



# AValiação DA INCERTEZA EM ESTIMATIVAS DE MEDIÇÃO DE VAZÃO: UM CASO IMPLÍCITO, NÃO LINEAR E MULTIVARIÁVEL

Márcio A. F. Martins<sup>1</sup>, Reiner Requião<sup>2</sup>, Guilherme A. A. Gonçalves<sup>3</sup>, Ricardo A. Kalid<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial da UFBA, Salvador, Brasil, [marcio.engquimica@gmail.com](mailto:marcio.engquimica@gmail.com)

<sup>2</sup> Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial da UFBA, Salvador, Brasil, [reinereng@gmail.com](mailto:reinereng@gmail.com)

<sup>3</sup> Universidade Federal da Bahia (UFBA), Salvador, Brasil, [guilhermegoncalves10@gmail.com](mailto:guilhermegoncalves10@gmail.com)

<sup>4</sup> Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial da UFBA, Salvador, Brasil, [kalid@ufba.br](mailto:kalid@ufba.br)

**Resumo:** É apresentado um método para estimar a vazão volumétrica de um fluido através da solução simultânea das equações de Darcy-Weisbach e Colebrook-White; um caso típico de um sistema de medição implícito, não linear e multivariável. A avaliação da incerteza de medição desse sistema, por meio da propagação de incertezas e de funções densidade de probabilidade, também é apresentada.

**Palavras chave:** Incerteza de medição, estimativa de vazão, modelos implícitos, modelos não lineares, sistemas multivariáveis.

## 1. INTRODUÇÃO

Em plantas industriais, algumas vezes, nem todas as medições de vazão volumétrica ou mássica estão disponíveis. Porém, caso a queda de pressão (perda de carga) em trechos de tubulações seja disponível, uma estimativa dessas vazões é possível.

Uma equação utilizada para estimar a perda de carga é a equação de Darcy-Weisbach [1]. Essa equação relaciona a perda de pressão (ou perda de carga) com outras variáveis da mecânica de fluidos, tais como: velocidade média do fluido, diâmetro e comprimento do trecho reto da tubulação etc.

A equação de Darcy-Weisbach também depende do fator de atrito (fator de atrito), o qual pode ser estimado de duas maneiras distintas. A primeira, mais rústica e antiga, é baseada na utilização do ábaco de Moody, gráfico que fornece uma estimativa para o fator de atrito. A segunda mais utilizada, após o advento dos computadores digitais, é a utilização da equação de Colebrook-White [1]. Tanto a equação de Darcy-Weisbach quanto à equação de Colebrook-White são não lineares e devem ser resolvidas simultaneamente, o que implica na formação de um sistema multivariável de medição; como consequência, o GUM [2] e seu Suplemento 1 (GUM S1) [3] não podem ser aplicados nesse sistema, pois esses métodos são aplicados em sistemas com apenas um mensurando.

O sistema formado pelas equações de Darcy-Weisbach e Colebrook-White além de ser multivariável e implícito, é não linear, o que pode tornar a abordagem clássica (MLPU - Lei de Propagação de Incertezas Multivariável, *Multivariate Law of Propagation of Uncertainties*) [4-5] inapropriada; e é

transcendental, o que exige a solução numérica das equações desse sistema.

A limitação do método MLPU é superada quando se utiliza um método mais abrangente que considera todas as não linearidades do modelo multivariável através da aplicação de um método de Monte Carlo (MLPP - Lei de Propagação de Funções de Densidade de Probabilidade (PDF) Multivariável, *Multivariate Law of Propagation of Probability Density Functions*), trata-se de uma generalização do GUM S1, maiores detalhes podem ser consultados em [6].

## 2. OBJETIVO

Apresentar uma metodologia para avaliar a incerteza de medição de sistemas multivariáveis não lineares. Como estudo de caso, é estimada a vazão volumétrica de um fluido industrial, a partir das equações empíricas de Darcy-Weisbach e Colebrook-White, e avaliar sua incerteza por meio dos métodos MLPU e MLPP.

## 3. MÉTODOS

Este trabalho está concentrado nos sistemas multivariáveis de medição, sobre os quais múltiplas grandezas de saída  $Y_j$  (mensurandos) dependem de um conjunto comum de grandezas de entrada  $X_i$ , por meio de múltiplas funções de medição  $f_K$  que podem ou não ser implícitas. Um sistema multivariável de medição pode ser genericamente representado pelo seguinte sistema de equações algébricas:

$$\begin{cases} f_1(Y_1, \dots, Y_j, \dots, Y_K; X_1, \dots, X_i, \dots, X_N) = 0 \\ \vdots \\ f_K(Y_1, \dots, Y_j, \dots, Y_K; X_1, \dots, X_i, \dots, X_N) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Em um sistema multivariável de medição representado pela Eq. (1), as funções de medição podem ser resolvidas de forma analítica ou numérica; podem ser obtidas através de modelagens fenomenológicas ou empíricas; devem incluir as possíveis compensações sistemáticas provenientes dos sistemas de medição das grandezas de entrada; além disso, o número de funções de medição deve ser igual ao número de grandezas de saída ou mensurandos.

Em notação matricial, as funções de medição podem ser escritas de uma forma mais compacta, i.e.,

$$F(\mathbf{Y}; \mathbf{X}) = \mathbf{0} \quad (2)$$

em que  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_j, \dots, Y_K)^T$  representa o vetor das grandezas de saída;  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_i, \dots, X_N)^T$  representa o vetor das grandezas de entrada; o símbolo  $\mathbf{0}$  destaca um vetor coluna com todos seus elementos iguais a zero; e  $F(\mathbf{Y}; \mathbf{X})$  representa o vetor coluna  $(f_1(\mathbf{Y}; \mathbf{X}), \dots, f_K(\mathbf{Y}; \mathbf{X}))^T$ .

Baseado na formulação anteriormente exposta, um esboço dos métodos MLPU e MLPP é demonstrado subsequentemente nas duas próximas subseções.

### 3.1. Método MLPU

O método MLPU consiste em propagar o vetor das estimativas das grandezas de entrada  $\mathbf{x}$  e sua matriz de covariância  $\mathbf{U}_X$ , por meio da linearização em série de Taylor das funções de medição em torno dos vetores das estimativas dos mensurandos  $\mathbf{y}$  e das grandezas de entrada  $\mathbf{x}$ , de modo a avaliar a matriz de covariância dos mensurandos  $\mathbf{U}_Y$ . Um fluxo esquemático desse método é delineado como segue:

- (1) Entrada das estimativas das grandezas de entrada  $\mathbf{x}$  e sua matriz de covariância  $\mathbf{U}_X$ .
- (2) Cálculo das estimativas dos mensurandos (grandezas de saída) através do modelo  $F(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ .
- (3) Cálculo das matrizes de sensibilidades das grandezas de entrada e saída, avaliadas em torno de  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{x}$ ,

$$\mathbf{S}_X = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_K}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_K}{\partial x_N} \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{S}_Y = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_K}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_K}{\partial y_K} \end{pmatrix}.$$

- (4) Cálculo da matriz de covariância associada ao vetor das estimativas dos mensurandos:

$$\mathbf{U}_Y = \mathbf{S} \mathbf{U}_X \mathbf{S}^T \quad (3)$$

onde,  $\mathbf{S} = -\mathbf{S}_Y^{-1} \mathbf{S}_X$ . De acordo com [7], a incerteza padrão de cada mensurando do sistema multivariável de medição é assumida como a raiz quadrada positiva de cada elemento da diagonal principal de  $\mathbf{U}_Y$  (isto é, raiz quadrada das variâncias).

### 3.2. Método MLPP

O método MLPU utiliza uma aproximação linear das funções de medição para expressar a matriz de covariância associada ao vetor das estimativas das grandezas de saída. Entretanto, quando a não linearidade associada ao modelo de medição do sistema multivariável é significativa, um método mais abrangente deve ser requerido com intuito de fornecer resultados mais consistentes na avaliação da incerteza de medição.

Um método menos restritivo do que o método MLPU é aquele baseado na lei de propagação de PDFs multivariável, uma vez que esse fornece uma PDF multivariada (não apenas a matriz de covariância) para os mensurandos. O

método MLPP consiste em avaliar numericamente a incerteza de medição de sistemas multivariáveis via um método de Monte Carlo (MCM), como implementação da lei de propagação de PDFs multivariável.

A essência do método MLPP é obter uma PDF conjunta (ou PDF multivariada) para os mensurandos  $g_Y(\boldsymbol{\eta})$ , a partir da PDF conjunta das grandezas de entrada  $g_X(\boldsymbol{\xi})$  que compõem o modelo multivariável de medição. Uma vez conhecida a PDF multivariada dos mensurandos, quaisquer parâmetros podem ser estimados, tais como: vetor média (estimativas), matriz de covariância, região de abrangência (para uma dada probabilidade) ou os intervalos de abrangência oriundos das PDFs marginais das grandezas de saída, dentre outros.

Assim como no Suplemento 1 do GUM, neste trabalho é adotado os mesmos símbolos para representar os valores possíveis das grandezas do modelo de medição, i.e.,  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_j, \dots, \eta_K)^T$  denota os valores possíveis das grandezas de saída, enquanto  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_N)^T$  denota os valores possíveis das grandezas de entrada. Um algoritmo do método MLPP é delineado como segue:

- (1) Retirar  $M$ , pelo menos  $10^6$ , amostras independentes de Monte Carlo da PDF conjunta<sup>1</sup> das  $N$  grandezas de entrada  $g_X(\boldsymbol{\xi})$ :  $\{(\xi_1^1, \dots, \xi_N^1), \dots, (\xi_1^M, \dots, \xi_N^M)\}$ .
- (2) Calcular  $M$  amostras das grandezas de saída através da solução do modelo de medição multivariável:

$$\begin{cases} f_1(\eta_1^h, \dots, \eta_K^h; \xi_1^h, \dots, \xi_N^h) = 0 \\ \vdots \\ f_K(\eta_1^h, \dots, \eta_K^h; \xi_1^h, \dots, \xi_N^h) = 0 \end{cases}, \text{ para } h = 1, \dots, M.$$

Essas amostras formam a PDF conjunta empírica dos mensurandos  $g_Y(\boldsymbol{\eta})$ .

- (3) Calcular as estimativas de cada mensurando  $y_j$ , suas variâncias ( $u^2(y_j)$ ) - incertezas padrão quadrática de cada mensurando, bem como as covariâncias associadas a essas estimativas  $u(y_j, y_m)$ , de acordo com as respectivas equações:

$$y_j = \frac{1}{M} \sum_{h=1}^M \eta_j^h$$

$$u^2(y_j) = \frac{1}{M-1} \sum_{h=1}^M (\eta_j^h - y_j)^2$$

$$u(y_j, y_m) = \frac{1}{M-1} \sum_{h=1}^M (\eta_j^h - y_j)(\eta_m^h - y_m)$$

$$j \neq m = 1, \dots, K.$$

- (4) Ordenar as amostras das grandezas de saída  $\{(\eta_1^1, \dots, \eta_K^1), \dots, (\eta_1^M, \dots, \eta_K^M)\}$  em ordem crescente,  $\{(\eta_1^{(1)}, \dots, \eta_K^{(1)}) \leq \dots \leq (\eta_1^{(M)}, \dots, \eta_K^{(M)})\}$ , determinar

<sup>1</sup> Caso as grandezas de entrada sejam independentes, a PDF conjunta será o produto das PDFs individuais de cada grandeza de entrada.

a menor região de abrangência formada em torno das estimativas dos mensurandos, para uma dada probabilidade de abrangência  $p$ , ver detalhes em [8].

### 3.3. Estudo de caso

A seguir será apresentado o modelo de medição para o estudo de caso: estimativa da velocidade e do fator de atrito de uma corrente líquida em uma tubulação de seção circular.

A estimativa da vazão volumétrica de um fluido, a partir da diferença de pressão de um trecho reto de tubulação, depende da solução das Eqs. (3) e (4), as quais representam as equações de Darcy-Weisbach e de Colebrook-White, respectivamente.

$$h_f = f \frac{L v^2}{D 2g} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{\epsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (4)$$

em que  $f$  é o fator de atrito;  $h_f$  é a perda de carga no trecho reto da tubulação;  $L$  é o comprimento da tubulação;  $D$  é o diâmetro da tubulação;  $\epsilon$  é a rugosidade da tubulação,  $g$  é a aceleração da gravidade;  $v$  é a velocidade média do fluido (variável a ser calculada para estimar a vazão volumétrica);  $Re$  é o número de Reynolds, o qual é representado pela Eq. (5):

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} \quad (5)$$

em que  $\rho$  e  $\mu$  são, respectivamente, a massa específica e a viscosidade dinâmica do fluido.

A perda de carga pode ser estimada a partir da queda de pressão dada pela Eq. (6):

$$h_f = \frac{\Delta P}{\rho g} \quad (6)$$

em que  $\Delta P$  é a queda de pressão ao longo do trecho reto da tubulação.

A partir do conhecimento dos parâmetros do sistema de equações e da queda de pressão, o fator de atrito e a velocidade média do fluido são calculados simultaneamente por métodos numéricos, e.g., método de Newton [9-10]. E uma vez conhecida a área da seção transversal da tubulação, a vazão volumétrica é estimada a partir da Eq. (7):

$$Q = \frac{\pi D^2 v}{4} \quad (7)$$

A partir de então, caso seja conhecida a matriz de covariância das grandezas de entrada desse sistema multivariável de medição, a matriz de covariância das grandezas de saída, ou seja, do fator de atrito e da velocidade média do fluido, bem como da vazão volumétrica, podem ser avaliadas pelos métodos MLPU e MLPP, conforme será demonstrado na seção posterior.

## 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Um fluido industrial escoava em um trecho reto de uma tubulação de seção circular, na qual medidas de pressões em

dois pontos distintos desse trecho são disponíveis, ou seja, a queda de pressão (ou perda de carga) do escoamento é conhecida. Além disso, o comprimento entre os dois pontos do trecho reto da tubulação e o diâmetro da tubulação, bem como suas respectivas incertezas são conhecidos. Essas variáveis serão consideradas como grandezas de entrada do sistema multivariável de medição.

As estimativas das grandezas de entrada, suas respectivas incertezas padrão e os tipos de PDFs atribuídas às mesmas (para aplicação do método MLPP) são apresentados na Tabela 1. Assume-se que as grandezas de entrada são independentes.

**Tabela 1: Estimativas das grandezas de entrada e suas respectivas incertezas de medição.**

Variáveis	Estimativa	Incerteza padrão	PDF
$\Delta P (\times 10^5 \text{ Pa})$	1,5	0,1	Normal
$L \text{ (m)}$	50,0	1,0	Normal
$D \text{ (m)}$	0,10	0,01	Normal

As demais variáveis do sistema (aqui chamadas de parâmetros), tais como, rugosidade da tubulação, aceleração da gravidade, viscosidade dinâmica e massa específica do fluido, são consideradas possuem incertezas desprezíveis frente às variáveis (grandezas de entrada) apresentadas na Tabela 1; as estimativas desses parâmetros são apresentadas na Tabela 2.

**Tabela 2: Estimativas dos parâmetros com incertezas desprezíveis.**

Parâmetro	Estimativa
$g \text{ (m/s}^2\text{)}$	9,8
$\mu \text{ (Pa.s)}$	$1,0 \times 10^{-3}$
$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	$1,0 \times 10^3$
$\epsilon \text{ (m)}$	$4,5 \times 10^{-5}$

Para aplicar o método MLPP foram geradas  $10^6$  amostras pseudo-randômicas para cada grandeza de entrada do sistema multivariável de medição, as quais foram propagadas para as grandezas de saída, através da solução do sistema de equações algébricas não lineares. A resolução desse sistema e a geração dos dados aleatórios foram executadas no software comercial MATLAB®, por meio de um PC com 4 GB de RAM, processador Core 2 Duo e sistema operacional Windows 7.

A comparação entre as estimativas, as incertezas padrão e as covariâncias dos mensurandos, fator de atrito, velocidade média do fluido e vazão volumétrica, obtidas pelos métodos MLPU e MLPP, são apresentadas nas Tabelas 3 e 4, respectivamente.

**Tabela 3: Estimativas, incertezas padrão e covariâncias dos mensurandos, obtidas pelo método MLPU.**

	Estimativa	Incerteza padrão	Covariâncias	
			$f$	$Q$
$v$	5,91 (m/s)	3,7 (m/s)	$-1,6 \times 10^{-2}$ (m/s)	0,45 (m/s).(m <sup>3</sup> /s)
$f$	$171,8 \times 10^{-4}$	$43,3 \times 10^{-4}$		$-5,3 \times 10^{-4}$ (m <sup>3</sup> /s)
$Q$	0,046 (m <sup>3</sup> /s)	0,12 (m <sup>3</sup> /s)		

**Tabela 4: Estimativas, incertezas padrão e covariâncias dos mensurandos, obtidas pelo método MLPP.**

Estimativa	Incerteza padrão	Covariâncias		
		$f$	$Q$	
$v$	5,90 (m/s)	0,43 (m/s)	$-1,7 \times 10^{-4}$ (m/s)	0,0049 (m/s).(m <sup>3</sup> /s)
$f$	$172,2 \times 10^{-2}$	$4,4 \times 10^{-4}$		$-5,4 \times 10^{-6}$ (m <sup>3</sup> /s)
$Q$	0,047 (m <sup>3</sup> /s)	0,013 (m <sup>3</sup> /s)		

Como pode ser observada nas Tabelas 3 e 4, a diferença entre as estimativas dos mensurandos é praticamente inexistente, todavia, os parâmetros metroológicos que caracterizam o grau de confiança dessas estimativas – as incertezas padrão e as covariâncias, são bastante diferentes, o que demonstra uma forte discrepância entre os métodos MLPU e MLPP quando a não linearidade é significativa.

Como o método MLPP gera uma PDF multivariada dos mensurandos, uma estimativa das regiões (mínima) de abrangência dos mensurandos, ou combinações destes, é possível, maiores detalhes consultar o trabalho de Possolo [7] e as referências nele contidas. Na Fig. 1 são apresentadas as regiões de abrangência (agrupadas em pares) das grandezas de saída, fator de atrito, velocidade média do fluido e vazão volumétrica, para uma probabilidade de abrangência de 90%. Também pode ser observado que os eixos dos elipsóides não são paralelos aos eixos das variáveis, o que caracteriza a existência de covariâncias significativas entre as variáveis.

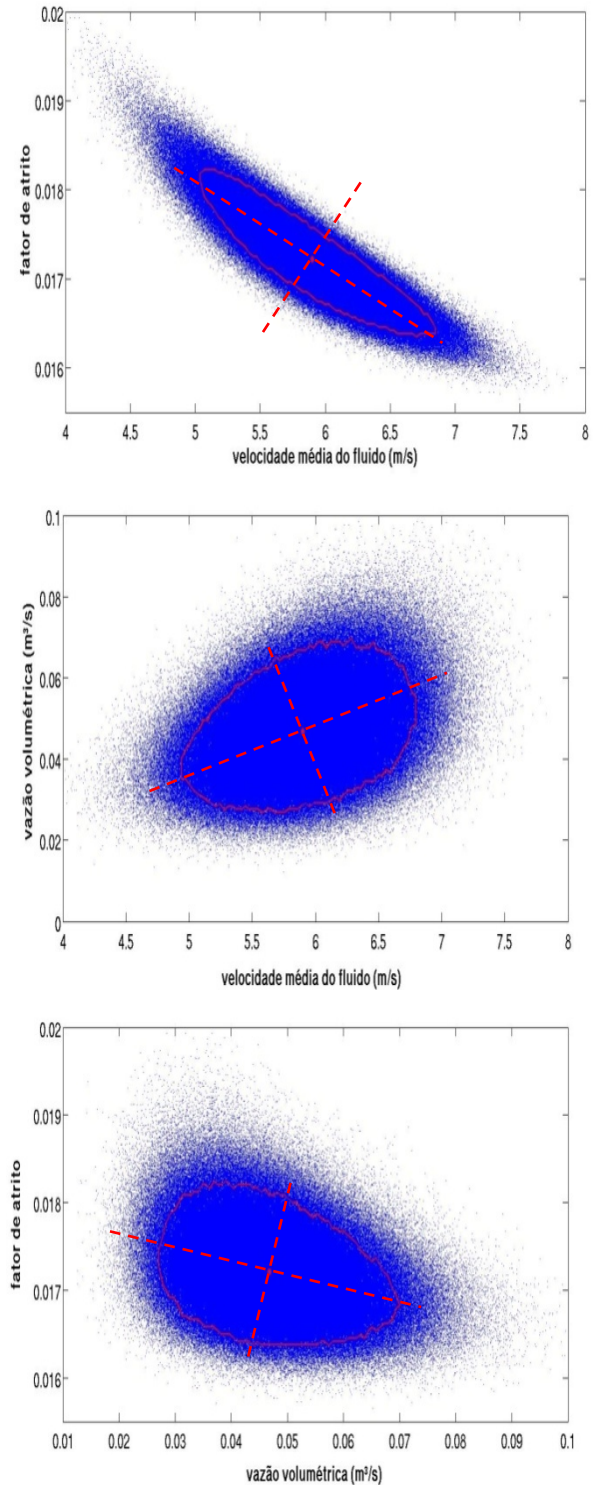
## 5. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentado um método para estimar a vazão volumétrica de um fluido a partir de um sistema multivariável formado pelas equações empíricas de Darcy-Weisbach e de Colebrook-White. Além disso, dois métodos para avaliar a incerteza de medição desse sistema de medição também foram apresentados: o método MLPU, baseado na lei de propagação de incertezas; e o método MLPP, baseado na lei de propagação de PDFs, através do MCM.

A partir dos resultados gerados entre os métodos MLPU e MLPP, pode-se concluir que o método MLPP é mais robusto para avaliar a incerteza de medição, pois esse considera quaisquer não linearidades do modelo de medição. Dessa forma, uma maior confiança associada às estimativas dos mensurandos, fator de atrito, velocidade média do fluido e vazão volumétrica, é encontrada via suas incertezas geradas pelo método MLPP.

Outra vantagem do MLPP está no fato de gerar a PDF conjunta para os mensurandos, o que possibilita estimar quaisquer estatísticas dos mesmos, inclusive as regiões de abrangência, as quais descrevem os valores possíveis que podem ser atribuídos aos mensurandos, com base em uma dada probabilidade.

O inconveniente do método MLPP reside no fato de exigir um maior esforço computacional em relação ao método MLPU, contudo a disponibilidade de computadores cada vez mais rápidos torna o MLPP exequível.



**Fig. 1. Regiões de abrangência, delimitada pela curva vermelha, das grandezas de saída, agrupadas em pares, para uma probabilidade de abrangência de 90%. As retas pontilhadas são os eixos do elipsóide.**

## AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer o suporte financeiro dado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia (FAPESB) e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

## REFERÊNCIAS

- [1] R. Fox, P. J. Pritchard, A. T. McDonald, *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- [2] BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP e OIML. *Evaluation of Measurement Data - Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* (GUM 1995 with minor corrections). Joint Committee for Guides in Metrology, JCGM 2008:100.
- [3] BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP e OIML. *Evaluation of Measurement Data - Supplement 1 to the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement - Propagation of distributions using a Monte Carlo method*, Joint Committee for Guides in Metrology, JCGM 2008:101.
- [4] DIN 1319-4:1999-02, *Fundamentals of Metrology – Part 4: Evaluation of measurements; uncertainty of measurement*, 1999.
- [5] I. Lira, *Evaluating the Measurement Uncertainty: Fundamentals and practical guidance*. Bristol: IOP Publishing, 2001.
- [6] M. A. F. Martins, *Contribuições para a avaliação da incerteza de medição no regime estacionário*. 2010. 100f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Industrial) – Escola Politécnica da Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2010.
- [7] M. Cox, P. Harris, “*The GUM and its planned supplemental guides*”, *Accred. Qual. Assur.*, vol. 8, p. 375 – 379, 2003.
- [8] A. Possolo, “*Copulas for uncertainty analysis*”, *Metrologia*, vol. 47 (3), p. 262 – 217, 2010.
- [9] L. Barroso et al., *Cálculo Numérico: com aplicações*. 2ª Edição, São Paulo: Habra, 1987.
- [10] S. Arenales, A. Darezzo, *Cálculo Numérico: Aprendizagem com apoio de software*. São Paulo: Thomson Learning, 2008.