



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA  
ESCOLA POLITÉCNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE  
ESTRUTURAS

ANTONIO RIBEIRO SANTOS JUNIOR

ANÁLISE QUASE-ESTÁTICA E DINÂMICA DE PROBLEMAS DE  
CONTATO MECÂNICO EM SÓLIDOS TRIDIMENSIONAIS UTILIZANDO O  
MÉTODO DA CURVA B-SPLINE NAS SUPERFÍCIES DE CONTATO.

Salvador

2018

ANTONIO RIBEIRO SANTOS JUNIOR

ANÁLISE QUASE-ESTÁTICA E DINÂMICA DE PROBLEMAS DE CONTATO  
MECÂNICO EM SÓLIDOS TRIDIMENSIONAIS UTILIZANDO O MÉTODO DA  
CURVA B-SPLINE NAS SUPERFÍCIES DE CONTATO.

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Bahia, como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Estruturas.

**Orientador: Prof. Dr. Alex Alves Bandeira**

Salvador

2018

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Universitário de Bibliotecas (SIBI/UFBA),  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

RIBEIRO SANTOS JUNIOR, ANTONIO  
ANÁLISE QUASE-ESTÁTICA E DINÂMICA DE PROBLEMAS DE  
CONTATO MECÂNICO EM SÓLIDOS TRIDIMENSIONAIS UTILIZANDO  
O MÉTODO DA CURVA B-SPLINE NAS SUPERFÍCIES DE CONTATO.  
/ ANTONIO RIBEIRO SANTOS JUNIOR. -- SALVADOR, 2018.  
188 f. : il

Orientador: Alex Alves Bandeira.  
Dissertação (Mestrado - PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA DE ESTRUTURAS) -- Universidade Federal da  
Bahia, ESCOLA POLITÉCNICA, 2018.

1. Método dos Elementos Finitos. 2. Problema de  
Contato. 3. Dinâmica das Estruturas. 4. B-Spline. I.  
Alves Bandeira, Alex. II. Título.

ANTONIO RIBEIRO SANTOS JUNIOR

ANÁLISE QUASE-ESTÁTICA E DINÂMICA DE PROBLEMAS DE CONTATO MECÂNICO EM SÓLIDOS TRIDIMENSIONAIS UTILIZANDO O MÉTODO DA CURVA B-SPLINE NAS SUPERFÍCIES DE CONTATO.

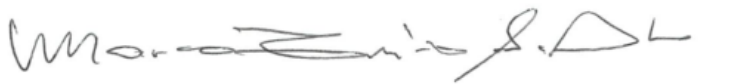
Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Estruturas, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Estrutural, da Universidade Federal de Bahia.

Aprovado em 13 de dezembro de 2018.



Alex Alves Bandeira – Orientador

Doutor em Engenharia de Estruturas e Fundações -USP  
Universidade Federal da Bahia - UFBA



Marco Tulio Santana Alves – Membro interno  
Doutor em Engenharia Mecânica – UFU  
Universidade Federal da Bahia - UFBA



José Mário Feitosa Lima – Membro externo  
Doutor em Engenharia Civil - UFRJ  
Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS

Universidade Federal de Bahia

2018

*Diante da vida que é sublime  
Ai, de quem se reprime  
Se ausenta e nem tenta viver  
Deve ficar olhando o mundo  
E lamentando sozinho  
Não quero ter letargia  
Eu quero ser rodamoinho  
Eu quero ser travessia  
Eu quero abrir o meu caminho  
Ser minha própria estrela-guia  
Virar um passarinho*

“Salmo” (Paulo César Pinheiro e Raphael Rabello)

## DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho ao meu sobrinho Rafael, acreditando que um dia o inspirarei a seguir no caminho da ciência e do conhecimento, com respeito às diferenças, consciência social e política.

## AGRADECIMENTOS

À minha mãe Delzuita e meu pai Irenio, pelo apoio irrestrito, amor sem limites, confiança, investimento, por acreditarem nas minhas escolhas e apostarem no meu futuro. Obrigado por serem meus maiores exemplos e por terem tornado possível que eu tivesse a oportunidade de estudar.

Ao meu orientador Alex, pela atenção, comprometimento e dedicação incansável à minha pesquisa. Obrigado por acreditar no meu potencial e por ter sido fundamental para a conclusão deste trabalho.

À minha irmã Rafaela, pelo amor e palavras de carinho, meus irmãos Cristiano e Deonilson, pelo apoio e os bons conselhos, à minha sobrinha Rafaela pela motivação e empolgação com minhas conquistas e minha prima Nayara, pelo carinho e companheirismo de sempre.

Aos amigos feitos no mestrado, pelos momentos de estudo e também de descontração, em especial: a Daniel, pela ajuda com a programação e as aventuras veganas; a Danielle, por ser uma amiga que posso contar sempre e ter sido a minha companheira de todas as horas durante o Mestrado; a Ítallo, por me ajudar com a dinâmica e dividir comigo as ânsias da vida acadêmica; e a Gabriela, minha *hermana* venezuelana, por ter me incentivado a continuar no mestrado e me fazer acreditar no meu tema.

Aos meus amigos, os quais me preenchem de felicidade e são com quem eu divido minhas memoráveis experiências nessa vida. A Manuella e Denilson, obrigado por estarem comigo todas as horas e por me ouvirem muito nos momentos de alegria, tristeza e dúvida. A Rafaela, meu amor, que mesmo longe continua dando uma forcinha;

à minha querida Maria, que mesmo com a essa correria da vida, ainda divide comigo um pouco do seu dia. A Brunelle, por ter ocupado definitivamente um lugar especial na minha vida e ter me incentivado incansavelmente a finalizar esta etapa. A Leonardo, por estar presente nos meus dias, dividindo muitos dilemas, mas me enchendo de otimismo. Aos queridos Sirlândia, Moacy e Luanderson que marcaram esse meu período em Salvador, tornaram meus fins de semana mais divertidos e ajudaram a aliviar um pouco toda a pressão da vida acadêmica. A Bruno, que sempre se fez presente e foi muito companheiro durante os momentos mais difíceis, principalmente nos primeiros meses, durante a adaptação, serei sempre grato.

A Fabesp pelo apoio financeiro e incentivo à pesquisa.

Aos grandes professores que eu tive a honra de ser aluno e todos os ensinamentos passados durante minha vida acadêmica, em especial: ao professor Marco Túlio, que deu grande contribuição para esse trabalho, enriquecendo-o, e ao professor José Mário, que ainda na graduação me incentivou a seguir na carreira acadêmica e despertou minha paixão pela área de estruturas.



## SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS.....</b>	<b>11</b>
<b>LISTA DE QUADROS .....</b>	<b>13</b>
<b>RESUMO.....</b>	<b>14</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>15</b>
<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>16</b>
1.1. JUSTIFICATIVA .....	18
1.2. OBJETIVOS.....	19
1.2.1 <i>Objetivos gerais</i> .....	19
1.2.2 <i>Objetivos específicos</i> .....	19
1.3. ESTRUTURA DO TRABALHO .....	20
1.4. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	21
1.4.1. <i>Contato mecânico</i> .....	21
<b>2. NOÇÕES INICIAIS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....</b>	<b>29</b>
2.1. CONCEITOS BÁSICOS .....	29
2.1.1 <i>Leis de equilíbrio</i> .....	29
2.1.1.1 Balanço de massa.....	29
2.1.1.2 Balanço local de momentos .....	30
2.1.1.3 Transformação da configuração corrente para a inicial.....	31
2.1.2 <i>Princípio dos trabalhos virtuais</i> .....	32
2.1.2.1 Configuração de referência.....	32
2.1.2.2 Configuração corrente .....	34
2.1.3 <i>Equações constitutivas</i> .....	35
2.1.3.1 Tensor constitutivo incremental .....	38
2.1.3.2 Linearização .....	43
2.1.3.3 Linearização da formulação variacional.....	46
2.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	49
2.2.1 <i>Concepção isoparamétrica</i> .....	50
2.2.2 <i>Funções de interpolação</i> .....	54
2.2.3 <i>Formulação de elementos finitos para configuração corrente</i> .....	57
2.2.4 <i>Linearização do trabalho virtual</i> .....	62
<b>3. DESCRIÇÃO VARIACIONAL DOS PROBLEMAS DE CONTATO .....</b>	<b>66</b>
3.1 FORMULAÇÃO DO LAGRANGIANO AUMENTADO .....	66
3.2 PRESSÕES DE CONTATO COM ATRITO UTILIZANDO O LAGRANGIANO AUMENTADO .....	68

3.3 RESTRIÇÕES DE CONTATO .....	70
3.3.1 Restrição de impenetrabilidade .....	70
3.4 DEFINIÇÃO DE BASE .....	72
3.5 CINEMÁTICA DO ATRITO .....	74
3.6 FORMULAÇÃO DA LEI DE ATRITO DE COULOMB .....	75
3.7 APLICAÇÃO DO LAGRANGIANO AUMENTADO COM ATRITO .....	76
3.8 CINEMÁTICA DO CONTATO .....	80
3.9 FORMULAÇÃO VARIACIONAL DO CONTATO .....	83
3.10 ALGORITMO GEOMÉTRICO DE CONTATO .....	85
3.11 DISCRETIZAÇÃO DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS .....	87
3.12 LINEARIZAÇÃO DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS .....	89
3.13 MATRIZ DE RIGIDEZ DA CONTRIBUIÇÃO NORMAL .....	93
3.14 MATRIZ DE RIGIDEZ DA CONTRIBUIÇÃO DO ATRITO SEM DESLIZAMENTO .....	94
3.15 MATRIZ DE RIGIDEZ DA CONTRIBUIÇÃO DO ATRITO COM DESLIZAMENTO .....	96
<b>4 CONTATO COM O ELEMENTO FINITO B-SPLINE .....</b>	<b>98</b>
4.1 CURVA B-SPLINE .....	100
4.2 DETERMINAÇÃO DO PONTO $x^M$ PARA A SUPERFÍCIE B-SPLINE .....	105
4.3 DISCRETIZAÇÃO DA FORMULAÇÃO DE CONTATO COM ELEMENTO FINITO B-SPLINE .....	107
4.4 EXEMPLO NUMÉRICO UTILIZANDO ANÁLISE QUASE-ESTÁTICA DE CONTATO COM ELEMENTO B-SPLINE .....	112
4.4.1 Exemplo Duas Vigas Perpendiculares .....	112
<b>5 INTRODUÇÃO À DINÂMICA .....</b>	<b>125</b>
5.1 CONCEITOS GERAIS .....	125
5.2 SISTEMAS DINÂMICOS .....	126
5.2.1 Sistema mecânico amortecido excitado .....	126
5.2.2 Decremento logarítmico .....	127
5.2.3 Coeficientes de amortecimento .....	129
5.3 INTRODUÇÃO À ANÁLISE MODAL DE ESTRUTURAS .....	130
5.3.1 Amortecimento Proporcional .....	134
5.4 ALGORITMO DE NEWMARK .....	138
5.4.1 Interpolação Linear da Aceleração – Método de Newmark: .....	139
5.5 EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO PARA O MEF .....	144
5.6 FORMULAÇÃO DINÂMICA COM CONTATO .....	148
5.7 MATRIZ MASSA E DE AMORTECIMENTO .....	149
5.7.1 Determinação da matriz de massa da estrutura .....	150

	10
5.7.2 <i>Determinação da matriz de amortecimento da estrutura</i> .....	156
5.8 ALGORITMO DE CONTATO COM DINÂMICA.....	156
<b>6. EXEMPLOS NUMÉRICOS CONTATO COM DINÂMICA .....</b>	<b>162</b>
6.1 EXEMPLO VIGA ENGASTADA .....	162
6.1.1 <i>Exemplo viga engastada sem amortecimento</i> .....	163
6.1.2 <i>Exemplo viga engastada com amortecimento</i> .....	166
6.2 EXEMPLO DUAS VIGAS PERPENDICULARES DEFORMÁVEIS .....	168
6.2.1 <i>Exemplo duas vigas sem amortecimento</i> .....	169
6.2.2 <i>Exemplo duas vigas com amortecimento</i> .....	171
6.3 EXEMPLO DUAS VIGAS PARALELAS DEFORMÁVEIS .....	172
6.3.1 <i>Exemplo duas vigas paralelas sem amortecimento</i> .....	174
6.3.2 <i>Exemplo duas vigas paralelas com amortecimento</i> .....	175
<b>7. CONCLUSÃO .....</b>	<b>177</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>179</b>

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - REPRESENTAÇÃO DO ELEMENTO DE CONTATO NÓ-NÓ.....	27
FIGURA 2 - REPRESENTAÇÃO DO ELEMENTO DE CONTATO NÓ-A-SEGMENTO. ....	28
FIGURA 3 - REPRESENTAÇÃO DO ELEMENTO DE CONTATO SEGMENTO-A-SEGMENTO. ....	28
FIGURA 4 - LINEARIZAÇÃO DA FUNÇÃO DE F EM X. ....	44
FIGURA 5 - EXEMPLO DE UM SÓLIDO 3D SUBMETIDO A UM CONJUNTO DE CARGAS ....	50
FIGURA 6 - DISCRETIZAÇÃO DE UM CORPO B .....	51
FIGURA 7 - DESCRIÇÃO ISOPARAMÉTRICA DAS DEFORMAÇÕES E SUAS TRANSFORMAÇÕES.....	52
FIGURA 8 - TETRAEDRO ISOPARAMÉTRICO DE 4 NÓS . ....	55
FIGURA 9 - TETRAEDRO ISOPARAMÉTRICO DE 10 NÓS.....	56
FIGURA 10 - HEXAEDRO ISOPARAMÉTRICO DE 8 NÓS. ....	57
FIGURA 11 - PROBLEMA DE CONTATO COM ATRITO EM DEFORMAÇÃO FINITA .....	69
FIGURA 12 - PARAMETRIZAÇÃO DAS SUPERFÍCIES DE CONTATO $\Gamma_2$ E $\Gamma_2$ .....	69
FIGURA 13 - ESQUEMATIZAÇÃO DOS VETORES DA BASE E DA FUNÇÃO FOLGA .....	71
FIGURA 14 - ELEMENTO FINITO DA SUPERFÍCIE DE CONTATO. ....	86
FIGURA 15 - PROJEÇÕES NÓ-ARESTA E NÓ-NÓ.....	98
FIGURA 16 - ORIENTAÇÃO DA NORMAL EM CONTATO NÓ-ARESTA.....	99
FIGURA 17 - CURVA B-SPLINE. ....	101
FIGURA 18 - FUNÇÕES BASE COM ORDEM 1, 2 E 3.....	103
FIGURA 19 - EXEMPLO DUAS VIGAS CRUZADAS. ....	113
FIGURA 20 - DESLOCAMENTO TOTAL – VISTA ISOMÉTRICA. ....	114
FIGURA 21 - DESLOCAMENTO TOTAL – VISTAS LATERAIS. ....	114
FIGURA 22 - DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES NORMAIS NA VIGA SUPERIOR.....	115
FIGURA 23 - DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES NORMAIS NA VIGA INFERIOR.....	115
FIGURA 24 - DESLOCAMENTOS OBTIDOS POR SANTOS E BANDEIRA (2018).....	116
FIGURA 25 - DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES NORMAIS NA VIGA INFERIOR POR SANTOS E BANDEIRA (2018). ....	116
FIGURA 26 - DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES NORMAIS NA VIGA SUPERIOR POR SANTOS E BANDEIRA (2018) .....	117
FIGURA 27 - DESLOCAMENTOS OBTIDOS UTILIZANDO SOFTWARE ANSYS®.....	117

FIGURA 28 - DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES NORMAIS NA VIGA INFERIOR PELO SOFTWARE ANSYS® .....	118
FIGURA 29 - DESLOCAMENTOS OBTIDOS UTILIZANDO SOFTWARE ANSYS® – MALHA REFINADA.....	119
FIGURA 30 - DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES NORMAIS NA VIGA INFERIOR PELO SOFTWARE ANSYS® – MALHA REFINADA.....	119
FIGURA 31 - COMPARAÇÃO ENTRE AS TENSÕES NORMAIS.....	123
FIGURA 32 - COMPARAÇÃO ENTRE OS DESLOCAMENTOS MÁXIMOS.....	123
FIGURA 33 - REPRESENTAÇÃO SIMBÓLICA DE UM AMORTECEDOR E SEU DIAGRAMA DE CORPO LIVRE. ....	127
FIGURA 34 - TAXA DE DECRÉSCIMO DA OSCILAÇÃO MEDIDA PELO DECREMENTO LOGARÍTMICO.....	128
FIGURA 35 - DECREMENTO LOGARÍTMICO EM FUNÇÃO Z.....	129
FIGURA 36 - DIAGRAMA DE CORPO LIVRE DO SISTEMA MASSA MOLA. ....	131
FIGURA 37 – NEWMARK.....	140
FIGURA 38 - TIPOS DE FORÇAS EXTERNAS QUE PROVOCAM O DESLOCAMENTO CORRESPONDENTES A ESTRUTURA, PERMITINDO O CÁLCULO DO TRABALHO....	151
FIGURA 39 - VIGA ENGASTADA.....	162
FIGURA 40 - MALHA DE ELEMENTOS FINITOS DO EXEMPLO DA VIGA ENGASTADA. ....	163
FIGURA 41 – GRÁFICOS DO MOVIMENTO DE MASSA SEM AMORTECIMENTO: (A) POSIÇÃO, (B) VELOCIDADE E (C) ACELERAÇÃO.....	165
FIGURA 42 - GRÁFICOS DO MOVIMENTO DE MASSA COM AMORTECIMENTO: (A) POSIÇÃO, (B) VELOCIDADE E (C) ACELERAÇÃO.....	167
FIGURA 43 - VIGAS PERPENDICULARES.....	168
FIGURA 44 - MALHA DE ELEMENTOS FINITOS DO EXEMPLO DAS VIGAS PERPENDICULARES.....	169
FIGURA 45 - VIGAS PARALELAS.....	173
FIGURA 46 - MALHA DE ELEMENTOS FINITOS DO EXEMPLO DAS VIGAS PARALELAS ..	173
FIGURA 47 - DESLOCAMENTO FINAL DO EXEMPLO DAS VIGAS PARALELAS – SEM AMORTECIMENTO.....	175
FIGURA 48 - DESLOCAMENTO FINAL DO EXEMPLO DAS VIGAS PARALELAS – COM AMORTECIMENTO.....	176

## LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 - INTEGRAÇÃO TRIDIMENSIONAL PARA ELEMENTOS TETRAÉDRICOS. ....	56
QUADRO 2 - COMPARATIVO EXEMPLOS COM MALHAS REFINADAS. ....	120
QUADRO 3 - COMPARATIVO EXEMPLOS COM A MALHA USADA POR SANTOS E BANDEIRA (2018). ....	120
QUADRO 4 - COMPARATIVO EXEMPLOS COM A MALHA REFINADA NO ANSYS E SANTOS E BANDEIRA. ....	121
QUADRO 5 - COMPARATIVO EXEMPLOS COM ELEMENTO TETRAÉDRICO E HEXAÉDRICO NO ANSYS. ....	121
QUADRO 6 - QUADRO COMPARATIVO DOS RESULTADOS. ....	122
QUADRO 7 - RAZÃO DE AMORTECIMENTO DE MATERIAIS SOB CONDIÇÕES NORMAIS DE TRABALHO. ....	136
QUADRO 8 - RESULTADOS DO EXEMPLO DA VIGA ENGASTADA - SEM AMORTECIMENTO. .....	163
QUADRO 9 - RESULTADOS DO EXEMPLO DA VIGA ENGASTADA - COM AMORTECIMENTO. .....	166
QUADRO 10 - RESULTADOS DO EXEMPLO DAS VIGAS PERPENDICULARES – SEM AMORTECIMENTO. ....	170
QUADRO 11 - RESULTADOS DO EXEMPLO DAS VIGAS PERPENDICULARES – COM AMORTECIMENTO. ....	171
QUADRO 12 - RESULTADOS DO EXEMPLO DAS VIGAS PARALELAS – SEM AMORTECIMENTO. ....	174
QUADRO 13 - RESULTADOS DO EXEMPLO DAS VIGAS PARALELAS – COM AMORTECIMENTO. ....	175

SANTOS, Antonio Ribeiro Jr. **Análise quase-estática e dinâmica de problemas de contato mecânico em sólidos tridimensionais utilizando o método da curva B-Spline nas superfícies de contato**. 2018. 188p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas). Universidade Federal da Bahia.

## RESUMO

Nesta pesquisa é apresentada a fundamentação teórica sobre a formulação do problema de contato mecânico com atrito para sólidos tridimensionais, baseando-se na mecânica do contínuo e na dinâmica não-linear e suas aplicações no estudo do contato mecânico em regime de grandes deformações. É desenvolvida a formulação da mecânica dos sólidos utilizando a forma fraca, obtendo-se a equação de equilíbrio do balanço dos momentos, pelo modelo de equação de energia de um material *Neo-Hookiano* com propriedades hiperelásticas. É aplicado o método do *Lagrangiano Aumentado* para solução numérica do problema de contato e, além disso, apresenta-se o elemento de contato B-Spline em substituição ao elemento de contato *Lagrangiano*, visando a utilização de uma superfície curva e suave, obtida a partir da superfície mestre suavizada pela curva *B-Spline*. Inicialmente, é implementado um programa de contato mecânico em Linguagem de programação C utilizando o elemento finito tetraédrico e hexaédrico. Em seguida, procede-se com o estudo da dinâmica das estruturas, desenvolvendo-se uma análise dinâmica para o contato mecânico. Para completar, é desenvolvido e implementado no código computacional o algoritmo da análise dinâmica do contato mecânico. O Método de Newmark é utilizado na integração ao longo do tempo da análise dinâmica. Ao final do trabalho são apresentadas modelagens de exemplos, analisando o efeito do contato mecânico com dinâmica entre corpos deformáveis.

**Palavras-chave:** Método dos Elementos Finitos, Problema de Contato, Dinâmica das Estruturas, B-Spline.

## ABSTRACT

In this research the theoretical basis on the formulation of the problem of mechanical contact with friction for three-dimensional solids is presented, based on the mechanics of the continuum, the study of the nonlinear dynamics and its applications in the study of mechanical contact in the regime of large deformations. The formulation of the mechanics of the solids using the weak form is developed, obtaining the balance equilibrium equation of the moments, by the energy equation model of a Neo-Hookian material with hyperelastic properties. The Lagrangian Increased method is applied to the numerical solution of the contact problem and, in addition, the B-Spline contact element is substituted for the Lagrangian contact element, aiming at the use of a smooth and curved surface obtained from the master surface softened by the B-Spline curve. Initially, a mechanical contact program in Programming Language C is implemented using the tetrahedral finite element replacing the hexahedral element. Next, we proceed with the study of the dynamics of the structures, developing a dynamic analysis for the mechanical contact. To complete, the algorithm of the dynamic analysis of the mechanical contact is developed and implemented in the computational code. The Newmark Method is used in the time integration for the dynamic analysis. At the end of the work, modeling of examples is presented, analyzing the effect of mechanical contact with dynamics between deformable bodies.

**Key-words: Finite Element Method, Contact Problem, Structural Dynamics, B-Spline.**



## 1. INTRODUÇÃO

Atualmente no mercado existe um interesse crescente na aplicação de simulação numérica para solução de problemas de engenharia. Graças aos avanços tecnológicos na área computacional, tornou-se possível a implantação de novos processos de desenvolvimento e validação de modelos com a introdução de ferramentas virtuais. O uso e domínio dessas ferramentas representa redução de custos e tempo no desenvolvimento de projetos e análise de estruturas, significando um avanço de competitividade. Com o aumento da capacidade de processamento dos computadores modernos e a popularização da simulação computacional, gerou-se um estímulo pela busca de soluções de problemas mais complexos.

Em busca de modelos matemáticos que possam representar os meios físicos de forma apropriada e satisfatória, muitos problemas da engenharia são caracterizados por equações diferenciais ou integrais. Por esse motivo, apenas um número restrito de casos pode ser resolvido analiticamente. Dessa maneira, o uso de ferramentas numéricas e computacionais torna-se indispensável para resolução de problemas mais complexos. Dentre os métodos numéricos mais utilizados, destacam-se o *Método dos Elementos Finitos (MEF)*, o *Método das Diferenças Finitas (MDF)*, o *Método dos Elementos de Contorno (MEC)* (SAMPAIO, 2009) e o *Método dos Elementos Discretos (MED)*.

A escolha da técnica numérica empregada na solução de problemas é importante para garantir a qualidade e confiabilidade dos resultados. O método dos elementos finitos apresenta-se como o mais utilizado na solução de problemas de engenharia estrutural, na mecânica dos sólidos. Neste trabalho utilizar-se-á o *Método dos Elementos Finitos* aplicado à problemas de contato mecânico entre corpos utilizando o *Método da Curva B-Spline* para a suavização da superfície de contato e, posteriormente, problemas dinâmicos. Os problemas de contato são não lineares. O contato mecânico estrutural é bastante comum e de grande importância nas áreas da engenharia mecânica, civil, naval, aeronáutica e biomédicas. Solucionar a forma como as tensões

se distribuem na interface de contato é importante na elaboração de projetos, contribuindo diretamente na determinação da vida útil dos elementos, principalmente quando relacionadas ao desgaste físico dos mesmos.

Os mecanismos de contato são comumente utilizados em diversos casos na engenharia, como por exemplo, na fabricação de peças estruturais ou na transferência de carregamento entre estruturas ou sólidos em geral. Em alguns casos, o estudo da mecânica do contato é aplicado quando se deseja estudar previamente os efeitos causados em situações acidentais ou indesejadas que envolvem dois ou mais corpos, como em testes de colisão de veículos ou em estudos de balística.

Esses problemas envolvendo mecânica do contato podem ser estudados numericamente, experimentalmente ou a partir de modelos teóricos, de forma isolada ou em conjunto. Geralmente, são requeridos custos operacionais elevados e dificuldades práticas na execução de ensaios experimentais, principalmente, por conta do tempo necessário para montagem do experimento e para que sejam efetuados todos os ensaios. A simulação numérica tem como uma das vantagens a possibilidade de se obter uma série de resultados a um baixo custo operacional. Entretanto, não se descarta investigações experimentais neste tipo de análise. Porém o número de ensaios a serem realizados pode ser reduzido, e os dados obtidos nesses ensaios podem ser utilizados para aferição e validação dos modelos e procedimentos de análise numérica.

Antes, muitos problemas eram aproximados por simplificações consideradas na concepção do projeto por conta da natureza não-linear da mecânica do contato. Atualmente, devido ao grande aumento na capacidade de processamento dos computadores, pode-se aplicar ferramentas da mecânica computacional para simular numericamente aplicações que incluem mecanismos de contato.

Esta dissertação possui fortes influências dos trabalhos de (BANDEIRA, 2001) e (SANTOS, 2018). Santos e Bandeira (2018) inovou ao introduzir a suavização da superfície de contato utilizando o método da curva B-Spline, cujo trabalho foi publicado em (SANTOS e BANDEIRA, 2018). A dissertação de (SANTOS, 2018), por sua vez, é

baseado na tese de (BANDEIRA, 2001), orientador deste trabalho. Visando contribuir para ambas as pesquisas, é desenvolvida, nesta dissertação, uma análise de contato mecânico pelo método da curva B-Spline, utilizando elementos tetraédricos (diferente do hexaedro adotado nos trabalhos citados), e é introduzida a análise dinâmica não linear no contato.

### 1.1. JUSTIFICATIVA

O estudo da dinâmica e do contato em estruturas possui uma importância estratégica para prever o comportamento de elementos estruturais submetidos a problemas de contato mecânico, permitindo que as estruturas possam ser utilizadas com segurança e eficiência. A interação entre alguns elementos estruturais envolve efeitos estudados pela mecânica do contato. O entendimento dos problemas de contato associados ao suporte e avanço desses elementos é essencial para etapas de dimensionamento e execução.

Atualmente, os métodos numéricos disponíveis apresentam-se como boas ferramentas para a análise de problemas de contato. Isto ocorre por conta da complexidade apresentada por tais problemas, demandando soluções mais sofisticadas. Portanto, será utilizado o Método dos Elementos Finitos (MEF) para resolver os problemas de contato em estruturas. Além disso, visando resolver o problema de não continuidade da normal entre as superfícies adjacentes, será utilizada uma superfície de contato suavizada pelo método da curva *B-Spline*.

É necessário submeter as estruturas e sistemas mecânicos a ensaios de contato mecânico com dinâmica, visando, inclusive, captar efeitos de impacto, para realizar a avaliação do comportamento CAI. Estes ensaios podem ser realizados a partir de testes físicos utilizando modelos reais. Entretanto, este tipo de teste é uma solução cara e que gera inutilização dos corpos de prova. Adotando uma análise computacional, tornam-se possíveis modelagens mais simplificadas, resultando em uma economia de tempo e

dinheiro. Destacando-se que estas simplificações são realizadas de forma criteriosa, não podendo afetar ou alterar a precisão, confiabilidade e qualidades dos resultados obtidos. Desta forma, é de considerável importância o estudo do contato mecânico com dinâmica e formulações que permitam a implementação computacional de modelos estruturais submetidos aos efeitos dinâmicos.

## 1.2. OBJETIVOS

### 1.2.1 *Objetivos gerais*

O objetivo deste trabalho é estudar, a partir de uma análise quase-estática e dinâmica, problemas tridimensionais de contato mecânico em corpos deformáveis, utilizando o *método dos elementos finitos*, a partir de uma superfície de contato suavizada pelo *método da curva B-Spline*.

### 1.2.2 *Objetivos específicos*

- Realizar a revisão da formulação de contato mecânico utilizando o método do *Lagrangiano Aumentado* como condição de restrição e a formulação da curva *B-Spline* adaptada ao elemento finito de contato;
- Desenvolver um programa computacional em *Linguagem C* para a implementação do elemento de contato *B-Spline*, utilizando o elemento finito tetraédrico e hexaédrico para sólidos tridimensionais;
- Simular modelos matemáticos clássicos da literatura para corpos em contato mecânico, comparar os exemplos simulados no pacote computacional desenvolvido com o do programa generalista *Ansys*<sup>®</sup> e compará-los com os resultados dispostos na literatura;

- Desenvolver um algoritmo de contato mecânico com dinâmica entre corpos sólidos tridimensionais;
- Implementar o algoritmo de contato mecânico com dinâmica no programa de contato *B-Spline*;
- Realizar aplicações práticas de estudos utilizando a simulação do contato mecânico com dinâmica em uma estrutura.

### 1.3. ESTRUTURA DO TRABALHO

O conteúdo desta dissertação divide-se em sete capítulos apresentando conceitos e formulações matemáticas para a análise dos problemas de contato mecânico com dinâmica e atrito.

No primeiro capítulo é introduzido o tema da pesquisa. São apresentados os objetivos do trabalho, a estrutura da dissertação e é realizada uma fundamentação teórica sobre contato mecânico.

No segundo capítulo é apresentada a formulação variacional para elementos finitos e o processo de linearização. Apresenta-se o processo de discretização pelo método dos elementos finitos, o elemento isoparamétrico tetraédrico de quatro nós e a obtenção da matriz de rigidez.

No terceiro capítulo é introduzido a cinemática do contato com atrito e a formulação do contato entre um nó escravo com uma superfície mestre.

No quarto capítulo é introduzida a definição da superfície B-Spline. A formulação de contato é adaptada utilizando o elemento de contato pelo método da curva B-Spline. Além disso, são modelados numericamente alguns exemplos tridimensionais e seus resultados são comparados com os obtidos na literatura.

No quinto capítulo é apresentada uma introdução à dinâmica das estruturas e a dedução do método de Newmark para dinâmica linear e não linear.

No sexto capítulo são apresentados, utilizando o programa desenvolvido neste trabalho, os resultados dos exemplos numéricos simulados em um programa computacional de elementos finitos com contato mecânico e dinâmica.

A dissertação é finalizada no sétimo capítulo, onde é apresentada a conclusão do trabalho e a discussão dos resultados obtidos.

## 1.4. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 1.4.1. *Contato mecânico*

Seja na fabricação de peças estruturais ou na transferência de carregamento entre estruturas ou sólidos em geral, os mecanismos de contato são bastante utilizados em variados casos na engenharia. O contato pode ser classificado em: contato sem atrito, contato com atrito, contanto conforme e contanto não-conforme, de acordo com SAMPAIO (2009).

No contato sem atrito, os sólidos podem deslizar uns sobre os outros sem que haja resistência na direção tangencial à superfície de contato. Logo, o efeito do carregamento externo na interface de contato será somente de compressão normal. Sem atrito, a força tangencial será sempre igual à zero. A aplicação prática deste tipo de contato é relativamente limitada. Em geral, este tipo de consideração é feito nos problemas envolvendo superfícies lisas e bem lubrificadas. No contato com atrito, ao ser considerado o efeito de atrito, duas situações podem ocorrer: contato sem deslizamento tangencial (“stick”); e, contato com deslizamento tangencial (“slip”). Na primeira situação, “stick”, o deslizamento é impedido pela força de atrito desenvolvida na superfície. A força de atrito é a componente de resistência tangencial nos pontos de contato da superfície. Em outras palavras, quando houver contato sem deslizamento, a componente tangencial que atua entre os sólidos é menor que o limite de atrito. No segundo caso, atrito com deslizamento, o limite da força de atrito é atingido e, assim,

a componente tangencial da força na superfície de cada sólido será igual ao valor deste limite. Não pode haver força tangencial maior que o limite de atrito. Em ambos os casos, a força tangencial a ser desenvolvida depende da componente normal atuando no mesmo ponto e das características de cada sólido (como a rugosidade, a topologia, etc.).

O comportamento de fricção pode ser caracterizado por meio da Lei Clássica da Fricção, ou Lei de Fricção de Coulomb, que, além de ser uma formulação simples, é amplamente aplicada em modelos de contato. Por esta lei o deslizamento relativo entre dois sólidos em contato irá acontecer quando a força tangencial em algum ponto da superfície exceder o produto da componente normal e a constante de atrito (WRIGGERS, 2006), ou seja:

$$t_t = \pm \mu t_n, \quad (1.1)$$

onde a constante  $\mu$  é chamada de coeficiente de atrito e caracteriza o material e a superfície.

Um contato é dito conforme quando a superfície potencial de contato entre dois sólidos estiver exatamente ajustada num estado sem carregamento. Uma das principais características de um contato conforme é que o tamanho da área de contato independe do carregamento, ou seja, ao final do carregamento a superfície de contato será a mesma daquela na configuração inicial. Por esta razão, o histórico do carregamento não tem grande importância em problemas desta categoria. Já quando o contato acontece em um ponto (semelhante ao contato entre duas esferas) ou ao longo de uma linha (entre um cilindro e uma superfície plana, por exemplo), diz-se que ocorreu um contato não conforme. Então, pode-se dizer que a área de contato irá mudar com a aplicação do carregamento, sendo neste caso importante o histórico do carregamento.

Com a publicação de Hertz (1882) surge a primeira contribuição para a teoria do contato. Neste primeiro trabalho demonstrou-se a solução de um problema de contato

entre dois elipsoides, sem a consideração do atrito. Visando aplicações em ferrovias, especificadamente na indústria de engrenagens e rolamentos, apareceram no início do século XX novos estudos sobre o tema (DIAS, 2013). O estudo de problemas de contato foi realizado utilizando soluções analíticas, sendo continuado, inicialmente, nos trabalhos de (LURIE, 1970) e (ALEXANDROV, 1983), além de ter sido explorado mais recentemente em (JOHNSON, 1985), (GORYACHEVA, 1998), (GORYACHEVA, 2001) e (VOROVICH e ALEXANDROV, 2001). Outras colaborações relevantes para o tema tiveram origem na escola russa de engenharia mecânica, por meio dos estudos de (GALIN, 1953), (GALIN, 1976), e (MUSKHELISHVILI, 1966). Contudo, por conta das limitações destes estudos, suas abordagens foram restritas a materiais com comportamento linear e problemas de geometria simples, não se aplicando a problemas mais complexos com atrito.

A medida que foram surgindo novas demandas industriais, tais como, materiais de comportamento não linear, geometrias complexas, desgaste, adesão, deslizamento e outros efeitos e considerações, foi necessário o desenvolvimento de estudos mais aprofundados na área. Com o surgimento destes problemas mais complexos e o início do uso da tecnologia computacional, foram propostos métodos semi analíticos de solução, contudo, ainda não capazes de solucionar os problemas complexos de contato demandados pela indústria. Um artigo publicado em 1943, pelo matemático americano Richard Courant, foi a base para uma teoria matemática de discretização, ignorado na época por conta da não existência de computadores com capacidade de processamento para a enorme quantidade de cálculos. Este método é conhecido atualmente por *Método dos Elementos Finitos (MEF)*. Posteriormente, na década de 50, iniciaram-se os primeiros trabalhos práticos utilizando os conceitos desenvolvidos por Courant. Os pesquisadores da Boeing M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin e L. J. Topp publicaram juntos o que viria a ser um dos primeiros artigos definindo os principais conceitos do MEF, aplicando-os à indústria aeronáutica, incluindo a montagem matemática dos elementos e a da matriz de rigidez (TURNER, CLOUGH, *et al.*, 1956).



A partir daí, por conta da sua eficiência, a utilização do método passou a ser bastante difundida na resolução de problemas da engenharia estrutural. Buscando atender as demandas crescentes da indústria, foram desenvolvidas ferramentas matemáticas úteis para o desenvolvimento das teorias de contato aliadas ao método dos elementos finitos. Entretanto, os primeiros artigos contendo métodos de solução de problemas de contato utilizando o MEF foram publicados somente em 1970 e 1971 por (WILSON e PARSONS, 1970) e (CHAN e TUBA, 1971). O MEF é um método numérico baseado em discretização para solução de Problemas de Valor de Contorno (PVC), utilizando funções polinomiais na aproximação da solução. O objetivo é que esta aproximação seja tão próxima quanto se deseja da solução real. Utilizando-se estratégias de refinamento, observou-se que o erro na aproximação pode ser controlado. A depender da estratégia de refinamento, se pode dividir o MEF em três versões: a versão onde a convergência da solução é obtida com a redução do tamanho dos elementos, primeira técnica empregada a partir da década de 60; na versão em que há um aumento da ordem polinomial da expansão, se obtendo uma redução do erro, seu desenvolvimento se deu no final da década de 70 por (SZABÓ e MEHTA, 1978); e o emprego em conjunto dessas duas origina a versão que foi desenvolvida por (BABUSKA e SURI, 1988).

O trabalho de (SIGNORINI, 1933) formulou o problema geral de equilíbrio de um corpo elástico linear em contato com uma fundação rígida. Os estudos de Signorini deram início a abordagem computacional dos problemas de contato (SIGNORINI, 1959). Essa classe de problema foi explorada de forma mais rigorosa em (FICHERA, 1972), (FICHERA, 1964) e (FICHERA, 1963). Pode-se se citar também a contribuição fornecida por (KIKUCHI e ODEN, 1988) para a investigação de existência e unicidade de solução do problema de Signorini. Estes autores deram uma importante contribuição para o desenvolvimento da formulação de problema de contato sem atrito, como um problema de ponto de sela, possibilitando uma abordagem que utilizasse a teoria de minimização com restrições. Pode-se resolver tais problemas utilizando os métodos

usuais de otimização, tais como, o *Método da Penalidade*, o *Método dos Multiplicadores de Lagrange*, o *Método do Lagrangiano Aumentado* e etc vide (KIKUCHI e ODEN, 1988), (MIJAR e ARORA, 2000).

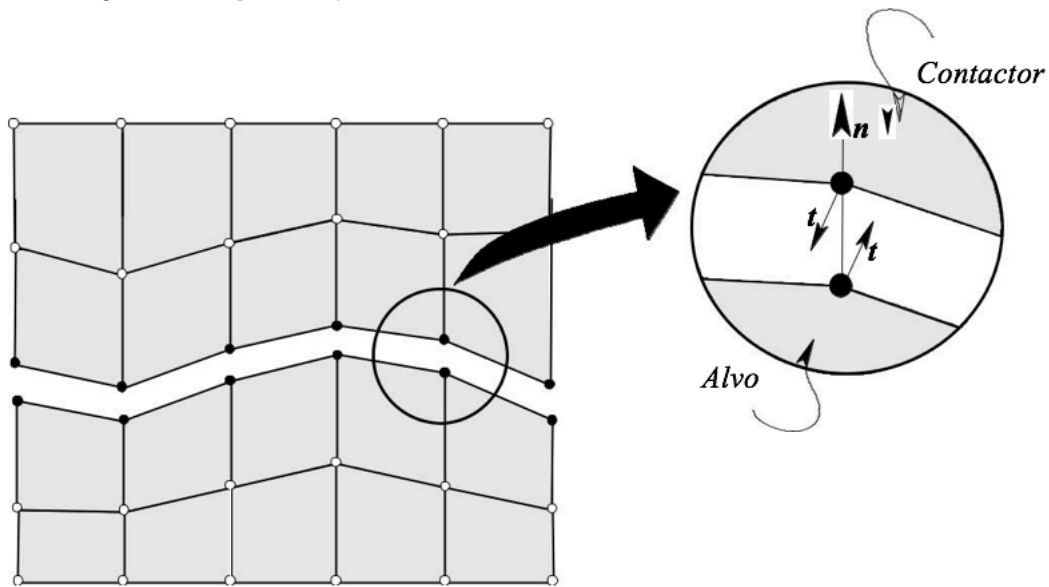
Existe registro de problemas de contato com atrito nos séculos XVI e XVII nos trabalhos de (AMONTONS-REVER, 1699) apud (WRIGGERS, 2006), (EULER, 1748), (EULER, 1748) apud (WRIGGERS, 2006) e (COULOMB, 1785). Entretanto, apenas no ano de 1976 observou-se um relevante avanço na formulação numérica para esta classe de problemas, graças ao trabalho de (DUVAUT e LIONS, 1976), investigando a solução de problemas de contato com atrito e grandes deformações. Estes avanços propiciaram o surgimento de importantes trabalhos seguindo esta linha, como (COCU, 1984), (GIANNAKOPOULOS, 1989), (PANAGIOTOPOULOS, 1985) e (RABIER, MARTINS, *et al.*, 1986). É possível encontrar em destaque na literatura outras formas de estudo dos problemas de contato. Uma abordagem muito utilizada é referente a suposição de que se conhece inicialmente a interface de contato na interação computacional corrente, permitindo a transformação dos variacionais de desigualdade em variacionais de igualdade (SERPA e IGUTI, 2000). Outra abordagem também utilizada consiste na aplicação de diferentes métodos de programação matemática: a solução do problema de contato pode ser via métodos simplex (CHAND, HAUG e RIM, 1976); ou pelo método da programação quadrática paramétrica (KLARBRING, 1986), (ZHONG e SUN, 1988) e (ZHONG e SUN, 1989). A literatura possui atualmente uma vasta gama de métodos de resolução de problemas de contato consolidados, amplamente estudados e com aplicações práticas a problemas de engenharia. Maiores detalhes sobre estes métodos podem ser encontrados em (BANDEIRA, 2001), (BANDEIRA, WRIGGERS e PIMENTA, 2004), (WRIGGERS, 2006) e (LAURSEN, 2002).

Para sua resolução, de forma geral, os problemas de contato são tratados como um problema de otimização com restrições, no qual a função objeto é referente a energia potencial total dos corpos em contato, correspondendo a energia potencial do sistema mecânico mais a energia potencial do contato (BARBOSA e GHABOUSSI, 1990).

Pode-se obter a solução de um problema de contato sem atrito pela minimização da energia potencial, sujeitando o problema às restrições de desigualdade de não penetração entre os corpos. As condições de impenetrabilidade dos corpos são representadas pelas restrições, indicando distâncias pontuais entre os corpos na região de contato. Estas condições serão importantes na verificação da existência, ou não, de penetração e contato. No caso de problemas com atrito, torna-se necessário a inserção de restrições adicionais, baseadas na Lei de Coulomb. Define-se como função penetração este conjunto de restrições. Após a definição das energias do sistema e do contato, aplica-se um princípio variacional integral para converter as equações do problema da forma forte para a forma fraca, seguido de um processo de linearização para que o sistema de equações resultante possa ser resolvido pelo processo iterativo. Ao final do processo, é obtida uma função dos deslocamentos e das tensões de contato.

Uma das principais etapas, dentro do processo numérico de resolução dos problemas de contato, consiste em discretizar o domínio de contato em estudo num número finito de elementos de contato e converter as equações integrais oriundas do método de minimização em equações algébricas (YASTREBOV, 2011). A construção destes elementos se dá pelas duas superfícies de contato, utilizando os nós e arestas, por exemplo. Para cada elemento de contato, se tem um vetor próprio de variáveis, um vetor resíduo e uma matriz tangente. Basicamente, são encontrados na literatura três tipos de elementos de contato, o elemento de contato nó-nó, o elemento de contato nó a segmento e o segmento-a-segmento, apresentados em (BANDEIRA, 2001) e (BANDEIRA, WRIGGERS e PIMENTA, 2004). A formulação nó-nó, apesar de se de simples implementação, impossibilita a descrição do comportamento de deslizamento, podendo ser utilizada somente em problemas de pequenas deformações. Esta formulação também impõe restrições na geração de malha, pois, como pode ser observado na Figura 1, os nós precisam estar alinhados (FRANCAVILLA e ZIENKIEWICZ, 1975).

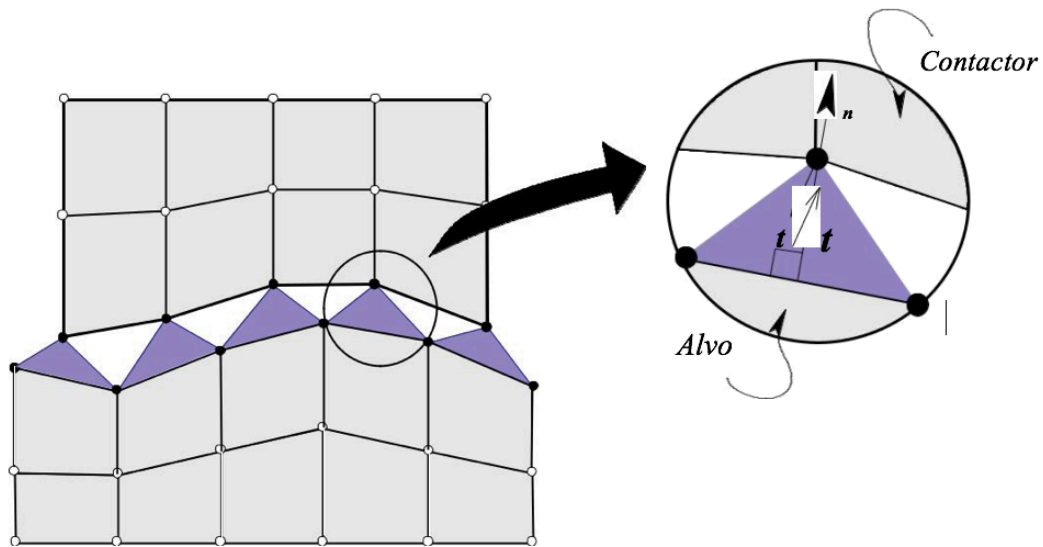
Figura 1 - Representação do elemento de contato nó-nó.



Fonte: (DIAS, 2013).

O elemento de contato nó-a-segmento da Figura 2 pode ser utilizado em malhas não conforme, aplicado em casos de grandes deformações e deslizamento. Este elemento é muito utilizado em softwares comerciais de análise utilizando o *Método dos Elementos Finitos* (HUGHES, TAYLOR e KANOKNUKULCHAI, 1977). O contato nó-a-segmento permite o deslizamento do nó escravo entre uma superfície mestre à outra adjacente.

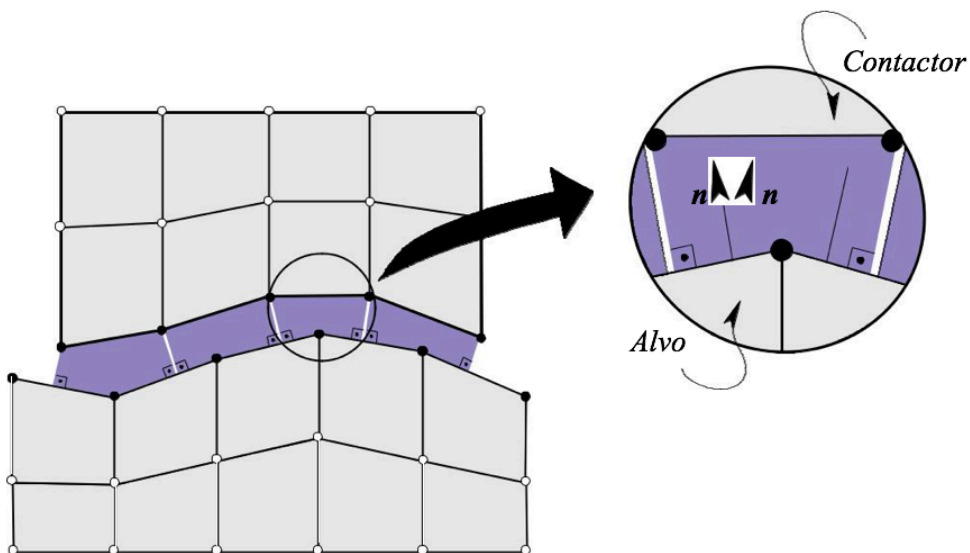
Figura 2 - Representação do elemento de contato nó-a-segmento.



Fonte: (DIAS, 2013).

O elemento de contato segmento-a-segmento é ilustrado pela Figura 3 e foi proposto por (SIMO, WRIGGERS e TAYLOR, 1985).

Figura 3 - Representação do elemento de contato segmento-a-segmento.



Fonte: (DIAS, 2013).

## 2. NOÇÕES INICIAIS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

### 2.1. CONCEITOS BÁSICOS

Nesta seção será estudada a formulação dos sólidos deformáveis em regime elástico não linear, submetidos a grandes deformações. Será utilizada uma formulação tensorial, baseada na mecânica do contínuo no espaço tridimensional, e descrita no sistema global de coordenadas. Uma revisão da mecânica do contínuo, imprescindível para o entendimento desta seção, está muito bem elaborada em (PIMENTA, 2006) e (REDDY, 2013).

#### 2.1.1 Leis de equilíbrio

Neste item serão abordadas as equações diferenciais que representam as leis locais de equilíbrio da mecânica do contínuo. É estudado o balanço de massa, balanço local de momentos e noções de transformação da configuração corrente para a de referência. As demonstrações para as equações apresentadas nesta seção estão amplamente descritas em (BATHE, 1996) e (WRIGGERS, 2008).

##### 2.1.1.1 Balanço de massa

Para um corpo de massa  $m$ , o balanço de massa do mesmo é dado pela equação:

$$m = \int_B \rho_0 dV_0 = \int_{\varphi(B)} \rho_t dV_t = \text{constante}, \quad (2.1)$$

onde:

$\rho_0$  é a densidade na configuração inicial;

$\rho_t$  é a densidade na configuração corrente;

$V_0$  é o volume na configuração inicial;

$V_t$  é o volume na configuração corrente.

Na descrição *Lagrangeana* do movimento podemos assumir a seguinte relação:

$$\rho_0 = J\rho_t. \quad (2.2)$$

É possível relacionar o volume na configuração de referência com o volume na configuração corrente utilizando as equações (2.2) e (2.3) como

$$dV_t = \frac{\rho_0}{\rho_t} dV_0 = JdV_0. \quad (2.3)$$

### 2.1.1.2 Balanço local de momentos

Considerando um elemento volumétrico na configuração corrente  $\varphi(B)$ , podemos considerar o balanço local dos momentos como sendo:

$$\sigma_{ik,j} + \rho_t \bar{b}_k = \rho_t \dot{v}_k, \quad (2.4)$$

onde  $\sigma_{ik,j}$  é o tensor das tensões de Cauchy,  $\rho_t \bar{b}_k$  é força de volume e  $\rho_t \dot{v}_k$  é a força de inércia.

A expressão pode ser escrita na forma vetorial por:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho_t \bar{\mathbf{b}} = \rho_t \dot{\mathbf{v}}. \quad (2.5)$$

É possível relacionar o vetor das tensões  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$  com o vetor normal a superfície  $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$  utilizando-se do *teorema de Cauchy*;

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}, \quad (2.6)$$

$$t_i = \sigma_{ik} n_k, \quad (2.7)$$

e

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

As equações (2.6), (2.7) e (2.8) representam respectivamente as notação vetorial, indicial e matricial do tensor de *Cauchy*. A simetria do tensor das tensões de Cauchy é demonstrado através do equilíbrio de momentos no tetraedro de Cauchy. Pode-se afirmar, então, que o tensor das tensões de Cauchy é simétrico, ou seja,

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (2.9)$$

ou

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}. \quad (2.10)$$

### 2.1.1.3 Transformação da configuração corrente para a inicial

As equações (2.5), (2.9) e (2.10) estão referenciadas na configuração corrente. Entretanto, é muito comum a necessidade de que essas equações sejam escritas na configuração inicial  $\mathbf{B}$ , gerando a necessidade de definição de mais tensores. Sendo assim, utilizando-se da equivalência de força entre as configurações  $\mathbf{B}$  e  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{B})$  e da fórmula de *Nanson*, podemos escrever a seguinte relação:



$$\int_{\partial\varphi(B)} \sigma \mathbf{n} dA_t = \int_{\partial B} \sigma J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}^{(0)} dA_0 = \int_{\partial B} \mathbf{P} \mathbf{n}^{(0)} dA_0, \quad (2.11)$$

onde  $\mathbf{P}$  é o *primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff* que representa a tensão atual em termos de área na configuração inicial.

São utilizadas as propriedades para o gradiente de um vetor, a relação de volume da configuração de referência com o volume na configuração corrente e o tensor  $\mathbf{P}$  na expressão do balanço local de momentos, escrita na forma vetorial e na configuração corrente, para escrever a equação do balanço local dos momentos na configuração de referência. Portanto, obtém-se:

$$\text{Div} \mathbf{P} + \rho_0 \bar{\mathbf{b}} = \rho_0 \dot{\mathbf{v}}. \quad (2.12)$$

### 2.1.2 Princípio dos trabalhos virtuais

Em mecânica do contínuo são utilizados métodos numéricos com base na formulação variacional. As leis constitutivas representam as diferentes propriedades físicas de diferentes materiais. A depender da lei do material é conveniente escrever a formulação variacional em uma configuração específica para facilitar a implementação computacional. Será apresentado, a seguir a formulação variacional descrita para a configuração de referência, quanto para a configuração corrente. Destaca-se que as configurações  $B$  e  $\varphi(B)$  são completamente independentes da lei constitutiva do material.

#### 2.1.2.1 Configuração de referência

De acordo com (BANDEIRA, 2001) chama-se de equação de equilíbrio a formulação do balanço de momentos equivalente ao princípio dos trabalhos virtuais. Seja a equação do balanço local de momentos na configuração de referência definido por

$$Div\mathbf{P} + \rho_0\bar{\mathbf{b}} = \rho_0\dot{\mathbf{v}}. \quad (2.13)$$

Definindo os deslocamentos virtuais por  $\boldsymbol{\eta} = \{\boldsymbol{\eta} | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \text{ em } \partial B_u\}$  e integrando em relação ao volume do sólido no campo considerado, tem-se que:

$$\int_B Div\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\eta} dV_0 + \int_B \rho_0(\bar{\mathbf{b}} - \dot{\mathbf{v}}) \cdot \boldsymbol{\eta} dV_0 = 0, \quad (2.14)$$

onde  $\mathbf{b}$  é a força por unidade de volume. Esta pode representar, por exemplo, a força gravitacional.

Aplicando-se o teorema do divergente na equação (2.13), pode-se escrever o *Princípio dos Trabalhos Virtuais* como:

$$w(\varphi, \boldsymbol{\eta}) = \int_B \mathbf{P} \cdot Grad \boldsymbol{\eta} dV_0 - \int_B \rho_0(\bar{\mathbf{b}} - \dot{\mathbf{v}}) \cdot \boldsymbol{\eta} dV_0 - \int_{\partial B_\sigma} \dot{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} dA_0 = 0, \quad (2.15)$$

onde  $\int_B \mathbf{P} \cdot Grad \boldsymbol{\eta} dV_0$  corresponde ao trabalho virtual interno realizado pela estrutura,  $\int_{\partial B_\sigma} \dot{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} dA_0$  corresponde ao trabalho virtual das forças externas de superfícies e  $\int_B \rho_0(\bar{\mathbf{b}} - \dot{\mathbf{v}}) \boldsymbol{\eta} dV_0$  corresponde ao trabalho virtual das forças externas de volume.

### 2.1.2.2 Configuração corrente

Este trabalho utiliza-se de uma formulação para material Neo-Hookeano representado na configuração corrente. A equação (2.15) está referenciada na configuração de referência, sendo conveniente transformá-la para a configuração corrente. A modificação do princípio do trabalho virtual para configuração corrente é feita utilizando-se de operações geométricas. Essa modificação é possível transformando o primeiro tensor das tensões de *Piola-Kirchhoff* para o tensor tensões de *Cauchy*. Pode-se escrever o trabalho virtual então, como:

$$\begin{aligned} w(\varphi, \eta) &= \int_{\varphi(B)} \mathbf{P} \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\eta} dV_0 - \int_{\varphi(B)} \rho_0(\bar{\mathbf{b}} - \dot{\mathbf{v}}) \cdot \boldsymbol{\eta} dV_0 - \int_{\varphi(\partial B\sigma)} \dot{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} dA_0 \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Como o tensor de Cauchy é simétrico, é possível que  $\text{grad } \boldsymbol{\eta}$  na configuração corrente seja substituído pela sua parcela simétrica.

$$\nabla^S \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2}(\text{grad } \boldsymbol{\eta} + \text{grad}^T \boldsymbol{\eta}), \quad (2.17)$$

sendo assim, pode-se escrever o trabalho virtual como:

$$w(\varphi, \eta) = \int_{\varphi(B)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla^S \boldsymbol{\eta} dV_t - \int_{\varphi(B)} \rho_t(\mathbf{b} - \dot{\mathbf{v}}) \cdot \boldsymbol{\eta} dV_0 - \int_{\varphi(\partial B\sigma)} \dot{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} dA_0 = 0. \quad (2.18)$$

É possível observar que a equação (2.18) possui a mesma estrutura do princípio do trabalho virtual da teoria linear. A não linearidade da equação (2.18) está refletida

na necessidade de se calcular todas as integrais, tensões e gradientes em relação a configuração corrente.

### 2.1.3 Equações constitutivas

De acordo com (WRIGGERS, 2006) as propriedades físicas das superfícies dos corpos são influenciadas pelo comportamento constitutivo geral do mesmo. Sendo assim, para que seja incluída uma equação constitutiva não linear válida para grandes deformações, é necessário discutir a teoria das deformações finitas.

Ao longo desta seção serão discutidas as relações constitutivas da hiperelasticidade para grandes deformações. Quando se trata de pequenas deformações, essas equações constitutivas reduzem-se à lei clássica de *Hooke* da elasticidade linear. Para um material hiperelástico, a equação constitutiva para o segundo tensor das tensões de *Piola-Kirchhoff* é dada pela derivada parcial da função de energia de deformação  $Wd$  em relação ao tensor direito de *Cauchy-Green* (OGDEN, 1984). Portanto,

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W_d(\mathbf{C}, \mathbf{x}^{(0)})}{\partial \mathbf{C}}. \quad (2.19)$$

No caso de um material homogêneo, a energia de deformação  $Wd$  não depende de  $\mathbf{x}^{(0)}$ . Nesta dissertação, o estudo será restrito a materiais isotrópicos e homogêneos. Posteriormente, a função de energia de deformação pode ser representada por uma função tensorial isotrópica, definida por:

$$W_d(\mathbf{C}) = W_d(I_C, II_C, III_C) = W_d(I_b, II_b, III_b) = W_d(b), \quad (2.20)$$

sendo  $\mathbf{I}_C$ ,  $\mathbf{II}_C$  e  $\mathbf{III}_C$  os invariantes do tensor  $\mathbf{C}$ , que são calculados pelas equações a seguir:

$$\mathbf{I}_C = \text{tr} \mathbf{C}, \quad \mathbf{II}_C = \frac{1}{2} (\mathbf{I}_C^2 - \mathbf{C} : \mathbf{C}), \quad \mathbf{III}_C = \det \mathbf{C} = J^2. \quad (2.21)$$

Derivando os invariantes em relação ao tensor  $\mathbf{C}$ , tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{I}_C}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial \mathbf{II}_C}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I}_C \mathbf{I} - \mathbf{C}, \quad \frac{\partial \mathbf{III}_C}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{III}_C \mathbf{C}^{-1}. \quad (2.22)$$

Aplicando-se a regra da cadeia na equação (2.19) e substituindo a equação (2.20), tem-se:

$$\mathbf{s} = 2 \left( \frac{\partial W_d}{\partial \mathbf{I}_C} \frac{\partial \mathbf{I}_C}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W_d}{\partial \mathbf{II}_C} \frac{\partial \mathbf{II}_C}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W_d}{\partial \mathbf{III}_C} \frac{\partial \mathbf{III}_C}{\partial \mathbf{C}} \right). \quad (2.23)$$

Obter-se-á o segundo tensor das tensões de *Piola-Kirchhoff* expresso em relação aos invariantes, substituindo as equações (2.22) em (2.23):

$$\mathbf{s} = 2 \left[ \left( \frac{\partial W_d}{\partial \mathbf{I}_C} + \mathbf{I}_C \frac{\partial W_d}{\partial \mathbf{II}_C} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial W_d}{\partial \mathbf{II}_C} \mathbf{C} + \mathbf{III}_C \frac{\partial W_d}{\partial \mathbf{III}_C} \mathbf{C}^{-1} \right]. \quad (2.24)$$

Deve-se escolher uma boa equação constitutiva para que o material suporte a compressão, já que o presente trabalho tem por objetivo o estudo do contato mecânico com grandes deformações.

Será adotado o material compressível de *Neo-Hooke* com a energia de Deformação definida pela equação:

$$W_d(I_C, J) = g(J) + \frac{1}{2}\mu_d(I_C - 3). \quad (2.25)$$

Define-se  $g(J)$  como:

$$g(J) = c(J^2 - 1) - d \ln J - \mu_d \ln J, \quad \text{com } c > 0 \text{ e } d > 0. \quad (2.26)$$

Nas equações (2.25) e (2.26) as constantes  $c$  e  $d$  foram escolhidas como sendo:

$$c = \frac{\Lambda}{4} \quad \text{e} \quad d = \frac{\Lambda}{2}, \quad (2.27)$$

onde as constantes  $\Lambda$  e  $\mu_d$  do material são as constantes de Lamé.

Para materiais compressíveis, a função  $g(J)$  deve ser convexa. Ademais, as seguintes condições de crescimento devem ser satisfeitas pela função:

$$\lim_{J \rightarrow +\infty} W_d \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{J \rightarrow 0} W_d \rightarrow -\infty. \quad (2.28)$$

A equação (2.28) pode ser fisicamente interpretada da seguinte forma: quando o volume de um sólido tende a zero, as tensões tendem à  $-\infty$  e quando o volume de um sólido tende à  $+\infty$ , as tensões também tendem à  $+\infty$ . Sendo assim, pode-se escrever a energia de deformação como:

$$W_d(I_C, III_C) = \frac{\Lambda}{4}(III_C - 1) - \frac{\Lambda}{4} \ln III_C - \frac{1}{2}\mu_d \ln III_C + \frac{1}{2}\mu_d(I_C - 3). \quad (2.29)$$

Substituindo a equação (2.29) na (2.24) e simplificando-a, encontra-se:

$$\mathbf{S} = \frac{\Lambda}{2}(\mathbf{J}^2 - 1)\mathbf{C}^{-1} + \mu_d(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}). \quad (2.30)$$

Pode-se transformar a equação (2.30) para a configuração corrente utilizando-se da relação entre o tensor das tensões de *Cauchy* ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) e o segundo tensor das tensões de *Piola-Kirchoff* ( $\mathbf{S}$ ). De forma simplificada, e considerando as relações  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T$  e  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J} \boldsymbol{\sigma}$ , obtém-se de (2.30):

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\Lambda}{2\mathbf{J}}(\mathbf{J}^2 - 1)\mathbf{I} + \frac{\mu_d}{\mathbf{J}}(\mathbf{b} - \mathbf{I}) \quad (2.31)$$

e

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\Lambda}{2}(\mathbf{J}^2 - 1)\mathbf{I} + \mu_d(\mathbf{b} - \mathbf{I}), \quad (2.32)$$

onde  $\mathbf{b}$  é o tensor esquerdo de Cauchy-Green, definido por

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}. \quad (2.33)$$

### 2.1.3.1 Tensor constitutivo incremental

Calcula-se a variação do tensor  $\mathbf{S}$  ao longo do tempo utilizando-se da equação (2.19). Conseqüentemente:

$$\dot{\mathbf{S}} = 2 \frac{\partial W_d^2}{\partial \mathbf{C}} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} = 2 \frac{\partial W_d^2}{\partial \mathbf{C}} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{C}} \right] = 2 \frac{\partial W_d^2}{\partial \mathbf{C}} \left[ \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} \right] = 2 \frac{\partial W_d^2}{\partial \mathbf{C}} [\dot{\mathbf{C}}]. \quad (2.34)$$

Na equação anterior observa-se que a relação incremental vincula o segundo tensor das tensões de *Piola-Kirchhoff* com o tensor direito de *Cauchy-Green* ( $\mathbf{C}$ ). Utilizando-se da definição do *tensor constitutivo incremental de quarta ordem*, tem-se:

$$\mathbb{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = 4 \frac{\partial W_d^2}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \quad \mathbb{C}_{ABCD} = 4 \frac{\partial W_d^2}{\partial C_{AB} \partial C_{CD}}. \quad (2.35)$$

Pode-se escrever a equação (2.34) como:

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbb{C} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} \right] \quad \text{ou} \quad \dot{S}_{AB} = \mathbb{C}_{ABCD} \left[ \frac{1}{2} \dot{C}_{CD} \right]. \quad (2.36)$$

Utilizando-se a derivada de *Lie* do tensor das tensões de *Kirchhoff*, pode-se transformar o primeiro termo da equação (2.36). Desta forma:

$$\mathcal{L}_v \mathbf{g} := \mathbf{F} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} [\mathbf{F}^{-1} \mathbf{g} \mathbf{F}^T] \right\} \mathbf{F}^T. \quad (2.37)$$

Tem-se para um tensor de base covariante:

$$\mathcal{L}_v \hat{\mathbf{g}} := \mathbf{F}^{-T} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} [\mathbf{F}^T \hat{\mathbf{g}} \mathbf{F}] \right\} \mathbf{F}^{-1}. \quad (2.38)$$

Torna-se necessário converter a equação (2.36) para configuração corrente. Sabendo-se que:



$$\mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau} = \mathbf{F} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{F}^T, \quad (2.39)$$

$$(\mathcal{L}\boldsymbol{\tau})_{ik} = F_{iA} \dot{S}_{AB} F_{kB}, \quad (2.40)$$

$$\dot{C}_{CD} = 2F_{lC} d_{lm} F_{mD}, \quad (2.41)$$

obtém-se, então:

$$(\mathcal{L}\boldsymbol{\tau})_{ik} = F_{iA} F_{lC} F_{mD} F_{kB} \mathbb{C}_{ABCD} d_{lm}. \quad (2.42)$$

Com o objetivo de transformar o tensor  $\mathbf{F}$  para a configuração corrente, cada base do tensor constitutivo incremental de quarta ordem é trazida para a configuração corrente pela multiplicação do tensor  $\mathbf{F}$ . O tensor constitutivo incremental na configuração corrente pode ser definido, então, como:

$$c_{iklm} = F_{iA} F_{lC} F_{mD} F_{kB} \mathbb{C}_{ABCD}. \quad (2.43)$$

Ao rescrever (2.42), obtém-se:

$$(\mathcal{L}\boldsymbol{\tau})_{ik} = c_{iklm} d_{lm} \quad \text{ou} \quad \mathcal{L}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{c}[\mathbf{d}]. \quad (2.44)$$

Sendo assim, deriva-se o tensor constitutivo incremental da equação (2.30) e então, escreve-se o mesmo na configuração corrente. Utiliza-se a expressão (2.35) para calcular o tensor  $\mathbb{C}$ . Entretanto, é necessário calcular as derivadas de  $J$  e  $\mathbf{C}^{-1}$  com relação a  $\mathbf{C}$ . Então, de (2.21) tem-se:

$$J = \sqrt{\text{III}_C}. \quad (2.45)$$

Derivando (2.45) em relação a  $C$ , obtém-se:

$$\frac{\partial J}{\partial C} = \frac{1}{2} J C^{-1} \quad \text{e} \quad \frac{\partial C_{AB}^{-1}}{\partial C_{CD}} = -C_{AC}^{-1} C_{BD}^{-1}, \quad (2.46)$$

onde  $C$  é um tensor simétrico. Somente interessa a parte simétrica de (2.46). Introduz-se então o tensor de quarta ordem  $\Pi_{C^{-1}ABCD}$ , como

$$\Pi_{C^{-1}ABCD} = \frac{1}{2} (C_{AC}^{-1} C_{BD}^{-1} + C_{AD}^{-1} C_{BC}^{-1}). \quad (2.47)$$

Determina-se a derivada da equação (2.35), resultando em

$$\frac{dS}{dC} = \frac{\Lambda}{2} \left( J^2 C^{-1} \otimes C^{-1} + J^2 \frac{\partial C^{-1}}{\partial C} - \frac{\partial C^{-1}}{\partial C} \right) + \mu_d \frac{\partial C^{-1}}{\partial C}, \quad (2.48)$$

e aplicando (2.49) em (2.35), obtém-se:

$$\mathfrak{C} = \Lambda J^2 C^{-1} \otimes C^{-1} + [2\mu_d - \Lambda(J^2 - 1)] \Pi_{C^{-1}}. \quad (2.49)$$

A expressão (2.49) corresponde ao tensor constitutivo incremental obtido na configuração de referência. Deve-se reescrever este tensor constitutivo incremental na configuração corrente.

Para utilização em (2.49), define-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{C}_{AC}^{-1} \mathbf{C}_{BD}^{-1} = \mathbf{F}_{pA}^{-1} \mathbf{F}_{pC}^{-1} \mathbf{F}_{qB}^{-1} \mathbf{F}_{qD}^{-1} \mathbf{F}_{iA} \mathbf{F}_{iC} \mathbf{F}_{mD} \mathbf{F}_{kB}, \quad (2.50)$$

A equação (2.50) é simplificado como,

$$\mathbf{C}_{AC}^{-1} \mathbf{C}_{BD}^{-1} = \boldsymbol{\delta}_{pi} \boldsymbol{\delta}_{pl} \boldsymbol{\delta}_{qk} \boldsymbol{\delta}_{qm} = \boldsymbol{\delta}_{il} \boldsymbol{\delta}_{km}. \quad (2.51)$$

Sendo assim, o tensor constitutivo incremental em  $\varphi(B)$  é definido por

$$\mathbf{c} = \Lambda J^2 \boldsymbol{\delta}_{ik} \boldsymbol{\delta}_{lm} + [2\mu_d - \Lambda(J^2 - 1)] \mathbf{II}_{iklm}. \quad (2.52)$$

Escrevendo a expressão anterior na forma vetorial, obtém-se:

$$\mathbf{c} = \Lambda J^2 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + [2\mu_d - \Lambda(J^2 - 1)] \mathbf{II}, \quad (2.53)$$

onde  $\mathbf{I}$  é o *tensor unitário de segunda ordem* e  $\mathbf{II}$  é o *tensor unitário de quarta ordem*.

Os dois tensores estão referenciados em sua configuração corrente.

O tensor  $\mathbf{II}$  escrito na notação indicial é dado por:

$$\mathbf{II}_{iklm} = \frac{1}{2} (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}). \quad (2.54)$$

Segundo (BANDEIRA, 2001) aconselha-se representar a equação da elasticidade de Neo-Hooke na forma em (2.44). Logo, ao escrever a equação (2.44) em notação matricial, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_v \tau_{11} \\ \mathcal{L}_v \tau_{22} \\ \mathcal{L}_v \tau_{33} \\ \mathcal{L}_v \tau_{12} \\ \mathcal{L}_v \tau_{23} \\ \mathcal{L}_v \tau_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu + \Lambda & \Lambda J^2 & \Lambda J^2 & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda J^2 & 2\mu + \Lambda & \Lambda J^2 & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda J^2 & \Lambda J^2 & 2\mu + \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{22} \\ d_{33} \\ 2d_{12} \\ 2d_{23} \\ 2d_{31} \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

no qual  $\alpha$  é definido como:

$$\alpha = \mu_d - \frac{\Lambda}{2}(J^2 - 1). \quad (2.56)$$

### 2.1.3.2 Linearização

São utilizados modelos numéricos para a solução de equações neste trabalho. Portanto, é necessária a linearização de modelos matemáticos estudados. De acordo com (BANDEIRA, 2001), o algoritmo do método de Newton mostra-se bastante eficiente para a solução de sistemas não lineares, em especial, nas análises de estruturas utilizando o método dos elementos finitos. Portanto, deve-se realizar a linearização dos tensores das deformações, a linearização da equação constitutiva e a linearização do princípio dos trabalhos virtuais.

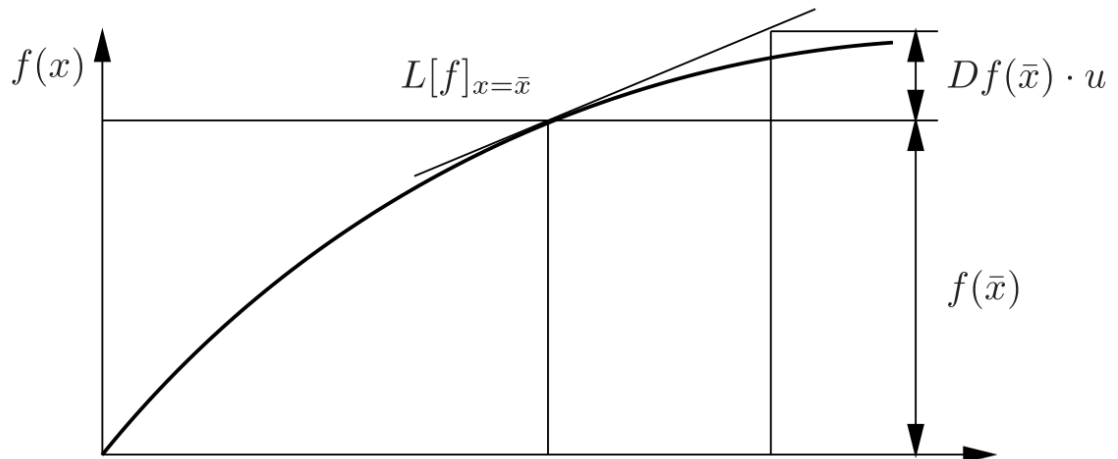
Como se pode ver em (WRIGGERS, 2008) diferentes fenômenos levam a não linearidades na mecânica do contínuo, ou seja, a não linearidade geométrica e a não linearidade física (decorrentes das equações constitutivas). Busca-se solucionar problemas de valor inicial ou limite associados. Logo, é necessária a linearização dos modelos matemáticos. Em especial, para métodos numéricos como o método dos elementos finitos, o método de Newton mostrou-se um algoritmo de solução muito eficiente para problemas de contato não linear.

Para descrever o processo de linearização apresenta-se uma função de valor escalar  $f$  que é contínua e possui sua primeira derivada contínua. Sendo assim, é possível expressar  $f$  pela expansão da série Taylor no ponto  $\bar{x}$  por:

$$f(\bar{x} + u) = \bar{f} + \bar{D}f \cdot u + R. \quad (2.57)$$

Na equação (2.57) foi usada a notação  $\bar{f} = f(\bar{x})$  e  $Df = Df(\bar{x})$ . O operador  $D$  representa a derivada de  $f$  em relação a  $x$  e  $u$  é termo incremental e residual. A equação (2.57) tem sua interpretação geométrica ilustrada na Figura 4.

Figura 4 - Linearização da função de  $f$  em  $x$ .



Fonte: (WRIGGERS, 2008).

O escalar  $u$  é independente e  $x$  é uma coordenada fixa na equação (2.57). Defina-se a tangente à curva descrita por  $f$  na equação como:

$$f(u) = \bar{f} + \bar{D}f \cdot u. \quad (2.58)$$

A parcela linear de  $f(x)$  em  $x = \bar{x}$  define a linearização como:

$$L[f]_{x=\bar{x}} \equiv f(\mathbf{u}). \quad (2.59)$$

Pode-se estender o caso unidimensional para uma função em três dimensões. Considerando a expansão da série de Taylor em (2.57),  $\bar{\mathbf{x}}$  um ponto no espaço tridimensional, a função  $f(\bar{\mathbf{x}})$  e  $\mathbf{u}$  como um vetor que possui sua origem em  $\bar{\mathbf{x}}$ , obtém-se:

$$\bar{f} = f(\bar{\mathbf{x}}) \quad \bar{D}f = Df(\bar{\mathbf{x}}) = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}. \quad (2.60)$$

Na expressão acima,  $\bar{D}f$  expressa o vetor gradiente de  $f$  em  $\bar{\mathbf{x}}$ . Pode-se reescrever a equação (2.57) como:

$$f(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{u}) = \bar{f} + \text{Grad } f(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{u} + R. \quad (2.61)$$

Em (2.61) o produto “.”, a partir deste momento, representa um produto escalar entre dois vetores. Pode-se definir a derivada direcional como:

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} [f(\bar{\mathbf{x}} + \epsilon \mathbf{u})] \right|_{\epsilon=0}, \quad (2.62)$$

no qual  $\epsilon$  é um parâmetro escalar.

Pela regra da cadeia, tem-se o cálculo da derivação direcional como sendo:

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} [f(\bar{\mathbf{x}} + \epsilon \mathbf{u})] \right|_{\epsilon=0} = \left[ \frac{\partial f(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial (\bar{\mathbf{x}} + \epsilon \mathbf{u})}{\partial \epsilon} \right]_{\epsilon=0} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}. \quad (2.63)$$

Nota-se por comparação que a derivada direcional é definida como:

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} [f(\bar{\mathbf{x}} + \epsilon \mathbf{u})] \right|_{\epsilon=0} = \bar{D}f \cdot \mathbf{u}. \quad (2.64)$$

Sendo assim, a parcela linear do mapeamento em  $\bar{\mathbf{x}}$  é:

$$\mathbf{L}[\mathbf{G}]_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{G}} + \Delta \bar{\mathbf{G}}. \quad (2.65)$$

### 2.1.3.3 Linearização da formulação variacional

Nesta seção continua-se com o processo de linearização da equação (2.18), visando sua utilização na construção da matriz de rigidez, de acordo com a demonstração em (BANDEIRA, 2001) e (WRIGGERS, 2008). É realizada inicialmente a linearização da equação (2.15), que está escrita na configuração de referência. Em seguida, a mesma é convertida para a configuração corrente. Assume-se que a linearização é feita na configuração  $\boldsymbol{\varphi}$  e que o corpo analisado se encontra em equilíbrio. Sendo assim, a parte linear do trabalho virtual é:

$$\mathbf{L}[\mathbf{G}]_{\boldsymbol{\varphi}=\bar{\boldsymbol{\varphi}}} = \mathbf{G}(\bar{\boldsymbol{\varphi}}, \boldsymbol{\eta}) + D\mathbf{G}(\bar{\boldsymbol{\varphi}}, \boldsymbol{\eta}) \cdot \Delta \mathbf{u}. \quad (2.66)$$

A expressão (2.15) é a formulação variacional fraca na configuração de referência. Partindo desta expressão e desprezando os termos de inércia, obtém-se:

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\mathbf{B}} \mathbf{P} \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\eta} dV_0 - \int_{\partial \mathbf{B}\sigma} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\eta} dA_0. \quad (2.67)$$

Considerando-se os carregamentos concentrados como conservativos, a derivada direcional na direção de  $\Delta \mathbf{u}$  é obtida por:

$$DG(\bar{\boldsymbol{\varphi}}, \boldsymbol{\eta}) \cdot \Delta \mathbf{u} = \int_{\mathbf{B}} [D\mathbf{P}(\bar{\boldsymbol{\varphi}}) \cdot \Delta \mathbf{u}] \text{Grad } \boldsymbol{\eta} \, dV. \quad (2.68)$$

Na expressão (2.68) é feita a substituição por  $\mathbf{P} = \mathbf{FS}$ . Obtém-se, então:

$$DG(\bar{\boldsymbol{\varphi}}, \boldsymbol{\eta}) \cdot \Delta \mathbf{u} = \int_{\mathbf{B}} \{\text{Grad } \Delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{S}} + \mathbf{F}[D\mathbf{S}(\bar{\boldsymbol{\varphi}}) \cdot \Delta \mathbf{u}]\} \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\eta} \, dV, \quad (2.69)$$

onde o termo  $D\mathbf{S}(\bar{\boldsymbol{\varphi}}) \cdot \Delta \mathbf{u}$  é definido como:

$$D\mathbf{S}(\bar{\boldsymbol{\varphi}}) \cdot \Delta \mathbf{u} = \bar{\mathbb{C}}[\Delta \bar{\mathbf{E}}]. \quad (2.70)$$

Então, substituindo (2.70) em (2.69), resulta:

$$DG(\bar{\boldsymbol{\varphi}}, \boldsymbol{\eta}) \cdot \Delta \mathbf{u} = \int_{\mathbf{B}} \{\text{Grad } \Delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbb{C}}[\Delta \bar{\mathbf{E}}]\} \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\eta} \, dV. \quad (2.71)$$

Utilizando-se da propriedade do traço e a simetria do tensor  $\mathbb{C}$ , é possível escrever a expressão (2.71) como:

$$DG(\bar{\boldsymbol{\varphi}}, \boldsymbol{\eta}) \cdot \Delta \mathbf{u} = \int_{\mathbf{B}} \{\text{Grad } \Delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{S}} \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\eta} + \delta \mathbf{E} \cdot \mathbb{C}[\Delta \mathbf{E}]\} dV. \quad (2.72)$$

Pode-se reescrever a expressão (2.72) na configuração corrente, já que a mesma se encontra na configuração de referência. Portanto, com o auxílio das relações da mecânica do contínuo,  $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \mathbf{dF}$  e  $\Delta \mathbf{E} = \mathbf{F}^T \nabla^S \Delta \mathbf{u} \mathbf{F}$ , pode-se escrever o segundo termo da expressão (2.72) como:



$$\int_{\mathbf{B}} \delta \mathbf{E} \cdot \mathbb{C}[\Delta \mathbf{E}] \, dV, \quad (2.73)$$

onde o termo  $\Delta \bar{\mathbf{E}}$  é definido como:

$$\Delta \bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{F}}^T \nabla_{\bar{\mathbf{x}}}^S \Delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{F}}. \quad (2.74)$$

Substituindo (2.74) em (2.73), obtém-se

$$\int_{\mathbf{B}} \delta \mathbf{E} \cdot \mathbb{C}[\Delta \mathbf{E}] \, dV = \int_{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{F}}^T \nabla^S \eta \bar{\mathbf{F}} \cdot \mathbb{C}[\bar{\mathbf{F}}^T \bar{\nabla}^S \Delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{F}}] \, dV. \quad (2.75)$$

O tensor constitutivo incremental na configuração corrente, que é definido em (2.43), é substituído no lado direito da expressão (2.75). Então, é possível afirmar que

$$\int_{\mathbf{B}} \delta \mathbf{E} \cdot \mathbb{C}[\Delta \mathbf{E}] \, dV = \int_{\mathbf{B}} \nabla^S \eta \cdot \mathbf{c}[\bar{\nabla}^S \Delta \mathbf{u}] \, dV. \quad (2.76)$$

É necessário converter o segundo tensor de *Piola Kirchhoff* para a configuração corrente no primeiro termo da expressão (2.72). Sendo assim,

$$\text{Grad } \Delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{S}} \cdot \text{Grad } \eta = \text{Grad } \Delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{F}}^{-1} \bar{\boldsymbol{\tau}} \bar{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \text{Grad } \eta = \overline{\text{grad}} \Delta \mathbf{u} \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \overline{\text{grad}} \eta. \quad (2.77)$$

Substituindo (2.76) e (2.77) em (2.72), obtém-se:

$$\text{DG}(\bar{\boldsymbol{\varphi}}, \eta) \cdot \Delta \mathbf{u} = \int_{\mathbf{B}} \{ \overline{\text{grad}} \Delta \mathbf{u} \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \overline{\text{grad}} \eta + \nabla^S \eta \cdot \mathbf{c}[\bar{\nabla}^S \Delta \mathbf{u}] \} dV. \quad (2.78)$$

A integração até então era realizada no volume do corpo na sua configuração de referência. Agora será realizada na configuração corrente, sendo necessária a alteração dos limites de integração. Assim sendo, são utilizadas as relações entre os tensores de *Kirchhoff Treffs* e de *Cauchy* e a relação entre área e volume do sólido. Portanto,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{FSF}^T = \mathbf{J}\boldsymbol{\sigma} \quad \text{e} \quad dV_t = \frac{\rho_0}{\rho_t} dV_0 = JdV_0, \quad (2.79)$$

resultando em:

$$DG(\bar{\boldsymbol{\varphi}}, \boldsymbol{\eta}) \cdot \Delta \mathbf{u} = \int_{\varphi(B)} \{ \overline{\text{grad}} \Delta \mathbf{u} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \nabla^S \boldsymbol{\eta} \cdot \hat{\mathbf{c}}[\bar{\nabla}^S \Delta \mathbf{u}] \} dV. \quad (2.80)$$

O novo tensor constitutivo incremental  $\hat{\mathbf{c}}$  é definido por

$$\hat{\mathbf{c}} = \frac{1}{J} \bar{\mathbf{c}}. \quad (2.81)$$

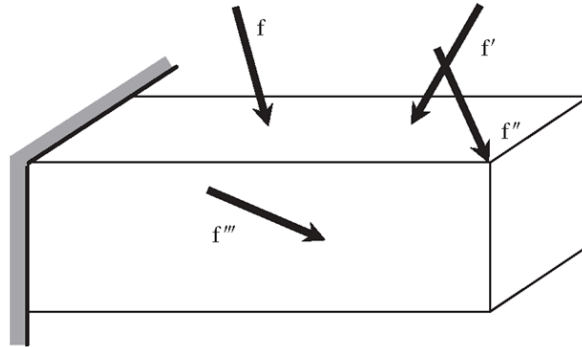
## 2.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

As formulações matemáticas apresentadas nas seções anterior são relativas ao comportamento de um sólido sujeito a grandes deformações em regimes elásticos não lineares. Neste capítulo, utilizando-se da concepção isoparamétrica, será desenvolvida a discretização em elementos finitos das formulações apresentadas.

Pode-se considerar um elemento sólido tridimensional (3D) como o mais geral de todos os elementos finitos sólidos, todas as variáveis de campo dependem de  $x$ ,  $y$  e  $z$ . A Figura 5 ilustra uma estrutura sólida 3D submetida a uma carga. Os vetores de força podem estar em qualquer direção arbitrária no espaço. Da mesma forma, um sólido 3D também pode ter qualquer forma arbitrária, propriedades do material e condições de

contorno no espaço. Existem seis possíveis componentes de tensão, três normais e três de cisalhamento, que precisam ser levadas em consideração.

Figura 5 - Exemplo de um sólido 3D submetido a um conjunto de cargas



Fonte: disponível em < <http://what-when-how.com/the-finite-element-method/fem-for-3d-solids-finite-element-method-part-1/> >

Usualmente, um elemento sólido 3D pode ser um tetraedro ou hexaedro com superfícies planas ou curvas. Para cada nó do elemento sólido, existem três graus de liberdade para translação. O elemento pode, assim, deformar-se em todas as três direções no espaço. Adotou-se, nesta pesquisa, o elemento tetraédrico de 4 nós, com três graus de translação por nó e funções de interpolação Lagrangeanas. Um estudo mais detalhado do método dos elementos finitos pode ser encontrado em (ZIENKIEWICZ, TAYLOR e ZHU, 2005) e (BATHE, 1996).

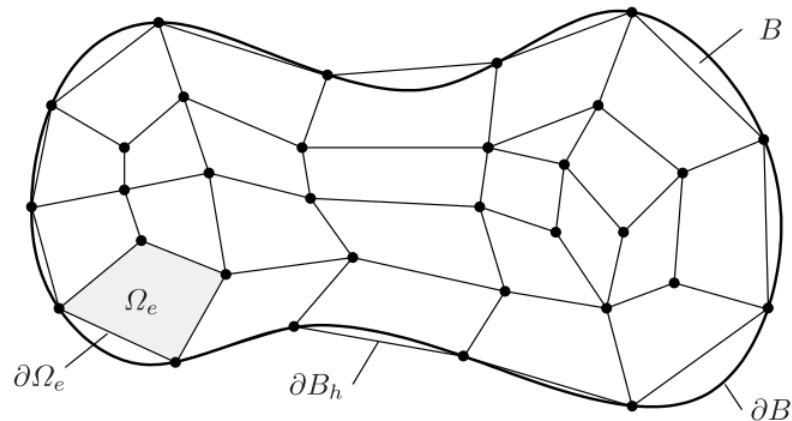
### 2.2.1 Conceção isoparamétrica

Seja um domínio  $B$  representado por um número finito de elementos  $n_e$ . Considere uma aproximação geométrica  $B^h$  conforme a expressão a seguir:

$$\bar{B} \approx B^h = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega_e. \quad (2.82)$$

A relação (2.82) representa a configuração de um elemento  $\Omega_e$  contida na aproximação geométrica  $B^h$ . Observando a Figura 4, é possível notar que  $\partial B_h$  define o novo contorno do domínio, representando uma aproximação do contorno original  $\partial B$ .

Figura 6 - Discretização de um corpo B



Fonte: (WRIGGERS, 2008)

Pelo método dos elementos finitos, o campo das variáveis é aproximado por uma série de elementos finitos  $\Omega_e$ . Define-se os deslocamentos do campo  $\mathbf{u}(\mathbf{x}^0)$  como:

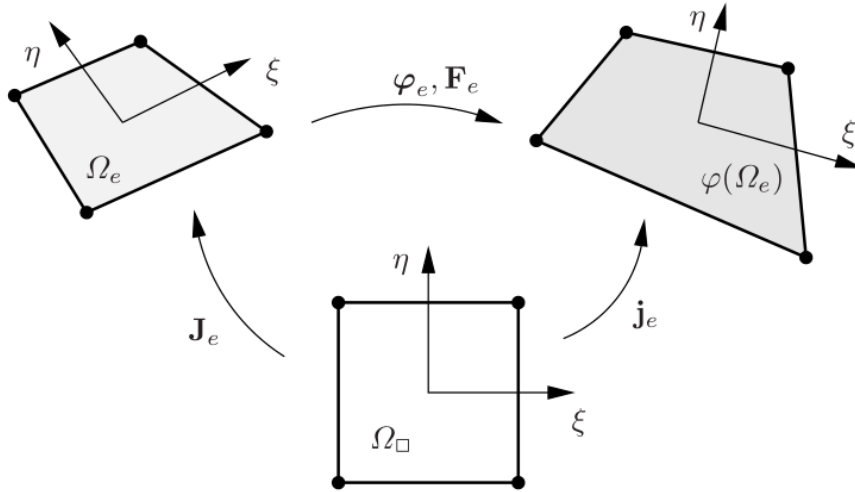
$$\mathbf{u}_{exato}(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{u}^h(\mathbf{x}^{(0)}) = \sum_{I=1}^N N_I(\mathbf{x}^{(0)}) \mathbf{u}_I, \quad (2.83)$$

no qual  $\mathbf{x}^{(0)}$  é o vetor posição do elemento  $\Omega_e$  na configuração inicial,  $N_I(\mathbf{x}^{(0)})$  são as funções de interpolação e  $\mathbf{u}_I$  indica a variável nodal (incógnita) no campo dos deslocamentos.

Observando a Figura 7, pode-se encontrar o elemento isoparamétrico, simbolizado por  $\Omega_e$ . O elemento isoparamétrico possui uma forma de referência regular, sem deformações. Percebe-se que, antes de ser utilizado para mapear o corpo  $B$ , o elemento precisa ser modificado para adaptar-se a geometria aproximada do corpo sem deformações. Essa situação refere-se ao elemento  $\Omega_e$  na configuração de referência. A

Figura 7 também ilustra a transformação sofrida pelo elemento após deformações ocorridas por conta das forças aplicadas. O elemento passa, então, para a configuração corrente, simbolizada por  $\varphi(\Omega_e)$ .

Figura 7 - Descrição isoparamétrica das deformações e suas transformações



Fonte: (WRIGGERS, 2008)

Utiliza-se o gradiente de deformações  $\mathbf{F}_e$  para realizar a transformação do elemento da configuração de referência para a configuração corrente. Este gradiente é definido por

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{j}_e \mathbf{J}_e^{-1} \quad \text{e} \quad \mathbf{J}_e = \det \mathbf{F}_e = \frac{\det \mathbf{j}_e}{\det \mathbf{J}_e}, \quad (2.84)$$

onde os gradientes  $\mathbf{j}_e$  e  $\mathbf{J}_e$  são definidos por:

$$\mathbf{j}_e = \sum_{I=1}^n \mathbf{x}_I \otimes N_{i,\xi}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{E}_{\xi} = \sum_{I=1}^n \mathbf{x}_I \otimes \nabla_{\xi} N_I, \quad (2.85)$$

e

$$\mathbf{J}_e = \sum_{I=1}^n \mathbf{X}_I \otimes N_{i,\xi}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{E}_{\xi} = \sum_{I=1}^n \mathbf{X}_I^{(0)} \otimes \nabla_{\xi} N_I. \quad (2.86)$$

Colocando-se (2.87) na forma matricial, tem-se

$$\mathbf{j}_e = \sum_{I=1}^n \mathbf{x}_I \otimes \nabla_{\xi} N_I = \sum_{I=1}^n \begin{bmatrix} X_{1,I} \\ X_{2,I} \\ X_{3,I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{I,\xi} \\ N_{I,\eta} \\ N_{I,\zeta} \end{bmatrix}^T = \sum_{I=1}^n \begin{bmatrix} X_{1,\xi} & X_{1,\eta} & X_{1,\zeta} \\ X_{2,\xi} & X_{2,\eta} & X_{2,\zeta} \\ X_{3,\xi} & X_{3,\eta} & X_{3,\zeta} \end{bmatrix}, \quad (2.87)$$

no qual  $\xi, \eta, \zeta$  são as coordenadas isoparamétricas,  $\mathbf{x}$  a coordenada global,  $\nabla_{\xi} N_I$  é o gradiente da função escalar  $N_I$  em relação a coordenada  $\xi$ .

Os gradientes do campo vetorial dos deslocamentos  $\mathbf{u}_e$  em relação às configurações inicial e corrente, são definidos, respectivamente, por:

$$\text{Grad } \mathbf{u}_e = \sum_{I=1}^n \mathbf{u}_I \otimes \nabla_{X(0)} N_I \quad (2.88)$$

e

$$\text{grad } \mathbf{u}_e = \sum_{I=1}^n \mathbf{u}_I \otimes \nabla_x N_I. \quad (2.89)$$

Analogamente à transformação de derivadas entre diferentes configurações, obtêm-se as seguintes relações:

$$\nabla_{\xi} N_I = \mathbf{J}_e^T \nabla_{X(0)} N_I \quad \text{e} \quad \nabla_{\xi} N_I = \mathbf{j}_e^T \nabla_x N_I. \quad (2.90)$$

A relação inversa de (2.90) é definida por:

$$\nabla_{X(0)} N_I = \mathbf{J}_e^{-T} \nabla_{\xi} N_I \quad \text{e} \quad \nabla_x N_I = \mathbf{j}_e^{-T} \nabla_{\xi} N_I. \quad (2.91)$$

Substituindo-se (2.91) em (2.88) e (2.89), obtêm-se os gradientes dos deslocamentos na configuração inicial e corrente definidos na configuração isoparamétrica  $\Omega_n$ , i.e.,

$$\text{Grad } \mathbf{u}_e = \sum_{I=1}^n \mathbf{u}_I \otimes \mathbf{J}_e^{-T} \nabla_{\xi} N_I \quad \text{e} \quad \text{grad } \mathbf{u}_e = \sum_{I=1}^n \mathbf{u}_I \otimes \mathbf{j}_e^{-T} \nabla_{\xi} N_I. \quad (2.92)$$

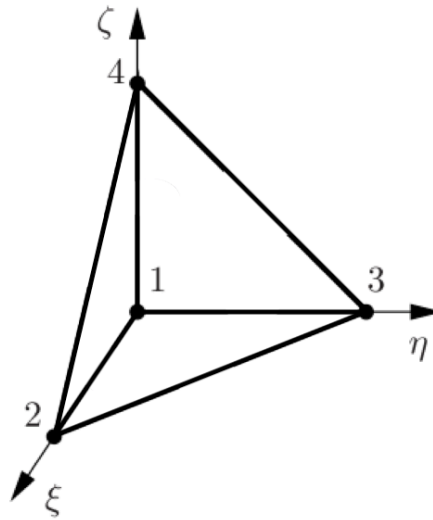
### 2.2.2 Funções de interpolação

A determinação das funções de interpolação, necessárias para a resolução de problemas pelo método dos elementos finitos, dependem do tipo de elemento e do número de nós que o elemento possui, podendo ser lineares ou não-lineares. Como foi verificado por (SANTOS e BANDEIRA, 2018), o elemento hexaédrico apresenta algumas limitações, como por exemplo, na discretização de geometrias curvas, sendo necessária assim a utilização de um outro elemento. Nesta pesquisa, o elemento escolhido para modelar estruturas tridimensionais foi o elemento tetraédrico de 4 nós (elemento linear). Como o objetivo é estudar o contato mecânico, é fisicamente mais apropriado se utilizar um elemento tetraédrico de 4 nós. Isto acontece porque é conveniente, no estudo do contato mecânico, trabalhar apenas com os nós de extremidade do elemento, pois existe uma dificuldade de determinar qual o percentual da força irá para os nós intermediários. Sendo assim, serão utilizadas as seguintes funções de interpolação para o elemento tetraédrico de 4 nós, segundo (WRIGGERS, 2008):

$$N_1 = 1 - \xi - \eta - \zeta, \quad N_2 = \xi, \quad N_3 = \eta, \quad N_4 = \zeta. \quad (2.93)$$

A representação dos nós presentes em um elemento tetraédrico para 4 nós pode ser visualizada na Figura 8.

Figura 8 - Tetraedro isoparamétrico de 4 nós .



Fonte: (WRIGGERS, 2008) (adaptado).

Já para um elemento tetraédrico de 10 nós, são utilizadas as seguintes funções de interpolação, segundo (WRIGGERS, 2008):

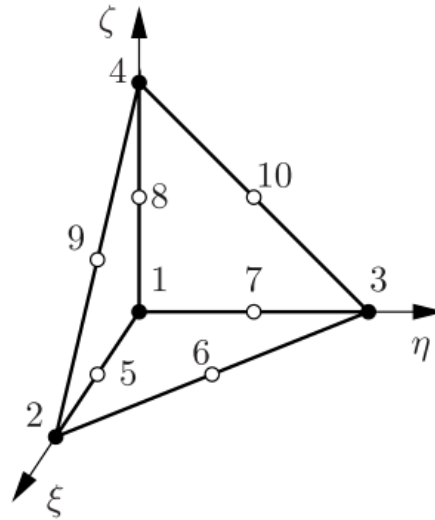
$$\begin{aligned}
 N_1 &= \lambda(2\lambda - 1), & N_6 &= 4\xi\eta, \\
 N_2 &= \xi(2\xi - 1), & N_7 &= 4\eta\lambda, \\
 N_3 &= \eta(2\eta - 1), & N_8 &= 4\zeta\lambda, \\
 N_4 &= \zeta(2\zeta - 1), & N_9 &= 4\xi\zeta, \\
 N_5 &= 4\xi\lambda, & N_{10} &= 4\eta\zeta,
 \end{aligned}
 \tag{2.94}$$

sendo  $\lambda = 1 - \xi - \eta - \zeta$ .

A representação dos nós presentes em um elemento tetraédrico de 10 nós, pode ser visualizada na Figura 9.



Figura 9 - Tetraedro isoparamétrico de 10 nós.



Fonte: (WRIGGERS, 2008).

As regras de integração para elementos tetraédricos são fornecidas pelo Quadro 1 (para funções lineares e quadráticas). O símbolo  $n_p$  representa o número de pontos de Gauss do elemento,  $m$  represente o grau do polinômio da função,  $p$  a numeração de cada ponto de Gauss do elemento,  $W$  é o peso e  $\xi_p, \eta_p$  e  $\zeta_p$  são as coordenadas dos pontos de referência. As coordenadas  $\xi_p, \eta_p$  e  $\zeta_p$  são relacionadas com o sistema de coordenadas utilizado na Figura 9. Maiores informações sobre regras de integração podem ser encontradas em (ZIENKIEWICZ, TAYLOR e ZHU, 2005) e (BATHE, 1996).

Quadro 1 - Integração tridimensional para elementos tetraédricos.

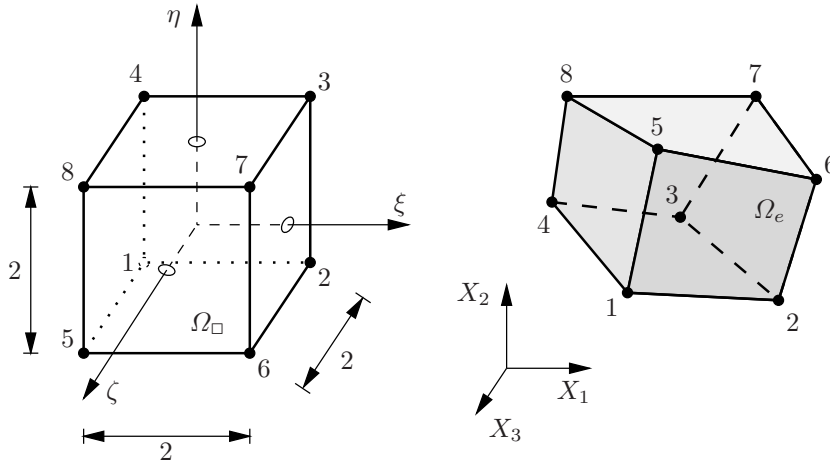
$m$	$n_p$	$p$	$\xi_p$	$\eta_p$	$\zeta_p$	$W_p$
1	1	1	1/4	1/4	1/4	1/6
3	5	1	1/4	1/4	1/4	-2/15
		2	1/6	1/6	1/6	3/40
		3	1/6	1/6	1/2	3/40
		4	1/6	1/2	1/6	3/40
		5	1/2	1/6	1/6	3/40

Fonte: (WRIGGERS, 2008).

Durante a implementação da dinâmica com contato será utilizado além do elemento finito tetraédrico, o elemento finito hexaédrico, visando obter-se melhores resultados. A representação dos nós presentes em um elemento hexaédrico para 8 nós pode ser visualizada na Figura 10, e suas funções de interpolação são:

$$N_I(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}(1 + \xi_I \xi) \frac{1}{2}(1 - \eta_I \eta) \frac{1}{2}(1 - \zeta_I \zeta). \quad (2.95)$$

Figura 10 - Hexaedro isoparamétrico de 8 nós.



Fonte: (WRIGGERS, 2008).

### 2.2.3 Formulação de elementos finitos para configuração corrente

Nesta seção é realizada a discretização da equação de equilíbrio dos trabalhos internos e externos, porém com os termos definidos na configuração corrente. A equação do princípio dos trabalhos virtuais é escrita na configuração corrente em (2.18). Sendo assim, a equação do princípio dos trabalhos virtuais é retomada:

$$w(\varphi, \eta) = \int_{\varphi(B)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla^S \eta dV_t - \int_{\varphi(B)} \rho_t(\mathbf{b} - \dot{\mathbf{v}}) \cdot \eta dV_0 - \int_{\varphi(\partial B \sigma)} \dot{\mathbf{t}} \cdot \eta dA_0 = 0. \quad (2.96)$$

Utilizando as propriedades em (2.17), (2.88) e (2.89) é realizada a discretização da medida de deformação  $\nabla^S$ . Sendo assim, obtém-se:

$$\nabla^S \boldsymbol{\eta}_e = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^n [(\boldsymbol{\eta}_I \otimes \nabla_x N_I) + (\nabla_{x(0)} \otimes N_I \boldsymbol{\eta}_I)]. \quad (2.97)$$

A expressão acima pode ser reescrita em notação indicial por

$$(\nabla^S \boldsymbol{\eta}_e)_{ik}^h = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^n [\eta_{iI} N_{I,k} + N_{i,I} \eta_{kI}], \quad (2.98)$$

na qual  $N_{I,k} = \partial N_I / \partial x_k$  é a derivada parcial da função de interpolação referente a coordenada corrente  $x_k$ , que pode ser calculada a partir de (2.91), resultando em

$$N_{I,k} = \{j_e^{-1}\}_{1k} N_{I,\xi} + \{j_e^{-1}\}_{2k} N_{I,\eta} + \{j_e^{-1}\}_{3k} N_{I,\zeta}, \quad (2.99)$$

onde  $\{j_e^{-1}\}_{IK}$  são componentes da matriz inversa do jacobiano  $\mathbf{j}_e$ .

Por conta da simetria das componentes em (2.98), obtém-se o gradiente na forma vetorial como:

$$\nabla^S \boldsymbol{\eta}^h = \{\eta_{1,1}, \eta_{2,2}, \eta_{3,3}, (\eta_{1,2} + \eta_{2,1}), (\eta_{2,3} + \eta_{3,2}), (\eta_{1,3} + \eta_{3,1})\}^T, \quad (2.100)$$

e na forma matricial por:

$$\nabla^S \boldsymbol{\eta}^h = \sum_{I=1}^n \begin{bmatrix} N_{I,1} & 0 & 0 \\ 0 & N_{I,2} & 0 \\ 0 & 0 & N_{I,3} \\ N_{I,2} & N_{I,1} & 0 \\ 0 & N_{I,3} & N_{I,2} \\ N_{I,3} & 0 & N_{I,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^n \mathbf{B}_{0I} \eta_I. \quad (2.101)$$

É importante destacar que nenhum dos termos na matriz  $\mathbf{B}_{0I}$  depende do campo dos deslocamentos. Ele está aqui indicado com zero.

O tensor das tensões de Cauchy é simétrico, sendo representado por uma matriz 3x3. Esta matriz é simétrica. Assim sendo, pode ser representada por um vetor com 6 elementos:

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}\}^T. \quad (2.102)$$

Pode-se escrever o trabalho virtual interno em (2.96) utilizando-se o tensor das tensões de *Cauchy* como:

$$\int_{\varphi(B)} \nabla^S \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}^h dV_t = \bigcup_{e=1}^{n_e} \int_{\varphi(\Omega_e)} (\nabla^S \boldsymbol{\eta})^T \boldsymbol{\sigma}^h d\omega. \quad (2.103)$$

Substituindo (2.101) em (2.103), obtêm-se

$$\bigcup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^n \boldsymbol{\eta}_I^T \int_{\varphi(\Omega_e)} \mathbf{B}_{0I}^T \boldsymbol{\sigma} d\omega. \quad (2.104)$$

Reescrevendo (2.104) na configuração de referência, obtêm-se:

$$\bigcup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^n \boldsymbol{\eta}_I^T \int_{\hat{\Omega}_n} \mathbf{B}_{0I}^T \boldsymbol{\sigma} \det \mathbf{j}_e d\omega^{\square}. \quad (2.105)$$

O último termo da expressão acima refere-se ao elemento isoparamétrico de referência.  $\mathbf{j}_e$  realiza a transformação da configuração isoparamétrica para a configuração corrente. Simplificando a notação, define-se:

$$\mathbf{r}_I(\mathbf{u}_e) = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{0I}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\omega. \quad (2.106)$$

Com a definição (2.106), pode-se representar o trabalho virtual interno como:

$$\int_{\varphi(\mathbf{B})} \nabla^S \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dV_t = \bigcup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^n \boldsymbol{\eta}_I^T \mathbf{r}_I(\mathbf{u}_e) = \boldsymbol{\eta}_I^T \mathbf{r}_{\text{int}}(\mathbf{u}). \quad (2.107)$$

Pode-se transformar a integral (2.107) da configuração corrente para a de referência executando a transformação do elemento de volume  $dV_t = J V_0$  e do tensor das tensões de *Cauchy*  $\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma}$ , isto é,

$$\int_{\varphi(\mathbf{B})} \nabla^S \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dV_t = \int_{\mathbf{B}} \nabla^S \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dV_0. \quad (2.108)$$

Desenvolvendo a parcela à direita da expressão acima de forma discretizada, tem-se

$$\int_{\mathbf{B}} \nabla^S \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dV_0 = \bigcup_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} (\nabla^S \boldsymbol{\eta})^T \boldsymbol{\tau} \, d\Omega. \quad (2.109)$$

Substituindo (2.101) na parcela à direita da expressão acima, resulta

$$\bigcup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^n \boldsymbol{\eta}_I^T \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{0I}^T \boldsymbol{\tau} \, d\Omega \quad (2.110)$$

e transportando o limite de integração para o elemento isoparamétrico, obtém-se

$$\bigcup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^n \eta_I^T \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{0I}^T \boldsymbol{\tau} \det \mathbf{J}_e d\Omega_e. \quad (2.111)$$

Define-se o vetor residual em termos da tensão interna como:

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{u}_e) = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{0I}^T \boldsymbol{\tau} \det \mathbf{J}_e d\Omega_e. \quad (2.112)$$

A aproximação da inércia é desenvolvida como:

$$\begin{aligned} \int_B \rho_0 \boldsymbol{\eta} \cdot \dot{\mathbf{v}} dV_0 &= \bigcup_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \rho_0 \boldsymbol{\eta}^T \cdot \dot{\mathbf{v}} dV_0 = \bigcup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^n \sum_{K=1}^n \boldsymbol{\eta}_I^T \int_{\Omega_e} N_I \rho_0 N_K d\Omega \dot{\mathbf{v}}_K \\ &= \bigcup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^n \sum_{K=1}^n \boldsymbol{\eta}_I^T \mathbf{M}_{IK} \dot{\mathbf{v}}_K = \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{v}}, \end{aligned} \quad (2.113)$$

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa da estrutura e  $\dot{\mathbf{v}}$  é o vetor aceleração dos nós da estrutura.

Calcula-se, de forma análoga, os termos das cargas externas aplicadas. Logo,

$$\begin{aligned} \int_B \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \cdot \boldsymbol{\eta} dV_0 + \int_{\partial B \sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} dA_0 \\ = \bigcup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^n \boldsymbol{\eta}_I^T \int_{\Omega_e} \rho_0 \bar{\mathbf{b}} N_I d\Omega + \bigcup_{e=1}^{n_r} \sum_{I=1}^m \boldsymbol{\eta}_I^T \int_{\Gamma_r} N_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma, \end{aligned} \quad (2.114)$$

sendo  $n_r$  o número de elementos sob carregamento e  $\Gamma_r$  é a região onde se preserva os carregamentos definidos pelo vetor  $\bar{\mathbf{t}}$ .

Por simplificação da notação, define-se:

$$\mathbf{P}_I = \int_{\Omega_e} N_I \rho_0 \bar{\mathbf{b}} d\Omega \quad e \quad \mathbf{P}_I^\sigma = \int_{\Gamma_r} N_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma. \quad (2.115)$$

Usando (2.115) na equação (2.114), tem-se

$$\int_B \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \cdot \boldsymbol{\eta} dV_0 + \int_{\partial B\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} dA_0 = \bigcup_{e=1}^{ne} \sum_{l=1}^n \boldsymbol{\eta}_l^T \mathbf{P}_l + \bigcup_{e=1}^{nr} \sum_{l=1}^m \boldsymbol{\eta}_l^T \mathbf{P}_l = \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{P}. \quad (2.116)$$

Então, o princípio dos trabalhos virtuais com relação à configuração corrente é dado por:

$$\boldsymbol{\eta}^T [\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{r}(\mathbf{u}) - \mathbf{P}] = 0. \quad (2.117)$$

$\boldsymbol{\eta}$  sendo arbitrário, então, define-se a equação de equilíbrio da estrutura como

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{r}(\mathbf{u}) - \mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathfrak{R}. \quad (2.118)$$

#### 2.2.4 Linearização do trabalho virtual

A linearização das equações do trabalho virtual, deduzida na seção anterior, também deve ser discretizada em elementos finitos para implementação. A equação de linearização a ser discretizada é:

$$\text{DG}(\bar{\boldsymbol{\varphi}}, \boldsymbol{\eta}) \cdot \Delta \mathbf{u} = \int_{\varphi(B)} \{ \overline{\text{grad}} \Delta \mathbf{u} \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}} + \nabla^S \boldsymbol{\eta} \cdot \hat{\mathbf{c}}[\bar{\nabla}^S \Delta \mathbf{u}] \} dV. \quad (2.119)$$

Para analisar-se de forma separada as duas parcelas da expressão (2.119), definem-se os seguintes gradientes:

$$\overline{\text{grad}} \Delta \mathbf{u}^h = \sum_{K=1}^n \Delta \mathbf{u}_K \otimes \bar{\nabla}_x N_K, \quad (2.120)$$

$$\overline{\text{grad}} \eta^h = \sum_{I=1}^n \boldsymbol{\eta}_I \otimes \bar{\nabla}_x N_I.$$

Utilizando as os gradientes definidos em (2.120), obtém-se a primeira parcela da integral em (2.119):

$$\int_{\varphi(B)} \overline{\text{grad}} \Delta \mathbf{u} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \overline{\text{grad}} \boldsymbol{\eta} dV_t = \bigcup_{e=1}^{ne} \sum_{I=1}^n \sum_{K=1}^n \boldsymbol{\eta}_I^T \int_{\varphi(\Omega_e)} \bar{\mathbf{g}}_{IK} \mathbf{Id} \Omega \Delta \mathbf{u}_K, \quad (2.121)$$

onde  $\bar{\mathbf{g}}_{IK}$  é definido por:

$$\bar{\mathbf{g}}_{IK} = (\bar{\nabla}_x N_I)^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} \bar{\nabla}_x N_K. \quad (2.122)$$

A expressão (2.122) pode ser escrita em sua forma matricial por

$$\bar{\mathbf{g}}_{IK} = [\bar{N}_{I,1} \quad \bar{N}_{I,2} \quad \bar{N}_{I,3}] \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11} & \bar{\sigma}_{12} & \bar{\sigma}_{13} \\ \bar{\sigma}_{21} & \bar{\sigma}_{22} & \bar{\sigma}_{23} \\ \bar{\sigma}_{31} & \bar{\sigma}_{32} & \bar{\sigma}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{N}_{K,1} \\ \bar{N}_{K,2} \\ \bar{N}_{K,3} \end{bmatrix}. \quad (2.123)$$

Parte-se, então, para análise da segunda parcela de (2.119). Utilizando-se a  $\Delta \bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\nabla}^S \Delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{F}}$  e a expressão (2.101), obtém-se:



$$\int_{\varphi(\bar{\mathbf{B}})} \nabla^S \boldsymbol{\eta} \cdot \hat{\mathbf{c}}[\bar{\nabla}^S \Delta \mathbf{u}] \, dV = \bigcup_{e=1}^{ne} \sum_{I=1}^n \sum_{K=1}^n \boldsymbol{\eta}_I^T \int_{\varphi(\Omega_e)} \bar{\mathbf{B}}_{0I}^T \bar{\mathbf{D}}^M \bar{\mathbf{B}}_{0K} \, d\Omega \, \Delta \mathbf{u}_K. \quad (2.124)$$

Novamente, substitui-se (2.124) adequadamente em (2.119). Logo,

$$\int_{\varphi(\bar{\mathbf{B}})} \{\overline{\text{grad}} \Delta \mathbf{u} \, \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \overline{\text{grad}} \boldsymbol{\eta} + \nabla^S \boldsymbol{\eta} \cdot \hat{\mathbf{c}}[\bar{\nabla}^S \Delta \mathbf{u}]\} \, dV = \bigcup_{e=1}^{ne} \sum_{I=1}^n \sum_{K=1}^n \boldsymbol{\eta}_I^T \bar{\mathbf{K}}_{TIK}^M \Delta \mathbf{u}_K, \quad (2.125)$$

no qual  $\mathbf{K}_{TIK}^M$  é a matriz tangente na configuração corrente, definida por

$$\bar{\mathbf{K}}_{TIK}^M = \int_{\varphi(\Omega_e)} \{(\bar{\nabla}_x N_I)^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} \bar{\nabla}_x N_K \mathbf{I} + \bar{\mathbf{B}}_{0I}^T \bar{\mathbf{D}}^M \bar{\mathbf{B}}_{0K}\} \, d\omega. \quad (2.126)$$

Pode-se escrever a discretização do trabalho virtual na configuração corrente da seguinte forma:

$$\int_{\mathbf{B}} \{\overline{\text{grad}} \Delta \mathbf{u} \, \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \overline{\text{grad}} \boldsymbol{\eta} + \nabla^S \boldsymbol{\eta} \cdot \hat{\mathbf{c}}[\bar{\nabla}^S \Delta \mathbf{u}]\} \, dV = \bigcup_{e=1}^{ne} \sum_{I=1}^n \sum_{K=1}^n \boldsymbol{\eta}_I^T \bar{\mathbf{K}}_{TIK}^{MR} \Delta \mathbf{u}_K, \quad (2.127)$$

onde  $\bar{\mathbf{K}}_{TIK}^{MR}$  é a matriz tangente em relação a configuração corrente definido por:

$$\bar{\mathbf{K}}_{TIK}^{MR} = \int_{\Omega_e} \{(\bar{\nabla}_x N_I)^T \bar{\boldsymbol{\tau}} \bar{\nabla}_x N_K \mathbf{I} + \bar{\mathbf{B}}_{0I}^T \bar{\mathbf{D}}^{MR} \bar{\mathbf{B}}_{0K}\} \, d\Omega, \quad (2.128)$$

sendo  $\bar{\mathbf{D}}^{MR}$  o tensor constitutivo incremental, nesta pesquisa, obtido pelo material *Neo-Hookeano*.

A mecânica computacional utiliza-se de métodos numéricos. Desta forma, as integrais de volume são obtidas de forma aproximada. Para isto, utiliza-se a integração de Gauss, onde os parâmetros já foram definidos no Quadro 1. O estudo da integração

não será abordado nesta pesquisa, porém mais informações podem ser obtidas em (WRIGGERS, 2008) e (GIL, SEGURA e TEMME, 2007).

### 3. DESCRIÇÃO VARIACIONAL DOS PROBLEMAS DE CONTATO

Serão apresentadas neste capítulo as formulações do contato com atrito em corpos deformáveis. Pelo método dos *Elementos finitos*, o contato entre dois ou mais corpos é configurado quando há a penetração, ou seja, quando se tem um ou mais pontos ocupando uma região inviável, ou seja, um corpo penetrando outro. Para a formulação de contato, utiliza-se a adição de restrições geométricas nas regiões dos corpos onde se espera contato para evitar que exista a penetração. Os problemas de otimização com restrições podem ser solucionados pelos métodos do *Lagrangiano*, da penalidade ou do *Lagrangiano* aumentado (BERTSEKAS, 1995), (FLETCHER, 1980) e (LUENBERGER, 1984). Essas restrições são utilizadas para representar o contato mecânico, sendo essas restrições de geometria. No contato micromecânico as restrições podem ser utilizadas para representar as equações constitutivas do material (BANDEIRA, 2001). Sendo assim, surge a necessidade de um algorítmico que detecte a existência de contato. Ao verificar-se o contato, são ativadas as restrições (WRIGGERS, 2006).

#### 3.1 FORMULAÇÃO DO LAGRANGIANO AUMENTADO

Nesta pesquisa, o método do *Lagrangiano* aumentado é utilizado para a implementação das restrições de contato. Para o entendimento do método, faz-se necessária uma curta abordagem dos métodos do Lagrangiano e da penalidade, os quais são a base para o método do *Lagrangiano* aumentado. No método do *Lagrangiano* adiciona-se um parâmetro  $\lambda$  não conhecido que equivale à reação da restrição aplicada. Essa força de restrição será calculada juntamente com os deslocamentos do sistema a partir do mesmo processo iterativo. Cada multiplicador de Lagrange é considerado como uma incógnita adicional ao problema. Isto gera uma instabilidade no sistema.

Mais informações podem ser vistas em (BERTSEKAS, 1995), (FLETCHER, 1980) e (LUENBERGER, 1984).

Já no método da penalidade, estabelece-se uma restrição e, então, mede-se qualquer violação sofrida por essa restrição. Caso exista violação, multiplica-se a penetração por um parâmetro  $\epsilon$ , designado como penalidade. Define-se como força de contato esse produto entre a penalidade e a força resistência. O método da penalidade não será descrito nesta dissertação. Mais informações podem ser vistas em (BERTSEKAS, 1995), (FLETCHER, 1980) e (LUENBERGER, 1984).

É possível encontrar desvantagens em ambos os métodos. Com o método do *Lagrangiano* é necessário adicionar variáveis desconhecidas ao sistema, sendo necessário um multiplicador de Lagrange para cada nó restrito. Essa adição pode tornar a matriz de rigidez não simétrica ou singular, inviabilizando o uso desse método.

Para o método da penalidade é necessário a estimativa de um termo inicial de penalidade, pois para cada caso obtém-se valores diferentes. Segundo (WRIGGERS, SIMO e TAYLOR, 1985), para valores altos do termo penalidade, é possível a ocorrência de instabilidade numérica. Visando reduzir as desvantagens dos dois métodos, criou-se o método do Lagrangiano aumentado que consiste na combinação dos mesmos. Em contrapartida, exige-se um aumento da complexidade na implementação numérica.

Do mesmo modo como ocorre no método do Lagrangiano, no método do Lagrangiano aumentado utiliza-se um parâmetro  $\lambda$  que equivale à reação na restrição. Contudo, esse parâmetro  $\lambda$  não é calculado como uma incógnita junto aos deslocamentos, estima-se um valor inicial de  $\lambda$ , tratando-o como uma constante durante o processo de interação para determinação dos deslocamentos.

Posteriormente ao cálculo dos deslocamentos, verifica-se se as restrições foram atendidas, caso contrário, o valor de  $\lambda$  deve ser atualizado, fazendo  $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \epsilon \mathbf{g}(\mathbf{x})$ , no qual  $\epsilon$  é o parâmetro da penalidade, e  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  uma função de valor igual à violação da

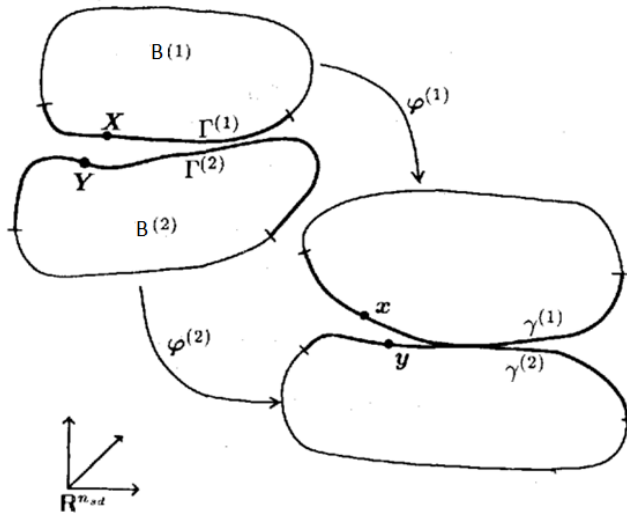
restrição. Realizada a atualização, o cálculo dos deslocamentos é repetido utilizando-se os novos valores de  $\lambda$ .

Segundo (BANDEIRA, GUIMARÃES, *et al.*, 2010), a violação da restrição fornecida por  $g(x)$  tenderá a 0 ao se aproximar da convergência. Sendo assim  $\epsilon_N g(x) \rightarrow 0$ , e o valor de  $\lambda$  tenderá ao valor real da reação na restrição. O parâmetro de penalidade que se utiliza no Lagrangiano aumentado deve receber um valor máximo que não cause instabilidade numérica. Do mesmo modo como no método da penalidade, quanto maior o valor do parâmetro de penalidade, maior a convergência de  $\lambda_N$ . Contudo, o método do Lagrangiano aumentado possibilita maior flexibilidade quanto ao parâmetro de penalidade, por conta da compensação gerada pela atualização do termo  $\lambda_N$  para um termo penalidade insuficiente.

### 3.2 PRESSÕES DE CONTATO COM ATRITO UTILIZANDO O LAGRANGIANO AUMENTADO

Considere agora, o contato entre dois corpos deformáveis, como demonstrado em (SIMO e LAURSEN, 1993). Define-se  $B_1$ , do corpo 1, e  $B_2$ , do corpo 2, com sendo o conjunto de pontos  $X$  na configuração de referência em um espaço  $R^3$ . Observa-se pela Figura 11 que os corpos  $B_1$  e  $B_2$  não se tocam no tempo  $t=0$ , ou caso se toquem, nenhuma força de contato é produzida. São produzidas outras configurações utilizando-se das transformações  $\varphi^1: B^1 \times I \rightarrow R^3$  e  $\varphi^2: B^2 \times I \rightarrow R^3$  ao longo do intervalo  $I = [0, T]$ .  $\Gamma^1$  e  $\Gamma^2$  são as superfícies de  $B_1$  e  $B_2$ , onde há expectativa de ocorrência de contato.  $\Gamma^1$  é definida como sendo a superfície escrava e  $\Gamma^2$  como a superfície mestra, define-se, também,  $\gamma^i = \varphi^i(\Gamma^i)$ ,  $i = 1, 2$ . Os pontos em  $\Gamma^1$  são definidos por  $\mathbf{x}_s$ , enquanto que em  $\Gamma^2$  por  $x_m$ . Na configuração corrente, os pontos são determinados por  $\mathbf{x} = \varphi^1(\mathbf{X})$  e  $\mathbf{y} = \varphi^2(\mathbf{Y})$ .

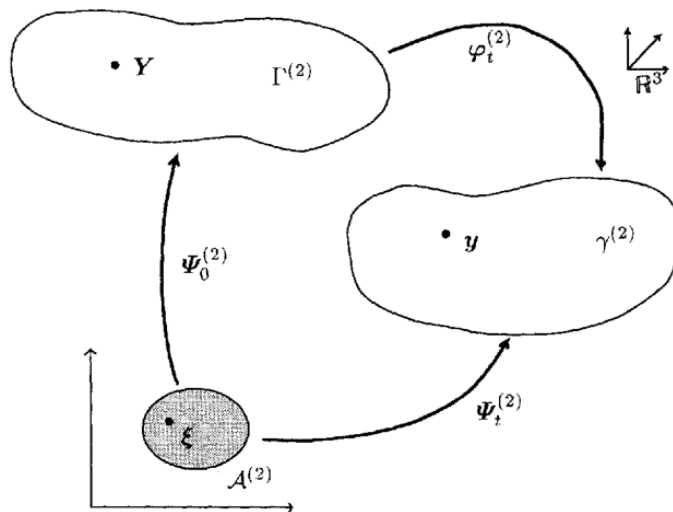
Figura 11 - Problema de contato com atrito em deformação finita



Fonte: (SIMO e LAURSEN, 1993).

Para a parametrização das superfícies  $\Gamma^i$  e  $\gamma^i$ , Figura 12, define-se dois planos  $A^i \in \mathbb{R}^2$ , e dois mapeamentos  $\Psi^i: A^i \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $i = 1, 2$ . Define-se os mapeamentos  $\Psi^i$  de forma que  $\Gamma^i = \Psi_0^i(A^i)$  e  $\gamma^i = \Psi_t^i(A^i)$ . Percebe-se  $\Psi^i = \varphi^i \Psi_0^i$ . Apura-se que qualquer ponto  $\mathbf{Y} \in \Gamma^2$ , por exemplo, obtém-se a partir da relação  $\mathbf{Y} = \Psi_0^2(\boldsymbol{\xi})$ , do mesmo modo que  $\mathbf{y} = \Psi_t^2(\boldsymbol{\xi})$ , para qualquer ponto  $\boldsymbol{\xi} \in A^2$ . Assume-se que essas parametrizações são suaves o bastante para que seja possível computar suas derivadas.

Figura 12 - Parametrização das superfícies de contato  $\gamma^2$  e  $\Gamma^2$



Fonte: (SIMO e LAURSEN, 1993).

### 3.3 RESTRIÇÕES DE CONTATO

Considerando-se uma configuração qualquer, a expressão  $\gamma^2 = \varphi^2(\Gamma^2)$  define uma superfície onde não pode existir penetração de nenhum ponto  $X \in \Gamma^1$  da superfície. Em outras palavras, estabelece-se que nenhum ponto da superfície de contato do corpo 1 pode penetrar no corpo 2. A fronteira dessa situação é representada pela superfície  $\gamma^2$ .

#### 3.3.1 Restrição de impenetrabilidade

Para representar a restrição de impermeabilidade, que vai impossibilitar a existência de penetração de um corpo no outro, apresenta-se a função folga  $g$ . A função folga  $g$  mensura a menor distância entre determinado ponto na superfície escrava, para um outro ponto qualquer na superfície mestre e é definida, para as duas transformações  $\varphi^1$  e  $\varphi^2$  e qualquer  $X \in \Gamma^1$ , por:

$$g(\mathbf{X}, t) = \text{sinal } |g(\mathbf{X}, t)|, \quad (3.1)$$

na qual

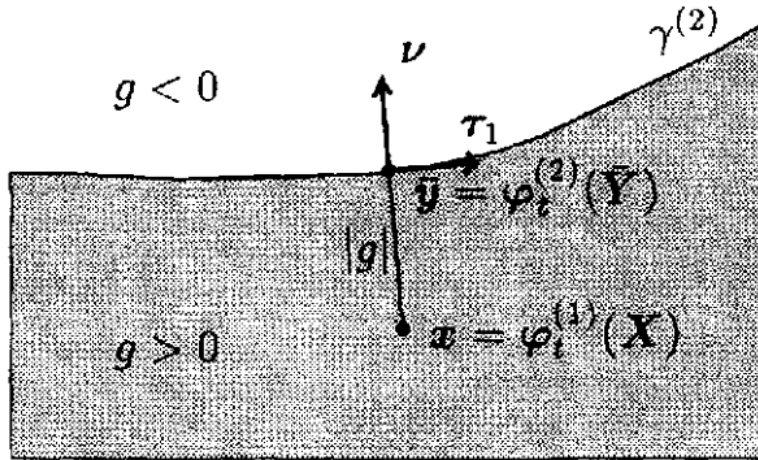
$$|g(\mathbf{X}, t)| = \min_{\mathbf{Y} \in \Gamma^2} \|\varphi^1(\mathbf{X}, t) - \varphi^2(\bar{\mathbf{Y}}, t)\| \quad (3.2)$$

e

$$\text{sinal} = \begin{cases} -1 & \text{se } \varphi^1 \text{ for admissível} \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (3.3)$$

O termo “admissível” utilizado na expressão (3.3) caracteriza o ponto dentro da zona admissível, isto é, não há violação da restrição de contato.

Figura 13 - Esquematização dos vetores da base e da função folga



Fonte: (SIMO e LAURSEN, 1993).

A condição de impenetrabilidade pode ser matematicamente representada por  $g(\mathbf{X}, t) \leq 0$ . É necessário definir a tração de contato  $\mathbf{t}^1(\mathbf{X}, t) = \mathbf{P}^1(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{n}_0^1(\mathbf{X})$ , onde  $\mathbf{P}^1(\mathbf{X}, t)$  é o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff em  $\mathbf{X}$ , e  $\mathbf{n}_0^1$  é o vetor normal à  $\mathbf{X}$  na configuração de referência. Decompõe-se a tração em:

$$\mathbf{t}^1(\mathbf{X}, t) = t_N(\mathbf{X}, t)(-\mathbf{n}) + t_T(\mathbf{X}, t), \quad (3.4)$$

onde  $-\mathbf{n}$  é a negativa da normal em  $x = \varphi^1(\mathbf{X})$  e  $t_T$  é a projeção de  $\mathbf{t}^1$  no plano tangente associado. A força de contato em  $\mathbf{X}$  é representada pelo termo  $t_N(\mathbf{X}, t)$  e deve ser positiva caso haja contato sem tensão. Sendo assim, estabelece-se as condições de Kuhn-Tucker para o contato normal:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{X}, t) &\leq 0, \\ t_N(\mathbf{X}, t) &\geq 0, \\ t_N(\mathbf{X}, t)g(\mathbf{X}, t) &= 0, \\ t_N(\mathbf{X}, t)\dot{g}(\mathbf{X}, t) &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$



A primeira equação de (3.5) descreve a condição de impenetrabilidade, a segunda define que as forças de contato podem ser apenas de compressão, considerando-se a inexistência de adesão, a terceira determina que só poderá haver pressão de contato, quando existir contato, ou seja, função folga nula (nesse caso, valores negativos são considerados nulos). Caso a função folga seja positiva, as pressões de contato são nulas. A última expressão de (3.5) é chamada de condição de persistência e é utilizada para o caso de atrito. Essa condição indica que para existir pressão de contato, a variação do tempo da função folga  $g$  deve ser nula, isto é, enquanto existir contato, a função folga, que é nula no início do contato, deve manter-se nula para que existam pressões de contato e forças de atrito.

### 3.4 DEFINIÇÃO DE BASE

Foi visto que a restrição da impenetrabilidade induz uma estrutura geométrica através da definição da função folga  $g$ . Explora-se esse fato ainda mais, definindo uma base de convocação associada, adequada para a definição das restrições de fricção.

É possível construir uma base associada para se definir as restrições de atrito a partir da definição da função folga, como está demonstrado em (SIMO e LAURSEN, 1993), aproveitando-se a estrutura geométrica induzida pela restrição da impenetrabilidade. Considerando-se um ponto  $\xi \in A^2$ ,  $\xi = (\xi^1, \xi^2)$  e definindo bases para  $\Gamma^2$  e  $\gamma^2$  através das derivadas parciais, pode-se escrever

$$\mathbf{E}_\alpha(\xi) = \Psi_{0,\alpha}^2(\xi), \quad (3.6)$$

e

$$\mathbf{e}_\alpha(\xi) = \Psi_{t,\alpha}^2(\xi) = \mathbf{F}_t^2(\Psi_0^2(\xi))\mathbf{E}_\alpha(\xi) \quad \alpha = 1,2. \quad (3.7)$$

na qual  $\mathbf{F}_t^2$  é o gradiente de deformação correspondente a  $\varphi^2$ .

Partindo-se do problema de minimização da distância entre determinado ponto  $\mathbf{X} \in \Gamma^1$  e os pontos  $\mathbf{Y} \in \Gamma^2$ , determina-se um ponto  $\bar{\mathbf{Y}}$ , sendo  $\bar{\mathbf{y}}$  pertencente à configuração corrente.

Os pontos correspondentes aos domínios espaciais e paramétricos são representados por  $\bar{\mathbf{y}}$  e  $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ . Sendo assim, obtém-se as seguintes relações:

$$\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t) = \Psi_0^2(\bar{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{X}, t)), \quad (3.8)$$

e

$$\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{X}, t) = \Psi_t^2(\bar{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{X}, t)). \quad (3.9)$$

Os pontos da superfície mestre  $\Gamma^2$  são sujeitos a uma transformação  $\varphi^2$ . Desta forma, o problema de minimização da distância depende do movimento e deformação dos dois corpos. Conseqüentemente, a descoberta do ponto  $\bar{\boldsymbol{\xi}}$  também depende do movimento e deformações dos dois corpos. Os vetores que formam a base são definidos como:

$$\mathbf{T}_\alpha = \mathbf{E}_\alpha(\bar{\boldsymbol{\xi}}), \quad (3.10)$$

e

$$\boldsymbol{\tau}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha(\bar{\boldsymbol{\xi}}), \quad (3.11)$$

onde  $\alpha = 1, 2$ .

Os vetores tangentes  $\mathbf{T}_\alpha$  e  $\boldsymbol{\tau}_\alpha$  descrevem a base que é convertida a medida que o ponto  $\mathbf{X}$  movimenta-se em relação a  $\Gamma^2$ . O vetor normal é obtido na referência espacial pela expressão:

$$-\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2}{\|\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2\|}. \quad (3.12)$$

O vetor definido em (3.12) é o vetor normal utilizado em (3.4). As parametrizações  $\Psi_0^2$  e  $\Psi^2$  são assumidas de tal forma que se define o vetor em (3.12) com sua orientação para fora do corpo  $B_2$ .

### 3.5 CINEMÁTICA DO ATRITO

Pela condição de persistência, no caso do atrito, tem-se que  $\dot{\mathbf{g}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0}$ , para uma força de contato não nula. Sendo os vetores  $\mathbf{x} = \varphi^1(\mathbf{X}, t)$  e  $\bar{\mathbf{y}} = \varphi^2(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t), t)$ , então:

$$\mathbf{0} = \frac{d}{dt} [\varphi^1(\mathbf{X}, t) - \varphi^2(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t), t)], \quad (3.13)$$

aplicando-se a regra da cadeia em (3.13), obtém-se:

$$\mathbf{v}^1(\mathbf{X}, t) - \mathbf{v}^2(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t), t) = F_t^2 \left( \Psi_0^2(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \right) \frac{d}{dt} [\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t)]. \quad (3.14)$$

A parcela à esquerda representa a diferença de velocidade entre os pontos  $\mathbf{X}$  e  $\bar{\mathbf{Y}}$  e caracteriza a taxa de deslizamento do ponto  $\mathbf{X}$  sobre a superfície  $\gamma^2 = \varphi^2(\Gamma^2)$ . Já a parcela à direita da expressão (3.14) contém um objetivo geométrico que será muito útil na evolução das leis de atrito. Sendo assim:

$$\mathbf{v}_T(\mathbf{X}, t) = \frac{d}{dt} [\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t)] = \dot{\boldsymbol{\xi}}^\alpha(\mathbf{X}, t) \mathbf{T}_\alpha, \quad (3.15)$$

na qual  $\mathbf{v}_T(\mathbf{X}, t)$  caracteriza a velocidade descrita dentro da base encontrada no tangenciamento do ponto  $\bar{\xi}$ . Se a variação da função folga é nula, não se obtém componente normal da velocidade.

### 3.6 FORMULAÇÃO DA LEI DE ATRITO DE COULOMB

A velocidade  $\mathbf{v}_T(\mathbf{X}, t)$  é convenientemente expressa em uma base dual considerada anteriormente. A base dual  $\mathbf{T}^\beta$  é definida como:

$$\mathbf{T}^\beta \cdot \mathbf{T}_\alpha = \delta_\alpha^\beta, \quad (3.16)$$

válida também para a configuração corrente. Uma métrica pode ser expressa como:

$$\mathbf{M}_{\alpha\beta} = \mathbf{T}_\alpha \cdot \mathbf{T}_\beta, \quad (3.17)$$

com  $\mathbf{m}_{\alpha\beta}$  sendo definido por uma equação equivalente.  $\mathbf{M}^{\alpha\beta}$  e  $\mathbf{m}^{\alpha\beta}$  são definidos analogamente às expressões acima. Sendo assim, considerando-se  $\mathbf{v}_T$  na base dual e convertendo-o para a configuração de referência, define-se:

$$\mathbf{v}_T^b(\mathbf{X}, t) = \mathbf{M}_{\alpha\beta} \dot{\bar{\xi}}^\beta(\mathbf{X}, t) \boldsymbol{\tau}^\alpha. \quad (3.18)$$

A força de atrito  $\mathbf{t}_T(\mathbf{X}, t)$  é igualmente expressa nessa base dual com a mudança de sinal:

$$\mathbf{t}_T^b(\mathbf{X}, t) := -\mathbf{t}_T := t_{T\alpha}(\mathbf{X}, t) \boldsymbol{\tau}^\alpha. \quad (3.19)$$

Definidas as condições de atrito e velocidade de esmagamento, é possível determinar as condições de atrito de *Coulomb*:

$$\phi := \|\mathbf{t}_T^b\| - \mu \mathbf{t}_N \leq 0, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{v}_T^b - \zeta \frac{\mathbf{t}_T^b}{\|\mathbf{t}_T^b\|} = 0, \quad (3.21)$$

$$\zeta \geq 0, \quad (3.22)$$

$$\Phi \zeta = 0, \quad (3.23)$$

onde,

$$\mathbf{L}_v \mathbf{t}_T^\beta = \dot{\mathbf{t}}_{T\alpha} \boldsymbol{\tau}^\alpha - \dot{\lambda}_{T\alpha} \boldsymbol{\tau}^\alpha. \quad (3.24)$$

Aqui não há distinção entre os coeficientes de atrito estático e dinâmico, assumindo-se o coeficiente de atrito com uma constante, inerte às ações de amolecimento ou endurecimento (SANTOS e BANDEIRA, 2018).

### 3.7 APLICAÇÃO DO LAGRANGIANO AUMENTADO COM ATRITO

A força normal de contato  $\mathbf{t}_N$  é definida como:

$$\mathbf{t}_N = \langle \lambda_N + \xi_N \mathbf{g} \rangle, \quad (3.25)$$

e as condições de atrito de *Coulomb* são definidas em (3.20), (3.21), (3.22) e (3.23).

Substituindo a equação (3.18) na configuração corrente, (3.19) e (3.24) nas expressões (3.20), (3.21), (3.22) e (3.23), obtém-se:

$$\Phi = \left[ \mathbf{t}_{T\alpha} \mathbf{m}_{\alpha\beta}^t \mathbf{t}_T^\beta \right]^{\frac{1}{2}} - \mu \mathbf{t}_N \leq 0, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{v}_T^\beta - \zeta \frac{\mathbf{t}_{T\alpha}}{\left[ \mathbf{t}_{T\alpha} \mathbf{m}_{\alpha\beta}^t \mathbf{t}_T^\beta \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\xi_T} \{ \dot{\mathbf{t}}_{T\alpha} - \dot{\lambda}_{T\alpha} \}, \quad (3.27)$$

$$\zeta \geq 0, \quad (3.28)$$

$$\Phi\zeta = 0. \quad (3.29)$$

Isolando  $\dot{\mathbf{t}}_{T\alpha}$  da expressão (3.27), tem-se

$$\dot{\mathbf{t}}_{T\alpha} = \dot{\boldsymbol{\lambda}}_{T\alpha} + \xi_T \left\{ \mathbf{v}_T^\beta - \zeta \frac{\mathbf{t}_{T\alpha}}{\left[ \mathbf{t}_{T\alpha} \mathbf{m}_{\alpha\beta}^t \mathbf{t}_T^\beta \right]^{\frac{1}{2}}} \right\}. \quad (3.30)$$

Utilizando o método de *Euler* implícito, realiza-se a integração no tempo entre  $t_n$  e  $t_{n+1}$ . Primeiramente, é definido:

$$\boldsymbol{\lambda}_{T\alpha} = \Delta\boldsymbol{\lambda}_{T\alpha} \quad \text{sendo} \quad \Delta\boldsymbol{\lambda}_{T\alpha} = \boldsymbol{\lambda}_{T\alpha_{n+1}} - \boldsymbol{\lambda}_{T\alpha_n}, \quad (3.31)$$

e empregando o método de *Euler*: Logo,

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_{T\alpha} = \Delta\boldsymbol{\lambda}_{T\alpha} \quad \text{sendo} \quad \Delta\boldsymbol{\lambda}_{T\alpha} = \boldsymbol{\lambda}_{T\alpha_{n+1}} - \boldsymbol{\lambda}_{T\alpha_n} \quad (3.32)$$

$$\dot{t}_{T\alpha} = t_{T\alpha_{n+1}} - t_{T\alpha_n}, \quad (3.33)$$

$$\dot{\xi}^\beta = \bar{\xi}_{n+1}^\beta - \bar{\xi}_n^\beta. \quad (3.34)$$

Partindo de:

$$\mathbf{u}_{T\alpha} = \mathbf{m}_{\alpha\beta}^t \bar{\xi}^\beta, \quad (3.35)$$

tem-se:

$$\mathbf{u}_{T\alpha_{n+1}} = \mathbf{m}_{\alpha\beta}^t \bar{\xi}_{n+1}^\beta \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_{T\alpha_n} = \mathbf{m}_{\alpha\beta}^t \bar{\xi}_n^\beta, \quad (3.36)$$

$$\Delta\mathbf{u}_{T\alpha} = \mathbf{u}_{T\alpha_{n+1}} - \mathbf{u}_{T\alpha_n}. \quad (3.37)$$

As expressões (3.36) e (3.37) são substituídas em (3.18) na configuração corrente, obtendo-se:

$$\mathbf{v}_{T\alpha}(X, t) = \mathbf{u}_{T\alpha_{n+1}} - \mathbf{u}_{T\alpha_n}. \quad (3.38)$$

Partindo de (3.30) e substituindo as equações (3.33), (3.37), (3.32) e (3.38), resulta:

$$\mathbf{t}_{T\alpha_{n+1}} = \mathbf{t}_{T\alpha_n} + \Delta\lambda_{T\alpha} + \xi_T \left\{ \Delta\mathbf{u}_{T\alpha} - \zeta \frac{\mathbf{t}_{T\alpha}}{[\mathbf{t}_{T\alpha} \mathbf{m}_{\alpha\beta}^t \mathbf{t}_T^\beta]^{\frac{1}{2}}} \right\}. \quad (3.39)$$

É definido convenientemente

$$\mathbf{t}_{T\alpha_{n+1}}^{\text{trial}} = \mathbf{t}_{T\alpha_n} + \Delta\lambda_{T\alpha} + \xi_T \Delta\mathbf{u}_{T\alpha}, \quad (3.40)$$

e (3.39) é reescrito por

$$\mathbf{t}_{T\alpha_{n+1}} = \mathbf{t}_{T\alpha_{n+1}}^{\text{trial}} - \epsilon_T \zeta \frac{\mathbf{t}_{T\alpha_{n+1}}}{[\mathbf{t}_{T\alpha_{n+1}} \mathbf{m}_{\alpha\beta}^t \mathbf{t}_{T_{n+1}}^\beta]^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.41)$$

Feitas essas considerações, a lei de atrito de *Coulomb* é reescrita aplicando-se o método de *Euler*: Portanto,

$$\Phi_{n+1}^{\text{trial}} = [\mathbf{t}_{T\alpha_{n+1}} \mathbf{m}_{\alpha\beta}^t \mathbf{t}_{T_{n+1}}^{\beta \text{ trial}}]^{\frac{1}{2}} - \mu \mathbf{t}_{N_{n+1}} \leq 0, \quad (3.42)$$

$$\mathbf{t}_{T\alpha_{n+1}} = \mathbf{t}_{T\alpha_{n+1}}^{\text{trial}} - \epsilon_T \zeta \frac{\mathbf{t}_{T\alpha_{n+1}}}{[\mathbf{t}_{T\alpha_{n+1}} \mathbf{m}_{\alpha\beta}^t \mathbf{t}_{T_{n+1}}^\beta]^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.43)$$

$$\zeta \geq 0, \quad (3.44)$$

$$\Phi_{n+1}^{\text{trial}} \boldsymbol{\zeta} = 0, \quad (3.45)$$

na qual:

$$\mathbf{t}_{N_{n+1}} = \langle \boldsymbol{\lambda}_{N_{n+1}} + \epsilon_N \mathbf{g}(\mathbf{u}_{n+1}) \rangle. \quad (3.46)$$

(SIMO e LAURSEN, 1993) *apud* (BANDEIRA, 2001) demonstram que:

$$\boldsymbol{\zeta} = \begin{cases} 0 & \text{se } \Phi_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0 \\ \frac{\Phi_{n+1}^{\text{trial}}}{\epsilon_T} & \text{se } \Phi_{n+1}^{\text{trial}} > 0 \end{cases}. \quad (3.47)$$

Combinando a definição (3.46) e as condições definidas em (3.47), obtém-se:

$$\mathbf{t}_{T\alpha_{n+1}} = \begin{cases} \mathbf{t}_{T\alpha_{n+1}}^{\text{trial}} & \text{se } \Phi_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0 \\ \mu \mathbf{t}_{N_{n+1}} \frac{\mathbf{t}_{T\alpha_{n+1}}^{\text{trial}}}{\|\mathbf{t}_{T\alpha_{n+1}}^{\text{trial}}\|} & \text{se } \Phi_{n+1}^{\text{trial}} > 0 \end{cases}. \quad (3.48)$$

Em problemas de contato com atrito, a resolução dos problemas vai consistir na determinação dos parâmetros  $\mathbf{t}_{T\alpha_{n+1}}$  e  $\mathbf{t}_{N_{n+1}}$ . Esses parâmetros estão sujeitos às restrições expressas pelas condições de *Kuhn-Tucker* para o contato normal e pelas condições para o modelo de atrito de *Coulomb*. Atualiza-se o parâmetro  $\boldsymbol{\lambda}_N$  da mesma forma como é feito em problemas de contato sem atrito:

$$\boldsymbol{\lambda}_N^{k+1} = \langle \boldsymbol{\lambda}_N^k + \epsilon_N \mathbf{g} \rangle. \quad (3.49)$$

Pela atualização do parâmetro  $\Delta \boldsymbol{\lambda}_{T\alpha}$ , constata-se que na hipótese dos multiplicadores *Lagrange* serem os da solução, tem-se que  $\boldsymbol{\lambda}_{T\alpha_n} = \mathbf{t}_{T\alpha_n}$  e  $\boldsymbol{\lambda}_{T\alpha_{n+1}} =$



$\mathbf{t}_{T\alpha_{n+1}}$ . Logo,  $\mathbf{t}_{T\alpha_{n+1}} = \mathbf{t}_{T\alpha_n} + \Delta\boldsymbol{\lambda}_{T\alpha}$ . Sendo assim,  $\Delta\boldsymbol{\lambda}_{T\alpha}$  é a mudança exata entre  $\mathbf{t}_n$  e  $\mathbf{t}_{n+1}$ . Contraindo-se a expressão (3.39), obtém-se:

$$\Delta\boldsymbol{\lambda}_{T\alpha}^{k+1} = \Delta\boldsymbol{\lambda}_{T\alpha}^k + \boldsymbol{\epsilon}_T \left\{ \Delta\mathbf{u}_{T\alpha}^k - \zeta^k \frac{\mathbf{t}_{T\alpha_{n+1}}^{\text{trial } k}}{\|\mathbf{t}_{T\alpha_{n+1}}^{\text{trial } k}\|} \right\}. \quad (3.50)$$

### 3.8 CINEMÁTICA DO CONTATO

Para a apresentação da contribuição do contato, definem-se alguns valores básicos da cinemática do contato, tais como, a função penetração  $\mathbf{g}_N$  e o deslocamento tangencial  $\mathbf{g}_T$ . Tem-se que a função penetração é fornecida por:

$$\mathbf{g}_N = \begin{cases} ((\mathbf{x}^s - \bar{\mathbf{x}}^m) \cdot \bar{\mathbf{n}}_c) & \text{se } (\mathbf{x}^s - \bar{\mathbf{x}}^m) \geq 0 \\ 0 & \text{se } (\mathbf{x}^s - \bar{\mathbf{x}}^m) < 0 \end{cases} \quad (3.51)$$

A expressão (3.47) já satisfaz a condição de contato. Na hipótese da função penetração ser positiva ou nula, admite-se contato. Caso contrário, indica-se a não existência de contato.

Sendo  $\bar{\mathbf{x}}^m$  um ponto definido pela parametrização da superfície mestre, no caso do elemento de contato, definido por:

$$\bar{\mathbf{x}}^m = \bar{\mathbf{x}}^m(\xi^1, \xi^2). \quad (3.52)$$

Os vetores unitários definidos paralelos aos eixos  $\xi^\alpha$ , podem ser obtidos por

$$\bar{\mathbf{a}}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}^m(\xi^\alpha, t)}{\partial \xi^\alpha} = \mathbf{x}_{,\alpha}^m(\xi^\alpha, t) \quad \text{sendo } \alpha = 1, 2. \quad (3.53)$$

Para o deslocamento tangencial, define-se uma função utilizada no estudo do atrito como:

$$g_T = \int_{t_0}^t \dot{\xi}^\alpha \|\bar{\mathbf{a}}_\alpha\| dt \quad \text{sendo } \alpha = 1,2. \quad (3.54)$$

A derivada no tempo de  $\bar{\xi}^\alpha$  é obtida utilizando-se a condição de ortogonalidade entre o vetor normal e os vetores  $\bar{\mathbf{a}}_\alpha$ , isto é,

$$\frac{d}{dt} \{[\mathbf{x}^s - \bar{\mathbf{x}}^m] \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha\} = 0. \quad (3.55)$$

São determinadas as seguintes derivadas em relação ao tempo:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}^s = \frac{d\bar{\mathbf{x}}^s}{dt} = \bar{\mathbf{v}}^s, \quad (3.56)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}^m(\xi^\alpha, t) = \frac{d\bar{\mathbf{x}}^m(\xi^\alpha, t)}{dt} = \mathbf{v}^m + \bar{\mathbf{a}}_\beta \dot{\xi}^\beta, \quad (3.57)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{a}}}_\alpha = \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{,\alpha}^m(\xi^\alpha, t) = \bar{\mathbf{v}}_{,\alpha}^m + \hat{\mathbf{x}}_{,\alpha\beta}^m \dot{\xi}^\beta. \quad (3.58)$$

Desenvolvendo-se a derivada (3.55) e substituindo (3.56) e (3.57) em (3.55), tem-se

$$\frac{d}{dt} \{[\mathbf{x}^s - \bar{\mathbf{x}}^m] \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha\} = [\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m - \bar{\mathbf{a}}_\beta \dot{\xi}^\alpha] \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha + [\mathbf{x}^s - \bar{\mathbf{x}}^m] \cdot \dot{\bar{\mathbf{a}}}_\alpha. \quad (3.59)$$

Substituindo (3.58) em (3.59), resulta

$$[\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m - \bar{\mathbf{a}}_\beta \dot{\xi}^\alpha] \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha + [\mathbf{x}^s - \bar{\mathbf{x}}^m] \cdot [\bar{\mathbf{v}}_{,\alpha}^m + \hat{\mathbf{x}}_{,\alpha\beta}^m \dot{\xi}^\beta] = 0. \quad (3.60)$$

O parâmetro  $\dot{\xi}^\beta$  de (3.60) é colocado em evidência, logo,

$$[\bar{\mathbf{a}}_\beta \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha - g_N \hat{\mathbf{x}}_{,\alpha\beta}^m \cdot \bar{\mathbf{n}}_c] \dot{\xi}^\beta = [\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m] \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha + g_N \bar{\mathbf{n}}_c \bar{\mathbf{v}}_{,\alpha}^m. \quad (3.61)$$

Definem-se:

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_{,\xi}^m(\bar{\xi}) \cdot \mathbf{x}_{,\xi}^m(\bar{\xi}) = \bar{\mathbf{a}}_\beta \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha \quad (3.62)$$

e

$$\bar{b}_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_{,\xi\xi}^m(\bar{\xi}) \cdot \bar{\mathbf{n}}_c = \hat{\mathbf{x}}_{,\alpha\beta}^m \cdot \bar{\mathbf{n}}_c, \quad (3.63)$$

onde (3.62) é a métrica, definida em (BANDEIRA, 2001), e (3.63) é a expressão da curvatura da superfície de contato.

A equação (3.61) é reescrito, como:

$$\dot{\xi}^\beta = \frac{1}{\bar{a}_{\alpha\beta} - g_N \bar{b}_{\alpha\beta}} \{[\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m] \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha + g_N \bar{\mathbf{n}}_c \bar{\mathbf{v}}_{,\alpha}^m\}. \quad (3.64)$$

Quando o problema de contato com atrito é resolvido de forma exata, a função  $g_N$  deve ser nula, pois se verifica um descolamento do nó escravo na superfície mestre, fazendo a expressão (3.64) resultar em:

$$\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m = \dot{\xi}^\alpha \bar{\mathbf{a}}_\alpha. \quad (3.65)$$

Utilizando a expressão (3.65) e a definição da variação relativa do deslocamento, conclui-se que

$$\dot{\mathbf{g}}_T = \mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m = \dot{\xi}^\alpha \bar{\mathbf{a}}_\alpha. \quad (3.66)$$

### 3.9 FORMULAÇÃO VARIACIONAL DO CONTATO

Segundo (WRIGGERS, 2006), (LAURSEN, 2002) e (BANDEIRA, 2001), a formulação do contato parte do mesmo ponto da formulação para o método dos elementos finitos. A formulação é desenvolvida a partir da equação de equilíbrio dos momentos, desprezando os termos de inércia. Então, tem-se:

$$\text{DIV } \mathbf{P}^\gamma + \mathbf{f}^\gamma = \mathbf{0}. \quad (3.67)$$

Partindo da equação do balanço dos momentos, é apresentada a equação dos trabalhos virtuais que, no caso do contato, está submetida as condições de Kuhn-Tuchker:

$$\mathbf{g}_N \geq 0, \quad \mathbf{t}_N \leq 0, \quad \mathbf{g}_N \mathbf{t}_N = 0 \quad \text{em } \Gamma_C. \quad (3.68)$$

Isto resulta em uma desigualdade variacional igual a:

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma=1}^2 \int_{B^\gamma} \boldsymbol{\tau}^\gamma \cdot \text{grad}(\eta^\gamma - \varphi^\gamma) dV \\ \geq \sum_{\gamma=1}^2 \int_{B^\gamma} \bar{\mathbf{f}}^\gamma \cdot (\eta^\gamma - \varphi^\gamma) dV - \int_{\Gamma_C^\gamma} \bar{\mathbf{t}}^\gamma \cdot (\eta^\gamma - \varphi^\gamma) dA, \end{aligned} \quad (3.69)$$

onde o tensor das tensões de *Kirchhoff* substitui o primeiro tensor de *Piola Kirchhoff*, utilizando-se a relação  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{P}\mathbf{F}^T$ .

De acordo com (WRIGGERS, 2006), caso seja possível se conhecer a superfície de contato, a inequação em (3.68) pode ser reescrita como

$$\sum_{\gamma=1}^2 \left\{ \int_{B^\gamma} \boldsymbol{\tau}^\gamma \cdot \text{grad } \boldsymbol{\eta}^\gamma dV - \int_{B^\gamma} \bar{\mathbf{f}}^\gamma \cdot \boldsymbol{\eta}^\gamma dV - \int_{\Gamma_C^\gamma} \bar{\mathbf{t}}^\gamma \cdot \boldsymbol{\eta}^\gamma dA \right\} + \mathbf{C}_C = 0, \quad (3.70)$$

no qual  $\mathbf{C}_C$  é a contribuição das forças de contato e  $\boldsymbol{\eta}^\gamma$  são os deslocamentos virtuais.

Conforme Bandeira (2001), na equação do princípio dos trabalhos virtuais, a contribuição do contato  $\mathbf{C}_C$  é fornecida pela expressão

$$\int_{dB_{0C}^S} \mathbf{t}_N \bar{\mathbf{n}}_c \cdot (\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m) dA + \int_{dB_{0C}^S} \mathbf{t}_T \cdot (\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m) dA. \quad (3.71)$$

A variação da função penetração  $g_N$  é definida por

$$\delta g_N = \delta(\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m) \cdot \bar{\mathbf{n}}_c + (\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m) \cdot \delta \bar{\mathbf{n}}_c. \quad (3.72)$$

Como o vetor  $\bar{\mathbf{n}}_c$  tem norma unitária,  $\bar{\mathbf{n}}_c \cdot \bar{\mathbf{n}}_c = 1 \rightarrow \delta \bar{\mathbf{n}}_c \cdot \bar{\mathbf{n}}_c = 0$ , (3.72) é simplificada por

$$\delta g_N = \delta(\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m) \cdot \bar{\mathbf{n}}_c = (\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m - \bar{\mathbf{a}}_\beta \dot{\xi}^\alpha) \cdot \bar{\mathbf{n}}_c. \quad (3.73)$$

Por conta da condição de ortogonalidade  $\bar{\mathbf{n}}_c \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha = 0$ , e

$$\delta g_N = (\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m) \cdot \bar{\mathbf{n}}_c. \quad (3.74)$$

Então:

$$\Delta g_N = (\Delta \mathbf{u}^s - \Delta \bar{\mathbf{u}}^m) \cdot \bar{\mathbf{n}}_c. \quad (3.75)$$

Substituindo (3.66) e (3.74) em (3.71), obtém-se

$$\int_{dB_{OC}^S} t_N \delta g_N dA + \int_{dB_{OC}^S} t_{T\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha dA, \quad (3.76)$$

na qual

$$t_{T\alpha} = \mathbf{t}_T \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha. \quad (3.77)$$

Os parâmetros  $t_N$  e  $t_{T\alpha}$  são definidos de acordo com método escolhido, podendo ser, por exemplo, o da Penalidade ou do Lagrangiano aumentado.

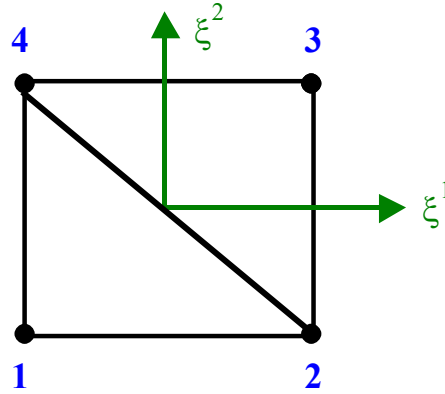
O trabalho virtual total realizado pela contribuição de contato é representado pela equação (3.76). Sua linearização fornece a matriz de rigidez da contribuição de contato, definida por

$$\frac{\partial W_C}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} = \int_{dB_{OC}^S} [\Delta t_N \delta g_N + t_N \Delta(\delta g_N)] dA + \int_{dB_{OC}^S} [\Delta t_{T\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha + t_{T\alpha} \Delta(\delta \bar{\xi}^\alpha)] dA. \quad (3.78)$$

### 3.10 ALGORITMO GEOMÉTRICO DE CONTATO

A combinação de duas faces do elemento isoparamétrico tetraédrico, utilizado na solução de elementos finitos, fornece um elemento de contato análogo ao utilizado por Bandeira (2001). O elemento de contato da Figura 14 representa a superfície de contato mestre do elemento localizada na superfície de um corpo B. O conjunto destas faces fornecerá a superfície de contato do sólido.

Figura 14 - Elemento finito da superfície de contato.



Fonte: (BANDEIRA, 2001)(adaptado)

Como fornecido por Bandeira (2001), a função de interpolação do elemento de contato é expressa por

$$N_I = \frac{1}{4} (1 + \phi_1 \xi^1) (1 + \phi_2 \xi^2), \quad (3.79)$$

onde  $\phi_1$  e  $\phi_2$  assumem valores  $\pm 1$ , dependendo das coordenadas nodais.

A coordenada de um ponto  $\mathbf{x}^m$  na superfície mestre é fornecido por

$$\mathbf{x}^m = \sum_{I=1}^4 N_I(\xi^1, \xi^2) \mathbf{x}_I^m. \quad (3.80)$$

Utiliza-se a propriedade de ortogonalidade para se calcular a projeção do nó escravo (ponto  $\mathbf{x}^s$ ) na superfície mestre. Esse cálculo de projeção é importante para determinar o valor da função penetração, variável útil na solução de problemas de contato. Além disso, é necessário calcular a distância entre os pontos. Sendo assim, é necessário resolver o seguinte sistema de equações:

$$[\mathbf{x}^s - \bar{\mathbf{x}}^m(\xi^1, \xi^2)] \cdot \bar{\mathbf{x}}_{,\alpha}^m(\xi^1, \xi^2) = 0. \quad (3.81)$$

Substituindo (3.80) em (3.81), obtém-se

$$[\mathbf{x}^s - \sum_{I=1}^4 N_I(\xi^1, \xi^2) \mathbf{x}_I^m] \cdot \sum_{I=1}^4 N_{,\alpha}(\xi^1, \xi^2) \mathbf{x}_I^m = 0. \quad (3.82)$$

Realizando a linearização de (3.81) e aplicando o método de Newton, obtém-se o sistema de equações não lineares a seguir:

$$\sum_{\beta=1}^2 \left[ \sum_{I=1}^4 \sum_{J=1}^4 N_{I,\alpha} N_{J,\beta} \mathbf{x}_I^m \cdot \mathbf{x}_J^m - \sum_{K=1}^4 N_{K,\alpha\beta} \mathbf{x}_K^m \cdot (\mathbf{x}^s - \sum_{L=1}^4 N_L \mathbf{x}_L^m) \right] (\xi_{i+1}^\beta - \xi_i^\beta) = [\mathbf{x}^s - \sum_{M=1}^4 N_M \mathbf{x}_M^m] \cdot \sum_{N=1}^4 N_{N,\alpha} \mathbf{x}_N^m. \quad (3.83)$$

Observando os valores dos parâmetros  $\xi^1$  e  $\xi^2$  é possível calcular facilmente as projeções e verificar se estão dentro da superfície, ou seja, basta verificar se os resultados pertencem ao intervalo  $[-1;1]$ . Caso essa condição não seja satisfeita, a projeção do nó escravo estará fora da superfície mestre, não ocorrendo o contato.

### 3.11 DISCRETIZAÇÃO DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Bandeira (2001) demonstrou que a contribuição do contato discretizado é obtida substituindo os valores de  $\delta \mathbf{g}_N$  e  $\delta \bar{\xi}^\alpha$  na equação (3.76). Logo,



$$\begin{aligned}
W_C(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = & \int_{dB_{0C}^S} t_N(\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m) \cdot \bar{\mathbf{n}}_c dA + \\
& + \int_{dB_{0C}^S} t_{T\alpha} \frac{1}{\bar{a}_{\alpha\beta} - g_{\bar{N}} \bar{b}_{\alpha\beta}} \{[\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m] \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + g_{\bar{N}} \bar{\mathbf{n}}_c \cdot \bar{\mathbf{v}}_\beta^m\} dA.
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Fazendo a integração numérica da equação (3.84) e a escrevendo na forma vetorial, obtém-se a seguinte estrutura do princípio do trabalho virtual:

$$W_C(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{ns} A_i \mathbf{R}_{contato\ i} \cdot \mathbf{V}_{contato\ i}, \tag{3.85}$$

na qual  $A_i$  é a área de cada elemento finito de contato,  $n_s$  o número de nós escravos na configuração atual  $B_{0C}^S$ ,  $\mathbf{V}_{contato}$  é a variação do deslocamento dos nós e  $\mathbf{R}_{contato}$  é o resíduo da contribuição de contato.

Visando facilitar a formulação, definem-se os vetores que relacionam o nó escravo com os quatro nós da superfície mestre:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{contato\ i} = & \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i^s \\ \mathbf{v}_{i1}^m \\ \mathbf{v}_{i2}^m \\ \mathbf{v}_{i3}^m \\ \mathbf{v}_{i4}^m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{n}}_c \\ -N_1(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{n}}_c \\ -N_2(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{n}}_c \\ -N_3(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{n}}_c \\ -N_4(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{n}}_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -N_{1,\alpha}(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{n}}_c \\ -N_{2,\alpha}(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{n}}_c \\ -N_{3,\alpha}(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{n}}_c \\ -N_{4,\alpha}(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{n}}_c \end{bmatrix}, \\
\mathbf{T}_\alpha = & \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -N_1(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -N_2(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -N_3(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -N_4(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{a}}_\alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^\alpha = \frac{1}{\bar{a}_{\alpha\beta} - g_{\bar{N}} \bar{b}_{\alpha\beta}} [\mathbf{T}_\beta - g_{\bar{N}} \mathbf{N}_\beta] \text{ e } \delta \bar{\xi}^\alpha \\
& = \mathbf{D}^\alpha \cdot \mathbf{V}_{contato\ i}.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Substituindo-se as expressões em (3.86) em (3.84), obtém-se a forma vetorial e a contribuição do contato  $\mathbf{R}_{contato}$  na equação de equilíbrio. Então,

$$\mathbf{R}_{\text{contato}} = t_N \mathbf{N} + t_{T_\alpha} \mathbf{D}^\alpha = t_N \mathbf{N} + t_{T_1} \mathbf{D}^1 + t_{T_2} \mathbf{D}^2. \quad (3.87)$$

O primeiro termo é referente à contribuição normal e o segundo à contribuição tangencial. Os termos  $t_N$  e  $t_{T_\alpha}$  da expressão (3.87) são as forças de contato, determinadas pelo método do Lagrangiano aumentado.

### 3.12 LINEARIZAÇÃO DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Nesta seção é definida a matriz de rigidez relativa ao contato, fornecida pela linearização da equação (3.84). Sendo assim, são linearizados todos os seus termos e substituídos diretamente na equação.

Tem-se que a pressão normal linearizada como:

$$\Delta t_N = \varepsilon_N \Delta g_N, \quad (3.88)$$

onde

$$\Delta g_{\bar{N}} = \begin{cases} (\Delta u^s - \Delta \bar{u}^m) \cdot \bar{\mathbf{n}}_c, & \text{se } g_N \geq 0 \\ 0, & \text{se } g_N < 0 \end{cases} \quad (3.89)$$

É definida a normal  $\bar{\mathbf{n}}_c$ , que é perpendicular aos dois eixos auxiliares do ponto  $\bar{\mathbf{x}}^m$ . Esta norma é calculada pelo produto vetorial entre estes dois eixos utilizando a seguinte expressão:

$$\bar{\mathbf{n}}_c = \frac{\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2}{\|\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2\|} = \frac{\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2}{\sqrt{(\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2) \cdot (\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2)}} \quad (3.90)$$

O cálculo de  $\Delta(\delta g_N)$  é dado por,

$$\Delta(\delta g_N) = \Delta[(\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m) \cdot \bar{\mathbf{n}}_C] = \Delta(\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m) \cdot \bar{\mathbf{n}}_C + (\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m) \cdot \Delta\bar{\mathbf{n}}_C. \quad (3.91)$$

Aplicando-se a regra da cadeia, define-se a linearização da normal para completar a expressão (3.91). Logo,

$$\Delta\bar{\mathbf{n}}_C = \frac{\Delta\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2 + \bar{\mathbf{a}}_1 \times \Delta\bar{\mathbf{a}}_2}{\|\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2\|} - \frac{(\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2)(\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2) \cdot (\Delta\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2 + \bar{\mathbf{a}}_1 \times \Delta\bar{\mathbf{a}}_2)}{\|\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2\|^3}. \quad (3.92)$$

Então,

$$\Delta\bar{\mathbf{n}}_C = [\mathbf{i} - (\bar{\mathbf{n}}_C \otimes \bar{\mathbf{n}}_C)] \frac{\Delta\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2 + \bar{\mathbf{a}}_1 \times \Delta\bar{\mathbf{a}}_2}{\|\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2\|}. \quad (3.93)$$

Logo,

$$\Delta\bar{\mathbf{n}}_C = \bar{a}^{\alpha\beta} \bar{\mathbf{a}}_\alpha \left[ \frac{\bar{\mathbf{a}}_\beta \cdot (\Delta\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2) + \bar{\mathbf{a}}_\beta \cdot (\bar{\mathbf{a}}_1 \times \Delta\bar{\mathbf{a}}_2)}{\|\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2\|} \right]. \quad (3.94)$$

Define-se,

$$\bar{\mathbf{a}}_\beta \cdot (\Delta\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2) = \begin{cases} -\Delta\bar{\mathbf{a}}_1 \cdot \bar{\mathbf{n}}_C \|\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2\| & \text{para } \beta = 1 \\ 0 & \text{para } \beta = 2 \end{cases} \quad (3.95)$$

e

$$\bar{\mathbf{a}}_\beta \cdot (\bar{\mathbf{a}}_1 \times \Delta\bar{\mathbf{a}}_2) = \begin{cases} 0 & \text{para } \beta = 1 \\ -\Delta\bar{\mathbf{a}}_2 \cdot \bar{\mathbf{n}}_C \|\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2\| & \text{para } \beta = 2 \end{cases}. \quad (3.96)$$

A expressão (3.94) pode ser reescrita como,

$$\Delta \bar{\mathbf{n}}_C = -\bar{\mathbf{a}}_\alpha \bar{a}^{\alpha\beta} (\Delta \bar{\mathbf{a}}_\beta \cdot \bar{\mathbf{n}}_C) = -\bar{\mathbf{a}}_\alpha \bar{a}^{\alpha\beta} \bar{\mathbf{n}}_C \cdot \Delta \bar{\mathbf{a}}_\beta. \quad (3.97)$$

Definindo-se  $\Delta \bar{\mathbf{a}}_\alpha$  como:

$$\Delta \bar{\mathbf{a}}_\alpha = \Delta \bar{\mathbf{u}}_{,\alpha}^m + \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \Delta \bar{\xi}^\beta, \quad (3.98)$$

a expressão (3.98) é substituída em (3.97). Logo:

$$\Delta \bar{\mathbf{n}}_C = -\bar{\mathbf{a}}_\alpha \bar{a}^{\alpha\beta} \bar{\mathbf{n}}_C (\Delta \bar{\mathbf{u}}_{,\beta}^m + \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\gamma} \Delta \bar{\xi}^\gamma). \quad (3.99)$$

É necessário retomar a relação:

$$\Delta(\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m) = \Delta \mathbf{v}^s - \Delta \bar{\mathbf{v}}^m - \bar{\mathbf{v}}_{,\alpha}^m \Delta \bar{\xi}^\alpha = -\mathbf{v}_{,\alpha}^m \Delta \bar{\xi}^\alpha. \quad (3.100)$$

Logo, utilizando as expressões (3.99) e (3.100) em (3.91), é obtido:

$$\Delta(\delta g_N) = -\bar{\mathbf{v}}_{,\alpha}^m \Delta \bar{\xi}^\alpha \cdot \bar{\mathbf{n}}_C - (\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m) \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha \bar{a}^{\alpha\beta} \bar{\mathbf{n}}_C \cdot (\Delta \bar{\mathbf{u}}_{,\beta}^m + \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\gamma} \Delta \bar{\xi}^\gamma). \quad (3.101)$$

A variação  $\delta \bar{\xi}^\beta$  pode ser escrita como

$$\delta \bar{\xi}^\beta = \frac{1}{\bar{a}_{\alpha\beta} - g_{\bar{N}} \bar{b}_{\alpha\beta}} \{ [\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m] \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha + g_{\bar{N}} \bar{\mathbf{n}}_C \cdot \bar{\mathbf{v}}_{,\alpha}^m \}, \quad (3.102)$$

e, conseqüentemente,

$$\Delta \bar{\xi}^\beta = \frac{1}{\bar{a}_{\alpha\beta} - g_{\bar{N}} \bar{b}_{\alpha\beta}} \{ [\Delta \mathbf{u}^s - \Delta \bar{\mathbf{u}}^m] \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha + g_{\bar{N}} \bar{\mathbf{n}}_C \cdot \bar{\mathbf{u}}_{,\alpha}^m \}. \quad (3.103)$$

A expressão (3.102) é linearizada e, após algumas manipulações matemáticas, é obtida a variação  $\Delta(\delta\bar{\xi}^\beta)$ :

$$\begin{aligned} \Delta(\delta\bar{\xi}^\beta) = & \frac{1}{\bar{\mathbf{a}}_{\alpha\beta} - \mathbf{g}_N \bar{\mathbf{b}}_{\alpha\beta}} \{ -\bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot (\bar{\mathbf{v}}_{,\beta}^m \Delta\bar{\xi}^\beta + \Delta\bar{\mathbf{u}}_{,\beta}^m \delta\bar{\xi}^\beta + \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\gamma} \delta\bar{\xi}^\beta \Delta\bar{\xi}^\gamma) \\ & + (\Delta\bar{\mathbf{u}}_{,\alpha}^m + \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \Delta\bar{\xi}^\beta) \cdot (\mathbf{v}^s - \bar{\mathbf{v}}^m - \bar{\mathbf{a}}_\gamma \delta\bar{\xi}^\gamma) \\ & + (\bar{\mathbf{v}}_{,\alpha}^m + \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \delta\bar{\xi}^\beta) \cdot (\Delta\mathbf{u}^s - \Delta\bar{\mathbf{u}}^m - \bar{\mathbf{a}}_\gamma \Delta\bar{\xi}^\gamma) \\ & + \mathbf{g}_N \bar{\mathbf{n}}_c \cdot (\bar{\mathbf{v}}_{,\alpha\beta}^m \Delta\bar{\xi}^\beta + \Delta\bar{\mathbf{u}}_{,\alpha\beta}^m \delta\bar{\xi}^\beta + \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta\gamma} \delta\bar{\xi}^\beta \Delta\bar{\xi}^\gamma). \end{aligned} \quad (3.104)$$

A demonstração da expressão (3.104) está disponível em (LAURSEN e SIMO, 1993).

Sabendo que a função  $\phi_{n+1}^{\text{trial}}$  define a existência de deslizamento entre as superfícies de contato e considerando, a princípio, que não existe escorregamento do nó escravo na superfície mestre, logo  $\phi_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0$ . Sendo assim, a linearização de  $\Delta t_{T_\alpha}$  é dada por

$$\Delta t_{T_\alpha} = \Delta t_{T_\alpha}^{\text{trial}} = \epsilon_T \Delta\bar{\xi}^\beta \bar{\mathbf{a}}_{\alpha\beta} + \epsilon_T (\bar{\xi}_{i+1}^\beta - \bar{\xi}_i^\beta) \Delta\bar{\mathbf{a}}_{\alpha\beta}, \quad (3.105)$$

sendo

$$\Delta\bar{\mathbf{a}}_{\alpha\beta} = \Delta\bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \Delta\bar{\mathbf{a}}_\beta. \quad (3.106)$$

As expressões (3.98) e (3.106) são substituídas em (3.105). Então

$$\begin{aligned} \Delta t_{T_\alpha}^{\text{trial}} = & \epsilon_T \bar{\mathbf{a}}_{\alpha\beta} \Delta\bar{\xi}^\beta + \epsilon_T (\bar{\xi}_{i+1}^\beta - \bar{\xi}_i^\beta) \{ (\Delta\mathbf{u}_{,\alpha} + \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\theta} \Delta\bar{\xi}^\theta) \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta \\ & + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot (\Delta\mathbf{u}_{,\beta} + \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\theta} \Delta\bar{\xi}^\theta) \}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Considerando-se o escorregamento do nó escravo na superfície mestre, ou seja,  $\phi_{n+1}^{\text{trial}} > 0$ , a linearização da força de atrito é definida por

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{t}_{T\alpha} = & \mu \epsilon_N \Delta g_N \frac{\mathbf{t}_{T\alpha}^{\text{trial}}}{\|\mathbf{t}_T^{\text{trial}}\|} + \mu \frac{t_N}{\|\mathbf{t}_T^{\text{trial}}\|} \Delta \mathbf{t}_{T\alpha}^{\text{trial}} \\ & + \mu \frac{t_N}{\|\mathbf{t}_T^{\text{trial}}\|^3} t_{T\alpha}^{\text{trial}} t_T^{\text{trial}\beta} (\mathbf{t}_T^{\text{trial}} \Delta \mathbf{a}_\beta - \Delta \mathbf{t}_{T\beta}^{\text{trial}}), \end{aligned} \quad (3.108)$$

onde  $\Delta \mathbf{t}_{T\alpha}^{\text{trial}}$  está definido em (3.107).

Apresentadas as linearizações, realiza-se a substituição na expressão (3.84), escrevendo-a na forma vetorial:

$$\frac{\partial W_c}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{\text{ns}} A_i (\mathbf{v}_{\text{contato } i})^T \mathbf{K}_{\text{contato } i} \Delta \mathbf{U}_{\text{contato } i}, \quad (3.109)$$

na qual,  $\mathbf{K}_{\text{contato}}$  é a matriz rigidez tangente total da contribuição do contato.

### 3.13 MATRIZ DE RIGIDEZ DA CONTRIBUIÇÃO NORMAL

A expressão (3.84) o primeiro membro é relativo a contribuição do contato na direção normal à matriz de rigidez. A matriz  $\mathbf{K}_N$  é então definida como

$$\mathbf{K}_N = \int_{\partial B_{0c}^S} [\Delta t_N \delta g_N + t_N \Delta(\delta g_N)] dA. \quad (3.110)$$

Utilizando-se as expressões (3.88), (3.89), (3.101) e os vetores de (3.86), é possível escrever (3.110) vetorialmente e obter  $\mathbf{K}_N$  por

$$\mathbf{K}_N = \epsilon_N \mathbf{N} \mathbf{N}^T + t_N \left[ \mathbf{N}_\alpha \mathbf{D}^{\alpha T} + a^{\beta\alpha} \mathbf{T}_\alpha \left( \mathbf{N}_B^T - \mathbf{D}^{\gamma T} (\bar{\mathbf{n}}_c \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\gamma}) \right) \right], \quad (3.111)$$

onde essa equação representa a matriz de rigidez tangente dos problemas de contato sem atrito.

### 3.14 MATRIZ DE RIGIDEZ DA CONTRIBUIÇÃO DO ATRITO SEM DESLIZAMENTO

Será apresentada nesta seção a formulação variacional da contribuição do atrito na matriz de rigidez. Será definido outro termo da matriz de rigidez, relativo às forças tangenciais. Entretanto, neste caso, admite-se uma situação de aderência (“*stick*”), ou seja, será levado em consideração que não há deslizamento entre as superfícies mestre e escrava. Caso haja deslizamento entre as superfícies (“*slip*”), a força de atrito  $t_{T_\alpha}$  é diferente, como definido pelo *Método do Lagrangiano Aumentado*, o que resulta em matrizes de rigidez distintas. Sendo assim, define-se a matriz de rigidez tangente da contribuição do atrito por

$$\mathbf{K}_T = \int_{\partial B_{Oc}^S} [\Delta t_{T_\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha + t_{T_\alpha} \Delta(\delta \bar{\xi}^\alpha)] dA. \quad (3.112)$$

Os termos da equação (3.112) são convenientemente separados visando facilitar a demonstração das expressões.

Define-se  $\mathbf{K}_T$  como

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_{T1} + \mathbf{K}_{T2}, \quad (3.113)$$

sendo

$$\mathbf{K}_{T1} = \int_{\partial B_{OC}^S} t_{T\alpha} \Delta(\delta\bar{\xi}^\alpha) dA \quad (3.114)$$

e

$$\mathbf{K}_{T2} = \int_{\partial B_{OC}^S} \Delta t_{T\alpha} \delta\bar{\xi}^\alpha dA. \quad (3.115)$$

Definem-se outros vetores relacionando o nó escravo e com os nós da superfície mestre:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U}_{\text{contato } i} &= \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_i^s \\ \Delta \mathbf{u}_{i1}^m \\ \Delta \mathbf{u}_{i2}^m \\ \Delta \mathbf{u}_{i3}^m \\ \Delta \mathbf{u}_{i4}^m \end{bmatrix}, & \mathbf{P}_\alpha &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -N_{1,\alpha}(\bar{\xi}) \mathbf{t}_t^{\text{trial}} \\ -N_{2,\alpha}(\bar{\xi}) \mathbf{t}_t^{\text{trial}} \\ -N_{3,\alpha}(\bar{\xi}) \mathbf{t}_t^{\text{trial}} \\ -N_{4,\alpha}(\bar{\xi}) \mathbf{t}_t^{\text{trial}} \end{bmatrix}, & \mathbf{T}_{\alpha\beta} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -N_{1,\beta}(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -N_{2,\beta}(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -N_{3,\beta}(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -N_{4,\beta}(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{a}}_\alpha \end{bmatrix}, \\ \hat{\mathbf{T}}_{\alpha\beta} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \\ -N_1(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \\ -N_2(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \\ -N_3(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \\ -N_4(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \end{bmatrix}, & \mathbf{N}_{\alpha\beta} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -N_{1,\alpha\beta}(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{n}}_c \\ -N_{2,\alpha\beta}(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{n}}_c \\ -N_{3,\alpha\beta}(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{n}}_c \\ -N_{4,\alpha\beta}(\bar{\xi}) \bar{\mathbf{n}}_c \end{bmatrix}, & \mathbf{E} &= \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -N_1(\bar{\xi}) \mathbf{1} \\ -N_2(\bar{\xi}) \mathbf{1} \\ -N_3(\bar{\xi}) \mathbf{1} \\ -N_4(\bar{\xi}) \mathbf{1} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{E}_\alpha &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{0}} \\ -N_{1,\alpha}(\bar{\xi}) \mathbf{1} \\ -N_{2,\alpha}(\bar{\xi}) \mathbf{1} \\ -N_{3,\alpha}(\bar{\xi}) \mathbf{1} \\ -N_{4,\alpha}(\bar{\xi}) \mathbf{1} \end{bmatrix}, & \mathbf{1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{0} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{e } \Delta \bar{\xi}^\alpha = \mathbf{D}^{\alpha T} \cdot \Delta \mathbf{U}_{\text{contato } i}. \quad (3.116)$$

Analisando-se a matriz  $\mathbf{K}_{T1}$ , substitui-se (3.104) em (3.114) e se utiliza dos vetores (3.86) e (3.116). Obtém-se então a forma vetorial



$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{T1} = & t_{T\alpha} \bar{h}^{\alpha\eta} [(\mathbf{T}_{\eta\beta} + \mathbf{T}_{\beta\eta} + \hat{\mathbf{T}}_{\eta\beta}) \mathbf{D}^{\beta T} + \mathbf{D}^{\beta} (\mathbf{T}_{\eta\beta}^T + \mathbf{T}_{\beta\eta}^T + \hat{\mathbf{T}}_{\eta\beta}^T)] \\
& - (\bar{\mathbf{a}}_{\eta} \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\gamma} + \bar{\mathbf{a}}_{\beta} \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\eta,\gamma} + \bar{\mathbf{a}}_{\eta,\beta} \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\gamma} - g_N \bar{\mathbf{n}}_c \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\eta,\beta\gamma}) \mathbf{D}^{\beta} \mathbf{D}^{\gamma T} \\
& - \mathbf{E} \mathbf{E}_{\eta}^T - \mathbf{E}_{\eta} \mathbf{E}^T - g_N \mathbf{N}_{\eta\beta} \mathbf{D}^{\beta T} - g_N \mathbf{D}^{\beta} \mathbf{N}_{\eta\beta}^T].
\end{aligned} \tag{3.117}$$

Por inspeção pode-se concluir que a matriz  $\mathbf{K}_{T1}$  é simétrica. Na expressão, os índices variam de 1 a 2, sendo o termo  $\bar{h}^{\alpha\eta}$  definido por

$$\bar{h}_{\alpha\beta} \bar{h}^{\beta\eta} = \delta_{\alpha}^{\eta} \quad \text{e} \quad \bar{h}_{\alpha\beta} = \bar{a}_{\alpha\beta} - g_N \bar{b}_{\alpha\beta}. \tag{3.118}$$

No estudo da matriz  $\mathbf{K}_{T2}$ , obtém-se sua forma vetorial substituindo pelas equações (3.102) e (3.107). A linearização da força tangencial relatada pela (3.107) no caso onde há deslizamento (“*strick*”),

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{T2} = & \epsilon_T \mathbf{D}^{\alpha} \left\{ -(\xi_{i+1}^{\beta} - \xi_i^{\beta}) [\mathbf{T}_{\beta\alpha}^T + \mathbf{T}_{\alpha\beta}^T - (\bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\theta} \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\beta} + \bar{\mathbf{a}}_{\alpha} \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\theta}) \mathbf{D}^{\theta T}] \right. \\
& \left. + \mathbf{a}_{\beta\alpha} \mathbf{D}^{\beta T} \right\},
\end{aligned} \tag{3.119}$$

sendo a matriz  $\mathbf{K}_{T2}$  é assimétrica.

### 3.15 MATRIZ DE RIGIDEZ DA CONTRIBUIÇÃO DO ATRITO COM DESLIZAMENTO

Será apresentada nesta seção a matriz de rigidez tangente do atrito com deslizamento. Quando definida para o estado de escorregamento (“*slip*”), utiliza-se o processo de substituição da seção anterior, contudo, é utilizada a linearização da função tangencial  $\Delta t_{T\alpha}$ . As equações (3.102) e (3.108) são substituídas em (3.115), e usando das expressões definidas em (3.86) e (3.116), obtém-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{T2} = \mu D^\alpha \{ & \epsilon_N \frac{t_{T\alpha}^{\text{trial}}}{\|t_T^{\text{trial}}\|} \mathbf{N}^T \\
& + \frac{|t_N|}{\|t_T^{\text{trial}}\|} \left( \epsilon_T a_{\beta\alpha} \mathbf{D}^{\beta T} \right. \\
& - \epsilon_T (\xi_{i+1}^\beta - \xi_i^\beta) [T_{\beta\alpha}^T + T_{\alpha\beta}^T - (\bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\theta} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\theta}) \mathbf{D}^{\theta T}] \\
& + \frac{|t_N|}{\|t_T^{\text{trial}}\|^3} t_{T\alpha}^{\text{trial}} t_T^{\text{trial}\beta} (-P_\beta^T + \epsilon_T (\xi_{i+1}^\gamma - \xi_i^\gamma) [T_{\beta\gamma}^T + T_{\gamma\beta}^T] \\
& + \mathbf{D}^{\theta T} [t_T^{\text{trial}} \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\theta} - \epsilon_T a_{\theta\beta} \\
& \left. - \epsilon_T (\xi_{i+1}^\gamma - \xi_i^\gamma) (\bar{\mathbf{a}}_{\gamma,\theta} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_\gamma \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\theta}) \right] \}.
\end{aligned} \tag{3.120}$$

Sendo assim, a matriz de rigidez de contato total é definida por

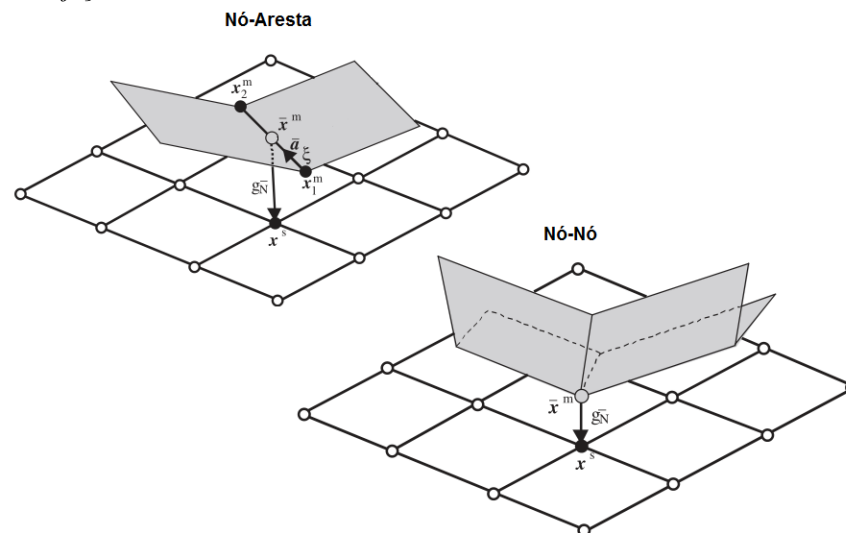
$$\mathbf{K}_{\text{contato}} = \mathbf{K}_N + \mathbf{K}_T = \mathbf{K}_N + \mathbf{K}_{T1} + \mathbf{K}_{T2}, \tag{3.121}$$

onde a matriz  $\mathbf{K}_{T2}$ , que também é assimétrica, dependendo da existência ou não de deslizamento entre superfícies de contato, pode possuir duas versões.

#### 4 CONTATO COM O ELEMENTO FINITO B-SPLINE

Para calcular as forças de contato é necessário determinar a projeção de um ponto  $x_m$ , da superfície escrava, sobre a superfície mestre. O elemento de contato *Lagrangiano* é utilizado para modelar a superfície mestre. Esta discretização da superfície mestre é feita utilizando elementos planos de três ou quatro nós que, geralmente, pode gerar quinas ou arestas, uma vez que as superfícies de contato são curvas. Esse fato faz com que as normais entre as superfícies adjacentes sejam descontínuas. Levando em consideração essa característica do elemento, existe a possibilidade de que a projeção do nó escravo ocorra sobre uma dessas quinas ou arestas, fazendo com que o ponto seja dividido por um ou mais elementos. Esse fenômeno é ilustrado na Figura 15. Para esse caso, onde o ponto  $x_m$  pertence ao domínio de dois ou mais elementos, surge a necessidade de formulações adicionais para trabalhar com contato nó-aresta ou nó-nó.

Figura 15 - Projeções nó-aresta e nó-nó.

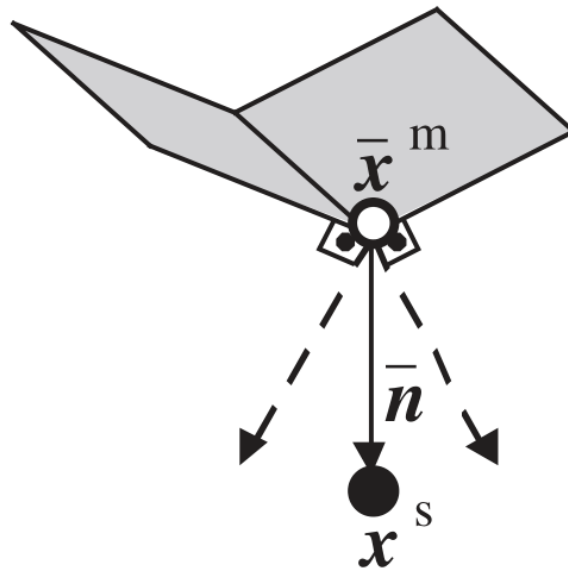


Fonte: (BANDEIRA, WRIGGERS e PIMENTA, 2004)

A Figura 16 ilustra outra dificuldade que pode ser encontrada com a utilização do elemento de contato *Lagrangiano*, i.e., a localização da sua normal é de difícil determinação. Existe um ponto no limite entre os dois elementos que pode pertencer a dois ou mais elementos, além de estar entre elementos de geometria distinta. Sendo

assim, a normal gerada por este ponto não é definida, uma vez que existe a descontinuidade da normal entre as superfícies adjacentes. No caso do contato com deslizamento (“*slip*”), é possível observar que a projeção de um nó escravo qualquer  $x_m$  muda de posição de um elemento para outro, ocorrendo, neste caso, uma mudança brusca da direção da normal, por conta da mudança abrupta de geometria do elemento. De acordo (WRIGGERS, 2006), é provável que esta mudança súbita cause dificuldades na convergência da solução do problema.

Figura 16 - Orientação da normal em contato nó-aresta.



Fonte: (BANDEIRA, WRIGGERS e PIMENTA, 2004)

Buscando contornar esses problemas apresentados pelo elemento de contato Lagrangiano, na geração de uma superfície de contato mestre, (SANTOS e BANDEIRA, 2018) utilizam uma superfície *B-Spline* para gerar uma única superfície sobre a área de contato, substituindo os inúmeros elementos de contato *Lagrangiano* e suas desvantagens. A curva *B-Spline* é gerada utilizando-se pontos de controle, que são pontos definidos no espaço, e, dependendo da ordem, pode ser suave, tendo continuidade em todos os seus pontos. Por conta da continuidade da curva *B-Spline* suave, há uma continuidade também na posição da normal ao longo da superfície,

dispensando a necessidade de uma formulação de contato nó-aresta ou nó-nó apresentada em (BANDEIRA, 2001), por causa da não existência de arestas ou quinas sobre a superfície. Para que a posição da normal seja bem definida em todos os pontos, é necessário que a superfície seja suave. Para isso, utiliza-se uma curva B-Spline de ordem igual ou superior a 3 (SANTOS e BANDEIRA, 2018). Dadas as vantagens de se utilizar uma superfície B-Spline como superfície de contato, deve-se adaptar a formulação de contato nó-superfície à uma discretização baseada na superfície B-Spline em substituição aos elementos de contato com função de interpolação *Lagrangeana*.

#### 4.1 CURVA B-SPLINE

De acordo com (ROGERS, 2001) *apud* (SANTOS e BANDEIRA, 2018), define-se que uma linha curva bidimensional *B-Spline* é formada utilizando-se pontos de controle no plano. Na Figura 17 são ilustrados os pontos de controle  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  e  $B_4$ . Denomina-se curva *B-Spline*, a curva ilustrada na Figura 17. Esta curva é elaborada utilizando funções base e a posição geométrica dos pontos de controle. As funções base definem ponderações para a posição dos pontos de controle, baseando-se nisto para geração dos pontos que pertencerão à curva *B-Spline*. Para se calcular os pontos que pertencerão à curva *B-Spline*, utiliza-se a expressão:

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{B}_i N_{i,k}(t) \quad t_{\min} \leq t < t_{\max} \quad 2 \leq k \leq n + 1, \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{B}_i$  são os pontos de controle;

$N_{i,k}(t)$  são as funções base, no qual a vírgula não denota derivada;

$t$  é a variável paramétrica;

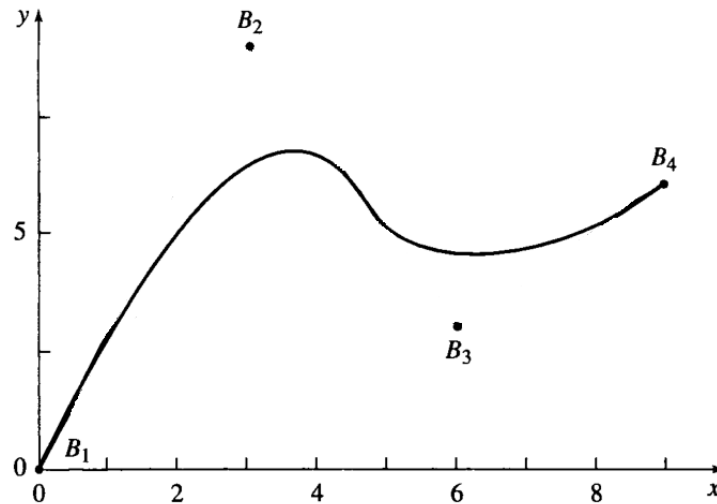
$k$  é a ordem da curva;

$n + 1$  é o número de pontos de controle;

$i$  é o índice que vai de 1 até  $n+1$ ;

$P(t)$  é o ponto contido na curva B-Spline.

Figura 17 - Curva B-Spline.



Fonte: (ROGERS, 2001)

As funções base  $N_{i,k}(t)$  dependem de um valor paramétrico  $t$ , que é uma variável definida entre os limites arbitrários  $t_{\min}$  e  $t_{\max}$ . Sendo assim, compreende-se que a variável  $t$  representa um percentual da curva, variando entre 0% a 100%. Divide-se a extensão da curva em intervalos delimitados por valores específicos de  $t$ , chamados de *knots* (PIEGL e TILLER, 1997). Estes valores são ordenados em um vetor específico denominado vetor de *knots*. A definição dos valores dos *knots* é convenientemente estabelecida pelo usuário que, a depender da situação, deve garantir apenas que seus valores sejam monotônicos e seu número igual à soma do número de pontos de controle mais a ordem da curva B-Spline, ou seja,

$$\dim \text{vetor de knots} = (n + 1) + k. \quad (4.2)$$

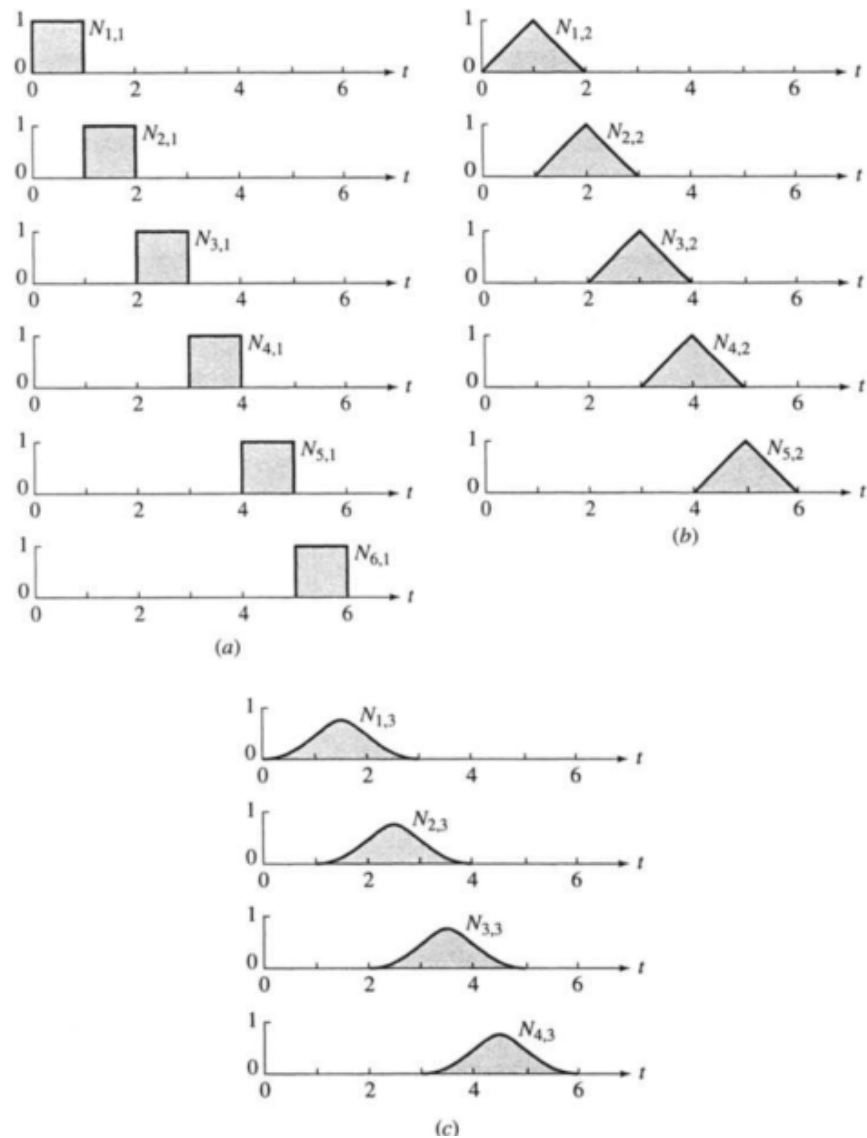
Define-se a função  $N_{i,k}(t)$  por

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i \leq t < x_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t - x_i)N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - t)N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}}, \quad (4.3)$$

na qual os valores  $x_i$  são elementos do vetor *knots* satisfazendo a relação  $x_i < x_{i+1}$ . As funções base são normalizadas, variando seu valor entre 0 e 1 (ROGERS, 2001). No caso ilustrado na Figura 17,  $n + 1 = 4$ , resultando no valor  $n = 3$ .

Figura 18 - Funções base com ordem 1, 2 e 3.



Fonte: (ROGERS, 2001)

As funções base representadas em Figura 18, com ordens distintas, variando entre 1 e 3, utilizam-se de um vetor *knots* que vai de 0 e 6, em incremento de 1, logo, definido por  $\xi = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]$ . É possível notar que quanto maior for a ordem da função base, maior será o grau do polinômio obtido pela função. De acordo com a Figura 18, para uma ordem 1, se tem uma função base de valor constante. Para uma ordem 2, tem-se uma função base de primeiro grau. Já para a ordem 3, a função base é uma parábola. Sendo o grau do polinômio determinado por



$$\text{grau} = k - 1. \quad (4.4)$$

Conclui-se também que o subdomínio sob o qual a função base demonstra valor não nulo é relativo a um número de divisões do domínio  $t$  igual à ordem da curva *B-Spline*. O valor fornecido pela função base torna-se não nulo apenas na região da curva próxima do seu ponto de controle. Portanto, um ponto de controle apenas exerce influência local sobre a curva. A ordem da curva dará extensão a esta influência.

Pode-se ampliar a definição de curva *B-Spline* às superfícies. Sendo assim, uma superfície  $\mathbf{Q}(t, u)$  é determinada por

$$\mathbf{Q}(t, u) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} \mathbf{B}_{i,j} N_{i,k}(t) M_{j,l}(u), \quad (4.5)$$

na qual  $N_{i,k}(t)$  e  $M_{j,l}(u)$  são as funções base definidas em (4.3), porém definidas nas direções bi-paramétricas  $t$  e  $u$ . Estas funções  $N_{i,k}(t)$  e  $M_{j,l}(u)$  possuem um vetor de knots individual próprio. A definição da derivada da função  $\mathbf{Q}(t, u)$  é requerida nas direções  $t$  e  $u$  para viabilizar a utilização da superfície B-Spline como aproximação da malha de contato. Sendo assim, tem-se que:

$$\frac{d\mathbf{Q}(t, u)}{dt} = \mathbf{Q}_t(t, u) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} \mathbf{B}_{i,j} N'_{i,k}(t) M_{j,l}(u) \quad (4.6)$$

$$\frac{d\mathbf{Q}(t, u)}{du} = \mathbf{Q}_u(t, u) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} \mathbf{B}_{i,j} N_{i,k}(t) M'_{j,l}(u), \quad (4.7)$$

$$\frac{d^2\mathbf{Q}(t, u)}{dudt} = \frac{d^2\mathbf{Q}(t, u)}{dtdu} = \mathbf{Q}_{tu}(t, u) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} \mathbf{B}_{i,j} N'_{i,k}(t) M'_{j,l}(u), \quad (4.8)$$

$$\frac{d\mathbf{Q}(t, u)}{dt^2} = \mathbf{Q}_{tt}(t, u) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} \mathbf{B}_{i,j} N''_{i,k}(t) M_{j,l}(u) \quad (4.9)$$

e

$$\frac{d\mathbf{Q}(t, u)}{du^2} = \mathbf{Q}_{uu}(t, u) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} \mathbf{B}_{i,j} N_{i,k}(t) M_{j,l}''(u). \quad (4.10)$$

Conseqüentemente, torna-se necessária a derivada da função base  $N_{i,k}(t)$  e  $M_{j,l}(u)$ . Como ambas possuem a mesma definição fornecida em (4.3), será demonstrado apenas para  $N'_{i,k}$ , sendo sua demonstração análoga a  $M'_{j,l}$ . Logo,

$$N'_{i,k}(t) = \frac{N_{i,k-1}(t) + (t - x_i)N'_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - t)N'_{i+1,k-1}(t) - N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}}, \quad (4.11)$$

onde  $N'_{i,1}(t) = 0$  para qualquer valor de  $t$ . Define-se a função  $N''_{i,k}(t)$  como

$$N''_{i,k}(t) = \frac{2N'_{i,k-1}(t) + (t - x_i)N''_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - t)N''_{i+1,k-1}(t) - 2N'_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}}, \quad (4.12)$$

onde  $N''_{i,1}(t) = 0$  e  $N''_{i,2}(t) = 0$  para qualquer valor de  $t$ .

## 4.2 DETERMINAÇÃO DO PONTO $\mathbf{x}^m$ PARA A SUPERFÍCIE B-SPLINE

Após a geração da superfície *B-Spline*, representando a superfície mestre, é necessário partir para a determinação dos pontos  $\mathbf{x}^m$ . Determina-se um ponto  $\mathbf{x}^m$  da superfície mestre concernente à projeção de cada ponto  $\mathbf{x}^s$  da superfície escrava. Os próprios nós que formam a interface da malha na superfície escrava serão os pontos

desta superfície. Para determinação do ponto  $\mathbf{x}^s$  de uma superfície escrava é necessário identificar o ponto  $\mathbf{x}^m$  mais próximo da mesma, ou seja, determina-se um ponto  $\mathbf{x}^m$  da superfície mestre que possui menor distância para  $\mathbf{x}^s$ . Portanto, é necessário solucionar um problema de menor distância entre um ponto  $\mathbf{x}^s$  da superfície escrava e a superfície mestre. Como solução é obtido um ponto  $\mathbf{x}^m$  da superfície mestre que possui a menor distância do ponto  $\mathbf{x}^s$ . Para determinação dos pontos da superfície mestre utiliza-se a curva calculada pelo método B-Spline, onde um ponto  $\mathbf{P}$  da superfície depende das coordenadas paramétricas  $t$  e  $u$ . Portanto,

$$\mathbf{P}(t, u) = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

onde  $x_P, y_P$  e  $z_P$  são funções de  $t$  e  $u$ , convenientemente denotadas por  $\mathbf{P}$ .

Pela função das coordenadas do ponto  $\mathbf{P}$  no espaço  $\mathbb{R}^3$  e das coordenadas de um ponto  $\mathbf{x}^s$ , a função distância é explicitada como

$$d = \sqrt{(x_P - x_S)^2 + (y_P - y_S)^2 + (z_P - z_S)^2}. \quad (4.14)$$

Como o propósito é determinar a menor distância entre um nó escravo e a superfície mestre, surge a necessidade se formular um problema de minimização:

$$\begin{array}{l} \text{minimizar } d(t, u) \\ \text{onde } t, u \in \mathcal{R} \end{array} .$$

Portanto, deriva-se a função  $d$ , em relação às variáveis  $t$  e  $u$ , e a iguala a zero, com o objetivo de determinar o ponto crítico da função, podendo ser um ponto mínimo, máximo, local ou global. Desta forma,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial d}{\partial t} \\ \frac{\partial d}{\partial \mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(x_P - x_S)x_{P,t} + (y_P - y_S)y_{P,t} + (z_P - z_S)z_{P,t}}{\sqrt{(x_P - x_S)^2 + (y_P - y_S)^2 + (z_P - z_S)^2}} \\ \frac{(x_P - x_S)x_{P,u} + (y_P - y_S)y_{P,u} + (z_P - z_S)z_{P,u}}{\sqrt{(x_P - x_S)^2 + (y_P - y_S)^2 + (z_P - z_S)^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Utiliza-se o método de Newton para resolver este problema de minimização.

### 4.3 DISCRETIZAÇÃO DA FORMULAÇÃO DE CONTATO COM ELEMENTO FINITO B-SPLINE

Neste trabalho já foi definida a formulação da força de contato escrita pela expressão (3.84) e, posteriormente, sua forma vetorial em (3.87). Além disto, foi definida a linearização das forças de contato, resultando na contribuição para matriz de rigidez incluída no método dos elementos finitos em (3.110), sendo a parcela normal na forma vetorial definida em (3.111). Na expressão (3.117), ao adicionar (3.119).

Define-se a contribuição da força tangencial sem deslizamento (*stick*) na matriz de rigidez ao adicionar (3.120) define-se agora a força tangencial com deslizamento (*slip*) na matriz de rigidez. No processo de discretização da superfície mestre, utilizando uma superfície B-Spline, serão utilizadas essas expressões anteriormente apresentadas. A força de contato na sua forma vetorial é representada pela expressão

$$\mathbf{R}_{\text{contato}} = t_N \mathbf{N} + t_{T_\alpha} \mathbf{D}^\alpha = t_N \mathbf{N} + t_{T_1} \mathbf{D}^1 + t_{T_2} \mathbf{D}^2. \quad (4.16)$$

A contribuição para a matriz de rigidez das forças de contato normais é:

$$\mathbf{K}_N = \epsilon_N \mathbf{N} \mathbf{N}^T + t_N \left[ \mathbf{N}_\alpha \mathbf{D}^{\alpha T} + a^{\beta\alpha} \mathbf{T}_\alpha \left( \mathbf{N}_B^T - \mathbf{D}^{\gamma T} (\bar{\mathbf{n}}_c \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\gamma}) \right) \right]. \quad (4.17)$$

Tem-se a primeira parte para a contribuição das forças de contato tangenciais para a matriz de rigidez como sendo,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{T1} = & t_{T\alpha} \bar{h}^{\alpha\eta} [(\mathbf{T}_{\eta\beta} + \mathbf{T}_{\beta\eta} + \hat{\mathbf{T}}_{\eta\beta}) \mathbf{D}^{\beta T} + \mathbf{D}^\beta (\mathbf{T}_{\eta\beta}^T + \mathbf{T}_{\beta\eta}^T + \hat{\mathbf{T}}_{\eta\beta}^T)] \\ & - (\bar{\mathbf{a}}_\eta \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\gamma} + \bar{\mathbf{a}}_\beta \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\eta,\gamma} + \bar{\mathbf{a}}_{\eta,\beta} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\gamma - g_N \bar{\mathbf{n}}_c \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\eta,\beta\gamma}) \mathbf{D}^\beta \mathbf{D}^{\gamma T} \\ & - \mathbf{E} \mathbf{E}_\eta^T - \mathbf{E}_\eta \mathbf{E}^T - g_N \mathbf{N}_{\eta\beta} \mathbf{D}^{\beta T} - g_N \mathbf{D}^\beta \mathbf{N}_{\eta\beta}^T]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Para o contato sem deslizamento será somada à expressão (4.18) a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{T2} = & \epsilon_T \mathbf{D}^\alpha \left\{ -(\xi_{i+1}^\beta - \xi_i^\beta) [\mathbf{T}_{\beta\alpha}^T + \mathbf{T}_{\alpha\beta}^T - (\bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\theta} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\theta}) \mathbf{D}^{\theta T}] \right. \\ & \left. + \mathbf{a}_{\beta\alpha} \mathbf{D}^{\beta T} \right\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

No caso do contato com deslizamento será somada à expressão (4.18) a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{T2} = & \mu \mathbf{D}^\alpha \left\{ \epsilon_N \frac{t_{T\alpha}^{\text{trial}}}{\|\mathbf{t}_T^{\text{trial}}\|} \mathbf{N}^T \right. \\ & + \frac{|t_N|}{\|\mathbf{t}_T^{\text{trial}}\|} \left( \epsilon_T \mathbf{a}_{\beta\alpha} \mathbf{D}^{\beta T} \right. \\ & - \epsilon_T (\xi_{i+1}^\beta - \xi_i^\beta) [\mathbf{T}_{\beta\alpha}^T + \mathbf{T}_{\alpha\beta}^T - (\bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\theta} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\theta}) \mathbf{D}^{\theta T}] \\ & + \frac{|t_N|}{\|\mathbf{t}_T^{\text{trial}}\|^3} t_{T\alpha}^{\text{trial}} t_T^{\text{trial}\beta} (-\mathbf{p}_\beta^T + \epsilon_T (\xi_{i+1}^\gamma - \xi_i^\gamma) [\mathbf{T}_{\beta\gamma}^T + \mathbf{T}_{\gamma\beta}^T] \\ & + \mathbf{D}^{\theta T} [t_T^{\text{trial}} \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\theta} - \epsilon_T \mathbf{a}_{\theta\beta} \\ & \left. \left. - \epsilon_T (\xi_{i+1}^\gamma - \xi_i^\gamma) (\bar{\mathbf{a}}_{\gamma,\theta} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_\gamma \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\theta}) \right] \right) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Essas equações apresentadas podem ser utilizadas combinadas a qualquer tipo de elemento finito na discretização do elemento de contato, já que a formulação de contato é independente do tipo de elemento finito usado. No trabalho de (BANDEIRA, 2001) essas equações foram usadas na discretização de uma superfície de contato não suave, composta por elementos isoparamétricos de contato. Já neste trabalho, adota-se a superfície de contato discretizada de forma suave utilizando a superfície *B-Spline*, como sugerido por (SANTOS e BANDEIRA, 2018). Portanto, a formulação de contato é novamente discretizada, porém agora utilizando as funções de interpolação do elemento *B-Spline*, que serão as funções base dispostas em (4.3).

Como parte do processo de discretização, são definidos os vetores, no qual a primeira posição do vetor se refere ao nó escravo e as demais posições referem-se aos nós da superfície mestre. Destaca-se que toda superfície mestre é composta por apenas um único elemento finito *B-Spline*. Portanto todos os pontos da superfície mestre serão incluídos nesses vetores. Utiliza-se como função de interpolação a função base da curva B-Spline, garantindo que as grandezas determinadas sejam corretamente interpoladas aos nós pertinentes na superfície mestre. No processo de adaptação da formulação é necessário definir quais vetores constituem as equações na sua forma vetorial para reformulá-los utilizando o elemento B-Spline. As coordenadas isoparamétricas  $\xi^1, \xi^2$  do elemento *Lagrangiano* são substituídas pelas coordenadas paramétricas  $t$  e  $u$  da função superfície *B-Spline*. Tem-se a mesma definição fornecida na expressão (3.53) para os vetores  $\bar{\mathbf{a}}_\alpha$ , porém  $\mathbf{x}_m$  é redefinido, dependente agora da superfície *B-Spline*. Sendo assim,

$$\bar{\mathbf{a}}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}^m(\xi^\alpha, t)}{\partial \xi^\alpha} = \mathbf{x}_{,\alpha}^m(\xi^\alpha, t), \quad \text{sendo } \alpha = 1, 2, \quad (4.21)$$

e,

$$\bar{\mathbf{a}}_t = \frac{\partial \mathbf{x}^m(t, t)}{\partial t} = \mathbf{x}_{,\alpha}^m(t, t), \quad (4.22)$$

e ainda

$$\bar{\mathbf{a}}_u = \frac{\partial \mathbf{x}^m(u, t)}{\partial u} = \mathbf{x}_{,\alpha}^m(u, t), \quad (4.23)$$

onde  $t$  representa a coordenada paramétrica e  $t$  (itálico) representa a variável tempo.

A expressão em (4.6) define o termo  $\bar{\mathbf{a}}_1$ , e em (4.7) define o termo  $\bar{\mathbf{a}}_2$ . A equação (4.8) define os termos  $\bar{\mathbf{a}}_{1,2}$  e  $\bar{\mathbf{a}}_{2,1}$  que são iguais. Por sua vez, a equação (4.9) define o termo  $\bar{\mathbf{a}}_{1,1}$  e a (4.10) o termo  $\bar{\mathbf{a}}_{2,2}$ . Os termos  $\bar{\mathbf{a}}_{\alpha\beta}$  e  $\bar{\mathbf{b}}_{\alpha\beta}$  já foram anteriormente definidos em (3.62) e (3.63), destacando-se a mudança de definição do termo  $\bar{\mathbf{a}}_\alpha$ . Convenientemente, visando simplificar a notação, é definido:

$$Q_{a/b} = N_{a,k}(t)M_{b,l}(u). \quad (4.24)$$

Pela definição da expressão (4.24), atribuindo o símbolo “a” ao número de pontos de controle na direção  $t$  e o símbolo “b” aos pontos de controle na direção  $u$ , os vetores são redefinidos como:

$$\mathbf{V}_{\text{contato } i} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_s \\ \mathbf{v}_{1/1} \\ \mathbf{v}_{2/1} \\ \mathbf{v}_{3/1} \\ \dots \\ \mathbf{v}_{a-2/b} \\ \mathbf{v}_{a-1/b} \\ \mathbf{v}_{a/b} \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{n}}_c \\ -Q_{1/1} \bar{\mathbf{n}}_c \\ -Q_{2/1} \bar{\mathbf{n}}_c \\ -Q_{3/1} \bar{\mathbf{n}}_c \\ \dots \\ -Q_{a-2/b} \bar{\mathbf{n}}_c \\ -Q_{a-1/b} \bar{\mathbf{n}}_c \\ -Q_{a/b} \bar{\mathbf{n}}_c \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -Q_{1/1,\alpha} \bar{\mathbf{n}}_c \\ -Q_{2/1,\alpha} \bar{\mathbf{n}}_c \\ -Q_{3/1,\alpha} \bar{\mathbf{n}}_c \\ \dots \\ -Q_{a-2/b,\alpha} \bar{\mathbf{n}}_c \\ -Q_{a-1/b,\alpha} \bar{\mathbf{n}}_c \\ -Q_{a/b,\alpha} \bar{\mathbf{n}}_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -Q_{1/1} \bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -Q_{2/1} \bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -Q_{3/1} \bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ \dots \\ -Q_{a-2/b} \bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -Q_{a-1/b} \bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -Q_{a/b} \bar{\mathbf{a}}_\alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}^\alpha = \frac{1}{\bar{a}_{\alpha\beta} - g_{\bar{N}} \bar{b}_{\alpha\beta}} [\mathbf{T}_\beta - g_{\bar{N}} \mathbf{N}_\beta] \quad \delta \bar{\xi}^\alpha = \mathbf{D}^\alpha \cdot \mathbf{V}_{\text{contato } i} \quad (4.25)$$

$$\Delta \mathbf{U}_{\text{contato } i} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_s \\ \Delta \mathbf{u}_{1/1} \\ \Delta \mathbf{u}_{2/1} \\ \Delta \mathbf{u}_{3/1} \\ \dots \\ \Delta \mathbf{u}_{a-2/b} \\ \Delta \mathbf{u}_{a-1/b} \\ \Delta \mathbf{u}_{a/b} \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -Q_{1/1, \alpha} \mathbf{t}_t^{\text{trial}} \\ -Q_{2/1, \alpha} \mathbf{t}_t^{\text{trial}} \\ -Q_{3/1, \alpha} \mathbf{t}_t^{\text{trial}} \\ \dots \\ -Q_{a-2/b, \alpha} \mathbf{t}_t^{\text{trial}} \\ -Q_{a-1/b, \alpha} \mathbf{t}_t^{\text{trial}} \\ -Q_{a/b, \alpha} \mathbf{t}_t^{\text{trial}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -Q_{1/1, \beta} \bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -Q_{2/1, \beta} \bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -Q_{3/1, \beta} \bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ \dots \\ -Q_{a-2/b, \beta} \bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -Q_{a-1/b, \beta} \bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ -Q_{a/b, \beta} \bar{\mathbf{a}}_\alpha \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{T}}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_{\alpha, \beta} \\ -Q_{1/1} \bar{\mathbf{a}}_{\alpha, \beta} \\ -Q_{2/1} \bar{\mathbf{a}}_{\alpha, \beta} \\ -Q_{3/1} \bar{\mathbf{a}}_{\alpha, \beta} \\ \dots \\ -Q_{a-2/b} \bar{\mathbf{a}}_{\alpha, \beta} \\ -Q_{a-1/b} \bar{\mathbf{a}}_{\alpha, \beta} \\ -Q_{a/b} \bar{\mathbf{a}}_{\alpha, \beta} \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -Q_{1/1, \alpha\beta} \bar{\mathbf{n}}_c \\ -Q_{2/1, \alpha\beta} \bar{\mathbf{n}}_c \\ -Q_{3/1, \alpha\beta} \bar{\mathbf{n}}_c \\ \dots \\ -Q_{a-2/b, \alpha\beta} \bar{\mathbf{n}}_c \\ -Q_{a-1/b, \alpha\beta} \bar{\mathbf{n}}_c \\ -Q_{a/b, \alpha\beta} \bar{\mathbf{n}}_c \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -Q_{1/1} \mathbf{1} \\ -Q_{2/1} \mathbf{1} \\ -Q_{3/1} \mathbf{1} \\ \dots \\ -Q_{a-2/b} \mathbf{1} \\ -Q_{a-1/b} \mathbf{1} \\ -Q_{a/b} \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_\alpha = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{0}} \\ -Q_{1/1, \alpha} \mathbf{1} \\ -Q_{2/1, \alpha} \mathbf{1} \\ -Q_{3/1, \alpha} \mathbf{1} \\ \dots \\ -Q_{a-2/b, \alpha} \mathbf{1} \\ -Q_{a-1/b, \alpha} \mathbf{1} \\ -Q_{a/b, \alpha} \mathbf{1} \end{bmatrix}$$



#### 4.4 EXEMPLO NUMÉRICO UTILIZANDO ANÁLISE QUASE-ESTÁTICA DE CONTATO COM ELEMENTO B-SPLINE

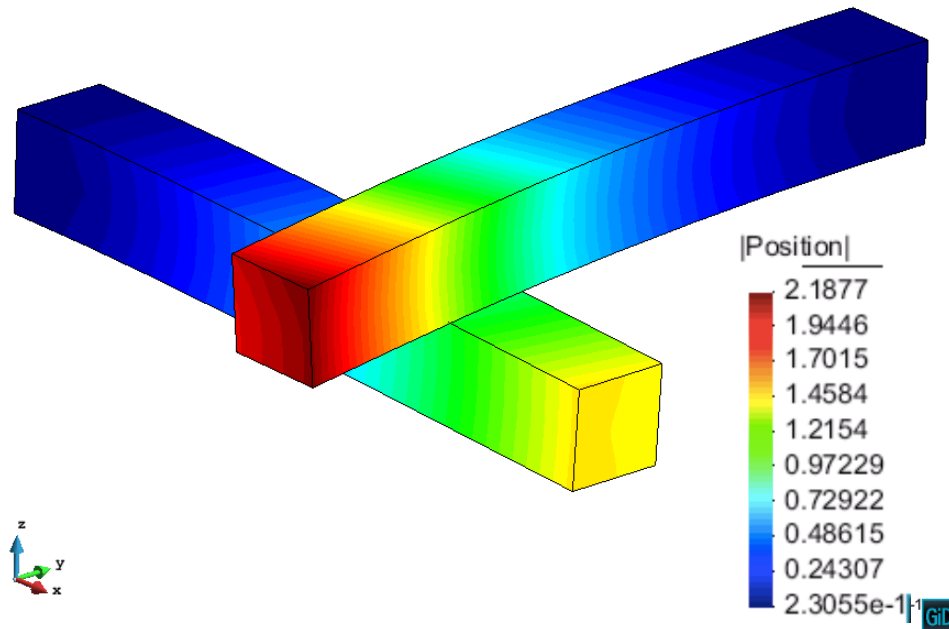
Nesta seção será apresentado um exemplo submetido ao contato mecânico. Serão aplicadas as rotinas desenvolvidas para contato mecânico utilizando o elemento de contato B-Spline. O objetivo é, antes da implementação do algoritmo do contato mecânico com dinâmica não linear, estudar o elemento de contato B-Spline utilizando o elemento finito sólido tetraédrico e hexaédrico. Os resultados serão comparados com os valores obtidos pelo software *Ansys*<sup>®</sup> e com a análise realizada por (SANTOS e BANDEIRA, 2018), que utilizaram o elemento finito hexaédrico. Estes exemplos serão novamente testados no final deste trabalho, porém considerando efeitos dinâmicos durante o contato.

##### 4.4.1 Exemplo Duas Vigas Perpendiculares

Neste exemplo o problema proposto corresponde ao contato entre duas vigas de mesma dimensão, sobrepostas e perpendiculares entre si. Há um espaçamento de um milímetro entre as vigas e suas dimensões estão lustradas na Figura 19. Ainda conforme a figura, as duas vigas são restritas em todos os nós em uma das extremidades e é aplicado um carregamento de 9000N na viga superior, com 3 incrementos de carga. Foi levado em consideração neste exemplo o contato normal e tangencial, sendo a penalidade normal  $\epsilon_N = 1.0 \times 10^5$ , a penalidade tangencial  $\epsilon_T = 1.0 \times 10^3$  e o coeficiente de atrito de  $\mu = 0.2$ . O módulo de elasticidade é  $4.0 \times 10^5$  MPa para a viga superior e  $1.0 \times 10^6$  MPa para a viga inferior.



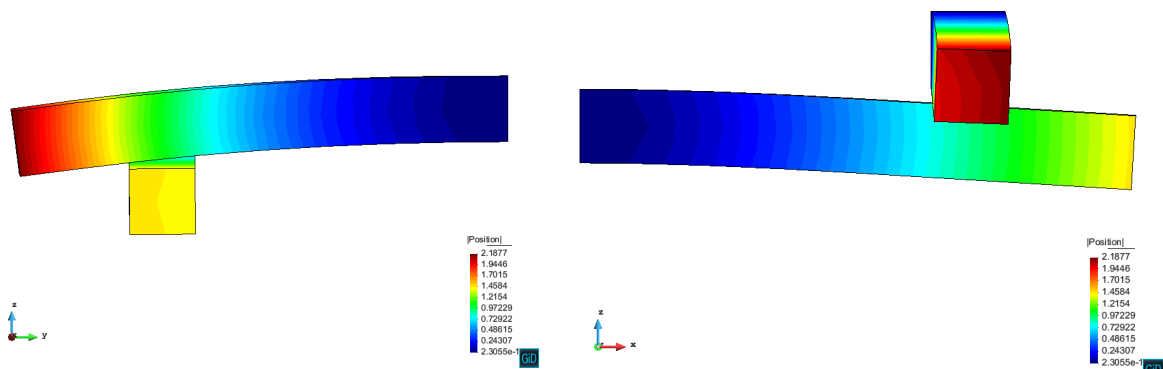
Figura 20 - Deslocamento total – vista isométrica.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 20 representa o deslocamento máximo do exemplo quando se utiliza o elemento finito tetraédrico. Além disso, esse mesmo deslocamento pode ser observado pelas vistas laterais na Figura 21

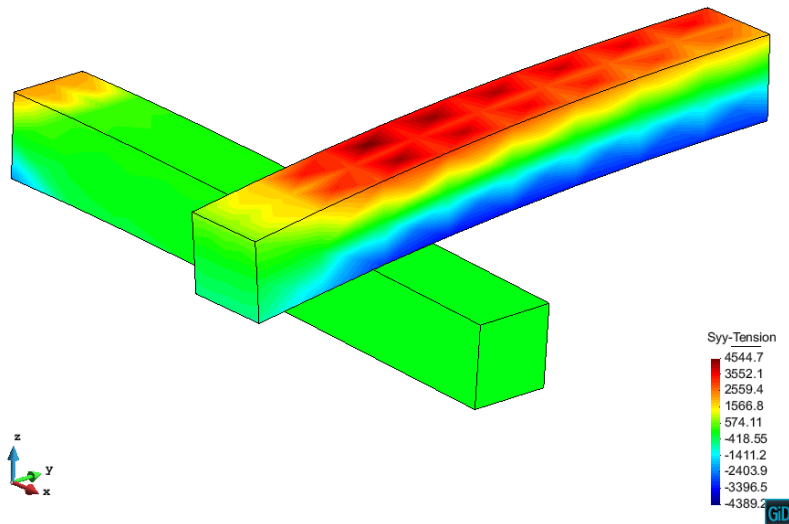
Figura 21 - Deslocamento total – vistas laterais.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Também foram calculadas as tensões normais para cada uma das vigas, como pode ser visto na Figura 22 e Figura 23.

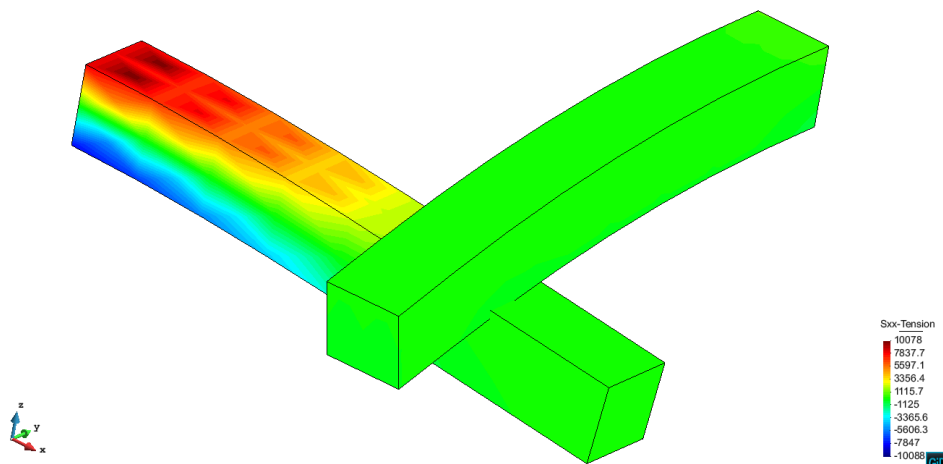
Figura 22 - Distribuição das tensões normais na viga superior.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 22 ilustra as tensões normais que ocorrem na viga superior causadas pelo carregamento aplicado.

Figura 23 - Distribuição das tensões normais na viga inferior.

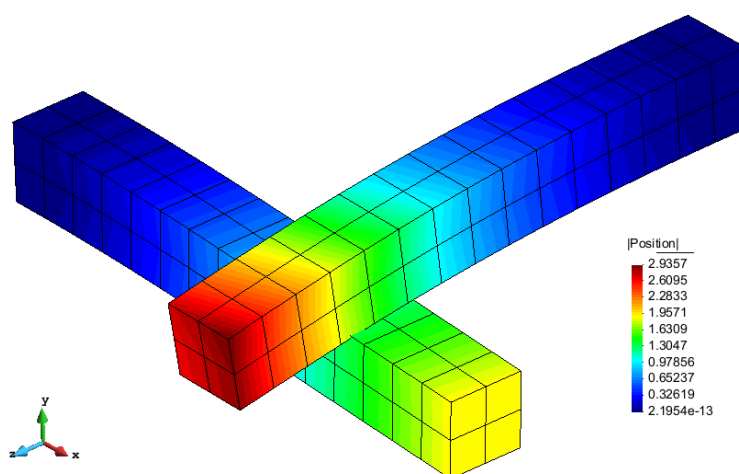


Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 23 ilustra as tensões normais obtidas na viga inferior. Essas tensões foram geradas pela força de contato com a viga superior.

Já os resultados obtidos por Santos e Bandeira (2018), para tensão e deslocamento máximo, porém utilizando o elemento hexaédrico, estão ilustrados nas Figura 24, Figura 25 e Figura 26.

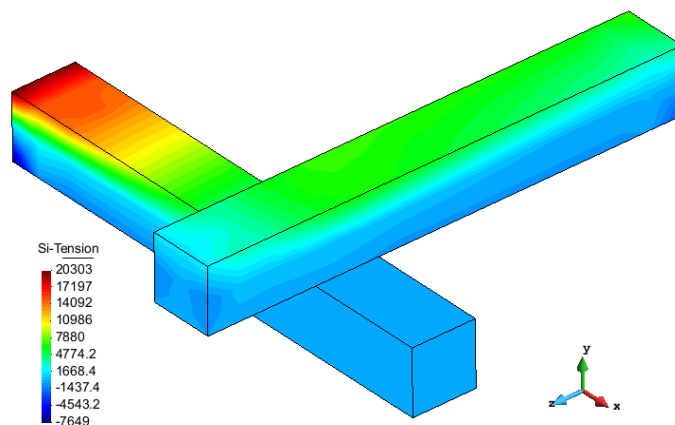
Figura 24 - Deslocamentos obtidos por Santos e Bandeira (2018).



Fonte: (SANTOS e BANDEIRA, 2018)

Na Figura 24 está disposto o deslocamento total encontrado utilizando o elemento hexaédrico. O valor foi superior ao encontrado utilizando o elemento tetraédrico.

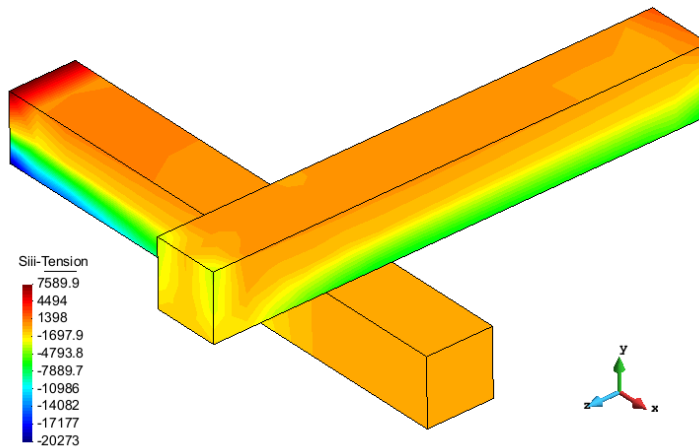
Figura 25 - Distribuição das tensões normais na viga inferior por Santos e Bandeira (2018).



Fonte: (SANTOS e BANDEIRA, 2018)

As tensões normais utilizando o elemento hexaédrico estão dispostas na Figura 25 e Figura 26, para a viga inferior e superior, respectivamente. Os valores encontrados divergiram dos valores encontrados utilizando o elemento tetraédrico.

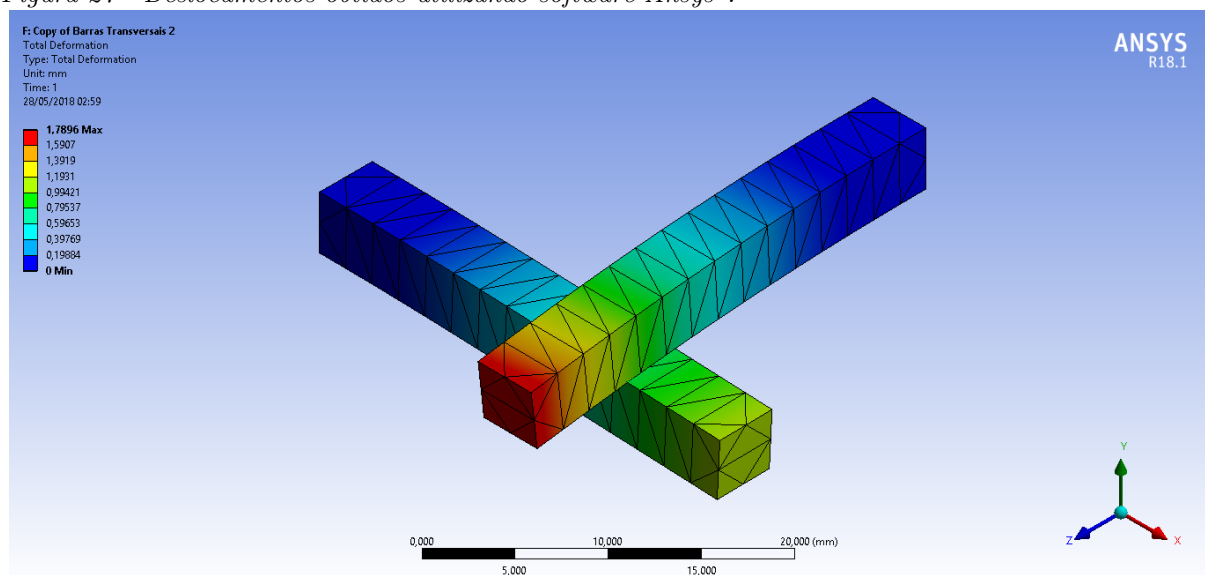
Figura 26 - Distribuição das tensões normais na viga superior por Santos e Bandeira (2018)



Fonte: (SANTOS e BANDEIRA, 2018)

Utilizando o software *Ansys*<sup>®</sup>, os resultados obtidos estão dispostos, para tensão e deslocamentos máximos, utilizando o elemento tetraédrico, nas ilustrações da Figura 27 e Figura 28.

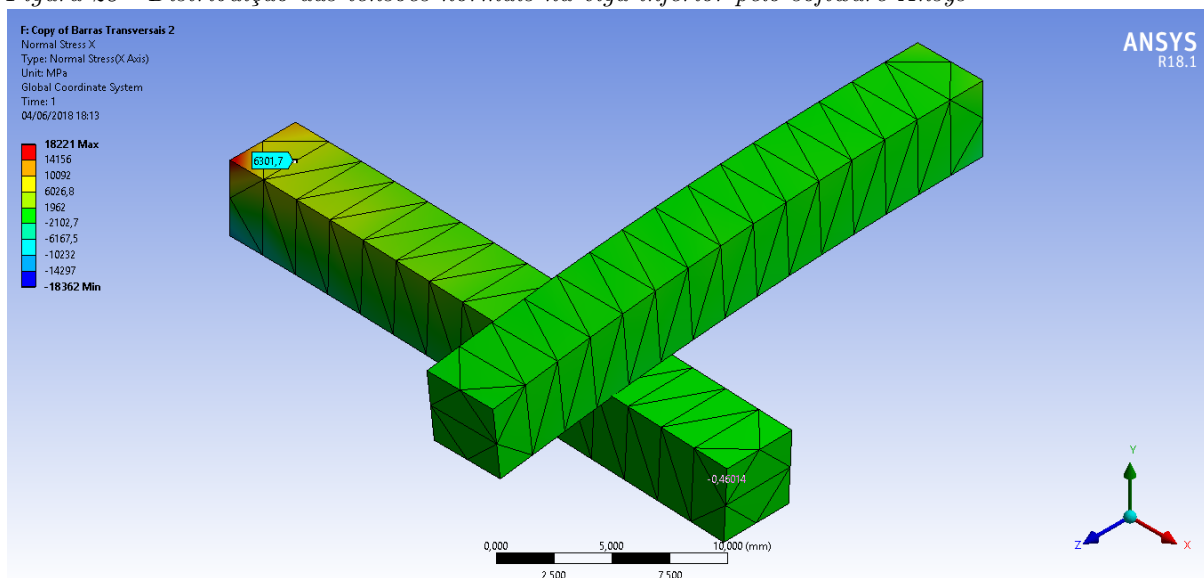
Figura 27 - Deslocamentos obtidos utilizando software *Ansys*<sup>®</sup>.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Pelas ilustrações da Figura 27, onde está representado o deslocamento total, é possível observar que o valor encontrado convergiu com o exemplo testado pelo programa elaborado na pesquisa. Nesse exemplo foi utilizado o elemento tetraédrico.

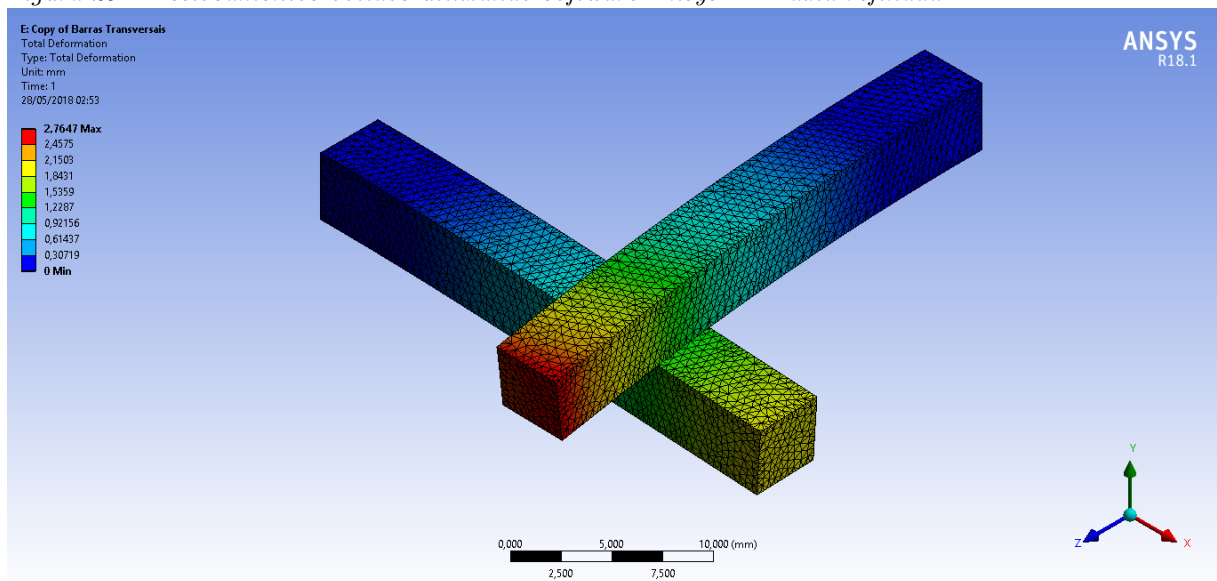
Figura 28 - Distribuição das tensões normais na viga inferior pelo software Ansys®



Fonte: Elaborado pelo autor.

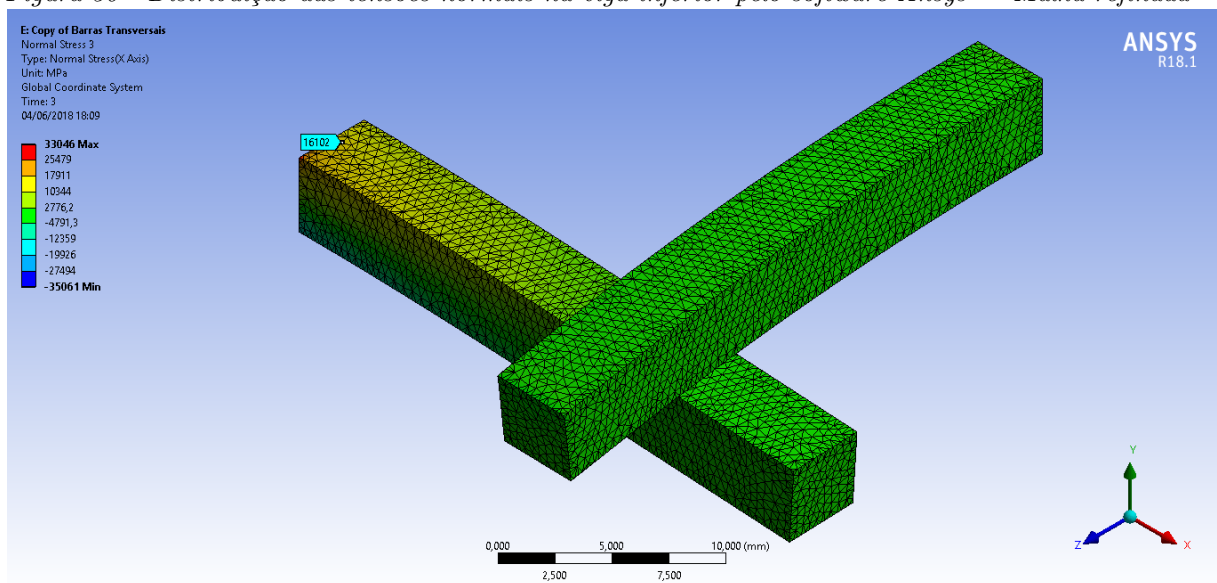
Como é possível observar nas Figura 27 e Figura 28, existe uma divergência entre os resultados obtidos no *Ansys*® e na pesquisa. Na tentativa de compreender estes resultados, o modelo no *Ansys*® foi novamente empregado, porém, agora utilizando uma malha mais refinada. Por conta disto, como pode ser visto nas Figura 29 e Figura 30, o modelo do *Ansys*® com uma malha mais refinada apresentou resultados mais próximos dos encontrados por (SANTOS e BANDEIRA, 2018), que também realizou uma simulação utilizando o *Ansys*®, porém com o elemento finito hexaédrico.

Figura 29 - Deslocamentos obtidos utilizando software Ansys® – Malha refinada.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 30 - Distribuição das tensões normais na viga inferior pelo software Ansys® – Malha refinada



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os Quadro 2, Quadro 3, Quadro 4 e Quadro 5 comparam os resultados obtidos para os três métodos estudados.



Quadro 2 - Comparativo exemplos com malhas refinadas.

Resultado do Autor com 1536 elementos:	
Resultado Ansys com 1445 elementos:	Resultado Santos e Bandeira (2018) com 120 elem.:
Deslocamento máximo: 2,2782	Deslocamento máximo: 2,9357

Fonte: Elaborado pelo autor

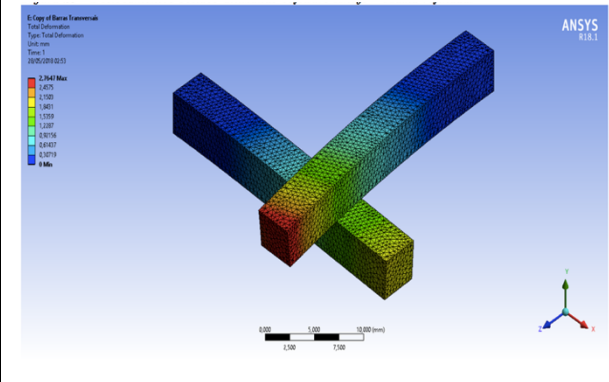
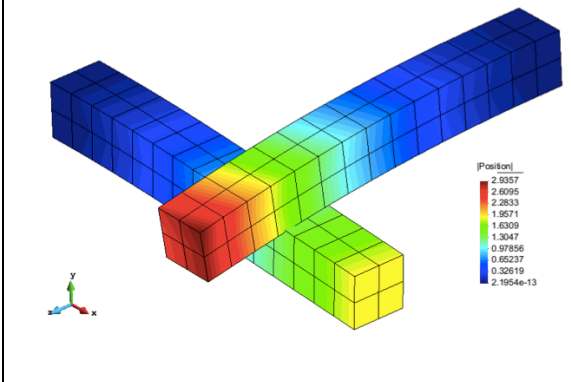
Quadro 3 - Comparativo exemplos com a malha usada por Santos e Bandeira (2018).

Resultado Ansys com 180 elementos:	Resultado Santos e Bandeira (2018) com 120 elem.:
Deslocamento máximo: 1,7896	Deslocamento máximo: 2,9357

Fonte: Elaborado pelo autor

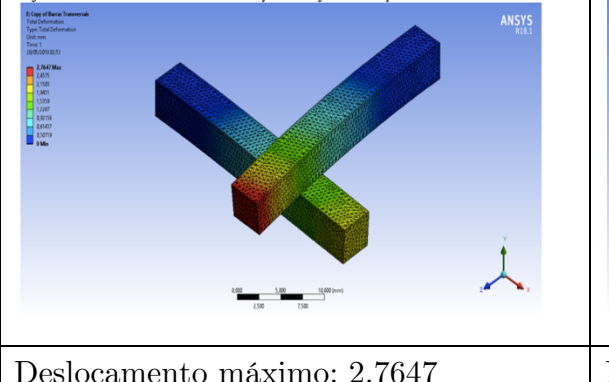
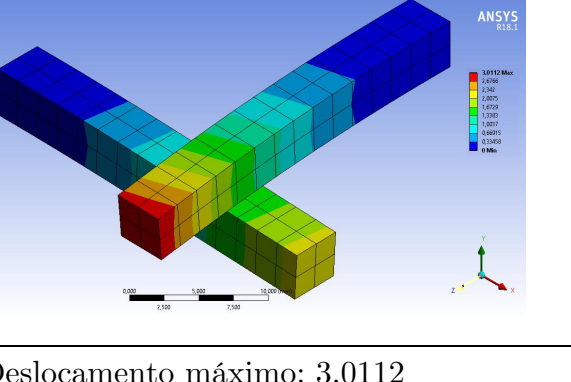
O resultado para o deslocamento encontrado na pesquisa diverge do valor encontrado por (SANTOS e BANDEIRA, 2018), mas está próximo do valor encontrado pelo *Ansys* usando uma quantidade semelhante de elementos. Simulou-se o exemplo no *Ansys* com uma quantidade análoga ao do exemplo hexaédrico, entretanto, também não houve convergência nos valores. Por conta disso, suspeita-se que a diferença está de fato na quantidade de elementos tetraédricos utilizado. Por isso o exemplo foi modelado no *Ansys* com uma quantidade maior de elementos utilizando o elemento tetraédrico e hexaédrico, confirmando a suspeita com relação a necessidade de um número maior de elementos tetraédricos, para se alcançar a mesma precisão do hexaédrico. Esses resultados estão dispostos nos quadros abaixo.

Quadro 4 - Comparativo exemplos com a malha refinada no *Ansys* e Santos e Bandeira.

Resultado Ansys com 24384 elementos:	Resultado Santos e Bandeira (2018) com 120 elem.:
	
Deslocamento máximo: 2,7647	Deslocamento máximo: 2,9357

Fonte: Elaborado pelo autor

Quadro 5 - Comparativo exemplos com elemento tetraédrico e hexaédrico no *Ansys*.

Resultado Ansys com 24384 elementos (tetraedros):	Resultado Ansys com 120 elementos (hexaedros):
	
Deslocamento máximo: 2,7647	Deslocamento máximo: 3,0112

Fonte: Elaborado pelo autor

Observa-se, então, a necessidade do refinamento da malha no caso de modelagens utilizando o elemento finito tetraédrico e isto justifica a diferença entre os resultados obtidos nesta pesquisa, os resultados obtidos por (SANTOS e BANDEIRA, 2018) e os fornecidos pelo software *Ansys*<sup>®</sup>. Portanto, optou-se pelo uso do elemento finito hexaédrico para o programa da pesquisa, na versão final deste trabalho. No Quadro 6 está disposto um resumo comparativo para os resultados de deslocamentos máximos e tensões máximas encontradas nos três exemplos, considerando, no caso do *Ansys*<sup>®</sup>, uma malha refinada.

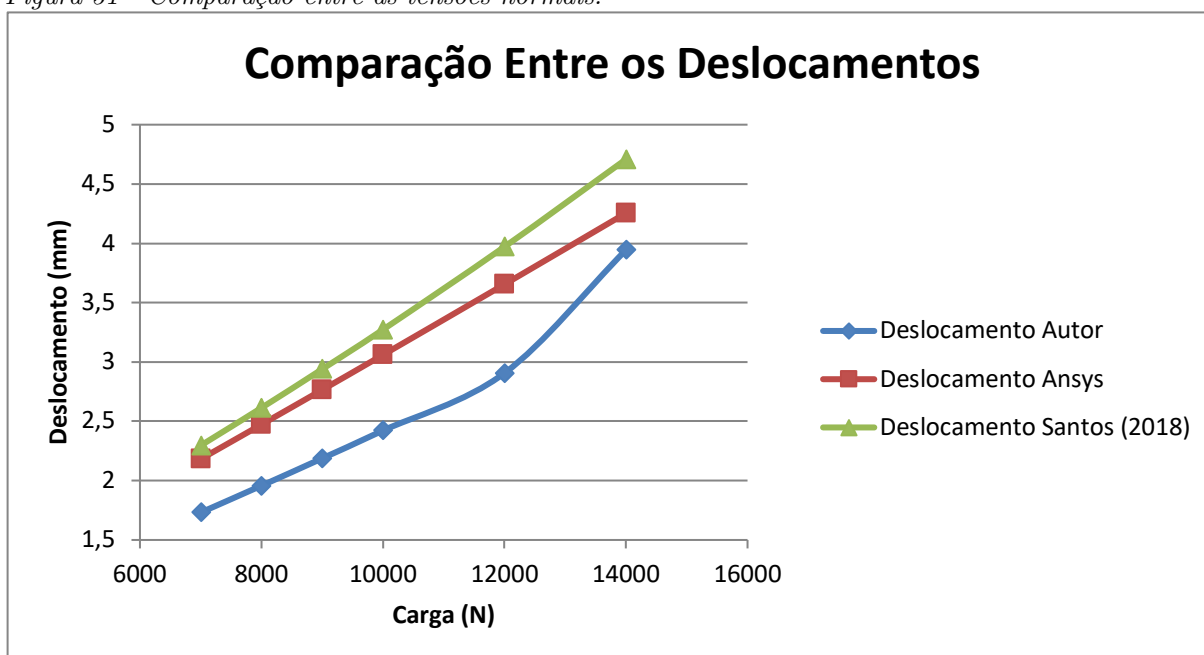
Quadro 6 - Quadro comparativo dos resultados.

	<b>Autor Tetraedro</b>	<b>Santos e Bandeira (2018) Hexaedro</b>	<b>ANSYS<sup>®</sup> Tetraedro</b>
Flecha (mm) %	2,18770	2,93980 <b>25,58%</b>	2,76530 <b>20,89%</b>
Tensão Sx máx (MPa) %	11.128,0000	19.416,0000 <b>42,69%</b>	16.102,0000 <b>30,89%</b>

Fonte: Elaborado pelo autor

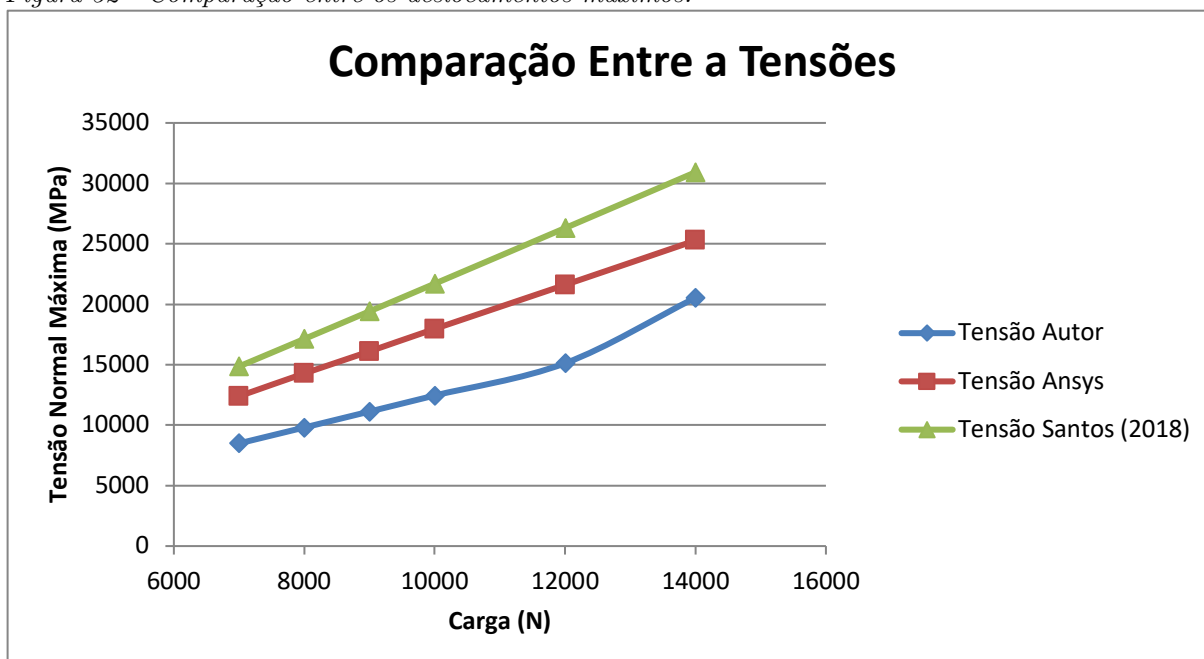
Para um estudo mais completo do comportamento do modelo, foi realizada também uma análise comparativa com um aumento progressivo no carregamento. Os resultados encontrados estão ilustrados nos gráficos das Figura 31 e Figura 32.

Figura 31 - Comparação entre as tensões normais.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 32 - Comparação entre os deslocamentos máximos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se que existe uma diferença relevante entre os valores obtidos no software *Ansys*<sup>®</sup> para tensões. Isso se deve ao fato do *Ansys*<sup>®</sup> utilizar uma equação constitutiva do material diferente da adotada nesta pesquisa, como visto na seção 2.1.3 do capítulo

2, representado pela equação (2.25). Para um material compressível de *Neo-Hooke*, a equação da energia de deformação utilizada pelo Ansys® é definida por:

$$W_d(I_c, J) = \frac{K}{2}(J - 1)^2 + \frac{1}{2}\mu_d(\mathbf{b} - \mathbf{I}),$$

onde  $\mathbf{b}$  é o tensor a esquerda de Cauchy Green e  $K$  é dado por

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu_d.$$

Portanto, existe uma diferença entre a lei do material. Contudo, apesar desta diferença, os resultados obtidos pelo Ansys® são de valiosa importância, principalmente para uma análise qualitativa dos resultados. É possível observar que as distribuições de tensões são similares e que o comportamento é proporcional. Como esperado pela lei do material o comportamento estrutural indica uma relação proporcional entre a carga aplicada e a tensão resultante. Este comportamento é parecido nos três estudos, como pode ser observado nos gráficos das Figura 31 e Figura 32.

## 5 INTRODUÇÃO À DINÂMICA

Neste capítulo será apresentada uma introdução ao estudo da dinâmica das estruturas que será aplicada ao estudo do contato mecânico.

### 5.1 CONCEITOS GERAIS

A dinâmica das estruturas estuda o movimento dos corpos quando submetidos às forças dinâmicas, sendo que a equação do movimento considera a aceleração, a massa, a velocidade, o amortecimento e a rigidez da estrutura analisada.

As características básicas de uma análise dinâmica de estruturas são as cargas, reações, deslocamentos, deformações e esforços internos, variando com o tempo, com velocidades e acelerações que não podem ser desprezadas. Além das condições estáticas tradicionais de equilíbrio, participam também as forças de inércia, relacionadas à massa da estrutura; as forças que dissipam energia, como o amortecimento; e a força elástica devido à deformação. Na dinâmica das estruturas o modelo matemático desenvolvido é formulado através de um sistema, cuja formulação matemática é fundamentada em equações com variáveis de tempo e espaço.

Existem diversos algoritmos para a solução de equações diferenciais. Segundo (KUHL e CRISFIELD, 1999), estes algoritmos podem ser divididos em três categorias. A primeira é aquela onde os algoritmos forçam a conservação de energia do sistema, podendo citar, por exemplo, os métodos da regra trapezoidal (“Trapezoidal Rule-TR”) e da regra do ponto médio (“Mid-Point Rule-MPR”). A segunda categoria refere-se aos algoritmos que dissipam numericamente a energia, como por exemplo, os métodos de Newmark, Hilber- $\alpha$ , Bossak- $\alpha$  e o método do  $\alpha$  generalizado (“Generalized-Method- $\alpha$ ”). A terceira categoria refere-se aos algoritmos que conservam a energia do sistema, como o método da energia de momento (“Energy-Momentum Method-EMM”), o método da

energia de momentum modificada (“Modifed Energy-Momentum Method-EMM”) e o método generalizado da energia de momentum (“Energy-Momentum Method-GEMM”).

O algoritmo a ser utilizado nesta pesquisa será o do Método de Newmark, sendo este um método numérico que dissipa a energia. Como este trabalho visa aplicação futura do contato mecânico com dinâmica ao impacto mecânico, entende-se que este método pode ser usado com eficiência para a solução de equações diferenciais, servindo aos interesses futuros da pesquisa. Além disso, deve-se utilizar algoritmos para solução da dinâmica não linear, uma vez que os problemas quase-estáticos são não lineares.

## 5.2 SISTEMAS DINÂMICOS

### 5.2.1 Sistema mecânico amortecido excitado

De acordo com (THOMSON, 1978) a resposta de um sistema linear de um grau de liberdade dependerá do tipo de excitação e do amortecimento presente. A equação do movimento tem a seguinte fórmula:

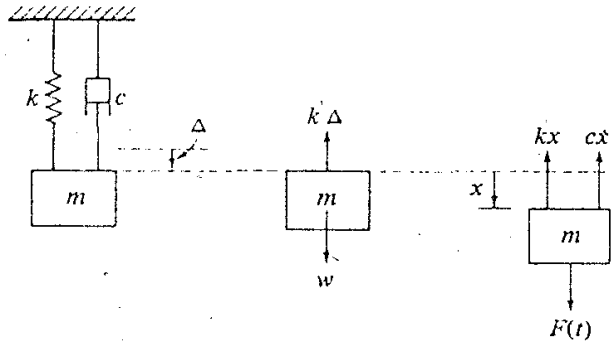
$$m \ddot{u} + F_d + K u = F(t), \quad (5.1)$$

na qual  $F(t)$  é referente a excitação e  $F_d$  à força de amortecimento. Apesar da dificuldade de uma descrição real da força de amortecimento, admitem-se modelos ideais de amortecimento, os quais resultam em previsões satisfatórias da resposta do sistema. O tratamento matemático mais simples é referente ao modelo de amortecimento viscoso, proporcional à velocidade, expresso pela seguinte equação:

$$F_d = c\dot{u}, \quad (5.2)$$

onde  $c$  represente uma constante de proporcionalidade.

Figura 33 - Representação simbólica de um amortecedor e seu diagrama de corpo livre.



Fonte: (THOMSON, 1978).

Analisando o diagrama do corpo-livre ilustrado na Figura 33, tem-se que a equação do movimento é expressa como:

$$m \ddot{u} + C\dot{u} + K u = F(t). \quad (5.3)$$

Na equação (5.3), caso  $F(t) \neq 0$ , tem-se a solução particular devido a excitação sem restrição. Porém, se  $F(t) = 0$ , a sua solução será uma equação diferencial homogênea cuja a solução corresponde fisicamente a de vibração livre de amortecimento. Examina-se apenas a equação homogênea para um entendimento inicial do efeito de amortecimento.

### 5.2.2 Decremento logarítmico

Determina-se a quantidade de amortecimento existente em um sistema a partir da taxa de decréscimo das oscilações livres. Quanto maior a taxa de decréscimo, maior será o amortecimento.

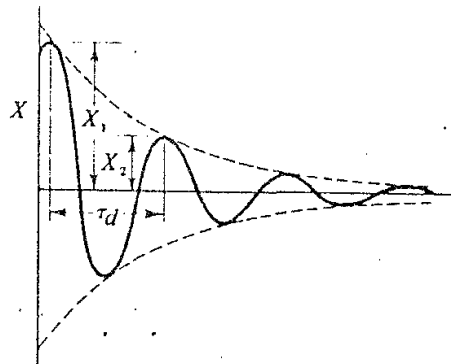
Define-se o decremento logarítmico como o logaritmo natural do quociente de duas quaisquer amplitudes consecutivas, representado pela seguinte expressão:



$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln \frac{e^{-(\zeta\omega_n t_1)} \text{sen}(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t_1 + \phi)}{e^{-(\zeta\omega_n(t_1+\tau_d))} \text{sen}(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n(t_1 + \tau_d + \phi))}, \quad (5.4)$$

onde a constante  $\phi$  é determinada de acordo com as condições iniciais e  $\tau_d$  é o período de amortecimento. Essa equação é representada graficamente pela Figura 34.

Figura 34 - Taxa de decréscimo da oscilação medida pelo decremento logarítmico.



Fonte: (THOMSON, 1978).

Como os valores dos senos são iguais, então, quando o tempo do período de amortecimento  $\tau_d$  é aumentado, obtém-se:

$$\delta = \ln \frac{e^{-(\zeta\omega_n t)}}{e^{-(\zeta\omega_n(t+\tau_d))}} = \ln e^{\zeta\omega_n \tau_d} = \zeta\omega_n \tau_d. \quad (5.5)$$

Sabendo que  $\omega_n = 2\pi/\omega\sqrt{1-\zeta^2}$  e substituindo-o em (5.5), a expressão do decremento logarítmico é definida como:

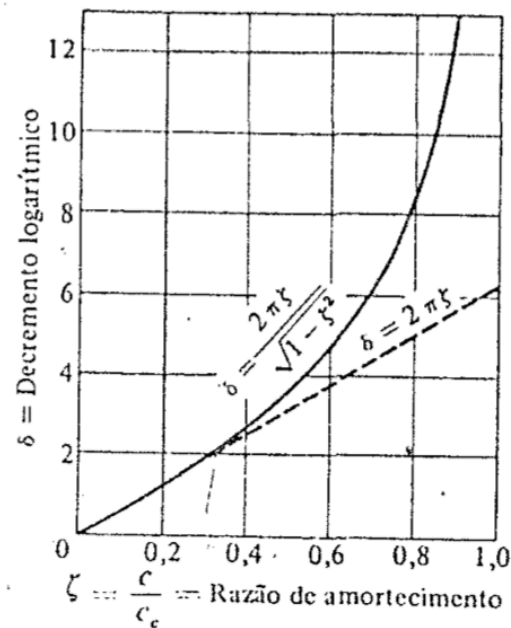
$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (5.6)$$

A equação em (5.6) é uma taxa exata. Com um valor pequeno de  $\zeta$ , a parcela  $\sqrt{1-\zeta^2} \cong 1$ . Logo é determinada uma equação aproximada igual a:

$$\delta = 2\pi\zeta. \quad (5.7)$$

Na Figura 35 estão representados os valores exatos e aproximados de decremento logarítmico em função de  $\zeta$ .

Figura 35 - Decremento logarítmico em função  $\zeta$ .



Fonte: (THOMSON, 1978).

### 5.2.3 Coeficientes de amortecimento

O amortecimento não é um fenômeno que depende apenas do material e sua geometria, como a inércia e rigidez. O comportamento deste efeito dependerá dos diversos parâmetros do sistema. O estabelecimento do coeficiente de amortecimento deve ser feito a partir de testes experimentais do sistema sobre o qual se deseja estudar. O sistema é submetido a uma vibração sob condição livre de carregamentos e os vetores componentes do deslocamento de pontos pré-estabelecidos e distribuídos ao longo da

estrutura, alimentam de forma discreta o modelo matemático a partir da determinação do decremento logarítmico da resposta.

Outra metodologia de cálculo que pode ser adotada consiste na combinação linear das matrizes de massa e de rigidez, formando uma matriz de amortecimento  $\mathbf{C}$  proporcional. Essa matriz  $\mathbf{C}$  é expressa na forma:

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}, \quad (5.8)$$

e conhecida como amortecimento de Rayleigh. No caso deste modelo, relaciona-se com o modelo real pela determinação dos coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$ , os quais são determinados em função de parâmetros particulares de cada sistema.

A matriz de amortecimento pode ser obtida então, a partir de uma análise modal, obtendo-se os coeficientes de interesse a partir da solução do problema do autovalor, utilizando métodos numéricos. Em resumo, para o estudo da matriz de amortecimento, calculam-se os coeficientes de Rayleigh, com o uso da análise modal e seus métodos associadas, ou seja, método de Jacobi e Interação de subespaços, os quais permitem a construção da matriz de amortecimento que será utilizada na equação do movimento. Para este trabalho é utilizado o método de Jacobi na determinação dos coeficientes de Rayleigh.

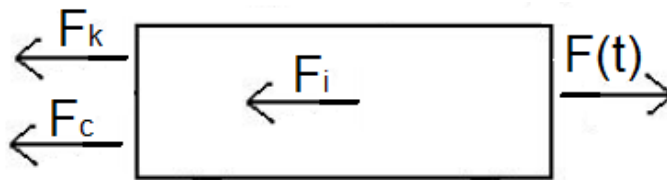
### 5.3 INTRODUÇÃO À ANÁLISE MODAL DE ESTRUTURAS

Para a investigação de características vibratórias, a ferramenta mais utilizada na engenharia é a análise modal, que consiste em uma metodologia para a determinação de modos normais e frequências naturais de um determinado sistema estrutural. Não é objetivo do trabalho se aprofundar neste tema. Um estudo completo sobre análise modal de estruturas pode ser encontrado em (CHOPRA, 1995).

Obtém-se a partir desta análise informações que contribuem na determinação dos parâmetros referentes ao amortecimento do sistema. A análise possibilita a determinação da matriz de amortecimento presente na equação do movimento do sistema.

Considerando um sistema mecânico amortecido excitado por uma força qualquer e sendo os elementos de amortecimento, rigidez e inércias representados respectivamente por  $c$ ,  $k$  e  $m$  e a força  $F(t)$  excitadora varável no tempo, tem-se o diagrama de corpo livre de um sistema massa-mola representado por:

*Figura 36 - Diagrama de corpo livre do sistema massa mola.*



Fonte: (DIAS, 2015).

Pelo somatório de forças atuantes no corpo de massa  $m$  igual a zero, obtém-se que:

$$F_m + F_c + F_K = F(t), \quad (5.9)$$

ou seja,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t). \quad (5.10)$$

Admitindo-se um problema em que  $F(t) = 0$  e um sistema não amortecido, a equação é reescrita na forma:

$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (5.11)$$

Uma possível solução para a equação diferencial em (5.11) é:

$$x_p(x) = X_0 \cos(\omega t), \quad (5.12)$$

Aplicando-se (5.12) em (5.11), a equação do movimento assume a seguinte forma:

$$-mX_0\omega^2 \cos(\omega t) + kX_0 \cos(\omega t) = 0, \quad (5.13)$$

Colocando  $\cos(\omega t)$  em evidência, obtém-se:

$$[-m\omega^2 X_0 + kX_0] \cos(\omega t) = 0 \quad (5.14)$$

A solução trivial é expressa por

$$[-m\omega^2 X_0 + kX_0] = 0, \quad (5.15)$$

Manipulando, tem-se:

$$m\omega^2 X_0 = kX_0. \quad (5.16)$$

Adotando esta equação para um sistema de vários graus de liberdades, pode-se expressar a equação de equilíbrio na seguinte forma:

$$\mathbf{M}\omega^2 \mathbf{X}_0 = \mathbf{K}\mathbf{X}_0, \quad (5.17)$$

utilizando a relação entre o autovalor da transformação  $\lambda$  e a frequência natural  $\omega$ , expresso como:

$$\lambda = \omega^2 \quad (5.18)$$

Então, manipula-se a expressão (5.17) como:

$$\omega^2 \mathbf{X}_0 = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{X}_0, \quad (5.19)$$

obtendo-se, então:

$$\lambda \mathbf{X}_0 = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{X}_0. \quad (5.20)$$

Definindo-se:

$$\mathbf{D} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}, \quad (5.21)$$

chega-se à relação:

$$\mathbf{D} \mathbf{X}_0 = \lambda \mathbf{X}_0. \quad (5.22)$$

A matriz  $\mathbf{D}$  é o operador linear e os valores de  $\lambda$  para soluções não nulas da equação (5.22) são denominados *autovalores* de  $\mathbf{D}$ , assumindo apenas valores reais. Os autovalores podem assumir valores complexos, porém no problema físico tratado assegura-se a restrição para valores reais pelo fato de a matriz simétrica real ter somente autovalores reais (KREYSZIG, 2011). Para cada autovalor  $\lambda_0$  tem-se um respectivo vetor  $\mathbf{X}_0$  não nulo, que satisfaça a equação (5.20), chamado de *autovetor*. O conjunto

das soluções da equação (5.20) forma uma base vetorial (KREIDER, 1966). Consequentemente, pode-se escrever a equação (5.20) como uma combinação linear dos autovetores da transformação.

É possível determinar a solução de problemas de autovalores e autovetores a partir de técnicas iterativas. Entretanto, deve-se considerar fatores relevantes para o funcionamento dos algoritmos de solução destes problemas, garantindo a eficiência dos métodos, principalmente em baixas frequências. Mais informações sobre esses fatores podem ser encontradas em (COHEN e MCCALLION, 1967).

### 5.3.1 Amortecimento Proporcional

O fenômeno do amortecimento proporcional dá-se por duas razões básicas: o amortecimento do material e a fricção das conexões ao longo da estrutura (ORBAN, 2011). Por conta da complexidade de grande parte de estruturas de engenharia e a existência de erros de medição, muitos algoritmos não consideram as forças de amortecimento presentes no sistema, mesmo devendo satisfazer a condição de confiabilidade do problema (CRISFIELD, 1997). Entretanto, a consideração do amortecimento traz maior respeito à condição real da estrutura. Assim sendo, foi desenvolvido um modelo baseado no amortecimento proporcional, onde a matriz de amortecimento é expressa em termos de funções contínuas arranjadas de forma especial com as matrizes de massa e rigidez (ADHIKARI, 2006).

Segundo (KUZMANOVIC, TOMLJANOVIC e TRUHAR, 2012), os parâmetros da definição do amortecimento proporcional e de Rayleigh são explicitamente expressos a partir da otimização de funções derivadas a partir da linearização da equação do movimento amortecido. De forma simplificada, o amortecimento é escrito como função linear das matrizes de massa e rigidez como:

$$\mathbf{C} = f(\mathbf{M}, \mathbf{K}, \alpha, \beta, \dots), \quad (5.23)$$

ou

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}. \quad (5.24)$$

Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  são obtidos, segundo (ORBAN, 2011), a partir da solução do sistema linear em (5.25) abaixo:

$$\xi = \frac{1}{2} \left( \alpha \omega_i + \frac{\beta}{\omega_i} \right), \quad (5.25)$$

onde  $\omega_i$  refere-se às frequências naturais do sistema que são determinadas pela análise modal.

De acordo com (ORBAN, 2011), muitos fatores influenciam a razão de amortecimento do material, tal como o tipo de material, amplitude das tensões, forças internas, número de ciclos, geometria, qualidade das superfícies e temperatura. Entretanto, o principal fator está relacionado ao nível de tensões contidas na estrutura (LAZAN, 1968).

O valor do fator de amortecimento  $\xi$  varia entre 2% e 15% para estruturas em aço e estruturas de concreto armado e protendido. Podem ser utilizados dados a partir de análises em laboratório para levantamento dos parâmetros. Porém para estruturas grandes e complexas, torna-se mais complicada uma análise experimental (HUANG, 2007). Alguns valores de amortecimento (não considerando a geometria, apenas as propriedades dos materiais) estão dispostas no quadro abaixo:



Quadro 7 - Razão de amortecimento de materiais sob condições normais de trabalho.

SISTEMA	$\xi$
Metal (regime elástico)	<0,01
Estrutura Metálica Contínua	0,02 a 0,04
Estrutura Metálica com Juntas	0,03 a 0,07
Alumínio / Linhas de Transmissão	0,0004
Tubulação com Pequenos Diâmetros	0,01 a 0,02
Tubulação com Grande Diâmetros	0,02 a 0,03
Absorvedores de Choque	0,03
Borracha	0,05
Grandes Construção Durante Terremotos	0,01 a 0,05

Fonte: (ORBAN, 2011).

Considerando duas frequências, pode-se escrever (5.25) como o sistema:

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{1}{2} \left( \alpha \omega_1 + \frac{\beta}{\omega_1} \right) \\ \xi_2 = \frac{1}{2} \left( \alpha \omega_2 + \frac{\beta}{\omega_2} \right), \end{cases} \quad (5.26)$$

Silva (2009) orienta que, por conta da imprecisão levantada pelo Quadro 7, é prudente admitir o mesmo coeficiente de amortecimento para ambas as frequências. Logo,  $\xi_1 = \xi_2 = \xi$  e igualando as parcelas à direita da expressão (5.25), tem-se:

$$\frac{1}{2} \left( \alpha \omega_{n1} + \frac{\beta}{\omega_{n1}} \right) = \frac{1}{2} \left( \alpha \omega_{n2} + \frac{\beta}{\omega_{n2}} \right). \quad (5.27)$$

Simplificando a expressão (5.27) e pondo  $\alpha$  e  $\beta$  em evidência para cada parcela, obtém-se:

$$\alpha(\omega_{n1} - \omega_{n2}) = \beta \left( \frac{1}{\omega_{n2}} - \frac{1}{\omega_{n1}} \right), \quad (5.28)$$

logo, obtém-se  $\alpha$  em função de  $\beta$  como:

$$\alpha = \beta \left( \frac{1}{\omega_{n1}\omega_{n2}} \right), \quad (5.29)$$

e da expressão (5.25) obtém-se  $\beta$  em função de  $\xi$  e  $\alpha$  como:

$$\beta = 2\xi\omega_{n1} - \alpha\omega_{n1}^2. \quad (5.30)$$

Então substitui-se (5.29) em (5.30) obtendo-se:

$$\alpha = \left( \frac{2\xi\omega_{n1}}{\omega_{n1}\omega_{n2}} - \frac{\alpha\omega_{n1}^2}{\omega_{n1}\omega_{n2}} \right). \quad (5.31)$$

Manipulando a expressão (5.31) e dispendo  $\alpha$  em evidência, obtém-se:

$$\alpha \left( 1 + \frac{\omega_{n1}}{\omega_{n2}} \right) = \frac{2\xi\omega_{n1}}{\omega_{n1}\omega_{n2}}. \quad (5.32)$$

Simplificando, a constante  $\alpha$  é definida como:

$$\alpha = \frac{2\xi}{(\omega_{n1} + \omega_{n2})}, \quad (5.33)$$

e substituindo (5.33) em (5.30), é obtida a constante  $\beta$  igual a:

$$\beta = \frac{2\xi\omega_{n1}\omega_{n2}}{(\omega_{n1} + \omega_{n2})}. \quad (5.34)$$

Portanto, a equação do sistema linear (5.25) torna-se:

$$\alpha = \frac{2\xi}{\omega_{n1} + \omega_{n2}} \quad e \quad \beta = \frac{2\xi\omega_{n1}\omega_{n2}}{\omega_{n1} + \omega_{n2}}. \quad (5.35)$$

Uma desvantagem do método de Rayleigh é o fato de que os modos relacionados com autovalores mais altos são desprezados e, geralmente, estes modos possuem uma razão maior de amortecimento. Além disso, considera-se o amortecimento proporcional em muitas análises. Entretanto, caso a análise constitua de variação muito grande das propriedades dos materiais, é mais apropriado um amortecimento não proporcional (BATHE, 1996).

#### 5.4 ALGORITMO DE NEWMARK

Para a determinação dos parâmetros de velocidade e aceleração na equação de equilíbrio é necessária a utilização de um algoritmo de interpolação. O método da integração direta sustenta-se em duas ideias básicas: o fato de se determinar o equilíbrio quase-estático a cada incremento de tempo, incluindo-se efeitos de inércia e amortecimento, sendo a não linearidade geométrica solucionada para cada um destes incrementos; e a consideração de uma variação para o deslocamento, velocidade e aceleração ao longo do intervalo de tempo usado durante o processo incremental (CRISFIELD, 1997). Existem inúmeros métodos de integração no tempo que podem ser utilizados na atualização de velocidades e acelerações. O método de Newmark (1959) é um dos mais utilizadas e foi adotado para esta pesquisa.

#### 5.4.1 Interpolação Linear da Aceleração – Método de Newmark:

Para um deslocamento  $\mathbf{u}$  tem-se, pela cinemática, que a velocidade média é:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \dot{\mathbf{u}}. \quad (5.36)$$

A aceleração é definida por:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{\mathbf{u}}. \quad (5.37)$$

Para movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV), a função horária de velocidade é igual a:

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_0 + \ddot{\mathbf{u}}\Delta t, \quad (5.38)$$

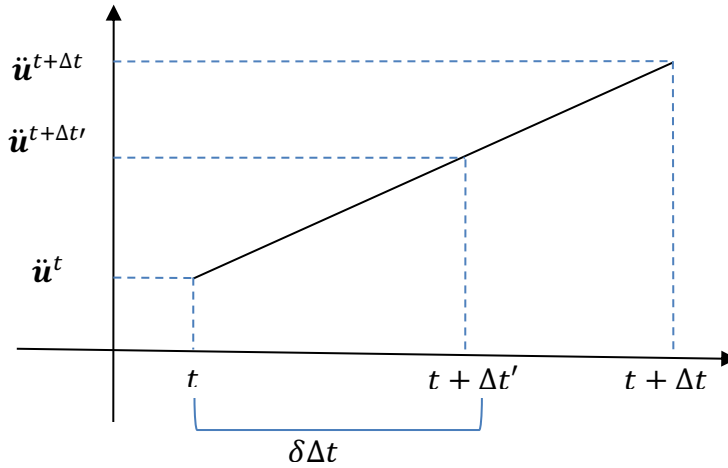
e a função horária do deslocamento  $\mathbf{u}$  é igual a,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \dot{\mathbf{u}}_0\Delta t + \frac{\ddot{\mathbf{u}}\Delta t^2}{2}. \quad (5.39)$$

Sendo assim, analisando o gráfico da Figura 37, para uma aceleração  $\ddot{\mathbf{u}}^t$  no tempo  $t$  e outra aceleração  $\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}$  no tempo  $t + \Delta t$ , pode-se determinar uma aceleração  $\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t'}$  em uma posição intermediária no tempo  $t + \Delta t'$ . Portanto, pela semelhança geométrica do gráfico, obtém-se:

$$\frac{\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{u}}^t}{\Delta t} = \frac{\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t'} - \ddot{\mathbf{u}}^t}{\delta\Delta t}. \quad (5.40)$$

Figura 37 – Newmark.



FONTE: Elaborado pelo autor.

Isolando a parcela  $\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t'}$  em (5.40), é possível definir a aceleração  $\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t'}$  no intervalo  $t + \delta\Delta t$ . Sendo assim, define-se  $\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t'}$  como:

$$\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t'} = \ddot{\mathbf{u}}^t + \delta \frac{(\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{u}}^t)}{\Delta t} \Delta t. \quad (5.41)$$

Simplificando (5.41), obtém-se:

$$\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t'} = (1 - \delta) \ddot{\mathbf{u}}^t + \delta \ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}. \quad (5.42)$$

Tomando-se  $\delta = 1$ , tem-se a Interpolação Linear de  $\Delta t$ :  $\ddot{\mathbf{u}}^t \rightarrow \ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}$  igual a:

$$\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t'} = \ddot{\mathbf{u}}^t + \frac{(\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{u}}^t)}{\Delta t} \Delta t. \quad (5.43)$$

Para facilitar manipulações matemáticas futuras, adota-se  $\frac{\delta}{2} = \alpha$  na equação (5.42) obtendo-se, então:

$$\frac{\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}}{2} = \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \ddot{\mathbf{u}}^t + \alpha \ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}. \quad (5.44)$$

Pela equação (5.38) e (5.42), o método de *Newmark* assume as seguintes equações:

$$\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}^t + [(1 - \delta) \ddot{\mathbf{u}}^t + \delta \ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}] \Delta t. \quad (5.45)$$

Substituindo a equação (5.44) em (5.39), obtém-se:

$$\mathbf{u}^{t+\Delta t} = \mathbf{u}^t + \dot{\mathbf{u}}^t \Delta t + \left[ \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \ddot{\mathbf{u}}^t + \alpha \ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} \right] \Delta t^2. \quad (5.46)$$

As constantes de Newmark  $\delta$  e  $\alpha$  e o incremento de tempo  $\Delta t$  estão relacionados com acurácia, convergência e estabilidade da integração (HILBER, HUGHES e TAYLOR, 1977). O método apresenta-se incondicionalmente estável quando  $\delta \geq \frac{1}{2}$  e  $\alpha \geq \frac{(2\delta+1)^2}{16}$  (DOKAINISH e SUBBARAJ, 1989). Neste trabalho, o método de *Newmark* assume que  $\delta = \frac{1}{2}$  e  $\alpha = \frac{1}{4}$ .

Da expressão do deslocamento em (5.46), pode-se obter a aceleração como:

$$\mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t - \dot{\mathbf{u}}^t \Delta t = \left[ \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \ddot{\mathbf{u}}^t + \alpha \ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} \right] \Delta t^2. \quad (5.47)$$

Manipulando matematicamente a equação (5.47), temos:

$$\frac{\mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t}{\Delta t^2} - \frac{\dot{\mathbf{u}}^t \Delta t}{\Delta t^2} = \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \ddot{\mathbf{u}}^t + \alpha \ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}. \quad (5.48)$$

Isolando-se a aceleração  $\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}$ , obtém-se, então:

$$\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \frac{\mathbf{u}^{t+\Delta t}}{\alpha \Delta t^2} - \frac{\mathbf{u}^t}{\alpha \Delta t^2} - \frac{\dot{\mathbf{u}}^t}{\alpha \Delta t} - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right) \ddot{\mathbf{u}}^t. \quad (5.49)$$

definindo:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2}, \\ a_2 &= \frac{1}{\alpha \Delta t} \text{ e} \\ a_3 &= \frac{1}{2\alpha} - 1, \end{aligned} \quad (5.50)$$

e, substituindo em (5.49), obtém-se:

$$\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = a_0 \mathbf{u}^{t+\Delta t} - a_0 \mathbf{u}^t - a_2 \dot{\mathbf{u}}^t - a_3 \ddot{\mathbf{u}}^t. \quad (5.51)$$

De forma simplificada, a equação acima pode ser reescrita por:

$$\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = a_0 (\mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t) - a_2 \dot{\mathbf{u}}^t - a_3 \ddot{\mathbf{u}}^t. \quad (5.52)$$

Da expressão da velocidade é obtida a seguinte equação:

$$\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}^t + [(1 - \delta) \dot{\mathbf{u}}^t + \delta \dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}] \Delta t. \quad (5.53)$$

Definindo

$$\begin{aligned} a_6 &= \Delta t (1 - \delta) \text{ e} \\ a_7 &= \delta \Delta t, \end{aligned} \quad (5.54)$$

tem-se:

$$\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}^t + a_6 \dot{\mathbf{u}}^t + a_7 \dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}. \quad (5.55)$$

Substituindo (5.51) em (5.55), obtém-se:

$$\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}^t + a_6 \ddot{\mathbf{u}}^t + a_7 \cdot [a_0 (\mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t) - a_2 \dot{\mathbf{u}}^t - a_3 \ddot{\mathbf{u}}^t]. \quad (5.56)$$

Definindo

$$a_1 = a_0 \cdot a_7 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}, \quad (5.57)$$

$$a_2 \cdot a_7 = \frac{\delta}{\alpha} e$$

$$a_3 \cdot a_7 = \frac{\delta \Delta t}{2\alpha} - \delta \Delta t,$$

tem-se:

$$\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}^t + a_6 \ddot{\mathbf{u}}^t + a_1 (\mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t) - \frac{\delta}{\alpha} \dot{\mathbf{u}}^t - a_3 a_7 \ddot{\mathbf{u}}^t. \quad (5.58)$$

Simplificando a expressão (5.58),

$$\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) \dot{\mathbf{u}}^t + (a_6 - a_3 a_7) \ddot{\mathbf{u}}^t + a_1 (\mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t). \quad (5.59)$$

Define-se

$$a_5 = a_6 - a_3 \cdot a_7, \quad (5.60)$$

Logo:

$$a_5 = a_6 - a_3 \cdot a_7 = \Delta t - \Delta t \delta - \frac{\delta \Delta t}{2\alpha} + \Delta t \delta = \Delta t - \frac{\delta \Delta t}{2\alpha} = \frac{\Delta t}{2} \left(2 - \frac{\delta}{\alpha}\right). \quad (5.61)$$

Expressando



$$a_4 = 1 - \frac{\delta}{\alpha}, \quad (5.62)$$

Portanto  $\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}$  é definido como:

$$\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = a_4 \dot{\mathbf{u}}^t + a_5 \ddot{\mathbf{u}}^t + a_1 (\mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t). \quad (5.63)$$

Sendo assim, o método de *Newmark* assume as equações (5.52), (5.55) e (5.63).

### 5.5 EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO PARA O MEF

Para os problemas de contato mecânico com grandes deformações, a equação de equilíbrio desenvolvida a partir (3.67) despreza os termos de inércia. Entretanto, no caso de problemas dinâmicos, utiliza-se, para a solução, a equação do movimento, considerando a aceleração, a massa, a velocidade e o amortecimento da estrutura analisado. Portanto, a equação de equilíbrio de um sistema não linear é definida por:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} + \mathbf{R}_{int}^{t+\Delta t} - \mathbf{R}_{ext}^{t+\Delta t} = \mathbf{0}, \quad (5.64)$$

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa;

$\mathbf{C}$  é a matriz de amortecimento;

$\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}$  é o vetor aceleração;

$\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}$  é o vetor velocidade;

$\mathbf{u}^{t+\Delta t}$  é o vetor deslocamento;

$\mathbf{R}_{ext}^{t+\Delta t}$  é o vetor das forças externas;

$\mathbf{R}_{int}^{t+\Delta t}$  é o vetor das forças internas, onde está incluída a força restauradora

resultante do processo iterativo. Como se trata de uma análise não linear, não é possível obter-se uma matriz de rigidez direta para o problema, como ocorre na análise linear e se utiliza  $\mathbf{K}\mathbf{u}$ , por exemplo.

Substituindo as equações (5.52) e (5.63) do método de *Newmark* em (5.64) e desenvolvendo-a, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \{a_0 (\mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t) - a_2 \dot{\mathbf{u}}^t - a_3 \ddot{\mathbf{u}}^t\} + \mathbf{C} \{a_4 \dot{\mathbf{u}}^t + a_5 \ddot{\mathbf{u}}^t + \\ a_1 (\mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t)\} + \mathbf{R}_{int}^{t+\Delta t} - \mathbf{R}_{ext}^{t+\Delta t} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (5.65)$$

expandindo os termos, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \{a_0 \mathbf{u}^{t+\Delta t} - a_0 \mathbf{u}^t - a_2 \dot{\mathbf{u}}^t - a_3 \ddot{\mathbf{u}}^t\} \\ + \mathbf{C} \{a_4 \dot{\mathbf{u}}^t + a_5 \ddot{\mathbf{u}}^t + a_1 \mathbf{u}^{t+\Delta t} - a_1 \mathbf{u}^t\} + \mathbf{R}_{int}^{t+\Delta t} - \mathbf{R}_{ext}^{t+\Delta t} \\ = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Então:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} a_0 \mathbf{u}^{t+\Delta t} + \mathbf{M} \{-a_0 \mathbf{u}^t - a_2 \dot{\mathbf{u}}^t - a_3 \ddot{\mathbf{u}}^t\} + \mathbf{C} \{a_1 \mathbf{u}^{t+\Delta t}\} \\ + \mathbf{C} \{a_4 \dot{\mathbf{u}}^t + a_5 \ddot{\mathbf{u}}^t - a_1 \mathbf{u}^t\} + \mathbf{R}_{int}^{t+\Delta t} - \mathbf{R}_{ext}^{t+\Delta t} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Reorganizando:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{M} a_0 + \mathbf{C} a_1\} \mathbf{u}^{t+\Delta t} + \mathbf{M} \{-a_0 \mathbf{u}^t - a_2 \dot{\mathbf{u}}^t - a_3 \ddot{\mathbf{u}}^t\} \\ + \mathbf{C} \{a_4 \dot{\mathbf{u}}^t + a_5 \ddot{\mathbf{u}}^t - a_1 \mathbf{u}^t\} + \mathbf{R}_{int}^{t+\Delta t} - \mathbf{R}_{ext}^{t+\Delta t} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Expressando, convenientemente, os parâmetros desconhecidos em evidência (tempo  $t + \Delta t$ ), obtém-se:

$$\begin{aligned} \{a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C}\} \mathbf{u}^{t+\Delta t} + \mathbf{R}_{int}^{t+\Delta t} - \mathbf{R}_{ext}^{t+\Delta t} + \mathbf{M} \{-a_0 \mathbf{u}^t - a_2 \dot{\mathbf{u}}^t - a_3 \ddot{\mathbf{u}}^t\} \\ + \mathbf{C} \{a_4 \dot{\mathbf{u}}^t + a_5 \ddot{\mathbf{u}}^t - a_1 \mathbf{u}^t\} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Considerando  $\mathbf{F}$  o vetor resíduo da equação de equilíbrio, a equação acima pode ser escrita como:

$$\mathbf{F}^{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{int}^{t+\Delta t} + \mathbf{F}_{int}^t + \mathbf{R}_{int}^{t+\Delta t} - \mathbf{R}_{ext}^{t+\Delta t}, \quad (5.70)$$

onde

$$\mathbf{F}_{int}^{t+\Delta t} = \{a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C}\} \mathbf{u}^{t+\Delta t}, \quad (5.71)$$

e

$$\mathbf{F}_{int}^t = \mathbf{M} \{-a_0 \mathbf{u}^t - a_2 \dot{\mathbf{u}}^t - a_3 \ddot{\mathbf{u}}^t\} + \mathbf{C} \{a_4 \dot{\mathbf{u}}^t + a_5 \ddot{\mathbf{u}}^t - a_1 \mathbf{u}^t\}. \quad (5.72)$$

A matriz de rigidez é obtida da seguinte forma:

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{F}^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{u}^{t+\Delta t}} = \frac{\partial \mathbf{F}_{int}^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{u}^{t+\Delta t}} + \frac{\partial \mathbf{F}_{int}^t}{\partial \mathbf{u}^{t+\Delta t}} + \frac{\partial \mathbf{R}_{int}^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{u}^{t+\Delta t}} - \frac{\partial \mathbf{R}_{ext}^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{u}^{t+\Delta t}}, \quad (5.73)$$

Então

$$\mathbf{K}^{t+\Delta t} = \frac{\partial \mathbf{F}_{int}^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{u}^{t+\Delta t}} + \mathbf{0} + \frac{\partial \mathbf{R}_{int}^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{u}^{t+\Delta t}} - \mathbf{0}. \quad (5.74)$$

Portanto,

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{F}^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{u}^{t+\Delta t}} = \frac{\partial [\{a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C}\} \mathbf{u}^{t+\Delta t}]}{\partial \mathbf{u}^{t+\Delta t}} + \frac{\partial [\mathbf{R}_{int}^{t+\Delta t}]}{\partial \mathbf{u}^{t+\Delta t}}, \quad (5.75)$$

E conseqüentemente, considerando que a análise é não-linear e que  $\frac{\partial [R_{int}^{t+\Delta t}]}{\partial \mathbf{u}^{t+\Delta t}} = \mathbf{K}_{int}^{t+\Delta t}$ , a equação (5.75) resulta em:

$$\mathbf{K}^{t+\Delta t} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C} + \mathbf{K}_{int}^{t+\Delta t}. \quad (5.76)$$

Então, tem-se:

$$\mathbf{K}^{t+\Delta t} \mathbf{d}^{t+\Delta t} = \mathbf{F}^{t+\Delta t} \quad (5.77)$$

A equação (5.77) é resolvida iterativamente pelo método de Newton.

O quadro abaixo resume, a partir das formulações deduzidas nesta seção, o método de Newmark para determinação dos parâmetros de velocidade, aceleração e deslocamento.

Passo 1) Conhecido o deslocamento:  $\mathbf{u}^{t+\Delta t}$

Passo 2) Calcular a velocidade e a aceleração:

$$\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = a_4 \dot{\mathbf{u}}^t + a_5 \ddot{\mathbf{u}}^t + a_1 (\mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = a_0 (\mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t) - a_2 \dot{\mathbf{u}}^t - a_3 \ddot{\mathbf{u}}^t$$

Passo 3) Calcular o Resíduo  $\mathbf{F}^{t+\Delta t}$ :

$$\mathbf{F}^{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{int}^{t+\Delta t} + \mathbf{F}_{int}^t + \mathbf{R}_{int}^{t+\Delta t} - \mathbf{R}_{ext}^{t+\Delta t}$$

3.a) onde:

$$\mathbf{F}_{int}^{t+\Delta t} = \{a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C}\} \mathbf{u}^{t+\Delta t}$$

e

$$\mathbf{F}_{int}^t = \mathbf{M} \{-a_0 \mathbf{u}^t - a_2 \dot{\mathbf{u}}^t - a_3 \ddot{\mathbf{u}}^t\} + \mathbf{C} \{a_4 \dot{\mathbf{u}}^t + a_5 \ddot{\mathbf{u}}^t - a_1 \mathbf{u}^t\}$$

e

$$\mathbf{F}_{ext}^{t+\Delta t} = \mathbf{R}^{t+\Delta t}$$

Passo 4) Calcular a matriz de rigidez:

$$\mathbf{K}^{t+\Delta t} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C} + \mathbf{K}_{int}^{t+\Delta t}$$

Passo 5) Resolver iterativamente pelo método de Newton:

$$\mathbf{K}^{t+\Delta t} \mathbf{d}^{t+\Delta t} = \mathbf{F}^{t+\Delta t}$$

## 5.6 FORMULAÇÃO DINÂMICA COM CONTATO

As formulações do contato, deduzidas no capítulo 3, são adicionadas às equações de equilíbrio da dinâmica apresentadas neste capítulo. A matriz de rigidez com o acréscimo das matrizes de contato normal e tangencial é definida como:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{int}^{t+\Delta t} + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C} + \mathbf{K}_\lambda + \mathbf{K}_N + \mathbf{K}_T. \quad (5.78)$$

O vetor resíduo  $\mathbf{F}$  da equação de equilíbrio obtido em (5.70), com o acréscimo da contribuição do contato, pode ser reescrito como:

$$\mathbf{F}^{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{int}^{t+\Delta t} + \mathbf{F}_{int}^t + \mathbf{R}_{int}^{t+\Delta t} + \mathbf{R}_\lambda + \mathbf{R}_N + \mathbf{R}_T - \mathbf{R}_{ext}^{t+\Delta t}. \quad (5.79)$$

Substituindo (5.72) em (5.79), o vetor  $\mathbf{F}$  resulta em:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{t+\Delta t} = & \mathbf{F}_{int}^{t+\Delta t} + \mathbf{R}_\lambda + \mathbf{R}_N + \mathbf{R}_T + \mathbf{M} \{-a_0 \mathbf{u}^t - a_2 \dot{\mathbf{u}}^t - a_3 \ddot{\mathbf{u}}^t\} \\ & + \mathbf{C} \{a_4 \dot{\mathbf{u}}^t + a_5 \ddot{\mathbf{u}}^t - a_1 \mathbf{u}^t\} - \mathbf{R}_{ext}^{t+\Delta t}. \end{aligned} \quad (5.80)$$

## 5.7 MATRIZ MASSA E DE AMORTECIMENTO

Ao modelar a distribuição em massa de uma estrutura, considera-se que a massa está distribuída no domínio do elemento. Nesse contexto, Chopra (2012) afirma que ao discretizar o modelo em elementos finitos, deve ser considerada a influência tanto da massa concentrada nos nós quanto da massa distribuída ao longo do elemento, uma vez que a contribuição de ambas é de fundamental importância no comportamento da estrutura em relação aos graus de liberdade de aceleração.

Na demonstração da montagem da matriz de rigidez estrutural desenvolveu-se o cálculo dos deslocamentos através de um modelo discretizado. Ou seja, a partir dos deslocamentos nodais, interpola-se os deslocamentos da estrutura inteira. Do mesmo modo, com intuito de determinar a inércia estrutural - Forças de Inércia - do sistema através do (MEF) dentro dos elementos, deve ser conhecida a aceleração dentro destes. Assim, ao usar as funções de interpolação como usado para derivar a matriz de rigidez, o resultado obtido será a matriz de massa consistente (CHOPRA, 2012). De forma geral, usando o princípio dos deslocamentos virtuais obtém-se a equação da matriz de massa consistente:

$$m_{ij} = \int_V m(x) \Phi_i(x) \Phi_j(x) dx \quad (5.81)$$

Resumindo, a mesma função de forma que descreve o deslocamento interno do elemento em termos de deslocamentos nodais, será utilizada para fornecer aceleração interna em termos das acelerações nodais. Assim, as propriedades estruturais de Massa e Rigidez são concentradas em pontos discretos na montagem da matriz do elemento através do princípio dos trabalhos virtuais. Portanto, como será demonstrado, a matriz de massa do elemento finito de referência local é escrita como (NELSON, 1980):

$$\mathbf{M}^e = \int_{V^e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV^e, \quad (5.82)$$

sendo:

$\mathbf{M}^e$  é a matriz de massa do elemento (24 X 24);

$\mathbf{N}$  é a matriz de forma (3 X 24);

$\rho$  é a densidade do material do elemento;

$V^e$  é o volume do elemento.

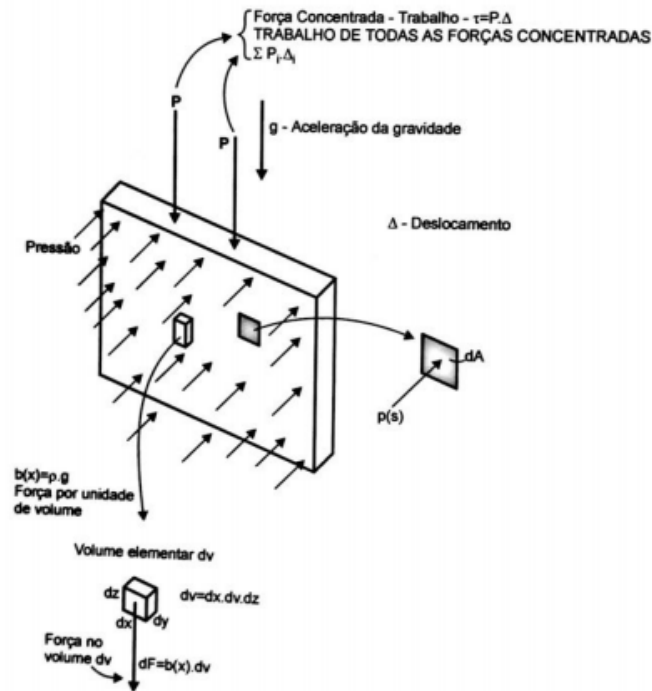
É importante ressaltar que a matriz de forma  $\mathbf{N}$  é obtida através das mesmas funções de forma do elemento e é dada por:

$$[\mathbf{N}]_{3 \times 24} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}. \quad (5.83)$$

### 5.7.1 Determinação da matriz de massa da estrutura

Nesta seção será feita uma breve demonstração da obtenção da matriz massa consistente, bem como da matriz de Massa da Estrutura. Da teoria da mecânica do contínuo, exposta por Pimenta (2006), ao calcular o trabalho devido a todas as forças externas sobre um volume elementar de um sólido ou estrutura, deve-se somar a contribuição do trabalho de cada força atuando em cada volume, ao longo do volume inteiro, como ilustra a Figura 38.

Figura 38 - Tipos de Forças externas que provocam o deslocamento correspondentes a estrutura, permitindo o cálculo do trabalho.



Fonte: (ALVES, 2008).

Esse trabalho total é armazenado na forma de energia de deformação, na configuração deformada da estrutura - Forças Concentradas, Forças de Volume e Forças de Superfície.

Tal soma será obtida através da integral ao longo de todo volume em função dos trabalhos virtuais, que será expresso nesta demonstração por  $(\Delta)$ .

$$\tau_{ex} = \Delta^T P + \int \Delta^T(x) b(x) dV + \int \Delta^T(s) p(s) dA, \quad (5.84)$$

em que,

$\tau_{ex}$  é o trabalho Externo;

$\Delta^T P$  é o trabalho Virtual efetuado pelas Cargas Pontuais;

$\int \Delta^T(x) b(x) dV$  é o trabalho Virtual efetuado pelas Forças de Volume;

$\int \Delta^T(s) p(s) dA$  é o trabalho Virtual efetuado pelas Forças de Superfície.



De acordo com Avelino (2008), o trabalho externo provoca uma energia de deformação por unidade de volume da estrutura e, por consequência, surge um trabalho interno, que se estende no domínio de todo o corpo contínuo. Assim, em termos gerais tem-se:

$$\tau_{int} = \int \varepsilon^T(x)\tau(x)dV. \quad (5.85)$$

Igualando as equações (5.84) e (5.85), tem-se a equação geral do princípio dos trabalhos virtuais para estrutura inteira.

$$\begin{aligned} \tau_{ex} = \Delta^T P + \int \Delta^T(x)b(x)dV + \int \Delta^T(s)p(s)dA &= \tau_{int} \\ &= \int \varepsilon^T(x)\tau(x)dV. \end{aligned} \quad (5.86)$$

A solução desta equação torna-se uma tarefa muito complicada, principalmente quando a mesma modela sistemas estruturais com domínio irregular, que é o caso da maior parte das estruturas reais. Para solucionar este problema, Avelino (2008) elucida que se deve subdividir a estrutura em elementos finitos, conectados em pontos discretos, nós, e portanto, representar os deslocamentos dentro do elemento através das funções de interpolação  $N_i(x)$ . Uma vez que,

$$\Delta(x) = N_i(x)\Delta, \quad (5.87)$$

$$\varepsilon = B\Delta, \quad (5.88)$$

$$\tau = C\varepsilon. \quad (5.89)$$

Realizando as devidas substituições na equação (5.86), tem-se:

$$\begin{aligned} \Delta^T P + \sum_e \left[ \int_{V^e} (N\Delta)^T b(x) dV^e + \int_{A^e} \int_{V^e} (N\Delta)^T p(s) dA^e \right] \\ = \sum_e \int_{V^e} \int_{V^e} (B\Delta)^T CB dV^e \end{aligned} \quad (5.90)$$

Assim, após operações algébricas, obtém-se:

$$\begin{aligned} \Delta^T \left[ P + \sum_e \int_{V^e} N^T b(x) dV^e + \int_{A^e} N^T p(s) dA^e \right] \\ = \Delta^T \sum_e \int_{V^e} B^T CB dV^e \Delta \end{aligned} \quad (5.91)$$

Eliminando o  $\Delta^T$ , defini-se a expressão geral das cargas atuando em uma estrutura contínua, através do modelo discreto na forma de Cargas Nodais Equivalentes, ou seja,

$$\mathbf{F}_{Nodais} = [\mathbf{K}_{Estrutura}] \{\Delta_{Nodais}\}, \quad (5.92)$$

em que

$\mathbf{F}_{Nodais}$  = Forças Nodais equivalentes as Forças Distribuídas ao longo de todos os elementos;

$[\mathbf{K}_{Estrutura}]$  = Matriz de Rigidez Estrutural;

$\{\Delta_{Nodais}\}$  = Deslocamentos Nodais da Estrutura Inteira.

Dessa forma, através da definição exposta é possível formular a massa no modelo discreto em Elementos Finitos, equivalente à massa distribuída da estrutura em estudo (AVELINO, 2008). Por definição, conforme Hibbeler (2009), temos que a força de inércia é uma força de Volume, devendo ser representada por:

$$\int_{V^e} \mathbf{N}^T b(x) dV^e. \quad (5.93)$$

Como a força de inércia por unidade de volume é dada por:

$$b(x) = \rho \ddot{\Delta}(x), \quad (5.94)$$

a força nodal equivalente aos efeitos de inércia é escrita como:

$$\mathbf{F}_e = \sum_e \int_{V^e} \mathbf{N}^T \rho \ddot{\Delta}(x) dV^e. \quad (5.95)$$

Por fim, como a mesma função de forma que descreve os deslocamentos internos do elemento também fornece a aceleração interna em termos das acelerações nodais, tem-se:

$$\mathbf{F}_e = \sum_e \int_{V^e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} \ddot{\Delta}(x) dV^e. \quad (5.96)$$

Em notação matricial a expressão é rescrita na forma

$$\mathbf{F}_e = \sum_e \left\{ \int_{V^e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N}(x) dV^e \right\} \ddot{\mathbf{u}}. \quad (5.97)$$

Onde:

$\mathbf{F}_e$  é o vetor Força Nodal;

$\mathbf{M}^e = \int_{V^e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N}(x) dV^e$  é a massa Consistente do Elemento, que considera os efeitos de inércia no elemento;

$\ddot{\mathbf{u}}$  é o vetor aceleração nodal.

Portanto, a massa total da estrutura é obtida através da combinação entre a matriz de massa concentrada nos nós e a matriz de massa consistente (distribuídas ao longo dos elementos), ou seja:

$$[\mathbf{M}_{total}] = [\mathbf{M}_{nodal}] + [\mathbf{M}_{elementos}]. \quad (5.98)$$

Assim, após serem determinadas as matrizes estruturais para os elementos hexaédricos da estrutura, é possível construir a matriz de amortecimento também da estrutura.

Segundo (CHOPRA, 1995), durante a discretização do modelo em elementos finitos, deve-se levar em consideração a massa concretada e a massa distribuída ao longo do elemento. Ambas possuem uma importante contribuição no comportamento da estrutura em relação aos graus de liberdade de aceleração.

Pode-se escrever a matriz massa do elemento como uma combinação linear de uma matriz de massas concentradas como:

$$\mathbf{M}^l = \frac{j\rho}{8} \mathbf{I} \int_V dr ds dt. \quad (5.99)$$

Soma-se a matriz (5.99) à matriz consistente que expressa como:

$$\mathbf{M}^c = \rho \iiint_{-1}^1 \mathbf{H}^T \mathbf{H} j dr ds dt, \quad (5.100)$$

onde  $\mathbf{H}$  é a matriz das funções de interpolação em (5.101) e  $\rho$  é a massa por unidade de volume do material.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & \cdots & h_8 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & \cdots & h_8 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & \cdots & h_8 \end{bmatrix}. \quad (5.101)$$

Sendo assim, obtém-se:

$$\mathbf{M} = a_1 \mathbf{M}^c + a_2 \mathbf{M}^l, \quad (5.102)$$

onde  $a_1$  e  $a_2$  são os coeficientes de ponderação.

### 5.7.2 Determinação da matriz de amortecimento da estrutura

A construção da matriz de amortecimento vai ser em função da análise. Neste trabalho utiliza-se o modelo do método dos elementos finitos, utilizando a seguinte relação:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}, \quad (5.103)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são as constantes de Rayleigh para o amortecimento proporcional, anteriormente explicadas na seção 5.3 do capítulo 5.

## 5.8 ALGORITMO DE CONTATO COM DINÂMICA

São utilizados os parâmetros definidos nas seções 5.2 e 5.3 com o algoritmo alternativo do Lagrangiano Aumentado para o contato com atrito. Define-se, então, uma modelagem numérica de estruturas tridimensionais submetidas ao contato com dinâmica utilizando o Método dos Elementos Finitos. Sendo assim, o algoritmo a seguir representa uma aplicação da dinâmica não linear e do contato mecânico com atrito.

**ALGORITMO ALTERNATIVO DO LAGRANGIANO  
AUMENTADO PARA O CONTATO COM ATRITO E DINÂMICA**

***I) Processo de iniciação das iterações***

a) Estime o deslocamento inicial  $\mathbf{u}^{(0)}$ , uma velocidade inicial  $\dot{\mathbf{u}}^{(0)}$ , uma aceleração inicial  $\ddot{\mathbf{u}}^{(0)}$ , os coeficientes do Método de Newmark  $\alpha = \frac{1}{4} = 0,25$  e  $\delta = \frac{1}{2} = 0,5$ , um incremento de tempo  $\Delta t$  e um valor para as penalidades  $\xi$ ,  $\xi_N$  e  $\xi_T$ . Faça  $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(0)}$ . Os parâmetros de Newmark devem satisfazer  $\delta \geq 0,5$  e  $\alpha \geq 0,25 \cdot (0,5 + \delta)^2$ . O incremento de tempo sugerido é  $\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{L}{c} \sqrt{\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)}}$ , onde  $L$  é a dimensão do menor lado do elemento finito,  $E$  é o módulo de elasticidade,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $\rho$  é a massa volumétrica do material e  $c = \sqrt{E/\rho}$  é a velocidade da onda em uma dimensão. Adote os multiplicadores de Lagrange:  $\boldsymbol{\lambda}^{(0)} = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_N^{(0)} = \langle \boldsymbol{\lambda}_N^{(0)} + \xi_N \mathbf{g} \rangle$ ,  $\Delta \boldsymbol{\lambda}_T^{(0)} = \mathbf{0}$  e faça  $\mathbf{t}_T = \mathbf{0}$  e  $\Gamma_{stick}^{(0)} = \Gamma$ . Adote o coeficiente de atrito  $\mu = \mu_a + \mu_p \approx 0,2 + \frac{2}{\pi} \tan \theta$ , onde  $\mu_a$  é resultado da aderência (“adhesion”),  $\mu_p$  é resultado da deformação plástica (“plowing”) e  $5^\circ \leq \theta \leq 10^\circ$ .

b) São definidos os parâmetros:

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}$$

$$a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}$$

$$a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}$$

$$a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$$

$$a_4 = 1 - \frac{\delta}{\alpha}$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( 2 - \frac{\delta}{\alpha} \right)$$

$$a_6 = \Delta t (1 - \delta)$$

$$a_7 = \delta \Delta t$$

c) Seja  $\mathbf{R}_\lambda$  o vetor das restrições de igualdade,  $\mathbf{R}_N$  o vetor das restrições de desigualdade (força normal do contato) e  $\mathbf{R}_T$  o vetor das restrições de desigualdade (força tangencial do contato). Calcule a linearidade exata:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(0)}, \dot{\mathbf{u}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{u}}^{(0)}, \boldsymbol{\lambda}^{(0)}, \boldsymbol{\lambda}_N^{(0)}, \Delta\boldsymbol{\lambda}_T^{(0)}) \\ = \mathbf{F}_{int}^{t+\Delta t} + \mathbf{R}_\lambda + \mathbf{R}_N + \mathbf{R}_T + \mathbf{M} \{-a_0 \mathbf{u}^t - a_2 \dot{\mathbf{u}}^t - a_3 \ddot{\mathbf{u}}^t\} \\ + \mathbf{C} \{a_4 \dot{\mathbf{u}}^t + a_5 \ddot{\mathbf{u}}^t - a_1 \mathbf{u}^t\} - \mathbf{R}_{ext}^{t+\Delta t} \\ \mathbf{K}(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(0)}, \dot{\mathbf{u}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{u}}^{(0)}, \boldsymbol{\lambda}^{(0)}, \boldsymbol{\lambda}_N^{(0)}, \Delta\boldsymbol{\lambda}_T^{(0)}) = \mathbf{K}_{int}^{t+\Delta t} + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C} + \mathbf{K}_\lambda + \mathbf{K}_N + \mathbf{K}_T \end{aligned}$$

d) Calcule a direção inicial  $\Delta\mathbf{u}^{(0)}$  resolvendo o sistema:

$$\mathbf{K}^{(0)} \Delta\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{F}^{(0)}$$

e) Inicie a energia  $G_C = \Delta\mathbf{u}^{(0)} \cdot \mathbf{F}^{(0)}$  e faça  $G_I = G_C$ .

f) Inicie o contador  $j$  das iterações do BFGS, o contador  $i$  do Método de Newton e o contador  $k$  do Lagrangiano Aumentado:  $i = 0, j = 0, k = 0$ . Faça  $t = 0$  e vá ao passo IIa.

## II) Itere em $i$ até atingir o equilíbrio

a) Incremente:

$$\mathbf{u}^{(i+1)} = \mathbf{u}^{(i)} - s^{(i)} \Delta\mathbf{u}^{(i)}$$

b) Teste o equilíbrio:

$$\text{SE} \quad G_C \leq ETOL \cdot G_I, \quad \text{ENTÃO} \quad \text{vá para o passo III.}$$

g) Vá para a Tabela 2 (Método de Newton).

### III ) Atualização dos multiplicadores de Lagrange

a) Calcule os novos multiplicadores  $\lambda_{tr}$  para todas as restrições.

Restrições de igualdade:

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \xi \cdot \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)})$$

Restrições de desigualdade: Força normal.

$$\lambda_N^{(k+1)} = \langle \lambda_N^{(k)} + \xi_N \cdot \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}) \rangle$$

Restrições de desigualdade: Força tangencial  $\mathbf{t}_{T_{i+1}} = \left\| \mathbf{t}_{T_i} + \Delta \lambda_T^{(k)} + \xi_T \cdot \Delta \mathbf{u}_T^{(k)} \right\|$ .

$$\text{SE} \quad \mathbf{t}_{T_{i+1}} \leq \mu \lambda_N^{(k+1)}$$

$$\text{ENTÃO} \quad \Delta \lambda_T^{(k+1)} = \Delta \lambda_T^{(k)} + \xi_T \cdot \Delta \mathbf{u}_T^{(k)}, \quad x \in \Gamma_{stick}^{(k+1)}.$$

$$\text{CASO CONTRÁRIO:} \quad \Delta \lambda_T^{(k+1)} = \frac{\mathbf{t}_{T_i} + \Delta \lambda_T^{(k)} + \xi_T \cdot \Delta \mathbf{u}_T^{(k)}}{\left\| \mathbf{t}_{T_i} + \Delta \lambda_T^{(k)} + \xi_T \cdot \Delta \mathbf{u}_T^{(k)} \right\|} \mu \lambda_N^{(k+1)} - \mathbf{t}_{T_i},$$

$$x \notin \Gamma_{stick}^{(k+1)}.$$

b) Faça  $k = k + 1$  e atualize os multiplicadores de Lagrange:  $\lambda^{(k+1)}$ ,  $\lambda_N^{(k+1)}$  e  $\Delta \lambda_T^{(k+1)}$ .

c) Checar a convergência dos multiplicadores:

$$\text{SE} \quad \left\| \lambda_{tr}^{(k+1)} - \lambda_{tr}^{(k)} \right\| / \left\| \lambda_{tr}^{(k)} \right\| \leq KTOL,$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}) \leq TOL1, \quad \text{para todo } x \in \Gamma,$$

$$\left\| \mathbf{u}_{T_i} - \mathbf{u}_{T_{i-1}} \right\| \leq TOL2, \quad \text{para todo } x \in \Gamma \text{ tal que, } \left\| \mathbf{t}_{T_i} \right\| < \mu \cdot \langle \lambda_N^{(k)} + \xi_N \cdot \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}) \rangle$$

e

$$\left\| \mathbf{t}_{T_i} \right\| \leq (1 + TOL3) \cdot \mu \cdot \langle \lambda_N^{(k)} + \xi_N \cdot \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}) \rangle, \quad \text{para todo } x \in \Gamma,$$

ENTÃO pare. O sistema convergiu. Atualize a iteração do Método de

Newmark:

$$\mathbf{u}^{(t+1)} = \mathbf{u}^{(i)} - \Delta \mathbf{u}^{(i)}$$

$$\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = a_4 \dot{\mathbf{u}}^t + a_5 \ddot{\mathbf{u}}^t + a_1 (\mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = a_0 (\mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t) - a_2 \dot{\mathbf{u}}^t - a_3 \ddot{\mathbf{u}}^t$$



Faça  $t = t + 1$

Caso exista um novo incremento de tempo do Método de Newmark, vá ao passo IIa. Caso contrário, o sistema convergiu.

CASO CONTRÁRIO, vá ao passo IIIId.

d) Reinicie com os novos multiplicadores:

i) Calcule o novo resíduo:  $\mathbf{F}(\mathbf{u}^{(i+1)}, \mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{a}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}_N^{(k)}, \Delta\boldsymbol{\lambda}_T^{(k)})$ .

ii) Calcule a direção  $\Delta\mathbf{u}^{(i)}$  resolvendo o sistema:

$$\mathbf{K}^{(i)} \Delta\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{F}(\mathbf{u}^{(i+1)}, \mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{a}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}_N^{(k)}, \Delta\boldsymbol{\lambda}_T^{(k)}).$$

iii) Atualize a energia:  $G_C = \Delta\mathbf{u}^{(i)} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u}^{(i+1)}, \mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{a}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}_N^{(k)}, \Delta\boldsymbol{\lambda}_T^{(k)})$

e) Repetir até atingir o equilíbrio: vá ao passo IIa.

Tabela 1: Algoritmo alternativo do Lagrangiano Aumentado para o impacto com atrito em elementos finitos

## MÉTODO DE NEWTON

a) Incremente o contador da iteração:  $i = i + 1$ .

b) Calcule a linearidade exata:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(0)}, \dot{\mathbf{u}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{u}}^{(0)}, \boldsymbol{\lambda}^{(0)}, \boldsymbol{\lambda}_N^{(0)}, \Delta\boldsymbol{\lambda}_T^{(0)})$$

$$= \mathbf{F}_{int}^{t+\Delta t} + \mathbf{R}_\lambda + \mathbf{R}_N + \mathbf{R}_T + \mathbf{M} \{-a_0 \mathbf{u}^t - a_2 \dot{\mathbf{u}}^t - a_3 \ddot{\mathbf{u}}^t\} \\ + \mathbf{C} \{a_4 \dot{\mathbf{u}}^t + a_5 \ddot{\mathbf{u}}^t - a_1 \mathbf{u}^t\} - \mathbf{R}_{ext}^{t+\Delta t}$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(0)}, \dot{\mathbf{u}}^{(0)}, \ddot{\mathbf{u}}^{(0)}, \boldsymbol{\lambda}^{(0)}, \boldsymbol{\lambda}_N^{(0)}, \Delta\boldsymbol{\lambda}_T^{(0)}) = \mathbf{K}_{int}^{t+\Delta t} + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C} + \mathbf{K}_\lambda + \mathbf{K}_N + \mathbf{K}_T$$

$$\text{onde } \mathbf{t}_{T_i}(\mathbf{u}_i^{(k)}) = \begin{cases} \mathbf{t}_{T_{i-1}} + \Delta\boldsymbol{\lambda}_T^{(k)} + \boldsymbol{\xi}_T \cdot \Delta\mathbf{u}_T^{(k)} & , \text{ se } \mathbf{x} \in \Gamma_{stick}^{(k)} \\ \mathbf{t}_{T_{i-1}} + \Delta\boldsymbol{\lambda}_T^{(k)} & \text{ se } \mathbf{x} \notin \Gamma_{stick}^{(k)} \end{cases}.$$

c) Calcule a direção  $\Delta\mathbf{u}^{(i)}$  resolvendo o sistema:

$$\mathbf{K}^{(i)} \Delta\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{F}^{(i)}(\mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{u}^{(i-1)}, \mathbf{v}^{(i-1)}, \mathbf{a}^{(i-1)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}_N^{(k)}, \Delta\boldsymbol{\lambda}_T^{(k)}).$$

d) Atualize a energia:  $G_C = \Delta\mathbf{u}^{(i)} \cdot \mathbf{F}^{(i)}(\mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{u}^{(i-1)}, \mathbf{v}^{(i-1)}, \mathbf{a}^{(i-1)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}_N^{(k)}, \Delta\boldsymbol{\lambda}_T^{(k)})$ .

e) Faça  $j = 0$  e vá ao passo IIa do algoritmo descrito na Tabela 1.

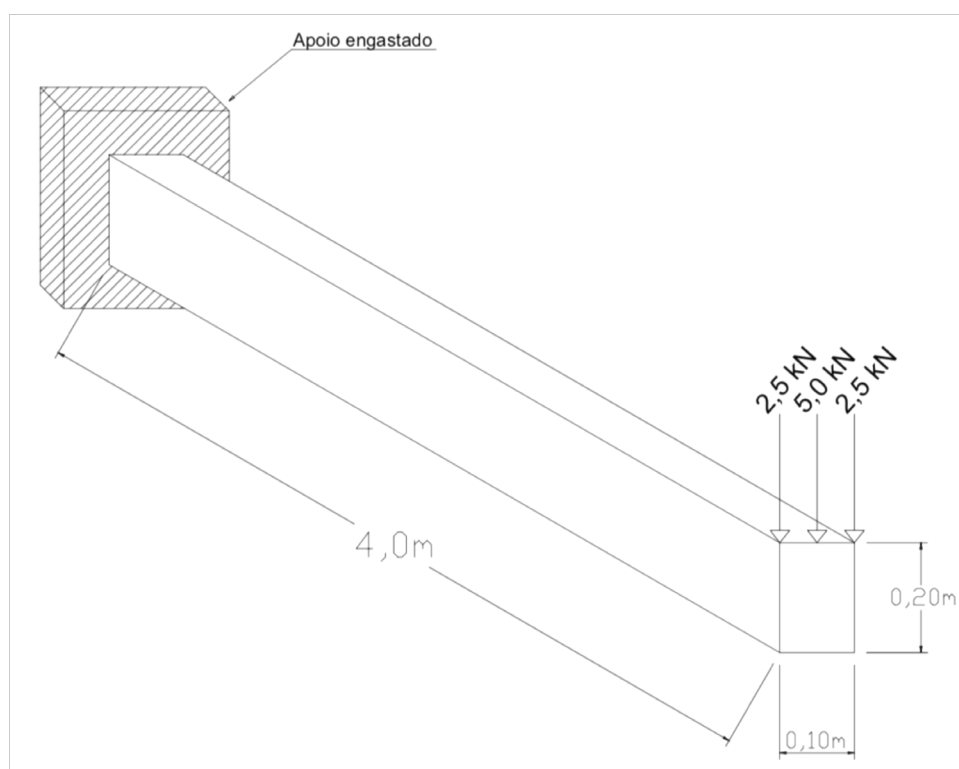
*Tabela 2: Minimização pelo método de Newton para elementos finitos*

## 6. EXEMPLOS NUMÉRICOS CONTATO COM DINÂMICA

### 6.1 EXEMPLO VIGA ENGASTADA

Inicialmente, para avaliar o funcionamento da opção de análise não linear dinâmica do código, foi modelada uma viga engastada com uma carga concentrada aplicada na sua extremidade. Não foi levado em consideração neste exemplo o contato normal e tangencial. Adotou-se como material uma Liga de Alumínio Forjado 2014-T6 de módulo de elasticidade igual a  $73,1 \text{ GPa}$  e coeficiente de Poisson igual a  $0,35$ . Na Figura 39 está ilustrado o modelo.

Figura 39 - Viga engastada.

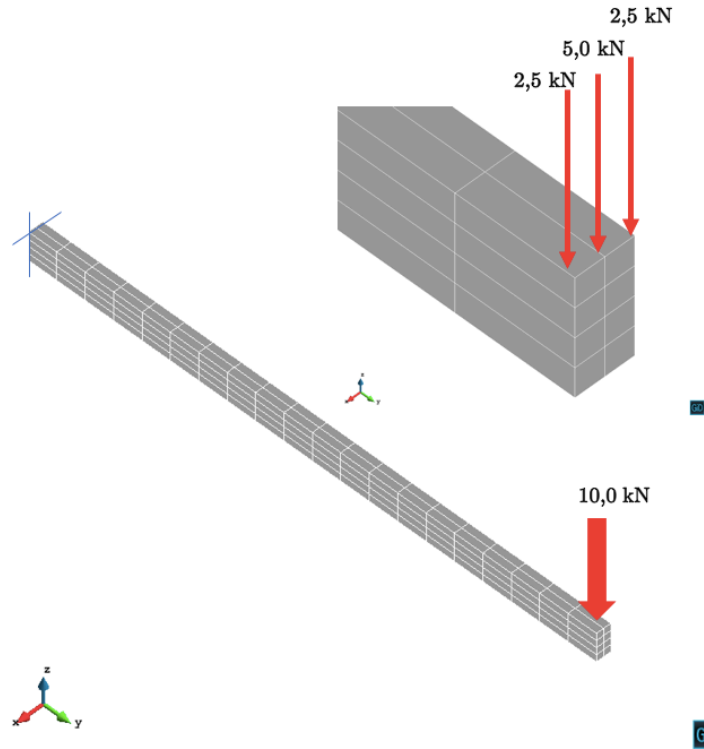


Fonte: Elaborado pelo autor.

Foi utilizada uma malha com 120 elementos finitos hexaédricos, conforme a Figura 40. O incremento de tempo foi de 0.001 segundos para o caso não amortecido e 0.01

para o não amortecido, num total de 10000 incrementos de tempo e foi adotada a razão de amortecimento do alumínio,  $\xi = 0,0004$ .

Figura 40 - Malha de elementos finitos do exemplo da viga engastada.

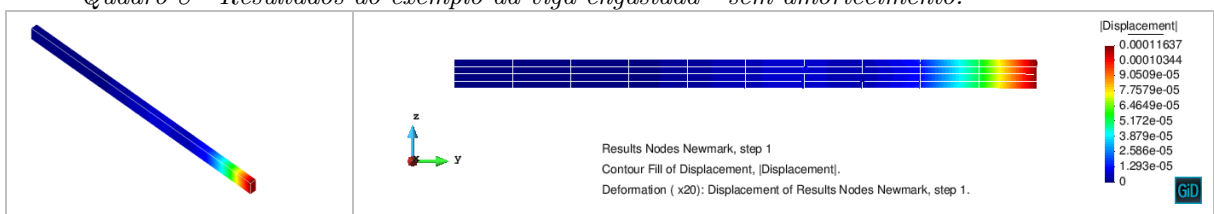


Fonte: Elaborado pelo autor.

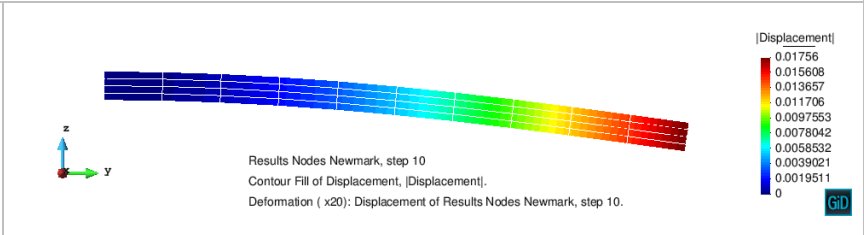
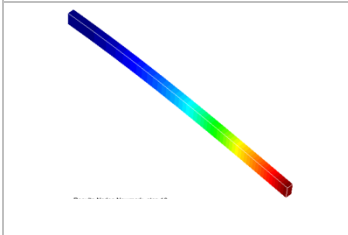
### 6.1.1 Exemplo viga engastada sem amortecimento

Os resultados deste exemplo e seus respectivos tempos de análise estão dispostos no Quadro 8. Inicialmente o modelo foi testado sem a consideração do amortecimento. Os resultados são mostrados em escala exagerada, para melhor visualização do fenômeno.

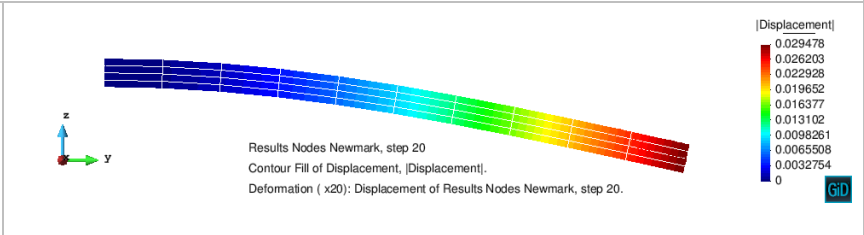
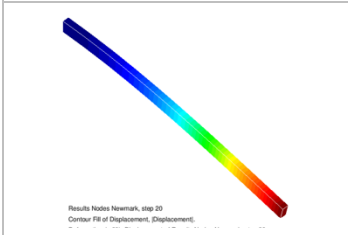
Quadro 8 - Resultados do exemplo da viga engastada - sem amortecimento.



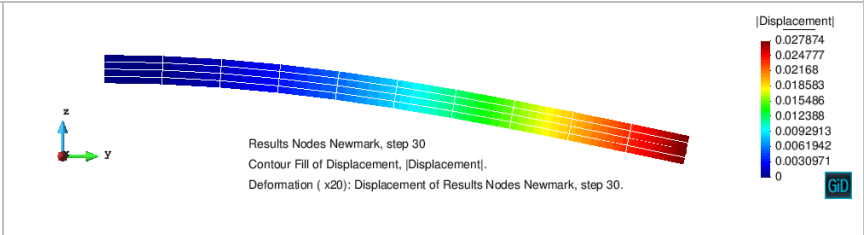
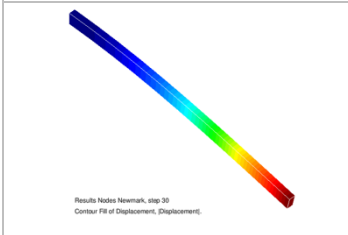
Tempo de análise: 0.001 s



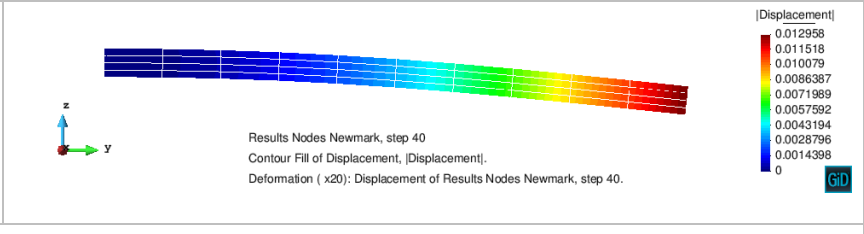
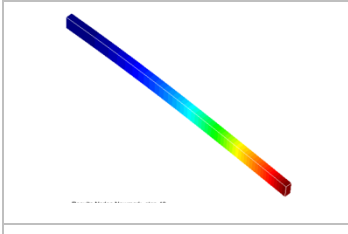
Tempo de análise: 0.01 s



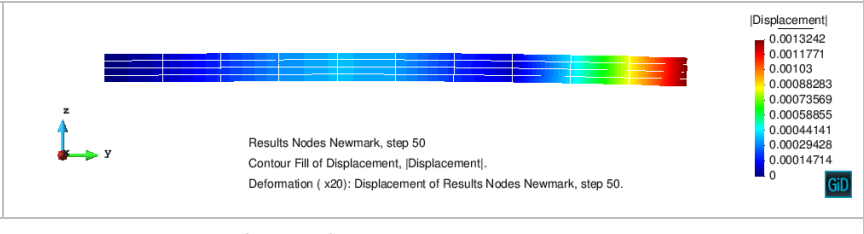
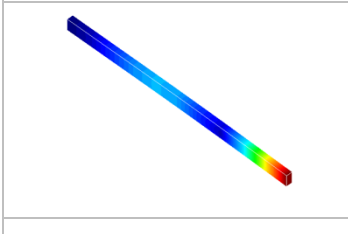
Tempo de análise: 0.02 s



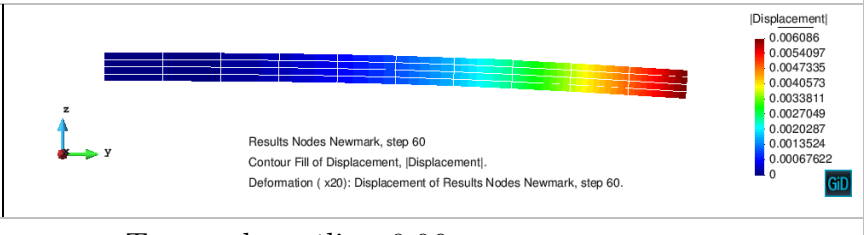
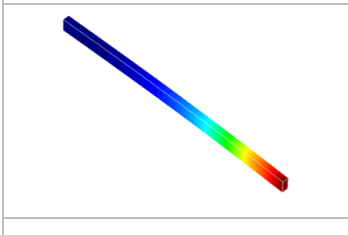
Tempo de análise: 0.03 s



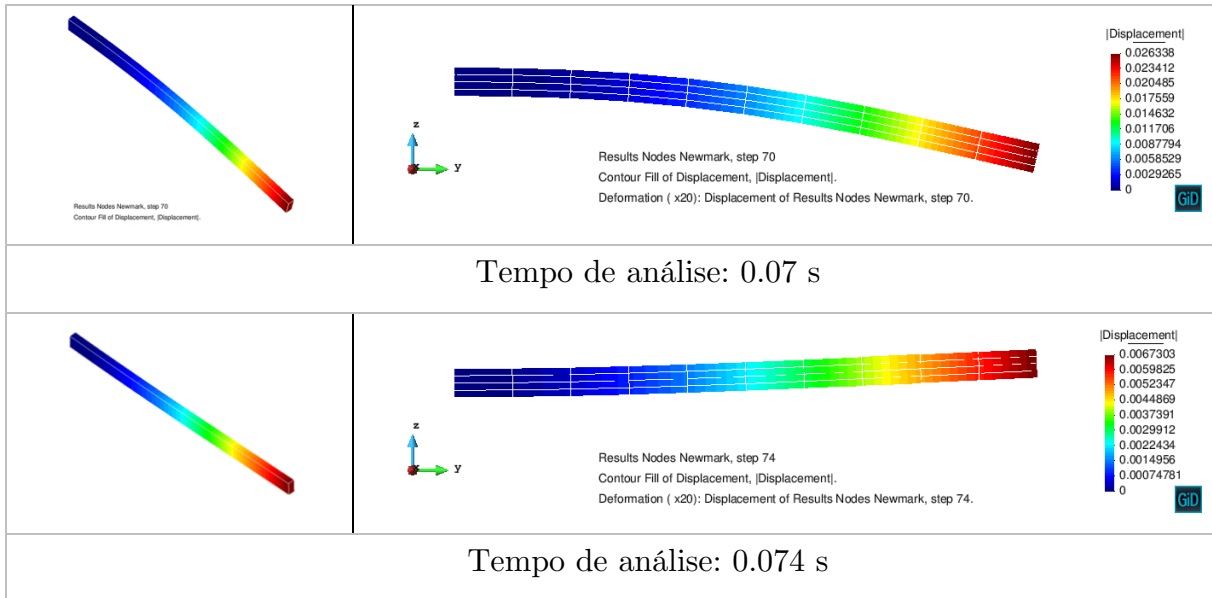
Tempo de análise: 0.04 s



Tempo de análise: 0.05 s



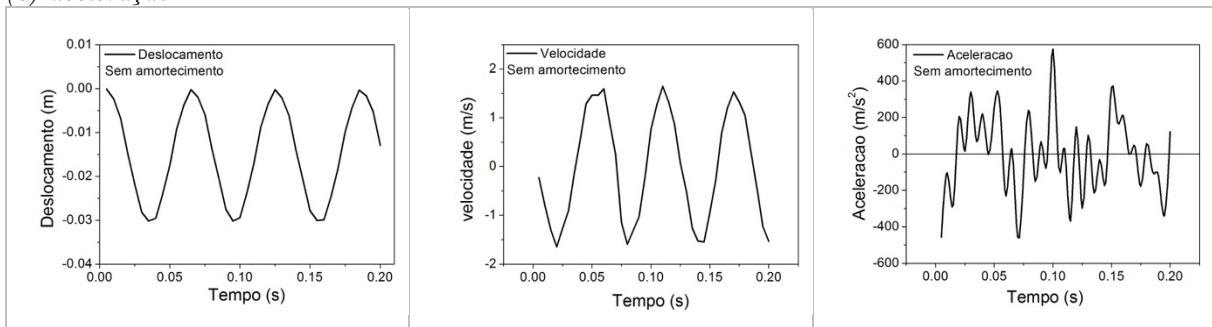
Tempo de análise: 0.06 s



Fonte: Elaborado pelo autor.

O programa apresentou boa convergência e funcionou bem com um incremento de tempo de 0.0001 segundos, apesar do algoritmo de Jacobi se mostrar um pouco lento, em torno de 5 minutos para cada interação. O fenômeno físico foi bem representado para o caso não amortecido, onde a barra ficou oscilando na posição de equilíbrio. Os gráficos da Figura 41, que representam os deslocamentos, velocidades e aceleração de um nó na extremidade da viga no domínio no tempo, ilustram o comportamento não amortecido da barra. É possível observar que o deslocamento fica oscilando em torno da posição de equilíbrio por conta da não existência de amortecimento.

Figura 41 – Gráficos do movimento de massa sem amortecimento: (a) posição, (b) velocidade e (c) aceleração.

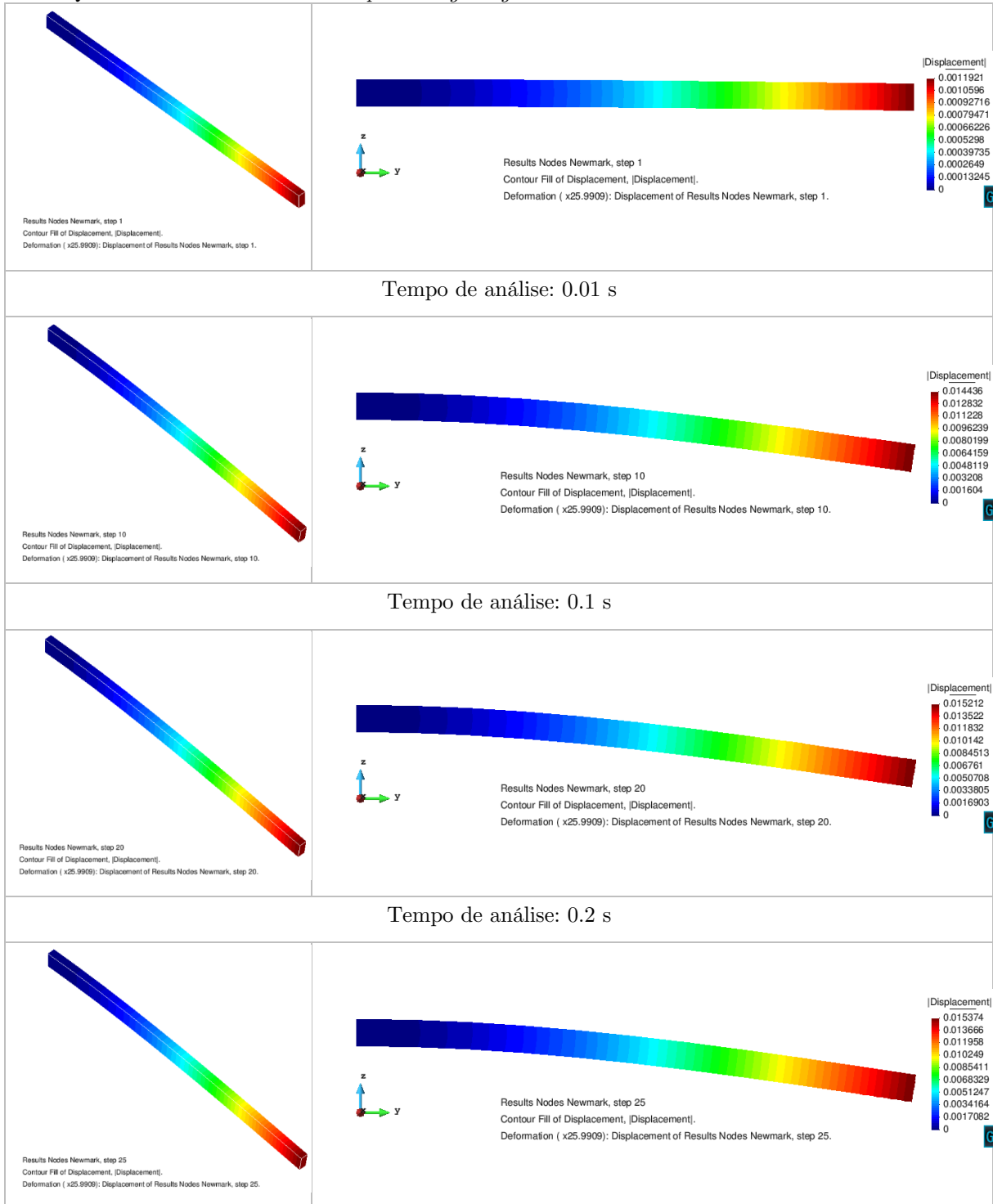


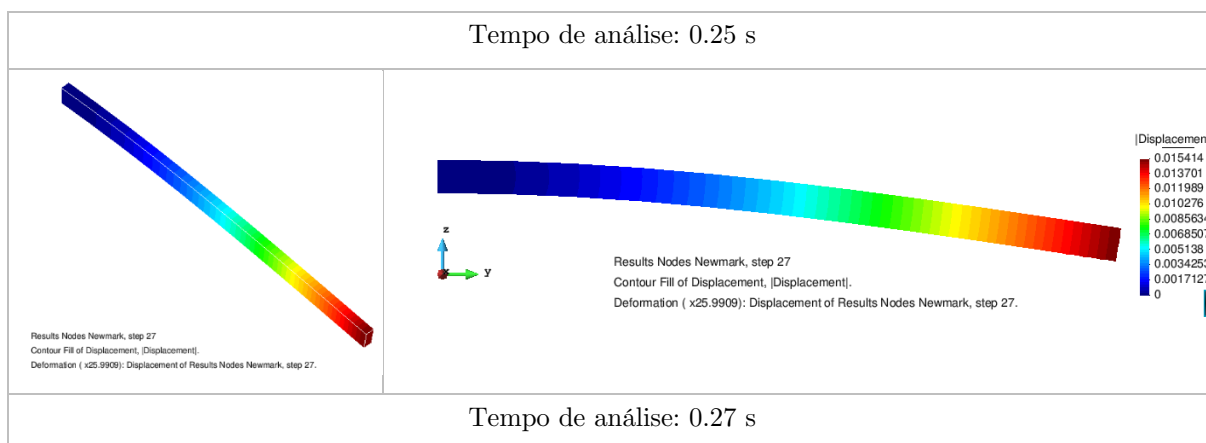
Fonte: Elaborado pelo autor.

### 6.1.2 Exemplo viga engastada com amortecimento

No Quadro 9 estão ilustrados o comportamento físico da barra estudada agora considerando o efeito de amortecimento do material.

Quadro 9 - Resultados do exemplo da viga engastada - com amortecimento.



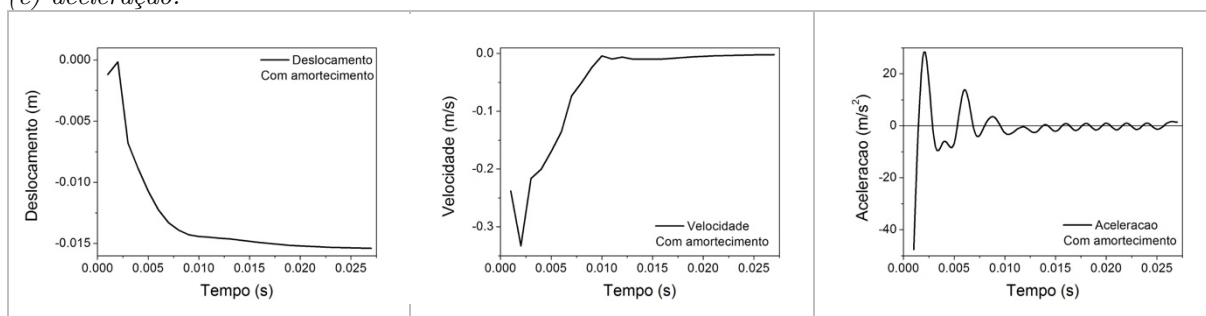


Fonte: Elaborado pelo autor.

No modelo amortecido foi testado também um incremento de 0,01 segundos, gerando bons resultados. O programa apresentou boa convergência e representou bem o fenômeno físico, dessa vez amortecido. É possível observar que o efeito da massa gera um deslocamento gradual da barra que vai convergindo para posição de equilíbrio por conta do efeito do amortecimento.

Novamente é possível observar o fenômeno estudado a partir dos gráficos da Figura 42, agora representando o comportamento não amortecido da barra. Neste caso, o deslocamento da barra varia de forma exponencial convergindo na direção da posição de equilíbrio. As velocidades e acelerações tendem a um valor nulo, já que a barra não terá mais movimento.

Figura 42 - Gráficos do movimento de massa com amortecimento: (a) posição, (b) velocidade e (c) aceleração.



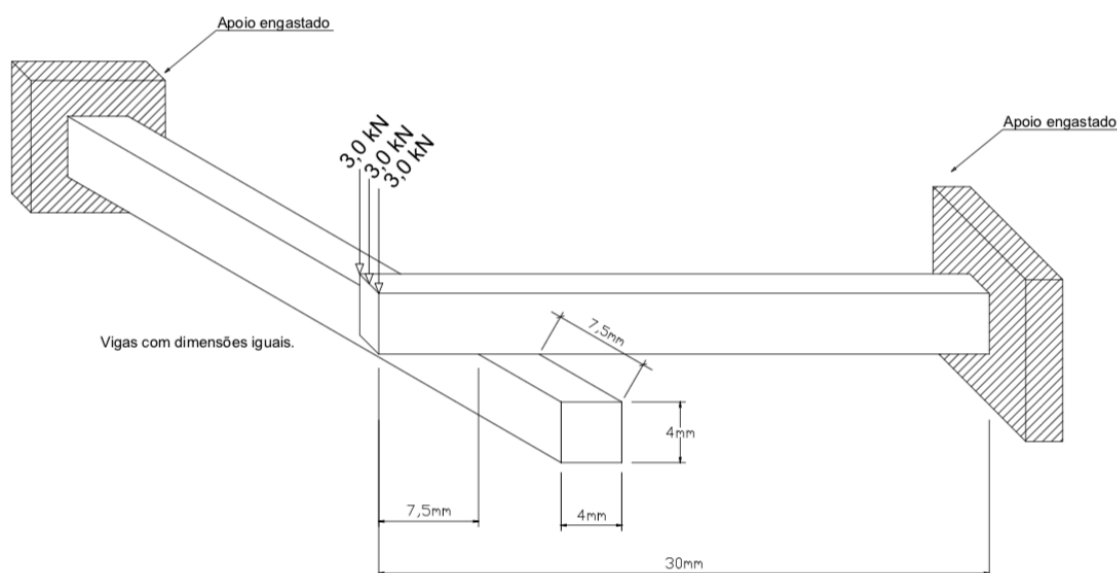
Fonte: Elaborado pelo autor.



## 6.2 EXEMPLO DUAS VIGAS PERPENDICULARES DEFORMÁVEIS

Nesta seção será utilizada a opção de análise dinâmica do código para o exemplo das duas vigas já utilizado na seção [4.4.1](#). Anteriormente foi realizada uma análise quase-estática do contato mecânico com atrito. Este mesmo modelo será agora testado para uma análise dinâmica, onde será possível estudar a influência das forças de inércia e amortecimento no deslocamento da viga. Foi levado em consideração neste exemplo o contato normal e tangencial, sendo a penalidade normal  $\epsilon_N = 1.0 \times 10^5$ , a penalidade tangencial  $\epsilon_T = 1.0 \times 10^3$  e o coeficiente de atrito de  $\mu = 0.2$ . O módulo de elasticidade é  $4.0 \times 10^5 \text{ MPa}$  para a viga superior e  $1.0 \times 10^6 \text{ MPa}$  para a viga inferior. Esses valores são genéricos e são os mesmos adotados por (SANTOS e BANDEIRA, 2018). Na Figura 43 - Vigas perpendiculares. está ilustrada a geometria e condições de contorno do exemplo.

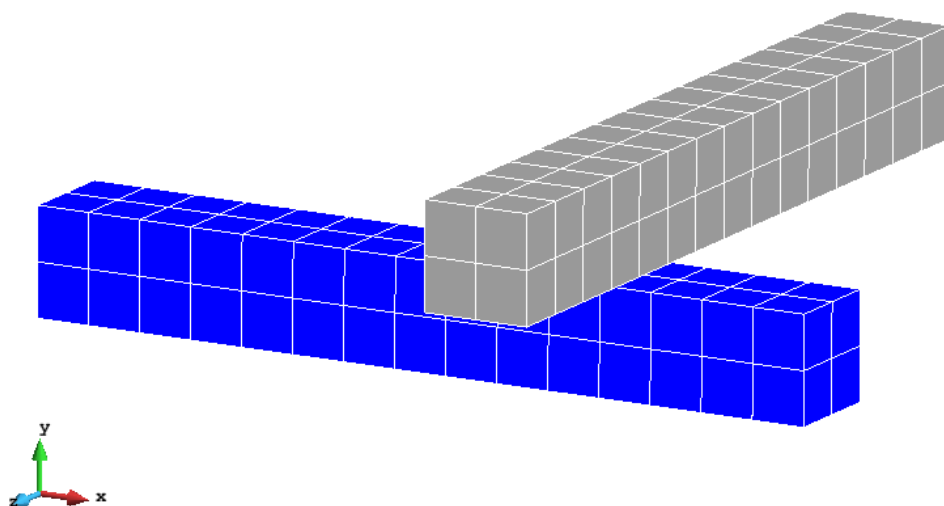
Figura 43 - Vigas perpendiculares.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para esse modelo, a malha utilizada possui 120 elementos finitos hexaédricos, conforme Figura 44. O incremento de tempo foi de 0.001 segundos, num total de 10000 incrementos de tempo e foi adotada uma razão de amortecimento  $\xi = 0,01$ .

*Figura 44 - Malha de elementos finitos do exemplo das vigas perpendiculares.*



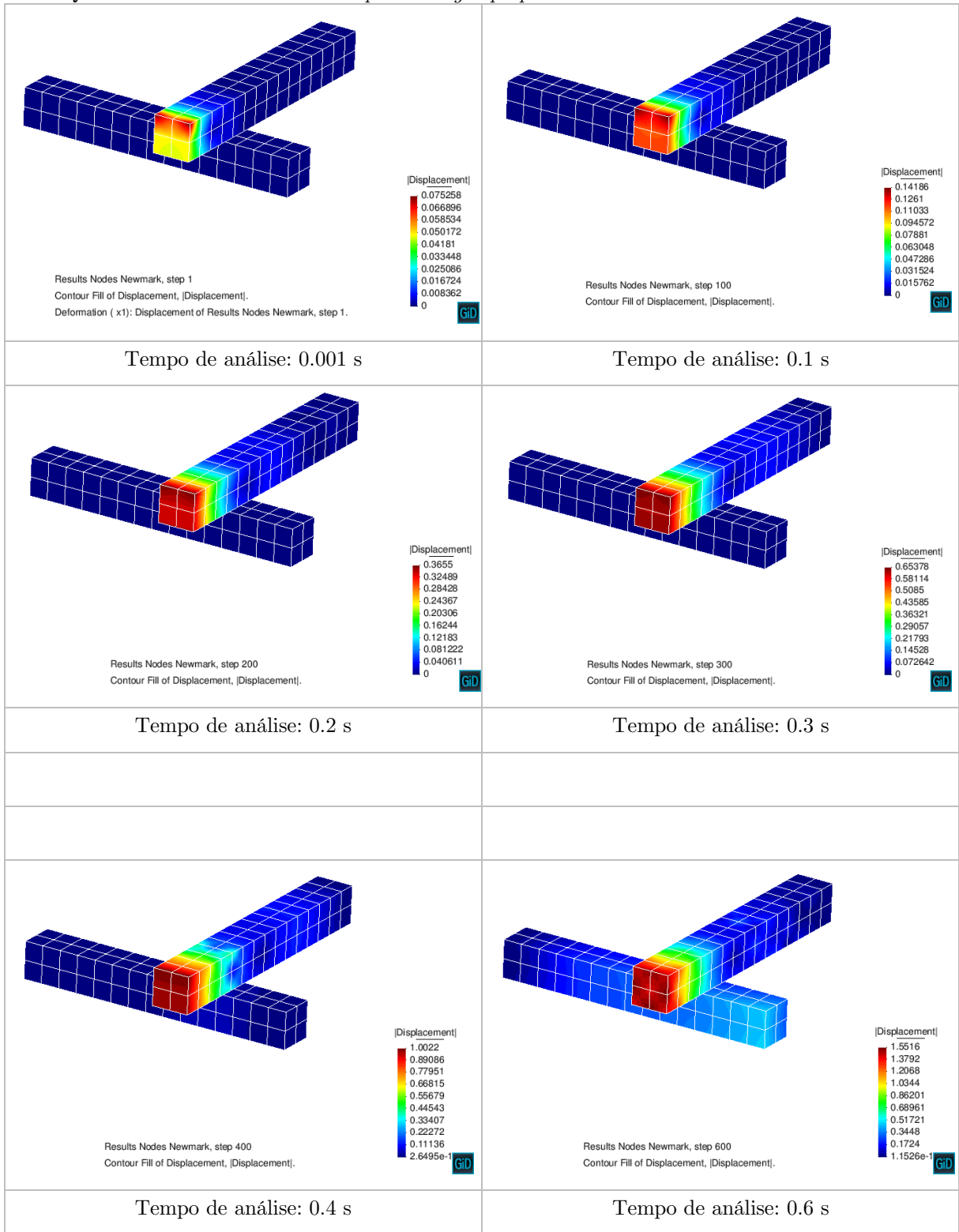
*Fonte: Elaborado pelo autor.*

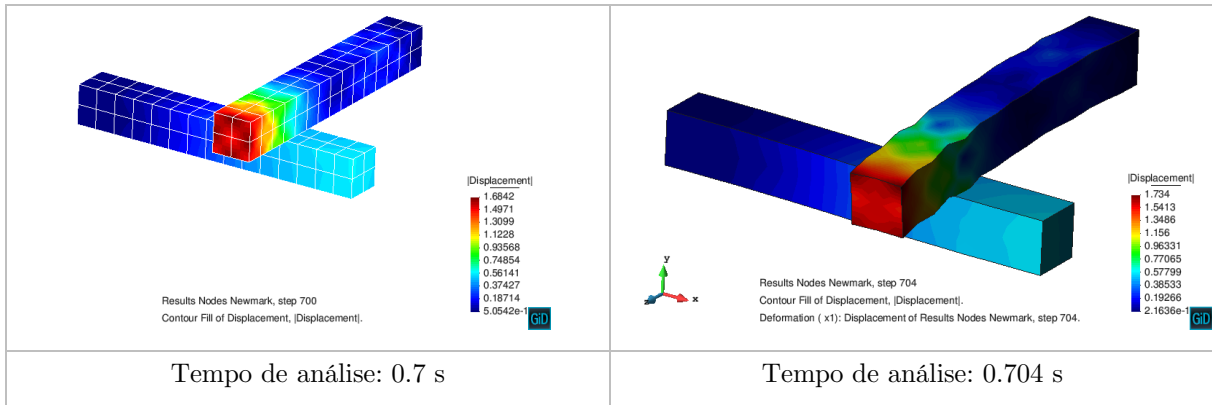
Neste momento o programa chegou ao ponto máximo de complexidade desta pesquisa. Realizou-se a análise dinâmica não linear, considerando contato com atrito e uma superfície B-Spline. Por conta da formulação consistente adotada neste trabalho, o programa apresentou boa convergência e novamente funcionou bem com um incremento de tempo de 0.001 segundos, apesar da lentidão do algoritmo de Jacobi. Foi necessário um cuidado maior com os parâmetros de penalidade, pois para um incremento de tempo menor, o efeito da força de contato, durante a análise dinâmica, pode ser amplificado, causando instabilidade numérica.

### 6.2.1 Exemplo duas vigas sem amortecimento

No Quadro 10 estão ilustrados o comportamento das barras para alguns incrementos de tempo, sem amortecimento.

Quadro 10 - Resultados do exemplo das vigas perpendiculares – Sem amortecimento.





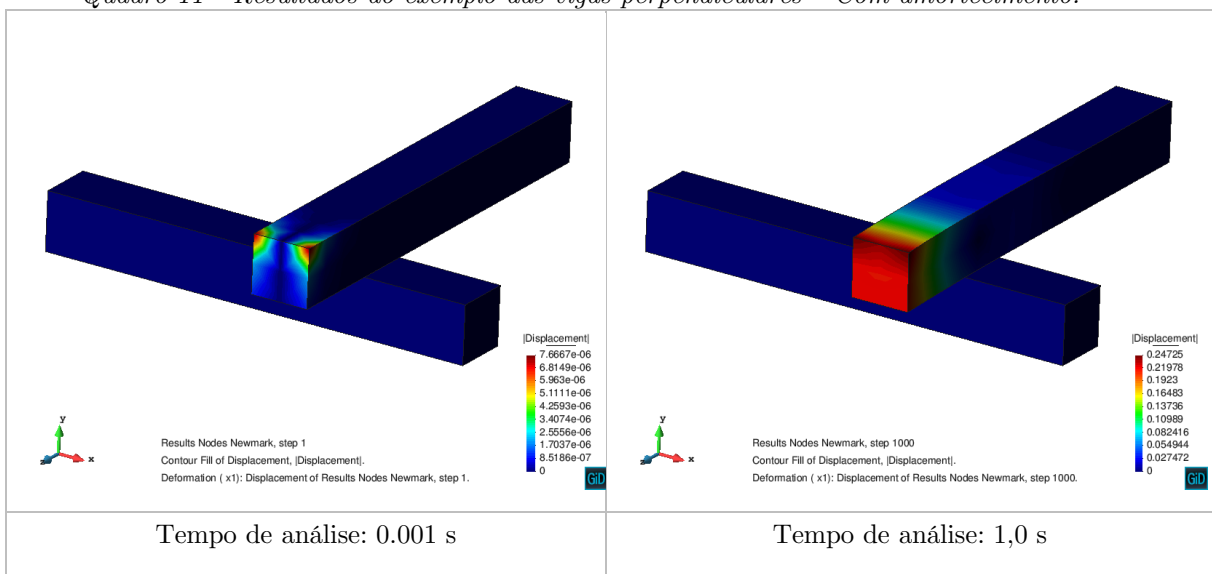
Fonte: Elaborado pelo autor.

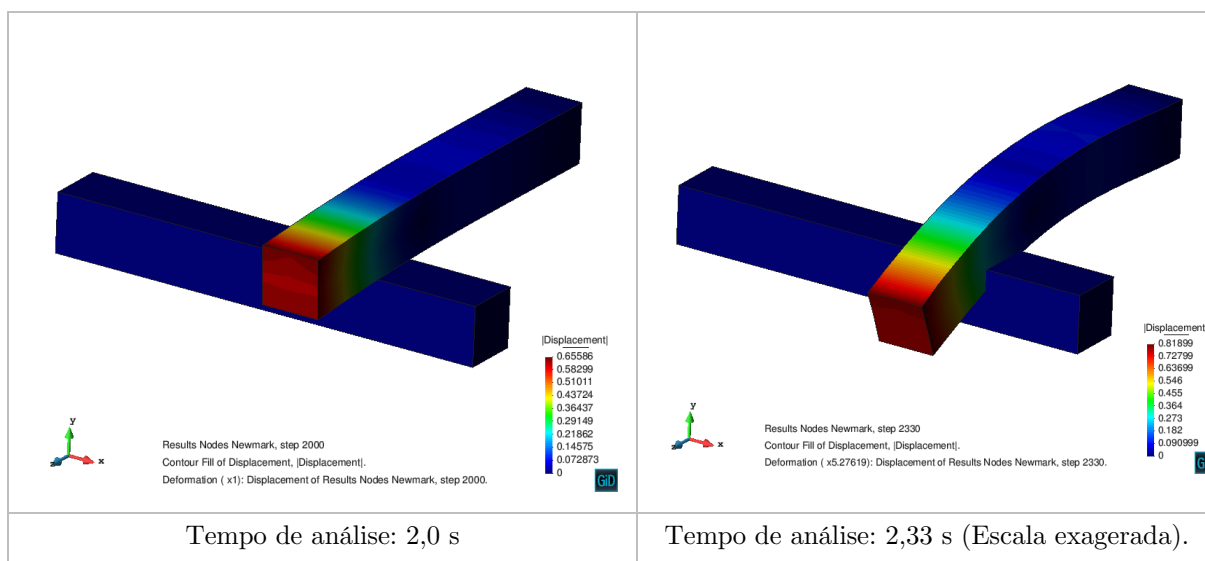
Neste caso não amortecido é possível observar que, após o contato, as vigas vibraram por conta da força de contato entre as barras. A força de contato serviu como uma força de excitação do sistema.

### 6.2.2 Exemplo duas vigas com amortecimento

Abaixo obtém-se o resultado quando se considerou o efeito de amortecimento na vigas analisadas. Os resultados estão dispostos no Quadro 11.

Quadro 11 - Resultados do exemplo das vigas perpendiculares – Com amortecimento.





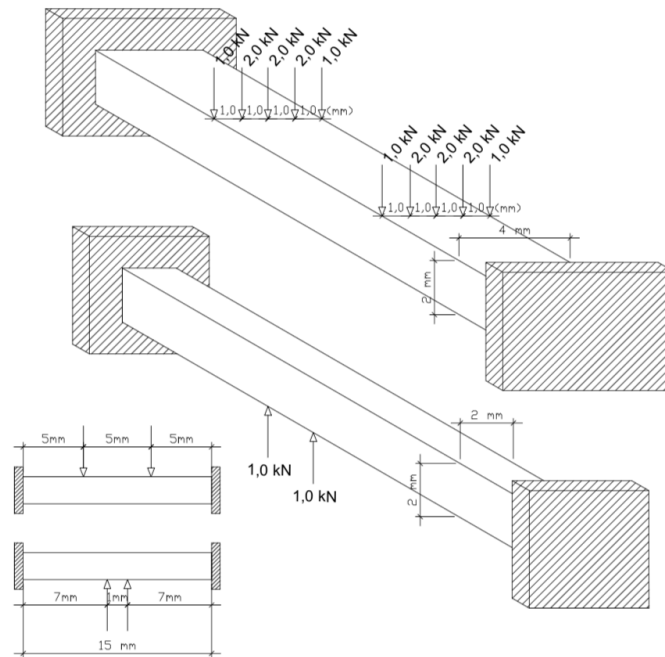
Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se com estes resultados que o fenômeno físico foi bem representado para o contato mecânico entre as duas vigas, tanto para o caso não amortecido, onde a barra superior ficou oscilando ao colidir com a barra inferior, seja no caso amortecido, onde este movimento tendeu ao equilíbrio entre as barras, com um movimento mais limitado. O funcionamento do algoritmo, mesmo no contato, foi alcançado com sucesso já neste exemplo.

### 6.3 EXEMPLO DUAS VIGAS PARALELAS DEFORMÁVEIS

Para completar a análise dinâmica com contato mecânico, utiliza-se mais um exemplo de (SANTOS e BANDEIRA, 2018). Entretanto, serão definidos parâmetros de materiais reais para este exemplo. Foi levado em consideração neste exemplo o contato normal e tangencial, sendo a penalidade normal  $\epsilon_N = 1.0 \times 10^8$ , a penalidade tangencial  $\epsilon_T = 1.0 \times 10^4$  e o coeficiente de atrito de  $\mu = 0.2$ . Para a viga superior o módulo de elasticidade é  $73,1 \times 10^3 \text{ MPa}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,35$  e massa volumétrica  $\rho = 2,79 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ; e para a viga inferior, que é mais rígida,  $E = 210 \times 10^3 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,30$  e  $\rho = 7,86 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ . Na Figura 45 está ilustrada a geometria e suas condições de contorno do modelo.

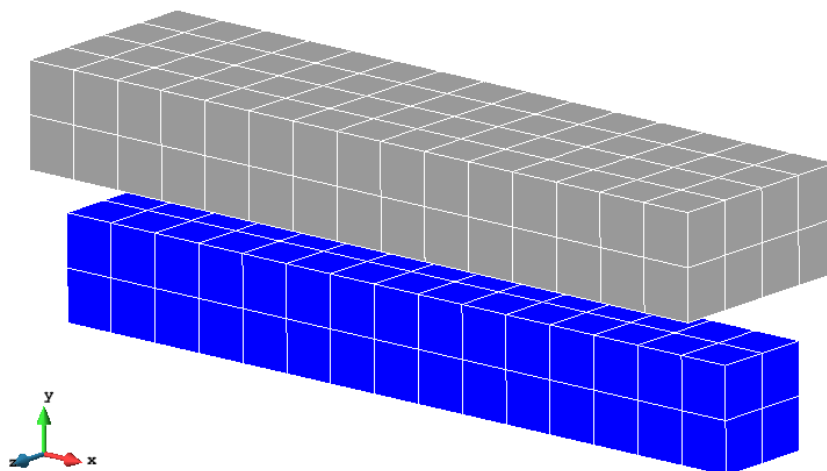
Figura 45 - Vigas paralelas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para este modelo, a malha utilizada possui 180 elementos finitos hexaédricos, conforme a Figura 46. O incremento de tempo foi de 0,01 segundos para o caso não amortecido e 0,02 segundos para o caso amortecido, num total de 10000 incrementos de tempo e adotada uma razão de amortecimento  $\xi = 0,0004$ .

Figura 46 - Malha de elementos finitos do exemplo das vigas paralelas



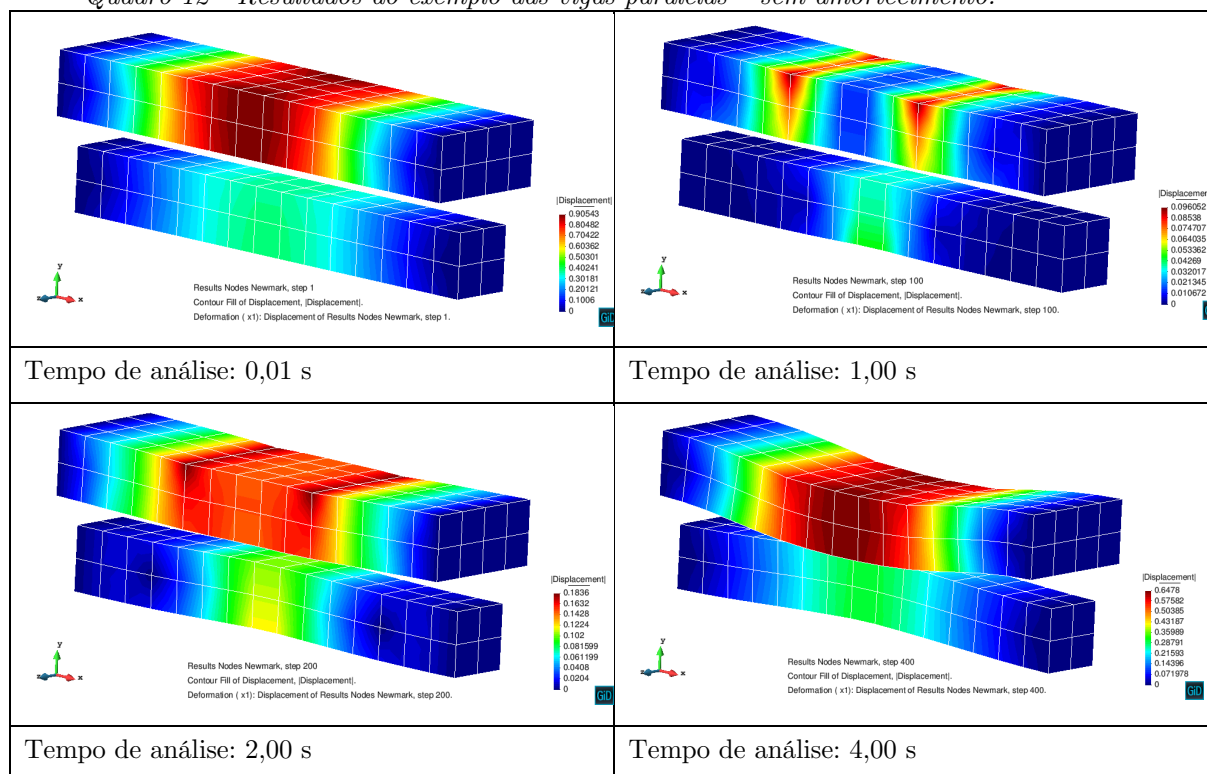
GiD

Fonte: Elaborado pelo autor.

### 6.3.1 Exemplo duas vigas paralelas sem amortecimento

No Quadro 12 está ilustrado o comportamento das barras para alguns incrementos de tempo, sem considerar o efeito de amortecimento.

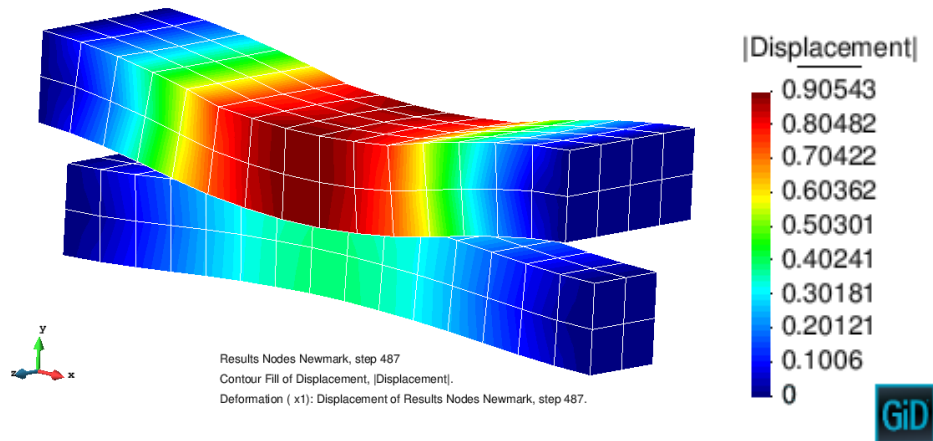
Quadro 12 - Resultados do exemplo das vigas paralelas – sem amortecimento.



Fonte: Elaborado pelo autor.

No exemplo observa-se a influência da força de contato no comportamento dinâmico do modelo. Neste caso, a viga possui um comportamento diferente de como se comportou a barra engastada livre do exemplo 6.1.2, onde a mesma oscilava na posição de equilíbrio. Neste modelo não amortecido, a barra superior não oscilou ao colidir com a barra inferior, fazendo com que a estrutura encerrasse seu deslocamento posteriormente ao contato. Os deslocamentos finais do modelo podem ser visto na Figura 47.

Figura 47 - Deslocamento final do exemplo das vigas paralelas – sem amortecimento

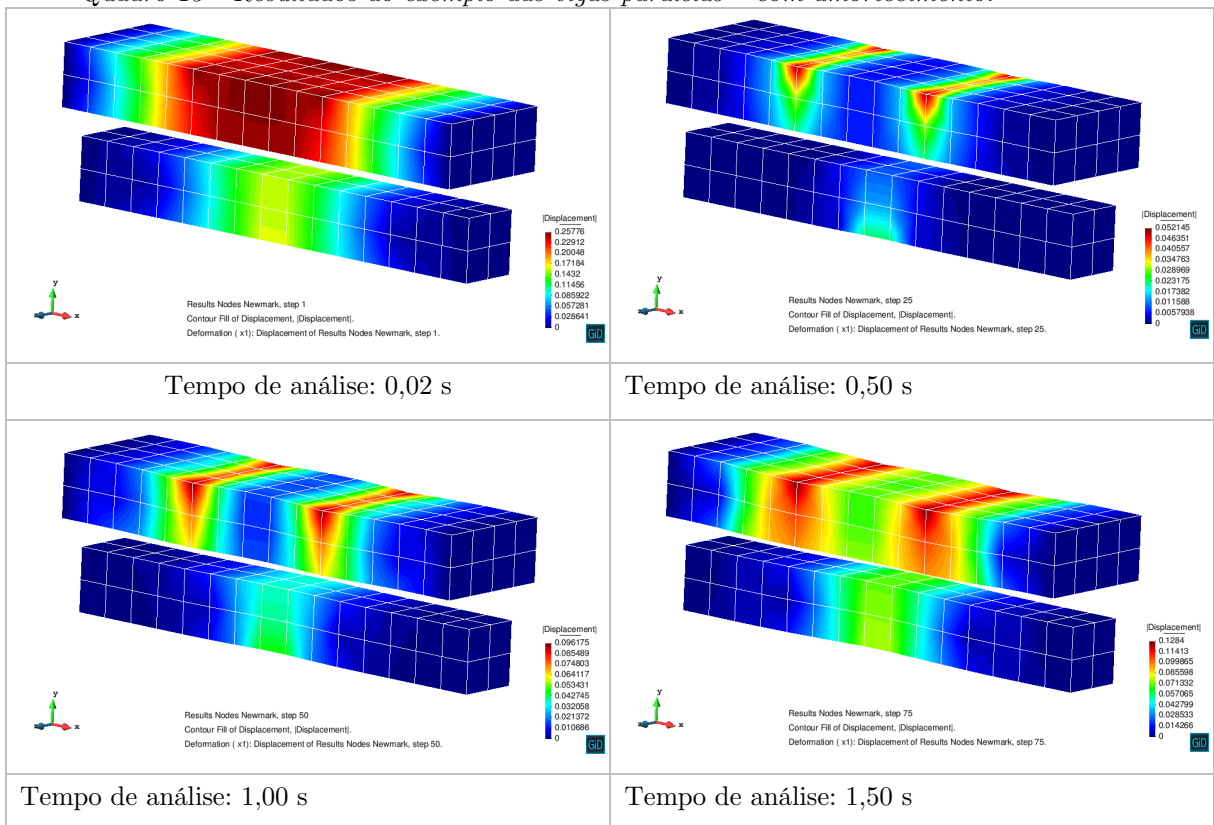


Fonte: Elaborado pelo autor.

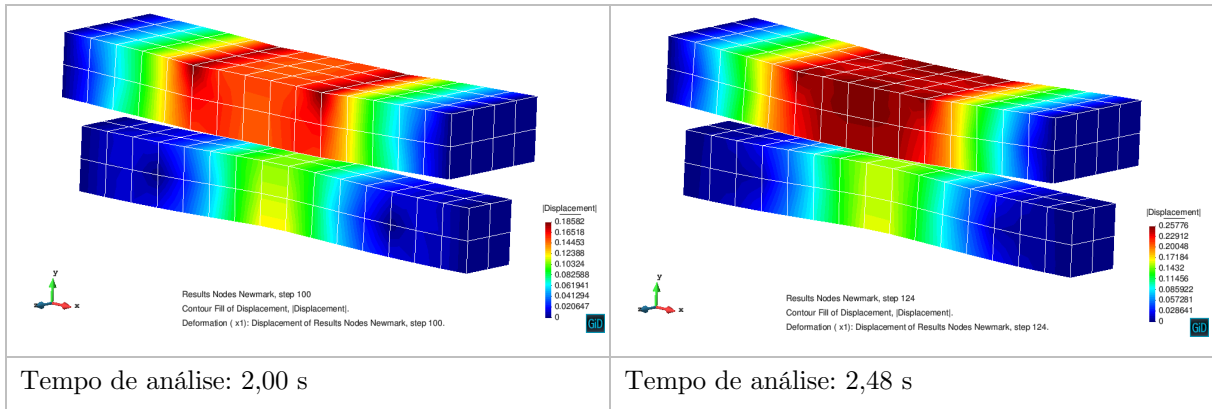
### 6.3.2 Exemplo duas vigas paralelas com amortecimento

No Quadro 13 estão dispostos os resultados das barras para determinados incrementos de tempo, considerando agora o efeito de amortecimento da estrutura.

Quadro 13 - Resultados do exemplo das vigas paralelas – com amortecimento.



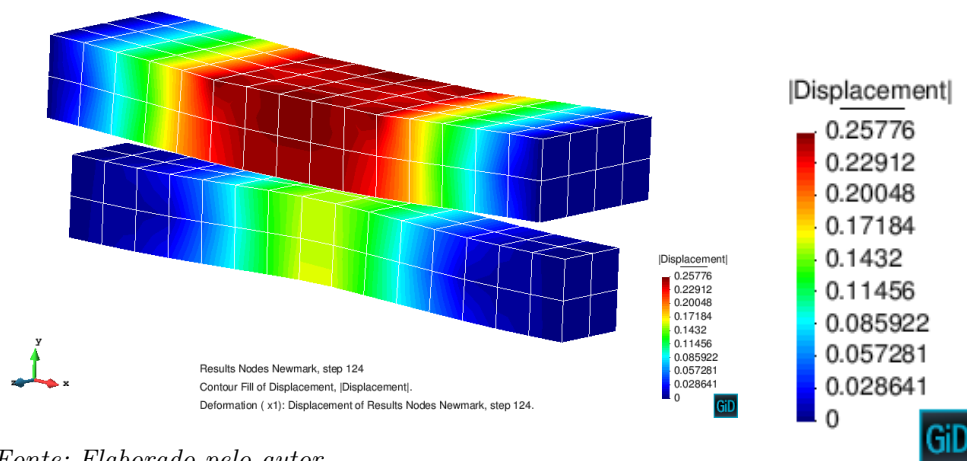




Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se que, de forma semelhante ao que ocorreu no caso não amortecido, o movimento tendeu ao equilíbrio entre as barras após a ocorrência do contato, porém em um intervalo de tempo menor por conta do amortecimento. Como o modelo amortecido tem uma amplitude de movimento limitada pelo próprio amortecimento do sistema, um pouco após a ocorrência do contato, a barra cessou rapidamente seu deslocamento, atingindo o equilíbrio. Os deslocamentos finais do modelo podem ser vistos na Figura 48.

Figura 48 - Deslocamento final do exemplo das vigas paralelas – com amortecimento.



Novamente o fenômeno físico foi bem representado pelo programa elaborado na pesquisa, mostrando de forma qualitativa como o contato influencia no comportamento dinâmico dos exemplos e permitindo a realização de boas análises destes modelos.

## 7. CONCLUSÃO

Os exemplos apresentados e testados durante a pesquisa comprovam a precisão e solidez das formulações e do código desenvolvido, atingindo-se o objetivo do trabalho. A primeira contribuição relevante desta pesquisa é a implementação, no programa de contato mecânico com a superfície B-Spline, do elemento finito tetraédrico para sólidos tridimensionais, já que o elemento finito tetraédrico se adequa melhor a superfícies curvas. Contudo, o elemento finito tetraédrico utilizado na pesquisa apresentou pouca precisão, requerendo um número maior de elementos na malha para se chegar à mesma precisão dos exemplos com elemento finito hexaédrico. Portanto, observa-se a necessidade de um elemento finito tetraédrico de ordem superior para esses casos.

Desenvolveu-se também um algoritmo para análise dinâmica do contato mecânico entre corpos sólidos tridimensionais, onde esse algoritmo foi implementado no programa de contato utilizando a superfície de contato *B-Spline*. Para a análise dinâmica do contato, inicialmente foi testado um exemplo desconsiderando o contato e em seguida foram testados alguns exemplos simulando o contato mecânico considerando os efeitos dinâmicos em uma estrutura. Portanto a análise dinâmica do contato mecânico com superfície *B-Spline* constitui-se em mais uma relevante contribuição deste trabalho.

Os resultados obtidos são satisfatórios e representam bem o comportamento físico dos modelos estudados, dentro dos limites dos métodos numéricos adotados. Durante a análise quase-estática pode-se observar que os resultados são coerentes com a literatura e com o programa comercial usado como referência. Para a análise dinâmica, observou-se também uma boa convergência e boa representação dos modelos. O efeito da inércia e do amortecimento na equação de equilíbrio forneceu um comportamento mais complexo dos exemplos em comparação ao que foi visto apenas com o contato mecânico. Permitindo em trabalhos futuros uma modelagem com resultados mais próximos do comportamento real das estruturas. Observou-se que, para o código implementado, houve mais estabilidade numérica com incrementos de tempo da ordem de 0,001

segundos para problemas sem amortecimento e na ordem de 0,01 segundos para problemas com amortecimento. Além disso, foi necessário modificar os parâmetros de penalidade, por conta do efeito amplificado dessa força durante a análise dinâmica.

Do ponto de vista numérico, os resultados obtidos podem ser considerados de excelente qualidade. As formulações utilizadas se mostraram precisas e os algoritmos apresentaram as características desejáveis de consistência, convergência e estabilidade. Entretanto, deve-se destacar o fato de o algoritmo de Jacobi para determinação dos autovalores ser muito lento, o que aumentou o tempo de processamento do programa de forma geral. Deste modo, realizou-se um grande trabalho com contribuições relevantes para a mecânica computacional, permitindo novos estudos na área.

Por fim, ficam como sugestões para trabalhos futuros, a utilização do elemento finito tetraédrico de ordem superior, utilizando um número maior de pontos de Gauss; a consideração de efeitos de plasticidade, de ações dinâmicas e o estudo do impacto mecânico a partir das formulações e algoritmos desenvolvidos nesta pesquisa.

**REFERÊNCIAS**

ADHIKARI, S. Damping modelling using generalized proportional damping. **Journal of Sound and Vibration**, 2006. 156-170.

ALEXANDROV, M. M. S. **Contact Problems For Bodies With Thin Coatings And Interlayers**. [S.l.]: Nauka, 1983.

AMONTONS-REVER, G. On the resistance originating in machines. **Memory Academy**, 1699. 206-222.

BABUSKA, I.; SURI, M. The p and h-p versions of the finite element method for constraint boundary conditions. **Mathematics of Computation**, 51, 1988. 1–13.

BANDEIRA, A. A. Análise de problemas de contato com atrito em 3D. **Tese (Doutorado) - Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo**, São Paulo, 2001. 275.

BANDEIRA, A. A. et al. Algoritmos de otimização aplicados à solução de sistemas estruturais não-lineares com restrições: uma abordagem utilizando os métodos da Penalidade e do Lagrangiano Aumentado. **Exacta (São Paulo. Impresso)**, 8, 2010. 345-361.

BANDEIRA, A. A.; WRIGGERS, P.; PIMENTA, P. M. Numerical derivation of contact mechanics interface laws using a finite element approach for large 3D deformation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, England, 59, 2004. 173-195.

BANDEIRA, A. A.; WRIGGERS, P.; PIMENTA, P. M. Numerical derivation of contact mechanics interface laws using a finite element approach for large 3D deformation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, England, 2004.

BARBOSA, H. J. C.; GHABOUSSI, J. Discrete finite element method for multiple deformable bodies. **Finite Elements in Analysis and Design**, 7, 1990. 715–158.

BATHE, K. J. Solution Methods for Large Generalized Eigenvalue Problems in Structural Engineering. **Report UCSESM**, Berkeley, 1971. 71-20.

BATHE, K. J.; EL-ABBASI, N. Stability and path test performance of contact discretizations and a new solution algorithm. **Computers and Structures**, 79, 2001. 1473–1486.

BATHE, K.-J. **Finite Element Procedures**. First. ed. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1996.

BERTSEKAS, D. P. **Nonlinear programming**. Belmont: Athena Scientific, 1995.

CHAN, S. H.; TUBA, I. S. A finite element method for contact problems in solid bodies. **International Journal of Mechanics Sciences**, 13, 1971.

CHAND, R.; HAUG, E.; RIM, K. Analysis of unbounded contact problems by means of quadratic programming. **Journal of Optimization Theory and Applications**, 20, 1976. 171– 189.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures - Theory and Applications to Earthquake Engineering**. 1<sup>st</sup>. Ed. ed. [S.l.]: New Jersey: Prentice-Hall, 1995.

COCU, M. Existence of solutions of signorini problems with friction.. **International Journal of Engineering Science**, 22, 1984. 567–575.

COHEN, E.; MCCALLION, H. Economical Methods for Finding Eigenvalues and Eigenvectors.. **Journal of Sound and Vibrations**, v. V, n. 3, p. 397-406., 1967.

COULOMB, C. A. The theory of simple machines. **Memory Mathematics Physics Academy Science**, 10, 1785. 161–331.

CRISFIELD, M. Revisiting the contact patch rest. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2000.

CRISFIELD, M. A. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures Volume 2: Advanced Topics**. London: John Wiley & Sons, 1997.

CRISFIELD, M. A. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures Volume 2: Advanced Topics**. London: John Wiley & Sons, 1997.

DAVIDSON, E. R. The Iterative Calculation of a Few of the Lowest Eigenvalues and Corresponding Eigenvectors of Large Real-Symmetric Matrices. **Journal of Computational Physics**, Columbus, August 1974. 87-94.

DIAS, A. P. C. Elemento Mortar de Alta Ordem Aplicado à Análise Computacional não-Linear de Contato Mecânico Estrutural. **Dissertação de Mestrado**, Campinas, 2013.

DIAS, L. F. D. S. ESTUDO NUMÉRICO DO FENÔMENO DO AMORTECIMENTO EM ESTRUTURAS SÓLIDAS SUBMETIDAS A CARREGAMENTOS IMPULSIVOS. **Dissertação de Mestrado**, Salvador, 2015.

DOKAINISH, M. A.; SUBBARAJ, K. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics—i. explicit methods. **Computers & Structures**, 32, n. 6, janeiro 1989. 1371–1386.

DUVAUT, G.; LIONS, J. **Inequalities in Mechanics and Physics**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1976.

EULER, L. Sur la diminution de la resistance du frottement. **Memory Academy Science of Berlin**, 4, 1748. 133–148.

EULER, L. Sur le frottement des corps solides. **Memory Academy Science of Berlin**, 4, 1748. 122–132.

FICHERA, G. Sul problema elastostatico di signorini com ambigue condizioni al contorno. **Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Serie Ottava, Rendiconti, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali**, 34, 1963. 138–142.

FICHERA, G. Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: I problema di signorini con ambigue condizioni al contorno Mem., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., Sez. I, VIII. Ser. **Atti della Accademia Nazionale dei Lincei**, 7, 1964. 91–140.

FICHERA, G. **Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints**. [S.l.]: Springer-Verlag, v. 2, 1972. 391–424 p.

FLETCHER, R. **Practical methods of optimization**. Chichester: John Wiley & Sons, v. 2, 1980.

FRANCAVILLA, A.; ZIENKIEWICZ, O. A note on numerical computation of elastic contact problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 9, 1975. 913–924.

FREITAG, M. A.; SPENCE, A. Rayleigh quotient iteration and simplified Jacobi–Davidson method with preconditioned iterative solves. **Linear Algebra and its Applications**, 2008. 2049–2060.

GALIN, L. **Contact Problems in Elasticity**. [S.l.]: Nauka, 1953.

GALIN, L. **Development of the Contact Theory in USSR**. [S.l.]: Nauka, 1976.

GIANNAKOPOULOS, A. The return mapping method for the integration of friction constitutive relations. **Computers and Structures**, 32, 1989. 157–167.

GIL, A.; SEGURA, J.; TEMME, N. **Numerical Methods for Special Functions**. [S.l.]: [s.n.], 2007.

GORYACHEVA, I. **Contact Mechanics in Tribology**. [S.l.]: Springer, 1998.

GORYACHEVA, I. **Mechanics of Frictional Interaction**. [S.l.]: Nauka, 2001.

HILBER, H. M.; HUGHES, T. J. R.; TAYLOR, R. L. **Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics**. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**. [S.l.]: [s.n.], 1977. 283–292 p.

HUANG, F. L. E. A. A new approach to identification of structural damping ratios. **Journal of Sound and Vibration**, n. n. 303, 2007. 144–153.

HUGHES, T.; TAYLOR, R.; KANOKNUKULCHAI, W. A. **Finite element method for large displacement contact and impact problems**. In K.J. Bathe, J.T. Oden, W.Wunderlich and E.L. Wilson, ed., **Formulations and computational algorithms in FE analysis - MIT Press**. [S.l.]: [s.n.], 1977. 468–495 p.

JOHNSON, K. L. **Contact Mechanics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1985.

KIKUCHI, N.; ODEN, J. **Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods**. **society for industrial and applied mathematics**, 1988.

KLARBRING, A. A mathematical programming approach to three-dimensional contact problems with friction. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 58, 1986. 175–200.

KREIDER, D. L. **An Introduction to Linear Analysis**. 1<sup>a</sup>. Ed. ed. [S.l.]: Palo Alto: Addison-Wesley Publishing Company, 1966.

KREYSZIG, E. **Advanced Engineering Mathematics**. 10a. ed. Danvers: John Wiley & Sons. 10<sup>a</sup> Edição. ed. [S.l.]: Danvers: John Wiley & Sons, 2011.

KUHL, D.; CRISFIELD, M. A. Energy-Conserving and Decaying Algorithms in Non-Linear Structural Dynamics. **Int. J. Numer. Meth. Engng**, 45, 1999.

KUZMANOVIC, I.; TOMLJANOVIC, Z.; TRUHAR, N. Optimization of material with modal damping. **Applied Mathematics and Computation**, Osijek, 2012.

LAURSEN, T. **Computational Contact and Impact Mechanics: Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis**, 2002.

LAURSEN, T. A.; SIMO, J. C. Algorithmic Symmetrization of Coulomb Frictional Problems using Augmented Lagrangians. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 108, 1993. 133-46.

LAZAN, B. J. **Damping of Materials and Members in Structural mechanics**. Oxford: Oxford Pergamon Press, 1968.

LES\_PIEGL, W. T. **The NURBS Book**. 2nd. ed. [S.l.]: Springer, 1997.

LUENBERGER, D. G. **Linear and Nonlinear Programming**. 2. ed. Reading. ed. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1984.

LURIE, A. **Theory of Elasticity**. Nauka: [s.n.], 1970.

MIJAR, A.; ARORA, J. Review of formulations for elasto-static frictional contact problems. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 20, 2000. 167-189.

MUSKHELISHVILI, N. **Some Basic Problems in the Mathematical Theory of Elasticity**. fifth ed. ed. [S.l.]: Nauka, 1966.

NEWMARK, N. N. A method of computation for structural dynamics. **Journal of the Engineering Mechanic Division, Proceedings of the ASCE**, 1959.



OGDEN, R. W. **Non-Linear Elastic Deformations**. Chichester: Ellis Horwood und John Wiley, 1984.

ORBAN, F. Damping of materials and Members in Structures. **5th International Workshop on Multi-Rate Processes and Hysteresis.: Journal of Physics**, Hungary, 2011.

ORBAN, F. Damping of materials and Members in Structures. **5th International Workshop on Multi-Rate Processes and Hysteresis: Journal of Physics**, Hungary, 2011.

PANAGIOTOPOULOS, P. **Inequality Problems in Mechanics, Convex and Nonconvex Energy Functions**. [S.l.]: Birkhauser Basel , 1985.

PIEGL, L.; TILLER, W. **The NURBS Book**. 2nd. ed.. ed. [S.l.]: [s.n.], 1997. 646 p.

PIMENTA, P. M. **Fundamentos da Mecânica dos Sólidos e das Estruturas**. São Paulo: [s.n.], 2006.

PRESS, W. H. E. A.. **Numerical Recipes in C - The Art of Scientific Computing**. 2<sup>a</sup>. ed. ed. Cambridge: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1992.

RABIER, P. et al. Existence and local uniqueness of solutions to contact problems in elasticity with nonlinear friction laws. **International Journal of Engineering Science**, 24, 1986. 1755– 1768.

REDDY, J. N. **An Introduction to Continuum Mechanics**. New York: Cambridge University Press, 2013.

ROGERS, D. F. **An Introduction to NURBS**. [S.l.]: Morgan Kaufman Publishers, 2001.

ROGERS, D. F. **An Introduction to NURBS**. [S.l.]: [s.n.], 2001.

SÁNCHEZ, C. A. A. **ESTUDO DE IMPACTO USANDO ELEMENTOS FINITOS E ANÁLISE NÃO LINEAR**. São Carlos: USP, 2001.

SAMPAIO, M. A. B. **MECÂNICA DO CONTATO COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA MODELAGEM DE MÁQUINAS TUNELADORAS**. São Paulo: USP, 2009.

SANTOS, D. B. V. **Modelagem Numérica em Elementos Finitos de Problemas de Contato com Atrito para Material Hipereástico Utilizando o Método da Curva B-Spline para Suavização da Superfície de Contato**. Salvador: Universidade Federal da Bahia. Dissertação de Mestrado., 2018.

SANTOS, D. B. V.; BANDEIRA, A. A. Numerical modeling of contact problems with the finite element method utilizing a B-Spline surface for contact surface smoothing. **Latin American Journal of Solids and Structures**, 2018.

SERPA, A. L.; IGUTI, F. Contact with friction using the augmented lagrangian method: A conditional constrained minimization problem. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences**, XXII no2, 2000. 273–289.

SIGNORINI, A. Sopra Alcune Questioni di Elastostatica. **Attidella Societa Italiana per I Progresso delle Scienze**, 1933.

SIGNORINI, A. Questioni di elasticità non linearizzata e semi linearizzata. **Rendiconti di Mathematica e dell sue Applicazioni**, 18, 1959. 95–139.

SIMO, J. C.; LAURSEN, T. A. **A continuum-Based Finite Element Formulation For The Implicit Solution of Multibody, Large Deformation Frictional Contact Problemas**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1993.

SIMO, J.; WRIGGERS, P.; TAYLOR, R. A perturbed lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 50, 1985. 163–180.

SZABÓ, B. A.; MEHTA, A. K. p-convergent finite element approximations in fracture me- chanics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 12, 1978. 551-560.

THOMSON, W. T. **Teoria da vibração com aplicações**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

TURNER, M. J. et al. **Stiffness and deflection analysis of complex structures**. [S.l.]: Journal of the Aeronautical Sciences, v. 23, 1956.

VOROVICH, I.; ALEXANDROV, V. **Mechanics of Contact Interactions**. [S.l.]: PhysMatLit, 2001.

VOSS, H. A new justification of the Jacobi–Davidson method for Large Eigenproblems. **Linear Algebra and its Applications**, Hamburg, February 2007. 448–455.

WILKINSON, J. H.; REINSCH, C. **Linear Algebra**. 1<sup>a</sup>. ed.. ed. New York: Springer-Verlag, 1971.

WILSON, E. A.; PARSONS, B. Finite element analysis of elastic contact problems using differential displacement. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2, 1970.

WRIGGERS, P. **Computational Contact Mechanics**. Second Edition. ed. Hannover, Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

WRIGGERS, P. **Nonlinear Finite Element Methods**. Hannover, Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.

WRIGGERS, P.; SIMO, J. C.; TAYLOR, R. L. Penalty and Augmented Lagrangian Formulations for Contact Problems. **Proceedings of NUMETA 85 Conference** , Balkema, Rotterdam, 1985.

YASTREBOV, V. A. Computational Contact Mechanics: Geometry, Detection and Numerical Techniques. **Tese (Doutorado)**, 2011.

ZHONG, W. X.; SUN, S. M. A parametric quadratic programming approach to elastic contact problems with friction. **Computers and Structures**, 32, 1989. 37–43.

ZHONG, W.; SUN, S. A finite element method for elasto-plastic structure and contact problem by parametric quadratic programming. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 26, 1988. 2723–2738.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. **The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics**. 6. ed. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.