UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS
DOUTORADO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS

EDMO FERNANDES CARVALHO

INTEGRAÇÃO DE NOÇÕES DIDÁTICAS NAS PRAXEOLOGIAS MATEMÁTICAS NO ESTUDO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

SALVADOR-BA
NOVEMBRO / 2019

EDMO FERNANDES CARVALHO

INTEGRAÇÃO DE NOÇÕES DIDÁTICAS NAS PRAXEOLOGIAS MATEMÁTICAS NO ESTUDO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Universidade Federal da Bahia / Universidade Estadual de Feira de Santana, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ensino, Filosofia e História das Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Marcio Santos Farias.

SALVADOR-BA

NOVEMBRO / 2019

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Universitário de Bibliotecas (SIBI/UFBA),
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Carvalho, Edmo Fernandes
Integração de noções didáticas nas praxeologias matemáticas no estudo da função quadrática / Edmo Fernandes Carvalho. -- Salvador, 2019.
164 f. : il

Orientador: Luiz Marcio Santos Farias.
Tese (Doutorado - Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) -- Universidade Federal da Bahia, Faculdade de Educação, 2019.

1. Educação. 2. Formação docente. 3. Ensino de Matemática. 4. Didática da Matemática. 5. Modelos epistemológicos e praxeológicos. I. Farias, Luiz Marcio Santos. II. Título.

Edmo Fernandes Carvalho

Integração de noções didáticas nas Praxeologias Matemáticas no estudo da função quadrática

Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, Universidade Federal da Bahia / Universidade Estadual de Feira de Santana

Tese aprovada em 28 de novembro de 2019.

Composição da Banca Examinadora

Prof. Dr. Luiz Marcio Santos Farias – orientador
Universidade Federal da Bahia

Profa. Drª. Berta Barquero
Universidad de Barcelona – Espanha

Prof. Dr. Ignasi Florensa Ferrando
Escola Universitària Salesiana de Sarrià – Espanha

Prof. Dr. Renato Borges Guerra
Universidade Federal do Pará

Prof. Dr. André Luis Mattedi Dias
Universidade Federal da Bahia

Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa
Universidade Federal da Bahia

Dedico este trabalho a Mariana, Isis e Maria Paixão, pilares da minha vida.

Nós começamos confusos e terminamos confusos num nível mais elevado.

Provérbio de autoria desconhecida

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a minha família, especialmente esposa e mãe, por todo apoio que me foi dado nesse período de doutorado.

Sou muito grato ao professor Doutor Luiz Marcio Santos Farias pela confiança e pela disponibilidade para orientar-me no mestrado e doutorado, bem como, pelas oportunidades de outras aprendizagens no que se refere ao ambiente acadêmico.

Agradeço também aos professores do programa de pós-graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências pelos bons momentos de interlocuções.

Aos professores Jonei Barbosa, André Mattedi, Berta Barquero, Iggnasi Florensa, Renato Guerra, José Vieira e José Messildo, mebros da minha banca examinadora pela disponibilidade e gentileza em participarem dessa tarefa de contribuir para melhoria do relatório dessa pesquisa.

As pessoas que conheci ao longo da minha trajetória acadêmica ou profissional, como a Professora Dra. Dália Conrado e o professor Dr. Laerte Fonseca. Também aos colegas de trabalho das escolas da Educação Básica, da Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS e do meu atual local de trabalho a Universidade Federal do Oeste da Bahia - UFOB. Faço um agradecimento especial ao professor Dr. Anderson Brito, pelo importante apoio no período de finalização desse trabalho.

Aos estudantes da licenciatura em Matemática da UEFS e da UFOB pela compreensão das minhas limitações nesse período do doutorado. E um agradecimento muito especial a todos que gentilmente participaram da pesquisa.

Aos colegas do Núcleo Interdisciplinar de Pesquisas em Ensino e Didática das Ciências, Matemática e Tecnologias/UFBA, pela parceria nos momentos difíceis.

A senhora Marli, a Lúcia e Priscila pela forma equilibrada com que trabalharam no PPGEFHC, valorizando aspectos de humanidade, respeito e carinho com todos os estudantes.

Resumo

CARVALHO, E. F. Integração de noções didáticas nas Praxeologias Matemáticas no estudo da função quadrática. 2019. 164p. Tese (Doutorado), Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, Faculdade de Educação, Universidade Federal da Bahia / Universidade Estadual de Feira de Santana, 2019.

No campo da antropologia da didática, os conhecimentos didáticos (profissionais) podem ser utilizados para questionar os conteúdos curriculares e as estratégias para ensino destes. Nessa investigação, propõe-se que a integração de noções didáticas nas teorias matemáticas é uma forma de promover tal questionamento. Isso é olhado de perto na difusão do objeto função quadrática num curso de formação de professores de Matemática. Isto implica dizer que as restrições nas práticas que constituem a Atividade Matemática de professores e estudantes constituem o nosso objeto de investigação. Objetiva-se, assim, analisar as condições e/ou restrições institucionais de uma proposta de construção de um modelo praxeológico alternativo para o estudo da função quadrática, de modo que sejam trabalhadas situações que nos levem ao encontro da função quadrática como parábola em curso de formação docente. Trata-se de uma problematização também sobre os status da parábola, bem como das inter-relações entre domínios matemáticos. Essa investigação se alicerça no paradigma do questionamento do mundo, amparado teoricamente no quadro da Teoria Antropológica do Didático desenvolvida por Yves Chevallard, do qual tomam-se algumas noções necessárias à interpretação dos dados construídos no seu desenvolvimento. É parte de uma Engenharia Didática de segunda geração, denominada Engenharia do Percurso de Estudo e Pesquisa – PEP, que se constitui como percurso metodológico dessa investigação. Os resultados indicam que a proposição de situações que levem a função quadrática à parábola pela experimentação de um PEP potencializou a integração de noções didáticas nas Praxeologias Matemáticas dos participantes da investigação e, por consequência, o questionamento dos conteúdos a serem ensinados. Isso caracterizou, ainda, uma espécie de reconstrução de praxeologias didático-matemáticas nesse contexto formativo.

Palavras-chave: Função quadrática; Parábola; Teoria Antropológica do Didático; Percurso de Estudo e Pesquisa; Ensino de Matemática.

INTEGRATION OF TEACHING NOTIONS IN MATHEMATIC PRAXEOLOGIES IN THE STUDY OF QUADRATIC FUNCTION

Abstract

In the field of anthropology of didactics, the didactic knowledge (professionals) can be used to question the curricular contents and the strategies for their teaching. In this research, it is proposed that the integration of didactic notions in mathematical theories is a way to promote such questioning. This is closely watched on the diffusion of the mathematical quadratic function object in a mathematics teacher training course. This implies that the restrictions on the practices that constitute the mathematical activity of teachers and students constitute the object this investigation. Thus, the objective is to analyze the conditions and / or institutional constraints of a proposal to construct an alternative praxeological model for the study of quadratic function, to work out situations that lead us to the quadratic function as a parablein teacher training course. It is also a discussion of the status of the parable, as well as the interrelationships between mathematical domains. This investigation is based on the paradigm of questioning of the world, supported theoretically in the framework of the Anthropological Theory of Didactics developed by Yves Chevallard, from which some notions necessary for the interpretation of the data built in its development are taken. It is part of a second generation Didactic Engineering, called Engineering of the Study and Research Path - SRP, which constitutes the methodological path of this investigation. The results indicate that the proposition of situations that take the quadratic function to the parable through the experimentation of a SRP potentiated the integration of didactic notions in the mathematical praxeologies of the research participants and, consequently, the questioning of the contents to be taught. This also characterized a kind of reconstruction of didactic-mathematical praxeologies in this formative context.

Keywords: Quadratic Function; Parable; Anthropological Theory of Didactics; Study Path and Research; Math Teaching.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS E TABELAS

LISTA DE ABREVIAÇÕES E SIGLAS

AER – Atividade de estudo e pesquisa (sigla em francês)
BNCC – Base Nacional Comum Curricular
BDTD – Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BSF – Bloco do saber-fazer
CA – Categorias abertas
C-DD – Co-determinação didática
CET0059 – Código da componente curricular: Elementos de Matemática
CET0064 – Código da componente curricular: Ensino de Matemática: Funções
ED – Engenharia didática
GAG – Espaço de inter-relações entre os domínios geométrico, algébrico e gráfico
HFC – História e Filosofia das Ciências
IAMI – Incompletude da atividade matemática institucional
IBICT – Instituto Brasileiro de Informações em Ciências e Tecnologia
LR – Latus rectum
MED – Modelo Epistemológico Dominante
MER – Modelo Epistemológico de Referência
MPA – Modelo Praxeológico Alternativo
MPR – Modelo Praxeológico de Referência
NAG – Inter-relações entre os domínios numérico, algébrico e geométrico
NIPEDICMT – Núcleo de pesquisa em ensino e didática das ciências, matemática e tecnologias
PD – Problema didático
PEP – Percurso de Estudo e Pesquisa
PEP-DD – Percurso de Estudo e Pesquisa – Dispositivo didático
PIQM – Paradigma da investigação do questionamento do mundo
PM – Praxeologia(s) Matemática(s)
PPD – Praxeologia de pesquisa em didática
PS – Parábola de segurança
PV – Pensamento Variacional
τ – Técnica
T – Tipo de Tarefa
TAD – Teoria Antropológica do Didático
UR – Unidades temáticas de referência
UEFS – Universidade Estadual de Feira de Santana
UFBA - Universidade Federal da Bahia
Θ – Teoria
θ – Tecnologia

Sumário

Introdução

O objeto do saber função, considerado fundante na Matemática, não por acaso, nos chamou a atenção desde nosso primeiro contato com o mesmo no último ano do 1º Grau Maior, hoje Ensino Fundamental II da Educação Básica. Intuitivamente a noção desse objeto (ideal), vivenciado por nós na mediação daqueles que o representava, foram os primeiros alicerces nas nossas práticas matemáticas no campo das relações funcionais. No entanto, tal construção não se deu de uma forma muito tranquila. Tanto no Ensino Básico, quanto no período subsequente de curso de formação docente no Ensino Superior, era possível perceber que faltava algo para dar sustentação à construção de nossa relação pessoal e identitária de significação com o referido saber.

Tal relação com o objeto Função, duramente construída ao longo das nossas experiências de formação educacional e profissional, ainda não tinham preenchido lacunas, antes nem percebidas, mas clarificadas a partir da prática docente, quando de nossa atuação em escolas públicas em Salvador e Região Metropolitana, lecionando Matemática. A percepção do quanto era difícil para os estudantes a apreensão das ideias relativas a esse objeto ampliou a necessidade de reconstrução de nossas práticas docentes, tornando-se mais significativa ao longo de 12 anos de docência.

Ao mesmo tempo que o saber Função nos encantava, seu ensino nos intrigava, o que foi potencializado a partir da nossa primeira experiência de docência na formação inicial de professores de Matemática. Agora era preciso orientar futuros professores compartilhando conhecimentos e pesquisando sobre a tarefa de lecionar aquilo que parecia ao mesmo tempo tão abstrato e tão perto das coisas do cotidiano. E essas foram as primeiras motivações para elegermos o objeto de investigação que apresenta-se no decorrer dessa introdução.

Desse modo, tratamos nessa investigação de uma problemática que se situa no âmbito das discussões da Teoria Antropológica do Didático[1] (CHEVALLARD, 1999), a qual chamaremos, a partir daqui de TAD. São feitas referências às praxeologias construídas por estudantes de um curso de licenciatura em Matemática. Por meio das praxeologias construídas por estes sujeitos, olhamos para a relação pessoal destes com os objetos matemáticos função quadrática e parábola, bem como para as relações institucionais existentes no âmbito do

[1] A TAD situa a Atividade Matemática e, portanto, a Atividade Matemática do estudo, em todas as atividades humanas em instituições sociais (CHEVALLARD, 1998).

programa de ensino para formação docente. De certo modo, nosso problema de investigação se encontra em dificuldades que afetam os processos de ensino e aprendizagem da Matemática.

Outrossim, nossa problemática se situa, mais especificamente, na relação dos sujeitos com situações que não nos levam à noção de função quadrática como parábola e, consequentemente, no duplo status desse objeto, que se insere nos domínios da análise e da Geometria Analítica, e suas dimensões epistemológica-histórica e didática.

As funções são objetos matemáticos estudados tanto no Ensino Básico como no Ensino Superior, um dos mais relevantes, por constituirem meios de modelar fenômenos naturais e sociais, e por estarem na base de outros saberes matemáticos, a exemplo daqueles estudados no cálculo diferencial e integral, está aqui localizada uma de suas razões de ser institucional.

No entanto, apesar dos esforços envidados em torno de um ensino efetivo de funções na educação básica, e mesmo na formação de professores de matemática, ainda é possível sentir uma ambiência de lacunas nas relações dos sujeitos das instituições com esse saber.

Mais do que isso, abre uma brecha para olharmos de perto o fenômeno didático[2] da Incompletude da Atividade Matemática Institucional (FARIAS et al., 2018), o qual pode interferir nas praxeologias de tal modo que um sujeito tenha desenvolvido o saber-fazer, mas não o compreenda. Para mitigar os efeitos desse fenômeno, doravante denominado de IAMI, propomos uma integração de elementos não característicos do *logos* nesse bloco da Praxeologia Matemática[3] nas experimentações num cenário de formação docente.

Desse contexto, surge nossa tese: a proposição de um modelo praxeológico alternativo que pode possibilitar a integração de noções didáticas no *logos* das Praxeologias Matemáticas de futuros professores de Matemática, acerca da noção de Função quadrática a partir de situações que levem os sujeitos ao encontro de Função Quadrática como parábola (discussão do duplo status da parábola), o que pode implicar em reconstruções de praxeologias de docentes na Educação Básica.

[2] São compreendidas nessa investigação como *construções teóricas*, em outras palavras, são a contrapartida teórica as muitas faces dos fatos empíricos (mas nos referimos aos fatos didáticos). No entanto, Chevallard diz que “[...] os fenômenos se referem a esses fatos que a teoria nos permite *definir* em sua própria linguagem e conceitos.” (CHEVALLARD, 2013, p.5).

[3] Uma praxeologia é o quádruplo $[T; \tau, \theta, \Theta]$, onde T é o tipo de tarefa, τ, a técnica associada, θ, o discurso tecnológico que justifica a técnica, Θ teoria associada (CHEVALLARD, 1998).

Precisamos identificar as condições epistemológicas e institucionais para desenvolver um trabalho com o referido objeto matemático, assentado num modelo praxeológico alternativo pautado em elementos da algebrização da Geometria e da Análise Real.

A noosfera[4], de certo modo, organizou o ensino da parábola. Trataremos da cônica, a qual desempenha papel central na nossa pesquisa, em diferentes caixas. No início do Ensino Médio a parábola, um objeto ostensivo que representa uma função e, na última série, um ostensivo que representa uma cônica se verificadas algumas propriedades.

Por outro lado, no Ensino Superior, especificamente na licenciatura em Matemática, existe uma condição institucional para que a Função quadrática seja estudada de forma análoga ao contexto da gênese desse saber. No contexto da nossa investigação, um grupo de estudantes de um curso de formação inicial docente para ensino de Matemática na Universidade Federal do Oeste da Bahia.

No caso do currículo do curso de formação docente a que nos referimos, em dois componentes distintos são estudados os elementos que definem o status da parábola como gráfico e cônica. Mas também nesse nível de ensino, parece existir uma lacuna nas Praxeologias Matemáticas, ou seja, o estudo se dá de forma dissociada.

Possivelmente, tais aspectos se materializam no que Vandebrouck (2011) apontou. Pelos seus estudos, os estudantes só esboçam um gráfico para representar uma função quando a tarefa o solicita de forma explícita, por exemplo: (T_i) *Esboçar o gráfico da função quadrática representada pela equação* $f(x) = x^2 + 2x + 1$. A representação gráfica não é evocada para apresentação ou abordagem da noção de uma função de forma natural. Assim, no caso da Função quadrática, não seriam evocadas técnicas que nos levassem à ideia de função quadrática como parábola, daí a necessidade de tarefas didáticas para mobilizar tal aspecto do ensino do objeto em questão. Na maioria das vezes, o trabalho feito pelos os estudantes é de manipulação algébrica [Grifo meu]: (T_{ii}) *Escrever a lei que define uma função quadrática f, sabendo que f (1) = 3 e f(0) = 1*. Isso implica em incompreensões na passagem de um ostensivo de um domínio matemático a outro, por exemplo, ao passar do algébrico para o gráfico, ou mesmo dificuldades de surgirem técnicas que revelem a existência de um status geométrico para as funções. As

[4] Termo não definido precisamente por Chevallard, é uma estrutura abstrata que representa o jogo de forças que realizam a transposição didática. Segundo ele, é na noosfera, "[...] que os representantes do sistema de ensino, com ou sem mandato (...) se encontram, direta ou indiretamente (através de uma pesquisa, restringindo a demanda, no projeto transacional, debates ensurdecedores de projetos transacionais de uma comissão ministerial), com os representantes da sociedade (os pais de alunos, os especialistas que militam em torno do ensino, os emissários de um órgão político)." (CHEVALLARD, 1991, p.28). [Tradução nossa].

tarefas T_i e T_{ii}, são duas Organizações Matemáticas que nos servem para pensar num modelo praxeológico alternativo.

Possíveis alterações nas praxeologias de estudantes na Educação Básica passam, inevitavelmente, pela questão da formação docente. Trabalhos anteriores, que abordaram percursos de estudo e pesquisa na formação de professores (CIRADE, 2006; BOSCH & GASCÓN, 2009; BARQUERO, BOSCH & ROMO, 2015), têm como pressupostos que os programas de formação docente devem considerar dificuldades e dilemas que afetam o desenvolvimento da atividade profissional. Tomamos como dificuldade a relação pessoal de professores de matemática com os objetos de ensino, e o processo de dissociação entre o saber-fazer e o *logos* nessas praxeologias. Isso, possivelmente, ocorre por falta de algo nas praxeologias didáticas dos docentes. Apostamos, assim, na ausência de algumas noções didáticas no *logos* das Praxeologias Matemáticas desses profissionais.

Propomos, então, um trabalho que tanto possa evocar um modelo epistemológico de referência para um componente curricular da área de ensino (Ensino de Matemática: Funções), quanto um modelo praxeológico para as práticas dos professores que já atuam ou vão atuar na Educação Básica. Isso pode ser feito pela inter-relação entre distintos domínios matemáticos[5] nas Organizações Matemáticas que compõem os objetos de estudo, o que deve implicar nas Praxeologias Matemáticas construídas em torno das Funções quadráticas e da parábola em seus diferentes status. Na experimentação de um dispositivo didático no contexto da investigação, ensejamos o surgimento de tarefas didáticas de verificação e controle, que expressem a reconstrução das próprias praxeologias matemáticas ao mesmo tempo em que dão indício de integração de noção didática.

Desse modo, enquanto saber para prática do professor, o objeto matemático em jogo poderá mitigar as lacunas existentes na Educação Básica e, enquanto saber do professor, alterará as relações pessoais deste com o referido saber. Isso se dará na forma de reestruturação da apresentação das Organizações Matemáticas, o que acreditamos implicar na reconstrução das Praxeologias Matemáticas dos participantes dessa pesquisa.

Postos os argumentos acima, objetivamos, nessa investigação, analisar as condições e/ou restrições institucionais de uma proposta de construção de um modelo praxeológico

[5] Compreendemos domínios matemáticos como as grandes áreas da Matemática: Álgebra; Geometria etc.

alternativo para o estudo da função quadrática, de modo que sejam trabalhadas situações que nos levem ao encontro da função quadrática como parábola em curso de formação docente.

Quanto a sua estrutura, este trabalho possui três frentes: epistemológica, ecológica e experimental. Na primeira, buscamos compreender as consequências da constituição desse saber enquanto objeto de ensino, ou seja, como a parábola passou a integrar as práticas institucionais como forma gráfica de funções representadas por equações do segundo grau, e quais as intenções didáticas implícitas nesse fenômeno de constituição de um saber a ensinar.

Isso é discutido no capítulo 1, intitulado *Construção da problemática didática: Constituição do objeto função quadrática e a relação entre os ostensivos escriturais e figurais.* Esse capítulo é sustentado pela hipótese 1 (H_1): o fenômeno que estudamos nessa investigação, a incompletude da atividade matemática institucional, tem sua origem na organização para o ensino do saber funções quadráticas (alguma etapa do processo transpositivo). O que constituiu a noção de função quadrática ganhou corpo como objetos do saber ensinar de forma dissociada, não possibilitando amalgamação de técnicas para resolução de tarefas.

Desse modo, primeiro, apresentamos o objeto de investigação, em seguida, a função quadrática e, depois, discutimos aspectos da percepção gráfica em seu estudo, a partir da discussão sobre o duplo status da parábola.

Na frente ecológica, discutida no capítulo 2, intitulado *Construção de um modelo praxeológico alternativo para o ensino da função quadrática*, apresentamos nossa segunda hipótese (H_2): a análise ecológica do saber permite visualizar uma razão de ser alternativa para o referido saber. Isso se deve ao fato de o currículo não ser engessado, o que torna possível reconstruir a Organização Matemática para o ensino do objeto função quadrática pelo estudo do duplo status da parábola, desde que sejam integradas ao *logos* das Praxeologias Matemáticas dos futuros professores noções didáticas, a saber: gestos de estudo e variáveis didáticas, que funcionem como geradoras de tarefas.

Primeiro, realizamos uma revisão de literatura para determinar o status quo das pesquisas, tendo como questão diretriz: As práticas deduzidas pelas pesquisas analisadas tocam no *logos* das Praxeologias Matemáticas na formação docente no que tange ao ensino do objeto função quadrática? Tal revisão é feita com base em um banco de dados nacional e internacional.

Em seguida, vamos caracterizar a razão de ser oficial do saber no curso de licenciatura em Matemática (no componente Ensino de Funções) da UFOB, examinando o programa dessa disciplina, bem como outras possíveis razões de ser alternativas imbricadas no processo de difusão do conhecimento em jogo, empregando nessa discussão a noção de ecologia dos saberes. Outra parte da análise ecológica é realizada pelo exame de um livro didático para o ensino de funções na formação do professor de Matemática.

Isso guiará a proposição do Modelo Praxeológico Alternativo[6] – MPA –, que pode auxiliar na reconstrução das Praxeologias Matemáticas do professor que ensinará o objeto matemático em questão.

Finalmente, na frente experimental discutida no capítulo 3, intitulado *Experimentação de um PEP no contexto universitário: Praxeologias Matemáticas de licenciandos no estudo da função quadrática*, apresentamos a hipótese 3 (H_3). Ela vincula-se à problemática possibilística, umas das problemáticas de base da TAD. É uma tentativa de possibilitar a vida institucional de um modelo praxeológico alternativo para o ensino do objeto em jogo, ao mesmo tempo em que buscamos os preditores de integração das noções didáticas no *logos* das Praxeologias Matemáticas construídas a partir da experimentação de um Percurso de Estudo e Pesquisa – PEP.

Dessa maneira, a H_3 é assim descrita: um PEP com questão Q_0, geratriz desse Percurso, com razão de ser alicerçada na epistemologia da noção de função quadrática em que os problemas de lugar geométrico e estudo das equações quadráticas deram origem ao saber em jogo, possibilita a integração desse saber nas Praxeologias Matemáticas dos futuros docentes, desde que sejam reconstruídos os *logos* dessas praxeologias por meio desse PEP.

Apresentamos uma análise a priori da questão geratriz Q_0, que iniciará um PEP adaptado e, de acordo com a análise ecológica, o que pode surgir como prosseguimento do PEP, além de pautar este ensaio de análise, a princípio, no que pode fazer emergir no Percurso algumas noções didáticas.

Na sequência, descrevemos a experimentação e a analisamos com um método híbrido inspirado na análise de conteúdo (BARDIN, 2011), praxeológica (CHEVALLARD, 1999, MATHERON, 2000) e de variáveis didáticas no construto praxeológico (CHAACHOUA; BESSOT, 2019).

---

[6] Esse modelo é considerado alternativo, visto que a estrutura para o ensino do saber em discussão normalmente é feito de forma diferente do que se percebe ao realizar um estudo histórico-epistemológico. A forma como se organizou tal saber a ensinar apresenta noções que, em sua origem, eram integradas, no modelo comumente presente nas instituições de ensino, o saber é estudado de forma dissociada (em compartimentos de acordo com domínios da matemática), a este modelo chamamos, no campo da epistemologia experimental (Didática da Matemática), de Modelo epistemológico dominante (MED).

No que concerne à abordagem metodológica dessa investigação, estamos denominando-a de Praxeologias de Pesquisa em Didática – PPD[7] (CHEVALLARD, 2015), salientando que essa PPD tem elementos da Engenharia Didática do Percurso de Estudo e Pesquisa – Engenharia do PEP (BOSCH, 2010).

A abordagem metodológica é complementada pelas análises praxeológicas (CHEVALLARD, 2002), análise feita sobre as etapas da experimentação do PEP construído por nós, para o estudo da relação entre ostensivos figurais e escriturais na noção de função quadrática.

Os dados empíricos dessa investigação são obtidos no âmbito do Ensino Superior, num curso de Matemática, na modalidade licenciatura, da Universidade Federal do Oeste da Bahia. Os dados coletados, passam por um filtro instrumental que visou testar o PEP experimentado quanto aos gestos de estudo mobilizados na perspectiva do referido dispositivo didático, denominadas dialéticas, a saber: dialética das perguntas e respostas e a das mídias e dos meios, que nos servem de indicadores da integração de parte das noções didáticas no *logos* das praxeologias matemáticas dos participantes da investigação. A construção dos dados experimentais ocorreu no segundo semestre de 2018 e primeiro de 2019.

Quanto aos resultados, podemos apontar, preliminarmente, que a integração de noções didáticas no *logos* das Praxeologias Matemáticas não é guiada, mas que estas emergem, por exemplo, da experimentação do PEP utilizado na pesquisa. As variáveis didáticas que geram tarefas no desenrolar do PEP, bem como de gestos de estudo, a exemplo de perguntas e respostas, são vistas como processo natural, que revela a aderência daquilo que não é matemático no que é intrínseco à Matemática (teorias matemáticas, mais precisamente bloco tecnológico-teórico).

A referida conclusão é preliminar, visto que pensamos ser prudente analisarmos até que ponto ocorre aderência de outras noções didáticas discutidas no âmbito da Didática da Matemática no *logos* das Praxeologias Matemáticas, a ponto de mitigar a incompletude da atividade matemática institucional.

Ademais, umas das principais contribuições desse estudo para o Ensino da Matemática, concerne na apresentação de elementos que fazem parte das Organizações Didáticas e que têm potencial para serem integrados as teorias matemáticas, com implicações diretas no contexto

[7] Do termo em francês praxéologies de recherche em didactique – PRD (CHEVALLARD, 2015) [tradução nossa].

da investigação (formação inicial de professores de Matemática), e por consequência na Educação Básica, desde que ocorra reconstruções praxeológicas de docentes de Matemática, ampliando o olhar sobre a relação do objeto Função quadráticas e o ostensivo gráfico e seus diferentes status.

Capítulo 1

Construção da problemática didática: Constituição do objeto Função quadrática e a relação entre os ostensivos escriturais e figurais

O ensino dos objetos matemáticos tem sido uma tarefa complexa nas práticas institucionais (escolares/acadêmicas). Esta constatação nos conduziu ao estudo, caracterização, conceituação e tentativa de interpretação da Incompletude da Atividade Matemática Institucional – IAMI (FARIAS; CARVALHO; FERNANDES, 2018).

O problema didático que buscamos caracterizar nesse capítulo tem filiação com o referido fenômeno, o qual, por sua vez, tem íntima relação com a visitação dos saberes (CHEVALLARD, 2004). O ponto chave para se compreender a IAMI é a busca por condições cujos momentos de estudo atemporais, do trabalho de construção da técnica e construção do discurso tecnológico-teórico, sejam indissociáveis nas Praxeologias Matemáticas nas instituições. Partimos do pressuposto de que, se existe essa incompletude, o verdadeiro problema está na construção das tarefas que são ofertadas aos estudantes, o que, por efeito dominó, se estende de um nível a outro de ensino.

Cabe destacarmos que o fenômeno IAMI não é uniforme, além disso, sua compreensão se amplia à medida em que se realizam estudos em busca de respostas para seus pontos de imprecisão conceitual. A natureza dele, não se pode descrever com precisão, porque em cada contexto institucional pode apresentar características e consequências específicas, as quais, possivelmente, dependem não só dos saberes matemáticos em estudo, mas de outras variáveis, tais como a organização dos currículos e as condições de difusão a partir desses. Nesse contexto, apresentamos o problema didático de investigação: Quais são as condições necessárias para que seja implementada uma situação que nos leve ao encontro da função quadrática como parábola na formação inicial de professores de matemática?

Dentre outros aspectos, interessam-nos os que corroboraram com a institucionalização do objeto matemático função (baseado na Teoria de Conjuntos) como saber a ensinar, ao tempo que identificamos o que restringe as relações dos sujeitos de uma instituição frente situações que mobilizam tal objeto matemático. Para tanto, esboça-se um estudo teórico sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999), sendo as interpretações empreendidas sobre construções teóricas dos fatos ou, particularmente, fenômenos didáticos.

Caracterizamos, assim, um Modelo Epistemológico-didático Dominante – MED, referente ao saber em questão, como uma descrição desse saber em termos de Praxeologias Matemáticas institucionais e as pré-institucionais (aquelas que não estavam vinculadas à intenção de ensino). Da análise do MED, são apontados elementos que configuram o fenômeno IAMI, o qual reflete a necessidade de dispositivos didáticos como forma de alterar as relações dos sujeitos numa instituição com os objetos que vivem nesta, se tais relações se mostram problemáticas. Desse modo, nossa proposta, consiste em um trabalho descritivo-analítico de um MED referente ao saber funções.

Outrossim, voltamos nossas atenções para as contribuições da História e Filosofia das Ciências (HFC) para o ensino da Matemática, ação que foi embasada em outros estudos que consideram tais aportes no ensino das Ciências Naturais (MATTHEWS, 1995; BASTOS, 1998; ADÚRIZ-BRAVO et al., 2002; DELIZOICOV, ANGOTTI & PERNANBUCO, 2007).

Pode-se dizer que, timidamente, na Educação Matemática, esse movimento tem sido empreendido por uma de suas vertentes, a História da Matemática, como forma de levar para o ensino da Matemática ideias que aproximam o estudante desta área do conhecimento, mostrando que o processo de constituição dos conhecimentos não se deu de forma linear. No entanto, o questionamento da natureza da Matemática, ainda é um objeto inatingível, sendo seu conjunto de saberes ensinado de forma que pareçam monumentos intocáveis. Este fenômeno didático denomina-se monumentalismo dos saberes (CHEVALLARD, 2004).

Essa análise de alguns fatos matemáticos e elementos da epistemologia da Matemática nos permite visualizar melhor a IAMI, o que pode acenar para problemas na mediação didática realizada em torno dos saberes pelos difusores dessa cultura.

Tomando o conceito formal de função como objeto matemático para contextualizar a ideia da IAMI, depois a relação entre ostensivos figurais (gráficos) e escriturais (leis algébricas), questionamos, além do que institucionalizou o referido saber, o que o restringe na instituição integrante da pesquisa (curso de matemática, modalidade licenciatura). Faz-se igualmente importante questionar o que institucionalizou o conceito formal de função como relação estática entre grandezas, mesmo quando o que está na sua base são fenômenos que explicam movimentos dos corpos (caso dos problemas estudados na Física).

Isso se deve a uma característica intrínseca da problemática didática geral, de questionar a transparência do conhecimento matemático, problematizá-lo e integrar a seu campo de estudo noções matemáticas, aquelas que não são ferramentas, mas objetos matemáticos (CHEVALLARD, BOSCH & GASCÓN, 2001).

Nossa hipótese é que a Incompletude da Atividade Matemática Institucional, no caso do objeto matemático em estudo, tem sua origem na organização para o ensino desse saber (processo transpositivo), por meio do qual olhamos, particularmente, para funções quadráticas. O que constituiu a noção de função quadrática ganhou corpo como objeto do saber a ensinar de forma dissociada: problemas de lugar geométrico (que caiu em desuso), função quadrática e seu gráfico e as cônicas na Geometria Analítica – GA. Além disso, é pertinente questionarmos porque a GA ainda tem tanta força enquanto componente curricular, mesmo sabendo-se que em outros contextos, fora do Brasil, a Álgebra Linear dá conta de intercambiar e amalgamar técnicas para resolver tarefas que tratem das funções e que dependam de ostensivos figurais (gráficos).

No desenrolar dessa discussão, apresentamos um recorte de um estudo histórico-epistemológico, tentando identificar, nos fatos relativos ao desenvolvimento do saber função de modo geral, e função quadrática, de maneira particular, traços das praxeologias hoje consagradas na abordagem dos saberes matemáticos em instituições de ensino. Na estrutura de nossa investigação, como já apontamos, isso se refere à caracterização do MED (BARQUERO et al. 2013).

Conhecer o MED se justifica pelo seu auxílio na concepção de um Modelo Praxeológico Alternativo para o estudo da função quadrática, da parábola e do seu duplo status, nos permitindo propor, no segundo capítulo, dispositivos didáticos atentos à problemática do processo transpositivo.

No percurso investigativo, alguns questionamentos surgem quanto à organização didática para o ensino e estudo do conceito global de função quadrática e contribuições para o encontro dessa função como parábola.

Por isso, é imprescindível que propostas didáticas sejam pautadas em modelos de aprendizagem por investigação, pressupondo, assim, uma mudança no *topos* (papel) do professor e do aluno, capaz de constituir uma relação próxima de uma comunidade de estudo. Essa proposta parte de Chevallard (2009), sendo denominada por ele de pedagogia do conhecimento e questionamento do mundo, um paradigma que se contrapõe ao do monumentalismo dos saberes, ainda experimentado em larga escala nas instituições de ensino.

Por conseguinte, modelos didáticos pautados nesse referida pedagogia pressupõem que, assim como podemos identificar no desenvolvimento de muitos saberes matemáticos, que constituem hoje o currículo da Matemática escolar, um apelo às necessidades humanas, a atividade matemática escolar possibilita revelar a razão de ser do estudo dos objetos matemáticos, o que deve ocorrer por meio da apresentação, à comunidade de estudo, de uma devolução de problemas genuinamente investigativos imbricados às necessidades da comunidade local, regional ou global.

Ademais, vislumbrando dar conta do objetivo geral dessa investigação, realizamos primeiro este estudo de natureza histórico-epistemológica, o que pode nos dar indícios de possíveis integrações de noções didáticas da constituição desses saberes enquanto objetos de ensino.

Para essa etapa da nossa investigação, a Praxeologia de Pesquisa em Didática (PDD) assumida tem um víeis de estudo teórico-conceitual (RUIZ, 2002) de natureza qualitativa. Nesse contexto, os dados evidenciam as concepções apresentadas ao longo da história do objeto função, mais especificamente aquilo que nos permite o encontro da função quadrática como parábola, consultadas em alguns repositórios de institutos de história das ciências (em plataformas digitais), de onde tivemos acesso aos escritos de alguns matemáticos que se debruçaram no estudo das funções.

Essa discussão em torno da difusão ou circulação do conceito de função, se faz necessária para, então, compreendermos as razões pelas quais a parábola assumiu o papel de representação gráfica de uma função quadrática. Ora, é fácil encontrarmos em alguns manuais didáticos, na forma de axioma, que toda função, escrita algebricamente na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, é representada por uma parábola. E pensamos existir aí uma lacuna, mas, ao mesmo tempo, uma ótima oportunidade de abordarmos elementos da constituição desse objeto matemático enquanto saber a ser ensinado.

1.1 Primeiras evidências de um problema didático: em busca de um consenso para definição de função

O estudo de conceitos matemáticos numa instituição está intimamente ligado às formas de difundir e/ou fazer circular saberes nesse espaço. Supostas dificuldades apresentadas por sujeitos de uma dada instituição, pode relacionar-se aos tipos de tarefa que são propostas pelos representantes da cultura matemática nesse local.

Nesse ínterim, a ação do sujeito frente a situações com matemática interessa ao presente estudo. E, para compreender as condições e restrições de difusão dos saberes nas instituições, apresentamos alguns aspectos da história do saber função, de modo que possamos entender hoje o seu habitat e função nos programas de ensino e nas próprias práticas institucionais.

No capítulo três, de posse desse estudo, o foco vai para as relações dos sujeitos com o objeto, mas levando em conta a questão diretriz da pesquisa: quais são as condições necessárias para que sejam implementadas situações que nos levem ao encontro de função quadrática como parábola num curso de formação de professores de matemática?

Os conhecimentos matemáticos apresentados nesse capítulo são entendidos como modelos epistemológicos específicos a partir de situações que foram ou não incorporadas à matemática em instituições de ensino. Desse modo, são caras a esse estudo as situações em que a função quadrática e a parábola aparecem e nos quais esses objetos são usados para enfrentar problemas da sociedade.

Precisamos, então, de um recorte temporal para aprofundar as análises dos fenômenos[8] referentes ao saber em questão, por isso nos detivemos aos fatos e ao que está nas entrelinhas do que é contado sobre estes, a partir do século XVII. Desse modo, as situações em que o objeto função aparece são apresentadas, pois, ao que parece, estão nesse período as raízes da institucionalização do referido objeto matemático enquanto saber a ser ensinado.

Sob a lente dessa noção teórica, a análise apresentada consiste na descrição de praxeologias, que advém do trabalho de sujeitos frente a situações, considerando os diferentes objetos não ostensivos mobilizados nessas praxeologias e o discurso tecnológico-teórico que as compõe.

Tentamos, nesse manuscrito, explicitar aspectos de modelos epistemológicos de referência, que são tomados para a proposição de um modelo praxeológico alternativo. Tratamos, também, de duas reflexões acerca da história das instituições e do livro didático, visto que estas podem contribuir para o entendimento do processo de difusão do saber em jogo na instituição que compõe o contexto da pesquisa.

[8] Conforme Chevallard (2013), interpretações teóricas de fatos.

Passamos, então, à discussão do desenvolvimento do objeto função ao longo da história, mais precisamente no período que compreende os séculos XVII e XIX. Vale salientar que o que é apresentado aqui é um ensaio com alguns elementos epistemológico-históricos[9] do desenvolvimento do saber em questão.

1.2 Desenvolvimento do objeto matemático função: em busca de um Modelo Epistemológico de Referência

Em estudos inscritos na TAD, que dão conta da modelização funcional, considera-se como postulado básico a ideia de que os mistérios relativos ao ensino e aprendizagem da matemática, ou da Educação Matemática, estão na própria Matemática[10] (GASCÓN, 1998). Seguindo esse princípio, justificamos a necessidade de um estudo de ordem epistemológica-histórica, numa tentativa de darmos conta desses mistérios intrínsecos aos saberes em jogo, podendo, assim, atacarmos, de forma efetiva, os problemas didáticos identificados.

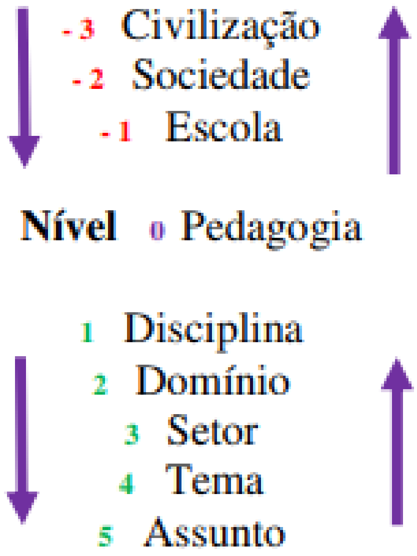
Como nossa proposta neste capítulo é discutir a construção de uma problemática didática da investigação em torno da difusão do objeto matemático funções quadráticas, os ostensivos e as relações dos sujeitos nas instituições com esses objetos, precisamos, mais adiante, focar em um modelo epistemológico para o objeto funções, a saber, aquele proposto pelo grupo Boubarki.

Dos aspectos históricos que apresentamos, tiramos as razões para a difusão do saber em questão, amparados na discussão sobre níveis de co-determinação (C-DD) didática conforme figura 1.

[9] A Didática da Matemática surge da necessidade de integrar o pedagógico com as questões epistemológicas, a partir dos trabalhos de Guy Brousseau. Gascón mostra, em um trabalho no qual aborda essas questões, que a natureza do problema epistemológico nas questões didáticas começou como problema puramente lógico, tornou-se, depois, um problema histórico e, no final do último século, um problema essencialmente cognitivo (GASCÓN, 2001). De acordo com Chevallard (1991), o estudo da gênese e desenvolvimento do conhecimento (objeto de epistemologia) não pode ser separado do estudo da difusão, utilização e transposição do conhecimento (objeto de estudo de didática).

[10] Nessa obra, o autor apresenta um Programa Epistemológico de Investigação, surgindo como resposta a uma insuficiência dos modelos epistemológicos da Matemática.

Figura 1 – Escala de Níveis de co-determinação didática C-DD



Fonte: Chacón (2008, p. 73).

Isso implica dizer que a difusão desse determinado saber tem suas razões de ser alicerçadas em um ou mais desses níveis e, somente analisando a organização didático-matemática e os referidos elementos históricos como forma de contextualizar o tema, pode-se justificar o estudo e ensino desse saber. Ao nível do domínio matemático, nos parece que é comum a razão de ser dos conteúdos ensinados nas instituições de ensino, terem suas causas para fazerem parte do currículo bem claras à medida em que um saber é apresentado como fundamento de outro.

Olhando para a figura 1, abaixo do nível da Pedagogia, considerada nível zero, e abaixo do nível da disciplina, vemos que estes que se seguem estão organizados de forma agregada a uma Organização Matemática complexa crescente (pontual, local, regional e global). Assim, falando da razão de ser para o estudo de situações que promovam o encontro da função quadrática como parábola, ao estudarmos uma tarefa que figure o primeiro encontro dos estudantes com este tema, estamos falando de uma Organização Matemática Pontual que está associada ao nível Assunto. Como exemplo tomemos a tarefa T1: apresentar uma solução gráfica para a equação $x^2 = 3x + 2$. Sendo esta tarefa um caso particular dos casos do cálculo dos zeros de uma função representada pela equação do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Já a Organização Matemática Local (amalgama das OM Pontuais) tem, na sua relação com a escala dos níveis de C-DD, no estudo do Tema (se objetivamos o encontro da função quadrática como parábola, tocamos na questão dos ostensivos figurais – representação gráfica de Funções quadráticas). O nível 3 (Setor) (Construção da parábola) corresponde a uma organização maior após as OM Local e Pontual sofrerem um tipo de fusão, tornando-se uma Organização Matemática Regional.

Conhecida a noção de níveis de C-DD utilizada em nosso trabalho, partimos à justificativa deste capítulo de acordo com Chevallard (1991), cujo argumento é de que o estudo da gênese e desenvolvimento do conhecimento (objeto da epistemologia) não pode estar separado do estudo da difusão e utilização do conhecimento (objeto de estudo da didática), e isso é a base para tratarmos da evolução institucional de praxeologias matemáticas. No entanto, esse trabalho começou com Brousseau, que contribuiu para a divulgação de um novo campo de investigação (Didática da Matemática), tendo pensado e proposto noções que constituíram uma epistemologia essencialmente experimental. Esta denominação foi pensada por Brousseau para este campo, contudo o termo não se popularizou (ARTAUD, 2016).

Consoante a proposição de Gascón (1998), mencionada acima, iniciamos com a apresentação da gênese do saber em jogo até sua consolidação, com o uso de pequenos recortes de aspectos históricos.

Conjecturamos duas situações, verificadas através de uma análise inspirada no tipo documental, a respeito da institucionalização do referido saber, denotadas aqui por C_1 e C_2. A C_1 dá conta de que o que institucionalizou o objeto função nas práticas institucionais da Pesquisa em Matemática foram as necessidades sociais, especialmente a de tornar mais profícua a tarefa de comunicar-se a respeito de modelos que representassem os mais variados fenômenos do mundo físico, o que denota uma relação com o nível de co-determinação Sociedade. Para atendê-la, foi necessário se pensar a difusão dos conhecimentos matemáticos associados aos problemas do movimento em outras áreas do conhecimento, especialmente a Física.

Já a segunda conjectura, C_2: para o ensino, o objeto função tem um modelo epistemológico de referência que vive nas mais diversas instituições, tanto de Ensino Básico quanto superior, pautado nas ideias reformistas do ensino de Matemática, que, entretanto, não se desprende da gênese do saber que se dá pelos estudos no campo do cálculo diferencial e integral.

No estudo da evolução do objeto função, temos, ainda, duas visões a considerar: uma que concebe a Matemática como produção da atividade mental humana, e a outra, que tem um valor intrínseco, uma objetividade própria (POPPER, 2002). A hipótese C_1 parece estar mais relacionada à segunda visão, visto que, por ser dotado de objetividade própria, o conjunto de conhecimentos matemáticos teria elementos para auxiliar outras ciências na interpretação de seus fenômenos num plano, e em outro, que trataria nada mais que de uma ferramenta útil para atender aos interesses do modelo de sociedade vigente .

Esclarecidas nossas intenções, destacamos que, em Sierpinska (1992), por exemplo, encontramos algumas indicações de momentos da evolução do objeto matemático função. Dentre esses momentos, ela destaca os papéis exercidos pelos 'domínio' e 'contradomínio' na relação de variabilidade entre conjuntos, envolvidos na definição desse objeto matemático[11], hoje, bem aceito enquanto um dos conceitos de função (formal). Ao longo do desenvolvimento desse saber, sua aceitação não foi simples assim. Com base nisso, vemos indícios de que a distinção entre a ordem das variáveis, em algumas práticas, não era uma tarefa trivial como ocorre hoje. Mas esse é um problema pouco constante nas praxeologias discentes. Não é a ordem das variáveis, mas as características da relação entre variáveis que constituem um elemento complicador nessas práticas institucionais.

É comum encontrarmos indicações do objeto função em alguns trabalhos (YOUSCHKEVITCH, 1976, apud MACHADO, 1998) anteriores ao MER – Teoria de conjuntos (TC). É mais comum ainda quando se trata de compêndios que apontam para uma ideia primitiva do objeto, nesse tipo de obra didática. Fala-se de uma certa intuição de relação funcional entre variáveis, remontando aos cálculos babilônicos, evidenciadas por meio de umas espécies de funções tabuladas, isso por volta de 2000 anos a.C. Diz-se, ainda, que a relação de variabilidade intuitiva já era uma prática comum também entre os gregos, que as representavam por meio de tabelas, relacionando grandezas matemáticas e físicas, principalmente relativas à astronomia (ibidem).

O MER, institucionalizado nos manuais didáticos e nas instituições de ensino, não se refere propriamente às ideias primitivas acima associadas ao objeto função. Da forma como é definido o objeto, é um tanto inseguro falar da presença do mesmo num período anterior ao que se tem como sua gênese oficial (a partir dos trabalhos dos Boubarki). Assim, não nos escapa uma reflexão, cabível no âmbito da Didática da Matemática, a respeito do objeto do saber em questão: o que é função? E o que é função quadrática? Nas instituições onde vive o saber função,

[11] Chevallard (1992) utiliza o termo objeto matemático para designar os saberes matemáticos, acreditamos que influenciado pela noção de objeto cultural, proposto por Leontiev na Teoria da Atividade.

as respostas à pergunta referem-se imediatamente ao MER-TC. A ideia de variabilidade está presente, mas não é uma variabilidade qualquer.

Kleiner (1989) e Youschkevitch (1976, apud MACHADO, 1998), destacaram a ideia de funcionalidade como uma das primeiras concepções do objeto função, ideia que se enuncia como a mesma das “funções tabuladas” presentes nas práticas de civilizações antigas.

A Álgebra moderna de funções, a partir dos trabalhos de Klein, é fruto de uma proposta de unificação da Matemática, uma proposta de fusão entre a Aritmética e a Geometria, entendendo-se a Aritmética como o estudo dos números, da Álgebra e da Análise Real (BRAGA, 2003). Para Klein, a base para tal unidade da Matemática, tem origem no conceito de grupos e na teoria de funções analíticas de variáveis complexas (PARSHALL, ROWE, 1994).

A noção de função era de suma importância para o projeto do movimento reformista proposto por Klein, de inserir o cálculo no ensino básico. O centro do ensino era posto no conceito de função, por sua importância em todos os campos onde intervêm noções matemáticas (KLEIN, 1927).

Voltando aos aspectos do objeto matemático Função na idade moderna, como forma de nos aproximarmos de ensaios de respostas à questão diretriz, especificamente para o século XVII, encontramos informações sobre os primeiros registros da palavra função em forma latina equivalente, que teria sido empregada por Leibniz (ZUFFI, 2016), num manuscrito não publicado, intitulado Método Inverso das tangentes ou sobre funções[12]. Já no século XVIII, Bernoulli considerava função como expressão composta de uma variável e algumas constantes. Percebemos que aquilo que é visto na atividade matemática escolar atual, configurada por equívocos na compreensão do conceito de função enquanto relação estática de variáveis, pode ter raiz epistemológica na ênfase dada à presença de constantes na conceituação proposta por Bernoulli.

Ainda nesse período, Euler considerava função como equação (fórmula) que envolvesse variáveis e constantes, encontrada em sua obra Introdução à Análise Infinita, publicada em

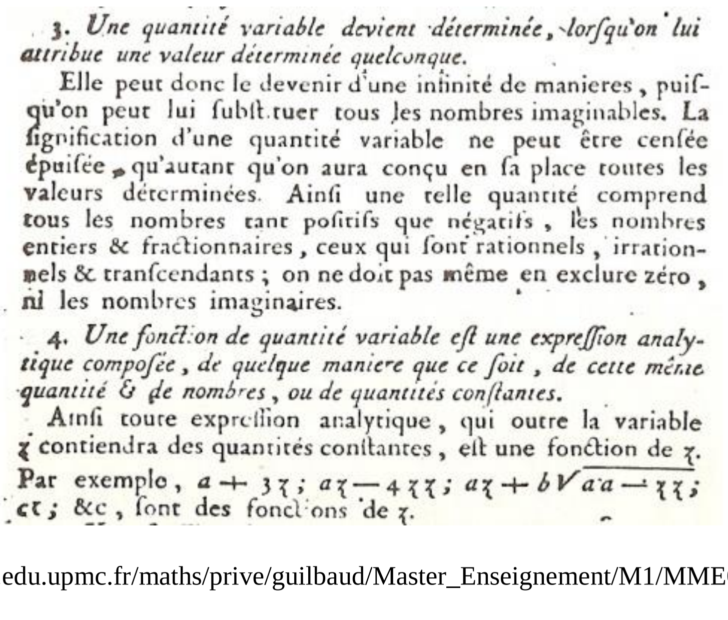
[12] “A introdução do Cálculo, por Leibniz e Newton, deu lugar de destaque ao problema de pesquisa das leis de variáveis em quantidades desconhecidas, permitindo a relação de funcionalidade para se tornar um objeto matemático em si.”
Fonte: Master Mathématiques et applications :Enseignement et formation. Histoiredessciencesmathématiques1, Eléments d’histoire de l’analyse 2/2 : « L’histoireduconcept de fonctionauXVIIIesiècle et leproblèmedescordes vibrantes » (2011), disponível em: http://www.edu.upmc.fr/maths/prive/guilbaud/Master_Enseignement/M1/MME04_6.pdf.

1748. Ele se referia à função como expressão analítica composta. Observe-se que a raiz do que conduz parte significativa das praxeologias nas instituições que se dedicam à Matemática escolar está nessa forma de conceber o conceito de função proposto por Euler, mas essa concepção não foi estabelecida do nada, Euler tomou de seu mestre Bernoulli, a espinha dorsal desse conceito, mas suas obras diferiam especialmente no que tange à abordagem.

Enquanto Johann Bernoulli privilegiava problemas geométricos e mecânicos, Euler tentava se restringir à análise pura, por isso pouco recorria às figuras geométricas para explicar as regras do cálculo. Foi a partir de Euler que o cálculo passou a ser visto como uma teoria das funções, e sua obra, *Introductio in analys in infinitorum*, inaugura um momento na matemática, especialmente na análise matemática, a qual se associava, a partir daí, à ideia de uma ciência geral das variáveis e de suas funções (ROQUE, 2012)

Apresentamos um recorte da obra Introdução à análise do infinito, nas duas figuras a seguir, através das quais Euler apresenta algumas ideias para composição do conceito de funções. Não utilizamos manuscritos de Euler, mas trechos digitalizados em francês das ideias originais desse matemático.

Figura 2 – Extrato de Introductio in analys in infinitorum d'Euler (1748)



3. *Une quantité variable devient déterminée, lorſqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque.*

Elle peut donc le devenir d'une infinité de manieres, puiſqu'on peut lui ſubſtituer tous les nombres imaginables. La ſignification d'une quantité variable ne peut être cenſée épuiſée, qu'autant qu'on aura conçu en ſa place toutes les valeurs déterminées. Ainſi une telle quantité comprend tous les nombres tant poſitifs que négatifs, les nombres entiers & fractionnaires, ceux qui ſont rationnels, irrationnels & tranſcendants; on ne doit pas même en exclure zéro, ni les nombres imaginaires.

4. *Une fonction de quantité variable eſt une expreſſion analytique compoſée, de quelque maniere que ce ſoit, de cette même quantité & de nombres, ou de quantités conſtantes.*

Ainſi toute expreſſion analytique, qui outre la variable z contiendra des quantités conſtantes, eſt une fonction de z. Par exemple, $a + 3z$; $az - 4zz$; $az + b\sqrt{aa - zz}$; c^z; &c, ſont des fonctions de z.

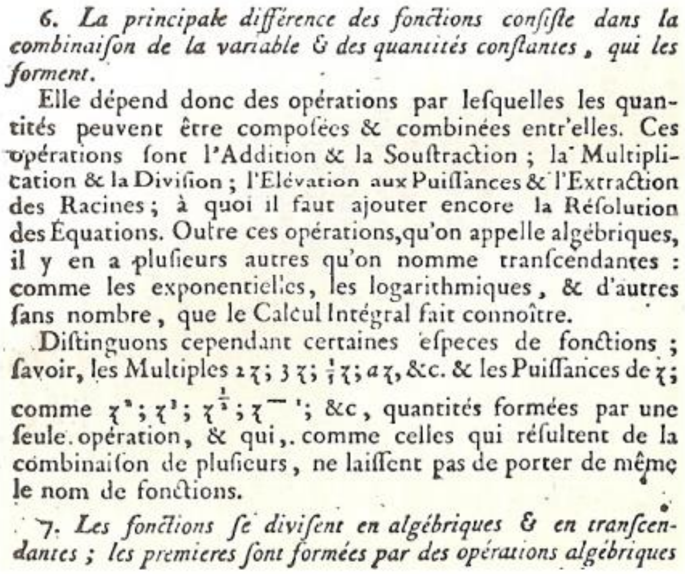
Fonte:http://www.edu.upmc.fr/maths/prive/guilbaud/Master_Enseignement/M1/MME04_6.pdf

Dos postulados apresentados nesse extrato, note-se que no 3, por exemplo, Euler refere-se a características das quantidades variáveis, que são indeterminadas ou universais e compreendem todos os valores determinados, reais, como ele exprime no parágrafo seguinte as classes desses valores. No postulado 4, explicitamente, utiliza o termo função, ao dizer: “Uma função de quantidade variável é uma expressão analítica composta, no entanto, pode ser da mesma forma de quantidade de números ou de quantidades constantes” [tradução nossa].

Por expressão analítica composta entendam-se as fórmulas algébricas que indicam relações entre grandezas variáveis e constantes. Ela pode ser formada pela aplicação de finitas ou infinitas operações algébricas de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação (ROQUE, 2012). Mesmo afirmando que essas funções podem ser mais bem compreendidas com o auxílio da expansão em séries infinitas de potências, ou por combinações de operações algébricas repetidas um número finito ou infinito de vezes, Euler não tentou reduzir a Matemática à Álgebra, mas buscou utilizar essa ferramenta para estender o máximo possível a Análise Matemática.

A ideia de expressão analítica, apresentada por Euler, representou uma ruptura na epistemologia das funções (BALACHEF, 2017). A noção de função não precisava mais ser definida fazendo-se referência ao campo experimental (fenômenos naturais e desenhos mecânicos). Numa analogia a um cabo de guerra entre dois elementos, duas imagens mentais: a geométrica, expressada na forma de uma curva e a algébrica, expressada como uma fórmula (KLEINER, 1989), a evolução do conceito de função agregava outros objetos ostensivos para lhe representar.

Figura 3 – Extrato de Introductio in analys in infinitorum d’Euler (1748) conceitos 6 e 7


6. *La principale différence des fonctions consiste dans la combinaison de la variable & des quantités constantes, qui les forment.*

Elle dépend donc des opérations par lesquelles les quantités peuvent être composées & combinées entr'elles. Ces opérations sont l'Addition & la Soustraction; la Multiplication & la Division; l'Elévation aux Puissances & l'Extraction des Racines; à quoi il faut ajouter encore la Résolution des Équations. Outre ces opérations, qu'on appelle algébriques, il y en a plusieurs autres qu'on nomme transcendantes: comme les exponentielles, les logarithmiques, & d'autres sans nombre, que le Calcul Intégral fait connoître.

Distinguons cependant certaines especes de fonctions; savoir, les Multiples $2z$; $3z$; $\frac{1}{5}z$; az, &c. & les Puissances de z; comme z^2; z^3; $z^{\frac{1}{2}}$; z^{-1}; &c, quantités formées par une seule opération, & qui, comme celles qui résultent de la combinaison de plusieurs, ne laissent pas de porter de même le nom de fonctions.

7. *Les fonctions se divisent en algébriques & en transcendantes; les premieres sont formées par des opérations algébriques*

Fonte: http://www.edu.upmc.fr/maths/prive/guilbaud/Master_Enseignement/M1/MME04_6.pdf

Do extrato acima, ilustrativo da forma particular que pode ter se difundido nas praxeologias da época, tomamos o postulado 6, em que Euler caracteriza o que diferencia as funções. Nesse caso, as funções dependem das operações pelas quais as quantidades podem ser compostas e combinadas entre elas (trad. Nossa). O postulado 7 talvez seja o que mais se aproximou do conceito de função e do processo de algebrização praticado hoje de forma tão natural. Tal processo indicou uma tentativa da corrente formalista de sintetizar os fenômenos relativos às outras ciências.

Segundo Roque (2012), o termo expressão analítica já não aparece na obra de Euler, *Institutiones calculi differentialis* (Fundamentos do cálculo diferencial) de 1975. Ele formula uma nova definição de função:

> Se certas quantidades dependem de outras quantidades de maneira que, se as outras mudam, essas quantidades também mudam, então temos o hábito de chamar essas quantidades de funções dessas últimas. Essa denominação é bastante extensa e contém nela mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Consequentemente, se x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x, de qualquer maneira, ou que são determinadas por x, são chamadas funções de x. (EULER 1755, p. 4 apud ROQUE, 2012, p. 302).

Era possível notar a influência do problema físico das cordas vibrantes na concepção de Euler sobre o que deve ser uma função, o que pode ser inferido pela generalidade da definição descrita no fragmento acima.

Ainda que consideremos essa forma de conceituar uma produção humana, as operações trariam elementos autônomos que fugiriam ao controle da ação humana de produzir um saber (POPPER, 2000). Nesse sentido, a matemática, existindo de forma objetiva, sendo um campo de verdades objetivas, tinha ferramentas para solucionar os problemas de outras áreas do conhecimento (herança do platonismo).

A despeito do que se falou sobre o surgimento da palavra função e conceitos que se aproximavam de nossas atuais Praxeologias Matemáticas frente à atividade matemática no estudo/ensino de conceitos, vejamos o que propunha em termo de definição Lejeune Dirichlet (1805 – 1859), citado em Sierpinska (1992):

> [...] Se uma variável y está relacionada a uma variável x de modo que, ao se atribuir qualquer valor numérico a x, existe uma regra de acordo com a qual um único valor de y é determinado, então y é dito ser uma função da variável independente x (SIERPINSKA, 1992, p.46).

Essa definição é tão ampla que dispensa a necessidade de qualquer forma de expressão analítica à relação que há entre x e y. Essa definição acentua a ideia de relação entre dois conjuntos de números (conceito de função através da linguagem da Teoria de Conjuntos), dando-se maior ênfase a área da álgebra abstrata (ROQUE, 2012), denotando o embrião do modelo epistemológico baseado na proposição do grupo Boubarki, isso porque, àquela época tanto a noção de conjunto quanto de número real ainda não haviam sido estabelecidos de forma precisa.

Apontamos, com base em Kleiner (1989), quatro eventos ocorridos no período moderno, que contribuíram para a institucionalização do conceito de função, a saber: a união da álgebra e da geometria; a introdução do movimento como problema central na ciência (desenvolvimento em função dos avanços das investigações na Física); a invenção da álgebra simbólica (uso de fórmulas para modelizar os fenômenos); e a invenção da geometria analítica.

Esses quatro eventos nos levam a conjecturar que a institucionalização do conceito de função ensinado hoje se deu por conta do surgimento de uma ciência que se desenvolvia sob severas influências da matemática – uma ciência matematizada (GOMÉZ, 2013). À medida que esse processo ocorria, e isso passava a se tornar objeto de ensino, a razão de ser desse conceito tornava-se cada vez mais implícita. Segundo Kleiner (1989), tal matematização da ciência, sugeria uma visão dinâmica e contínua da relação funcional, em oposição à visão estática no contexto numérico discreto sustentado pelos matemáticos da idade antiga. No entanto, o efeito para a Matemática escolar, foi inverso.

O que foi exposto, então nos direciona a outras reflexões, tais como: teria sido, então, a tentativa de tornar o conceito desse objeto matemático (função) o fator principal para difundir uma ideia de função ancorada ao contexto discreto? E o quanto isso influenciou na compreensão estática desse objeto em detrimento da compreensão de relação dinâmica? A representação gráfica desse objeto reforçou ou ainda reforça essa ideia? E se bem representa elementos de um conjunto discreto, perde-se o caráter de dinamicidade da relação?

Goméz (2013) destaca que, no século XIX, Dirichlet fórmula pela primeira vez o conceito moderno de função expresso pela equação $y = f(x)$ de uma variável independente em um intervalo $a < x < b$. Esta é uma definição formal, que não dizia nenhuma só palavra sobre a necessidade de dar a função por meio de uma fórmula, sobre todo o domínio de definição. Nesse contexto, Y é uma função de uma variável x, definida em um intervalo $a<x<b$, se a todo valor da variável x neste intervalo, corresponde um valor definido da variável y.

Mas o que ficou institucionalizado na representação desse objeto matemático não ostensivo, enquanto saber a ensinar foi a definição proposta pelos Boubarki. É a que mais se aproxima do que se tem exposto nos livros didáticos. Nesse contexto, função é:

> [...] sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se qualquer que seja x E, existe um e somente um elemento y F que esteja associado a x na relação considerada. (MENDES, 1994 *apud* SÁ, 2003, p.13).

Observe-se que nem nessa definição, nem nas demais apresentadas até aqui, os matemáticos citados trazem uma preocupação clara do contexto em que se sustentava tal objeto matemático. Mas, implicitamente, ainda que não fosse essa a intenção, o caminho seguido no processo de difusão desses conhecimentos, nas transformações que sofreu o referido saber para se tornar um objeto de ensino, o contexto discreto ganhou status de contexto padrão. Mas porque esses matemáticos não tocaram explicitamente nesse problema? Teria ele sido considerado algo menor frente o estudo dos principais problemas do cálculo e ainda diante da própria necessidade de definir o objeto que estava por fundamentá-lo? Ou teria o problema passado despercebido por esses matemáticos?

A organização didática para o ensino do saber em jogo tem chamado a atenção de pesquisadores no campo da historiografia. A exemplo disso, temos um questionamento de Roque (2012):

> Em qualquer curso de cálculo infinitesimal, a definição de derivada é antecedida pela sentença: "Seja uma função $y = f(x)$." Porém, o conceito de função só foi introduzido na matemática após o aprimoramento das técnicas diferenciais efetuado por Leibniz e Newton. Esse é mais um exemplo de que os conteúdos matemáticos que aprendemos não são organizados de modo cronológico. Fosse assim, não poderíamos aprender funções, no nono ano, sem algumas noções básicas sobre derivadas e integrais. (ROQUE, 2012, p. 274).

A opção por uma organização que não segue a linha cronológica, tomada como tendência ao longo da história do ensino desse e de outros saberes matemáticos, esconde um importante elemento que tentamos resgatar no MPA, descrito no próximo capítulo. No entanto, quanto ao que Roque (2012) aponta, um curso organizado de acordo com a ordem cronológica das coisas implicaria em retirarmos do currículo algumas noções que podem ser tratadas de forma intuitiva, como é o caso do estudo das relações e das funções.

Um importante evento, o advento do cálculo, fez com que a ciência das quantidades, que antes migrara para a ciência das quantidades geométricas, com o estudo das curvas, passasse a ciência das leis de variação, inaugurando um novo momento com enriquecimento da matemática com novos métodos, até que chegássemos ao modelo epistemológico proposto pelo grupo Boubarki.

Ademais, a consideração do que melhor adere ao pensamento do estudante é outro importante fator na proposição de modelo como o que pretendemos aqui. Segundo Roque (2012) a identificação entre função e expressão analítica, que fora defendida no século XVIII, muitas vezes prevalece na mente dos estudantes, mais do que sua definição formal, em termos de conjuntos, proposta no século XIX.

No próximo capítulo, vamos retomar esse problema e a questão de propor um modelo praxeológico que viabilize o encontro da função quadrática com a parábola, analisando as condições e restrições dessa ação didática.

Mas, mesmo sem trazer respostas precisas às questões colocadas anteriormente, precisamos observar que, dentre os eventos que podem ter contribuído para a institucionalização do objeto função, aos quais nos referimos anteriormente, parece que dois deles não tiverem aspectos integrados às praxeologias que se consolidaram como oficiais no modelo epistemológico dominante – MED, ao menos no que transparece pelos recortes que fizemos: a união da álgebra e da geometria e a introdução do movimento como problema central na ciência. Ora, tomemos a função quadrática, objeto que nos ajuda a contextualizar o fenômeno IAMI.

O objeto matemático apresentado nos livros didáticos não nos conduz a pensar no contexto em que, supostamente, ocorre a gênese desse saber a ensinar (problemas de lugar geométrico, o primeiro evento citado, e o estudo das equações quadráticas).

O contexto em que se sustenta, e que é válido de acordo com a epistemologia geral da Matemática, baseia-se na Teoria dos Conjuntos (modelo epistemológico vigente proposto pelo grupo Boubarki). E ainda que o conjunto no qual está definida seja um representante do contexto continuo, o trabalho prático realizado no seu ensino, por exemplo, o de um de seus ostensivos, é ser construído a partir de elementos de um conjunto do contexto discreto. E talvez esteja aí a ideia de relação estática passado por esse ostensivo e que seja um dos indicadores do fenômeno IAMI.

Por outro lado, não significa que os outros dois eventos mencionados, tenham deixado suas marcas de forma positiva nas praxeologias institucionalizadas nas obras didáticas. A invenção da Geometria Analítica parece ter acentuado os problemas em torno do estudo das funções, não para os matemáticos, mas para a Matemática a ser ensinada nas instituições de ensino e na álgebra escolar, especialmente a álgebra das funções. Mas há que se pensar no porquê de a Geometria Analítica ainda ser um objeto fortemente presente nos currículos em instituições brasileiras, enquanto em outros países a Álgebra Linear ocupa lugar de destaque.

O que parece ter melhor aderido às praxeologias relativas ao objeto função foram os aspectos derivados da invenção da álgebra simbólica. E, sem pretender discutir os aspectos cognitivos, inferimos que a modelização funcional surtiu um efeito reverso nas práticas matemáticas nas instituições de ensino, especialmente na Educação Básica. O processo de modelar fenômenos parece ter assumido o caráter de construção de fórmulas que serão aplicadas em diferentes fenômenos.

Ademais, a História da Matemática indica que a ideia de função resulta de uma evolução no questionamento sobre fenômenos observáveis (indícios da dialética de perguntas e respostas) que vão desde o porquê até o como, da causalidade filosófica à causalidade científica. O fundamento da noção de função é o estudo das "leis da variação" de certos fenômenos e da busca por uma modelagem dessas leis (COMIN, 2005).

Ainda segundo Comin (2005), as definições atuais da teoria dos conjuntos ignoram a dimensão semântica que o estudo das magnitudes traz. O objeto função tem sua origem no estudo das relações de dependência entre duas grandezas, de modo que qualquer variação de uma causa variação da outra; então qualquer função contém uma forma de ideia variável, que parece ter se perdido na consolidação das praxeologias matemáticas modelos (aquelas difundidas e utilizadas por diversas comunidades de estudo ao longo do tempo).

Voltando ao modelo epistemológico de referência para as praxeologias desenvolvidas atualmente, no que tange ao estudo de funções, o que motivou o grupo Boubarki foi o estudo da Análise, mais especificamente inquietações de um dos matemáticos do grupo a respeito da qualidade dos livros didáticos de Análise (ESQUINCALHA, 2012).

Por conseguinte, a IAMI reflete na cristalização das praxeologias matemáticas quando os sujeitos estudam o objeto funções. Nesse sentido, há uma sinalização para uma recontextualização do ensino da Matemática, que pode ser inspirado na HFC, o que ainda é um desafio.

O processo de disciplinarização de domínios da Matemática, que pensamos ser algo que reflete diretamente na relação dos sujeitos numa instituição com os objetos matemáticos, parece reforçar a dissociação entre o saber-fazer e o *logos* nas praxeologias nessa instituição. Isso se coloca, por sua vez, como um fator limitante na proposta de amalgamação de técnicas, pautadas em domínios matemáticos diferentes e com uso de objetos ostensivos distintos em tais Praxeologias Matemáticas.

Pensar na amalgamação de técnicas não é algo recente. Felix Klein, na apresentação do "Programa de Erlanger", revela, dentre suas concepções educacionais, a necessidade de fusão e combinação de ramos da matemática aparentemente separados (BRAGA, 2003).

Para o problema didático apresentado nesse estudo, vislumbramos trazer respostas à medida que tentamos atenuar a IAMI no caso específico do estudo/ensino das funções quadráticas. E isso, retomando nossa tese, pode ser feito, desde que noções didáticas sejam integradas ao *logos* da Praxeologia Matemática numa determinada instituição. Há outra questão a se considerar: uma primeira e eficiente abordagem para distinguir as diferentes noções de "função", com o auxílio da história da matemática é analisá-las primeiro do ponto de vista do sistema de representação que elas implementaram (BALACHEFF & GAUDIN, 2010), ou seja, sob o espectro teórico utilizado por nós, olhar para os diferentes objetos ostensivos que surgiram para representar funções e que estão intimamente ligadas à construção das Praxeologias Matemáticas, as quais pretendemos explicitar nesse trabalho.

Existe uma condição para isso refletida pelo que move o fazer científico, um gesto de estudo representado pelas perguntas e respostas que um sujeito pode fazer frente um problema. E, ainda, outra condição epistemológico-didático, visto que, no caso específico das funções quadráticas, foram problemas externos à matemática que contribuíram para sua noção intuitiva. No âmbito institucional, também existe uma condição a ser alcançada, isso porque o currículo não é engessado, o que permitiria, a depender das escolhas didáticas do professor, promover o ensino do saber seguindo um caminho que vai da curva que representa o objeto ao objeto normalmente representado por ostensivos escriturais na forma algébrica.

Capítulo 2

Modelo Praxeológico Alternativo para o ensino da Função quadrática

Neste capítulo, que está dividido em quatro blocos, primeiro expomos um recorte de um panorama do tratamento dado ao problema didático discutido em nossa investigação. No segundo bloco, apresentamos uma discussão no âmbito da problemática ecológica e, em seguida, nossa proposta de infraestrutura didático-matemática para a experimentação de um Percurso de Estudo e Pesquisa – PEP, que implementa um Modelo Praxeológico Alternativo. Por fim, no quarto bloco, apresentamos aspectos metodológicos da investigação, que justificam caminhos seguidos para proposição do MPA.

No panorama do primeiro bloco, a relação da função quadrática e os status que a parábola assume nos tratados didáticos são discutidos como forma de auxiliar o delineamento do nosso objeto de investigação, melhor descrito no segundo bloco do capítulo, onde, de fato, se apresentamos passos seguidos para a construção do que denominamos de Modelo Praxeológico Alternativo – MPA. Para elaborar um Modelo Praxeológico – MP – de um corpo de conhecimentos, é necessário considerar separadamente as Organizações Matemáticas do Saber, e a Organização Didática que permitiu o surgimento da Organização Matemática do referido saber, é preciso ainda compreender qual o modelo praxeológico dominante - MPD, vigente.

Desse modo, a revisão de literatura nos serve tanto para refinar nosso objeto de investigação, distinguindo-o do que tem sido feito, no que tange às pesquisas sobre o ensino de funções, quanto para subsidiar esse modelo com noções das Organizações Didáticas que consideramos incluir na proposição do referido MPA.

Pensamos esse MPA, advindo de um Modelo Epistemológico de Referência[13] (MER), que, segundo Bessot (2019), permite questionar o real de um ponto de vista epistemológico e identificar fenômenos didáticos, em particular, interpretar o modelo praxeológico dominante de uma instituição[14]. O que, em nosso estudo, se dilui neste capítulo e no anterior, quando nos

[13] Modelo epistemológico de referência (MER) de um corpo de conhecimento é uma descrição alternativa desse corpo de conhecimento elaborado por pesquisadores com o objetivo de questionar e fornecer respostas a fatos didáticos e práticas problemáticas que ocorrem em uma determinada instituição (FLORENSA, BOSCH, GASCON, 2015).

[14] Uma instituição *I* é um dispositivo social, "total", que certamente pode ter pequenas extensões no espaço social (existem “micro-instituições "), mas que permite - e impõe - a seus *sujeitos*, isto é, às pessoas (x) e ocupam diferentes *posições*(p)ofertadas em *I*, o envolvimento de maneiras de fazer e pensar próprios – ou seja, as

detivemos aos aspectos da epistemologia desse saber para discutir o status quo do saber função quadrática e sua representação gráfica em seu processo de difusão nas instituições.

O MPA é um modelo que, em sua essência, considera os quatro "T" da praxeologia, a saber: tarefa, técnica, tecnologia e teoria, pensado de forma distinta da normalmente construída nas instituições. Isto é, nesse modelo alternativo, além do conjunto praxeológico configurado por dois blocos (saber-fazer e *logos*), consideram-se as inter-relações do espaço GAG (técnicas alicerçadas nos domínios geométrico, algébrico e gráfico).

Objetivamos, no primeiro bloco, mostrar as relações do problema didático descrito no capítulo anterior, com algumas investigações, que abordem a temática dessa investigação em repositórios de teses e dissertações nacionais e internacionais. Desse modo, nos interessamos em responder: qual a forma como a relação da função quadrática e os status da parábola têm sido tratado nas investigações didáticas, especialmente no âmbito da Didática da Matemática? Como isso tem sido abordado na formação de professores?

A metodologia utilizada nesse primeiro bloco foi uma revisão de literatura, cuja fonte de pesquisa nacional utilizada foi a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) do Instituto Brasileiro de Informações em Ciências e Tecnologia (IBICT), visto que, nesse banco de dados, temos acesso não só aos detalhes básicos como autor, resumo e ano de publicação, mas ao arquivo da tese ou dissertação. No caso de bancos internacionais, a busca foi no Scopus, via portal de periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES.

Na busca na BDTD, utilizamos operadores lógicos booleanos (AND, OR, AND NOT) e, uma vez definidos os operadores que utilizaríamos, voltamos nossas atenções para a formulação dos descritores, ou seja, os termos que nos permitiriam levantar os trabalhos cuja temática tangenciaria nosso objeto de investigação. Utilizamos um recorte temporal que vai de 2002 a 2018. O período que compõe esse recorte se justifica, por ser o ano de início do funcionamento da BDTD e posterior da divulgação da Teoria Antropológica do Didático (1999) – teoria que se inscreve como quadro teórico dessa investigação e que embasa as interpretações e proposições feitas no seu desenvolvimento. Já no condizente ao recorte cronológico final de nossa pesquisa na BDTD (2018), justificamos por ser o último ano referencial mais recente concluído.

---

praxeologias. Assim, a *classe* é uma instituição (onde as duas posições essenciais são as do *professor* e do *aluno*) (CHEVALLARD, 2009c, p.2). [tradução nossa].

Os descritores utilizados na pesquisa foram: (i) Ensino de Matemática*, (ii) Funções*, (iii) Parábolas*, (iv) Teoria Antropológica do Didático, (v) Aprendizagem baseada em investigação, (vi) Percurso de Estudo e Pesquisa*, que, combinadas com os operadores lógicos booleanos (AND, OR), representam os termos que indicam nosso objeto de investigação. O uso do asterisco (*) nos termos acima representa todos os caracteres possíveis até a última letra, o que nos auxiliou na busca mais fidedigna desses descritores nos trabalhos a serem analisados.

Tomamos as teses e dissertações como forma de comparar o que já foi pesquisado com o que propusemos. Nosso interesse centrou-se especialmente em identificar até que ponto a abordagem do nosso objeto de investigação era inédito, constituindo-se como outro importante auxílio para o delineamento da problemática didática sobre a qual nos debruçamos, ao mesmo tempo que nos auxiliou na proposição do MPA.

No caso do banco internacional, realizamos a busca no Scopus, utilizando os seguintes descritores: (i) Math Teaching*, (ii) Functions*, (iii) Parables*, (iv) Anthropological Theory of Didactics, (v) Research-based learning, (vi) Study and research path*, também combinadas com os operadores lógicos booleanos (AND, OR). Mantivemos, também, o mesmo recorte temporal para a seleção de trabalhos.

Uma das principais conclusões da análise realizada consiste na constatação de que existem lacunas no que se refere a estudos quanto à integração de noções didáticas nas Praxeologias Matemáticas, especialmente no bloco do *logos*. E, nesse ponto, a proposta do MPA apresentado nessa investigação, traz características pertinentes à referida construção.

2.1 A relação entre o gráfico da função quadrática e os status da parábola nas investigações em Educação Matemática

A combinação dos descritores supracitados com os operadores AND e OR, nos permitiu encontrar, no banco de dados da BDTD, um volume total de 93 teses e 230 dissertações defendidas entre 2002 e 2018. O número de trabalhos analisados cai para 10, no que tange ao descritor ensino de funções, e um (01) trabalho cujo quadro teórico é a Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999).

Os descritores (i) e (ii) foram os que nos deram maior retorno de dissertações e teses. Daí podermos inferir a importância dada ao ensino das funções contínuas de domínios reais desse tipo e às possíveis identificações de problemáticas em torno do ensino dessas funções. A tabela a seguir nos dá um panorama da quantidade de teses e dissertações encontradas e suas contribuições para a pesquisa, considerando todos os descritores.

Tabela 1 – Teses e dissertações identificadas quanto aos descritores

Descritores		Teses/Dissertações
(i)	Ensino de funções quadráticas	07/67
(ii)	Ensino de Matemática AND funções	128/613
(iii)	Didática da Matemática AND ensino de funções	50/254
(iv)	Ensino de gráfico de funções polinomiais	02/23
(v)	Percurso de Estudo e Pesquisa PEP	00/03
(vi)	Percurso de Estudo e Pesquisa AND ensino de funções	00/00
	Total	**187/893**

Fonte: Banco de dados da BDTD (2018)

A pesquisa com descritor Parábola, previamente testado, não retornou resultados no contexto do Ensino da Matemática, mas em pesquisas de matemática aplicada, fugindo do nosso foco. Os demais descritores nos permitiram delinear nosso objeto de investigação em termos do que poderia trazer como respostas quanto à problemática do ensino e aprendizagem das funções, mas, especialmente, sinalizando que a inclusão de noções didáticas no *logos* das Praxeologias Matemáticas no estudo/ensino de funções ainda é uma lacuna na literatura, posto da forma como apresentamos aqui.

Os trabalhos, de modo geral, apresentam uma problemática didática de investigação que se refere às dificuldades dos estudantes na compreensão do conceito de função e dos tipos específicos de funções. Nesse aspecto, nosso estudo assume como postulado que essas supostas dificuldades devem estar ligadas aos tipos de tarefas propostas. Isso não aparece de forma explícita, nos trabalhos analisados, mas, à medida que são propostas formas alternativas para o ensino de funções, intuitivamente, essas investigações coadunam com o postulado mencionado acima.

Nessas investigações levantadas, os objetos de investigação são os mais diversos, mas, especialmente no caso do descritor Função quadrática, ele retomou investigações que tratam de experimentações no Ensino Médio. A problemática nos parece possibilística como a nossa, mas não são pesquisas que realizam as discussões à luz da Teoria Antropológica do Didático. Nesse ínterim, os softwares surgem nesses trabalhos como possíveis colaboradores de novas práticas matemáticas no estudo ou ensino das funções.

Nesses estudos, há uma preocupação com a representação gráfica da Função quadrática, mas não podemos afirmar que implicitamente a questão da construção do pensamento variacional tenha sido mobilizada dentre as inquietações para realização desses estudos.

Como já foi dito anteriormente, não há uma preocupação explícita que reflita na nossa tese, ou seja, não houve, nos relatos dessas pesquisas analisadas, indicação da tentativa de integrar qualquer noção extra matemática no *logos* (bloco do saber) da Praxeologia Matemática no estudo da Função quadrática e sua representação gráfica ou mesmo o duplo status da parábola.

Nessas pesquisas (dissertações ou teses), identificamos duas categorias notáveis de objetos de investigação (C_{oi}), ambas consideradas na proposição do nosso Modelo Praxeológico Alternativo e que tomamos como variáveis dependentes nas nossas análises. As categorias são: Coi_1 implicações do uso de tecnologias e/ou softwares no processo de ensino-aprendizagem; C_{oi2} – da experimentação de sequências didáticas para o ensino ou aprendizagem de funções, sintetizadas no quadro 1, a seguir.

Quadro 1 – Trabalhos inscritos nas categorias $C_{oi}1$ e $C_{oi}2$ – objeto de investigação funções e seu ensino

AUTOR/ANO	TÍTULO	OBJETIVO GERAL
Melo (2013)	A inserção do software Kmplot na aprendizagem de funções afim e quadrática.	Ampliar a compreensão dos conceitos abordados em sala de aula respondendo à questão: quais as contribuições do software Kmplot para as aulas de matemática num grupo de ensino médio?
Costa (2018)	Programação no auxílio da resolução de situações-problema e uma abordagem para o ensino de funções afim e quadrática.	Apontar uma ligação direta entre resolução de situações-problema e programação, e abordar, de forma interativa e atraente, uma maneira de adquirir as habilidades necessárias nessas duas áreas.
Canella (2016)	Funções quadráticas e suas aplicações no primeiro ano do ensino médio.	Colaborar, de forma contextualizada, com o estudo das funções quadráticas desde sua parte histórica, passando pelas equações quadráticas, inequações quadráticas, sua representação gráfica, sua caracterização, contextualização através de problemas, resgatando a construção da parábola com régua e compasso e de forma atual utilizando o Geogebra.

Freitas (2016)	Um estudo sobre as funções afim e quadrática e métodos algébricos e geométricos para soluções de equações de 1º e 2º graus.	Apresentar uma maneira diferenciada de apresentar os conteúdos dando ênfase aos métodos algébrico e geométrico.
Cance (2015)	Projeto canhão: o ensino de funções Quadráticas com o auxílio do software Geogebra.	Apresentar o desenvolvimento e a implementação de uma sequência didática a fim de motivar e ensinar os alunos do Ensino Médio o tema funções quadráticas.
Soares (2014)	Modelagem por meio de funções elementares.	Propor uma abordagem diferenciada para o ensino das funções elementares no contexto do ensino médio, preocupando-se com a compreensão dos conceitos, definições e caracterizações das funções elementares.
Xavier (2016)	Análise da função quadrática, com ênfase em seus coeficientes, via Geogebra.	Usar a tecnologia como elemento motivador do processo de ensino/aprendizagem, na abordagem do tema Funções Quadráticas, na primeira série do Ensino Médio.
Meneses (2014)	Funções Quadráticas, Contextualização, Análise Gráfica e Aplicações.	Apresentar a função quadrática em uma nova perspectiva gráfica.
Machado Meneses (2014)	Representações mobilizadas nas turmas de 1º ano do Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Sergipe no ensino de função afim e quadrática.	Analisar as representações matemáticas mobilizadas pelos alunos do 1º ano do Ensino Médio do Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Sergipe (CODAP/UFS) durante o ensino de função afim e quadrática.

Fonte: Autor (2018).

Analisamos mais de perto os trabalhos que estão inscritos nas categorias elencadas no quadro acima e que tangenciam a temática a qual atacamos, precisamos destacar, ainda, que não há uma indicação explícita de que esses estudos constroem uma problemática em torno de algum fenômeno didático. Essas pesquisas são de caráter predominantemente exploratório, visto que não tratam de fenômenos e, por esse motivo, não se propõem a explicar fenômenos educacionais.

Há um esforço grande em mostrar que o ensino de funções, sobretudo na Educação Básica, é ressignificado pela utilização de softwares de geometria dinâmica, programação e outros softwares, em especial o Geogebra. Em outras palavras, estes estudos apostam e mostram resultados que apontam para alterações significativas nas Praxeologias Matemáticas dos estudantes e professores quando estes utilizam o Geogebra ou outro software (MELO, 2013; MENEZES, 2014; CANCE, 2015; COSTA, 2018).

Aquelas investigações que tratam das Funções quadráticas em seu objeto de investigação, não discutem os status da parábola. Talvez porque os pesquisadores, em suas dissertações e teses, não tenham percebido um problema em torno dessa questão, mas tenham concentrado a atenção nos aspectos cognitivos, abordando as dificuldades dos estudantes. Nas questões epistemológicas, apesar de não serem discutidas tão claramente, percebemos uma preocupação com a descrição de aspectos da história das funções. No que tange à representação gráfica, Medeiros (2018) propôs, na investigação realizada no Ensino Médio, uma sequência didática que explorou as justificativas formais para a parábola ser a representação gráfica da Função quadrática.

Machado Menezes (2014), por sua vez, também discutiu a problemática da representação gráfica da função quadrática, partindo dos aspectos históricos dessa função, e a parábola como gráfico da mesma. Seu objeto de investigação não estava em torno da integração de qualquer noção didática na Praxeologia Matemática de participantes da experimentação.

Retomamos as questões que orientam essa parte da análise. Primeiro, para responder de qual forma a relação da função quadrática e os status da parábola têm sido tratado nas investigações didáticas, especialmente no âmbito da Didática da Matemática. Não foram levantados trabalhos inscritos na Didática da Matemática que abordem especificamente a referida relação. Apesar de proporem intervenções didáticas, como já apontamos, os trabalhos não se ocupam em discutir um fenômeno didático, caracterizando-o antes de propor uma realização didática.

Quanto à abordagem dessa problemática na formação docente, também não são encontrados trabalhos que discutam formação e ensino de funções quadráticas a partir do duplo status da parábola.

Desse modo, salientamos que, ainda que nosso trabalho proponha a experimentação de tarefas para então analisar as possíveis reconstruções das praxeologias, o que é feito de forma implícita em algumas das investigações levantadas na revisão de literatura, não há uma tentativa similar de integrar aquilo que não é matemático no bloco tecnológico-teórico intrínseco à Matemática, pois se refere a um conjunto de discursos que justificam o que se faz sobre os saberes matemáticos (as técnicas para resolução de tarefas matemáticas).

Ademais, combinando os descritores, também não localizamos pesquisas sobre tarefas de investigação (que alicerçam modelos de aprendizagem embasados em investigação). Essa busca visava identificar implicações numa possível alteração da visão de relação estática da noção das funções de modo geral. Uma possível consequência disso devem ser os equívocos na concepção de que as funções são constituídas em conjuntos discretos, noção levada das tabelas (funções tabuladas) para as representações gráficas, que, em última instância, caracteriza lacunas na estruturação do pensamento variacional.

A busca no Scopus não retomou trabalhos com os descritores quando combinados com os operadores lógicos. Tentando incluir outro descritor que levasse a ideia da relação entre a Geometria Analítica – GA – e os objetos funções e parábola, também não foi possível identificar trabalhos que discutissem ou que tangenciassem o objeto dessa investigação. Isso nos conduz a refletir, por exemplo, sobre os motivos pelos quais tal objeto não tem sido foco de interesse em estudos fora do Brasil. Seria o fato de não fazer sentido pensar e investigar o ensino dos objetos que integram a GA? Isso se daria particularmente pela ausência de programas de cursos das áreas das ciências exatas e da natureza, por não investirem nesse campo, mas, ao contrário, realizar o estudo de objetos matemáticos que integram a Álgebra Linear? No entanto, nos detivemos ao que está prescrito nos programas brasileiros e, por esta razão, a investigação toma como base a GA.

2.1.1 Percurso de Estudo e Pesquisa e a formação de professores

Nesse ponto do nosso trabalho, apresentamos pesquisas no contexto internacional que abordam especificamente o PEP e o ensino de Matemática. Não se tratou de uma revisão de literatura, mas uma consulta às últimas Atas do Congresso Internacional da TAD – CITAD. Elas tratam das principais questões dessa teoria e discutem a experimentação de dispositivos didáticos em diferentes níveis de escolaridade.

Aqui no Brasil, podemos destacar também alguns estudos que tratam do PEP, desde que não sejam utilizados os descritores ensino de funções ou de funções quadráticas, como a tese de Silva (2016), sobre grandezas e medidas, e a de Santos Júnior (2017), sobre juros simples e compostos, ou PEP na formação de professores no ensino e estudo das frações (CARVALHO, 2015), de potências com mediação da calculadora padrão (SOUZA, 2015), construtos didáticos no ensino de operações aritméticas básicas (SILVA, 2017), e objeto matemático área na bagagem praxeológica dos professores (LESSA, 2017).

As teses de Silva (2016), Santos Júnior (2017) e Matos (2017) são alguns dos trabalhos que abordam o contexto do ensino de Matemática aqui no Brasil, e constituem importantes trabalhos, no que tange a teorização do Percurso de Estudo e Pesquisa, desenvolvidos em programas de pós-graduação, de onde se podem tirar algumas considerações sobre as condições e restrições do uso do PEP tanto como dispositivo didático quanto como praxeologia de pesquisa em Didática da Matemática.

O objetivo de Silva (2016) foi identificar as relações institucionais esperadas e existentes para o ensino e a aprendizagem das noções de área, de perímetro e suas relações. Silva Visava verificar como estudantes do curso técnico em Edificações, utilizavam esses conhecimentos em tarefas contextualizadas quando trabalham em situações adidáticas do seu domínio de conhecimento. A abordagem metodológica constituiu-se de uma Engenharia do Percurso de Estudo e Pesquisa e, apesar de o foco ser a aprendizagem dos estudantes, trouxe reflexões sobre a formação docente no que tange ao sentido social e profissional que estes possam dar aos objetos matemáticos em jogo.

Em sua tese, Santos Júnior (2017) objetivou elaborar, propor e analisar atividades baseadas num Percurso de Estudo e Pesquisa, que se relacionavam às necessidades dos profissionais dos cursos superiores de tecnologia, especificamente da gestão e negócios, no ensino dos objetos do saber juros simples e compostos. Na pesquisa inscrita na TAD, primeiro, o autor realizou estudo da ecologia dos setores juros simples e compostos nas instituições consideradas e, depois, a análise das experimentações da organização didática materializada por um PEP.

Já o trabalho de Matos (2017) apresenta duas questões de pesquisa, a saber: que características apresentam as organizações matemática e didática assumidas como praxeologias institucionais, referentes ao ensino de Álgebra Linear; e que condições podemos instaurar em instituição superior para fazer viver certas organizações matemáticas e didáticas com características específicas? Para responder às questões, propõe um modelo epistemológico de referência, constituído de um sistema de tarefas, considerando um estudo histórico-epistemológico em obras originais, além da proposição de um PEP experimentado num curso de Matemática.

As quatro dissertações supracitadas, utilizam como método de construção de dados uma modalidade de engenharia didática de segunda geração (PERRIN-GLORIAN, 2009). Trata-se de uma variação da referida engenharia, denominada de Engenharia do Percurso de Estudo e Pesquisa (BOSCH, 2010). Os trabalhos de Carvalho (2015) e Souza (2015) utilizaram o PEP na perspectiva de dispositivo didático para formação de professores como dispositivo de pesquisa. Ambos utilizaram um método híbrido que combinou principais elementos da engenharia didática clássica (ARTIGUE, 1988) e os aspectos do dispositivo investigativo PEP.

Souza (2015) desenvolveu o PEP para construir uma proposta de utilização da calculadora enquanto um instrumento integrado à construção do conceito de potência por meio de situações didáticas no 6° ano do Ensino Fundamental, estudo realizado com três docentes. Já Carvalho (2015) utilizou o PEP como forma de integrar, nas escolhas didáticas dos professores participantes do estudo, elementos da criação e resolução de problemas matemáticos, chegando à conclusão de que não seria necessária esta distinção entre o processo de criação e resolução, estando estes amparados teoricamente de forma dissociada na Teoria das Situações Didáticas.

Os trabalhos de Silva (2017) e Lessa (2017), que também utilizam a noção de PEP enquanto dispositivo didático, apontam para a dupla função desse modelo epistemológico de referência para pesquisas no âmbito da TAD. A pesquisa de Silva, teve como objetivo geral analisar os resultados da integração de Construtos Didáticos à prática dos professores no trabalho com as Operações Aritméticas Básicas. A investigação esteve vinculada teoricamente principalmente às Teorias das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1986) e Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999). A autora utiliza o termo *Malamática*, cunhado por ela, para fazer alusão a uma mala que transporta elementos capazes de auxiliar a construção dos Percursos de Estudo e Pesquisa (PEP), no intuito de contribuir com a prática de professores de Matemática na tarefa de ensinar operações aritméticas básicas.

Lessa (2017) por sua vez, objetivou contribuir com o processo de formação docente a partir da construção desse Modelo Epistemológico de Referência, considerando as incompletudes do trabalho institucional relativo ao objeto matemático Área, bem como a tentativa de integrar elementos deste modelo na bagagem praxeológica de professores de matemática do 6° ano do ensino fundamental.

As investigações no âmbito internacional, especialmente aquelas que integram estudos sobre a TAD, têm apontado, de modo geral, para uma necessidade de se apoiar na ideia central de que, ao analisar a matemática ensinada nas instituições, se apoiam em uma maneira particular de interpretar as matemáticas (modelo epistemológico), intimamente ligada à concepção do que é ensinar ou estudar matemática em cada tradição cultural, instituição, ou seja, em cada momento histórico – modelo didático (BOSCH & GASCÓN, 2007). Os trabalhos abaixo sinalizados são sínteses de pesquisas que compõem as atas de edições diferentes do Congresso

Internacional da TAD – CITAD. Esses trabalhos têm aparecido em estudos brasileiros como referências para proposição de PEP ou atividades de estudo e pesquisa.

Sierra (2006) propõe um PEP para o estudo das matemáticas no Ensino Básico espanhol, no que tange ao sistema de numeração. Ruiz-Olarría (2016), investigando as condições e restrições inerentes ao projeto de modelização funcional, investiga a função do PEP no ensino de Álgebra no secundário. O estudo de Licera (2017), utiliza o PEP para o ensino de números reais no ensino secundário. Dois outros trabalhos mantêm o foco no processo de modelização funcional, é o caso de Barquero, Bosch & Romo (2015), que se questionam sobre a forma de ensinar modelagem no ensino secundário e universitário, e Florensa (2016), cuja inquietação se revela pela questão: como ensinar modelagem no ensino universitário da engenharia?

Um número significativo de trabalhos, especialmente na Espanha, tem sido amparados pelo projeto que investiga o processo de modelização funcional tanto no ensino secundário quanto no superior. Esse grupo tem experimentado o PEP em duas de suas dimensões: a de organização didática e a de dispositivo de investigação, ou seja, enquanto Engenharia do PEP.

Esses trabalhos nos servem, de modo geral, como inspiração para o planejamento de uma infraestrutura didático-matemática do modelo praxeológico que descreveremos na próxima seção deste capítulo.

2.2 Problemática ecológica e algumas análises

Falamos, ao longo do trabalho, algumas vezes, sobre as condições e restrições institucionais para implementação do MPA. No entanto, ainda não tínhamos realizado uma análise na dimensão ecológica, ou seja, uma discussão sobre a reais condições para sua implementação não tinha sido feita de acordo com análise de programas dos componentes onde o saber apresenta-se no ensino superior, como seu local e função no Ensino Médio.

Não é nosso objeto analisar aspectos da transição do Ensino Médio para o Ensino Superior no que se refere ao ensino e/ou estudo de funções de domínio real. Mas é necessário falar especialmente sobre a intenção do ensino desse saber no Ensino Médio, como forma de compreender as condições de implementação de formas alternativas para seu estudo no Ensino Superior, na formação docente. Além disso, nossa tese de integração de noções didáticas no *logos* da Praxeologia Matemática de futuros professores pode implicar em reconstrução de praxeologias na Educação Básica, especificamente, na forma como se faz a mediação do saber função quadrática.

Por essas razões, apresentamos em duas partes uma análise da dimensão ecológica do problema didático, respondendo à pergunta: quais restrições epistemológica e institucional se colocam frente um MPA que visa partir de elementos da geometria e da análise real, como se deu a constituição do saber função quadrática e de sua transformação em objeto de ensino?

Essa questão norteia a análise ecológica, pois mantém nosso foco no que pode impedir que o MPA se mantenha vivo numa instituição, principalmente no que se refere ao prescrito nos programas de ensino.

Desse modo, começamos pelo Ensino Médio, trazendo um recorte da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018). Olhando especificamente para a Matemática nesse nível de ensino, logo identificamos que o objeto do saber em estudo não se localiza num único campo da matemática. Na BNCC para o Ensino Fundamental, encontramos as grandes áreas da Matemática, didaticamente distribuídas em cinco unidades temáticas, a saber: números; álgebra; grandezas e medidas; geometria e probabilidade; e estatística, o que não ocorre na seção destinada ao Ensino Médio.

Os objetos do conhecimento aparecem descritos nessas unidades temáticas, bem como as habilidades específicas. Nessa estrutura, os objetos do conhecimento aparecem nos três anos do Ensino Médio, modificando-se a abordagem. Preza-se pela conexão entre as grandes áreas da Matemática, bem como entre outras áreas do conhecimento. Entretanto, no Ensino Médio, tomando como pressupostos essa organização do Ensino Fundamental e as possíveis aprendizagens construídas nessa fase de escolaridade, os saberes aparecem de acordo com os tipos de competências específicas e habilidades a serem desenvolvidas formando um todo conectado, não importando a ordem em que serão trabalhadas.

Do ponto de vista mais geral, para Matemática e suas tecnologias, no Ensino Médio, espera-se dos estudantes, nessa etapa de escolaridade,

> [...] desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (BRASIL, 2018, p.529).

Além de raciocinar (investigar, explicar e justificar soluções), em interação com colegas e professor, representar (evocar diferentes objetos não ostensivos que representam os saberes matemáticos estudados), comunicar (justificar suas realizações matemáticas) e argumentar (formular e testar conjecturas e apresentar justificativas para a soluções de problemas).

A seguir mostramos, no quadro 2, uma síntese do objeto do conhecimento função quadrática, relacionando-o às competências específicas e habilidades a serem desenvolvidas, sendo que o local (ano) onde mantém sua vida institucional não é pré-definido por este documento de referência.

Quadro 2 – Competências e habilidades relativas à função quadrática

Competência específica	Habilidades
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT302) construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação Matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	(EM13MAT402) converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades Matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, Experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$. (EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro deum polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

Fonte: Elaborado pelo autor, com informações extraídas da BNCC (2018).

Da competência específica 3, destacamos a habilidade que trata da construção de modelos que representem funções polinomiais de 1º e 2º graus. Essa é uma habilidade intimamente ligada à proposta que implementamos no MPA com futuros professores de Matemática. Uma questão geratriz do PEP evoca, a partir da proposição de outras questões (formando uma família de questões Q), a explicitação de modelos que representem o objeto não ostensivo (a função quadrática e sua relação com os objetos ostensivos) intenção de ensino em nosso MPA. Falamos então que em termos de proposta do dispositivo didático utilizado, as condições institucionais são claras. Faz-se necessário, verificar as condições epistemológicas, ou seja, o caminho da evolução do saber pode ser experimentado no contexto do Ensino Médio?

As habilidades vinculadas à competência específica 4 do quadro acima tratam da utilização das diferentes representações de um mesmo objeto matemático na resolução de problemas aos quais temos nos referido nos diferentes ostensivos que representam os saberes. Analisar as praxeologias na perspectiva do ostensivos utilizados permite conhecer melhor aspectos da atividade matemática do sujeito. A estimulação do uso de diferentes ostensivos têm potencial para ampliar o repertório de aprendizagens dos conceitos matemáticos.

Para tal competência identificamos uma habilidade (EM13MAT402), que faz menção à passagem de um campo a outro, mas, não explicitamente, indica uma brecha para discussão do duplo status da parábola. Isso implica dizer que a opção didática de percorrer o caminho da evolução da noção de função quadrática, partindo dos problemas de lugar geométrico até a noção de gráfico da referida função, não tem uma proibição, mas também pode não ter um amparo mediante análise desse documento de referência. O fato de não haver uma indicação explícita não significa necessariamente uma restrição institucional, haja vista que 40% do currículo deve atender a questões que atendam aos anseios locais/regionais da rede de ensino. Entretanto, as condições para realização de um trabalho nesse modelo praxeológico pode não emergir das práticas docentes.

Por sua vez, a competência 5, pressupõe, em caso de seu desenvolvimento, habilidades voltadas à capacidade de o estudante investigar e formular explicações para os problemas que lhe são propostos. Tais explicações e argumentos podem emergir de um processo indutivo, no entanto, faz-se necessária uma vivência do método dedutivo, que evoca argumentos mais formais acompanhados de demonstração. A experimentação de situações que mobilizem o raciocínio hipotético-dedutivo pode ter colaboração, por exemplo, de Percursos de Estudo e Pesquisa, como no caso da habilidade (EM13MAT503) *Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira* *ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais*. A questão Q_0 do PEP, experimentado com futuros professores, vincula-se a essa habilidade. Poderia, com algumas alterações, ser implementado no Ensino Médio.

Na formação docente, no contexto dessa investigação, tomamos dois componentes curriculares: CET0059 (Elementos de Matemática) e CET0064 (Ensino de Matemática: Funções) que tem o primeiro como pré-requisito. Explicitamente, os programas desses componentes não apontam para o caminho proposto no nosso MPA e, por esse motivo, o chamamos de modelo alternativo, e mantemos nosso foco na integração de noções didáticas que podem auxiliar na reconstrução das praxeologias advindas da experimentação de um PEP. Isso é viabilizado pela mobilização de tarefas didáticas como a de verificar uma assertiva e controlar os resultados (ARTAUD, 2019), relativa à dialética de mídias e meios.

No CET0059, as funções aparecem como objetos de ensino, que serão ferramentas em outras disciplinas do eixo de formação matemática, a exemplo dos cálculos. No caso do CET0064, tomam-se as funções como objeto para discussão sobre seu ensino na Educação Básica. Existe aí uma condição para a proposição do modelo praxeológico alternativo em discussão. Aqui podemos falar de tipos de tarefas didáticas incluídas nas Praxeologias que não são específicas da Matemática (ARTAUD, 2019). Em sua ementa, os aspectos epistemológicos e didáticos são articulados, sendo a condição institucional básica para a proposição do referido MPA, partindo de elementos como a ordem cronológica da participação de outros objetos matemáticos que corroboraram com o surgimento da noção da função quadrática.

Apresentamos, a seguir, recorte dos ementários dos dois componentes respectivamente nas figuras X e Y.

Figura 4 – Ementário do componente CET0059

DADOS DO COMPONENTE CURRICULAR

Código:	Nome do Componente Curricular	Semestre de oferta:
CET0059	**ELEMENTOS DE MATEMÁTICA**	1º

Carga Horária (hora aula)				Módulo:			Natureza:	Pré-Requisito:
Teo	Prat	Est	Total	Teórico	Prático	Estágio		
90			90	45			Obrigatório	

EMENTA:

Noções de conjuntos. Conjuntos Numéricos. Funções: Função polinomial, racional, modular, trigonométrica, exponencial, logarítmica e hiperbólica.

Fonte: Extraído do PPC do curso de Licenciatura em Matemática da UFOB (2018).

Numa perspectiva ecológica, esse é o lugar em que o saber função quadrática, como uma das funções polinomiais, aparece com status de objeto matemático a ser ensinado. Enquanto um saber estruturante para o cálculo que será estudado ao longo do curso, as funções são oficialmente apresentadas de modo a suprir algumas lacunas advindas do Ensino Médio, dentre as quais está a discussão do contexto em que se inscreve o domínio dessas funções (contínuo ou discreto).

O CET0059, é ofertado no primeiro semestre de curso, pela matriz curricular dessa instituição, não é um componente que tem como objetivo pensar o ensino dos objetos que constam no currículo da Educação Básica. Sua finalidade é instrumentalizar os futuros professores para utilização das funções no Cálculo Diferencial e Integral, bem como em outros componentes do curso. Os estudantes só terão contato com a Geometria Analítica no período seguinte.

A integração de noções didáticas a partir do seu estudo, quando ocorre, é de forma intuitiva, a partir da confrontação de praxeologias comuns no Ensino Médio, com ferramentas matemáticas cristalizadas, com novas Praxeologias Matemáticas, que já possuem, no bloco do *logos*, elementos mais consistentes, mas que, dependendo da abordagem didática dada a esse componente, ainda não permitem mitigar a dissociação entre o saber-fazer e o saber (preditor do fenômeno da incompletude da atividade matemática institucional).

No figura a seguir localizamos outro local onde o objeto Função tem vida na instituição Formação inicial docente em Matemática.

Figura 5 – Ementário do componente CET 0064

DADOS DO COMPONENTE CURRICULAR		
Código:	Nome do Componente Curricular	Semestre de oferta:
CET0064	**ENSINO DE MATEMÁTICA: FUNÇÕES**	4º

Carga Horária (hora aula)				Módulo:			Natureza:	Pré-Requisito:
Teo	Prat	Est	Total	Teórico	Prático	Estágio		
	90		90		12		Obrigatório	CET0019 + Educação Matemática II

EMENTA:

Articulação entre os conteúdos que permeiam os currículos do Ensino Básico e a própria matemática. Identificação dos pontos de dificuldade tanto para o ensino como para a aprendizagem de Funções. Utilização e análise de jogos matemáticos, calculadora, softwares, recursos tecnológicos digitais e vídeos disponibilizados na internet. Confecção de material didático para o ensino do conteúdo abordado. Sequências de Ensino de Matemática - Funções - nos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Planos de Ensino de Matemática: estrutura, análise e elaboração. Aspectos do processo avaliativo.

FOCO: Conceitos e definição de relação e função. Elementos da função. Bijeção e Funções inversas. Tipos de Função (polinomiais, logarítmicas, exponenciais, trigonométricas e transcendentais). Álgebra das Funções. Interferência do conjunto da definição e propriedades da função. Relação entre Função e Equações e Inequações. Relação entre o gráfico da função e sua representação geométrica. Uso de funções e modelagem matemática.

Fonte: Extraído do PPC do curso de Licenciatura em Matemática da UFOB (2018).

O componente CET0064, por seu turno, cujo local na instituição é o quarto período de curso, propõe-se à discussão dos aspectos do ensino do objeto funções, sem perder de vista as principais noções associadas a tal objeto. Esse é um fator que nos permitiu intuir que é uma condição institucional para a realização do trabalho proposto no nosso MPA. O foco nesse trabalho é que as noções didáticas e, consequentemente, as Organizações Didáticas deixam de estar em segundo plano ou implícitas nas práticas dos futuros professores participantes da pesquisa e passem a ter papel de destaque. Essa é, possivelmente, outra condição para que o MPA seja implementado e, mais que isso, para que as noções didáticas relativas ao dispositivo PEP possam ser integradas às Praxeologias Matemáticas.

A longo prazo, esse trabalho, pautado no MPA, pode repercutir na integração de novos discursos tecnológico-teóricos tanto nas Praxeologias Matemáticas (o que o sujeito realiza) quanto nas Organizações Matemáticas (o que é da instituição) no que tange ao ensino e/ou estudo do saber função quadrática.

A Organização Matemática que existe numa instituição às vezes não dá conta de algumas questões epistemológicas e didáticas, mas isso não implica em restrição institucional, pois o currículo não se propõe a engessar as práticas – nem deveria.

Ao olharmos somente para o ementário, diríamos que as possíveis práticas construídas não tocam propriamente na questão da integração das noções didáticas no *logos* da Praxeologia Matemática. No entanto, é precipitada essa análise fria do documento, justamente porque não há engessamento do currículo. Nesse caso, preferimos apontar as condições existentes nessa instituição para a realização de um trabalho de reconstrução de praxeologias no estudo do objeto em jogo.

No *logos* da Praxeologia Matemática, a integração das noções didáticas a que nos referimos deve fomentar uma ação coordenada dos conhecimentos matemáticos e didáticos, o que aumenta o potencial dos componentes do campo do ensino na instituição onde ocorreu o estudo, quanto ao desenvolvimento do MPA.

Por fim, falar das condições e restrições para o desenvolvimento de reconstrução praxeológica está longe de ser restrita à Praxeologia Matemática. Tocar no *logos* dessa praxeologia, buscando características de uma possível integração de noções didáticas, vai além. Como foi dito anteriormente, depende da proposição de tarefas didáticas. Pode configurar também um fator de reconstrução de praxeologias profissionais, à medida em que pode alterar algo importante no Ensino da Matemática: a relação pessoal dos professores com a Matemática que deve ensinar. Desse modo, conforme se analisam os dados construídos na experimentação de um PEP, interessam-nos também trazer luz às condições para sua implementação, ou sobre as condições para que essa proposta possa viver numa instituição da forma como o currículo está posto.

2.3 Estrutura didático-matemática do MPA

Nesse segundo bloco do capítulo, apresentamos um desenho de um Percurso de Estudo e Pesquisa para o estudo da relação da noção da função quadrática com sua representação gráfica, promovendo discussão sobre o duplo status da parábola, bem como a experimentação desse PEP adaptado e sua avaliação, a partir da análise das Praxeologias Matemáticas construídas (dimensão didática), bem como um desenho da pesquisa (o PEP como abordagem metodológica).

Mas faz-se necessário informar, inicialmente, o sentido de modelo utilizado em nosso trabalho. Um modelo, segundo Balachef (2017), tem como objetivo fornecer uma ferramenta para estabelecer ligações entre os arcabouços teóricos que o suportam e o campo experimental onde serão montados experimentos e observações realizadas. É nessa perspectiva que tratamos o Modelo Praxeológico Alternativo, o qual dá suporte para o PEP adaptado que planejamos.

Nesse modelo, podemos recorrer a uma questão central da epistemologia do Ensino da Matemática em até três frentes: estudar os conhecimentos a serem ensinados; estudar a prática de ensinar e a aquisição dos alunos; projetar recursos ou situações no contexto da Engenharia Didática. Mas situamos nosso trabalho, na terceira frente, com a proposição de um dispositivo didático.

As Praxeologias Matemáticas construídas devem dar indícios, ou não, de integração de noções didáticas no seu *logos* (bloco tecnológico-teórico). A priori, as noções didáticas consideradas são duas das dialéticas descritas por Chevallard (2012), noções estas que integram o que estamos denominando de Modelo Praxeológico Alternativo – MPA.

O MPA proposto para o contexto dessa investigação está inevitavelmente consignado a um Modelo Epistemológico-Didático de Referência – MER, que também é provisional, ou seja, depende de nossa escolha enquanto investigador, entretanto só iremos nos referir, ao longo do texto, ao MPA. Amparamos nossas proposições na discussão das inter-relações entre os domínios matemáticos Geométrico, Algébrico e Gráfico – GAG (proposição nossa), que, por sua vez, bebe da noção de inter-relações entre os domínios Numérico, Algébrico e Geométrico – NAG (FARIAS, 2010); no desenvolvimento da Atividade Matemática no estudo das funções reais (SIERPISNKA, 1992, ARTAUD, 2018); na discussão sobre modelos (BALACHEFF, 2017); no jogo didático como ação conjunta, jogado pelos estudantes e professor (SENSEVY, MERCIER, 2007); e na noção de variáveis didáticas no construto praxeológico (CHAACHOUA, BESSOT, 2019). Esses trabalhos contribuíram para justificarmos uma razão de ser alternativa[15] para o estudo do objeto função quadrática a partir da discussão do duplo status da parábola.

Diremos que a suposta razão de ser alternativa, no âmbito dos níveis de co-determinação, precisamente no domínio matemático (Geométrico, Algébrico e Gráfico) e/ou sociedade (ver figura 1, no capítulo 1), não é nem pode ser única; mas constitui uma possível resposta didática ao fenômeno IAMI, localizado nos níveis -1 Escola e 5 – Assunto. Tal resposta se materializa com a proposição de um Percurso de Estudo e Pesquisa ou num conjunto de Atividades de Estudo e Pesquisa que possam tornar-se um PEP (finalizado ou não finalizado). Assim, a construção da noção da função quadrática pode surgir pelo encontro com a parábola no domínio geométrico, passando pelo algébrico e chegando ao gráfico – GAG, o

[15] Entendemos a razão de ser oficial como aquela que faz referência à importância das funções para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, ou seja, estudar funções justifica-se por ser uma importante ferramenta para outros objetos matemáticos.

que chamaremos, a partir daqui, de espaço GAG, pois envolve sistemas geométricos, algébricos e gráficos, os tipos de práticas desenvolvidas em torno desses sistemas e as articulações entre os domínios que o integra.

O PEP proposto nessa investigação considerou alguns aspectos que merecem destaque antes de comunicarmos os resultados dessa experimentação. É nesse capítulo que também melhor destacamos características da abordagem metodológica dessa pesquisa.

Vale ratificar que a concepção retida de modelo de referência, no que concerne às publicações sobre o que vem ser o PEP, é de um dispositivo didático para o ensino de objetos matemáticos e das demais ciências, ou um dispositivo de investigação, nesse caso, Engenharia do PEP (BOSCH, 2010).

O referido dispositivo didático-investigativo permite a construção de um sistema de tarefas que se traduza em organizações praxeológicas de complexidade crescente, a partir da movimentação de praxeologias pontuais para a construção de uma praxeologia local (CHEVALLARD, 2009b). Trabalho este, realizado pelos participantes da investigação, que compõem uma comunidade de estudo assumida aqui como um Percurso de formação do professor, corporificado por um PEP.

Assim, detalhamos o que entendemos por PEP, na dimensão teórica ou prática (NASCIMENTO, FARIAS, CARVALHO, 2019). A princípio, pautamos nossa investigação na Engenharia do PEP, mas, como já dissemos, devido à simbiose de técnicas da própria noção clássica de engenharia e outros elementos que compõem nosso Modelo Epistemológico de Referência – MER, diremos que este é um PEP adaptado. Ademais, denominamos o trabalho de construção de dados de Praxeologias de Pesquisa Didática (CHEVALLARD, 2015), que está ancorada no paradigma da investigação e questionamento do mundo (CHEVALLARD, 2012).

Para melhor compreender essa noção, pensemos, conforme indica Chevallard (2009, 2012), na função da Didática. Ela é um conjunto de situações sociais em que uma pessoa faz alguma coisa ou manifesta uma intenção de fazer, para que outra pessoa, ou ela própria, aprenda algo. No nosso contexto, aprenda algum objeto matemático. Chevallard, nomeia a primeira pessoa mencionada de *y* e a segunda de *x*, sendo possível substituir esta última por X, um conjunto de pessoas que aprenderão alguma coisa. Descrito dessa forma, é possível representar estes elementos em um tripleto didático, que será a base da nossa proposição do PEP. No entanto, ainda falta tratar do terceiro elemento.

Este elemento que completa o referido tripleto é denominado por Chevallard (2012), pela letra O, que representa o “algo” (uma obra) que será difundido ou aprendido pelos componentes x e y. Dessa maneira, temos um sistema didático composto por tais elementos, e como já dissemos, este representa o tripé fundamental da didática: (X, Y, O), formando, assim, uma comunidade de estudo.

O algo que se pretende fazer, ou é feito, Chevallard (2012) denominou de gestos didáticos, os quais discutiremos mais adiante. Agora, voltemos a discutir o paradigma que tem regido as pesquisas mais recentes em didática, mas que é pensado também enquanto paradigma para o ensino, a saber, paradigma da investigação do questionamento do mundo – PIQM – (CHEVALLARD, 2012). Este se encontra no seio da noção de PEP que utilizamos e queremos caracterizar nesse estudo. Pode-se dizer, ainda, que é um contra paradigma ao da visitação do conhecimento, em que se contemplam os saberes intocáveis e institucionalizados nas instituições de ensino e nos seus currículos e exerce a mesma função atuando na incompletude da atividade matemática institucional.

O PEP não é uma teoria em si, mas tem suporte teórico da TAD e, em termos de paradigma de investigação, na dimensão investigativa, tem alicerce nessa visão de que a atividade do pesquisador, do professor e do estudante são isonômicas. Assim, questiona-se, o que Chevallard (2004) vai chamar de gesto didático de perguntas e respostas, os fenômenos didáticos e os fenômenos que neles se incluem, visto que tem sido experimentado como abordagem metodológica, tem como visão de mundo a ideia de que a realidade pode ser construída pela experimentação de sequências que dão start a um processo de investigação por meio dos quais são realizadas as análises. No nosso caso, levantamos uma questão geradora do percurso investigativo para um grupo de futuros professores. No entanto, focamos nosso olhar na possibilidade de integração de noções didáticas no bloco que justifica as técnicas que compõem as Praxeologias Matemáticas do grupo participante.

No âmbito da pesquisa uma pessoa x, diante de uma pergunta a respeito de O (uma obra) não demonstra sintoma de evitação, o que poderia ocorrer no paradigma de visitação aos conhecimentos já instituídos. Nesse último, x ou X tem propensão a evitar as perguntas para as quais não conhece a resposta. Esperávamos que, no contexto da presente investigação, os participantes não demonstrassem tal sintoma de evitação, recusa explícita de participar da investigação, recusa implícita, por informar que não conseguiria compreender a proposta e não efetivar sua participação no PEP.

Outro ponto importante nessa discussão é refletir sobre as condições institucionais para implementação do referido PEP. Para isso, é necessário analisar o currículo/programa oficial da disciplina em que se pretendeu implementar o PEP. À primeira vista, a proposta de implementação do dispositivo didático em jogo parecia difícil, pois a função didática cronogênese ainda é um ponto chave para o desenvolvimento do PEP. Além disso, um desafio imperativo era o cumprimento do programa e a garantia de avaliação do processo de aprendizagem dos estudantes já que se pretendia experimentar o dispositivo nas aulas da componente curricular, e não em atividade extraclasse.

Ademais, detalhamos a seguir, os caminhos do PEP, planejado por nós, que teve como desafio, na proposição de um dispositivo aberto, proporcionar/buscar uma finalização praxeológica matematicamente falando.

Esse PEP teve como objetivo fomentar nas praxeologias dos participantes:

– Combinação das contribuições da utilização de um gráfico e uma solução algébrica.

– O local dos elementos geométricos no estudo das funções quadráticas a partir dos problemas de lugar geométrico. Nesse último caso, acreditamos estar o ponto principal do nosso estudo.

– Um problema de otimização, para que os participantes possam resolvê-lo, conforme o caso, explorando as potencialidades do software Geogebra, gráfica ou algebricamente, qualquer autonomia que possa ser associada a um problema com uma função.

– Situações que venham dos mais variados campos: biologia, economia, geometria, economia, física, notícias (dialética das mídias e meios), usando softwares de geometria dinâmica (Geogebra) ou não.

– Exploração de exemplos de não linearidade (função quadrática não é linear).

– Destaque dos limites da informação fornecida pelo resultado de uma representação gráfica.

Nossa espera institucional foi que por meio de realizações didáticas (experimentação do PEP), fossem reconstruídas as Praxeologias Matemáticas dos participantes e consequentemente as Organizações Matemáticas já cristalizadas na instituição onde desenvolvemos a pesquisa, o que nos levou olhar para os conjuntos praxeológicos produzidos anteriormente e que tem potencial de ser modificado. Desse modo, a proposição do MPA para o estudo da função quadrática e status da parábola no currículo escolar considerando a amalgamação de técnicas na Análise Real e Geometria Analítica, é colocada como ponto chave do trabalho no contexto intra-matemático.

Nesse ínterim, a amalgamação de técnicas com propriedades de três domínios matemáticos, como vemos na continuidade das discussões, podem corroborar com a compreensão das tarefas sobre a parábola como gráfico da função quadrática, num jogo de diferentes ostensivos (discursivos, escriturais e gráficos) e não ostensivos (o conceito de função quadrática). Mais que isso, é um forte elemento para constituição do pensamento variacional, que não deve ficar apenas a cargo das leis algébricas e relações gráficas.

2.3.1 Uma proposta de jogo didático: o PEP adaptado

Vamos discutir uma noção que nos parece interessante na proposição do MPA, fomentado pelo PEP. Tal noção se inscreve na Teoria da ação conjunta (SENSEVY, MERCIER, 2007). Não toda a essência dessa teoria, mas a noção de jogo didático.

Um postulado importante da Teoria da ação conjunta é considerar toda prática humana como um jogo. No entanto, nos interessa especificamente a prática didática, por isso nos deteremos na ideia de jogo didático. A ação didática é uma forma particular de ação conjunta, o que pode nos levar a reflexões a respeito de uma função didática, amplamente discutida nas pesquisas em Didática da Matemática cujos objetos de investigação integram modelos de aprendizagem por investigação, a topogênese.

No contexto educacional, se observarmos duas ou mais pessoas, professor com alunos, alunos entre si explicando como resolver uma tarefa, ou mostrando os caminhos que percorreram e foram exitosos, ou em outras relações educacionais como aquelas nas quais os pais ensinam o filho a andar, tem-se a configuração de um jogo (didático).

O referido jogo pode ser assim descrito: um jogo no qual dois jogadores, o professor e o estudante, cooperam. O professor e o estudante podem ser descritos como indivíduos, mas eles representam instâncias, visto que pode haver uma ou mais pessoas jogando, e as posições são relativas (SENSEVY, 2012). Há uma mediação dos jogadores em torno de um objeto, uma questão de educar sobre o saber ou conhecimentos.

É um jogo cooperativo, já que não faz sentido jogar sozinho. Ao menos para o professor, não há razão de ensinar se não existe alguém com a intenção de aprender. Mas não é ensinar no sentido convencional da palavra, ensinar propriamente o saber, mas como se relacionar com os saberes e construírem a respeito deles conhecimentos.

Segundo Sensevy (2012), significa simplesmente que a atividade didática é uma ação conjunta, na medida em que comportamentos específicos do professor e do aluno surgem um do outro. Metaforicamente, se os pais ensinam um filho a chutar a bola, e a criança pega essa bola e alguns pincéis e a pinta, a ação didática inicial cessa. A criança não está no jogo. O mesmo ocorre na relação didática professor – aluno.

Essa ação didática também deve ser encarada como uma ação coordenada. Imagine uma corrida com atletas cegos. Se o atleta vai para um lado e o guia, ligado a ele por um cordão ao braço, vai para o outro, podemos dizer que não houve coordenação. O sucesso da atividade consiste em ambos irem na mesma direção e sentido. Assim deve ser na relação didática de sala de aula.

A essa altura, podemos falar mais especificamente sobre o *topos* (papel) do professor e aluno. Ambos devem realizar uma mediação similar com os objetos do conhecimento, no nosso caso específico, os matemáticos. Isso refletiria na ação didática ser conjunta, cooperativa e coordenada ao mesmo tempo. Mas as ações participativas dos dois atores sociais não têm como ser de mesma natureza. É nítido, no contexto da prática de sala de aula, que os interesses parecem os mais diversos possíveis, principalmente nas aulas de matemática. Quanto ao caráter da atividade coordenada, poderia vir do fato de a ação didática ser dialógica. Para tanto, teria de ser realizada de forma integral e não individual (TAYLOR, 1995).

O jogador professor ganha somente se, o outro jogador aluno também ganha. E, no contexto didático, esse ganho é alcançado se o aluno aprende. Mas Sensevy (2012) diz, ainda, que esse jogo é paradoxal. Nele o aluno não ganha se o professor comunica puramente as informações. Se somente o professor comunica, o aluno não age, desse modo, o jogo não é didático, porque este é um jogo de conhecimento, um poder para agir.

Sensevy (2007) apresenta, ainda, outra relação da ação conjunta com a Didática da Matemática, através da ideia de uma omissão didática, postura necessária ao professor, visto que esse não deve transferir conhecimento aos estudantes (ou transmitir diretamente). Na teoria das situações didáticas, essa omissão ou relutância didática é chamada por Brousseau (1998) de devolução. Essa omissão é necessária, pois se o professor, na condição de jogador do jogo didático, revela para o estudante sua estratégia vencedora, estará impedindo o estudante de produzir suas próprias estratégias. Em termos comportamentais, uma ação do professor, nesses moldes, limitaria a produção de um comportamento ativo do aluno em situação autônoma.

À medida que o jogador professor se omite, sendo essa uma estratégia de jogo que visa à aprendizagem autônoma do estudante, este pode assumir uma certa solidão na aprendizagem, necessária ao seu desenvolvimento. Mas essa devolução, com condições planejadas pelo professor, só é eficaz se o jogo didático em questão tem como cláusula o aceite do estudante do novo *topos* do professor: de relutância didática.

Como vimos na discussão acima, em alguns momentos, o professor precisará deixar o aluno caminhar sozinho, como os pais que ensinam um filho pequeno a andar e, depois, soltam-no, ou o maestro que deixará de dar instruções técnicas, e o músico terá de tocar. Essa informação é retida no modelo epistemológico de aprendizagem com o qual propomos o PEP. Trata-se de compreensão de uma mudança dos *topos* do professor e do aluno. Mas o que isso tem a ver com esse trabalho?

O PEP materializa um jogo didático que pode, no contexto da nossa investigação, e assim esperamos, permitir a integração de noções didáticas no *logos* da Praxeologia Matemática de um sujeito muito específico, o professor. Nenhuma mudança parece ser tão fácil se não passar primeiro por uma questão de profissionalização do docente. Pensamos ser cabível, nessa investigação em didática, considerarmos os saberes que um professor deve integrar com o objetivo de abrir novos espaços de aprendizagem, bem como as especificidades didáticas do saber a ser ensinado e dos conhecimentos do professor, na tentativa de mitigar os efeitos do fenômeno didático discutido nesse relatório e o problema didático cuja construção também já foi apresentada.

O PEP pode ser mais uma resposta à relação dual viva nas aulas de Matemática entre professor/aluno, o saber e esses dois. O MPA que construímos, implementado com esse PEP, é um projeto antropológico, porque pensa em ações humanas, sendo uma delas a ação didática, que independe do sistema de ensino disciplinar.

Apresentamos duas dialéticas essenciais para desenvolvimento do PEP e que, ao nosso ver, trazem a concepção do jogo didático proposto no MPA para o estudo da relação entre a noção da função quadrática com sua representação gráfica e o duplo status da parábola, a saber: as dialéticas das perguntas e respostas e das mídias e dos meios.

2.3.2 PEP do ponto de vista das dialéticas das perguntas e respostas e das mídias e meios

As dialéticas são compreendidas aqui, no contexto dessa discussão, como gestos de estudo. Um deles, o de perguntas e respostas, perdido ao longo do tempo nas práticas sociais, quando estas se organizaram para a difusão dos conhecimentos em geral, está no coração do dispositivo planejado e experimentado. Tal gesto gera ao menos o início do processo esperado em nossa pesquisa: o de levantar perguntas e buscar respostas, sem evitar tocar nos conhecimentos consolidados (fenômeno de monumentalização dos saberes).

Quando nos propusemos a esse objeto de investigação, não apenas colocamos em teste nossa tese, mas também a possibilidade de esse dispositivo (PEP) modificar praxeologias matemáticas e didáticas.

O que acreditamos, nesse caso, é que o gesto didático de levantar questões e buscar as repostas para as estas, conduz o professor, e também o futuro docente, a um processo de reflexão rico em torno dos saberes que serão ensinados. Como exemplo, tomemos uma questão colocada nas aulas de um componente do Ensino de Matemática: funções, em que se questionou o porquê de toda função quadrática na forma $f(x) = ax^2+bx + c$ ser representada por uma parábola.

Foi uma pergunta que, de certo modo, iniciou um jogo didático, porque resultou num processo de busca por investigação das respostas para aquilo que parecia óbvio. Desde essa realização didática, que não integrou o PEP experimentado, temos um suposto indicador de integração de noções didáticas no *logos* da Praxeologia Matemática dos estudantes que estavam incumbidos de responder à questão proposta. Na certeza de saber que a parábola é a representação gráfica para esse tipo de função, o *logos*, ou seja, o que justifica essa certeza trazida pelos manuais didáticos ou o contato com as Organizações Matemáticas das instituições de ensino por onde passaram, sofreu alterações por conta do questionamento da natureza desse conhecimento. Mas até que ponto podemos dizer que a dialética aqui discutida é uma noção didática que pode ser integrada ao *logos* das praxeologias matemáticas?

Nesse sentido, com uma frente epistemológica visando à reconstrução das Praxeologias m=Matemáticas e com uma frente didática buscando uma (re) construção das escolhas para o ensino dos saberes matemáticos é que o dispositivo didático-investigativo foi concebido.

Não procuramos, nessa investigação, estabelecer diferença entre o PEP dispositivo didático e investigativo, por outro lado, consideramos que podem ser pensados separadamente

(NASCIMENTO, FARIAS & CARVALHO, 2019). Mas nossa escolha de não fazer a distinção supramencionada pode indicar, no contexto do Ensino da Matemática, um possível caminho para alcançarmos a figura de professor-investigador.

Na estrutura proposta por Chevallard (2009) para um PEP, colocamos uma questão Q_0, da qual surgem, em alguns momentos com a mediação didática do professor, outras questões que contribuem para o desenvolvimento do Percurso, ainda que essas, por vezes, fujam do guarda-chuva proposto em Q_0.

Assim, nossa proposição inicial foi: Q_0 – Como trabalhar conjuntamente a noção de função quadrática e o ostensivo figural (gráfico) que representa essa função, mobilizando outros ostensivos que integrem outros domínios matemáticos?

A questão acima é demasiado ampla, mas esse era nosso objetivo. Não revelar que queríamos trabalhar com o duplo status da parábola, partindo de uma questão que tanto permitisse a reconstrução de tarefas didáticas quanto matemáticas.

Quanto à noção da dialética de mídias e meios (CHEVALLARD, 2007), discutimos o significado de cada expressão que a compõe. A palavra mídia, significa aqui qualquer sistema de representação de uma parte do mundo natural ou social endereçado a um determinado público. A exemplo disso, uma aula do professor de matemática endereçada aos estudantes, mas também um telejornal apresentado por um âncora numa emissora de TV (CHEVALLARD, 2007).

A noção de meio é entendida no mesmo sentido do meio didático na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986). Chevallard (2007), designa esse meio como qualquer sistema que pode ser considerado como desprovido de intenção na resposta que ele pode trazer, explícita ou implicitamente, para uma dada questão.

A dialética mídia e meio é, segundo Chevallard (2007), uma condição crucial para que um processo de estudo e pesquisa não se reduza a uma cópia acrítica de elementos de respostas dispersas nas instituições da sociedade, num modelo de submissão à autoridade. Essa dialética, viva num processo de estudo e pesquisa, dá lugar a uma cultura compartilhada de questionamento e de construção de meios apropriados que combinam dispositivos físicos e imateriais (investigação, experimentação, raciocínio, dedução). Além disso, pressupõe tarefas de o tipo verificar uma assertiva e controlar resultados (ARTAUD, 2019).

A implementação desta dialética depende de uma análise mais aprofundada das organizações didáticas que possibilitem destacar os efeitos de uma restrição que nos parece subestimada em grande parte, a restrição da repressão da Didática (CHEVALLARD, 2008,2012; ARTAUD, 2016).

Tanto o estado atual de desenvolvimento das dialéticas na escola quanto as condições e restrições que controlam o estado de desenvolvimento da dialética das mídias e meios na sociedade e, em especial, na escola são duas questões importantes na proposição de um Percurso de estudo e pesquisa, mesmo que este seja adaptado, como é o caso apresentado nesse estudo.

É imprescindível a identificação de um ponto de equilíbrio no que tange às tecnologias digitais e uso da internet no caso da dialética das mídias e meios. Os sites, por exemplo, possuem grande potencial se são utilizados para aumentar a compreensão através da descoberta e exploração. Há, em algumas situações, uma desconexão entre as tarefas e as tecnologias disponíveis, quando o objetivo é encontrar uma solução para tarefa, sem de fato ocorrer um processo de resolução do problema posto. O recomendável seria encontrar uma solução, o que implicaria em usar estratégias matemáticas para se chegar à resposta ao problema posto.

2.3.3 Proposta de um PEP para formação do professor de Matemática

Apresentamos, nessa seção, elementos que compõem uma estrutura didática básica para desenvolvimento de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), o que pode ser realizado em qualquer nível de escolaridade.

Dentre os indicadores que um PEP deve possuir, de acordo com Lhano e Otero (2012) podem-se citar:

– Uma questão geratriz Q e das respectivas derivadas (Qij), às quais se faz necessário apresentar respostas;

– Constituir um meio didático M no qual pode ser incluído tudo que o estudante julgar necessário.

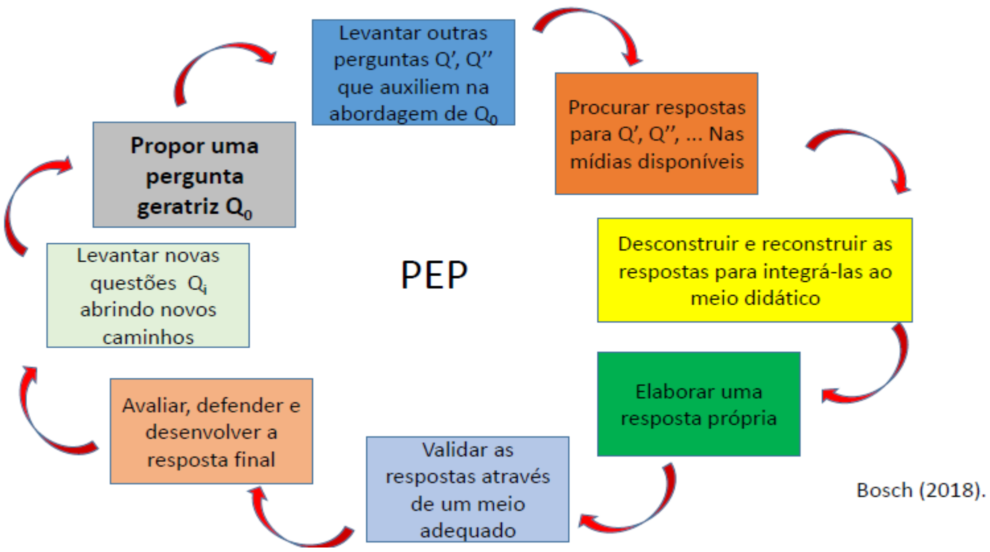
– Permitir obter como resultado do processo de elaboração, validação e institucionalização de uma resposta $R^{\heartsuit}$.

Em outras palavras, a implementação de um PEP requer mudanças substanciais em três funções básicas de uma organização didática, a saber: topogêneses, mesogêneses e cronogêneses (CHEVALLARD, 2009).

É no processo/função cronogêneses que se vislumbra a inclusão no meio didático construído pelo estudante. Uma vez que já tenha assumido um papel de autor do seu processo de aprendizagem, deve incluir em M todas as obras que julgue válidas, ainda que destas não resultem respostas institucionalmente esperadas. O Papel do aluno se amplia nesse contexto e, ao professor, diretor do estudo, cabe a definição do meio M que a classe trabalhará.

De modo geral, conforme Bosch (2018), uma infraestrutura completa para o PEP é a que segue representada na figura 6.

Figura 6 - Esquema ilustrativo das etapas de desenvolvimento de um PEP



Fonte: Traduzido de Bosch (2018).

Essa infraestrutura depende de uma mudança na cronogênese. Observa-se que, para fechar o ciclo indicado na figura acima, seria necessário um número elevado de aulas de modo que se cumprisse supostamente todo o protocolo do Percurso em 8 etapas. No entanto, tal mudança no entendimento do tempo didático, que é não cronológico, permite aos estudantes, justo quando não estão sob a supervisão docente direta, cumprir algumas etapas, a exemplo de levantar outras questões derivadas de Q_0, procurar respostas para a família de questões Qi, elaborar respostas próprias.

Nessa pesquisa, tentamos estimular as 8 etapas, que contemplam mudanças nas três funções básicas no sistema didático no papel dos atores sociais (estudantes e professor) no tempo e no meio didático.

2.3.4 O PEP para estudo do duplo status da parábola

A questão geratriz, elaborada pelo professor-pesquisador, que inicia este Percurso levou em consideração o que está na gênese do objeto do saber a ensinar função quadrática.

As questões que deram início oficialmente ao PEP adaptado (não constituíram um pré-teste do conhecimento matemático já adquirido pelos estudantes), bem como às demais, foram planejadas levando-se em consideração:

> - A parábola como conjunto de pontos do plano que verificam certa relação com uma diretriz e um foco;
> - A parábola como conjunto de pontos do plano que determinam uma equação;
> - A parábola como um gráfico correspondente a uma equação quadrática, que, considerando o lugar geométrico como conjunto de pontos que cumprem uma condição ou regra específica e que, unidos entre si, gera a curva que representa a parábola, porque a partir da relação entre distâncias é possível achar de forma analítica a equação canônica. (BERMUDÉZ; MESA, 2018, p. 69) [tradução nossa].

É preciso conhecer esses aspectos associados à parábola para construir tarefas que possam mobilizar conhecimentos a respeito das propriedades gráficas da função quadrática.

Em síntese, do ponto de vista algébrico, estudamos esse objeto como uma função quadrática e, do ponto de vista da Geometria Analítica, como uma equação canônica. Desse modo, ao trazermos para nossa proposta de implementação de um PEP essas interpretações sobre a parábola, pretendemos amalgamar técnicas que estejam amparadas nos domínios matemáticos geométrico, algébrico e gráfico.

Não se trata de um objeto do saber ambíguo. A ambiguidade pode estar na abordagem didática desse objeto, nas escolhas que fazemos para ensiná-lo num ou noutro domínio da matemática. Por isso a importância de destacar o papel das tarefas nesse processo e nesse projeto de reconstrução de praxeologias, visto que é nesse aspecto que temos liberdade didática, para atuar diretamente na reconstrução da atividade matemática e também didática em uma certa instituição.

Nossa tentativa aqui, é de promover essas reconstruções praxeológicas pela proposição das questões que integra, a família derivada de Q_0.Surge, a partir dessa discussão sobre status da parábola, outra inquietação: os gestos de estudo corroboram com a amalgamação de técnicas na proposição de respostas as “Q” do PEP?

Essa percepção gráfica sobre a função quadrática emergindo dos status da parábola poderá contribuir com a relação entre o conceito dessa função com seu ostensivo gráfico? E essa percepção altera a forma de ver a função enquanto uma relação dinâmica, viva e não estática?

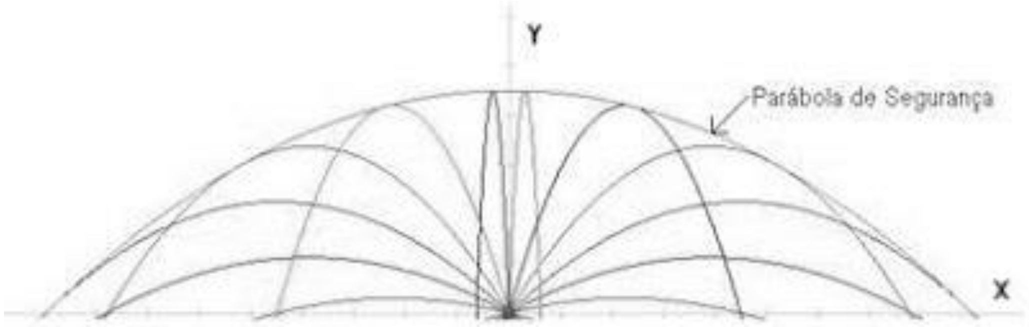
Inferimos que a dialética das mídias e meios é uma aliada na compreensão da proposta e no desenvolvimento do PEP implementado, pois é a mobilização de confrontação entre o que está posto com uma informação recém recebida por diferentes mídias. Desse modo, o que compôs o meio que integrou tal gesto de estudo foi a consulta à internet, a livros, como forma de confrontar uma dada fonte bibliográfica, o uso do Geogebra e a utilização de instrumentos comuns ao ensino da geometria para construção dos gráficos e/ou das cônicas em estudo.

Da mesma forma que matemáticos, ao se depararem com algo ainda não bem definido debruçaram-se a estudar tal objeto, nossa proposta nesse PEP foi de trazer situações que simulassem esse momento que conhecemos hoje como constituintes do conhecimento funções quadráticas e do objeto parábola. Desse modo, justificamos nossa escolha metodológico-didática em trabalharmos com tarefas que abordam problemas de lugar geométrico e otimização, complementados com questões de reflexões sobre a natureza do conhecimento em questão.

Uma possível Q_0 para este fim adotada nesse estudo foi: existe um lugar onde qualquer objeto estaria protegido de modo a não ser atingido por um lançador ao efetuar disparos com uma velocidade supostamente constante e em diferentes ângulos de lançamento?

Nosso projeto de ensino, que emana de Q_0, pode ser sintetizado pela figura 4, que representa a noção de parábola de segurança, sendo esta constituída de pontos máximos de outras parábolas que dependem do ângulo de inclinação dos lançamentos oblíquos de projéteis, desde que garantidas as condições descritas na questão geratriz do PEP proposto nessa investigação.

Figura 7 –Ostensivo que representa parábola de segurança



Fonte: http://aparaboladeseguranca.blogspot.com/2013/06/parabola-de-seguranca.html

Ora, tal intenção didática não se revela somente no espectro extramatemático, mas na noção de construção de parábola enquanto lugar geométrico e que assume sob determinadas condições, o papel de representação gráfica de uma função quadrática.

Partindo de Q_0, não temos necessariamente como prever as condições de finalização praxeológica, visto que, como já foi dito, esse dispositivo não pretende dar ao referido processo um caráter de intervenção controlada, o que implica dizer, ainda, que não se pretende que seja possível antever os possíveis comportamentos dos sujeitos que participam do PEP nem aonde poderão chegar em termos de construções de Praxeologias Matemáticas. Isso implica dizer que não se busca a garantia de finalização praxeológica, mas se espera trazer elementos que corroborem com este desafio posto por Chevallard (2009).

O que foi dito no parágrafo anterior pode denotar um paradoxo. Uma pesquisa em didática, ou qualquer realização didática no paradigma da epistemologia experimental tem como premissa a realização de uma análise a priori e as finalizações praxeológicas. Ao dizer que não temos como garantir tal finalização na experimentação do PEP, parece controverso. Assim, aproveitamos essa controvérsia para discutir as possibilidades da finalização praxeológica, visto que é algo em aberto nesse campo de investigações sobre os efeitos do PEP nas Praxeologias Matemáticas de alunos, e, no caso específico dessa investigação, de futuros professores.

Isso não nos impede, no entanto, de conjecturar que o MPA, que propomos dá indícios de que a atividade matemática evolui sensivelmente da condição de uso de uma matemática conhecida, quando seu uso configura a tentativa de resolução de problemas, à atividade matemática expressa pela criação de uma nova matemática. Além disso, o PEP que materializa esse MPA converge com o que foi proposto por Barquero, Bosch e Romo (2015), o de enriquecer a experiência didática e matemática dos participantes da pesquisa, futuros docentes de Matemática.

E, no tocante à segunda característica da atividade matemática descrita por (CHEVALLARD, BOSCH & GASCÓN, 2001), o dispositivo didático integrante do nosso MPA mobiliza, necessariamente, a ação de ensinar e aprender Matemática, que tem uma vinculação com a primeira característica (usar uma matemática conhecida), para ir ao estágio esperado ideologicamente por um professor-pesquisador da Didática da Matemática, o dos atores do sistema de ensino assumirem papéis similares ao do matemático, de construírem uma nova matemática para o contexto educativo que se tem conhecido, revelando, assim, uma mudança no topos dos estudantes e do professor.

Sintetizamos, a seguir, as principais características do Modelo Praxeológico Alternativo na instituição formação inicial para professor de Matemática, em quatro dimensões, que vão desde os aspectos intrínsecos ao saber (epistemológico) até aos aspectos didáticos, ou seja, as escolhas didáticas que um sujeito faz:

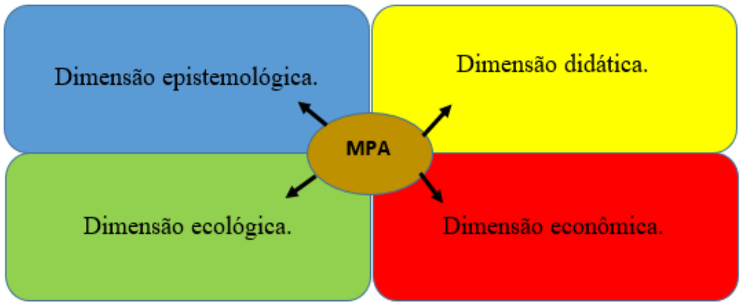
– Dimensão epistemológica: origem do saber, processo transpositivo, natureza do conhecimento matemático.

– Dimensão didática: Escolhas didáticas dos futuros professores para apresentar praxeologias matemáticas. Processo transpositivo, foco nas formas de difusão empreendidas pelo professor.

– Dimensão ecológica: condições e restrições para fazer a amalgamação de ferramentas matemáticas de domínios distintos, e o local (componente curricular ou nível de escolaridade) em que isso ocorreria. Análise institucional de documentos de referência para ensino de Matemática. Referência ao sistema de inter-relações dos domínios Geométrico, Algébrico e Gráfico (GAG).

– Dimensão econômica: Como fazer a gestão do tempo didático? Identificação de saberes matemáticos estruturantes, implementação de um PEP na aula ou extra? Implicações da estruturação do currículo na gestão do tempo didático. Reconstrução de praxeologias que sejam mais econômicas nas aulas de Matemática.

Figura 8 – Dimensões do PEP

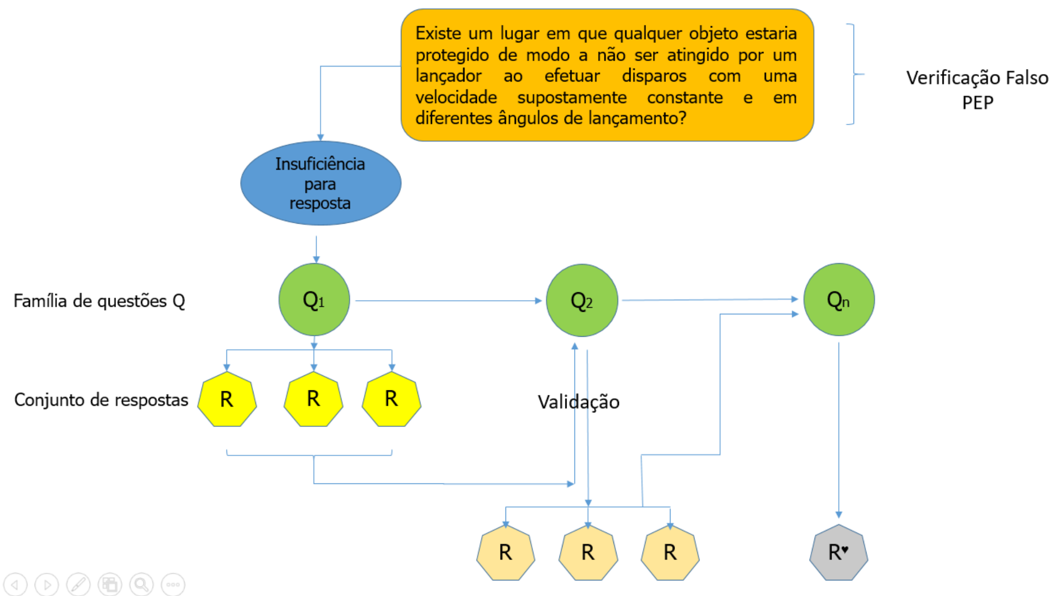


Fonte: Autor (2019), inspirado em dimensões do problema didático.

Para dar conta das inquietações supracitadas, a questão Q_0 precisou passar por um filtro cujo objetivo era identificar se resulta em um falso PEP. Assim, Q_0 é confrontada com um modelo pautado na resolução de problemas, com dados definidos no enunciado ou facilmente deduzidos desse. Nesse sentido, caso identificadas essas características, seria falso PEP.

No desenho abaixo (figura 9), é apresentada uma estrutura a priori do percurso com a Q_0, e indicação da necessidade de verificar se resulta ou não num falso PEP. Um indício de não ser um falso PEP é a insuficiência de respostas.

Figura 9 – Desenho a priori do PEP – MPA para o estudo da função quadrática



Fonte: Autor (2019).

Quanto as respostas as questões da família Q, não temos a priori aspectos muito específicos, a não ser, que a resposta R♥ expressa uma parábola de segurança, no entanto, podemos pensar em elementos que componham tais respostas, tais como: a noção de lugar geométrico e a descrição dos tipos de lançamentos de projeteis, expressadas por modelos funcionais.

2.4 Aspectos metodológicos do planejamento da parte experimental da investigação

Em consonância com o objetivo geral, conduzimos um estudo de natureza qualitativa. Uma característica salutar que pensamos ser condizente com uma tentativa de caracterizar a pesquisa qualitativa é apresentada por Garnica (2001):

> A pesquisa qualitativa, concordamos, é um meio fluido, vibrante, vivo e, portanto, impossível de prender-se por parâmetros fixos, similares à legislação, às normas, às ações formalmente pré-fixadas. Em abordagens qualitativas de pesquisa, não há modelos fixos, não há normatização absoluta, não há a segurança estática dos tratamentos numéricos, do suporte rigidamente exato. É investigação que interage e, interagindo, altera-se. (GARNICA, 2001, p.42).

E para complementar as características do método que utilizamos, necessitamos também falar das características da Pesquisa em Didática da Matemática. Também conhecida como Epistemologia Experimental, a Didática da Matemática tem como sua ferramenta fundamental a análise a priori de uma situação didática, ou seja, análise das representações históricas, epistemológicas e das expectativas comportamentais (SPAGNOLO, 2005). Segundo esse autor, uma pesquisa nesse campo nos leva a coletar informações elementares, que geralmente revelam o comportamento de um sujeito em uma situação.

Desse modo, em se tratando de uma modalidade de Engenharia Didática, a Engenharia do PEP (BOSCH, 2010), se configurou, no nosso estudo, como um viés da Engenharia Didática Clássica (ARTIGUE, 1988), o que nos levou a organizá-la nas seguintes etapas:

– Análises prévias;

– Esboço de Análise a priori. Nesse ponto, temos talvez um paradoxo, visto que, com o PEP, não temos o objetivo de controlar o processo de experimentação. Daí o caráter de PEP adaptado;

– Experimentação da sequência. Nesse caso, ocorre com o PEP dispositivo didático, com a devolução para os estudantes da Q_0 enquanto tarefa 1. Mas espera-se, institucionalmente, que haja insuficiência de técnicas para respondê-la por ser esta um tanto geral;

– Análise a posteriori e, mais uma vez, é possível que, em desacordo com a ED clássica, não tenhamos como confrontar o que era esperado institucionalmente com o que de fato aconteceu, visto que a família de questões Q é posta pelos estudantes participantes da pesquisa;

– Validação, que ocorre à medida que confrontamos as análises anteriores à experimentação e a posteriori.

A partir dessas etapas, ensejamos ter elementos para responder: quais condições nesse Percurso poderiam viabilizam a integração de noções didáticas no *logos* da Praxeologia Matemática nesse contexto, em como as condições para que, minimamente, ocorra uma finalização praxeológica?

Nos resultados, próximo capítulo, apresentaremos um mapeamento das questões que surgiram a partir da Q_0, apontando se foram elaboradas pelos estudantes ou pelo pesquisador, na mediação didática exercida no Percurso.

Tal mediação didática ocorre de modo a estimular os dois gestos de estudo esperados no processo de desenvolvimento do PEP, a saber, o das perguntas e respostas, que está no coração do PEP, e o das mídias e meios, que nos permitirá inferir a respeito do papel de recursos digitais em atividades matemáticas investigativas – aquela em que o estudante atua como pesquisador em Matemática (CHEVALLARD, 2007).

Em nosso planejamento, consideramos que o gesto didático de perguntas e respostas está adormecido atualmente nas práticas de grande parte dos membros do nível sociedade na escala de níveis de co-determinação didática, mas, pensando no sujeito atuando no papel do matemático, estaria na disciplina, o que na prática tem pequena ocorrência, visto que a Matemática como disciplina, numa instituição de ensino, é espaço para reprodução muito mais que para questionamentos que resultariam numa aprendizagem genuína.

Diante do exposto, talvez seja um caminho, tal gesto de estudo se situar no nível 2 da referida escala, no domínio matemático. A partir de um estudo com viés epistemológico-histórico, uma vez identificados obstáculos epistemológicos e tendo definidos seus sintomas (indícios da existência de um obstáculo, tais como a evitação de tocar em determinados temas não esclarecidos em algumas práticas institucionais), é nesse nível de co-determinação que podemos atuar com a inserção de situações de vivências de pontos de parada – obstáculos que podem produzir, nas praxeologias matemáticas para participantes da pesquisa, uma postura de questionamento do mundo, em termos dos conhecimentos matemáticos estabelecidos.

Quanto ao gesto de estudo, das mídias e dos meios (CHEVALLARD, 2004), visualizamos sua presença no nível sociedade também, visto que, ainda não sendo prática habitual, no estudo dos saberes matemáticos, o ato de confrontar informações em diferentes mídias e meios, ambientes, espaços de temas gerais, tornou-se algo corriqueiro, quando o tema desperta interesse do sujeito. No entanto, vemos alguns equívocos que são de ordem moral, no que se refere ao que se faz e a fonte de confrontação de informações. De todo modo, essa é uma postura didática que precisamos levar para as práticas escolares/acadêmicas.

Esses dois gestos de estudo serão identificados por meio de um filtro instrumental com questões que apontam detalhes sobre os mesmos, a serem identificados nas práticas dos estudantes. Esses dois gestos são tomados nessa pesquisa como noções didáticas que podem ser integradas ao *logos* da Praxeologia Matemática.

Cada Q da família de questões que derivam de Q_0 dão indício de um gesto didático. Nosso desafio é identificar como o PEP permite uma reconstrução da Praxeologia Matemática, que é específica: gestos de estudo integrados no discurso que justifica o saber-fazer de tal praxeologia. Para isso, é necessário abrirmos as praxeologias prescritas e realizadas, sendo a primeira uma interpretação nossa a partir do conhecimento que os participantes deveriam ter para respondê-la, e a última, colhida da tarefa construída (Q entendida como tarefa) e das técnicas e discurso racional para justificá-las, apresentadas pelos estudantes.

Isso, na estrutura da ED implementada, nos possibilita confrontar as modificações nas praxeologias didáticas e matemáticas dos participantes quando estes vivenciam o PEP dispositivo e, com isso, sua atividade matemática se aproxima daquela do matemático. Mas, ao dizer isso, estaríamos supondo que o *logos* da Praxeologia Matemática do matemático tem ao menos o primeiro gesto integrado?

Já há, na literatura sobre o PEP, enquanto dispositivo didático, indicações de que os gestos de estudo são indícios de alterações nas praxeologias matemáticas. No entanto, não existem referências diretas de que essas alterações se dão por conta da integração desses gestos no discurso tecnológico-teórico. Bem verdade que se trata de algo, aparentemente, inatingível de certo modo: integrar o que não é matemático na estrutura de algo estritamente matemático.

No que tange aos dados da experimentação, tomamos as Praxeologias Matemáticas construídas no desenvolvimento do PEP. As análises ocorrem mediante categorização das praxeologias dos participantes desde a tarefa proposta na forma de questões da família Q, olhando para os aspectos matemáticos e didáticos (status da parábola, domínio matemático, e gestos de estudo e outras noções didáticas mobilizados) e outra que se inspira na análise de conteúdo (BARDIN, 2002) das questões propostas por esses participantes, e que são a mola propulsora do desenvolvimento do PEP.

Cabe salientar que não houve de nossa parte intervenção na elaboração das questões derivadas de Q_0, de modo que isso possibilita uma maior evidência das ideias dos participantes sobre o saber matemático e extra matemático e os caminhos que deveriam ser seguidos tanto as perguntas quanto as respostas produzidas. No entanto, tentamos não nos limitar às evidências, mas compreender os significados das ideias presentes nos enunciados das questões propostas (Q_1, Q_2, ..., Q_n) e suas relações com as respostas no contexto do sistema de inter-relações GAG.

Para abordar os dados nesse método, utilizamos a categorização que, segundo Bardin (1979), constitui uma operação de classificação de elementos de um conjunto por diferenciação e reagrupamento com critérios definidos previamente. Tais categorias, são postas em nossa pesquisa como unidades temáticas de referência (U_R), e os significados que aparecem nas questões elaboradas pelos grupos participantes, chamamos de unidades de significado, são detalhadas no próximo capítulo.

Ademais, utilizamos, quanto à Praxeologia Matemática propriamente dita, outro tipo de análise, essa, inspirada na análise praxeológica. Desse modo, apontamos o que seria uma questão/tarefa padrão, as técnicas para solução, destacando os ostensivos utilizados, os ingredientes das técnicas e o discurso tecnológico-teórico que integram tais questões de modo a podermos identificar uma Organização Matemática que, em complexidade crescente, vá da pontual à local.

Capítulo 3

Experimentação de um PEP no contexto universitário: Praxeologias Matemáticas no estudo da função quadrática a partir do duplo status da parábola

Por se tratar de um Percurso de Estudo e Pesquisa, mesmo que adaptado (MATOS, 2017), e por terem conhecimento do nome dado ao dispositivo didático, as praxeologias construídas em torno de uma questão geratriz do percurso mostraram-se suscetíveis à valorização dos limites da resolução empírica do MPA, o que poderia implicar em condições não alcançadas no que tange ao raciocínio hipotético-dedutivo.

Longe de incorrer, pela sua experimentação, em uma “descontinuidade de performances matemáticas” (LAVE, 1988, p. 63), o PEP, fomenta momentos de variação em gestos didáticos, que implicam, por sua vez, em vivências de momentos de formulação simbólica, validação, avaliação e reformulação de modelos matemáticos para solucionar as questões que dão início e prosseguimento ao processo de aprendizagem por investigação.

Desse modo, neste capítulo, apresentamos os resultados da experimentação de um PEP nas atividades do componente curricular CET0064 – Ensino de Matemática: Funções, na Universidade Federal do Oeste da Bahia.

Tratamos, desse modo, de uma descrição analítica do processo de (re)construção de Praxeologias Matemáticas, embasados num modelo de aprendizagem por investigação matemática, e da identificação no conteúdo das perguntas e respostas elaboradas pelos grupos participantes, de indícios dos gestos de estudo integrados ou não no *logos* da Praxeologia Matemática.

Essas etapas da experimentação são aqui melhores descritas por seções, com descrição de perguntas, tarefas, técnicas e discurso tecnológico-teórico, acompanhados de quadros que associam as categorias de significados presentes às questões.

3.1 Análise prévias

No primeiro estágio da experimentação, o estudo foi desenvolvido com dois estudantes do componente curricular Ensino de Matemática: Funções, tendo em vista que sua ementa previa a discussão de aspectos epistemológicos e didáticos das funções e seu ensino. Ao trabalharmos o saber funções quadráticas, apresentamos algumas questões consideradas ponto de partida e validação do embrião do PEP que seria experimentado no período seguinte. Ainda não chamamos de Q_0 essa questão, mesmo que ela tivesse um poder de integrar e instigar um processo investigativo.

Classificaremos, então, essas questões como prévias da família de questões Q (Q_i, Q_{ii}, etc.). Assim, constitui-se uma primeira questão norteadora (Qi) da nossa investigação, prévia do PEP em discussão, cujo enunciado foi: *o que nos garante que o gráfico de toda função escrita pela equação $f(x)= ax^2 + bx + c$ é uma parábola?* Trata-se de uma questão de cunho didático-matemático, uma forma de estimular explicações sobre o processo transpositivo nas instituições onde vive o referido saber.

A questão Q_i, de caráter argumentativo, visou inserir o estudante no universo da atividade matemática (do matemático), com questionamento da natureza de um conhecimento já institucionalizado. No que tange aos níveis de co-determinação didática – CD-D, essa questão está alocada no nível do domínio matemático.

As questões que deram início oficialmente ao PEP (não constituiu um pré-teste do conhecimento matemático já adquirido pelos estudantes), bem como as demais, foram planejadas levando-se em consideração:

> – A parábola como conjunto de pontos do plano que verificam certa relação com uma diretriz e um foco;
> – A parábola como conjunto de pontos do plano que determinam uma equação;
> – A parábola como um gráfico correspondente a uma equação quadrática, que considera o lugar geométrico como conjunto de pontos que cumprem uma condição ou regra específica e que unidos entre si, gera a curva que representa a parábola, porque a partir da relação entre distâncias é possível achar de forma analítica a equação canônica.” (BERMUDÉZ; MESA, 2018, p. 69) [tradução nossa].

É preciso conhecer esses aspectos associados à parábola para construir tarefas que possam mobilizar conhecimentos a respeito das propriedades gráficas da função quadrática, se o objetivo for associar a noção da função à forma gráfica por meio de elementos de sua epistemologia, como era esperado nessa investigação.

Em síntese, do ponto de vista algébrico, estudamos esse objeto como uma função quadrática e, do ponto de vista da Geometria Analítica, como uma equação canônica. Desse modo, ao trazermos para nossa proposta de implementação de um PEP (dispositivo didático), e com seu viés de método de investigação em didática, pretendemos amalgamar técnicas que estejam amparadas nos dois domínios matemáticos. Isso aproxima nosso trabalho do sistema GAG, em que se inter-relacionam os domínios geométrico, algébrico e gráfico cujos ostensivos materializam o *logos* da Praxeologia Matemática.

Apesar de parecer ser nossa intenção destacar o caráter de ambiguidade de um dos objetos ostensivos que representa a função quadrática, devido aos seus diferentes status em domínios distintos, não se trata, na verdade, de um objeto ambíguo. Uma certa ambiguidade pode estar na sua abordagem didática, nas escolhas que fazemos para ensinar esse saber num ou noutro domínio do sistema GAG. Por isso a importância de destacar o papel das tarefas nesse processo e nesse projeto de reconstrução de praxeologias, visto que é nesse aspecto que temos liberdade didática para atuar diretamente na reconstrução da atividade matemática em uma certa instituição.

Nossa tentativa aqui, foi de promover essas reconstruções praxeológicas pela proposição de tarefas de investigação, em Percursos de Estudo e Pesquisa de modo que a amalgamação de técnicas que pertencem a diferentes domínios contribua não em sua totalidade, mas em parte, para uma nova percepção da relação entre a noção da função com os ostensivos que os representam, mas especialmente no que concerne ao domínio gráfico que deve operar modificações na percepção da função, não numa relação estática, mas dinâmica e viva.

Acreditamos que a dialética das mídias e meios é uma aliada na compreensão da proposta e no desenvolvimento do PEP implementado. Desse modo, o que compôs o ambiente que integrou tal gesto de estudo foi a consulta à internet, livros, como forma de confrontar uma dada fonte bibliográfica, o uso do Geogebra e a utilização de instrumentos comuns ao ensino da geometria para construção dos gráficos e/ou das cônicas em estudo, além do próprio conhecimento construído pelos participantes ao longo de seu processo formativo.

Da mesma forma que matemáticos, ao se depararem com algo ainda não bem definido debruçaram-se a estudar tal objeto, nossa proposta nesse PEP foi de trazer situações que simulassem esse momento hoje conhecido como constituinte do conhecimento funções quadráticas e do objeto parábola. Desse modo, justificamos nossa escolha metodológico-didática, em trabalharmos com tarefas que abordam problemas de lugar geométrico, da mecânica clássica e otimização, complementados com questões de reflexões sobre a natureza do conhecimento em questão.

Apresentamos acima uma Q_i, afirmando-a como uma questão prévia e, agora, apresentamos Q_0, questão diretriz do PEP em nossa investigação. Como se trata de um trabalho com futuros professores, Q_0 é ampla, de modo que não se podem ter respostas para ela sem buscar vias dialéticas de perguntas e respostas e das mídias e dos meios, ao menos, questões derivadas que possam ensejar o conhecimento matemático que esperávamos mobilizar.

Q_i foi respondida por um dos estudantes da seguinte maneira:

Tarefa 1 (Q_i): Porque a parábola é a representação gráfica de toda função quadrática?

Técnica apresentada pelo estudante E1 a T1:

Vamos considerar somente o termo de maior grau no caso $\pm a\ x^2$ *com a diferente de zero, pois esse é o principal termo que define uma função quadrática que é o expoente do valor da variável x, ou seja, o dois. Lembrando que só será uma função quadrática se esse expoente for dois, esse também é o termo que define uma parábola. Como sabemos uma função, podemos definir de uma maneira geral como uma relação de modo que cada elemento do domínio relacione com apenas um elemento do contradomínio (imagem) formando, assim, um par ordenado (x, y) no plano cartesiano, e esse par ordenado define um ponto. Por outro lado, sabemos que o domínio da função quadrática é todos os reais, ou seja, todos os números, sejam eles positivos ou negativos, incluindo o zero. Tomaremos alguns desses números como exemplos. Veja as tabelas abaixo:*

Figura 10 – Tabela integrante de praxeologia de um estudante

Tabela A, $y=x^2$ para $x \geq 0$ e a=1 temos:

x	x^2	Y
0	0^2	0
1	1^2	1
1,5	$1,5^2$	2
2	2^2	4
3	3^2	9

Fonte: Dados da pesquisa (2019)

Figura 11 – Tabela integrante de praxeologia de um estudante, parte 2

Tabela B, $y=x^2$ para $x\leq 0$ e $a=1$ temos:

X	x^2	Y
0	0^2	*0*
-1	$(-1)^2$	*1*
-1,5	$(-1{,}5)^2$	*2*
-2	$(-2)^2$	*4*
-3	$(-3)^2$	*9*

Fonte: Dados da pesquisa (2019)

Fazendo uma comparação entre a tabela A e a tabela B, note que, ao atribuirmos valores simétricos para x, os valores para y não mudam, ex: se x=1 ou -1 o valor de y em ambos os casos será 1. Isso se dá pelo fato do expoente da variável x ser igual a 2, pois para qualquer x pertencente aos reais, uma vez elevado ao quadrado, o seu resultado será sempre positivo.

Quando representamos esses valores no plano cartesiano, note que obtemos um conjunto de pontos formado pelo par ordenado (x, y) que vem do mais infinito em relação ao eixo do y positivo e o eixo x negativo passando pelo ponto cujas coordenadas (0,0) e novamente indo até o mais infinito em relação ao eixo y, mas, dessa vez, o eixo x também tem sentido positivo. E ao unirmos todos esses pontos, obtemos uma parábola com eixo de simetria coincidindo com o eixo y

É importante ressaltar que, nesse caso foi observado o caso onde o coeficiente a da variável x de maior grau é igual a 1. Se fosse -1, teríamos também uma parábola, mas, dessa vez, com concavidade para baixo, do mesmo modo que seu eixo de simetria também coincidiria com o eixo y.

Agora a pergunta: e se o coeficiente da variável x fosse zero? Nesse caso, não teríamos uma função quadrática, pois estaríamos cancelando o termo da variável, e ficaríamos indo de encontro com a definição de função quadrática onde o coeficiente da variável x^2 tem que ser diferente de zero (Argumentos do estudante).

É possível notar que a argumentação presente no *logos* da praxeologia acima apresentada concatena-se com um dos gestos de estudo (dialética) das mídias e meios, que acreditamos ser uma noção didática umbilicalmente vinculada à Praxeologia Matemática, mas que, às vezes adormecida, necessita de um meio para que ocorra sua integração às práticas institucionais.

3.1.1 Primeiros passos para desenvolvimento do PEP

A questão inicial do pretenso PEP, que tentamos empreender, foi desencadeadora da parte experimental dessa investigação, visto que nossa hipótese é a de que a referida reconstrução de praxeologias passa por uma mudança na organização didática, o que, por sua vez, implica na alteração das organizações matemáticas do saber em jogo. No entanto, nossa tese avança no sentido de propor que a alteração ocorre via integração de noções didáticas na Praxeologia Matemática, não somente nas praxeologias didáticas. Desse modo, tendo em vista tudo que já foi exposto anteriormente, enunciamos a questão geratriz do PEP no âmbito de nossas intenções didáticas:

Qi) Como reconstruir praxeologias na formação do professor de Matemática no Brasil no que tange ao estudo de situações que relacionem o objeto matemático função quadrática e seus ostensivos figurais?

Essa questão, na estrutura discutida por Barquero, Bosch & Romo (2015), corresponde ao ponto de partida do PEP, que é uma pergunta aberta vinda da própria profissão docente ou de pesquisa sobre a prática docente, relacionada a um certo saber a ser ensinado, nesse caso, a função quadrática.

A incompletude da atividade matemática institucional, que reflete no fato de a relação entre os futuros professores e o saber em jogo ser frágil, tem como possível leitura a rapidez com que os fatos acontecem, ou com que os saberes são estudados no espaço institucional – aula de Matemática, não permitir a vivência de alguns gestos de estudo que possibilitem esmiuçar o saber estudado.

Há uma tensão entre o tempo didático e o tempo cronológico em que os saberes são ensinados e estudados que reflete a necessidade de reconstrução de Praxeologias Didáticas e mudança de foco concernente à compreensão de conteúdo. Passa ao menos pela discussão de conteúdos estruturantes e, principalmente, pelo tipo de tarefa que será proposta aos estudantes. Tocamos, desse modo, numa função didática denominada cronogênese, a qual pode ser analisada e alterada pela noção do PEP.

O esboço de PEP adaptado, teve como questão derivada Q_{ii}, enunciada a seguir:

Qii: Qual o lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano, cujas distâncias a um ponto E pertencente a essa curva e a uma reta dada guardem entre si uma relação constante?

Essa questão insere-se na segunda etapa de desenvolvimento do PEP na formação docente teorizada por Barquero, Bosch, Romo (2015), na qual o PEP é apresentado aos futuros professores de forma similar à que se poderia levar à sala de aula. No entanto, a questão Q_0 apresentada adiante será a diretriz do percurso desenvolvido por futuros professores na condição de alunos.

Outras verificações e questões podem surgir em torno do estudo da parábola, tais como, que este objeto é um corte de cone circular reto por um plano perpendicular a uma diretriz do cone, o que fora atribuído a Menecmo (REY, 1962, p.95). Isso poderia ocorrer visto que, se pretendíamos a implementação de um PEP, não teríamos, de acordo com a epistemologia desse dispositivo, condições de controlar ou não o surgimento desse aspecto ou o caminho a ser seguido pelo estudante.

No entanto, o foco não era a origem das cônicas, mas a relação de uma em específico com a função quadrática. É pertinente uma mediação didática de modo que se faça presente tal vivência em situações em que as Organizações Matemáticas estejam pautadas no que Apolônio (séc. III a. C.) afirmou: que a parábola tem a propriedade característica de, para todo ponto tomado sobre a curva, o quadrado construído sobre sua ordenada y é exatamente igual ao retângulo construído sobre sua abscissa x e o latus rectum – LR (O LR de uma cônica é definido como sendo uma corda focal, um segmento de reta que passa por um dos focos da cônica de extremidade pertencente à mesma, cujo comprimento é mínimo (REY, 1962) . No caso da parábola, o seu comprimento equivale a quatro vezes a distância do foco até o vértice).

Apesar das contribuições da obra de Apolônio, optamos pelo recorte das contribuições de Descarte e Fermat, século XVI, por sua importância na constituição de um aporte para relacionar equações e curvas com equações mediante transformações algébricas e geométricas (BERMÚDEZ & MESA, 2018), caracterizando um fenômeno, o de atribuir sentido analítico ao trabalho geométrico, levando isso para o desenvolvimento do PEP.

Se o estudo da parábola historicamente está associado às funções quadráticas, parece natural seguir, de forma experimental, esse caminho em nossas Organizações Didáticas. Como esse caminho integraria as Praxeologias Matemáticas? Seria necessário mesmo noções didáticas norteando o bloco do saber dessas praxeologias?

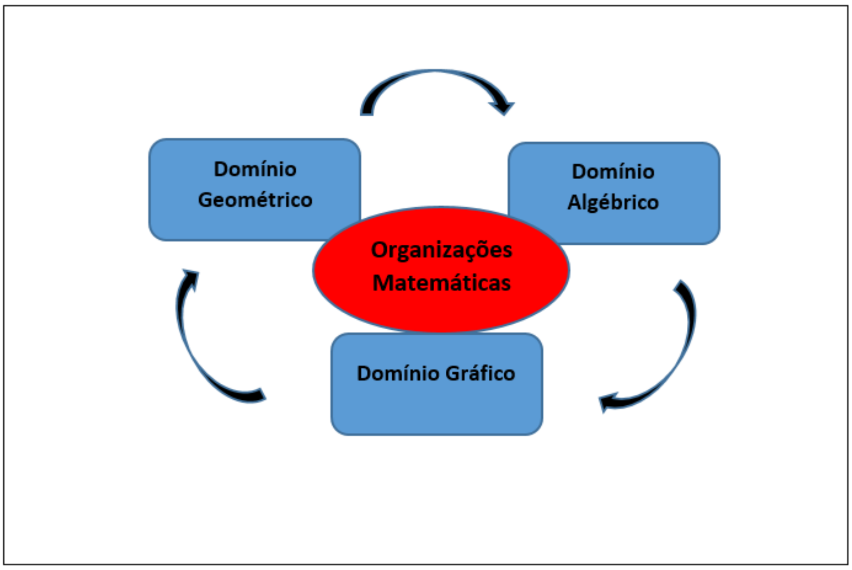
E dessas reflexões, pensamos a parábola em três diferentes contextos com os quais atribuímos significados para a proposta de inter-relações no espaço GAG:

– A parábola como conjunto de pontos no plano que verificam certa relação referente a uma diretriz e um foco (domínio Geométrico). Nesse ponto de vista da Geometria Analítica, a parábola também pode ser compreendida como uma equação canônica;

– A parábola como conjunto de pontos do plano que determina uma equação (domínio Algébrico). Desse ponto de vista, a parábola é uma função quadrática;

– A parábola como gráfico correspondente a uma equação quadrática (domínio Gráfico).

Figura 12 – Espaço GAG – estudo da função quadrática a partir da parábola



Fonte: Autor (2019).

Quando nos referimos ao espaço GAG, estamos falando de um micromundo de confrontação de mídias e meios, de perguntas e respostas, em que o sujeito acessa e representa por meio de sua Praxeologia Matemática um recorte do objeto matemático, especialmente quando se trata dos domínios geométrico, algébrico e gráfico.

O design desse micromundo de confrontação de elementos do meio (gesto de estudo de mídias e meios) é baseado no reconhecimento dos aspectos, às vezes limitados, dos ostensivos utilizados no desenvolvimento do PEP à medida que se tenta apresentar respostas à questão geratriz. O próprio desenvolvimento do PEP dá feedback aos participantes sobre o caminho a ser seguido, bem como sobre a validade das obras apresentadas.

A interação entre o sujeito e o PEP (dispositivo didático) não é nosso objeto imediato, mas as praxeologias construídas nessa interação são, ou seja, importam à repercussão dessa interação sobre as praxeologias mobilizadas pelo sistema GAG.

Cabe salientar que, em nosso entendimento, não é qualquer Organização Matemática que dará conta dessas inter-relações GAG, mas aquelas construídas para o saber parábola, em seus diferentes signos, que se relacionem ao objeto função quadrática.

Segundo Bermúdez & Mesa (2018), do ponto de vista de uma equação canônica, a parábola, objeto que supomos vir antes da noção de função quadrática, conta com alguns elementos para sua descrição que independem de referência ou de um sistema de coordenadas cartesianas, mas que podem, a depender do tipo de tarefa, ser a este relacionada. Constituem, assim, o conjunto de elementos intrínsecos da parábola, ou seja, que integram sua estrutura matemática, o vértice, o eixo focal, o foco, a diretriz, a distância focal, a corda, a corda focal e o latus rectum. Desse modo, a sequência que compõe nosso conjunto de AER (atividades de estudo e pesquisa) visa resgatar a percepção gráfica interligada ao conceito da função quadrática por meio das propriedades do ente geométrico no âmbito da Geometria Analítica.

É igualmente necessária a discussão dos aspectos didáticos da parábola, que é um elemento mediador de três domínios matemáticos e potencializador de tarefas mais complexas que possibilitam a reconstrução praxeológica dos sujeitos numa determinada instituição, resgatando, assim, o sentido analítico próprio do estudo das funções.

Como veremos nos relatos da experimentação da questão Q_0 e suas derivadas, conforme os participantes se dedicam a solucionar e propor novas questões, eles discutem intuitivamente desenhos de ensino do saber em jogo (função quadrática e status da parábola), compondo estágio significativo da formação docente empreendida e a infraestrutura didática e matemática, o que pode viabilizar a aprendizagem dos estudantes na educação básica e sua própria bagagem praxeológica.

Partimos agora ao relatório da etapa na qual apresentamos as esperas institucionais e experimentação da engenharia do PEP (BOSCH, 2010) como modo de organizar os fatos didáticos para, de forma concomitante, interpretarmos os fenômenos didáticos relativos a tais fatos.

3.2 Esboço de análise a priori e experimentação do Percurso de Estudo e Pesquisa adaptado

Retomando a questão Q_i enunciada acima, espera-se, institucionalmente, que os estudantes mobilizados pela dialética de confrontação das mídias e meios busquem informações acerca do objeto matemático que surge da noção de lugar geométrico proposto nessa tarefa.

Vamos abrir, então, a praxeologia para a tarefa T_1, e aproveitamos para esboçar um ensaio de análise praxeológica, que contribuirá para a análise dos momentos de estudo e posturas que deem indícios da mobilização das duas dialéticas tomadas como referência para essa investigação:

T1 – (Q_{iii}): Qual o lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano, cujas distâncias a um ponto E pertencente a essa curva e a uma reta dada guardem entre si uma relação constante?

Técnica – τ_1: Instrumentalizados, no que tange ao uso do Geogebra, e imbuídos da postura de confrontar diferentes mídias e meios, os estudantes buscarão, dentre as cônicas conhecidas (parábola, hipérbole e elipse), a que responde à referida questão.

Uma vez identificada a parábola, um caminho será: seguir um roteiro de construção dessa cônica, que considere a definição de ponto focal e reta diretriz, partindo da construção dessa reta e determinando o ponto que descreve o lugar geométrico, a partir do traçado de mediatriz perpendicular, a partir de um ponto sobre a reta diretriz e fora dela, conforme roteiro a seguir:

No Geogebra:

I) Marcar dois pontos A e B no plano;

II) Traçar uma reta que passe pelos pontos A e B;

III) Marcar um ponto C sobre a reta AB;

IV) Marcar um ponto D fora da reta AB;

V) Traçar a mediatriz dos pontos C e D;

VI) Traçar uma perpendicular à reta AB por C;

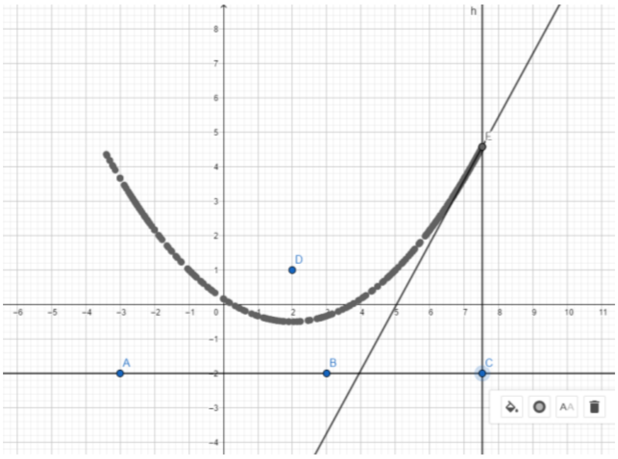
VII) Marcar a intersecção da mediatriz com a perpendicular, ponto E;

VIII) Habilitar rastro do ponto E;

IX) Movimentar o ponto C, sobre a reta AB.

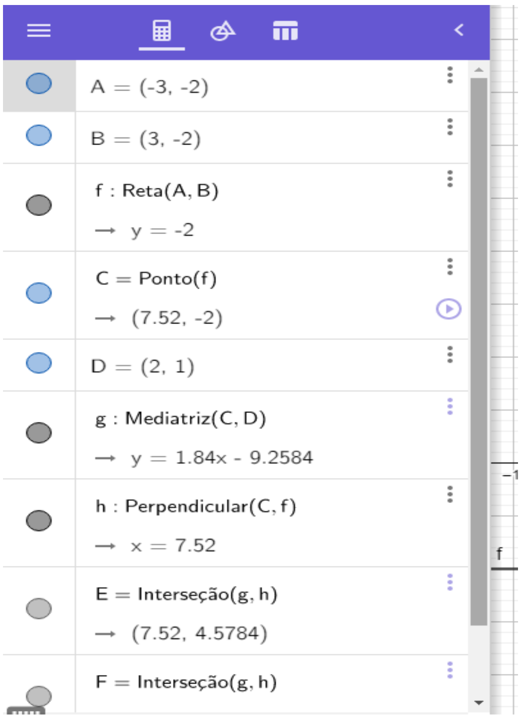
Essas ações indicadas na construção da parábola são subtarefas que compõem técnicas consideradas, no âmbito da TAD, ingredientes da técnica.

Figura 13 – Construção do lugar geométrico (parábola) no Geogebra



Fonte: Autor (2019).

Figura 14 – Protocolo de construção do lugar geométrico (parábola) no Geogebra



Fonte: Autor (2019)

Discurso tecnológico-teórico [ϴ, Θ]

A tarefa T1 não está alicerçada apenas na técnica apresentada acima, que resultou na figura 13. Esse é um caminho que utiliza propriedades geométricas básicas. Mas o Geogebra permite a construção do lugar geométrico de forma que não se perceba a relação entre entes geométricos fundamentais para a construção passo a passo. Para além dessa observação, imbuídos da dialética de perguntas e respostas, os estudantes podem realizar alguns questionamentos (Q_{Ei} – questionamento dos estudantes), tais como:

Q_{E1}: Que relação é estabelecida nessa cônica construída de modo que possamos dizer que se trata da representação de uma função quadrática?

O questionamento acima dá indícios de que houve uma aceitação do Paradigma de Investigação e Questionamento do Mundo, que se opõe ao monumentalismo do saber. Ao tentar responder essa questão, há uma escolha de tocar no saber de modo que, na prática, a atividade matemática do estudante não só seja análoga à do matemático, mas também à do biólogo, pois, implicitamente, surge o desejo de dissecar o objeto.

$Q_{E1:}$ Pode desencadear outras, como o que ocorre ao se deslocar o ponto E, que descreve o lugar geométrico? O lugar geométrico será alterado? A diretriz será deslocada? A condição de equidistância entre o ponto E e foco e a reta diretriz será mantida se desloco apenas o foco? Essa construção é ou não uma função? O que garante que seja uma função? Se a parábola é construída a partir de uma secção de um cone circular, poderá representar uma função?

Essas inquietações descritas acima, são tomadas por nós, nessa investigação, como postura típica da dialética de perguntas e respostas, onde o que move o Percurso de estudo não são as respostas, mas as perguntas.

As questões apresentadas acima corroboraram para propormos a seguinte questão geratriz do PEP, dispositivo experimentado de acordo com a segunda fase que explicitamos anteriormente, embasado no trabalho de Barquero, Bosch & Romo (2015):

Q_0: Existe um lugar em que qualquer objeto estaria protegido de modo a não ser atingido por um lançador ao efetuar disparos com uma velocidade supostamente constante e em diferentes ângulos?

Com Q_0, ensejamos a construção de um percurso com atividades integradas pelo mesmo discurso tecnológico-teórico. Ainda que não seja nosso objetivo controlar o desenvolvimento do PEP, o que não seria epistemologicamente compatível com esse dispositivo, a análise, a priori, nos permite antever alguns possíveis caminhos a serem seguidos pelos participantes da investigação frente à questão Q_0 também auxilia na nossa tarefa investigativa de condições de integração de noções didáticas no *logos* das Praxeologias Matemáticas.

O enunciado de Q_0 conduz os sujeitos da pesquisa a uma tarefa no contexto da Física (estudo dos movimentos), o que deve conduzir os trabalhos à busca de modelos prontos que possam representar o que se pede no enunciado. De forma imediata, por conta do contrato didático implicitamente construído, os participantes devem tentar responder à questão sem dar conta da insuficiência de dados para procedimentos algoritmizados. Não se pode dizer que a palavra “lugar” pode remeter a noção de lugar geométrico e, portanto, no contexto geométrico-algébrico, pode ser difícil pensar uma solução em que a parábola apareça como conjunto de pontos no plano que verificam certa relação referente a uma diretriz e um foco.

Pensar no ostensivo integrante do sistema de inter-relações GAG, sob mediação por meio de questionamentos do pesquisador, deve auxiliar na tarefa de chegar na parábola como lugar geométrico, e cônica, portanto compreendida como uma equação canônica. A mediação didática, inspirada nas duas dialéticas nas quais mantemos o foco, deve fomentar a validação e/ou refutação de modelos que exprimam o local seguro mencionado no enunciado de Q_0.

Não deve ser desafio pensar que, num componente que se debruça sobre o estudo das funções e seu ensino, almeje-se chegar a modelos funcionais. No entanto, chegar a um modelo que exprima o status da parábola na situação descrita no enunciado da questão Q_0 não é uma tarefa trivial. O recurso do ostensivo figural (gráfico), a parábola como gráfico, correspondente a uma equação quadrática e deve ser uma ferramenta importante para acesso ao ostensivo algébrico, a parábola como conjunto de pontos do plano que determinam uma equação.

A informação de *um lançador, ao efetuar disparos com uma velocidade supostamente constante e em diferentes ângulos,* por sua vez, complementa a ideia de testar modelos diferentes, mas, para isso, a dialética de mídias e meios deve ser acionada, o que implica em confrontar os tipos de lançamentos conhecidos em seus contatos com a Física, em especial a Mecânica clássica e o discurso tecnológico-teórico (*logos*) e ostensivos, que deem conta de exprimir esses movimentos.

Em relação aos aspectos didáticos, levantar perguntas e a procura de respostas nas mídias disponíveis, relativamente associadas às dialéticas de perguntas e respostas e mídias e meios, deve ser evocado pela mediação do pesquisador com indicações claras da necessidade de prosseguir no PEP pela proposição de questões e confrontação de diferentes informações para respostas, cumprindo-se, assim, duas etapas desse dispositivo como mostrado na figura 6 do capítulo anterior.

Nas seções de divulgação do trabalho da semana, os participantes, imbuídos dos gestos intrínsecos às dialéticas supracitadas, devem desconstruir e reconstruir as respostas apresentadas e integrá-las ao meio didático. Isso deve corroborar com a construção de uma resposta própria dos participantes. O meio didático, com elementos dos diferentes status da parábola nas inter-relações GAG, deve validar essas respostas (primeiro ostensivos figurais, depois escriturais, por meio da álgebra).

A resposta final, referente a Q_0, deve ser defendida e avaliada pelo grupo e vir na forma matemática por meio das inter-relações GAG, de onde se espera que um modelo funcional algébrico represente a parábola de segurança que delimitará o local de segurança existente, a depender do tipo de lançamento, sendo identificado que o lançamento oblíquo oferece mais elementos que permitem chegar à intenção didática planejada.

Ademais, uma possível Q_1 desse PEP, pode ser: qual o lugar geométrico dos pontos do plano XY que jamais serão atingidos por um lançador ao efetuarem disparos com uma velocidade constante V_o e diferentes ângulos de lançamento?

Ora, nossa intenção didática com tal questão não está apenas no aspecto extra matemático, mas na noção de construção de parábola enquanto lugar geométrico que assume, sob determinadas condições, o papel de representação gráfica de uma função quadrática.

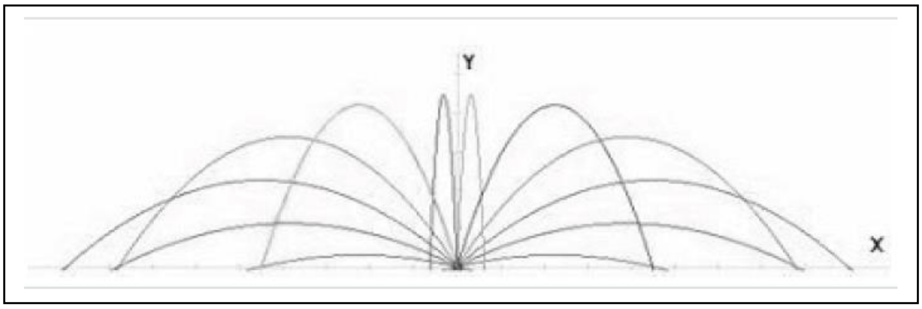
Reiniciando o ciclo do PEP, tomando a questão apresentada inicialmente nessa etapa da experimentação como questão geratriz do Percurso, não temos necessariamente como prever as condições de finalização praxeológica, visto que se propõe a não dar ao referido processo um caráter de intervenção controlada. Entretanto, espera-se que os participantes cheguem à ideia de parábola de segurança[16] a partir da Q_0.

Primeiro é preciso considerar um lançador de projéteis localizado na origem de um sistema de coordenadas cartesianas XY, efetuando disparos com velocidade inicial V_o constante, mas sob diferentes ângulos de disparo α com a horizontal, variando gradativamente

[16] A ideia para constituição da questão Q_0, partiu de material encontrado no link: http://aparaboladeseguranca.blogspot.com/2013/06/parabola-de-seguranca.html?m=1. O discurso tecnológico-teórico e os ostensivos gráficos e figurais utilizados para explicar a intenção didática a partir dessa questão são pautados no material explicitado nesse blog.

no intervalo 0° <α< 180°. Para cada ângulo α, a trajetória seguida pelo projétil é parabólica. Partindo da origem do sistema XY, atinge uma altura máxima e retorna ao solo horizontal.

Figura 15 – Lançamentos com velocidade constante do ponto (0,0).

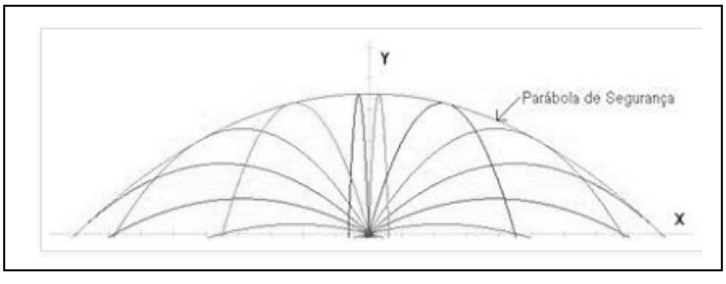


Fonte: http://aparaboladeseguranca.blogspot.com/2013/06/parabola-de-seguranca.html?m=1

Ao efetuar uma sequência de disparos sob ângulos α, que aumentam progressivamente e que pertencem ao intervalo 0° <α< 180°, obtemos uma família de trajetórias parabólicas, cujas velocidades de disparo V_o são comuns, cada uma descrita pela equação $= tg\alpha.x - \frac{g}{2.V^2.cos^2\alpha}.x^2$.

Essa família de parábolas, que têm a velocidade de disparo em comum, tangencia outra parábola que as envolve, única para cada valor de V_o, denominada parábola de segurança, como pode ser visto na figura 15 acima. Desse modo, falamos em lugar geométrico dos pontos do plano XY, que jamais serão atingidos pelo lançador ao efetuar disparos com uma velocidade V_o característica da parábola de segurança. E o conjunto de pontos externos a essa parábola formam a zona de segurança, objeto explícito na questão Q_0.

Figura 16 – Parábola de segurança



Fonte:http://aparaboladeseguranca.blogspot.com/2013/06/parabola-de-seguranca.html?m=1

Quanto às análises e aos aspectos do PEP enquanto ferramenta para investigação em Didática, optamos por uma análise dos dados inspiradas em dois modelos, como já foi mencionado. Uma inspiração vem da análise de conteúdo, e tomamos como dados parte da praxeologia construída, ou seja, as questões elaboradas pelos participantes. Complementa-se pela categorização apriorística das unidades de análise do conteúdo apresentado nas questões da família Q. A outra inspiração vem da análise praxeológica. Nesse sentido, utilizamos as questões transformadas em tarefas, bem como as técnicas produzidas e o discurso racional que as justificam.

3.3 Sessões de experimentação, análises e validação da engenharia do PEP

Descrevemos as seções de experimentação do PEP, ao mesmo tempo que realizamos o esboço de análise praxeológica e de conteúdo para os enunciados das questões da família Q e do discurso tecnológico-teórico que compõe as suas respostas.

3.3.1 Seção 1

Esta seção constituiu o primeiro encontro dos participantes com o PEP, ou seja, momento de encontro com uma organização matemática, na forma de pergunta geratriz do percurso (praxeologia pontual), que não detinha dados suficientes para explicitação de técnicas de resolução.

Houve tentativa de solucionar a questão, o que não foi possível, e logo se percebeu a insuficiência de dados para resolução. Nessa mesma seção, a mediação do pesquisador implicou em tentativas de reformulação da questão, o que, a princípio, foi entendido como ação de elaboração de tarefas matemáticas com dados explícitos e técnicas para resolver tais tarefas.

Isso configurou uma ação conjunta, um jogo didático, que só fazia sentido se os participantes estivessem no jogo e o pesquisador, afastado o suficiente (omissão didática) para não comunicar demais e impedir a ação dos grupos. O resultado é um início de alteração no *topos,* principalmente dos membros dos grupos participantes. Nesse jogo, foi tarefa básica para a figura y (aqui o pesquisador) recuperar as perguntas no sistema didático S (Y, X, $\wp$) $\Longrightarrow$ S(Y, X, Q). Y representa o professor ou quem tem intenção de ensinar; X, um conjunto de pessoas que vão aprender, $\wp$ uma obra; e Q, as questões que motivaram o jogo didático.

Materializam-se efeitos do contrato didático (BROUSSEAU, 2008), na experimentação desse PEP, de modo que, mesmo Q_0, não admitindo resposta, ao contrário necessitando de delineamento, apresentaram-se respostas de acordo com as categorias abaixo:

I. Evitação inicial do PEP (impossibilidade definitiva de responder à questão). Encontramos como respostas: *os dados são insuficientes para resolver a questão*.

II. Transição da evitação a aceitação do PEP (impossibilidade condicional de responder à questão). Encontramos respostas do tipo: *os dados são insuficientes para resolver a questão, mas devemos considerar as seguintes hipóteses a respeito do lançamento*. As hipóteses identificadas foram:

– hipótese 1: lançamento oblíquo;

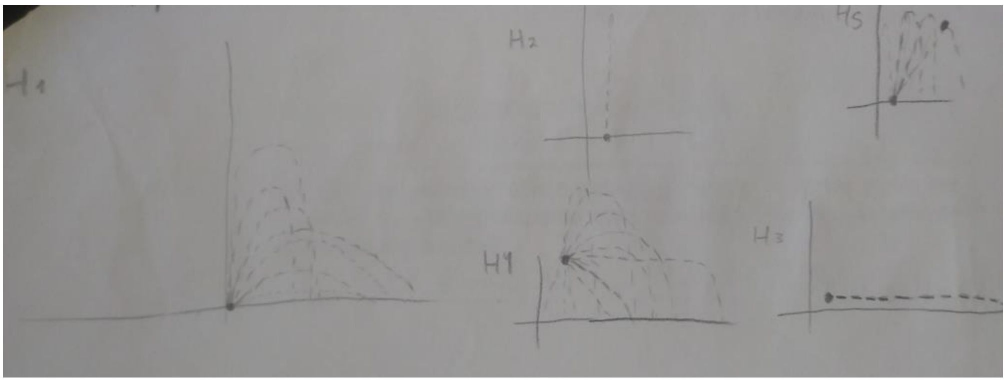
– hipótese 2: lançamento vertical desconsiderando atrito e gravidade;

– hipótese 3: lançamento horizontal;

– hipótese 4: lançamentos anteriores estando o lançador no “ar”;

– hipótese 5: um desdobramento da hipótese 2, lançamento vertical considerando atrito e gravidade.

Figura 17 – Ostensivos figurais utilizados na resposta a Q_0 do PEP



Fonte: Dados da experimentação do PEP (2019).

III. Uso da dialética de perguntas e respostas (possibilidade de responder à questão Q_0 com a proposição de outras questões). Foi possível encontrar: *Formule 5 ou mais questões que impedem a resolução de Q_0, a exemplo de:*

– Qual lugar que o objeto se encontra?

– Qual lugar o lançador se encontra?

– Angulação do lançamento do objeto?

– Quais atritos presentes no percurso do projétil?

– Qual velocidade média do projétil?

Essas categorias já dão indícios do caminho a ser percorrido pelos participantes, que estão organizados em grupos. No bloco do saber-fazer (técnico-prático), há claras indicações da presença das noções didáticas que adotamos. As repostas na forma de questão apontam para o uso da dialética de perguntas e respostas, por exemplo.

Da fase de pré-exploração do material, primeira do caminho inspirado na análise do conteúdo (BARDIN, 2002), podemos inferir que o percurso, ainda que limitado, se materializa, pela proposição de, ao menos, mais duas questões como desdobramentos de Q_0. Como a questão geratriz do PEP obteve respostas num status de questão, e essas são nosso objeto da primeira análise pretendida, observamos o conteúdo do que foi comunicado nestas questões.

Apontar a insuficiência de dados e propor questões indica, de modo mais ou menos implícito, que esta proposição é quem fomenta e caracteriza a atividade de investigação matemática neste momento ofertada aos participantes. Isso já indica de qualquer modo uma mudança na pedagogia dominante, visto que suscita uma reconstrução funcional da matemática como resposta a uma situação problemática, nesse caso a Q_0 proposta.

3.3.2 Seção 2

Essa seção foi marcada pela socialização das obras da primeira semana de trabalho. A dialética de mídias e meios deveria ser mobilizada e a construção do meio explicitada e, nesse, as primeiras perguntas, derivadas de Q_0 e suas respostas.

O ato de levantar outras questões é a primeira fase da infraestrutura do PEP que planejamos, porém, tais perguntas deveriam vir acompanhadas por respostas (etapa da procura por respostas, que revela a dialética de mídias e meios), as quais deveriam ser procuradas nas mídias disponíveis, tais como livros de Matemática e Física e sites na internet.

De antemão, a opção por enunciar questões e procurar respostas nas mídias disponíveis se opõe à pedagogia dominante, na medida que foge do modelo de enumerar os saberes matemáticos e extra matemáticos. Temos dois caminhos para pensar a integração da noção da dialética de mídias e meios: integração pelo tipo de tarefas e integração por técnicas (ARTAUD, 2019), discutidas junto aos dados.

A seguir, apresentamos as questões que emergiram dos trabalhos da semana por categorias, cujas unidades de análise terão relação com as interpretações relativas aos status da parábola. Os conteúdos manifestos (os ostensivos e não ostensivos que surgem nas perguntas e sua ligação com os status da parábola) são nosso primeiro objeto. Os latentes, nosso objetivo último, pois esses devem trazer elementos da integração de noções didáticas no *logos* das Praxeologias Matemáticas.

Desse modo, em consonância com o método explicitado no capítulo anterior e o tipo de análise ensejada, as categorias das ideias presentes nas perguntas são:

C_1. O problema posto em Q_0 se resolve no campo dos conhecimentos da física. Considera-se, nesse caso, hipóteses do tipo de lançamento e seu ângulo e velocidade;

C_2. O problema posto em Q_0 se resolve no campo dos conhecimentos matemáticos. Considera-se a ideia de lugar geométrico. A partir daí, pode-se pensar em contribuições da Mecânica Clássica;

C_3.O problema posto em Q_0, se resolve com a amalgamação de técnicas e noções da Física e Matemática. Parte-se da ideia do tipo de lançamento, sem deixar de considerar simultaneamente a ideia de lugar geométrico.

Elas objetivam categorizar significados para a dialética que está no coração do PEP, os quais implementamos, mas, de forma incisiva, a dialética de mídias e meios e alguns elementos das variáveis didáticas.

A abrangência das ideias comunicadas na questão quanto à noção relativa ao tipo de lançamento e sua relação com os status da parábola, é nossa espera institucional e pode ser alocada nas categorias C_2 e C_3. Isso nos remete a pensar também na abrangência das técnicas. Estas produzem uma OM institucionalizada que ressaltam na função da dialética e fazem parte do topos do estudante (ARTAUD, 2019).

Para um tipo de tarefa T, existe uma técnica que talvez não responda a todas as tarefas relacionadas a esse tema, ou seja, podemos identificar na resolução da Q_1 a tentativa de padronização de técnica para qualquer movimento e qualquer status da parábola que não responde à tarefa proposta. As três categorias têm íntima relação com o discurso tecnológico-teórico que torna inteligível uma técnica padrão para uma alteração de Q_0, que permita chegar à ideia de parábola de segurança.

Como uma das funções do discurso tecnológico-teórico é produzir técnicas, conhecê-lo amplia o repertório de construção de técnicas. Se conseguimos objetivar a integração de noções didáticas no referido discurso, temos especialmente uma reconstrução da praxeologia profissional docente.

A abrangência das ideias comunicadas quanto à mobilização das duas dialéticas em questão é também nosso ponto de interesse. As questões produzidas no desenvolvimento do PEP, ao mesmo tempo que são representantes do significado e representações dos sujeitos da pesquisa, quanto aos objetos do saber em jogo, são também indicadores do tipo de gesto didático que está sendo mobilizado. Cabe a nós inferir sobre como essas questões alteraram de alguma forma as Praxeologias Matemáticas quando mobilizadas.

A seguir apresentamos as questões Q_1, elaboradas e explicitadas nessa segunda seção de desenvolvimento do PEP:

Quadro 3 – Enunciados da Questão Q_1 organizados por categorias

Categoria	Grupo	Enunciado da questão Q_1
C_1	1	*Considere um lançador atirando em um ângulo de 15º com relação ao chão e o objeto lançado está a uma velocidade de 10m/s. Em qual distância um alvo estaria a salvo do disparo? Considere a gravidade igual a 10m/s.*
	2	*Um canhão dispara uma bala com velocidade inicial igual a 500 m/s (em módulo), a 45º com a horizontal. Desprezando o atrito e considerando g=10 m/s^2. Determine o alcance máximo horizontal da bala.*
	6	*Uma bala é lançada com a velocidade inicial de V_o =15m/s formando um ângulo de 45º com a horizontal. Qual o alcance máximo?*
C_2	4	*Delimite um lugar geométrico para o objeto.*
	3	*Qual o alcance do lançador? E qual o espaço do acontecimento?*

C_3	5	*Considere que o lançador forma um ângulo de 45º com a base. Há um lugar onde o objeto estaria protegido de modo a não ser atingido?*

Fonte: Autor (2019).

A questão Q_0 deve ser geradora de um grande número de questões, e a busca de respostas às questões derivadas dela deveriam conduzir a um grande número de saberes de outras disciplinas (PEP no contexto codisciplinar). Pelo enunciado proposto, as questões derivadas, conforme pode ser visto acima, são conduzidas a conhecimentos do campo da Física. E ainda que a tentativa de solucionar Q_0, descrita na seção1, tenha caracterizado como evitação ao percurso, na proposição da Q_1, é comum a todos os grupos pensar em uma das hipóteses descritas na segunda categoria também exposta na seção anterior. Tais hipóteses estão configurando parte do meio didático, após a confrontação com diferentes mídias, especialmente via consulta pela internet.

Exceto para os grupos 3 e 4, a noção de alcance esteve associada à ideia do lançamento de um projétil, algo mencionado em Q_0. E como foram considerados ângulos de lançamento no intervalo $0° < \theta < 90°$ subentende-se que houve uma compreensão de que o lançamento adequado para chegar a resposta final poderia ser oblíquo.

No caso dos grupos 3 e 4, as respostas a Q_0 vieram na forma de outros questionamentos. Esse gesto de estudo de levantar perguntas e apresentar respostas continuou na proposição de Q_1. No bloco técnico-prático da praxeologia do grupo três, inferimos que a reconstrução da praxeologia está ancorada na reconstrução das perguntas que apresentam mais informações do meio no qual se assentam as possíveis respostas para a questão geratriz, e indica o primeiro caminho da integração da dialética de mídias e meios pela integração de tipos de tarefas.

Enquanto nas praxeologias dos demais grupos, a resposta a Q_1 parece não ser uma resposta própria, os grupos 3 e 4, aparentemente, retardam o processo de apresentação de uma resposta, o que dá indícios de uma busca de resposta própria.

Quanto ao grupo 4, temos, na questão Q_1, proposta uma aproximação da intenção didática velada nesse PEP. A compreensão de que é necessário compreender aspectos geométricos da situação. Na praxeologia desse grupo, a questão (tomada como tarefa) faz menção a determinar o lugar geométrico que descreve a trajetória do objeto lançado por um atirador. No entanto, o tipo de lançamento fica implícito.

Quanto ao sistema de inter-relações GAG, dentre as questões de todos os grupos, nenhuma delas aponta para parábola como conjunto de pontos no plano que verifica certa relação referente a uma diretriz e um foco (domínio Geométrico) ou uma equação canônica na Geometria Analítica; como conjunto de pontos do plano que determina uma equação (domínio algébrico) ou uma função quadrática; como gráfico correspondente a uma equação quadrática (domínio Gráfico).

A proposição dessas questões trabalha no campo intuitivo, no enfretamento à atomização da matemática ensinada (PARRA & OTERO, 2013). Compreenda-se atomização, nesse contexto, como sendo a fragmentação dos conhecimentos matemáticos, que se desconfigura quando partimos, por exemplo, de uma questão no contexto extra matemático. No entanto, nessas primeiras questões, as técnicas ainda estavam ancoradas, particularmente, em apenas umas das concepções apresentadas no parágrafo anterior.

Na etapa inspirada na análise praxeológica, apresentamos indícios de modificação nas Praxeologias Matemáticas dos participantes, especificamente no bloco do saber que, por consequência, deve promover reformulações nas Praxeologias Didáticas. Os participantes da pesquisa não são identificados, pois o foco são os aspectos gerais das praxeologias construídas na instituição de formação docente.

Abrindo as praxeologias da primeira reformulação dos grupos (Q_1), apresentamos as técnicas e os discursos tecnológico-teóricos (*logos*), bem como os ostensivos utilizados para alcançar o objeto ostensivo em jogo.

Pode-se extrair da Q_1 do grupo 1, a seguinte tarefa:

T_{1G1}: *Considerar um lançador atirando em um ângulo de 15º com relação ao chão e o objeto lançado a uma velocidade de 10m/s, e calcular a distância na qual um alvo estaria a salvo do disparo (Considere a gravidade igual a 10m/s).*

Técnica 1 do grupo 1 (τ_{1G1}):

Embasada na fórmula do alcance (uso de ostensivo escritural algébrico):

$$A = \frac{Vo^2.sen(2\alpha)}{g}$$

$$A = \frac{10^2.sen(2.15)}{10} = A = \frac{100.\frac{1}{2}}{10} = 5m$$

Uma subtarefa tomada como um ingrediente da técnica é calcular o alcance do projétil, componente horizontal.

Discurso tecnológico-teórico [ϴ, Θ]:

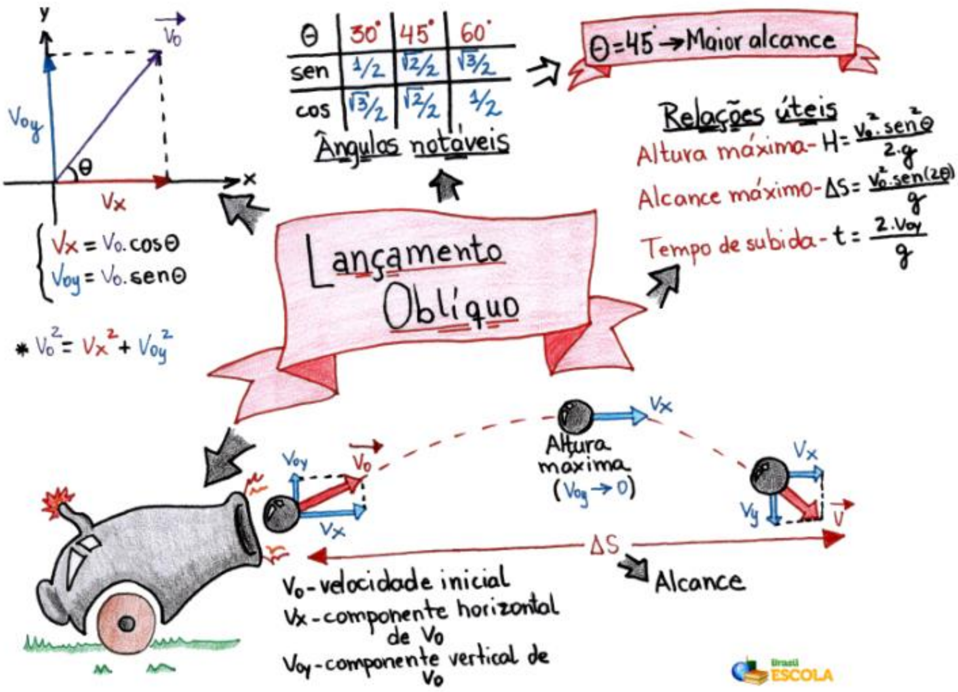
Tal discurso pauta-se num tipo de movimento estudado da Física, o movimento parabólico em campo gravitacional. Algo comum a todo movimento, a velocidade vetorial é a tangente à trajetória a todo instante, tendo o mesmo sentido do movimento. No ponto mais alto atingido pelo projétil, é horizontal (não nula).

Ao considerar o alcance, a praxeologia deveria levar em consideração o deslocamento horizontal do projétil, mas também o vertical, ou seja, relacionado à altura que esse projétil atinge ao mesmo tempo que também se desloca horizontalmente.

O lançamento oblíquo (hipótese 1) ocorre quando um objeto inicia seu movimento, formando um determinado ângulo com a horizontal. Nesse caso, o objeto executa dois movimentos simultâneos, um vertical (subida e descida) e um horizontal. Desse modo, a análise desse lançamento deve considerar o movimento executado na vertical (eixo y) e o movimento na horizontal (eixo x). No caso do movimento vertical, a busca é pela altura máxima, enquanto no movimento horizontal, pelo alcance horizontal do objeto.

Visto que não se pode desprezar a atuação da gravidade, o movimento vertical será uniformemente variado e o movimento no eixo x, retilíneo e uniforme. Nesse momento de confrontação de mídias e construção de meios, a praxeologia analisada aponta para a compreensão restrita a um dos movimentos que compõe a situação inicialmente apresentada em Q_0 e complementada em Q_1. O alcance direciona o olhar sobre o movimento no eixo x.

Figura 18 – Mapa mental do lançamento oblíquo



Fonte:https://brasilescola.uol.com.br/fisica/lancamento-oblíquo.htm

Quanto ao grupo 2, pode-se extrair da Q_1 a tarefa:

T_{1G2}: *Considerar um canhão que dispara uma bala com velocidade inicial igual a 500 m/s (em módulo), a 45º com a horizontal. Desprezando o atrito e considerando g=10 m/s^2, determinar o alcance máximo horizontal da bala.*

Técnica 1 do grupo 2 (τ_{1G2}):

Faz uso de ostensivo escritural algébrico, considera que a medida em que o projétil sobe, se desloca horizontalmente, por isso, apresenta a função horária do espaço na horizontal e equação para determinar a sua altura máxima.

Função horária do espaço na horizontal:

$$x = x_o + v_{ox}.t$$

$$x = 0 + v_o.\cos 45°.t$$

$$x = 500.\frac{\sqrt{2}}{2}.t \text{ (Equação 1)}$$

O tempo que o projétil leva para alcançar a altura máxima:

$$V_y = v_{oy} - g.t$$

$$0 = v_{oy} - g.t$$

$$t = \frac{v_{oy}}{g}$$

$$t = \frac{v_o\,.sen45°}{g}$$

$$t = \frac{500.\frac{\sqrt{2}}{2}}{10}$$

$$t = 25\sqrt{2}$$

Como o tempo de subida e descida são iguais, o tempo total do percurso equivale ao dobro do tempo para alcançar a altura máxima.

$$t_{total} = 50\sqrt{2}$$

Substituindo t_{total} *na equação 1, temos que:*

$$x = 250.\sqrt{2}.50.\sqrt{2}$$

$$x = 25000\,m$$

Nesse caso, os ingredientes (subtarefas implícitas) da técnica apresentada são:

– Calcular o tempo para que o projétil atinja a altura máxima;

– O deslocamento horizontal do projétil (aplicação da função horária do espaço).

E a integração da noção didática dialética de mídias e meios pode se efetivar pela integração de técnicas que, assim como nos demais grupo, pode ser refletida após a última seção de experimentação, na qual nos deteremos ao recorte do grupo 3, aquele que chegou próximo da nossa espera institucional.

Discurso tecnológico-teórico [ϴ,Θ]:

As duas equações utilizadas na técnica apresentada por esse grupo indicam os tipos de movimento do projétil: uniformemente variado, retilíneo e uniforme, caracterizando o lançamento oblíquo. Isso indica um abandono da hipótese de lançamento apresentada na tentativa de resolução de Q_0, como pode ser visto na figura 17.

Da Q_1 do grupo 3, extraímos a tarefa:

T_{1G3}: *Determine o alcance do lançador e o espaço do acontecimento.*

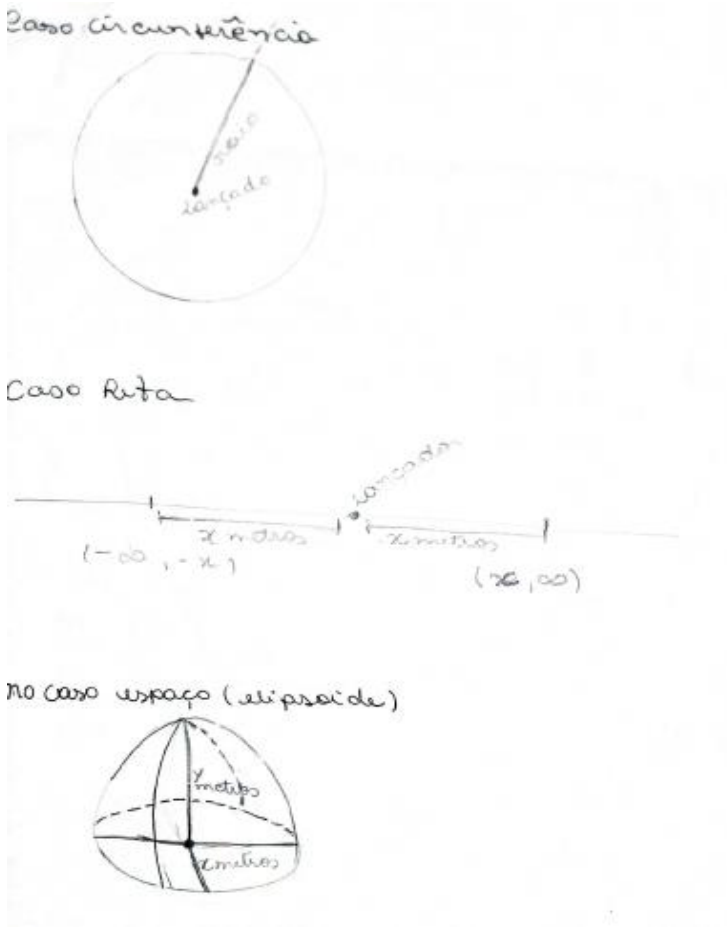
Técnica 1 do grupo 3(τ_{1G3}):

Faz uso de ostensivo escritural, para levantar hipóteses sobre o espaço do acontecimento e generalizar o alcance, o que torna factível a necessidade de prolongar o percurso investigativo. Desse modo, no âmbito do ostensivo utilizado, a resposta a Q_1 elaborada por este grupo, foi:

O alcance é de y metros de altura e x de comprimento. O local do acontecimento pode ser na reta, no plano e no espaço.

Pode ser verificado na figura 19, a partir do ostensivo figural apresentado por esse grupo, ao utilizarem como ingrediente da técnica o esboço das três situações pensadas (subtarefa do tipo esboçar o local do acontecimento dos tipos de lançamentos), que a proposta ainda é bastante geral, mas que pode fomentar tarefas que tratem do tipo de lançamento que permitirá chegar a noção da parábola de segurança, ou melhor, a Função quadrática como parábola.

Figura 19 – Ostensivo figural para indicar local de acontecimento de um determinado movimento



Fonte: Dados da pesquisa (2019)

Discurso tecnológico-teórico [θ, Θ]:

Reconhecendo que a trajetória descrita é parabólica (movimento uniformemente variado), a proposta de determinar o alcance considera duas dimensões: altura e comprimento. Isso dá conta da primeira parte da pergunta, mas o local do acontecimento conduz o discurso que justifica a técnica empregada para um caminho oposto ao movimento relativo ao alcance. Representa o abandono da hipótese implícita na resposta da primeira parte da pergunta e adoção de novas hipóteses.

Da Q_1 do grupo 4, extraímos a tarefa:

T_{1G4}: *Delimitar um lugar geométrico para o objeto.*

Técnica 1 do grupo 4 (τ_{1G4}):

$A = (a, b, c)$ em que a, b e $c \in R^3$

A técnica desse grupo consistiu em supor um ponto qualquer localizado no R^3. Não é uma tarefa trivial determinar um lugar geométrico, visto que, além de imaginarmos um ponto se movimentando de acordo com condições determinadas, precisamos descrever a trajetória desse ponto enquanto ele se movimenta. No entanto, as lacunas na solução da tarefa vão no sentido da inconsistência no discurso tecnológico-teórico. A resposta é incompleta, pois há elementos ausentes que são de ordem da definição de um lugar geométrico.

Discurso tecnológico-teórico [ϴ, Θ]:

A noção que vai orientar e justificar o saber-fazer na tarefa proposta pelo grupo 4, é a de lugar geométrico, que consiste no conjunto de pontos de um plano que gozam de uma determinada propriedade. No estudo da Geometria Euclidiana, nos deparamos com os lugares geométricos bidimensionais. Entretanto, por extensão, os pontos do espaço também podem sujeitar-se a uma propriedade matemática determinada, como superfícies esféricas, cilíndricas, elipsoidais. Desse modo, os lugares geométricos podem ser dados por retas, curvas e superfícies. A resposta apresentada, não dá pistas claras do tipo de lugar geométrico, o que força a necessidade de outras questões derivadas de Q_0.

A tarefa extraída da Q_1 do grupo 5 é a seguinte:

T_{1G5}: *Ao Considerar que o lançador forma um ângulo de 45º com a base, discutir se há um lugar onde o objeto estaria protegido de modo a não ser atingido.*

Técnica 1 do grupo 5 (τ_{1G5}):

O ostensivo que simboliza a técnica apresentada inicialmente por esse grupo é o escritural, como segue: *Na proposição, ainda não há dados suficientes para responder à questão. Mas dá para levantar hipóteses. E se esse movimento for vertical, existe lugar seguro? E se for horizontal? E, ainda, se o movimento for oblíquo?*

Não são apresentadas técnicas algoritmizadas. Nenhuma fórmula foi evocada, mas o questionamento sobre o tipo de movimento. Apesar do estilo de apresentação de respostas, não podemos defender a presença de noções didáticas no *logos* dessa praxeologia. Nem mesmo foi apresentada uma praxeologia completa para Q_1. Faltam indícios de questionamentos, de confrontação às propriedades e teoria que justifiquem a técnica para essa questão.

Discurso tecnológico-teórico [ϴ, Θ]:

Pelo exposto acima, podemos dizer que a técnica consistiu em conjecturar o movimento de acordo com três tipos de lançamentos. O ângulo de lançamento do projétil, dado no enunciado, de 45°, no entanto, contradiz a solução por conjecturas. Se o ângulo de lançamento for oblíquo, o lançamento será um valor no intervalo $0° < \alpha < 90°$, já se admitiu o lançamento oblíquo.

Por fim, a tarefa extraída da Q_1 do grupo 6, foi:

T_{1G6}: *Calcular o alcance máximo de uma bala lançada com a velocidade inicial de* V_o *=15m/s formando um ângulo de 45º com a horizontal.*

Técnica 1 do grupo 6 (τ_{1G6}):

O ostensivo utilizado por esse grupo é o escritural algébrico. Utiliza uma fórmula para o cálculo do alcance, que é considerado apenas no sentido horizontal.

$$x = \frac{\left|\vec{V_o}\right|^2}{g} . sen 2\theta$$

$$x = \frac{|15|^2}{10} . sen 2.(45°)$$

$$x = \frac{225}{10} . sen 90°$$

$$x = 22{,}5\ m$$

Discurso tecnológico-teórico [ϴ, Θ]:

Pelo ostensivo utilizado acima, para representar o alcance do corpo que é lançado segundo especificações do enunciado de Q_1, o grupo 6 considera como alcance o deslocamento horizontal do corpo, que, no plano cartesiano, corresponde a coordenada x. O deslocamento na vertical, que dará conta da altura atingida pelo corpo, não foi calculada.

Nesse momento, o grupo não utiliza outros ostensivos como o figural, nem mesmo o escritural em língua natural para justificar o cálculo realizado. No entanto, pode-se inferir que a continuidade do percurso, com a proposição de uma Q_2, indica a percepção de uma lacuna, quanto à questão geratriz do percurso. Não foi possível, com esse enunciado e dados disponíveis, responder sobre a existência de um local seguro sem que se tenha considerado apenas a localização sobre uma reta.

Caberia um questionamento, integrado ao *logos* nessa praxeologia, quanto à validade do resultado e das propriedades desse movimento tomado como padrão, o que poderia indicar, nessa praxeologia, a inclusão da dialética das perguntas e respostas nesse bloco tecnológico-teórico. Tal questionamento poderia surgir da seguinte maneira: postos os cálculos do alcance no sentido horizontal, qual altura máxima seria atingida pelo projétil. Somente a equação que fornece o alcance na horizontal é suficiente para escrever uma relação funcional sobre essa situação? Ou mesmo: tal situação pode ser modelada por uma função? Estamos falando de questionamentos implícitos, o que pode ter resultado na proposição de Q_2.

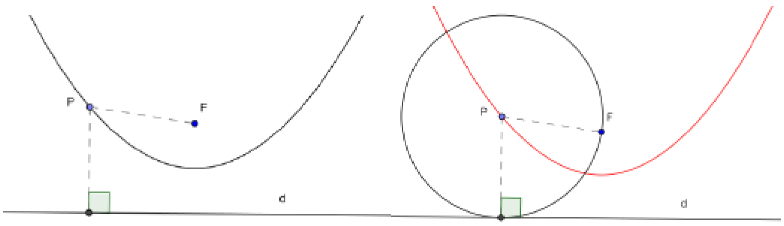
Consequências didáticas das tarefas embasadas na questão Q_1

A escolha de um tipo de lançamento implica diretamente no seguimento do PEP e no tipo de praxeologia que deve ser construída pelos grupos. Adotar o lançamento oblíquo não descarta imediatamente os demais tipos de lançamento, contudo deve, mais adiante, conduzir os sujeitos da pesquisa a conjecturarem e aperfeiçoarem a questão e as respostas de modo que alcancem a ideia de construção de parábolas a cada lançamento.

Se o caminho se iniciar pela noção de lugar geométrico, como esperado e que está de acordo com a epistemologia geral da gênese do saber função quadrática, o entendimento presente pela análise das Praxeologias Matemáticas construídas deve ser de uma cônica, a parábola como lugar geométrico. Assim, essa parábola, de diretriz d e foco F, é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão equidistantes de F e de d. De forma equivalente, é o lugar geométrico dos centros P das circunferências que passam por F e são tangentes a d, conforme podemos ver na figura 20, a seguir.

Figura 20 – Parábola com lugar geométrico dos pontos que estão equidistantes ao foco e uma reta diretriz

$$Q = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, F) = d(P, d)\}.$$



Fonte: Rodrigues (2017)

3.3.3 Seção 3

Apresentamos agora as questões Q_2, elaboradas e explicitadas na terceira seção de desenvolvimento do PEP, no quadro 5. As categorias prévias são as mesmas, mas, nas consequências didáticas, apontamos as categorias abertas, visto que se amplia, nas praxeologias que são descritas, a proximidade com o modelo matemático colocado por nós como espera institucional.

Quadro 4 – Enunciados da Questão Q_2 organizados por categorias

Categoria	Grupo	Enunciado da questão (Q_2)
C_1	1	*Qual o alcance máximo quando o ângulo varia no intervalo [0, 90] graus?*
	2	*Qual a função horária do espaço na horizontal?*
	5	*Considere os ângulos notáveis no intervalo:* $0° \ll \alpha \ll 180°$ *(0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 150° e 180°).Identifique o tipo de lançamento e o ponto máximo atingido pelo objeto lançado. (Considerando* $v_o = 2m/s$ *para todos os ângulos de lançamento).*

	6	*Agora considere uma bala lançada com velocidade inicial de vo=15m/s e com o ângulo de lançamento com a horizontal no intervalo* $0° \ll \alpha \ll 180°$ *. Qual o alcance máximo?*
C_2	4	*Suponha um lugar geométrico ao lançador. Sendo assim, dado o ponto P, dê uma variação ao ângulo de lançamento.*
C_3	3	*Sabendo que o alcance de um projétil é de y metros de altura e x metros de comprimento, e considerando que o lançador está em uma reta, plano ou espaço, existe um lugar em que qualquer objeto estaria protegido?*

Fonte: Autor (2019).

Do quadro apresentado na seção 2, temos uma mudança apenas do grupo 5, que restringe, na proposição da questão, o significado do objeto do conhecimento a categoria C_1, ou seja, migrou da categoria C_3, que dá conta da amalgamação de técnicas da Física e Matemática, uma simbiose da concepção do status da parábola, para o que trata da resolução no campo dos conhecimentos da Física, ainda considerando as hipóteses de lançamento.

Ainda de acordo com os significados, e no que tange às mudanças nos enunciados, o grupo 2 restringe a questão, de modo que propriedades da mecânica clássica fiquem mais evidentes no enunciado, afastando, de certo modo, o foco da questão da discussão do modelo (parabólico) que representa a situação descrita em Q_0.

O grupo 4, por sua vez, se mantém na linha de pensar o lugar geométrico, mas amplia a questão à medida que solicita a variação de ângulos de lançamento. No entanto, ainda não dá sinais claros de que o modelo que melhor representa a situação é parabólico, visto que a parábola, enquanto lugar geométrico dos pontos que equidistam de um ponto (foco) e de uma reta (diretriz), não aparece na solução.

Assim como fizemos na seção 2, vamos abrir as Praxeologias Matemáticas da segunda reformulação dos grupos (Q_2). Desse modo, destacamos as técnicas e os discursos tecnológico-teóricos (*logos*) produzidos pelos grupos nessa seção, bem como os objetos ostensivos que dão a ideia do saber (objeto não ostensivo) mobilizado pelos participantes nessa etapa da investigação.

Utilizaremos a mesma forma de codificar as tarefas que podem ser extraídas das questões descritas no quadro 5. Assim, a tarefa extraída da Q_2 do grupo 1 é a seguinte:

T_{2G1}: *Determinar o alcance máximo quando o ângulo varia no intervalo [0, 90] graus.*

Técnica 2 do grupo 1(τ_{2G1}):

Consistiu em utilizar a equação que expressa o alcance:

$$A = \frac{Vo^2.sen(2\alpha)}{g}$$

O grupo justifica: *mas como definimos a velocidade constante (10m/s) e a gravidade como 10m/s²*, *o alcance é definido por* $A = \frac{10^2.sen(2\alpha)}{10} = 10.sen\ (2\alpha)$

O que vai alterar na fórmula é o sen (2α), *que quanto maior for, maior será o alcance. Como sabemos, os senos dos ângulos variam no intervalo [-1, 1]. Logo, o alcance máximo será quando o sen* $(2\alpha) = 1$.

O seno de 90° é 1, logo $2\alpha = 90°, \alpha = 45°$.

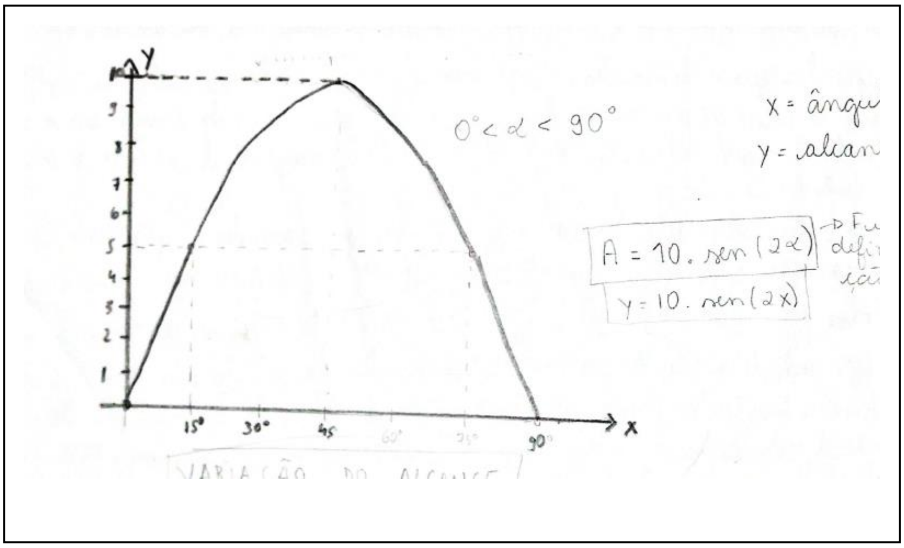
Quando o ângulo for de 45°, o alcance será máximo e igual a

$$A_{máx} = 10.sen\ (2\ .45°)$$

$$A_{máx} = 10.1 = 10\ metros$$

O mesmo ocorre para os demais ângulos, ao mudar o referencial.

Figura 21– Ostensivo gráfico utilizado pelo grupo 2 na solução de Q_2



Fonte: Dados da pesquisa (2018)

Discurso tecnológico-teórico [Θ, Θ]:

O cálculo do alcance na tarefa acima, bem como na resolução, pode ser uma tentativa de escrever uma equação que descreve cada uma das trajetórias parabólicas que pertence a uma família de parábolas, se o disparo for sob ângulos variando no intervalo $0° \ll \alpha \ll 180°$. No entanto, no presente bloco técnico-prático, pode-se identificar que a referência ao alcance é na vertical (altura máxima).

Na figura 21, os ângulos de lançamento foram traçados no eixo das abscissas. A compreensão não foi propriamente de que os disparos seriam com diferentes ângulos com a horizontal (eixo x), mas de que numa situação bem específica, a altura máxima é alcançada se o lançamento ocorrer, desde que o ângulo entre a lançador e o plano horizontal seja de 45°.

O que liga a técnica utilizada para resolver a Q_2, nesse caso, e a praxeologia esperada (intenção didática) é a compreensão de que a situação pode ser modelada por parábolas.

T_{2G2}: *Determinar a função horária do espaço na horizontal.*

Técnica 2 do grupo 2(τ_{2G2}):

Possivelmente, ao mobilizar a dialética das mídias e meios intuitivamente, o grupo apresenta a equação: $x = x_o + v_o x.t$.

Foi abandonado o modelo apresentado na Q_1, e são apresentados agora novos elementos que serão considerados para se chegar a outra equação:

$x = 0 + v_o cos 45°.t.$

$x = \frac{500.\sqrt{2}}{2} t.$

$x = 250.(\sqrt{2})t.$

Discurso tecnológico-teórico [ϴ, Θ]:

Ao determinar a função horária do espaço, o grupo 2 pretende informar sobre uma equação que permite calcular a posição de um projétil. Entretanto, não apresenta modelo no sistema geométrico ou gráfico na resolução, o que complementaria a análise na busca de identificar se tem relação com a ideia do status da parábola.

T_{2G3}: *Sabendo que o alcance de um projétil é de y metros de altura e x metros de comprimento, e considerando que o lançador está em uma reta, plano ou espaço, determine um lugar em que qualquer objeto estaria protegido.*

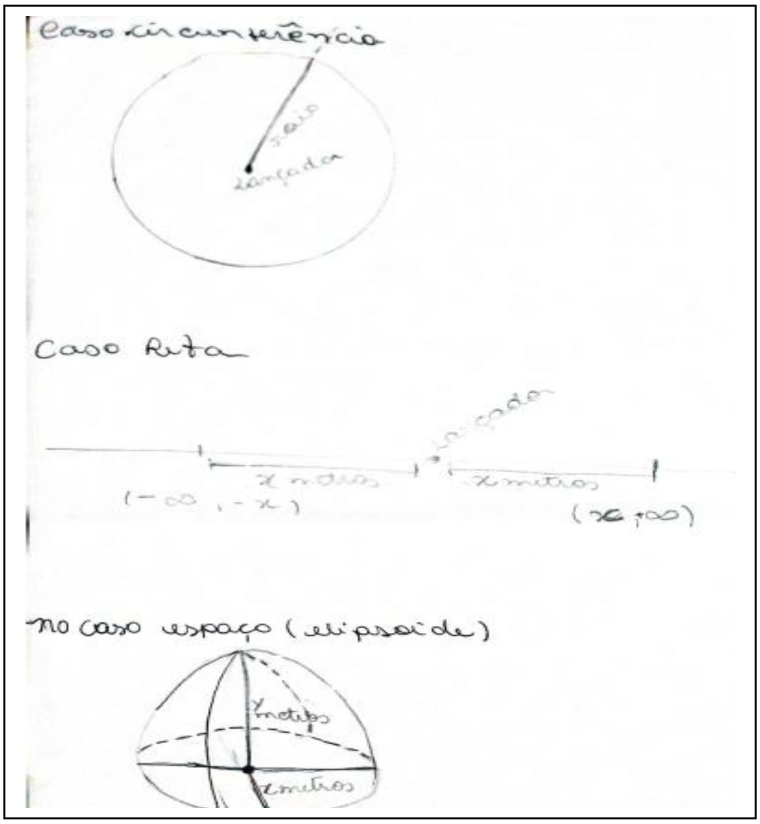
Técnica 2 do grupo 3(τ_{2G3}):

O referido grupo utiliza, inicialmente, o ostensivo escritural apresentando resposta positiva para a tarefa, e considera três situações: uma em que o lançador está localizado na reta, no plano e outra no espaço:

No caso da reta, existem infinitos locais para o objeto estar seguro. Basta ele se localizar em $(x, +\infty)$ *ou* $(-\infty, -x)$*. Tendo como referência o lançador localizado na origem da reta. No caso do plano, o objeto deve se localizar no foco da circunferência de centro no lançador e raio x. No caso do espaço, seria uma elipsoide, onde o objeto estaria seguro fora da elipsoide. O lançador estaria no ponto médio dos focos da elipse rotacionada.*

Em seguida, são retomados os ostensivos figurais utilizados na questão anterior para ilustrar os casos descritos acima.

Figura 22 – Ostensivo figural da solução do grupo 3



Fonte: Dados da pesquisa (2019)

Discurso tecnológico-teórico [ϴ, Θ]:

A noção implicitamente utilizada pelo grupo 3 foi o de lugar geométrico. Mas desconsidera, de acordo com nossa intenção didática, o ângulo de lançamento realizado pelo atirador. A definição formal de lugar geométrico não aparece na solução, mas, ao utilizar o ostensivo figural (figura 22 acima), acena para esta noção. A trajetória do projétil, enunciada na forma de proposição sobre propriedades que determinados conjuntos de pontos devem satisfazer, definiria lugar geométrico para cada caso.

T_{2G4}: *Supor um lugar geométrico ao lançador e dado o ponto P, determinar uma variação ao ângulo de lançamento.*

Técnica 2 do grupo 4 (τ_{2G4}):

O grupo 4 utiliza o seguinte ostensivo na técnica apresentada para Q_2:

$p\ (a_1, b_1, c_1)$ | $a_1, b_1\ e\ c_1\ \epsilon\ R^3$, *com variação de angulação x no intervalo* $0 \ll x \ll \pi$.

Não é apresentado algum ostensivo figural nessa técnica. No que concerne à tentativa de ampliar a noção da questão anterior, essa mostrou-se por meio da indicação de que a angulação deve ser considerada.

Discurso tecnológico-teórico [ϴ, Θ]:

O discurso que justifica a técnica do grupo 4, alicerça-se na Geometria Analítica, especialmente na conceituação de lugar geométrico. Do ponto de vista da pergunta, pode-se dizer que ainda faltam dados no enunciado da questão para que seja pensado o referido objeto matemático e seja feito esboço com o seu ostensivo figural. Ao mencionar a expressão lugar geométrico, de forma explícita, mesmo que intuitivamente, considerou-se a necessidade de se ter clareza acerca das propriedades com as quais o definiria.

Desse modo, o elemento tecnológico integrador dessa tarefa com outras do mesmo objeto matemático é uma certa propriedade P, que deve ter todo ponto pertencente a um lugar geométrico L.

T_{2G5}: *Considere os ângulos notáveis no intervalo:* $0° \ll \alpha \ll 180°$ *(0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 150° e 180°). Identificar o tipo de lançamento e o ponto máximo atingido pelo objeto lançado. (Considerando v_o = 2m/s para todos os ângulos de lançamento).*

Técnica 2 do grupo 5 (τ_{2G5}):

O grupo, utilizando ostensivo escritural, aponta três hipóteses de lançamento que podem ser consideradas para responder a Q_2:

O ângulo de 90° é o único de lançamento vertical; os ângulos de 0° e 180°são de lançamentos horizontais e os demais ângulos de 30°, 45°, 60°, 120° e 150° são lançamentos oblíquos.

Em seguida, apresentam outra parte da resposta, utilizando ostensivo escritural, mas na forma algébrica, como segue:

$$x = \frac{|\vec{V_0}|^2}{g}.sen\ 2\theta$$

$Para\ \theta = 0°$

$$x = \frac{2^2}{10}.sen\ 2.0$$

$$x = \frac{4}{10}.sen\ 0$$

$$x = 0\ metros$$

$Para\ \theta = 30°$

$$x = \frac{2^2}{10}.sen\ 2.30°$$

$$x = \frac{4}{10}.sen\ 60°$$

$$x = \frac{4}{10}.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{5} metros$$

$Para\ \theta = 45°$

$$x = \frac{2^2}{10}.sen\ 2.45°$$

$$x = \frac{4}{10} . sen\, 90°$$

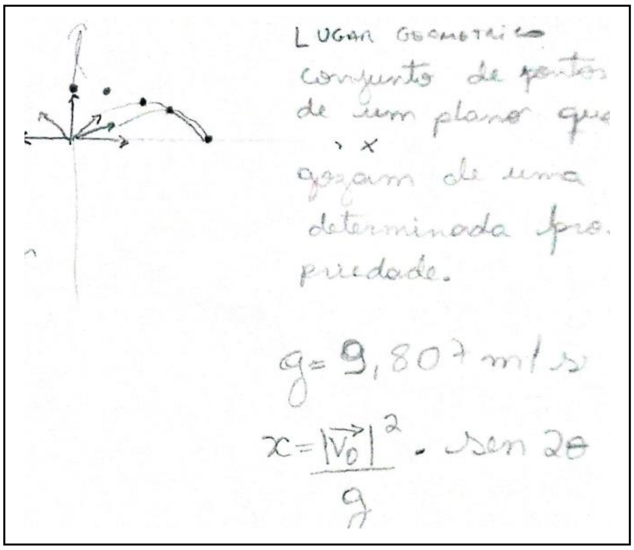
$$x = \frac{4}{10}$$

$$x = \frac{2}{5}\ metros$$

Discurso tecnológico-teórico [Θ, Θ]:

Apesar de utilizarem um ostensivo gráfico como parte da resposta, e terem abandonado o modelo inicial, cogitaram a noção de lugar geométrico e as alturas máximas que o projétil lançado atingiria, como pode ser visto na figura 23.

Figura 23 – Ostensivo figural da solução do grupo 5



Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Em termos de discurso que justifique a técnica apresentada, o grupo ainda mantém o foco no alcance. Desse modo, revela preocupação com um local no sentido horizontal. A dialética mídias e meios se manifesta na conjectura de um modelo gráfico para a situação, mesmo que o caminho percorrido tenha sido o de considerar o alcance como resposta para a questão proposta.

É preciso reforçar uma propriedade (discurso tecnológico-teórico) que tem aparecido de forma implícita nas soluções das questões propostas pelos grupos: o movimento oblíquo é compreendido como resultante entre dois movimentos: o movimento vertical (y) e o horizontal (x). Já discutimos que, na direção vertical, o corpo realiza um Movimento Uniformemente Variado, com velocidade igual a $\overrightarrow{V_{0y}}$ e aceleração da gravidade (g), aspecto desconsiderado na técnica supracitada; e, na direção horizontal, o corpo realiza um Movimento Uniforme com velocidade igual a $\overrightarrow{V_{0x}}$. Desse modo, internalizou-se o alcance como a distância entre o ponto do lançamento e o ponto de queda do corpo, onde y = 0, o que justifica o fato de o grupo ter considerado apenas a componente horizontal do vetor $\overrightarrow{V_0}$ sem, no entanto, ter utilizado adequadamente as equações que seguem abaixo.

Para calcular o movimento do projétil em jogo na questão Q_2 elaborada pelo grupo 5, faz-se necessário decompor o vetor $\overrightarrow{V_0}$ em seus componentes, o que requer conhecimentos da trigonometria.

Uma vez feita tal decomposição de vetores, se a intenção é determinar o deslocamento que o projétil fez na horizontal, será necessário, ainda, tomar a função do espaço, representada pela equação $x = x_0 + v_{0x}.t$, e considerar o componente horizontal do vetor $\overrightarrow{V_0}$, dada por $v_{0x} = |\overrightarrow{v_0}|.cos\theta$, implicando numa alteração na função do espaço para x $x = x_0 + |\overrightarrow{v_0}|.cos\theta.t$.

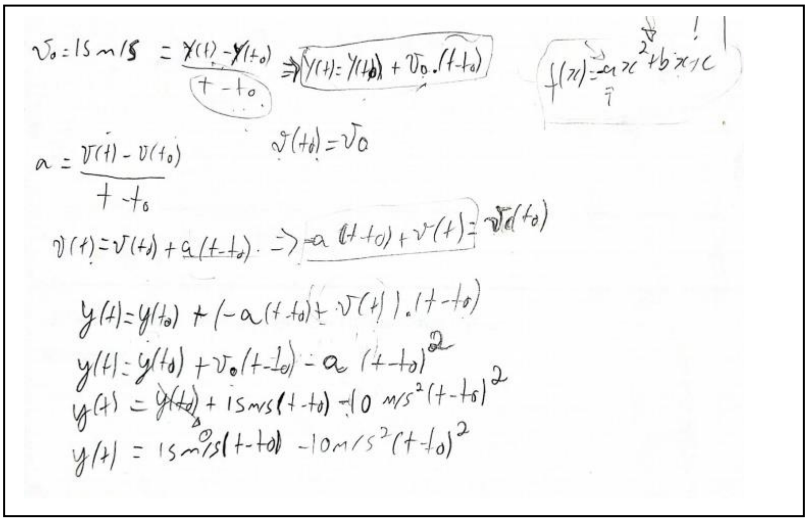
No que tange à fórmula especificamente utilizada pelo grupo, visualizamos um salto desde a ideia do vetor velocidade e seus componentes até o alcance máximo dado por $x = \frac{|\overrightarrow{V_0}|^2}{g}.sen\ 2\theta$, e não nos é factível inferir sobre a consciência ou não do processo até a chegada à equação acima.

T_{2G6}: *Agora considere uma bala lançada com velocidade inicial de vo=15m/s e com o ângulo de lançamento com a horizontal no intervalo* $0° \ll \alpha \ll 180°$. *Determinar o alcance máximo.*

Técnica 2 do grupo 6 (τ_{2G6}):

Conforme imagem a seguir:

Figura 24 – Técnica para T_2 – grupo 6



Fonte: Dados da pesquisa (2019)

Discurso tecnológico-teórico [ϴ, Θ]:

Excetuando-se quaisquer comentários específicos sobre um determinado ostensivo gráfico utilizado pelo grupo 6, bem como figura que indica o mesmo, como foi mostrado no discurso tecnológico-teórico para tarefa do grupo 5, são pertinentes as observações feitas quanto ao que justifica a ideia do presente grupo em questionar e apresentar solução para o alcance máximo de um projétil lançado num movimento do tipo oblíquo.

No caso específico da questão Q_2, a solução desse grupo já esboça uma tentativa de aproximação com um modelo quadrático, visto que entendem que a trajetória do projétil é parabólica, uma vez assumido o lançamento oblíquo como mais adequado para desenvolvimento do estudo em torno de Q_0.

Consequências didáticas das tarefas embasadas na questão Q_2

Nessa segunda questão elaborada pelos grupos, os ostensivos utilizados começam a apontar para o objeto função. Apresentamos, na página 95 categorias prévias para nossas análises, mas as imagens conceituais identificadas pelo tipo de objeto ostensivo utilizado nas soluções de Q_2, apontam para convergências entre enunciados elaborados e soluções, que apontam para outras categorias abertas (CA):

C_{A1} – A solução para Q_0, que implica na proposição e solução de outras Q_s, quando utilizadas equações padrões da Física (estudo do movimento) não se associam diretamente a funções;

C_{A2} – A solução para Q_0, que implica na proposição e solução de outras Q_s, quando utilizadas equações que fazem referência a $y = f(x)$ ou a forma $y\ ou\ f(x) = ax^2 + bx + c$, admitindo-se as variações das letras utilizadas, associam-se diretamente às funções[17].

Assim, o reconhecimento de modelos matemáticos para modelar fenômenos do movimento, implica no reconhecimento de que quando o corpo se movimenta mantém um certo padrão/regularidade em sua velocidade ou aceleração. Atentando-se ao que propõe o enunciado de Q_0, em que a velocidade de lançamento do projétil é dita constante, o deslocamento deve ter sido reconhecido por esse grupo e pelos demais que se apropriaram da ideia de movimento oblíquo para solucionar Q_0 e as derivadas dela como sendo uniforme. Isso os vincula à categoria C_{A1}.

No entanto, o grupo 6 já aponta para o reconhecimento de modelo matemático que modela fenômenos do movimento, mas o ostensivo algébrico utilizado denota uma imagem conceitual de funções como vistas no contexto do Ensino da Matemática (categoria C_{A2}).

A dialética de perguntas e respostas, de certo modo, mitiga os efeitos do fenômeno IAMI, de modo que se pode notar, pelos ostensivos utilizados, que os grupos se aproximam de nossa espera institucional, mas não apresentam, até a terceira seção, praxeologias que façam referência à parábola, seus status e relação com a função quadrática.

Até o presente momento, é cedo para falar que houve reconstrução praxeológica ao mesmo tempo que ocorreu integração das noções didáticas no *logos* da Praxeologia Matemática apresentada. Talvez seja uma dificuldade nossa nas análises, já que o uso dos algoritmos por si só não nos permite interpretar os devidos significados dos fatos, visto que, segundo Vinner (1991), este deve estar associado às palavras.

É cabível também refletir mais um pouco sobre os ostensivos utilizados para representação da noção de função, utilizados de forma intuitiva ou não nas soluções para a questão Q_2. Os grupos evocam diferentes representações de uma função, especialmente os ostensivos escriturais (as equações) e os figurais (os gráficos), mas uma esperada conexão entre eles se perde nas praxeologias apresentadas.

[17] Os objetos ostensivos utilizados denotam a imagem conceitual do grupo que nos permite fazer tal inferência.

Na busca por uma razão de ser alternativa na instituição formação inicial docente, do objeto matemático função quadrática, sua conexão com os diferentes objetos ostensivos, deve atuar na reconstrução da ideia de relação estática que é normalmente atribuída às funções.

Retomando os aspectos matemáticos, de certo modo, os grupos que se aproximaram da noção de lugar geométrico, nas soluções das tarefas extraídas de Q_2, aproximam-se intuitivamente da noção de função, isso porque, em geral, uma curva no plano XY é o lugar geométrico a priori, e um gráfico a posteriori de uma equação que envolve duas variáveis x e y. Essa relação é explicitada por tarefas do tipo: dada certa equação, determine o lugar geométrico correspondente; ou: dado o lugar geométrico, definido sob certas propriedades, determine a equação correspondente.

Do ponto de vista da definição do lugar geométrico, tendo em vista os aspectos epistemológicos que afetam o *logos* da Praxeologia Matemática de um sujeito, tomamos uma formulação no contexto das transformações. Nesse caso, consideramos um conjunto de pontos que são imagens de um conjunto de pontos. Isso altera o status do objeto em questão, pois amplia o rol dos aspectos conceituais do lugar geométrico, que passa de uma visão clássica, em que é o conjunto de pontos que satisfazem uma determinada propriedade representada por uma construção geométrica realizada, por exemplo, num ambiente lápis e papel, normalmente enunciada em termos de distâncias a pontos, retas ou circunferências fixas no plano cartesiano (GÓMEZ-CHACÓN et al., 2016), para aquela supracitada.

Nessa segunda concepção, segundo Gómez-Chacón et al. (2016), se chamamos f de função: $M \rightarrow N = f(M)$, determinar o lugar geométrico de N é buscar o conjunto de todos os pontos f (M), o que pode ser expressado ainda por 'um lugar geométrico é o conjunto de todos os pontos do plano que verificam uma propriedade definida'. Assim, se L é o lugar geométrico com propriedade P, se verifica que:

i) Todo ponto de L possui essa propriedade P;
ii) Todo ponto que possui a propriedade P pertence a L, condição que pode ser reescrita da seguinte maneira:
iii) Todo ponto não pertencente a L não possui a propriedade P.

Essas considerações integradas ao *logos* da Praxeologia Matemática de um determinado grupo, na nossa experimentação, poderia conduzir a uma equação entre as variáveis x e y (equação do lugar geométrico L) e, nesse caso, para Gómez-Chacón et al. (2016), o lugar geométrico se definiria de modo funcional, intenção didática de nossa proposta, no que tange à abordagem do objeto em questão.

3.3.4 Seção 4 - Esboço de finalização praxeológica

Dessa seção, também extraímos uma questão da família Q, derivada de Q_0, como expansão de uma possível alteração na relação dos participantes da pesquisa com os objetos matemáticos função quadrática e parábola. Dizemos que é um esboço de finalização praxeológica[18], porque tomamos como ponto de chegada, além da ideia da parábola de segurança, as equações que conduziriam à lei funcional que representa tal ideia.

Além disso, em outras investigações que utilizam o PEP, e nas próprias teorizações de Chevallard (2009), aponta-se uma certa dificuldade em realizar a finalização praxeológica nesse modelo de aprendizagem baseado em investigação, por isso, utilizamos o termo esboço. Não se tem garantias de onde o estudante chegará no desenvolvimento do PEP. E essa é uma diferença bastante acentuada para a Engenharia Didática Clássica, em que se apresentam análises a priori, a posteriori e a validação, que é a confrontação das duas análises e, desse modo, pode-se prever e controlar variáveis da pesquisa de modo que se tente controlar o processo e garanta a finalização praxeológica.

Seguiremos a estrutura da descrição das seções anteriores. No entanto, cabe ressaltar que alguns grupos não propuseram essa terceira questão Q_3, o que nos permitiu inferir que, intuitivamente, para estes já teria ocorrido uma suposta finalização praxeológica[19]. Insistiram na praxeologia apresentada na seção anterior. Em seguida, a análise segue inspirada na análise praxeológica, apontando-se as técnicas de fato utilizadas e o *logos* que as justificam e, por fim, nas consequências didáticas, a discussão é no sentido de apontar procedimentos padrões e/ou não padrões para tais tarefas. Finalizamos essa seção, com a descrição das praxeologias e passamos às análises complementares, espaço onde esboçamos uma síntese das seções, e

[18] Entendemos por finalização praxeológica, um processo em que a intenção didática quanto ao objeto de ensino é revelada ao estudante e este apresenta Praxeologia Matemática compatível com tal intenção. No caso dessa investigação, o estudante apresentará uma equação que represente a parábola de segurança.

[19] Aos grupos participantes, não foi apresentado este ou outros conceitos específicos da Didática da Matemática (epistemologia experimental). Adiante, discutimos alguns aspectos da investigação, a partir de reflexões, tais comoo modo para implementar a integração de noções didáticas no *logos* das praxeologias matemáticas no desenvolvimento do PEP com futuros professores, sem que sejam apresentadas tais noções didáticas. Salientamos que utilizamos como noções a serem integradas os gestos de estudo de perguntas e respostas e das mídias e meio.

discutimos outras noções do âmbito da Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999), de modo a destacar indícios da integração das noções didáticas mencionadas anteriormente.

Quadro 5 – Enunciados da Questão Q_3 organizados por categorias

Categoria	Grupo	Enunciado da questão (Q_2)
C_1	2	*Determine o tempo que o projétil leva para atingir a altura máxima. É possível, diante disso, determinar o valor de x na função horária da questão anterior?*
C_2	------	--
C_3	3	*Sabendo que o alcance de um projétil é de y metros de altura e x metros de comprimento, e considerando que o lançamento é oblíquo, com velocidade constante, com ângulos num intervalo [0, 180] graus, em qual lugar qualquer objeto estaria protegido dos projéteis lançados?*
	4	*Suponha uma velocidade constante x, nas condições das questões anteriores. Qual a distância entre o lançador P e um objeto não localizado no solo?*
	5	*Considerando as questões anteriores e suas respostas, é possível apontar um lugar seguro para o objeto?*

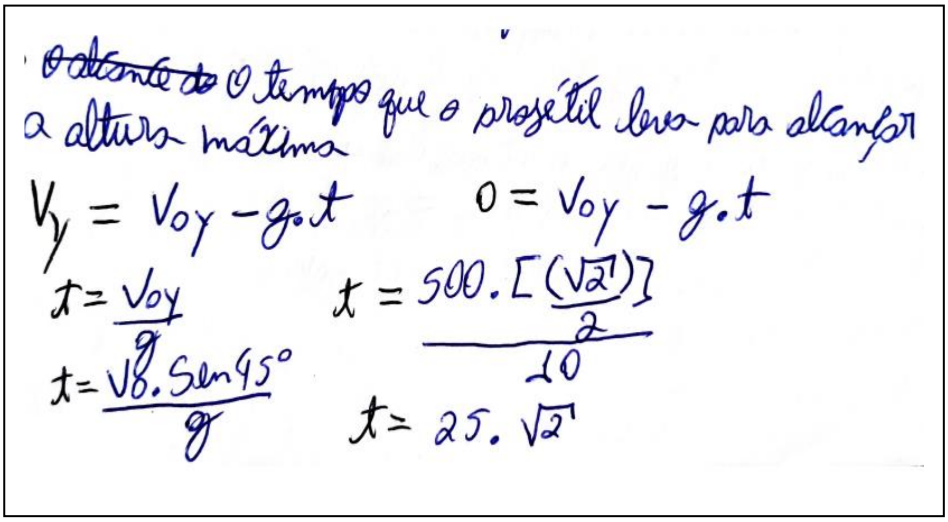
Fonte: Autor (2019).

T_{3G2}: *Determinar o tempo que o projétil leva para atingir a altura máxima e, se possível, determinar o valor de x na função horária de Q_2.*

Técnica 3 do grupo 2(τ_{3G2}):

Conforme apresentada nas figuras 25 e 26, a seguir.

Figura 25 – Primeira parte da técnica para tarefa T3 – grupo 2



~~O alcance do~~ O tempo que o projétil leva para alcançar a altura máxima

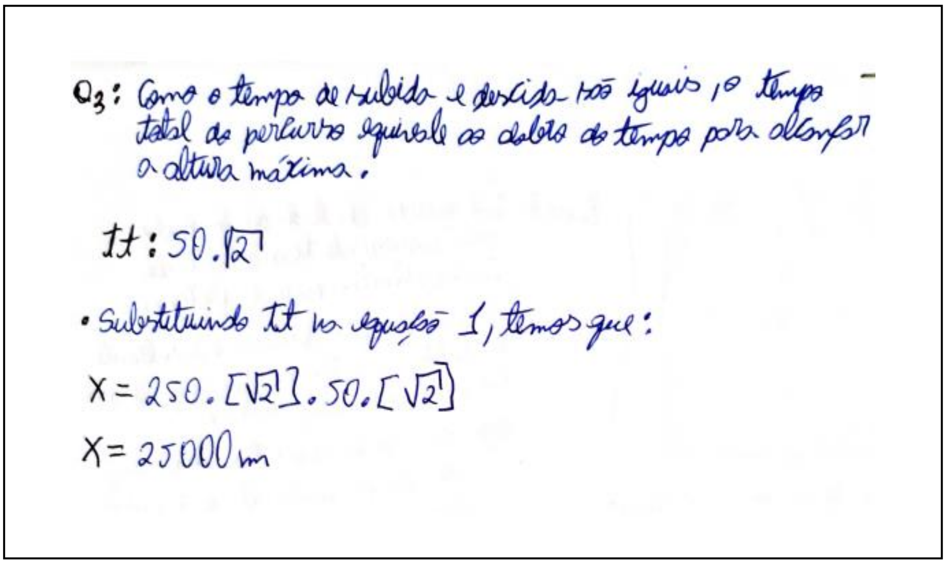
$V_y = V_{0y} - g.t$ $\quad$ $0 = V_{0y} - g.t$

$t = \frac{V_{0y}}{g}$ $\quad$ $t = \frac{500.[\frac{(\sqrt{2})}{2}]}{10}$

$t = \frac{V_0.Sen45°}{g}$ $\quad$ $t = 25.\sqrt{2}$

Fonte: Dados da pesquisa (2019)

Figura 26 - Segunda parte da técnica para tarefa T3 – grupo 2



Q3: Como o tempo de subida e descida são iguais, o tempo total do percurso equivale ao dobro do tempo para alcançar a altura máxima.

$t_t: 50.\sqrt{2}$

• Substituindo t_t na equação 1, temos que:

$X = 250.[\sqrt{2}].50.[\sqrt{2}]$

$X = 25000 m$

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Discurso tecnológico-teórico [ϴ, Θ]:

Observe-se que a altura máxima do projétil é atingida quando ele tem velocidade nula no eixo y (quando o projétil para de subir). Isso ocorre decorrido um tempo t, conforme equação mostrada pelo grupo.

A segunda equação apresentada na técnica desse grupo, $t = \frac{v_{0y}}{g}$, substituída em t da equação inicial, permite o cálculo da altura máxima do projétil que, segundo técnica do grupo, delimitaria após essa altura, uma zona de proteção para um dado objeto. A referida substituição implica na equação:

$$y_{máx} = y_o + \frac{{v_{oy}}^2}{2g}$$

Implicitamente, o seu uso indicaria a opção por uma das hipóteses discutidas anteriormente sobre o tipo de lançamento (oblíquo) e explicitamente tem-se um modelo funcional quadrático.

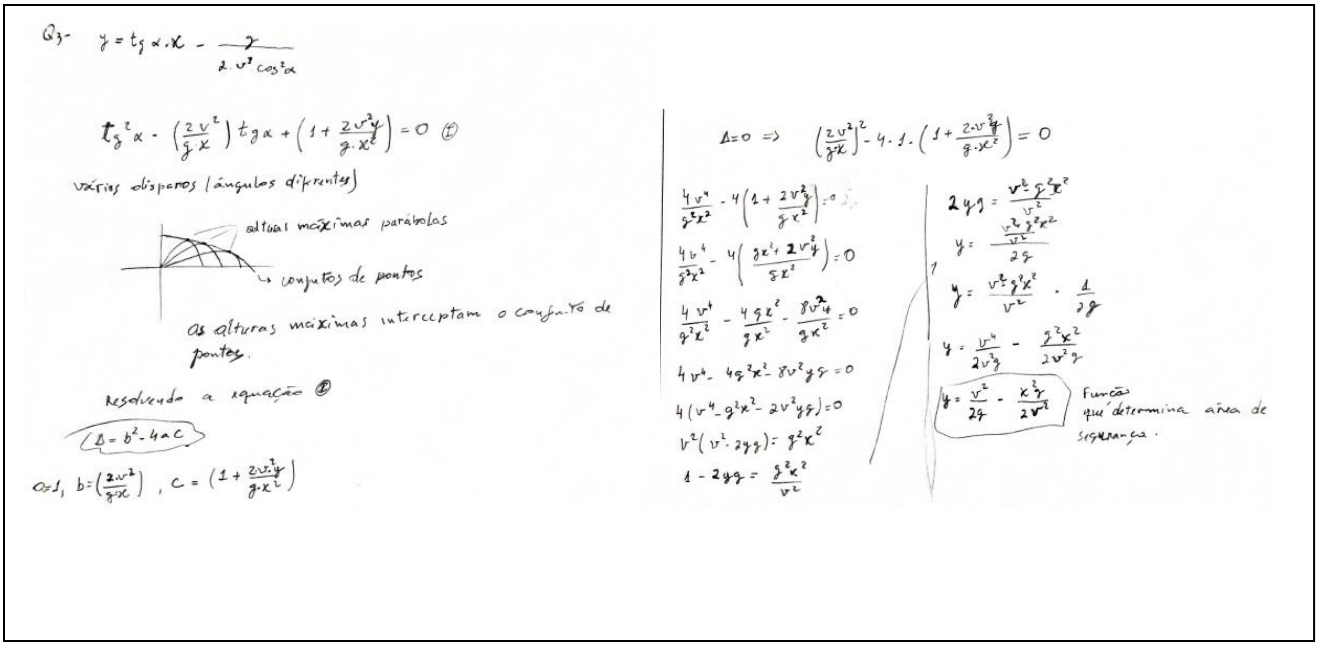
O tempo total do percurso é calculado para que se determine o deslocamento do projétil, delimitando na horizontal o ponto máximo em que o objeto seria atingido conforme condições de lançamento descritas de Q_0 a Q_3.

T_{3G3}: *Sabendo que o alcance de um projétil é de y metros de altura e x metros de comprimento, e considerando que o lançamento é oblíquo, com velocidade constante, com ângulos num intervalo [0, 180], determinar o lugar em que qualquer objeto estaria protegido dos projéteis lançados.*

Técnica 3 do grupo 3 (τ_{3G3}):

Segue figura com técnica utilizada por esse grupo (registro feito por outro membro do grupo), que adota uma das hipóteses de lançamento pensada em Q_0, e se aproxima da noção de uma equação quadrática para representar a relação funcional.

Figura 27 – Técnica 3 para tarefa T3 – grupo 3



Fonte: Dados da pesquisa (2019)

Discurso tecnológico-teórico [Θ, Θ]:

A propriedade que justifica tal técnica está alicerçada nas seguintes noções:

– Escrita de uma lei que descreve uma família de trajetórias parabólicas;

– Isola-se em seguida a fórmula da trajetória do projétil e a partir disso, determinando o ângulo que o projétil, a uma velocidade v, sujeito a ação da gravidade g, devendo ser disparado para atingir um ponto (x, y), analisam-se três casos:

$$\Delta > 0,\ \Delta < 0 \quad e\ \Delta = 0,$$

Isso porque se identifica que esta equação é quadrática. Como os lançamentos sob diferentes ângulos vão descrever distintas parábolas, é possível perceber que suas alturas máximas formam um conjunto de pontos (lugar geométrico dos pontos que são pontos máximos de parábolas). Então, considerando onde um objeto seria atingido, chega-se à escolha do caso $\Delta = 0$.

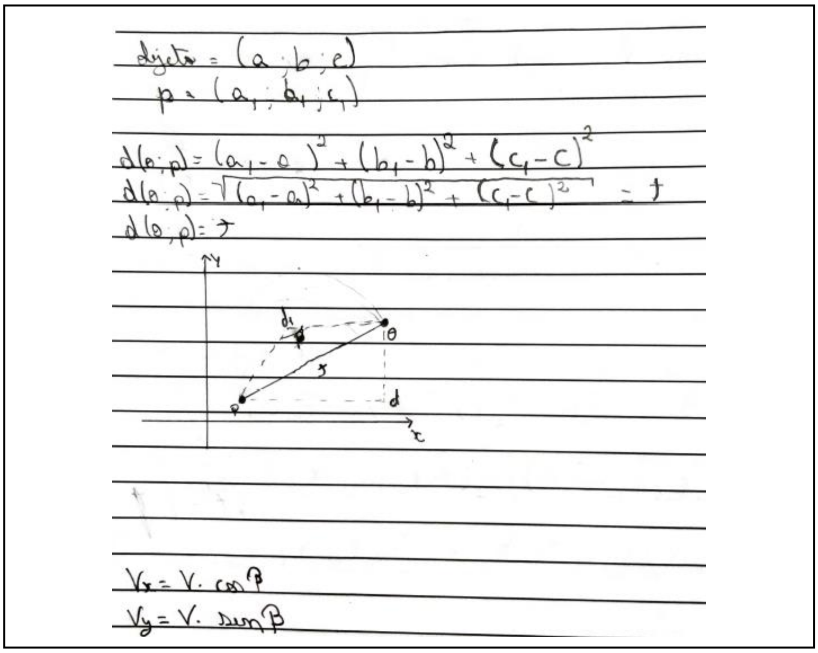
– O último passo é calcular Δ igualando-o a zero, o que permite escrever y em função x, uma equação quadrática, logo um representante de uma função quadrática.

T_{3G4}: *Suponha uma velocidade constante x, nas condições das questões anteriores, determinar a distância entre P (lançador) e O (objeto que não se encontra no solo).*

Técnica 3 do grupo 4 (τ_{3G4}):

A técnica utilizada consiste em calcular a distância entre o objeto e o lançador, uma tentativa de definir uma distância segura para o objeto, identificando até onde este seria atingido.

Figura 28 – Técnica 3 para tarefa T3 – grupo 4



Fonte: Dados da pesquisa (2019)

A partir da figura, pode-se notar que o lançador e o objeto são localizados no espaço. De certo modo, pode-se inferir que é considerado o lugar geométrico (termo utilizado pelo grupo em outras questões) dos pontos que são altura máxima de parábolas que descrevem a trajetória de projéteis lançados no modelo de lançamento oblíquo.

Discurso tecnológico-teórico [Θ, Θ]:

Tomaram o cálculo da distância para determinar uma possível margem de segurança para um objeto. De forma genérica, a distância entre o ponto P e o ponto O foi nomeada pela letra t. O cálculo da distância entre dois pontos não parece ser o caminho mais adequado para determinar o que outros grupos investiram ao longo do PEP, o alcance. A distância entre dois pontos foi considerada no R^3, o que mostra que a estratégia utilizada não se prendeu a padrões convencionais.

A ideia principal é a mesma que no R^2: encontrar o comprimento do menor segmento de reta que liga dois pontos; e tem como princípio, para isso, a utilização de uma relação métrica no triângulo retângulo, o Teorema de Pitágoras. Apesar de não utilizar no ostensivo gráfico que compõe a técnica apresentada, o grupo, deve ter considerado implicitamente três eixos coordenados, o que justifica o uso de pontos com três coordenadas. Inferimos, desse modo, que foi utilizada uma projeção ortogonal do segmento sobre o plano XY.

Para o que foi solicitado, a técnica justifica-se no que fora descrito acima. No entanto, há uma insuficiência de elementos para vincular tal tarefa à questão diretriz do PEP.

T_{3G5}: *Considerando as questões anteriores e suas respostas, apontar, se possível, um lugar seguro para o objeto.*

Técnica 3 do grupo 5 (τ_{3G5}):

Consiste em apresentar argumentos, valendo-se de ostensivo escritural (linguagem natural).

Diferentemente das tarefas dos outros grupos, anteriormente descritas acima, em que inserimos as figuras com as técnicas de resolução, agora vamos transcrever a síntese desse grupo para possível finalização do percurso, garantindo que todos os elementos sejam preservados. Optou-se por isso devido à digitalização não ter uma qualidade que permitisse uma boa visualização da solução da tarefa.

Levando em consideração os resultados obtidos de pontos máximos, criamos uma zona de perigo, um lugar geométrico onde o objeto poderia ser atingido a qualquer momento, por isso o único lugar seguro será acima desta zona, mais especificamente acima do ponto máximo do ângulo de 90°, haja vista que será a maior altura atingida por qualquer projétil lançado. (Resposta à tarefa 3 do grupo 5).

Discurso tecnológico-teórico [Θ, Θ]:

São consideradas as seguintes propriedades no argumento que integra a técnica do grupo:

– Família de trajetórias parabólicas. Quando falam de pontos máximos, implicitamente, mas de acordo com as questões anteriores, falam das alturas máximas atingidas por um projétil que descreve trajetória parabólica. Esse conjunto de pontos máximos caracteriza a noção abaixo;

– Noção de lugar geométrico. Esse é o conjunto dos pontos do plano XY que jamais serão atingidos pelo lançador ao efetuar disparos com velocidade V_o característica de uma parábola de segurança.

– Tipos de lançamento. Considerando-se o lançamento oblíquo, não está descartado o lançamento vertical, se o intervalo dos ângulos de lançamento é [0°, 180°].

Consequências didáticas das tarefas embasadas na questão Q_3

As questões elaboradas por esses quatro grupos, descritas acima como tarefas, aproximam os participantes desses grupos da intenção didática desse PEP. Os enunciados das questões e, consequentemente, as tarefas, já apresentam uma característica, ou melhor, o processo que apresenta tal característica, que é a de enunciar perguntas e propor solução. Parece natural a integração desse gesto de estudo tomado por nós como uma das noções didáticas a serem integradas à Praxeologia Matemática. No entanto, não é tão natural assim, essa integração no bloco do *logos* que vimos descrevendo como discurso tecnológico-teórico desde a segunda seção.

Vamos primeiro pensar nas categorias abertas que advêm dessa etapa de desenvolvimento do PEP e, em seguida, nos concentraremos nos efeitos didáticos das tarefas e das soluções que são ou não padrões para o nível de escolaridade onde ocorre a experimentação.

As categorias abertas alteram-se parcialmente. Observe-se, conforme descrito abaixo, que a noção de função quadrática não surge nas praxeologias apenas quando do uso das notações comumente utilizadas no estudo das funções em Matemática: $y = f(x)$ou, no entanto, ao deparar-se com uma equação como no caso do grupo 3, produziu-se uma imagem conceito de função a ponto de ocorrer o registro da palavra função na solução dada para a tarefa. São estas as categorias e os grupos que nelas se enquadram apresentadas no quadro a seguir:

Quadro 6 – Categorias abertas - Enunciados da Questão Q_3 e grupos

Categoria	Grupo	Enunciado da questão (Q_2)
C_{A1}: A solução para Q_0, que implica na proposição e solução de outras Q_s, quando utilizadas equações	2	*Determine o tempo que o projétil leva para atingir a altura máxima. É possível, diante disso, determinar o valor de x na função horária da questão anterior?*

padrões da Física (estudo do movimento) não se associam diretamente a noção de funções	4	*Suponha uma velocidade constante x. Nas condições das questões anteriores, qual a distância entre o lançador P e um objeto não localizado no solo?*
C$_{A2}$: A solução para Q_0, que implica na proposição e solução de outras Q_s, quando utilizadas equações que fazem referência à ideia de lugar geométrico mesmo sem utilização das notações $y = f(x)$ ou da forma $y \; ou \; f(x) = ax^2 + bx + c$, admitindo-se as variações das letras utilizadas, associam-se diretamente à noção de funções.	3	*Sabendo que o alcance de um projétil é de y metros de altura e x metros de comprimento, e considerando que o lançamento é oblíquo, com velocidade constante, com ângulos num intervalo [0, 180] graus, em qual lugar qualquer objeto estaria protegido dos projéteis lançados?*
	5	*Considerando as questões anteriores e suas respostas, é possível apontar um lugar seguro para o objeto?*

Fonte: Autor (2019).

Por meio do enunciado, inferimos a intenção e as hipóteses da situação dos grupos, mas são as soluções (técnicas) que de fato dão indícios mais fortes para vincular as questões às categorias abertas contidas no quadro acima. Mesmo o grupo 5 apresentando uma solução que não faz uso do ostensivo escritural na forma algébrica ou ostensivo figural na forma gráfica, através dos argumentos apresentados, inferimos que são justificados pelas noções que apresentamos no discurso tecnológico-teórico. A palavra função não é dita como no caso do grupo 3, mas se referem a elementos que são específicos da parábola quando seu status é de gráfico da função quadrática e não fazem uso de expressões que ligam essa noção ao status de cônica. O grupo 3 é mais incisivo nesse ponto, utiliza outras noções como o cálculo do Δ e, após análise que acreditamos ter ocorrido, pois não foi explicitada, consideraram a necessidade de $\Delta = 0$ para escrever y em função de x, o que fizeram apresentando um modelo funcional quadrático.

Ao menos nesse contexto de experimentação, a aproximação com a noção de lugar geométrico é um elemento que, como vimos no capítulo 1, está na base de constituição do saber função quadrática e sua noção/conceito e, a depender do tipo de tarefa proposta numa determinada instituição, pode ser evocado e conduzir os sujeitos da instituição à noção da função quadrática.

As formas como as tarefas são elaboradas darão o norte para o tipo de técnica e de ostensivos que serão utilizados, além de aproximar ou não um sujeito do objeto foi intencionado pela didática do PEP experimentado. Desse modo, foi imprescindível que os grupos chegassem e mantivessem o foco na noção de lugar geométrico, para fazerem a transição da situação da física para um modelo matemático determinado.

A própria definição de parábola de segurança (PS) parte da ideia de lugar geométrico. Enxergar as trajetórias parabólicas na situação e considerar a variação correta dos ângulos de lançamento pode elucidar os procedimentos e propriedades que permitam chegar à noção da PS.

3.4 Análises complementares

Incluímos nessas análises quatro tópicos os quais consideramos essenciais para a compreensão do que foi descrito anteriormente, além de trazer algumas inquietações não apresentadas anteriormente.

Inicialmente, preocupamo-nos com a busca de significados para os dados (enunciados das questões e resolução para as mesmas), ou seja, para a Praxeologia Matemática em termos de tarefas, técnicas e discursos que justifiquem tais técnicas, com foco nas tarefas.

Em seguida, apresentamos algumas reflexões sobre possíveis conexões internas à teoria e ao que foi feito na investigação, especialmente quanto ao uso de Percursos de Estudo e Pesquisa. Na sequência, discutimos aspectos matemáticos da experimentação e sua relação também com as noções teóricas utilizadas e, por fim, as contribuições para a discussão no âmbito da Teoria Antropológica do Didático, no que concerne à integração de noções didáticas no *logos* da Praxeologia Matemática no estudo da função quadrática e status da parábola.

3.4.1 Significados: da função quadrática a parábola nas Praxeologias Matemáticas construídas no desenvolvimento do PEP

Indicamos, no quadro 8 a seguir, algumas assertivas tomadas como Unidades Temáticas de Referência (UR), a serem confrontadas com os dados da experimentação, produzidos por seis grupos de licenciandos em Matemática.

Essas UR têm como valores atribuídos (V para verdadeira e F para falsa), de acordo com três significados relativos aos status da parábola, e objetivam trazer luz para o domínio no qual está alicerçada a questão proposta, convertida para tarefa (na linguagem da TAD), bem como se há pistas de uma determinada amalgamação de técnicas de diferentes domínios nas respostas apresentadas.

São cinco UR descritas no quadro 8, e elas são tomadas para dar significado, no próximo quadro, aos enunciados das tarefas elaboradas pelos grupos participantes da investigação. Em ambos os quadros, as UR estão codificadas por U_{Ri}, onde U_R indica unidade temática de referência e *i* indica a ordem (aleatória) dessas unidades. As UR fazem referência aos conceitos relativos à parábola e relacionam-se às possibilidades de respostas compatíveis com a intenção didática do PEP experimentado.

Quadro 7 – Unidades temáticas de referência com relação ao status da parábola para atribuição às praxeologias matemáticas construídas no PEP

Código U_{Ri}	**Unidades temáticas de referência do objeto matemático**	**Valor (verdadeiro/falso)**
U_{R1}	O foco e a reta diretriz designam uma parábola que não é uma função, pois não relaciona grandezas.	V (S_1), F (S_2, S_3)
U_{R2}	A parábola, quando associada a uma equação do segundo grau, indica uma função quadrática.	V (S_2, S_3), F (S_1)
U_{R3}	A parábola é um gráfico de uma equação quadrática.	V (S_3), F (S_1; S_2)
U_{R4}	A parábola é um corte de cone circular reto por um plano perpendicular a uma diretriz do cone; desse modo, não é a representação gráfica de uma função quadrática.	V (-), F (S1; S2; S3)
U_{R5}	O gráfico de uma função quadrática, para ser considerado uma parábola, deve ter como propriedade que para todo ponto sobre a curva, o quadrado	V (S3), F (S1; S2)

	construído sobre sua ordenada y é exatamente igual ao retângulo construído sobre sua abscissa x e o latus rectum.	

Fonte: Autor (2019).

Não são todas as assertivas descritas no quadro acima que remetem à ideia de função quadrática. No capítulo anterior, apresentamos os três significados que constam no quadro, onde eles foram apresentados para fazer menção aos status da parábola no contexto das inter-relações no espaço GAG. Agora, no presente capítulo, tentamos dialogar com as categorias utilizadas para organizar os enunciados das questões derivadas de Q_0. O que pode ser sintetizado no quadro a seguir.

Quadro 8 – Equivalências: unidades de registro, status da parábola, categorias de análise das PM e grupos/tarefas

Unidades temáticas de referência	Valor atribuído aos significados (verdadeiro/falso)	Categorias/domínio sistema GAG	Grupos/tarefas
U_{R1}	V (S_1), F (S_2, S_3)	C_2 e C_3 Domínios Geométrico e Algébrico	G2 – τ_{3G2} G4 – τ_{3G4}
U_{R2}	V (S_2, S_3), F (S_1)	C_2 Domínios Algébrico e Gráfico	G3 – τ_{3G3} G5 – τ_{3G5}
U_{R3}	V (S_3), F (S_1; S_2)	C_1 e C_2 Domínio Gráfico	G3 – τ_{3G3}
U_{R4}	V (-), F (S1; S2; S3)	- - - - --- ----- ----	----------------------
U_{R5}	V (S3), F (S1; S2)	- - - - - --- - - --	-----------------------

Fonte: Autor (2019).

Essas U_R do quadro 8, acompanhadas dos valores verdadeiro ou falso, dados aos três significados relativos aos status da parábola, complementam os significados dos enunciados elaborados pelos participantes da pesquisa, bem como de parte das respostas (o que justifica as técnicas/*logos*). No entanto, como podemos verificar nesse quadro, a unidade U_{R4} não se refere a nenhum dos três significados que utilizamos. O significado implicitamente ligado a tal assertiva não foi mobilizado nas praxeologias matemáticas descritas nesse estudo.

Podemos dizer também que a U_{R5} não foi mobilizada nas seis praxeologias descritas em nenhumas das quatro seções. Um significado específico para ela também não foi proposto ou identificado na literatura consultada. No entanto, independentemente da experimentação, produz um valor verdadeiro para o significado S_3.

A relação entre a unidade U_{R1}, com as categorias C_1, C_2 e C_3, respectivamente, descrita abaixo, se deve ao caráter geométrico do suposto domínio que alicerça as praxeologias, possivelmente, construídas e categorizadas nas discussões anteriores nas seções de desenvolvimento do PEP.

– U_{R1} com as categorias C_1, C_2 e $C_{3:}$ *O problema posto em Q_0, se resolve no campo dos conhecimentos da física. Considera-se, nesse caso, hipóteses do tipo de lançamento e o seu ângulo e velocidade*. O *problema posto em Q_0, se resolve no campo dos conhecimentos matemáticos. Considera-se a ideia de lugar geométrico, a partir daí, pode-se pensar em contribuições da Mecânica Clássica*. O *problema posto em Q_0, se resolve com a amalgamação de técnicas e noções da Física e Matemática. Parte-se da ideia do tipo de lançamento, sem deixar de considerar simultaneamente a ideia de lugar geométrico*.

Isso pode ser visto conforme a ideia de uma construção a partir da noção de lugar geométrico, o que vincula as U_R a três categorias. A primeira está contemplada se considerarmos que, historicamente, os problemas associados à noção base eram inerentes aos problemas de estudo dos movimentos dos corpos. Na categoria 2, estamos falando de um objeto matemático. O significado verdadeiro atribuído a essa U_R indica muito bem isso, além de ela própria trazer elementos que denotam um processo de algebrização da Geometria, pela sua relação com um objeto bem definido na Geometria Analítica.

A U_{R2} caracteriza-se por ser uma praxeologia em que há uma tentativa explícita de esboçar a parábola e aproximar as equações relativas à situação do contexto do estudo dos movimentos de um projétil a uma equação quadrática. Aproximação essa com a noção de modelo funcional polinomial do segundo grau e, por isso, associado, no quadro, aos domínios algébrico e gráfico.

Já a U_{R3}, foi associada às categorias 1 e 2, porque, ao mesmo tempo que uma equação quadrática com significado entendível nos problemas da Física foi representada graficamente por uma parábola, também pressupõe-se que há uma compreensão do objeto no contexto intramatemático (a parábola é um objeto, na Matemática, que tem pelo menos dois status bem definidos: cônica, objeto da Geometria Analítica; e gráfico de uma função polinomial do segundo grau, objeto da Análise Real). Dizemos isso pelo fato de as Praxeologias Matemáticas analisadas apresentarem o esboço de parábola construída no plano cartesiano. Nesse caso, os domínios predominantes são algébricos e gráficos, por não haver alicerce nas propriedades geométricas da parábola.

Na seção 3 da experimentação do PEP, já visualizamos, pelo tipo de lançamento (oblíquo) considerado por alguns grupos na proposição de Q_2, uma certa aproximação com a ideia de parábola. Pelos enunciados descritos naquela seção, é possível falarmos em convergências das unidades de significados, entendidas aqui como aquelas advindas dos próprios dados. Tais convergências aparecem no sentido de pensar a resolução das questões propostas pela noção de lugar geométrico, da apresentação de um modelo gráfico com descrição de trajetória parabólica que, por sua vez, é fruto do pensar sobre a pertinência do uso de um modelo pautado no lançamento oblíquo, e no reconhecimento das equações utilizadas nas técnicas apresentadas como modelos de equações quadráticas. Situações que nos conduzem ao encontro da função quadrática como parábola.

Como vimos na descrição da seção 4, existem, nos enunciados e nos ostensivos presentes nas técnicas, pistas (conteúdos) que apontam para uma suposta compreensão do objeto que compôs nossa intenção didática. Essa inferência se deve à identificação da praxeologia apresentada por um grupo que chegou à noção de parábola de segurança (sem utilizar essa expressão) e parece ter compreendido-a como uma relação funcional. No entanto, matematicamente, há de se ressaltar que se trata não de uma função quadrática, mas de uma composição de função.

Quanto aos gestos de estudo mobilizados, somente a estrutura completa que envolve as perguntas, respostas e justificativas das respostas mostram parcialmente que estavam embasando as práticas desenvolvidas no PEP nas perguntas e respostas e/ou mídias e meios. A estrutura do desenvolvimento do PEP, aponta para a noção de gerador de tarefas e variáveis didáticas (CHAACHOUA & BESSOT, 2019).

A questão central aqui, quanto à última noção do parágrafo anterior, é que algumas tarefas são ingredientes técnicos de outras tarefas. Isso ocorre na experimentação. As tarefas que surgem ao longo das quatro seções se alicerçam nas tarefas anteriores, são, pois, ingredientes das técnicas tanto da tarefa deduzida de Q_0 quanto das tarefas elaboradas a partir dela.

As técnicas também têm ingredientes tecnológicos que as agrupam do ponto de vista do espaço GAG. Isso compõe parte importante da estrutura do MPA, que, dentre outros objetivos, enseja que as tarefas construídas com base nas questões propostas pelos grupos constituam exemplos de implementação desse MPA.

Assim, uma caracterização pós experimentação do PEP e por consequência do MPA é dada da seguinte forma: o MPA é um modelo de Praxeologias Matemáticas pautados nos quatro "T_s" do conjunto praxeológico, o qual, por sua vez, modela a atividade matemática de uma pessoa numa instituição. O que está em jogo, com esse modelo denominado alternativo, é a modelagem de práticas institucionais cujas noções didáticas integrem o *logos* da PM, ou seja, os ingredientes que justificam as técnicas realizadas para desenvolver ações humanas matemáticas sofrem, de algum modo, a influência de noções não estritamente matemáticas.

No caso específico dessa investigação, o MPA, considera um tipo de tarefa, técnicas específicas para resolver essa tarefa, subtarefas como ingredientes de técnicas, e o discurso que justifique tais técnicas (*logos*). O *logos* esperado pelo tipo de tarefa proposta inicialmente (Q_0) tem como ingredientes as inter-relações do espaço GAG (domínios matemáticos geométrico, algébrico e gráfico). Destarte, tais ingredientes aparecem nas questões propostas (tipos de tarefas) e nas técnicas, de modo que sejam minimizados os efeitos da incompletude da atividade matemática institucional.

3.4.2 Aspectos matemáticos da experimentação

Ao analisar possíveis praxeologias em que uma tarefa seja a Q_0, apresentada no início da descrição da experimentação do PEP, nos deparamos com outras questões que norteiam nossas reflexões: As funções quadráticas têm um status geométrico? Ou somente algébrico e gráfico?

Vamos retomar a ideia das inter-relações entre os domínios matemáticos no espaço GAG. Falamos em domínio gráfico, mas nos questionávamos se não seria apenas um status da função. Mantivemos e sustentamos os três domínios, mesmo considerando o que Chauvat (1999) nos chama atenção. Para esse pesquisador, a noção de função é construída de maneira contrária à ideia de curva. Se o estudo das funções é previsto de acordo com uma abordagem intuitiva, com a ajuda quase exclusiva da linguagem gráfica, é provável que o estudo das funções seja baseado em propriedades que se arriscam a ser específicas ao quadro geométrico.

Tais ideias têm elementos que nos parecem caros quanto ao caminho adotado no MPA implementado nessa investigação. Há um destaque para o que fizemos: se a noção de função normalmente tem sido construída contrária à ideia de curva, nossa proposta foi justamente o oposto: a noção de função quadrática a partir da exploração da curva que a representa. E, de fato, as propriedades do domínio geométrico foram cruciais tanto quanto as do domínio algébrico. O que nos leva a sustentar o domínio gráfico é que existem propriedades da parábola que bebem de propriedades teorizadas no campo da Análise, que parecem não se sustentarem exclusivamente nas propriedades geométricas, são analíticas mesmo no que se refere ao ostensivo figural (gráfico).

Na construção do ostensivo gráfico que representa uma função quadrática, por exemplo, não há uma exigência de enxergarmos o foco e a reta diretriz, ou mesmo constatar que são equidistantes os segmentos que partem do foco a qualquer ponto da curva e do foco a reta diretriz.

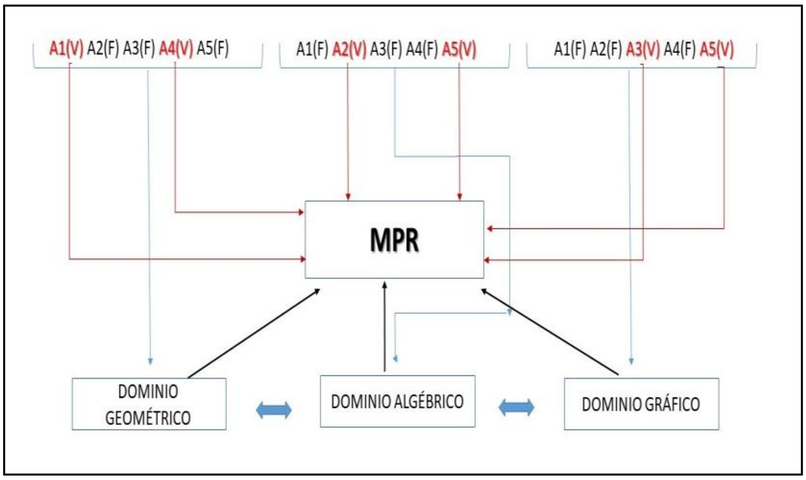
Nas Praxeologias Matemáticas desenvolvidas, não se pode dizer que a função quadrática tenha propriamente um status geométrico, mas a sua forma gráfica tem raiz num ente geométrico, uma cônica, cujas propriedades se perdem no saber-fazer institucionalizados para o estudo desse tipo de função, até mesmo no ensino superior, e a própria noção de lugar geométrico recorrida por alguns grupos na experimentação.

Mas será que isso se deve ao fato de a álgebra simbólica bloquear o conhecimento geométrico? Não tentamos responder diretamente a essa questão, mas, ao inverter a ordem natural didática do ensino do saber função quadrática, temos indícios do quanto um trabalho puramente algébrico pode interferir na construção praxeológica desse saber nas instituições.

Apesar de nossos esforços serem para analisar descritiva e analiticamente as relações GAG, indubitavelmente, podemos fazer um paralelo com uma importante noção da TAD, a de atividade matemática, a partir do que sintetizamos acima. O MPA experimentado nada mais é do que o intento de criar uma nova matemática. Não no sentido restrito da produção de pesquisas matemáticas, mas no contexto do estudo de matemática num sistema didático, utilizar ferramentas matemáticas que eram desconhecidas pelos estudantes diante de uma Q_i integrante de uma família de questões Q.

Deste modo, para responder uma questão Q_i, partindo de uma solução ancorada nas relações entre os domínios geométrico, algébrico e gráfico, em que se configurem os três significados da parábola considerados nesse estudo, uma possível escolha didática é amalgamar técnicas que têm vinculação com os três principais significados vinculados ao espaço GAG, como pode ser visto na figura a seguir.

Figura 29 – Relação significados da parábola e o espaço GAG



Fonte: Autor (2018)

Os principais ingredientes que compõem as técnicas das tarefas criadas pelos grupos participantes da investigação são integrantes dos domínios mostrados na figura 29. No quadro abaixo, associamos os referidos ingredientes aos ostensivos utilizados nas estratégias apresentadas pelos grupos (nas seções do PEP). De modo geral, foram recorrentes os ostensivos escriturais na forma de equações. Assim, as tarefas/subtarefas que abordam a noção de equações são ingredientes de destaque nas referidas técnicas e também discursos tecnológico-teóricos que as justificam, como as propriedades implicitamente mobilizadas nas equações.

No quadro a seguir, mostramos a articulação entre os domínios do espaço GAG, os ostensivos e os ingredientes das técnicas que surgiram especialmente na quarta seção da experimentação.

Quadro 9 – Síntese da articulação entre elementos da PM na experimentação do PEP

Bloco do Saber-Fazer		Articulação entre objetos ostensivos, não ostensivos e saber-fazer da PM		Ingredientes das técnicas
Tipo de Tarefa (T)	Técnica (τ)*	Objeto ostensivo	Objeto não ostensivo	Tecnologia (θ) Teoria (Θ)
T_{3G2} **T_{3G3}** T_{3G4} T_{3G5}	τ_{3G2} **τ_{3G3}** τ_{3G4} τ_{3G5}	Curva – conjunto dos pontos que gozam de uma mesma propriedade; **Equações/leis que representam algebricamente uma função;** **Gráfico da função.**	**Noção de lugar geométrico;** **Noção de função quadrática;** Noção de parábola como cônica.	Subtarefas que expressem técnicas com as seguintes características: **Modelar situações de dependência entre duas grandezas por fórmulas** **Esboçar gráfico de dependência entre duas grandezas** Modelar geometricamente a dependência entre duas grandezas – lugar geométrico **Determinar uma quantidade a partir de outra** Comparar duas quantidades **Estudar as variações de uma quantidade** Otimizar uma quantidade

Fonte: Adaptado de (2019)

Destacamos, no quadro acima (em negrito) as relações a partir da tarefa e técnicas do grupo 3, que apresentaram um modelo algébrico que expressa nossa intenção didática. Como pode ser visto na descrição da técnica e discurso tecnológico-teórico, seção 4 da experimentação, os ingredientes destacados aparecem, de alguma forma, na técnica ou na sua justificativa de forma um tanto quanto implícita.

As técnicas dependem dos ostensivos utilizados, os quais, por sua vez, mantêm uma relação com os não ostensivos (as noções, conceitos, etc). São esses objetos não ostensivos que auxiliam na justificativa para validade da técnica. Veja que na última coluna, a que apresenta ingredientes das técnicas, são colocadas ações que expressam ideias diferentes relativas à função quadrática.

O grupo 3 tem como modelo o conjunto de três tarefas propostas no PEP, para as quais tentam implicitamente unir tarefas e técnicas por propriedades comuns a elas. No quadro a seguir, sintetizamos tarefas e técnicas que nos possibilitam enxergar um esboço de Organização Matemática Local. Na dialética de mídias e meios mobilizada, verificam-se afirmações contidas nas técnicas e controlam-se os resultados que permitem chegar o mais próximo possível da resposta esperada institucionalmente. Verificar e controlar, nesse contexto, exprimem tarefas que não são matemáticas, mas didáticas essenciais ao *logos* da Praxeologia Matemática em discussão.

Quadro 10 – Síntese das tarefas e técnicas apresentadas pelo grupo 3

Tarefa	Técnica
T_{1G3}: *Determine o alcance do lançador e o espaço do acontecimento.*	(τ_{1G3}): ostensivo escritural - *O alcance é de y metros de altura e x de comprimento. O local do acontecimento pode ser na reta, no plano e no espaço. Ingrediente da técnica (esboço de 3 situações - subtarefas do tipo esboçar lançamentos)*
T_{2G3}: *Sabendo que o alcance de um projétil é de y metros de altura e x metros de comprimento, e considerando que o lançador está em uma reta, plano ou espaço, determine um lugar em que qualquer objeto estaria protegido.*	(τ_{2G3}): Ostensivo escritural - *No caso da reta, existem infinitos locais para o objeto estar seguro. Basta ele se localizar em* $(x, +\infty)$ *ou* $(-\infty, -x)$ *tendo como referência o lançador localizado na origem da reta. No caso do plano, o objeto deve se localizar no foco da circunferência de centro no lançador e raio x. No caso do espaço, seria uma elipsoide; fora dele, o objeto estaria seguro. O lançador estaria no ponto médio dos focos da elipse rotacionada.*
T_{3G3}: *Sabendo que o alcance de um projétil é de y metros de altura e x metros de comprimento, e considerando que o lançamento é oblíquo, com velocidade constante, com ângulos num intervalo [0, 180], determinar o lugar em que qualquer objeto estaria protegido dos projéteis lançados.*	(τ_{3G3}): Ostensivo escritural. Vê figura 27, página 123

Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Identificada uma ação, o grupo parece ter utilizado informações disponíveis nas mídias (verificação de asserções) e foram cuidando do controle dos resultados. Observe-se que da T_{2G3} para T_{3G3}, as mídias consultadas, parece ter permitido restringir o intervalo de ângulo de lançamento do projetil, e isso deve ter sido possível mediante tentativa de controle dos resultados das questões anteriores. Mas, existe um salto no que tange as soluções das duas tarefas supracitadas. Por não serem mostradas outras tarefas intermediarias, e por não ter ocorrido observação do passo a passo do trabalho desse grupo, não podemos falar sobre as condições que de fato permitiu a chegada a solução da última tarefa, onde o grupo apresentou solução compatível com a noção de parábola de segurança.

Pela apresentação das tarefas e técnicas do grupo 3, mostrados no quadro 9, podemos identificar subtarefas, como ingredientes das técnicas usadas pelo mesmo:

- Determinar o alcance de um projétil dadas diferentes condições de lançamento;

- Determinar o alcance de um projétil sabendo que o lançamento é obliquo e que o intervalo do ângulo de lançamento é [0º, 180º];

- Determinar equação (ostensivo que representa função) que delimita zonas de risco e segurança (que é um modelo quadrático).

Quanto a integração para esse grupo em especifico, parece ter sido viabilizada muito mais pelo tipo de tarefa proposta, em que só há abandono de hipótese na passagem de Q_0 (tentativa de resposta) a Q_1. No que tange as técnicas, o que representaria uma integração mais eficiente da dialética de mídias e meios, podemos inferir que pode institucionalizar um conjunto de técnicas que tem como ingrediente tecnológico uma mesma propriedade que é nossa intenção para esse PEP, ou seja, as condições para que tenhamos uma parábola de segurança. Tal noção, já desponta de forma implícita desde a primeira tarefa, cuja solução do grupo dava conta do tipo de lançamento. Mas porque os outros grupos não chegaram a mesma compreensão mesmo que propondo tarefas semelhantes a do grupo 3, se a maior parte deles, propuseram tarefas que tocavam na questão da noção de alcance?

Na integração pelo tipo de tarefa, o fio condutor foi: determinar a partir do tipo de lançamento, um modelo funcional que descreva a trajetória de um projétil, de modo a informar sobre locais onde um objeto não seria atingido por tal projetil. A sucessão de lançamentos oblíquos, após verificação de afirmações sobre o tipo de lançamento do projétil, e controle de resultados por propriedades matemáticas resulta num conjunto de pontos que descreve uma parábola, a ser representada nessa situação especifica por um ostensivo escritural algébrico como mostrado na solução do grupo 3, possivelmente pautado em mídias que tratem do tema.

Na passagem da praxeologia pontual (tipos de tarefas) a local (discurso tecnológico), a integração de noções didáticas, especialmente da dialética mídias e meios, parece ser uma importante ferramenta, justamente pelas tarefas didáticas que são requeridas, de verificar assertivas e controlar resultados que estejam de acordo com certa propriedade matemática, e que une as tarefas propostas.

3.4.2 Contribuições da investigação para discussão no âmbito da TAD

É cada dia mais crescente a quantidade de investigações no âmbito da TAD, a exemplo dos trabalhos realizados no Núcleo Interdisciplinar de Pesquisa em Ensino e Didática das Ciências, Matemática e Tecnologias – NIPEDICMT/Universidade Federal da Bahia (AZEVEDO, 2019; TEIXEIRA, 2019; SILVA, 2016; LESSA, 2016; RITA, 2016; SOUZA, 2015; CARVALHO, 2015). Nas discussões mais recentes, o foco tem sido a experimentação de Percursos de Estudo e Pesquisa – PEP. Esse tem um caráter de dispositivo didático, de formação docente (RUIZ OLARRIA, 2015) e de praxeologia de pesquisa (CHEVALLARD, 2015).

Quanto à utilização, bem como às condições e restrições para planejamento, gestão e implementação de percursos de estudo e pesquisa, surgem algumas inquietações complementares. Possíveis respostas para tais inquietações contribuem em alguma medida para o avanço do campo de pesquisa da TAD, mas também ampliam o sentido de algumas noções teóricas que pareciam consolidadas e axiomatizadas nessa teoria.

Diante do exposto, nos propomos, à medida que apresentamos releitura de algumas noções de base desse quadro teórico, apresentar também nossas inquietações e esboços de respostas.

Primeiro vamos retomar, com base numa conferência de Chevallard (2019), a noção de posição institucional. Esta é básica e parecia não ter mais o que se discutir. No entanto, quando comparada à experimentação que realizamos, ressignificamos a compreensão dessa noção.

Quando falamos do *topos*[20] (papel) de um professor num sistema didático, podemos remeter essa noção à de posição deste ator do espaço didático. Nesse caso, uma posição (I, p), onde I é instituição e p a posição nessa instituição que algum ator pode ocupar, pode estar

[20] Relaciona-se a uma das três funções didáticas teorizadas por Yves Chevallard, a Topogênese, que é a função que diz respeito à divisão dos espaços e aos papéis que o professor e os alunos desempenham e à distribuição de suas respectivas responsabilidades nas aulas (o contrato didático).

ocupada ou desocupada, e isso muda substancialmente a ideia do papel docente nas atividades matemáticas em desenvolvimento numa instituição de ensino.

Pensemos no sistema herbatiano S (X, Y, O). Nessa terna, o Y, figura de quem ou o que mobiliza o ensino, pode ser substituída pelo par (I, P), onde I é instituição e P a figura do professor. Se essa posição está desocupada por uma pessoa, por exemplo, não está desnuda de uma intenção didática, ou seja, de uma intenção de que X, representando um estudante ou grupo desses, aprenda um determinado objeto da cultura matemática.

Cabe ressaltar que, conforme Chevallard (2019), as instituições são construídas por pessoas, e pensamos que as relações e posições também, e é nesse sentido que esse autor afirma que as instituições modelam as pessoas ou suas ações.

Se incluirmos nessa discussão de posições institucionais um terceiro elemento, o objeto (matemático ou de estudo, que pode não ser matemático) e considerarmos as possíveis relações numa instituição que envolvem o objeto, chegamos a um modelo que é compatível com RI ((I, p), o), lembrando que o par (I, p) dá conta de uma posição numa instituição e que denota o objeto nessa relação. Bem, o par RI trata da relação de uma determinada posição numa instituição com um objeto. Vamos nos ater aos objetos matemáticos, e nos referir ao PEP experimentado antes de avançarmos nas reflexões teóricas.

Um PEP, enquanto dispositivo didático, como na situação por nós experimentada, implica diretamente na posição e relação com um objeto numa instituição. Primeiro, porque muda o *topos* não só do professor, mas especialmente do estudante. Observe-se que, sem que sejam feitas descrições da intervenção do pesquisador, é possível acompanhar o desenvolvimento do trabalho dos grupos. Quanto ao professor, pode-se inferir que a posição (I, p) esteve desocupada, enquanto esse p foi ocupado por X (um grupo de estudantes), que de acordo com os pressupostos do PEP, trabalharam de forma autônoma.

Desse modo, é crucial pensar num processo de planejamento de um modelo praxeológico alternativo, que trará os fundamentos de um PEP, nas posições a serem ocupadas e/ou desocupadas na sua implementação, bem como as relações decorrentes dessa, com o objeto matemático a ser estudado. Vale ressaltar que, apesar de considerarmos objetos matemáticos nessa discussão, Chevallard (2019) define objeto (em um grupo humano ou sociedade) como qualquer coisa que existe para, pelo menos, uma pessoa ou uma instituição (naquele grupo ou sociedade).

Pensar nessas questões implica na ressignificação também de outra função didática, alvo de algumas pesquisas no âmbito internacional no seio da TAD, a cronogênese[21]. A condição da posição institucional e as relações existentes numa instituição, interferem de forma crucial na questão do tempo didático. Se ampliarmos o sentido de instituição para o ambiente material ou imaterial destinado ao ensino e/ou estudo de objetos do saber, o que vai depender do reconhecimento de um objeto nesse processo, podemos pensar em alguns momentos fora das instituições ditas oficiais, em que a posição institucional é desocupada pelo professor, mas que pode contribuir com os momentos em que o docente se faça presente.

O PEP cria esse ambiente em que se faz, após planejamento e primeiros passos da sua implementação, desnecessário o professor assumir uma posição p de destaque numa instituição I (I, p). Assim, expandir o tempo didático para além dos 50 minutos de aula, tem imbricado dois aspectos: o primeiro refere-se à questão de que o tempo didático normalmente não coincide com o tempo cronológico das realizações didáticas; o segundo presenta uma tentativa da qual não se tem clareza de todos os elementos que compõem esse processo. Este último não é algo trivial de se realizar e, ainda que tivéssemos como método para essa investigação a engenharia didática como processo controlado, o tempo didático está ligado mais ao aprender do que ao ensinar, e o imediatismo das investidas de ensino, tem se mostrado incompatível com o tempo e maneiras de aprender.

Ademais, o tempo (seja de ensino ou de aprendizagem) é uma importante restrição institucional, que parece ser negligenciada por parte dos envolvidos no processo educativo. Quando dizemos que o PEP pode mitigar os efeitos da incompletude da atividade matemática institucional, é de posse da noção da cronogênese. É uma forma de dizer que esse dispositivo atua na dialética tempo de ensino e de aprendizagem, que é interna à dissociação entre o sabe-fazer e o *logos* que o justifica. Nesse sentido, a incompletude da atividade matemática institucional é resultado também da restrição institucional em torno da gestão do tempo didático.

Uma vez feita experimentações com licenciandos, não nos escapam inquietações tais como:

– Quais condições reais o Modelo Praxeológico Alternativo (MPA), proposto nessa investigação, implementado por um Percurso de Estudo e Pesquisa – Dispositivo Didático

[21] Função que rege os tempos didáticos (não cronológicos) e descreve a evolução do conhecimento proposto pelo professor e estudado pelos alunos, ou seja, trata-se do sequenciamento de uma situação didática (CHEVALLARD, 2002).

(PEP-DD), cria para mitigar os efeitos do fenômeno que contextualizou a problemática apresentada por nós e que restringe a atividade matemática institucional?

– Quais as condições e restrições institucionais para que o MPA transformado em PEP-DD possa viver numa instituição de formação docente?

As reflexões sobre o planejado e o realizado na experimentação do PEP se complementam com tais inquietações. Primeiro precisamos destacar que o PEP foi utilizado como dispositivo didático, por isso o uso da sigla PEP-DD. E esse modelo parece ser útil ao propósito de analisar integração de noções didáticas nas Praxeologias Matemáticas, especificamente no *logos* dessa praxeologia. Uma das razões refere-se aos pressupostos desse modelo que, como representante de modelos de aprendizagem embasados em investigação ampara-se na proposição de perguntas, elas movem o desenvolvimento do PEP. No que tange as praxeologias profissionais, altera a relação do docente com o objeto a ensinar, a medida em que, o topos do professor tabém se altera. Esse assume um papel de mediador de situações que estimulam a elaboração de perguntas.

Como a dialética de perguntas e respostas que está no coração do PEP é compreendida como gesto de estudo, podemos inferir que ela está naturalmente imbricada no seu desenvolvimento, na produção ou reconstrução de Praxeologias Matemáticas. É visível sua presença no bloco do saber-fazer, onde são apresentadas as tarefas e técnicas. Isso é facilmente perceptível ao se acompanhar a descrição dos dados da pesquisa. O que não está explícita, e depende de um esforço interpretativo maior, é sua presença no bloco tecnológico-teórico (*logos*).

Se no *logos* da PM apresentam-se as propriedades matemáticas que justificam técnicas usadas na resolução de tarefas, como o gesto de estudo de perguntas e respostas estaria integrado a um aspecto da PM que parece estritamente matemático?

Ora, pensamos que um elemento que não pode ser esquecido no decorrer dessa inquietação é o fato de termos apresentado um fenômeno didático que trata da dissociação entre esses blocos que compõem a Praxeologia Matemática. E, se não devemos pensá-los na PM separadamente, a noção de dialética de perguntas e respostas está em primeiro plano ligada ao bloco do saber-fazer, mas, por este ser vinculado ao *logos*, tal dialética interfere na proposição de discursos que justificam o saber-fazer desde a elaboração de tarefas até respostas para estas. Essa reflexão já inclui esboço de resposta para a primeira inquietação que apresentamos acima.

No que tange à segunda inquietação, precisamos retomar a noção de cronogênese, pois talvez esse seja o grande entrave para vivências de modelos de aprendizagem embasados em investigação, frente ao extenso volume de noções didático-matemáticas que integram os currículos de cursos de formação docente.

O PEP permite a gestão do tempo didático, via dialéticas que são incorporadas ao seu planejamento, gestão e experimentação. Falamos da dialética de perguntas e respostas, mas outra noção didática cuja integração pretendíamos analisar foi a das mídias e meios. Esse gesto de estudo parece ser crucial também para gestão do tempo, pois requer uma postura de busca de informações que não deve ocorrer no tempo de ensino, mas no de aprendizagem, e que permite confrontar diferentes informações o que não parece ser viável no tempo didático na sua dimensão tempo de ensino que coincida com o cronológico.

Desse modo, uma condição institucional, estaria ligada à mudança de paradigma da instituição do monumentalismo dos saberes para investigação e questionamento do mundo, com dois gestos de estudo bem definidos: propor perguntas e respostas, confrontar informações que advém de e para diferentes meios.

Outrossim, a implementação do PEP, além de reconstruir modelos praxeológicos (por isso chamados alternativos), se opõe aos modelos engessados pelas obras didáticas (livros) e práticas dominantes nas instituições, reconstruindo, desse modo, o *topos* também da Instituição I e alterando o significado do tempo didático nas posições assumidas nessa instituição. Em outras palavras o modelo dominante se configura por uma visão algébrica, enquanto o MPA é um resgate da visão geométrica como provedora do ensino de funções.

No tocante às características da atividade matemática descrita por Chevallard, Bosch & Gascón, (2001), o dispositivo didático que viabiliza a implementação do MPA proposto nessa investigação passa necessariamente a ação de ensinar e aprender matemática, que tem uma vinculação com a primeira característica (usar uma matemática conhecida), para ir ao estágio esperado ideologicamente por um professor-pesquisador da Didática da Matemática: o dos atores do sistema de ensino assumirem papéis similares ao do matemático, de construírem uma nova matemática para o contexto educativo.

Ademais, se retomarmos os níveis de co-determinação didática, situamos o MPA, no mesmo nível do MER, no nível das questões, no entanto, com possíveis implicações nos níveis dos temas e dos domínios, especialmente pelo seu ensejo de motivar a inter-relação entre os espaços geométrico, algébrico e gráfico.

Considerações Finais

Nesta seção, nosso desígnio consiste em retomar e tentar arrematar algumas questões referentes aos dados produzidos na experimentação, confrontando-o com a tese e objetivo geral, e promover algumas breves reflexões teóricas complementares a partir das noções da TAD utilizadas e as implicações para o Ensino de Matemática.

Primeiramente, destacamos as possíveis implicações dos resultados dessa investigação para a área de Ensino de Matemática. Reconsrtuções de Organizações Didáticas de professores de Matemática podem ressignificar substancialmente as relações entre os sujeitos e os objetos do saber nas instituições escolares na Educação Básica e também no Ensino Superior.

Para contextualizar tais reconstruções, retomamos o papel da integração de noções didáticas no logos das Praxeologias Matemáticas numa determinada instituição. São comuns discussões sobre o alcance de ações didáticas para resolução de problemas relativos aos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, o que tem nos conduzido a pensar que o problema não está somente nas escolhas para difusão dos saberes matemáticos, nem mesmo nos objetos do saber, mas em algo que não é intrínseco desses objetos. Essa reflexão nos levou ainda, a pensar no papel de gestos ou de ações que uma vez mobilizadas poderiam fornecer um certo grau de autonomia necessária ao estudo de qualquer saber.

Parece cada dia mais clara a ideia de que estudar Matemática, não se refere apenas a ter um contato passivo com os objetos do saber e com tarefas de graus de complexidade distintos. Estas têm papel fundamental na difusão do corpo de conhecimentos matemáticos, mas é preciso dar outro sentido aos nossos gestos diante de situações construídas para que aprendamos objetos da matemática.

Nesse contexto, a integração a que nos referimos, não se trata de uma tentativa de forçar que algo que não é matemático seja incluído nas teorias matemáticas, mas um processo que ocorra naturalmente a partir das situações que propomos. Desse modo, além da ideia defendida por Artaud (2019) de integração das referidas noções didáticas no logos da PM, o que fica dessa investigação para o Ensino de Matemática, são as reflexões, em lugar de receitas, sobre as situações para ensinar Matemática que podem evocar gestos de estudo, talvez escondidos nos sujeitos, e as possibilidades de reconstrução das Praxeologias Matemáticas viabilizadas por por tais gestos.

Atua ainda, na questão apontada por Vandebrouck (2011) sobre as situações que não evocam ostensivos gráficos para chegar às ideias das funções, mas de forma que isso seja feito por situações num contexto de aprendizagem por investigação. Desse maneira, altera a lógica do tipo de situação, bem como das tarefas comumente utilizadas nas aulas de Funções, resgatando a interrelação entre objetos ostensivos ligados a domínios matemáticos diferentes, mas especialmente no caso dessa investigação, também a dois diferentes status da parábola. A partir dessas primeiras considerações sobre efeitos no campo do ensino, pode-se chegar, assim, a outras reflexões que são mais especificas no que se refere aos dados construídos no capítulo 3.

Assim, é importante começar com uma reflexão sobre o conceito de função ao qual nos referimos algumas vezes como noção. Embora seja pertinente conduzir o estudante ao longo da trajetória percorrida pela comunidade de matemáticos por meio de situações didáticas planejadas para esse fim, podem ocorrer situações nas quais o sequenciamento didático não tenha as mesmas condições de seguir o histórico. Assim, consideramos pertinente recuperar aspectos do sequenciamento histórico no didático, longe de querer mostrar que este é o único caminho, mas como uma alternativa didática que ainda pode ser mais bem explorada.

Com o intento de analisar o alcance de um modelo praxeológico alternativo, implementado por um PEP, na reconstrução de praxeologias de futuros professores de matemática, quando integramos no *logos* das suas praxeologias matemáticas noções didáticas, discutimos as condições e restrições dessa proposta didática a partir da abordagem da função quadrática e do duplo status da parábola.

Isso implica dizer, que no campo teórico, tem-se mais um trabalho para fortalecer uma comunidade de estudo de futuros professores de Matemática. Esse fortalecimento, foi pensado no sentido da superação dos efeitos da incompletude da atividade matemática institucional. Em outras palavras, compreender maneiras de substituir gradativamente, nas práticas institucionais, as respostas pelas questões/perguntas.

Para uma melhor explicitação de fatores que julgamos relevantes destacar, o restante do texto dessas considerações do trabalho segue distribuído em dois tópicos que podem ampliar nossas possibildades de estudos futuros.

Contribuições ao estudo de noções da TAD

Iniciamos retomando uma questão proposta por Chevallard em suas recentes reflexões sobre as análises dos gestos de estudo: *Quais são as condições e restrições que controlam o estado de desenvolvimento dos meios / ambientes dialéticos em nossas sociedades e especialmente na escola?*

Não apresentamos respostas, mas reflexões pautadas naquelas feitas pelo próprio Chevallard, e que conduziram a presente pesquisa. Essa dialética (mídias e meios) surge como auxílio à prova, isso, no contexto dessa investigação. A argumentação no ensino de matemática, num modelo que pode ser descrito de forma simples: enuncio perguntas e apresento argumentos que mostrem a validade da pergunta ao mesmo tempo que mostrem a validade das próprias respostas. E, nesse ponto, as duas dialéticas abordadas ao longo desse relatório de investigação estão intimamente ligadas.

Sabemos que muitos fatores afetam a área educacional, mas, significativamente, existem alguns que podem ou não fomentar gestos de estudo, que parecem aproximar ou afastar os sujeitos de elementos esperados na atividade matemática (o sujeito fazendo matemática). Mesmo esta pesquisa está sob a influência vigorosa desses dois gestos de estudo e da necessidade de provarmos nossas hipóteses de trabalho, especialmente na entrada experimental descrita e analisada no terceiro capítulo.

Apoiados no sistema herbatiano, nosso papel, não é mais de professores, como concebíamos até pouco tempo atrás. O estudante tem um projeto de pesquisa pessoal (suas inquietações). Cabe a nós orientá-lo nessa busca, numa configuração didática que pode ser representada da seguinte forma:

$$(S(X, Y ; Q) \rightarrow R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \ldots, R_n^{\lozenge}, O_{n+1}, \ldots, O_m) \hookrightarrow R^{\heartsuit}.$$

Onde uma equipe de estudantes *X* (ou uma pessoa), com ajuda ou sob orientação de vários "assistentes de estudo" ou "diretores de estudo" que compõem a equipe *Y*, frente alguma pergunta *Q*. O sistema didático é assim constituído: *S* (X, *Y*; *Q*). Produzem uma série de respostas com selos institucionais no estudo de diferentes obras, até que se chegue a uma resposta aceita de acordo com a epistemologia geral da Matemática, mas com um selo pessoal.

Com efeito, o gesto de estudo das mídias e meios se manifesta no desenvolvimento do PEP como oposição a simples cópia de práticas matemáticas de uma cultura dominante. Antes, copia-se a postura dos espíritos inquietos, os quais, frente a um meio adidático, questionam os elementos desse meio e se questionam. Isso é um indicador de que tal noção didática se integra ao discurso tecnológico-teórico das praxeologias matemáticas de um sujeito. Em outras palavras, se uma pessoa questiona o objeto, propondo questões derivadas de uma Q_0, estará ela integrando algo ao *logos* dessa praxeologia, algo que não é matemático, mas didático, pois não é intrínseco ao saber, mas necessário para compreendê-lo. Desse modo, representa o sistema mostrado acima.

Vemos, nessa postura didática, que não se trata apenas de um caso de criação dos elementos do saber que lhe são foco de estudo por uma devolução em um meio adidático, mas um processo em que se toma emprestado da cultura (por meio das mídias e contato com um determinado meio) elementos que permitem re (construir) formas de ver o mundo tendo a matemática como ferramenta.

Nesse ínterim a questão $Q_{0,}$ diretriz do PEP experimentado, é, ao mesmo tempo, mídia e meio, pois há a intenção de informar. Informação essa sobre um tema que os estudantes ainda não haviam pensado. É meio e adidático porque a intenção do objeto de ensino, não ficou evidente. Ela produz mais mídias e mais meios distintos, que ganham vida própria à medida que os grupos avançam no percurso.

Diante do exposto, surge uma inquietação, em torno da dialética das mídias e meios. Ela pode ser integrada a práticas institucionais num modelo distinto do que planejamos para essa experimentação ou fora do domínio das discussões sobre praxeologias matemáticas? De que forma? Essas questões apontam próximos passos a serem investigados.

Ademais, quanto à implementação do PEP, além de um novo modelo praxeológico (chamado alternativo por se opor aos modelos engessados pelas obras didáticas e práticas dominantes nas instituições), reconstrói também o *topos* da Instituição I. Por esse motivo, inferimos que o MPA, que propomos dá indícios de que a atividade matemática evolui sensivelmente da condição de uso de uma matemática conhecida, quando seu uso configura a tentativa de resolução de problemas, à atividade matemática expressa pela criação de uma nova matemática (nova forma de ver sua razão de ser e utilizá-la).

Não foi nossa pretensão tomar a (re)construção de currículos nessa investigação, mas surge outra inquietação sobre o tema. Desse modo, inquieta-nos saber como cobrir o currículo com percursos de estudo e pesquisa. Mas, com base no que foi realizado, interessa mais saber se a integração de noções didáticas teria esse potencial, de ao nível da prática dos sujeitos, especificamente no *logos* de suas praxeologias matemáticas, contribuir de alguma forma com essa cobertura do currículo, tornando mais econômico o trabalho e fazendo uma melhor gestão do tempo didático.

Compartilhamos com Jessen (2018)outra preocupação, a saber: como introduzir um PEP no sistema de ensino e integrar noções didáticas numa Praxeologia Matemática sem apresentar noções específicas da TAD e da didática de modo geral? Tomando-se as dialéticas como noções didáticas, estas podem, de fato, ser integradas sem o esquema herbatiano ou domínio da própria noção de praxeologia, sem a noção de relações e posições numa instituição?

No tocante aos significados das tarefas e respostas, na fase da experimentação do PEP, ao interpretá-los, estamos pensando em porque um grupo de estudante age de tal maneira? Por consequência, queremos identificar o discurso que justifica esses saber-fazer são a tecnologia e a teoria (*logos*) da Praxeologia Matemática em jogo, justamente o bloco no qual se pretendeu ver a integração de noções didáticas sem que houvesse o aprofundamento dos conhecimentos sobre a TAD, visto que essas noções nem foram minimamente discutidas/apresentadas aos participantes da investigação. Foi uma ação mais intuitiva, à medida que o meio didático era implementado, construído, alterado etc.

Ainda que o *logos* seja variável de acordo com a instituição, o que limitaria as generalizações frente aos resultados aqui apresentados, há que se considerar a invariância da necessidade dos dois blocos que constituem uma praxeologia completa de se acoplarem e, nesse sentido, falamos do fenômeno IAMI, ou melhor, da necessidade de o estudarmos, compreendê-lo e agirmos de modo a mitigá-lo em tais práticas institucionais.

Como vimos na descrição da experimentação, as tarefas são complementares, uma revela a razão de ser da outra, isso é o que motiva o percurso de estudo. Elas devem ser a condição que faz com que existam relações com os objetos, tanto em pessoas como em instituições.

Podemos dizer que o PEP dá um novo significado a essa relação entre pessoas, objetos matemáticos e as instituições. É o que temos mencionado em alguns momentos como razão de ser do objeto. Essa é uma condição que pode ser criada em torno tanto do objeto como da instituição na qual o objeto é reconhecido.

Trabalhamos com um conjunto de condições que é subconjunto de um universo. Isso nos possibilita aprofundar as análises para nosso objeto. Segundo Chevallard, as condições que não posso alterar são restrições (institucionais). Por exemplo, se o currículo não prevê uma forma de construir um modelo praxeológico alternativo ao dominante, temos aí uma restrição institucional, mesmo que, de acordo com a epistemologia, exista uma condição. Mas os modelos epistemológicos de referência e também os praxeológicos de referência, como o proposto nesse estudo, expressam a crença dos pesquisadores, pautados em elementos diversos como noções teóricas, aspectos históricos e epistemológicos, representando, de certo modo, uma autonomia didática no âmbito da epistemologia experimental. Em outras palavras, ainda que não exista a condição institucional, é possível a proposição de um Modelo Praxeológico Alternativo que revele outras razões de ser para o estudo de um objeto numa instituição.

No prolongamento desse estudo, é possível que haja condições para se pensar a caracterização do design de cenários de aprendizagem e produção de diagnósticos para estudantes e professores, contribuindo, de forma direta, com a formação de docentes na perspectiva de trabalho com modelos de aprendizagem por investigação.

Restrições da pesquisa

Como as descrições das praxeologias e suas inferências foram feitas do ponto de vista de um trabalho coletivo (praxeologias de pequenos grupos de estudo, a priori registros do que foi consenso), não é uma tarefa acessível lidar com a forma como os membros do grupo chegam à compreensão do conceito de parábola relacionado às funções quadráticas com amalgamação de propriedades de diferentes domínios matemáticos, mediante participação em um Percurso de Estudo e Pesquisa.

Além do exposto acima, nas análises prévias dessa pesquisa, não demos conta das condições para engajamento dos futuros professores nesse tipo de atividade embasada em investigação, pois este não foi nosso foco. Voltamos a afirmar que nosso olhar esteve voltado, em todo o tempo, para as praxeologias produzidas, pois dela poderíamos extrair elementos que dessem indícios da integração de noções didáticas no discurso tecnológico-teórico das PM. Mas a razão de ser da atividade proposta, ou seja, da questão diretriz do percurso, bem como do PEP como um todo, deve ser alvo de reflexões para o caso de novos estudos sobre o alcance desse dispositivo didático.

Outro fator a ser considerado é como, de fato, concebemos os dados descritos. Em que medida o que chamamos de praxeologias se distanciou da ideia de mapas de conhecimentos do sujeito/grupo (JESSEN, 2019). Bem verdade que a estrutura apresentada em tarefas, técnicas e discurso tecnológico-teórico é intrínseca à noção de praxeologia, e esta modela a Atividade Matemática numa instituição. Mas discutir o território de uma acepção e de outra foi uma tarefa que não demos conta nessa investigação. Acreditamos que pode fomentar reflexões férteis para o campo das pesquisas na TAD.

Referências

ADÚRIZ-BRAVO, A.; IZQUIERDO, M.; ESTANY, A. Una propuesta para estructurar la ensenãnza de la filosofía de la ciencia para el profesorado de ciencias en formación. **Enseñanza de las Ciencias**, n. 20 (3), p. 465-476, 2002.

ANDRADE, R. C. D. **A noção de tarefa fundamental como dispositivo didático para um Percurso de formação de professores**: o caso da geometria, 2012. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2012.

ARAÚJO, P. C., IGLIORI, S. B. C. O método na pesquisa em Educação Matemática. *In*: V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. 2012, Petrópolis, Rio de janeiro, Brasil. **Anais [...]**, Rio de Janeiro, 2012. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/v_sipem/PDFs/GT04/CC16516613591_A.pdf. Acesso em 10 ago 2018.

ARTAUD, M. **Teoria Antropológica do Didático**:observar, analisar, avalaiar e desenvolver uma organização matemática e uma organização de estudo. Notas de curso. Programa de Pós-Graduação em Ensino , Filosofia e História das Ciências. Universidade Federal da Bahia, 2017. Tradução Bartira Fernandes; José Vieira Nascimento Jr.

____________. Des liens entre l'organisation de savoir et l'organisation de l'étude dans l'analyse praxéologique. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.21, n.4, p. 248-264, 2019.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9, n.3, p. 281-308, 1988.

BALACHEFF, N. CK¢, a model to understand learner's Understanding: Discussing the case of functions. In: **El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática.** Volumen 9, Jul - Dic 2017, Cinvestav-IPN, Ciudad de México, pp. 1 – 23, 2017.

BALACHEFF, N., GAUDIN N. Modeling students' conceptions: The case of function. **Research in Collegiate Mathematics Education**, n. 16, p. 183-211, 2010.

BARQUERO, B. Enseñando Modelización a Nivel Universitario: la relatividad institucional de los recorridos de estudio e investigación. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, são Paulo, vol. 29, núm. 52, 2015.

BARQUERO, B.; BOSCH, M.; ROMO, A. A study and research path on mathematical modelling for teacher education. In: CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for

Research in Mathematics Education, Charles University in Prague, Faculty of Education; CERME, Feb 2015, Prague, Czech Republic. pp.809-815.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Trad. Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. São Paulo: Martins Fontes, 1977.

BASTOS, F. História da ciência e pesquisa em ensino de ciências: breves considerações. In: NARDI, R. (Org.). **Questões atuais no ensino de ciências**. São Paulo: Escrituras Editora, 1998, p. 43-52.

BESSOT, A. **Introdução aos elementos de base da Teoria Antropológica do Didático**. Notas de curso. Escola de altos estudos em Didática da Matemática. Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, 2019. Tradução Marilena Bittar.

BOSCH, M. « Plans d'épargne » et modélisation algébrique. Vers une ingénierie didactique des PER. Dans : MARGOLINAS, C. et al. (Éds), **En amont et en aval des ingénieries didactiques.** Grenoble : La pensée sauvage, 2009, p. 81-108.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas : de los "talleres de prácticas matemáticas" a los "recorridos de estúdio e investigación". Bronner, A., Larguier, M., Artaud, M., Bosch, M., Chevallard, Y., Cirade, G. & Ladage, C. (Éds). Diffuser des mathématiques (et les autres savoirs) comme outils conaissance et d'action (pp. 55-91). **Actas** des II^{e} congrès international sur la TAD, 2007.

BROUSSEAU, G. Fondementes e méthodes de la didactique dês mathématiques. **Recherche en Didactique des Mathématiques**, v.7, n. 2, p. 33-115, 1986.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CANCE, C. A. **Projeto canhão**: o ensino de funções quadráticas com auxilio do software Geogebra, 2015. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, São Carlos, 2015.

CANELLA, C. M. S. B. **Funções quadráticas e suas aplicações no primeiro ano do Ensino Médio**, 2016. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Juiz de Fora, 2016.

CARVALHO, E. F. **A Integração de uma proposta de criação e resolução de problemas matemáticos na prática de professores do 6º ano**, 2015. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, Salvador, 2015.

CHAACHOUA, H., BESSOT, A. **A noção de variável no modelo praxeológico**. Notas de curso. Escola de altos estudos em Didática da Matemática. Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, 2019. Tradução Marilena Bittar.

CHEVALLARD, Y. **Vers une didactique de la codisciplinarité**: Notes sur une nouvelle. 2017. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/. Acesso em 10 jun. 2018.

_______. **Sur les praxéologies de recherche en didactique.** 2015. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/. Acesso em 15 fev de 2018.

________. La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. In: **15e Ecole d'été de didactique des mathématiques,** août 2009a, France. **Cours à l'EE**... Clermont Ferrand - IUFM , 2009, disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Cours_de_YC_a_l_EE_2009.pdf. Acesso em 15/06/2017.

________. **La notion de PER** : problèmes et avancées. Toulouse, 2009b. Disponível em < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161>. Acesso em 10 de out. 2017.

________. **Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique**. 2007. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/ . Acesso em: 18 dez. 2018.

_________.L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 19, p. 221-266, Août de 1999.

__________. **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques**: l'approche anthropologique, 1998. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/. Acesso em 2 abr 2017.

__________. **La transposition didactique:** du savoir savant au savoir enseigné. Paris: La Pensee Sauvage, 1991.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar matemáticas**: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Tradução: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001.

COMIN, E. Variables et fonctions, du collège au lycée : méprise didactique ou quiproquo interinstitutionnel. **Petit x**, 67, 33-61, 2005.

COSTA, D. V. R. **Programação no auxílio da resolução de situações-problema e uma abordagem para o ensino de funções afim e quadrática**, 2018. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, São José do Rio Preto, 2018.

DELIZOICOV, D.; ANGOTTI, J. A.; PERNAMBUCO, M. M. **Ensino de ciências**: fundamentos e métodos. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2007.

ESQUINCALHA, A. C. Nicolas Bourbaki e o Movimento da Matemática Moderna. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**. v.2, n.3 set/dez, 2012.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

FARIAS, L. M. S. **Étude des interrelations entre les domaines numérique, algébrique et géométrique dans l'enseignement des mathématiques au secondaire**: Une analyse des pratiques enseignantes en classes de troisième et de seconde. Thèse de Doctorat, Université de Montpellier 2, France 2010.

FARIAS, L. M. S.; CARVALHO, E. F.; TEIXEIRA, B. F. O trabalho com funções à luz da incompletude do trabalho institucional: uma análise teórica. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 20, n. 3, jan. 2019. ISSN 1983-3156. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/40112>. Acesso em: 23 jul. 2019. doi: https://doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i3p97

FARRAS, B. B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. **Educ. Matem. Pesq**, São Paulo, v.15, n.1, pp.1-28, 2013.

FLORENSA, I; BOSCH, M.; GASCÓN, J. The epistemological dimension in didactics: Two problematic issues. CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Feb 2015, Prague, Czech Republic. **Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**, 2015, p. 2635-2641.

FREITAS, E. F. **Um estudo sobre funções afim e quadrática e métodos aalgébricos e geométricos para soluções de equações do primeiro e segundo graus**, 2016. Dissertação

(Mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Instituto de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Fortaleza, 2016.

GARNICA, A. V. M. Pesquisa qualitativa e Educação (Matemática): de regulações, regulamentos, tempos e depoimentos. **Mimesis**, Bauru, v. 22, n. 1, p. 35-48, 2001.

GASCÓN, J. Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, *18*, avril de 1998, p.7-34.

GÓMEZ, J. L. D. El Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones. El Cálculo y su Enseñanza, Volumen 4, **Cinvestav-IPN**, México, D.F. 14, 2013. Disponível em: http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/. Acesso em 3 fev. 2019

GOMEZ-CHACON, I. M. et al . Concepto de Lugar Geométrico. Génesis de Utilización Personal y Profesional con Distintas Herramientas. **Bolema**, Rio Claro , v. 30, n. 54, p. 67-94, Abr. 2016. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2016000100067&lng=en&nrm=iso>. Acesso em 12 jan. 2019.

JESSEN, B. E. How can study and research paths contribute to the teaching of mathematics in an interdisciplinary settings?. **Annales de didactiques et de sciences cognitives**, 19, 2014, p. 199-224.

JESSEN, B. E.; RASMUSSEN, K. What Knowledge do in-service teachers need to create SRPs? In: **Pre-proceedings of the Sixth International Congress of the Anthropological Theory of Didactics**, 2018, p. 339-351. https://citad6.sciencesconf.org/resource/page/id/8

KLEINER, I. Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. **The College Mathematics Journal**, v. 20, Number 4, September 1989, p. 282–300.

LESSA, L.F. C. F. **Construção de um modelo epistemológico de referência considerando as análises das relações institucionais acerca do objeto matemático área**, 2017. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, Salvador, 2017.

MACHADO, A. C. **A aquisição do conceito de função**: perfil de imagens produzidas pelos alunos. 1998. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação da UFMG, Belo Horizonte, 1998.

MATTHEWS, M. R. História, Filosofia e Ensino de Ciências: a Tendência Atual de Reaproximação. **Revista Caderno Catarinense de Ensino de Física**, v. 12, n. 3: p. 164-214, dez. 1995. Disponível em: Acesso em: 20 jun. 2017.

MELO, G. R. **A inserção do software kmplote na aprendizagem de função afim e quadrática**,2012. Dissertação (Mestrado) – Centro Universitário UNIVATES, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Extas, Lajeado, 2012. 153 p.

MENEZES, R. C. **Funções quadráticas, contextualização, análise gráfica e aplicações**, 2014. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Goiânia, 2014.

NASCIMENTO JÚNIOR, J. V.; FARIAS, L. M. S.; CARVALHO, E. F. C. (2019). **Chronogenesis: how to cope with "unpredictability?"**.Work presented at Intensive Research Programme: Advances in the Anthropological Theory of the Didactic and Their Consequences in Curricula and in Teacher Education, Advanced Course 4: Research in Didactics at University Level.Centre de Recerca en Matematica, Universitat Autònoma de Barcelona. July 15 to 26, 2019, Barcelona, Spanish.

POPPER, K. R. **A lógica da pesquisa científica**. São Paulo: Cultrix, 2000.

REGINE, D. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. **Recherches en Didactique des Mathématiques** (RDM), Vol. 7.2, p. 5-31.

REZENDE, W. M.; PESCO, D. U.; BORTOLOSSI, H. J. Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra. **Anais** da 1ª. Conferência Latino Americana de GeoGebra. ISSN 2237-9657, p.74- 89, 2012.

ROQUE, T. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1 ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

RUIZ, J. Á. **Metodologia científica**: guia para eficiência nos estudos. 5. ed. SP: Atlas, 2002.

SENSEVY, G. Categorias para descrever e compreender a ação didática, In: SENSEVY, G.; MERCIER, A. (ed.). **Act Together**. A ação didática conjunta do professor e alunos da turma. Rennes: Rennes University Press, 2007, p. 13-49.

SENSEVY, G. O Trabalho do Professor para a Teoria da Ação Conjunta na Didática, **Pesquisa e Treinamento** [Online], 57, 2008, publicado em 22 de abril de 2012, acesso 12 mar de 2018. Disponível em: http://journals.openedition.org/researchformation/822; DOI: 10.4000 / researchformation.822

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Ed.) **The concept of function**: aspects of epistemology and pedagogy. Washington, USA: Mathematical Association of America, 1992. p. 2.

SILVA, R. C. M. **A integração de construtos didáticos à prática docente**: a malamática para operar com aritmética básica, 2017. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, Salvador, 2017.

SOARES, C. A. **Modelagem por meio de funções elementares**, 2014. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Catalão, 2014.

SOUZA, E. S. **Análise dos impactos de uma proposta de utilização efetiva da calculadora padrão no ensino de potência no sexto ano**, 2015. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, Salvador, 2015.

SPAGNOLO, F. L. Analisi Statistica Implicativa: uno dei metodi di analisi dei dati nella ricerca in didattica delle Matematiche. In: Troisième Rencontre Internazionale A. S. I. (Analyse Statistique Implicative). **Actas [...]** Palermo, Itália, Octobre , 2005.

TALL, D. & VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, n. 12, pp. 151-169, 1981.

TAYLOR, C. "Seguindo uma regra". **Critique**, n. 579/580, p. 554-572, 1999.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DA BAHIA. Projeto político pedagógico do curso de licenciatura em Matemática. Barreiras: UFOB, 2018. Disponível em: https://www.ufob.edu.br/component/phocadownload/category/208-ppc-s# . Acesso em: 12 jan. 2019.

VASCO, C. E. El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. In: Congreso Internacional Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas, Bogotá, 2002. **Actas [...]** Bogotá, Colombia, 2002.

VINNER, S. (1991). O papel das definições no ensino e aprendizagem de matemática. Traduzido por Márcia Pinto e Jussara Araújo. In: TALL, D. **The Role of Definitios in the Teaching and Learning of Mathematics**. Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. cap. 5, p. 65-81, 1991.

XAVIER, J. F. **Análise da função quadrática com ênfase em seus coeficientes, via Geogebra**, 2016. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Catalão, 2016.

Apêndice

1 – Filtro instrumental de análise das dialéticas do PEP

Filtro – Dialéticas Perguntas e respostas e mídias e meios

1) A questão geratriz Q_0 é proposta no contexto matemático ou extramatemático?
   Extra matemático. PEP não finalizado
   Matemático. PEP finalizado
2) A questão geratriz potencializa o surgimento de outras questões?
   Sim ( ) Não ( )
   Se a resposta for sim responda a 2.
   Não. Explique o que pode ter de errado com a tarefa.
3) O estudante pode apresentar resposta inconclusa a questão geratriz?
   Sim ( ) Não ( )
   Sim. Precisa inserir outra obra Q no Percurso. Passe a pergunta 3.
   Não. Rever se a resposta da pergunta 1, deve ser não.
4) O estudante altera o foco da questão propondo uma nova?
   Sim ( ) Não ( )
   Sim. Segue o Percurso. Passe a pergunta 4.
5) Em Q_0 fica evidente o objeto matemático (intenção do ensino)?
   Sim ( ) Não ( )
   Sim. É preciso reformular a Q_0 e tentar realizar uma análise a priori.
   Não. Prossiga.
6) A Questão Q_1 proposta pelo aluno refina a abordagem do objeto matemático?
   Sim ( ) Não ( )
   Sim. Prossiga.
   Não. Planejar intervenção (ex. solicitar ao estudante que reapresente uma Q_n.
7) Qual o número de questões propostas pelos alunos?

   Responder e prosseguir.
8) As perguntas Q_0, Q_1, ..., Q_n, podem ser respondidas por consulta a alguma mídia?
   Sim ( ) Quais? Prossiga.
   Não ( ) O que utilizou?
9) As questões a partir de Q1, elaboradas pelos alunos, permiteu que estes confrontassem as perguntas e as respostas em diferentes meios?
10) O professor é considerado uma mídia? Ou seria meio?
11) As dialéticas podem ser integradas ao logos matemático na abordagem da representação gráfica da função quadrática à medida em que avança propondo outras Q, bem como suas respostas?
    Sim ( ) Quais?
    Não ( ) O que utilizou?

2 – Instrumento de Validação do PEP

Instrumento de Validação do PEP	
Experimentação com classe distinta da que participa da investigação	
Itens	
i)	A questão tem elementos que permitem a resolução imediata sem consulta a informações externas ao enunciado?
ii)	O enunciado é amplo? ○ Sim (é necessária proposição de outras questões para resolução) ○ Não (o enunciado conduz a metodologia da resolução de problemas, a lacuna não está nos dados do enunciado, mas em não conhecer uma praxeologia para resolução)
iii)	O enunciado dá pistas de qual saber matemático é objeto de estudo? ○ Sim (processo conduzido será de resolução de problemas) ○ Não (é necessária mobilização de gestos de estudo para identificação da intenção didática).
iv)	É possível desencadear uma família de questões que derivem de Q_0? ○ Sim (permite outras questões que afunilam a intenção didática, saber a ensinar) ○ Não (é uma atividade de estudo e pesquisa).
v)	Possibilita alterações na praxeologia matemática de quem participa do Percurso? As dialéticas mobilizadas (perguntas e respostas e mídias e meios) podem alterar o *logos* da praxeologia matemática (no estudo da função quadrática e duplo status da parábola)? ○ Sim (tentativa de propor perguntas e confrontar as mídias e meios para construir uma boa resposta representam uma alteração na praxeologia matemática – questionamentos na natureza dos conhecimentos). ○ Não (induz a resolução imediata, busca de elementos do enunciado que indica resolução sem necessidade de outras questões).

3 – Termo de consentimento livre e esclarecido

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, ***(nome do sujeito da pesquisa, nacionalidade, idade, estado civil, profissão, endereço, RG)***, estou sendo convidado a participar de um estudo denominado **Integração de noções didáticas nas Praxeologias Matemáticas no estudo da função quadrática**, cujos objetivos e justificativas são:

A minha participação no referido estudo será no sentido de participar das aulas do componente curricular CET0064, resolvendo e propondo questões num modelo de aprendizagem embasada em investigação, visto que os resultados dessa investigação podem trazer respostas a relação dos professores com o objeto matemático Função Quadrática. São requeridas as praxeologias matemáticas construídas a partir do trabalho do participante com a situação inicial proposta, bem como com aquelas propostas pelos próprios sujeitos da pesquisa.

Fui alertado de que, a pesquisa a se realizar, não existe a possibilidade de nenhum beneficio além da contribuição a nível teórico para a área da Educação Matemática, e talvez reconstrução de minhas praxeologia matemática.

Recebi, por outro lado, os esclarecimentos necessários sobre os possíveis desconfortos e riscos decorrentes do estudo, levando-se em conta que é uma pesquisa, e os resultados positivos ou negativos somente serão obtidos após a sua realização. Assim, posso identificar algumas inconsistências praxeológicas, a partir da experimentação de um dispositivo didático denominado Percurso de Estudo e Pesquisa – PEP.

Estou ciente de que minha privacidade será respeitada, ou seja, meu nome ou qualquer outro dado ou elemento que possa, de qualquer forma, me identificar, será mantido em sigilo. Todas as respostas as questões realizadas pelo grupo que eu participar nem mesmo utilizará pseudônimos, o que não deixa menor margem para identificação de qualquer participante da pesquisa.

Também fui informado de que posso me recusar a participar do estudo, ou retirar meu consentimento a qualquer momento, sem precisar justificar, e de, por desejar sair da pesquisa, não sofrerei qualquer prejuízo à assistência que por acas esteja recebendo. Foi-me esclarecido, igualmente, que eu posso optar por métodos alternativos, que são: enviar as respostas por meio de mídias digitais, gravando áudio de minhas soluções, etc.

Os pesquisadores envolvidos com o referido projeto são Edmo Fernandes Carvalho, professor da Universidade Federal do Oeste da Bahia e doutorando no Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Universidade Federal da Bahia; e Luiz Marcio Santos Farias orientador dessa investigação. Com eles poderei manter contato pelos telefones (77) 92000-8113 e por e-mail: edmofc@gmail.com.

É assegurada a assistência durante toda pesquisa, bem como me é garantido o livre acesso a todas as informações e esclarecimentos adicionais sobre o estudo e suas conseqüências, enfim, tudo o que eu queira saber antes, durante e depois da minha participação.

Enfim, tendo sido orientado quanto ao teor de todo o aqui mencionado e compreendido a natureza e o objetivo do já referido estudo, manifesto meu livre consentimento em participar, estando totalmente ciente de que não há nenhum valor econômico, a receber ou a pagar, por minha participação.

No entanto, caso ocorra algum dano decorrente da minha participação no estudo, serei devidamente indenizado, conforme determina a lei.

Em caso de reclamação ou qualquer tipo de denúncia sobre este estudo enviar um *email* para ppefhc@gmail.com.

Barreiras, _____ de _____________ de 2018.

Nome e assinatura do sujeito da pesquisa

Nome(s) e assinatura(s) do(s) pesquisador(es) responsável(responsáveis)