



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
ESCOLA POLITÉCNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

GUSTAVO CANÁRIO GOMES

**ANÁLISE DE FORMULAÇÃO NÃO LINEAR DE
ELEMENTOS FINITOS PARA CASCAS COM E SEM
CURVATURAS INICIAIS COM MATERIAIS
HIPERELÁSTICOS**

Salvador
2019

GUSTAVO CANÁRIO GOMES

**ANÁLISE DE FORMULAÇÃO NÃO LINEAR DE
ELEMENTOS FINITOS PARA CASCAS COM E SEM
CURVATURAS INICIAIS COM MATERIAIS
HIPERELÁSTICOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas (PPEE), da Escola Politécnica da Universidade Federal da Bahia, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Alex Alves Bandeira

Salvador

2019

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Universitário de Bibliotecas (SIBI/UFBA),
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Canário Gomes, Gustavo
ANÁLISE DE FORMULAÇÃO NÃO LINEAR DE ELEMENTOS
FINITOS PARA CASCAS COM E SEM CURVATURAS INICIAIS COM
MATERIAIS HIPERELÁSTICOS / Gustavo Canário Gomes. --
Salvador, 2019.
129 f. : il

Orientador: Alex Alves Bandeira.
Dissertação (Mestrado - Programa de pós-graduação em
Engenharia de Estruturas) -- Universidade Federal da
Bahia, Escola Politécnica, 2019.

1. Análise Não Linear. 2. Método dos Elementos
Finitos. 3. Teoria de Casca. 4. Materiais
hiperelásticos. I. Alves Bandeira, Alex. II. Título.

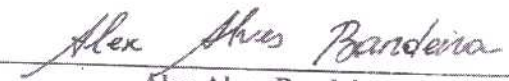


Universidade Federal da Bahia
Escola Politécnica
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas

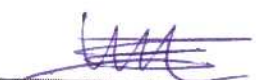
Ata de Defesa de Dissertação

Aos vinte e nove dias do mês de novembro de 2019, às 09:00 horas, na sala de Vídeo Conferência Hernani Sobral, da Escola Politécnica da Universidade Federal da Bahia, reuniram-se por vídeo conferência os professores Doutores Alex Alves Bandeira (professor orientador), Marco Túlio Santana Alves (membro interno), ambos da Escola Politécnica da Universidade Federal da Bahia (Poli-UFBA), e Paulo de Mattos Pimenta (membro externo), da Universidade de São Paulo (Poli-USP), para a avaliação da Dissertação do mestrando GUSTAVO CANÁRIO GOMES, intitulada *ANÁLISE DE FORMULAÇÃO NÃO LINEAR DE ELEMENTOS FINITOS PARA CASCAS COM E SEM CURVATURAS INICIAIS COM MATERIAIS HIPERELÁSTICOS*. O Prof. Alex Alves Bandeira presidiu a banca com a presença do Prof. Marco Túlio Santana Alves e do mestrando Gustavo Canário Gomes na sala de vídeo conferência Hernani Sobral, e o Prof. Paulo de Mattos Pimenta na sala de Vídeo Conferência da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Após a apresentação, a banca reuniu-se e considerou, por unanimidade, que o candidato foi **APROVADO**.

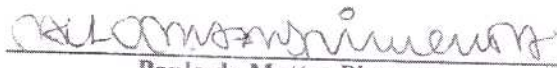
Salvador, 29 de novembro de 2019



Alex Alves Bandeira
Departamento de Construção e Estruturas
Universidade Federal da Bahia - UFBA



Marco Túlio Santana Alves
Departamento de Construção e Estruturas
Universidade Federal da Bahia - UFBA



Paulo de Mattos Pimenta
Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica
Universidade de São Paulo - USP

AGRADECIMENTOS

À minha família, eternos apoiadores de qualquer empreitada, o mais sincero obrigado pelo carinho e amor incondicionais. Meus pais, Roberto e Alba, por sempre colocarem a educação e o conhecimento como uma prioridade para mim e por partilharem de cada passo de todo o processo de pesquisa. Aos meus avós, Rosa Maria, Francisca e Pedro por serem tão determinantes na minha criação e caráter quanto meus pais. Minha irmã, Natália, por sempre estar presente quando eu preciso de ajuda, apoio, ou de uma amiga. Obrigado a todos os familiares: primos, primas, tios, tias, pessoas que me acompanham deste o meu nascimento e que, mesmo de forma indireta, tiveram um papel fundamental no presente trabalho.

À Stephany, que a tão pouco tempo entrou na minha vida e espero que se mantenha nela por muito tempo, virando várias noites só para me tranquilizar e fazer companhia, te amo.

Aos meus professores, em especial Prof. Alex, meu orientador ao longo de toda a graduação e do atual trabalho de mestrado por sempre acreditar no meu trabalho.

Agradeço ao Prof. Pimenta por sempre estar disposto a encontrar um horário em sua agenda para retirar nossas dúvidas em relação às teorias.

Aos meus amigos da graduação: Mariana, Rodrigo de São Pedro, Ruy, Adriana, Rodrigo Martins, Rodrigo Brito, por me ajudarem a espairecer quando precisei.

E aos meus amigos de mestrado: Michel, Bruno, Danielle, Pedro, Jacó, Ronei, Kaique, Yasmin, Gabi, Daniel e Antonio por fazerem do mestrado uma experiência mais prazerosa.

Ao Prof. Armando por sempre estar disposto a ajudar e compartilhar das suas experiências com as cascas que nos estressaram nos respectivos mestrados.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro para realização deste trabalho.

“The greatest enemy of knowledge is not ignorance, it is the illusion of knowledge.”

Daniel J. Boorstin

GOMES, Gustavo Canário, *Análise de formulação não Linear de Elementos Finitos para cascas com e sem curvaturas iniciais com materiais hiperelásticos*. 129f. 2019. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola Politécnica, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2019.

Resumo

Este trabalho consiste em estudar as formulações das cascas sem e com curvaturas iniciais desenvolvidas por Eduardo M. B. Campello em seu doutorado, sob orientação de Paulo de Mattos Pimenta e, implementar um programa computacional na plataforma C para simulação de diversos exemplos encontrados na literatura. São consideradas equações constitutivas hiperelásticas para ambos os modelos. As formulações são implementadas em linguagem C utilizando o Método dos Elementos Finitos. A partir do programa desenvolvido, são apresentados resultados para os exemplos clássicos presentes na literatura, para ilustrar a validade das teorias. Os resultados obtidos sugerem que as formulações apresentam desempenho satisfatório para os exemplos analisados. Pode-se mencionar como contribuição deste trabalho, a apresentação de novos resultados de exemplos simulados com as duas formulações e uma discussão comparativa.

Palavras chave: Análise Não Linear, Método dos Elementos Finitos, Teoria de Casca, Materiais hiperelásticos.

GOMES, Gustavo Canário, Nonlinear Finite Element Formulation Analysis for shells with and without initial curvatures with hyperelastic materials. 129f. 2019. Dissertation (Master in Structural Engineering) - Polytechnic School, Federal University of Bahia, Salvador, 2019.

Abstract

This work consists of studying the formulations of shells without and with initial curvature developed by Eduardo M. B. Campello in his doctorate, under the orientation of Paulo de Mattos Pimenta, and to implement a computational program on C platform to simulate several examples found in the literature. Hyperelastic constitutive equations are considered for both models. The formulations are implemented in C language using the Finite Element Method. From the developed program, results are presented for the classic examples present in the literature, to illustrate the validity of the theories. The obtained results suggest that the formulations present satisfactory performance for the analyzed examples. It may be mentioned as contribution of this work, the presentation of new results of simulated examples with both formulations and a comparative discussion.

Keywords: Nonlinear Analysis, Finite Element Method, Shell Theory, Hyperelastic Materials.

Sumário

1 Introdução.....	3
2 Parametrizações finitas.....	6
2.1 Tensor das rotações	6
2.2 Parametrização de Euler.....	9
2.3 Tensor das rotações utilizando a parametrização de Euler.....	10
2.4 Vetor axial da velocidade angular	10
2.5 Vetor axial das deformações específicas.....	12
3 Equações constitutivas	15
3.1 Materiais hiperelásticos.....	15
3.2 Relações constitutivas elásticas não lineares	15
3.3 Material Neo-Hookiano de Ciarlet-Simo	16
3.4 Material de Saint-Venant-Kirchhoff	17
4 Formulação tensorial de casca espessa não linear sem variação de espessura	18
4.1 Introdução.....	18
4.2 Teoria de cascas espessas de Reissner-Mindlin	18
4.3 Cinemática da Casca	19
<i>4.3.1 Tensor das transformações</i>	<i>21</i>
<i>4.3.2 Derivadas das deformações em função do tempo.....</i>	<i>24</i>
<i>4.3.3 Gradiente de velocidade.....</i>	<i>27</i>
4.4 Estática da casca.....	28
<i>4.4.1 Potência interna da casca</i>	<i>28</i>
<i>4.4.2 Potência externa da casca.....</i>	<i>33</i>
4.5 Equilíbrio da casca	36
<i>4.5.1 Trabalho virtual dos esforços internos</i>	<i>36</i>
<i>4.5.2 Trabalho virtual dos esforços externos.....</i>	<i>37</i>
<i>4.5.3 Equações de equilíbrio.....</i>	<i>37</i>
<i>4.5.4 Forma tangente bilinear (matriz de rigidez).....</i>	<i>39</i>
<i>4.5.4.1 Demonstração da parcela de não linearidade geométrica.....</i>	<i>43</i>
<i>4.5.4.2 Demonstração da parcela de não linearidade física</i>	<i>45</i>
<i>4.5.4.3 Demonstração da parcela de esforços externos</i>	<i>47</i>
4.6 Equações constitutivas da casca	48
<i>4.6.1 Condição de tensão plana.....</i>	<i>48</i>

4.6.2	<i>Material elástico geral</i>	50
4.6.3	<i>Materiais isotrópicos</i>	52
4.6.3.1	<i>Material Neo-Hookiano</i>	52
4.6.3.2	<i>Material de Saint-Venant-Kirchhoff</i>	67
5	Modelo com curvaturas iniciais sem variação de espessura	79
5.1	Cinemática	79
5.2	Estática.....	86
5.2.1	<i>Potência interna</i>	86
5.2.2	<i>Potência externa</i>	89
5.3	Equilíbrio	90
5.4	Equações constitutivas	91
5.4.1	<i>Material hiperelástico Neo-hookeano de Ciarlet-Simo</i>	92
6	Acréscimo de rigidez fictícia (Drilling)	95
7	Elemento Finito Triangular (T6-3i)	96
8	Exemplos numéricos	100
8.1	Placa quadrada sob linearidade geométrica	100
8.1.1	<i>Resultados para a formulação de casca sem curvatura inicial</i>	101
8.1.2	<i>Resultados para a formulação de casca com curvatura inicial</i>	102
8.1.3	<i>Discussão dos resultados</i>	102
8.2	Placa circular sob linearidade geométrica	104
8.2.1	<i>Resultados para a formulação de casca sem curvatura inicial</i>	105
8.2.2	<i>Viga em balanço</i>	106
8.2.3	<i>Resultados para a formulação de casca sem curvatura inicial</i>	107
8.2.4	<i>Resultados para a formulação de casca com curvatura inicial</i>	108
8.2.5	<i>Discussão dos resultados</i>	112
8.2.6	<i>Flambagem lateral de uma chapa em L</i>	106
8.2.7	<i>Resultados para a formulação de casca sem curvatura inicial</i>	113
8.2.8	<i>Discussão dos resultados</i>	114
9	Conclusões	115
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	117
	APÊNDICE A	122
	APÊNDICE B	123
	APÊNDICE C	126

1 Introdução

A mecânica computacional tem por objetivo principal representar e analisar de forma precisa estruturas reais em modelos físicos virtuais. Para conseguir realizar esta representação e análise, existem alguns tipos básicos de elementos, sendo alguns destes: cascas, placas, sólidos, treliças, vigas, etc. Dentre os diversos tipos, o presente trabalho tem como objetivo verificar e demonstrar duas formulações tensoriais para um elemento de casca não linear de seis parâmetros (três deslocamentos e três rotações) e, posteriormente, analisar qual formulação apresenta melhores resultados com relação aos deslocamentos, quando comparados com exemplos clássicos da literatura. Vale ressaltar que a primeira formulação apresentada possui uma configuração inicial planificada e, a segunda formulação apresenta uma configuração inicial com curvatura.

O estudo de cascas remontam os trabalhos de Mlle. Sophie Germain, de G. R. Kirchhoff e de Lord Kelvin, conforme apresentado por Reismann (1998). Em relação ao modelo de casca com seis parâmetros, conforme apresentado por Bîrsan e Neff (2014) pode-se citar como autor original Eric Reissner em “*Linear and nonlinear theory of shell*” (FUNG, SCHLER, 1974). A teoria de seis parâmetros foi subsequentemente desenvolvida, podendo-se citar como trabalhos importantes os livros de Libai e Simmonds (1998) e Chróscielewski, Makowski, Pietraszkiewicz (2004), além de outros trabalhos de um período relativamente próximo em relação ao desenvolvimento da teoria como os de Libai e Simmonds (1983), Makowski, Chroscielewski e Stumpf (1992).

Ao longo dos anos a teoria de cascas não lineares de seis parâmetros apresenta um número considerável de avanços, podendo-se citar os trabalhos de Chróscielewski, Kreja, Sabik e Witkowski (2010) para cascas formadas por compósitos em multicamadas, Campello, Pimenta e Wriggers (2007) e Burzynski, Chróscielewski e Witkowski (2014) para cascas com materiais elastoplásticos, Campello, Pimenta e Wriggers (2008) para cascas submetidas a regimes dinâmicos, Bîrsan e Neff (2014) na verificação de minimizadores de energia em cascas geometricamente não lineares com *drilling*, entre diversos outros trabalhos em publicações sobre mecânica computacional ou sobre estudo de formulações de cascas, como nos anais da conferência *Shell Structures: Theory and Applications*, com edição de Pietraszkiewicz e Górski.

Dentro da vasta gama de autores e teorias abrangidas pelo modelo de seis parâmetros, o presente trabalho dedicou-se inicialmente a analisar a apresentada no artigo “A triangular finite shell element based on a fully nonlinear shell formulation”, escrito por Campello, Pimenta e Wriggers (2003), e, posteriormente, analisar a teoria com a adição da possibilidade de

elementos inicialmente curvos, um dos frutos do trabalho mais abrangente apresentado na tese de doutorado intitulada “Modelos não-lineares de casca em elasticidade e elastoplasticidade com grandes deformações: teoria e implementação em elementos finitos” de Campello (2005). Estas teorias foram escolhidas pois, conforme observado na literatura consultada, mostram-se as mais simples, efetivas e abrangentes para casca com materiais hiperelásticos. O trabalho também foi escolhido como referência pois este apresenta ainda modelos com variação de espessura e elastoplasticidade, além de posterior desenvolvimento em relação à parametrização das rotações por Moreira (2009) e de algoritmo dinâmico por Campello, Pimenta e Wriggers (2008), contendo assim uma vasta possibilidade de desenvolvimento de métodos associados ao contato mecânico em trabalhos posteriores.

Em relação às teorias, estas foram formuladas completamente em um modelo Lagrangiano, utilizando seis parâmetros (três deslocamentos e três rotações), com consideração cinemática da teoria de Reissner-Mindlin. Esta consideração leva em conta o efeito de deformações por esforços cisalhantes ao longo da casca.

As teorias associam tensões e deformações das seções transversais, simplificando a obtenção das equações de equilíbrio e, através da linearização do equilíbrio da casca, se encontram formas bilineares simétricas para materiais hiperelásticos (modelos materiais elásticos com curva tensão-deformação não linear) e cargas conservativas (CAMPELLO, PIMENTA, WRIGGERS, 2003).

A não linearidade abrangida pelas teorias leva em conta tanto a parcela geométrica quanto a parcela física. A parcela geométrica se refere à influência do deslocamento da estrutura no seu equilíbrio. Esta contribuição é conhecida na área de cálculo estrutural como efeitos de segunda ordem, onde o deslocamento da estrutura afeta a condição de carga, gerando assim uma não linearidade. Por sua vez, a parcela física se refere à uma relação tensão-deformação não linear na fase elástica para um material, ou seja, o mesmo não mais é elástico perfeito. Os materiais que possuem essa característica de não linearidade na fase elástica são conhecidos como hiperelásticos. Foram utilizados no presente trabalho os seguintes modelos de materiais hiperelásticos:

- Material Neo-Hookeano: Modelo material hiperelástico ideal para grandes deformações.
- Material de Saint-Venant-Kirchhoff: Modelo material hiperelástico ideal para pequenas deformações.

Em relação à estrutura do trabalho, em primeiro momento se realiza uma apresentação de alguns conceitos da parametrização de rotações. Em segundo, é detalhado o modelo de casca sem curvatura inicial, apresentando-se a estática e a dinâmica da casca, determinando as formas do tensor das transformações, vetores de esforços internos e externos, equações de equilíbrio e forma tangente bilinear. Ainda dentro deste modelo, se apresentam os materiais hiperelásticos, suas respectivas energias específicas de deformação e a aplicação destes modelos na teoria da casca. Em outro momento, é detalhado o modelo com curvatura inicial, utilizando-se a lógica de subdivisão de capítulos similar ao modelo sem curvatura inicial. Após a apresentação dos modelos, comenta-se sobre a adição da rigidez fictícia (*drilling*), sobre o elemento finito utilizado e, por último, são trazidos exemplos para analisar os objetivos propostos pelo trabalho. Ainda em relação à estrutura, não existe um capítulo relativo à álgebra vetorial e cálculo, esperando que o leitor esteja familiarizado com os conceitos básicos destes assuntos.

Vale ressaltar que a formulação aqui apresentada foi escolhida uma vez que os autores do artigo afirmam que ela não apresenta o problema de travamento (também conhecido como “shear-locking” (COOK, MALKUS, & PLESHA, 1989)), muito comum em formulações de casca aplicadas à elementos finitos.

2 Parametrizações finitas

O presente capítulo possui como enfoque o estudo da rotação de um ponto no espaço, utilizando o tensor das rotações de Euler-Rodrigues.

O estudo da rotação no espaço, que se encaixa no escopo do presente trabalho, é regido pelo teorema fundamental de Euler que afirma:

“O deslocamento de um corpo rígido com um ponto fixo é uma rotação em torno de um eixo que passa através daquele ponto.”

O teorema de Euler assume assim a necessidade de um eixo de rotação e uma magnitude de rotação (o ângulo de rotação), sendo a caracterização destes elementos o enfoque da demonstração do tensor utilizado para a parametrização das rotações adotado.

2.1 Tensor das rotações

O tensor das rotações possui diversas formas de representação. Dentre as possibilidades será dado enfoque à forma generalizada de Euler-Rodrigues, por esta ser utilizada por Campello, Pimenta e Wriggers (2003) no artigo base, de forma a definir a formulação do elemento de casca apresentado. Para o aprofundamento nas outras diversas formas de parametrização é recomendado o trabalho de Moreira (2009).

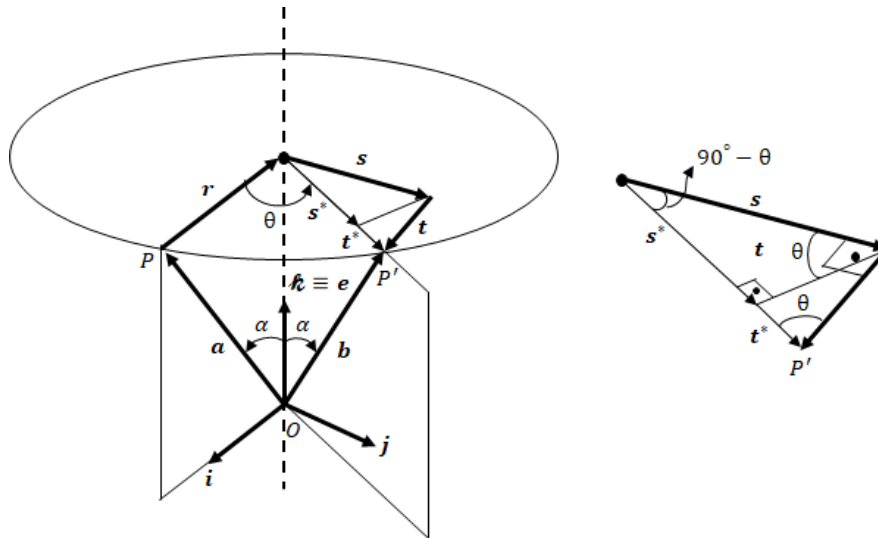
O início do estudo do tensor das rotações se encontra na definição matemática da rotação em si. Uma rotação pode ser caracterizada por um tensor ortogonal pertencente ao grupo designado por $SO(3)$ (Special Orthogonal Group) (MOREIRA, 2009), conforme definido em (2.1).

$$SO(3) = \{ \mathbf{Q} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I} \wedge \det(\mathbf{Q}) = 1 \}. \quad (2.1)$$

A condição $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ gera seis condições de ortogonalidade que permitem a representação de \mathbf{Q} por apenas três valores independentes. As formas de representação do tensor \mathbf{Q} são das mais variadas, podendo ser realizada utilizando o vetor das rotações, quatérnions, os ângulos clássicos de Euler, etc.

A noção do tensor das rotações será realizada a seguir de forma vetorial, já que esta se mostra como a maneira de melhor percepção visual. Posteriormente, será generalizada a formulação e apresentada a parametrização tomada como padrão.

Figura 1 – Rotação de um vetor



Fonte: Adaptada de Moreira, 2009

O deslocamento de um corpo rígido qualquer no espaço se inicia pela definição de um ponto fixo O , que será tomado como o ponto foco da rotação. A rotação em questão será analisada considerando-se um ponto P que sofre uma rotação qualquer em relação ao ponto fixo. O ponto P é definido pelo vetor posição \mathbf{a} , como apresentado na Figura 1. Levando em conta o teorema de Euler, se pode afirmar que a rotação do vetor \mathbf{a} pode ser definida em função do vetor unitário \mathbf{e} na direção do eixo de rotação e do ângulo de rotação θ , sendo estes os parâmetros de rotação.

Anteriormente à caracterização do vetor que define a posição final do ponto P após a rotação, é necessária a definição de um sistema de coordenadas que comporte as análises geométricas que serão utilizadas para a obtenção dos vetores definidores do vetor posição final pós-rotação, denominado de \mathbf{b} . O sistema adotado possui os vetores unitários \mathbf{i}, \mathbf{j} e \mathbf{k} , como eixos, estando \mathbf{k} na direção de \mathbf{e} . O vetor \mathbf{j} por sua vez é tido como ortogonal ao plano criado por \mathbf{a} e \mathbf{e} , podendo ser obtido por

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{a}}{\|\mathbf{e} \times \mathbf{a}\|} = \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{a}}{\|\mathbf{e}\| \|\mathbf{a}\| \text{sen} \alpha} = \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\| \text{sen} \alpha}, \quad (2.2)$$

sendo α o ângulo entre \mathbf{e} e \mathbf{a} . O vetor \mathbf{i} , por sua vez, é obtido pelo produto vetorial entre \mathbf{k} e \mathbf{j}

$$\mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{j} \times \mathbf{e}, \quad (2.3)$$

Definido o sistema de eixos, o vetor que caracteriza a localização do ponto P após a rotação pode ser descrito como

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{r} + \mathbf{s} + \mathbf{t}. \quad (2.4)$$

Para a definição do vetor \mathbf{b} se mostra necessária a definição dos vetores componentes do mesmo, sendo esta realizada a seguir em função de \mathbf{a}, θ e \mathbf{e} . Os vetores apresentados a seguir

foram obtidos pela observação das relações geométricas presentes na Figura 1 e considerando que \mathbf{r} e \mathbf{t} são paralelos a \mathbf{i} e que \mathbf{s} é paralelo a \mathbf{j} .

$$\mathbf{r} = \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) = -\|\mathbf{a}\| \operatorname{sen} \alpha \mathbf{i}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{s} = (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\| \operatorname{sen} \alpha \mathbf{j}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{t} = -(\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{a})) = \|\mathbf{a}\| \operatorname{sen} \alpha \mathbf{i}, \quad (2.7)$$

A equação (2.4) pode ainda ser reescrita em função das projeções radiais na configuração rotacionada dos vetores \mathbf{s} e \mathbf{t} como:

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{r} + \mathbf{s}^* + \mathbf{t}^*, \quad (2.8)$$

onde

$$\mathbf{s}^* = \operatorname{sen} \theta \mathbf{s} = \operatorname{sen} \theta (\mathbf{e} \times \mathbf{a}), \quad (2.9)$$

$$\mathbf{t}^* = \cos \theta \mathbf{t} = -\cos \theta (\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{a})). \quad (2.10)$$

Substituindo-se as equações (2.5),(2.9) e (2.10) na fórmula (2.8) para \mathbf{b} , se obtêm

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{a} + \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) + \operatorname{sen} \theta (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) - \cos \theta (\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{a})) = \\ &= \mathbf{a} + \operatorname{sen} \theta (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) + (1 - \cos \theta) (\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{a})). \end{aligned} \quad (2.11)$$

O produto vetorial $\mathbf{e} \times \mathbf{a}$ pode ser representado como

$$\mathbf{e} \times \mathbf{a} = \begin{bmatrix} e_2 a_3 - e_3 a_2 \\ e_3 a_1 - e_1 a_3 \\ e_1 a_2 - e_2 a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \mathbf{O} \mathbf{a} \quad (2.12)$$

e

$$\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) = \mathbf{e} \times (\mathbf{O} \mathbf{a}) = \mathbf{O}^2 \mathbf{a}, \quad (2.13)$$

onde

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -e_3 & e_2 \\ e_3 & \mathbf{0} & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Em (2.14), \mathbf{O} é o tensor antissimétrico com vetor axial \mathbf{e} ou seja,

$$\mathbf{O} = \operatorname{skew}(\mathbf{e}). \quad (2.15)$$

Substituindo (2.12) e (2.13) na expressão (2.11), tem-se

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} + \operatorname{sen} \theta \mathbf{O} \mathbf{a} + (1 - \cos \theta) \mathbf{O}^2 \mathbf{a}. \quad (2.16)$$

Simplificando, tem-se

$$\mathbf{b} = [\mathbf{I} + \operatorname{sen} \theta \mathbf{O} + (1 - \cos \theta) \mathbf{O}^2] \mathbf{a} = \mathbf{Q} \mathbf{a}, \quad (2.17)$$

onde

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} + \text{sen}\theta \mathbf{O} + (1 - \cos\theta)\mathbf{O}^2. \quad (2.18)$$

Desta forma, de (2.17) e (2.18) pode-se escrever a seguinte expressão conhecida de Euler-Rodrigues

$$\mathbf{b} = \mathbf{Q}\mathbf{a}. \quad (2.19)$$

Outra forma geral de se escrever o tensor de Euler-Rodrigues é

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} + b\mathbf{O} + (1 - a)\mathbf{O}^2, \quad (2.20)$$

sendo

$$b = \text{sen}\theta \quad (2.21)$$

e

$$a = \cos\theta. \quad (2.22)$$

2.2 Parametrização de Euler

No presente trabalho, será utilizada a parametrização de Euler. Segundo (MOREIRA, pág. 50-51, 2009), esta é mais evidente e possui como parâmetros:

$$b = \text{sen}\theta, \quad (2.23)$$

$$a = \cos\theta, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{e}, \quad (2.25)$$

$$x = \theta = \|\boldsymbol{\theta}\|, \quad (2.26)$$

sendo \mathbf{x} é um vetor de direção coincidente com o eixo de rotação \mathbf{e} , com norma θ . Desta forma, de (2.25) e (2.26), pode-se parametrizar o vetor diretor de giro \mathbf{e} como

$$\mathbf{e} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\|\boldsymbol{\theta}\|}. \quad (2.27)$$

Devido à escolha da parametrização de Euler, serão definidos alguns coeficientes presentes em $\mathbf{Q}, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Gamma}_\alpha$ (sendo so dois últimos tensores adicionais de rotação que aparecerão em outras parcelas) conforme equações a seguir.

$$h = 1; \quad (2.28)$$

$$h_1(\theta) = \frac{\text{sen}\theta}{\theta}; \quad (2.29)$$

$$h_2(\theta) = \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\text{sen}\theta/2}{\theta/2} \right)^2; \quad (2.30)$$

$$h_3(\theta) = \frac{1 - \frac{\text{sen}\theta}{\theta}}{\theta^2} = \frac{1 - h_1(\theta)}{\theta^2}; \quad (2.31)$$

$$h_4(\theta) = \frac{h_1(\theta) - 2h_2(\theta)}{\theta^2}; \quad (2.32)$$

$$h_5(\theta) = \frac{h_2(\theta) - 3h_3(\theta)}{\theta^2}; \quad (2.33)$$

$$h_6(\theta) = \frac{h_3(\theta) - h_2(\theta) - 4h_4(\theta)}{\theta^2}; \quad (2.34)$$

$$h_7(\theta) = \frac{h_4(\theta) - 5h_5(\theta)}{\theta^2}; \quad (2.35)$$

$$h_8(\theta) = h_9(\theta) = 0. \quad (2.36)$$

2.3 Tensor das rotações utilizando a parametrização de Euler

Definida a parametrização a ser utilizada, o tensor das rotações pode ser reescrito em função da mesma. Desta forma, o tensor antissimétrico o tensor \mathbf{O} , relativo ao vetor axial de giro da rotação, assumirá a forma:

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\theta}. \quad (2.37)$$

O tensor de rotação assumirá então o formato:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} + \frac{\text{sen}\theta}{\theta} \mathbf{O} + \frac{(1 - \cos\theta)}{\theta^2} \mathbf{O}^2, \quad (2.38)$$

sendo

$$\mathbf{O} = \text{skew}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

2.4 Vetor axial da velocidade angular

Considere inicialmente um vetor de eixo de rotação $\boldsymbol{\theta}$. Sendo θ a norma do vetor $\boldsymbol{\theta}$ ou seja, $\theta = \|\boldsymbol{\theta}\|$, se pode escrever que:

$$\theta^2 = \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}. \quad (2.40)$$

A derivada da norma em relação a dois eixos coordenados que compõem um plano α será obtida como:

$$2\theta\dot{\theta} = \dot{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (2.41)$$

Sendo a equação (2.41) composta por produtos escalares:

$$2\theta\dot{\theta} = 2(\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}). \quad (2.42)$$

Isolando $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\theta} (\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}). \quad (2.43)$$

Considere agora o tensor das rotações:

$$\boldsymbol{Q} = \mathbf{I} + h_1(\theta)\boldsymbol{\theta} + h_2(\theta)\boldsymbol{\theta}^2, \quad (2.44)$$

Derivando o tensor das rotações em relação ao tempo e levando em consideração a regra da cadeia, temos:

$$\dot{\boldsymbol{Q}} = \dot{h}_1(\theta)\dot{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\theta} + h_1(\theta)\dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{h}_2(\theta)\dot{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\theta}^2 + h_2(\theta)(\dot{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\theta}}). \quad (2.45)$$

Reorganizando os termos:

$$\dot{\boldsymbol{Q}} = h_1(\theta)\dot{\boldsymbol{\theta}} + h_2(\theta)(\dot{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\theta}}) + \dot{h}_1(\theta)\dot{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\theta} + \dot{h}_2(\theta)\dot{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\theta}^2. \quad (2.46)$$

Substituindo a derivada $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ apresentada na equação (2.43) na equação (2.46) se obtêm que

$$\dot{\boldsymbol{Q}} = h_1\dot{\boldsymbol{\theta}} + h_2(\dot{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\theta}}) + \frac{\dot{h}_1}{\theta}(\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{\theta} + \frac{\dot{h}_2}{\theta}(\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{\theta}^2. \quad (2.47)$$

De forma similar a (MOREIRA, pág. 46, 2009), se define o tensor das velocidades angulares como:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T, \quad (2.48)$$

Devido à demonstração extensiva deste novo tensor, esta será suprimida do presente trabalho. Vale ressaltar que a demonstração utiliza as seguintes propriedades de tensores anti-simétricos (MOREIRA, 2009):

$$\boldsymbol{\theta}^T = -\boldsymbol{\theta}, \quad (2.49)$$

$$\boldsymbol{\theta}^3 = -\theta^2\boldsymbol{\theta}, \quad (2.50)$$

$$\boldsymbol{\theta}^4 = -\theta^2\boldsymbol{\theta}^2. \quad (2.51)$$

O tensor das velocidades angulares é calculado como:

$$\boldsymbol{\Omega} = h_1\dot{\boldsymbol{\theta}} + h_2(\boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\theta}} - \dot{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\theta}) + (h - h_1)\frac{1}{\theta^2}(\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{\theta}. \quad (2.52)$$

De forma análoga ao apresentado por Moreira (2009), o vetor axial das velocidades angulares será dado por:

$$\boldsymbol{w} = axial(\boldsymbol{\Omega}) = h_1\dot{\boldsymbol{\theta}} + h_2\boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\theta}} + (h - h_1)\frac{1}{\theta^2}(\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{\theta}. \quad (2.53)$$

Representando o produto escalar como um produto entre vetores:

$$\boldsymbol{w} = axial(\boldsymbol{\Omega}) = h_1\dot{\boldsymbol{\theta}} + h_2\boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\theta}} + (h - h_1)\frac{1}{\theta^2}\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\theta}^T\dot{\boldsymbol{\theta}}). \quad (2.54)$$

O produto entre vetores $\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T$ será computado como:

$$\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3] = \begin{bmatrix} \theta_1^2 & \theta_1\theta_2 & \theta_1\theta_3 \\ \theta_1\theta_2 & \theta_2^2 & \theta_2\theta_3 \\ \theta_1\theta_3 & \theta_2\theta_3 & \theta_3^2 \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

Utilizando a equação (2.37) e considerando que

$$\boldsymbol{\theta}^2 = \begin{bmatrix} -\theta_2^2 - \theta_3^2 & \theta_1\theta_2 & \theta_1\theta_3 \\ \theta_1\theta_2 & -\theta_1^2 - \theta_3^2 & \theta_2\theta_3 \\ \theta_1\theta_3 & \theta_2\theta_3 & -\theta_1^2 - \theta_2^2 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

e

$$\theta^2 \mathbf{I} = (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

o produto apresentado em (2.55) é equivalente a:

$$\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T = \boldsymbol{\theta}^2 + \theta^2 \mathbf{I}. \quad (2.58)$$

Voltando à demonstração do eixo do giro específico do diretor, e levando em consideração a equivalência do produto, tem-se:

$$\mathbf{w} = axial(\boldsymbol{\Omega}) = h_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} + h_2 \boldsymbol{\theta} \dot{\boldsymbol{\theta}} + (h - h_1) \frac{1}{\theta^2} (\boldsymbol{\theta}^2 + \theta^2 \mathbf{I}) \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.59)$$

ou:

$$\mathbf{w} = axial(\boldsymbol{\Omega}) = h \dot{\boldsymbol{\theta}} + h_2 \boldsymbol{\theta} \dot{\boldsymbol{\theta}} + (1 - h_1) \frac{1}{\theta^2} \boldsymbol{\theta}^2 \dot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (2.60)$$

Colocando $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ em evidência, temos:

$$\mathbf{w} = axial(\boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{\Gamma} \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad (2.61)$$

onde:

$$\boldsymbol{\Gamma} = h + h_2 \boldsymbol{\theta} + h_3 \boldsymbol{\theta}^2. \quad (2.62)$$

Utilizando a parametrização de Euler (equação (2.26)), têm-se:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{I} + h_2 \boldsymbol{\theta} + h_3 \boldsymbol{\theta}^2 \quad (2.63)$$

2.5 Vetor axial das deformações específicas

Considere inicialmente um vetor de eixo de rotação $\boldsymbol{\theta}$. O quadrado da rotação ao longo deste eixo é dado por:

$$\theta^2 = \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}. \quad (2.64)$$

A derivada do quadrado em relação a dois eixos coordenados ξ_α , que compõem um plano, será obtida como:

$$\frac{\partial(\theta^2)}{\partial\xi_\alpha} = 2\theta\theta_{,\alpha} = \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} \cdot \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}. \quad (2.65)$$

A equação (2.65) é composta por produtos escalares e, conseqüentemente pode ser reescrita como:

$$2\theta\theta_{,\alpha} = 2(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}). \quad (2.66)$$

Isolando $\theta_{,\alpha}$, têm-se

$$\theta_{,\alpha} = \frac{1}{\theta}(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}). \quad (2.67)$$

Considere agora o tensor das rotações, definido em (2.44) e aqui retomado

$$\boldsymbol{Q} = \mathbf{I} + h_1(\theta)\boldsymbol{\theta} + h_2(\theta)\boldsymbol{\theta}^2. \quad (2.68)$$

Derivando o tensor das rotações em relação aos dois eixos coordenados ξ_α que compõem o plano e levando em consideração a regra da cadeia, temos:

$$\boldsymbol{Q}_{,\alpha} = h_{1,\alpha}(\theta)\theta_{,\alpha}\boldsymbol{\theta} + h_1(\theta)\boldsymbol{\theta}_{,\alpha} + h_{2,\alpha}(\theta)\theta_{,\alpha}\boldsymbol{\theta}^2 + h_2(\theta)(\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}). \quad (2.69)$$

Reorganizando os termos:

$$\boldsymbol{Q}_{,\alpha} = h_1(\theta)\boldsymbol{\theta}_{,\alpha} + h_2(\theta)(\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) + h_{1,\alpha}(\theta)\theta_{,\alpha}\boldsymbol{\theta} + h_{2,\alpha}(\theta)\theta_{,\alpha}\boldsymbol{\theta}^2. \quad (2.70)$$

Substituindo a derivada $\theta_{,\alpha}$, apresentada na equação (2.67), na equação (2.70):

$$\boldsymbol{Q}_{,\alpha} = h_1\boldsymbol{\theta}_{,\alpha} + h_2(\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) + \frac{h_{1,\alpha}}{\theta}(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha})\boldsymbol{\theta} + \frac{h_{2,\alpha}}{\theta}(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha})\boldsymbol{\theta}^2. \quad (2.71)$$

De forma similar a Moreira (2009), onde se define o tensor das velocidades angulares, se define o tensor de giro específico do diretor de um plano como:

$$\boldsymbol{K}_\alpha = \boldsymbol{Q}_{,\alpha}\boldsymbol{Q}^T. \quad (2.72)$$

Devido à demonstração extensiva deste novo tensor, esta será suprimida do presente trabalho, sendo recomendado a leitura em Moreira (2009). Vale ressaltar que a demonstração utiliza as seguintes propriedades de tensores anti-simétricos descritas em (2.49), (2.50) e (2.51)

A partir da equação (2.72) e substituindo nesta as equações (2.71) e

$$\boldsymbol{Q}^T = \mathbf{I} - h_1(\theta)\boldsymbol{\theta} + h_2(\theta)\boldsymbol{\theta}^2, \quad (2.73)$$

o tensor de giro específico do diretor será calculado como

$$\boldsymbol{K}_\alpha = h_1\boldsymbol{\theta}_{,\alpha} + h_2(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}_{,\alpha} - \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}\boldsymbol{\theta}) + (h - h_1)\frac{1}{\theta^2}(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha})\boldsymbol{\theta}. \quad (2.74)$$

De forma análoga ao vetor axial de giro do tensor das velocidades angulares em (MOREIRA, pág. 47, 2009), o vetor axial de giro do tensor de giro específico do diretor será dado por:

$$\boldsymbol{\kappa}_\alpha = \text{axial}(\mathbf{K}_\alpha) = h_1 \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} + h_2 \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} + (h - h_1) \frac{1}{\theta^2} (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \boldsymbol{\theta}. \quad (2.75)$$

Representando o produto escalar como um produto entre vetores:

$$\boldsymbol{\kappa}_\alpha = \text{axial}(\mathbf{K}_\alpha) = h_1 \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} + h_2 \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} + (h - h_1) \frac{1}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} (\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \quad (2.76)$$

Os tensores e vetores componentes deste vetor encontram-se em (2.39), (2.55), (2.56) e (2.57). Após diversas manipulações, encontra-se o vetor axial de giro do tensor de giro específico do diretor como

$$\boldsymbol{\kappa}_\alpha = \text{axial}(\mathbf{K}_\alpha) = h \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} + h_2 \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} + (1 - h_1) \frac{1}{\theta^2} \boldsymbol{\theta}^2 \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}. \quad (2.77)$$

Colocando $\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}$ em evidência, temos:

$$\boldsymbol{\kappa}_\alpha = \text{axial}(\mathbf{K}_\alpha) = \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}, \quad (2.78)$$

onde

$$\boldsymbol{\Gamma} = h + h_2 \boldsymbol{\theta} + h_3 \boldsymbol{\theta}^2. \quad (2.79)$$

Utilizando a parametrização de Euler resulta em:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{I} + h_2 \boldsymbol{\theta} + h_3 \boldsymbol{\theta}^2. \quad (2.80)$$

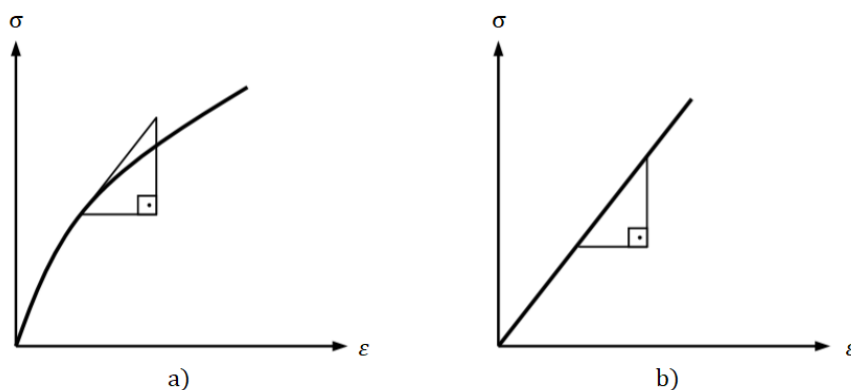
3 Equações constitutivas

O presente capítulo apresentará uma breve revisão das equações constitutivas dos materiais hiperelásticos. Em primeiro momento será dada uma definição geral de materiais hiperelásticos, sendo demonstrado em seguida a relação estabelecida entre tensores de tensão e a função energia de deformação. Esta demonstração passará por conceitos referentes à energia do fenômeno de deformações. Em último momento, serão apresentadas as funções energia de deformação para materiais Neo-Hookianos e de Saint Venant.

3.1 Materiais hiperelásticos

O estudo das relações tensão-deformação de materiais durante a graduação usualmente se limita ao estudo de materiais com comportamento linear na fase elástica, não sendo vista a notação tensorial para descrever o fenômeno. Na prática, no entanto, grande parte dos materiais apresentam curvas de tensão-deformação com comportamento não linear na fase elástica, ou seja, embora os materiais recuperem as deformações após a retirada de carregamento aplicado na fase elástica, estes possuem curvas não lineares, sendo estes denominados materiais hiperelásticos. Este comportamento é ilustrado pela figura a seguir.

Figura 2 - Curva tensão-deformação para modelo elástico de ensaio de tração uniaxial: a) não-linear; b) linear



Fonte: Adaptada de Pimenta, 2006.

3.2 Relações constitutivas elásticas não lineares

As relações constitutivas hiperelásticas são expressas com base em uma função de energia de deformação específica (ψ), sendo tomada como potencial para as tensões (PIMENTA, 2006).

A correlação entre a energia de deformação específica e função do segundo tensor de Piola-Kirchhoff pode ser expressa em função do tensor de deformações de Cauchy-Green (\mathbf{C}) como

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}}, \quad (3.1)$$

conforme apresentado por Ogden (apud BANDEIRA, 2001).

A determinação do segundo tensor de Piola-Kirchhoff pode também ser realizada em função do tensor de deformações de Green-Lagrange, assumindo a seguinte forma:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}}. \quad (3.2)$$

A função de energia de deformação específica, por sua vez, pode possuir diferentes formas de dependência em relação às deformações. No caso do material de Saint-Venant-Kirchhoff, apresentado por Campello, Pimenta e Wriggers (2003) e discutido em uma seção futura, a função de energia é parametrizada diretamente em função do tensor das deformações de Green-Lagrange. No caso do material Neo-Hookiano, função de energia é parametrizada em função dos invariantes I_1, I_2 e J :

$$\psi = \hat{\Psi}(I_1, I_2, J), \quad (3.3)$$

onde

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathbf{I} : \mathbf{C}, \\ I_2 &= \frac{1}{2} \mathbf{I} : \mathbf{C}^2, \\ J &= \det \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

A relação apresentada na equação (3.1) assumirá a forma

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} = 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \psi}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \right), \quad (3.5)$$

3.3 Material Neo-Hookiano de Ciarlet-Simo

Os materiais hiperelásticos podem possuir os mais diversos modelos, sendo possível citar os de Mooney, Mooney-Rivlin, Ogden, Yeoh, Gent, Yeoh-Fleming, Saint-Venant-Kirchhoff e Neo-Hooke. Um dos materiais adotados possui como modelo o material Neo-Hookeano, devido à capacidade de representação de grandes deformações.

Um material Neo-Hookeano poli-convexo simples, segundo Simo e Hughes (1991), pode ser representado pela função energia específica de deformação

$$\psi(I_1, J) = \frac{1}{2} \lambda \left[\frac{1}{2} (J^2 - 1) - \ln J \right] + \frac{1}{2} \mu (I_1 - 3 - 2 \ln J), \quad (3.6)$$

onde λ e μ são constantes conhecidas como as constantes de Lamé e são determinadas experimentalmente ou são obtidas a partir do módulo de elasticidade (E) e do coeficiente de Poisson (ν) por:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}; \quad (3.7)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (3.8)$$

3.4 Material de Saint-Venant-Kirchhoff

O material de Saint-Venant-Kirchhoff se trata do modelo de material hiperelástico desenvolvido para analisar corpos submetidos à pequenas deformações. A formulação do material assume que as configurações de referência e corrente são aproximadamente coincidentes, já que existem apenas pequenas deformações.

O material de Saint-Venant-Kirchhoff, segundo Ciarlet (1988), possui a sua energia específica de deformação expressa por

$$\psi(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\lambda(\mathbf{I} : \mathbf{E})^2 + \mu(\mathbf{E} : \mathbf{E}), \quad (3.9)$$

sendo \mathbf{E} o tensor das deformações de Green-Lagrange.

4 Formulação tensorial de casca espessa não linear sem variação de espessura

4.1 Introdução

O presente capítulo apresentará a formulação do elemento de casca espessa não linear sem variação de espessura. Esta formulação foi inicialmente apresentada por Campello, Pimenta e Wriggers. (2003)

O autor assume que o leitor possui conhecimento prévio sobre os campos da mecânica dos sólidos e álgebra tensorial, sendo apresentados conceitos adicionais ou relembrados alguns conceitos básicos (ao longo do corpo principal do trabalho, ou anexos), conforme seja necessário para melhor compreensão por parte do leitor.

A estruturação do capítulo segue a seguinte sequência: descrição das considerações feitas ao se considerar uma casca espessa (teoria de Reissner-Mindlin); descrição da cinemática da casca ao se movimentar entre configurações; estática da casca; equilíbrio da casca; descrição de comportamento de tensões, utilizando as equações constitutivas hiperelásticas Neo-hooke e Saint-Venant.

4.2 Teoria de cascas espessas de Reissner-Mindlin

Dentro das formulações de casca existentes, duas possíveis teorias representam uma subdivisão em relação às considerações de espessura (AJEJE, 2009). A primeira trata-se da teoria de cascas finas, denominada teoria de Kirchhoff-Love, não sendo esta o enfoque do presente trabalho, sendo apenas citada a diferença desta em relação à teoria objetivada no presente capítulo. A segunda teoria, enfoque principal deste capítulo, trata-se da teoria de cascas espessas de Reissner-Mindlin.

A teoria de cascas espessas de Reissner-Mindlin, conforme apresentado por Ajeje (2009), se baseia em três hipóteses, sendo estas:

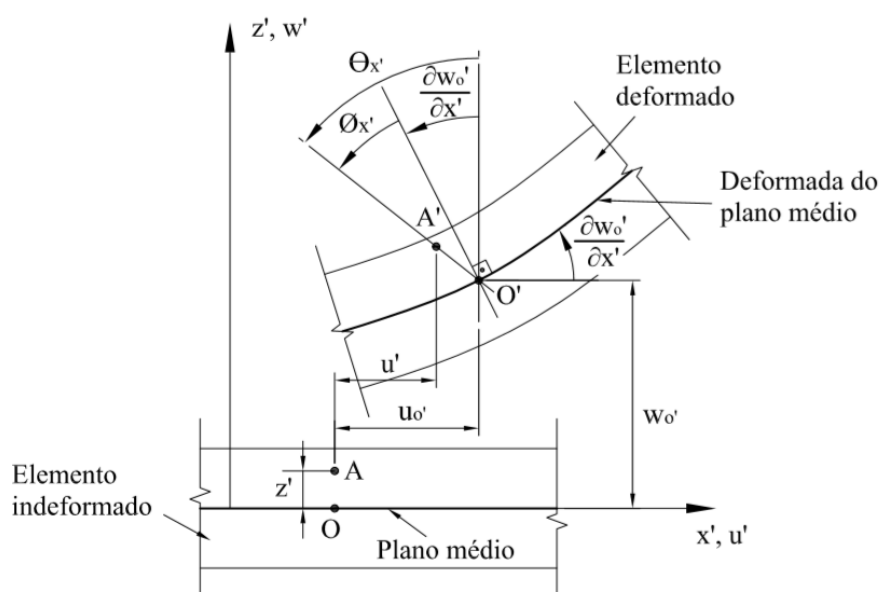
1. Todos os pontos contidos em uma reta normal ao plano médio têm o mesmo deslocamento transversal;
2. A tensão normal na direção transversal é desprezável;
3. Retas normais ao plano médio da casca indeformada permanecem retas, mas não necessariamente normais ao plano médio, após a deformação.

A terceira hipótese apresentada acima é a hipótese que diferencia as teorias de cascas espessas das cascas finas, tendo a segunda teoria a consideração que as retas normais ao plano médio na configuração indeformada permanecem normais após deformação. Esta consideração corresponde a serem desprezadas as tensões cisalhantes transversais.

Vale ressaltar a semelhança que a teoria de placas espessas apresenta com a teoria de vigas de Timoshenko, sendo a teoria de Reissner-Mindlin uma extrapolação para duas dimensões da teoria de Timoshenko.

A Figura 3 ilustra a terceira hipótese para uma das direções da casca. Além do efeito causado pelo momento fletor, expresso por $\frac{\partial w_o'}{\partial x'}$, a teoria leva em conta a distorção causada pelo cisalhamento, expressa na figura por $\phi_{x'}$. Esta distorção ocasionará que as retas não mais permaneçam ortogonais ao plano médio após a deformação.

Figura 3 – Deformação de casca espessa



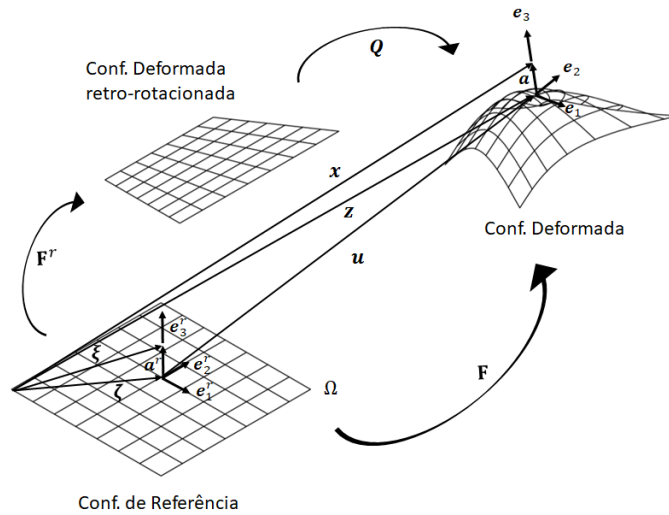
Fonte: Ajeje, 2009

4.3 Cinemática da Casca

As demonstrações apresentadas nesta e nas subseqüentes seções seguem a demonstração apresentada no material de referência desenvolvido por Campello, Pimenta e Wriggers (2003).

A formulação da cinemática da casca parte da consideração que existem duas configurações principais: uma de referência plana e uma corrente (ou deformada). Devido à composição de movimentos, existe entre as configurações principais uma subconfiguração, resultante da retrorotação da configuração deformada. Todas as configurações consideradas neste modelo são apresentadas na figura a seguir.

Figura 4 - Configurações da casca



Fonte: Autor, 2019.

Nesta teoria, assume-se que a configuração de referência é plana, sendo qualquer superfície curvada considerada como múltiplas superfícies planas contíguas (CAMPELLO, PIMENTA, WRIGGERS, 2003). Como esta consideração não é exata, em um próximo capítulo será apresentada uma adaptação que considera as superfícies curvas não mais como múltiplas superfícies planas contíguas, mas com sua geometria inicial original.

Conforme visto na Figura 4, é assumido que a casca possui o plano médio na configuração de referência, com um sistema de coordenadas ortogonais $\{\mathbf{e}_1^r, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r\}$, onde \mathbf{e}_1^r e \mathbf{e}_2^r estão contidos no plano médio da casca e \mathbf{e}_3^r está normal ao plano. A posição de qualquer ponto na configuração de referência será então dada por

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{a}^r, \quad (4.1)$$

onde

$$\boldsymbol{\zeta} = \xi_\alpha \mathbf{e}_\alpha^r \quad (4.2)$$

são as coordenadas de um ponto material no plano médio da casca e

$$\mathbf{a}^r = \zeta \mathbf{e}_3^r \quad (4.3)$$

se trata da direção da fibra deste ponto. A espessura h da casca na configuração de referência é considerada através do parâmetro $\zeta \in H = [-h^b, h^t]$, sendo $h = h^b + h^t$.

Definido o sistema de coordenadas na configuração de referência, se define o sistema de coordenadas na configuração corrente. A mesma possuirá o sistema de coordenadas ortogonais $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, valendo a relação $\mathbf{e}_i = \mathbf{Q}\mathbf{e}_i^r$, onde \mathbf{Q} se trata do tensor das rotações de Euler-Rodrigues apresentado em (2.38). Vale ressaltar que a relação

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{v}^r \leftrightarrow \mathbf{v}^r = \mathbf{Q}^T\mathbf{v} \quad (4.4)$$

é válida para quaisquer vetores \mathbf{v} e \mathbf{v}^r . O vetor \mathbf{v}^r é chamado de vetor “back-rotated” de \mathbf{v} por Campello, Pimenta e Wriggers (2003), sendo tal denominação traduzida no presente trabalho como retro-rotacionado. O vetor genérico \mathbf{v}^r não é afetado por movimentos de corpo rígido superimpostos (CAMPELLO, PIMENTA, WRIGGERS, 2003).

Analogamente à posição na configuração de referência, a posição na configuração corrente de qualquer ponto material será dada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{a}, \quad (4.5)$$

onde \mathbf{z} representa a posição corrente de um ponto no plano médio e \mathbf{a} representa a direção da fibra ao longo da espessura da casca na configuração atual.

Vale ressaltar que \mathbf{a} não é necessariamente normal ao plano médio da casca na configuração corrente, conseguindo assim representar o cisalhamento transversal, constante ao longo da casca. A variação de espessura não é considerada nesta teoria, sendo assim

$$\|\mathbf{a}^r\| = \|\mathbf{a}\|. \quad (4.6)$$

O deslocamento dos pontos localizados no plano médio das cascas entre as configurações será calculado por

$$\mathbf{u} = \mathbf{z} - \zeta. \quad (4.7)$$

As três componentes de deslocamento e os três componentes de rotação compõem os seis parâmetros que definem o modelo de casca.

4.3.1 Tensor das transformações

O tensor das transformações \mathbf{F} pode ser obtido com a diferenciação da equação da posição na configuração corrente (4.5) em relação à equação na configuração de referência (4.1):

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \otimes \mathbf{e}_i^r = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_\alpha} \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \zeta} \otimes \mathbf{e}_3^r. \quad (4.8)$$

Substituindo o valor de \mathbf{x} expresso na equação (4.5), têm-se:

$$\mathbf{F} = \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \xi_\alpha} \right) \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \zeta} \right) \otimes \mathbf{e}_3^r. \quad (4.9)$$

Considerando que \mathbf{z} é um vetor que se refere à posição de um ponto sempre no plano médio da casca na configuração deformada, este não apresenta variação em função ao longo da espessura, isto é,

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \zeta} = 0, \quad (4.10)$$

logo:

$$\mathbf{F} = \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \xi_\alpha} \right) \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \zeta} \otimes \mathbf{e}_3^r. \quad (4.11)$$

Adotando a notação $\partial(\cdot)/\partial(\xi_\alpha) = (\cdot)_{,\alpha}$, a expressão acima pode ser reescrita por:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{z}_{,\alpha} + \mathbf{a}_{,\alpha}) \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \zeta} \otimes \mathbf{e}_3^r. \quad (4.12)$$

Considerando que \mathbf{a} é o vetor da fibra composto pelo diretor da casca na configuração deformada \mathbf{e}_3 multiplicado pela magnitude ζ que expressa a posição da fibra ao longo da casca, ou seja:

$$\mathbf{a} = \zeta \mathbf{e}_3. \quad (4.13)$$

Substituindo em (4.12) e considerando

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \zeta} = \mathbf{e}_3, \quad (4.14)$$

têm-se :

$$\mathbf{F} = (\mathbf{z}_{,\alpha} + \mathbf{a}_{,\alpha}) \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3^r. \quad (4.15)$$

Considerando agora que $\mathbf{a} = \mathbf{Q}\mathbf{a}^r$ e que a direção da fibra ao longo da espessura na configuração indeformada é afetada apenas pela variação ao longo da direção \mathbf{e}_3^r , têm-se:

$$\mathbf{F} = [\mathbf{z}_{,\alpha} + (\mathbf{Q}\mathbf{a}^r)_{,\alpha}] \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3^r. \quad (4.16)$$

Realizando a derivação e considerando a regra da cadeia temos que

$$\mathbf{F} = (\mathbf{z}_{,\alpha} + \mathbf{Q}_{,\alpha}\mathbf{a}^r + \mathbf{Q}\mathbf{a}_{,\alpha}^r) \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3^r. \quad (4.17)$$

Considerando que a o vetor \mathbf{a}^r possui componentes apenas na direção \mathbf{e}_3^r , sua derivada em relação a ξ_α será nula, ou seja

$$\mathbf{a}_{,\alpha}^r = 0. \quad (4.18)$$

Substituindo esta consideração na equação (4.17) temos que

$$\mathbf{F} = (\mathbf{z}_{,\alpha} + \mathbf{Q}_{,\alpha}\mathbf{a}^r) \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3^r. \quad (4.19)$$

Utilizando a correlação $\mathbf{a}^r = \mathbf{Q}^T \mathbf{a}$ na equação anterior, se pode escrever que

$$\mathbf{F} = (\mathbf{z}_{,\alpha} + \mathbf{Q}_{,\alpha}\mathbf{Q}^T \mathbf{a}) \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3^r. \quad (4.20)$$

Considere agora a correlação

$$\mathbf{z}_{,\alpha} \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3^r = \boldsymbol{\eta}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3^r, \quad (4.21)$$

onde $\boldsymbol{\eta}_\alpha$ é inicialmente um ente matemático adicionado sem significado físico inicialmente claro. Agrupando os termos do produto diádico em relação \mathbf{e}_α^r resulta em

$$\mathbf{z}_{,\alpha} \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3^r = (\boldsymbol{\eta}_\alpha + \mathbf{e}_\alpha) \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3^r. \quad (4.22)$$

Dessa forma, se pode perceber que

$$\mathbf{z}_{,\alpha} = \boldsymbol{\eta}_\alpha + \mathbf{e}_\alpha. \quad (4.23)$$

No entanto, a partir da derivada da equação (4.7) em relação a ξ_α e utilizando (4.4), tem-se que

$$\mathbf{u}_{,\alpha} = \mathbf{z}_{,\alpha} - \mathbf{e}_\alpha^r, \quad (4.24)$$

ou,

$$\mathbf{z}_{,\alpha} = \mathbf{u}_{,\alpha} + \mathbf{e}_\alpha^r. \quad (4.25)$$

Igualando as equações (4.23) e (4.25) se encontra $\boldsymbol{\eta}_\alpha$ como

$$\boldsymbol{\eta}_\alpha = \mathbf{u}_{,\alpha} + \mathbf{e}_\alpha^r - \mathbf{e}_\alpha \quad (4.26)$$

ou, utilizando a relação $\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{Q}\mathbf{e}_\alpha^r$, temos

$$\boldsymbol{\eta}_\alpha = \mathbf{u}_{,\alpha} + (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{e}_\alpha^r, \quad (4.27)$$

ou,

$$\boldsymbol{\eta}_\alpha = \mathbf{u}_{,\alpha} - (\mathbf{Q} - \mathbf{I})\mathbf{e}_\alpha^r. \quad (4.28)$$

Desta forma, $\boldsymbol{\eta}_\alpha$ representa uma parcela do vetor de deformação do plano médio da casca.

Conforme apresentado em (4.28) $\boldsymbol{\eta}_\alpha$ será obtido pela derivada do vetor de deslocamentos em função de ξ_α subtraída do movimento de corpo rígido, expresso pela movimentação do sistema de coordenadas entre as configurações de referência e deformada.

Substituindo a equação (4.23) na equação (4.20) se obtêm que

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\eta}_\alpha + \mathbf{e}_\alpha + \mathbf{Q}_{,\alpha}\mathbf{Q}^T\mathbf{a}) \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3^r \quad (4.29)$$

ou,

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\eta}_\alpha + \mathbf{Q}_{,\alpha}\mathbf{Q}^T\mathbf{a}) \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3^r. \quad (4.30)$$

Conforme apresentado na seção 2.5, o tensor $\mathbf{Q}_{,\alpha}\mathbf{Q}^T$ é denominado como tensor do giro específico do diretor \mathbf{e} , conforme apresentado na equação (2.72), pode ser representado como $\mathbf{K}_\alpha = \mathbf{Q}_{,\alpha}\mathbf{Q}^T$. Substituindo a equação (2.72) na equação (4.30), se pode obter que

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\eta}_\alpha + \mathbf{K}_\alpha\mathbf{a}) \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3^r. \quad (4.31)$$

Ainda na parcela de \mathbf{K}_α , o produto $\mathbf{K}_\alpha \mathbf{a} = \boldsymbol{\kappa}_\alpha \times \mathbf{a}$, onde $\boldsymbol{\kappa}_\alpha$ se trata do vetor de giro do tensor \mathbf{K}_α , sendo este vetor apresentado na equação (2.78). Substituindo esta relação na equação (4.31), têm-se

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\eta}_\alpha + \boldsymbol{\kappa}_\alpha \times \mathbf{a}) \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3^r. \quad (4.32)$$

A partir da definição do tensor \mathbf{Q} se observa que

$$\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3^r = \mathbf{Q}. \quad (4.33)$$

Substituindo esta relação na fórmula para \mathbf{F} , se obtêm que

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\eta}_\alpha + \boldsymbol{\kappa}_\alpha \times \mathbf{a}) \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{Q}. \quad (4.34)$$

Manipulando um pouco a equação e considerando que

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q}\mathbf{F}^r, \quad (4.35)$$

encontra-se

$$\mathbf{F}^r = (\boldsymbol{\eta}_\alpha^r + \boldsymbol{\kappa}_\alpha^r \times \mathbf{a}^r) \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{I}. \quad (4.36)$$

A equação para \mathbf{F}^r pode ainda ser escrita como

$$\mathbf{F}^r = \boldsymbol{\gamma}_\alpha^r \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{I}, \quad (4.37)$$

onde

$$\boldsymbol{\gamma}_\alpha^r = \boldsymbol{\eta}_\alpha^r + \boldsymbol{\kappa}_\alpha^r \times \mathbf{a}^r \quad (4.38)$$

se tratam dos vetores de deformação.

Vale ressaltar que as projeções de $\boldsymbol{\eta}_\alpha^r$ em relação a \mathbf{e}_β^r representam as deformações de membrana e em relação a \mathbf{e}_3^r representam as deformações pelo cisalhamento transversal.

4.3.2 Derivadas das deformações em função do tempo

As derivadas $\dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha^r$ e $\dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^r$ serão determinadas a seguir, respectivamente. Reescrevendo a equação (4.23) se pode obter que

$$\boldsymbol{\eta}_\alpha = \mathbf{z}_{,\alpha} - \mathbf{e}_\alpha. \quad (4.39)$$

O equivalente retro-rotacionado da equação anterior corresponde a:

$$\boldsymbol{\eta}_\alpha^r = \mathbf{Q}^T \mathbf{z}_{,\alpha} - \mathbf{e}_\alpha^r. \quad (4.40)$$

Derivando esta equação em relação ao tempo, se obtêm:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha^r = \dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{z}_{,\alpha} + \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{z}}_{,\alpha}. \quad (4.41)$$

Vale ressaltar que $\dot{\mathbf{e}}_\alpha^r$ terá valor nulo pois a configuração de referência não sofrerá modificações ao longo do tempo.

Da equação (2.48), têm-se

$$\dot{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{Q}. \quad (4.42)$$

Transpondo a equação acima e, substituindo a transposta na equação (4.41), obtêm-se

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_{\alpha}^r = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{z}_{,\alpha} + \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{z}}_{,\alpha}. \quad (4.43)$$

Evidenciando o tensor \mathbf{Q}^T e, ressaltando que o tensor $\boldsymbol{\Omega}$ é antissimétrico, é possível utilizar a propriedade algébrica demonstrada no APÊNDICE A e a equação (2.61) para obter:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_{\alpha}^r = \mathbf{Q}^T (\mathbf{z}_{,\alpha} \boldsymbol{\omega} + \dot{\mathbf{z}}_{,\alpha}), \quad (4.44)$$

sendo

$$\mathbf{z}_{,\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & -z_{3,\alpha} & z_{2,\alpha} \\ z_{3,\alpha} & 0 & -z_{1,\alpha} \\ -z_{2,\alpha} & z_{1,\alpha} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Utilizando novamente a equação (2.61), obtêm-se

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_{\alpha}^r = \mathbf{Q}^T (\mathbf{z}_{,\alpha} \boldsymbol{\Gamma} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\mathbf{z}}_{,\alpha}). \quad (4.46)$$

A parcela $\dot{\mathbf{z}}_{,\alpha}$ pode ser obtida a partir da diferenciação do vetor de deslocamento expresso na equação (4.7) em função de $\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha}$ e do tempo. A derivação em relação a $\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha}$ é expressa em (4.25). Derivando esta equação em relação ao tempo, obtêm-se:

$$\dot{\mathbf{u}}_{,\alpha} = \dot{\mathbf{z}}_{,\alpha}. \quad (4.47)$$

Vale ressaltar que $\dot{\boldsymbol{\zeta}}_{,\alpha}$ terá valor nulo pois a configuração de referência não sofrerá modificações ao longo do tempo.

Substituindo a equação (4.47) na equação (4.46), é possível obter:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_{\alpha}^r = \mathbf{Q}^T (\mathbf{z}_{,\alpha} \boldsymbol{\Gamma} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\mathbf{u}}_{,\alpha}). \quad (4.48)$$

Determinada a primeira parcela de $\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}^r$ agora será determinada a segunda parcela, relativa a $\dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\alpha}^r$.

A determinação de $\dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\alpha}^r$ inicia com a derivação do tensor das velocidades angulares expresso na equação (2.48) em relação a $\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha}$:

$$\boldsymbol{\Omega}_{,\alpha} = \dot{\mathbf{Q}}_{,\alpha} \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_{,\alpha}^T. \quad (4.49)$$

Considere agora a derivada em função do tempo do tensor das rotações específicas do diretor da espessura da casca, apresentado na equação (2.72), dada por:

$$\dot{\mathbf{K}}_{\alpha} = \dot{\mathbf{Q}}_{,\alpha} \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}_{,\alpha} \dot{\mathbf{Q}}^T. \quad (4.50)$$

isolando $\dot{\mathbf{Q}}_{,\alpha} \mathbf{Q}^T$ e considerando a equação (4.49) temos:

$$\boldsymbol{\Omega}_{,\alpha} = \dot{\mathbf{K}}_{\alpha} - \mathbf{Q}_{,\alpha} \dot{\mathbf{Q}}^T + \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_{,\alpha}^T. \quad (4.51)$$

Após alguma manipulação e considerando (2.48) e (2.72), a equação (4.51) pode ainda ser reescrita como

$$\boldsymbol{\Omega}_{,\alpha} = \dot{\mathbf{K}}_{\alpha} - \mathbf{K}_{\alpha} \boldsymbol{\Omega}^T + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{K}_{\alpha}^T. \quad (4.52)$$

Sendo $\boldsymbol{\Omega}$ e \mathbf{K}_{α} tensores antissimétricos, as expressões $-\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}^T$ e $-\mathbf{K}_{\alpha} = \mathbf{K}_{\alpha}^T$ são válidas e, substituindo estas na equação (4.52), têm-se

$$\boldsymbol{\Omega}_{,\alpha} = \dot{\mathbf{K}}_{\alpha} + \mathbf{K}_{\alpha} \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{K}_{\alpha}. \quad (4.53)$$

Para prosseguir com a demonstração, considere agora que multipliquemos os dois lados da igualdade por um vetor genérico \mathbf{v}_{gen} , ou seja,

$$\boldsymbol{\Omega}_{,\alpha} \mathbf{v}_{gen} = (\dot{\mathbf{K}}_{\alpha} + \mathbf{K}_{\alpha} \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{K}_{\alpha}) \mathbf{v}_{gen} \quad (4.54)$$

ou,

$$\boldsymbol{\Omega}_{,\alpha} \mathbf{v}_{gen} = \dot{\mathbf{K}}_{\alpha} \mathbf{v}_{gen} + (\mathbf{K}_{\alpha} \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{K}_{\alpha}) \mathbf{v}_{gen}. \quad (4.55)$$

Assim como $\boldsymbol{\Omega}$ e \mathbf{K}_{α} são tensores antisimétricos, as suas derivadas em relação a ξ_{α} e ao tempo, respectivamente, também se mostrarão como tensores antisimétricos. Desta forma, a equação (4.54) pode ser escrita em função dos vetores axiais destes tensores antisimétricos como

$$\mathbf{w}_{,\alpha} \times \mathbf{v}_{gen} = \dot{\mathbf{k}}_{\alpha} \times \mathbf{v}_{gen} + \mathbf{K}_{\alpha} (\mathbf{w} \times \mathbf{v}_{gen}) - \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{k}_{\alpha} \times \mathbf{v}_{gen}). \quad (4.56)$$

Após alguma manipulação, a equação acima pode ser reescrita

$$\mathbf{w}_{,\alpha} \times \mathbf{v}_{gen} = \dot{\mathbf{k}}_{\alpha} \times \mathbf{v}_{gen} + (\mathbf{k}_{\alpha} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{v}_{gen} \quad (4.57)$$

e, comparando os dois lados da igualdade, podemos afirmar que

$$\mathbf{w}_{,\alpha} = \dot{\mathbf{k}}_{\alpha} + (\mathbf{k}_{\alpha} \times \mathbf{w}) \quad (4.58)$$

ou, considerando a inversão do produto vetorial,

$$\mathbf{w}_{,\alpha} = \dot{\mathbf{k}}_{\alpha} - (\mathbf{w} \times \mathbf{k}_{\alpha}). \quad (4.59)$$

Para continuar a demonstração, considere a relação

$$\mathbf{k}_{\alpha} = \mathbf{Q} \mathbf{k}_{\alpha}^r \quad (4.60)$$

e sua derivada em relação ao tempo

$$\dot{\mathbf{k}}_{\alpha} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{k}_{\alpha}^r + \mathbf{Q} \dot{\mathbf{k}}_{\alpha}^r. \quad (4.61)$$

Substituindo a equação (4.61) em (4.59), têm-se

$$\mathbf{w}_{,\alpha} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{k}_{\alpha}^r + \mathbf{Q} \dot{\mathbf{k}}_{\alpha}^r - (\mathbf{w} \times \mathbf{k}_{\alpha}). \quad (4.62)$$

Após alguma manipulação, a equação acima pode ser reescrita como

$$\dot{\mathbf{k}}_{\alpha}^r = \mathbf{Q}^T \mathbf{w}_{,\alpha}. \quad (4.63)$$

Substituindo (2.61), sendo $\mathbf{\Gamma}$ apresentado na equação (2.63), se obtêm que

$$\dot{\mathbf{k}}_{\alpha}^r = \mathbf{Q}^T (\mathbf{\Gamma} \dot{\boldsymbol{\theta}})_{,\alpha} \quad (4.64)$$

e, aplicando a derivação obtêm-se que

$$\dot{\mathbf{k}}_{\alpha}^r = \mathbf{Q}^T (\mathbf{\Gamma}_{,\alpha} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{\Gamma} \dot{\boldsymbol{\theta}}_{,\alpha}), \quad (4.65)$$

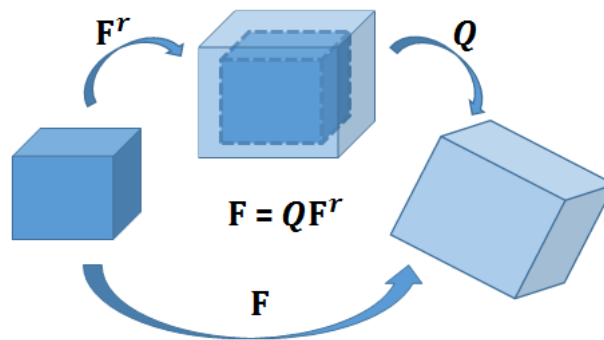
onde, analogamente ao encontrado na equação (B.12) no APÊNDICE B e, considerando que para tensores antisimétricos $\boldsymbol{\theta}^T = -\boldsymbol{\theta}$,

$$\mathbf{\Gamma}_{,\alpha} = h_2 \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} + h_3 (\boldsymbol{\theta}_{,\alpha} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) + h_4 (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \boldsymbol{\theta} + h_5 (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \boldsymbol{\theta}^2. \quad (4.66)$$

4.3.3 Gradiente de velocidade

As demonstrações apresentadas a seguir serão baseadas na consideração da Figura 5, sendo esta aqui apresentada para facilitar visualização física da transformação. Conforme visto na figura abaixo e apresentado por (REDDY, Pág. 132, 2013), o tensor das transformações pode ser definido como uma composição de movimentos, a partir da decomposição polar. A primeira parte é relativa ao estiramento enquanto a segunda parte é relativa à rotação. No presente trabalho, a parte relativa às rotações será parametrizada segundo tensor das rotações de Euler-Rodrigues \mathbf{Q} e a parcela do estiramento será representada por \mathbf{F}^r , que se trata do tensor direito dos estiramentos na configuração de referência (REDDY, 2013)(CAMPELLO, PIMENTA, WRIGGERS, 2003). O tensor \mathbf{F} será então calculado conforme apresentado em (4.35).

Figura 5 – Composição do tensor das transformações



Fonte: Autor, 2018.

O gradiente de velocidade será obtido a partir da diferenciação do tensor da transformação, em relação ao tempo. A diferenciação é expressa como

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{F}^r + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}}^r. \quad (4.67)$$

Tendo em mente (2.48) e (4.35), a equação acima pode ser reescrita por

$$\dot{\mathbf{F}} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{F} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}}^r. \quad (4.68)$$

Determinada a primeira parcela de $\dot{\mathbf{F}}$, se determina agora a segunda parcela. O tensor \mathbf{F}^r , conforme apresentado em (4.37) é calculado como

$$\mathbf{F}^r = \mathbf{I} + \boldsymbol{\gamma}_\alpha^r \otimes \mathbf{e}_\alpha^r. \quad (4.69)$$

Considerando que o vetor \mathbf{e}_α^r não sofre variação ao longo do tempo, a derivada em função do tempo do tensor \mathbf{F}^r assumirá o formato

$$\dot{\mathbf{F}}^r = \dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r \otimes \mathbf{e}_\alpha^r. \quad (4.70)$$

Derivando (4.38) em relação ao tempo, têm-se:

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r = \dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha^r + \dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^r \times \mathbf{a}^r. \quad (4.71)$$

Substituindo as equações encontradas em (4.48) e (4.65) se pode reescrever a equação anterior como

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r = \mathbf{Q}^T(\mathbf{Z}_{,\alpha}\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\mathbf{u}}_{,\alpha}) + [\mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\Gamma}_{,\alpha}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{,\alpha})] \times \mathbf{a}^r. \quad (4.72)$$

4.4 Estática da casca

4.4.1 Potência interna da casca

Assim como apresentado por Pimenta (2006), anteriormente à definição da potência interna da casca, se dá uma breve revisão do conceito de potência e trabalho de uma força \mathbf{f} atuando em um ponto com velocidade $\dot{\mathbf{u}}$, na Física. A potência (P) de \mathbf{f} será definida por

$$P = \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}}. \quad (4.73)$$

O trabalho de \mathbf{f} durante um intervalo de tempo (t_i, t_f) é dado por

$$W = \int_{t_i}^{t_f} P dt = \int_{t_i}^{t_f} (\mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}}) dt. \quad (4.74)$$

Aplicando estes conceitos na mecânica dos sólidos, a potência dos esforços internos, segundo Pimenta (2006) será dada por

$$P_{int} = \int_{V^r} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dV^r, \quad (4.75)$$

onde \mathbf{P} é definido como o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff e $\dot{\mathbf{F}}$ a derivada em função do tempo do tensor das transformações.

O primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff pode ser escrito como

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{P}^r = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\tau}_i^r \otimes \mathbf{e}_i^r), \quad (4.76)$$

onde o tensor \mathbf{P}^r se trata do primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff retro-rotacionado e os vetores $\boldsymbol{\tau}_i^r$ se tratam dos vetores de tensão retro-rotacionados que atuam nas seções transversais na configuração de referência da casca. Caso se introduza a condição do estado plano de tensões em \mathbf{P} , os vetores $\boldsymbol{\tau}_i$ e $\boldsymbol{\tau}_i^r$ tornam-se $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_i$ e $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_i^r$, respectivamente. Desta forma, o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff sob a condição de estado plano de tensões será dado por

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{P}^r = \mathbf{Q}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_i^r \otimes \mathbf{e}_i^r). \quad (4.77)$$

Substituindo a equação (4.76), referente ao primeiro tensor de piola Kirchhoff, e a equação (4.68) na equação da potência interna em (4.75), se obtêm que

$$P_{int} = \int_{V^r} [\mathbf{Q}(\boldsymbol{\tau}_i^r \otimes \mathbf{e}_i^r)] : (\boldsymbol{\Omega}\mathbf{F} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}}^r) dV^r. \quad (4.78)$$

Realizando o produto escalar para tensores de segunda ordem, pode ter ainda que

$$P_{int} = \int_{V^r} \mathbf{P}\mathbf{F}^T : \boldsymbol{\Omega} + [\mathbf{Q}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_i^r \otimes \mathbf{e}_i^r)] : (\mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}}^r) dV^r. \quad (4.79)$$

Representando o produto escalar tensorial pela sua definição de traço e o produto diático como produto matricial, a equação de potência interna pode ser escrita como

$$P_{int} = \int_{V^r} \mathbf{P}\mathbf{F}^T : \boldsymbol{\Omega} + tr(\mathbf{e}_i^r \tilde{\boldsymbol{\tau}}_i^{rT} \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}}^r) dV^r. \quad (4.80)$$

Considerando que $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$, se tem que

$$P_{int} = \int_{V^r} \mathbf{P}\mathbf{F}^T : \boldsymbol{\Omega} + tr(\mathbf{e}_i^r \tilde{\boldsymbol{\tau}}_i^{rT} \dot{\mathbf{F}}^r) dV^r. \quad (4.81)$$

Substituindo a equação (4.70) para $\dot{\mathbf{F}}^r$, se pode escrever que

$$P_{int} = \int_{V^r} \mathbf{P}\mathbf{F}^T : \boldsymbol{\Omega} + tr[\mathbf{e}_i^r \tilde{\boldsymbol{\tau}}_i^{rT} (\dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r \otimes \mathbf{e}_\alpha^r)] dV^r, \quad (4.82)$$

ou

$$P_{int} = \int_{V^r} \mathbf{P}\mathbf{F}^T : \boldsymbol{\Omega} + tr[\mathbf{e}_i^r \tilde{\boldsymbol{\tau}}_i^{rT} \dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r \mathbf{e}_\alpha^{rT}] dV^r. \quad (4.83)$$

Considerando os índices dos termos envolvidos em $tr[\mathbf{e}_i^r \tilde{\boldsymbol{\tau}}_i^{rT} \dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r \mathbf{e}_\alpha^{rT}]$, observa-se que o vetor tensão $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_3^r$ não apresenta potência associada a ele. Esta observação se mostra coerente com a consideração de não existir alongamento da espessura da casca, já que o diretor da casca é rígido.

Voltando a uma notação diádica, se pode obter que

$$P_{int} = \int_{V^r} \mathbf{PF}^T : \boldsymbol{\Omega} + tr[(\mathbf{e}_\alpha^r \otimes \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r)(\dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r \otimes \mathbf{e}_\alpha^r)] dV^r. \quad (4.84)$$

Utilizando a propriedade do traço de um tensor de segunda ordem apresentada por Pimenta (2006) que afirma que

$$tr[(\mathbf{e}_\alpha^r \otimes \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r)(\dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r \otimes \mathbf{e}_\alpha^r)] = tr[(\dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r \otimes \mathbf{e}_\alpha^r)(\mathbf{e}_\alpha^r \otimes \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r)] = tr[\dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r \mathbf{e}_\alpha^{rT} \mathbf{e}_\alpha^r \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^{rT}] \quad (4.85)$$

e considerando que $\mathbf{e}_\alpha^{rT} \mathbf{e}_\alpha^r = \mathbf{e}_\alpha^r \cdot \mathbf{e}_\alpha^r = 1$, pode-se substituir estas duas considerações na equação (4.84), como

$$P_{int} = \int_{V^r} \mathbf{PF}^T : \boldsymbol{\Omega} + tr[\dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r \otimes \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r] dV^r. \quad (4.86)$$

Utilizando agora a propriedade do traço de um tensor de segunda ordem apresentada por (PIMENTA, pág. 53) que afirma que

$$tr[\dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r \otimes \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r] = \dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r \quad (4.87)$$

e substituindo esta na equação (4.86), se pode escrever que

$$P_{int} = \int_{V^r} \mathbf{PF}^T : \boldsymbol{\Omega} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r dV^r. \quad (4.88)$$

Conforme apresentado no artigo base, a partir do balanço local de momentos, podemos chegar em:

$$\mathbf{PF}^T : \boldsymbol{\Omega} = 0. \quad (4.89)$$

Substituindo a equação (4.89) na equação (4.88), se têm que

$$P_{int} = \int_{V^r} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r dV^r. \quad (4.90)$$

Considerando a equação (4.75), se pode afirmar que

$$\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r. \quad (4.91)$$

Substituindo a equação (4.71) na equação (4.91) se têm que

$$\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r \cdot (\dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha^r + \dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^r \times \mathbf{a}^r). \quad (4.92)$$

Realizando o produto e utilizando a propriedade de produto misto que afirma que as operações podem ser trocadas, desde que se mantenham as ordens dos vetores, ou seja,

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r \cdot (\dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^r \times \mathbf{a}^r) = \dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^r \cdot (\mathbf{a}^r \times \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r), \quad (4.93)$$

temos que

$$\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha^r + (\mathbf{a}^r \times \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r) \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^r. \quad (4.94)$$

A integração de $\boldsymbol{\tau}_\alpha^r \cdot \boldsymbol{\gamma}_\alpha^r$ ao longo da espessura da casca, é dada por

$$\int_H \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r \cdot \boldsymbol{\gamma}_\alpha^r d\zeta = \int_H \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r d\zeta \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha^r + \int_H (\boldsymbol{a}^r \times \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r) d\zeta \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^r. \quad (4.95)$$

Considera-se agora que

$$\boldsymbol{n}_\alpha^r = \int_H \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r d\zeta; \quad (4.96)$$

$$\boldsymbol{m}_\alpha^r = \int_H (\boldsymbol{a}^r \times \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r) d\zeta, \quad (4.97)$$

onde os vetores \boldsymbol{n}_α^r e \boldsymbol{m}_α^r representam respectivamente as forças internas e os momentos internos generalizados retro-rotacionados que atuam nas seções transversais de normais \boldsymbol{e}_α^r , por unidade de comprimento da configuração de referência (MOREIRA, 2009). Vale ressaltar que as propriedades

$$\boldsymbol{n}_\alpha = \boldsymbol{Q} \boldsymbol{n}_\alpha^r \quad (4.98)$$

e

$$\boldsymbol{m}_\alpha = \boldsymbol{Q} \boldsymbol{m}_\alpha^r \quad (4.99)$$

são válidas.

Levando em consideração as equações (4.96) e (4.97), a equação (4.95) pode ser reescrita como

$$\int_H \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r \cdot \boldsymbol{\gamma}_\alpha^r d\zeta = \boldsymbol{n}_\alpha^r \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha^r + \boldsymbol{m}_\alpha^r \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^r. \quad (4.100)$$

Pode-se definir o vetor dos esforços retro-rotacionados ao longo da seção transversal por $\boldsymbol{\sigma}_\alpha$, das deformações retro-rotacionados ao longo das seções transversais por $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha$ e dos deslocamentos por \boldsymbol{d} , como:

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}_\alpha^r \\ \boldsymbol{m}_\alpha^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}_1^r \\ \boldsymbol{m}_1^r \\ \boldsymbol{n}_2^r \\ \boldsymbol{m}_2^r \end{bmatrix}, \quad (4.101)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_\alpha^r \\ \boldsymbol{k}_\alpha^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1^r \\ \boldsymbol{k}_1^r \\ \boldsymbol{\eta}_2^r \\ \boldsymbol{k}_2^r \end{bmatrix}, \quad (4.102)$$

e,

$$\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}. \quad (4.103)$$

Considerando (4.65) e (4.48), a derivada em relação ao tempo da equação (4.101) pode ser escrita como

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}_1^r \\ \dot{\mathbf{k}}_1^r \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_2^r \\ \dot{\mathbf{k}}_2^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T(\mathbf{Z}_{,1}\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\mathbf{u}}_{,1}) \\ \mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\Gamma}_{,1}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{,1}) \\ \mathbf{Q}^T(\mathbf{Z}_{,2}\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\mathbf{u}}_{,2}) \\ \mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\Gamma}_{,2}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{,2}) \end{bmatrix}. \quad (4.104)$$

Evidenciando \mathbf{Q}^T , a equação acima pode ser reescrita como

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}_1^r \\ \dot{\mathbf{k}}_1^r \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_2^r \\ \dot{\mathbf{k}}_2^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{Z}_{,1}\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\mathbf{u}}_{,1}) \\ (\boldsymbol{\Gamma}_{,1}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{,1}) \\ (\mathbf{Z}_{,2}\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\mathbf{u}}_{,2}) \\ (\boldsymbol{\Gamma}_{,2}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{,2}) \end{bmatrix}. \quad (4.105)$$

Evidenciando os termos que multiplicam por $\dot{\boldsymbol{\theta}}$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{,\alpha}$ e $\dot{\mathbf{u}}_{,\alpha}$, obtêm-se

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}_1^r \\ \dot{\mathbf{k}}_1^r \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_2^r \\ \dot{\mathbf{k}}_2^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{,1}\boldsymbol{\Gamma} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Gamma} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Gamma}_{,1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{,2}\boldsymbol{\Gamma} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{\Gamma}_{,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{,1} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_{,1} \\ \dot{\mathbf{u}}_{,2} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_{,2} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix}, \quad (4.106)$$

ou, considerando que

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{,1}\boldsymbol{\Gamma} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Gamma} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Gamma}_{,1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{,2}\boldsymbol{\Gamma} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{\Gamma}_{,2} \end{bmatrix}, \quad (4.107)$$

pode-se escrever que

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}_1^r \\ \dot{\mathbf{k}}_1^r \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_2^r \\ \dot{\mathbf{k}}_2^r \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Psi} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{,1} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_{,1} \\ \dot{\mathbf{u}}_{,2} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_{,2} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix}. \quad (4.108)$$

Criando uma matriz que agrupe as derivações em relação às direções ξ_{α} , a equação (4.108) pode ser reescrita como

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \dot{\eta}_1^r \\ \dot{\mathbf{k}}_1^r \\ \dot{\eta}_2^r \\ \dot{\mathbf{k}}_2^r \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Psi} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} \\ \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix}, \quad (4.109)$$

ou, considerando que

$$\boldsymbol{\Psi}_{\alpha} = \boldsymbol{\Psi} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} \\ \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Psi} \Delta_{\alpha}, \quad (4.110)$$

têm-se que

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \dot{\eta}_1^r \\ \dot{\mathbf{k}}_1^r \\ \dot{\eta}_2^r \\ \dot{\mathbf{k}}_2^r \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Psi}_{\alpha} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix}. \quad (4.111)$$

A equação (4.100) pode então ser reescrita como

$$\int_{\mathbf{H}} (\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha}^r \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}^r) d\zeta = \boldsymbol{\sigma}_{\alpha} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\alpha}, \quad (4.112)$$

sendo $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\alpha}$ descrito na equação (4.108) e $\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}$ em (4.101), com suas componentes detalhadas em (4.96) e (4.97).

Finalmente, a potência interna da casca em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ será dada por

$$P_{int} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{\alpha} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\alpha} d\Omega. \quad (4.113)$$

4.4.2 Potência externa da casca

Segundo Pimenta (2006), a potência externa de um corpo é composta pela parcela relativa à forças de superfície e forças de volume, ou seja:

$$P_{ext} = P_{Vol} + P_{Sup} = \int_{V^r} \mathbf{b}^r \cdot \dot{\mathbf{x}} dV^r + \int_{S^r} \mathbf{t}^r \cdot \dot{\mathbf{x}} dS^r. \quad (4.114)$$

No caso específico da casca estudada, a potência relacionada à superfície será subdividida em duas parcelas. A primeira parcela será relativa à superfície superior da casca e

a segunda será relacionada à superfície inferior da casca. Em relação às forças volumétricas, estas serão computadas ao se integrar inicialmente ao longo da espessura da casca e, em seguida, ao se integrar ao longo de Ω , que corresponde à área abrangida pela seção média da casca.

A expressão (4.114), no caso da casca estudada, será expressa por

$$P_{\text{ext}} = \int_{\Omega} \left(\bar{\mathbf{t}}^t \cdot \dot{\mathbf{x}}^t + \bar{\mathbf{t}}^b \cdot \dot{\mathbf{x}}^b + \int_H \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}} d\zeta \right) d\Omega, \quad (4.115)$$

onde $\bar{\mathbf{t}}^t$ e $\bar{\mathbf{t}}^b$ se tratam, respectivamente, das forças externas da superfície superior e inferior e \mathbf{b} se trata das forças volumétricas por unidade de comprimento. Os vetores $\dot{\mathbf{x}}^t$, $\dot{\mathbf{x}}^b$ e $\dot{\mathbf{x}}$ por sua vez, tratam respectivamente das derivadas ao longo do tempo da equação (4.5) na superfície superior, inferior e ao longo da espessura da casca. A seguir será demonstrada a derivada $\dot{\mathbf{x}}$ e as derivadas $\dot{\mathbf{x}}^t$ e $\dot{\mathbf{x}}^b$ serão obtidas de maneira análoga.

O início da demonstração de $\dot{\mathbf{x}}$ parte da reescrita da equação (4.5) como

$$\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{Q}\mathbf{a}^r. \quad (4.116)$$

Derivando a equação (4.116) em relação ao tempo e considerando a regra da cadeia na diferenciação, se obtêm

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{a}^r + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{a}}^r. \quad (4.117)$$

Considerando que o vetor \mathbf{a}^r não apresenta variação ao longo do tempo, ou seja

$$\dot{\mathbf{a}}^r = \mathbf{0}, \quad (4.118)$$

pois este é o vetor director da espessura da placa na configuração de referência, que $\mathbf{a}^r = \mathbf{Q}^T \mathbf{a}$ e utilizando a equação (2.48), reescreve-se (4.117) como

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{a}. \quad (4.119)$$

Derivando em relação ao tempo a equação (4.7), e lembrando a propriedade das rotações

$$\boldsymbol{\Omega}\mathbf{a} = \mathbf{w} \times \mathbf{a}, \quad (4.120)$$

onde \mathbf{w} se trata do vetor axial do tensor das velocidades angulares, se pode escrever a equação (4.119) como

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{w} \times \mathbf{a} \quad (4.121)$$

ou, levando em conta a equação (2.61),

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{u}} + (\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}}) \times \mathbf{a}. \quad (4.122)$$

As equações para $\dot{\mathbf{x}}^t$ e $\dot{\mathbf{x}}^b$ são análogas à equação (4.122), logo

$$\dot{\mathbf{x}}^t = \dot{\mathbf{u}} + (\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}}) \times \mathbf{a}^t. \quad (4.123)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^b = \dot{\mathbf{u}} + (\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}}) \times \mathbf{a}^b. \quad (4.124)$$

Substituindo as equações (4.123),(4.124) e (4.122) na equação (4.115) se obtêm que

$$P_{\text{ext}} = \int_{\Omega} \left\{ \bar{\mathbf{t}}^t \cdot [\dot{\mathbf{u}} + (\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}}) \times \mathbf{a}^t] + \bar{\mathbf{t}}^b \cdot [\dot{\mathbf{u}} + (\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}}) \times \mathbf{a}^b] \right. \\ \left. + \int_H \mathbf{b} \cdot [\dot{\mathbf{u}} + (\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}}) \times \mathbf{a}] d\zeta \right\} d\Omega. \quad (4.125)$$

Reorganizando a equação (4.125) em função de agrupamentos de $\dot{\mathbf{u}}$ e $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ e utilizando a propriedade de produto misto de reagrupamento de produtos, se pode escrever que

$$P_{\text{ext}} = \int_{\Omega} \left\{ \left(\bar{\mathbf{t}}^t + \bar{\mathbf{t}}^b + \int_H \mathbf{b} d\zeta \right) \cdot \dot{\mathbf{u}} \right. \\ \left. + \boldsymbol{\Gamma}^T \left[(\mathbf{a}^t \times \bar{\mathbf{t}}^t) + (\mathbf{a}^b \times \bar{\mathbf{t}}^b) + \left(\mathbf{a} \times \int_H \mathbf{b} d\zeta \right) \right] \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} \right\} d\Omega. \quad (4.126)$$

Considerando

$$\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{t}}^t + \bar{\mathbf{t}}^b + \int_H \mathbf{b} d\zeta, \quad (4.127)$$

$$\bar{\mathbf{m}} = (\mathbf{a}^t \times \bar{\mathbf{t}}^t) + (\mathbf{a}^b \times \bar{\mathbf{t}}^b) + \left(\mathbf{a} \times \int_H \mathbf{b} d\zeta \right), \quad (4.128)$$

a equação (4.126) pode ser escrita como:

$$P_{\text{ext}} = \int_{\Omega} [\bar{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{u}} + (\boldsymbol{\Gamma}^T \bar{\mathbf{m}}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}] d\Omega. \quad (4.129)$$

Os vetores $\bar{\mathbf{n}}$ e $\bar{\mathbf{m}}$ se tratam, respectivamente, das forças e momentos externos por unidade de área na superfície média na configuração de referência. Observando a potência externa, explicitada pela equação (4.129), se percebe que a grandeza conjugada energeticamente com $\boldsymbol{\theta}$ não se trata do momento, mas do pseudo-momento $\bar{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\Gamma}^T \bar{\mathbf{m}}$. Esta conjugação energética com pseudo-momentos não é usual e afeta diretamente a análise não linear com graus de liberdade relativos a rotação, já que a forma tangente bilinear (matriz de rigidez) possuirá um termo referente a esta contribuição de momento (CAMPELLO, PIMENTA, WRIGGERS, 2003).

Analogamente à equação (4.113) para a potência interna, a equação da potência externa pode ser reescrita como

$$P_{\text{ext}} = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{d}} d\Omega, \quad (4.130)$$

onde

$$\bar{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{n}} \\ \mathbf{\Gamma}^T \bar{\mathbf{m}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{n}} \\ \bar{\boldsymbol{\mu}} \end{bmatrix}, \quad (4.131)$$

$$\dot{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix}. \quad (4.132)$$

4.5 Equilíbrio da casca

O equilíbrio local da casca pode ser obtido a partir do princípio dos trabalhos virtuais. O princípio dos trabalhos virtuais tem como lógica a associação de campos de deslocamento virtuais com cargas reais (TIMOSHENKO, GOODIER, 1980, pág, 243). O presente trabalho utiliza o princípio dos trabalhos virtuais para determinar as equações de equilíbrio da casca e a forma tangente bilinear (matriz de rigidez) da casca.

4.5.1 Trabalho virtual dos esforços internos

O trabalho virtual dos esforços internos de um corpo sólido deformável qualquer, segundo (PIMENTA, 2006, pág 266), pode ser expresso como

$$\delta W_{int} = \int_{V^r} \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} dV^r. \quad (4.133)$$

De forma análoga à obtenção da equação (4.113), o trabalho virtual dos esforços internos da casca será expresso por

$$\delta W_{int} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\alpha} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha} d\Omega, \quad (4.134)$$

onde

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha} = \boldsymbol{\Psi}_{\alpha} \delta \mathbf{d}. \quad (4.135)$$

Analogamente à equação (4.112), se pode escrever que

$$\int_H (\boldsymbol{\tau}_{\alpha}^r \cdot \delta \boldsymbol{\gamma}_{\alpha}^r) d\zeta = \boldsymbol{\sigma}_{\alpha} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha}, \quad (4.136)$$

e, similarmente a (4.100) se pode escrever que

$$\int_H \boldsymbol{\tau}_{\alpha}^r \cdot \delta \boldsymbol{\gamma}_{\alpha}^r d\zeta = \mathbf{n}_{\alpha}^r \cdot \delta \boldsymbol{\eta}_{\alpha}^r + \mathbf{m}_{\alpha}^r \cdot \delta \boldsymbol{\kappa}_{\alpha}^r \quad (4.137)$$

onde, de forma análoga a (4.72),

$$\delta \boldsymbol{\gamma}_{\alpha}^r = \mathbf{Q}^T (\mathbf{Z}_{,\alpha} \boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta} + \delta \mathbf{u}_{,\alpha}) + [\mathbf{Q}^T (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta})_{,\alpha}] \times \mathbf{a}^r. \quad (4.138)$$

Levando em conta as equações (4.136), (4.137), (4.138), a equação (4.134) pode ser reescrita como

$$\delta W_{int} = \int_{\Omega} \{ \mathbf{n}_{\alpha}^r \cdot \mathbf{Q}^T (\mathbf{Z}_{,\alpha} \boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta} + \delta \mathbf{u}_{,\alpha}) + \mathbf{m}_{\alpha}^r \cdot [\mathbf{Q}^T (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta})_{,\alpha}] \} d\Omega, \quad (4.139)$$

4.5.2 Trabalho virtual dos esforços externos

Segundo Pimenta (2006) o trabalho virtual dos esforços externos de um sólido qualquer será dado por

$$\delta W_{ext} = \int_{V^r} \mathbf{b}^r \cdot \delta \mathbf{u} dV^r + \int_{S^r} \mathbf{t}^r \cdot \delta \mathbf{u} dS^r. \quad (4.140)$$

No presente trabalho, a equação do trabalho virtual dos esforços externos da casca será obtida de forma análoga à equação (4.129) como:

$$\delta W_{ext} = \int_{\Omega} [\bar{\mathbf{n}} \cdot \delta \mathbf{u} + (\mathbf{\Gamma}^T \bar{\mathbf{m}}) \cdot \delta \boldsymbol{\theta}] d\Omega. \quad (4.141)$$

4.5.3 Equações de equilíbrio

No presente trabalho, não se considera na formulação a presença de forças dissipativas de energia, como o atrito. Desta forma, se pode afirmar que o trabalho virtual da casca não se atera e este é expresso por:

$$\delta W = \delta W_{int} - \delta W_{ext} = 0. \quad (4.142)$$

Substituindo as equações (4.139) e (4.141) na equação (4.142) se tem que

$$\begin{aligned} \delta W = \int_{\Omega} \{ \mathbf{n}_{\alpha}^r \cdot \mathbf{Q}^T (\mathbf{Z}_{,\alpha} \mathbf{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta} + \delta \mathbf{u}_{,\alpha}) + \mathbf{m}_{\alpha}^r \cdot [\mathbf{Q}^T (\mathbf{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta})_{,\alpha}] \} d\Omega \\ - \int_{\Omega} [\bar{\mathbf{n}} \cdot \delta \mathbf{u} + (\mathbf{\Gamma}^T \bar{\mathbf{m}}) \cdot \delta \boldsymbol{\theta}] d\Omega = 0 \text{ em } \Omega, \forall \delta \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (4.143)$$

A integração da equação (4.143) é realizada utilizando integração por partes nos termos com $\delta \mathbf{u}_{,\alpha}$ e $(\mathbf{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta})_{,\alpha}$. Devido ao espaço ocupado pela integral, a equação (4.143) será subdividida em

$$\delta W = \delta W_I + \delta W_{II} + \delta W_{III} - \delta W_{IV} - \delta W_V = 0, \quad (4.144)$$

sendo

$$\delta W_I = \int_{\Omega} [\mathbf{n}_{\alpha}^r \cdot (\mathbf{Q}^T \mathbf{Z}_{,\alpha} \mathbf{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta})] d\Omega; \quad (4.145)$$

$$\delta W_{II} = \int_{\Omega} [\mathbf{n}_{\alpha}^r \cdot (\mathbf{Q}^T \delta \mathbf{u}_{,\alpha})] d\Omega; \quad (4.146)$$

$$\delta W_{III} = \int_{\Omega} [\mathbf{m}_{\alpha}^r \cdot [\mathbf{Q}^T (\mathbf{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta})_{,\alpha}]] d\Omega; \quad (4.147)$$

$$\delta W_{IV} = \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{n}} \cdot \delta \mathbf{u}) d\Omega; \quad (4.148)$$

$$\delta W_V = \int_{\Omega} \left((\mathbf{\Gamma}^T \bar{\mathbf{m}}) \cdot \delta \boldsymbol{\theta} \right) d\Omega. \quad (4.149)$$

A resolução de δW seguirá a numeração trazida na equação (4.144), começando em δW_I .

A equação (4.145) pode ser reescrita como

$$\delta W_I = \int_{\Omega} [(\mathbf{Q}^T \mathbf{Z}_{,\alpha} \mathbf{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{n}_{\alpha}^r] d\Omega. \quad (4.150)$$

Realizando o produto escalar, é possível escrever que

$$\delta W_I = \int_{\Omega} [(\mathbf{Z}_{,\alpha} \mathbf{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{Q} \mathbf{n}_{\alpha}^r] d\Omega. \quad (4.151)$$

Considerando que $\mathbf{n}_{\alpha} = \mathbf{Q} \mathbf{n}_{\alpha}^r$ se tem que

$$\delta W_I = \int_{\Omega} [\mathbf{n}_{\alpha} \cdot (\mathbf{Z}_{,\alpha} \mathbf{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta})] d\Omega. \quad (4.152)$$

O produto $\mathbf{Z}_{,\alpha} \mathbf{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta}$ pode ser escrito em função do eixo de giro do tensor \mathbf{Z} , ou seja, o vetor de posição de um ponto na superfície média da casca na configuração deformada, \mathbf{z} . Reescrevendo a equação (4.152) com a consideração em relação ao eixo de giro \mathbf{z} , se pode escrever que

$$\delta W_I = \int_{\Omega} [\mathbf{n}_{\alpha} \cdot (-\mathbf{z}_{,\alpha} \times \mathbf{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta})] d\Omega \quad (4.153)$$

ou, utilizando a propriedade de produto misto,

$$\delta W_I = - \int_{\Omega} [\mathbf{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{z}_{,\alpha} \times \mathbf{n}_{\alpha})] d\Omega. \quad (4.154)$$

Determinado δW_I , agora será determinado δW_{II} . A equação (4.146) pode ser reescrita como

$$\delta W_{II} = \int_{\Omega} [(\mathbf{Q}^T \delta \mathbf{u}_{,\alpha}) \cdot \mathbf{n}_{\alpha}^r] d\Omega \quad (4.155)$$

ou, realizando o produto escalar,

$$\delta W_{II} = \int_{\Omega} [\delta \mathbf{u}_{,\alpha}^T \mathbf{Q} \mathbf{n}_{\alpha}^r] d\Omega. \quad (4.156)$$

Considerando que $\mathbf{n}_{\alpha} = \mathbf{Q} \mathbf{n}_{\alpha}^r$, a equação anterior pode ser reescrita como

$$\delta W_{II} = \int_{\Omega} [\mathbf{n}_{\alpha} \cdot \delta \mathbf{u}_{,\alpha}] d\Omega. \quad (4.157)$$

A integração por partes da equação anterior possui a forma:

$$\delta W_{II} = \mathbf{n}_{\alpha} \cdot \delta \mathbf{u} - \int_{\Omega} [\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{\alpha,\alpha}] d\Omega. \quad (4.158)$$

Considere agora a determinação de δW_{III} . De forma análoga a δW_I e δW_{II} , a equação (4.147) pode ser reescrita como:

$$\delta W_{III} = \int_{\Omega} [\mathbf{m}_{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta})_{,\alpha}] d\Omega. \quad (4.159)$$

Utilizando a integração por partes na equação anterior, se pode obter que

$$\delta W_{III} = \mathbf{m}_{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta}) - \int_{\Omega} [(\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{m}_{\alpha,\alpha}] d\Omega. \quad (4.160)$$

A parcela δW_{IV} não necessita de manipulação para análise, sendo agora passado para a última parcela a ser manipulada de modo a se obter as equações de equilíbrio.

Considere a parcela δW_V , apresentada na equação (4.149). Realizando o produto escalar, a equação pode ser reescrita como:

$$\delta W_V = \int_{\Omega} [\bar{\mathbf{m}}^T (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta})] d\Omega. \quad (4.161)$$

Retornando ao formato anterior do produto escalar, a equação acima pode ser escrita como:

$$\delta W_V = \int_{\Omega} [\bar{\mathbf{m}} \cdot (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta})] d\Omega. \quad (4.162)$$

Utilizando as equações (4.154), (4.158), (4.160), (4.148) e (4.162), relativas respectivamente a δW_I , δW_{II} , δW_{III} , δW_{IV} e δW_V , a equação (4.143) pode finalmente ser escrita como:

$$\begin{aligned} \delta W = & \mathbf{n}_{\alpha} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{m}_{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta}) \\ & + \int_{\Omega} \{ -(\bar{\mathbf{n}} \cdot \delta \mathbf{u}) - (\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{\alpha,\alpha}) - [\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{z}_{,\alpha} \times \mathbf{n}_{\alpha})] \\ & - [\bar{\mathbf{m}} \cdot (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta})] - [(\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{m}_{\alpha,\alpha}] \} d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (4.163)$$

Utilizando o teorema fundamental do cálculo variacional, conforme apresentado por (FLORES, 2011), é possível então obter as equações de equilíbrio, a partir da equação (4.163), como:

$$\mathbf{n}_{\alpha,\alpha} + \bar{\mathbf{n}} = 0 \quad \therefore f(x) = 0, \quad (4.164)$$

$$(\mathbf{z}_{,\alpha} \times \mathbf{n}_{\alpha}) + \mathbf{m}_{\alpha,\alpha} + \bar{\mathbf{m}} = 0 \quad \therefore f(x) = 0. \quad (4.165)$$

A utilização do lema fundamental do cálculo variacional é possível ao se considerar δW um funcional dos campos \mathbf{d} e $\delta \mathbf{d}$, sendo linear para $\delta \mathbf{d}$ (MOREIRA, 2009).

4.5.4 Forma tangente bilinear (matriz de rigidez)

A forma tangente bilinear, é obtida a partir da derivação do trabalho realizado pelo corpo ao longo da deformação em função do deslocamento ou, da derivação do trabalho virtual

realizado pelo corpo ao longo da deformação em função do deslocamento. No presente trabalho será utilizada a derivada direcional de Gateaux com respeito a \mathbf{d} da equação (4.142), ou seja:

$$d_h \delta W = \delta^*(\delta W) = \delta^*(\delta W_{int} - \delta W_{ext}). \quad (4.166)$$

Substituindo as equações (4.134) e (4.141), na equação anterior se pode escrever que

$$\delta^*(\delta W) = \delta^* \left(\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_\alpha \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha - \bar{\mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{d}) d\Omega \right). \quad (4.167)$$

Tendo em mente as equações (4.135) e (4.110), a equação acima pode ser reescrita como

$$\delta^*(\delta W) = \delta^* \left(\left\{ \int_{\Omega} [\boldsymbol{\sigma}_\alpha \cdot (\boldsymbol{\Psi} \Delta_\alpha \delta \mathbf{d})] d\Omega \right\} - \left(\int_{\Omega} \bar{\mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{d} d\Omega \right) \right). \quad (4.168)$$

Abrindo o produto escalar e reorganizando as parcelas pode se obter

$$\delta^*(\delta W) = \delta^* \left\{ \int_{\Omega} [(\boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\sigma}_\alpha)^T \Delta_\alpha \delta \mathbf{d}] d\Omega \right\} - \delta^* \left(\int_{\Omega} \bar{\mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{d} d\Omega \right) \quad (4.169)$$

e, reestabelecendo o produto escalar, temos

$$\delta^*(\delta W) = \delta^* \left\{ \int_{\Omega} [(\boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\sigma}_\alpha) \cdot \Delta_\alpha \delta \mathbf{d}] d\Omega \right\} - \delta^* \left(\int_{\Omega} \bar{\mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{d} d\Omega \right) \quad (4.170)$$

Realizando a derivação dos produtos, se tem que

$$\begin{aligned} \delta^*(\delta W) = & \left\{ \int_{\Omega} \left[\frac{\partial(\boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\sigma}_\alpha)}{\partial \mathbf{d}} \delta^* \mathbf{d} \cdot (\Delta_\alpha \delta \mathbf{d}) \right] d\Omega \right\} \\ & + \left\{ \int_{\Omega} \left[\boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\sigma}_\alpha \cdot \frac{\partial(\Delta_\alpha \delta \mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} \delta^* \mathbf{d} \right] d\Omega \right\} - \left(\int_{\Omega} \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{d}} \delta^* \mathbf{d} \cdot \delta \mathbf{d} d\Omega \right) \\ & - \left(\int_{\Omega} \bar{\mathbf{q}} \delta^* \mathbf{d} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{d}}{\partial \mathbf{d}} \delta^* \mathbf{d} d\Omega \right), \end{aligned} \quad (4.171)$$

ou, considerando que $\frac{\partial \delta \mathbf{d}}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{0}$ já que $\delta \mathbf{d}$ é um campo linear (conforme apresentado por Campello, Pimenta e Wriggers (2003)) e que $\frac{\partial \Delta_\alpha}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{0}$, já que Δ_α é apenas um operador de derivações (conforme observado em (4.110)), temos

$$\delta^*(\delta W) = \left\{ \int_{\Omega} \left[\frac{\partial(\boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\sigma}_\alpha)}{\partial \mathbf{d}} \delta^* \mathbf{d} \cdot (\Delta_\alpha \delta \mathbf{d}) \right] d\Omega \right\} - \left(\int_{\Omega} \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{d}} \delta^* \mathbf{d} \cdot \delta \mathbf{d} d\Omega \right). \quad (4.172)$$

Aplicando a regra do produto e, considerando a dependência entre \mathbf{d} e $\boldsymbol{\varepsilon}$, vide equação (4.111), aplicamos a regra da cadeia para obter

$$\begin{aligned}
\delta^*(\delta W) = & \left\{ \int_{\Omega} \left[\frac{\partial(\Psi^T)}{\partial \mathbf{d}} \boldsymbol{\sigma}_\alpha \delta^* \mathbf{d} \cdot (\Delta_\alpha \delta \mathbf{d}) \right] d\Omega \right\} \\
& + \left\{ \int_{\Omega} \left[\left(\Psi^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_\alpha}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_\beta} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_\beta}{\partial \mathbf{d}} \delta^* \mathbf{d} \right) \cdot (\Delta_\alpha \delta \mathbf{d}) \right] d\Omega \right\} \\
& - \left(\int_{\Omega} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \mathbf{d}} \delta^* \mathbf{d} \cdot \delta \mathbf{d} d\Omega \right).
\end{aligned} \tag{4.173}$$

Considerando as expressões (4.110) e (4.111), têm-se que

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha}{\partial \mathbf{d}} = \boldsymbol{\Psi} \Delta_\alpha. \tag{4.174}$$

Logo, a equação (4.173) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\delta^*(\delta W) = & \left\{ \int_{\Omega} \left[\frac{\partial(\Psi^T)}{\partial \mathbf{d}} \boldsymbol{\sigma}_\alpha \delta^* \mathbf{d} \cdot (\Delta_\alpha \delta \mathbf{d}) \right] d\Omega \right\} \\
& + \left\{ \int_{\Omega} \left[\left(\Psi^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_\alpha}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_\beta} \boldsymbol{\Psi} \Delta_\alpha \delta^* \mathbf{d} \right) \cdot (\Delta_\alpha \delta \mathbf{d}) \right] d\Omega \right\} \\
& - \left(\int_{\Omega} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \mathbf{d}} \delta^* \mathbf{d} \cdot \delta \mathbf{d} d\Omega \right).
\end{aligned} \tag{4.175}$$

Alterando as posições das parcelas do segundo produto escalar e abrindo o mesmo, obtêm-se

$$\begin{aligned}
\delta^*(\delta W) = & \left\{ \int_{\Omega} \left[\frac{\partial(\Psi^T)}{\partial \mathbf{d}} \boldsymbol{\sigma}_\alpha \delta^* \mathbf{d} \cdot (\Delta_\alpha \delta \mathbf{d}) \right] d\Omega \right\} \\
& + \left\{ \int_{\Omega} \left[(\delta \mathbf{d})^T \Delta_\alpha^T \boldsymbol{\Psi}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_\alpha}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_\beta} \boldsymbol{\Psi} \Delta_\alpha \delta^* \mathbf{d} \right] d\Omega \right\} \\
& - \left(\int_{\Omega} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \mathbf{d}} \delta^* \mathbf{d} \cdot \delta \mathbf{d} d\Omega \right).
\end{aligned} \tag{4.176}$$

Após alguma manipulação, encontra-se que

$$\begin{aligned}
\delta^*(\delta W) = & \left\{ \int_{\Omega} \left[\frac{\partial(\Psi^T)}{\partial \mathbf{d}} \boldsymbol{\sigma}_\alpha \delta^* \mathbf{d} \cdot (\Delta_\alpha \delta \mathbf{d}) \right] d\Omega \right\} \\
& + \left\{ \int_{\Omega} \left[(\Psi \Delta_\alpha \delta \mathbf{d}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_\alpha}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_\beta} \Psi \Delta_\alpha \delta^* \mathbf{d} \right] d\Omega \right\} \\
& - \left(\int_{\Omega} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \mathbf{d}} \delta^* \mathbf{d} \cdot \delta \mathbf{d} d\Omega \right).
\end{aligned} \tag{4.177}$$

Definida a equação (4.177), são esclarecidos os próximos passos de demonstração. À direita da igualdade, observam-se três termos baseados em produtos escalares, sendo o primeiro referente à não-linearidade geométrica, o segundo à não-linearidade física e o terceiro relativo aos esforços externos. Cada um destes termos possui sua complexidade e demonstração específica. Desta forma, o autor decide neste ponto criar adendos de demonstrações particulares, de modo a não sobrecarregar esta seção neste ponto. As três parcelas serão demonstradas separadamente em subseções a seguir, sendo o resultado final encontrado para a forma tangente bilinear $\delta^*(\delta W)$ igual a

$$\delta^*(\delta W) = \int_{\Omega} (\Delta_\alpha \delta \mathbf{d} \cdot \mathbf{G}_\alpha \Delta_\alpha \delta^* \mathbf{d} + \mathbf{D}_{\alpha\beta} \boldsymbol{\Psi}_\beta \delta^* \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\Psi}_\alpha \delta \mathbf{d} - \mathbf{L} \delta^* \mathbf{d} \cdot \delta \mathbf{d}) d\Omega \tag{4.178}$$

e, inicialmente definindo

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \bar{q}}{\partial \mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{n}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \bar{n}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \\ \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix}; \tag{4.179}$$

$$\mathbf{D}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_\alpha}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_\beta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{n}_\alpha^r}{\partial \boldsymbol{\eta}_\beta^r} & \frac{\partial \mathbf{n}_\alpha^r}{\partial \mathbf{k}_\beta^r} \\ \frac{\partial \mathbf{m}_\alpha^r}{\partial \boldsymbol{\eta}_\beta^r} & \frac{\partial \mathbf{m}_\alpha^r}{\partial \mathbf{k}_\beta^r} \end{bmatrix}; \tag{4.180}$$

$$\mathbf{G}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_\alpha^{u'\theta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_\alpha^{\theta'\theta} \\ \mathbf{G}_\alpha^{\theta u'} & \mathbf{G}_\alpha^{\theta\theta'} & \mathbf{G}_\alpha^{\theta\theta} \end{bmatrix}. \tag{4.181}$$

Definidas as matrizes que compõem a forma tangente, são apresentados agora alguns pontos válidos a serem ressaltados. $\mathbf{D}_{\alpha\beta}$ representa a parcela puramente constitutiva do operador tangente, \mathbf{G}_α representa os efeitos geométricos dos esforços internos e \mathbf{L} se trata da derivada dos esforços externos em função dos deslocamentos. Apresentadas as matrizes que compõem a forma tangente bilinear, esta será simétrica quando $\mathbf{D}_{\alpha\beta} = \mathbf{D}_{\beta\alpha}^T$ e $\mathbf{L} = \mathbf{L}^T$, já que a

matriz \mathbf{G}_α sempre será simétrica, mesmo quando distante da condição de equilíbrio (CAMPELLO, PIMENTA e WRIGGERS, 2003). As matrizes aqui citadas serão obtidas e apresentadas com detalhes na subseções a seguir. Vale ainda ressaltar que, diferentemente do normalmente encontrado em formas tangentes bilineares, a parcela da derivação relativa às forças externas é diferente de zero, já que o pseudo-momento $\bar{\mathbf{u}}$ é afetado pelo deslocamento.

4.5.4.1 Demonstração da parcela de não linearidade geométrica

A presente subseção tratará da demonstração da parcela de não linearidade geométrica da forma tangente bilinear. A parcela relativa à não-linearidade geométrica trata-se da equação

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial(\Psi^T)}{\partial \mathbf{d}} \boldsymbol{\sigma}_\alpha \delta^* \mathbf{d} \cdot (\Delta_\alpha \delta \mathbf{d}) \right] d\Omega. \quad (4.182)$$

Antes de iniciar a demonstração, é lembrado a equação do operador Ψ . Este é dado na equação (4.107) e possui como transposta

$$\Psi^T = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^T \Gamma & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}^T \Gamma & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}^T \mathbf{Z}_{,1} \Gamma & \mathbf{Q}^T \Gamma_{,1} & \mathbf{Q}^T \mathbf{Z}_{,2} \Gamma & \mathbf{Q}^T \Gamma_{,2} \end{bmatrix}. \quad (4.183)$$

A derivação apresentada em (4.182) representa o operador responsável pela não linearidade geométrica e sua demonstração será o foco principal desta subseção. Inicia-se com a divisão

$$\frac{\partial(\Psi^T)}{\partial \mathbf{d}} = \left[\frac{\partial(\Psi^T)}{\partial \mathbf{u}} \quad \frac{\partial(\Psi^T)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]. \quad (4.184)$$

Antes de prosseguir, vale ressaltar que o formato apresentado em (4.184) trata-se de uma linearização do tensor de terceira ordem que é criado devido à derivação. Esta linearização reduz a ordem do tensor de terceira para segunda ordem.

Substituindo (4.183) em (4.184), temos

$$\frac{\partial \Psi^T}{\partial \mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \mathbf{u}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \boldsymbol{\theta}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial(\mathbf{Q}^T \Gamma)}{\partial \mathbf{u}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial(\mathbf{Q}^T \Gamma)}{\partial \boldsymbol{\theta}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \mathbf{u}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \boldsymbol{\theta}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial(\mathbf{Q}^T \Gamma)}{\partial \mathbf{u}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial(\mathbf{Q}^T \Gamma)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \\ \frac{\partial(\mathbf{Q}^T \mathbf{Z}_{,1} \Gamma)}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial(\mathbf{Q}^T \Gamma_{,1})}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial(\mathbf{Q}^T \mathbf{Z}_{,2} \Gamma)}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial(\mathbf{Q}^T \Gamma_{,2})}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial(\mathbf{Q}^T \mathbf{Z}_{,1} \Gamma)}{\partial \boldsymbol{\theta}} & \frac{\partial(\mathbf{Q}^T \Gamma_{,1})}{\partial \boldsymbol{\theta}} & \frac{\partial(\mathbf{Q}^T \mathbf{Z}_{,2} \Gamma)}{\partial \boldsymbol{\theta}} & \frac{\partial(\mathbf{Q}^T \Gamma_{,2})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix}. \quad (4.185)$$

Como os termos \mathbf{Q}^T , $\mathbf{Q}^T \Gamma$, $\mathbf{Q}^T \Gamma_{,1}$ e $\mathbf{Q}^T \Gamma_{,2}$ não possuem dependências com os graus de liberdade de translação \mathbf{u} , podemos escrever que

$$\frac{\partial \Psi^T}{\partial \mathbf{d}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \boldsymbol{\theta}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial(\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Gamma})}{\partial \boldsymbol{\theta}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \boldsymbol{\theta}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial(\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Gamma})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \\ \frac{\partial(\mathbf{Q}^T \mathbf{Z}_{,1} \boldsymbol{\Gamma})}{\partial \mathbf{u}} & 0 & \frac{\partial(\mathbf{Q}^T \mathbf{Z}_{,2} \boldsymbol{\Gamma})}{\partial \mathbf{u}} & 0 & \frac{\partial(\mathbf{Q}^T \mathbf{Z}_{,1} \boldsymbol{\Gamma})}{\partial \boldsymbol{\theta}} & \frac{\partial(\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Gamma}_{,1})}{\partial \boldsymbol{\theta}} & \frac{\partial(\mathbf{Q}^T \mathbf{Z}_{,2} \boldsymbol{\Gamma})}{\partial \boldsymbol{\theta}} & \frac{\partial(\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Gamma}_{,2})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix}. \quad (4.186)$$

Devido à extensão da demonstração, referencia-se Campello (2005) e Pimenta (1993) para um maior aprofundamento.

A forma final desta parcela será dada por

$$\int_{\Omega} [(\Delta_{\alpha} \delta \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{G}_{\alpha} \Delta_{\alpha} \delta^* \mathbf{d})] d\Omega, \quad (4.187)$$

sendo

$$\mathbf{G}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_1^{u'\theta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_1^{\theta'\theta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_2^{u'\theta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_2^{\theta'\theta} \\ \mathbf{G}_1^{\theta u'} & \mathbf{G}_1^{\theta \theta'} & \mathbf{G}_2^{\theta u'} & \mathbf{G}_2^{\theta \theta'} & \mathbf{G}_1^{\theta \theta} + \mathbf{G}_2^{\theta \theta} \end{bmatrix}, \quad (4.188)$$

e

$$\mathbf{G}_1^{u'\theta} = (\mathbf{G}_1^{\theta u'})^T = -\mathbf{N}_1 \boldsymbol{\Gamma}, \quad (4.189)$$

$$\mathbf{G}_2^{u'\theta} = (\mathbf{G}_2^{\theta u'})^T = -\mathbf{N}_2 \boldsymbol{\Gamma}, \quad (4.190)$$

$$\mathbf{G}_1^{\theta'\theta} = (\mathbf{G}_1^{\theta \theta'})^T = \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{m}_1), \quad (4.191)$$

$$\mathbf{G}_2^{\theta'\theta} = (\mathbf{G}_2^{\theta \theta'})^T = \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{m}_2), \quad (4.192)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1^{\theta \theta} &= (\mathbf{G}_1^{\theta \theta})^T = \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{Z}_{,1} \mathbf{N}_1 \boldsymbol{\Gamma} - \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}_{,1} \times \mathbf{n}_1) + \mathbf{V}_{,1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{,1}, \mathbf{m}_1) \\ &\quad - \boldsymbol{\Gamma}_{,1}^T \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\Gamma}, \end{aligned} \quad (4.193)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_2^{\theta \theta} &= (\mathbf{G}_2^{\theta \theta})^T = \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{Z}_{,2} \mathbf{N}_2 \boldsymbol{\Gamma} - \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}_{,2} \times \mathbf{n}_2) + \mathbf{V}_{,2}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{,2}, \mathbf{m}_2) \\ &\quad - \boldsymbol{\Gamma}_{,2}^T \mathbf{M}_2 \boldsymbol{\Gamma}, \end{aligned} \quad (4.194)$$

sendo $\mathbf{N}_1 = skew(\mathbf{n}_1)$, $\mathbf{N}_2 = skew(\mathbf{n}_2)$, $\mathbf{M}_1 = skew(\mathbf{m}_1)$, $\mathbf{M}_2 = skew(\mathbf{m}_2)$ e os vetores e tensores componentes dos tensores acima encontrados em, (4.45), (4.98), (2.63), (B.28), (C.29), (C.30) e (4.66).

4.5.4.2 Demonstração da parcela de não linearidade física

A presente subseção tratará da demonstração da parcela de não linearidade física da forma tangente bilinear.

A parcela relativa à não linearidade geométrica é apresentada na equação a seguir

$$\int_{\Omega} \mathbf{D}_{\alpha\beta} \boldsymbol{\Psi}_{\beta} \delta^* \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\Psi}_{\alpha} \delta \mathbf{d} d\Omega. \quad (4.195)$$

Os termos $\boldsymbol{\Psi}_{\beta}$ e $\boldsymbol{\Psi}_{\alpha}$ já foram apresentadas na equação (4.110), sendo o β e α relativos apenas aos índices sendo considerados. Os termos $\delta^* \mathbf{d}$ e $\delta \mathbf{d}$ referem-se à taxa de variação (derivada) dos deslocamentos (sendo visto em capítulos posteriores que se referem às funções de interpolação que compõem o elemento finito). Detalhados estes membros, percebe-se que apenas o termo $\mathbf{D}_{\alpha\beta}$ ainda não foi explicitado de forma aberta, sendo este o principal foco desta subseção.

A parcela constitutiva $\mathbf{D}_{\alpha\beta}$ trata-se diretamente da não-linearidade física considerada no elemento. Apresentada na equação (4.180) e rerepresentada a seguir, percebe-se que

$$\mathbf{D}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\alpha}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{\beta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{n}_{\alpha}^r}{\partial \boldsymbol{\eta}_{\beta}^r} & \frac{\partial \mathbf{n}_{\alpha}^r}{\partial \mathbf{k}_{\beta}^r} \\ \frac{\partial \mathbf{m}_{\alpha}^r}{\partial \boldsymbol{\eta}_{\beta}^r} & \frac{\partial \mathbf{m}_{\alpha}^r}{\partial \mathbf{k}_{\beta}^r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{n}_1^r}{\partial \boldsymbol{\eta}_1^r} & \frac{\partial \mathbf{n}_1^r}{\partial \mathbf{k}_1^r} & \frac{\partial \mathbf{n}_1^r}{\partial \boldsymbol{\eta}_2^r} & \frac{\partial \mathbf{n}_1^r}{\partial \mathbf{k}_2^r} \\ \frac{\partial \mathbf{m}_1^r}{\partial \boldsymbol{\eta}_1^r} & \frac{\partial \mathbf{m}_1^r}{\partial \mathbf{k}_1^r} & \frac{\partial \mathbf{m}_1^r}{\partial \boldsymbol{\eta}_2^r} & \frac{\partial \mathbf{m}_1^r}{\partial \mathbf{k}_2^r} \\ \frac{\partial \mathbf{n}_2^r}{\partial \boldsymbol{\eta}_1^r} & \frac{\partial \mathbf{n}_2^r}{\partial \mathbf{k}_1^r} & \frac{\partial \mathbf{n}_2^r}{\partial \boldsymbol{\eta}_2^r} & \frac{\partial \mathbf{n}_2^r}{\partial \mathbf{k}_2^r} \\ \frac{\partial \mathbf{m}_2^r}{\partial \boldsymbol{\eta}_1^r} & \frac{\partial \mathbf{m}_2^r}{\partial \mathbf{k}_1^r} & \frac{\partial \mathbf{m}_2^r}{\partial \boldsymbol{\eta}_2^r} & \frac{\partial \mathbf{m}_2^r}{\partial \mathbf{k}_2^r} \end{bmatrix}, \quad (4.196)$$

é composta pela derivação dos vetores de esforços retro-rotacionados ao longo da seção transversal (\mathbf{n}_{α}^r e \mathbf{m}_{α}^r), em relação aos vetores de deformações retro-rotacionados ao longo das seções transversais ($\boldsymbol{\eta}_{\beta}^r$ e \mathbf{k}_{β}^r).

Utilizando a regra da cadeia na derivação de (4.96) e (4.97) e observando a equação (4.33), cada termo da parcela constitutiva será obtido por

$$\frac{\partial \mathbf{n}_{\alpha}^r}{\partial \boldsymbol{\eta}_{\beta}^r} = \int_H \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha}^r}{\partial \boldsymbol{\gamma}_{\beta}^r} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{\beta}^r}{\partial \boldsymbol{\eta}_{\beta}^r} d\zeta; \quad (4.197)$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_{\alpha}^r}{\partial \mathbf{k}_{\beta}^r} = \int_H \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha}^r}{\partial \boldsymbol{\gamma}_{\beta}^r} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{\beta}^r}{\partial \mathbf{k}_{\beta}^r} d\zeta; \quad (4.198)$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}_{\alpha}^r}{\partial \boldsymbol{\eta}_{\beta}^r} = \int_H \frac{\partial (A^r \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha}^r)}{\partial \boldsymbol{\gamma}_{\beta}^r} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{\beta}^r}{\partial \boldsymbol{\eta}_{\beta}^r} d\zeta; \quad (4.199)$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}_\alpha^r}{\partial \mathbf{k}_\beta^r} = \int_H \frac{\partial (A^r \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r)_\alpha}{\partial \boldsymbol{\gamma}_\beta^r} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_\beta^r}{\partial \mathbf{k}_\beta^r} d\zeta, \quad (4.200)$$

onde $A^r = \text{skew}(\mathbf{a}^r)$.

Considerando a equação (4.38) para os vetores de deformação $\boldsymbol{\gamma}_\beta^r$, podemos facilmente obter os tensores

$$\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_\alpha^r}{\partial \boldsymbol{\eta}_\beta^r} = \delta_{\alpha\beta} \mathbf{I} \quad (4.201)$$

e

$$\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_\alpha^r}{\partial \mathbf{k}_\beta^r} = -\delta_{\alpha\beta} A^r \quad (4.202)$$

onde $\delta_{\alpha\beta}$ é o símbolo de Kronecker.

Obtidos estes tensores, o tensor de segunda ordem ainda a ser determinado trata-se de $\frac{\partial \boldsymbol{\tau}_\alpha^r}{\partial \boldsymbol{\gamma}_\beta^r}$. Estes tensores são diretamente dependes da lei material adotada para representar os vetores de tensão $\boldsymbol{\tau}_\alpha^r$. No presente trabalho utilizam-se duas leis constitutivas de materiais hiperelásticos, sendo estas Neo-Hooke e Saint-Venant. A obtenção dos vetores de tensão em função de cada lei material representa um capítulo por conta própria. Sendo assim, nesta subsecção apresentaremos

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r}{\partial \boldsymbol{\gamma}_\beta^r} = \tilde{\mathbf{C}}_{\alpha\beta}, \quad (4.203)$$

detalhando este tensor de segunda ordem para cada lei material na subsecção pertinente às leis constitutiva.

Ao final da subsecção, considerando (4.201), (4.202) e (4.203), obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{n}_\alpha^r}{\partial \boldsymbol{\eta}_\beta^r} = \int_H \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r}{\partial \boldsymbol{\gamma}_\beta^r} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_\beta^r}{\partial \boldsymbol{\eta}_\beta^r} d\zeta = \int_H \tilde{\mathbf{C}}_{\alpha\beta} d\zeta; \quad (4.204)$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_\alpha^r}{\partial \mathbf{k}_\beta^r} = \int_H \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r}{\partial \boldsymbol{\gamma}_\beta^r} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_\beta^r}{\partial \mathbf{k}_\beta^r} d\zeta = - \int_H \tilde{\mathbf{C}}_{\alpha\beta} A^r d\zeta; \quad (4.205)$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}_\alpha^r}{\partial \boldsymbol{\eta}_\beta^r} = \int_H \frac{\partial (A^r \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r)_\alpha}{\partial \boldsymbol{\gamma}_\beta^r} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_\beta^r}{\partial \boldsymbol{\eta}_\beta^r} d\zeta = \int_H A^r \tilde{\mathbf{C}}_{\alpha\beta} d\zeta; \quad (4.206)$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}_\alpha^r}{\partial \mathbf{k}_\beta^r} = \int_H \frac{\partial (A^r \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r)_\alpha}{\partial \boldsymbol{\gamma}_\beta^r} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_\beta^r}{\partial \mathbf{k}_\beta^r} d\zeta = - \int_H A^r \tilde{\mathbf{C}}_{\alpha\beta} A^r d\zeta. \quad (4.207)$$

4.5.4.3 Demonstração da parcela de esforços externos

A presente subsecção tratará da demonstração da parcela relativa às forças externas da forma tangente bilinear. Esta possui a forma

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \bar{q}}{\partial \mathbf{d}} \delta^* \mathbf{d} \cdot \delta \mathbf{d} \right) d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{L} \delta^* \mathbf{d} \cdot \delta \mathbf{d}) d\Omega. \quad (4.208)$$

Conforme observado na equação anterior, o termo a ser determinado trata-se de

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \bar{q}}{\partial \mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{n}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \bar{n}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \\ \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix}. \quad (4.209)$$

A determinação deste termo está condicionada ao esforço externo que está aplicado na casca no ponto analisado. Como trabalharemos com esforços conservativos, não dependentes do deslocamento da casca, podemos afirmar que

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}; \quad (4.210)$$

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \quad (4.211)$$

e

$$\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad (4.212)$$

apenas necessitando de determinação os termos $\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \boldsymbol{\theta}}$, já que $\bar{\mu}$ é um termo dependente da rotação, conforme apresentado em (4.131). Desta forma, considerando a regra do produto na derivação, devemos determinar

$$\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial (\boldsymbol{\Gamma}^T \bar{\mathbf{m}})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial (\boldsymbol{\Gamma}^T)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \bar{\mathbf{m}} + \boldsymbol{\Gamma}^T \frac{\partial (\bar{\mathbf{m}})}{\partial \boldsymbol{\theta}}. \quad (4.213)$$

Como os esforços são conservativos, temos que

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{m}}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \quad (4.214)$$

e, então,

$$\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial (\boldsymbol{\Gamma}^T)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \bar{\mathbf{m}}. \quad (4.215)$$

A forma da derivação apresentada acima assemelha-se à apresentada no APÊNDICE B. Para determinação da equação final, é necessário a determinação da equação de momento a ser considerado. Assim como apresentado por Campello, Pimenta e Wriggers (2003) e Campello (2005), trabalharemos com momentos externos semitangenciais, caracterizados pela derivada temporal

$$\dot{\bar{\mathbf{m}}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{m}}, \quad (4.216)$$

e com momentos externos decorrentes da aplicação de uma força externa constante e a sua excentricidade, caracterizado por

$$\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{s} \times \bar{\mathbf{n}}, \quad (4.217)$$

sendo \mathbf{s} o vetor de excentricidade. Considerando o apresentado no APÊNDICE B, as respectivas matrizes \mathbf{L} para os momentos externos semitangenciais e para as cargas externas excentricas serão dadas como, as respectivas matrizes \mathbf{L} para os momentos externos semitangenciais e para as cargas externas excentricas serão dadas como

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \bar{q}}{\partial \mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{Sym}(\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \bar{\mathbf{m}})) \end{bmatrix} \quad (4.218)$$

e

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \bar{q}}{\partial \mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Gamma}^T \text{Sym}(\mathbf{S}\bar{\mathbf{N}})\boldsymbol{\Gamma} + \text{Sym}(\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \bar{\mathbf{m}})) \end{bmatrix}, \quad (4.219)$$

sendo $\mathbf{S} = \text{skew}(\mathbf{s})$, $\bar{\mathbf{N}} = \text{skew}(\bar{\mathbf{n}})$ e $\text{Sym}(\cdot)$ indica a parcela simétrica do termo analisado, conforme Pimenta (2006).

4.6 Equações constitutivas da casca

Anteriormente à apresentação da aplicação das leis constitutivas na formulação da casca, se ressalta que alguns tensores foram modificados pelo autor do artigo de referência, buscando uma maior abrangência da teoria. O presente trabalho mantém as mudanças adotadas pelo autor (sinalizando-as quando utilizadas) e apresenta as demonstrações partindo delas.

4.6.1 Condição de tensão plana

As relações constitutivas aplicadas à casca podem ter uma abrangência maior ao se introduzir um termo que permita a deformação perpendicular ao plano médio da casca. Desta forma, os autores do artigo modificam a equação (4.37) para a forma

$$\mathbf{F}^r = \mathbf{I} + \gamma_{\alpha}^r \otimes \mathbf{e}_{\alpha}^r + \gamma_{33}^r \mathbf{e}_3^r \otimes \mathbf{e}_3^r. \quad (4.220)$$

O valor adicionado pode ser considerado como um grau de liberdade extra e que pode ser eliminado utilizando a condição de tensão plana. A condição afirma que a componente do vetor de tensão $\boldsymbol{\tau}_3^r$ na direção de \mathbf{e}_3 , na superfície média, será nula. Matematicamente, a condição é expressa por

$$(\mathbf{P}\mathbf{e}_3^r) \cdot \mathbf{e}_3 = 0. \quad (4.221)$$

Esta condição irá gerar a condição

$$\tau_{33}^r = \boldsymbol{\tau}_3^r \cdot \mathbf{e}_3^r = \mathbf{P}\mathbf{e}_3^r \cdot \mathbf{e}_3^r = 0. \quad (4.222)$$

Em outras palavras, conforme apontado pelos autores, a projeção da tensão real $\mathbf{P}\mathbf{e}_3^r$ na direção do diretor corrente da espessura da casca $\mathbf{a} = \zeta \mathbf{e}_3$ é assumido nulo. Essa consideração irá refletir na potência da casca, fazendo com que τ_{33}^r não possua potência associada, conforme apresentado na equação (4.91).

Os autores do artigo base, neste momento, introduzem as novas quantidades tangentes que virão a ser utilizadas brevemente:

$$\mathbf{C}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_\alpha^r}{\partial \gamma_\beta^r}; \quad (4.223)$$

$$\mathbf{c}_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_\alpha^r}{\partial \gamma_{33}} = \frac{\partial \tau_{33}^r}{\partial \gamma_\alpha^r}; \quad (4.224)$$

$$c = \frac{\partial \tau_{33}^r}{\partial \gamma_{33}}. \quad (4.225)$$

Observando as equações (4.222) e (4.225), é possível perceber a existência de não linearidade em relação a γ_{33} . O método utilizado para solucionar esta não linearidade escolhidos pelos autores foi o método de newton. O método de newton, possui como algoritmo base

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \frac{\mathbf{N}(\mathbf{x})}{\mathbf{N}'(\mathbf{x})}, \quad (4.226)$$

onde \mathbf{x}^{k+1} se trata do novo valor da variável, \mathbf{x}^k do valor anterior da variável, $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ uma função da variável e $\mathbf{N}'(\mathbf{x})$ a derivada da função em relação à variável. Aplicando este algoritmo no problema atual considerando que τ_{33}^r é uma função de γ_{33} e utilizando a equação (4.225), o método de newton se torna

$$\gamma_{33}^{k+1} = \gamma_{33}^k - \frac{\tau_{33}^r}{(\partial \tau_{33}^r / \partial \gamma_{33})}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \gamma_{33}^k = 0, \quad (4.227)$$

ou

$$\gamma_{33}^{k+1} = \gamma_{33}^k - \frac{1}{c(\gamma_{33})} \tau_{33}^r(\gamma_{33}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \gamma_{33}^k = 0 \quad (4.228)$$

Utilizando a equação acima, γ_{33} é eliminado da cinemática da casca. (CAMPELLO, PIMENTA, WRIGGERS, 2003)

De forma análoga, é possível computar o tensor apresentado na equação (4.203) como

$$\tilde{\mathbf{C}}_{\alpha\beta} = \mathbf{C}_{\alpha\beta} - \frac{1}{c} \mathbf{c}_\alpha \otimes \mathbf{c}_\beta. \quad (4.229)$$

4.6.2 Material elástico geral

Os materiais elásticos normalmente apresentam a sua energia de deformação em função da conjugação energética do tensor das deformações de Green-Lagrange \mathbf{E} , com o segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff, \mathbf{S} . É necessário ressaltar que o tensor \mathbf{E} pode ser representado em função do tensor das transformações \mathbf{F} , ou em função da sua contraparte retro-rotacionada \mathbf{F}^r como

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{rT}\mathbf{F}^r - \mathbf{I}). \quad (4.230)$$

Definido o tensor \mathbf{E} em função de \mathbf{F}^r , é também possível estabelecer a correlação entre o segundo tensor de Piola-Kirchhoff com o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff retrorotacionado. Considere inicialmente o tensor \mathbf{S} como

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P}, \quad (4.231)$$

que pode ser reescrita como

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}. \quad (4.232)$$

Considerando que $\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{P}^r$ e $\mathbf{F} = \mathbf{Q}\mathbf{F}^r$, temos que

$$\mathbf{Q}\mathbf{P}^r = \mathbf{Q}\mathbf{F}^r\mathbf{S}. \quad (4.233)$$

Multiplicando ambos os lados por \mathbf{Q}^{-1} se tem que

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{P}^r = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{F}^r\mathbf{S}, \quad (4.234)$$

ou

$$\mathbf{P}^r = \mathbf{F}^r\mathbf{S}. \quad (4.235)$$

Conforme apresentado na seção 3.2, um material hiperelástico pode ser representado por uma função de energia de deformação específica de tal forma que

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}}. \quad (4.236)$$

Por sua vez, conforme apresentado por Pimenta (2006), a segunda derivada da função de energia de deformação específica em função do tensor das deformações de Green-Lagrange irá resultar em

$$\mathbb{D} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{E}^2}, \quad (4.237)$$

onde \mathbb{D} é um tensor de quarta ordem denominado tensor dos módulos hiperelásticos de rigidez tangente.

Neste momento, os autores do artigo base introduzem os tensores de terceira e segunda ordem, respectivamente,

$$\mathfrak{B}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \gamma_\alpha^r}; \quad (4.238)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \gamma_{33}}. \quad (4.239)$$

Com o auxílio destes tensores, podem ser obtidas as relações

$$\boldsymbol{\tau}_\alpha^r = \mathfrak{B}_\alpha^T \mathbf{S}; \quad (4.240)$$

$$\tau_{33}^r = \mathbf{B} : \mathbf{S}. \quad (4.241)$$

Substituindo estas relações nas equações , (4.224) e (4.225) temos

$$\mathbf{C}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_\alpha^r}{\partial \gamma_\beta^r} = \frac{\partial (\mathfrak{B}_\alpha^T \mathbf{S})}{\partial \gamma_\beta^r}; \quad (4.242)$$

$$\mathbf{c}_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_\alpha^r}{\partial \gamma_{33}} = \frac{\partial (\mathfrak{B}_\alpha^T \mathbf{S})}{\partial \gamma_{33}}; \quad (4.243)$$

$$c = \frac{\partial (\mathbf{B} : \mathbf{S})}{\partial \gamma_{33}}. \quad (4.244)$$

A obtenção das formas finais de $\mathbf{C}_{\alpha\beta}$, \mathbf{c}_α e c seguem a mesma lógica. Desta forma, será apresentada a demonstração de $\mathbf{C}_{\alpha\beta}$ e será apresentado o resultado das outras variáveis.

Partindo da equação (4.242) se pode aplicar a regra do produto na diferenciação, obtendo que

$$\mathbf{C}_{\alpha\beta} = \frac{\partial (\mathfrak{B}_\alpha^T)}{\partial \gamma_\beta^r} \mathbf{S} + \mathfrak{B}_\alpha^T \frac{\partial (\mathbf{S})}{\partial \mathbf{E}} \frac{\partial (\mathbf{E})}{\partial \gamma_\beta^r} \quad (4.245)$$

ou, considerando a equação (4.237),

$$\mathbf{C}_{\alpha\beta} = \frac{\partial (\mathfrak{B}_\alpha^T)}{\partial \gamma_\beta^r} \mathbf{S} + \mathfrak{B}_\alpha^T \mathbb{D} \mathfrak{B}_\beta. \quad (4.246)$$

Levando em conta a equação (4.238) e considerando que o tensor de Green-Lagrange é simétrico, se obtêm que

$$\mathbf{C}_{\alpha\beta} = (\mathbf{e}_\alpha^r \cdot \mathbf{S} \mathbf{e}_\beta^r) \mathbf{I} + \mathfrak{B}_\alpha^T \mathbb{D} \mathfrak{B}_\beta. \quad (4.247)$$

De forma análoga, se obtêm que

$$\mathbf{c}_\alpha = (\mathbf{e}_\alpha^r \cdot \mathbf{S} \mathbf{e}_3^r) \mathbf{e}_3^r + \mathfrak{B}_\alpha^T \mathbb{D} \mathbf{B}; \quad (4.248)$$

$$c = \mathbf{e}_3^r \cdot \mathbf{S} \mathbf{e}_3^r + \mathbf{B} : \mathbb{D} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \gamma_{33}}. \quad (4.249)$$

O objetivo da determinação destes tensores tangentes é a obtenção das parcelas que compõem os tensores tangentes descritos na equação (4.229), que por sua vez compõem as parcelas relativas à não linearidade física, descritas nas equações (4.204) a (4.207). Desta forma, para se computar a não linearidade física do corpo se mostra necessário apenas determinar os vetores de tensão retro-rotacionados $\boldsymbol{\tau}_\alpha^r$ utilizando as leis materiais apresentadas nas próximas seções.

4.6.3 Materiais isotrópicos

Materiais isotrópicos são materiais em que um mesmo ponto material apresenta as mesmas propriedades mecânicas em todas as direções (TIMOSHENKO, GOODIER, pág.1 1980). Quando um material elástico é isotrópico, é possível expressar a função de energia de deformação específica em função dos invariantes do tensor direito de Cauchy-Green, ou seja, $\psi = \psi(I_1, I_2, J)$ (CAMPELLO, PIMENTA, WRIGGERS, 2003). Os invariantes adotados no presente trabalho são:

$$I_1 = \mathbf{I} : \mathbf{C}. \quad (4.250)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \mathbf{I} : \mathbf{C}^2 \quad (4.251)$$

$$J = \det(\mathbf{F}). \quad (4.252)$$

Vale ressaltar que, considerando $\mathbf{F} = \mathbf{Q}\mathbf{F}^r$ e $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$,

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{F}^{rT}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{F}^r = \mathbf{F}^{rT}\mathbf{F}^r. \quad (4.253)$$

4.6.3.1 Material Neo-Hookiano

Conforme apresentado na equação (3.1) temos que

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}}. \quad (4.254)$$

Como agora a função de energia de deformação específica é expressa em função dos invariantes, a equação anterior pode ser reescrita como

$$\mathbf{S} = 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \psi}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \right). \quad (4.255)$$

Substituindo os invariantes se pode escrever que

$$\mathbf{S} = 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_1} \frac{\partial (\mathbf{I} : \mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \mathbf{I} : \mathbf{C}^2 \right)}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \psi}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \right). \quad (4.256)$$

Considerando a regra do produto se pode escrever que

$$\mathbf{S} = 2 \left[\frac{\partial \psi}{\partial I_1} \left(\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \mathbf{C}} : \mathbf{C} + \mathbf{I} : \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{C}} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \mathbf{C}} : \mathbf{C}^2 + \mathbf{I} : \frac{\partial \mathbf{C}^2}{\partial \mathbf{C}} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \right]. \quad (4.257)$$

Considerando que $\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \mathbf{C}} = 0$, temos que

$$\mathbf{S} = 2 \left[\frac{\partial \psi}{\partial I_1} \left(\mathbf{I} : \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{C}} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} : \frac{\partial \mathbf{C}^2}{\partial \mathbf{C}} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \right]. \quad (4.258)$$

Pelas propriedades de derivação de tensores de segunda ordem, se pode escrever como resultado das derivações

$$\mathbf{S} = 2 \left[\frac{\partial \psi}{\partial I_1} (\mathbf{I} : \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} (\mathbf{I} : \mathbf{I} \otimes \mathbf{C}) + \frac{\partial \psi}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \right], \quad (4.259)$$

ou, realizando os produtos escalares e diádicos para tensores de segunda ordem,

$$\mathbf{S} = 2 \left[\frac{\partial \psi}{\partial I_1} \mathbf{I} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \mathbf{C} + \frac{\partial \psi}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \right]. \quad (4.260)$$

Considere agora a parcela $\frac{\partial \psi}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}}$. Levando em conta a equação (4.253), a demonstração da parcela parte da consideração que

$$\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{F}^T) \cdot \det(\mathbf{F}). \quad (4.261)$$

A derivada da equação acima em função do tensor das deformações de Cauchy \mathbf{C} , considerando a regra do produto será obtida como

$$\frac{\partial \det(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \det(\mathbf{F}^T)}{\partial \mathbf{C}} \cdot \det(\mathbf{F}) + \det(\mathbf{F}^T) \cdot \frac{\partial \det(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{C}}. \quad (4.262)$$

Considerando o produto escalar, se pode escrever que

$$\frac{\partial \det(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \det(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{C}} \cdot \det(\mathbf{F}). \quad (4.263)$$

Neste momento, de forma análoga ao encontrado por Reddy (2013):

$$\frac{\partial \det(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T}, \quad (4.264)$$

se define que

$$\frac{\partial \det(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \det(\mathbf{C}) \mathbf{C}^{-T} \quad (4.265)$$

e, considerando que

$$\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{F}^T) \cdot \det(\mathbf{F}) = [\det(\mathbf{F})]^2, \quad (4.266)$$

se pode reescrever a equação (4.263) como

$$[\det(\mathbf{F})]^2 \mathbf{C}^{-T} = 2 \frac{\partial \det(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{C}} \cdot \det(\mathbf{F}). \quad (4.267)$$

Considerando agora que $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$, a equação acima pode ser reescrita como

$$[\det(\mathbf{F})]^2 \mathbf{F}^{r-1} \mathbf{F}^{r-T} = 2 \frac{\partial \det(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{C}} \cdot \det(\mathbf{F}). \quad (4.268)$$

Isolando o termo com a derivação e tendo em mente a equação (4.252), se pode escrever que

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2} J \mathbf{F}^{r-1} \mathbf{F}^{r-T}. \quad (4.269)$$

Substituindo a equação (4.269) na equação (4.260), se pode escrever que o segundo tensor de Piola-Kirchhoff será computado por

$$\mathbf{S} = 2 \left[\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{I}_1} \mathbf{I} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{I}_2} \mathbf{C} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial J} J \mathbf{F}^{r-1} \mathbf{F}^{r-T} \right]. \quad (4.270)$$

Substituindo a equação (4.270) na equação (4.235) se tem que

$$\mathbf{P}^r = 2 \mathbf{F}^r \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{I}_1} \mathbf{I} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{I}_2} \mathbf{C} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial J} J \mathbf{F}^{r-1} \mathbf{F}^{r-T} \right) \quad (4.271)$$

ou, realizando a distributiva para o terceiro termo dentro do parênteses:

$$\mathbf{P}^r = \frac{\partial \psi}{\partial J} J \mathbf{F}^{r-T} + 2 \mathbf{F}^r \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{I}_1} \mathbf{I} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{I}_2} \mathbf{C} \right) \quad (4.272)$$

Definido o tensor \mathbf{P}^r , é necessário definir os tensores que o compõem.

A definição dos tensores \mathbf{F}^r e \mathbf{F}^{r-T} parte da determinação dos vetores de deformação $\boldsymbol{\gamma}_\alpha^r$. Os tensores de deformação retro-rotacionados serão dados por

$$\boldsymbol{\gamma}_1^r = (\boldsymbol{\gamma}_1^r \cdot \mathbf{e}_1^r) \mathbf{e}_1^r + (\boldsymbol{\gamma}_1^r \cdot \mathbf{e}_2^r) \mathbf{e}_2^r + (\boldsymbol{\gamma}_1^r \cdot \mathbf{e}_3^r) \mathbf{e}_3^r; \quad (4.273)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_2^r = (\boldsymbol{\gamma}_2^r \cdot \mathbf{e}_1^r) \mathbf{e}_1^r + (\boldsymbol{\gamma}_2^r \cdot \mathbf{e}_2^r) \mathbf{e}_2^r + (\boldsymbol{\gamma}_2^r \cdot \mathbf{e}_3^r) \mathbf{e}_3^r; \quad (4.274)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_3^r = (\boldsymbol{\gamma}_3^r \cdot \mathbf{e}_1^r) \mathbf{e}_1^r + (\boldsymbol{\gamma}_3^r \cdot \mathbf{e}_2^r) \mathbf{e}_2^r + (\boldsymbol{\gamma}_3^r \cdot \mathbf{e}_3^r) \mathbf{e}_3^r, \quad (4.275)$$

ou, considerando que $\gamma_{ji} = \boldsymbol{\gamma}_j^r \cdot \mathbf{e}_i^r$ com j e i variando de 1 a 3:

$$\boldsymbol{\gamma}_1^r = \gamma_{11} \mathbf{e}_1^r + \gamma_{21} \mathbf{e}_2^r + \gamma_{31} \mathbf{e}_3^r; \quad (4.276)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_2^r = \gamma_{12} \mathbf{e}_1^r + \gamma_{22} \mathbf{e}_2^r + \gamma_{32} \mathbf{e}_3^r; \quad (4.277)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_3^r = \gamma_{13} \mathbf{e}_1^r + \gamma_{23} \mathbf{e}_2^r + \gamma_{33} \mathbf{e}_3^r. \quad (4.278)$$

Substituindo as equações (4.276) e (4.277) no produto diádico $\boldsymbol{\gamma}_\alpha^r \otimes \mathbf{e}_\alpha^r$, temos

$$\boldsymbol{\gamma}_\alpha^r \otimes \mathbf{e}_\alpha^r = \boldsymbol{\gamma}_1^r \mathbf{e}_1^{rT} + \boldsymbol{\gamma}_2^r \mathbf{e}_2^{rT} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.279)$$

Considerando a equação anterior e que

$$\gamma_{33} \mathbf{e}_3^r \otimes \mathbf{e}_3^r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.280)$$

o tensor das transformações retro-rotacionado \mathbf{F}^r , determinado segundo a equação (4.220), assumirá a forma

$$\mathbf{F}^r = \mathbf{I} + \gamma_{\alpha}^r \otimes \mathbf{e}_{\alpha}^r + \gamma_{33}^r \mathbf{e}_3^r \otimes \mathbf{e}_3^r = \begin{bmatrix} 1 + \gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 \\ \gamma_{21} & 1 + \gamma_{22} & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & 1 + \gamma_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.281)$$

Considere agora os vetores

$$\mathbf{f}_{\alpha}^r = \mathbf{e}_{\alpha}^r + \gamma_{\alpha}^r \quad (4.282)$$

e

$$\mathbf{f}_3^r = \mathbf{e}_3^r + \gamma_{33}^r \mathbf{e}_3^r. \quad (4.283)$$

Considerando (4.282) e (4.283), o tensor apresentado em (4.281) pode então ser reescrito como

$$\mathbf{F}^r = \mathbf{f}_1^r \otimes \mathbf{e}_1^r + \mathbf{f}_2^r \otimes \mathbf{e}_2^r + \mathbf{f}_3^r \otimes \mathbf{e}_3^r. \quad (4.284)$$

O jacobiano do tensor \mathbf{F}^r será determinado como

$$J = \mathbf{f}_3^r \cdot (\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{f}_2^r) = (\mathbf{1} + \gamma_{33}^r) \bar{J} = (1 + \gamma_{33}^r) \mathbf{e}_3^r \cdot (\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{f}_2^r) \quad (4.285)$$

sendo

$$\bar{J} = \mathbf{e}_3^r \cdot (\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{f}_2^r). \quad (4.286)$$

A determinação da inversa do tensor será então obtida, por meio de produtos escalares e vetoriais, como

$$\mathbf{F}^{r-1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{f}_3^r \cdot (\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{f}_2^r)} [(\mathbf{f}_2^r \times \mathbf{f}_3^r) \quad (\mathbf{f}_3^r \times \mathbf{f}_1^r) \quad (\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{f}_2^r)]^T, \quad (4.287)$$

sendo a sua transposta obtida como

$$\mathbf{F}^{r-T} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{f}_3^r \cdot (\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{f}_2^r)} [(\mathbf{f}_2^r \times \mathbf{f}_3^r) \quad (\mathbf{f}_3^r \times \mathbf{f}_1^r) \quad (\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{f}_2^r)]. \quad (4.288)$$

Reorganizando o formato matricial por meio de produtos tensoriais, obtemos

$$\mathbf{F}^{r-T} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{f}_3^r \cdot (\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{f}_2^r)} [(\mathbf{f}_2^r \times \mathbf{f}_3^r) \otimes \mathbf{e}_1^r + (\mathbf{f}_3^r \times \mathbf{f}_1^r) \otimes \mathbf{e}_2^r + (\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{f}_2^r) \otimes \mathbf{e}_3^r]. \quad (4.289)$$

Determinada a equação (4.289) e tendo em mente a equação (4.285), podemos obter

$$J\mathbf{F}^{r-T} = [(\mathbf{f}_2^r \times \mathbf{f}_3^r) \otimes \mathbf{e}_1^r + (\mathbf{f}_3^r \times \mathbf{f}_1^r) \otimes \mathbf{e}_2^r + (\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{f}_2^r) \otimes \mathbf{e}_3^r], \quad (4.290)$$

Sendo este o primeiro termo da equação do primeiro tensor de Piola-Kirchhoff.

Obtido o primeiro termo, se tem por objetivo a determinação do tensor das deformações de Cauchy. Considerando as equações (4.253) e (4.284), podemos escrever que

$$\mathbf{C} = (\mathbf{e}_1^r \otimes \mathbf{f}_1^r + \mathbf{e}_2^r \otimes \mathbf{f}_2^r + \mathbf{e}_3^r \otimes \mathbf{f}_3^r)(\mathbf{f}_1^r \otimes \mathbf{e}_1^r + \mathbf{f}_2^r \otimes \mathbf{e}_2^r + \mathbf{f}_3^r \otimes \mathbf{e}_3^r) \quad (4.291)$$

e, multiplicando por \mathbf{F}^r ,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^r \mathbf{C} &= \mathbf{F}^r \mathbf{F}^{rT} \mathbf{F}^r \\ &= (\mathbf{f}_1^r \otimes \mathbf{e}_1^r + \mathbf{f}_2^r \otimes \mathbf{e}_2^r + \mathbf{f}_3^r \otimes \mathbf{e}_3^r)(\mathbf{e}_1^r \otimes \mathbf{f}_1^r + \mathbf{e}_2^r \otimes \mathbf{f}_2^r \\ &\quad + \mathbf{e}_3^r \otimes \mathbf{f}_3^r)(\mathbf{f}_1^r \otimes \mathbf{e}_1^r + \mathbf{f}_2^r \otimes \mathbf{e}_2^r + \mathbf{f}_3^r \otimes \mathbf{e}_3^r) \end{aligned} \quad (4.292)$$

Após uma série de utilizações das propriedades de produtos diádicos e das ortogonalidades entre os vetores envolvidos, encontra-se a equação acima de forma compactada em formato indicial como

$$\mathbf{F}^r \mathbf{C} = (\mathbf{f}_i^r \cdot \mathbf{f}_j^r) \mathbf{f}_i^r \otimes \mathbf{e}_j^r, \quad i = 1,2,3; j = 1,2,3. \quad (4.293)$$

Obtido este termo, temos todos os termos relativos aos tensores de deformação de Cauchy e transformação para determinar a equação do primeiro tensor de Piola-Kirchhoff.

Levando em conta as equações (4.284), (4.290) e (4.293), e substituindo estas em (4.272), pode-se escrever o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff como

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^r &= \frac{\partial \Psi}{\partial J} [(\mathbf{f}_2^r \times \mathbf{f}_3^r) \otimes \mathbf{e}_1^r + (\mathbf{f}_3^r \times \mathbf{f}_1^r) \otimes \mathbf{e}_2^r + (\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{f}_2^r) \otimes \mathbf{e}_3^r] \\ &\quad + 2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} [\mathbf{f}_1^r \otimes \mathbf{e}_1^r + \mathbf{f}_2^r \otimes \mathbf{e}_2^r + \mathbf{f}_3^r \otimes \mathbf{e}_3^r] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} ((\mathbf{f}_i^r \cdot \mathbf{f}_j^r) \mathbf{f}_i^r \otimes \mathbf{e}_j^r) \right). \end{aligned} \quad (4.294)$$

Neste ponto, é apresentada a obtenção das equações dos vetores $\boldsymbol{\tau}_1^r$, $\boldsymbol{\tau}_2^r$ e $\boldsymbol{\tau}_3^r$ respectiva e, separadamente. Começamos então com a demonstração do vetor $\boldsymbol{\tau}_1^r$, expresso por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_1^r &= \frac{\partial \Psi}{\partial J} (\mathbf{f}_2^r \times \mathbf{f}_3^r) \\ &\quad + 2 \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \mathbf{f}_1^r \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} [(\mathbf{f}_1^r \cdot \mathbf{f}_1^r) \mathbf{f}_1^r + (\mathbf{f}_2^r \cdot \mathbf{f}_1^r) \mathbf{f}_2^r + (\mathbf{f}_3^r \cdot \mathbf{f}_1^r) \mathbf{f}_3^r] \right\}, \end{aligned} \quad (4.295)$$

obtida pela decomposição da equação (4.294). Considerando (4.283) e a possível inversão das parcelas no produto vetorial, temos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau}_1^r = & -\frac{\partial\Psi}{\partial J}(1 + \gamma_{33})(\mathbf{e}_3^r \times \mathbf{f}_2^r) \\
& + 2\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial I_1}\mathbf{f}_1^r\right. \\
& \left. + \frac{\partial\Psi}{\partial I_2}[(\mathbf{f}_1^r \cdot \mathbf{f}_1^r)\mathbf{f}_1^r + (\mathbf{f}_2^r \cdot \mathbf{f}_1^r)\mathbf{f}_2^r + (\mathbf{f}_3^r \cdot \mathbf{f}_1^r)\mathbf{f}_3^r]\right\}.
\end{aligned} \tag{4.296}$$

Após uma série de reordenamentos em relação aos produtos escalares, podemos escrever a equação (4.296) como

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau}_1^r = & -\frac{\partial\Psi}{\partial J}(1 + \gamma_{33})(\mathbf{e}_3^r \times \mathbf{f}_2^r) \\
& + 2\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial I_1}\mathbf{f}_1^r\right. \\
& \left. + \frac{\partial\Psi}{\partial I_2}[(\mathbf{f}_1^r \otimes \mathbf{f}_1^r)\mathbf{f}_1^r + (\mathbf{f}_2^r \otimes \mathbf{f}_2^r)\mathbf{f}_1^r + (\mathbf{f}_3^r \otimes \mathbf{f}_3^r)\mathbf{f}_1^r]\right\}
\end{aligned} \tag{4.297}$$

e, evidenciando \mathbf{f}_1^r ,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau}_1^r = & -\frac{\partial\Psi}{\partial J}(1 + \gamma_{33})(\mathbf{e}_3^r \times \mathbf{f}_2^r) \\
& + 2\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial I_1}\mathbf{I}\right. \\
& \left. + \frac{\partial\Psi}{\partial I_2}[(\mathbf{f}_1^r \otimes \mathbf{f}_1^r) + (\mathbf{f}_2^r \otimes \mathbf{f}_2^r) + (\mathbf{f}_3^r \otimes \mathbf{f}_3^r)]\right\}\mathbf{f}_1^r.
\end{aligned} \tag{4.298}$$

Analogamente à demonstração de $\boldsymbol{\tau}_1^r$, podemos obter $\boldsymbol{\tau}_2^r$ como

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau}_2^r = & \frac{\partial\Psi}{\partial J}(1 + \gamma_{33})(\mathbf{e}_3^r \times \mathbf{f}_1^r) \\
& + 2\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial I_1}\mathbf{I}\right. \\
& \left. + \frac{\partial\Psi}{\partial I_2}[(\mathbf{f}_1^r \otimes \mathbf{f}_1^r) + (\mathbf{f}_2^r \otimes \mathbf{f}_2^r) + (\mathbf{f}_3^r \otimes \mathbf{f}_3^r)]\right\}\mathbf{f}_2^r.
\end{aligned} \tag{4.299}$$

Antes da demonstração do último vetor de tensão, é válido apresentar uma forma genérica para os vetores $\boldsymbol{\tau}_1^r$ e $\boldsymbol{\tau}_2^r$, denominada $\boldsymbol{\tau}_\alpha^r$. Esta possuirá a forma

$$\boldsymbol{\tau}_\alpha^r = \frac{\partial\Psi}{\partial J}(1 + \gamma_{33})\mathbf{g}_\alpha + 2\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial I_1}\mathbf{I} + \frac{\partial\Psi}{\partial I_2}(\mathbf{f}_i^r \otimes \mathbf{f}_i^r)\right\}\mathbf{f}_\alpha^r, \tag{4.300}$$

onde

$$\mathbf{g}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{f}_\alpha^r \times \mathbf{e}_3^r) \tag{4.301}$$

e

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_3^r \cdot (\mathbf{e}_\alpha^r \times \mathbf{e}_\beta^r) = -1 \text{ ou } 1. \quad (4.302)$$

Demonstremos agora o último vetor de tensão, $\boldsymbol{\tau}_3^r$. Este inicia como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_3^r &= \frac{\partial \Psi}{\partial J} (\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{f}_2^r) \\ &+ 2 \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \mathbf{f}_3^r \right. \\ &\left. + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} [(\mathbf{f}_1^r \cdot \mathbf{f}_3^r) \mathbf{f}_1^r + (\mathbf{f}_2^r \cdot \mathbf{f}_3^r) \mathbf{f}_2^r + (\mathbf{f}_3^r \cdot \mathbf{f}_3^r) \mathbf{f}_3^r] \right\} \end{aligned} \quad (4.303)$$

e, após algumas manipulações análogas às feitas para os outros vetores de tensão, chegamos a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_3^r &= \frac{\partial \Psi}{\partial J} (\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{f}_2^r) \\ &+ 2 \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \mathbf{f}_3^r \right. \\ &\left. + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} [(\mathbf{f}_1^r \otimes \mathbf{f}_1^r) + (\mathbf{f}_2^r \otimes \mathbf{f}_2^r) + (\mathbf{f}_3^r \otimes \mathbf{f}_3^r)] \mathbf{f}_3^r \right\}. \end{aligned} \quad (4.304)$$

Levando em consideração a equação (4.283), e após algumas manipulações relativas a produtos diádicos e escalares, podemos ainda escrever que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_3^r &= \frac{\partial \Psi}{\partial J} (\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{f}_2^r) \\ &+ 2(1 + \gamma_{33}) \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \mathbf{e}_3^r \right. \\ &\left. + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} [\mathbf{f}_1^r (\mathbf{f}_1^r \cdot \mathbf{e}_3^r) + \mathbf{f}_2^r (\mathbf{f}_2^r \cdot \mathbf{e}_3^r) + \mathbf{f}_3^r (\mathbf{f}_3^r \cdot \mathbf{e}_3^r)] \right\}. \end{aligned} \quad (4.305)$$

Neste momento, no entanto, lembramos ao leitor que apenas necessitamos do termo τ_{33}^r , já que o vetor $\boldsymbol{\tau}_3^r$ não possui potência associada, já que a casca possui um vetor diretor rígido (CAMPELLO, PIMENTA, WRIGGERS, 2003). Desta forma, focamos apenas em

$$\begin{aligned} \tau_{33}^r &= \frac{\partial \Psi}{\partial J} \mathbf{e}_3^r \cdot (\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{f}_2^r) \\ &+ 2(1 + \gamma_{33}) \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \right. \\ &+ \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} [(\mathbf{e}_3^r \cdot \mathbf{f}_1^r) (\mathbf{f}_1^r \cdot \mathbf{e}_3^r) + (\mathbf{e}_3^r \cdot \mathbf{f}_2^r) (\mathbf{f}_2^r \cdot \mathbf{e}_3^r) \\ &\left. + (\mathbf{e}_3^r \cdot \mathbf{f}_3^r) (\mathbf{f}_3^r \cdot \mathbf{e}_3^r) \right\}. \end{aligned} \quad (4.306)$$

Sendo

$$(\mathbf{e}_3^r \cdot \mathbf{f}_1^r) = (\mathbf{f}_1^r \cdot \mathbf{e}_3^r), \quad (4.307)$$

temos

$$\begin{aligned} \tau_{33}^r &= \frac{\partial \Psi}{\partial J} \mathbf{e}_3^r \cdot (\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{f}_2^r) \\ &\quad + 2(1 + \gamma_{33}) \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \right. \\ &\quad + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} [(\mathbf{e}_3^r \cdot \mathbf{f}_1^r)(\mathbf{e}_3^r \cdot \mathbf{f}_1^r) + (\mathbf{e}_3^r \cdot \mathbf{f}_2^r)(\mathbf{e}_3^r \cdot \mathbf{f}_2^r) \\ &\quad \left. + (\mathbf{e}_3^r \cdot \mathbf{f}_3^r)(\mathbf{e}_3^r \cdot \mathbf{f}_3^r)] \right\} \end{aligned} \quad (4.308)$$

ou, reorganizando em notação indicial,

$$\tau_{33}^r = \frac{\partial \Psi}{\partial J} \mathbf{e}_3^r \cdot (\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{f}_2^r) + 2(1 + \gamma_{33}) \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} [(\mathbf{e}_3^r \cdot \mathbf{f}_i^r)(\mathbf{e}_3^r \cdot \mathbf{f}_i^r)] \right\}. \quad (4.309)$$

Por fim, considerando (4.286), podemos escrever que

$$\tau_{33}^r = \frac{\partial \Psi}{\partial J} \bar{J} + 2(1 + \gamma_{33}) \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} [(\mathbf{e}_3^r \cdot \mathbf{f}_i^r)(\mathbf{e}_3^r \cdot \mathbf{f}_i^r)] \right\}. \quad (4.310)$$

Para continuar a demonstração, é necessária a obter os termos $\frac{\partial \Psi}{\partial J}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial I_1}$ e $\frac{\partial \Psi}{\partial I_2}$. Observando a equação (3.6), pode-se imediatamente obter que

$$\frac{\partial \Psi(I_1, J)}{\partial I_1} = \frac{1}{2} \mu \quad (4.311)$$

e

$$\frac{\partial \Psi(I_1, J)}{\partial I_2} = 0. \quad (4.312)$$

A demonstração do termo $\frac{\partial \Psi}{\partial J}$, no entanto, necessita de um maior detalhamento. Imediatamente após a derivação, temos que

$$\frac{\partial \Psi(I_1, J)}{\partial J} = \frac{1}{2} \lambda \left[J - \frac{1}{J} \right] - \mu \frac{1}{J}. \quad (4.313)$$

Após alguma manipulação, obtemos

$$\frac{\partial \Psi(I_1, J)}{\partial J} = \left[\frac{\lambda(1 + \gamma_{33})^2 J^2 - 2\mu - \lambda}{2J} \right]. \quad (4.314)$$

Substituindo (4.311), (4.312) e (4.314) na equação (4.310), obtemos

$$\tau_{33}^r = \frac{1}{J} \left[\frac{\lambda(J^2 - 1) - 2\mu}{2} \right] \bar{J} + (1 + \gamma_{33}) \mu = 0, \quad (4.315)$$

onde a igualdade com o valor nulo é definida devido ao estado de tensão plana, conforme apresentado na equação (4.222).

Após um série de manipulações e isolando γ_{33} , finalmente obtemos o termo

$$\gamma_{33} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda\bar{J}^2 + 2\mu}} - 1. \quad (4.316)$$

Com o termo γ_{33} , possuímos todos os termos necessários para montagem dos vetores de tensão $\boldsymbol{\tau}_\alpha^r$. Começamos então substituindo as equações (4.311), (4.312) e (4.314) na equação (4.300), de forma a obter

$$\boldsymbol{\tau}_\alpha^r = \left[\frac{\lambda(1 + \gamma_{33})^2\bar{J}^2 - 2\mu - \lambda}{2J} \right] (1 + \gamma_{33})\mathbf{g}_\alpha + 2 \left\{ \frac{1}{2}\mu\mathbf{I} \right\} \mathbf{f}_\alpha^r. \quad (4.317)$$

Utilizando (4.285), a equação (4.317) é escrita como

$$\boldsymbol{\tau}_\alpha^r = \left[\frac{\lambda(1 + \gamma_{33})^2\bar{J}^2 - 2\mu - \lambda}{2(1 + \gamma_{33})\bar{J}} \right] (1 + \gamma_{33})\mathbf{g}_\alpha + 2 \left\{ \frac{1}{2}\mu\mathbf{I} \right\} \mathbf{f}_\alpha^r. \quad (4.318)$$

Percebe-se na equação (4.318) a presença do termo γ_{33} . Para obtenção da condição de tensão plana, substituímos este termo pelo valor obtido em (4.316), transformando assim os vetores $\boldsymbol{\tau}_\alpha^r(\gamma_\alpha^r, \gamma_{33})$ em $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r(\gamma_\alpha^r)$ com a forma

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r = \left[\frac{\lambda \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda\bar{J}^2 + 2\mu} \right) \bar{J}^2 - 2\mu - \lambda}{2 \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda\bar{J}^2 + 2\mu}} \bar{J}} \right] \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda\bar{J}^2 + 2\mu}} \mathbf{e}_3^r \cdot (\mathbf{e}_\alpha^r \times \mathbf{e}_\beta^r) (\mathbf{f}_\alpha^r \times \mathbf{e}_3^r) + \mu \mathbf{f}_\alpha^r \quad (4.319)$$

Após uma série de manipulações da equação acima, obtêm-se a forma genérica dos vetores de tensão plana

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r = -\mu \left[\frac{2\mu + \lambda}{(\lambda\bar{J}^3 + 2\mu\bar{J})} \right] \mathbf{e}_3^r \cdot (\mathbf{e}_\alpha^r \times \mathbf{e}_\beta^r) (\mathbf{f}_\alpha^r \times \mathbf{e}_3^r) + \mu \mathbf{f}_\alpha^r. \quad (4.320)$$

ou, de forma condensada e considerando (4.301) e (4.302),

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r = -\mu \left[\frac{2\mu + \lambda}{(\lambda\bar{J}^3 + 2\mu\bar{J})} \right] \mathbf{g}_\alpha + \mu \mathbf{f}_\alpha^r. \quad (4.321)$$

Determinada a forma geral $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r$, podemos obter os vetores específicos $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_1^r$ e $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_2^r$. Será apresentada a demonstração do vetor $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_1^r$, sendo o vetor $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_2^r$ obtido de forma análoga.

Analisemos agora a demonstração de $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_1^r$. A partir da equação (4.320), podemos construir

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_1^r = -\mu \left[\frac{2\mu + \lambda}{(\lambda\bar{J}_1^3 + 2\mu\bar{J}_1)} \right] (\mathbf{f}_2^r \times \mathbf{e}_3^r) + \mu \mathbf{f}_1^r. \quad (4.322)$$

O produto vetorial existente na equação (4.322) pode ser calculado como

$$(\mathbf{f}_2^r \times \mathbf{e}_3^r) = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \gamma_{12} & 1 + \gamma_{22} & \gamma_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (1 + \gamma_{22})\mathbf{i} - \gamma_{12}\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 1 + \gamma_{22} \\ -\gamma_{12} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.323)$$

Substituindo (4.323) e considerando que

$$\mathbf{f}_1^r = \begin{bmatrix} 1 + \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix}, \quad (4.324)$$

podemos reescrever (4.322) como

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_1^r = -\mu \left[\frac{2\mu + \lambda}{(\lambda\bar{J}^3 + 2\mu\bar{J})} \right] \begin{bmatrix} 1 + \gamma_{22} \\ -\gamma_{12} \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 + \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix}. \quad (4.325)$$

A seguir, são realizadas algumas manipulações matemáticas em relação à equação do vetor de tensão, de modo a obter os mesmos parâmetros propostos por Campello, Pimenta e Wriggers (2003) Inicia-se a manipulação com a equação (4.325), transformando esta em

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_1^r &= -\mu \left[\frac{2\mu + \lambda}{(\lambda\bar{J}^3 + 2\mu\bar{J})} \right] \begin{bmatrix} 1 + \gamma_{22} \\ -\gamma_{12} \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 + \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix} \\ &+ \mu \left[\frac{(\lambda\bar{J}^3 + 2\mu\bar{J})}{(\lambda\bar{J}^3 + 2\mu\bar{J})} \right] \begin{bmatrix} 1 + \gamma_{22} \\ -\gamma_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &- \mu \left[\frac{(\lambda\bar{J}^3 + 2\mu\bar{J})}{(\lambda\bar{J}^3 + 2\mu\bar{J})} \right] \begin{bmatrix} 1 + \gamma_{22} \\ -\gamma_{12} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.326)$$

Manipulando a equação anterior e definindo o parâmetro

$$\vartheta = \left[\frac{\lambda(\bar{J}^3 - 1) + 2\mu(\bar{J} - 1)}{(\lambda\bar{J}^3 + 2\mu\bar{J})} \right], \quad (4.327)$$

obtemos

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_1^r = \mu\vartheta \begin{bmatrix} 1 + \gamma_{22} \\ -\gamma_{12} \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \gamma_{11} - \gamma_{22} \\ \gamma_{21} + \gamma_{12} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix}. \quad (4.328)$$

De forma análoga à construção de $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_1^r$, $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_2^r$ é definido como

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_2^r = \mu\vartheta \begin{bmatrix} -\gamma_{21} \\ 1 + \gamma_{11} \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \gamma_{12} + \gamma_{21} \\ \gamma_{22} - \gamma_{11} \\ \gamma_{32} \end{bmatrix}. \quad (4.329)$$

Obtidos os vetores de tensão, foca-se agora a demonstração dos operadores tangentes $\tilde{\mathbf{C}}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\gamma}_\alpha^r)$, sendo estes equivalentes aos $\mathbf{C}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\gamma}_\alpha^r, \gamma_{33})$, com a substituição de $\boldsymbol{\tau}_\alpha^r(\boldsymbol{\gamma}_\alpha^r, \gamma_{33})$ por $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r(\boldsymbol{\gamma}_\alpha^r)$. Sendo assim, considerando (4.321) e definindo

$$\varphi(\bar{J}) = -\mu \left[\frac{2\mu + \lambda}{(\lambda\bar{J}^3 + 2\mu\bar{J})} \right], \quad (4.330)$$

Temos

$$\tilde{\mathbf{c}}_{\alpha\beta}^r = \frac{\partial \tilde{\mathbf{t}}_{\alpha}^r}{\partial \boldsymbol{\gamma}_{\beta}^r} = \frac{\partial [\varphi(\bar{J}) \mathbf{g}_{\alpha}^r + \mu \mathbf{f}_{\alpha}^r]}{\partial \boldsymbol{\gamma}_{\beta}^r}. \quad (4.331)$$

Pela regra do produto,

$$\tilde{\mathbf{c}}_{\alpha\beta}^r = \frac{\partial \tilde{\mathbf{t}}_{\alpha}^r}{\partial \boldsymbol{\gamma}_{\beta}^r} = \frac{\partial [\varphi(\bar{J})]}{\partial \boldsymbol{\gamma}_{\beta}^r} \mathbf{g}_{\alpha}^r + \frac{\partial \mathbf{g}_{\alpha}^r}{\partial \boldsymbol{\gamma}_{\beta}^r} \varphi(\bar{J}) + \mu \frac{\partial \mathbf{f}_{\alpha}^r}{\partial \boldsymbol{\gamma}_{\beta}^r} \quad (4.332)$$

e, pela regra da cadeia

$$\tilde{\mathbf{c}}_{\alpha\beta}^r = \frac{\partial \tilde{\mathbf{t}}_{\alpha}^r}{\partial \boldsymbol{\gamma}_{\beta}^r} = \frac{\partial [\varphi(\bar{J})]}{\partial \bar{J}} \frac{\partial \bar{J}}{\partial \boldsymbol{\gamma}_{\beta}^r} \mathbf{g}_{\alpha}^r + \frac{\partial \mathbf{g}_{\alpha}^r}{\partial \boldsymbol{\gamma}_{\beta}^r} \varphi(\bar{J}) + \mu \frac{\partial \mathbf{f}_{\alpha}^r}{\partial \boldsymbol{\gamma}_{\beta}^r}. \quad (4.333)$$

A demonstração de (4.333) será realizada por parcelas, já que esta apresenta parcelas consideravelmente grandes. Inicialmente foca-se no termo

$$\frac{\partial [\varphi(\bar{J})]}{\partial \bar{J}} = -\mu \left[\frac{\frac{\partial (2\mu + \lambda)}{\partial \bar{J}} (\lambda\bar{J}^3 + 2\mu\bar{J}) - \frac{\partial (\lambda\bar{J}^3 + 2\mu\bar{J})}{\partial \bar{J}} (2\mu + \lambda)}{(\lambda\bar{J}^3 + 2\mu\bar{J})^2} \right]. \quad (4.334)$$

Como os parâmetros de Lamé dependem apenas de parâmetros materiais, após a aplicação da derivação e após alguma manipulação, obtemos que

$$\frac{\partial [\varphi(\bar{J})]}{\partial \bar{J}} = -\varphi(\bar{J}) \left[\frac{(3\lambda\bar{J}^2 + 2\mu)}{(\lambda\bar{J}^3 + 2\mu\bar{J})} \right], \quad (4.335)$$

finalizando esta parcela.

A partir deste ponto trata-se da parcela $\frac{\partial \bar{J}}{\partial \boldsymbol{\gamma}_{\beta}^r}$. Aplicando a regra do produto e considerando que \mathbf{e}_3^r não varia com $\boldsymbol{\gamma}_{\beta}^r$, temos

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial \boldsymbol{\gamma}_{\beta}^r} = \mathbf{e}_3^r \cdot \frac{\partial [(\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{f}_2^r)]}{\partial \boldsymbol{\gamma}_{\beta}^r} \quad (4.336)$$

ou,

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial \boldsymbol{\gamma}_{\beta}^r} = \frac{\partial [\mathbf{e}_3^r \cdot (\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{f}_2^r)]}{\partial \boldsymbol{\gamma}_{\beta}^r}. \quad (4.337)$$

O produto escalar $\mathbf{e}_3^r \cdot (\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{f}_2^r)$ é calculado como

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3^r \cdot (\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{f}_2^r) &= [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} \gamma_{21}\gamma_{32} - \gamma_{31}(1 + \gamma_{22}) \\ \gamma_{31}\gamma_{12} - \gamma_{32}(1 + \gamma_{11}) \\ (1 + \gamma_{11})(1 + \gamma_{22}) - \gamma_{21}\gamma_{12} \end{bmatrix} \\ &= (1 + \gamma_{11})(1 + \gamma_{22}) - \gamma_{21}\gamma_{12}. \end{aligned} \quad (4.338)$$

Definido o produto escalar, é necessário tratar agora da derivação. Para simplificação, a equação

$$\frac{\partial\{\mathbf{e}_3^r \cdot [(\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{f}_2^r)]\}}{\partial\gamma_\beta^r} = \frac{\partial\{\mathbf{e}_3^r \cdot [(\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{f}_2^r)]\}}{\partial\gamma_{\beta i}^r} \mathbf{e}_i^r \quad (4.339)$$

será obtida retirando o índice β e tratando da versão expandida com γ_1^r e γ_2^r . Considerando (4.338), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial\{\mathbf{e}_3^r \cdot [(\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{f}_2^r)]\}}{\partial\gamma_{1i}^r} \mathbf{e}_i^r &= \begin{bmatrix} [(1 + \gamma_{11})(1 + \gamma_{22}) - \gamma_{21}\gamma_{12}]/\partial\gamma_{11}^r \\ [(1 + \gamma_{11})(1 + \gamma_{22}) - \gamma_{21}\gamma_{12}]/\partial\gamma_{21}^r \\ [(1 + \gamma_{11})(1 + \gamma_{22}) - \gamma_{21}\gamma_{12}]/\partial\gamma_{31}^r \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1 + \gamma_{22}) \\ -\gamma_{12} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.340)$$

Observando a equação acima e comparando com a versão expandida de \mathbf{g}_1^r , percebe-se que

$$\mathbf{g}_1^r = \frac{\partial\{\mathbf{e}_3^r \cdot [(\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{f}_2^r)]\}}{\partial\gamma_{1i}^r} \mathbf{e}_i^r \quad (4.341)$$

e, de forma análoga

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_2^r &= \frac{\partial\{\mathbf{e}_3^r \cdot [(\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{f}_2^r)]\}}{\partial\gamma_{1i}^r} \mathbf{e}_i^r = \begin{bmatrix} [(1 + \gamma_{11})(1 + \gamma_{22}) - \gamma_{21}\gamma_{12}]/\partial\gamma_{12}^r \\ [(1 + \gamma_{11})(1 + \gamma_{22}) - \gamma_{21}\gamma_{12}]/\partial\gamma_{22}^r \\ [(1 + \gamma_{11})(1 + \gamma_{22}) - \gamma_{21}\gamma_{12}]/\partial\gamma_{32}^r \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\gamma_{21} \\ (1 + \gamma_{11}) \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.342)$$

Finalizada a parcela $\frac{\partial[\varphi(\bar{J})]}{\partial\bar{J}} \frac{\partial\bar{J}}{\partial\gamma_\beta^r}$ passamos agora para $\frac{\partial\mathbf{g}_\alpha^r}{\partial\gamma_\beta^r}$. Assim como na parcela

anterior, retiramos os índices para maior clareza na demonstração, logo, a expressão

$$\frac{\partial\mathbf{g}_\alpha^r}{\partial\gamma_\beta^r} = \frac{\partial[\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{f}_\alpha^r \times \mathbf{e}_3^r)]}{\partial\gamma_\beta^r} = \frac{\partial[\mathbf{e}_3^r \cdot (\mathbf{e}_\alpha^r \times \mathbf{e}_\beta^r)(\mathbf{f}_\beta^r \times \mathbf{e}_3^r)]}{\partial\gamma_\beta^r} \quad (4.343)$$

será substituída por

$$\frac{\partial\mathbf{g}_1^r}{\partial\gamma_1^r} = \frac{\partial(\mathbf{f}_2^r \times \mathbf{e}_3^r)}{\partial\gamma_1^r}; \quad (4.344)$$

$$\frac{\partial\mathbf{g}_1^r}{\partial\gamma_2^r} = \frac{\partial(\mathbf{f}_2^r \times \mathbf{e}_3^r)}{\partial\gamma_2^r}; \quad (4.345)$$

$$\frac{\partial\mathbf{g}_2^r}{\partial\gamma_1^r} = \frac{\partial(\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{e}_3^r)}{\partial\gamma_1^r}; \quad (4.346)$$

$$\frac{\partial\mathbf{g}_2^r}{\partial\gamma_2^r} = \frac{\partial(\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{e}_3^r)}{\partial\gamma_2^r}. \quad (4.347)$$

Observando as parcelas acima, é inicialmente necessário determinar os produtos vetoriais. Desta forma, temos

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{e}_3^r) &= \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 + \gamma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{31} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \gamma_{21}\mathbf{i} - (1 + \gamma_{11})\mathbf{j}; \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_{21} \\ -(1 + \gamma_{11}) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.348)$$

$$(\mathbf{f}_2^r \times \mathbf{e}_3^r) = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \gamma_{12} & 1 + \gamma_{22} & \gamma_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (1 + \gamma_{22})\mathbf{i} - \gamma_{12}\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 1 + \gamma_{22} \\ -\gamma_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.349)$$

Iniciamos as derivações com os termos mais simples de serem computados, sendo estes

$$\frac{\partial(\mathbf{f}_2^r \times \mathbf{e}_3^r)}{\partial \gamma_1^r} = \frac{\partial[(1 + \gamma_{22})\mathbf{e}_1^r - \gamma_{12}\mathbf{e}_2^r]}{\partial \gamma_{j_1}^r} \otimes \mathbf{e}_j^r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (4.350)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{e}_3^r)}{\partial \gamma_2^r} = \frac{\partial[\gamma_{21}\mathbf{e}_1^r - (1 + \gamma_{11})\mathbf{e}_2^r]}{\partial \gamma_{j_2}^r} \otimes \mathbf{e}_j^r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.351)$$

As derivações acima resultam em matrizes nulas pois não existe dependência entre as componentes dos vetores obtidos pelo produto vetorial, em relação às componentes dos vetores de deformação γ_1^r e γ_2^r . Agora são tratadas das parcelas que possuem matrizes não nulas obtidas pela derivação.

A derivação das equações (4.345) e (4.346) possuem mesma lógica, desta forma será apresentada a demonstração da equação

$$\frac{\partial(\mathbf{f}_2^r \times \mathbf{e}_3^r)}{\partial \gamma_2^r} = \frac{\partial[(1 + \gamma_{22})\mathbf{e}_1^r - \gamma_{12}\mathbf{e}_2^r]}{\partial \gamma_{j_2}^r} \otimes \mathbf{e}_j^r. \quad (4.352)$$

Separando a equação acima em função das componentes, obtêm-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{f}_2^r \times \mathbf{e}_3^r)}{\partial \gamma_2^r} &= \frac{\partial[(1 + \gamma_{22})\mathbf{e}_1^r - \gamma_{12}\mathbf{e}_2^r]}{\partial \gamma_{12}^r} \otimes \mathbf{e}_1^r + \frac{\partial[(1 + \gamma_{22})\mathbf{e}_1^r - \gamma_{12}\mathbf{e}_2^r]}{\partial \gamma_{22}^r} \\ &\otimes \mathbf{e}_2^r + \frac{\partial[(1 + \gamma_{22})\mathbf{e}_1^r - \gamma_{12}\mathbf{e}_2^r]}{\partial \gamma_{32}^r} \otimes \mathbf{e}_3^r \end{aligned} \quad (4.353)$$

e, realizando as derivações,

$$\frac{\partial(\mathbf{f}_2^r \times \mathbf{e}_3^r)}{\partial \gamma_2^r} = -\mathbf{e}_2^r \otimes \mathbf{e}_1^r + \mathbf{e}_1^r \otimes \mathbf{e}_2^r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.354)$$

De forma análoga, temos

$$\frac{\partial(\mathbf{f}_1^r \times \mathbf{e}_3^r)}{\partial \gamma_1^r} = -\mathbf{e}_2^r \otimes \mathbf{e}_1^r + \mathbf{e}_1^r \otimes \mathbf{e}_2^r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.355)$$

Embora (4.350), (4.351), (4.354) e (4.355) apresentem os valores abertos das derivações apresentadas em (4.344) a (4.347), estas podem ser representadas na forma indicial compacta

$$\frac{\partial \mathbf{g}_\alpha^r}{\partial \gamma_\beta^r} = -\varepsilon_{\alpha\beta} \mathbf{skew}(\mathbf{e}_3^r), \quad (4.356)$$

já que

$$(\mathbf{e}_1^r \times \mathbf{e}_1^r) = \mathbf{0}; \quad (4.357)$$

$$(\mathbf{e}_2^r \times \mathbf{e}_2^r) = \mathbf{0}; \quad (4.358)$$

$$\mathbf{skew}(\mathbf{e}_3^r) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.359)$$

e, considerando (4.302).

É apresentada a demonstração de $\frac{\partial \mathbf{f}_\alpha^r}{\partial \gamma_\beta^r}$, sendo esta a última necessária para obter o tensor de segunda ordem $\tilde{\mathbf{C}}_{\alpha\beta}^r$. Assim como a maioria das parcelas anteriores, abandonamos a notação indicial de forma a simplificar a obtenção dos resultados. Esta parcela apresenta uma demonstração consideravelmente direta, sendo esta composta de

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}_1^r}{\partial \gamma_1^r} &= \frac{\partial[(1 + \gamma_{11})\mathbf{e}_1^r + \gamma_{21}\mathbf{e}_2^r + \gamma_{31}\mathbf{e}_3^r]}{\partial \gamma_{11}^r} \otimes \mathbf{e}_1^r \\ &+ \frac{\partial[(1 + \gamma_{11})\mathbf{e}_1^r + \gamma_{21}\mathbf{e}_2^r + \gamma_{31}\mathbf{e}_3^r]}{\partial \gamma_{21}^r} \otimes \mathbf{e}_2^r \\ &+ \frac{\partial[(1 + \gamma_{11})\mathbf{e}_1^r + \gamma_{21}\mathbf{e}_2^r + \gamma_{31}\mathbf{e}_3^r]}{\partial \gamma_{31}^r} \otimes \mathbf{e}_3^r; \end{aligned} \quad (4.360)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}_1^r}{\partial \gamma_2^r} &= \frac{\partial[(1 + \gamma_{11})\mathbf{e}_1^r + \gamma_{21}\mathbf{e}_2^r + \gamma_{31}\mathbf{e}_3^r]}{\partial \gamma_{12}^r} \otimes \mathbf{e}_1^r \\ &+ \frac{\partial[(1 + \gamma_{11})\mathbf{e}_1^r + \gamma_{21}\mathbf{e}_2^r + \gamma_{31}\mathbf{e}_3^r]}{\partial \gamma_{22}^r} \otimes \mathbf{e}_2^r \\ &+ \frac{\partial[(1 + \gamma_{11})\mathbf{e}_1^r + \gamma_{21}\mathbf{e}_2^r + \gamma_{31}\mathbf{e}_3^r]}{\partial \gamma_{32}^r} \otimes \mathbf{e}_3^r; \end{aligned} \quad (4.361)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}_2^r}{\partial \gamma_1^r} &= \frac{\partial[\gamma_{12}\mathbf{e}_1^r + (1 + \gamma_{22})\mathbf{e}_2^r + \gamma_{32}\mathbf{e}_3^r]}{\partial \gamma_{11}^r} \otimes \mathbf{e}_1^r \\ &+ \frac{\partial[\gamma_{12}\mathbf{e}_1^r + (1 + \gamma_{22})\mathbf{e}_2^r + \gamma_{32}\mathbf{e}_3^r]}{\partial \gamma_{21}^r} \otimes \mathbf{e}_2^r \\ &+ \frac{\partial[\gamma_{12}\mathbf{e}_1^r + (1 + \gamma_{22})\mathbf{e}_2^r + \gamma_{32}\mathbf{e}_3^r]}{\partial \gamma_{31}^r} \otimes \mathbf{e}_3^r; \end{aligned} \quad (4.362)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{f}_2^r}{\partial \gamma_2^r} &= \frac{\partial[\gamma_{12}\mathbf{e}_1^r + (1 + \gamma_{22})\mathbf{e}_2^r + \gamma_{32}\mathbf{e}_3^r]}{\partial \gamma_{12}^r} \otimes \mathbf{e}_1^r \\
&\quad + \frac{\partial[\gamma_{12}\mathbf{e}_1^r + (1 + \gamma_{22})\mathbf{e}_2^r + \gamma_{32}\mathbf{e}_3^r]}{\partial \gamma_{22}^r} \otimes \mathbf{e}_2^r \\
&\quad + \frac{\partial[\gamma_{12}\mathbf{e}_1^r + (1 + \gamma_{22})\mathbf{e}_2^r + \gamma_{32}\mathbf{e}_3^r]}{\partial \gamma_{32}^r} \otimes \mathbf{e}_3^r.
\end{aligned} \tag{4.363}$$

As quatro equações terão como resultado

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1^r}{\partial \gamma_1^r} = \mathbf{e}_1^r \otimes \mathbf{e}_1^r + \mathbf{e}_2^r \otimes \mathbf{e}_2^r + \mathbf{e}_3^r \otimes \mathbf{e}_3^r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{4.364}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1^r}{\partial \gamma_2^r} = 0\mathbf{e}_1^r \otimes \mathbf{e}_1^r + 0\mathbf{e}_2^r \otimes \mathbf{e}_2^r + 0\mathbf{e}_3^r \otimes \mathbf{e}_3^r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \tag{4.365}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_2^r}{\partial \gamma_1^r} = 0\mathbf{e}_1^r \otimes \mathbf{e}_1^r + 0\mathbf{e}_2^r \otimes \mathbf{e}_2^r + 0\mathbf{e}_3^r \otimes \mathbf{e}_3^r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \tag{4.366}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_2^r}{\partial \gamma_2^r} = \mathbf{e}_1^r \otimes \mathbf{e}_1^r + \mathbf{e}_2^r \otimes \mathbf{e}_2^r + \mathbf{e}_3^r \otimes \mathbf{e}_3^r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.367}$$

Voltando agora para a forma indicial, pode-se escrever que

$$\frac{\partial \mathbf{f}_\alpha^r}{\partial \gamma_\beta^r} = \delta_{\alpha\beta} \mathbf{I}, \tag{4.368}$$

onde $\delta_{\alpha\beta}$ trata-se de um delta de kronecker, obtendo $\delta_{\alpha\beta} = 0$ quando $\alpha \neq \beta$ e $\delta_{\alpha\beta} = 1$ quando $\alpha = \beta$.

Determinadas todas as parcelas que compõem (4.333), voltamos a esta substituindo o obtido em (4.335), (4.356), e (4.368) para obter

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{C}}_{\alpha\beta}^r &= \frac{\partial \tilde{\mathbf{t}}_\alpha^r}{\partial \gamma_\beta^r} = -\varphi(\bar{J}) \left[\frac{(3\lambda\bar{J}^2 + 2\mu)}{(\lambda\bar{J}^3 + 2\mu\bar{J})} \right] \mathbf{g}_\alpha^r \otimes \mathbf{g}_\beta^r - \varepsilon_{\alpha\beta} \varphi(\bar{J}) \mathbf{skew}(\mathbf{e}_3^r) \\
&\quad + \mu \delta_{\alpha\beta} \mathbf{I},
\end{aligned} \tag{4.369}$$

conforme apresentado por Campello (2005). Em forma matricial e abandonando a forma indicial, temos as matrizes

$$\tilde{\mathbf{C}}_{11}^r = \mu \begin{bmatrix} (1 + \gamma_{22}^r)^2 \vartheta' + 1 & -(1 + \gamma_{22}^r) \gamma_{12}^r \vartheta' & 0 \\ -(1 + \gamma_{22}^r) \gamma_{12}^r \vartheta' & (\gamma_{12}^r)^2 \vartheta' + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{4.370}$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{12}^r = \mu \begin{bmatrix} -(1 + \gamma_{22}^r) \gamma_{21}^r \vartheta' & \vartheta - 1 + (1 + \gamma_{11}^r)(1 + \gamma_{22}^r) \gamma_{21}^r \vartheta' & 0 \\ 1 - \vartheta - \gamma_{12}^r \gamma_{21}^r \vartheta' & -(1 + \gamma_{11}^r) \gamma_{12}^r \vartheta' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \tag{4.371}$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{21}^r = \tilde{\mathbf{C}}_{12}^{r\text{T}}; \quad (4.372)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{22}^r = \mu \begin{bmatrix} (\gamma_{21}^r)^2 \vartheta' + 1 & -(1 + \gamma_{11}^r) \gamma_{21}^r \vartheta' & 0 \\ -(1 + \gamma_{11}^r) \gamma_{21}^r \vartheta' & (1 + \gamma_{11}^r)^2 \vartheta' + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (4.373)$$

onde

$$\vartheta' = \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{J}} = \left[\frac{((\lambda + 2\mu))(3\lambda \bar{J}^2 + 2\mu)}{\bar{J}^2(\lambda \bar{J}^2 + 2\mu)^2} \right]. \quad (4.374)$$

4.6.3.2 Material de Saint-Venant-Kirchhoff

O material de Saint-Venant, conforme apresentado na equação (3.9) na seção 3.4, a função energia de deformação específica do material possui a forma

$$\psi(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \lambda (\mathbf{I} : \mathbf{E})^2 + \mu (\mathbf{E} : \mathbf{E}). \quad (4.375)$$

Utilizando a equação (4.236), é possível escrever que o segundo tensor de Piola-Kirchhoff assumirá a forma

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \lambda (\mathbf{I} : \mathbf{E})^2 + \mu (\mathbf{E} : \mathbf{E}) \right)}{\partial \mathbf{E}}. \quad (4.376)$$

Considerando a regra da cadeia e do produto na diferenciação, temos que

$$\mathbf{S} = \lambda (\mathbf{I} : \mathbf{E}) \left(\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \mathbf{E}} : \mathbf{E} + \mathbf{I} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{E}} \right) + \mu \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{E}} : \mathbf{E} + \mathbf{E} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{E}} \right). \quad (4.377)$$

Utilizando a consideração que $\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \mathbf{E}} = 0$, se pode obter que

$$\mathbf{S} = \lambda (\mathbf{I} : \mathbf{E}) (\mathbf{I} : \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + \mu (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : \mathbf{E} + \mathbf{E} : \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}). \quad (4.378)$$

Sendo o tensor das deformações de Green-Lagrange simétrico, realizando os produtos escalares e diádicos, temos que

$$\mathbf{S} = \lambda (\mathbf{I} : \mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}, \quad (4.379)$$

ou, realizando o produto escalar pra tensores de segunda ordem,

$$\mathbf{S} = \lambda \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}. \quad (4.380)$$

A partir da equação (4.237) e da equação (4.379), é possível obter o tensor dos módulos hiperelásticos de rigidez tangente por

$$\mathbb{D} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{E}^2} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial [\lambda (\mathbf{I} : \mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}]}{\partial \mathbf{E}}. \quad (4.381)$$

Considerando a regra do produto na diferenciação, se pode escrever que

$$\mathbb{D} = \lambda \left(\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \mathbf{E}} : \mathbf{E} + \mathbf{I} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{E}} \right) \mathbf{I} + \lambda (\mathbf{I} : \mathbf{E}) \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \mathbf{E}} + 2\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{E}} \quad (4.382)$$

ou, sendo $\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \mathbf{E}} = 0$,

$$\mathbb{D} = \lambda (\mathbf{I} : \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + 2\mu (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}). \quad (4.383)$$

Realizando os produtos escalares e diádicos, se pode finalmente definir o tensor constitutivo de quarta ordem para materiais de Saint-Venant como

$$\mathbb{D} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{E}^2} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbb{I}, \quad (4.384)$$

onde \mathbb{I} é um tensor de quarta ordem equivalente à matriz identidade para um tensor de segunda ordem. Com o tensor dos módulos hiperelásticos de rigidez tangente, se pode reescrever a equação (4.376) como

$$\mathbf{S} = \mathbb{D}\mathbf{E}. \quad (4.385)$$

Definidas as fórmulas gerais, a partir deste momento se começa a determinação dos vetores tensão. O início do processo parte da equação que descreve o tensor das deformações de Green-Lagrange,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}). \quad (4.386)$$

Substituindo a equação (4.35) na equação acima, obtemos

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{rT} \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{F}^r - \mathbf{I}). \quad (4.387)$$

No entanto, considerando a aplicação do tensor de rotação \mathbf{Q} , pode-se afirmar que $\mathbf{I} = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}$, logo,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{rT} \mathbf{F}^r - \mathbf{I}) \quad (4.388)$$

e escrevemos assim o tensor das deformações de Green-Lagrange em relação ao tensor das transformações retro-rotationado.

Construamos agora o tensor \mathbf{E} em seu formato matricial. Realizando a substituição das equações (4.281) e

$$\mathbf{F}^{rT} = \begin{bmatrix} 1 + \gamma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{31} \\ \gamma_{12} & 1 + \gamma_{22} & \gamma_{32} \\ 0 & 0 & 1 + \gamma_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.389)$$

respectivamente \mathbf{F}^r e \mathbf{F}^{rT} , na equação (4.389), obtêm-se

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 + \gamma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{31} \\ \gamma_{12} & 1 + \gamma_{22} & \gamma_{32} \\ 0 & 0 & 1 + \gamma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 \\ \gamma_{21} & 1 + \gamma_{22} & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & 1 + \gamma_{33} \end{bmatrix} - \mathbf{I} \right), \quad (4.390)$$

ou,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.391)$$

onde

$$E_{11} = \frac{1}{2}[(\gamma_{11}^r)^2 + 2\gamma_{11}^r + (\gamma_{21}^r)^2 + (\gamma_{31}^r)^2], \quad (4.392)$$

$$E_{21} = \frac{1}{2}[(\gamma_{11}^r + 1)\gamma_{12}^r + \gamma_{21}^r(\gamma_{22}^r + 1) + \gamma_{31}^r\gamma_{32}^r], \quad (4.393)$$

$$E_{31} = \frac{1}{2}[(\gamma_{33}^r + 1)\gamma_{31}^r], \quad (4.394)$$

$$E_{12} = \frac{1}{2}[(\gamma_{11}^r + 1)\gamma_{12}^r + \gamma_{21}^r(\gamma_{22}^r + 1) + \gamma_{31}^r\gamma_{32}^r], \quad (4.395)$$

$$E_{22} = \frac{1}{2}[(\gamma_{22}^r)^2 + 2\gamma_{22}^r + (\gamma_{12}^r)^2 + (\gamma_{32}^r)^2], \quad (4.396)$$

$$E_{32} = \frac{1}{2}[(\gamma_{33}^r + 1)\gamma_{32}^r], \quad (4.397)$$

$$E_{13} = \frac{1}{2}[(\gamma_{33}^r + 1)\gamma_{31}^r], \quad (4.398)$$

$$E_{23} = \frac{1}{2}[(\gamma_{33}^r + 1)\gamma_{32}^r], \quad (4.399)$$

$$E_{33} = \frac{1}{2}[(\gamma_{33}^r + 1)^2 - 1], \quad (4.400)$$

Determinado o tensor \mathbf{E} , obtêm-se agora o primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff. A equação (4.380) apresenta o segundo tensor de Piola-Kirchhoff, no entanto, utilizando a relação

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}, \quad (4.401)$$

ou,

$$\mathbf{Q}\mathbf{P}^r = \mathbf{Q}\mathbf{F}^r\mathbf{S}. \quad (4.402)$$

Transferindo o tensor \mathbf{Q} obtemos

$$\mathbf{P}^r = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{F}^r\mathbf{S} \quad (4.403)$$

ou, considerando que $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$,

$$\mathbf{P}^r = \mathbf{F}^r\mathbf{S} \quad (4.404)$$

correlacionando assim o primeiro tensor de Piola Kirchhoff retro-rotacionado com o segundo tensor de Piola-Kirchhoff. Obtida esta relação, podemos construir esta matricialmente como

$$\mathbf{P}^r = \mathbf{F}^r \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \tau_{11}^r & \tau_{12}^r & \tau_{13}^r \\ \tau_{21}^r & \tau_{22}^r & \tau_{23}^r \\ \tau_{31}^r & \tau_{32}^r & \tau_{33}^r \end{bmatrix} \quad (4.405)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 \\ \gamma_{21} & 1 + \gamma_{22} & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & 1 + \gamma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$$

ou,

$$\mathbf{P}^r = \mathbf{F}^r \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 + \gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 \\ \gamma_{21} & 1 + \gamma_{22} & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & 1 + \gamma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (4.406)$$

Considerando a relação apresentada acima, as equações (4.380) e (4.391) a (4.400), constroem-se as parcelas componentes do tensor \mathbf{P}^r como

$$\tau_{11}^r = \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33})(1 + \gamma_{11}^r) + 2\mu[(1 + \gamma_{11}^r)E_{11} + \gamma_{12}^r E_{21}], \quad (4.407)$$

$$\tau_{21}^r = \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33})(\gamma_{21}^r) + 2\mu[\gamma_{21}^r E_{11} + (1 + \gamma_{22}^r)E_{21}], \quad (4.408)$$

$$\tau_{31}^r = \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33})(\gamma_{31}^r) + 2\mu[\gamma_{31}^r E_{11} + \gamma_{32}^r E_{21} + (1 + \gamma_{33}^r)E_{31}], \quad (4.409)$$

$$\tau_{12}^r = \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33})(\gamma_{12}^r) + 2\mu[(1 + \gamma_{11}^r)E_{12} + \gamma_{12}^r E_{22}], \quad (4.410)$$

$$\tau_{22}^r = \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33})(1 + \gamma_{22}^r) + 2\mu[(1 + \gamma_{22}^r)E_{22} + \gamma_{21}^r E_{12}], \quad (4.411)$$

$$\tau_{32}^r = \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33})(\gamma_{32}^r) + 2\mu[\gamma_{31}^r E_{12} + \gamma_{32}^r E_{22} + (1 + \gamma_{33}^r)E_{32}], \quad (4.412)$$

$$\tau_{13}^r = 2\mu[(1 + \gamma_{11}^r)E_{13} + \gamma_{12}^r E_{23}], \quad (4.413)$$

$$\tau_{23}^r = 2\mu[(1 + \gamma_{22}^r)E_{23} + \gamma_{21}^r E_{13}], \quad (4.414)$$

$$\tau_{33}^r = \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33})(1 + \gamma_{33}^r) + 2\mu[\gamma_{31}^r E_{13} + \gamma_{32}^r E_{23} + (1 + \gamma_{33}^r)E_{33}]. \quad (4.415)$$

Obtidas as parcelas, é necessário agora a determinação do vetor γ_{33}^r de modo que a condição de tensão plana, estabelecida em (4.222), seja atendida. Desta forma temos que

$$\tau_{33}^r = \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33})(1 + \gamma_{33}^r) + 2\mu[\gamma_{31}^r E_{13} + \gamma_{32}^r E_{23} + (1 + \gamma_{33}^r)E_{33}] = 0, \quad (4.416)$$

ou, substituindo as componentes do tensor de deformação de Green-Lagrange,

$$\begin{aligned}
\tau_{33}^r = & \frac{1}{2} \lambda [(\gamma_{11}^r)^2 + 2\gamma_{11}^r + (\gamma_{21}^r)^2 + (\gamma_{31}^r)^2 + (\gamma_{22}^r)^2 + 2\gamma_{22}^r + (\gamma_{12}^r)^2 \\
& + (\gamma_{32}^r)^2 + (\gamma_{33}^r + 1)^2 - 1](1 + \gamma_{33}^r) \\
& + \frac{1}{2} 2\mu [\gamma_{31}^r (\gamma_{33}^r + 1) \gamma_{31}^r + \gamma_{32}^r (\gamma_{33}^r + 1) \gamma_{32}^r \\
& + (1 + \gamma_{33}^r) (\gamma_{33}^r + 1)^2 - 1] = 0.
\end{aligned} \tag{4.417}$$

Após alguma manipulação, temos

$$\begin{aligned}
\lambda [(\gamma_{11}^r)^2 + 2\gamma_{11}^r + (\gamma_{21}^r)^2 + (\gamma_{22}^r)^2 + 2\gamma_{22}^r + (\gamma_{12}^r)^2] \\
+ (\lambda + 2\mu) (\gamma_{33}^r + 1)^2 + (\lambda + 2\mu) [\gamma_{31}^{r\ 2} + \gamma_{32}^{r\ 2} + -1] = 0
\end{aligned} \tag{4.418}$$

ou, dividindo os dois lados da equação por $(\lambda + 2\mu)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} [(\gamma_{11}^r)^2 + 2\gamma_{11}^r + (\gamma_{21}^r)^2 + (\gamma_{22}^r)^2 + 2\gamma_{22}^r + (\gamma_{12}^r)^2] + (\gamma_{33}^r + 1)^2 \\
+ [\gamma_{31}^{r\ 2} + \gamma_{32}^{r\ 2} + -1] = 0.
\end{aligned} \tag{4.419}$$

Isolando $(\gamma_{33}^r + 1)^2$ temos

$$\begin{aligned}
(\gamma_{33}^r + 1)^2 = & -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} [(\gamma_{11}^r)^2 + 2\gamma_{11}^r + (\gamma_{21}^r)^2 + (\gamma_{22}^r)^2 + 2\gamma_{22}^r \\
& + (\gamma_{12}^r)^2] - \gamma_{31}^{r\ 2} - \gamma_{32}^{r\ 2} + 1.
\end{aligned} \tag{4.420}$$

Aplicando a raiz quadrada em ambos os lados da equação, definindo o parâmetro

$$v = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu + \lambda}, \tag{4.421}$$

e isolando o termo γ_{33}^r , pode-se escrever

$$\begin{aligned}
\gamma_{33}^r = & \sqrt{-\frac{2v}{1-v} \left[\frac{1}{2} (\gamma_{11}^r)^2 + \gamma_{11}^r + \frac{1}{2} (\gamma_{21}^r)^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{12}^r)^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{22}^r)^2 + \gamma_{22}^r \right]} \\
& + \sqrt{1 - (\gamma_{31}^r)^2 - (\gamma_{32}^r)^2} - 1.
\end{aligned} \tag{4.422}$$

Obtido γ_{33}^r para a condição de tensão plana, podemos substituir o valor encontrado para este em (4.407) a (4.412) e montar os vetores de tensão

$$\tilde{\mathbf{t}}_1^r = \begin{bmatrix} \tilde{t}_{11}^r \\ \tilde{t}_{21}^r \\ \tilde{t}_{31}^r \end{bmatrix}; \tag{4.423}$$

$$\tilde{\mathbf{t}}_2^r = \begin{bmatrix} \tilde{t}_{12}^r \\ \tilde{t}_{22}^r \\ \tilde{t}_{32}^r \end{bmatrix}. \tag{4.424}$$

A partir deste ponto serão apresentadas as demonstrações dos vetores de tensão $\tilde{\tau}_1^r$ e $\tilde{\tau}_2^r$. Como estas possuem passos análogos, apresentaremos detalhadamente a demonstração do vetor $\tilde{\tau}_1^r$ e definiremos o resultado de $\tilde{\tau}_2^r$.

Considere agora o vetor $\tilde{\tau}_1^r$. Este possuirá como componentes

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{11}^r = \lambda \left(E_{11} + E_{22} \right. \\ \left. - \frac{\nu}{1-\nu} \left[\frac{1}{2} (\gamma_{11}^r)^2 + \gamma_{11}^r + \frac{1}{2} (\gamma_{21}^r)^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{12}^r)^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{22}^r)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma_{22}^r \right] - \frac{1}{2} (\gamma_{31}^r)^2 - \frac{1}{2} (\gamma_{32}^r)^2 \right) (1 + \gamma_{11}^r) \\ + 2\mu [(1 + \gamma_{11}^r)E_{11} + \gamma_{12}^r E_{21}]; \end{aligned} \quad (4.425)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{21}^r = \lambda \left(E_{11} + E_{22} \right. \\ \left. - \frac{\nu}{1-\nu} \left[\frac{1}{2} (\gamma_{11}^r)^2 + \gamma_{11}^r + \frac{1}{2} (\gamma_{21}^r)^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{12}^r)^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{22}^r)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma_{22}^r \right] - \frac{1}{2} (\gamma_{31}^r)^2 - \frac{1}{2} (\gamma_{32}^r)^2 \right) (\gamma_{21}^r) \\ + 2\mu [\gamma_{21}^r E_{11} + (1 + \gamma_{22}^r) E_{21}]; \end{aligned} \quad (4.426)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{31}^r = \lambda \left(E_{11} + E_{22} \right. \\ \left. - \frac{\nu}{1-\nu} \left[\frac{1}{2} (\gamma_{11}^r)^2 + \gamma_{11}^r + \frac{1}{2} (\gamma_{21}^r)^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{12}^r)^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{22}^r)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma_{22}^r \right] - \frac{1}{2} (\gamma_{31}^r)^2 - \frac{1}{2} (\gamma_{32}^r)^2 \right) (\gamma_{31}^r) \\ + 2\mu \left[\gamma_{31}^r E_{11} + \gamma_{32}^r E_{21} \right. \\ \left. + \left\{ -\frac{\nu}{1-\nu} \left[\frac{1}{2} (\gamma_{11}^r)^2 + \gamma_{11}^r + \frac{1}{2} (\gamma_{21}^r)^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{12}^r)^2 \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} (\gamma_{22}^r)^2 + \gamma_{22}^r \right] - \frac{1}{2} (\gamma_{31}^r)^2 - \frac{1}{2} (\gamma_{32}^r)^2 + \frac{1}{2} \right\} \gamma_{31}^r \right]. \end{aligned} \quad (4.427)$$

Após algumas manipulações e agrupamentos de parcelas e definindo os termos

$$\frac{1-\nu}{\nu} - \frac{\nu}{1-\nu} = \frac{1}{\lambda} \bar{E} \quad (4.428)$$

$$1 - \frac{\nu}{1-\nu} = \frac{1-2\nu}{1-\nu}; \quad (4.429)$$

$$1 - \frac{\nu}{1-\nu} = \frac{2\mu}{\lambda}; \quad (4.430)$$

$$\lambda \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) = \nu \bar{E} \quad (4.431)$$

onde

$$\bar{E} = \frac{2\mu}{1-\nu}, \quad (4.432)$$

podemos escrever as componentes do vetor de tensão como

$$\tilde{\tau}_{11}^r = \bar{E} \left(E_{11} + \nu \left[E_{22} - \frac{1}{2}(\gamma_{31}^r)^2 - \frac{1}{2}(\gamma_{32}^r)^2 \right] \right) (1 + \gamma_{11}^r) + 2\mu\gamma_{12}^r E_{21}; \quad (4.433)$$

$$\tilde{\tau}_{21}^r = \bar{E} \left(E_{11} + \nu \left[E_{22} - \frac{1}{2}(\gamma_{31}^r)^2 - \frac{1}{2}(\gamma_{32}^r)^2 \right] \right) (\gamma_{21}^r) + 2\mu(1 + \gamma_{22}^r)E_{21}; \quad (4.434)$$

$$\tilde{\tau}_{31}^r = \mu(\gamma_{31}^r) + 2\mu \left(E_{11} - \frac{1}{2}(\gamma_{31}^r)^2 - \frac{1}{2}(\gamma_{32}^r)^2 \right) (\gamma_{31}^r) + 2\mu\gamma_{32}^r E_{21}. \quad (4.435)$$

Obtido o tensor $\tilde{\tau}_1^r$, podemos definir o tensor $\tilde{\tau}_2^r$, já que sua demonstração mostra-se análoga. Desta forma, mostram-se as componentes do vetor $\tilde{\tau}_2^r$ em sua forma inicial

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{12}^r = \lambda \left(E_{11} + E_{22} \right. \\ \left. - \frac{\nu}{1-\nu} \left[\frac{1}{2}(\gamma_{11}^r)^2 + \gamma_{11}^r + \frac{1}{2}(\gamma_{21}^r)^2 + \frac{1}{2}(\gamma_{12}^r)^2 + \frac{1}{2}(\gamma_{22}^r)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma_{22}^r \right] - \frac{1}{2}(\gamma_{31}^r)^2 - \frac{1}{2}(\gamma_{32}^r)^2 \right) (\gamma_{12}^r) \\ \left. + 2\mu[(1 + \gamma_{11}^r)E_{12} + \gamma_{12}^r E_{22}]; \right. \end{aligned} \quad (4.436)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{22}^r = \lambda \left(E_{11} + E_{22} \right. \\ \left. - \frac{\nu}{1-\nu} \left[\frac{1}{2}(\gamma_{11}^r)^2 + \gamma_{11}^r + \frac{1}{2}(\gamma_{21}^r)^2 + \frac{1}{2}(\gamma_{12}^r)^2 + \frac{1}{2}(\gamma_{22}^r)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma_{22}^r \right] - \frac{1}{2}(\gamma_{31}^r)^2 - \frac{1}{2}(\gamma_{32}^r)^2 \right) (1 + \gamma_{22}^r) \\ \left. + 2\mu[(1 + \gamma_{22}^r)E_{22} + \gamma_{21}^r E_{12}]; \right. \end{aligned} \quad (4.437)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{32}^r = \lambda \left(E_{11} + E_{22} \right. \\ \left. - \frac{\nu}{1-\nu} \left[\frac{1}{2}(\gamma_{11}^r)^2 + \gamma_{11}^r + \frac{1}{2}(\gamma_{21}^r)^2 + \frac{1}{2}(\gamma_{12}^r)^2 + \frac{1}{2}(\gamma_{22}^r)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma_{22}^r \right] - \frac{1}{2}(\gamma_{31}^r)^2 - \frac{1}{2}(\gamma_{32}^r)^2 \right) (\gamma_{32}^r) \\ \left. + 2\mu \left[\gamma_{31}^r E_{12} + \gamma_{32}^r E_{22} \right. \right. \\ \left. \left. + \left\{ -\frac{\nu}{1-\nu} \left[\frac{1}{2}(\gamma_{11}^r)^2 + \gamma_{11}^r + \frac{1}{2}(\gamma_{21}^r)^2 + \frac{1}{2}(\gamma_{12}^r)^2 \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{2}(\gamma_{22}^r)^2 + \gamma_{22}^r \right] - \frac{1}{2}(\gamma_{31}^r)^2 - \frac{1}{2}(\gamma_{32}^r)^2 + \frac{1}{2} \right\} \gamma_{32}^r \right], \end{aligned} \quad (4.438)$$

e final

$$\tilde{\tau}_{12}^r = \bar{E} \left(E_{22} + \nu \left[E_{11} - \frac{1}{2}(\gamma_{31}^r)^2 - \frac{1}{2}(\gamma_{32}^r)^2 \right] \right) (\gamma_{12}^r) + 2\mu(1 + \gamma_{11}^r)E_{12}; \quad (4.439)$$

$$\tilde{\tau}_{22}^r = \bar{E} \left(E_{22} + \nu \left[E_{11} - \frac{1}{2}(\gamma_{31}^r)^2 - \frac{1}{2}(\gamma_{32}^r)^2 \right] \right) (1 + \gamma_{22}^r) + 2\mu\gamma_{21}^r E_{12}; \quad (4.440)$$

$$\tilde{\tau}_{32}^r = \mu(\gamma_{32}^r) + 2\mu \left(E_{22} - \frac{1}{2}(\gamma_{31}^r)^2 - \frac{1}{2}(\gamma_{32}^r)^2 \right) (\gamma_{32}^r) + 2\mu\gamma_{31}^r E_{12}. \quad (4.441)$$

Definidos os vetores de tensão, podemos obter os tensores $\tilde{\mathcal{C}}_{\alpha\beta}^r$ através de

$$\frac{\partial \tilde{\tau}_1^r}{\partial \gamma_1^r} = \frac{\partial \tilde{\tau}_{i1}^r}{\partial \gamma_{j1}^r} \mathbf{e}_i^r \otimes \mathbf{e}_j^r = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_{11}^r}{\partial \gamma_{11}^r} & \frac{\partial \tau_{11}^r}{\partial \gamma_{21}^r} & \frac{\partial \tau_{11}^r}{\partial \gamma_{31}^r} \\ \frac{\partial \tau_{21}^r}{\partial \gamma_{11}^r} & \frac{\partial \tau_{21}^r}{\partial \gamma_{21}^r} & \frac{\partial \tau_{21}^r}{\partial \gamma_{31}^r} \\ \frac{\partial \tau_{31}^r}{\partial \gamma_{11}^r} & \frac{\partial \tau_{31}^r}{\partial \gamma_{21}^r} & \frac{\partial \tau_{31}^r}{\partial \gamma_{31}^r} \end{bmatrix}; \quad (4.442)$$

$$\frac{\partial \tilde{\tau}_1^r}{\partial \gamma_2^r} = \frac{\partial \tilde{\tau}_{i1}^r}{\partial \gamma_{j2}^r} \mathbf{e}_i^r \otimes \mathbf{e}_j^r = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_{11}^r}{\partial \gamma_{12}^r} & \frac{\partial \tau_{11}^r}{\partial \gamma_{22}^r} & \frac{\partial \tau_{11}^r}{\partial \gamma_{32}^r} \\ \frac{\partial \tau_{21}^r}{\partial \gamma_{12}^r} & \frac{\partial \tau_{21}^r}{\partial \gamma_{22}^r} & \frac{\partial \tau_{21}^r}{\partial \gamma_{32}^r} \\ \frac{\partial \tau_{31}^r}{\partial \gamma_{12}^r} & \frac{\partial \tau_{31}^r}{\partial \gamma_{22}^r} & \frac{\partial \tau_{31}^r}{\partial \gamma_{32}^r} \end{bmatrix}; \quad (4.443)$$

$$\frac{\partial \tilde{\tau}_2^r}{\partial \gamma_1^r} = \frac{\partial \tilde{\tau}_{i2}^r}{\partial \gamma_{j1}^r} \mathbf{e}_i^r \otimes \mathbf{e}_j^r = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_{12}^r}{\partial \gamma_{11}^r} & \frac{\partial \tau_{12}^r}{\partial \gamma_{21}^r} & \frac{\partial \tau_{12}^r}{\partial \gamma_{31}^r} \\ \frac{\partial \tau_{22}^r}{\partial \gamma_{11}^r} & \frac{\partial \tau_{22}^r}{\partial \gamma_{21}^r} & \frac{\partial \tau_{22}^r}{\partial \gamma_{31}^r} \\ \frac{\partial \tau_{32}^r}{\partial \gamma_{11}^r} & \frac{\partial \tau_{32}^r}{\partial \gamma_{21}^r} & \frac{\partial \tau_{32}^r}{\partial \gamma_{31}^r} \end{bmatrix}; \quad (4.444)$$

$$\frac{\partial \tilde{\tau}_2^r}{\partial \gamma_2^r} = \frac{\partial \tilde{\tau}_{i2}^r}{\partial \gamma_{j2}^r} \mathbf{e}_i^r \otimes \mathbf{e}_j^r = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_{12}^r}{\partial \gamma_{12}^r} & \frac{\partial \tau_{12}^r}{\partial \gamma_{22}^r} & \frac{\partial \tau_{12}^r}{\partial \gamma_{32}^r} \\ \frac{\partial \tau_{22}^r}{\partial \gamma_{12}^r} & \frac{\partial \tau_{22}^r}{\partial \gamma_{22}^r} & \frac{\partial \tau_{22}^r}{\partial \gamma_{32}^r} \\ \frac{\partial \tau_{32}^r}{\partial \gamma_{12}^r} & \frac{\partial \tau_{32}^r}{\partial \gamma_{22}^r} & \frac{\partial \tau_{32}^r}{\partial \gamma_{32}^r} \end{bmatrix}. \quad (4.445)$$

Os vetores de tensão $\tilde{\tau}_1^r$ e $\tilde{\tau}_2^r$, conforme visto nas equações (4.433) a (4.435) e (4.439) a (4.441), estão em função dos componentes dos vetores de deformação e de parâmetros materiais. Desta forma, As derivações para obtenção de $\tilde{\mathcal{C}}_{\alpha\beta}^r$ apresenta-se como um trabalho manual, sendo apenas detalhada a derivação para obtenção de $\tilde{\mathcal{C}}_{11}^r$ e os outros tensores de segunda ordem serão apenas apresentados em sua forma final.

A demonstração de $\tilde{\mathbf{C}}_{11}^r$ inicia-se com a substituição das componentes obtidas para o vetor $\tilde{\mathbf{r}}_1^r$ apresentadas nas equações (4.433) a (4.435) nas componentes da equação (4.442), ou seja,

$$\frac{\partial \tau_{11}^r}{\partial \gamma_{11}^r} = \frac{\partial \left\{ \bar{E} \left(E_{11} + \nu \left[E_{22} - \frac{1}{2} (\gamma_{31}^r)^2 - \frac{1}{2} (\gamma_{32}^r)^2 \right] \right) (1 + \gamma_{11}^r) + 2\mu \gamma_{12}^r E_{21} \right\}}{\partial \gamma_{11}^r}, \quad (4.446)$$

$$\frac{\partial \tau_{11}^r}{\partial \gamma_{21}^r} = \frac{\partial \left\{ \bar{E} \left(E_{11} + \nu \left[E_{22} - \frac{1}{2} (\gamma_{31}^r)^2 - \frac{1}{2} (\gamma_{32}^r)^2 \right] \right) (1 + \gamma_{11}^r) + 2\mu \gamma_{12}^r E_{21} \right\}}{\partial \gamma_{21}^r}, \quad (4.447)$$

$$\frac{\partial \tau_{11}^r}{\partial \gamma_{31}^r} = \frac{\partial \left\{ \bar{E} \left(E_{11} + \nu \left[E_{22} - \frac{1}{2} (\gamma_{31}^r)^2 - \frac{1}{2} (\gamma_{32}^r)^2 \right] \right) (1 + \gamma_{11}^r) + 2\mu \gamma_{12}^r E_{21} \right\}}{\partial \gamma_{31}^r}, \quad (4.448)$$

$$\frac{\partial \tau_{21}^r}{\partial \gamma_{11}^r} = \frac{\partial \left\{ \bar{E} \left(E_{11} + \nu \left[E_{22} - \frac{1}{2} (\gamma_{31}^r)^2 - \frac{1}{2} (\gamma_{32}^r)^2 \right] \right) (\gamma_{21}^r) + 2\mu (1 + \gamma_{22}^r) E_{21} \right\}}{\partial \gamma_{11}^r}, \quad (4.449)$$

$$\frac{\partial \tau_{21}^r}{\partial \gamma_{21}^r} = \frac{\partial \left\{ \bar{E} \left(E_{11} + \nu \left[E_{22} - \frac{1}{2} (\gamma_{31}^r)^2 - \frac{1}{2} (\gamma_{32}^r)^2 \right] \right) (\gamma_{21}^r) + 2\mu (1 + \gamma_{22}^r) E_{21} \right\}}{\partial \gamma_{21}^r}, \quad (4.450)$$

$$\frac{\partial \tau_{21}^r}{\partial \gamma_{31}^r} = \frac{\partial \left\{ \bar{E} \left(E_{11} + \nu \left[E_{22} - \frac{1}{2} (\gamma_{31}^r)^2 - \frac{1}{2} (\gamma_{32}^r)^2 \right] \right) (\gamma_{21}^r) + 2\mu (1 + \gamma_{22}^r) E_{21} \right\}}{\partial \gamma_{31}^r}, \quad (4.451)$$

$$\frac{\partial \tau_{31}^r}{\partial \gamma_{11}^r} = \frac{\partial \left\{ \mu (\gamma_{31}^r) + 2\mu \left(E_{11} - \frac{1}{2} (\gamma_{31}^r)^2 - \frac{1}{2} (\gamma_{32}^r)^2 \right) (\gamma_{31}^r) + 2\mu \gamma_{32}^r E_{21} \right\}}{\partial \gamma_{11}^r}, \quad (4.452)$$

$$\frac{\partial \tau_{31}^r}{\partial \gamma_{21}^r} = \frac{\partial \left\{ \mu (\gamma_{31}^r) + 2\mu \left(E_{11} - \frac{1}{2} (\gamma_{31}^r)^2 - \frac{1}{2} (\gamma_{32}^r)^2 \right) (\gamma_{31}^r) + 2\mu \gamma_{32}^r E_{21} \right\}}{\partial \gamma_{21}^r}, \quad (4.453)$$

$$\frac{\partial \tau_{31}^r}{\partial \gamma_{31}^r} = \frac{\partial \left\{ \mu (\gamma_{31}^r) + 2\mu \left(E_{11} - \frac{1}{2} (\gamma_{31}^r)^2 - \frac{1}{2} (\gamma_{32}^r)^2 \right) (\gamma_{31}^r) + 2\mu \gamma_{32}^r E_{21} \right\}}{\partial \gamma_{31}^r}. \quad (4.454)$$

O próximo passo da demonstração é a substituição dos valores das componentes do tensor das deformações de Green-Lagrange (\mathbf{E}), no entanto, devido à considerável extensão das equações encontradas, omitimos este passo e já apresentamos os valores da derivações, sendo estas das componentes,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{11}^r}{\partial \gamma_{11}^r} &= \bar{E}(1 + \gamma_{11}^r)^2 \\ &+ \bar{E} \left(\frac{1}{2} [(\gamma_{11}^r)^2 + 2\gamma_{11}^r + (\gamma_{21}^r)^2 + (\gamma_{31}^r)^2] \right. \\ &+ \nu \left[\frac{1}{2} [(\gamma_{22}^r)^2 + 2\gamma_{22}^r + (\gamma_{12}^r)^2 + (\gamma_{32}^r)^2] - \frac{1}{2} (\gamma_{31}^r)^2 \right. \\ &\left. \left. - \frac{1}{2} (\gamma_{32}^r)^2 \right] \right) + \mu(\gamma_{12}^r)^2; \end{aligned} \quad (4.455)$$

$$\frac{\partial \tau_{11}^r}{\partial \gamma_{21}^r} = \bar{E}(1 + \gamma_{11}^r)\gamma_{21}^r + \mu(1 + \gamma_{22}^r)\gamma_{12}^r; \quad (4.456)$$

$$\frac{\partial \tau_{11}^r}{\partial \gamma_{31}^r} = \bar{E}(1 - \nu)(1 + \gamma_{11}^r)\gamma_{31}^r + \mu\gamma_{12}^r\gamma_{32}^r; \quad (4.457)$$

$$\frac{\partial \tau_{21}^r}{\partial \gamma_{11}^r} = \bar{E}(1 + \gamma_{11}^r)\gamma_{21}^r + \mu(1 + \gamma_{22}^r)\gamma_{12}^r; \quad (4.458)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{21}^r}{\partial \gamma_{21}^r} &= \bar{E}(\gamma_{21}^r)^2 \\ &+ \bar{E} \left(\frac{1}{2} [(\gamma_{11}^r)^2 + 2\gamma_{11}^r + (\gamma_{21}^r)^2 + (\gamma_{31}^r)^2] \right. \\ &+ \nu \left[\frac{1}{2} [(\gamma_{22}^r)^2 + 2\gamma_{22}^r + (\gamma_{12}^r)^2 + (\gamma_{32}^r)^2] - \frac{1}{2} (\gamma_{31}^r)^2 \right. \\ &\left. \left. - \frac{1}{2} (\gamma_{32}^r)^2 \right] \right) + \mu(1 + \gamma_{22}^r)^2; \end{aligned} \quad (4.459)$$

$$\frac{\partial \tau_{21}^r}{\partial \gamma_{31}^r} = \bar{E}(1 - \nu)\gamma_{21}^r\gamma_{31}^r + \mu(1 + \gamma_{22}^r)\gamma_{32}^r; \quad (4.460)$$

$$\frac{\partial \tau_{31}^r}{\partial \gamma_{11}^r} = 2\mu(1 + \gamma_{11}^r)\gamma_{31}^r + \mu\gamma_{32}^r\gamma_{12}^r; \quad (4.461)$$

$$\frac{\partial \tau_{31}^r}{\partial \gamma_{21}^r} = 2\mu\gamma_{21}^r\gamma_{31}^r + \mu\gamma_{32}^r(1 + \gamma_{22}^r); \quad (4.462)$$

$$\frac{\partial \tau_{31}^r}{\partial \gamma_{31}^r} = \mu + 2\mu \left(\frac{1}{2} [(\gamma_{11}^r)^2 + 2\gamma_{11}^r + (\gamma_{21}^r)^2 + (\gamma_{31}^r)^2] - \frac{1}{2} (\gamma_{31}^r)^2 \right). \quad (4.463)$$

Conforme citado anteriormente, serão agora apenas apresentados as componentes dos outros tensores $\tilde{\mathbf{C}}_{\alpha\beta}^r$. Começemos com as componentes de $\tilde{\mathbf{C}}_{12}^r$, sendo estas

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{11}^r}{\partial \gamma_{12}^r} &= \bar{E}\nu\gamma_{12}^r(1 + \gamma_{11}^r) + \mu[\gamma_{11}^r\gamma_{12}^r + \gamma_{12}^r + \gamma_{21}^r\gamma_{22}^r + \gamma_{21}^r + \gamma_{31}^r\gamma_{32}^r] \\ &+ \mu\gamma_{11}^r\gamma_{12}^r + \mu; \end{aligned} \quad (4.464)$$

$$\frac{\partial \tau_{11}^r}{\partial \gamma_{22}^r} = \bar{E}\nu(1 + \gamma_{22}^r)(1 + \gamma_{11}^r) + \mu\gamma_{12}^r\gamma_{21}^r; \quad (4.465)$$

$$\frac{\partial \tau_{11}^r}{\partial \gamma_{32}^r} = \bar{E}(\nu - 1)\gamma_{32}^r(1 + \gamma_{11}^r) + \mu\gamma_{31}^r\gamma_{12}^r; \quad (4.466)$$

$$\frac{\partial \tau_{21}^r}{\partial \gamma_{12}^r} = \bar{E}\nu\gamma_{12}^r\gamma_{21}^r + \mu(1 + \gamma_{22}^r)(1 + \gamma_{11}^r); \quad (4.467)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{21}^r}{\partial \gamma_{22}^r} = & \bar{E}\nu(1 + \gamma_{22}^r)(\gamma_{21}^r) + \mu[\gamma_{11}^r\gamma_{12}^r + \gamma_{12}^r + \gamma_{21}^r\gamma_{22}^r + \gamma_{21}^r + \gamma_{31}^r\gamma_{32}^r] \\ & + \mu(1 + \gamma_{22}^r)\gamma_{21}^r; \end{aligned} \quad (4.468)$$

$$\frac{\partial \tau_{21}^r}{\partial \gamma_{32}^r} = \bar{E}(\nu - 1)\gamma_{32}^r\gamma_{21}^r + \mu(1 + \gamma_{22}^r)\gamma_{31}^r; \quad (4.469)$$

$$\frac{\partial \tau_{31}^r}{\partial \gamma_{12}^r} = \mu\gamma_{32}^r(1 + \gamma_{11}^r); \quad (4.470)$$

$$\frac{\partial \tau_{31}^r}{\partial \gamma_{22}^r} = \mu\gamma_{32}^r\gamma_{21}^r; \quad (4.471)$$

$$\frac{\partial \tau_{31}^r}{\partial \gamma_{32}^r} = \mu(\gamma_{11}^r\gamma_{12}^r + \gamma_{12}^r + \gamma_{21}^r\gamma_{22}^r + \gamma_{21}^r). \quad (4.472)$$

Apresenta-se agora as componentes de $\tilde{\mathbf{C}}_{21}^r$, sendo estas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{11}^r}{\partial \gamma_{11}^r} = & \bar{E}\nu(\gamma_{11}^r + 1)\gamma_{12}^r + \mu[\gamma_{11}^r\gamma_{12}^r + \gamma_{12}^r + \gamma_{21}^r\gamma_{22}^r + \gamma_{21}^r + \gamma_{31}^r\gamma_{32}^r] \\ & + \mu(1 + \gamma_{11}^r)\gamma_{12}^r; \end{aligned} \quad (4.473)$$

$$\frac{\partial \tau_{12}^r}{\partial \gamma_{21}^r} = \bar{E}\nu\gamma_{21}^r\gamma_{12}^r + \mu(1 + \gamma_{11}^r)(1 + \gamma_{22}^r); \quad (4.474)$$

$$\frac{\partial \tau_{12}^r}{\partial \gamma_{31}^r} = \mu(1 + \gamma_{11}^r)\gamma_{32}^r; \quad (4.475)$$

$$\frac{\partial \tau_{22}^r}{\partial \gamma_{11}^r} = \bar{E}\nu\gamma_{11}^r(1 + \gamma_{22}^r) + \mu\gamma_{21}^r\gamma_{12}^r; \quad (4.476)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{22}^r}{\partial \gamma_{21}^r} = & \bar{E}\nu\gamma_{21}^r(1 + \gamma_{22}^r) + \mu[\gamma_{11}^r\gamma_{12}^r + \gamma_{12}^r + \gamma_{21}^r\gamma_{22}^r + \gamma_{21}^r + \gamma_{31}^r\gamma_{32}^r] \\ & + \mu\gamma_{21}^r(1 + \gamma_{22}^r); \end{aligned} \quad (4.477)$$

$$\frac{\partial \tau_{22}^r}{\partial \gamma_{31}^r} = \mu\gamma_{21}^r\gamma_{32}^r; \quad (4.478)$$

$$\frac{\partial \tau_{32}^r}{\partial \gamma_{11}^r} = \mu\gamma_{31}^r\gamma_{12}^r; \quad (4.479)$$

$$\frac{\partial \tau_{32}^r}{\partial \gamma_{21}^r} = \mu\gamma_{31}^r(1 + \gamma_{22}^r); \quad (4.480)$$

$$\frac{\partial \tau_{32}^r}{\partial \gamma_{31}^r} = \mu[\gamma_{11}^r\gamma_{12}^r + \gamma_{12}^r + \gamma_{21}^r\gamma_{22}^r + \gamma_{21}^r]. \quad (4.481)$$

Por fim, apresenta-se as componentes de $\tilde{\mathcal{C}}_{22}^r$, sendo estas

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{12}^r}{\partial \gamma_{12}^r} = \bar{E} \left(\frac{1}{2} [(\gamma_{22}^r)^2 + 2\gamma_{22}^r + (\gamma_{12}^r)^2 + (\gamma_{32}^r)^2]_{22} \right. \\ \left. + \nu \left[\frac{1}{2} [(\gamma_{11}^r)^2 + 2\gamma_{11}^r + (\gamma_{21}^r)^2 + (\gamma_{31}^r)^2] - \frac{1}{2} (\gamma_{31}^r)^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} (\gamma_{32}^r)^2 \right] \right) + \bar{E} (\gamma_{12}^r)^2 + \mu (1 + \gamma_{11}^r)^2; \end{aligned} \quad (4.482)$$

$$\frac{\partial \tau_{12}^r}{\partial \gamma_{22}^r} = \bar{E} (1 + \gamma_{22}^r) \gamma_{12}^r + \mu (1 + \gamma_{11}^r) \gamma_{21}^r; \quad (4.483)$$

$$\frac{\partial \tau_{12}^r}{\partial \gamma_{32}^r} = \bar{E} (1 - \nu) \gamma_{32}^r \gamma_{12}^r + \mu (1 + \gamma_{11}^r) \gamma_{31}^r; \quad (4.484)$$

$$\frac{\partial \tau_{22}^r}{\partial \gamma_{12}^r} = \bar{E} \gamma_{12}^r (1 + \gamma_{22}^r) + \mu \gamma_{21}^r (1 + \gamma_{11}^r); \quad (4.485)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{22}^r}{\partial \gamma_{22}^r} = \bar{E} (1 + \gamma_{22}^r)^2 \\ + \bar{E} \left(\frac{1}{2} [(\gamma_{22}^r)^2 + 2\gamma_{22}^r + (\gamma_{12}^r)^2 + (\gamma_{32}^r)^2] \right. \\ \left. + \nu \left[\frac{1}{2} [(\gamma_{11}^r)^2 + 2\gamma_{11}^r + (\gamma_{21}^r)^2 + (\gamma_{31}^r)^2] - \frac{1}{2} (\gamma_{31}^r)^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} (\gamma_{32}^r)^2 \right] \right) + \mu (\gamma_{21}^r)^2; \end{aligned} \quad (4.486)$$

$$\frac{\partial \tau_{22}^r}{\partial \gamma_{32}^r} = \bar{E} (1 - \nu) \gamma_{32}^r (1 + \gamma_{22}^r) + \mu \gamma_{21}^r \gamma_{31}^r; \quad (4.487)$$

$$\frac{\partial \tau_{32}^r}{\partial \gamma_{12}^r} = 2\mu \gamma_{12}^r \gamma_{32}^r + \mu \gamma_{31}^r (1 + \gamma_{11}^r); \quad (4.488)$$

$$\frac{\partial \tau_{32}^r}{\partial \gamma_{22}^r} = 2\mu (1 + \gamma_{22}^r) (\gamma_{32}^r) + \mu \gamma_{31}^r \gamma_{21}^r; \quad (4.489)$$

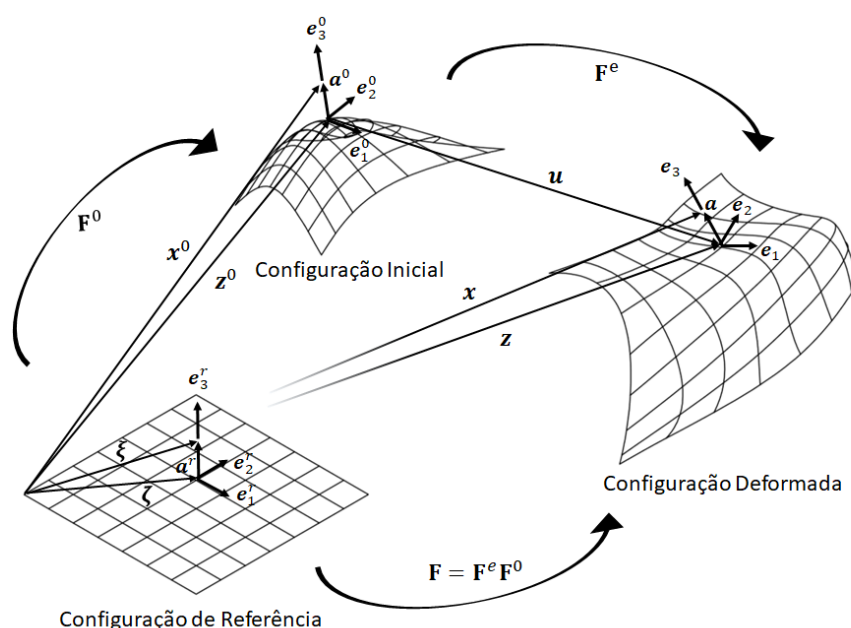
$$\frac{\partial \tau_{32}^r}{\partial \gamma_{32}^r} = \mu + 2\mu \left(\frac{1}{2} [(\gamma_{22}^r)^2 + 2\gamma_{22}^r + (\gamma_{12}^r)^2 + (\gamma_{32}^r)^2] - \frac{1}{2} (\gamma_{32}^r)^2 \right). \quad (4.490)$$

5 Modelo com curvaturas iniciais sem variação de espessura

O modelo de casca apresentado anteriormente assume que a configuração inicial trata-se de um conjunto de planos contíguos consecutivos, conforme apresentado por Campello (2005). Esta consideração, no entanto, não permite a representação com fidelidade de modelos com geometrias curvas, a não ser que a superfície curva seja consideravelmente discretizada em elementos planos. Sendo assim, este capítulo apresenta uma adaptação da formulação apresentada na seção 4 que possibilita a consideração de curvaturas na malha de elementos finitos. A formulação aqui apresentada foi inicialmente apresentada por Campello (2005).

A lógica principal da adaptação do modelo original para o presente nesta seção consiste na consideração da existência de um plano indeformado ao qual se referencia a formulação, enquanto existe a curvatura na configuração inicial da geometria. Esta lógica é representada visualmente na Figura 6.

Figura 6 – Configurações da casca considerando curvaturas iniciais



Fonte: Autor, 2019.

Observando a Figura 4 percebe-se como diferença principal a consideração de um plano curvo na configuração inicial, sendo esta a representação da geometria real inicialmente curva. A adição desta nova configuração reverbera na construção dos vetores de posição e, conseqüentemente, na construção da teoria obtida anteriormente.

5.1 Cinemática

Conforme apresentado na Figura 6, observa-se que é introduzida uma superfície virtual de modo a ser a configuração de referência base na formulação. A configuração inicial será

então obtida a partir da deformação da configuração de referênci e a configuração deformada a partir da deformação da coniguração inicial.

Assim como a teoria sem consideração de curvatura inicial, considere que $\{\mathbf{e}_1^r, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r\}$ formam uma base ortonormal na confiuração de referência, com $\{\boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\zeta}_2, \mathbf{a}^r\}$ como as coordenadas nestas direções, com \mathbf{e}_3^r normal ao plano Ω .

Um ponto qualquer no plano Ω será descrito por

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{a}^r, \quad (5.1)$$

onde $\boldsymbol{\zeta} = \xi_\alpha \mathbf{e}_\alpha^r$ são as coordenadas de um ponto material no plano médio da casca e $\mathbf{a}^r = \zeta \mathbf{e}_3^r$ se trata da direção da fibra deste ponto. A espessura h da casca na configuração de referência é considerada através do parâmetro $\zeta \in H = [-h^b, h^t]$, sendo $h = h^b + h^t$.

Um ponto no plano médio da casca na configuração inicial Ω° será dado por

$$\mathbf{z}^\circ = \mathbf{z}^\circ(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2), \quad (5.2)$$

onde a notação $(\cdot)^\circ$ indica grandezas que se localizam na configuração inicial.

O diretor da casca na configuração inicial será dado por

$$\mathbf{a}^\circ = \mathbf{Q}^\circ \mathbf{a}^r, \quad (5.3)$$

onde o tensor \mathbf{Q}° trata-se do tensor das rotações necessário para transitar da configuração de referência para a configuração inicial do problema, conhecida a partir da geometria conhecida do elemento. Vale ressaltar que neste momento impõe-se um mapeamento do tipo Kirchhoff-Love, de forma que \mathbf{a}° seja ortogonal a Ω° .

A seguinte base ortonormal local da configuração inicial é definida por

$$\mathbf{e}_1^\circ = \frac{\mathbf{z}_{,1}^\circ}{\|\mathbf{z}_{,1}^\circ\|}; \quad (5.4)$$

$$\mathbf{e}_2^\circ = \mathbf{e}_3^\circ \times \mathbf{e}_1^\circ; \quad (5.5)$$

$$\mathbf{e}_3^\circ = \frac{\mathbf{z}_{,1}^\circ \times \mathbf{z}_{,2}^\circ}{\|\mathbf{z}_{,1}^\circ \times \mathbf{z}_{,2}^\circ\|}, \quad (5.6)$$

sendo o plano definido por \mathbf{e}_1° e \mathbf{e}_2° tangente a Ω° e \mathbf{e}_3° normal à superfície. Analogamente ao apresentado na seção 0, pode-se escrever a relação

$$\mathbf{e}_i^\circ = \mathbf{Q}^\circ \mathbf{e}_i^r, \quad (5.7)$$

definindo então que

$$\mathbf{Q}^\circ = \mathbf{e}_i^\circ \otimes \mathbf{e}_i^r. \quad (5.8)$$

Definido o tensor da rotação, define-se agora o tensor de transformação \mathbf{F}° . Qualquer ponto na configuração inicial pode ser expresso por

$$\mathbf{x}^\circ = \mathbf{z}^\circ + \mathbf{a}^\circ. \quad (5.9)$$

A derivação deste vetor em relação ao vetor da posição de qualquer ponto na configuração de referência ξ resultará no tensor das transformações

$$\mathbf{F}^\circ = \frac{\partial \mathbf{x}^\circ}{\partial \xi_\alpha} \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \frac{\partial \mathbf{x}^\circ}{\partial \zeta} \otimes \mathbf{e}_3^r \quad (5.10)$$

ou, considerando as equações (5.7) e (5.8),

$$\mathbf{F}^\circ = (\mathbf{z}_{,\alpha}^\circ + \mathbf{Q}_{,\alpha}^\circ \mathbf{Q}^{\circ T} \mathbf{a}^\circ) \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{a}'^\circ \otimes \mathbf{e}_3^r. \quad (5.11)$$

A equação acima pode ainda ser reescrita como

$$\mathbf{F}^\circ = (\boldsymbol{\eta}_\alpha^\circ + \mathbf{K}_\alpha^\circ \mathbf{a}^\circ) \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{Q}^\circ, \quad (5.12)$$

onde

$$\boldsymbol{\eta}_\alpha^\circ = \mathbf{z}_{,\alpha}^\circ - \mathbf{e}_\alpha^\circ \quad (5.13)$$

e

$$\mathbf{K}_\alpha^\circ = \mathbf{Q}_{,\alpha}^\circ \mathbf{Q}^{\circ T} \quad (5.14)$$

são as deformações iniciais das seções transversais. Vale ressaltar que devido ao fato do vetor \mathbf{a}° ser obrigatoriamente normal à superfície, devido ao mapeamento de Kirchhoff-Love, não existe cisalhamento transversal inicial.

Definida a forma inicial do tensor das transformações, determina-se agora sua forma em função dos vetores base dos planos relativos à configuração de referência e inicial, começando-se pela determinação dos tensores \mathbf{K}_α° . Considerando a equação (5.8), a equação (5.14) pode ser reestruturada como

$$\mathbf{K}_\alpha^\circ = \mathbf{e}_{i,\alpha}^\circ \otimes \mathbf{e}_i^\circ, \quad (5.15)$$

descrevendo o giro específico inicial do diretor. Os vetores $\mathbf{e}_{i,\alpha}^\circ$ podem ser obtidos a partir da derivação das equações apresentadas em (5.4) em relação a ξ_α e utilizando propriedades de produtos vetoriais, obtendo que

$$\mathbf{e}_{1,\alpha}^\circ = \frac{1}{\|\mathbf{z}_{,1}^\circ\|} (\mathbf{I} - \mathbf{e}_1^\circ \otimes \mathbf{e}_1^\circ) \mathbf{z}_{,1\alpha}^\circ; \quad (5.16)$$

$$\mathbf{e}_{2,\alpha}^\circ = \mathbf{e}_3^\circ \times \mathbf{e}_{1,\alpha}^\circ - \mathbf{e}_1^\circ \times \mathbf{e}_{3,\alpha}^\circ; \quad (5.17)$$

$$\mathbf{e}_{3,\alpha}^\circ = \frac{1}{\|\mathbf{z}_{,1}^\circ \times \mathbf{z}_{,2}^\circ\|} (\mathbf{I} - \mathbf{e}_3^\circ \otimes \mathbf{e}_3^\circ) (\mathbf{z}_{,1}^\circ \times \mathbf{z}_{,2\alpha}^\circ - \mathbf{z}_{,2}^\circ \times \mathbf{z}_{,1\alpha}^\circ). \quad (5.18)$$

Sendo \mathbf{K}_α° tensores anti-simétricos, estes possuem vetores axiais de giro dados por

$$\mathbf{k}_\alpha^\circ = (\mathbf{e}_3^\circ \cdot \mathbf{e}_{2,\alpha}^\circ) \mathbf{e}_1^\circ + (\mathbf{e}_1^\circ \cdot \mathbf{e}_{3,\alpha}^\circ) \mathbf{e}_2^\circ + (\mathbf{e}_2^\circ \cdot \mathbf{e}_{1,\alpha}^\circ) \mathbf{e}_3^\circ, \quad (5.19)$$

obtidos a partir da desconstrução do tensor antisimétrico como um produto vetorial.

Introduzindo os equivalente retrorotacionados de (5.19) e (5.13),

$$\boldsymbol{\eta}_\alpha^{\circ r} = \mathbf{Q}^{\circ T} \boldsymbol{\eta}_\alpha^\circ = \mathbf{Q}^{\circ T} \mathbf{z}_{,\alpha}^\circ - \mathbf{e}_\alpha^r \quad (5.20)$$

e

$$\mathbf{k}_\alpha^{\circ r} = \mathbf{Q}^{\circ T} \mathbf{k}_\alpha^\circ = (\mathbf{e}_3^\circ \cdot \mathbf{e}_{2,\alpha}^\circ) \mathbf{e}_1^r + (\mathbf{e}_1^\circ \cdot \mathbf{e}_{3,\alpha}^\circ) \mathbf{e}_2^r + (\mathbf{e}_2^\circ \cdot \mathbf{e}_{1,\alpha}^\circ) \mathbf{e}_3^r \quad (5.21)$$

na equação (5.12), podemos obter o tensor

$$\mathbf{F}^\circ = \mathbf{Q}^\circ (\mathbf{I} + \boldsymbol{\gamma}_\alpha^{\circ r} \otimes \mathbf{e}_\alpha^r), \quad (5.22)$$

onde

$$\boldsymbol{\gamma}_\alpha^{\circ r} = \boldsymbol{\eta}_\alpha^{\circ r} + \mathbf{k}_\alpha^{\circ r} \times \mathbf{a}^r. \quad (5.23)$$

Introduzindo os vetores

$$\mathbf{f}_\alpha^{\circ r} = \mathbf{e}_\alpha^r + \boldsymbol{\gamma}_\alpha^{\circ r}. \quad (5.24)$$

e

$$\mathbf{f}_3^{\circ r} = \mathbf{e}_3^r, \quad (5.25)$$

podemos reescrever (5.22) como

$$\mathbf{F}^\circ = \mathbf{Q}^\circ \mathbf{F}^{\circ r} = \mathbf{Q}^\circ (\mathbf{f}_\alpha^{\circ r} \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{f}_3^{\circ r} \otimes \mathbf{e}_3^r), \quad (5.26)$$

sendo $\mathbf{F}^{\circ r}$ o tensor das transformações da configuração de referência para a configuração inicial retrorotacionado, daqui para a frente denominado de gradiente inicial retrorotacionado.

Definida a transformação da configuração de referência para a configuração inicial, agora determina-se a transformação da configuração inicial para a configuração de referência. Inicialmente define-se uma base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ na configuração deformada, sendo \mathbf{e}_α^r não necessariamente tangente à superfície média. Observando a Figura 6, pode-se afirmar que a posição de um ponto qualquer da casca na configuração deformada será dada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{a}, \quad (5.27)$$

onde \mathbf{z} representa a posição de um ponto na superfície média deformada da casca e \mathbf{a} o diretor da casca neste ponto, com \mathbf{a} na mesma direção de \mathbf{e}_3 , conforme apresentado ao longo da seção.

A partir da Figura 6 pode-se ainda extrair a relação

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}^\circ + \mathbf{u} \quad (5.28)$$

e, considerando a correlação entre as configurações pelo tensor das rotações,

$$\mathbf{a} = \mathbf{Q}^e \mathbf{a}^\circ, \quad (5.29)$$

onde o vetor \mathbf{u} é o vetor de deslocamento entre as configurações iniciais e deformadas e \mathbf{Q}^e o tensor das rotações entre a configuração inicial e a configuração deformada, daqui para a frente referido como tensor rotação efetivo. Vale ressaltar que o comprimento de \mathbf{a} não se altera, sendo este apenas girado. O tensor rotação efetivo pode ser escrito pela equação de Euler-Rodrigues como

$$\mathbf{Q}^e = \mathbf{I} + h_1(\theta)\boldsymbol{\theta} + h_2(\theta)\boldsymbol{\theta}^2, \quad (5.30)$$

onde $\boldsymbol{\theta} = \text{skew}(\boldsymbol{\theta})$, $\theta = \|\boldsymbol{\theta}\|$ e $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de rotação efetivo.

A base do sistema ortonormal na configuração deformada é obtida pela rotação do sistema ortonormal na configuração inicial, ou seja, $\mathbf{e}_i = \mathbf{Q}^e \mathbf{e}_i^\circ$. Esta consideração faz com que o vetor diretor da casca na configuração deformada esteja alinhado com o eixo normal à superfície média da casca, ou seja,

$$\mathbf{a} = \zeta \mathbf{e}_3. \quad (5.31)$$

Como as rotações são passíveis de composição, podemos afirmar que

$$\mathbf{a} = \mathbf{Q} \mathbf{a}^r, \quad (5.32)$$

onde

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^e \mathbf{Q}^\circ \quad (5.33)$$

e este é denominado de tensor rotação total, já que descreve a rotação do vetor diretor da casca desde a configuração de referência, passando pela configuração inicial e, finalmente, atingindo a configuração deformada.

O tensor da transformação total \mathbf{F} é obtido pela derivação de \mathbf{x} com relação a $\boldsymbol{\xi}$. Considerando (5.27), (5.28), (5.32) e (5.33) o tensor \mathbf{F} assumirá a forma

$$\mathbf{F} = (\mathbf{z}_{,\alpha}^\circ + \mathbf{u}_{,\alpha} + \mathbf{Q}_{,\alpha} \mathbf{Q}^T \mathbf{a}) \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3^r \quad (5.34)$$

ou,

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\eta}_\alpha + \mathbf{K}_\alpha \mathbf{a}) \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{Q}, \quad (5.35)$$

sendo

$$\boldsymbol{\eta}_\alpha = \mathbf{z}_{,\alpha}^\circ + \mathbf{u}_{,\alpha} - \mathbf{e}_\alpha \quad (5.36)$$

e,

$$\mathbf{K}_\alpha = \mathbf{Q}_{,\alpha} \mathbf{Q}^T. \quad (5.37)$$

Considerando a composição de rotações apresentada em (5.33), a equação (5.37) pode ser reescrita como

$$\mathbf{K}_\alpha = \mathbf{Q}_{,\alpha}^e \mathbf{Q}^{eT} + \mathbf{Q}^e (\mathbf{Q}_{,\alpha}^\circ \mathbf{Q}^{\circ T}) \mathbf{Q}^{eT} = \mathbf{K}_\alpha^e + \mathbf{Q}^e \mathbf{K}_\alpha^\circ \mathbf{Q}^{eT}. \quad (5.38)$$

Após a utilização de propriedades dos tensores anti-simétricos, o vetor axial do tensor antisimétrico \mathbf{K}_α será obtido como

$$\mathbf{k}_\alpha = \mathbf{k}_\alpha^e + \mathbf{Q}^e \mathbf{k}_\alpha^\circ, \quad (5.39)$$

onde, analogamente ao obtido na equação (2.61), temos que

$$\mathbf{k}_\alpha^e = \mathbf{axial}(\mathbf{K}_\alpha^e) = \mathbf{\Gamma} \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}, \quad (5.40)$$

sendo que estes vetores acima representam as rotações específicas efetivas do vetor diretor da casca. Os equivalentes retrorotacionados dos vetores \mathbf{k}_α^e são

$$\mathbf{k}_\alpha^{er} = \mathbf{Q}^T \mathbf{k}_\alpha^e = \mathbf{Q}^T \mathbf{\Gamma} \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}, \quad (5.41)$$

e, para os vetores apresentados nas equações (5.36) e (5.39), os equivalentes retrorotacionados são, respectivamente,

$$\boldsymbol{\eta}_\alpha^r = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\eta}_\alpha = \mathbf{Q}^T (\mathbf{z}_{,\alpha}^\circ + \mathbf{u}_{,\alpha}) - \mathbf{e}_\alpha^r, \quad (5.42)$$

e

$$\mathbf{k}_\alpha^r = \mathbf{Q}^T \mathbf{k}_\alpha = \mathbf{k}_\alpha^{er} + \mathbf{k}_\alpha^{\circ r}. \quad (5.43)$$

Considerando (5.42) e (5.43) pode-se reescrever (5.35) como

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q}(\mathbf{I} + \boldsymbol{\gamma}_\alpha^r \otimes \mathbf{e}_\alpha^r), \quad (5.44)$$

sendo

$$\boldsymbol{\gamma}_\alpha^r = \boldsymbol{\eta}_\alpha^r + \mathbf{k}_\alpha^r \times \mathbf{a}^r, \quad (5.45)$$

Definindo os vetores

$$\mathbf{f}_\alpha^r = \boldsymbol{\gamma}_\alpha^r + \mathbf{e}_\alpha^r \quad (5.46)$$

e

$$\mathbf{f}_3^r = \mathbf{e}_3^r. \quad (5.47)$$

a equação (5.44) pode ser reescrita como

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q} \mathbf{F}^r, \quad (5.48)$$

sendo

$$\mathbf{F}^r = \mathbf{f}_\alpha^r \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{f}_3^r \otimes \mathbf{e}_3^r \quad (5.49)$$

o tensor de transformação total retrorotacionado.

Obtidos os tensores de transformação total e inicial, pode-se, através da superposição dos movimentos, definir o tensor da transformação efetiva como

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^\circ \quad (5.50)$$

e, com o objetivo de obter \mathbf{F}^e , pode-se afirmar que

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{F} \mathbf{F}^{\circ-1}. \quad (5.51)$$

Considerando (5.26), e de forma análoga ao realizado em (4.287), a inversa do tensor \mathbf{F}° pode ser obtido em função de produtos escalares e vetoriais como

$$\mathbf{F}^{\circ-1} = \mathbf{J}^{\circ-1} (\mathbf{e}_i^r \otimes \mathbf{g}_i^{\circ r}) \mathbf{Q}^{\circ T}, \quad (5.52)$$

onde

$$\mathbf{J}^\circ = \det(\mathbf{F}^\circ) = \mathbf{e}_3^r (\mathbf{f}_1^{\circ r} \times \mathbf{f}_2^{\circ r}), \quad (5.53)$$

$$\mathbf{g}_1^{\circ r} = (\mathbf{f}_2^{\circ r} \times \mathbf{e}_3^r), \quad (5.54)$$

$$\mathbf{g}_2^{\circ r} = (\mathbf{e}_3^r \times \mathbf{f}_1^{\circ r}), \quad (5.55)$$

$$\mathbf{g}_3^{\circ r} = (\mathbf{f}_1^{\circ r} \times \mathbf{f}_2^{\circ r}). \quad (5.56)$$

Substituindo (5.52), (5.49) em (5.51) e tendo em mente (5.48), podemos escrever que

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{Q} (\mathbf{f}_i^{er} \otimes \mathbf{e}_i^\circ) \quad (5.57)$$

ou, considerando a correlação entre os vetores das bases das configurações de referência e inicial descrita em (5.7),

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{Q} (\mathbf{f}_i^{er} \otimes \mathbf{e}_i^r) \mathbf{Q}^{\circ T}, \quad (5.58)$$

sendo

$$\mathbf{f}_\alpha^{er} = \mathbf{J}^{\circ-1} (\mathbf{e}_\alpha^r \otimes \mathbf{g}_\beta^{\circ r}) \mathbf{f}_\beta^r \quad \text{e} \quad \mathbf{f}_3^{er} = \mathbf{f}_3^r. \quad (5.59)$$

Levando em conta os vetores apresentados na equação acima, pode-se construir as deformações específicas como

$$\boldsymbol{\gamma}_\alpha^{er} = \mathbf{f}_\alpha^{er} - \mathbf{e}_\alpha^r = \mathbf{J}^{\circ-1} (\mathbf{e}_\alpha^r \otimes \mathbf{g}_\beta^{\circ r}) (\mathbf{e}_\beta^r + \boldsymbol{\gamma}_\beta^r) - \mathbf{e}_\alpha^r. \quad (5.60)$$

Determina-se agora a derivada do tensor das transformações em relação ao tempo, ou seja $\dot{\mathbf{F}}$. O processo para obtenção da equação desta derivação e de suas componentes é análogo ao detalhado nas seções 4.3.2 e 0. A derivação fornece

$$\dot{\mathbf{F}} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{F} + \mathbf{Q} (\dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r \otimes \mathbf{e}_\alpha^r), \quad (5.61)$$

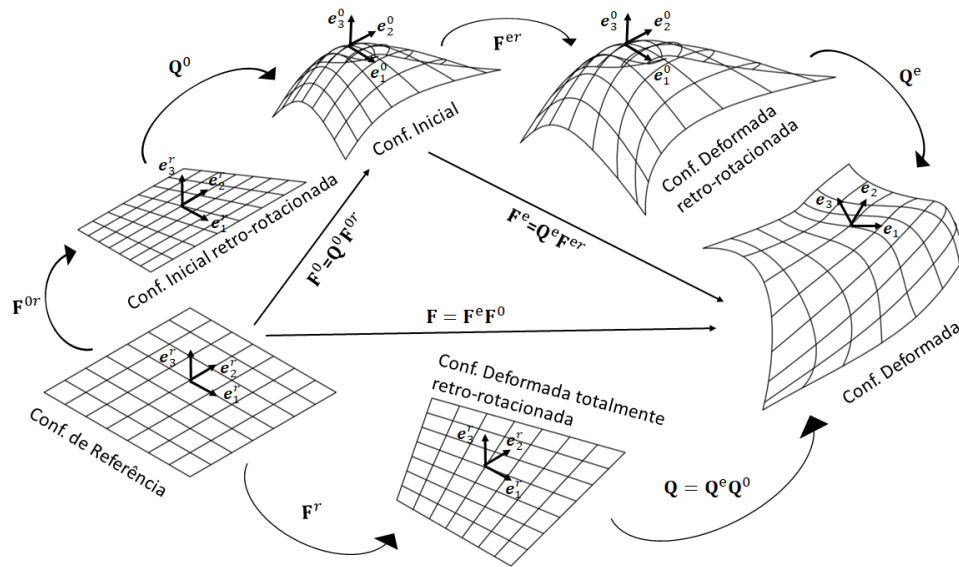
onde $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T = \dot{\mathbf{Q}}^e \mathbf{Q}^{eT}$ trata da velocidade angular do diretor e

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r = \dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha^r + \mathbf{k}_\alpha^r \times \mathbf{a}^r \quad (5.62)$$

pode ser obtido da derivação de (5.45), lembrando que o vetor \mathbf{a}^r não varia ao longo do tempo, já que este se encontra na configuração de referência. As derivadas apresentadas serão obtidas conforme apresentado em (4.48) e (4.65).

Definidos todos os tensores de rotações e transformações envolvidos na cinemática da casca, podemos apresentar as configurações e subconfigurações envolvidas na teoria conforme apresentado na Figura 7.

Figura 7 - Esquema de configurações e sub-configurações



Fonte: Autor, 2019.

5.2 Estática

5.2.1 Potência interna

A demonstração da potência interna da casca inicia-se pela redeterminação dos tensores de tensão de Piola-Kirchhoff.

O primeiro tensor de Piola-Kirchhoff a ser explicitado trata-se de

$$\mathbf{P}^e = \mathbf{J}^e \mathbf{T} \mathbf{F}^{e-T}, \quad (5.63)$$

tensor que descrever a tensão apresentada durante a passagem da configuração inicial para a configuração deformada. Vale lembrar que o tensor \mathbf{T} é o tensor das tensões de Cauchy. Analogamente, podemos descrever o tensão de Piola-Kirchhoff total por

$$\mathbf{P} = \mathbf{J} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T}, \quad (5.64)$$

onde

$$J = \det(\mathbf{F}) = J^e J^\circ. \quad (5.65)$$

Isolando o tensor de Cauchy na equação (5.62) temos que

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{P}^e \mathbf{F} e^T}{J^e}. \quad (5.66)$$

Substituindo (5.50), (5.65) e (5.66) em (5.64), temos

$$\mathbf{P} = J^\circ \mathbf{P}^e \mathbf{F}^{\circ-T}. \quad (5.67)$$

Os tensores de Piola-Kirchhoff podem ser reescritos em função dos vetores de tensão como

$$\mathbf{P}^e = \boldsymbol{\tau}_i^e \otimes \mathbf{e}_i^\circ = \mathbf{Q} \boldsymbol{\tau}_i^{er} \otimes \mathbf{e}_i^\circ; \quad (5.68)$$

$$\mathbf{P} = \boldsymbol{\tau}_i \otimes \mathbf{e}_i^r = \mathbf{Q} \boldsymbol{\tau}_i^r \otimes \mathbf{e}_i^r. \quad (5.69)$$

Substituindo (5.52) em (5.67), considerando a construção estabelecida entre o tensor de Piola-Kirchhoff e os vetores de tensão nas equações (5.68) e (5.69) e após algumas manipulações, podemos escrever que

$$\boldsymbol{\tau}_\alpha^r = (\mathbf{e}_\beta^r \cdot \mathbf{g}_\alpha^{\circ r}) \boldsymbol{\tau}_\beta^{er} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\tau}_3^r = J^\circ \boldsymbol{\tau}_3^{er}. \quad (5.70)$$

Observando a equação acima, percebe-se que foi estabelecida uma correlação entre as tensões totais retro-rotacionadas em a partir das tensões efetivas. Neste ponto, introduzimos a hipótese de tensão plana e obtemos os tensores de Piola-Kirchhoff como

$$\mathbf{P}^e = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_i^e \otimes \mathbf{e}_i^\circ = \mathbf{Q} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_i^{er} \otimes \mathbf{e}_i^\circ; \quad (5.71)$$

$$\mathbf{P} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_i \otimes \mathbf{e}_i^r = \mathbf{Q} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_i^r \otimes \mathbf{e}_i^r \quad (5.72)$$

e os vetores de tensão

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r = (\mathbf{e}_\beta^r \cdot \mathbf{g}_\alpha^{\circ r}) \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\beta^{er} \quad \text{e} \quad \tilde{\boldsymbol{\tau}}_3^r = J^\circ \tilde{\boldsymbol{\tau}}_3^{er}. \quad (5.73)$$

Considerando a conjugação energética entre o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff e o tensor das transformações derivado em relação ao tempo, conforme apresentado na seção 4.4.1, podemos afirmar que a potência dos esforços internos por unidade de volume V° da configuração inicial será dada por

$$\mathbf{P}^e : \dot{\mathbf{F}}^e = J^{\circ-1} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \quad (5.74)$$

e sua integração ao longo do volume V° será dada por

$$P_{int} = \int_{V^\circ} \mathbf{P}^e : \dot{\mathbf{F}}^e dV^\circ = \int_{V^\circ} J^{\circ-1} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dV^\circ = \int_{V^r} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dV^r, \quad (5.75)$$

já que $dV^\circ = \int^\circ dV^r$. Procedendo de forma análoga ao apresentado na seção 4.4.1, podemos utilizar as equações (5.61) e (5.72) para obter

$$\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r. \quad (5.76)$$

Assim como o apresentado na seção 4.4.1, ressalta-se que não existe potência associada à tensão total $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_3^r$, já que a teoria proposta assume que não existe variação da espessura da casca. Integrando a equação (5.76) ao longo da espessura da casca, teremos

$$\int_H \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} d\zeta = \mathbf{n}_\alpha^r \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha^r + \mathbf{m}_\alpha^r \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^r, \quad (5.77)$$

onde

$$\mathbf{n}_\alpha^r = \int_{V^\circ} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r d\zeta, \quad (5.78)$$

e

$$\mathbf{m}_\alpha^r = \int_{V^\circ} (\mathbf{a}^r \times \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r) d\zeta, \quad (5.79)$$

são, respectivamente, as forças generalizadas retrorotacionadas que atuam na seção transversal com normal \mathbf{e}_α^r e os momento generalizados na mesma seção, sendo ambos por unidade de comprimento da configuração de referência. Vale ressaltar que os vetores de tensão ($\tilde{\boldsymbol{\tau}}_i^r$), esforços generalizados (\mathbf{n}_α^r e \mathbf{m}_α^r) e deformações ($\boldsymbol{\eta}_\alpha^r, \boldsymbol{\kappa}_\alpha^r, \boldsymbol{\gamma}_i^r$) não são afetados por movimentos superpostos de corpo rígido.

Definindo

$$\boldsymbol{\sigma}^r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1^r \\ \boldsymbol{\sigma}_2^r \end{bmatrix}; \quad (5.80)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1^r \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2^r \end{bmatrix}; \quad (5.81)$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}, \quad (5.82)$$

como vetores que agrupam as grandezas da seção transversal, e considerando que

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha^r = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_\alpha^r \\ \mathbf{m}_\alpha^r \end{bmatrix}; \quad (5.83)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_\alpha^r \\ \boldsymbol{\kappa}_\alpha^r \end{bmatrix}, \quad (5.84)$$

podemos reescrever (5.77) como

$$\int_H \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} d\zeta = \boldsymbol{\sigma}_\alpha^r \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha^r, \quad (5.85)$$

onde

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha^r = \boldsymbol{\Psi} \Delta_\alpha \dot{\boldsymbol{d}}, \quad (5.86)$$

com os operadores $\boldsymbol{\Psi}$ e Δ_α idênticos ao apresentado nas equações (4.107) e (4.110).

A equação de potência interna apresentada em (5.75) pode ser reescrita como

$$P_{int} = \int_\Omega \int_H \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dV^r = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha^r d\Omega \quad (5.87)$$

ao se considerar a equação (5.85).

5.2.2 Potência externa

Determinada a potência interna da casca, foquemos agora na obtenção da potência externa. Considere a configuração inicial da casca. Definem-se os vetores de força externa distribuídas atuantes nas superfícies de topo e fundo da casca como $\bar{\mathbf{t}}^{\circ t}$ e $\bar{\mathbf{t}}^{\circ b}$, respectivamente, e o vetor de forças externas distribuídas no volum inicial como $\bar{\mathbf{b}}^\circ$. Sendo $dV^\circ = J^\circ dV^r$ e considerando que não existe deformação de espessura da casca ao longo das passagens entre configurações, podemos afirmar que $d\Omega^\circ = \bar{J}^\circ d\Omega$, sendo $\bar{J}^\circ = J^\circ(\zeta = 0)$. Considerando a correspondência estabelecida entre as configurações, podemos afirmar que os vetores de força externa por unidade de área serão obtidos por, e

$$\bar{\mathbf{t}}^t = \bar{J}^\circ \bar{\mathbf{t}}^{\circ t}, \quad (5.88)$$

$$\bar{\mathbf{t}}^b = \bar{J}^\circ \bar{\mathbf{t}}^{\circ b} \quad (5.89)$$

e,

$$\bar{\mathbf{b}} = \bar{J}^\circ \bar{\mathbf{b}}^\circ. \quad (5.90)$$

Conforme apresentado na seção 4.4.2, a potência externa na casca será dependente de três termos, sendo estes relacionados às forças de superfície e volume, desta forma, pode-se afirmar que a potência externa da casca será dada por

$$P_{ext} = \int_{\Omega^\circ} \left(\bar{\mathbf{t}}^{\circ t} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}^t + \bar{\mathbf{t}}^{\circ b} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}^b + \int_H \bar{\mathbf{b}}^\circ \cdot \dot{\boldsymbol{x}} d\zeta \right) d\Omega^\circ, \quad (5.91)$$

ou, substituindo as relações estabelecidas em (5.88) a (5.90),

$$P_{ext} = \int_\Omega \left(\bar{\mathbf{t}}^t \cdot \dot{\boldsymbol{x}}^t + \bar{\mathbf{t}}^b \cdot \dot{\boldsymbol{x}}^b + \int_H \bar{\mathbf{b}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} d\zeta \right) d\Omega. \quad (5.92)$$

Observando (5.92), percebe-se que é necessária a determinação da derivada em função do tempo do vetor posição \boldsymbol{x} , apresentado em (5.27). Esta derivação resultará em

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{a}, \quad (5.93)$$

onde $\mathbf{w} = \Gamma \dot{\boldsymbol{\theta}}$. Substituindo o encontrado em (5.93) na equação (5.92) e evidenciando em relação a $\dot{\mathbf{u}}$ e $\dot{\boldsymbol{\theta}}$, obtemos

$$P_{\text{ext}} = \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{u}} + (\Gamma^T \bar{\mathbf{m}}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}) d\Omega. \quad (5.94)$$

sendo

$$\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{t}}^t + \bar{\mathbf{t}}^b + \int_H \bar{\mathbf{b}} d\zeta. \quad (5.95)$$

e

$$\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{a}^t \times \bar{\mathbf{t}}^t + \mathbf{a}^b \times \bar{\mathbf{t}}^b + \int_H \mathbf{a} \times \bar{\mathbf{b}} d\zeta. \quad (5.96)$$

Os vetores $\bar{\mathbf{n}}$ e $\bar{\mathbf{m}}$ tratam-se das resultantes de forças e momentos externos por unidade de área da configuração de referência, respectivamente. Com a adição da definição

$$\bar{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{n}} \\ \Gamma^T \bar{\mathbf{m}} \end{bmatrix}, \quad (5.97)$$

podemos reescrever (5.94) como

$$P_{\text{ext}} = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{d}} d\Omega. \quad (5.98)$$

5.3 Equilíbrio

Considere os campos virtuais $\delta \mathbf{u}$ e $\delta \boldsymbol{\theta}$ definidos sobre Ω , compondo o vetor de deslocamentos $\delta \mathbf{d} = [\delta \mathbf{u} \quad \delta \boldsymbol{\theta}]^T$. Analogamente às equações de potência interna explicitadas em (5.75) e (5.87), podemos escrever o trabalho virtual devido aos esforços internos como

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}^r d\Omega, \quad (5.99)$$

sendo

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^r = \boldsymbol{\Psi} \Delta_{\alpha} \delta \mathbf{d}. \quad (5.100)$$

Considerando agora o trabalho externo, este pode ser obtido de maneira análoga ao apresentado para a potência externa em (5.91) e (5.98) como

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{d} d\Omega. \quad (5.101)$$

Considerando que os campos \mathbf{u} e $\boldsymbol{\theta}$ satisfazem as condições de contorno essenciais na fronteira Γ de Ω , podemos afirmar que o equilíbrio estático da casca em sua forma fraca pode ser formulado pelo princípio dos trabalhos virtuais como

$$\delta W = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} = 0, \quad \forall \delta \mathbf{d} \mid \delta \mathbf{d} = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma, \quad (5.102)$$

ou, substituindo as equações (5.99) e (5.101) na equação acima,

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^r \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}^r - \bar{\mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{d}) d\Omega = 0. \quad (5.103)$$

Realizando a integração por partes nos termos em $\delta \mathbf{u}_{,\alpha}$ e $\delta(\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\theta})_{,\alpha}$ analogamente ao realizado na seção 4.5.3, obtemos as equações locais de equilíbrio como

$$\mathbf{n}_{\alpha,\alpha} + \bar{\mathbf{n}} = 0; \quad (5.104)$$

$$(\mathbf{z}_{,\alpha} \times \mathbf{n}_{\alpha}) + \mathbf{m}_{\alpha,\alpha} + \bar{\mathbf{m}} = 0, \quad (5.105)$$

sendo $\mathbf{n}_{\alpha} = \mathbf{Q}\mathbf{n}_{\alpha}^r$ e $\mathbf{m}_{\alpha} = \mathbf{Q}\mathbf{m}_{\alpha}^r$.

Definidas as equações locais de equilíbrio, determinamos agora o operador tangente usualmente conhecido como matriz de rigidez. A demonstração deste operador segue os mesmos passos apresentados na seção 4.5.4. Realiza-se a derivada de Gateaux de δW em relação a uma variação admissível $\delta^* \mathbf{d}$, pertencente ao mesmo espaço de $\delta \mathbf{d}$, e obtêm-se o operador como

$$\delta^*(\delta W) = \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha} \delta \mathbf{d} \cdot \mathbf{G}_{\alpha} \Delta_{\alpha} \delta^* \mathbf{d} + \mathbf{D}_{\alpha\beta} \boldsymbol{\psi}_{\beta} \delta^* \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\psi}_{\alpha} \delta \mathbf{d} - \mathbf{L} \delta^* \mathbf{d} \cdot \delta \mathbf{d}) d\Omega, \quad (5.106)$$

sendo os termos \mathbf{G}_{α} , $\mathbf{D}_{\alpha\beta}$ e \mathbf{L} idênticos aos apresentados na seção 4.5.4. Com os tensores tangentes

$$\tilde{\mathbf{C}}_{\alpha\beta}^r = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha}^r}{\partial \boldsymbol{\gamma}_{\beta}^r}, \quad (5.107)$$

pode-se computar as submatrizes componentes de $\mathbf{D}_{\alpha\beta}$

5.4 Equações constitutivas

Nesta subseção apresentaremos a formulação dos tensores tangentes relativos às leis materiais de materiais hiperelásticos de Ciarlet-Simo e de Saint-Venant-Kirchhoff, respectivamente. Assim como na seção 4.6.1, é necessário modificar o termo apresentado em (5.59) e componente de (5.57) para

$$\mathbf{f}_3^{er} = (1 + \gamma_{33}) \mathbf{e}_3^r, \quad (5.108)$$

sendo γ_{33} posteriormente eliminado localmente. Substituindo a consideração apresentada em (5.108) em (5.57) e, posteriormente, substituindo o resultado em (5.50), obtemos que

$$\mathbf{f}_3^r = (1 + \gamma_{33}) \mathbf{e}_3^r. \quad (5.109)$$

Determinado o vetor relativo à deformação γ_{33} , podemos aplicar a condição de tensão plana à análise de tensão da casca, implicando que

$$\boldsymbol{\tau}_3^e \cdot \mathbf{e}_3 = 0 = (\mathbf{P}^e \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_3 = \tau_3^{er} \cdot \mathbf{e}_3^r = \tau_{33}^e = 0 \quad (5.110)$$

ou, considerando a correlação apresentada em (5.70),

$$\boldsymbol{\tau}_3^r \cdot \mathbf{e}_3 = \tau_{33} = 0. \quad (5.111)$$

A expressão acima estabelece uma correlação interessante em relação às tensões nas configurações de referência e efetiva. Ao se estabelecer que a tensão normal efetiva na configuração efetiva é nula, automaticamente implica que a tensão normal na configuração de referência também é nula. Esta correlação implica que a componente de tensão normal à casca (τ_{33}) não realiza trabalho, não alterando assim a validade de (5.76), mesmo com a consideração que $\gamma_{33} \neq 0$.

A partir deste ponto criamos duas sub-seções, sendo uma para cada material hiperelástico considerado, de forma a apresentar seus respectivos tensores tangentes componentes da parcela constitutiva da forma tangente bilinear (matriz de rigidez).

5.4.1 Material hiperelástico Neo-hookeano de Ciarlet-Simo

Conforme apresentado na seção 3.3, a energia de deformação específica do material neo-hookiano será dada como

$$\psi(I_1, J) = \frac{1}{2} \lambda \left[\frac{1}{2} (J^2 - 1) - \ln J \right] + \frac{1}{2} \mu (I_1 - 3 - 2 \ln J). \quad (5.112)$$

Considerando a existência de configurações adicionais na presente teoria, definimos a energia de deformação específica entre a configuração inicial e efetiva como

$$\psi(I_1^e, J^e) = \frac{1}{2} \lambda \left[\frac{1}{2} (J^{e2} - 1) - \ln J^e \right] + \frac{1}{2} \mu (I_1^e - 3 - 2 \ln J^e), \quad (5.113)$$

onde, analogamente ao apresentado nas equações (4.285) e (4.286)

$$J^e = \mathbf{f}_3^{er} \cdot (\mathbf{f}_1^{er} \times \mathbf{f}_2^{er}) = (1 + \gamma_{33}) \bar{J}^e; \quad (5.114)$$

$$\bar{J}^e = \mathbf{e}_3^r \cdot (\mathbf{f}_1^{er} \times \mathbf{f}_2^{er}). \quad (5.115)$$

e o primeiro invariante será dado como

$$I_1^e = \mathbf{I} : \mathbf{C}^e = \mathbf{I} : (\mathbf{F}^{eT} \mathbf{F}^e). \quad (5.116)$$

Analogamente ao apresentado na seção 4.6.3.1, podemos chegar a equações equivalentes a (4.315) e (4.321), sendo estas

$$\tau_{33}^e = \frac{1}{J^e} \left[\frac{\lambda (J^{e2} - 1) - 2\mu}{2} \right] \bar{J}^e + (1 + \gamma_{33}) \mu, \quad (5.117)$$

e

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha}^{er} = -\mu \left[\frac{2\mu + \lambda}{(\lambda \bar{J}^e)^3 + 2\mu \bar{J}^e} \right] \mathbf{g}_{\alpha}^{er} + \mu \mathbf{f}_{\alpha}^{er}, \quad (5.118)$$

sendo

$$\mathbf{g}_{\alpha}^{er} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\beta} (\mathbf{f}_{\alpha}^{er} \times \mathbf{e}_{\beta}^r); \quad (5.119)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_3^r \cdot (\mathbf{e}_{\alpha}^r \times \mathbf{e}_{\beta}^r), \quad (5.120)$$

e definindo

$$\varphi(\bar{J}^e) = -\mu \left[\frac{2\mu + \lambda}{(\lambda \bar{J}^e)^3 + 2\mu \bar{J}^e} \right]. \quad (5.121)$$

Vale ressaltar que o resultado apresentado em (5.118) foi obtido após a imposição do estado plano de tensão em (5.117), ou seja, $\tau_{33}^r = 0$. As tensões totais na configuração de referência $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha}^r$, podem ser obtidas pela substituição do encontrado em (5.118) na equação (5.73), obtendo

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha}^r &= (\mathbf{e}_{\beta}^r \cdot \mathbf{g}_{\alpha}^{\circ r}) \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\beta}^{er} = \\ &= (\mathbf{e}_{\beta}^r \cdot \mathbf{g}_{\alpha}^{\circ r}) \left\{ -\mu \left[\frac{2\mu + \lambda}{(\lambda \bar{J}^e)^3 + 2\mu \bar{J}^e} \right] \mathbf{g}_{\beta}^{er} + \mu \mathbf{f}_{\beta}^{er} \right\}. \end{aligned} \quad (5.122)$$

Os tensores tangentes de material $\tilde{\mathbf{C}}_{\alpha\beta}^r$ podem ser obtidos pela substituição de (5.122) em (5.107), ou seja,

$$\tilde{\mathbf{C}}_{\alpha\beta}^r = \frac{\partial \left\{ (\mathbf{e}_{\beta}^r \cdot \mathbf{g}_{\alpha}^{\circ r}) \left\{ -\mu \left[\frac{2\mu + \lambda}{(\lambda \bar{J}^e)^3 + 2\mu \bar{J}^e} \right] \mathbf{g}_{\beta}^{er} + \mu \mathbf{f}_{\beta}^{er} \right\} \right\}}{\partial \boldsymbol{\gamma}_{\beta}^r}. \quad (5.123)$$

Realizando a derivação e após alguma manipulação algébrica, obtemos os tensores tangentes como

$$\tilde{\mathbf{C}}_{\alpha\beta}^r = J^{\circ-1} (\mathbf{e}_{\gamma}^r \cdot \mathbf{g}_{\alpha}^{\circ r}) (\mathbf{e}_{\delta}^r \cdot \mathbf{g}_{\beta}^{\circ r}) \tilde{\mathbf{C}}_{\gamma\delta}^{er}, \quad (5.124)$$

ou, de forma aberta,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}}_{11}^r &= J^{\circ-1} [(\mathbf{e}_1^r \cdot \mathbf{g}_1^{\circ r}) (\mathbf{e}_1^r \cdot \mathbf{g}_1^{\circ r}) \tilde{\mathbf{C}}_{11}^{er} + (\mathbf{e}_1^r \cdot \mathbf{g}_1^{\circ r}) (\mathbf{e}_2^r \cdot \mathbf{g}_1^{\circ r}) \tilde{\mathbf{C}}_{12}^{er} + \\ &(\mathbf{e}_2^r \cdot \mathbf{g}_1^{\circ r}) (\mathbf{e}_1^r \cdot \mathbf{g}_1^{\circ r}) \tilde{\mathbf{C}}_{21}^{er} + (\mathbf{e}_2^r \cdot \mathbf{g}_1^{\circ r}) (\mathbf{e}_2^r \cdot \mathbf{g}_1^{\circ r}) \tilde{\mathbf{C}}_{22}^{er}], \end{aligned} \quad (5.125)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}}_{12}^r &= J^{\circ-1} [(\mathbf{e}_1^r \cdot \mathbf{g}_1^{\circ r}) (\mathbf{e}_1^r \cdot \mathbf{g}_2^{\circ r}) \tilde{\mathbf{C}}_{11}^{er} + (\mathbf{e}_1^r \cdot \mathbf{g}_1^{\circ r}) (\mathbf{e}_2^r \cdot \mathbf{g}_2^{\circ r}) \tilde{\mathbf{C}}_{12}^{er} + \\ &(\mathbf{e}_2^r \cdot \mathbf{g}_1^{\circ r}) (\mathbf{e}_1^r \cdot \mathbf{g}_2^{\circ r}) \tilde{\mathbf{C}}_{21}^{er} + (\mathbf{e}_2^r \cdot \mathbf{g}_1^{\circ r}) (\mathbf{e}_2^r \cdot \mathbf{g}_2^{\circ r}) \tilde{\mathbf{C}}_{22}^{er}], \end{aligned} \quad (5.126)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}}_{21}^r = j^{\circ-1} [& (\mathbf{e}_1^r \cdot \mathbf{g}_2^{\circ r})(\mathbf{e}_1^r \cdot \mathbf{g}_1^{\circ r})\tilde{\mathbf{C}}_{11}^{er} + (\mathbf{e}_1^r \cdot \mathbf{g}_2^{\circ r})(\mathbf{e}_2^r \cdot \mathbf{g}_1^{\circ r})\tilde{\mathbf{C}}_{12}^{er} + \\ & (\mathbf{e}_2^r \cdot \mathbf{g}_2^{\circ r})(\mathbf{e}_1^r \cdot \mathbf{g}_1^{\circ r})\tilde{\mathbf{C}}_{21}^{er} + (\mathbf{e}_2^r \cdot \mathbf{g}_2^{\circ r})(\mathbf{e}_2^r \cdot \mathbf{g}_1^{\circ r})\tilde{\mathbf{C}}_{22}^{er}], \end{aligned} \quad (5.127)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}}_{22}^r = j^{\circ-1} [& (\mathbf{e}_1^r \cdot \mathbf{g}_2^{\circ r})(\mathbf{e}_1^r \cdot \mathbf{g}_2^{\circ r})\tilde{\mathbf{C}}_{11}^{er} + (\mathbf{e}_1^r \cdot \mathbf{g}_2^{\circ r})(\mathbf{e}_2^r \cdot \mathbf{g}_2^{\circ r})\tilde{\mathbf{C}}_{12}^{er} + \\ & (\mathbf{e}_2^r \cdot \mathbf{g}_2^{\circ r})(\mathbf{e}_1^r \cdot \mathbf{g}_2^{\circ r})\tilde{\mathbf{C}}_{21}^{er} + (\mathbf{e}_2^r \cdot \mathbf{g}_2^{\circ r})(\mathbf{e}_2^r \cdot \mathbf{g}_2^{\circ r})\tilde{\mathbf{C}}_{22}^{er}], \end{aligned} \quad (5.128)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{C}}_{\alpha\beta}^{er} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{t}}_{\alpha}^{er}}{\partial \mathbf{y}_{\beta}^{er}} = \varphi' \mathbf{g}_{\alpha}^{er} \otimes \mathbf{g}_{\beta}^{er} + \delta_{\alpha\beta} \mu \mathbf{I} - \varepsilon_{\alpha\beta} \varphi \mathbf{skew}(\mathbf{e}_3^r), \quad (5.129)$$

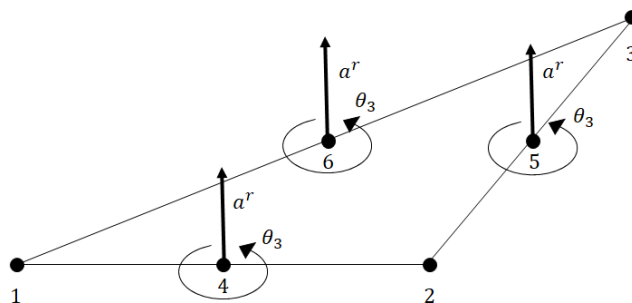
e, analogamente ao apresentado em (4.334) a (4.335),

$$\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{J}^e} = -\varphi(\bar{J}^e) \left[\frac{(3\lambda \bar{J}^{e^2} + 2\mu)}{(\lambda \bar{J}^{e^3} + 2\mu \bar{J}^e)} \right]. \quad (5.130)$$

6 Acréscimo de rigidez fictícia (Drilling)

O grau de liberdade conhecido como drilling trata-se da rotação do diretor da casca em relação ao próprio eixo, conforme apresentado na Figura 8. Comum às teorias de casca é a falta de rigidez associada à terceira componente de rotação, perceptível na presente teoria quando não existe potência associada a este grau de liberdade. Diversas formas de solucionar este problema são apresentadas na literatura, podendo ser citado o trabalho de Zienkiewicz e Taylor (2000), onde uma adição de rigidez em relação a este grau de liberdade é feita por meio de um acréscimo de energia no formato de penalidade no sistema, ou, o trabalho de Hughes e Brezzi (1989), para uma discussão mais profunda.

Figura 8 - Graus de liberdade drilling no elemento



Fonte: Autor, 2019.

No presente trabalho, o problema de rigidez nula associada ao drilling é tratado com a adição de uma rigidez fictícia de valor

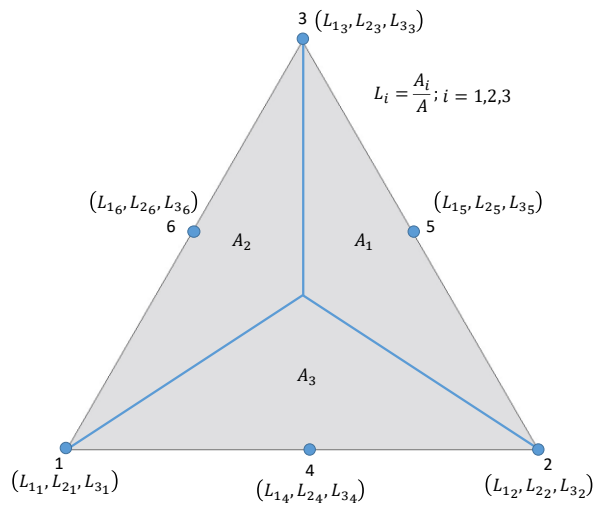
$$k_f = Eh^3, \quad (6.1)$$

localmente na equação constitutiva da casca, sendo E o módulo de elasticidade e h a espessura da casca. Este formato e valor foi proposto pelos autores Campello, Pimenta, Wriggers (2003), baseado no valor $k_f = \frac{1}{12} Eh^3$ apresentado por Chroscielewski, Makowski e Stumpf (1992) e, segundo os autores, apresentou bons resultados tanto com o primeiro quanto com o segundo valor.

7 Elemento Finito Triangular (T6-3i)

Nesta seção, detalha-se o elemento finito triangular T6-3i. Este trata-se de um elemento triangular (genérico, ou seja, não necessariamente isósceles ou equilátero) de ordem quadrática, não-conforme conforme apresentado por Campello (2005). Cabe-se salientar que todos os nós (de 1 a 6) possuem graus de liberdade de translação. No entanto, para evitar problemas de travamento, apenas os nós intermediários (de 4 a 6) possuem graus de liberdade de rotação (CAMPELLO, PIMENTA, WRIGGERS, 2003). As coordenadas nodais de área (L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}) dos seis pontos do elemento finito estão representados na Figura 9.

Figura 9 - Elemento Finito Triangular Genérico de Ordem Quadrática em coordenadas de área



Fonte: Autor, 2019.

O elemento finito é dividido em três áreas (A_1 , A_2 e A_3) de forma a calcular as funções de interpolação em função destas áreas. Considerando,

$$L_i = \frac{A_i}{A}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.1)$$

e sendo as áreas A_i parcelas da área total A , podemos escrever

$$A = A_1 + A_2 + A_3 \quad (7.2)$$

e conseqüentemente,

$$1 = \frac{A_1}{A} + \frac{A_2}{A} + \frac{A_3}{A}. \quad (7.3)$$

As correlações $\frac{A_i}{A}$ são utilizadas para representar as coordenadas dos nós do elemento.

Logicamente, estas coordenadas são fornecidas em função das áreas parciais A_i .

As funções de interpolação para os deslocamentos (\mathbf{u}) serão dadas por

$$N_1^u = (2L_1 - 1)L_1, \quad (7.4)$$

$$N_2^u = (2L_2 - 1)L_2, \quad (7.5)$$

$$N_3^u = (2L_3 - 1)L_3, \quad (7.6)$$

$$N_4^u = 4(L_1L_2), \quad (7.7)$$

$$N_5^u = 4(L_2L_3), \quad (7.8)$$

$$N_6^u = 4(L_3L_1), \quad (7.9)$$

e para as rotações (θ),

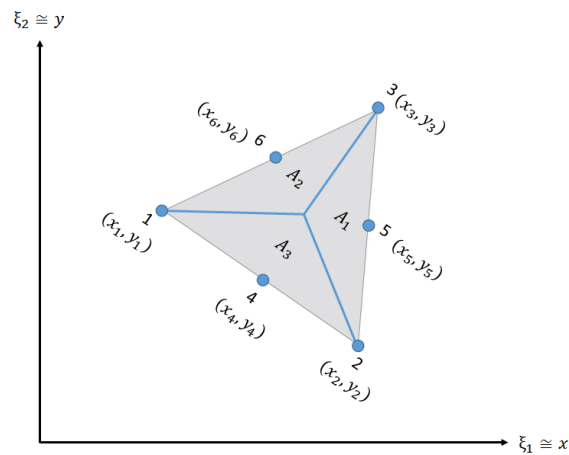
$$N_4^\theta = 1 - 2L_3, \quad (7.10)$$

$$N_5^\theta = 1 - 2L_1, \quad (7.11)$$

$$N_6^\theta = 1 - 2L_2. \quad (7.12)$$

Nesta pesquisa, trabalharemos com um sistema de coordenada cartesiano $(x, y) \cong (\xi_1, \xi_2)$, conforme apresentado na Figura 10.

Figura 10 - Elemento T6-3i com coordenadas cartesianas



Fonte: Autor, 2019.

Desta forma, reescrevemos as relações de L_i em função das coordenadas cartesianas como

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}, \quad (7.13)$$

ou

$$L_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y), \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.14)$$

sendo o termo A referente à área total do elemento.

Vale ressaltar que, durante implementação da formulação em programa computacional, este sistema de coordenada é construído em relação ao plano montado com os três nós de quina do elemento triangular sendo analisado.

Será considerada \mathbf{I}_3 a matriz identidade de dimensão 3 e $\mathbf{0}_3$ a matriz nula de dimensão 3. A matriz das funções de interpolação \mathbf{N} é definida então como

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1^u \mathbf{I}_3 & N_2^u \mathbf{I}_3 & N_3^u \mathbf{I}_3 & N_4^u \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & N_5^u \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & N_6^u \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & N_4^\theta \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & N_5^\theta \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & N_6^\theta \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}_{6 \times 27}. \quad (7.15)$$

O deslocamento de um ponto qualquer a ser analisado na seção média será então determinado por

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^6 \mathbf{u}_i N_i^u, \quad (7.16)$$

onde \mathbf{u}_i são as componentes de deslocamento dos nós que compõem o elemento.

A rotação de um ponto qualquer a ser analisado, por sua vez, será calculada por

$$\boldsymbol{\theta} = \sum_{i=4}^6 \boldsymbol{\theta}_i N_i^\theta. \quad (7.17)$$

Vale ressaltar que em geral, na implementação computacional, todos os graus de liberdade de translação e rotação são armazenados de forma sequencial no mesmo vetor incógnita da estrutura analisada, obedecendo o posicionamento dos respectivos graus de liberdade.

O \mathbf{d}_i vetor dos graus de liberdade nos nós do elemento finito definido como

$$\mathbf{d}_i^T = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3 \quad \mathbf{u}_4 \quad \boldsymbol{\theta}_4 \quad \mathbf{u}_5 \quad \boldsymbol{\theta}_5 \quad \mathbf{u}_6 \quad \boldsymbol{\theta}_6]_{1 \times 27}. \quad (7.18)$$

Então, a equação (7.16) e (7.17) podem ser condensadas em uma única equação como

$$\mathbf{d} = \mathbf{N} \mathbf{d}_i. \quad (7.19)$$

Considerando o conceito de integração numérica e substituindo a equação acima em (5.100) e (5.101), encontra-se o vetor de esforços nodais desbalanceados como

$$\mathbf{P}_e = A_{elem_ref} \sum_{i=1}^n [(\boldsymbol{\Psi} \Delta_\alpha \mathbf{N})^T \boldsymbol{\sigma}^r - \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{q}}]_i W_i, \quad (7.20)$$

e, substituindo (7.19) em (4.178), obtemos a matriz de rigidez

$$\mathbf{K}_E = A_{elem_ref} \sum_{i=1}^n [(\Delta_\alpha \mathbf{N})^T \mathbf{G}(\Delta_\alpha \mathbf{N}) + (\boldsymbol{\Psi} \Delta_\alpha \mathbf{N})^T \mathbf{D}(\boldsymbol{\Psi} \Delta_\alpha \mathbf{N}) - \mathbf{N}^T \mathbf{L} \mathbf{N}]_i W_i, \quad (7.21)$$

onde W_i trata-se do peso associado a cada ponto de Gauss considerado e n é o número total de pontos de Gauss analisados para a superfície média.

Oferecida uma breve explicação do elemento e das funções de interpolação em relação às coordenadas de área, detalha-se a seguir as posições dos pontos de Gauss.

A presente formulação realiza inicialmente a integração em relação à espessura da casca, e, em seguida, realiza a integração ao longo da superfície média do elemento. A integração ao longo da espessura, baseia-se em 3 pontos de Gauss para os modelos com e sem curvaturas iniciais, com posições conforme Kwon, et al. (2013). Em relação à integração na superfície, a formulação plana possui 3 pontos de Gauss ao longo da superfície média. A formulação com curvatura inicial, por sua vez, possuirá sete pontos de Gauss ao longo da superfície média, com posições conforme Cowper (1973). Desta forma, totalizam-se 9 pontos de cálculo para o elemento plano e 21 pontos para a formulação com curvatura inicial.

8 Exemplos numéricos

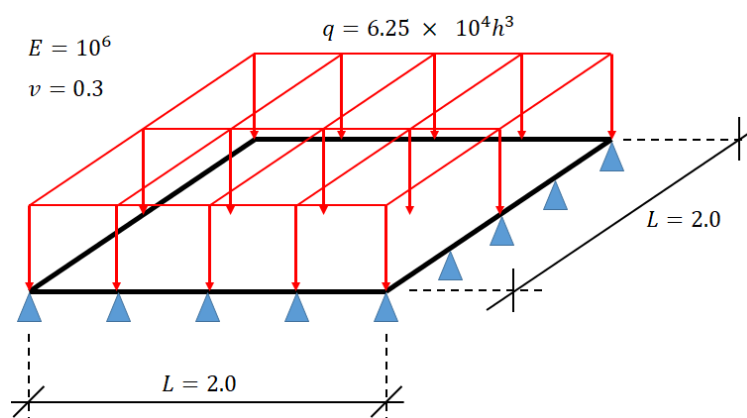
Esta seção tem como objetivo analisar o desempenho numérico das formulações das cascas sem e com curvatura. Para tal, será adotada como metodologia, comparar os resultados obtidos numericamente pelo programa computacional desenvolvido nesta pesquisa (em linguagem C), com os exemplos clássicos disponíveis na literatura consultada e, também, nos trabalhos desenvolvidos por Campello (2005) e Campello, Pimenta, Wriggers (2003), que foram a base principal dessa pesquisa.

Este capítulo apresentará quatro exemplos numéricos para verificar o desempenho das formulações das cascas com e sem curvatura inicial. Ao longo dos exemplos é sinalizado qual das formulações será utilizada, sendo então apresentados os resultados numéricos para as respectivas formulações, as comparações entre os valores numéricos com os da literatura e as discussões sobre os resultados.

8.1 Placa quadrada sob linearidade geométrica

O exemplo da placa quadrada é um exemplo clássico para verificação do fenômeno de travamento. Conforme observado na Figura 8.11, o exemplo consiste em uma placa quadrada simplesmente apoiada, carregada com uma pressão vertical uniforme $q = 6.25 \times 10^4 h^3$. O deslocamento horizontal ao longo dos quatro lados é considerado livre, de modo a não desenvolver tensões de membrana. Em relação às propriedades dos materiais, é considerado um módulo de elasticidade $E = 10^6$ e coeficiente de poisson $\nu = 0.3$.

Figura 8.11 - Placa quadrada sob linearidade geométrica



Fonte: Autor, 2019.

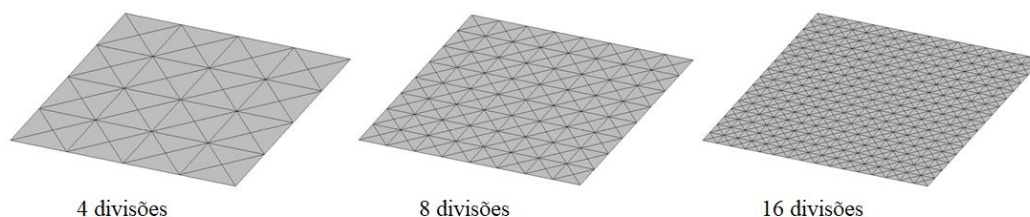
Conforme visto, a carga possui dependência com o cubo da espessura da casca. Segundo (CAMPELLO E. , 2005), esta proporcionalidade garante a boa convergência do exemplo. Conforme apresentado por Timoshenko e Wionowsky-Krieger (1959), a deflexão máxima de uma placa simplesmente apoiada será dada por

$$W_{m\acute{a}x} = 0.0454 \times \frac{q_0 a^4}{E h^3}. \quad (8.1)$$

Utilizando uma correlação carga – espessura com variação cúbica, a expressão acima possui valor constante de deflexão máxima de $W_{m\acute{a}x} = 0.0454$.

As malhas utilizadas nos exemplos são apresentadas na Figura 8.12. Vale ressaltar que este exemplo será resolvido com os modelos de cascas sem e com curvatura inicial.

Figura 8.12 - Malhas utilizadas em placa sob linearidade geométrica



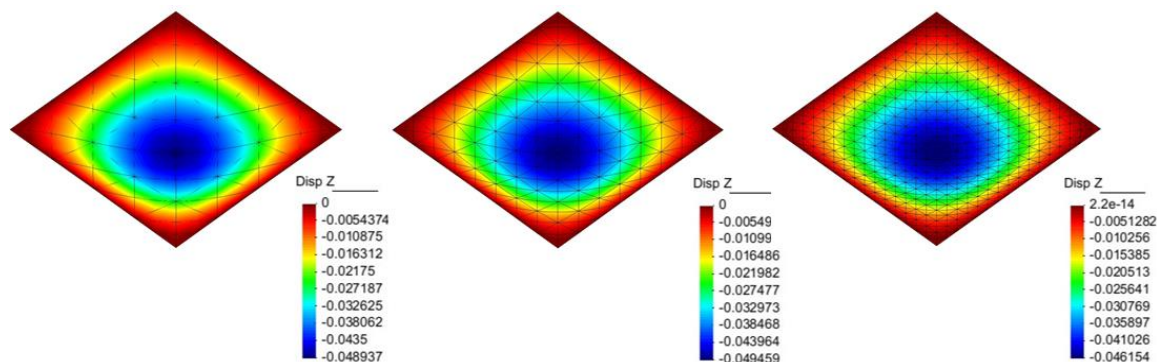
Fonte: Autor, 2019.

A proporção utilizada para simular o exemplo foi de $\frac{h}{l} = 0.1$. Esta proporção significa uma espessura $h = 0.2$ e uma carga de pressão vertical uniforme de $q = 500$. Vale ressaltar que as correlações são válidas para quaisquer unidades de comprimento e carga, desde que se mantenha consistente a proporcionalidade.

8.1.1 Resultados para a formulação de casca sem curvatura inicial

Na Figura 8.13 são apresentados os resultados dos deslocamentos na direção ortogonal ao plano da casca utilizando a formulação sem curvatura inicial.

Figura 8.13 - Resultados de deslocamento para a formulação sem curvatura inicial



Fonte: Autor, 2019.

As diferenas entre os valores obtidos por simulação e os valores obtidos analiticamente, são apresentados na Tabela 1. Vale ressaltar que a deflexão máxima analítica obtida é de $W_{m\acute{a}x} = 0.0454$.

Tabela 1 - Resultados de deflexão máxima para elemento sem curvatura inicial

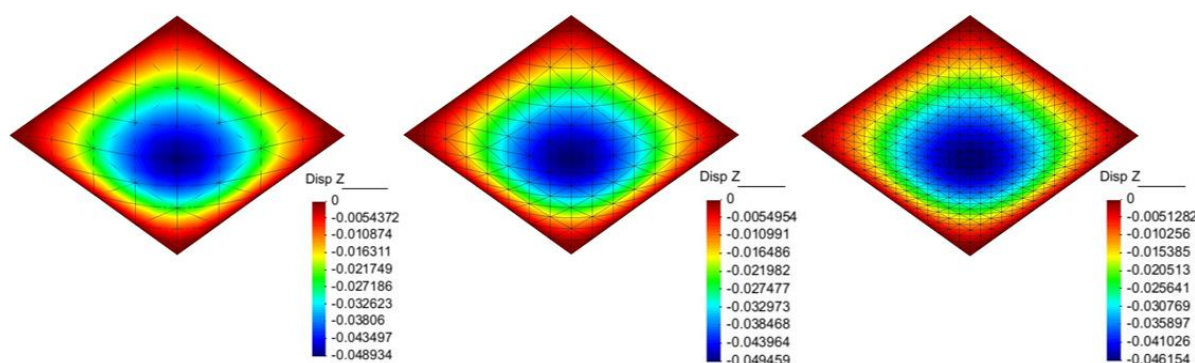
Divisões de malha	Deflexão máxima ($W_{m\acute{a}x}$)	Erro (%)
4 divisões	0.048937	7.791
8 divisões	0.049459	8.941
16 divisões	0.049191	8.352

Fonte: Autor, 2019.

8.1.2 Resultados para a formulação de casca com curvatura inicial

Na Figura 8.14 são apresentados os resultados dos deslocamentos na direção ortogonal ao plano da casca utilizando a formulação com curvatura inicial.

Figura 8.14 - Resultado de deslocamento para formulação com curvatura inicial



Fonte: Autor, 2019.

As diferenças entre os valores obtidos por simulação e os valores obtidos analiticamente são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 - Resultados de deflexão máxima para elemento com curvatura inicial

Divisões de malha	Deflexão máxima ($W_{m\acute{a}x}$)	Erro (%)
4 divisões	0.048934	7.784
8 divisões	0.049459	8.941
16 divisões	0.049191	8.352

Fonte: Autor, 2019.

8.1.3 Discussão dos resultados

Observando a Tabela 1 e Tabela 2, os resultados numéricos obtidos apresentam um erro percentual aceitável quando comparados com o resultado analítico. Nas duas formulações, as

malhas com 16 divisões apresentaram um erro associado que valida a teoria para o exemplo apresentado, uma vez que este erro é relativamente baixo e coincide com o observado no trabalho de referência.

Diferentemente do esperado, as malhas com 8 e 16 divisões apresentaram resultados com erros superiores ao das malhas com 4 divisões. Acredita-se que estes resultados inesperados indicam a necessidade de realizar alguns pequenos ajustes no programa computacional desenvolvido. Vale ressaltar que, mesmo com estes resultados inesperados, o problema ainda possui uma solução coerente com a formulação analítica, possuindo também uma convergência quadrática.

É interessante observar também, que os resultados dos elementos finitos sem e com curvatura, são praticamente idênticos para as diversas configurações de malha. Verifica-se uma pequena diferença apenas nas malhas com 4 divisões, ou seja, uma diferença na sexta casa decimal nos deslocamentos e na terceira casa decimal nos erros. Este resultado é consistente com o esperado, uma vez que a configuração inicial da placa é plana.

Ainda dentro da proposta do trabalho, são apresentados a seguir, o tempo necessário para realização dos cálculos de cada formulação. Vale ressaltar, que o tempo total apresentado refere-se exclusivamente à soma dos tempos necessários para a obtenção da matriz de rigidez e dos vetores força da estrutura ao longo de toda análise. Desta forma, quaisquer cálculos executados pelo programa fora das rotinas dos elementos, não foram considerados na determinação do tempo. Uma metodologia de implementação foi utilizada nas duas formulações com o objetivo de tornar mensurável esta comparação.

Vale ressaltar que o computador utilizado para análises é composto por uma CPU Intel Core i7 7700HQ com 2,8GHz, 32 GB de memória RAM com 1196MHz, placa de vídeo NVIDIA GeForce GTX 1050 Ti de 4095MB e armazenamento em SSD PLEXTOR PX-256S2G.

Observou-se que o número de iterações de Newton e Lagrange necessários para obtenção do equilíbrio em todos os casos foram os mesmos, sendo possível desprezar estas variáveis na análise dos tempos de cada elemento no presente exemplo.

Conforme esperado, a partir dos resultados da Tabela 3, observa-se que a casca com curvatura inicial sempre apresentará um tempo de cálculo do elemento superior ao da casca sem curvatura inicial, mesmo em uma condição de elementos planos. Obviamente isto se deve à adição de configurações no modelo e no maior número de pontos de Gauss.

Tabela 3 - Tempo de cálculo de processamento

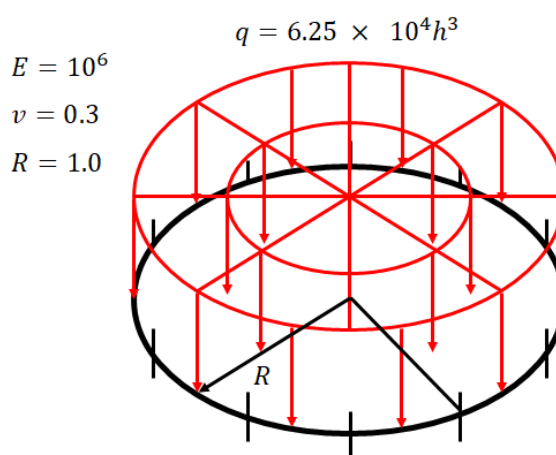
Divisões de malha	Tempo de cálculo dos elementos finitos (segundos)	
	Casca sem curvatura	Casca com curvatura
4 divisões	0.291000	0.459000
8 divisões	3.572000	4.149000
16 divisões	57.894000	58.933000

Fonte: Autor, 2019.

8.2 Placa circular sob linearidade geométrica

A placa circular é um outro exemplo para verificação do fenômeno de travamento. Conforme observado na Figura 15, o exemplo consiste em uma placa circular, carregada com uma pressão vertical uniforme $q = 6.25 \times 10^4 h^3$. Em relação às propriedades de materiais, é considerado um módulo de elasticidade $E = 10^6$ e coeficiente de poisson $\nu = 0.3$.

Figura 15 - Placa circular sob linearidade geométrica



Fonte: Autor, 2019.

Conforme visto, a carga possui dependência com o cubo da espessura da casca. Segundo Campello (2005), esta proporcionalidade garante a boa convergência do exemplo. Conforme apresentado por Timoshenko e Wionowsky-Krieger (1959), a deflexão máxima de uma placa circular simplesmente apoiada será dada por

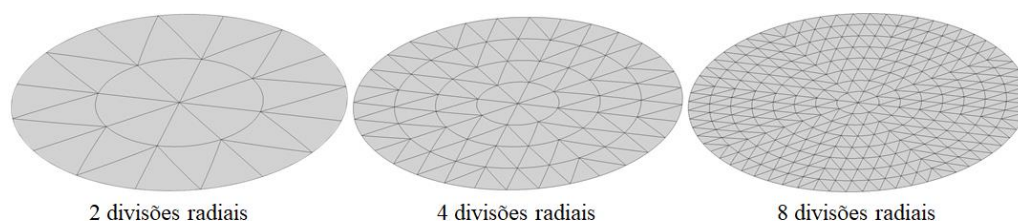
$$W_{m\acute{a}x} = \frac{q_0 R^4}{64 \{E h^3 / [12(1 - \nu^2)]\}} \quad (8.2)$$

Substituindo a correlação carga – espessura na equação acima, obtêm-se um valor constante de deflexão máxima de $W_{m\acute{a}x} = 0.010664063$.

A proporção utilizada para simular o exemplo foi de $\frac{h}{R} = 0.1$. Esta proporção resulta em uma espessura $h = 0.1$ e uma carga de pressão vertical uniforme de $q = 62.5$. Vale ressaltar que as correlações são válidas para quaisquer unidades de comprimento e carga, desde que se mantenha consistente a proporcionalidade.

As malhas utilizadas nos exemplos são apresentadas na Figura 16. Vale ressaltar que este exemplo será resolvido com os modelos de cascas sem curvatura inicial.

Figura 16 - Malhas utilizadas em placa circular sob linearidade geométrica

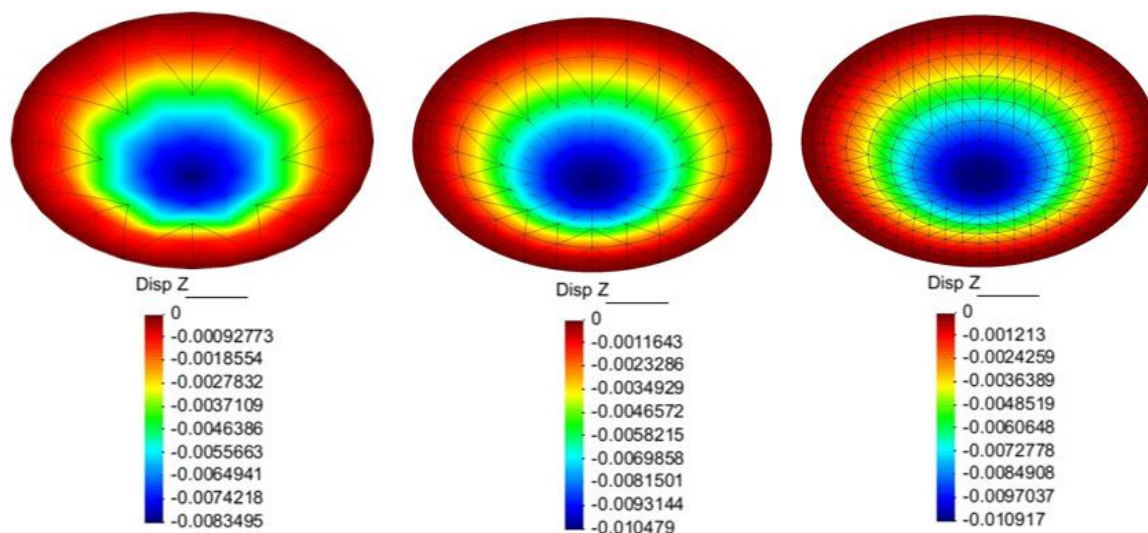


Fonte: Autor, 2019.

8.2.1 Resultados para a formulação de casca sem curvatura inicial

Na Figura 17 são apresentados os resultados dos deslocamentos na direção ortogonal ao plano da casca utilizando a formulação com curvatura inicial.

Figura 17 - Resultados de deslocamento para a formulação sem curvatura inicial



Fonte: Autor, 2019.

As diferenças entre os valores obtidos por simulação e os valores obtidos analiticamente são apresentados na Tabela 4. Vale ressaltar que a deflexão máxima analítica obtida é de $W_{máx} = 0.010664063$.

Tabela 4 - Resultados de deflexão máxima para elemento sem curvatura inicial

Divisões de malha	Deflexão máxima ($W_{m\acute{a}x}$)	Erro (%)
2 divisões	0.0083495	21.704
4 divisões	0.010479	1.735
8 divisões	0.010917	2.372

Fonte: Autor, 2019.

Como esperado, os resultados obtidos numericamente para malhas com maior refino (4 divisões e 8 divisões) apresentam um erro percentual baixo quando comparados com o resultado analítico. A malha com 8 divisões apresenta um erro associado que valida a teoria para o exemplo apresentado, sendo este abaixo de 3%.

Diferentemente do esperado, a malha com 8 divisões apresenta um resultado com erro superior ao da malha com 4 divisões. Acredita-se que este resultado inesperado indica a necessidade de realizar alguns pequenos ajustes no programa computacional desenvolvido. Vale ressaltar que, mesmo com estes resultados inesperados, o problema ainda possui uma solução coerente com a formulação analítica, possuindo também uma convergência quadrática.

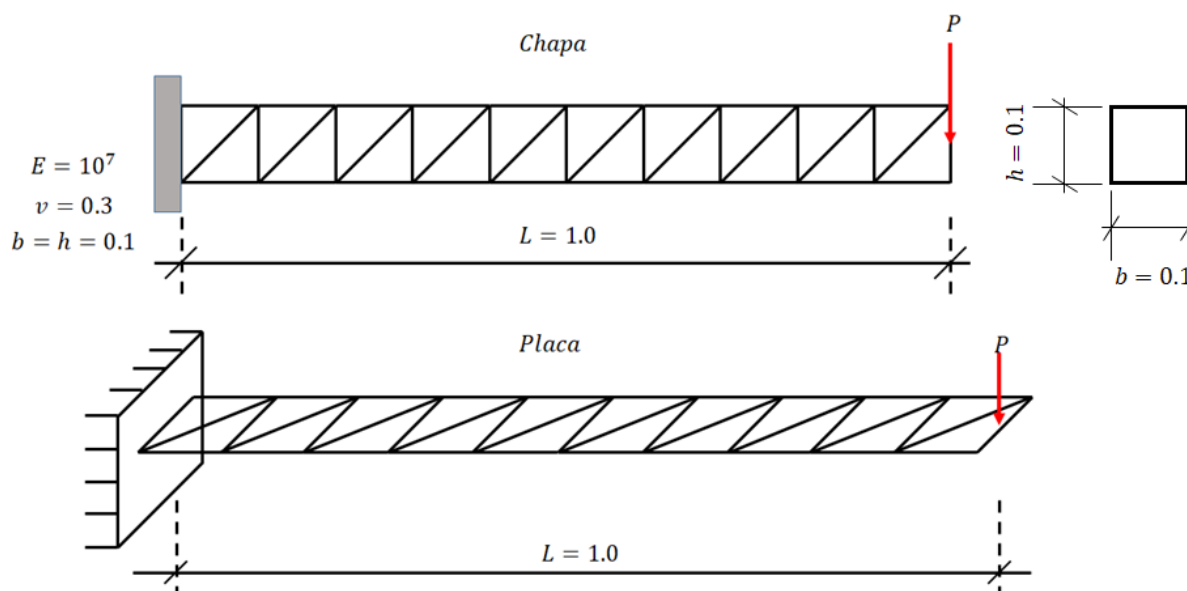
8.2.2 Viga em balanço

A viga como chapa foi um exemplo proposto por Simo, Fox e Rifai (1990) e revisitado por Wriggers e Gruttmann (1993) para analisar o comportamento do elemento quando utilizado sob condições de grande rotações no plano. A mesma viga é simulada como placa por Campello (2005), para verificar o seu comportamento quando a carga é aplicada perpendicularmente ao plano da casca. No presente trabalho é realizada a simulação como placa e chapa, utilizando as formulações sem e com curvaturas, descritas no trabalho. Quanto à geometria, apresentada na Figura 18, utiliza-se uma seção transversal de $b \times h$, com comprimento $L = 1.0$. Uma extremidade da viga é engastada, enquanto a outra é submetida a diversos valores de força concentrada P , seja na simulação como chapa ou placa, conforme apresentado na Figura 18. Esta carga P , variável de 0 até 1000, sempre apresenta-se na direção conforme apresentado inicialmente, não se sendo alterada com o deslocamento da viga.

A viga é composta por material com módulo de elasticidade $E = 10^6$ e coeficiente de poisson $\nu = 0.3$.

Os valores para verificação são os resultados de deslocamento do ponto médio da extremidade livre da viga, sendo estes comparados com o obtido no trabalho de Wriggers e Gruttmann (1993).

Figura 18 - Viga em balanço



Fonte: Autor, 2019.

A malha utilizada no exemplo é apresentada na Figura 18. Vale ressaltar que este exemplo será resolvido com os modelos de cascas sem e com curvatura inicial.

8.2.3 Resultados para a formulação de casca sem curvatura inicial

Os resultados de deslocamento do ponto médio do lado em balanço da viga, em função da carga P aplicada são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 - Resultados de deflexão máxima da viga para elementos sem curvatura inicial

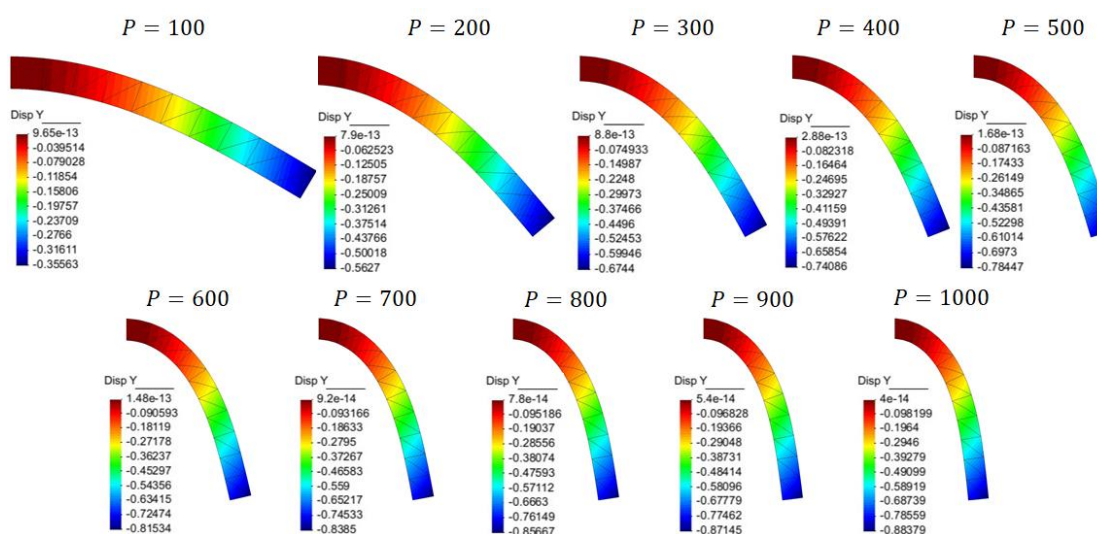
Valores de carga (P)	Deflexão do nó médio do lado livre da viga
0	0.0000000
100	0.3486360
200	0.5449280
300	0.648472
400	0.709285
500	0.748919

600	0.776924
700	0.797964
800	0.814533
900	0.828065
1000	0.839441

Fonte: Autor, 2019.

Na Figura 19 são apresentados os resultados dos deslocamentos da viga simulada como chapa, utilizando a formulação sem curvatura inicial.

Figura 19 - Resultados de deslocamento para a viga em balanço como chapa com modelo sem curvatura inicial



Fonte: Autor, 2019.

Os resultados de deslocamento do ponto médio do lado em balanço da viga como placa, em função da carga P aplicada são apresentados na Tabela 6.

Tabela 6- Resultados de deflexão máxima da viga simulada como placa para elementos sem curvatura inicial

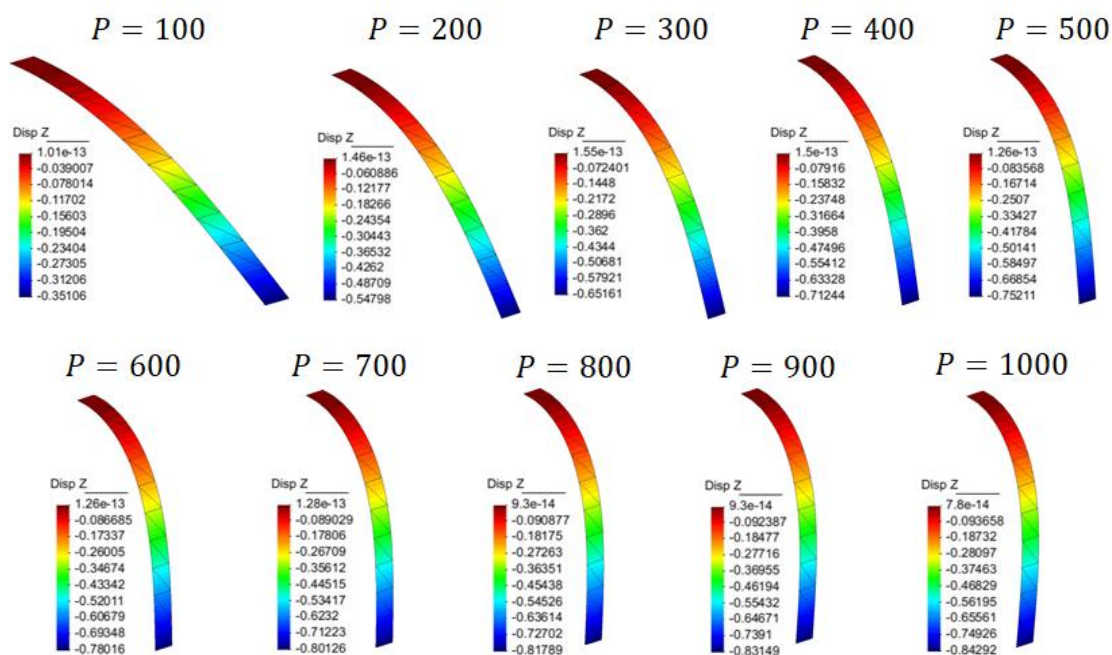
Valores de carga (P)	Deflexão do nó médio do lado livre da viga
0	0.000000
100	0.351064
200	0.547976
300	0.651607

400	0.712442
500	0.752110
600	0.780164
700	0.801262
800	0.817892
900	0.831487
1000	0.842923

Fonte: Autor, 2019.

Na Figura 20 são apresentados os resultados dos deslocamentos da viga simulada como placa, utilizando a formulação sem curvatura inicial.

Figura 20 - Resultados de deslocamento para a viga em balanço como placa com modelo sem curvatura inicial



Fonte: Autor, 2019.

8.2.4 Resultados para a formulação de casca com curvatura inicial

Os resultados de deslocamento do ponto médio do lado em balanço da viga, em função da carga P aplicada são apresentados na Tabela 7.

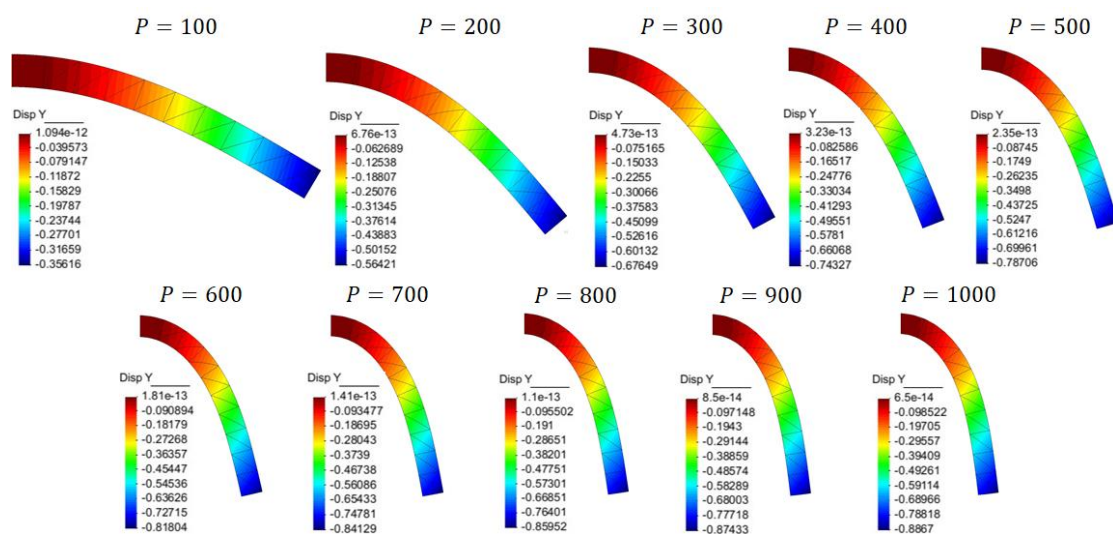
Tabela 7 - Resultados de deflexão máxima da viga para elementos com curvatura inicial

Valores de carga (P)	Deflexão do nó médio do lado livre da viga
0	0.0000000
100	0.3491520
200	0.5463600
300	0.6504550
400	0.7115680
500	0.7513800
600	0.7795030
700	0.8006280
800	0.8172610
900	0.8308430
1000	0.8422570

Fonte: Autor, 2019.

Na Figura 21 são apresentados os resultados dos deslocamentos da viga simulada como chapa, utilizando a formulação sem curvatura inicial.

Figura 21 - Resultados de deslocamento para a viga em balanço como chapa com modelo com curvatura inicial



Fonte: Autor, 2019.

Os resultados de deslocamento do ponto médio do lado em balanço da viga como placa, em função da carga P aplicada são apresentados na Tabela 8.

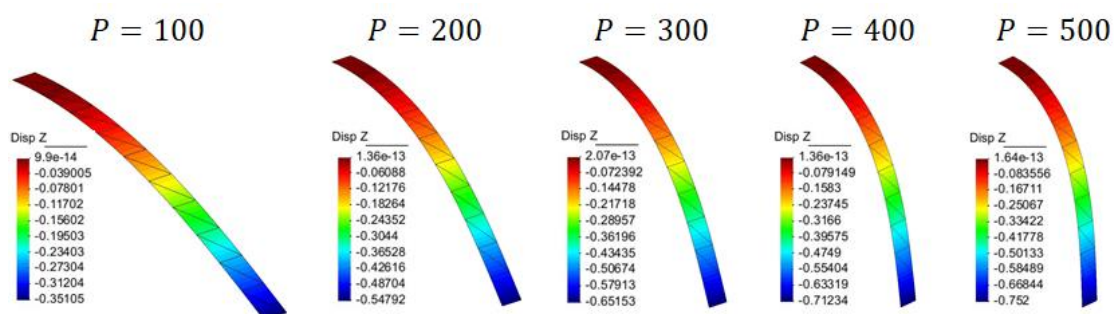
Tabela 8- Resultados de deflexão máxima da viga simulada como placa para elementos com curvatura inicial

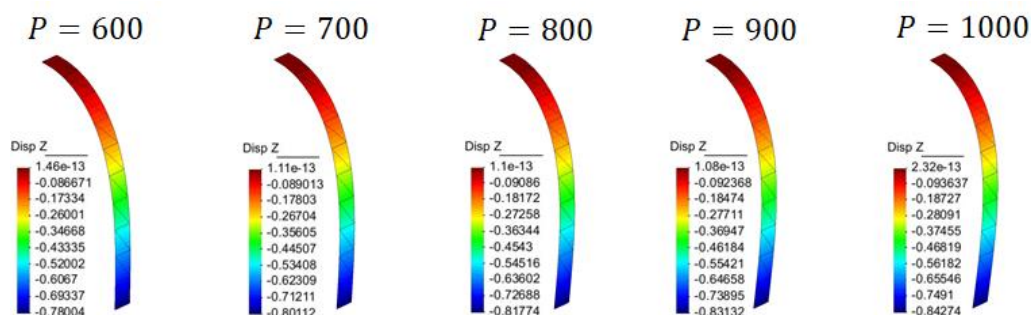
Valores de carga (P)	Deflexão do nó médio do lado livre da viga
0	0.000000
100	0.351047
200	0.547921
300	0.651526
400	0.712343
500	0.751997
600	0.780037
700	0.801121
800	0.817737
900	0.831317
1000	0.842265

Fonte: Autor, 2019.

Na Figura 22 são apresentados os resultados dos deslocamentos da viga simulada como placa, utilizando a formulação com curvatura inicial.

Figura 22 - Resultados de deslocamento para a viga em balanço como placa com modelo com curvatura inicial

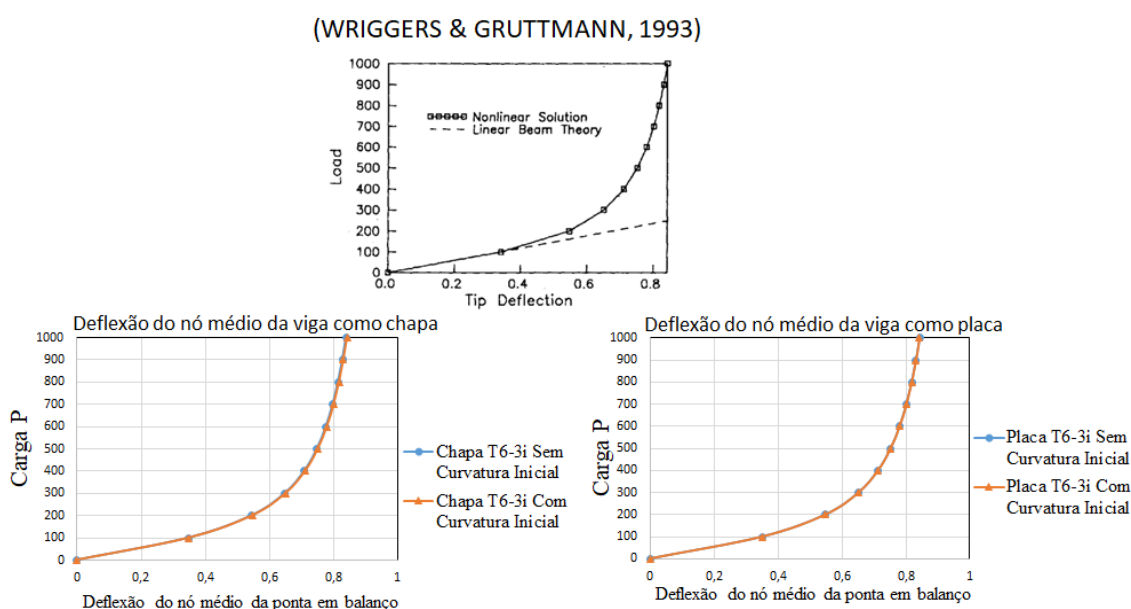




Fonte: Autor, 2019.

A plotagem dos valores obtidos nas Tabela 5 a Tabela 8 e os valores obtidos por Wriggers e Gruttmann (1993) são apresentados na Figura 23.

Figura 23 – Deflexão do ponto médio do lado em balanço da viga



Fonte: Autor, 2019.

8.2.5 Discussão dos resultados

Conforme observa-se visualmente na Figura 23 os resultados são basicamente idênticos para as duas teorias implementadas, seja na representação como chapa ou placa. Ao se comparar com o material de referência, observa-se a consistência da formulação com os dois modelos e com as duas formas de modelagem do problema.

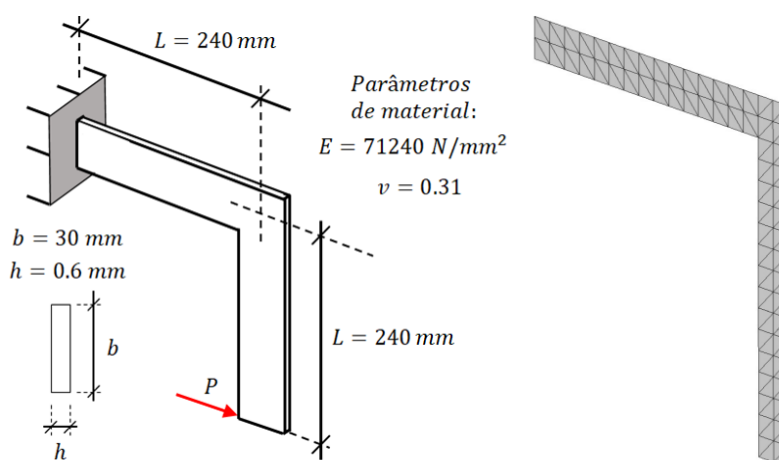
8.2.6 Flambagem lateral de uma chapa em L

O exemplo de flambagem lateral de uma chapa em L é utilizado para verificar a estabilidade lateral do elemento de casca. Este foi escolhido por Campello (2005) em conformidade ao visto para os elementos de casca de Simo, Fox e Rifai (1990) e Wriggers e

Gruttmann (1993), sendo estes tomados como materiais de comparação de resultados para os deslocamentos da extremidade livre da chapa.

Em relação ao modelo, a chapa possui formato em L, com dimensões conforme observado na Figura 24, sendo a malha apresentada na mesma figura. A chapa está em balanço e é solicitada por uma força concentrada P na sua extremidade livre, com uma carga infinitesimal aplicada na extremidade livre, perpendicularmente à carga P , apenas para inicializar o processo de flambagem lateral. Em relação ao material da chapa, este possui módulo de elasticidade $E = 71240 \text{ N/mm}^2$ e coeficiente de poisson $\nu = 0.31$.

Figura 24 - Flambagem lateral de uma chapa em L



Fonte: Autor, 2019.

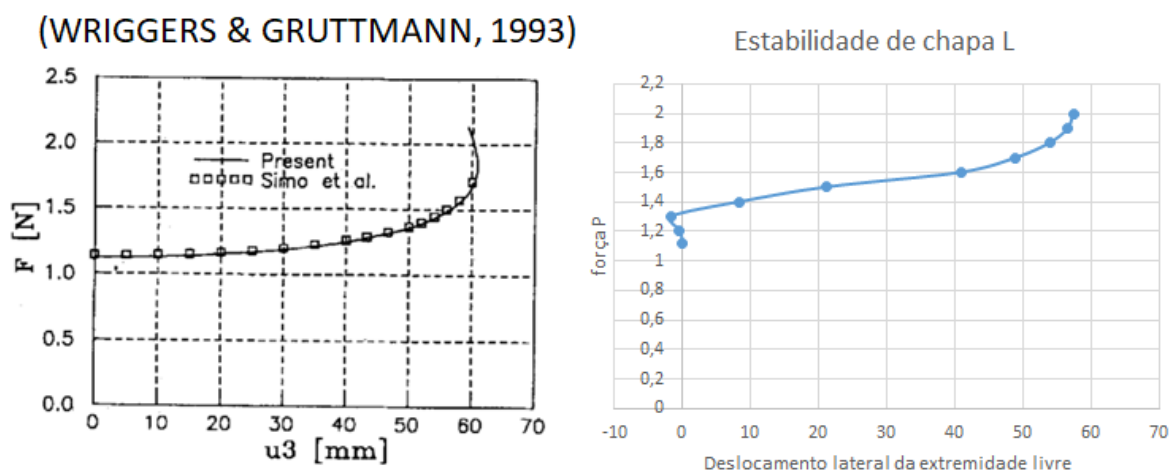
Vale ressaltar que este exemplo foi solucionado utilizando o elemento sem curvatura inicial.

8.2.7 Resultados para a formulação de casca sem curvatura inicial

Após análise, a força crítica quando não se aplica imperfeição transversal foi encontrada como $P_{Crit} = 1.120$. Este valor mostra-se em concordância com os encontrados de $P_{Crit} = 1.13$ por Campello (2005), $P_{Crit} = 1.137$ por Simo, Fox e Rifai (1990) e $P_{Crit} = 1.123$ por Wriggers e Gruttmann (1993).

Os resultados obtidos para os deslocamentos do nó mais externo da malha, na extremidade livre, são apresentados na Figura 25, sendo estes comparados com os resultados obtidos por Wriggers e Gruttmann (1993).

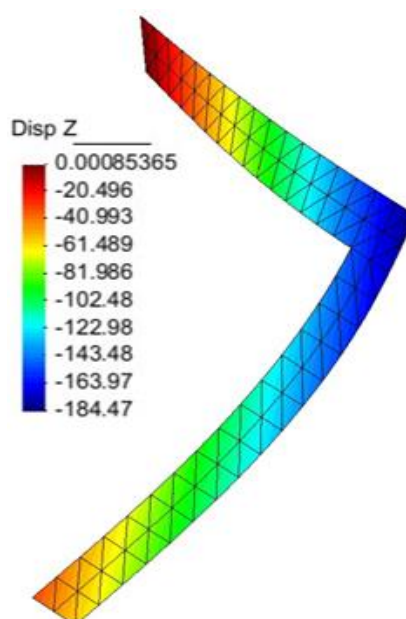
Figura 25 – Deslocamento lateral de uma chapa em L. Deslocamento lateral da extremidade livre



Fonte: Autor, 2019.

Na Figura 21 é apresentada a configuração deformada final para uma carga de $P = 2.0$.

Figura 26 – Deslocamento lateral de uma chapa em L. Deslocamento lateral da estrutura



Fonte: Autor, 2019.

8.2.8 Discussão dos resultados

Conforme observa-se na Figura 25, embora o valor final de deslocamento da extremidade livre seja próximo do esperado, o caminho da solução apresenta uma instabilidade inicial, com pequenos deslocamentos contrários ao esperado. Acredita-se que estes resultados inesperados indiquem a necessidade de realizar alguns pequenos ajustes no programa computacional desenvolvido. Porém, mesmo com a instabilidade inicial, a solução retoma o caminhamento relativamente similar ao observado em Wriggers e Gruttmann (1993) e atinge valores finais visualmente próximos aos observados no material de referência.

9 Conclusões

As formulações verificadas no trabalho foram apresentadas originalmente na tese de doutorado de Campello (2005). No que se refere à demonstração da formulação, foram encontradas as mesmas equações do trabalho tomado como base para os vetores de força interna e externa e para as matrizes de rigidez constitutivas, geométricas e de carga externa tanto para o modelo de casca sem curvatura, quanto para o modelo de casca com curvatura. Vale ressaltar que em determinados momentos o presente trabalho apresentou a formulação dada com os tensores de forma aberta, sem notação indicial, diferentemente do apresentado no trabalho base de Campello (2005). Esta forma diferenciada de apresentação foi utilizada visando uma maior facilidade de compreensão por parte do leitor na obtenção das equações dos modelos de cascas com e sem curvatura inicial.

No que se refere ao equilíbrio da estrutura em análise, observou-se que a formulação é consistente nas deformações, tomando como parâmetros de convergência a energia do sistema e o módulo do vetor de força residual. No trabalho base, é indicado por Campello, Pimenta e Wriggers (2003) a utilização apenas do parâmetro de força residual como critério de parada. Vale ressaltar que foi observada convergência quadrática nos exemplos analisados, consistente com o esperado do método de Newton.

Em relação aos resultados obtidos nos exemplos, onde a comparação foi realizada com elementos sem e com curvatura, as duas formulações foram consistentes e apresentaram valores praticamente idênticos. No entanto, verificou-se que a quantidade de iterações de Lagrange e Newton para o exemplo com grandes rotações foi consideravelmente superior quando utilizado o elemento sem curvatura.

Ao longo da pesquisa, foram observados valores negativos em algumas posições da diagonal principal matriz de rigidez geométrica, sendo que, estas mesmas posições na matriz de rigidez constitutiva apresentaram valores positivos. Em todos os casos, observou-se que a matriz de rigidez constitutiva do elemento possui valores suficientemente altos para garantir que a matriz de rigidez total apresente valores positivos na diagonal principal. Desta forma, a estrutura apresenta rigidez suficiente para suportar as cargas aplicadas nos exemplos, mesmo com estes termos negativos na diagonal principal da matriz geométrica.

Pretende-se em trabalhos futuros, analisar a demonstração do tensor \mathbf{G}_α de forma aprofundada, verificando a questão da existência de termos negativos na diagonal principal da matriz de rigidez geométrica. Ainda para trabalhos futuros, pretende-se utilizar algoritmos de programação em paralelo, buscando uma redução do tempo global de análise. Por fim, pretende-se utilizar as formulações das cascas implementadas reescrevendo-as para sistemas dinâmicos

de casca, em conjunto com formulações de contato mecânico utilizando o NURBS para suavização de superfícies.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AJEJE, F. (2009). **Abordagem orientada a objetos para implementação computacional de elementos finitos de cascas planas**. Minas Gerais, *Dissertação (Mestrado) – Programa de pós-graduação em engenharia de estruturas*. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais.
- AMBROZIAK, A. (2014). **Locking effects in the finite element method**. Em W. G. Pietraszkiewicz, *Shell Structures: Theory and Applications* (Vol. 3, pp. 369-372). London: Taylor & Francis Group.
- AXELSSON, O. K. (2001). **Error norm estimation and stopping criteria in preconditioned conjugate gradient iterations**. *Numerical Linear Algebra With Applications*, 22, 265-286.
- BANDEIRA, A. (2001). **Análise de problemas de contato com atrito em 3D** (Doutorado) – Programa de pós-graduação em engenharia de estruturas e fundações. São Paulo: Escola politécnica da Universidade de São Paulo.
- BARRET, R. B. (1994). **Templates for the solution of linear systems**: buildings blocks for iteratives methods. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- BASAR, Y.; DING, Y. (1992). **Finite rotation shell elements for the analysis of finite rotation shell problems**. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 165-169.
- BENZI, M. (2002). **Preconditioning Techniques for Large Linear Systems: A Survey**. *Journal of Computational Physics*, 182, 418–477.
- BHATIA, R. (2007). **Positive Definite Matrices**. Reino Unido: Princeton University Press.
- BÎRSAN, M., & NEFF, P. (2014). **Existence of minimizers in the geometricallu non-linear 6-parameter resultant shell theory with drilling rotations**. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 376-397.
- BREZINSKI, C. W. (2001). **Numerical Analysis: Historical Developments in the 20th Century**. Amsterdam: Elsevier Science B. V.
- BURZYNSKI, S.; CHRÓSCIELEWSKI, J.; WITKOWSKI, W. (2014). **Elastoplastic material law in 6-parameter nonlinear shell theory**. Em W. PIETRASZKIEWICZ, & J. GÓRSKI (Ed.), *Shell Structures: Theory and Applications*. 3, pp. 377-380. Londres: Taylor & Francis Group.
- BÜTCHER, N.; RAMM, E. (1992). **Shell theory versus degeneration – a comparison in large rotation finite element analysis**. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 39-59.

- CAMPELLO, E. (2005). **Modelos não-lineares de casca em elasticidade e elastoplasticidade com grandes deformações: teoria e implementação em elementos finitos** *Tese (Doutorado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundação*. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- CAMPELLO, E. M.; PIMENTA, P. M.; WRIGGERS, P. (2003). **A triangular finite shell element based on a fully nonlinear shell formulation**. *Computational Mechanics*, 31, 505-518.
- CAMPELLO, E. M.; PIMENTA, P. M.; WRIGGERS, P. (2007). **Elastic–plastic analysis of metallic shells at finite strains**. *Revista Escola de Minas*, 381-389.
- CAMPELLO, E. M.; PIMENTA, P. M.; WRIGGERS, P. (2008). **An exact conserving algorithm for nonlinear dynamics with rotational DOFs and general hyperelasticity**. Part 2: shells. *Computational Mechanics*, 195-211.
- CHROSCIELEWSKI, J. M. (1992). **Genuinely resultant shell finite elements accounting for geometric and material non-linearity**. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*(35), 63–94.
- CHRÓSCIELEWSKI, J.; KREJA, I.; SABIK, A.; WITKOWSKI, W. (2010). **Laminated shells in nonlinear six-parameter shell theory**. Em W. PIETRASZKIEWICZ, & I. KREJA (Ed.), *Shell Structures: Theory and Applications*. 2, pp. 229-232. Londres: Taylor & Francis Group.
- CHRÓSCIELEWSKI, J.; MAKOWSKI, J.; PIETRASZKIEWICZ, W. (2004). **Statics and dynamics of multifold shells: Nonlinear theory and finite element method**. Warsaw: Wydawnictwo IPPT PAN.
- CHROSCIELEWSKI, J.; MAKOWSKI, J.; STUMPF, H. (1992). **Genuinely resultant shell finite elements accounting for geometric and material non-linearity**. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63-94.
- CIARLET, P. (1988). **Mathematical Elasticity**. Amsterdam: North Holland.
- COOK, R.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. (1989). **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. New York: John Wiley & sons.
- COWPER, G. (1973). **GAUSSIAN QUADRATURE FORMULAS FOR TRIANGLES**. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 7, 405-408.
- FLETCHER, R. (1976). **Conjugate Gradient Methods for Indefinite Systems Lecture Notes in Mathematics**. *Numerical Analysis – Proceedings of the Dundee Conference on Numerical Analysis*. Berlin: Springer.

- FLORES, A. P. (2011). **Cálculo Variacional: Aspectos teóricos e aplicações**. *Programa de pós-graduação – Mestrado profissional em matemática universitária do departamento de matemática*. Rio Claro: Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filhos”.
- FUNG, Y.; SCHLER, E. (1974). **Thin shell structures**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- HACKBUSH, W. (2016). **Iterative Solution of Large Sparse Systems of Equations** (2 ed.). Suíça: Springer.
- HESTENES, M. R. (1951). **Iterative Methods for Solving Linear Equations**. National Bureau of Standards.
- HUGHES, T. J.; BREZZI, F. (1989). **ON DRILLING DEGREES OF FREEDOM**. *COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING*, 72, 105-121.
- ITSKOV, M. (2009). **Tensor Algebra And Tensor Analysis For Engineers, With Applications to Continuum Mechanics** (2 ed.). Berlim: Springer.
- KLINKEL, S. G. (2006). **A robust non-linear solid shell element based on a mixed variational formulation**. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*(195), 179-201.
- KULIKOV, G. P. (2016). **Hybrid-mixed ANS finite elements for stress analysis of laminated composite structures: Sampling surfaces plate formulation**. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*(303), 374-399.
- Kwon, Y., & all, e. (2013). **Comprehensive Interpretation of a Three-Point Gauss Quadrature with Variable Sampling Points and Its Application to Integration for Discrete Data**. *Journal of Applied Mathematics*, 2013.
- LANCZOS, C. (1950). **An Iteration Method for the Solution of the Eigenvalue Problem of Linear Differential and Integral Operators**. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 255-282.
- LANCZOS, C. (1952). **Solution of systems of linear equations by minimized iterations**. *J. Res. Nat. Bur. Standards*, 33-53.
- LEE, F. P. (2002). **Performance of Jacobi preconditioning in Krylov subspace solution of finite element equations**. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 26, 341-372.
- LIBAI, A.; SIMMONDS, J. (1983). **Nonlinear elastic shell theory**. *Adv. Appl. Mech.*, 271-371.
- LIBAI, A.; SIMMONDS, J. (1998). **The nonlinear theory of elastic shells** (2 ed.). Cambridge: Cambridge University Press.
- LUENBERGER, D. Y. (2008). **Linear and Nonlinear Programming** (3 ed.). Nova York: Springer.

- MACNEAL, R. H.; HARDER, R. L. (1985). **A proposed standard set of problems to test FE accuracy.** *Finite Elements in Analysis and Design*, 3-20.
- MAGNUS, R. S. (1952). **Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems.** *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 409-436.
- MAKOWSKI, J., CHROSCIELEWSKI, J., & STUMPF, H. (1992). **Computational analysis of shells undergoing large elastic deformation.** Part I: Theoretical foundations. *Mitt. Institut für Mechanik*.
- MOREIRA, M. d. (2009). **Parametrização das rotações em teorias de barras e cascas.** (Doutorado) – Programa de pós-graduação em engenharia de estruturas e fundações. São Paulo: Escola politécnica da Universidade de São Paulo.
- OÑATE, E. Z. (1994). **A simple triangular element for thick and thin plate and shell analysis.** *Int. J. Numer. Meth. Eng.*(37), 2569–2582.
- PIMENTA, P. M. (1993). **Geometrically exact analysis of spatial frames .** *Appl Mech Rev*, 118-128.
- PIMENTA, P. M. (2006). **Fundamentos da Mecânica dos Sólidos e das Estruturas.** *Notas de Aula SET 5865 – Análise Não Linear de Estruturas.* . São Paulo: Universidade de São Paulo, Escola Politécnica, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações.
- PIMENTA, P. M. (s.d.). **On a geometricall-exact finite-strain shell model.** *Proceedings of the 3rd Pan-American Congress of Applied Mechanics.* São Paulo: III PACAM.
- PRESS, W. T. (1997). **Numerical Recipes: The art of Scientific Computing** (2 ed.). Cambridge: Cambridge University Press.
- REDDY, J. N. (2013). **An introduction to continuum mechanics** (2^a ed.). Nova York: Cambridge University Press.
- REID, J. (1971). **On the Method of Conjugate Gradients for the Solution of Large Sparse Systems of Linear Equations.** Em J. REID, *Large Sparse Sets of Linear Equations* (pp. 231–254). London and New York: Academic Press.
- REISMANN, H. (1988). **Elastic Plates: Theory and Application.** New York: John Wiley & Sons.
- SCHEWCHUK, J. R. (1994). **An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain.** Notas de aula. *School of Computer Science Carnegie Mellon University*, 58. Pittsburgh.
- SIMO, J. C.; FOX, D. D.; RIFAI, M. S. (1990). **On a stress resultant geometrically exact shell model. Part III: computational aspects of the nonlinear theory.** *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 21-70.

- SIMO, J.; HUGHES, T. (1991). **Plasticity and viscoplasticity: Numerical analysis and computational aspects.** Berlin: Springer-Verlag.
- STANDER, N.; MATZENMILLER, A.; RAMM, E. (1989). **An assessment of assumed strain methods in finite rotation shell problems.** *Eng. Comput.*, 58-66.
- STIEFEL, E. (1952). **Über einige Methoden der Relaxationsrechnung.** *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik* 3, 1–33.
- SZE, K. Y.; CHAN, W. K.; PIAN, T. H. (2002). **An 8-node hybrid-stress solid-shell element for geometric nonlinear analysis of elastic shells.** *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 853-878.
- TIMOSHENKO, S. G. (1980). **Teoria da Elasticidade** (3^a ed.). Rio de Janeiro: Guanabara Dois.
- TIMOSHENKO, S. P.; WIONOWSKY-KRIEGER. (1959). **Theory of plates and shells.** New York: McGraw-Hill.
- VISHWAKARMA, A. V. (2014). **Estimation of errors in iterative solutions of a non-symmetric linear system.** *Advances in Linear Algebra & Matrix Theory*, 21.
- WRIGGERS, P.; GRUTTMANN, F. (1993). **Thin shells with finite rotations formulated in Biot stresses: theory and finite element formulation.** *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 2049-2071.
- ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, R. (2000). **The Finite Element Method** (5 ed., Vol. 2). Oxford: ButterWorth-Heinemann.

APÊNDICE A

O presente anexo tem como objetivo apresentar uma propriedade da álgebra utilizada no presente trabalho como um dos passos para demonstração de $\hat{\eta}_\alpha^r$.

Assuma inicialmente dois vetores genéricos não-paralelos \mathbf{v} e \mathbf{k} dados por:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}; \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.01})$$

O produto vetorial destes vetores assumirá a forma

$$\mathbf{k} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{k}. \quad (\text{A.02})$$

O produto vetorial pode ser representado em forma tensorial como

$$\mathbf{K}\mathbf{v} = -\mathbf{V}\mathbf{k}, \quad (\text{A.03})$$

onde

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.04})$$

Conforme observado acima, o tensor \mathbf{V} é antissimétrico, valendo assim a propriedade para tensores antissimétricos $-\mathbf{V} = \mathbf{V}^T$, logo

$$\mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{V}^T\mathbf{k}. \quad (\text{A.05})$$

APÊNDICE B

O presente anexo tem por objetivo apresentar uma propriedade utilizada na demonstração da parcela de não linearidade geométrica apresentada na seção 4.5.4.1. Esta propriedade é também apresentada em (CAMPELLO E. , 2005).

Comecemos pela consideração da equação apresentada na seção 4.5.4.1,

$$\frac{\partial \Gamma^T}{\partial \theta} = \delta^* \Gamma^T = \frac{\partial (\mathbf{I} - h_2 \theta + h_3 \theta^2)}{\partial \theta}. \quad (\text{B.1})$$

Aplicando a regra da cadeia e do produto de derivação, obtemos

$$\delta^* \Gamma^T = -\delta^* h_2 \delta^* \theta \theta - h_2 \delta^* \theta + \delta^* h_3 \delta^* \theta \theta^2 + h_3 (\delta^* \theta \theta + \theta \delta^* \theta). \quad (\text{B.2})$$

Observando a equação acima, observa-se que é necessária a determinação de $\delta^* h_2$ e $\delta^* h_3$.

Comecemos por

$$\frac{\delta^* h_2}{\theta} = \left[\delta^* \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) \right] / \theta. \quad (\text{B.3})$$

Realizando a derivação, considerando a regra do quociente, obtemos

$$\frac{\delta^* h_2}{\theta} = \left(\frac{\sin \theta}{\theta} - \frac{2(1 - \cos \theta)}{\theta^2} \right) / \theta^2 \quad (\text{B.4})$$

ou, considerando (2.29) e (2.30),

$$\frac{\delta^* h_2}{\theta} = h_4 = (h_1 - 2h_2) / \theta^2. \quad (\text{B.5})$$

Considere agora

$$\frac{\delta^* h_3}{\theta} = \left[\delta^* \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) \right] / \theta \quad (\text{B.6})$$

ou, realizando as derivações,

$$\frac{\delta^* h_3}{\theta} = \left[\left(\frac{(1 - \cos \theta) \theta^3 - (\theta - \sin \theta) 3\theta^2}{\theta^6} \right) \right] / \theta. \quad (\text{B.7})$$

Reorganizando os termos da equação acima, obtêm-se

$$\frac{\delta^* h_3}{\theta} = \left(\frac{(1 - \cos \theta)}{\theta^2} - \frac{3(\theta - \sin \theta)}{\theta^3} \right) / \theta^2 \quad (\text{B.8})$$

e, utilizando, (2.30) e (2.31),

$$\frac{\delta^* h_3}{\theta} = h_5 = (h_2 - 3h_3) / \theta^2. \quad (\text{B.9})$$

Substituindo as equações (B.5) e (B.9) em (B.2), considerando que

$$\delta^* \theta = \frac{(\theta \cdot \delta^* \theta)}{\theta}, \quad (\text{B.10})$$

e manipulando um pouco os termos, encontramos

$$\begin{aligned} \delta^* \Gamma^T = & -h_2 \delta^* \boldsymbol{\theta} + h_3 (\delta^* \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \delta^* \boldsymbol{\theta}) - \frac{[(h_1 - 2h_2)/\theta^2]}{\theta} (\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta} \\ & + \frac{[(h_2 - 3h_3)/\theta^2]}{\theta} (\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta}^2. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

ou,

$$\begin{aligned} \delta^* \Gamma^T = & -h_2 \delta^* \boldsymbol{\theta} + h_3 (\delta^* \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \delta^* \boldsymbol{\theta}) - h_4 (\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta} \\ & + h_5 (\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta}^2. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Multiplicando a equação acima por um vetor genérico $\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\theta})$,

$$\begin{aligned} \delta^* \Gamma^T \mathbf{t} = & [-h_2 \delta^* \boldsymbol{\theta} + h_3 (\delta^* \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \delta^* \boldsymbol{\theta}) - h_4 (\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta} \\ & + h_5 (\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta}^2] \mathbf{t}. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

A equação acima pode ser reorganizada com o objetivo de evidenciar $\delta^* \boldsymbol{\theta}$. Com este objetivo em mente, realizamos o produto e obtemos

$$\begin{aligned} \delta^* \Gamma^T \mathbf{t} = & [-h_2 \delta^* \boldsymbol{\theta} \mathbf{t} + h_3 (\delta^* \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \delta^* \boldsymbol{\theta}) \mathbf{t} - h_4 (\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta} \mathbf{t} \\ & + h_5 (\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta}^2 \mathbf{t}]. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

A primeira parcela a ser reorganizada trata-se de $-h_2 \delta^* \boldsymbol{\theta} \mathbf{t}$, que pode ser obtida ao se reorganizar o produto do tensor anti-simétrico como um produto vetorial, obtendo-se,

$$-h_2 \delta^* \boldsymbol{\theta} \mathbf{t} = -h_2 \delta^* \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{t} = h_2 (\mathbf{t} \times \delta^* \boldsymbol{\theta}). \quad (\text{B.15})$$

Reorganizando como um produto de tensor anti-simétrico, podemos escrever que

$$h_2 (\mathbf{t} \times \delta^* \boldsymbol{\theta}) = h_2 \mathbf{T} \delta^* \boldsymbol{\theta}, \quad (\text{B.16})$$

onde $\mathbf{T} = \text{skew}(\mathbf{t})$.

A segunda parcela a ser reorganizada trata-se de

$$h_3 (\delta^* \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \delta^* \boldsymbol{\theta}) \mathbf{t} = h_3 (\delta^* \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta} \mathbf{t} + \boldsymbol{\theta} \delta^* \boldsymbol{\theta} \mathbf{t}). \quad (\text{B.17})$$

Novamente, abrindo o produtos de tensores anti-simétricos em produtos vetoriais, podemos obter

$$h_3 (\delta^* \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \delta^* \boldsymbol{\theta}) \mathbf{t} = h_3 [\delta^* \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{t}) + \boldsymbol{\theta} \times (\delta^* \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{t})]. \quad (\text{B.18})$$

Os produtos vetoriais de (B.18) podem ser abertos em produtos escalares, conforme fórmula de Lagrange, de modo a se obter

$$\begin{aligned} & h_3 (\delta^* \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \delta^* \boldsymbol{\theta}) \mathbf{t} \\ & = h_3 [-(\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta}) \mathbf{t} + (\mathbf{t} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta} - (\delta^* \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{t} + (\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\theta}) \delta^* \boldsymbol{\theta}]. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Após alguma manipulação com os produtos escalares, podemos chegar a

$$h_3 (\delta^* \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \delta^* \boldsymbol{\theta}) \mathbf{t} = h_3 [-2(\mathbf{t} \otimes \boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\theta} \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t}^T \otimes \boldsymbol{\theta}^T] \delta^* \boldsymbol{\theta}. \quad (\text{B.20})$$

Esta equação é ainda equivalente a

$$h_3(\delta^* \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \delta^* \boldsymbol{\theta}) \mathbf{t} = h_3[\mathbf{T} \boldsymbol{\theta} - 2 \boldsymbol{\theta} \mathbf{T}] \delta^* \boldsymbol{\theta}. \quad (\text{B.21})$$

A terceira parcela a ser reordenada trata-se de

$$-h_4(\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta} \mathbf{t} = -h_4 \boldsymbol{\theta} \mathbf{t} (\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta}). \quad (\text{B.22})$$

Abrindo o produto escalar em função de produto de vetores obtemos

$$-h_4(\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta} \mathbf{t} = -h_4(\boldsymbol{\theta} \mathbf{t}) \boldsymbol{\theta}^T \delta^* \boldsymbol{\theta} \quad (\text{B.23})$$

ou, considerando o possível produto diádico,

$$-h_4(\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta} \mathbf{t} = -h_4(\boldsymbol{\theta} \mathbf{t}) \otimes \boldsymbol{\theta} \delta^* \boldsymbol{\theta}. \quad (\text{B.24})$$

A última parcela a ser determinada possui uma demonstração análoga à terceira parcela, sendo assim, apresenta-se apenas seu resultado como

$$h_5(\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta}^2 \mathbf{t} = h_5(\boldsymbol{\theta}^2 \mathbf{t}) \otimes \boldsymbol{\theta} \delta^* \boldsymbol{\theta}. \quad (\text{B.25})$$

Determinadas todas as parcelas, podemos reescrever (B.14) em função de (B.16), (B.21), (B.24) e (B.25) como

$$\begin{aligned} \delta^* \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{t} = & [h_2 \mathbf{T} + h_3(\mathbf{T} \boldsymbol{\theta} - 2 \boldsymbol{\theta} \mathbf{T}) - h_4(\boldsymbol{\theta} \mathbf{t}) \otimes \boldsymbol{\theta} + \\ & h_5(\boldsymbol{\theta}^2 \mathbf{t}) \otimes \boldsymbol{\theta}] \delta^* \boldsymbol{\theta}. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

A equação (B.26) pode ser reescrita como

$$\delta^* \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{t} = \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{t}) \delta^* \boldsymbol{\theta}, \quad (\text{B.27})$$

onde

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{t}) = h_2 \mathbf{T} + h_3(\mathbf{T} \boldsymbol{\theta} - 2 \boldsymbol{\theta} \mathbf{T}) - h_4(\boldsymbol{\theta} \mathbf{t}) \otimes \boldsymbol{\theta} + h_5(\boldsymbol{\theta}^2 \mathbf{t}) \otimes \boldsymbol{\theta}. \quad (\text{B.28})$$

(CAMPELLO E. , 2005) apresenta outra propriedade de $\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{t})$, sendo esta que

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{t}) = \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{t})^T + \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{T} \boldsymbol{\Gamma}. \quad (\text{B.29})$$

APÊNDICE C

Neste anexo apresentaremos o resultado para a derivação $\delta^*(\mathbf{\Gamma}_{,\alpha}^T)$. Iniciamos pela derivação interna,

$$\mathbf{\Gamma}_{,\alpha}^T = -h_2 \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} + h_3 (\boldsymbol{\theta}_{,\alpha} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) - h_4 (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \boldsymbol{\theta} + h_5 (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \boldsymbol{\theta}^2, \quad (\text{C.1})$$

obtida de forma análoga à equação (B.12). Após a obtenção da equação acima, é necessário realizar a segunda derivação

$$\begin{aligned} \delta^* \mathbf{\Gamma}_{,\alpha}^T &= \delta^* [-h_2 \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} + h_3 (\boldsymbol{\theta}_{,\alpha} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) - h_4 (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \boldsymbol{\theta} \\ &\quad + h_5 (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \boldsymbol{\theta}^2]. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Considerando as regras de cadeia e produto nas derivações, esta equação terá como resultado inicial

$$\begin{aligned} \delta^* \mathbf{\Gamma}_{,\alpha}^T &= -\delta^*(h_2) \frac{(\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta})}{\theta} \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} - h_2 \delta^* \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} \\ &\quad + \delta^*(h_3) \frac{(\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta})}{\theta} (\boldsymbol{\theta}_{,\alpha} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \\ &\quad + h_3 (\delta^* \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} \delta^* \boldsymbol{\theta} + \delta^* \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} + \boldsymbol{\theta} \delta^* \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \\ &\quad - \delta^*(h_4) \frac{(\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta})}{\theta} (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \boldsymbol{\theta} \\ &\quad - h_4 [(\delta^* \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} + \boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \boldsymbol{\theta} + (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \delta^* \boldsymbol{\theta}] \\ &\quad + \delta^*(h_5) \frac{(\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta})}{\theta} (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \boldsymbol{\theta}^2 \\ &\quad + h_5 [(\delta^* \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} + \boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \boldsymbol{\theta}^2 \\ &\quad + (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) (\delta^* \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \delta^* \boldsymbol{\theta})], \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

As divisões das derivadas $\delta^*(h_2)/\theta$ e $\delta^*(h_3)/\theta$ já foram obtidas no anexo anterior, possuindo como resultado as equações (B.5) e (B.9), respectivamente. A parcela com derivada

$$\frac{\delta^*(h_4)}{\theta} = \frac{\delta^* \left(\frac{\text{sen } \theta / \theta - 2(1 - \text{cos } \theta) / \theta^2}{\theta^2} \right)}{\theta} \quad (\text{C.4})$$

será obtida neste momento. Inicia-se realizando a derivação, obtendo

$$\frac{\delta^*(h_4)}{\theta} = \frac{\frac{\text{cos } \theta \theta^3 - 3 \text{sen } \theta \theta^2}{\theta^6} - 2 \left[\frac{\text{sen } \theta \theta^4 - 4\theta^3(1 - \text{cos } \theta)}{\theta^8} \right]}{\theta} \quad (\text{C.5})$$

Utilizando como denominador comum θ^2 e após algumas manipulações, obtemos

$$\frac{\delta^*(h_4)}{\theta} = \frac{\frac{\text{cos } \theta}{\theta^2} - \frac{5 \text{sen } \theta}{\theta^3} + \frac{8(1 - \text{cos } \theta)}{\theta^4}}{\theta^2}. \quad (\text{C.6})$$

Adicionando dois termos que não alteram a igualdade, temos

$$\frac{\delta^*(h_4)}{\theta} = \frac{\frac{\cos \theta}{\theta^2} - \frac{5 \operatorname{sen} \theta}{\theta^3} + \frac{8(1 - \cos \theta)}{\theta^4} + \frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^2}}{\theta^2} \quad (\text{C.7})$$

Ou, redirecionando os termos adicionados, podemos escrever

$$\frac{\delta^*(h_4)}{\theta} = \frac{\frac{\cos \theta - 1}{\theta^2} - \frac{\operatorname{sen} \theta / \theta - 1}{\theta^2} + \frac{8(1 - \cos \theta)}{\theta^4} - \frac{4 \operatorname{sen} \theta}{\theta^3}}{\theta^2}. \quad (\text{C.8})$$

Considerando as equações (2.29) a (2.31), temos

$$\frac{\delta^*(h_4)}{\theta} = \frac{-h_2 - h_3 + \frac{8(1 - \cos \theta) / \theta^2 - 1}{\theta^2} - \frac{4 \operatorname{sen} \theta / \theta}{\theta^2}}{\theta^2} \quad (\text{C.9})$$

ou,

$$\frac{\delta^*(h_4)}{\theta} = \frac{-h_2 - h_3 + 4 \left(\frac{2h_2 - h_1}{\theta^2} \right)}{\theta^2}. \quad (\text{C.10})$$

Por fim, considerando (2.32) e (2.34),

$$\frac{\delta^*(h_4)}{\theta} = h_6 = \frac{-h_2 - h_3 + 4h_4}{\theta^2}. \quad (\text{C.11})$$

Demonstra-se agora a parcela

$$\frac{\delta^*(h_5)}{\theta} = \delta^* \left[\frac{h_2(\theta) - 3h_3(\theta)}{\theta^2} \right] / \theta. \quad (\text{C.12})$$

Aplicando a derivação temos

$$\frac{\delta^*(h_5)}{\theta} = \{ [\delta^*(h_2(\theta)) - 3\delta^*(h_3(\theta))] \theta^2 - 2\theta[h_2(\theta) - 3h_3(\theta)] \} / \theta^5. \quad (\text{C.13})$$

Considerando que as derivações $\delta^*h_2(\theta)$ e $\delta^*h_3(\theta)$ já foram obtidas em (B.5) e (B.9), podemos escrever que

$$\frac{\delta^*(h_5)}{\theta} = \{ [h_4(\theta)\theta - 3h_5(\theta)\theta] \theta^2 - 2\theta[h_2(\theta) - 3h_3(\theta)] \} / \theta^5. \quad (\text{C.14})$$

Subdividindo em parcelas, podemos escrever

$$\frac{\delta^*(h_5)}{\theta} = \{ [h_4(\theta) - 3h_5(\theta)] \} / \theta^2 - \{ 2[h_2(\theta) - 3h_3(\theta)] \} / \theta^4 \quad (\text{C.15})$$

Ou, reorganizando o segundo termo,

$$\frac{\delta^*(h_5)}{\theta} = \{ [h_4(\theta) - 3h_5(\theta)] \} / \theta^2 - \frac{\{ 2[h_2(\theta) - 3h_3(\theta)] \} / \theta^2}{\theta^2}. \quad (\text{C.16})$$

Considerando a equação (2.33), podemos reorganizar (C.16) de modo a obter

$$\frac{\delta^*(h_5)}{\theta} = \frac{[h_4(\theta) - 3h_5(\theta)]}{\theta^2} - \frac{2h_5(\theta)}{\theta^2}. \quad (\text{C.17})$$

Agrupando os termos e considerando a equação (2.35),

$$\frac{\delta^*(h_5)}{\theta} = h_7 = \frac{[h_4(\theta) - 5h_5(\theta)]}{\theta^2}. \quad (\text{C.18})$$

Substituindo as equações (B.5), (B.9), (C.11), (C.18) em (C.3), podemos reescrever esta como

$$\begin{aligned} \delta^* \mathbf{\Gamma}^T_{,\alpha} = & -h_4(\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} - h_2 \delta^* \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} + h_5(\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\theta}_{,\alpha} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \\ & + h_3(\delta^* \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} \delta^* \boldsymbol{\theta} + \delta^* \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} + \boldsymbol{\theta} \delta^* \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \\ & - h_6(\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \boldsymbol{\theta} \\ & - h_4[(\delta^* \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} + \boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \boldsymbol{\theta} + (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \delta^* \boldsymbol{\theta}] \\ & + h_7(\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \boldsymbol{\theta}^2 \\ & + h_5[(\delta^* \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} + \boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \boldsymbol{\theta}^2 \\ & + (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha})(\delta^* \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \delta^* \boldsymbol{\theta})], \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Como $\delta^* \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} = \mathbf{0}$ e $\delta^* \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} = \mathbf{0}$ já que $\delta \mathbf{d}$ é um campo linear (conforme apresentado em (CAMPELLO, PIMENTA, & WRIGGERS, A triangular finite shell element based on a fully nonlinear shell formulation, 2003)), temos

$$\begin{aligned} \delta^* \mathbf{\Gamma}^T_{,\alpha} = & -h_4(\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} + h_5(\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\theta}_{,\alpha} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \\ & + h_3(\boldsymbol{\theta}_{,\alpha} \delta^* \boldsymbol{\theta} + \delta^* \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) - h_6(\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \boldsymbol{\theta} \\ & - h_4[(\delta^* \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \boldsymbol{\theta} + (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \delta^* \boldsymbol{\theta}] \\ & + h_7(\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \boldsymbol{\theta}^2 \\ & + h_5[(\delta^* \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \boldsymbol{\theta}^2 + (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha})(\delta^* \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \delta^* \boldsymbol{\theta})], \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Multiplicando-se $\delta^* \mathbf{\Gamma}^T_{,\alpha}$ por um vetor genérico $\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\theta})$, temos

$$\begin{aligned} \delta^* \mathbf{\Gamma}^T_{,\alpha} \mathbf{t} = & \{-h_4(\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} + h_5(\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\theta}_{,\alpha} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \\ & + h_3(\boldsymbol{\theta}_{,\alpha} \delta^* \boldsymbol{\theta} + \delta^* \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) - h_6(\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \boldsymbol{\theta} \\ & - h_4[(\delta^* \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \boldsymbol{\theta} + (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \delta^* \boldsymbol{\theta}] \\ & + h_7(\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \boldsymbol{\theta}^2 \\ & + h_5[(\delta^* \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \boldsymbol{\theta}^2 + (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha})(\delta^* \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \delta^* \boldsymbol{\theta})]\} \mathbf{t}. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Analogamente à lógica adotada para determinar as parcelas de $\delta^* \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{t}$, obtêm-se as parcelas

$$-h_4(\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} \mathbf{t} = -h_4(\boldsymbol{\theta}_{,\alpha} \mathbf{t} \otimes \boldsymbol{\theta}) \delta^* \boldsymbol{\theta}; \quad (\text{C.22})$$

$$h_5(\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\theta}_{,\alpha} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \mathbf{t} = h_5(\mathbf{T} \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} - 2 \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} \mathbf{T}) \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} \otimes \boldsymbol{\theta} \delta^* \boldsymbol{\theta}; \quad (\text{C.23})$$

$$h_3(\boldsymbol{\theta}_{,\alpha} \delta^* \boldsymbol{\theta} + \delta^* \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \mathbf{t} = h_3(\mathbf{T} \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} - 2 \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} \mathbf{T}) \delta^* \boldsymbol{\theta}; \quad (\text{C.24})$$

$$-h_6(\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^* \boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \boldsymbol{\theta} \mathbf{t} = -h_6(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \boldsymbol{\theta} \mathbf{t} \otimes \boldsymbol{\theta} \delta^* \boldsymbol{\theta}; \quad (\text{C.25})$$

$$\begin{aligned}
& -h_4[(\delta^*\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha})\boldsymbol{\theta} + (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha})\delta^*\boldsymbol{\theta}]t \\
& \quad = -h_4\boldsymbol{\theta}t \otimes \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}\delta^*\boldsymbol{\theta} - h_4(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha})T\delta^*\boldsymbol{\theta};
\end{aligned} \tag{C.26}$$

$$h_7(\boldsymbol{\theta} \cdot \delta^*\boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha})\boldsymbol{\theta}^2 = h_7(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha})\boldsymbol{\theta}^2t \otimes \boldsymbol{\theta}\delta^*\boldsymbol{\theta}; \tag{C.27}$$

$$\begin{aligned}
& h_5[(\delta^*\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha})\boldsymbol{\theta}^2 + (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha})(\delta^*\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}\delta^*\boldsymbol{\theta})]t \\
& \quad = h_5\boldsymbol{\theta}^2t \otimes \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}\delta^*\boldsymbol{\theta} + (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha})h_5(T\boldsymbol{\theta} - 2\boldsymbol{\theta}T)\delta^*\boldsymbol{\theta}.
\end{aligned} \tag{C.28}$$

Substituindo (C.22) a (C.28) em (C.21) obtemos

$$\begin{aligned}
\delta^*\boldsymbol{\Gamma}_{,\alpha}^T t &= -h_4(\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}t \otimes \boldsymbol{\theta})\delta^*\boldsymbol{\theta} + h_5(T\boldsymbol{\theta}_{,\alpha} - 2\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}T)\boldsymbol{\theta}_{,\alpha} \otimes \boldsymbol{\theta}\delta^*\boldsymbol{\theta} \\
& \quad + h_3(T\boldsymbol{\theta}_{,\alpha} - 2\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}T)\delta^*\boldsymbol{\theta} - h_6(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha})\boldsymbol{\theta}t \otimes \boldsymbol{\theta}\delta^*\boldsymbol{\theta} \\
& \quad - h_4\boldsymbol{\theta}t \otimes \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}\delta^*\boldsymbol{\theta} - h_4(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha})T\delta^*\boldsymbol{\theta} + h_7(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha})\boldsymbol{\theta}^2t \\
& \quad \otimes \boldsymbol{\theta}\delta^*\boldsymbol{\theta} + h_5\boldsymbol{\theta}^2t \otimes \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}\delta^*\boldsymbol{\theta} \\
& \quad + (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha})h_5(T\boldsymbol{\theta} - 2\boldsymbol{\theta}T)\delta^*\boldsymbol{\theta}.
\end{aligned} \tag{C.29}$$

Após alguma manipulação, encontra-se

$$\begin{aligned}
V_{,\alpha}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}, t) &= h_3(T\boldsymbol{\theta}_{,\alpha} - 2\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}T) - h_4(\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}t \otimes \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}t \otimes \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}) \\
& \quad + h_5[(\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}_{,\alpha})t \otimes \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}^2t \otimes \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}] \\
& \quad + (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha})[h_4T + h_5(T\boldsymbol{\theta} - 2\boldsymbol{\theta}T)] \\
& \quad - (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha})h_6(\boldsymbol{\theta}t \otimes \boldsymbol{\theta}) + h_7(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha})(\boldsymbol{\theta}^2t \otimes \boldsymbol{\theta}),
\end{aligned} \tag{C.30}$$

Ao se evidenciar o termo $\delta^*\boldsymbol{\theta}$.