilde{\delta}_{\mathbf{y},k+1} = \delta_{\mathbf{y},k}^*,$$

$$\tilde{\delta}_{\mathbf{u},k+1} = \delta_{\mathbf{u},k}^*,$$

$$\tilde{\delta}_{\mathbf{un},k+1} = \delta_{\mathbf{un},k}^*,$$

$$\tilde{\delta}_{\mathbf{i},k+1} = \delta_{\mathbf{i},k}^*,$$

as quais satisfazem as restrições terminais em  $k + 1$ , como sendo:

$$\tilde{\mathbf{x}}^s(k + m + 1|k) - \tilde{\mathbf{y}}_{sp,k+1} - \tilde{\delta}_{\mathbf{y},k+1} = 0, \quad (3.45)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{un}(k + m + 1|k) - \tilde{\delta}_{\mathbf{un},k+1} = 0, \quad (3.46)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^i(k + m + 1|k) - \tilde{\delta}_{\mathbf{i},k+1} = 0, \quad (3.47)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}(k + m + 1|k) - \mathbf{u}_{des,k} - \tilde{\delta}_{\mathbf{u},k+1} = 0. \quad (3.48)$$

A viabilidade recursiva para as restrições (3.45), (3.46) e (3.47) segue os passos similares do **Teorema 1** e **Teorema 2**. Para a nova restrição (3.41), também pode ser verificado que a solução ótima satisfaz em  $k + 1$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{nu}^\top \Delta \tilde{\mathbf{u}}_{k+1} + \mathbf{u}^*(k|k) - \mathbf{u}_{des,k} - \tilde{\delta}_{\mathbf{u},k+1} &= \mathbf{I}_{nu}^\top \Delta \tilde{\mathbf{u}}_{k+1} + \Delta \mathbf{u}^*(k|k) + \mathbf{u}(k-1) - \mathbf{u}_{des,k} - \delta_{\mathbf{u},k}^* \\ &= \mathbf{I}_{nu}^\top \Delta \mathbf{u}_k^* + \mathbf{u}(k-1) - \mathbf{u}_{des,k} - \delta_{\mathbf{u},k}^* \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Logo a convergência assintótica também é direta, uma vez em que a função objetivo tem a solução ótima na equação (3.44) e o valor de custo associado a esta solução herdada é expressa na equação (3.50).

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{4,k+1} &= \sum_{j=1}^m \left\| \mathbf{y}(k + j + 1|k) - \tilde{\mathbf{y}}_{sp,k+1} - \tilde{\delta}_{\mathbf{y},k+1} \right\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \left\| \mathbf{x}^{st}(k + m|k) \right\|_{\bar{\mathbf{Q}}}^2 \\ &+ \sum_{j=1}^m \left\| \tilde{\mathbf{u}}(k + j|k) - \mathbf{u}_{des,k} - \tilde{\delta}_{\mathbf{u},k+1} \right\|_{\mathbf{Q}_u}^2 + \sum_{j=1}^{m-1} \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}(k + j + 1|k) \right\|_{\mathbf{R}}^2 \\ &+ \left\| \tilde{\delta}_{\mathbf{y},k+1} \right\|_{\mathbf{S}_y}^2 + \left\| \tilde{\delta}_{\mathbf{u},k+1} \right\|_{\mathbf{S}_u}^2 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Subtraindo a equação (3.50) de (3.44), a relação encontrada é

$$V_{4,k}^* - \tilde{V}_{4,k+1} = \left\| \mathbf{y}(k|k) - \mathbf{y}_{sp,k}^* - \delta_{\mathbf{y},k}^* \right\|_{\mathbf{Qy}}^2 + \left\| \mathbf{u}^*(k|k) - u_{des,k} - \delta_{\mathbf{u},k}^* \right\|_{\mathbf{Qu}}^2 + \left\| \Delta \mathbf{u}^*(k|k) \right\|_{\mathbf{R}}^2, \quad (3.51)$$

portanto, desde de que  $\mathbf{Qy}$ ,  $\mathbf{Qu}$  e  $\mathbf{R}$  sejam matrizes definidas positivas, os termos do lado direito da equação (3.51) serão positivos, então  $\tilde{V}_{4,k+1} \leq V_{4,k}^*$ . Como consequência direta a solução ótima em  $k + 1$  resultará em  $V_{4,k+1}^* \leq \tilde{V}_{4,k+1}$ , isso implica que  $V_{4,k+1}^* \leq V_{4,k}^*$ , ou seja, se o sistema é controlável no ponto desejado de equilíbrio, a sequência dos custos ótimos aplicados à planta vão diminuindo e convergindo para zero, garantindo assim estabilidade em malha fechada do **Problema P4**.

### 3.5 COMENTÁRIOS

Neste capítulo foi apresentada uma lei de controle com garantia de estabilidade para sistemas com modos estáveis, instáveis e integradores que até este momento não tinha sido abordados nas principais literaturas. Primeiramente, fez-se uma revisão da lei de controle IHMPC na qual apresenta problema de infactibilidade quando a planta é sujeita a grandes perturbações ou variações na referência. Para contornar esta problemática, é proposto uma primeira extensão na formulação do **Problema P1**, na qual abarca a inserção da variável de folga para os modos integradores artificiais, cujo o principal objetivo é suavizar a restrição e aumentar a faixa de viabilidade do controlador. No entanto, é verificado no **Problema P2** que a depender da magnitude das perturbações ou *setpoints* a lei de controle pode tornar-se inviável, pois as restrição dos modos instáveis e integradores não são suavizadas. Para tal, novas variáveis de folga foram adicionadas conforme Carrapiço e Odloak (2005) e Martins e Odloak (2016) no **Problema P3** para aumentar o domínio de atração do controlador e garantir a estabilidade do sistema. Por fim, foi apresentada mais uma nova extensão do **Problema P3** com características adicionais, ou seja, as variáveis controladas são definidas através de faixas específicas e o *target* é incluso no problema de otimização para rastrear o melhor ponto de operação na variável manipulada, resultando no **Problema P4**. Além disso, nesta seção abordou a recursividade dos estados, bem como, a convergência assintótica da função objetivo nos problemas de otimização abordados. No capítulo seguinte, serão apresentados dois estudos de casos para análise e desempenho do controlador proposto que foi definido na seção 3.4.

*Neste capítulo serão apresentados os principais resultados de simulação, relacionados à aplicação da técnica de controle preditivo com garantia de estabilidade nominal estendido para o controle por faixas e targets, retratado no **Problema P4**. Os resultados foram divididos em dois estudos de casos, a saber: i) as primeiras análises, serão direcionadas ao estudo de uma planta multivariável CSTR (Reator Tanque Contínuo Agitado), normalmente empregado nos domínios da engenharia de processos. Neste sistema, procurou-se investigar o desempenho do controlador com suas propriedades estabilizantes para controle regulatório e servo-mecanismo, seguindo por conclusões apropriadas decorrentes do estudo do controlador proposto. ii) em seguida, são apresentados os principais resultados do IHMPC em um sistema subatuado, pêndulo invertido. Neste cenário, as perturbações externas, bem como, incertezas do modelo da planta são consideradas para avaliar a robustez do controlador e a estabilidade do sistema.*

## **RESULTADOS**

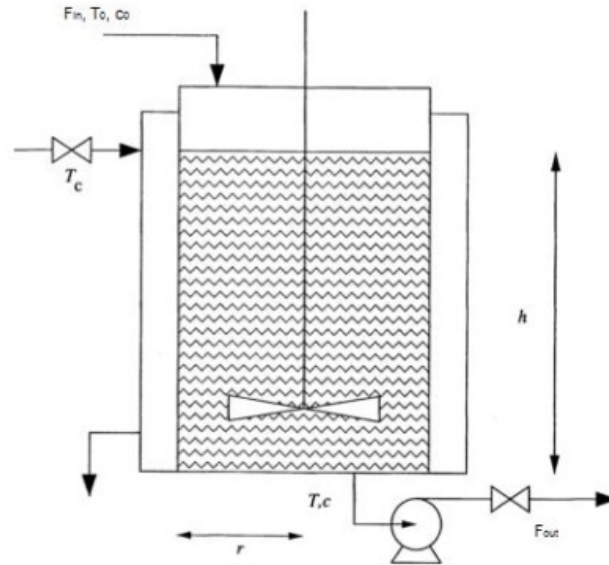
### **4.1 ESTUDO DE CASO: SISTEMA REATOR QUÍMICO**

#### **4.1.1 Modelo em estudo**

O controle de processos químicos é um fator determinante para o bom desempenho de toda a planta. No entanto, o seu sucesso só vai depender do desenvolvimento de estruturas de controle adequadas. O sistema CSTR é um exemplo típico da indústria química, pois o fato de ser multivariável e ter um modelo matemático não linear, leva-o a ter um comportamento dinâmico complexo e desafiador para técnicas de controle.

Alguns benefícios econômicos, podem ser obtidos quando o reator se encontra em operação ótima, ou seja, operando no limite das restrições nas quais as reações químicas são complexas e os levam a diversos produtos. No trabalho de Yamashita et al. (2015), os autores sintetizaram uma lei de controle IHMPC em ambiente simulado no reator

CSTR, operando em pontos operacionais (modos instáveis e integradores) com maiores lucratividades. Entretanto, a lei de controle dos autores não garantia a estabilidade do sistema, bem como, não contemplavam *targets* nas entradas e nem faixas nas controladas. Sob essa perspectiva, será avaliado o controlador proposto (**Problema P4**) no reator químico ilustrada na Figura 4.1.



**Figura 4.1** Representação esquemática do sistema CSTR

Fonte: (PANNOCCHIA; RAWLINGS, 2003)

#### 4.1.2 Modelo matemático

A Figura 4.1 ilustra o sistema físico considerado neste estudo de caso. Segundo Pannocchia e Rawlings (2003), ocorre no reator CSTR uma reação exotérmica, irreversível, de fase líquida e primeira ordem ( $A \rightarrow B$ ), sendo  $A$  o reagente e  $B$  o produto desejado. Conforme Yamashita et al. (2015), as equações do modelo, oriundas de balanços de massa e energia, podem ser escritas na equação (4.1), admitindo-se propriedades físicas e o coeficiente de transferência de calor constantes e desprezando a dinâmica da camisa.

$$\begin{cases} \frac{dh(t)}{dt} = \frac{F_{in}(t) - F_{out}(t)}{dt} \\ \frac{dc_A(t)}{dt} = \frac{c_{A,in} - c_A(t)F_{in}(t)}{\pi r^2 h(t)} - k_0 \exp\left[-\frac{E}{RT(t)}\right] c_A(t) \\ \frac{dT(t)}{dt} = \frac{[T_{in} - T(t)] F_{in}(t)}{\pi r^2 h(t)} + \frac{-\Delta H}{\rho C_p} k_0 \exp\left[-\frac{E}{RT(t)}\right] c_A(t) + \frac{2U}{\rho r C_p} [T_c(t) - T(t)] \end{cases} \quad (4.1)$$

Na busca de possíveis estruturas de controle, observa-se que o sistema descrito em (4.1) é multivariável, ou seja, três variáveis de entrada e três variáveis de saída. Estas variáveis, podem ser classificadas como: nível de líquido no reator  $\mathbf{y}_1[h(m)]$ ; a concentração de reagente  $\mathbf{y}_2[c_A(kmol/m^3)]$ ; e a temperatura no reator em  $\mathbf{y}_3[T(K)]$ . As manipuladas estão associadas à vazão de fluido na entrada do reator  $\mathbf{u}_1[F_{in}(m^3/min)]$ ; à vazão de saída do fluido  $\mathbf{u}_2[F_{out}(m^3/min)]$ ; e a temperatura na camisa  $\mathbf{u}_3[T_c(K)]$ .

O modelo das equações (4.1) como a maioria dos modelos pertinentes a reatores químicos, é não linear. No entanto, o controlador proposto trabalha com modelo linear, o que requer a linearização das equações do modelo antes da aplicação do algoritmo de controle. Sendo assim, o modelo linearizado nos pontos operacionais definidos por Yamashita et al. (2015), para os estados instáveis e integradores é definido através dos parâmetros da tabela (4.1)

**Tabela 4.1** Parâmetros nominais do sistema CSTR

Descrição	Valor
$c_{A,in}$ (concentração de reagentes)	1.0 kmol·m <sup>-3</sup>
$T_{in}$ (temperatura de alimentação)	350 K
$r$ (raio de reator)	0.47 m
$k_0$ (fator exponencial)	6x10 <sup>10</sup> min <sup>-1</sup>
$E/R$ (energia de ativação)	8.890 K
$U$ (coeficiente global de transferência de calor)	315.6 W·m <sup>-2</sup> ·K <sup>-1</sup>
$\rho$ (densidade na mistura de reação)	7x10 <sup>2</sup> kg·m <sup>-2</sup>
$C_p$ (capacidade de calor na mistura da reação)	220 J·kg <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup>
$\Delta H$ (entalpia de reação)	-2x10 <sup>7</sup> J·kmol <sup>-1</sup>

e representado pela função de transferência sem a presença de tempos mortos na equação (4.2).

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1.44}{s} & \frac{-1.44}{s} & 0 \\ \frac{0.44s^2 - 1.45s + 1.17}{s^3 + 0.17s^2 - 1.55s} & \frac{0.64s - 1.17}{s^3 + 0.17s^2 - 1.55s} & \frac{-0.02}{s^2 + 0.17s^2 - 1.55} \\ \frac{-0.6s^2 - 32.13s - 46.19}{s^3 + 0.17s^2 - 1.55s} & \frac{-0.08s + 46.19}{s^3 + 0.17s^2 - 1.55s} & \frac{0.52s + 1.05}{s^2 + 0.17s^2 - 1.55} \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

O modelo em espaço de estados que é baseado na resposta ao degrau para modos estáveis, instáveis e integradores, já foi consolidado na seção 2.2. O modelo trata com a forma incremental das entradas, o que implica numa síntese do controlador livre de *offset* através de um único problema de otimização. Dessa forma, ao utilizar a função de transferência em (4.2) e seguindo os passos na formulação das equações (2.16) até (2.20)

é encontrado o modelo OPOM. Vale ressaltar que para sintetizar o controlador proposto, o modelo em espaço de estados deve ser estabilizável e detectável, conforme as matrizes  $\mathbf{M}_e$  e  $\mathbf{M}_d$ , definidas na **Observação (1)**.

#### 4.1.3 Simulação em malha fechada

A Figura 4.2 ilustra esquematicamente o controle em malha fechada utilizada na simulação. A variável  $y_{\max}$  e  $y_{\min}$  determinam a trajetória das controladas, ou seja, as faixas de operação;  $V_{4,k}$  é a função objetivo no **Problema P4**;  $y_p(k|k)$  são as saídas associadas à planta no instante  $k$ ;  $x(k|k)$  os estados do controlador;  $u^*(k|k)$  é a ação de controle ótima calculada pelo otimizador e as restrições terminais de igualdade, desigualdade, limites superior e inferior que também estão associados a QP (*Quadratic Programming*).

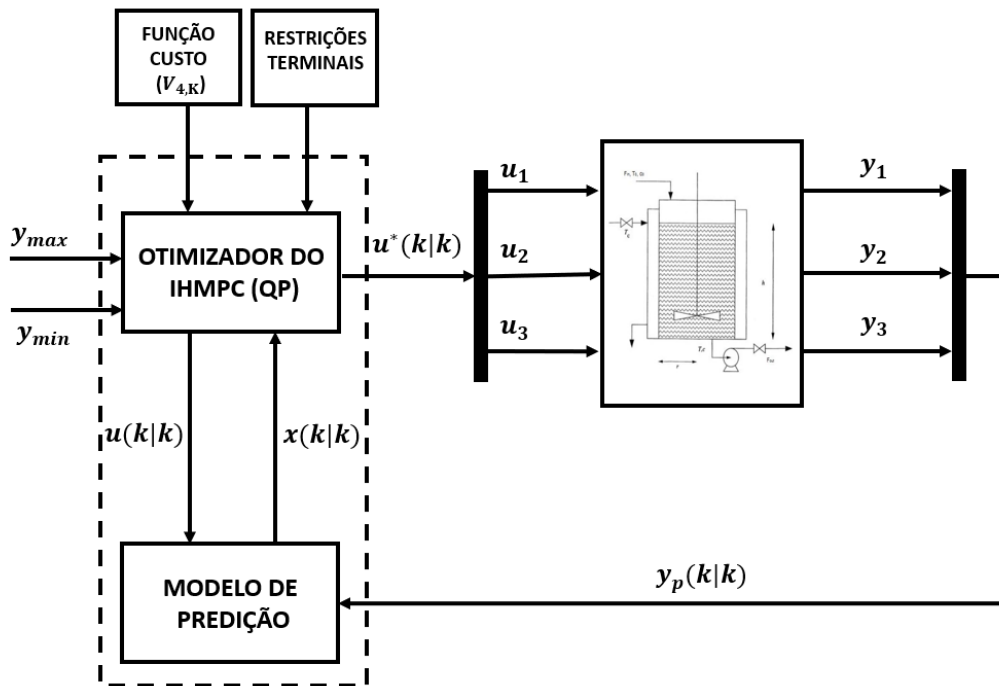


Figura 4.2 Esquema da malha de controle CSTR

No início da simulação, assume-se que existem alvos de otimização para as saídas, ou seja, o controlador tem que manter as saídas do sistema dentro das faixas (mínima e máxima) nos instantes, definidas pela tabela em (4.2).



**Tabela 4.2** Faixas desejáveis

Variáveis	Valor mínimo	Valor máximo	Tempo (min)
$\mathbf{y}_1$ [ $h(m)$ ]	0.9	1	0 - 12.5
$\mathbf{y}_2$ [ $c_A(kmol/m^3)$ ]	0.6	0.7	
$\mathbf{y}_3$ [ $T(K)$ ]	355	360	
$\mathbf{y}_1$ [ $h(m)$ ]	0.7	0.8	12.5 - 25
$\mathbf{y}_2$ [ $c_A(kmol/m^3)$ ]	0.8	0.9	
$\mathbf{y}_3$ [ $T(K)$ ]	345	350	

As restrições associadas às entradas são definidas em (4.3).

**Tabela 4.3** Restrições das entradas do sistema

Variáveis	Valor mínimo	Valor máximo	$\Delta u$ máximo
$\mathbf{u}_1$ [ $F_{in}(m^3/min)$ ]	0.01	1	0.065
$\mathbf{u}_2$ [ $F_{out}(m^3/min)$ ]	0.01	1	0.065
$\mathbf{u}_3$ [ $T_c(K)$ ]	240	270	15

Por fim, os parâmetros de sintonia do IHMPC são apresentados na tabela (4.4).

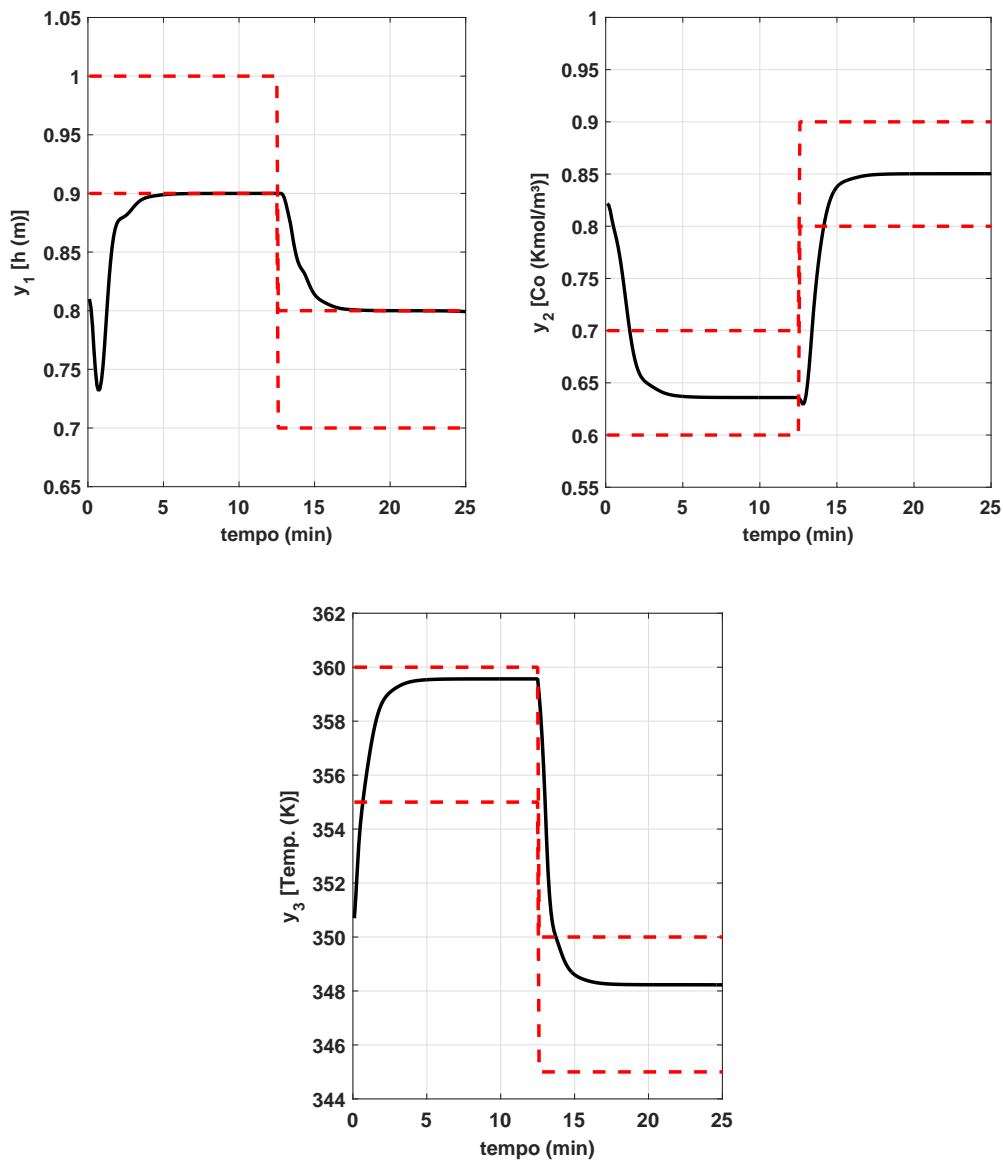
**Tabela 4.4** Parâmetros de sintonia

Variáveis	Valor
<b>Qy</b>	[2 4 50]
<b>Qu</b>	[0 0 1]
<b>R</b>	[1e3 1e3 1e-1]
<b>Sy</b>	[8e4 5e2 1e5]
<b>Su</b>	[0 0 5]
<b>Sun</b>	[1e4 1e4 1e4]
<b>Si</b>	[1e2 10 1]

Vale ressaltar que o ponto de operação foi definido no trabalho de Yamashita et al. (2015). O tempo de amostragem foi  $\Delta t = 0.1$  min e o horizonte de controle escolhido foi  $m = 7$ . É interessante notar que o horizonte de controle deve ser pelo menos sete, pois, esse sistema de reator possui seis polos instáveis.

O sistema inicia a partir das seguintes condições iniciais:  $\mathbf{y}(0) = [0.81 \ 0.82 \ 350]^\top$  e  $\mathbf{u}(0) = [0.91 \ 0.91 \ 258]^\top$ . Observa-se nos primeiros instantes que as variáveis controladas se encontram fora da faixa de operação. Sendo assim, o controlador identifica o erro de predição na saída e ativa o ponto de melhor ajuste correspondente às faixas inferiores e superiores, conduzindo às saídas para valores aleatórios dentro das faixas especificadas.

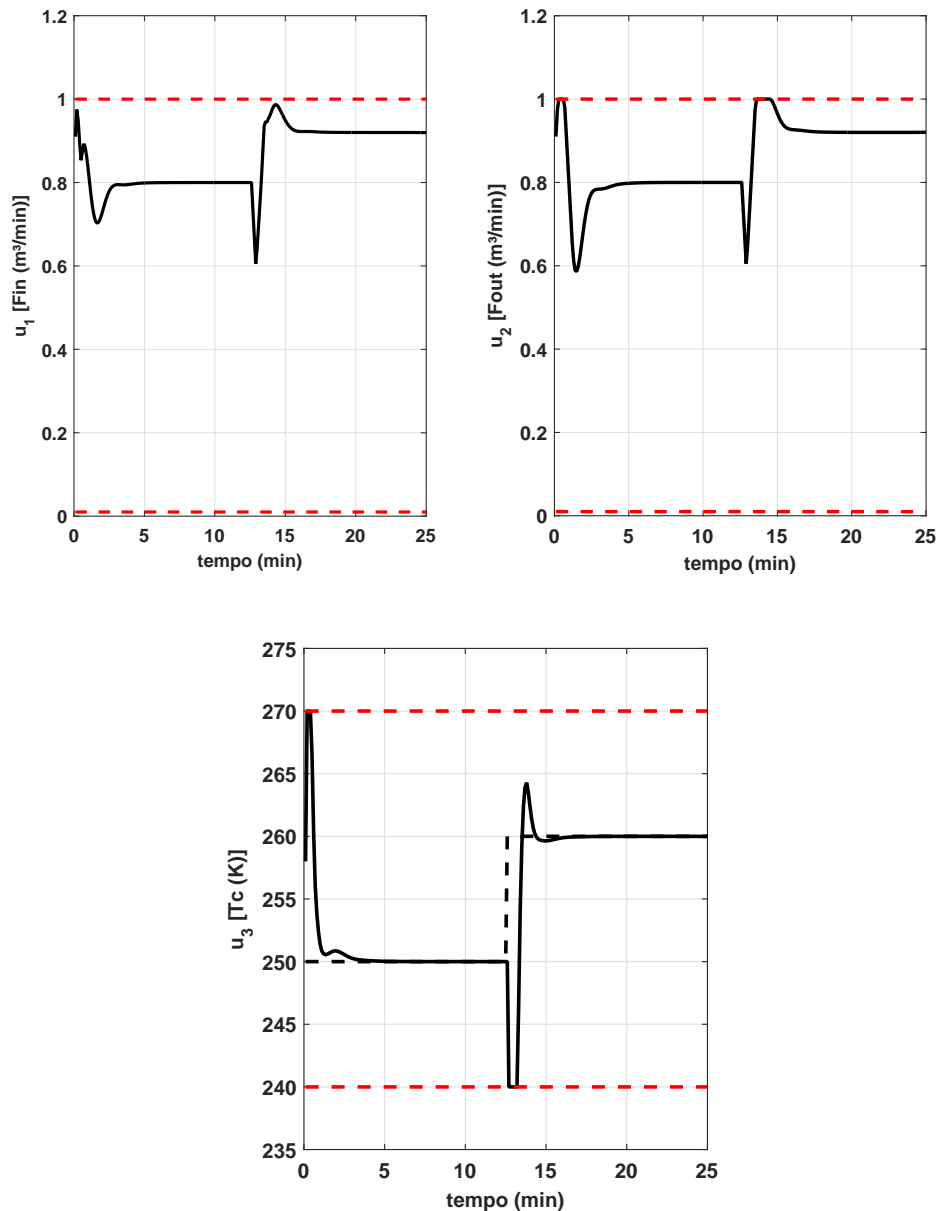
Quando o erro de predição é zerado, ou seja, as controladas estão nas faixas, a lei de controle do reator permanece factível nos instantes posteriores (regime permanente) e o controlador tem mais graus de liberdade para que a manipulada atinja o respectivo *target*.



**Figura 4.3** Desempenho das controladas (-) e as faixas (--) de operação

Como o objetivo do controlador é manter a concentração de reagente numa faixa especificada, optou-se em mudar o ponto operacional do sistema para caso servomecanismo

no instante 12.5 min. Percebe-se que o controlador conseguiu rastrear os novos pontos operacionais sem perda de desempenho. No entanto, vale ressaltar que foram escolhidos pesos grandes em  $\mathbf{S}y_{1,3}$  e  $\mathbf{Q}y_{1,3}$ , uma vez que a temperatura descontrolada pode mudar as características das reações e facilmente levar à instabilidade do sistema. A Figura 4.4 ilustra o esforço de controle.

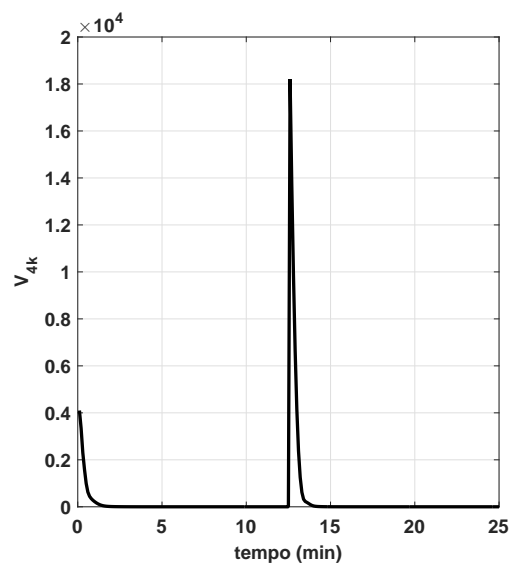


**Figura 4.4** Desempenho das manipuladas (-); às restrições (- -) e o *target*  $u_3$  (--)

Observa-se que os limites na restrição não foram violados, de modo que seja preser-

vado o elemento final de controle da planta. Contudo, na escolha do controlador proposto, é possível verificar no início da simulação que  $\mathbf{u}_3$  inicializa no ponto de equilíbrio. No entanto, o reator é forçado a operar no *target* ( $\mathbf{u}_{des} = 250$ ), uma vez que,  $\mathbf{u}_3$  é a única entrada manipulada não integradora do sistema. Nota-se também que no estado estacionário as vazões de entrada e saída ( $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$ ) mantêm o sistema em equilíbrio. Em 12.5 min, é definido um novo ponto de operação ( $\mathbf{u}_{des} = 260$ ). Todavia, o controlador conduz a manipulada para esse novo *target*, sem violar a restrição e garantindo a estabilidade do sistema em um novo ponto operacional.

Na Figura 4.5 apresenta-se a função objetivo associada ao controlador proposto no cenário escolhido. No entanto, a prova de convergência está associada a uma curva assintoticamente decrescente, caracterizando de fato uma função de Lyapunov. Dessa maneira, a lei de controle no **Problema P4** comprovou a estabilidade nominal do reator em malha fechada, pois a função objetivo caminha monotonicamente para a origem, até mesmo quando há mudanças nos *setpoints*.



**Figura 4.5** Função objetivo -  $V_{4,k}$

Por fim, as Figuras 4.6 e 4.7 ilustram a utilização das variáveis de folga no problema de controle. Percebe-se que quando foi preciso, as variáveis suavizaram o **Problema P4**, ou seja, o controlador precisou de graus de liberdade adicionais para condicionar as controladas para as faixas operacionais e manipular o *target* para o valor desejado.

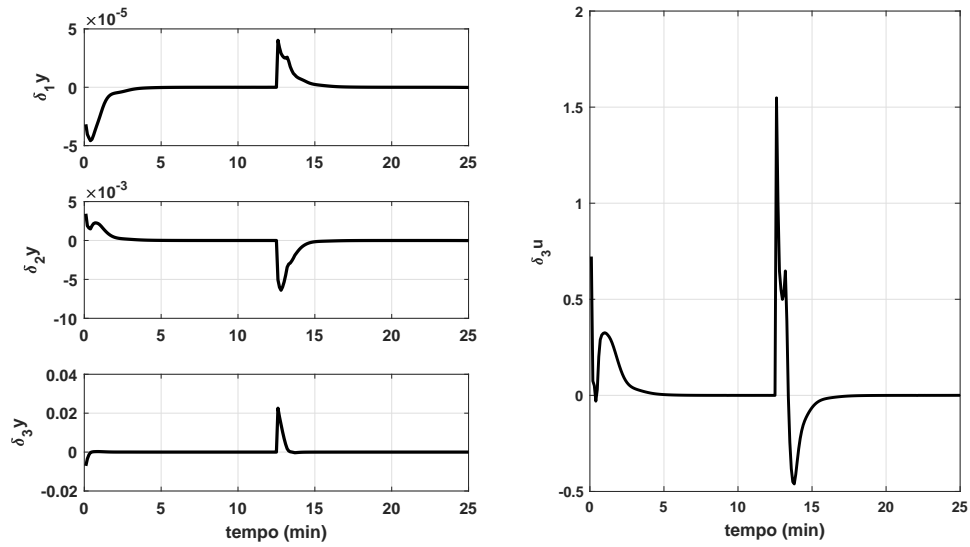


Figura 4.6 Atuação das variáveis de folga nas saídas ( $\delta_y$ ) e no *target* ( $\delta_u$ )

Além disso, quando o sistema encontra-se em regime permanente e as metas são alcançadas, as variáveis de folga convergem sistematicamente para zero, garantindo assim a factibilidade do controlador em malha fechada e comprovando o **Teorema 4**.

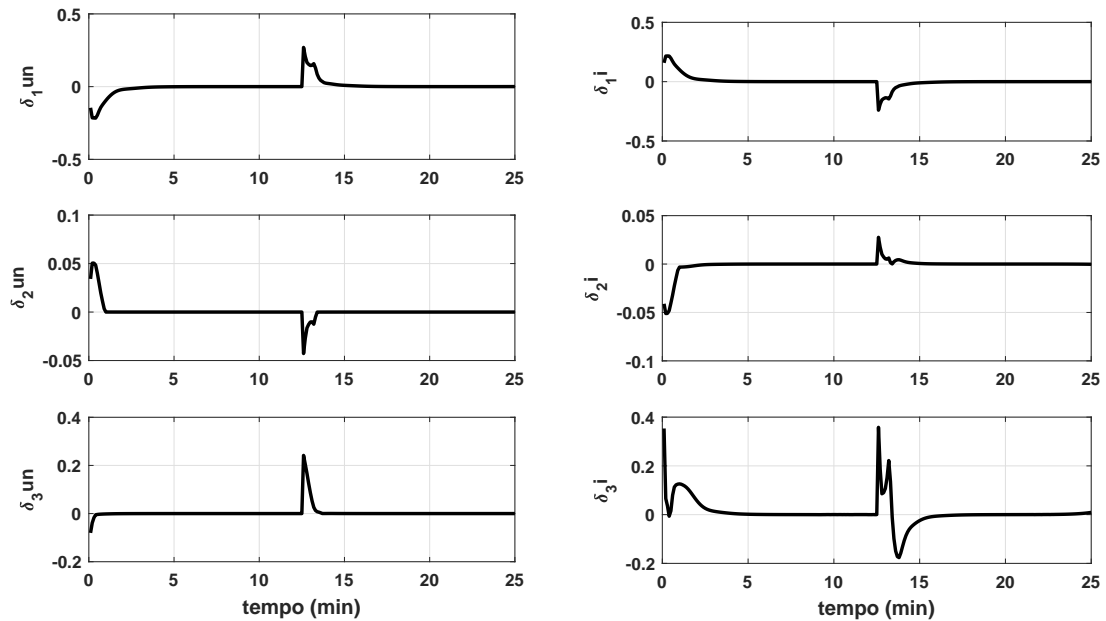


Figura 4.7 Atuação das variáveis de folga nos modos instáveis ( $\delta_{un}$ ) e integradores ( $\delta_i$ )

Portanto, conclui-se que em condições ideais, ou seja, se o sistema for controlado e observável e o modelo matemático representar perfeitamente o comportamento da planta (caso nominal), a formulação de controle preditivo com estabilidade nominal no **Problema P4**, garante que as restrições terminais não serão violadas e o problema de otimização será sempre factível para seu *target* na entrada e faixas desejadas, mesmo que ocorram mudanças operacionais no sistema dentro dos limites utilizados.

A fim de verificar o comportamento do controlador proposto considerando o caso em que o seu modelo está desassociado com a planta (modelo não linear) e as incertezas dos parâmetros físicos são consideradas, será descrita na próxima seção um estudo de caso em um sistema pêndulo invertido, que contempla características instáveis, integradoras e subatuados.

## 4.2 ESTUDO DE CASO: SISTEMA PÊNDULO INVERTIDO

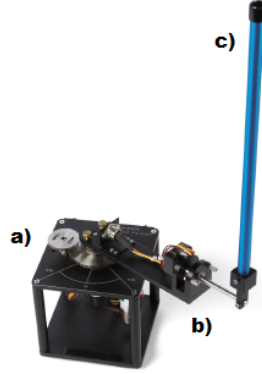
### 4.2.1 Modelo em estudo

O pêndulo invertido é um conceito muito difundido na área de automação e robótica. Algumas aplicações reais são motivadas nos estudos em pêndulos invertidos, como por exemplo: no setor aeronáutico, para estabilização de lançamento de foguetes; na biomecânica, em equilíbrio de robôs; no setor comercial, no sentido de transporte de pessoas (*segway*), dentre outros (OGATA, 2003) (NISE, 2010).

Conforme Casanova et al. (2016), mecanismos do tipo pêndulo invertido representam uma classe de sistemas eletromecânicos, não lineares, instáveis e subatuados, os quais possibilitam o estudo de diversas arquiteturas de controladores clássicos e avançados provenientes da teoria de controle. Sob essa perspectiva, a técnica de controle proposta neste trabalho até então não foi consolidada nesse tipo de sistema, o qual se torna desafiador. Por conta disso, será realizado um estudo de análise e desempenho do controlador preditivo de horizonte infinito (**Problema P4**) quando o pêndulo está sujeito a perturbações externas e incertezas no modelo para o caso regulatório e servo-mecanismo.

O modelo de pêndulo invertido utilizado é fabricado pela empresa Quanser, composto por três partes principais: base, braço horizontal, e uma haste vertical. A base do pêndulo é o elemento de fixação do equipamento à bancada, sendo constituído por um servomotor, caixa de redução, sensor de posição (*encoder*) e uma cadeia de engrenagens. O braço horizontal é montado sobre o conjunto das engrenagens de saída e um *encoder* é fixado ao eixo do braço para medir o ângulo de rotação. Na outra extremidade do braço, uma haste pendular está acoplada e um outro *encoder* é utilizado para medir o

movimento de translação. Na Figura 4.8 é ilustrado o conjunto do pêndulo invertido do fabricante.



**Figura 4.8** Pêndulo invertido e os seus componentes: **a)** base; **b)** braço e **c)** haste

Fonte: (QUANSER CONSULTING INC, 2008)

#### 4.2.2 Modelo matemático

O sistema pêndulo invertido tem sido objeto de estudo em diversos trabalhos na literatura, como por exemplo, (JADLOVSKA; SARNOVSKY, 2013) (DANG et al., 2014) (JEKAN; SUBRAMANI, 2016) (ARANDA-ESCOLÁSTICO et al., 2016) (WEN; SHI; LU, 2017). Dentre os modelos propostos para representar a dinâmica do pêndulo, optou-se por utilizar o apresentado por Cruces e Lafayette (2016). A escolha desse modelo foi motivada pelo fato de seus parâmetros terem sido determinados para o mesmo equipamento utilizado neste trabalho. O modelo matemático do pêndulo é obtido através do formalismo de Lagrange, sendo não-linear e instável em malha aberta. Através de algumas simplificações matemáticas, esse modelo não linear pode ser expresso pelo seguinte conjunto de equações diferenciais em estados:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_3 = \frac{-\mathbf{b}c\sin(\alpha)(\dot{\alpha})^2 + \mathbf{b}d\sin(\alpha)\cos(\alpha) - \mathbf{c}e(\dot{\theta}) + \mathbf{c}fVm}{\mathbf{a}c - \mathbf{b}^2\cos^2(\alpha)} \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{\mathbf{a}d\sin(\alpha) - \mathbf{b}^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)(\dot{\alpha}^2) - \mathbf{b}e\cos(\alpha)(\dot{\theta}) + \mathbf{b}f\cos(\alpha)Vm}{\mathbf{a}c - \mathbf{b}^2\cos^2(\alpha)} \end{array} \right. , \quad (4.3)$$

em que os estados  $x_1$  e  $x_2$  representam, respectivamente, o ângulo de rotação do braço definido como theta ( $\theta$ ), e alpha ( $\alpha$ ) o ângulo de translação da haste. A unidade de medida dos ângulos é em radianos (*rad*). Os outros estados,  $x_3$  e  $x_4$  representam suas respectivas derivadas em (*rad/s*), e  $Vm$  representa, a tensão de entrada do servomotor em *volts*. Os demais parâmetros são constantes relacionadas às dimensões físicas e massas dos diversos componentes do pêndulo, os quais podem ser consultados na tabela (4.5).

**Tabela 4.5** Parâmetros nominais do sistema pêndulo invertido

Descrição	Valor
$Rm$ (resistência)	2.6
$Kg$ (relação de transmissão motor)	70
$Km$ (constante eletromotriz)	0.007677
$Kt$ (torque do motor)	0.007682
$ng$ (eficiência da caixa de velocidade)	0.9
$nm$ (eficiência do motor)	0.69
$L$ (comprimento da haste)	0.1556
$mp$ (massa da haste)	0.125
$r$ (comprimento do braço)	0.2159
$Jeq$ (momento de inércia total)	0.0021
$Jm$ (momento de inércia do motor)	3.87e-7
$Beq$ (viscosidade total)	0.0150
$g$ (gravidade)	9.81

na qual:

- $\mathbf{a} = Jeq + mp * r^2 + ng * Kg^2 * Jm;$
- $\mathbf{b} = mp * L * r;$
- $\mathbf{c} = 4/3 * mp * L^2;$
- $\mathbf{d} = mp * g * L;$
- $\mathbf{e} = Beq + (nm * ng * Kt * Kg^2 * Km/Rm);$
- $\mathbf{f} = nm * ng * Kt * Kg/Rm.$

O controle de estabilização do pêndulo pode ser encarado como um sistema de equações lineares. Uma vez que a equação (4.3) é não linear, será definido um modelo linearizado numa região específica, na qual o pêndulo permanecerá na posição invertida, neste caso, para cima. Para isso, considere ( $\dot{\alpha}$ )  $\approx 0$  e ( $\alpha$ )  $\approx 0$ . Após algumas manipulações algébricas



na equação (4.3) e aplicando a teoria de Laplace, podemos escrever o sistema na forma de função de transferência como sendo

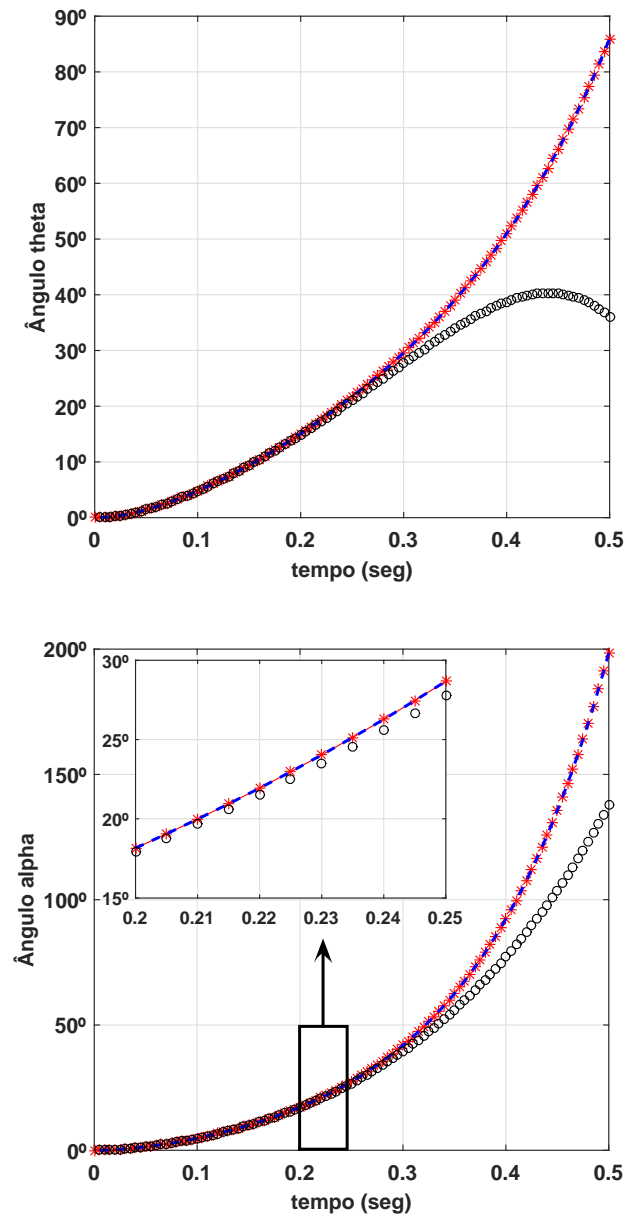
$$G(s) = \left[ \begin{array}{c} \frac{24.42s^2 - 1073}{s(s^3 + 13.47s^2 - 80.18s - 591.8)} \\ \frac{23.51s}{s^3 + 13.47s^2 - 80.18s - 591.8} \end{array} \right], \quad (4.4)$$

e seguindo os passos da equação (2.16) até (2.20) é encontrado o modelo OPOM em espaço de estados, a saber

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.002 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.99 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.015 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.015 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0.16 \\ 0 \\ 0.05 \\ 0.09 \\ 0.06 \\ -0.14 \\ 0.01 \\ 0.08 \\ 1.52 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (4.5)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vale destacar que o modelo OPOM em (4.5) já é discretizado. Para efeitos de estudos foi realizada uma simulação em malha aberta, cujo o objetivo foi averiguar até que região o modelo linear consegue representar com exatidão o não linear. Para tal, as situações avaliadas foram: (i) as condições iniciais de ambos os modelos estão na posição vertical, voltada para cima; (ii) o ângulo alpha ( $\alpha$ ) inicia-se com 0.001 rad; (iii) desconsiderou-se as incertezas em ambos os modelos. Os resultados encontrados utilizando a plataforma Matlab/Script são apresentados na Figura 4.9.



**Figura 4.9** Resposta em malhada aberta para  $G(s)$  (-), OPOM (\*) e Não linear (o)

A partir dos resultados de simulação, o modelo linear representa com exatidão o movimento do pêndulo para o ângulo  $\theta$  e  $\alpha$  durante os primeiros segundos. No entanto, nos instantes posteriores ambos os modelos começam a divergir. Contudo, percebe-se que de 0.2 até 0.25 seg, o ângulo  $\alpha$  consegue descrever aproximadamente os primeiros 20 graus do modelo não linear e em seguida, ele começa a se afastar do movimento não linear. Portanto é possível afirmar que o modelo linearizado em espaço

de estados e a função de transferência conseguem representar em uma região o movimento dinâmico do pêndulo invertido por meio do modelo não linear.

### 4.2.3 Simulação em malha fechada

O ensaio em malha fechada para o pêndulo invertido foi dividido em dois cenários, a saber: *i*) o primeiro busca retratar a estabilidade do controlador proposto para o caso regulador, bem como a importância das variáveis de folga na função objetivo quando a planta não linear está sujeita a perturbações externas; *ii*) no segundo cenário, avalia-se a robustez do controlador no momento em que fontes de incertezas são consideradas, ou seja, na variação da massa do pêndulo invertido e quantizadores na malha de controle para simular os efeitos causados pelos *encoders*. Buscou-se incluir todas essas características nas simulações para torná-las mais representativas do sistema real. O esquema da malha de controle é representado na Figura 4.10.

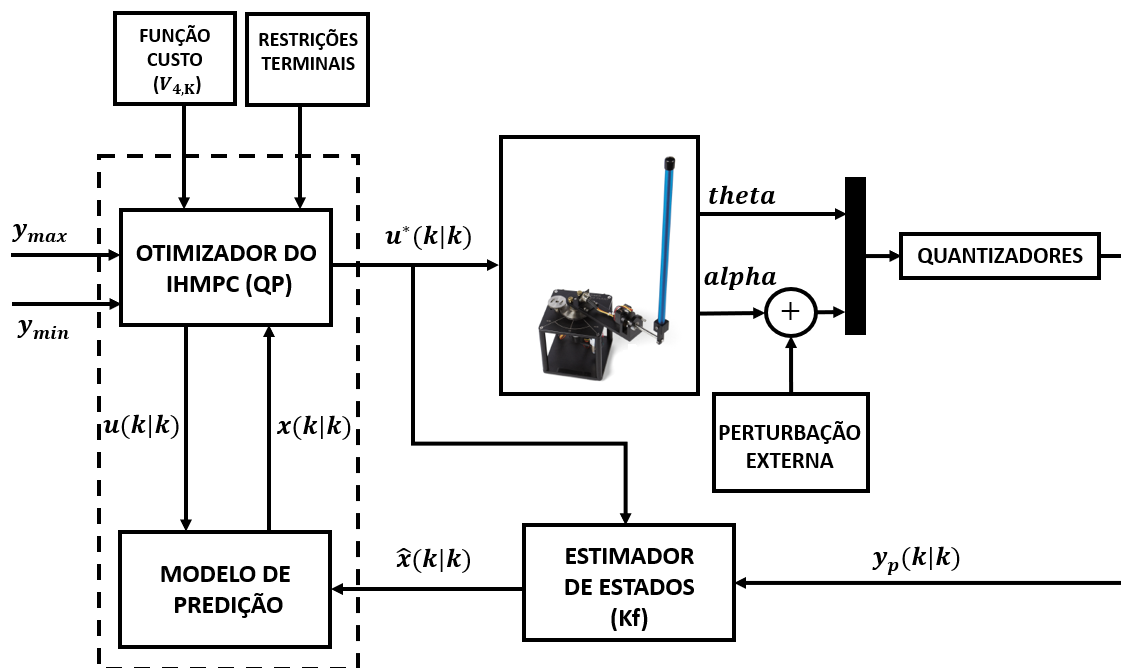


Figura 4.10 Esquema de malha de controle do pêndulo invertido

A seguir são apresentados os blocos da malha de controle acima.

- A lei de controle do IHMPC utilizado está descrito no **Problema P4**;

- O modelo da planta que define o comportamento dinâmico do pêndulo invertido são as equações diferenciais ordinárias não lineares apresentadas na equação (4.3), uma vez que correspondem ao descasamento do modelo de predição do controlador;
- A perturbação externa é simulada por um sinal do tipo impulso acrescentado na variável alpha em dois tempos distintos;
- O pêndulo invertido vem equipado com dois *encoders* os quais fornecem medidas dos dois ângulos que caracterizam a posição rotacional do braço e o movimento de translação da haste. A resolução dos *encoders* segundo o fabricante é de 4096 *ppr* (pulsos por resolução), ou seja, a variável de quantização ( $\mathbf{Qz}$ ) para cada *encoder* em *rad/ppr* vão assumir o seguinte valor, conforme a equação (4.6)

$$\mathbf{Qz} = \frac{2\pi}{4096}. \quad (4.6)$$

- O estimador de estados utilizado é o filtro de Kalman, o qual leva em conta a estatística de erro conhecida dos sensores e compara estes erros com o resultado do estimador. O ganho do filtro ( $\mathbf{Kf}$ ) foi calculado através da função “*dlqe*” do Matlab/Script apresentado na equação (4.7)

$$\mathbf{Kf} = \begin{bmatrix} -0.679 & 0.000 \\ 0.000 & -0.493 \\ 0.052 & 0.000 \\ -0.032 & 0.000 \\ 0.000 & 0.054 \\ 0.000 & -0.038 \\ 1.660 & 0.000 \\ 0.000 & 1.477 \\ -0.492 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

**Observação (6):** Para que o erro de estimação convirja a zero, é necessário que os autovalores estejam contidos dentro do círculo de raio unitário. Utilizando a função  $eig(\mathbf{A}-\mathbf{Kf}*\mathbf{C})$ , verificou-se que o ganho do filtro foi calculado corretamente e os os autovalores encontrados foram menores que 1.

### Cenário 1

O cenário analisa o desempenho do controlador proposto quando a planta é sujeita a

perturbações com magnitudes variadas, desconsiderando os efeitos dos quantizadores. O cenário a ser simulado é aquele em que o sistema começa afastado do ponto de equilíbrio, ou seja,  $\mathbf{y}(0) = [45^\circ \ 20.7^\circ]^\top$  e a manipulada é  $\mathbf{u}(0) = [0]$  volts. Aqui, o modelo linear usado no controlador IHMPC já foi definido na equação (4.5) e o controlador assume os seguintes parâmetros de sintonia:  $\Delta t = 0.002$  seg,  $m = 10$ ,  $\mathbf{Qy} = \text{diag}(1, 2)$ ,  $\mathbf{Qu} = \text{diag}(0)$ ,  $\mathbf{R} = \text{diag}(0.1)$ ,  $\mathbf{Su} = \text{diag}(2e2)$ ,  $\mathbf{Sun} = \text{diag}(1e6, 1e6)$  e  $\mathbf{Si} = \text{diag}(1e6, 0)$ . É importante destacar que não foi considerado o *target* para o sistema pêndulo, pois constatou-se por meio das simulações que quando o sistema está na posição de equilíbrio, a variável manipulada sempre é igual a zero e por essa razão, não será necessário definir um valor de rastreamento. Assim, o peso que se refere ao *target* ( $\mathbf{Qu}$ ) foi ignorado.

Como neste cenário é tratado o controle regulatório, a faixa de operação foi escolhida bem próxima da região de equilíbrio e as restrições da planta e do movimento máximo da entrada são apresentadas na tabela (4.6).

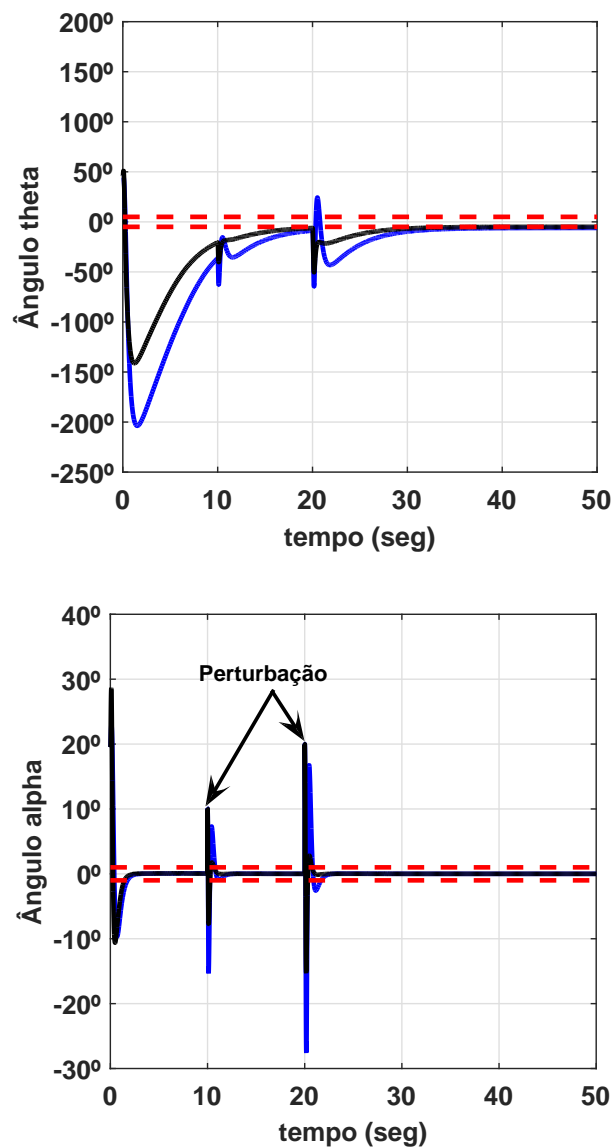
**Tabela 4.6** Restrições da entrada do sistema em volts

Variável	Valor mínimo	Valor máximo
$\mathbf{u}$	-12	12
$\Delta \mathbf{u}$	-1	1

Na Figura 4.11 são apresentados os resultados das controladas. Os principais aspectos analisados são: *i*) a estabilidade do pêndulo quando o modelo do controlador está desassociado com o modelo da planta (não linear); *ii*) a importância da variável de folga  $\delta_y$  em alpha quando o sistema está sujeito às perturbações no estado estacionário. Para isso, foram definidos dois casos na simulação, nos quais o gráfico de cor **preta** está considerando a importância da variável de folga através de um parâmetro de sintonia da matriz de peso  $\mathbf{Sy} = \text{diag}(1e5, 1e6)$ , ou seja, usar a variável quando for preciso, por outro lado no gráfico de cor **azul**, o parâmetro de sintonia é definido como  $\mathbf{Sy} = \text{diag}(1e5, 0)$ .

O sistema inicia-se quando as controladas estão fora das faixas de operação. Observa-se que a controlada theta (-) teve um maior esforço na rotação para condicionar alpha ao ponto de equilíbrio nos instantes iniciais. No entanto, percebe-se que o ponto de partida em alpha nos dois casos, foram escolhidos numa região em que o modelo linear representa a dinâmica não linear, visto na Figura 4.9. Contudo, no gráfico (-), alpha teve um tempo de resposta similar na inicialização mas com um menor esforço da rotação para chegar a faixa desejada, porém, em ambos os casos conseguiram alcançar o estado estacionário praticamente no mesmo instante. Em 10 segundos, ocorre a primeira perturbação tipo impulso de magnitude  $10^\circ$  no sistema. Nota-se que o controlador conseguiu manter o

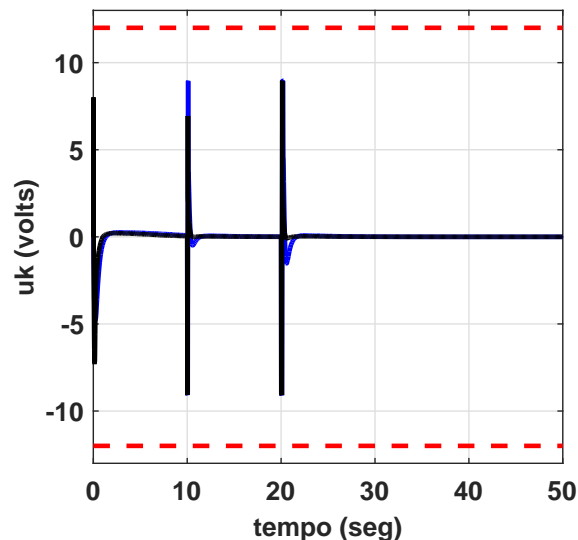
sistema estabilizado nas duas situações, entretanto, o gráfico (-) teve um deslocamento na haste de aproximadamente  $-14.2^\circ$ . Por outro lado, em (-) obteve-se  $-7.5^\circ$ , ou seja, o controlador usou a variável de folga para atenuar a perturbação e conseguiu impedir que a haste tivesse um deslocamento de até  $-6.7^\circ$ . Posteriormente, de forma amortecida a haste retorna para posição de equilíbrio, enquanto em (-) teve mais uma oscilação de aprox.  $8.0^\circ$  até chegar no região de equilíbrio.



**Figura 4.11** Controlada com peso  $S_y$  (-), Controlada sem o peso  $S_y$  (-) e as faixas (--) de operação

Em seguida no instante de 20 segundos, para verificar ainda mais a atuação da variável de folga na lei de controle, optou-se em dobrar a magnitude da perturbação para  $20^\circ$ . Constatou-se no gráfico (-), que a haste ultrapassou os seus  $-25^\circ$ , o que poderia na prática tornar a instabilidade do sistema. Em contrapartida, percebe-se que o controlador aumentou a faixa de viabilidade, uma vez em que a matriz de peso  $\mathbf{S}_y$  foi escolhido grande. Por conta disso, o deslocamento foi de aprox.  $-13.5^\circ$  e o controlador atenuou mais uma vez o movimento de translação na haste.

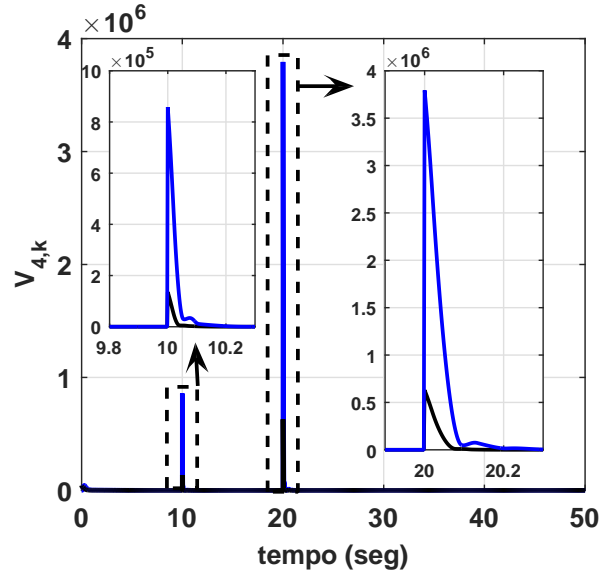
A Figura 4.12 ilustra o esforço de controle de ambos. Observa-se que durante as perturbações, os quais tendem a distanciar a variável manipulada dos limites, o controlador permaneceu com o sistema estabilizado nos dois casos e a restrição do atuador não foi violada, permanecendo assim uma lei de controle factível.



**Figura 4.12** Manipulada com peso  $\mathbf{S}_y$  (-), Manipulada sem peso  $\mathbf{S}_y$  (-) e a restrição (--) de operação

Uma das premissas para a garantia de estabilidade do controlador proposto é o comportamento da função objetivo ser monotonicamente decrescente, tal qual uma função de Lyapunov. Conforme pode ser analisado na Figura 4.13, nota-se um esforço computacional maior nos instantes onde ocorreram as perturbações no gráfico (-). Entretanto, em (-) a função caminha monotonicamente para origem mesmo com as perturbações imposta, assim, neste caso, a função objetivo conseguiu descrever um comportamento assintoticamente decrescente com uso da planta não linear. Por outro lado, no gráfico (-) não se pode assegurar a estabilidade em malha fechada dessa lei de controle, pois quando

ocorreram as perturbações, a função teve um ganho crescente na qual o custo tendeu a aumentar e por conseguinte a estabilidade do sistema não é garantida.



**Figura 4.13** Função objetivo com peso  $Sy$  (-) e Função objetivo sem peso  $Sy$  (-)

### • Cenário 2

Como foi dito anteriormente: em condições ideais, ou seja, se o sistema controlado for linear e o modelo do controlador for exatamente o modelo da planta, então a formulação de controle preditivo com garantia de estabilidade adotada garante que as restrições estabelecidas não serão violadas desde que o problema de otimização associado seja factível no instante inicial.

Como, na prática, essas suposições não são verdadeiras, procurou-se investigar, por simulação, a robustez do controlador na presença de outras fontes de incertezas não contempladas em sua formulação.

No caso do pêndulo invertido, considerou-se que a haste do pêndulo tem uma massa com um valor nominal de  $mp = 0.125 \text{ kg}$ . Dessa forma, a massa terá duas variações, como sendo:  $[mp + \xi_1]$  e  $[mp + \xi_2]$ . Considerando que as variações sejam de 50% e 80% têm-se que  $\xi_1 = 0.062 \text{ kg}$  e  $\xi_2 = 0.10 \text{ kg}$ . Portanto as massas da haste terão os seguintes valores  $[0.187 \ 0.225] \text{ kg}$ . Além disso, assumem-se as incertezas nas medições para theta e alpha, definido pelo quantizador  $(Qz) = 0.001534 \text{ rad/ppr}$ .

A simulação com a proposta do IHMPC, definido através do **Problema P4** tem os mesmos parâmetros de sintonia e as restrições definidos no **Cenário 1**. Como neste

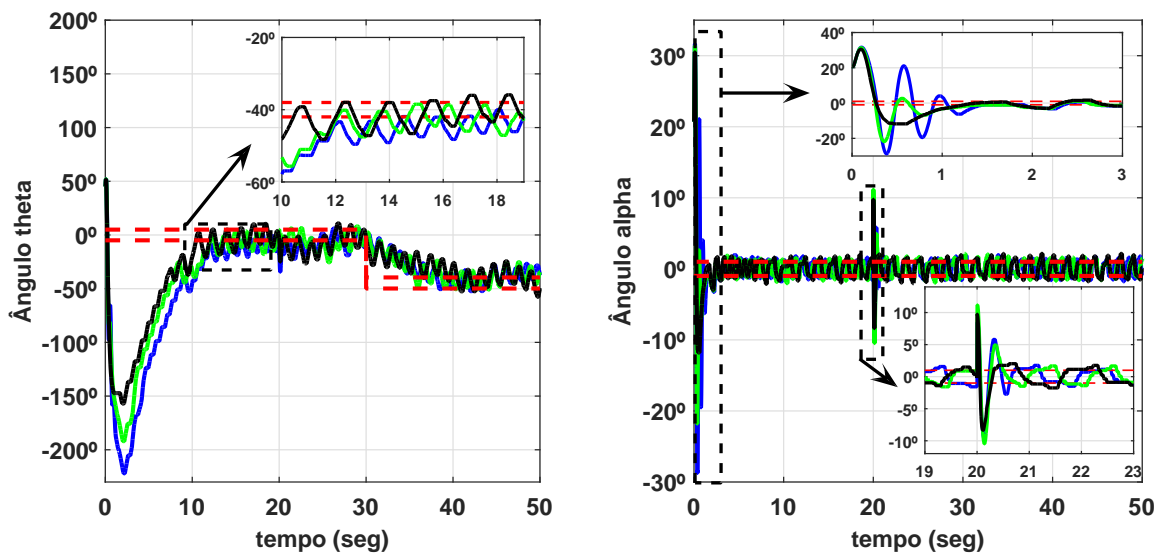


cenário será tratado o caso regulatório e servo-mecanismo, os valores das faixas para rastreamento podem ser vistos na tabela (4.7).

**Tabela 4.7** Faixas desejáveis

Variáveis	Valor mínimo	Valor máximo	Tempo (seg)
theta	$-5^{\circ}$	$5^{\circ}$	(0 - 30)
theta	$-40^{\circ}$	$-50^{\circ}$	(30 - 50)
alpha	$-1^{\circ}$	$-1^{\circ}$	(0 - 50)

Os resultados das controladas são apresentados na Figura 4.14.



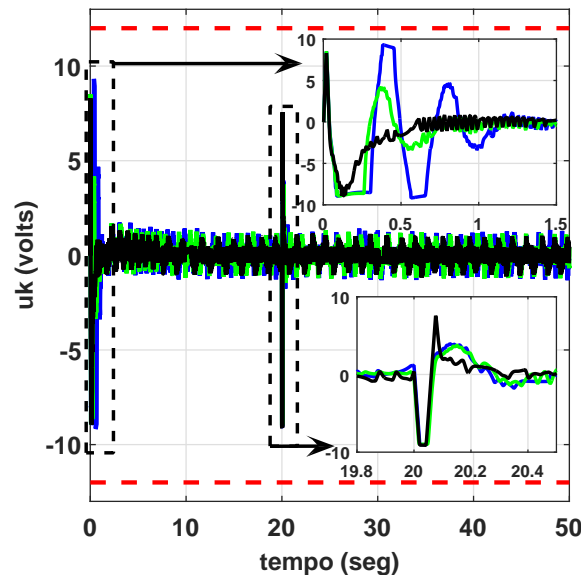
**Figura 4.14** Controlada para massa nominal (-), massa 50% (-) e massa 80% (-)

Conforme a Figura 4.14, foram considerados para simulação três valores de massa na haste e o efeito dos quantizadores nas controladas. Observa-se na variável theta, no caso nominal, que o controlador atingiu a faixa de operação nos primeiros 12 segundos. Entretanto, quando o sistema apresentou as incertezas na massa, notou-se um pequeno atraso nos dois casos antes de chegar ao estado estacionário, sendo que ainda assim, o controlador proposto foi capaz de levar o sistema para regime permanente a partir dos 14 segundos. Em seguida, após uma nova mudança de operação, o sistema (três casos) conseguiu rastrear uma nova faixa de operação, mantendo uma lei de controle factível.

Para o gráfico em alpha que representa a estabilidade do pêndulo, verificou-se que em ambos os casos, o sistema estabilizou dentro da faixa de operação conforme o esperado,

tendo um comportamento diferenciado apenas nos instantes iniciais (0 - 1 seg.) quando ocorrem maiores oscilações devido às incertezas nas massas. Posteriormente, uma perturbação externa tipo impulso de valor  $10^0$  é aplicada nos três casos. Percebe-se que mesmo com as incertezas impostas na planta, o controlador permanece com o sistema estável dentro dos limites especificados e sem perda de desempenho.

Portanto, foi possível verificar que a variação da massa do pêndulo não provocou grandes alterações no sistema de controle, pois os resultados das simulações para as posições de alpha se mantiveram praticamente idênticas em regime permanente quando comparadas para os dois valores das massas e os efeitos dos quantizadores. Isso se deve à característica do controlador proposto, que, mesmo com incertezas em seus parâmetros e de medições, se mostrou bastante adequado e eficiente para certos sistemas de controle. Na Figura 4.15 ilustra o esforço de controle de ambos os casos, observa-se nos instantes iniciais, que mesmo com as incertezas impostas na planta, o esforço de controle em ambos os casos não saturou e continuou dentro dos limites (restrições) do atuador. No entanto, vale ressaltar que o maior esforço apresentado foi na incerteza de 80%, sendo que isso não comprometeu o elemento final de controle. Em seguida, quando o pêndulo está sujeito a perturbação, a resposta imposta pelo controlador se manteve dentro das restrições e a lei de controle permaneceu viável nos instantes seguintes.



**Figura 4.15** Manipulada para massa nominal (-), massa 50% (-) e massa 80% (-) e a restrição (-)

Contudo, outros experimentos foram avaliados em função da massa para 90% e 100%, no entanto não se conseguiu obter uma lei de controle estabilizante com os mesmos parâmetros de sintonia e por essa razão o controlador tornou-se inviável. Vale ressaltar que neste cenário não foi abordado o comportamento da função objetivo, pois esse, não traziam informações relevantes para este caso.

### 4.3 COMENTÁRIOS

Neste capítulo foi analisado o sistema de controle em dois estudos de casos. No primeiro, foi abordada a garantia de estabilidade do controlador proposto para um reator químico CSTR multivariável quando o modelo do controlador é igual ao modelo da planta, na qual enfatizou-se as propriedades estabilizantes, controle por faixas e a escolha do *target* na entrada. Os resultados apresentaram um desempenho aceitável do controlador, mostrando a convergência da função objetivo e assegurando as propriedades estabilizantes definidas no **Teorema 4**. No segundo estudo de caso, a lei de controle no **Problema P4** foi estudada em um sistema pêndulo invertido. Aqui dois cenários foram considerados, a saber: no primeiro cenário, o modelo do controlador e da planta deixam de ser nominais e passam a ser desassociados. Além disso, perturbações externas e a importância da variável de folga na lei de controle foram consideradas. Os resultados mostraram que o controlador proposto conseguiu manter uma lei de controle factível durante as perturbações com a utilização da variável de folga e com ganho quantitativo quando ocorreram os distúrbios. No segundo cenário, para que a planta se tornasse o mais representativa possível do mundo real, foram empregadas as incertezas no modelo. Os resultados mostraram uma performance satisfatória do controlador, mantendo o sistema dentro das faixas especificadas com uma lei de controle factível. No entanto, quando as incertezas do modelo vão aumentando, o desempenho do sistema passa a ser comprometido, e por consequência, a lei de controle poderá se tornar infactível. A seguir, serão apresentadas as conclusões finais do trabalho e perspectivas de novas extensões.



## CONCLUSÕES

Neste trabalho foi estudada uma formulação de controle preditivo de horizonte infinito com estabilidade nominal, estendido para controle por faixas e *targets* nas entradas. A técnica foi simulada para o controle de um sistema típico na indústria, reator CSTR e o pêndulo invertido, um equipamento didático comercializado pela empresa Quanser Consulting. Análise e desempenho do controlador para o caso nominal são abordados na simulação do primeiro estudo de caso. No segundo, o modelo deixa de ser nominal e as incertezas e perturbações são incluídas nas simulações.

No restante do capítulo são apontadas as principais contribuições deste trabalho e alguns comentários acerca dos resultados obtidos. Por fim, são feitas algumas sugestões de aspectos que poderiam melhorar e dar continuidade ao trabalho desenvolvido.

### 5.1 CONTRIBUIÇÕES

- Detalhamento do modelo em espaço de estados para sistemas com modos estáveis, instáveis e integradores proposto por Yamashita et al. (2015) para o caso SISO.
- Extensão da formulação de controle preditivo de horizonte infinito apresentado por Yamashita et al. (2015). A proposta permite que seja especificado valor desejado (*target*) para a entrada e o controle por faixa dentro da qual se deseja manter as saídas controladas para sistemas com polos estáveis, instáveis e integradores.
- Realização de estudo via simulação para o caso nominal de um sistema CSTR e para o caso desassociado o modelo não-linear do pêndulo invertido, verificando a

importância da variável de folga na lei de controle, bem como, quando o modelo da planta apresenta incertezas na parte física e nas medições.

- Desenvolvimento de programas na plataforma Matlab/Script para cálculo do controlador preditivo de horizonte infinito estudado para o controle do reator químico e pêndulo invertido.

## 5.2 COMENTÁRIOS FINAIS

Os resultados simulados, ilustraram o desempenho satisfatório do controlador preditivo de horizonte infinito retratando explicitamente as propriedades estabilizantes através da inserção de variáveis de folga nas restrições terminais, tornando o problema de otimização sempre viável quando o modelo da planta retrata com exatidão o do controlador no caso regulatório e servomecanismo para um reator químico.

É importante ressaltar que a lei de controle proposta rastreou o *target* desejado, mesmo pelo fato em que a importância maior está associado as saídas, como observado na matriz de ponderação  $\mathbf{Q}_y$ . Isso de fato já era esperado, pois a partir do momento em que as controladas estão nas faixas estabelecidas, o controlador conduziu esforços para atingir o *target* desejado.

O estudo comparativo, realizado através das simulações usando o modelo não-linear do pêndulo invertido, evidenciou que o controlador proposto (**Problema P4**) do ponto de vista da aplicação em tempo real, pode ser considerado como uma opção alternativa para controlar sistemas dessa natureza.

Os resultados apresentados no **Cenário 1**, constataram que a lei de controle não violou a restrição do atuador e o elemento final de controle foi preservado, mesmo quando ocorreram perturbações alternativas. Além disso, observou-se um ganho quantitativo do controlador quando o mesmo utilizou a variável de folga para atenuar os distúrbios externos, garantindo assim a estabilidade do sistema em malha fechada.

Posteriormente, os resultados no **Cenário 2** foram observados na presença de fontes de incerteza na massa da haste e nas medições dos ângulos, com a dinâmica não-linear do sistema, e utilizando os mesmos parâmetros de sintonia do **Cenário 1**. Constatou-se que a lei de controle manteve o sistema estabilizado nas faixas especificadas mesmo quando ocorre uma mudança de trajetória, na qual se manteve uma lei de controle factível.

Portanto, a técnica de controle proposta mostrou ser robusto para sistemas incertos, pois, mesmo mudando os parâmetros da massa do pêndulo em 50% e 80% e considerando os efeitos dos *encoders*, os resultados das simulações ficaram praticamente idênticas em

regime permanente, mostrando-se, todavia, uma alternativa de controle em malha fechada a ser aplicado em sistemas instáveis, integradores e subatuados que sofrem pequenas ou grandes mudanças em seus parâmetros.

### 5.3 TRABALHOS FUTUROS

- Seria interessante sintetizar uma lei de controle robusta IHMPC com garantia de estabilidade para resolução de problemas considerando outras fontes de incertezas no pêndulo invertido, por exemplo: viscosidade do sistema. Pois, verificou-se que quando as incertezas aumentam, a lei de controle **Problema P4** o torna ineficaz. Maiores detalhes sobre IHMPC robusto podem ser consultados em (BADGWELL, 1997), (ODLOAK, 2004) e (MARTINS; ODLOAK, 2016).
- Outra interessante abordagem seria realizar a implementação experimental do controlador proposto no pêndulo invertido e comparar os resultados experimentais com o controlador do fabricante, quando a planta está sujeita aos cenários que foram escolhidos neste trabalho.
- Além disso, poderia-se realizar as simulações no sistema CSTR quando o modelo não é mais nominal, ou seja, usar a planta não linear do reator químico e explorar outros pontos operacionais com maiores rentabilidades para o sistema.
- Comparação com resultados obtidos por outras técnicas de controle não consideradas neste trabalho para o reator químico e o pêndulo invertido, por exemplo: Lógica Fuzzy, Controle Robusto, Controle não linear, dentre outros.





Este apêndice tem como objetivo apresentar a transformação do problema de otimização (**Problema P4**) apresentado na seção 3.4 no formato padrão de uma Programação Quadrática. Trata-se da manipulação matemática necessária para transformar um somatório em produto matricial e, conseqüentemente, adequar em um problema de otimização.

## PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA

Partindo da (3.40), através da seguinte função objetivo:

$$\begin{aligned}
 V_{4,k} = & \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_{\mathbf{y},k} - \Psi_{\mathbf{un}} \mathbf{F}_{\mathbf{un}}^{(j-m)} \delta_{\mathbf{un},k} - (j-m) \Delta \mathbf{t} \delta_{\mathbf{i},k} \right\|_{\mathbf{Q}_y}^2 \\
 & + \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \mathbf{u}(k+j|k) - \mathbf{u}_{des,k} - \delta_{\mathbf{u},k} \right\|_{\mathbf{Q}_u}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \left\| \Delta \mathbf{u}(k+j|k) \right\|_{\mathbf{R}}^2 + \left\| \delta_{\mathbf{y},k} \right\|_{\mathbf{S}_y}^2 \quad (\text{A.1}) \\
 & + \left\| \delta_{\mathbf{u},k} \right\|_{\mathbf{S}_u}^2 + \left\| \delta_{\mathbf{un},k} \right\|_{\mathbf{S}_{un}}^2 + \left\| \delta_{\mathbf{i},k} \right\|_{\mathbf{S}_i}^2
 \end{aligned}$$

A função objetivo (A.1), só será convergente, somente se, aderirem as restrições terminais de igualdade (3.30), (3.37), (3.38) e (3.41), que podem ser escritas por meio do movimento de entrada  $\Delta \mathbf{u}_k$  da seguinte maneira:

$$\underbrace{\mathbf{N}_s \left( \mathbf{A}^m x(k|k) + \mathbf{Co} \Delta \mathbf{u}_k \right)}_{x^s(k+m|k)} - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_{\mathbf{y},k} = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\underbrace{\mathbf{N}_{\mathbf{un}} \left( \mathbf{A}^m x(k|k) + \mathbf{Co} \Delta \mathbf{u}_k \right)}_{x^{\mathbf{un}}(k+m|k)} - \delta_{\mathbf{un},k} = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{N}_i \underbrace{\left( \mathbf{A}^m x(k|k) + \mathbf{C}_o \Delta \mathbf{u}_k \right)}_{x^i(k+m|k)} - \delta_{i,k} = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\underbrace{\left( \bar{\mathbf{I}}_{nu}^\top \Delta \mathbf{u}_k + \mathbf{u}(k-1) \right)}_{u(k+m-1|k)} - \mathbf{u}_{des,k} - \delta_{u,k} = 0, \quad (\text{A.5})$$

em que:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_s &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ny} & \mathbf{0}_{ny \times nst} & \mathbf{0}_{nu \times nun} & \mathbf{I}_{ny} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{N}_{un} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{nun \times ny} & \mathbf{0}_{nun \times nst} & \mathbf{I}_{nun} & \mathbf{0}_{nun \times ny} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{N}_i &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{ny \times nun} & \mathbf{0}_{ny \times nun} & \mathbf{0}_{ny \times nun} & \mathbf{I}_{ny} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_o &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{m-1} \mathbf{B} & \mathbf{A}^{m-2} \mathbf{B} & \dots & \mathbf{A} \mathbf{B} & \mathbf{B} \end{bmatrix}, \\ \Delta \mathbf{u}_k &= \left[ \Delta \mathbf{u}(k|k)^\top \quad \dots \quad \Delta \mathbf{u}(k+m-1|k)^\top \right]^\top, \\ \bar{\mathbf{I}}_{nu}^\top &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{nu} & \dots & \mathbf{I}_{nu} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ao desmembrar os termos infinitos na equação (A.1) em duas parcelas, a função objetivo passa a ser:

$$\begin{aligned} V_{4,k} &= \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \left\| \mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_{y,k} - \Psi_{un} \mathbf{F}_{un}^{(j-m)} \delta_{un,k} - (j-m) \Delta \mathbf{t} \delta_{i,k} \right\|_{\mathbf{Q}_y}^2}_{\mathbf{Z}_4} \\ &+ \underbrace{\sum_{j=1}^m \left\| \mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_{y,k} - \Psi_{un} \mathbf{F}_{un}^{(j-m)} \delta_{un,k} - (j-m) \Delta \mathbf{t} \delta_{i,k} \right\|_{\mathbf{Q}_y}^2}_{\mathbf{Z}_5} \\ &+ \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \left\| \mathbf{u}(k+j|k) - \mathbf{u}_{des,k} - \delta_{u,k} \right\|_{\mathbf{Q}_u}^2}_{\mathbf{Z}_6} + \underbrace{\sum_{j=0}^m \left\| \mathbf{u}(k+j|k) - \mathbf{u}_{des,k} - \delta_{u,k} \right\|_{\mathbf{Q}_u}^2}_{\mathbf{Z}_7} \cdot \quad (\text{A.6}) \\ &+ \underbrace{\sum_{j=0}^{m-1} \left\| \Delta \mathbf{u}(k+j|k) \right\|_{\mathbf{R}}^2 + \left\| \delta_{y,k} \right\|_{\mathbf{S}_y}^2 + \left\| \delta_{u,k} \right\|_{\mathbf{S}_u}^2 + \left\| \delta_{un,k} \right\|_{\mathbf{S}_{un}}^2 + \left\| \delta_{i,k} \right\|_{\mathbf{S}_i}^2}_{\mathbf{Z}_8} \end{aligned}$$

Para escrever o termo  $\mathbf{Z}_4$  no formato apropriado, pode-se inicialmente relacionar as predições de saída em função dos estados a partir do modelo em espaço de estados na

equação (2.20), na qual tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(k+m+1|k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k+m+1|k) \\
&= \mathbf{x}^s(k+m|k) + \Psi^{\text{st}}\mathbf{F}^{\text{st}}\mathbf{x}^{\text{st}}(k+m|k) + \Psi^{\text{un}}\mathbf{F}^{\text{un}}\mathbf{x}^{\text{un}}(k+m|k) \\
&\quad + \Delta\mathbf{t}\mathbf{x}^i(k+m|k) \\
\mathbf{y}(k+m+2|k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k+m+2|k) \\
&= \mathbf{x}^s(k+m|k) + \Psi^{\text{st}}(\mathbf{F}^{\text{st}})^2\mathbf{x}^{\text{st}}(k+m|k) + \Psi^{\text{un}}(\mathbf{F}^{\text{un}})^2\mathbf{x}^{\text{un}}(k+m|k) \\
&\quad + 2(\Delta\mathbf{t})\mathbf{x}^i(k+m|k) \\
&\quad \vdots \\
\mathbf{y}(k+m+j|k) &= \mathbf{x}^s(k+m|k) + \Psi^{\text{st}}(\mathbf{F}^{\text{st}})^j\mathbf{x}^{\text{st}}(k+m|k) + \Psi^{\text{un}}(\mathbf{F}^{\text{un}})^j\mathbf{x}^{\text{un}}(k+m|k) \\
&\quad + j(\Delta\mathbf{t})\mathbf{x}^i(k+m|k)
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Substituindo (A.7) no termo  $\mathbf{Z}_4$  e reorganizando a série, obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\| \begin{array}{l} \mathbf{x}^s(k+m|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_{y,k} + \Psi^{\text{st}}(\mathbf{F}^{\text{st}})^j\mathbf{x}^{\text{st}}(k+m|k) + \\ \Psi^{\text{un}}(\mathbf{F}^{\text{un}})^j(\mathbf{x}^{\text{un}}(k+m|k) - \delta_{un,k}) + j(\Delta\mathbf{t})(\mathbf{x}^i(k+m|k) - \delta_{i,k}) \end{array} \right\|_{\mathbf{Q}_y}^2. \tag{A.8}$$

Em seguida, limita-se o custo infinito (A.8) através das restrições terminais (3.30), (3.37), (3.38), resultando na seguinte expressão:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\| \Psi^{\text{st}}(\mathbf{F}^{\text{st}})^j\mathbf{x}^{\text{st}}(k+m|k) \right\|_{\mathbf{Q}_y}^2 = \left\| \mathbf{x}^{\text{st}}(k+m|k) \right\|_{\bar{\mathbf{Q}}}^2. \tag{A.9}$$

Definindo  $\mathbf{N}_{\text{st}}$  de forma análoga a  $\mathbf{N}_i$ , ou seja,  $\mathbf{N}_{\text{st}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{nst \times ny} & \mathbf{I}_{nst} & \mathbf{0}_{nst \times nst} & \mathbf{0}_{nun \times ny} \end{bmatrix}$ , podemos reescrever os estados estáveis ( $\mathbf{x}^{\text{st}}$ ) através do movimento da entrada, como sendo:

$$\underbrace{\mathbf{N}_{\text{st}} \left( \mathbf{A}^m x(k|k) + \mathbf{C}\mathbf{o}\Delta\mathbf{u}_k \right)}_{\mathbf{x}^{\text{st}}(k+m|k)}. \tag{A.10}$$

Para o termo  $\mathbf{Z}_5$ , reescrevemos no formato em que as ações de controle atuam nos estados previstos, ou seja, as previsões de saídas entre o instante atual e os próximos  $m$

períodos de amostragem são:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(k|k) \\ y(k+1|k) \\ \vdots \\ y(k+m|k) \end{bmatrix}}_{\bar{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^m \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} x(k|k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{CB} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{m-1} & \mathbf{CA}^{m-2} & \dots & \mathbf{CB} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}} \Delta \mathbf{u}_k, \quad (\text{A.11})$$

na qual,  $\bar{y} = \bar{\mathbf{A}}x(k|k) + \bar{\mathbf{B}}\Delta \mathbf{u}_k$ . Substituindo as predições (A.11) no termo  $\mathbf{Z}_5$ , chega-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_5 &= \sum_{j=1}^m \left\| \mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_{y,k} - \Psi_{\text{un}} \mathbf{F}_{\text{un}}^{(j-m)} \delta_{\text{un},k} - (j-m) \Delta \mathbf{t} \delta_{i,k} \right\|_{\mathbf{Q}_y}^2, \\ &= \left\| \bar{\mathbf{A}}x(k|k) + \bar{\mathbf{B}}\Delta \mathbf{u}_k - \bar{\mathbf{I}}_{\text{ny}} \mathbf{y}_{sp,k} - \bar{\mathbf{I}}_{\text{ny}} \delta_{y,k} - \bar{\mathbf{K}} \delta_{\text{un},k} - \bar{\mathbf{T}} \delta_{i,k} \right\|_{\mathbf{Q}_y}^2, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

na qual:

$$\mathbf{Q}_y = \text{diag} \left[ \underbrace{\mathbf{Q}_y \ \dots \ \mathbf{Q}_y}_{m+1} \right]; \bar{\mathbf{I}}_{\text{ny}} = \text{diag} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\text{ny}} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{\text{ny}} \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \Psi_{\text{un}} \mathbf{F}_{\text{un}} \\ \vdots \\ \Psi_{\text{un}} \mathbf{F}_{\text{un}}^{(j-m)} \end{bmatrix} e$$

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{t} \\ \vdots \\ (j-m) \Delta \mathbf{t} \end{bmatrix}$$

O termo  $\mathbf{Z}_6$  é igual a zero de acordo com a restrição (3.38), enquanto,  $\mathbf{Z}_7$  pode ser escrito empregando a relação entre as ações de controle com as entradas calculadas, a saber:

$$\begin{bmatrix} u(k|k) \\ u(k+1|k) \\ \vdots \\ u(k+m-1|k) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\text{nu}} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{I}_{\text{nu}} & \mathbf{I}_{\text{nu}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{I}_{\text{nu}} & \mathbf{I}_{\text{nu}} & \mathbf{I}_{\text{nu}} & \mathbf{I}_{\text{nu}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k|k) \\ \Delta \mathbf{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}(k+m-1|k) \end{bmatrix}}_{\Delta \mathbf{u}_k} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\text{nu}} \\ \mathbf{I}_{\text{nu}} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{\text{nu}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_{\text{nu}}} u(k-1), \quad (\text{A.13})$$

logo o termo  $\mathbf{Z}_7$  é definido como

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_7 &= \sum_{j=1}^m \left\| \mathbf{u}(k+j|k) - \mathbf{u}_{des,k} - \delta_{\mathbf{u},k} \right\|_{\mathbf{Q}_u}^2, \\ &= \left\| \bar{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{u}_k + \bar{\mathbf{I}}_{nu}u(k-1) - \bar{\mathbf{I}}_{nu}\mathbf{u}_{des,k} - \bar{\mathbf{I}}_{nu}\delta_{\mathbf{u},k} \right\|_{\mathbf{Q}_u}^2, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

sendo  $\mathbf{Q}_u = \underbrace{\text{diag}[\mathbf{Q}_u \ \dots \ \mathbf{Q}_u]}_m$ .

Finalmente, da definição de  $\Delta\mathbf{u}_k$  em  $\mathbf{Z}_8$  é expressa da seguinte forma:

$$\mathbf{Z}_8 = \sum_{j=1}^{m-1} \left\| \Delta\mathbf{u}(k+j|k) \right\|_{\mathbf{R}}^2 = \left\| \Delta\mathbf{u}(k|k) \right\|_{\mathbf{R}}^2, \quad (\text{A.15})$$

uma vez que  $\mathbf{R} = \underbrace{\text{diag}[\mathbf{R} \ \dots \ \mathbf{R}]}_m$ . Portanto, a função objetivo em (A.6) após a imposição das restrições terminais e reescrita em função do movimento das entradas, torna-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} V_{4,k} &= \left\| \bar{\mathbf{A}}x(k|k) + \bar{\mathbf{B}}\Delta\mathbf{u}_k - \bar{\mathbf{I}}_{ny}\mathbf{y}_{sp,k} - \bar{\mathbf{I}}_{ny}\delta_{\mathbf{y},k} - \bar{\mathbf{K}}\delta_{\mathbf{un},k} - \bar{\mathbf{T}}\delta_{\mathbf{i},k} \right\|_{\mathbf{Q}_y}^2 \\ &+ \left\| \mathbf{N}_{st} \left( \mathbf{A}^m x(k|k) + \mathbf{C}_o\Delta\mathbf{u}_k \right) \right\|_{\bar{\mathbf{Q}}}^2 + \left\| \bar{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{u}_k + \bar{\mathbf{I}}_{nu}u(k-1) - \bar{\mathbf{I}}_{nu}\mathbf{u}_{des,k} - \bar{\mathbf{I}}_{nu}\delta_{\mathbf{u},k} \right\|_{\mathbf{Q}_u}^2, \\ &+ \left\| \Delta\mathbf{u}(k|k) \right\|_{\mathbf{R}}^2 + \left\| \delta_{\mathbf{y},k} \right\|_{\mathbf{S}_y}^2 + \left\| \delta_{\mathbf{u},k} \right\|_{\mathbf{S}_u}^2 + \left\| \delta_{\mathbf{un},k} \right\|_{\mathbf{S}_{un}}^2 + \left\| \delta_{\mathbf{i},k} \right\|_{\mathbf{S}_i}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

cujo o problema de otimização é definido como:

**Problema P4**

$$\underbrace{\min}_{\Delta\mathbf{u}_k, \mathbf{y}_{sp,k}, \delta_{\mathbf{y},k}, \delta_{\mathbf{u},k}, \delta_{\mathbf{un},k}, \delta_{\mathbf{i},k}} V_{4,k}, \quad (\text{A.17})$$

sujeito às restrições (3.13), (3.14), (3.30), (3.37), (3.38), (3.41) e (3.43).

O **Problema P4** pode ser expressa na forma quadrática  $(\mathbf{X}^\top \mathbf{H} \mathbf{X} + 2\mathbf{F}^\top \mathbf{X} + c)$ , como sendo:

## Problema P4

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_k^\top & \mathbf{y}_{sp,k}^\top & \delta_{y,k}^\top & \delta_{u,k}^\top & \delta_{un,k}^\top & \delta_{i,k}^\top \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}^\top} \mathbf{H} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_{sp,k} \\ \delta_{y,k} \\ \delta_{u,k} \\ \delta_{un,k} \\ \delta_{i,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + 2\mathbf{F}^\top \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_{sp,k} \\ \delta_{y,k} \\ \delta_{u,k} \\ \delta_{un,k} \\ \delta_{i,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + c,$$

na qual:

$\Delta \mathbf{u}_k, \mathbf{y}_{sp,k}, \delta_{y,k}, \delta_{u,k}, \delta_{un,k}, \delta_{i,k}$  são variáveis de decisão;  $\mathbf{H}$  é a matriz Hessiana do sistema;  $\mathbf{F}$  é o vetor gradiente e  $c$  é o termo constante.

Contudo, podemos reescrever a equação (A.16) na forma de produto matricial com a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} V_{4,k} = & \left( \bar{\mathbf{A}}x(k|k) + \bar{\mathbf{B}}\Delta \mathbf{u}_k - \bar{\mathbf{I}}_{ny}\mathbf{y}_{sp,k} - \bar{\mathbf{I}}_{ny}\delta_{y,k} - \bar{\mathbf{K}}\delta_{un,k} - \bar{\mathbf{T}}\delta_{i,k} \right)^\top \mathbf{Q}_y \\ & \left( \bar{\mathbf{A}}x(k|k) + \bar{\mathbf{B}}\Delta \mathbf{u}_k - \bar{\mathbf{I}}_{ny}\mathbf{y}_{sp,k} - \bar{\mathbf{I}}_{ny}\delta_{y,k} - \bar{\mathbf{K}}\delta_{un,k} - \bar{\mathbf{T}}\delta_{i,k} \right) + \\ & \left( \mathbf{N}_{st}\mathbf{A}^m x(k|k) + \mathbf{N}_{st}\mathbf{C}\mathbf{o}\Delta \mathbf{u}_k \right)^\top \bar{\mathbf{Q}} \left( \mathbf{N}_{st}\mathbf{A}^m x(k|k) + \mathbf{N}_{st}\mathbf{C}\mathbf{o}\Delta \mathbf{u}_k \right) + \\ & \left( \bar{\mathbf{M}}\Delta \mathbf{u}_k + \bar{\mathbf{I}}_{nu}u(k-1) - \bar{\mathbf{I}}_{nu}\mathbf{u}_{des,k} - \bar{\mathbf{I}}_{nu}\delta_{u,k} \right)^\top \mathbf{Q}_u \quad . \quad (\text{A.18}) \\ & \left( \bar{\mathbf{M}}\Delta \mathbf{u}_k + \bar{\mathbf{I}}_{nu}u(k-1) - \bar{\mathbf{I}}_{nu}\mathbf{u}_{des,k} - \bar{\mathbf{I}}_{nu}\delta_{u,k} \right) + \\ & \left( \Delta \mathbf{u}(k|k) \right)^\top \mathbf{R} \left( \Delta \mathbf{u}(k|k) \right) + \left( \delta_{y,k} \right)^\top \mathbf{S}_y \left( \delta_{y,k} \right) + \left( \delta_{u,k} \right)^\top \mathbf{S}_u \left( \delta_{u,k} \right) + \\ & \left( \delta_{un,k} \right)^\top \mathbf{S}_{un} \left( \delta_{un,k} \right) + \left( \delta_{i,k} \right)^\top \mathbf{S}_i \left( \delta_{i,k} \right) \end{aligned}$$

Após manipulações algébricas em (A.18) e juntando os termos quadráticos nas quais relacionam as variáveis de decisão  $\left[ \Delta \mathbf{u}_k, \mathbf{y}_{sp,k}, \delta_{y,k}, \delta_{u,k}, \delta_{un,k}, \delta_{i,k} \right]$ , obtém-se a matriz Hessiana, o gradiente e o termo constante do problema quadrático, a saber:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & -\bar{\mathbf{B}}^\top \mathbf{Q}_y \bar{\mathbf{I}}_{ny} & -\bar{\mathbf{B}}^\top \mathbf{Q}_y \bar{\mathbf{I}}_{ny} & -\bar{\mathbf{M}}^\top \mathbf{Q}_u \bar{\mathbf{I}}_{nu} & -\bar{\mathbf{B}}^\top \mathbf{Q}_y \bar{\mathbf{K}} & -\bar{\mathbf{B}}^\top \mathbf{Q}_y \bar{\mathbf{T}} \\ -\bar{\mathbf{I}}_{ny}^\top \mathbf{Q}_y \bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{I}}_{ny}^\top \mathbf{Q}_y \bar{\mathbf{I}}_{ny} & \bar{\mathbf{I}}_{ny}^\top \mathbf{Q}_y \bar{\mathbf{I}}_{ny} & 0_{ny \times nu} & \bar{\mathbf{I}}_{ny}^\top \mathbf{Q}_y \bar{\mathbf{K}} & \bar{\mathbf{I}}_{ny}^\top \mathbf{Q}_y \bar{\mathbf{T}} \\ -\bar{\mathbf{I}}_{ny}^\top \mathbf{Q}_y \bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{I}}_{ny}^\top \mathbf{Q}_y \bar{\mathbf{I}}_{ny} & \bar{\mathbf{I}}_{ny}^\top \mathbf{Q}_y \bar{\mathbf{I}}_{ny} + \mathbf{S}_y & 0_{ny \times nu} & \bar{\mathbf{I}}_{ny}^\top \mathbf{Q}_y \bar{\mathbf{K}} & \bar{\mathbf{I}}_{ny}^\top \mathbf{Q}_y \bar{\mathbf{T}} \\ -\bar{\mathbf{I}}_{nu}^\top \mathbf{Q}_u \bar{\mathbf{M}} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & \bar{\mathbf{I}}_{nu}^\top \mathbf{Q}_u \bar{\mathbf{I}}_{nu} + \mathbf{S}_u & 0_{nun \times nu} & 0_{nun \times ni} \\ -\bar{\mathbf{K}}^\top \mathbf{Q}_y \bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{K}}^\top \mathbf{Q}_y \bar{\mathbf{I}}_{ny} & \bar{\mathbf{K}}^\top \mathbf{Q}_y \bar{\mathbf{I}}_{ny} & 0_{nun \times nu} & \bar{\mathbf{K}}^\top \mathbf{Q}_y \bar{\mathbf{K}} + \mathbf{S}_{un} & \bar{\mathbf{K}}^\top \mathbf{Q}_y \bar{\mathbf{T}} \\ -\bar{\mathbf{T}}^\top \mathbf{Q}_y \bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{T}}^\top \mathbf{Q}_y \bar{\mathbf{I}}_{ny} & \bar{\mathbf{T}}^\top \mathbf{Q}_y \bar{\mathbf{I}}_{ny} & 0_{nu \times ni} & \bar{\mathbf{T}}^\top \mathbf{Q}_y \bar{\mathbf{K}} & \bar{\mathbf{T}}^\top \mathbf{Q}_y \bar{\mathbf{T}} + \mathbf{S}_i \end{bmatrix};$$

$$H_{11} = \bar{\mathbf{B}}^\top \mathbf{Q}_y \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{C}\mathbf{o}^\top \mathbf{N}_{st}^\top \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N}_{st} \mathbf{C}\mathbf{o} + \bar{\mathbf{M}}^\top \bar{\mathbf{Q}}_u \bar{\mathbf{M}} + \mathbf{R}$$

$$\mathbf{F}^\top = \begin{bmatrix} x(k|k)^\top (\bar{\mathbf{A}}\mathbf{Q}_y\bar{\mathbf{B}} + \mathbf{A}^{\mathbf{m}\top}\mathbf{N}_{\text{st}}^\top\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{N}_{\text{st}}\mathbf{C}\mathbf{o}) + (u(k-1) - \mathbf{u}_{des})^\top\bar{\mathbf{I}}_{\text{nu}}^\top\mathbf{Q}_u\bar{\mathbf{M}} \\ -x(k|k)^\top\bar{\mathbf{A}}^\top\mathbf{Q}_y\bar{\mathbf{I}}_{\text{ny}} \\ -x(k|k)^\top\bar{\mathbf{A}}^\top\mathbf{Q}_y\bar{\mathbf{I}}_{\text{ny}} \\ (u(k-1) - \mathbf{u}_{des})^\top\bar{\mathbf{I}}_{\text{nu}}^\top\mathbf{Q}_u\mathbf{I}_{\text{nu}} \\ -x(k|k)^\top\bar{\mathbf{A}}^\top\mathbf{Q}_y\bar{\mathbf{K}} \\ -x(k|k)^\top\bar{\mathbf{A}}^\top\mathbf{Q}_y\bar{\mathbf{T}} \end{bmatrix}; \quad (\text{A.19})$$

$$c = [x(k|k)^\top(\bar{\mathbf{A}}^\top\mathbf{Q}_y\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A}^{\mathbf{m}\top}\mathbf{N}_{\text{st}}^\top\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{N}_{\text{st}}\mathbf{A}^{\mathbf{m}})x(k|k) + (u(k-1) - \mathbf{u}_{des})^\top\bar{\mathbf{I}}_{\text{nu}}^\top\mathbf{Q}_u\bar{\mathbf{I}}_{\text{nu}}(u(k-1) - u_{des})].$$

Por fim, as restrições de desigualdade ( $\mathbf{A}_{ineq} \cdot \mathbf{X} \leq \mathbf{B}_{ineq}$ ), igualdade ( $\mathbf{A}_{eq} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}_{eq}$ ) e os limites ( $\mathbf{LB} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{UB}$ ) podem ser escritos em função das variáveis de decisão apresentadas em (A.20), (A.21) e (A.22).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{\mathbf{M}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{ineq}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_{\text{sp},k} \\ \delta_{y,k} \\ \delta_{u,k} \\ \delta_{\text{un},k} \\ \delta_{i,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{I}}_{\text{nu}} \cdot (u_{\text{max}} - u(k-1)) \\ \bar{\mathbf{I}}_{\text{nu}} \cdot (u(k-1) - u_{\text{min}}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{ineq}}; \quad (\text{A.20})$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{N}_s\mathbf{C}\mathbf{o} & -\mathbf{I}_{\text{ny}} & -\mathbf{I}_{\text{ny}} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{N}_{\text{un}}\mathbf{C}\mathbf{o} & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I}_{\text{ny}} & 0 \\ \bar{\mathbf{I}}_{\text{nu}} & 0 & 0 & \mathbf{I}_{\text{nu}} & 0 & 0 \\ \mathbf{N}_i\mathbf{C}\mathbf{o} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I}_{\text{ny}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{eq}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_{\text{sp},k} \\ \delta_{y,k} \\ \delta_{u,k} \\ \delta_{\text{un},k} \\ \delta_{i,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{N}_s\mathbf{A}^{\mathbf{m}}x(k|k) \\ \mathbf{N}_{\text{un}}\mathbf{A}^{\mathbf{m}}x(k|k) \\ u_{des} - u(k-1) \\ \mathbf{N}_i\mathbf{A}^{\mathbf{m}}x(k|k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{eq}}; \quad (\text{A.21})$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\Delta u_{max} \\ -y_{min} \\ -\infty \\ -\infty \\ -\infty \\ -\infty \end{bmatrix}}_{\text{LB}} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_{sp,k} \\ \delta_{y,k} \\ \delta_{u,k} \\ \delta_{un,k} \\ \delta_{i,k} \end{bmatrix}}_{\text{X}} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta u_{max} \\ y_{max} \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix}}_{\text{UB}}. \quad (\text{A.22})$$



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVAREZ, L. a. et al. Stable model predictive control for integrating systems with optimizing targets. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, v. 48, n. 20, p. 9141–9150, 2009. ISSN 08885885.

ARANDA-ESCOLÁSTICO, E. et al. A novel approach to periodic event-triggered control: Design and application to the inverted pendulum. *ISA Transactions*, Elsevier, v. 65, p. 327–338, 2016. ISSN 00190578. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.isatra.2016.08.019>.

BADGWELL, T. Robust model predictive control of stable linear systems. *International Journal of Control*, v. 68, n. 4, p. 797–818, 1997. ISSN 0020-7179.

CAMACHO, E. F.; ALBA, C. B. *Model Predictive Control*. Springer London, 2013. (Advanced Textbooks in Control and Signal Processing). ISBN 9780857293985. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=tXZDAAAQBAJ>.

CARRAPIÇO, O. L.; ODLOAK, D. A stable model predictive control for integrating processes. *Computers and Chemical Engineering*, v. 29, n. 5, p. 1089–1099, 2005. ISSN 00981354.

CASANOVA, V. et al. Control of the rotary inverted pendulum through threshold-based communication. *ISA Transactions*, Elsevier, v. 62, p. 357–366, 2016. ISSN 00190578. Disponível em: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0019057816000276>.

COSTA, E. CONTROLE PREDITIVO NOMINALMENTE ESTÁVEL APLICADO A UM SISTEMA BARRA E BOLA. p. 2944–2949, 2016.

CRUCES, L.; LAFAYETTE, W. Modular Control of a Rotary Inverted Pendulum System. 2016.

DANG, Q. V. et al. Design and Implementation of a Robust Fuzzy Controller for a Rotary Inverted Pendulum using the Takagi-Sugeno Descriptor Representation. n. 978, 2014.

GONZÁLEZ, a. H. et al. Stable MPC for tracking with maximal domain of attraction. *Journal of Process Control*, v. 21, n. 4, p. 573–584, 2011. ISSN 09591524.

GONZÁLEZ, A. H.; ODLOAK, D. A stable MPC with zone control. *Journal of Process Control*, v. 19, n. 1, p. 110–122, 2009. ISSN 09591524.

HESPANHA, J. P. *Linear Systems Theory*. [S.l.]: Princeton Press, 2009.

JADLOVSKA, S.; SARNOVSKY, J. A Complex Overview of Modeling and Control of the Rotary Single Inverted Pendulum System. p. 73–85, 2013.

JEKAN, P.; SUBRAMANI, C. Robust Control Design for Rotary Inverted Pendulum Balance. *Indian Journal of Science and Technology*, v. 9, n. 28, p. 1–5, 2016. ISSN 0974-5645. Disponível em: <http://www.indjst.org/index.php/indjst/article/view/93807>.

MACIEJOWSKI, J. M. *Predictive Control: With Constraints*. Prentice Hall, 2002. (Pearson Education). ISBN 9780201398236. Disponível em: [https://books.google.com.br/books?id=HV{\\\_\}Y58c7K](https://books.google.com.br/books?id=HV{\_\}Y58c7K).

MARTINS, M. A. F. Robust Model Predictive Control of Integrating and Unstable Time Delay Processes. p. 121, 2014. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3137/tde-14082015-155650/pt-br.php>.

MARTINS, M. A. F.; ODLOAK, D. A robustly stabilizing model predictive control strategy of stable and unstable processes. *Automatica*, Elsevier Ltd, v. 67, p. 132–143, 2016. ISSN 00051098. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.automatica.2016.01.046>.

MAYNE, D. Q. Model predictive control: Recent developments and future promise. *Automatica*, Elsevier Ltd, v. 50, n. 12, p. 2967–2986, 2014. ISSN 00051098. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.automatica.2014.10.128>.

MUSKE, K. R.; RAWLINGS, J. B. Linear model predictive control of unstable processes. *Journal of Process Control*, v. 3, n. 2, p. 85–96, 1993. ISSN 09591524.

MUSKE, K. R.; RAWLINGS, J. B. Model predictive control with linear models. *AIChE Journal*, v. 39, n. 2, p. 262–287, 1993. ISSN 1547-5905. Disponível em: <http://doi.wiley.com/10.1002/aic.690390208> <http://dx.doi.org/10.1002/aic.690390>.

NISE, N. S. *Control Systems Engineering*. Wiley, 2010. ISBN 9780470547564. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=WVA8PwAACAAJ>.

ODLOAK, D. Extended robust model predictive control. *AIChE Journal*, v. 50, n. 8, p. 1824–1836, 2004. ISSN 00011541.

OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. 2003. 788 p.

OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. PRENTICE HALL BRASIL, 2011. ISBN 9788576058106. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=iL3FYgEACAAJ>.

PANNOCCHIA, G.; RAWLINGS, J. B. Disturbance models for offset-free model-predictive control. *AIChE Journal*, v. 49, n. 2, p. 426–437, 2003. ISSN 00011541.

QUANSER CONSULTING INC. Inverted Pendulum System. 2008.

RAWLINGS, J. B.; MUSKE, K. R. Stability of constrained receding horizon control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 38, n. 10, p. 1512–1516, 1993. ISSN 00189286.

RODRIGUES, M. A.; ODLOAK, D. An infinite horizon model predictive control for stable and integrating processes. *Computers and Chemical Engineering*, v. 27, n. 8-9, p. 1113–1128, 2003. ISSN 00981354.

ROSSITER, J. A. *Model-Based Predictive Control: A Practical Approach*. CRC Press, 2003. (Control Series). ISBN 9780203503966. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=owznQTI-NqUC>.

SANTORO, B. F.; ODLOAK, D. Closed-loop stable model predictive control of integrating systems with dead time. *Journal of Process Control*, Elsevier Ltd, v. 22, n. 7, p. 1209–1218, 2012. ISSN 09591524. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jprocont.2012.05.005>.

Tvrzská de Gouvêa, M.; ODLOAK, D. ROSSMPC: A New Way of Representing and Analysing Predictive Controllers. *Chemical Engineering Research and Design*, v. 75, n. 7, p. 693–708, 1997. ISSN 0263-8762. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263876297715934>.

WEN, J.; SHI, Y.; LU, X. Stabilizing a Rotary Inverted Pendulum Based on Logarithmic Lyapunov Function. *Journal of Control Science and Engineering*, v. 2017, 2017. ISSN 16875257.

YAMASHITA, A. et al. Application of an infinite horizon mpc to a nonlinear open-loop unstable reactor system. *8th International Conference on Integrated Modeling and Analysis in Applied Control and Automation, IMAACA 2015*, 2015.