



Obtenção de parâmetros ótimos para um modelo dinâmico *fuzzy* TSK considerando incerteza de medição nas entradas.

Raony M. Fontes¹, Igor L. S. Rodrigues², Cristiano H. Fontes³, Ricardo A. Kalid⁴

¹ Universidade Federal da Bahia - PEI, Salvador, Brasil, raonyfontes@gmail.com

² Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil, igu.lobo@gmail.com

³ Universidade Federal da Bahia - PEI, Salvador, Brasil, cfontes@ufba.br

⁴ Universidade Federal da Bahia - PEI, Salvador, Brasil, kalid@ufba.br

Resumo: Este trabalho está relacionado à área de identificação de sistemas ou identificação de modelos empíricos. Mais especificamente, relacionado ao estudo e análise de estruturas de modelo baseado em lógica *fuzzy* que viabilizem a inclusão explícita da incerteza de medição de variáveis do processo, através da PDF da variável, diretamente no escopo do problema de identificação. O objetivo compreende a utilização de sistemas de inferência *fuzzy* com a inclusão de variáveis de entrada na forma “*non-singleton*”, viabilizada através da transformação de distribuição de probabilidade em distribuição de possibilidade. A metodologia se aplica à identificação de modelos dinâmicos a partir de dados de processos de produção sujeitos a incerteza de medição. O desempenho do modelo obtido foi satisfatório representando bem o comportamento do processo. A estrutura de identificação proposta é também capaz de prever a incerteza dinâmica da variável de saída.

Palavras chave: Identificação de modelo dinâmico, modelo *Fuzzy*, Incerteza de medição.

1. INTRODUÇÃO

Modelos de processos podem ser obtidos de duas vias. Uma delas é a modelagem fenomenológica (caixa branca) e a outra é a modelagem empírica que tem-se estabelecido como uma importante alternativa na caracterização da relação entre as múltiplas variáveis (entradas e saídas) [1] principalmente em processos notadamente complexos. Os modelos empíricos são obtidos através de técnicas de estimação de parâmetros que utilizam dados de entradas e saída e modelos matemáticos sem conotação fenomenológica (caixa preta). Em ambos os casos, modelos caixa branca ou caixa preta, ou modelos intermediários entre esses, as relações entre as entradas e a saída são expressas por estruturas de modelo padrões e o conhecimento a priori sobre do sistema é sempre uma valiosa ferramenta [2].

Como alternativa a ultrapassar os limites inerentes as estruturas clássicas de identificação, tem-se as chamadas técnicas de identificação inspiradas em sistemas biológicos e inteligência humana e fazem uso de linguagem natural, regras, redes semânticas ou modelos qualitativos capazes de representar a heurística das relações existentes [3]. Neste

contexto destaca-se a identificação com estruturas de modelos baseadas em redes neurais artificiais e lógica *fuzzy*.

A identificação de sistemas por redes neurais com incerteza nos dados tem tido várias aplicações teóricas e práticas destacadas em [4]. As redes neurais tentam emular o funcionamento do cérebro humano e possuem capacidade preditiva conforme o arranjo topológico adotado. No entanto esta técnica apresenta como problema a falta de transparência, ou seja, a informação não é facilmente interpretável de forma qualitativa e o conhecimento prévio do processo a ser identificado não é facilmente incluído na etapa de identificação do modelo.

A lógica *fuzzy* oferece uma outra alternativa de estrutura para a identificação de modelos [5-7, 3]. Um sistema de inferência *fuzzy* baseia-se em geral no conhecimento heurístico, expresso através de regras, e permite a modelagem e a representação das características de um determinado sistema por meio de conjuntos (conjuntos *fuzzy*) e regras [8].

Como a presença de incertezas em variáveis de processo é inevitável, modificações em algoritmos de identificação de modelos tem sido motivo de estudo para incorporar essas incertezas na formulação do problema - identificação robusta. Kumar et. al, (2004), Vargas e Hemerly (2007) mostram propostas para uma modelagem robusta em lógica *fuzzy* e redes neurais, respectivamente, acrescentando diretamente o vetor de ruídos, compondo o vetor de entradas.

Trabalhos como Mauris et al. (2001), Urbanski e Wasowski, (2008), Tan, (2008) foram desenvolvidos com o objetivo de utilizar conjuntos *fuzzy* como alternativa para expressar a incerteza do mensurando, pois a construção dos conjuntos de pertinência podem usar informações qualitativas do sistema, possibilitando a criação de regras a partir de informações fornecidas por especialistas.

Frente a este cenário, este trabalho propõe uma metodologia de identificação de modelo dinâmico baseado em uma estrutura de inferência *fuzzy*, tipo TSK - “Takagi-Sugeno-Kanghi” [12], que considera explicitamente o modelo de incerteza das variáveis de entrada, ao invés da inserção de ruído branco, contemplando-se, inclusive, a propagação dessas incertezas para a variável de saída.

2. OBJETIVO

Apresentar uma metodologia para a inserção da incerteza de medição das variáveis de processo diretamente na identificação de um modelo dinâmico fuzzy do tipo TSK.

3. MÉTODOS

A metodologia está dividida nas seguintes etapas:

3.1. Definição da estrutura fuzzy

A identificação *fuzzy* está dividida em dois sistemas, Madani e Takagi-Sugeno (TSK) [13]. Ambas as estruturas são formadas por regras do tipo SE-ENTÃO onde os antecedentes são formados por variáveis lingüísticas conectadas por “E” ou “OU”. A diferença entre as metodologias se encontra no consequente e, neste sentido, a estrutura TSK considera a inserção de uma função matemática (saída em função das entradas) no consequente de cada regra.

$$R^i: \text{SE } \tilde{x}_1 \text{ é } F_1^i \text{ E } \dots \text{ SE } \tilde{x}_j \text{ é } F_j^i, \quad (1)$$

$$\text{ENTÃO } y^i = f(\tilde{\mathbf{x}})^{i=1,2,\dots,r}$$

onde i representa a regra ($i = 1, 2, \dots, r$) e j o número de variáveis de entrada do modelo, \tilde{x}_j a variável de entrada em forma de conjunto *fuzzy* “singleton” ou “non-singleton”, F_j^i é o conjunto *fuzzy* o qual \tilde{x}_j pertence com um certo nível de pertinência $u_{F_j^i}(\tilde{x}_j): R \rightarrow [0,1]$, y^i é o valor da variável de saída do modelo para a regra i e $f(\tilde{\mathbf{x}})$ a função em cada consequente.

No caso em estudo, com base na estrutura padrão de *fuzzy* TSK para identificação de modelo dinâmico a função adotada no consequente é do tipo NARX (Nonlinear AutoRegressive with eXogenous inputs) tendo-se uma relação não linear entre entradas e saídas passadas e predita. Genericamente a estrutura é representada pela eq.(2):

$$\begin{aligned} R^i: \text{SE } \hat{y}(k) \text{ é } A_1^i \text{ E } \dots \text{ E } \hat{y}(k - n_y + 1) \text{ é } A_{n_y}^i \\ \text{E } u_1(k - \theta_{u_1}) \text{ é } B_1^i \text{ E } \dots \text{ E } u_1(k - \theta_{u_1} - n_{u_1} \\ + 1) \text{ é } B_{n_{u_1}}^i \dots \\ \text{E } u_j(k - \theta_{u_j}) \text{ é } B_j^i \text{ E } \dots \text{ E } u_j(k - \theta_{u_j} - n_{u_j} \\ + 1) \text{ é } B_{n_{u_j}}^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Então } \hat{y}^i(k+1) = \sum_{m=1}^{n_y} a_{i,m} \cdot \hat{y}(k-m+1) \quad (2) \\ + \sum_{l=1}^{n_{u_1}} b_{i,l} \cdot u_1(k - \theta_{u_1} - l + 1) \dots \\ + \sum_{o=1}^{n_{u_j}} b_{i,o} \cdot u_j(k - \theta_{u_j} - o + 1) \\ + c_i \end{aligned}$$

onde, n_y e n_{u_j} representam a ordem do modelo, ou seja, número inteiro de valores passados para a saída e cada entrada j , respectivamente. θ_{u_j} é o tempo morto da saída em

relação a entrada j . a_i , b_{ij} , e c_i , são os parâmetros dos consequentes. k representa o instante de medição. $A_{n_y}^i$, $B_{n_{u_j}}^i$, representam os conjuntos *fuzzy*, do Tipo 1 para as saídas passadas e para as entradas, respectivamente. u_j e \hat{y} são as entradas do modelo alimentadas na forma *non-singleton*, ou seja, alimentadas na forma de conjuntos *fuzzy* gerados diretamente das funções de densidade de probabilidade que descrevem a incerteza de medição de cada uma destas variáveis.

Para cada regra i calcula-se o *firing-level*, ou grau de ativação usando uma t-norma (\star) (para o uso de conectivos “E” em todo o antecedente), geralmente produto ou mínimo, entre os graus de pertinência do antecedente:

$$h^i(\tilde{\mathbf{x}}) = u_{F_1^i}(\tilde{x}_1) \star u_{F_2^i}(\tilde{x}_2) \star \dots \star u_{F_j^i}(\tilde{x}_j) \quad (3)$$

O valor predito para a variável de saída um instante de tempo a frente $\hat{y}(k+1)$ é dado por:

$$\hat{y}(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^r (h^i(\tilde{\mathbf{x}}(k)) \cdot \hat{y}^i(k+1))}{\sum_{i=1}^r h^i(\tilde{\mathbf{x}}(k))} \quad (4)$$

onde, h^i é o nível de ativação (*firing-level*) da regra i , $\hat{y}^i(k+1)$ é a saída estimada para cada regra na forma *non-singleton* no instante $k+1$. A saída estimada $\hat{y}(k+1)$ será obtida na forma *non-singleton*, ou seja, na forma de um conjunto *fuzzy* (ou distribuição de possibilidade). O vetor $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ (vetor das entradas) é genericamente dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(k) \equiv [\hat{y}(k), \dots, \hat{y}(k - n_y + 1), \dots, u_1(k \\ - \theta_{u_1}), \dots, u_1(k - \theta_{u_1} - n_{u_1} \\ + 1), \dots, u_j(k - \theta_{u_j}), \dots, u_j(k \\ - \theta_{u_j} - n_{u_j} + 1)] \quad (5) \end{aligned}$$

Este tipo de estrutura apresentado pela eq. (1)(2), representa uma estrutura de modelagem MISO (Multiple Inputs and Single Output) sendo capaz de prever a incerteza da variável de saída uma vez que a distribuição de possibilidade predita pelo modelo pode ser, a cada instante, convertida em função de densidade de probabilidade.

3.2 Estimativa inicial dos parâmetros

Visando uma estimativa inicial de parâmetros consistente e com menor grau de arbitrariedade, considerou-se inicialmente que todas as entradas são do tipo *singleton* o que implica em uma saída do mesmo tipo. Ao mesmo tempo, foi adotada uma estratégia de identificação um passo a frente (e não de múltiplos passos a frente) de tal forma que, para este caso, usando-se o conjunto de dados disponíveis, existe uma solução analítica para o conjunto ótimo de parâmetros [13].

$$[\mathbf{G}^T \mathbf{G}] \mathbf{P} = \mathbf{G}^T \mathbf{y}_{\text{treinamento}} \quad (6)$$

onde, \mathbf{P} é o vetor contendo parâmetros, $\mathbf{y}_{\text{treinamento}}$ é o vetor contendo os valores da variável de saída e \mathbf{G} é uma matriz composta por elementos do tipo:

$$g_j^i = \frac{h^i(\tilde{\mathbf{x}}) \cdot \tilde{\mathbf{x}}(j)}{\sum_{i=1}^r h^i(\tilde{\mathbf{x}})} \quad (7)$$

A estratégia proposta permite a obtenção de uma estimativa inicial imediata para o conjunto de parâmetros do modelo partindo-se, em seguida, para a identificação propriamente dita.

A incerteza das entradas foi caracterizada através de conjuntos do tipo “non-singleton”. Na eq. (8) foi considerada apenas a média da variável no conseqüente da regra. Por sua vez, na obtenção do grau de ativação (*firinglevel*) foi usado todo o conjunto *fuzzy*.

3.3 Função objetivo

Na etapa de identificação, a função objetivo para a estimativa dos parâmetros finais do modelo é apresentada na eq. (8):

$$J = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{y(k) - \hat{y}(k)}{u_c(y(k))} \right)^2 \quad (8)$$

onde N é o número de pontos usado para o treinamento (tamanho da amostra de treinamento). $y(k)$ e $\hat{y}(k)$, são valores médios das saídas, real e predita, respectivamente, no instante k , $u_c(y(k))$ é a incerteza combinada no instante k .

3.4 Transformação de probabilidade em possibilidade

Os dados usados para a identificação contemplam incerteza de medição inserida diretamente no modelo. Neste trabalho a caracterização do mensurando considerou os dois primeiros momentos (média e desvio padrão). Com esses parâmetros a variável pode ser representada por uma função de densidade de probabilidade (*pdf*) gaussiana [14].

Para possibilitar a inserção direta da *pdf* de cada variável de entrada no antecedente das regras foi usada a técnica apresentada por Mauris et al. (2001) para fazer a transformação da distribuição de probabilidade em distribuição de possibilidade (ou conjunto *fuzzy*, neste caso, *non-singleton*). Mauris et al. (2001), apresenta uma metodologia onde, conhecendo a média, o desvio padrão e a forma da *pdf*, unimodal e simétrica, é possível obter uma distribuição de possibilidade ou conjunto *fuzzy* denominada *tpd* (*pseudo triangular possibility distribution*). Nesta mesma referência também são apresentadas equações adicionais resultantes da aplicação do princípio da extensão¹ entre as *tpd* o que permite avaliar a média e o intervalo de abrangência associada à *pdf* equivalente à *t.p.d.* .

Neste trabalho, o conseqüente é formado por uma função do tipo NARX onde foram usadas como variáveis de entrada os conjuntos do tipo *tpd* obtidos da transformação das incertezas conhecidas a cada instante de tempo. Dessa forma para cada regra vamos ter uma *tpd* resultante o que nos permite calcular a *tpd* da saída no instante k através da eq. (4). Apenas a média da *tpd* da saída será utilizada diretamente na função objetivo (Eq. (8)). Entretanto, vale ressaltar que a estrutura proposta é capaz de prever a cada instante de tempo a função de densidade de probabilidade da

variável de saída como resultado da propagação das incertezas das entradas.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O estudo de caso utilizado foi um sistema de três tanques em série e aquecidos (Figura 1).

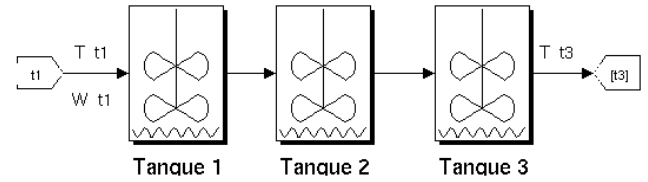


Figura 1: Processo utilizado como estudo de caso. Tanques aquecidos em arranjo em série

As variáveis medidas foram a vazão e temperatura da corrente de entrada (W_{t1} e T_{t1}) no primeiro tanque, e a temperatura da corrente de saída no último tanque (T_{t3}). Os dados coletados estão representados na figura 2.

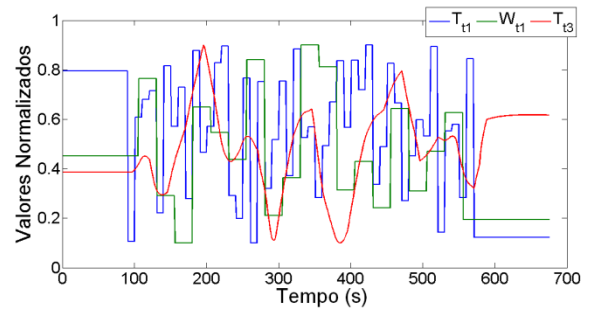


Figura 2: Dados experimentais normalizados

O modelo NARX proposto considera $n_y = n_{u_j} = \theta_{u_j} = 1$, portanto o conseqüente de cada regra é dado genericamente pela eq.(9):

$$\hat{T}_{t3}^i(k+1) = c_i + {}_1b_i \cdot T_{t1}(k-1) + {}_2b_i \cdot W_{t1}(k-1) + a_i \cdot \hat{T}_{t3}^i(k) \quad (9)$$

Na construção do sistema de inferência foi assumido que cada variável de entrada assumiria duas proposições, ou seja, as variáveis podem ser divididas em uma região alta e uma baixa (Figura 3) sendo estas definidas por conjuntos *fuzzy* do tipo 1 na forma de trapézios.

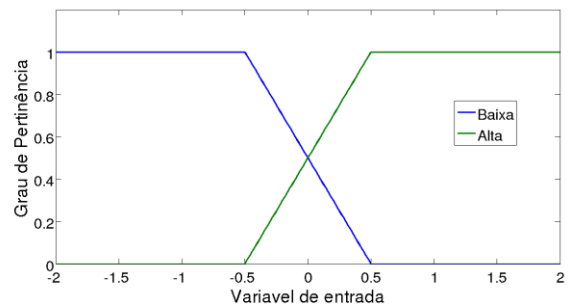


Figura 3: Proposições fuzzy definidas para as variáveis de entrada

Como o antecedente tem três variáveis e cada variável tem dois estágios (alto e baixo), para englobar todas as situações, o sistema de regras foi montado com todas as

¹ De acordo com Mendel (2001), o princípio da extensão define como encontrar uma função de pertinência a partir de uma relação matemática (*non-fuzzy*) $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, onde x_i são conjuntos *fuzzy*.

possibilidades, ou seja, tem-se um total de $2^3 = 8$ regras onde cada regra possui 4 constantes totalizando 32 constantes para o sistema de inferência *fuzzy*. A Tabela 1 apresenta o sistema de regras usadas.

Tabela 1: Sistema de regras para o sistema de inferência

$T_{11}(k-1)$		$W_{11}(k-1)$		$\hat{T}_{13}(k)$	
Baixa		Baixa		Baixa	
Alta		Baixa		Baixa	
Baixa		Alta		Baixa	
SE	Alta	E	Alta	E	Baixa
	Baixa		Baixa		Alta
	Alta		Baixa		Alta
	Baixa		Alta		Alta
Alta		Alta		Alta	

ENTÃO $\hat{T}_{13}^i(k+1)$

Definido então todo o sistema *fuzzy*, é necessário avaliar a incerteza envolvida no processo de identificação. Então para o uso da metodologia proposta por Mauris et al, (2001) algumas simplificações foram adotadas:

- As *pdf* (distribuição de probabilidade) são conhecidas, constantes e simétricas, ao longo do tempo;
- A incerteza padrão combinada das variáveis de entrada também é conhecida e constante ao longo do tempo;

Para as variáveis envolvidas, a incerteza relativa combinada foi de 5% para as temperaturas e 15% para a vazão e suas respectivas *pdf* têm a forma de gaussianas.

Na etapa de identificação uma rotina de otimização foi utilizada tendo-se como estimativa inicial os parâmetros mostrados na tabela 2.

Os valores ótimos dos parâmetros encontrados estão apresentados na Tabela 3 para o valor da função objetivo $J = 1.3475$.

Tabela 2: Estimativa inicial para o algoritmo de otimização.

REGRA	c_i	${}_1b_i$	${}_2b_i$	a_i
1	0,0933	-0,1394	-0,1583	0,9977
2	0,2005	-0,0252	-0,3163	0,7893
3	0,0641	0,0472	-0,1092	1,0269
4	-0,0457	0,0531	0,0194	0,9865
5	0,0062	0,0270	-0,0120	0,9896
6	0,0718	-0,0236	-0,0832	0,9517
7	0,0028	0,0025	-0,0432	1,0224
8	0,0188	0,0335	-0,0658	0,9766

Tabela 3: Parâmetros obtido após a otimização

REGRA	c_i	${}_1b_i$	${}_2b_i$	a_i
1	0,1135	-0,2471	-0,0885	1,0004
2	0,2456	0,0007	-0,3809	0,7089
3	0,0567	0,1081	-0,1224	1,0552
4	-0,0485	0,0487	0,0375	0,9405
5	0,0004	0,0567	-0,0203	0,9908
6	0,0697	-0,0004	-0,0897	0,9304
7	-0,0077	0,0007	-0,0547	1,0277
8	0,0259	0,0385	-0,0713	0,9719

A figura 4 mostra o comportamento do modelo através de uma predição da saída na forma recorrente para a amostra de treinamento. Verifica-se que o modelo ótimo segue muito bem a tendência dos dados experimentais chegando a se sobrepor na maior parte da simulação e é possível notar que o valor experimental se encontra dentro da faixa obtida pelo modelo *fuzzy*. Além disso, o valor de R^2 ajustado encontrado foi de 0,9781 o que confirma o bom desempenho.

Através dos conjuntos fuzzy encontrados de cada instante é necessário obter as *pdf*'s, e para isso foi usado a metodologia apresentada em [15]. Com as *pdf*'s em cada instante obteve-se o desvio padrão ao longo do tempo, que uma vez multiplicado pelo fator de abrangência, assumindo um nível de confiança de 90%, fornece os limites apresentados na Figura 4.

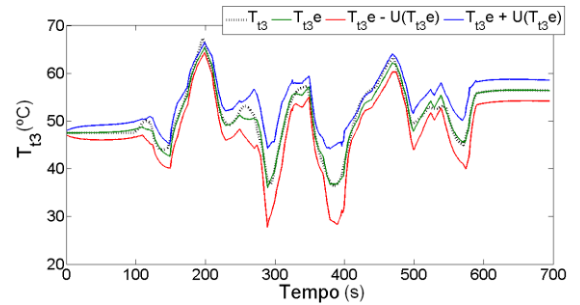


Figura 4: Valores preditos pelo modelo com predição recorrente (amostra de treinamento).

Já a **Erro! Fonte de referência não encontrada.** apresenta o comportamento da incerteza relativa da temperatura de descarga do tanque 3. O gráfico evidencia menores incertezas quando a variável atinge o estado estacionário e mostra picos onde as entradas sofrem alterações relativamente grandes (Figura 1), o que evidencia a natureza dinâmica da incerteza da variável de saída.

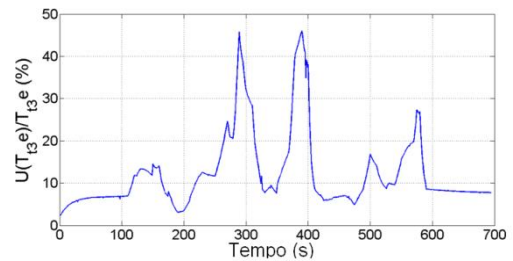


Figura 5: Comportamento da incerteza expandida relativa ao longo do tempo.

A avaliação da incerteza dinâmica ainda é um campo a ser estudado e técnicas ainda estão sendo exploradas. Como exemplo de trabalho neste tema pode-se citar Martins e Kalid, (2010), que usa a simulação Monte Carlo a cada instante para a propagação da pdf.

5. CONCLUSÃO

Este trabalho apresenta uma metodologia para a identificação de modelos dinâmicos, baseados em lógica fuzzy, de tal forma que a incerteza das grandezas de entrada seja explicitamente inserido no procedimento de identificação. A metodologia desenvolvida também propõe um procedimento para avaliar a incerteza das grandezas de saída identificadas em regime transiente.

Dada que o desenvolvimento de métodos para avaliação de incerteza dinâmica é uma fronteira científica, a comparação da metodologia proposta com outras técnicas, como simulação Monte Carlo, pode apontar para a consolidação desta estratégia como alternativa para avaliação de incerteza dinâmica com baixo custo computacional.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelas bolsas concedidas e ao PROTEC-PEI (Grupo de Pesquisa em Tecnologia e Processo do Programa de Pós-graduação em Engenharia Industrial da UFBA) pelo apoio técnico-científico e pela cessão da infra-estrutura necessária ao desenvolvimento da pesquisa.

REFERÊNCIAS

- [1] Ljung, L., Gustavsson, I., Soderstrom, T., “*Identification of Linear Multivariable Systems Operating Under Linear Feedback Control*”, IEEE Trans. Automatic Control, AC-19, pp. 836-840, (1974).
- [2] Paiva, R. P. P. C., “*Identificação Neuro-Difusa Aspectos de Interpretabilidade*”, Dissertação de Mestrado, Universidade de Coimbra, Coimbra, 1999.
- [3] Serra, G. L. O., Bottura, C. P., “*Métodos de variável instrumental fuzzy para identificação de sistemas*”, Revista Controle & Automação, vol.18 n°.4, Outubro, Novembro e Dezembro, 2007.
- [4] Vargas, J. A. R., Hemerly, E. M., “*Algoritmo para identificação assintótica via APLS e sem conhecimento prévio de limitantes*”, Revista Controle & Automação, vol.18 n°.2, Abril, Maio e Junho, 2007.
- [5] Eksin, I., Erol, O. K., “*A fuzzy identification method for nonlinear systems*”, Turk J Elec Engin, vol.8, n°.2, ©TÜBITAK, 2000.
- [6] Meleiro, L. A. C., “*Projeto e aplicações de controladores baseados em modelos lineares, neurais e nebulosos*”, Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Dezembro, 2002.
- [7] Kumar, M., Stoll, R., Stoll, N., “*Robust solution to fuzzy identification problem with uncertain data by regularization fuzzy approximation to physical fitness with real world medical data: an application*”, Fuzzy Optimization and Decision Making, vol. 3, 63–82, 2004.
- [8] Zadeh L. A., “*Toward a theory of fuzzy systems*”, in Kalman R. E. e De Claris N., Aspects on Network and Systems Theory”, Eds. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1971.
- [9] Mauris, G., Lasserre, V. e Foulloy, L., “*A fuzzy approach for the expression of uncertainty in measurement*”, Measurement, vol 29, 165–177, 2001.
- [10] Urbanski, M. K. e Wasowski, J., “*Fuzzy measurement theory*”, Measurement vol 41, 391–402, 2008.
- [11] Tan, R. R., “*Using fuzzy numbers to propagate uncertainty in matrix-based LCP*”, Int J Life Cycle Assess, vol 13, 585–592, 2008.
- [12] T. Takagi and M. Sugeno, “*Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control*,” IEEE Transactions On Systems Man And Cybernetics, vol. 15, 1985, pp. 116-132.
- [13] Mendel, J. M., “*Uncertain Rule-based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions*”, Prentice-Hall P. T. R., London, UK 2001.
- [14] BIPM et al. “*Evaluation of measurement data - An introduction to the Guide to the expression of uncertainty in measurement and related documents*”. Joint Committee for Guides in Metrology, Bureau International des Poids et Measures. Bureau International des Poids et Measures. [S.l.]. 2009.
- [15] Martins, M.A.F., Kalid, R. A. Metodologia para avaliação da incerteza de medição em regime dinâmico de sistemas contínuos. In: XVIII Congresso Brasileiro de Engenharia Química. Foz do Iguaçu - PR: 2010, p. 10.