SEQUÊNCIAS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA DO ENSINO BÁSICO

Saddo Ag Almouloud
Maria José Ferreira da Silva
Luiz Márcio Santos Farias
Organizadores

EDUFBA

SEQUÊNCIAS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA DO ENSINO BÁSICO

SEQUÊNCIAS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA DO ENSINO BÁSICO

Saddo Ag Almouloud
Maria José Ferreira da Silva
Luiz Márcio Santos Farias
Organizadores

Salvador
EDUFBA
2017

Grafia atualizada conforme o Acordo Ortográfico da
Língua Portuguesa de 1990, em vigor no Brasil desde 2009.

Capa
Matheus Chastinet

Projeto Gráfico e Revisão
Autor

Sistema de Bibliotecas - UFBA

Sequências para o ensino de geometria do ensino básico / Saddo Ag Almouloud, Maria José Ferreira da Silva, Luiz Márcio Santos Farias, Organizadores. - Salvador: EDUFBA, 2017.
425 p.

ISBN 978-85-232-1601-6

1. Geometria. 2. Ensino fundamental. 3. Educação básica. I. Almoloud, Saddo Ag. II. Silva, Maria José Ferreira da. III. Farias, Luiz Marcio Santos.

CDD - 516

Editora filiada à

ASOCIACION DE EDITORIALES UNIVERSITARIAS DE AMERICA LATINA Y EL CARIBE

Associação Brasileira das Editoras Universitárias

Câmara Bahiana do Livro

EDUFBA
Rua Barão de Jeremoabo, s/n, *Campus* de Ondina,
40170-115, Salvador, Bahia
Tel.: +55 71 3283-6164 | Fax: +55 71 3283-6160
www.edufba.ufba.br | edufba@ufba.br

PROFESSORES PESQUISADORES PARTICIPANTES DO PROJETO

- Professora Doutora Cileda Coutinho, Professora do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática – PUC/SP
- Professora Filomena Aparecida Teixeira Gouvêa, Mestre em Educação Matemática (Universidade de Taubaté/SP, UNITAU)
- Professora Irmã Verri Bastian, Mestre em Educação Matemática (PUC/SP)
- Professora Nancy Cury Andraus Haruna, Mestre em Educação Matemática (Universidade de Taubaté/SP, UNITAU)
- Professora Renata Rossini, Doutora em Educação Matemática (PUC/SP)
- Professora Sonia Regina Facco, Mestre em Educação Matemática (PUC/SP)
- Marcia Maioli, Mestre em Educação Matemática (PUC/SP)

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

As reflexões e as atividades apresentadas neste documento fazem parte dos resultados de um projeto de pesquisa denominado: "Estudo de fenômenos de ensino/aprendizagem de noções geométricas" desenvolvido na PUC/SP, com o patrocínio da FAPESP. Esse projeto teve por objetivo investigar os fatores, bem como as alternativas, que influenciam o ensino e a aprendizagem das noções geométricas no Ensino Fundamental.

As situações-problema apresentadas foram desenvolvidas para a capacitação de professores, e para serem trabalhadas junto aos alunos do Ensino Básico no âmbito do processo de construção de conhecimentos geométricos. Considerando esse fato, apresentamos cada atividade acompanhada de seu objetivo específico e de algumas orientações didáticas para o professor que quiser usá-la em sala de aula.

As atividades foram desenvolvidas no intuito de permitir ao aluno desenvolver certas competências e habilidades de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) do Ensino Básico investigando e buscando caminhos para resolver as questões propostas, assim como construir novos conhecimentos e estratégias de resolução de problemas. Elas visam, essencialmente:

- auxiliar o aluno na construção de conhecimentos e saberes de uma maneira construtiva.
- Desenvolver certas habilidades, como, por exemplo, ler, interpretar e utilizar representações matemáticas, além de saber demonstrar.

As situações foram escolhidas para permitir ao aluno agir, se expressar, refletir, evoluir por iniciativa própria e, com isso, construir novos conhecimentos, tendo o professor o papel de mediador e de orientador. Suas intervenções devem ser feitas de maneira a não se encarregar do trabalho essencial de construção de conhecimento.

Para analisar o processo de aprendizagem a Teoria das Situações, desenvolvida por Brousseau (19086)[1], observa e decompõe esse processo em quatro fases diferentes nas quais o saber tem funções diferentes e o aprendiz não tem a mesma relação com o saber. Nessas fases interligadas, pode-se observar tempos dominantes de *ação*, de *formulação*, de *validação* e de *institucionalização.* A primeira consiste em colocar o aprendiz em uma situação de ação em que se apresenta para o aluno um problema cuja melhor solução é o conhecimento que se quer ensinar para que o aluno possa agir sobre essa situação e que ela lhe retorne informação sobre sua ação. Nos momentos de formulação o aluno troca informações com uma ou várias pessoas a fim de trocar mensagens escritas ou orais. O resultado permite criar um modelo explicito que pode ser formulado com sinais e regras comuns, conhecidas ou novas, ou seja, é o momento em que o aluno ou grupo de alunos explicita, por escrito ou oralmente, as ferramentas que utilizou e a solução encontrada. A etapa de validação é aquela e que o aluno mostra porque o modelo que criou é válido. É nesse momento que o aluno submete a mensagem matemática (modelo da situação) ao julgamento de um interlocutor. Dessa forma, a teoria funciona nos debates científicos e nas discussões entre alunos, como meio de estabelecer provas ou de rejeitá-las. Enquanto que o objetivo principal da situação de formulação é a comunicação lingüística, o de validação é o debate sobre a certeza das asserções e as interações com o meio, em conseqüência, são organizadas. As situações de institucionalização são aquelas em que o professor fixa, convencionalmente e explicitamente, o estatuto cognitivo do saber. Uma vez construído e validado, o novo conhecimento fará parte do patrimônio matemático da classe. Se a institucionalização for feita muito cedo interrompe a construção do significado e impede uma aprendizagem adequada. Se for feita muito tarde reforça interpretações não exatas atrasando a aprendizagem e dificultando as aplicações. Depois de feita a institucionalização pelo professor, o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporar em seus esquemas mentais podendo utilizá-lo na resolução de problemas matemáticos.

---

[1] Para se aprofundar no assunto consultar Almouloud (2007).

Em todos os módulos o professor encontrará a institucionalização que deve ser feita para cada conteúdo. Além disso, exercícios de familiarização que o professor deve dar, de preferência como lição de casa para verificar a aprendizagem individualmente.
Muitas das atividades propostas podem ser realizadas utilizando um software de geometria dinâmica, algumas precisam que alguns arquivos específicos sejam abertos, assim tanto estes, quanto as atividades na versão para alunos, além de algumas soluções no Cabri Géomètre II e no Geogebra, quando possível, ficarão à disposição no site www.pucsp.br/pensamentomatematico.
O professor deve escolher o ano que acredita seja mais apropriado para o trabalho com cada módulo, dependendo de seu planejamento e pode também fazer adaptações das atividades procurando o melhor aproveitamento de seus alunos.

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud
Profa. Dra. Maria José Ferreira da Silva
Prof. Dr. Luiz Márcio Santos Farias

INTRODUÇÃO

Sequências para o ensino de geometria do ensino básico

A geometria é um ramo importante da Matemática tanto como objeto de estudo, como ferramenta para outras áreas, no entanto professores dos ensinos fundamental e médio apontam, geralmente, a Geometria como um dos problemas de ensino e de aprendizagem em Matemática. Como consequência o diagnóstico dessa situação vem sendo discutido nos meios acadêmicos, em alguns segmentos da sociedade e, inclusive, em algumas instâncias governamentais.

Nosso objetivo nesta obra é propor reflexões e atividades oriundas de estudos de fatores, bem como de alternativas, que influenciam o ensino e a aprendizagem de noções geométricas para o Ensino Fundamental. Nesse âmbito, as atividades propostas, bem como as reflexões relacionadas têm o propósito de estudar fundamentos teóricos e metodológicos de construção de conceitos/habilidades em Geometria para o Ensino Básico, mostrando a importância dos seguintes aspectos:

- Figuras geométricas e suas diferentes apreensões: perceptiva, discursiva, operatória e sequencial.
- Demonstração como parte integrante de processos de ensino e de aprendizagem de Geometria.
- A importância dos registros de representação (desenho/figura geométrica, linguagem natural, linguagem Matemática).

Acreditamos que, o processo de aquisição de conhecimentos, em particular de Geometria, se apoia nos seguintes aspectos:

- A atividade de resolução de problemas geométricos.
- Atividade de formulação.

- Observação de provas associadas a tomadas de decisão.

- Entendimento e redação de solução de problemas.

- A resolução de problemas de Geometria e a entrada na forma de raciocínio, que essa resolução exige, estão associadas à distinção das apreensões da figura (apreensões sequencial, perceptiva, discursiva e operatória).

- A construção de situações para a sala de aula, nas quais a iniciação à *demonstração* tem um papel importante, proporciona ao aluno condições de melhor compreensão de conceitos geométricos e à aquisição de habilidades geométricas.

As atividades foram desenvolvidas no intuito de permitir ao aluno desenvolver certas competências e habilidades em Matemática do Ensino Básico, investigando e buscando caminhos para resolver as questões propostas, assim como construir novos conhecimentos e estratégias de resolução de problemas. Elas visam, essencialmente auxiliar o aluno na construção de conhecimentos e saberes de uma maneira construtiva e desenvolver certas habilidades, como por exemplo, ler, interpretar e utilizar representações matemáticas, além de saber demonstrar.
O livro é composto de quinze (15) capítulos que abrangem quase todas geometria elementar, geralmente presente, nos currículos do Ensino Básico.
O capitulo I intitulado "utilizando um software de representação dinâmica para geometria", apresenta um conjunto de situações que podem ser resolvidas usando um *software*. O trabalho com Geometria, no que se refere às suas representações figurais, sempre foi feito sobre algum esboço ou alguma construção geométrica realizada com instrumentos de desenho (régua, esquadro, compasso,...), mas com o advento do computador surgem ferramentas computacionais à disposição dos professores, que permitem o ensino e a aprendizagem de Geometria. Essas ferramentas mantêm o caráter de construções geométricas, mas com o diferencial de que as figuras, nelas construídas, podem ser manipuladas/transformadas sem perder suas propriedades construtivas. Esse tipo de ferramentas pode ser utilizado do Ensino Fundamental ao Ensino Superior, não só

para a Geometria, mas também para outros conteúdos matemáticos. Neste livro, embora as construções possam ser feitas com régua e compasso, sugerimos que seja utilizado também algum software porque, além da própria construção, é possível investigar propriedades geométricas dos objetos construídos e suas relações, bem como formular e comprovar experimentalmente conjeturas.

O capítulo II intitulado (ÂNGULOS) tem por objetivo aprofundar o estudo de ângulos percebendo a diferença entre as construções com a linguagem Logo e com um software de geometria dinâmica. No Super Logo temos que programar a construção mobilizando conhecimentos de Geometria, principalmente a respeito de ângulos de polígonos.

O capitulo III (TRIÂNGULOS) tem por objetivos trabalhar saberes e conhecimentos relacionados com triângulos a fim de desenvolver, essencialmente, os seguintes aspectos: caracterização dos triângulos quanto aos lados; caracterização dos triângulos quanto aos ângulos; pontos notáveis de um triângulo; condição de existência de um triângulo; construções geométricas e interpretação de enunciados matemáticos. As atividades propostas podem ser desenvolvidas usando um software para representação dinâmica em geometria.

No capítulo IV (CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS), objetiva-se, a partir da exploração de construções previamente elaboradas, construir novas figuras e a partir da comparação de alguns de seus elementos perceber que são possíveis somente quatro casos para a congruência de triângulos.

Discutimos no capítulo V os conceitos de perímetros e áreas de figuras planas a partir de uma sequência que trata de *Perímetros e Áreas* de figuras para ser trabalhada com o sexto ano do ensino fundamental, tratando a área de superfícies planas por meio de malhas, composição e decomposição de figuras. Entenderemos área como uma grandeza, distinguindo área e superfície, bem como área e número, isto é, duas superfícies de formas diferentes podem ter áreas iguais e a uma mesma superfície podem corresponder números diferentes.

No capitulo VI apresentamos uma sequência didática para o ensino e aprendizagem do Teorema de Pitágoras com o objetivo de propor aos professores situações que permitam ao aluno conjeturar a existência da relação pitagórica, seu caráter necessário/suficiente e a forma dessa relação, além da realização de atividades de complexidade crescente fazendo-se sucessivas aproximações com o teorema, com o intuito de desenvolver no aluno condições para o emprego adequado do teorema como ferramenta. Além disso, fazer com que os professores aprofundem seus conhecimentos a respeito desse teorema do ponto de vista histórico e de aplicação.

Propomos uma sequência didática no capitulo VII a respeito de Quadriláteros cujo objetivo é proporcionar a oportunidade de vivenciar atividades que contemplem: as situações de ação, formulação, validação e institucionalização, além do trabalho em diversos registros de representação e a aquisição e aprimoramento de conceitos geométricos relativos a quadriláteros.

O conceito de Semelhança de figuras geométricas é tratado o capitulo VIII com o objetivo de apresentar uma sequência didática, em que se usa tanto a régua e o transferidor, quanto um software, para permitir ao aluno uma reflexão do que é variante e invariante em figuras semelhantes, desenvolvendo o conceito de figuras semelhantes e aplicá-lo em situações diversas e em atividades que propiciem a compreensão do Teorema de Thales.

O Teorema de Thales é discutido no capitulo IX com a proposta de uma sequência didática que permita ao aluno apreender o Teorema de Thales, observando-o sob três pontos de vista diferentes e aplicando-o em diversas situações utilizando tanto instrumentos de desenho quanto um software de representação dinâmica.

Circunferência e Circulo são os temas tratados no capitulo X, tendo como um dos objetivos o tratamento de diversos conhecimentos que envolvem circunferência ou círculo, inclusive propriedades e teoremas, desenvolvendo-os a partir de construções geométricas em um software de representação dinâmica. Entenderemos neste trabalho a circunferência como sendo a fronteira de uma superfície que chamamos de círculo. O trabalho será desenvolvido em oito tópicos: definições e relações de posição; cordas, arcos e ângulos; potência de ponto e relações entre tangentes e secantes; médias e números irracionais; resolução geométrica de equação de 2º grau; lugares geométricos e circunferência; circunferência inscrita ou circunscrita e, finalmente, comprimento e área.

No capítulo XI, apresentamos uma sequência didática para o ensino e a aprendizagem de transformações geométricas: simetria axial e simetria central, a partir de situações envolvendo dobradura, colagem, malhas quadrangulares e triangulares, sistematizando definições e propriedades para cada uma das transformações.

As transformações geométricas: translação e rotação são tratadas no capitulo XII. A translação e suas propriedades são vistas por meio de deslocamentos vetoriais e também associada a pares ordenados, e a rotação e suas propriedades por meio de giros no sentido horário e anti-horário. No final, definimos analiticamente as transformações vistas a partir de vetores em um sistema cartesiano no plano. Algumas atividades aqui apresentadas podem ser trabalhadas no ensino fundamental e outras mais indicadas para o ensino médio e eventualmente em formação de professor.

Discutimos no capitulo XIII situações que envolvem o processo de demonstração em geometria, pois entendemos ser fundamental para o ensino da Geometria que o professor perceba que a capacidade de visão espacial dos alunos é maior que a sua habilidade de trabalhar com números e que ao reforçar este potencial, o professor está despertando o interesse pela Matemática e promovendo progressos em relação à compreensão dos números e suas operações. Os problemas em Geometria constituem, geralmente, o domínio para os primeiros encontros dos alunos com as exigências de demonstração.

A tomada de consciência do que é uma demonstração comporta etapas que ao serem analisadas levam à constatação de diferentes obstáculos que o aluno deve transpor para produzir um texto em que se revele a organização profunda da demonstração. Propomos enriquecer o progresso dos alunos nesse assunto, por meio de várias atividades a serem feitas pelos alunos.

“Poliedros e corpos redondos” são estudados no capitulo XIV com o objetivo de apresentar os principais objetivos para o Ensino Fundamental, baseados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), a fim de que os professores percebam as necessidades de aprendizagem dos alunos nos respectivos ciclos.

“**Conceitos primitivos e postulados**” são objeto de estudo do capitulo XV e conduzem ao estudo dos postulados em Geometria com um encaminhamento que permite a discussão a respeito da importância da linguagem usada pelo professor no seu diálogo com os alunos quando trata do assunto. Muitas vezes imaginamos que estamos sendo perfeitamente claros e, na verdade, a forma de nos expressarmos está tão distante daquela do aluno que este não consegue entender o que está sendo transmitido. Ao discutir os postulados, o estudante tem oportunidade de lidar com a linguagem e o entendimento de textos matemáticos.

Outro objetivo que podemos atingir é que, ao discutir o significado de um determinado postulado (interpretação) ou o que ele permite ou ainda como ele se enquadra no conjunto dos postulados "anteriores" a ele, podemos observar, muitas vezes, como nos deixamos levar pelo "sentimento" e não pelo raciocínio. Assim, aquele que está estudando Geometria com base em postulados começa a organizar suas ideias de forma sistemática, cria uma estrutura de raciocínio coerente, onde cada coisa é decorrente das anteriores e não é possível deduzir x de y e y de x, pois isso seria uma contradição.

Pode-se dizer ainda que, ao estudar Geometria a partir dos postulados, pode-se abrir a discussão de "o que aconteceria se não tivéssemos este?" ou "o que aconteceria se fosse este antes daquele?" ou "o que aconteceria se substituíssemos este por aquele?", permitindo assim uma exposição ao método científico e suas etapas: observação, experimentação, levantamento de hipóteses possíveis, busca de argumentos plausíveis e comprovação.

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud
Profa. Dra. Maria José Ferreira da Silva
Prof. Dr. Luiz Márcio Santos Farias

1 UTILIZANDO UM SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA

O que é geometria dinâmica

O trabalho com Geometria, no que se refere às suas representações figurais, sempre foi feito sobre algum esboço ou alguma construção geométrica realizada com instrumentos de desenho (régua, esquadro, compasso, ...). Com o advento do computador surgem, como uma das ferramentas à disposição dos professores para o ensino, alguns softwares que permitem o ensino e a aprendizagem da Geometria. Esses softwares mantêm o caráter das construções geométricas, mas com o diferencial de que as figuras, neles construídas, podem ser manipuladas/transformadas sem perder suas propriedades construtivas, daí o nome Geometria Dinâmica. Esse tipo de software pode ser utilizado do Ensino Fundamental ao Ensino Superior, não só para a Geometria, mas também para outros conteúdos matemáticos. Neste livro, embora as construções possam ser feitas com régua e compasso, sugerimos que seja utilizado algum software dinâmica porque, além da própria construção, é possível investigar propriedades geométricas dos objetos construídos e suas relações, bem como formular e comprovar experimentalmente conjeturas. O primeiro software de Geometria Dinâmica foi o Cabri Géomètre II, desenvolvido na França em 1988. Hoje pode-se obter na Internet gratuitamente, entre outros, o Geogebra e o iGeom.

Atividades

O objetivo das atividades deste módulo é a familiarização com os menus e principais ferramentas de um software de Geometria Dinâmica em diferentes situações entre as quais construções e percepção de propriedades.

Atividade 01: descobrindo as possibilidades do software

a) Crie um segmento de reta, se necessário, nomeie as extremidades de A e B.

b) Meça o segmento AB.

c) Obtenha o ponto M, médio de $\overline{AB}$.

d) Meça o segmento *AM*. Geralmente, o software dá a medida do segmento considerando a distância de ponto a ponto, que neste caso são os extremos do segmento.
e) Meça o segmento *MB*.
f) Movimente *A* ou *B* e observe as medidas de $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$.
g) Elimine o ponto *M* (selecione o ponto e delete-o).
h) Crie um segmento *CD* concorrente com o segmento *AB*.
i) Nomeie o ponto onde $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se interceptam. Antes é preciso criá-lo, pois para o software esse ponto ainda não existe.
j) Observe a movimentação do ponto de intersecção quando você movimenta os pontos *A*, *B*, *C* e *D* ou ainda os segmentos *AB* e *CD*.

Objetivo: explorar ferramentas do software
Comentários: como se trata de uma atividade dirigida, o desempenho depende do conhecimento ou não do software.

Atividade 02: uma propriedade da bissetriz
a) A partir de um ponto e duas semi-retas construa um ângulo qualquer.
b) Trace a bissetriz desse ângulo.
c) Crie um ponto sobre a bissetriz e meça a distância desse ponto aos lados do ângulo.
d) Movimente o ponto sobre a bissetriz.
e) O que você concluiu?

Objetivo: explorar a bissetriz do ponto de vista de lugar geométrico: a bissetriz é o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes aos lados do ângulo.
Comentários: é importante observar individualmente as construções, pois nesta atividade podem surgir dúvidas a respeito da obtenção da distância de um ponto a uma reta, pois muito tomam um ponto da bissetriz e um ponto qualquer de cada lado do ângulo, não percebendo a necessidade da perpendicular para obter a distância solicitada.

Atividade 03: determinando o centro de um arco
a) Construa um triângulo *SOL* qualquer.
b) Construa o arco *SOL*.

c) Meça o ângulo *SOL*.
d) Determine o centro da circunferência suporte do arco.
e) Movimente a sua figura.
f) Existe alguma posição em que o ângulo *SOL* mede 90^0? Qual?

Objetivos: utilizar as mediatrizes para determinar o centro da circunferência circunscrita a um triângulo. Percepção de que um triângulo inscrito em uma semi-circunferência é retângulo.
Comentários: para encontrar o centro solicitado é necessário que os alunos percebam a necessidade da construção da mediatriz de pelo menos dois lados do triângulo, pois o centro deve ser eqüidistante dos vértices desse triângulo. Geralmente, os alunos associam a mediatriz ao ponto médio de um segmento e esquecem a propriedade que vale para todos os seus pontos: a eqüidistância ao extremo dos segmentos.

Atividade 04: uma propriedade da mediana
a) Construa um triângulo *LUA* qualquer.
b) Determine a medida da área determinada por esse triângulo.
c) Determine o ponto médio de um dos lados desse triângulo.
d) Una o ponto médio ao vértice oposto. Esse segmento é uma das medianas do triângulo.
e) A mediana dividiu o triângulo *LUA* em dois triângulos. Calcule a medida da área de cada uma das superfícies desses triângulos.
f) Movimente a sua figura. O que você observa?

Objetivo: perceber que a mediana divide um triângulo em dois outros triângulos equivalentes, isto é, em dois triângulos de mesma área.

Atividade 05: identificando propriedades de um paralelogramo
Definição: Um paralelogramo é um quadrilátero que tem os lados paralelos dois a dois.
a) Construa um paralelogramo *FOCA*.
b) Esconda os traços auxiliares, quando existirem.
c) Movimente sua figura para verificar se ela permanece um paralelogramo.
d) Liste algumas propriedades observadas no paralelogramo construído.

Objetivo: construir um paralelogramo a partir de sua definição. Diferenciar desenho de construção. Observar propriedades.
Comentários: nesta atividade é recomendável a observação individual das construções feitas, pois é comum os alunos desenharem de forma a obter visualmente um paralelogramo, não respeitando as propriedades que garantem a construção geométrica de um paralelogramo, isto é lados opostos paralelos.

Atividade 06: observando a condição de existência de triângulos

a) Trace três segmentos quaisquer.
b) Construa um triângulo que tenha lados congruentes aos segmentos traçados.
c) Altere a espessura e a cor do triângulo construído e pontilhe as construções auxiliares.
d) Movimente os segmentos inicialmente traçados.
e) É sempre possível obter um triângulo com lados congruentes a três segmentos dados?
f) O que você pode concluir?

Objetivos: obter a construção de um triângulo a partir de três segmentos e verificar pelo dinamismo do software que nem sempre esse triângulo é possível.
Comentários: é necessário observar a construção para que seja feito o que está sendo pedido. A construção dos segmentos iniciais faz com que os alunos usem o compasso para a transferência do segmento. A manipulação dos segmentos faz com que, em algumas situações, o triângulo desapareça, levando-os a presumir que sua construção esteja errada. Convém explicitar as condições de existência de um triângulo.

Atividade 07: construindo triângulo retângulo
Construa um triângulo retângulo.

Objetivo: construir um triângulo retângulo.
Comentário: é necessária a construção de retas perpendiculares para a construção solicitada.

Atividade 08[2]: analisando uma construção
A professora pediu a seu aluno Zeca que construísse um losango *CABO*, a partir do lado $\overline{CA}$, usando um software de geometria dinâmica. Zeca cumpriu sua tarefa e entregou-lhe um disquete com o arquivo mod_01_zeca. Como a professora está impossibilitada de corrigir a tarefa, pediu que você a ajudasse.
a) Abra o arquivo **mod_01_zeca**.
b) Clique na ferramenta "Esconder/Mostrar" do Cabri ou "Exibir/esconder" do Geogebra e observe a construção.
c) Veja os passos da construção do Zeca utilizando, no menu "editar", do Cabri, "revisar construção" ou no menu "exibir", do Geogebra, a ferramenta "protocolo de construção".
d) O que você comentaria com o Zeca?

Objetivo: analisar as propriedades do losango a partir de uma figura pré-construída.
Comentários: a princípio, sem manipulação, são conduzidos a acreditar, apenas pelo aspecto visual, que a figura representa um losango. Mas após a manipulação constatam que não.

Atividade 09: retirando a bissetriz do menu
Abra o **01menu3.men** se estiver utilizando o Cabri. Não utilize a ferramenta bissetriz se estiver utilizando o Geogebra.
a) Abra o arquivo **mod_01_ativ09**.
b) Construa dois segmentos *PA* e *AI* que representem o menor caminho entre o ponto *A* e cada um dos lados do ângulo.

---

[2] As atividades 1, 2 e 3, foram baseadas no livro *Geometria plana com Cabri Géomètre – di*ferentes metodologias de Ligia Sangiacomo, Maria Cristina Oliveira, Maria Inez Miguel e Vera Helena Giusti de Souza, Proem Editora Ltda., 1999.

c) Meça os segmentos *PA* e *AI*.
d) Meça a distância de *P* a *O* e de *O* a *I*.
e) Ao movimentar o ponto *A*, o que você observa em relação aos segmentos?
f) Ao movimentar o ponto *A*, o que você observa em relação aos triângulos *POA* e *IOA*.
g) Meça os ângulos *PÔA* e *AÔI*. Movimente o ponto *A*.
h) Obtenha o rastro do ponto *A*. Para isso, ative a opção "Rastro" e movimente o ponto.
i) Os pontos desse rastro formam qual objeto geométrico?
j) Trace esse objeto utilizando as opções do menu.
l) Esse objeto geométrico é chamado bissetriz do ângulo *PÔI*. Como você explicaria para um colega o que é bissetriz de um ângulo?
m) Selecione "Arquivo novo".
n) Construa um ângulo com duas semi-retas de mesma origem.
o) Construa a bissetriz desse ângulo.

Objetivos: a partir da distância de um ponto aos lados de um ângulo, perceber que esse ponto pertence à bissetriz desse ângulo. Trabalhar a reversibilidade da bissetriz como lugar geométrico. Construção da bissetriz sem a ferramenta do Cabri.
Ferramentas utilizadas: com o arquivo *.men[3], escondemos a ferramenta Bissetriz, mostrando assim que o Cabri é um software aberto e interativo.
Comentários: faz-se necessário nesta atividade explicitar que, no Cabri e no Geogebra, um ângulo é determinado por três pontos, e por isso impõe a criação desses três pontos para marcar e medir ângulos. Como não temos a ferramenta bissetriz surgirá a percepção da diferença, entre as ferramentas compasso e circunferência do Cabri. É importante salientar que o compasso transfere segmentos.

[3] Os arquivos *.men são criados quando queremos fazer alterações na barra de ferramentas do Cabri II.

Atividade 10: construindo um lugar geométrico

a) Crie uma reta qualquer e, com um vértice nessa reta, construa um triângulo.

b) Determine o ortocentro desse triângulo (ponto de encontro das retas suportes das alturas).

c) Encontre o lugar geométrico do ortocentro em relação ao vértice que está na reta.

d) Que objeto é esse lugar geométrico?

Objetivo: construir um lugar geométrico. Perceber que o ortocentro percorre uma parábola, se um vértice do triângulo percorrer uma reta.
Comentários: muitos alunos não percebem que um triângulo tem três retas suportes para as alturas e, por isso, têm dificuldades em encontrar o ortocentro ou o desconhecem.

Atividade 11: trabalhando com caixa-preta (só com o Cabri)

a) Abra o **01menu2.men**.

b) Crie um segmento vermelho, com espessura grossa.

c) Clique no botão de macro **X** → e na opção "Borboleta". Em seguida, clique no segmento vermelho.

d) Descubra as propriedades da borboleta azul.

e) Construa uma borboleta verde como a azul, sem utilizar a opção "Borboleta".

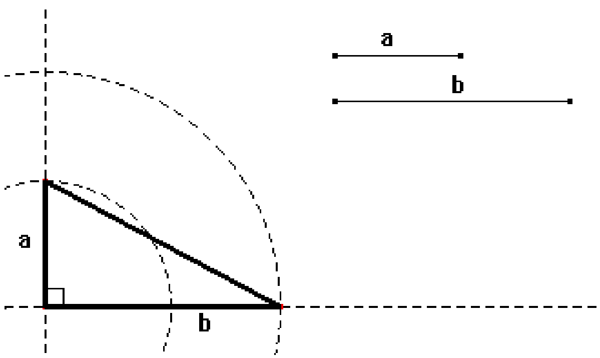
Objetivo: reproduzir uma figura utilizando simetria, a partir de uma macro construção e de alteração do menu que impossibilita o acesso às construções auxiliares.
Comentários: esta atividade apresenta um grau de dificuldade maior que as anteriores e exige a percepção visual da figura e suas respectivas propriedades geométricas. É necessário que os alunos analisem a situação, manipulando a figura antes da construção. É comum construírem a partir de uma ou outra observação e não conseguirem realizar a tarefa. Os alunos têm sucesso depois de perceberem que a figura apresenta dois quadrados. A construção pode ser encaminhada de maneiras diferentes.

Atividade 12: construindo uma macro-construção (só com o Cabri)

Construa no Cabri a macro de um triângulo retângulo e salve-a com o nome **triret.fig**. O professor irá orientá-lo.

Objetivos: construir uma macro construção.

Comentários: dados dois segmentos, que representarão os catetos e os objetos iniciais da macro, construir a partir do extremo de um deles, uma perpendicular e nela transferir, com o compasso, o outro segmento. Determinar os segmentos da hipotenusa e do segundo cateto, que para a macro representarão os objetos finais. Determine o nome e observe que na barra de ferramentas de macro aparecerá esse nome, disponibilizando a construção de triângulos retângulos.



2 ÂNGULOS

Atividades

Aprofundar o estudo de ângulos percebendo a diferença entre as construções com a linguagem Logo e com um software de geometria dinâmica. No Logo[4] temos que programar a construção mobilizando conhecimentos de Geometria, principalmente a respeito de ângulos de polígonos.

Atividade 01: usando o Logo

a) Construa um quadrado.
b) Construa um triângulo eqüilátero.
c) Construa um hexágono.
d) Construa uma circunferência.
e) Construa uma circunferência medindo 50 de raio
f) Construa uma circunferência de comprimento igual a 540.

Objetivo: construir figuras a partir da linguagem Logo.
Comentários: perceber que a programação para a construção de polígonos exige a posição conveniente da tartaruga e a determinação dos ângulos externos da figura a ser construída. Algumas propriedades de circunferência, que no ambiente Logo, é associada a um polígono de 360 lados, podem ser observadas, sendo ideal para o trabalho com a primeira fase do ensino fundamental. Em (a) o programa seria: repita 4[pf 100 pd 90]. Em (b) pd 30 pf 100 pd 120 pf 100 pd 120 pf 100, observe que a posição inicial da tartaruga influencia no primeiro giro dado. Em (c) repita 6[pf 100 pd 60]. Em (d) uma maneira de fazer a circunferência é com o comando repita 360[pf 1 pd 1]. Em (e) se queremos que o raio tenha 50 cm o comprimento da circunferência deve ser aproximadamente 300 (6 x 50), dessa forma se mandarmos a tartaruga dar passos de 1 unidade de comprimento teremos que mandá-la girar ângulos de 360/300 e o comando seria: repita 300[pf 1 pd 360/300]. De maneira semelhante efetuamos o

---

[4] O Logo é uma linguagem de programação que pode ser obtida gratuitamente na *Internet*, bem como seus manuais, no seguinte endereço: http://www.nied.unicamp.br/publicacoes/pub.php?classe=software&cod_publicacao=70

item (f) com o seguinte comando: repita 540[pf 1 pd 360/540]. Observar que, às vezes, programas diferentes podem gerar a mesma figura.

Atividade 02: usando um software de geometria dinâmica

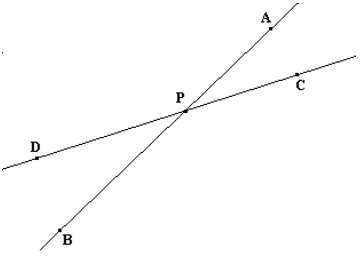
a) Construa um ângulo de 45^0.
b) Construa um ângulo de 60^0.
c) Construa um ângulo de 30^0.

Objetivos: construir alguns ângulos específicos.
Comentários: em um software de geometria dinâmica, a obtenção de ângulos específicos exige alguma construção geométrica, por exemplo, para determinar um ângulo de 45^0 é necessário traçar a bissetriz de um reto, para um ângulo de 60^0 e um de 30^0 basta construir um triângulo eqüilátero e a bissetriz de um de seus ângulos.

Definição1: Chamaremos de **ângulo reto** os que medem 90^0.
Definição 2: Chamaremos de **ângulo agudo** os que medem menos que 90^0.
Definição 3: Chamaremos de **ângulo obtuso** aqueles que medem mais que 90^0 e menos que 180^0.
Definição 4: Diremos que dois ângulos são **complementares** quando a soma de suas medidas for igual a 90^0 (um reto).
Definição 5: Diremos que dois ângulos são **suplementares** quando a soma de suas medidas for igual a 180^0 (um raso).
Definição 6: dois ângulos são ditos **adjacentes** quando têm um lado comum e um não está contido no outro.
Definição 7: dois ângulos são opostos pelo vértice quando têm vértice comum e o prolongamento dos lados de um deles formam os lados do outro.

Atividade 03: relacionando ângulos

a) Construa no software de geometria dinâmica a figura ao lado.



b) Meça os quatro ângulos que essas retas determinam

c) Altere a posição das retas e dos pontos e registre suas observações.

Objetivos: perceber que a intersecção de duas retas determina quatro ângulos em que os opostos pelo vértice têm mesma medida e os adjacentes são suplementares.

Definição 8: O ângulo de um polígono será **interno** quando seu vértice é um vértice do polígono e seus lados contêm lados consecutivos desse polígono.
Definição 9: O ângulo de um polígono será externo quando seu vértice é um vértice do polígono, um de seus lados é prolongamento do lado do polígono e o outro lado contém o lado do polígono.

Atividade 04: ladrilhamento
Material: 40 superfícies de triângulos eqüiláteros com 3 cm de lado, 20 superfícies quadrangulares com 3 cm de lado, 20 superfícies hexagonais com 3 cm de lado, 20 superfícies pentagonais com 3 cm de lado, fita adesiva. (Ver material no **anexo 01**).
Com os objetos que você recebeu determine uma condição para que se possa fazer um ladrilhamento com essas figuras.

Objetivos: perceber que para fazer um ladrilhamento com sucesso é necessário observar os ângulos internos das figuras e que a soma dos ângulos ao redor do ponto de encontro dos vértices deve ser igual a 360^0.

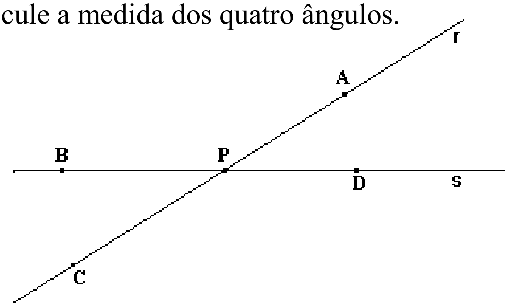
Atividade 05: definindo ângulo
Defina ângulo.

Objetivos: procurar definições, observar suas diferenças e perceber que estas dependem do autor e do que se pretende fazer em Geometria. Uma possibilidade é a definição por *semi-retas* e neste caso os polígonos seriam somente o contorno e, outra, seria *por região* sendo neste caso os polígonos definidos por superfícies.

Familiarização 1

Exercício 1

Na figura abaixo o ângulo $B\hat{P}C$ mede 1/3 da medida do ângulo $A\hat{P}D$. Calcule a medida dos quatro ângulos.



Exercício 2

Assinale "verdadeiro" ou "falso".

a) Dois ângulos suplementares são adjacentes. (   )

b) Dois ângulos adjacentes são suplementares. (   )

c) Dois ângulos que têm o mesmo complementar são congruentes. (   )

d) Dois ângulos que têm o mesmo suplementar são congruentes. (   )

Exercício 3

Mostre que dois ângulos que têm o mesmo complemento são congruentes.

Exercício 4

Mostre que as bissetrizes de dois ângulos adjacentes e suplementares formam ângulo reto.

Exercício 5

O complemento da medida de um ângulo está para o seu suplemento na razão de 1/3. Calcule a medida desse ângulo.

Exercício 6

As bissetrizes de dois ângulos adjacentes formam um ângulo de medida 80^0. Calcule a medida desses dois ângulos, sabendo que a medida de um deles é igual a 3/5 da medida do outro.

Definição 10: Dadas duas retas distintas, r e s de um mesmo plano, uma reta t que as intercepta em dois pontos distintos é chamada de transversal.

Atividade 06: caracterizando ângulos formados por duas retas concorrentes e uma transversal

a) Construa em um software de geometria dinâmica duas retas concorrentes quaisquer r e s e uma reta t que as intercepta em dois pontos distintos.

b) Quantos ângulos ficam determinados por t?

c) Determine suas medidas.

d) O que você pode concluir?

e) Que ângulos poderiam ser chamados de internos?

f) Quais seriam os ângulos chamados de externos?

g) Eles são internos ou externos em relação a que retas?

h) Quais poderiam ser chamados de alternos?

i) Quais você chamaria de colaterais?

j) Eles são alternos ou colaterais em relação a que reta?

l) Quais seriam os ângulos correspondentes?

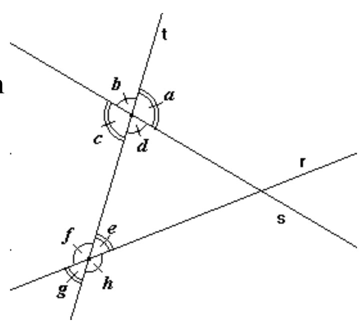
Objetivo: discutir os termos: retas transversais, ângulos internos, ângulos externos, alternos, colaterais e correspondentes, observando a necessidade de se especificar os objetos que estão sendo relacionados em cada situação.

Comentários: quando trabalhamos com três retas quaisquer, não coincidentes, nem paralelas duas a duas, percebemos que na intersecção de t com r e s, obtemos seis ângulos, de medidas diferentes, mas nos deteremos só nos que envolvem a reta t.

Observar que os ângulos são chamados de internos ou externos em relação às retas r e s e de alternos ou colaterais em relação à reta transversal t. Assim os ângulos: a e e, d e h, b e f, c e g são correspondentes. São alternos internos os ângulos: c e e, d e f. Alternos externos: a e g, b e h.

Colaterais internos: c e f, d e e.

Colaterais externos: a e h, b e g.



Atividade 07: particularizando no caso de paralelas e transversais

a) Construa duas retas paralelas, *r* e *s*, cortadas por uma transversal, *t*, e observe os ângulos formados.
b) O que você pode concluir a respeito das medidas dos ângulos obtidos quando uma reta intercepta duas retas paralelas?
c) Altere a posição das retas e verifique se suas observações continuam verdadeiras.

Objetivo: perceber que este é um caso particular da atividade anterior.
Comentários: quando se tem um par de retas paralelas cortadas por uma reta transversal, são congruentes: os ângulos correspondentes, os alternos, os opostos pelo vértice, e são suplementares os ângulos colaterais. Na realidade obtemos nessa situação apenas duas medidas diferentes de ângulos, quando a transversal não é perpendicular às outras retas.

Atividade 08: analisando o recíproco

a) Se duas retas *r* e *s* cortadas por uma transversal apresentam um par de ângulos correspondentes congruentes o que podemos concluir a respeito das retas *r* e *s*?
b) Se duas retas *m* e *n*, cortadas por uma transversal, apresentam um par de ângulos alternos congruentes o que podemos falar de *m* e *n*?
c) Se duas retas *a* e *b*, cortadas por uma transversal, apresentam ângulos colaterais suplementares o que podemos observar a respeito das retas *a* e *b*?

Objetivo: perceber que se duas retas cortadas por uma transversal apresentam ângulos correspondentes congruentes, ângulos alternos congruentes e ângulos colaterais suplementares, então essas duas retas são paralelas.

Institucionalização

Duas retas paralelas interceptadas por uma transversal formam, quanto à medida:
Ângulos correspondentes ....
Ângulos alternos internos ....
Ângulos alternos externos ....

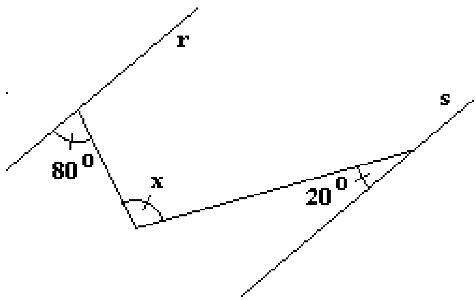
Ângulos colaterais internos ....
Ângulos colaterais externos ....

Conseqüências

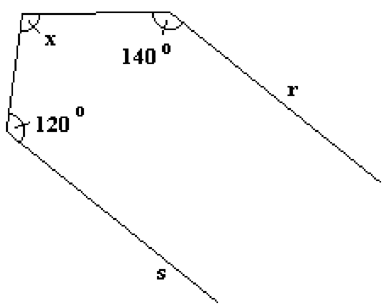
- Se duas retas interceptadas por uma transversal apresentam um par de ângulos correspondentes congruentes então as duas retas são paralelas.
- Se duas retas interceptadas por uma transversal apresentam um par de ângulos alternos congruentes então as retas são paralelas.
- Se duas retas interceptadas por uma transversal apresentam ângulos colaterais suplementares então as retas são paralelas.

Familiarização 2

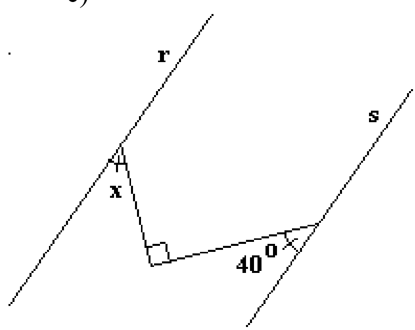
Exercício 1
Calcule o valor de *x* sabendo que as retas *r* e *s* são paralelas.
a)



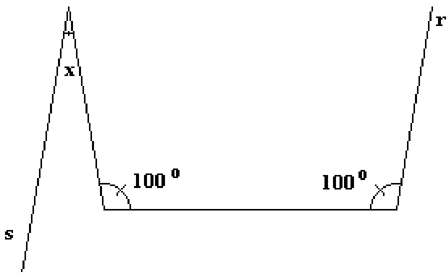
b)



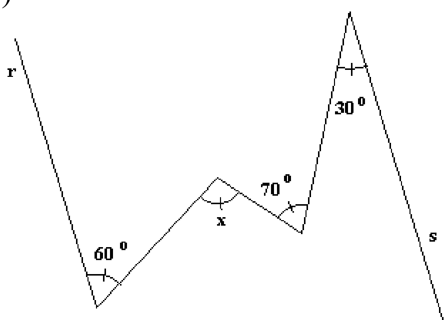
c)



d)



e)



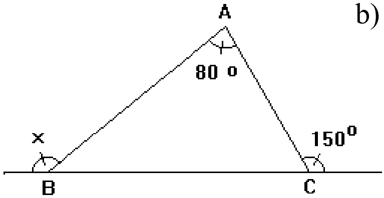
Objetivo: aplicar as propriedades dos ângulos formados por duas paralelas interceptadas por uma transversal para a determinação de medidas desconhecidas de ângulos.

Comentários: é dito no enunciado que as retas r e s são paralelas, o que poderá induzir o uso dessas propriedades, porém, as figuras fornecidas não favorecem à visualização das transversais interceptando as paralelas, pois em cada uma há mais de uma transversal. Visualmente as transversais não se apresentam interceptando as duas paralelas, elas estão representadas somente até a intersecção, formando na maioria dos casos uma linha poligonal aberta simples (c, d, e). Para favorecer à visualização das paralelas cortadas pelas transversais faz-se necessário prolongar as paralelas e as transversais, ou, traçar, pelos pontos de intersecção das transversais, outras retas paralelas às paralelas *r* e *s* dadas.

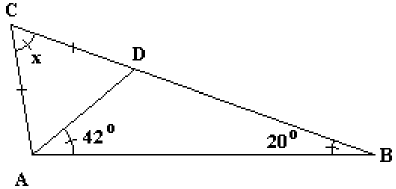
Exercício 2

Determine o valor de *x*.

a)



b)

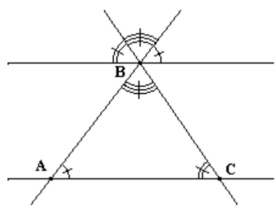


Objetivo: aplicar as propriedades relativas a ângulos para se determinar os valores desconhecidos. O enunciado não propicia a priori o uso de paralelas e transversais, e por isso faz-se necessário prolongar alguns dos segmentos ou traçar paralelas aos segmentos dados.

Exercício 3

Mostre que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a medida de dois ângulos retos.

Objetivo: mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é dois retos, aplicando as propriedades dos ângulos formados por duas paralelas interceptadas por uma transversal.



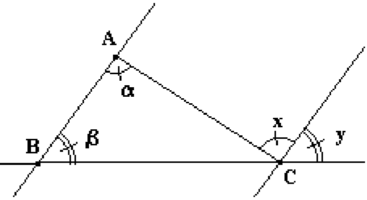
Exercício 4

Mostre que a medida de um ângulo externo de um triângulo é a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Objetivo: mostrar que a medida de um ângulo externo de um triângulo é a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele aplicando as propriedades estudadas.

Demonstração: dado o triângulo *ABC*, considerando um dos ângulos externos ao triângulo no vértice *C*, trace por *C* uma reta paralela ao lado $\overline{AB}$, dividindo assim o ângulo externo em dois ângulos de medidas, *x* e *y*.

Considerando as paralelas temos $\alpha = x$ pois os ângulos são alternos internos em relação à reta *AC* e $\beta = y$ pois são correspondentes em relação à reta *BC*. Logo $\alpha + \beta = x + y$ como queríamos mostrar.



3 TRIÂNGULOS

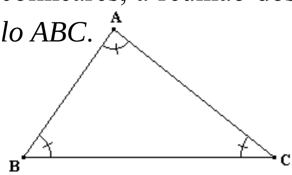
Objetivos gerais: Trabalhar os saberes e conhecimentos relacionados com triângulos. Visamos essencialmente desenvolver os seguintes aspectos:
- caracterização dos triângulos quanto aos lados;
- caracterização dos triângulos quanto aos ângulos;
- os pontos notáveis de um triângulo;
- a condição de existência de um triângulo;
- construções geométricas e
- interpretação de enunciados matemáticos.

As atividades propostas podem ser desenvolvidas usando um software de geometria dinâmica.

Definição: Dados três pontos *A*, *B* e *C* não colineares, a reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ chama-se *triângulo ABC*.

Indicação: triângulo *ABC* ou ΔABC

$\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$



Atividades

Atividade 01: caracterizando triângulos

a) Construa um triângulo *ABC*.
b) Quantos vértices tem este triângulo? Indique-os.
c) Quantos lados tem este triângulo? Indique-os.
d) Quantos ângulos tem esse triângulo?

Objetivo: caracterizar um triângulo e identificar seus elementos.

<u>Elementos de um triângulo</u>

Os pontos *A*, *B* e *C* são os vértices do triângulo *ABC*.

Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ (de medidas respectivas *c*, *b* e *a*) são os lados do triângulo.

Os ângulos $B\hat{A}C$ ou $\hat{A}$, $A\hat{B}C$ ou $\hat{B}$ e $A\hat{C}B$ ou $\hat{C}$ são os ângulos do triângulo *ABC* (ou ângulos internos do triângulo *ABC*).

Diz-se que o lado $\overline{BC}$ é oposto ao ângulo $\hat{A}$, $\overline{AC}$ ao ângulo $\hat{B}$ e $\overline{AB}$ ao ângulo $\hat{C}$.

Atividade 02: construindo e definindo triângulo isósceles

a) Construa um triângulo *DEF* sabendo que $DE = DF$. Que instrumentos você usou para essa construção?

b) Meça os ângulos de seu triângulo. O que você observa?

c) O triângulo *DEF* é chamado triângulo isósceles. Com suas próprias palavras proponha uma definição para triângulo isósceles.

> **Objetivo:** construir, com instrumentos de desenho, um triângulo isósceles, utilizar o transferidor para obter a medida de seus ângulos, identificar suas características e redigir uma definição.
>
> **Comentários:** a partir das informações contidas no enunciado, queremos que o aluno defina triângulo isósceles. É importante que o professor seja o mediador para a construção dos conceitos envolvidos; nesta atividade a definição, que será socializada e emergir do debate provocado pelo professor.

Atividade 03: construindo outros triângulos isósceles

a) Construa um triângulo isósceles *LMN* tal que $LM = 7\ cm$ e $MN = 6\ cm$.

b) Nos seguintes casos, construa um triângulo *ABC*, isósceles em *B*, ou seja, $AB = BC$:

i) $AB = 7\ cm$ e $AC = 5\ cm$

ii) $BC = 6\ cm$ e $med(A\hat{B}C) = 40^0$

iii) $AC = 5\ cm$ e $med(B\hat{C}A) = 50^0$.

c) Determine o perímetro de cada triângulo.

> **Objetivo:** familiarizar-se com a construção de triângulos isósceles utilizando instrumentos de desenho e calcular o perímetro de cada triângulo.
>
> **Comentários:** é necessária a familiarização dos alunos com os novos conhecimentos trabalhados na atividade. Não basta definir um objeto matemático, é importante que o aluno saiba usar essa definição na resolução de problemas.

Atividade 04: construindo e definindo triângulo eqüilátero

a) Construa um triângulo *EFG* que tenha lados congruentes (isto é *EF* = *FG* = *GE*).

b) Explique sua construção.

c) Meça os ângulos do triângulo *EFG*. O que você observa?

d) O triângulo *EFG* é chamado triângulo eqüilátero. Defina triângulo eqüilátero.

e) Construa um triângulo *EFG* isósceles em *E* tal que *EF = 6 cm* e *FG = 5 cm* e determine os pontos *A* e *B* de tal forma que os triângulos *AEF* e *BEF* sejam eqüiláteros. Qual é a natureza do triângulo *AEB*? Justifique sua resposta.

Observação: um triângulo que não é isósceles, nem eqüilátero é chamado escaleno.

Objetivo: construir um triângulo eqüilátero, com instrumentos de desenho, utilizar o transferidor para medir seus ângulos, estudar suas características e redigir uma definição, bem como os passos da construção.

Comentários: queremos que o aluno possa, por conta própria, definir o que é um triângulo eqüilátero a partir das informações contidas no enunciado. O professor deve, depois do debate entre os alunos, institucionalizar a definição que os alunos devem saber e saber utilizar. A questão (e) visa a familiarização dos alunos com o objeto matemático em processo de aprendizagem.

Atividade 05: construindo e definindo triângulo retângulo

a) Construa um triângulo *ABC* tal que o ângulo $B\hat{A}C$ seja reto. Explique o procedimento da sua construção.

b) Você construiu um triângulo chamado retângulo. Defina o que é um triângulo retângulo.

Observação: o lado oposto ao ângulo reto de um triângulo retângulo é chamado de *hipotenusa* e os outros dois são chamados de *catetos* do triângulo.

Objetivo: obter uma definição para triângulo retângulo a partir de uma construção.

Atividade 06: definindo outros triângulos

a) Construa um triângulo *PUC* com medidas 3, 4 e 6 e um triângulo *GEO* com medidas 6, 8 e 12.

b) O que você pode falar desses triângulos em relação aos ângulos?

Atividade 07: construindo triângulos

Exercício 1

Considera-se um triângulo *ADM* tal que $AD = 6\ cm$, $AM = 4\ cm$ e $DM = 3\ cm$.

a) Descreva um procedimento que permita construir com régua e compasso este triângulo.

b) Apoiando-se no seu procedimento, construa o triângulo *ADM*.

Exercício 2

Construa um triângulo *ABC* isósceles nos seguintes casos:

a) $BC = 8\ cm$ e $AB = BC = 6\ cm$

b) $AB = AC$ e $med(B\hat{A}C) = 30^0$

Exercício 3

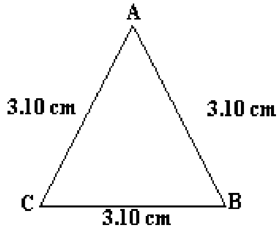
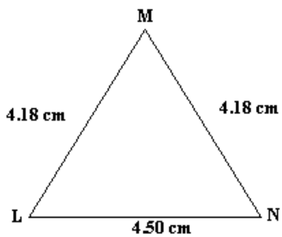
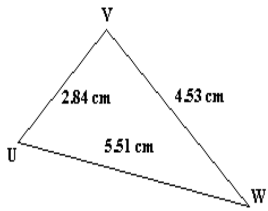
Construa um triângulo *ABC* sabendo que $med(B\hat{A}C) = 50^0$, $AB = 5\ cm$, $AC = 3\ cm$.

Exercício 4

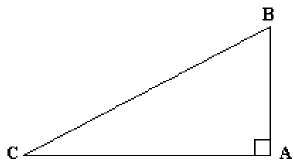
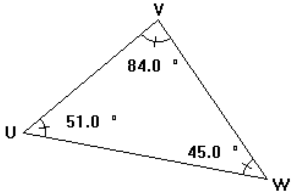
Construa um triângulo *EFG* sabendo que $EF = 6\ cm$, $med(F\hat{E}G) = 40^0$ e $med(E\hat{F}G) = 60^0$.

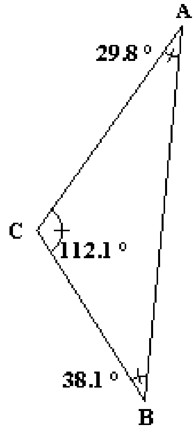
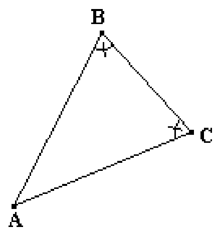
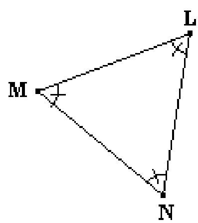
Objetivo: construir triângulos, a partir das medidas dos lados e identificar relações entre seus ângulos. Construir e redigir os procedimentos de construção para triângulos a partir das medidas dos lados ou das medidas de alguns lados ou ângulos. Apropriar-se da descrição de procedimentos para a construção de figuras.

Institucionalização 1: classificação dos triângulos quanto aos lados

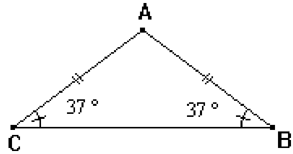
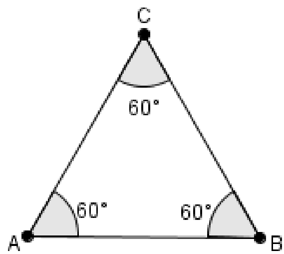
Enunciado das propriedades	Interpretação em linguagem figural	Interpretação em linguagem matemática
Um triângulo é **eqüilátero** se, e somente se, têm os três lados congruentes;		<u>1ª Interpretação</u> Hipótese: ABC é eqüilátero. Conclusão: $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CA}$ <u>2ª Interpretação</u> Hipótese: Triângulo ABC e $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CA}$. Conclusão: o triângulo ABC é eqüilátero.
Um triângulo é **isósceles** quando tem dois lados congruentes. O lado não congruente é comumente chamado base e seu ângulo oposto é chamado **ângulo do vértice**.		<u>1ª Interpretação</u> Hipótese: O triângulo LMN é isósceles. Conclusão: $\overline{LM} \equiv \overline{MN}$ <u>2ª Interpretação</u> Hipótese: Triângulo LMN e $\overline{LM} \equiv \overline{MN}$. Conclusão: o triângulo LMN é isósceles.
Um triângulo é **escaleno** se, e somente, dois lados quaisquer não são congruentes.		<u>1ª Interpretação</u> Hipótese: O triângulo UVW é escaleno. Conclusão: $UV \neq VW$ e $VW \neq WU$ <u>2ª Interpretação</u> Hipótese: Triângulo LMN $UV \neq VW$ e $VW \neq WU$. Conclusão: o triângulo é escaleno.

Institucionalização 2: classificação dos triângulos quanto aos ângulos

Enunciado das propriedades	**Interpretação em linguagem figural**	**Interpretação em linguagem matemática**
Um triângulo é retângulo se, e somente se, tem um ângulo reto. <u>Designação</u>: O lado oposto ao ângulo reto de um triângulo retângulo é sua hipotenusa e os outros dois são os catetos do triângulo.		<u>1ª interpretação</u> <u>Hipótese:</u> *ABC* é um triângulo retângulo em *A*. <u>Conclusão</u>: o ângulo $B\hat{A}C$ é reto, ou ainda $\overline{AB}$ é perpendicular à $\overline{AC}$ <u>2ª interpretação</u> <u>Hipóteses</u>: 1) *ABC* é um triângulo 2) $B\hat{A}C$ é um ângulo reto <u>Conclusão</u>: *ABC* é um triângulo retângulo.
Um triângulo é acutângulo se, e somente se, tem os três ângulos agudos;		<u>*1ª interpretação*</u> <u>Hipótese</u>: *VUW* é um triângulo acutângulo. <u>Conclusões</u>: $med(V\hat{U}W) < 90^0$, $med(U\hat{V}W) < 90^0$ e $med(U\hat{W}V) < 90^0$ <u>*2ª interpretação*</u> <u>Hipóteses</u>: *UVW* é triângulo $med(V\hat{U}W) < 90^0$, $med(U\hat{V}W) < 90^0$ e $med(U\hat{W}V) < 90^0$ <u>Conclusão:</u> *UVW* é um triângulo acutângulo

Um triângulo é *obtusângulo* se, e somente se, tem um ângulo obtuso.		<u>*1ª interpretação*</u> <u>Hipótese</u>: *ABC* é um triângulo obtusângulo. <u>Conclusão</u>: $med(A\hat{C}B) > 90^0$, $med(B\hat{A}C) < 90^0$ e $med(C\hat{B}A) < 90^0$ <u>*2ª interpretação*</u> <u>Hipóteses</u>: - *ABC* é triângulo - $med(A\hat{B}C) < 90^0$, $med(B\hat{A}C) < 90^0$ e $med(B\hat{C}A) > 90^0$ <u>Conclusão</u>*:* *ABC* é um triângulo obtusângulo.
Um triângulo é *isósceles* se têm dois ângulos congruentes.		<u>Hipótese</u>: *ABC* é um triângulo, $\hat{B} \equiv \hat{C}$ <u>Conclusão</u>: O triângulo *ABC* é isósceles.
Se um triângulo têm seus três ângulos congruentes, então esse triângulo é *eqüilátero*.		<u>Hipótese</u>: LMN é um triângulo, $\hat{L} \equiv \hat{M} \equiv \hat{N}$. <u>Conclusão</u>: *LMN* é triângulo eqüilátero.

Institucionalização 3: triângulos especiais

Enunciado das propriedades	Interpretação em linguagem figural	Interpretação em linguagem matemática
1) Se um triângulo tem dois lados congruentes, então é um triângulo isósceles. 2) Se um triângulo é isósceles, então os ângulos da base são congruentes.		1) <u>Hipótese:</u> ABC é um triângulo isósceles de vértice A <u>Conclusão</u>: $A\hat{B}C \equiv A\hat{C}B$ 2) <u>Hipótese</u>: ABC é um triângulo tal que: $A\hat{B}C \equiv A\hat{C}B$ <u>Conclusão</u>: ABC é isósceles
1)Se um triângulo é eqüilátero, então seus três lados são congruentes. 2) Se um triângulo tem seus três ângulos congruentes, então é um triângulo eqüilátero.		1) <u>Hipótese:</u> ABC é um triângulo eqüilátero <u>Conclusão:</u> $A\hat{B}C \equiv A\hat{C}B \equiv B\hat{A}C$ 2) <u>Hipótese:</u> ABC é um triângulo tal que: $A\hat{B}C \equiv A\hat{C}B \equiv B\hat{A}C$ <u>Conclusão</u>: ABC é eqüilátero.

Familiarização

Exercício 1

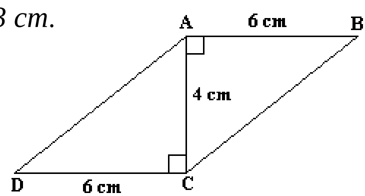
Explique como você construiria um triângulo *UVW*, retângulo em *V*, com $VU = 5\ cm$ e $VW = 3\ cm$. Faça a construção usando seus procedimentos.

Exercício 2

a) Construa um triângulo *ABC* retângulo em *A* e tal que $AB = 7\ cm$ e $AC = 5\ cm$.
b) Construa um triângulo *OPQ* tomando como hipotenusa o segmento *OQ* e tal que $OQ = 5\ cm$ e $PQ = 3\ cm$.

Exercício 3

Observe a figura ao lado. Descreva-a de modo que seu colega possa construí-la.



Exercício 4

Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F) as seguintes afirmações:

a) Todo triângulo isósceles é eqüilátero.

b) Todo triângulo eqüilátero é isósceles.

c) Um triângulo escaleno pode ser isósceles.

d) Todo triângulo isósceles é triângulo acutângulo.

e) Todo triângulo retângulo é triângulo escaleno.

f) Existe triângulo isósceles obtusângulo.

g) Todo triângulo acutângulo ou é isósceles ou eqüilátero.

Exercício 5

Complete as seguintes afirmações:

a) Um triângulo que só tem ângulos medindo .... é necessariamente eqüilátero.

b) Todo triângulo que tem dois ângulos congruentes é necessariamente ....

Objetivo: apropriar-se das caracterizações dos triângulos quanto aos lados e ângulos.
Comentários: a atividade foi proposta no intuito de o aluno resolver problemas envolvendo os conceitos novos trabalhados nas atividades anteriores e desenvolver as seguintes habilidades a respeito de seu conhecimento de triângulos: ser capaz de construir triângulos a partir das informações dadas, interpretar as definições, redigir e comunicar-se.

Atividade 8: retomando a condição de existência de um triângulo[5]

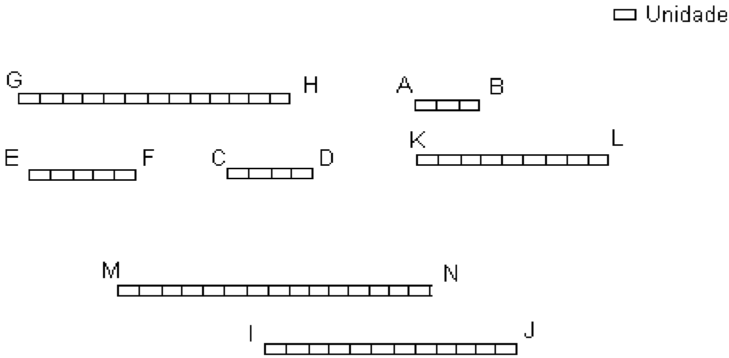
Material: Pedaços de bastões, semelhantes aos palitos de madeira (usados para algodão doce) graduados com unidade de aproximadamente 2 cm. Os palitos medem 15, 13, 12, 9, 5, 4 e 3 unidades.

---

[5] Esta atividade teve como referência elementos da dissertação de Mestrado: *O Teorema de Pitágorass* de Irma Verri Bastian, 2000, PUC-SP

Exercício 1

As figuras abaixo, representam os tipos de palito que você recebeu.



a) Usando três delas de cada vez, tente construir triângulos.

b) Descreva, por meio de uma terna, as medidas dos lados dos triângulos que você formou. Assim: (....., ..., ...)

c) Sempre que você pegou 3 palitos foi possível construir um triângulo? Explique o que aconteceu.

Exercício 2

a) Escreva as ternas com as quais você <u>não</u> conseguiu formar um triângulo.

b) Escreva, com suas palavras, o que precisa acontecer para que exista um triângulo? Que relação deve haver entre essas três medidas?

Exercício 3

Considerando as palitos do exercício (1):

a) Você construiu que tipo de triângulo?

b) Quais as ternas correspondentes aos triângulos retângulos que você construiu?

c) Com quais palitos se pode fazer um triângulo retângulo de hipotenusa $\overline{GH}$?

d) Com quais palitos se pode fazer um triângulo retângulo de catetos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$?

e) E, se for: hipotenusa $\overline{MN}$ e um cateto $\overline{IJ}$?

Exercício 4

(Pode ser feito com um software de geometria dinâmica)

Agora, são dadas as ternas, sem as varetas: (8, 10, 8), (5, 5,5), (0,8; 1,5; 2,3), (2,5; 4,5; 3,5), (4,3; 5,2; 9,8).

a) Com quais dessas ternas é possível construir triângulos?

b) Agora é a sua vez! Invente três ternas com as quais você pode construir triângulos e, três ternas "que não vão dar certo".

Objetivos: estabelecer a condição de existência de triângulo. Fazer com que o aluno perceba que, dadas três medidas, nem sempre é possível construir um triângulo cujos lados tenham essas medidas. Chegar à forma da condição de existência de triângulo.

Comentários: com sete varetas existem 35 combinações possíveis de 7 objetos tomados 3 a 3, de que resultarão três triângulos retângulos, dez obtusângulos e três acutângulos; 19 não formarão triângulo. O aluno poderá apresentar algumas das 19 possibilidades para as quais não existe triângulo e, a partir disso, perceber a condição de existência de triângulo. Algumas das ternas dadas apresentam números decimais, para permitir ao aluno entender que a condição de existência de triângulo vale também para medidas expressas por esse tipo de número. Neste estágio será feita a institucionalização da condição de existência de triângulo.

Visamos no exercício 4 que o aluno conjeture a insuficiência da condição de existência para prever se o triângulo será retângulo.

Atividade 09: ainda sobre a existência de um triângulo

Exercício 1

Construa um triângulo:

a) retângulo

b) isósceles

c) retângulo e isósceles

d) eqüilátero

e) Que relação deve haver entre as três medidas dos lados de cada um desses triângulos?

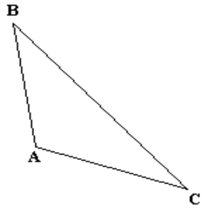
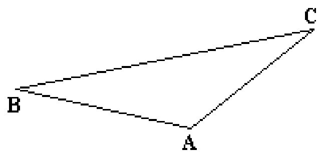
Exercício 2

É possível construir um "triângulo" *ABC* no qual: $BC = 7\ cm$, $AB = 3\ cm$, $AC = 2\ cm$? Por quê?

Exercício 3

Que relação você observou nos exercícios 1 e 2 desta atividade?

Institucionalização 4

Enunciado da propriedade	**Interpretação figural**	**Interpretação matemática**
Para que um triângulo exista, é necessário que os seus lados satisfaçam a condição de existência de triângulo.		Hipóteses: *BC, AB e AC* são tais que: $BC < AB + AC$ $AB < AC + BC$ $AC < AB + BC$ Conclusão: *ABC* é um triângulo
Em todo triângulo a medida de um lado é menor que a soma das medidas dos dois outros lados		Hipóteses: *ABC* é um triângulo Conclusão: $BC < AB + AC$ $AB < AC + BC$ $AC < AB + BC$

Atividade 10: consolidando os novos conhecimentos
(pode-se usar um software de geometria dinâmica).

Exercício 1

a) É possível construir um triângulo com segmentos de comprimentos 10 cm, 5 cm e 7 cm? Explique sua resposta. Se sim, faça a construção.

b) Com segmentos de comprimentos 8 cm, 5 cm e 18 cm, pode-se construir um triângulo? Por quê?

Exercício 2

a) Construa um triângulo *EFG* tal que $FG = 55\ mm$; $med(F\hat{E}G) = 30^0$ e $med(F\hat{G}E) = 70^0$.

b) No exterior do triângulo, construa os pontos A e B de modo que os triângulos *AEF* e *EBG* sejam eqüiláteros.

Exercício 3

a) Construa um triângulo eqüilátero *ABC* e determine um ponto *D* na sua região exterior de tal forma que o triângulo *ABD* seja retângulo e isósceles em *B*.

b) Encontre as medidas, em graus, de todos os ângulos da figura.

Atividade 11: descobrindo as propriedades da mediatriz de um segmento

(pode usar um software de geometria dinâmica)

a) Lembre o que é "mediatriz de um segmento".

b) Construa um segmento *AB*.

c) Construa a mediatriz *d* do segmento *AB* sem utilizar a opção "mediatriz" do menu do software.

d) Obtenha um ponto *P* sobre a mediatriz *d*.

e) Explore a propriedade que caracteriza o ponto *P* de *d* em relação aos pontos *A* e *B*.

f) Escreva com suas palavras a propriedade geométrica que caracteriza um ponto qualquer da mediatriz de um segmento.

g) Complete as seguintes afirmações:

i) Se um ponto pertence à mediatriz de um segmento, então, ele

ii) Se um ponto está a igual distância dos extremos de um segmento, então, ele

Objetivo: estudar as propriedades da mediatriz de um segmento.

Comentários: a construção no software permite a percepção de que todo ponto da mediatriz de um segmento é eqüidistante dos seus extremos, tentando romper com a idéia de que a mediatriz é somente a reta perpendicular que passa pelo ponto médio de um segmento.

Atividade 12: construindo o circuncentro de um triângulo

(pode usar um software de geometria dinâmica)

a) Lembre o que são as mediatrizes dos lados de um triângulo.

b) Construa um triângulo *UVW*.

c) Obtenha o ponto *O* que é intersecção das mediatrizes.

O ponto O é chamado "circuncentro do triângulo UVW".

d) Movimente um dos pontos *U*, *V* ou *W*. Existe uma relação entre as medidas dos segmentos *OU*, *OV* e *OW*? Justifique sua resposta usando o software, depois faça uma demonstração geométrica.

e) Enuncie com suas palavras a propriedade geométrica que observou:

f) É possível traçar uma circunferência com centro em O, passando pelos vértices do triângulo? Justifique sua resposta.

Objetivo: construir a figura e identificar as propriedades do circuncentro de um triângulo.

Comentários: a construção e manipulação da figura encaminham à percepção da propriedade: o circuncentro de um triângulo é eqüidistante dos seus vértices e por isso representa o centro da circunferência circunscrita ao triângulo construído. Para esta atividade o aluno deve conhecer o que é uma circunferência (conjunto de pontos eqüidistantes de um ponto chamado centro) e deve-se definir circunferência circunscrita como sendo aquela que passa pelos vértices de um polígono.

Atividade 13: construindo o baricentro de um triângulo

(pode usar um software de geometria dinâmica)

a) Lembre o que chamamos de medianas de um triângulo.

b) Construa um triângulo *ABC*.

c) Obtenha o ponto *G* que é intersecção das medianas.

O ponto G é chamado "baricentro do triângulo ABC".

d) Meça $\overline{AG}$ e $\overline{GM}$ sendo *M* o ponto médio do segmento *BC*.

e) Movimente um dos pontos *A*, *B* ou *C*. Existe uma relação entre as medidas dos segmentos *AG* e *GM*?

f) Enuncie com suas palavras a propriedade geométrica que você observou:

Objetivo: definir e construir o baricentro de um triângulo.

Comentários: É importante perceber que o baricentro é o ponto de equilíbrio do triângulo e que divide a mediana na razão de 2: 1 a partir do vértice.

Atividade 14: construindo o ortocentro de um triângulo
(pode usar um software de geometria dinâmica)

a) Lembre o que chamamos de alturas de um triângulo.

b) Construa um triângulo *ABC*.

c) Construa as alturas $\overline{AH}$, $\overline{BR}$ e $\overline{CS}$.

d) Obtenha o ponto *O*, intersecção das alturas do triângulo.

O ponto O é chamado "ortocentro" do triângulo ABC

e) Colorir o triângulo de vermelho.

f) Movimente um dos pontos *A*, *B* ou *C*. Observe a posição do ortocentro.

g) Classifique os triângulos (acutângulo, obtusângulo ou retângulo) quanto à posição do ponto *O*.

Objetivo: definir e construir o ortocentro de um triângulo, além de classificar os triângulos quanto à posição de seu ortocentro.

Comentários: O ortocentro está na região externa do triângulo se este for obtusângulo, está na região interna se for acutângulo e coincide com o vértice do ângulo reto se o triângulo for retângulo.

Atividade 15: descobrindo uma propriedade do baricentro, ortocentro e circuncentro
(pode usar um software de geometria dinâmica)

a) Construa um triângulo *MNP*.

b) Construa o baricentro *B* do triângulo e esconda as medianas deixando apenas o ponto *B*.

c) Construa o ortocentro *O* do triângulo e esconda as alturas deixando o ponto *O*.

d) Construa duas mediatrizes para encontrar o circuncentro *C* e esconda as mediatrizes deixando o ponto *C*.

e) Movimente um dos vértices *M*, *N* ou *P* e investigue a posição dos pontos *B*, *O* e *C*.

f) Enuncie com suas palavras a propriedade geométrica que você observou.

g) É possível movimentar os pontos *M*, *N* ou *P* de modo que o baricentro, o ortocentro e o circuncentro coincidam?

h) O que acontece com os pontos *B*, *O* e *C* se o triângulo for retângulo?

Objetivo: construir o baricentro, o ortocentro e o circuncentro de um triângulo, conjeturar o alinhamento desses pontos e enunciar tal propriedade.

Comentários: a reta que passa por esses pontos notáveis é chamada **reta de Euler**. Quando o triângulo for eqüilátero os pontos são coincidentes. Quando o triângulo for retângulo o ortocentro coincide com o vértice do ângulo reto e o ponto *C* com o ponto médio da hipotenusa, a reta de Euler passa a ser a reta suporte da mediana relativa ao vértice do ângulo reto.

Atividade 16: Construindo o incentro de um triângulo

(pode usar um software de geometria dinâmica)

a) Lembre o que chamamos de bissetrizes de um triângulo.

b) Construa um triângulo *UVW*.

c) Obtenha o ponto *S* que é intersecção das bissetrizes.

As três bissetrizes internas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto.

O ponto S é chamado "incentro do triângulo UVW".

d) Movimente um dos pontos *U*, *V* ou *W*. Investigue uma relação entre as distâncias do ponto S aos lados do triângulo.

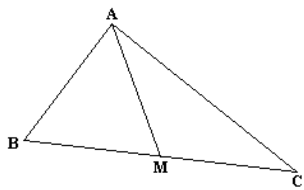
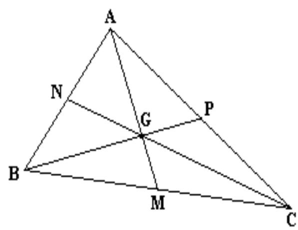
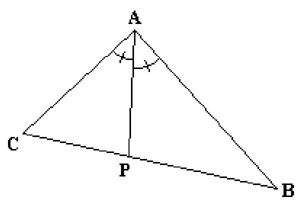
e) Enuncie com suas palavras a propriedade geométrica que observou.

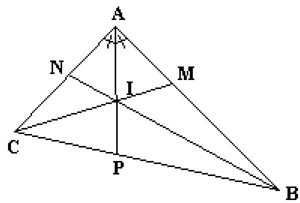
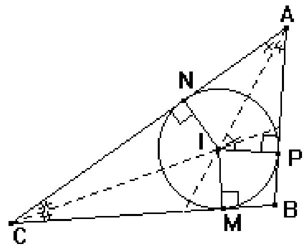
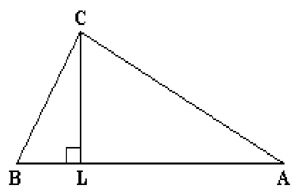
f) É possível construir uma circunferência com centro em S que tangencie os lados do triângulo *UVW*? Justifique sua resposta.

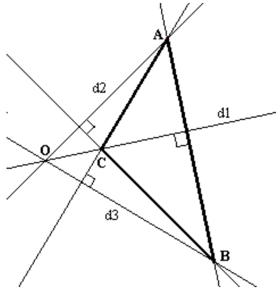
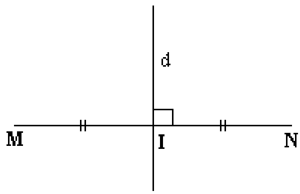
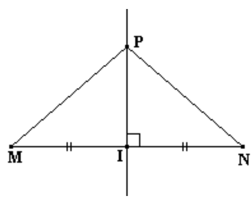
Objetivo: construir, observar e redigir as propriedades do incentro de um triângulo. Construir a circunferência inscrita.

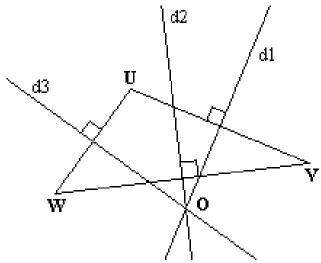
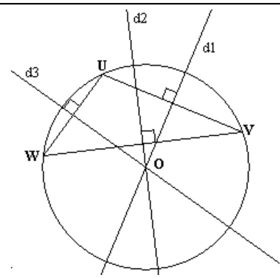
Comentários: diferente dos outros pontos notáveis o incentro estará sempre na região interna do triângulo. Além disso, é eqüidistante dos lados desse triângulo tornando-se o centro da circunferência inscrita ao triângulo.

Institucionalização 5: pontos notáveis de um triângulo

Enunciado da propriedade	Interpretação figural	Interpretação matemática
A mediana de um triângulo é o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto		<u>Hipóteses</u>: - ABC é um triângulo - M é ponto médio do lado $\overline{BC}$ <u>Conclusão</u>: $\overline{AM}$ é uma mediana do triângulo ABC
As medianas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto chamado **baricentro.**		<u>Hipóteses</u>: - ABC é um triângulo - $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CP}$ são suas medianas. <u>Conclusão</u>: $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CP}$ interceptam-se no ponto G, baricentro do triângulo.
A bissetriz de um triângulo é o segmento de reta que liga um vértice ao lado oposto, dividindo o ângulo em dois ângulos de medidas iguais.		<u>Hipóteses</u>: - ABC é um triângulo - P é um ponto de $\overline{BC}$ tal que $P\hat{A}C \equiv P\hat{A}B$ <u>Conclusão</u>: O segmento AP é uma bissetriz do triângulo ABC

As bissetrizes internas de um triângulo encontram-se num ponto chamado **incentro**.		**<u>Hipóteses</u>:** - *ABC* é um triângulo - $\overline{AP}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CM}$ são suas bissetrizes. <u>Conclusão</u>: $\overline{AP}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CM}$ interceptam-se no ponto *I*, chamado incentro
O incentro de um triângulo está a igual distância dos lados desse triângulo. Então, ele é o centro da circunferência inscrita nesse triângulo.		**<u>Hipótese</u>**: *I* é o incentro do triângulo *ABC*, $MI = NI = PI$ <u>Conclusões</u>: - $\overline{IN} \perp \overline{AC}$, IN é a medida do raio da circunferência inscrita no triângulo *ABC* - *I* é o centro dessa circunferência
2) O centro da circunferência inscrita num triângulo é o ponto de intersecção das bissetrizes desse triângulo.	Interprete esta propriedade	
A altura de um triângulo é o segmento de reta que une um vértice à reta que contém o lado oposto ao vértice, sendo perpendicular a essa reta.		**<u>Hipóteses</u>:** - *ABC* é um triângulo. - $\overleftrightarrow{CL} \perp \overleftrightarrow{BA}$ <u>Conclusão</u>: $\overline{CL}$ é uma altura do triângulo *ABC*

As três retas suportes das alturas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto chamado **ortocentro**		**<u>Hipóteses</u>:** - ABC é um triângulo - $d_1 \perp \overleftrightarrow{AB}$, $d_2 \perp \overleftrightarrow{BC}$ e $d_3 \perp \overleftrightarrow{AC}$ <u>Conclusão</u>: As retas d_1, d_2 e d_3 interceptam-se no ponto O.
Mediatriz de um segmento é a reta perpendicular a esse segmento, passando pelo seu ponto médio.		**<u>Hipóteses</u>:** - $d \perp \overline{MN}$ - I é o ponto médio de $\overline{MN}$ <u>Conclusão</u>: A reta d é mediatriz de $\overline{MN}$
Um ponto qualquer da mediatriz de um segmento está a igual distância dos extremos desse segmento.		**<u>Hipóteses</u>:** - $\overleftrightarrow{IP}$ é a mediatriz de $\overline{MN}$. - P é um ponto qualquer de $\overleftrightarrow{IP}$. <u>Conclusão</u>: $PM = PN$
A mediatriz de um segmento é o conjunto dos pontos do plano que estão a igual distância dos seus extremos.	↙ Interprete esta propriedade	

As mediatrizes dos lados de um triângulo encontram-se num mesmo ponto que está a igual distância dos vértices do triângulo. Esse ponto é chamado **circuncentro.**		**<u>Hipóteses</u>:** - *UVW* é um triângulo. - d_1, d_2 e d_3 são as mediatrizes dos lados do triângulo. <u>Conclusões</u>: - $d_1 \cap d_2 \cap d_3 = \{O\}$ - $OV = OW = OU$
- O circuncentro de um triângulo é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.		**<u>Hipóteses</u>:** - *UVW* é um triângulo. - O ponto *O* é o circuncentro. <u>Conclusão</u>: *O* é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.
- O centro da circunferência circunscrita a um triângulo é o ponto de intersecção das mediatrizes de seus lados.	↙ Interprete esta propriedade	

Atividade 17: determinando uma condição sobre os ângulos internos de um triângulo

(pode-se trabalhar com um software de geometria dinâmica)

Exercício 1

As seguintes ternas representam as medidas de ângulos em graus:

(80, 50, 50), (45, 65,18), (30, 60, 90), (25, 75, 78), (41, 79, 40)

a) Com quais dessas ternas é possível construir triângulos?

b) Escreva, com suas palavras, o que precisa acontecer para que exista um triângulo que tenha uma das ternas como medidas de seus ângulos internos? Que relação deve haver entre essas três medidas?

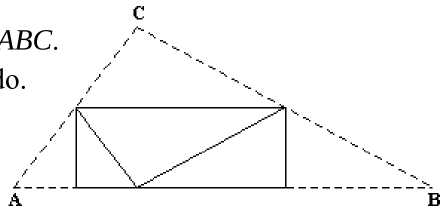
c) Agora é a sua vez! Invente três ternas (medidas em graus de ângulos) com as quais você pode construir triângulos e, três ternas "que não vão dar certo".

Exercício 2

Recorte uma superfície triangular *ABC*.

Dobre como mostra a figura ao lado.

O que se pode concluir quanto à soma das medidas dos ângulos do triângulo *ABC*.



Exercício 3

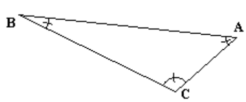
Complete a seguinte tabela, sendo *ABC* um triângulo.

Triângulo *ABC*	$med(\hat{A})$	$med(\hat{B})$	$med(\hat{C})$
é retângulo em *A*			48°
é isósceles em *A*	55°		
é isósceles em *B*	40°		
é eqüilátero			
é qualquer		45°	
é retângulo isósceles			

Objetivo: reforçar propriedade.

Comentários: familiarizar-se com a propriedade, vista anteriormente, de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180^0, e já demonstrada geometricamente, a partir de paralelas e transversais. Na situação 2 é apresentada uma prova empírica de tal propriedade.

Institucionalização 6: soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.

Enunciado da propriedade	**Interpretação figural**	**Interpretação em linguagem matemática**
A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos.		<u>**Hipótese**</u>: ABC é um triângulo. <u>**Conclusão**</u>: $med(\hat{A}) + med(\hat{B}) + med(\hat{C}) = 180^{0}$

Atividade 18: resolvendo problemas com seus novos conhecimentos.
Exercício 1

a) Construa um triângulo ABC tal que $med(B\hat{A}C) = 80^0$ e $med(A\hat{B}C) = 52^0$. O triângulo ABC é isósceles? Justifique sua resposta.

b) E o triângulo UVW tal que $med(V\hat{U}W) = 40^0$ e $med(U\hat{V}W) = 101^0$?

Exercício 2

Um dos ângulos de um triângulo mede 50^0. Os dois outros podem medir respectivamente:

a) 60^0 e 45^0;.
b) 70^0 e 60^0;
c) 49^0 e 71^0;
d) 36^0 e 94^0
e) 60^0 e 60^0

Exercício 3

Construa um triângulo isósceles em A tal que a $med(\hat{A}) = 70^0$ e $AB = 6\ cm$.

Construa o ponto H, pé da altura $\overline{BH}$ e o ponto K, pé da altura $\overline{CK}$. O ponto E é a intersecção das retas $\overleftrightarrow{BH}$ e $\overleftrightarrow{CK}$. Calcule as medidas dos ângulos: $B\hat{C}A$, $B\hat{A}C$, $H\hat{B}C$, $A\hat{C}K$, $B\hat{E}C$ e $H\hat{E}C$.

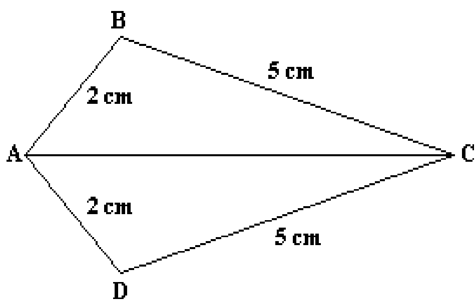
Exercício 4

Observe a figura ao lado.

a) A reta AC é mediatriz do segmento BD? Justifique.

b) O que se pode dizer da reta BD em relação ao triângulo ABC?

c) E da reta AC em relação ao triângulo BCD?



Exercício 5

a) Construa um triângulo eqüilátero *ABC*.

b) Construa um triângulo eqüilátero *DEF* cujos lados sejam perpendiculares aos lados do triângulo *AB*C.

c) Continue esse processo de construção....

Exercício 6

a) Crie duas retas *d* e *d´* concorrentes.

b) Construa um triângulo *HPK* de tal modo que *d* seja o suporte de uma altura e *d´* uma mediatriz do triângulo.

Objetivo: familiarizar-se com os conhecimentos adquiridos durante este trabalho.

Comentários: o ideal é que esta atividade seja feita individualmente. No exercício 1, usando transferidor e régua para a construção, podemos perceber em (a) que o terceiro ângulo mede 48^0 e que, portanto, o triângulo não é isósceles porque não tem dois ângulos congruentes, o mesmo acontecendo em (b) embora visualmente se tenha a impressão que seja.

4 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Atividades

Objetivos gerais: A partir da exploração de construções previamente elaboradas construir novas figuras e a partir da comparação de alguns de seus elementos perceber que são possíveis somente quatro casos para a congruência de triângulos. A seguir, definir cada um desses casos.

Atividade 01: identificando figuras congruentes

a) O que você entende por congruência de figuras?

b) Abra o arquivo **mod_04_congr00** e identifique os pares de figuras congruentes. Anote os pares usando como referência o número que aparece em cada uma.

c) Que condições temos que verificar para concluir que duas figuras são congruentes?

Objetivo: identificar pares de figuras congruentes a partir da sobreposição de diversas figuras planas com movimentos de rotação e translação. **Comentários:** esta atividade também pode ser realizada com figuras recortadas em cartão.

Atividade 02: identificando triângulos congruentes

a) Abra o arquivo **mod_04_congr01** e identifique pares de triângulos congruentes.

b) Quais condições temos que verificar para dizer que dois triângulos são congruentes?

Objetivo: identificar os pares de triângulos congruentes sobrepondo-os com movimentos de rotação e translação e descrever as condições necessárias para a congruência de triângulos. **Comentários:** os alunos devem concluir que os pares de triângulos congruentes são: 3 e 8, 2 e 11, 12 e 7, 12 e 4, 7 e 4, 13 e 14, 5 e 9, 16 e 10, 1 e 6. E que, esses pares de triângulos têm os respectivos ângulos e lados de mesma medida. Esta atividade também pode ser realizada com triângulos recortados em cartão.

Atividade 03: procurando casos de congruência (por comparação dos lados dos triângulos)

Abra o arquivo **mod_04_triang01**.

a) Construa um triângulo *DEF* que tenha o lado $\overline{DE}$ medindo *AB*.

b) Os dois triângulos são congruentes? Por quê?

c) Observe a construção dos colegas vizinhos.

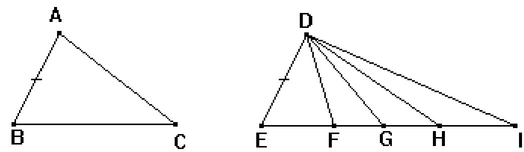
d) Faça um esboço dos triângulos.

e) Anote suas conclusões:

f) E se você tivesse construído o triângulo *DEF* com $\overline{DF}$ medindo *AC* ou com $\overline{EF}$ medindo *BC*? Suas conclusões seriam diferentes?

Objetivo: concluir que a congruência de um lado em dois triângulos não garante a congruência entre eles.

Comentários: na execução da atividade observar diferentes estratégias de construção de triângulos, não congruentes (DEF, DEG, DEH, DEI), respeitando as condições dadas.



Atividade 04: ainda procurando casos de congruência comparando lados

Abra o arquivo **mod_04_triang02**.

a) Construa um triângulo *DEF* que tenha o lado $\overline{DE}$ medindo *AB* e o lado $\overline{DF}$ medindo *AC*.

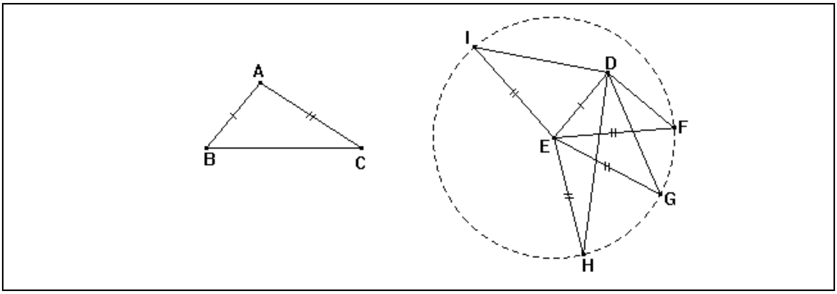
b) Os dois triângulos são congruentes? Por quê?

c) Observe a construção dos colegas vizinhos.

d) Faça um esboço dos triângulos.

e) O que você pode concluir?

Objetivo: observar as diferentes possibilidades de construção de triângulos não congruentes (DEF, DEG, DEH, DEI), concluindo que a congruência de dois lados correspondentes não garante a congruência entre dois triângulos.



Atividade 05: descobrindo o primeiro caso de congruência

Abra o arquivo **mod_04_triang03**.

a) Construa um triângulo *DEF* que tenha o lado $\overline{DE}$ medindo *AB*, o lado $\overline{DF}$ medindo *AC* e o outro, $\overline{EF}$ medindo *BC*.

b) Os dois triângulos são congruentes? Por quê?

c) Observe a construção dos colegas vizinhos.

d) Faça um esboço dos triângulos.

e) O que você pode concluir?

Conclusão: até aqui, verificamos a possibilidade de congruência, construindo triângulos respeitando apenas as medidas dos lados desses triângulos, e pudemos concluir que *somente quando as medidas dos três lados forem iguais é que teremos os triângulos congruentes.*Chamaremos esse caso de LLL.

Objetivo: perceber que apesar de métodos diferentes de construção, a partir das medidas dos lados de um triângulo, os triângulos construídos são congruentes quando têm lados correspondentes congruentes.

Atividade 06: procurando casos de congruência comparando os ângulos dos triângulos

Abra o arquivo **mod_04_triang04**.

a) Construa um triângulo *DEF* que tenha o ângulo *D* com a mesma medida do ângulo *A*.

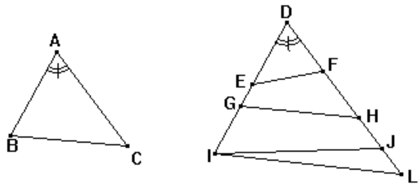
b) Os dois triângulos são congruentes? Por quê?

c) Observe a construção dos colegas vizinhos.

d) Faça um esboço dos triângulos.

e) Anote aqui suas conclusões.

Objetivo: verificar que a congruência de apenas um ângulo em dois triângulos não garante a congruência entre eles.



Atividade 07: procurando casos de congruência (por comparação de ângulos)

Abra o arquivo **mod_04_triang05**.

a) Construa um triângulo *DEF* que tenha o ângulo *D* com a mesma medida do ângulo *A* e o ângulo *E* com a mesma medida do ângulo *B*.

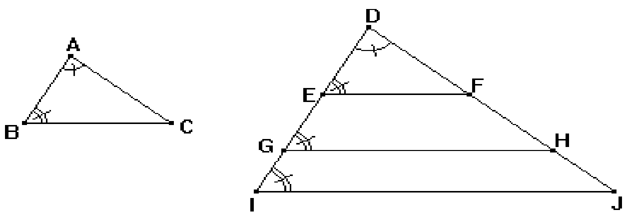
b) Os dois triângulos são congruentes? Por quê?

c) Observe a construção dos colegas vizinhos.

d) Faça um esboço dos triângulos.

e) Anote aqui suas conclusões:

Objetivo: verificar que é possível construir uma infinidade de triângulos diferentes com dois ângulos de mesma medida.



Atividade 08: ainda procurando casos de congruência comparando ângulos

Abra o arquivo **mod_04_triang06**.

a) Construa um triângulo *DEF* que tenha o ângulo *D* com a mesma medida do ângulo *A*, o ângulo *E* com a medida de $\hat{B}$ e o ângulo *F* com a medida de $\hat{C}$.

b) Os dois triângulos são congruentes? Por quê?

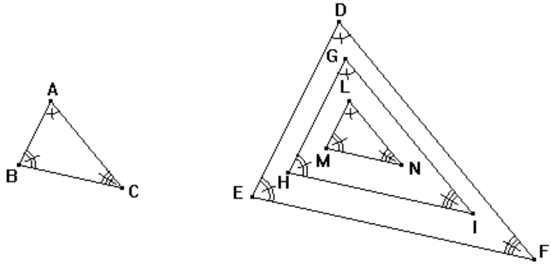
c) Observe a construção dos colegas vizinhos.

d) Faça um esboço dos triângulos.

e) O que você pode concluir?

Conclusão: observando somente as medidas dos ângulos de dois triângulos podemos concluir que se eles tiverem um, dois ou três ângulos congruentes eles não são congruentes.

Objetivo: estudar a possibilidade de uma infinidade de triângulos que têm os três ângulos congruentes e que não são congruentes entre si.



Atividade 09: procurando casos de congruência comparando lados e ângulos dos triângulos

Abra o arquivo **mod_04_triang07**.

a) Construa um triângulo *DEF* que tenha o lado $\overline{DE}$ medindo *AB* e o ângulo com vértice *D* com a mesma medida de $\hat{A}$.

b) Os dois triângulos são congruentes? Por quê?

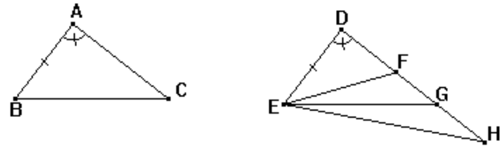
c) Observe as construções dos colegas.

d) Faça um esboço dos triângulos.

e) E se você tivesse usado as medidas do lado $\overline{AB}$ e do ângulo *B*? Sua resposta seria diferente?

f) O que você pode concluir?

Objetivo: perceber que se dois triângulos têm um ângulo e um lado respectivamente congruentes eles não são congruentes.



Atividade 10: descobrindo o segundo caso de congruência

Abra o arquivo **mod_04_triang08**.

a) Construa um triângulo *DEF* que tenha o lado $\overline{DE}$ medindo *AB*, o lado $\overline{DF}$ medindo *AC* e o ângulo formado por eles com a mesma medida do ângulo *A*.

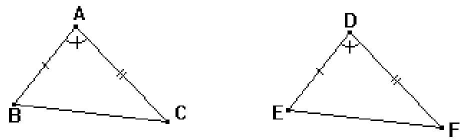
b) Os dois triângulos são congruentes? Por quê?

c) E se você tivesse usado as medidas do lado $\overline{AB}$, do lado $\overline{BC}$ e o ângulo formado por eles igual ao ângulo *B*? Sua resposta seria diferente?

d) Faça um esboço dos triângulos.

e) Anote suas conclusões:

Objetivo: concluir que se dois triângulos têm dois lados e o ângulo formado por eles de mesma medida, os triângulos são congruentes. Chamaremos esse caso de LAL.



Atividade 11: procurando outros casos de congruência

Abra o arquivo **mod_04_triang09**.

a) Construa um triângulo *DEF* que tenha o lado $\overline{DE}$ medindo *AB*, o lado $\overline{EF}$ medindo *BC* e o ângulo com vértice em *F* com a mesma medida do ângulo *C*.

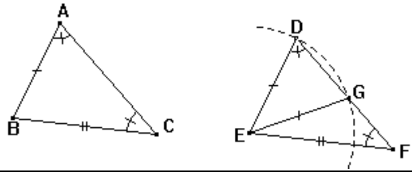
b) Os dois triângulos são congruentes? Por quê?

c) E se você tivesse usado as medidas do lado $\overline{BC}$, do lado $\overline{CA}$ e do ângulo *A*? Sua resposta seria diferente?

d) Faça um esboço dos triângulos.

e) O que você pode concluir?

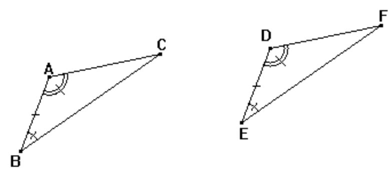
Objetivo: concluir que se dois triângulos têm respectivamente dois lados consecutivos e o ângulo oposto a um desses lados congruentes então os triângulos não são congruentes. É o caso dos triângulos DEF e GEF.



Atividade 12: descobrindo o terceiro caso de congruência
Abra o arquivo **mod_04_triang10**.

a) Construa um triângulo *DEF* que tenha o lado $\overline{DE}$ medindo *AB;* com vértice em *D* um ângulo com a mesma medida do ângulo *A* e com vértice em *E* um ângulo com a mesma medida do ângulo *B*.
b) Os dois triângulos são congruentes? Por quê?
c) E se você tivesse usado as medidas do lado $\overline{AC}$ e dos ângulos *A* e *C*? Sua resposta seria diferente?
d) Faça um esboço dos triângulos.
e) O que você pode concluir?

Objetivo: observar que se dois triângulos têm, respectivamente, um lado e os ângulos sobre esse lado congruentes então os triângulos são congruentes. Chamamos este caso de ALA.

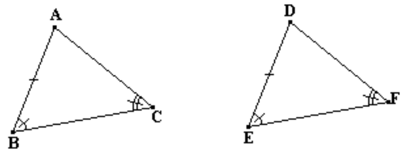


Atividade 13: descobrindo o quarto caso de congruência
Abra o arquivo **mod_04_triang11**.

a) Construa um triângulo *DEF* que tenha o lado $\overline{DE}$ medindo *AB*, com vértice em *E* um ângulo com a mesma medida do ângulo *B* e o ângulo *F* com a mesma medida do ângulo *C*.
b) Os dois triângulos são congruentes? Por quê?
c) E se você tivesse usado como referência as medidas do lado $\overline{BC}$, do ângulo *C* e do ângulo *A*, respeitando a mesma ordem de constção? Sua resposta seria diferente?

d) Faça um esboço dos triângulos.
e) O que você pode concluir?

Objetivo: observar pela construção feita que os dois triângulos são congruentes e concluir que serão congruentes dois triângulos que tiverem, respectivamente, um lado, um ângulo adjacente a esse lado e o ângulo oposto a esse mesmo lado congruentes. Chamamos esse caso de LAA_O.



Atividade 14: tirando conclusões
O que você concluiu até agora?

Conjetura: Vimos que comparar um ou dois elementos é insuficiente para concluirmos a congruência entre dois triângulos e que nos casos em que comparamos três elementos alguns falham, é o caso de dois lados e um ângulo consecutivos (LLA) e o caso que comparamos os três ângulos (AAA).
Se acrescentarmos mais um elemento poderemos obter novas relações de congruência que sejam verdadeiras?

Objetivo: perceber que, aparentemente, temos quatro casos de congruência de triângulos.

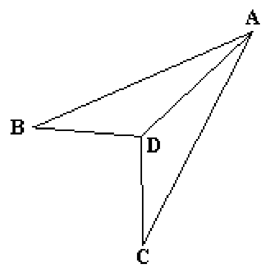
Atividade 15: levantando outras possibilidades
a) Verifique, sem usar o software, se existe algum outro caso de congruência quando acrescentamos um lado em LLA. Justifique sua resposta.
b) Verifique, sem usar o software, se existe um outro caso quando acrescentamos um ângulo em LLA. Justifique sua resposta.
c) Verifique, sem usar o software, se existe um outro caso de congruência quando acrescentamos um lado em AAA. Justifique sua resposta.
d) O que podemos concluir?

Objetivo: concluir que temos quatro, e somente quatro, casos de congruência de triângulos.
Comentários: em (a) percebemos que *LLAL* recai em *LAL* e que *LLLA* recai em *LLL*. Em (b) que *LLAA* recai em *LAA* e que *LALA* recai em *LAL*. Em (c) que *LAAA* recai em *LAA*; *ALAA* recai em *ALA* e que *AALA* recai em *ALA*. E, finalmente em (d) Que só existem os casos anteriormente encontrados.

Atividade 16: institucionalização
1. Dizemos que dois triângulos *ABC* e *DEF* são congruentes quando ....
2. Casos de Congruência
Os casos de congruência são quatro e somente quatro e serão indicados pelas notações: LLL, LAL, ALA e LAA_o.
3. Enuncie os quatro casos:

Comentários: em (1) devemos concluir que é quando possuem lados e ângulos correspondentes congruentes. Em (3) para o primeiro caso LLL: *se dois triângulos têm lados de mesma medida os triângulos são congruentes.* Para o segundo caso LAL: *se dois triângulos têm dois lados consecutivos e o ângulo formado por eles respectivamente congruentes então os triângulos são congruentes*. Para o terceiro caso ALA: *se dois triângulos têm dois ângulos e o lado entre eles respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes*. Finalmente, para o quarto caso LAA_o: *se dois triângulos têm um lado, um ângulo sobre esse lado e o ângulo oposto ao mesmo lado, respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.*

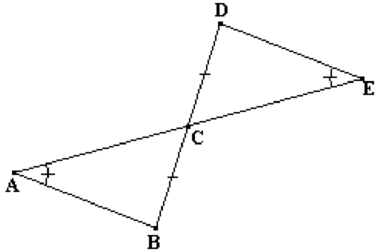
Familiarização
Exercício 1
Na figura abaixo, mostre que *BD* = *CD* se considerarmos que *AB* = *AC* e $B\hat{A}D \equiv C\hat{A}D$.



Comentários: usando o caso de congruência LLA podemos concluir que os triângulos *ABD* e *ACD* são congruentes e que por isso *BD* = *CD*.

Exercício 2

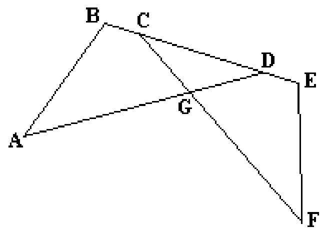
Se C é ponto médio do segmento BD e $B\hat{A}C \equiv D\hat{E}C$, mostre que C é ponto médio do segmento AE.



Comentários: observando que em C temos ângulos opostos pelo vértice e pelo caso LAA_o podemos concluir que os triângulos ABC e EDC são congruentes, concluindo que $AC = CE$ e que portanto C é ponto médio de $\overline{AC}$.

Exercício 3

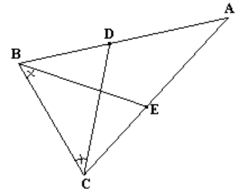
Sabendo, na figura abaixo, que $BC = DE$, $CG = GD$ e que $B\hat{A}D \equiv C\hat{F}E$, mostre que $AB = EF$.



Comentários: visualizando a sobreposição dos dois triângulos, podemos observar que:

i) se $CG = GD$ então o triângulo CGD é isósceles de base $\overline{CD}$ podendo concluir que $G\hat{C}D \equiv G\hat{D}C$.

ii) Se $BD = BC + CD$, $CE = DE + CD$ e $BC = DE$, por hipótese, então $BD = CE$. Logo, podemos concluir que pelo caso LAA_o $\Delta ABD \equiv \Delta FEC$ pois em (ii) temos $BD = CE$ e em (i) temos $G\hat{C}D \equiv G\hat{D}C$ e $B\hat{A}D \equiv C\hat{F}E$ por hipótese e portanto $AB = EF$.



Exercício 4

Se ABC é um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$ e $D\hat{C}B \equiv E\hat{B}C$, prove que $BE = CD$.

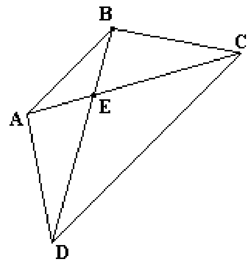
Exercício 5

Considerando a figura ao lado e que $\overline{AB} // \overline{CD}$ prove as seguintes proposições:

a) Se $AC = BD$ e $AD = BC$ então $A\hat{C}D \equiv B\hat{D}C$.

b) Se $D\hat{A}C \equiv C\hat{B}D$ e $DE = CE$ então $AE = BE$.

c) Se $AE = BE$ e $DE = CE$ então $AD = BC$.

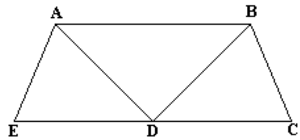


Exercício 6

Considerando a figura ao lado mostre que as seguintes proposições são verdadeiras.

a) Se $AE = BC$, $D\hat{A}E \equiv C\hat{B}D$ e $AD = BD$ então $DE = DC$.

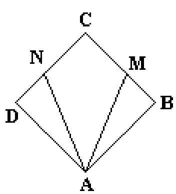
b) $AE = BC$, $DE = CD$ e $D\hat{A}B \equiv D\hat{B}A$ então $A\hat{E}D \equiv B\hat{C}D$.



c) SE $AD = BD$, $B\hat{A}E \equiv A\hat{B}C$ e $A\hat{D}E \equiv B\hat{D}C$ então $CD = DE$.

Exercício 7

Sendo $ABCD$ um quadrado e $\overline{NC} \equiv \overline{MC}$ mostre que $\overline{AN} \equiv \overline{AM}$.



Exercício 8

Teorema: *Em todo triângulo isósceles, a mediana relativa à base é também bissetriz do ângulo do vértice.*

Exercício 9

Teorema: *Em todo triângulo isósceles, a altura relativa à base é também bissetriz do ângulo do vértice.*

5 PERÍMETROS E ÁREAS[6]

Atividades

Este fascículo apresenta uma seqüência que trata de *Perímetros e Áreas* de figuras para ser trabalhada com quinta série do ensino fundamental, tratando a área de superfícies planas por meio de malhas, composição e decomposição de figuras. Entenderemos área como uma grandeza, distinguindo área e superfície bem como área e número. Isto é, duas superfícies de formas diferentes podem ter áreas iguais e a uma mesma superfície podem corresponder números diferentes.

Atividade 01: reconhecendo formas e área

Exercício 1

Você recebeu dois objetos construídos com materiais diferentes: um com varetas e outro com cartolina.

Descreva as diferenças que você percebe nos dois objetos que recebeu.

Exercício 2

a) Com as varetas que você recebeu, construa duas figuras diferentes, podendo ou não utilizar todo o material.

b) Faça um desenho dessas figuras e pinte sua região interna.

Objetivo: no exercício 1, perceber a diferença entre contorno e região interna limitada por esse contorno. No exercício 2, construir e a observar o contorno de figuras, destacando em cada uma delas a linha poligonal e a região interna.

Comentários: gostaríamos que os alunos percebessem que quando desenhamos uma poligonal no papel podemos ou não considerar a superfície que essa figura determina. Quando desenhamos fazemos o contorno e quando pintamos estamos considerando a região delimitada por esse contorno.

---

[6] Esta seqüência foi adaptada da dissertação de mestrado *Conceito de área uma proposta de ensino-aprendizagem.*, de Sonia Regina Facco, PUC/SP, 2003.

Exercício 3

Recorte as figuras do **anexo 02** e responda as perguntas:

a) As figuras têm a mesma forma?

b) A quantidade de papel utilizada em cada uma delas é a mesma? Por quê?

Objetivo: identificar as formas das figuras e, por meio da sobreposição das mesmas, evidenciar a diferença de quantidade de papel utilizada nelas, percebendo que podem existir figuras com a mesma forma, mas com quantidades diferentes de papel. **Comentários:** aqui introduziremos a questão do consumo de papel de cada figura. Estamos conduzindo os alunos a perceber a área de uma figura como sendo uma grandeza. Nesta questão, as figuras têm mesma forma (a linha poligonal traçada é a mesma) no entanto, a quantidade de papel utilizada (área) é diferente.

Exercício 4

Recorte as figuras do **anexo 03** e responda as perguntas:

a) As figuras têm a mesma forma?

b) A quantidade de papel utilizada em cada figura é a mesma? Por quê?

c) O que você pode concluir.

Objetivo: observar, utilizando a técnica do recorte e da colagem, que podem existir figuras que possuem formas diferentes com a mesma quantidade de papel. **Comentários:** nesta questão as figuras têm formas diferentes e, no entanto utilizam a mesma quantidade de papel.

Exercício 5

Recorte as figuras do **anexo 04** e responda as perguntas:

a) As figuras têm a mesma forma?

b) A quantidade de papel utilizada em cada figura é a mesma? Por quê?

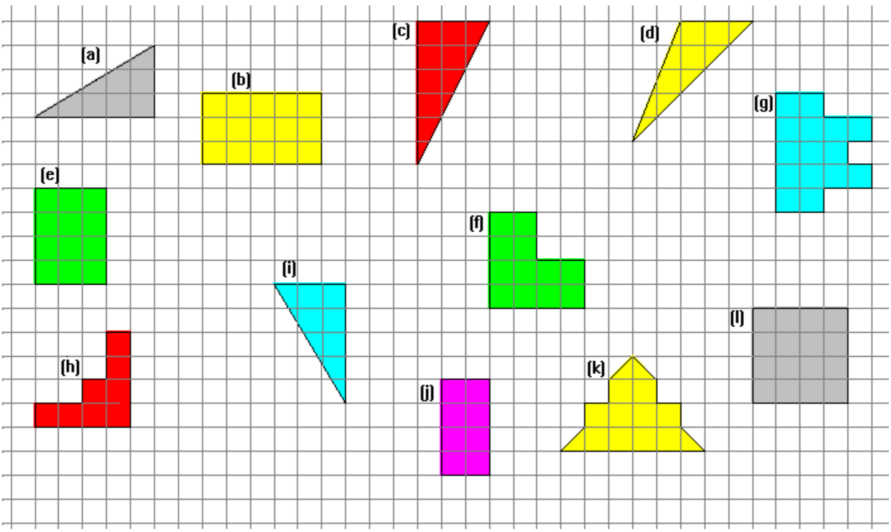
c) O que você pode concluir desta atividade?

Objetivo: apreender o que é forma e a observar que, ao sobrepor as figuras, podem existir figuras que possuem a mesma forma e a mesma quantidade de papel.
Comentários: nesta questão as figuras têm mesma forma e consomem a mesma quantidade de papel. Da atividade podemos concluir que existe a possibilidade de termos figuras de mesma forma com áreas diferentes ou não, figuras de formas diferentes com mesma área ou não.

Atividade 02: confrontando área e medida de área

Exercício 1

Observe as figuras abaixo.



a) Identifique aquelas que têm a mesma forma.
b) Identifique as que têm mesma quantidade de papel.
c) A área depende da forma da figura? Dê um exemplo.

Objetivo: comparar forma, superfície e área.
Comentários: a identificação da forma das figuras é feita a partir do aspecto visual de seus contornos, como por exemplo, triangular, retangular, escadinha etc. A verificação da quantidade de papel utilizada na construção de cada uma é determinada por meio da contagem

das superfícies dos quadradinhos preenchidos na malha. Esses procedimentos permitirão que o aluno constate que existem figuras de formas diferentes com mesma área ou não e figuras de mesma forma que têm ou não mesma área. Além disso, considerar a quantidade de papel como sendo a área da figura, que independe da forma.

Exercício 2

Mostre que as figuras 2, 3, 4 e 5 têm a mesma área que a figura 1.[7]

Figura 1

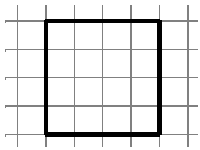


Figura 2

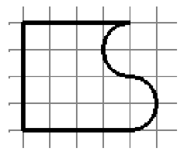


Figura 3

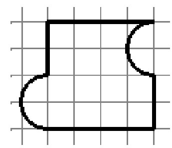


Figura 4

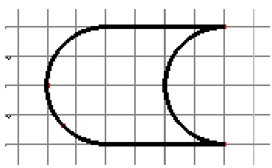
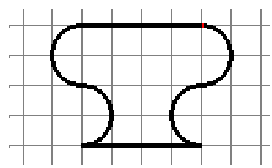


Figura 5



Objetivo: confirmar que as figuras 2, 3, 4 e 5 têm a mesma área da figura 1.

Comentários: ainda comparando figuras, utilizando uma malha quadriculada colocamos figuras com formas circulares que podem ser comparadas. Queremos que percebam que a situação permite falar de área de figuras com contornos circulares sem necessidade de saber área ou perímetro de circunferência.

Exercício 3

a) Utilizando a área da superfície do quadradinho de cada figura como unidade de medida, verifique quantas unidades de medida de área tem cada figura.

---

[7] Adaptado do livro *Mathématiques, Alpha Math 6^e*, de Pierre Curel e outros, Editora Hatier, 1995, p. 193.

Figura 1

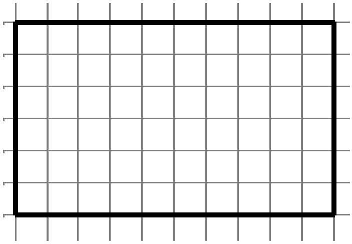


Figura 2

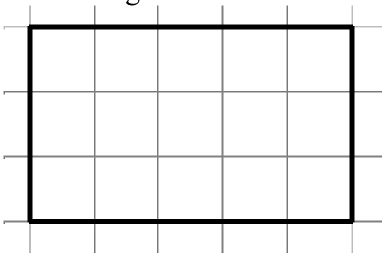


Figura 3

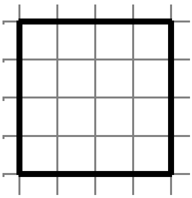
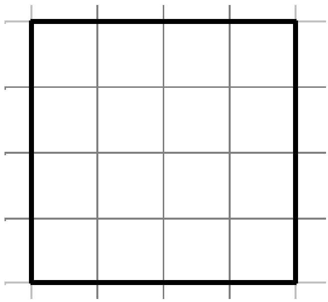


Figura 4



b) Que conclusões você pode tirar observando as figuras 1 e 2?
c) Que conclusões você pode tirar observando as figuras 3 e 4?

Objetivo: trabalhar unidade de medida observando a área da superfície dos quadradinhos internos das figuras e verificar que podem ocorrer figuras de mesma área com medidas diferentes e ocorrer figuras que têm áreas diferentes com medidas iguais, o que evidencia que a medida depende da unidade escolhida.
Comentários: nas figuras 1 e 2 temos dois retângulos congruentes com medidas de área (quantidade de superfícies dos quadradinhos) diferentes e nas figuras 3 e 4 temos dois quadrados com a mesma medida de área, mas que ocupam superfícies diferentes, embora tenham a mesma forma.

Exercício 4

a) Utilizando a área da superfície do triângulo da malha como unidade de medida, verifique quantas unidades de medida de área contém cada figura abaixo.

Figura 1

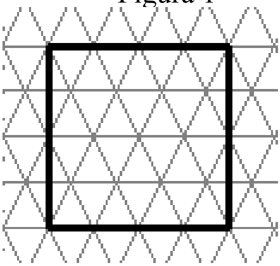


Figura 2

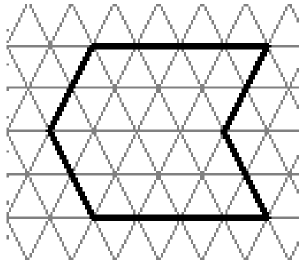
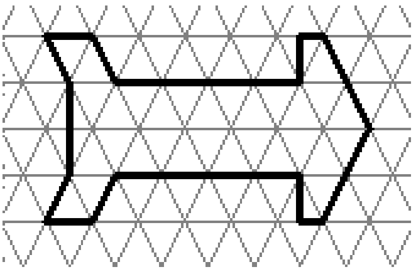


Figura 3

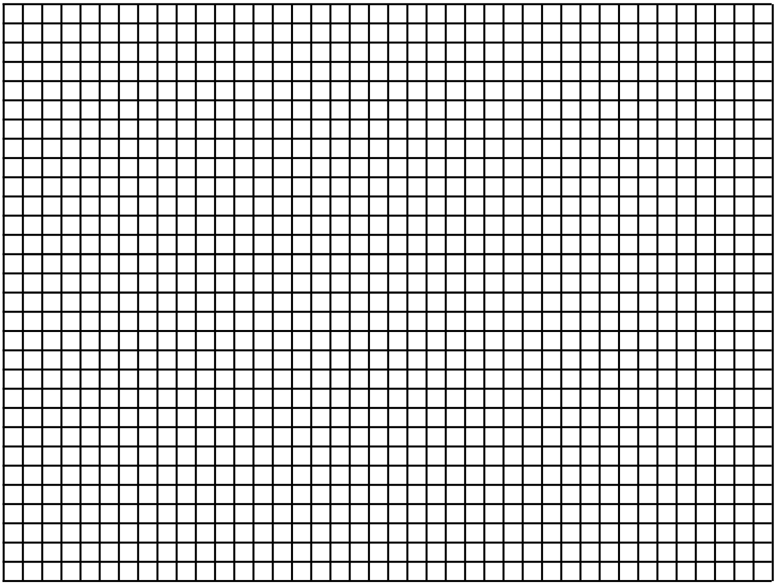


b) Anote aqui suas observações desta atividade.

Objetivo: identificar a quantidade de unidades de medida de área contida em cada figura.
Comentários: com a mudança do tipo de malha mudamos a unidade de medida. Apresentamos três figuras de formas diferentes, que determinam superfícies diferentes que têm mesma área e mesma medida de área.

Exercício 5

Utilizando a área da superfície do quadradinho da malha como unidade de medida, desenhe figuras que tenha formas diferentes, utilizando 12 unidades de medida de área para cada uma.



Objetivo: perceber que podemos ter figuras de formas diferentes com mesma área e medida de área.
Comentários: queremos que o aluno reforce a compreensão de que figuras de diferentes formas podem ter a mesma área, e conseqüentemente se a unidade é a mesma, têm a mesma medida.

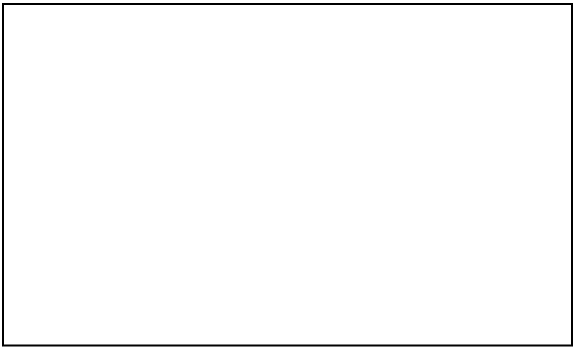
Atividade 03: utilizando novas unidades de medida
Exercício 1

a) Construa abaixo, com régua e esquadro, um retângulo com 8 cm de comprimento e 4 cm de largura.
b) Quadricule a região interna desse retângulo e determine a medida de sua área.
c) Que medida você encontrou para essa área?
d) Qual seria a medida de área para a superfície determinada por um quintal retangular com 8 m de comprimento e 4 m de largura?
e) Qual seria a medida de área para uma superfície determinada por uma reserva indígena com 8 km de comprimento e 4 km de largura?

Objetivo: conduzir o aluno a observar que pela multiplicação da medida do comprimento pela medida da largura obtém-se a medida da área referente à unidade escolhida.
Comentários: é o primeiro momento que utilizamos a régua e o sistema métrico como unidade. Eles devem desenhar o retângulo, com as medidas determinadas usando régua e esquadro. No entanto à medida que irão encontrar dependerá da unidade que escolherão para a malha. Acreditamos que o farão com 1 cm ou 0,5 cm. No item (d) e (e) esperamos que na impossibilidade de desenhar e, com o que foi feito até agora, os alunos cheguem à fórmula para o cálculo da medida da área de um retângulo.
Pela primeira vez aparece a necessidade de diferenciar cm de cm^2 e m de m^2 e mostrar que temos que diferenciar a unidade que mede comprimento, da unidade que mede área.

Exercício 2

a) Meça os lados do retângulo abaixo com uma régua em cm e calcule sua área.



b) Você recebeu uma régua diferente das que conhece. Em vez de ter centímetros como unidade ela tem polegadas (**anexo 05**). Utilizando a régua em polegadas determine a medida dos lados do retângulo acima e calcule a medida de sua área considerando como unidade de área a superfície de um quadrado de lado medindo 1 polegada e a representando por pol^2.

c) Você recebeu outra régua diferente das que conhece. Em vez de ter centímetro ou polegadas ela tem luas (**anexo 06**). Com esta régua determine a medida dos lados do mesmo retângulo utilizado no item a e b e calcule a medida de sua área considerando como unidade de área a superfície de um quadrado de lado medindo 1 lua e a representando por lua^2.

Objetivo: determinar a área de uma figura utilizando unidades de medidas diferentes do cm² e do m², já conhecidas, e definindo novas unidades como a pol² e a lua² .
Comentários: gostaríamos que percebessem que poderão utilizar o mesmo processo da situação anterior utilizando outras unidades de medidas. O retângulo escolhido irá apresentar medidas representadas em decimais (7,5 cm por 4,5 cm), medidas fracionárias ($3\frac{1}{8}$ pol por $1\frac{7}{8}$ pol) e medidas inteiras (3 luas por 5 luas). O produto dessas medidas dará a medida da área. Os alunos devem perceber que o número associado a figura, tanto para a largura e comprimento, quanto para a área, dependem diretamente da unidade de medida escolhida. Além disso, o professor pode comentar que a tela da televisão é medida em polegadas e muitos materiais de construção (canos, ferro, brocas para furadeira, ...) também.

Atividade 04: relacionando perímetro e medida de área

Você recebeu três pedaços de barbante de comprimentos diferentes, uma placa quadriculada e alfinetes para fixação.

a) Construa três figuras de formas diferentes usando o barbante e o alfinete para fixá-lo na placa.

b) Desenhe no espaço abaixo o contorno das figuras construídas.
Identifique suas figuras numerando-as.

c) Qual a soma das medidas dos lados dessas figuras?

Chamamos de **PERÍMETRO** de um polígono a soma das medidas de seus lados.

d) Qual a medida da área das superfícies que as figuras construídas determinam?

e) Anote aqui seus comentários sobre a atividade.

Objetivo: estudar figuras de mesmo perímetro que possuem áreas e formas diferentes.
Comentários: definimos perímetro para que o aluno perceba que figuras de mesmo perímetro podem possuir áreas diferentes. O material de fácil manipulação permite várias construções diferentes, a malha permite calcular a medida da área de cada uma e o barbante permite fixar o perímetro.

Familiarização 1[8]

Objetivos: a utilização da lição de casa (familiarização) é uma escolha metodológica que tem como primeiro objetivo consolidar os conhecimentos adquiridos por meio das atividades realizadas em sala, pois o aluno pode durante o trabalho em grupo, achar que entendeu ou estar a todo o momento aceitando as opiniões dos colegas e, individualmente, não conseguir fazer a tarefa. Com a lição de casa o professor pode perceber a construção ou não do conhecimento individualmente. A correção coletiva da lição de casa permite a socialização das soluções e a percepção, se for o caso, de diferentes soluções para uma mesma situação.
A escolha pelo retângulo se deve ao fato de querermos esgotar suas possibilidades e ser de fácil construção para o sexto ano. Acreditamos que os alunos que acompanharam os trabalhos feitos até aqui, comprometidos com o seu aprendizado, tenham condições de fazer estas atividades em casa.

Exercício 1
Desenhe em papel quadriculado, cinco retângulos que tenham perímetros iguais a 20 unidades e complete a tabela abaixo.
Considere o lado do quadradinho como unidade de medida de comprimento e a superfície do quadradinho como unidade de medida de área.

[8] Adaptado do livro: Experiências Matemáticas – 5ª série, 2ª versão preliminar. São Paulo: SE/CENP, 1996. p.241.

	Comprimento	Largura	Perímetro	Medida da área
Retângulo A				
Retângulo B				
Retângulo C				
Retângulo D				
Retângulo E				

Comentários: usando papel quadriculado o aluno constrói retângulos de mesmo perímetro determinando seu comprimento, sua largura e sua medida de área. Em conseqüência, deve concluir que existem figuras com medidas de áreas diferentes com o mesmo perímetro.

Exercício 2
Desenhe em papel quadriculado, quatro retângulos que determinem superfícies que tenham áreas com medidas iguais a 36 unidades e complete a tabela abaixo.
Considere o lado do quadradinho como unidade de medida de comprimento e a superfície do quadradinho como unidade de medida de área.

	Comprimento	Largura	Perímetro	Medida da área
Retângulo A				
Retângulo B				
Retângulo C				
Retângulo D				

Comentários: nesta situação devem perceber que retângulos que têm medida de comprimento e de largura diferentes, ou seja, perímetros diferentes podem ter a mesma medida de área.

Atividade 05: compondo figuras
Você está recebendo um jogo, chamado Tangran, contendo 7 peças (**anexo 07**).

Forme figuras com as peças do Tangran, obedecendo as seguintes regras:
- não deve haver sobreposição de peças;
- um lado de uma peça deve encostar-se a um lado de outra peça.

Exercício 1

a) Forme figuras utilizando somente os dois triângulos pequenos.
b) Registre no espaço abaixo o contorno de cada uma das figuras que você formou e pinte suas superfícies. Identifique suas figuras numerando-as.
c) Qual a medida da área da superfície de cada figura?
d) Qual o perímetro dessas figuras?

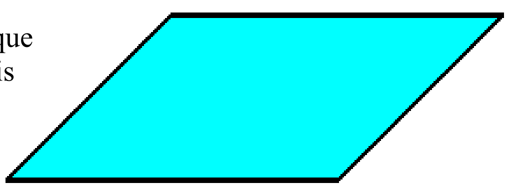
Exercício 2

a) Agora, forme figuras utilizando os dois triângulos pequenos e um triângulo médio.
b) Registre no espaço abaixo o contorno de cada uma delas e pinte suas superfícies.
Identifique suas figuras numerando-as.
c) Qual a medida da área da superfície de cada figura?
d) Qual o perímetro dessas figuras?

Objetivo: conduzir o aluno ao processo da decomposição e composição de figuras a fim de determinar perímetros e medidas de área.
Comentários: com o Tangran queremos que o aluno perceba a composição de figuras. Para determinar o perímetro e a medida de área deverão medir os lados das figuras do Tangran com a régua o que nos leva a ter medidas aproximadas representadas por números decimais. Construímos o Tangran a partir de uma superfície quadrangular de 10 cm de lado.

Familiarização 2

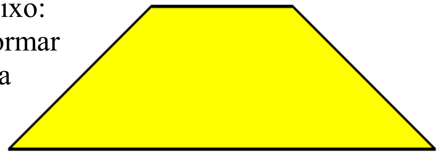
1) a) Utilizando o Tangran que você recebeu, verifique quais peças foram utilizadas para formar a figura ao lado:



b) Utilize as mesmas peças para formar um retângulo. Desenhe e pinte essa superfície retangular.
c) Qual a medida da área dessa superfície retangular?

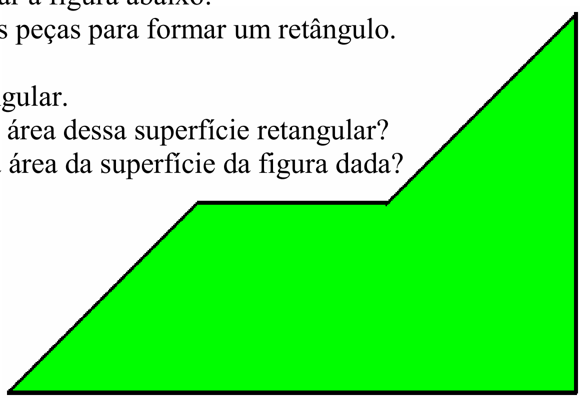
d) Qual a medida da área da superfície da figura colorida?
e) Alterar a forma da figura, altera também a medida de sua área? Justifique sua resposta.
f) Alterar a forma da figura, altera também a medida de seu perímetro? Justifique sua resposta.

Exercício 2
a) Utilizando o Tangran que você recebeu, verifique que peças foram utilizadas para formar a figura abaixo:



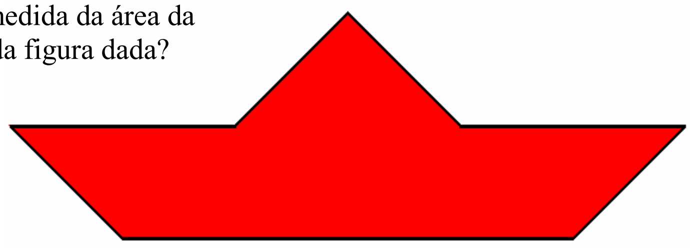
b) Utilize as mesmas peças para formar um retângulo. Desenhe e pinte essa superfície retangular.
c) Qual a medida da área dessa superfície retangular?
d) Qual a medida da área da superfície da figura dada?

Exercício 3
a) Utilizando o Tangran que você recebeu, verifique que peças foram utilizadas para formar a figura abaixo:
b) Utilize as mesmas peças para formar um retângulo. Desenhe e pinte essa superfície retangular.
c) Qual a medida da área dessa superfície retangular?
d) Qual a medida da área da superfície da figura dada?



Exercício 4
a) Utilizando o Tangran que você recebeu, verifique que peças foram utilizadas para formar a figura seguir:
b) Utilize as mesmas peças para formar um retângulo. Desenhe e pinte essa superfície retangular.
c) Qual a medida da área dessa superfície retangular?

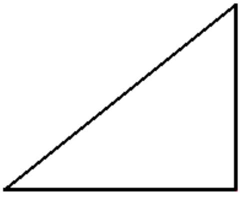
d) Qual a medida da área da superfície da figura dada?



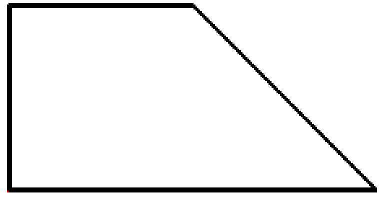
Objetivo: fazer com que o aluno perceba a mudança da forma da figura alterando a superfície e seu perímetro, mas concluindo que a área e sua medida permanecem as mesmas.
Comentários: queremos que compreendam que a mudança da forma da figura, altera as superfícies consideradas e seu perímetro, mas a área e sua medida permanecem as mesmas.
Como as figuras podem ser transformadas em um retângulo a medida de sua área pode ser calculada, como já vinham fazendo antes.
Dependendo da escolha das peças do Tangran eles podem não conseguir o retângulo, neste caso terão que trocar as peças, provavelmente o triângulo maior por dois menores. As figuras foram feitas a partir do Tangran com o intuito de facilitar a manipulação e a percepção da possibilidade de transformá-las em retângulos equivalentes que eles já sabem determinar a medida da área.

Atividade 06: compondo e decompondo figuras
Utilizando uma régua desenhe traços para decompor a figura quando achar necessário e calcule a medida de sua área.

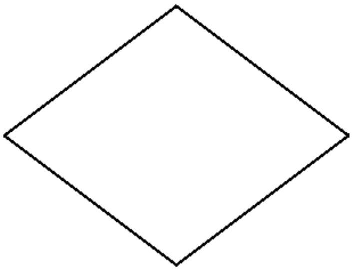
a)



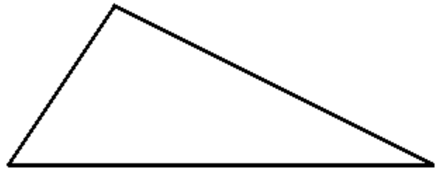
b)



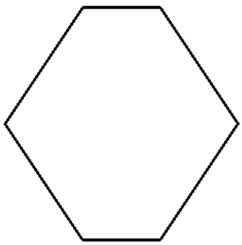
c)



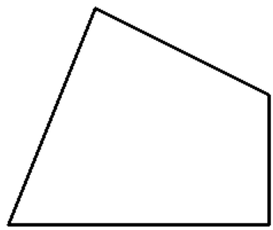
d)



e)



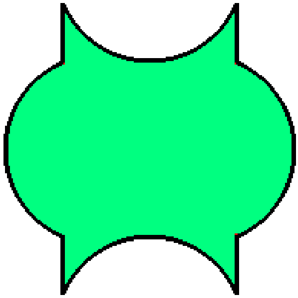
f)



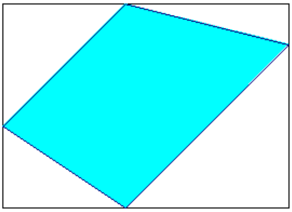
Objetivo: decompor e compor figuras utilizando traços (dentro ou fora da figura) para determinar a medida da área e perceber a relação entre a área do retângulo e do triângulo.
Comentários: agora queremos que a composição ou decomposição da figura aconteça a partir de traços feitos na própria figura ou fora dela, de tal forma que possibilitem a determinação da medida da área de cada uma. No triângulo inicial queremos que o aluno complete um retângulo e perceba que o triângulo tem a metade da área desse retângulo. Procuramos figuras que pudessem ser decompostas em retângulos e triângulos. Acreditamos que já tenham percebido a relação entre a área do retângulo e a do triângulo.

Atividade 07: ainda a composição e decomposição de figuras
Determine a medida da área das figuras coloridas a seguir:

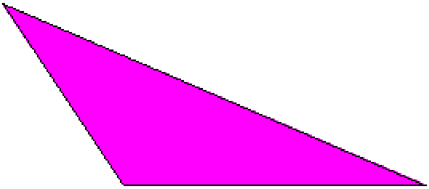
a)



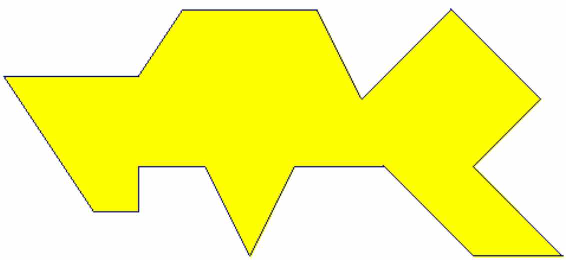
b)



c)



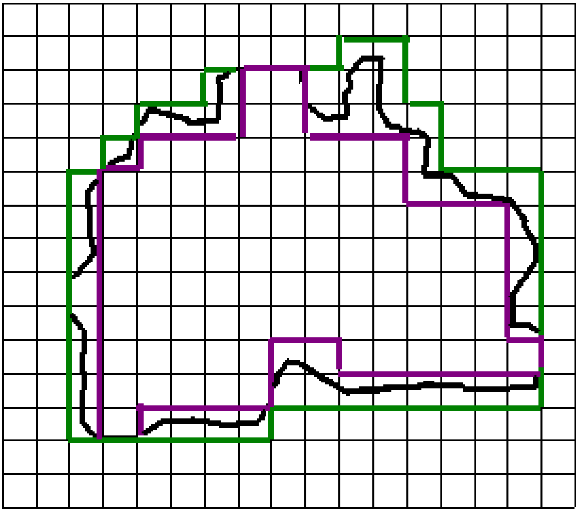
d)



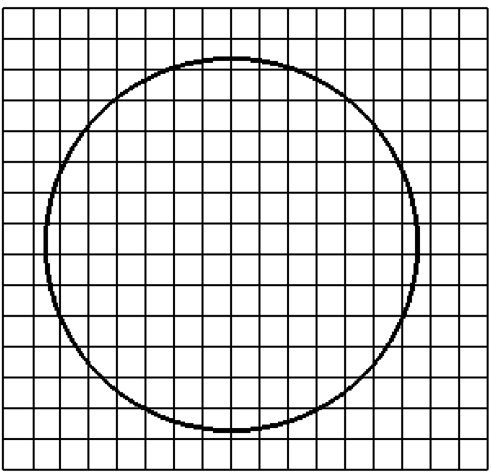
Objetivo: utilizar a técnica da decomposição e composição, por meio de traços externos e/ou internos em figuras mais complexas.
Comentários: nesta primeira situação colocamos figuras mais elaboradas: uma figura com formas circulares, um quadrilátero inscrito em um retângulo, um triângulo que não é retângulo, e uma última que pode ser considerada um mapa estilizado. O intuito é que apliquem os conhecimentos já adquiridos em situações que têm maior grau de dificuldade e evidenciar, de forma gradativa, que qualquer figura pode ser decomposta em várias ou composta por várias figuras, que possibilitam o cálculo para identificar a medida da área.

Atividade 08: calculando medidas aproximadas de áreas
Dê um valor aproximado para a medida da área das figuras abaixo com o contorno preto:

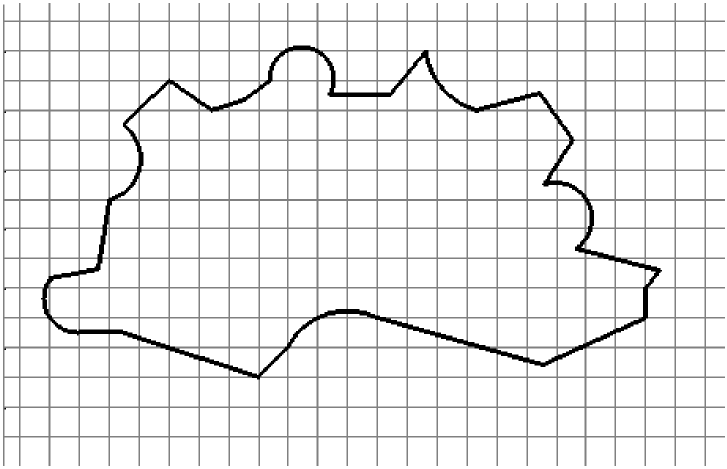
a) Figura com o contorno irregular em preto.



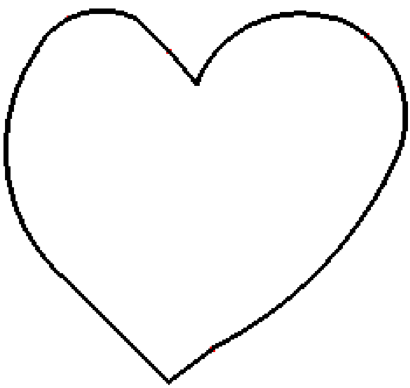
b) Figura com o contorno circular em preto.



c) Figura com contorno irregular.



d)



Objetivo: determinar a medida de área por aproximação.
Comentários: nestes casos, o quadriculado deve facilitar mais o cálculo da medida da área que o processo da decomposição e com eles discutiremos a questão de aproximações. Figuras de contorno totalmente circular ou irregular, podem ter suas medidas de área determinadas por aproximação, o contorno colorido indica as aproximações por falta ou por excesso. A medida que procuramos está entre elas.

6 TEOREMA DE PITÁGORAS[9]

Atividades

Apresentar aos professores uma seqüência didática que permita ao aluno conjeturar a existência da relação pitagórica, seu caráter necessário/suficiente e a forma dessa relação, além da realização de atividades de complexidade crescente fazendo-se sucessivas aproximações com o teorema, com o intuito de desenvolver no aluno condições para o emprego adequado do teorema como ferramenta. Fazer com que os professores aprofundem seus conhecimentos a respeito do teorema do ponto de vista histórico e de aplicação.

Atividade 01: revendo a condição de existência de triângulos

Você já trabalhou com a condição de existência de triângulos, utilizando varetas na atividade 9 do módulo de triângulos.

a) Qual a condição de existência de triângulo?

b) Usando essa condição, você pode "prever" se o triângulo será retângulo ou não?

Objetivo: rever a condição de existência de triângulo e perceber que ela é insuficiente para garantir a possibilidade de construção de um triângulo retângulo.

Atividade 02: relação particular para triângulos retângulos

Os antigos egípcios já sabiam que o triângulo de lados medindo (3, 4, 5) é retângulo e para construir ângulos retos, utilizavam cordas com nós conforme a figura ao lado. Esse instrumento era chamado "esquadro egípcio".

a) Será que o ângulo reto surge do fato desta "terna" ser formada por números naturais consecutivos?

Para responder essa questão desenhe, utilizando régua e compasso, triângulos cujos lados tenham como medidas números consecutivos. Por exemplo: (2, 3, 4) (4, 5, 6) (6, 7, 8) (1, 2, 3).

---

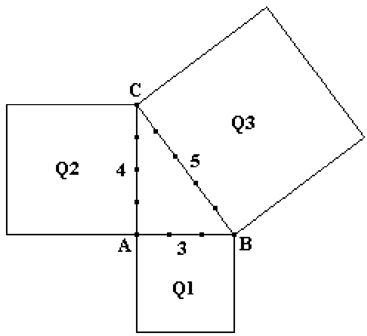
[9] Esta seqüência foi adaptada da dissertação de mestrado *O Teorema de Pitágoras* de Irma Verri Bastian, 2000, PUC/SP.

b) A que conclusão você chegou?
c) Desenhe, agora, triângulos a partir das ternas: (6, 8, 10), (5, 12, 13), (9, 12, 15).
Esses triângulos são retângulos?
d) Resuma as conclusões que você chegou em (b) e (c).

Objetivo: salientar a necessidade de uma relação particular para triângulos retângulos, uma vez que a condição de existência de triângulos não é suficiente.
Comentários: nesta atividade a História da Matemática contribui para o processo de ensino e de aprendizagem. Pressupõe-se como conhecimento disponível a classificação de triângulos quanto aos ângulos e a construção de triângulos com régua e compasso, dadas as medidas dos três lados. A inclusão da terna (1, 2, 3) deverá reforçar a importância da condição de existência de triângulo.

Atividade 03: conjeturando uma relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo

Não sendo a "Condição de Existência de Triângulo" suficiente para garantir que o triângulo seja retângulo, então qual relação deve existir entre as medidas dos lados para que isso aconteça?
Voltando à terna egípcia (3, 4, 5), construa quadrados sobre os catetos e sobre a hipotenusa do triângulo, como mostra a figura ao lado.



a) Calcule a medida da área de cada região quadrangular.
b) Faça o mesmo para as ternas do item (c) da Atividade 2, isto é, (6, 8, 10), (5, 12, 13) e (9, 12, 15).

c) Preencha a tabela seguinte:

Medidas das áreas das regiões

Cateto *b*	Cateto *c*	Hipot. *a*	Q_1	Q_2	Q_3
3	4	5			
6	8	10			
5	12	13			
9	12	15			

d) Compare as medidas das áreas das regiões Q_1 e Q_2 com a medida da área da região Q_3. O que você observou?
Escreva uma relação entre elas. Deduza uma relação entre as medidas dos lados do triângulo.
e) Será que essa relação vale para qualquer triângulo? Experimente usá-la para ternas correspondentes a triângulos acutângulos ou obtusângulos.

Objetivo: chegar à forma do Teorema de Pitágoras.
Comentários: na tabela não foi solicitado o cálculo da soma das medidas das áreas das regiões Q1 e Q2, para dar ao aluno a oportunidade de exercitar a observação e a reflexão.

Atividade 04: relação entre os lados de um triângulo retângulo
Material: cartolina e tesoura para o recorte de figuras na realização da atividade.

Verificamos que em triângulos que tinham como medidas dos lados números inteiros, existia uma relação entre essas medidas, que garantia que o triângulo era retângulo.
Mas, no caso de medidas quaisquer, dadas por números não inteiros, ela vai continuar valendo?
a) Desenhe e recorte um triângulo retângulo <u>qualquer</u>.
A seguir, recorte mais 7 triângulos "idênticos" a esse. Não se preocupe em medir os lados.
b) Desenhe e recorte agora:

- um quadrado de lado *a* e pinte sua região interna de amarelo;
- um quadrado de lado *b* e pinte sua região interna de verde;
- um quadrado de lado *c* e pinte sua região interna de azul.

c) Como se fosse um "quebra-cabeça" monte:

Figura 1: uma região quadrangular usando 4 regiões triangulares e a região quadrangular amarela.
Figura 2: outra região quadrangular usando as regiões de 4 triângulos e das regiões verde e azul, respectivamente de lados b e c.
d) Se retirarmos da figura 1 e da figura 2 as regiões triangulares, qual a área da figura que sobra?
e) Qual a medida do lado de cada uma das figuras? E o que se pode dizer sobre suas áreas?
f) Que relação existe entre as áreas das figuras restantes em cada uma?
g) Que relação existe entre os lados do triângulo?

Objetivo: generalizar o Teorema de Pitágoras.
Comentários: a opção por essa demonstração conhecida como *demonstração hindu* se deve ao fato de ela permitir, posteriormente, justificativas mais rigorosas, por meio da mudança do quadro geométrico[10] para o quadro algébrico e da utilização da congruência de triângulos. As figuras do item (c) são apresentadas abaixo.

Figura 1

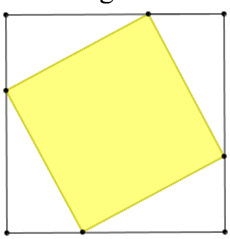


Figura 2(a)

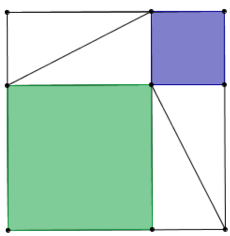
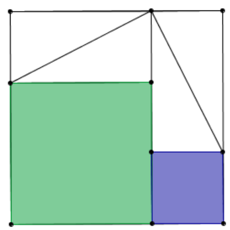


Figura 2(b)



Observe que a figura 2 apresenta duas possibilidades de realização, embora a segunda delas seja de mais difícil ocorrência.
No item (d), após as discussões devem concluir que a área da região amarela é igual à área das regiões verde e azul.

[10] Uma **mudança de quadro**, de acordo com Douady (1986), é um meio de obter formulações diferentes para um problema que, sem serem necessariamente equivalentes, permitem ter uma nova visão para as dificuldades encontradas, disponibilizando ferramentas e técnicas que não transparecem em uma primeira formulação. (Almouloud, 2007, p.65.)

No item (e) o lado dos quadrados é representado por b + c e as áreas podem ser representadas por $(b+c)^2 = a^2 + 4\frac{bc}{2}$, $(b+c)^2 = b^2 + c^2 + 4\frac{bc}{2}$ de onde vem a relação pitagórica $a^2 = b^2 + c^2$

Atividade 05: determinando uma relação algébrica entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo

Material: o mesmo da atividade anterior.

a) Escreva a medida da área da Figura 1 da atividade 4, em função das medidas das áreas das regiões quadrangulares e triangulares nela contida.
b) Faça o mesmo para a Figura 2 da atividade 4.
c) Que relação matemática existe entre as medidas das áreas da figuras 1 e 2 da atividade 4? Deduza uma relação entre *a*, *b* e *c*.

Objetivo: comprovar o resultado anterior, algebricamente, com mais rigor.
Comentários: como enfatizam os PCN, é necessário que as observações do material manipulativo sejam elementos desencadeadores de conjeturas e processos que levem à justificativas mais formais. Com esta atividade torna-se possível reinvestir em tópicos que deveriam fazer parte dos conhecimentos disponíveis do aluno e, ao mesmo tempo, evidenciar a importância de um tratamento mais rigoroso.

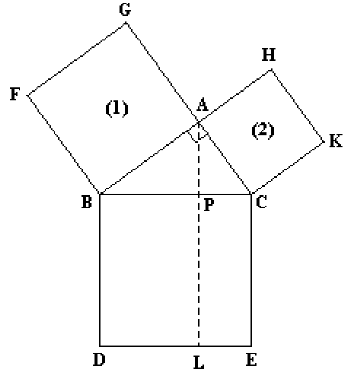
Atividade 06: dissertando sobre a relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo

Agora você já sabe que, em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. Esse teorema já era conhecido pelos babilônios e egípcios, mas foram os pitagóricos os primeiros a demonstrá-lo rigorosamente. Daí o nome Teorema de Pitágoras.
a) Explique, com suas palavras, qual a vantagem de se saber o Teorema de Pitágoras, no que se refere à resolução de problemas envolvendo triângulos retângulos. Em outras palavras, o que ele permite calcular e o que deve ser dado, para isso, no problema.

b) Invente quatro exemplos de problemas, em cujas resoluções você utiliza o Teorema de Pitágoras.

Objetivo: conduzir o aluno a perceber que dados relativos a dois lados de um triângulo retângulo são suficientes para obter o terceiro.
Comentários: aqui, almejamos que o teorema passe a fazer parte das ferramentas explícitas disponíveis para a resolução de problemas, visando uma recontextualização desse saber.

Atividade 07: demonstrando uma relação métrica no triângulo retângulo.



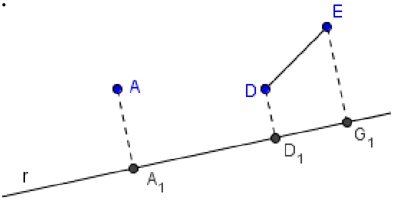
Em sua obra “Elementos”, considerada por muitos historiadores a mais importante da Geometria de toda a História da Matemática, Euclides, que viveu por volta de 300 a.C., demonstrou o Teorema de Pitágoras de um modo muito diferente. Ele provou que:

I) A superfície do quadrado (1) *ABFG*, na figura ao lado, tem a mesma área da superfície do retângulo *BPLD*.

II) A superfície do quadrado (2) *AHKC*, na mesma figura, tem a mesma área da superfície do retângulo *PCEL*.

Como a área da superfície do quadrado *BCED* é a soma das medidas das áreas dessas superfícies retangulares, ele concluiu que a medida da área da superfície do quadrado *BCED* é a soma das medidas das áreas das superfícies dos quadrados (1) e (2).

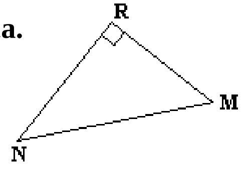
Observação: quando se traça, pelo ponto A, a perpendicular a uma reta *r*, o ponto *A'*, intersecção dessa perpendicular com *r*, é denominado projeção ortogonal de *A* sobre *r*; para obter a projeção ortogonal de um segmento, sobre uma reta, basta projetar sobre ela os extremos do segmento.



a) Chamando: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $BP = m$, $PC = n$, você consegue "traduzir" matematicamente os resultados (I) e (II) acima?
b) Usando esta nomenclatura, o que se pode dizer dos segmentos *BP* e *CP* em relação à reta *BC*?
c) Como ficam, levando em conta o item (b), os resultados (I) e (II)?

Objetivo: utilizar a demonstração de Euclides para obter duas relações métricas para o triângulo retângulo.
Comentários: esta atividade coloca o aluno em contato com a História da Matemática e apresenta uma importante proposição: "a medida de cada cateto ao quadrado é igual ao produto da medida da hipotenusa, pela medida da projeção do cateto sobre a reta suporte da hipotenusa". Assim, parte dessa demonstração do Teorema de Pitágoras seria utilizada ou como primeira abordagem das referidas propriedades (7^a série) ou para reinvestir em tópico já estudado por meio de semelhança de triângulos (8^a série).

Atividade 08: aplicando a relação pitagórica.
Exercício 1
Calcule *MN*, no triângulo retângulo em *R*, dados: *MR* = 2,4 cm e *NR* = 3,2 cm

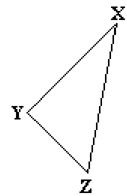


Objetivo: aplicar o Teorema de Pitágoras para obter a medida da hipotenusa dadas as medidas dos catetos.
Comentários: a denominação dos vértices com letras não muito usuais, a posição do triângulo e as medidas em decimais, poderão

eventualmente trazer dificuldades aos alunos. Apesar dos dados do problema serem números decimais, o resultado é inteiro. $MN = 4cm$.

Exercício 2

Dados YZ = 3 cm e ZX = 4 cm, calcule XY, sendo o triângulo XYZ retângulo em Y.



Objetivo: envolver o fenômeno da não congruência[11] entre o enunciado do problema e o enunciado do Teorema de Pitágoras.
Comentários: os valores 3 e 4 foram escolhidos para verificar se poderiam levar a uma conclusão falsa, influenciada pela terna egípcia (3, 4, 5) pois $XY = \sqrt{7}$.

Exercício 3

No "Papiro do Cairo", que data de 300 a.C., foram encontrados quarenta problemas de Matemática. Um deles é o seguinte: "Uma escada de 10 cúbitos está com seus pés a 6 cúbitos da parede. Que altura a escada alcança?"

Cúbito é uma medida antiga de comprimento; hoje há o metro, a polegada, etc..

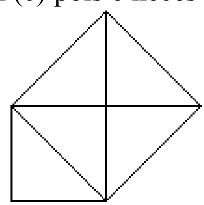
Objetivo: descontextualizar o Teorema de Pitágoras e aplicá-lo em um problema prático.
Comentários: buscamos na História da Matemática um problema com dados numéricos simples, 6 e 10, cuja resolução depende da interpretação do enunciado e da identificação do Teorema de Pitágoras como ferramenta de resolução.

[11] Duval (1999) destaca que a *congruência ou a não-congruência* entre registros é o que determina o caráter natural ou "arbitrário" de uma conversão de registros de representação. Pode-se dizer que *a congruência corresponde ao fato de a representação de partida ser mais ou menos "transparente" em relação à representação de chegada*. (Almouloud, 2007, p. .....)

Exercício 4

a) Um quadrado tem 1 cm de lado. Sua diagonal pode ter como medida um número inteiro? Justifique sua resposta.
b) Determine a medida da área da superfície do quadrado citado no item (a).
c) Qual deve ser a medida do lado de um outro quadrado para que sua superfície tenha o dobro da medida da área que você calculou no item (b)?

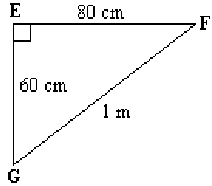
Objetivo: apresentar ao aluno o problema da incomensurabilidade da diagonal em relação ao lado do quadrado, fazendo com que perceba a relação que existe entre o Teorema de Pitágoras e o problema da duplicação do quadrado.
Comentários: em primeiro lugar encontrar a diagonal medindo $\sqrt{2}$ cm e a área medindo 1 cm^2. É pouco provável que o aluno perceba a figura ao lado para encontrar a solução do item (c) pois é necessário desenhar um quadrado a partir da diagonal do quadrado inicial.



Este novo quadrado terá lado medindo $\sqrt{2}$ cm e sua superfície terá área medindo 2 cm^2 , o dobro da medida da área da superfície do quadrado inicial.

Exercício 5

Um pedreiro, quando precisa de um ângulo reto, na demarcação de um terreno, utiliza barbante e estacas da seguinte maneira:

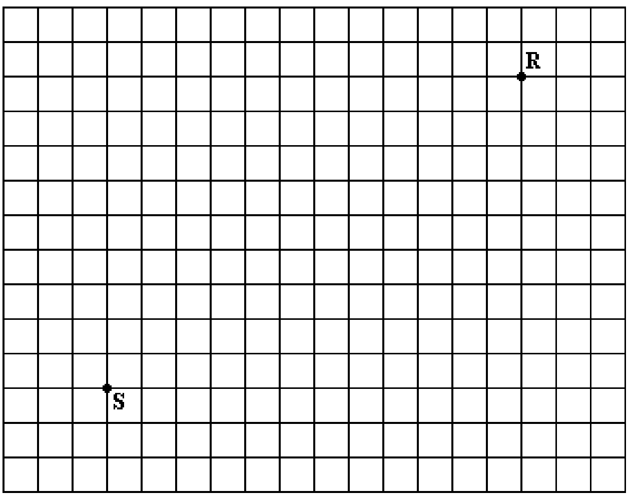


a) Como se pode garantir que o triângulo assim construído é retângulo? Justifique sua resposta.
b) Se o pedreiro modificar as medidas dos barbantes para: EF = 90 cm e EG = 1,20 m, qual deve ser a distância entre as estacas F e G para que ele tenha a certeza de haver construído um ângulo reto?

Objetivo: tomar conhecimento de uma aplicação muito difundida do Teorema de Pitágoras.
Comentários: para o aluno é interessante saber justificar matematicamente o teorema uma vez que o mesmo é bastante utilizado na prática, ganhando maior significado para ele. No item (a) devem perceber que: 1m = 100 cm e $100^2 = 60^2 + 80^2$ e que, portanto, o triângulo é retângulo e no item (b) que: como $FG^2 = 90^2 + 120^2$ então FG = 150cm ou 1,5m.

Exercício 6

A figura representa o chão do pátio de uma escola, recoberto por placas quadradas de 1m de lado. Renata e Sylvia estão nos pontos *R* e *S*, respectivamente. Quanto mede o menor trajeto entre as duas colegas?

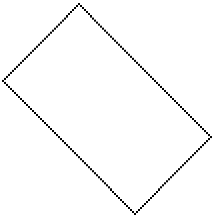


Objetivo: perceber a aplicação do Teorema de Pitágoras para o cálculo da distância entre dois pontos.
Comentários: para responder a questão é necessário perceber na malha que existe um triângulo retângulo *SRP*, em que $\overline{SP}$ mede 12 m e $\overline{RP}$ mede 9 m e que por Pitágoras se encontra a medida de $\overline{RS}$, que representa o menor trajeto e mede 15 m.

Exercício 7

a) Num triângulo isósceles, a base mede 6cm e cada um dos lados "iguais" mede 5cm. Calcule a medida da área desse triângulo.

b) O retângulo ao lado tem largura igual a 80cm e diagonal 100cm. Quanto mede o seu perímetro?



Objetivo: estimular a busca de hipóteses de solução para problemas e reconhecer o Teorema de Pitágoras como ferramenta.
Comentários: no item (a) é necessário o aluno representar o enunciado por meio de uma figura para perceber a necessidade da medida da altura relativa à base para poder encontrar a medida da área de 2 cm^2. Para encontrar a medida da altura, 4 cm, deverá aplicar o Teorema de Pitágoras. Só assim encontrará a medida da área 12 cm^2. No item (b) para encontrar o perímetro é necessário aplicar o Teorema de Pitágoras para obter a medida do lado, 60 cm, que é desconhecida, e perceber que o perímetro é 280 cm.

Exercício 8
(pode-se usar um software de geometria dinâmica)

a) Dados os segmentos de medidas *a* e *b*, descreva um modo de determinar geometricamente um segmento *x*, tal que: $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

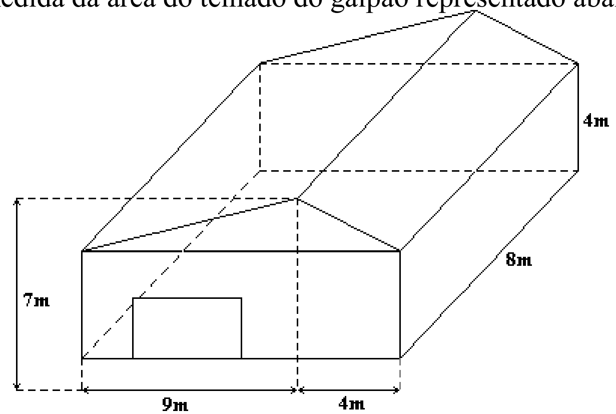
b) Construa agora, usando os segmentos *a* e *b* do item anterior, um segmento *y*, tal que: $y = \sqrt{a^2 - b^2}$. Isto é sempre possível? Justifique sua resposta.

Objetivo: passar do quadro algébrico para o quadro geométrico.
Comentários: no item (a) o aluno deve perceber que se $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, sendo *a* e *b* medidas de segmentos (positivas), então $x^2 = a^2 + b^2$ e que esta relação pode ser representada por um triângulo retângulo de hipotenusa medindo *x* e catetos medindo *a* e *b*.

No caso do item (b) deve perceber que se $y = \sqrt{a^2 - b^2}$, sendo *a* e *b* positivos, então $y^2 = a^2 - b^2$ que equivale a escrever $y^2 + b^2 = a^2$ que poderá ser representada por um triângulo retângulo de hipotenusa medindo *a* e catetos medindo *y* e *b*. Deverá perceber ainda que a existência desse triângulo depende da escolha das medidas de *a* e *b* pois $b < a$.

Exercício 9

Qual a medida da área do telhado do galpão representado abaixo?



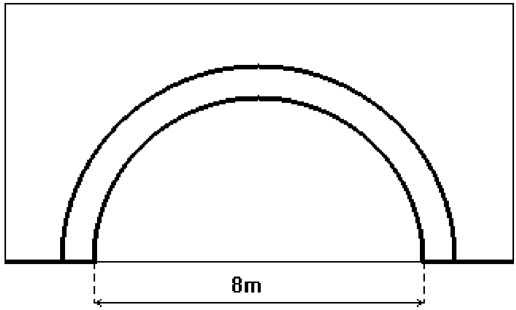
Objetivo: estimular a percepção visual de uma figura em perspectiva e mostrar a obtenção de um número irracional em situação da realidade.

Comentários: a percepção da figura espacial representada em perspectiva é essencial para a solução do problema. O aluno deve observar que na frente do galpão temos a representação de dois triângulos retângulos um com catetos 3m e 4m e hipotenusa 5m e, o outro, com catetos 9m e 3m e hipotenusa $9\sqrt{10}$ m. A partir daí poderá fazer os cálculos e concluir que uma das faces do telhado têm área medindo 40 m^2 e que a outra têm $72\sqrt{10}$ m^2. O que nos dará, considerando $\sqrt{10} \cong 3{,}16$, uma área total medindo aproximadamente 115,84 m^2.

Exercício 10

A figura representa a entrada de um túnel, com mão única.

A semicircunferência interior tem diâmetro de 8m. Um caminhão de 2,40m de largura precisa passar por esse túnel.

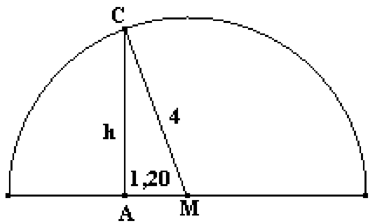


Qual é, "em teoria", a altura máxima do caminhão para que isto seja possível?

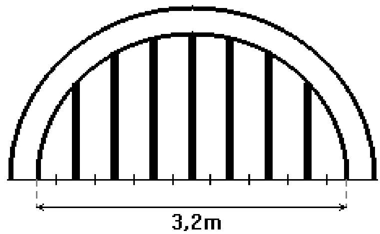
Objetivo: identificar subfiguras pertinentes para a aplicação do Teorema de Pitágoras.

Solução: é necessário acrescentar traços na figura dada ou fazer um novo esboço, como a figura abaixo, para representar os dados do problema. Supondo que o caminhão entre no túnel pelo centro da pista, podemos imaginar um triângulo retângulo *CAM* em que *MC* = 4m, raio da semi-circunferência; *AM* = 1,20 m, metade da largura do caminhão e *CA* = *h*, altura procurada. Aplicando o Teorema de Pitágoras nesse triângulo retângulo temos $16 = h^2 + 1{,}44$ e $h \cong 3{,}8\,\text{m}$.

Comentários: o fato da figura apresentada não conter todos os traçados necessários para a solução do problema pode constituir um fator que dificulte a visualização da figura necessária para encontrar a solução do problema.



Exercício 11



Sete barras eqüidistantes fecham esse portal em semicircunferência. Calcule o comprimento das barras, utilizando as indicações da figura. (Não considere a espessura das barras).

Objetivo: resolver um problema mais complexo em que deverá acrescentar traçados à figura dada e obter como resultado um número irracional.

Comentários: notando que a distância entre duas barras consecutivas é de 0,4 m e que temos pares de barras de mesma medida à direita e à esquerda da barra central, podemos nos concentrar em um dos dois quadrantes da semi-circunferência para resolver o problema. Se o diâmetro da circunferência mede 3,2 m, seu raio mede 1, 6 m e chamando de O o centro dessa circunferência e de A, B, C as extremidades superiores e de $A´$, $B´$, $C´$as extremidades inferiores das barras seguintes vemos que $AO = OB = OC$ = 1,6 m.

Determinando os triângulos retângulos $OAA´$, $OBB´$ e $OCC´$, todos com hipotenusa medindo 1,6 m e catetos $AO´$= 0,4m; $OB´$= 0,8 m e $OC´$= 1,2 m, respectivamente, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras em cada um desse triângulos e obter as medidas das barras obtendo $AA' \cong 1{,}54$ m, $BB' \cong 1{,}38$ m e $CC' \cong 1{,}05$ m e o comprimento total de aproximadamente 9, 54 m. O uso de dados numéricos, ocasionando como resultado um número irracional, é interessante para o aluno perceber que os problemas práticos normalmente não produzem, como resposta, quadrados perfeitos e que esses números podem ser representados por uma aproximação decimal.

Exercício12[12]

Dados $\overline{AB}$ de comprimento 8cm, seu ponto médio *O* e a reta $d \perp \overline{AB}$ no ponto *O,* tomamos sobre *d* um ponto *M* a 5cm de *B*. Considerando um ponto *N* tal que: *N* pertença à reta *d*, *N* não esteja na semi-reta *OM* e *NO* = 3cm.

O que se pode afirmar a respeito do quadrilátero *ANBM*? Justifique sua resposta.

Objetivo: interpretar o enunciado do problema, representá-lo por meio de uma figura e identificar o Teorema de Pitágoras como caminho para sua solução.
Comentários: o primeiro passo é interpretar o enunciado e representá-lo por meio de uma figura que auxilie na visualização da situação. Com isso o triângulo retângulo (3, 4, 5) fica evidente e imediatamente percebe-se que o quadrilátero *ANBM* é um losango, o que deve ser justificado.

Exercício 13

Quando uma terna de números naturais não nulos (x, y, z) verifica a relação $x^2 + y^2 = z^2$ ela é chamada "terna pitagórica". Agora discutiremos como podem ser "fabricadas" ternas desse tipo. Diophante (século III, depois de Cristo) utilizou o seguinte método para obter ternas pitagóricas (método já conhecido por Euclides): escolhidos dois números naturais não nulos *m* e *n* tais que *m* seja maior que *n*, basta calcular:

$$x = m^2 - n^2$$
$$y = 2mn$$
$$z = m^2 + n^2$$

Segundo Diophante, a terna formada por (x, y, z) é pitagórica.

---

[12] Este problema foi adaptado do boletim do IREM de Orléans. Pythagore. Suivi Scientifique, classe de 4^{e}. Bulletin inter Irem Première Cycle, pp. 365-373, 1987-1988.

a) Escolha alguns valores para m e n, por exemplo, $m = 2$ e $n = 1$, depois $m = 3$ e $n = 2$, e verifique que esse método de fato produz ternas pitagóricas.
b) Escolha agora você um valor para m e outro para n, lembrando que $m > n$. O método "funcionou"?
c) Prove que este método, que chamaremos de <u>método D</u> (em homenagem a Diophante), é geral; quer dizer, ele vale para quaisquer naturais m e n, com $m > n$.
d) A terna (9, 12, 15) é pitagórica? Será que ela pode ser obtida, usando-se o método D? Demonstre sua resposta.
Com o método D é possível "fabricar" uma infinidade de ternas pitagóricas, mas não todas. Vamos ver, então, um outro método para obtenção de ternas pitagóricas por "proporcionalidade". Chamaremos este método de <u>método P.</u>
e) Voltando à terna (3, 4, 5), experimente multiplicar todos os seus elementos por um mesmo número. Será que o resultado ainda é uma terna pitagórica? Faça o "teste". O que você concluiu?
f) Mostre que se (x, y, z) é uma terna pitagórica e k um número natural não nulo, então a terna (kx, ky, kz) também é pitagórica.
g) Você pode prever o que acontece, se construirmos triângulos cujos lados tenham ternas pitagóricas como medidas? Explique sua resposta.
h) Construa triângulos, usando a terna (3, 4, 5) e as ternas obtidas a partir dela pelo método P. O que você observa a respeito desses triângulos?

Objetivo: retornar ao quadro numérico usando resultados encontrados na História, relacioná-los com triângulos retângulos, além de relacionar as ternas proporcionais a triângulos retângulos semelhantes.
Comentários: o aluno poderá ter dificuldade com a generalização exigida no item (c) por não estar habituado a tratar situações desse tipo. Queremos mostrar que se "$x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$ e $z = m^2 + n^2$ então $x^2 + y^2 = z^2$". Partindo do primeiro membro da conclusão temos: $x^2 + y^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2 = z^2$.

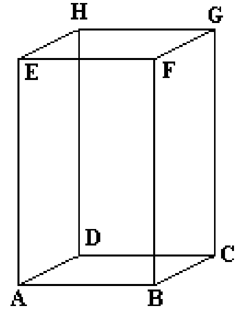
O mesmo acontece no item (f), sabendo que $x^2 + y^2 = z^2$ queremos mostrar que $(kx)^2 + (ky)^2 = (kz)^2$.

Exercício 14

1) No bloco retangular da figura, as arestas que determinam a superfície da base quadrada *ABCD* têm medida *a*. A altura do bloco é $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ e *O* é o centro da face oposta à base.

a) Prove que o triângulo *OAB* é eqüilátero.

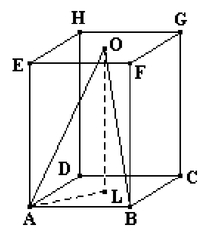
b) Calcule a distância do ponto *B* ao plano *AOC*.



Objetivo: aplicar o Teorema de Pitágoras para resolver situações da geometria espacial.

Comentários: no item (a) traçando a altura do bloco $\overline{OL}$. Teremos no triângulo *OLA* que $OL = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, LA é metade da medida da diagonal do quadrado da base, isto é $LA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ e aplicando o Teorema de Pitágoras obtemos que $OA^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4} + \frac{2a^2}{4} = a^2$, portanto $OA = a$. Como $OA = OB = AB = a$ o triângulo *OAB* é eqüilátero.

Em (b) temos que observar que a distância do ponto *B* ao plano *AOC* é a medida do segmento *BL*, que representa metade da diagonal da base do quadrado *ABCD*, pois as diagonais de um quadrado são perpendiculares e interceptam-se no ponto médio. Logo a distância será $BL = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

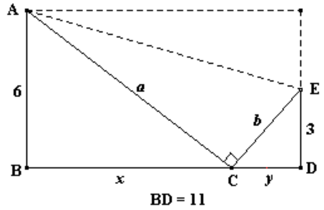


Atividade 09: usando um software de geometria dinâmica

Exercício 1: Abra o arquivo **mod_06_pitextra** e determine as medidas dos segmentos *BC* e *CD*, primeiro com o software e depois algebricamente.

Objetivo: a partir da observação e da movimentação da figura obter as medidas algebricamente utilizando o Teorema de Pitágoras.

Comentários: a manipulação no software e as construções auxiliares ajudam a encaminhar a justificativa algébrica. A solução por Pitágoras, partindo de que *BD* = 11 é a seguinte: $a^2 = 36 + x^2$ e $b^2 = 9 + y^2$ a partir dos triângulos *ABC* e *EDC*, respectivamente. Somando as duas equações temos: $a^2 + b^2 = 45 + x^2 + y^2$. Mas observando o triângulo retângulo *ACE* vemos que $a^2 + b^2 = AE^2 = 130$. Substituindo este resultado na última equação obtemos $x^2 + y^2 = 85$ em que $x^2 = (11 - y)^2$, resolvendo encontramos que y = 9 ou y = 2 e as duas soluções possíveis são: *BC* = 2 e *CD* = 9 ou *BC* = 9 e *CD* = 2.



Exercício 2: Desenhe um triângulo retângulo *OBA*, retângulo em *O*. Sobre cada um dos lados de *OBA*, desenhe externamente um triângulo eqüilátero. Investigue a relação entre as medidas das áreas determinadas pelos três triângulos eqüiláteros.

Objetivo: constatar que a medida da área da superfície do triângulo de maior lado é igual à soma das medidas das áreas das superfícies dos outros dois.

Exercício 3: O que aconteceria com a relação entre as medidas das áreas se, no exercício anterior, desenhasse três polígonos regulares do mesmo tipo no lugar dos triângulos?

Objetivo: perceber que a relação constatada anteriormente permanece para qualquer polígono regular.

Exercício 4: E se as figuras externas a *OBA* fossem três semicírculos, cada uma com o diâmetro igual ao lado sobre o qual ela se apóia?

Objetivo: perceber que a relação permanece mesmo para semicírculos.

Atividade 10: Fazendo outras demonstrações do Teorema de Pitágoras

Foram escolhidas três demonstrações diferentes para o teorema de Pitágoras.

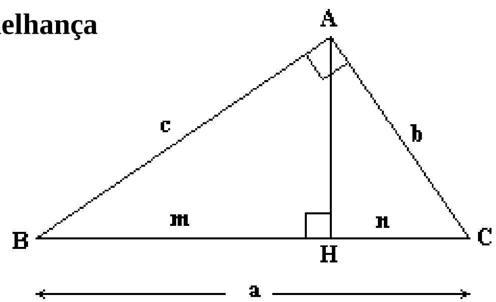
- por semelhança: número 1 do livro "The Pythagorean Proposition", de Elisha Scott Loomis
- chinesa: número 253 do mesmo livro citado.
- do General Garfield: número 231 do mesmo livro.

Cada grupo está encarregado de entender, discutir e apresentar uma das demonstrações.

Leia abaixo algumas considerações a respeito de cada uma.

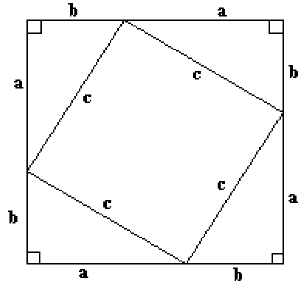
1. Demonstração por semelhança

A demonstração leva em conta que, se considerarmos a altura relativa à hipotenusa de um triângulo *ABC*, retângulo em *A*, teremos três triângulos semelhantes.



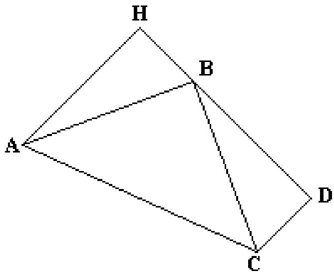
Estabeleça todas as proporções possíveis decorrentes das semelhanças e prove o teorema. Além disso, extraia todas as demais relações métricas no triângulo retângulo.

2. Demonstração Chinesa



Prove o Teorema de Pitágoras, relacionando as medidas das áreas das figuras.

3. Demonstração de Garfield

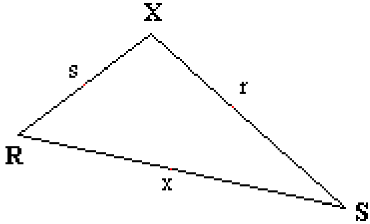


Essa demonstração surgiu em 1876. Na figura ao lado o triângulo *AHB* é retângulo em *H* e $\overline{HB}$ foi prolongado até *D*, de forma que *BD* = *AH*. Por *D* foi traçado o segmento *DC* paralelo a $\overline{AH}$ ede medida igual a *BH*.
Relacionar a área da superfície do trapézio *CDHA* com as áreas das superfícies dos triângulos *AHB*, *BCD* e *ABC*.

Objetivo: estimular o exercício da demonstração e observar que muitas vezes elas não são únicas.

Institucionalização

I. Condição de existência de triângulos (abreviaremos c.e.t.)



$$\begin{cases} x < r + s \\ r < x + s \\ s < r + x \end{cases}$$

Para que exista triângulo, dadas três medidas, a medida de cada lado deve ser menor que a soma das medidas dos outros dois.

Exemplo: para que exista triângulo com medidas (4, 5, y) deve ocorrer 1 < y < 9.

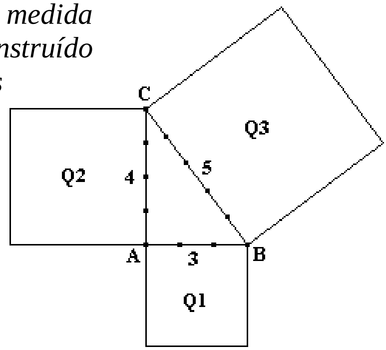
Entretanto, a c.e.t. não dá conta de "prever" se o triângulo será, ou não, retângulo.

II. Triângulo retângulo – Teorema de Pitágoras

Geometricamente:

"Se um triângulo é retângulo, então a medida da área da superfície do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das medidas das áreas das superfícies dos quadrados construídos sobre os catetos."

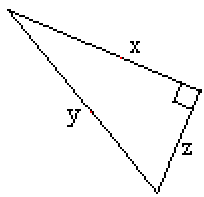
Exemplo:



Algebricamente:

"Se um triângulo é retângulo, então o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos."

$y^2 = x^2 + z^2$



III. Recíproco

"Se num triângulo o quadrado da medida do maior lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, então o triângulo é retângulo e tem como hipotenusa o maior lado."

IV. Resumo

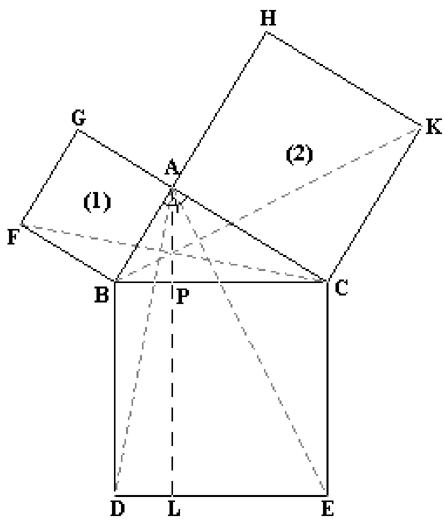
Se *ABC* é um triângulo retângulo, sendo *a* a medida da hipotenusa e *b* e *c* as medidas dos catetos, então $a^2 = b^2 + c^2$.

Se $a^2 = b^2 + c^2$ então o triângulo *ABC* é retângulo e *a* é a medida da hipotenusa (recíproco).

Observação: quando concluímos que uma terna não produz triângulo retângulo, pois não obedece à relação pitagórica, não estamos utilizando o recíproco.
Exemplo: em (8, 5, 6) $64 \neq 25 + 36$ então o triângulo formado não é retângulo.
($a^2 \neq b^2 + c^2$ então o triângulo ABC não é retângulo) é uma proposição equivalente ao teorema direto, pois da Lógica Matemática: $(p \to q) \Leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$.

V. Demonstração 11 – Euclides, do livro Elementos, 300 a.C., Proposição 471

Essa demonstração também aparece, séculos depois, na obra de Tâbit Ibn Qorra (826-901).
A figura utilizada por Euclides para demonstrar o Teorema de Pitágoras é, às vezes, descrita como "moinho de vento", "cauda de pavão" ou "cadeira de noiva".



I) Seja ABC um triângulo retângulo em A.
Constrói-se, sobre o lado $\overline{BC}$, o quadrado $BDEC$, e sobre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, os quadrados $BAGF$ e $CAHK$, respectivamente.
Traça-se $\overline{AL} // \overline{BD}$
O triângulo ABD é congruente ao triângulo FBC (caso L.A.L.)
pois $AB = FB$ e $BD = BC$ (lados de um quadrado) e $med(F\hat{B}C) = med(A\hat{B}D)$

II) Chamando de A1 a medida da área da superfície do quadrado 1 e de A2 a medida da área da superfície do quadrado 2, tem-se:

$A1 = 2 \times A_{\Delta FBC}$, pois $A_{FBC} = \dfrac{FB \times FG}{2} = \dfrac{c^2}{2}$, $A1 = 2 \times A_{\Delta ABD}$ porque os dois triângulos são congruentes.

III) Mas: $A_{\Delta ABD} = \dfrac{BD \times DL}{2} = \dfrac{A_{BPLD}}{2}$

Então: $A1 = c^2 = 2 \times A_{\Delta FBC} = A_{BPLD}$.

Analogamente: $A2 = b^2 = 2 \times A_{\Delta BCK} = A_{PCEL}$

IV) Portanto, a medida da área da superfície do quadrado *BCED*, formada pelos retângulos *BPLD* e *PCEL*, é igual a soma medidas das áreas $b^2 + c^2$, logo $a^2 = b^2 + c^2$.

Para Ler: Sobre a importância do Teorema de Pitágoras[13]

Pitágoras de Samos

Em grego: Pitágoras $= \pi\upsilon\theta\alpha\gamma o\rho\alpha\varsigma$.

1. <u>Introdução.</u>

O Teorema de Pitágoras, que diz
"Num triângulo retângulo, cuja hipotenusa mede *a* e cujos catetos medem *b* e *c*, vale a relação: $a^2 = b^2 + c^2$", embora nem sempre seja conhecido, é um dos teoremas mais usados:

a) pelo pedreiro, quando quer construir paredes que formam 90º, e usa o triângulo 3, 4, 5 ou o triângulo 6, 8, 10 com um barbante;

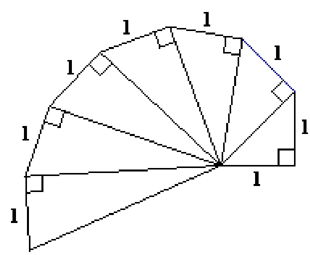
b) pelo observador que, de algum ponto ao nível do mar, quer medir sua distância à linha do horizonte;

c) pelo carpinteiro, quando quer construir uma treliça de sustentação do telhado de uma casa;

d) pelo carpinteiro, quando quer estruturar um portão;

e) pelo matemático, quando quer construir, com régua e compasso, um segmento de medida $\sqrt{n}$, com $n \in N$ a partir do segmento unitário.

ESPIRAL DE ARQUIMEDES



f) pelo navegador, quando usa trigonometria;

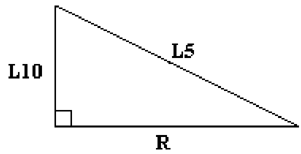
g) pelo professor, quando quer ensinar geometria analítica, usando eixos cartesianos ortogonais;

---

13 Inspirado no material do *Programa Pró-Ciências*, convênio CAPES/FAPESP/SEE-SP/PROEM/PUC-SP, 1999.

h) pelo matemático, quando quer calcular o módulo de um número complexo;

i) pelo profissional que quer construir, com régua e compasso, o segmento áureo, h, de outro segmento dado, R, pois: $h = \left(\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) \cdot R$. (Esse assunto será tratado mais à frente).



j) pelo desenhista, quando quer construir o lado do decágono regular, L_{10}, inscrito numa circunferência de raio *R*, pois L_{10} é o segmento áureo de *R*; ou quando quer construir o lado do pentágono regular, L_5, inscrito numa circunferência de raio *R*, pois vale o desenho ao lado.

Independentemente de seu uso, é certamente um dos mais interessantes teoremas da geometria plana.

O livro "The Pythagorean Proposition", de Elisha Scott Loomis, publicado pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), em 1972, na série Classics in Mathematics Education, traz 370 provas diferentes do teorema, classificadas por métodos e tipos, dados bibliográficos e históricos e informações sobre as chamadas ternas pitagóricas (a, b, c) de números naturais, satisfazendo a igualdade $a^2 = b^2 + c^2$.

<u>**Curiosidade**</u>: a generalização desta última igualdade é conhecida como a última conjectura de Fermat (1640): "Dado um número natural *n*, $n > 2$, a única solução (a, b, c) , de números naturais, da equação $a^n = b^n + c^n$ é a solução $a = b = c = 0$" e foi resolvida em 1995 pelo inglês Andrew Wiles, professor em Princeton, Inglaterra, com a ajuda do computador.

2. <u>Um pouco de História</u>

O texto abaixo foi extraído do livro "Pré-socráticos" , da coleção Os Pensadores.

- **<u>Pythagóras de Samos (cerca de 580/78 - 497/6 a.C.)</u>**

É muito pouco o que conhecemos sobre a vida de Pitágoras. Esta figura, cedo foi envolvida pelo legendário, de modo que é difícil separar nela o histórico do fantástico. Nasceu em Samos, rival comercial de Mileto. Pelo ano de 540 a.C. deixou sua pátria, estabelecendo-se na Magna Grécia (sul da Itália). Em Crotona fundou uma espécie de associação de caráter mais religioso que filosófico, cujas doutrinas eram mantidas em segredo. Seus adeptos logo criaram novos centros: Tarento, Metaponto, Síbaris, Régio e Siracusa. Participantes ativos da política, provocaram a revolta dos crotonenses. Pitágoras então abandona Crotona, refugiando-se em Metaponto, onde morreu em 497 ou 496. Pitágoras não deixou nenhum documento escrito. Seus ensinamentos transmitidos oralmente eram rigorosamente guardados em segredo pelos primeiros discípulos que também nada escreveram. Daí a grande dificuldade em reconstituir o pensamento do pitagorismo primitivo e ainda mais o do próprio Pitágoras, distinguindo-o do de seus discípulos. No entanto, o pitagorismo exerceu profunda influência na filosofia grega, quer pela reação polêmica que provocou (Xenófanes, Heráclito, Parmênides, Zenão), quer pelos elementos positivos que passaram aos pensadores posteriores. Ao pitagorismo posterior – com escritos – pertencem Filolau e Arquitas.

- **Lema: Tudo é número**

Pitágoras concebe a extensão como descontínua: constituída por unidades invisíveis e separadas por um "intervalo". Segundo a cosmologia pitagórica, esse "intervalo" seria resultante da respiração do universo, que, vivo, inalaria o ar infinito em que estaria imerso. As unidades comporiam os números. Os números não seriam meros símbolos a exprimir o valor das grandezas: para os pitagóricos, eles são reais, são a própria "alma das coisas" .

Segundo Aristóteles, os pitagóricos consideravam os números como os elementos constitutivos da matéria.

- **Fontes do nosso conhecimento sobre Pitágoras**

  Sumário Eudemiano de Proclus.

Próclus (410 d.C.) no seu livro "Comentário sobre o volume I de Euclides" diz:

> **"Pitágoras, que veio depois dele, transformou essa ciência numa forma liberal de instrução, examinando seus princípios desde o início e investigando os teoremas de modo imaterial e intelectual. Descobriu a teoria das proporcionais e a construção das figuras cósmicas".**

Escritos dos seguidores de Nicômano de Gerasa (100 d.C.).
Escritos de Philolaus de Croton.

<u>Outras citações sobre Pitágoras</u>

- Obras de Platão.
- Escritores da época de Platão: Empédocles, Heráclito, Ion, Xenófanes, Heródoto, Isócrates.
- Obras de Aristóteles.
- Escritores da época de Aristóteles: Heráclites, Calímaco, Hérmipo, Dicearco, Timeu, Aristóxeno.
- Três biografias do século III d.C.: Diógenes Laércio, Jâmblico e Porfírio.

- **<u>Descobertas atribuídas aos pitagóricos</u>**
- A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º.
- A demonstração do Teorema de Pitágoras.
- A construção dos sólidos regulares (figuras cósmicas).
- Classificação dos números (par, ímpar, amigo, perfeito, deficiente, abundante, primo, composto).
- A criação dos números figurados (números triangulares, números oblongos, números quadrangulares, números pentagonais,...).
- A divisão de um segmento em média e extrema razão.
- A obtenção de ternos pitagóricos.
- A esfericidade da Terra.
- A invenção da música.
- A teoria das médias.
- A descoberta dos números irracionais.
- O método postulacional (cadeias de proposições em que umas derivam de outras).

3. <u>Curiosidade</u>

Hipotenusa = ὑποτείνουσα

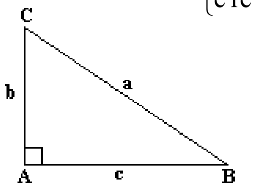
Catetos = καθετος, significando perpendicular ou coisa reta.

4. <u>O Recíproco do Teorema de Pitágoras</u>

O recíproco do Teorema de Pitágoras tem uso mais freqüente do que o próprio teorema, pois, na maioria das situações, verificamos a relação entre os lados para concluir que o triângulo dado é retângulo.

"Se, num triângulo *ABC*, com lados medindo *a*, *b*, *c*, vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo é retângulo com a sua hipotenusa medindo *a*".

$$H\begin{cases}\text{O triângulo ABC dado,}\\ \text{com lados medindo a, b, c}\\ a^2 = b^2 + c^2\end{cases} \qquad T\begin{cases}\text{O triângulo ABC}\\ \text{é retângulo com hipotenusa a}\end{cases}$$



<u>Demonstração</u>: Como o triângulo existe e vale $a^2 = b^2 + c^2$, então $a > b > 0$ e $a > c > 0$; portanto, o maior lado do triângulo é o lado que mede *a*.

Construamos um triângulo retângulo *DEF*, com catetos medindo *DE* = *b* e *DF* = *c*:

Do Teorema de Pitágoras, temos que $x^2 = b^2 + c^2$: daí, $x^2 = a^2$.

Portanto, como só estamos interessados nas soluções positivas, temos que $x = a$.

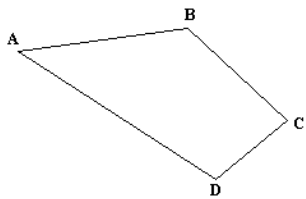
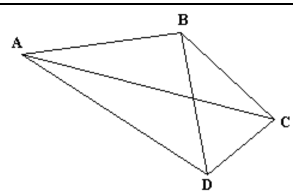
Do caso LLL de congruência de triângulos, temos que os dois triângulos são congruentes e, portanto, o triângulo *ABC* é retângulo com hipotenusa *a*.

7 QUADRILÁTEROS[14]

Atividades

Proporcionar a oportunidade de vivenciar atividades que contemplem: as situações de ação, formulação, validação e institucionalização propostas, além do trabalho em diversos registros de representação. Adquirir ou aprimorar conceitos geométricos relativos a quadriláteros.

Definição de quadrilátero e suas diagonais

Enunciado verbal	Interpretação em linguagem figural	Interpretação em linguagem matemática
Dados quatro pontos A, B, C e D, não colineares três a três, a reunião dos segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e $\overline{DA}$ de tal forma que as únicas interseções de segmentos possíveis, ocorram nos pontos A, B, C ou D, chama-se *quadrilátero ABCD.*		Quadrilátero $ABCD$: $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{AD}$
Diagonal de um quadrilátero é o segmento que une dois vértices não consecutivos		$\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são diagonais do quadrilátero $ABCD$

Atividade 01: classificando os quadriláteros

Material: 24 superfícies cujos contornos representam quadriláteros recortados em cartolina, sendo: 4 superfícies quaisquer, 4 quadrangu-

---

[14] Esta seqüência, ponto de apoio para a dissertação: *Uma oficina para formação de professores com enfoque em quadriláteros* de Márcia Maioli, 2002, PUC/SP.

lares, 4 retangulares, 4 de paralelogramos, 4 de losangos e 4 de trapézios; cola, 6 folhas de papel em branco **(ver anexo 08)**.

Exercício 1

Apresentação de conjuntos de quadriláteros

a) Separe as superfícies de quadriláteros que você recebeu em grupos.

b) Quantos grupos você formou?

c) Quais foram os critérios que você considerou?

d) Considerando cada grupo, é possível por meio de outros critérios, uma nova classificação?

e) Cole cada grupo de figuras na parte superior de uma página em branco e na parte inferior registre para cada um as propriedades que você observa.

f) Dê nomes para cada grupo de quadriláteros.

g) Considerando as propriedades, que você registrou, defina cada grupo de quadriláteros.

Objetivo: classificar os quadriláteros e observar propriedades características de cada tipo.

Exercício 2

Escolha um dos grupos de quadriláteros e responda:

a) O quadrado poderia fazer parte do grupo dos retângulos?

b) O quadrado poderia fazer parte do grupo dos losangos?

c) Qual a sua conclusão?

d) Existe outro grupo do qual o quadrado poderia fazer parte?

e) Como você define trapézio

Você sabia que podem ser consideradas duas definições para **trapézio**?

Definição I: *Um trapézio é um quadrilátero que tem exatamente um par de lados paralelos.*

Definição II: *Um trapézio é um quadrilátero que tem um par de lados paralelos.*

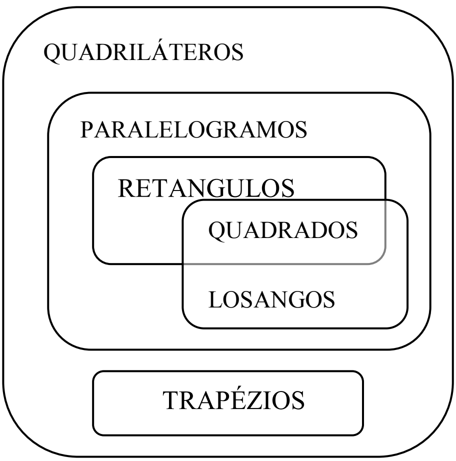
f) Qual a diferença entre elas?

g) De acordo com a definição I, um quadrado é um trapézio?

h) Um losango é um trapézio?
i) Um retângulo é um trapézio?
j) Um paralelogramo é um trapézio?
k) E de acordo com a definição II?
l) Considere a definição I e represente a relação entre os grupos de quadriláteros por meio de um desenho ou diagrama.
m) Considere agora a definição II e represente a relação entre os grupos de quadriláteros por meio de um desenho ou diagrama.

Objetivo: observar que alguns tipos de quadriláteros têm propriedades comuns a grupos de quadriláteros diferentes.
Comentários: no momento de discussão da atividade devem surgir os diagramas abaixo cada um relacionado à uma definição de trapézio.[15]

Definição I



[15] Material adaptado de HERSHOKOWITZ, Rina e outros, *Atividades com professores baseadas em pesquisa cognitiva*. Em LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (org.). *Aprendendo e ensinando geometria;* Atual Editora, 1996, São Paulo.

Definição II

Exercício 3

a) Quais propriedades são redundantes e poderiam ser retiradas das páginas em que você colou os grupos de quadriláteros?
b) Anote as propriedades necessárias para descrever um quadrado.
c) Anote as propriedades necessárias para descrever os retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios.

Objetivo: perceber que há propriedades mínimas para descrever os diferentes tipos de quadriláteros.

Atividade 02: Interpretando enunciados em linguagem figural

Exercício 1

Represente por uma figura cada enunciado abaixo:

a) O objeto tem quatro ângulos.
Pelo menos um ângulo não é reto.
Pelo menos um lado é paralelo ao seu lado oposto.
Lados opostos congruentes.

b) O objeto tem quatro lados.
Os ângulos opostos têm medidas iguais.
Os quatro lados são congruentes.
Pelo menos um ângulo é reto.

c) O objeto tem quatro ângulos.
Pelo menos um ângulo não é reto.
Os lados são congruentes.

d) Tenho quatro lados.
Somente dois de meus lados são paralelos.
Dois de meus ângulos são retos.

Exercício 2

Faça um desenho com quadriláteros e redija uma mensagem de forma que uma outra pessoa possa construir o mesmo desenho.

Objetivo: identificar os quadriláteros a partir das propriedades específicas e mudar o registro de verbal para figural e vice-versa.

Institucionalização 1

Vamos definir:

Quadrilátero	**Linguagem natural**	**Linguagem figural**	**Linguagem matemática**
Trapézio			
Paralelogramo			
Retângulo			
Losango			
Quadrado			

Objetivo: estabelecer o caráter oficial do conhecimento, corrigir possíveis distorções a respeito das definições de trapézio, paralelogramo, retângulo, losango e quadrado. Explicitar estas definições em três registros de representação.

Atividade 03: designando quadriláteros

Considerando os pontos abaixo:

.*J*

. *E* . *A* *I* .

. *F*

. *B*

L .

. *H* . *G* . *D*

. *K*

. *C*

a) Ligue os pontos *ABCDA*, *EFHGE, IJKLI*.
b) Estes desenhos representam quadriláteros?
c) Qual a diferença entre as três figuras?
d) O que você pode dizer de *ABCD* e *CDAB*?
e) Existem outras maneiras de designar os quadriláteros *ABCD* e *IJKL*? Quais?
f) Quais são os lados e os vértices dos quadriláteros *ABCD* e *IJKL*? Indique seus ângulos.
g) Quais são as diagonais de *ABCD*? E de *IJKL*?
h) Quanto vale a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero?

Objetivos: familiarizar-se com a linguagem matemática utilizada para designar um quadrilátero, relacionar a designação do polígono com a posição dos vértices, observar as várias formas de designar um polígono além de encontrar uma forma de calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero.

Comentários: no item (b) gostaríamos que percebessem que, de acordo com a definição que estamos considerando, apenas os dois últimos são quadriláteros. Em (c) que *EFHG* representa um polígono não convexo, enquanto *ABCD* e *IJKL* representam polígonos convexos. No item (d) temos duas formas diferentes de representar o mesmo quadrilátero. No item (h) queremos que obtenham 360^0 observando que podemos obter em cada uma das figuras dois triângulos ajustados.

Atividade 04: consolidando seus conhecimentos
(pode ser em um software de geometria dinâmica)

a) Construir um quadrilátero *LMNO* cujos lados $\overline{LM}$ e $\overline{NO}$ são paralelos.
b) Podemos afirmar que *LMNO* é um paralelogramo? Por quê?
c) Podemos afirmar que *LMNO* é um retângulo? Por quê?
d) Podemos afirmar que *LMNO* é um trapézio? Que definição de trapézio você considerou?
e) Se você considerar a outra definição, podemos afirmar que *LMNO* é um trapézio?

Observação: segundo LUCIA TINOCO, 1999 p. 62, “O fato de não haver vantagens nem desvantagens claras para adotar uma ou outra definição de trapézio é que faz com que não haja consenso entre os autores em relação a nenhuma das duas.”
Vamos considerar de agora em diante, a definição II.

f) Que lados do trapézio você escolheria para chamar de base? Por quê?
g) Defina e construa um trapézio isósceles.
h) Defina e construa um trapézio retângulo. Descreva sua construção.

Objetivo: identificar um trapézio, confrontar as duas definições de trapézio, definição de trapézio isósceles e trapézio retângulo. Além de utilizar a linguagem natural escrita, para descrever os passos da construção geométrica de um trapézio retângulo.
Comentários: nesta atividade devem perceber que a figura construída não é um paralelogramo porque este deve ter dois pares de lados paralelos e que também não pode ser um retângulo porque nada pode

garantir que seus ângulos sejam retos. Se considerarmos a definição II para trapézio a figura construída pode ser um trapézio, considerando a definição 1 nada podemos afirmar, pois esta exige exatamente um par de lados paralelos e por construção podemos ter dois.
Os lados paralelos normalmente são considerados como base do trapézio e chamamos um trapézio de isósceles se tem um par de lados não paralelos e congruentes. Podemos traçar um trapézio retângulo a partir de duas retas paralelas e uma perpendicular a elas, a partir da interseção da perpendicular com as paralelas e sobre estas definimos os segmentos que representarão as bases e unimos suas extremidades.

Atividade 05: identificando e demonstrando propriedades de um trapézio
Pode ser em um software de geometria dinâmica.
Exercício 1

a) Construa um trapézio qualquer de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

b) Meça os ângulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ e $\hat{D}$. Qual o valor da medida de $med(\hat{A}+\hat{D})$? E de $med(\hat{B}+\hat{C})$?

c) O que você pode observar?

d) Você acredita que esse resultado valha para qualquer trapézio?

Observação: as suas conclusões são apenas conjecturas. Para adquirir o estatuto de teorema é necessário demonstrá-las.
O que vem a ser um teorema?
Teorema é uma propriedade matemática verdadeira, mas que só assume esse *status* quando demonstrado.

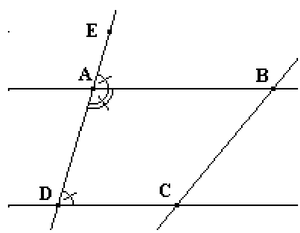
Escreva o resultado observado em forma de um teorema.

e) Usando as propriedades de ângulos definidos por duas retas paralelas e uma transversal, demonstre que: Dado um quadrilátero *ABCD*, se $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{CD}$ então $med(\hat{A}+\hat{D}) = med(\hat{B}+\hat{C}) = 180^0$.

f) Enuncie o teorema que você acabou de demonstrar.

g) Em um teorema temos hipóteses e conclusão. Identifique no teorema acima o que é hipótese e o que é conclusão.

Objetivos: conjeturar e demonstrar propriedades do trapézio, observar diferenças entre conjetura e teorema, discutir hipótese e conclusão de um teorema.
Comentários: no item (e) a demonstração deve estar próxima de: sabendo que *ABCD* é um quadrilátero e que $\overline{AB} // \overline{DC}$, podemos traçar as retas suportes dos lados desse quadrilátero e considerar a figura ao lado, sabemos que $med(D\hat{A}B) + med(E\hat{A}B) = 180^o$, pois são ângulos suplementares e que $E\hat{A}B \equiv A\hat{D}C$ (ângulos correspondentes) e portanto $med(D\hat{A}B) + med(A\hat{D}C) = 180^o$.
Analogamente mostramos que $med(A\hat{B}C) + med(D\hat{C}B) = 180^o$ e obtemos a conclusão.
Podemos então enunciar a propriedade: "*Dado um quadrilátero ABCD, se* $\overline{AB}$ *é paralelo a* $\overline{DC}$ *então* $med(D\hat{A}B) + med(A\hat{D}C) = med(A\hat{B}C) + med(D\hat{C}B) = 180^o$" e identificar como hipóteses que *ABCD é quadrilátero e* $\overline{AB} // \overline{DC}$ e como conclusão que:
"$med(D\hat{A}B) + med(A\hat{D}C) = med(A\hat{B}C) + med(D\hat{C}B) = 180^o$".



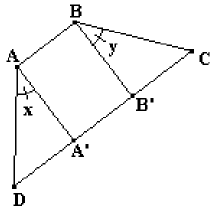
Exercício 2

ABCD é um trapézio isósceles de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Construa as perpendiculares às bases pelos vértices *A* e *B* da base menor, obtendo os pontos *A'* e *B'* na base maior $\overline{CD}$.

a) $\overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$? Por quê?
b) Os triângulos *AA'D* e *BB'C* são congruentes? Por quê?
c) $\hat{A} \equiv \hat{B}$? Por quê?

d) Construa as diagonais $\overline{AC} e \overline{BD}$ do trapézio *ABCD*. $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$? Por quê?
e) As quatro conclusões acima representam propriedades dos trapézios isósceles, enuncie cada uma delas.

Objetivo: conjeturar e demonstrar propriedades do trapézio isósceles.
Comentários: considerando a figura ao lado, que representa um trapézio isósceles, podemos responder em (a) que sim, porque se $\overline{AB} // \overline{A'B'}$ e $\overline{AA'} // \overline{BB'}$ então *AA´B´B* é um retângulo com $\overline{AA'} \perp \overline{A'B}$ o que nos leva a concluir que $\overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$.



Em (b) que sim, pois $\overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$,
$med(\hat{A}) = med(\hat{B}) = 90º$ e $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$
pois o trapézio é isósceles. Em (c) como os triângulos *AA'D* e *BB'C* são congruentes, temos que $x = med(A'\hat{A}B) = med(B'\hat{B}C) = y$.
Assim, se $med(\hat{A}) = 90^0 + x$, $med(\hat{B}) = 90^0 + y$ e x = y podemos concluir que $\hat{A} \equiv \hat{B}$. Em (d) se considerarmos os triângulos *ABD* e *ABC*, temos $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$, $\hat{A} \equiv \hat{B}$ e o lado $\overline{AB}$ comum, então $\Delta ABC \equiv \Delta ABD$ pelo caso LAL, o que nos permite concluir que $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$.
Finalmente podemos enunciar as quatro propriedades:
1) *Seja ABCD um trapézio isósceles com* $\overline{AB} // \overline{CD}$. *Se A' e B' são, respectivamente, as intersecções das perpendiculares a* $\overline{CD}$ *passando por A e B, então* $\overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$.
2) *Seja ABCD um trapézio isósceles com* $\overline{AB} // \overline{CD}$. *Se A' e B' são, respectivamente, as intersecções das perpendiculares a* $\overline{CD}$ *passando por A e B então, os triângulos AA'D e BB'C são congruentes.*
3) *Se um trapézio é isósceles, então os ângulos de uma mesma base são congruentes.*
4) *Se um trapézio é isósceles, então as suas diagonais são congruentes.*

Institucionalização 2

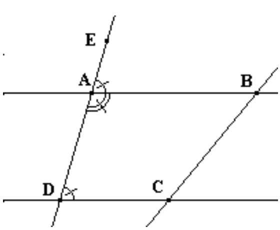
Preencha a tabela abaixo, com os principais resultados observados na atividade 5.

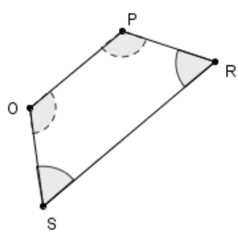
Enunciado verbal da propriedade	**Interpretação em linguagem figural**	**Interpretação em linguagem matemática**
(a)	(b)	Hipótese: se *ABCD* é um trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ Conclusão: $\hat{A} \cup \hat{D} \equiv \hat{B} \cup \hat{C}$ que é um ângulo raso
Os dois ângulos de cada base de um trapézio isósceles *OPRS* são congruentes	(c)	(d)
(e)	(f)	Hipótese: *OPRS* é um trapézio isósceles. Conclusão: $\overline{OR} \equiv \overline{PS}$

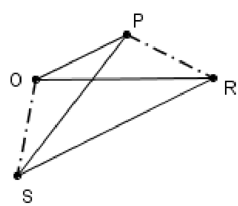
Solução: em (a) se *ABCD é um trapézio e* $\overline{AB} // \overline{BC}$, *então* $med(D\hat{A}B) + med(A\hat{D}C) = \; = med(A\hat{B}C) + med(D\hat{C}B) = 180º$. Em (d) *Hipótese: OPRS é um trapézio isósceles. Conclusão:* $\hat{O} \equiv \hat{P}$ *e* $\hat{R} \equiv \hat{S}$.

Em (e) *Em um trapézio isósceles as diagonais são congruentes.*

Em (b), (c) e (d) as figuras:



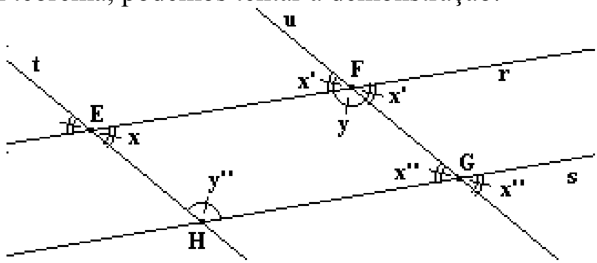




Atividade 06: conjeturando e demonstrando propriedades de um paralelogramo.
(pode ser em um software de geometria dinâmica)
Exercício 1

a) Construa um paralelogramo *EFGH* e compare seus ângulos opostos. O que você observa?
b) Enuncie o resultado observado acima na forma *"se.... então"*. Este resultado é um teorema? Justifique.
c) Enuncie o recíproco deste teorema. Verifique se é verdadeiro.
d) É possível enunciar os itens (b) e (c) em um único enunciado? Justifique.

Objetivo: conjeturar e demonstrar a congruência entre os ângulos opostos de um paralelogramo, enunciar o recíproco desse teorema e enunciar teoremas recíprocos em um único teorema.
Comentários: no item (a) podemos conjeturar que *os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes*. Para confirmar que se trata de um teorema, podemos tentar a demonstração:



Consideremos o desenho acima.Como t // u e r é transversal à t e u, temos que x = x' (ângulos alternos internos ou correspondentes). Como r // s e u é transversal a r e s, temos que x'= x'' (ângulos alternos internos ou correspondentes).
Analogamente, concluímos que y = y''.
Como demonstramos que o resultado observado é válido para um paralelogramo qualquer, concluímos que nossa conjetura é um teorema e enunciá-la: *"Se ABCD é um paralelogramo então seus ângulos opostos são congruentes"*.

No item (c) podemos enunciar o recíproco da seguinte forma: *Se os ângulos opostos de um quadrilátero são congruentes então o quadrilátero é um paralelogramo.*
Em (d) é possível enunciar as duas afirmações em uma só, pois são recíprocos entre si e por isso são equivalentes: *"Um quadrilátero é um paralelogramo se e somente se seus ângulos opostos são congruentes".*

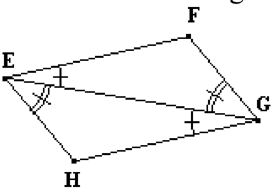
Exercício 2

a) Compare os lados opostos do paralelogramo *EFGH*. O que você observa?
b) Enuncie o resultado observado acima na forma de um teorema. Este resultado é mesmo um teorema?
c) Enuncie o recíproco do resultado obtido acima e verifique se é verdadeiro.
d) Enuncie os resultados obtidos nos dois itens anteriores na forma *"se, e somente se"*.
e) Construa as diagonais $\overline{EG}$ e $\overline{FH}$ do paralelogramo *EFGH*. Seja *M* o ponto de intersecção dessas diagonais. Compare $\overline{ME}$ e $\overline{MG}$, $\overline{MF}$ e $\overline{MH}$. O que você observa? O resultado observado é geral? Justifique sua resposta.
f) Enuncie o resultado observado acima na forma de teorema.
g) Enuncie seu recíproco e verifique se é verdadeiro.
h) Enuncie os resultados obtidos em (f) e (g) na forma *"se, e somente se"*.

Objetivo: conjeturar e demonstrar a congruência entre os lados opostos de um paralelogramo e a respeito da interseção de suas diagonais, enunciar o recíproco desses teoremas e enunciar teoremas recíprocos em um único teorema equivalente.
Comentários: observando os lados opostos de um paralelogramo podemos notar que são congruentes e enunciar esse resultado da seguinte forma: *em um paralelogramo, os lados opostos são congruentes.* Para garantir que este resultado seja um teorema, precisamos demonstrá-lo.

Demonstração:

O desenho abaixo, representa o paralelogramo *EFGH* e sua diagonal $\overline{EG}$. Como *EFGH* é um paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes ou $E\hat{F}G \equiv E\hat{H}G$ e $F\hat{E}H \equiv F\hat{G}H$.



Além disso, nos triângulos *EFG* e *GHE* temos que $\overline{EG}$ é comum aos dois.

Esses resultados nos levam a concluir que os dois triângulos são congruentes e por isso $\overline{EH} \equiv \overline{FG}$ e $\overline{EF} \equiv \overline{GH}$.

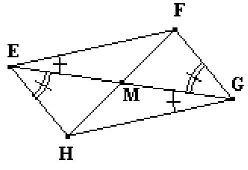
Podemos então enunciar e demonstrar o recíproco desse teorema: *Se um quadrilátero tem os lados opostos congruentes, então é um paralelogramo.*

Demonstração:

Seja *EFGH* um quadrilátero em que *EF* = *GH* e *FG* = *EH*, conforme o desenho acima. Considerando a diagonal $\overline{EG}$, temos que os triângulos *EFG* e *GHE* são congruentes pelo caso LLL.

Assim, $F\hat{E}G \equiv E\hat{G}H$ e $F\hat{G}E \equiv G\hat{E}H$. A primeira igualdade garante que $\overline{EF} // \overline{GH}$, pois os ângulos são alternos internos congruentes e a segunda garante que $\overline{EH} // \overline{FG}$, pois os ângulos são alternos internos congruentes. Logo, *EFGH* é um paralelogramo.

Podemos enunciar um teorema equivalente aos dois: *um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, seus lados opostos são congruentes.*



Observando as diagonais percebemos que elas se cruzam em seus respectivos pontos médios. Para garantir que este resultado é geral, devemos demonstrar que ele é válido para todo paralelogramo.

Teorema: se EFGH é um paralelogramo, então suas diagonais se interceptam em seus respectivos pontos médios.

Demonstração:

O desenho acima,representa um paralelogramo *EFGH*. Considerando a diagonal $\overline{FH}$ temos: $H\hat{F}G \equiv E\hat{H}F$ e $E\hat{F}H \equiv G\hat{H}F$. Considerando a diagonal $\overline{EG}$, temos: $F\hat{E}G \equiv E\hat{G}H$.

Notemos que os triângulos *EFM* e *GHM* são congruentes pelo caso ALA, assim $\overline{EM} \equiv \overline{MG}$ e $\overline{FM} \equiv \overline{MH}$. O que nos leva a concluir que *M* é o ponto médio das diagonais $\overline{EG}$ e $\overline{FH}$.
Para esse teorema também podemos enunciar e demonstrar o recíproco: *Se as diagonais de um quadrilátero EFGH se interceptam em seus pontos médios, então EFGH é um paralelogramo.*
Demonstração: Considerando a mesma figura temos que os triângulos *EFM* e *GHM* são congruentes pelo caso LAL e por isso $\overline{EF} \equiv \overline{HG}$ e que os triângulos *FMG* e *HME* também são congruentes pelo caso LAL e por isso $\overline{EH} \equiv \overline{FG}$).
Ora, já vimos que se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes, este quadrilátero é um paralelogramo, portanto *EFGH* é um paralelogramo.
Podemos agora enunciar o teorema equivalente: *O quadrilátero EFGH é um quadrilátero se, e somente se, suas diagonais se interceptam em seus respectivos pontos médios.*

Institucionalização 3

a) Complete a tabela com os resultados observados na atividade 6.

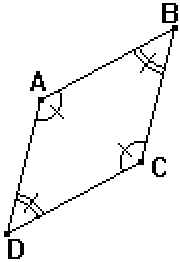
Enunciado em linguagem natural	**Interpretação em linguagem figural**	**Interpretação em linguagem matemática**
		1) <u>Hipótese</u>: *ABCD* é paralelogramo. <u>Conclusão</u>: $\hat{A} \equiv \hat{C}$ e $\hat{B} \equiv \hat{D}$ 2) <u>Hipótese</u>: *ABCD* é um quadrilátero com $\hat{A} \equiv \hat{C}$ e $\hat{B} \equiv \hat{D}$ <u>Conclusão</u>: *ABCD* é um paralelogramo.
Um quadrilátero é paralelogramo se, e somente se, seus lados opostos são congruentes.		

Um quadrilátero é paralelogramo se, e somente se, suas diagonais interceptam-se em seus pontos médios.		

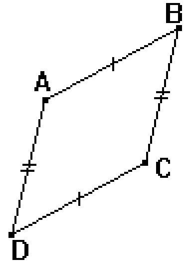
b) Para ter certeza que um quadrilátero é um paralelogramo, basta saber que:

. seus lados opostos são ...
. ou que seus ângulos opostos são ...
. ou que suas diagonais possuem o mesmo ...
. ou que seus lados têm o mesmo ...

Solução:
Na <u>primeira linha</u> da tabela, observando a representação em linguagem matemática, podemos enunciar em linguagem natural: *um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, os ângulos opostos são congruentes*. E representar com a figura abaixo:

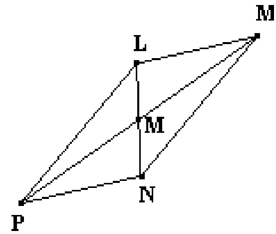


Na <u>segunda linha</u>, a partir do enunciado em linguagem natural podemos representar com a figura ao lado:



E em linguagem matemática escrever:
<u>Hipótese</u>: *ABCD* é um quadrilátero com $\overline{AB} \equiv \overline{DC}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$.
<u>Conclusão</u>: *ABCD* é um paralelogramo.
Ou
<u>Hipótese</u>: *ABCD* é um paralelogramo. <u>Conclusão</u>: $\overline{AB} \equiv \overline{DC}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$.

Finalmente, na terceira linha representar a figura ao lado:
E, em linguagem matemática:
Hipótese: *LMNP* é um paralelogramo.
Conclusão: $\overline{LN}$ e $\overline{MP}$ têm mesmo ponto médio.
Ou ainda Hipótese: *LMNP* é um quadrilátero em que $\overline{LN}$ e $\overline{MP}$ têm mesmo ponto médio.
Conclusão: *LMNP* é um paralelogramo.

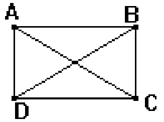


Atividade 07: conjeturando e demonstrando propriedades de um retângulo.
Pode ser realizada em um software de geometria dinâmica.

a) Construa um retângulo *ABCD*. *ABC*D é um paralelogramo? Por quê?
b) Construa e meça suas diagonais. O que você observa? Enuncie este resultado como um teorema do tipo *"se...então"*.
c) Demonstre este teorema.
d) Enuncie o recíproco deste teorema. Ele é verdadeiro?
e) Enuncie os resultados obtidos como um teorema na forma *"se, e somente se"*.
f) As diagonais de *ABCD* interceptam-se nos pontos médios? Por quê?
g) Explique como você construiria um paralelogramo *EFGH* cujas diagonais são congruentes. Faça a construção. *EFGH* é um retângulo? Por quê?
h) Depois destas atividades, pode-se concluir que todo quadrilátero que possui as diagonais congruentes é um retângulo. Esta afirmação é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta.

Objetivo: construir um retângulo com régua e compasso, fazer conjeturas e demonstrar as principais propriedades de um retângulo, bem como suas recíprocas, utilizar a linguagem natural escrita para descrever os passos da construção de um retângulo a partir de suas diagonais e introduzir a utilização de contra-exemplo.
Comentários: após a construção do retângulo *ABCD*, podemos observar que suas diagonais são congruentes e enunciar e demonstrar

que: *Se o paralelogramo ABCD é um retângulo, então suas diagonais são congruentes.* De fato, como o retângulo *ABCD* é um paralelogramo, seus lados opostos são congruentes.

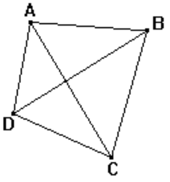


Observando a figura acima, percebemos que os triângulos *ADC* e *BDC* são congruentes pelo caso LAL, pois, $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$, $\overline{CD}$ é comum e $\hat{D} \equiv \hat{C}$. Logo, $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$, ou seja, suas diagonais são congruentes.
Agora podemos enunciar e demonstrar seu recíproco: *Se o paralelogramo ABCD tem as diagonais congruentes, então ABCD é um retângulo.*

Demonstração: Como *ABCD* é paralelogramo e $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$, os triângulos *ABC* e *BAD* são congruentes pelo caso LLL o que nos garante que $\hat{A} \equiv \hat{B}$. Ora, $\hat{A} \equiv \hat{C}$ e $\hat{B} \equiv \hat{D}$ já que *ABCD* é paralelogramo, podemos concluir que $\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D}$ e como as medidas destes ângulos devem somar 360º, vem que cada um deles mede 90º. Logo, ABCD é um retângulo. Finalmente, podemos enunciar o teorema equivalente: *Um paralelogramo é retângulo se, e somente se, suas diagonais são congruentes.*

No item (f) podemos responder que sim porque *ABCD* é um paralelogramo.

Finalmente, no item (h) podemos responder que a afirmação é falsa e apresentar uma figura como contra exemplo.

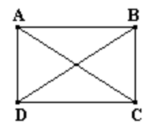


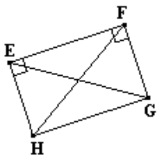
Na figura ao lado temos $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$ e no entanto, *ABCD* não é um retângulo. Isso nos leva a concluir que diagonais congruentes não garantem que um quadrilátero seja um retângulo, para que isso aconteça é necessário que o quadrilátero seja um paralelogramo.

Institucionalização 4

Enunciado em linguagem natural	Interpretação em linguagem figural	Interpretação em linguagem matemática
		Hipótese: *ABCD* é um retângulo Conclusão: AC = BD
		Hipótese: *EFGH* é um paralelogramo tal que *EG* = *FH* Conclusão: EFGH é retângulo.

Solução:
Na primeira linha da tabela, a partir da linguagem matemática, podemos enunciar em linguagem natural que: "*Se ABCD é um retângulo, então suas diagonais são congruentes*" e representar com a figura ao lado: Na segunda linha, podemos enunciar: "*Se um paralelogramo tem diagonais congruentes então, o paralelogramo é um retângulo*" e representar com a figura ao lado:





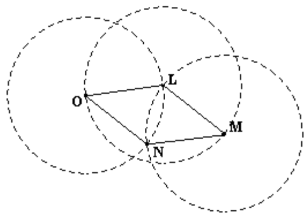
Atividade 08: Conjeturando e demonstrando propriedades de um losango (pode usar um software de geometria dinâmica)

a) Explique como você faria a construção de um quadrilátero *LMNO* cujos lados são congruentes. Faça a construção usando o seu procedimento.
b) É possível construir outro quadrilátero com lados congruentes, mas com ângulos diferentes do que você construiu no item (a)? Construa.
c) Qual é o tipo (nome) deste quadrilátero?
d) Construa as diagonais desses quadriláteros. Meça o ângulo formado por elas.
e) Enuncie este resultado na forma de um teorema do tipo *"se ... então"*.
f) Demonstre esse teorema.

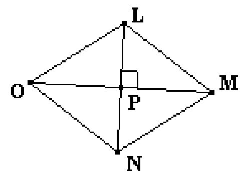
g) Explique como você construiria um paralelogramo *RSTU* cujas diagonais são perpendiculares. Faça a construção. *RSTU* é um losango? Demonstre a sua resposta.

Objetivo: construir um losango com régua e compasso, fazer conjeturas e demonstrar as principais propriedades do losango, enunciar teoremas recíprocos e utilizar a linguagem natural escrita para descrever os passos da construção geométrica de um losango a partir de suas diagonais.

Comentários: para construir um losango traçamos um segmento *LM* que representará um dos
Lados do quadrilátero. Por uma de suas extremidades traçamos outro segmento, por exemplo *LO*, com a mesma medida. Para isso basta traçar a circunferência de centro em *L* e raio $\overline{LM}$ e nela tomar o ponto *O*. Traçando a circunferência de



centro *O* e raio $\overline{OL}$ e a circunferência de centro em *M* e raio $\overline{ML}$ obtemos o ponto *N* na interseção das duas circunferências.
O polígono *LMNO* é o quadrilátero procurado.
A partir dessa construção podemos observar que é possível construir outro quadrilátero com lados congruentes, mas com ângulos diferentes, para isso basta mudar o ângulo formado pelos dois primeiros segmentos traçados.



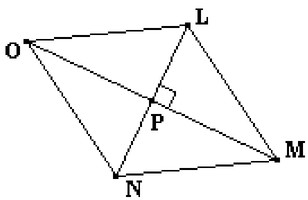
O quadrilátero construído é um losango e traçando suas diagonais podemos perceber que suas diagonais são perpendiculares e enunciar e demonstrar o teorema: *se o paralelogramo LMNO é um losango, então suas diagonais são perpendiculares.*

Se temos $\overline{LM} \equiv \overline{MN}$ então *M* é um ponto da mediatriz de $\overline{LN}$ e se $\overline{NO} \equiv \overline{OL}$ então *O* é um ponto da mediatriz de $\overline{LN}$.
Logo $\overline{LN} \perp \overline{OM}$.

Institucionalização 5

Enunciado em linguagem natural da propriedade	Interpretação em linguagem figural	Interpretação em linguagem matemática
Todo losango tem diagonais perpendiculares		
Todo paralelogramo que tem diagonais perpendiculares é um losango.		

Comentários: na <u>primeira linha</u> da tabela, a partir do enunciado em linguagem natural podemos representar a figura abaixo:



E escrever em linguagem matemática que temos: <u>Hipótese</u>: *LMNO* é losango. <u>Conclusão</u>: $\overline{LN} \perp \overline{MO}$. Na <u>segunda linha</u>, da mesma forma, podemos ter a mesma figura e em linguagem matemática escrever que: <u>Hipótese</u>: *LMNO* é um paralelogramo com $\overline{LN} \perp \overline{MO}$.
<u>Conclusão</u>: *LMNO* é um losango.

Atividade 09: conjeturando e demonstrando propriedades de um quadrado

a) Explique como você construiria um quadrilátero plano *UVWZ* que possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes. Faça a construção.

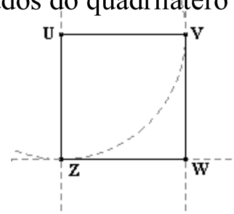
b) Que quadrilátero é esse?

c) Construa as diagonais de *UVWZ*. Elas são perpendiculares? Elas são congruentes? Demonstre sua resposta.

d) Explique como você construiria um paralelogramo *RSTU* cujas diagonais são perpendiculares e congruentes. Faça a construção. *RSTU* é um losango? É um quadrado? Por quê?

Objetivo: construir um quadrado com régua e compasso, fazer conjeturas e demonstrar que as diagonais do quadrado são perpendiculares e congruentes, utilizar a linguagem natural escrita para descrever os passos da construção geométrica de um quadrado a partir de suas diagonais e perceber que o quadrado também é um losango e um retângulo.

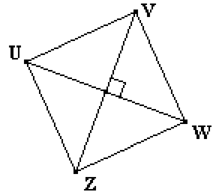
Comentários: se o quadrilátero tem os quatro ângulos congruentes então todos são retos, pois, a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360^0. Podemos obter essa construção traçando o segmento *UV* que representa um dos lados do quadrilátero e por suas extremidades traçamos duas perpendiculares à $\overline{UV}$. Com a circunferência com centro em *U* e raio $\overline{UV}$ determinamos o ponto *Z* na interseção dessa circunferência com a perpendicular que passa por *U*. Traçando por *Z* uma paralela à *UV* obtemos o ponto *W* na interseção desta com a perpendicular que passa por *V*. Podemos observar também que as diagonais são perpendiculares pois *UVWZ* é um losango e que são também congruentes pois *UVWZ* é um retângulo.



Institucionalização 6

Enunciado em linguagem natural da propriedade	Interpretação em linguagem figural	Interpretação em linguagem matemática
Todos os quadrados têm diagonais perpendiculares e congruentes.		

Comentários: podemos completar a tabela acima com a seguinte figura:



e com o enunciado em linguagem matemática:
Hipótese: *UVWZ* é quadrado.
Conclusão: $\overline{UW} \perp \overline{VZ}$ e $\overline{UW} \equiv \overline{VZ}$.

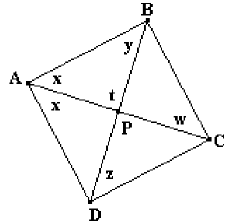
Familiarização
Exercício 1

a) Mostre que as condições dadas em cada item são suficientes para que o quadrilátero *ABCD* seja do tipo indicado.
b) Enuncie cada afirmação na forma de um teorema do tipo *"se ... então"* .

- Paralelogramo – Diagonais cortando-se ao meio.
- Retângulo – Paralelogramo com um ângulo reto.
- Losango – Diagonais bissetrizes dos ângulos internos.

Comentários: paralelogramo: *Se as diagonais do quadrilátero ABCD se cortam ao meio, então ABCD é um paralelogramo. (demonstrado em 6g, parte B)*
Retângulo: *Se um paralelogramo tem um ângulo reto, então é retângulo.*
Demonstração:
Se o paralelogramo tem um ângulo reto, então tem dois, pois, no paralelogramo os ângulos opostos são congruentes. Sabemos também, que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º. Como já temos dois ângulos opostos retos, os outros dois também são retos pois são iguais e somam 180º.
Losango: *Se as diagonais do quadrilátero ABCD são bissetrizes dos seus ângulos internos, então ABCD é um losango.*
Demonstração: O desenho ao lado, representa um quadrilátero em que a diagonal $\overline{AC}$ é bissetriz dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$, e a diagonal $\overline{BD}$ é bissetriz dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$.
Tomando $med(\hat{A}) = 2x$, $med(\hat{B}) = 2y$, $med(\hat{C}) = 2w$ e $med(\hat{D}) = 2z$ temos:

no triângulo *ABC*: $x+2y+w=180^0$ (I),



no triângulo *ADC*: $x+w+2z=180^0$ (II),

no triângulo *ABD*: $2x+y+z=180^0$ (III) e

no triângulo *CBD*: $y+2w+z=180^0$ (IV).

Subtraindo a equação (II) da equação (I) obtemos $y=z$ e concluímos que $\hat{B}\equiv\hat{D}$ e subtraindo a equação (IV) da equação (III) obtemos $x=w$ e concluímos que $\hat{A}\equiv\hat{C}$.

Como os ângulos opostos são congruentes, *ABCD* é um paralelogramo o que nos garante que $med(\hat{A})+med(\hat{B})=180^0$ e portanto $x+y=90^0$. No triângulo *ABP* temos $x+y+t=180^0$ o que nos garante com o resultado anterior que $t=90^0$ e nos leva a concluir que $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$. Ora, se *ABCD* é um paralelogramo com diagonais perpendiculares então *ABCD* é um losango.

Exercício 2[16]

- Dobre uma folha retangular duas vezes, paralelamente às duas bordas.
- Dobre o retângulo obtido, depois das duas primeiras dobras, ao longo da diagonal que não contém as pontas da folha original.
- Abra o papel e risque com régua, as marcas da última dobra. A respeito da figura contornada, responda:

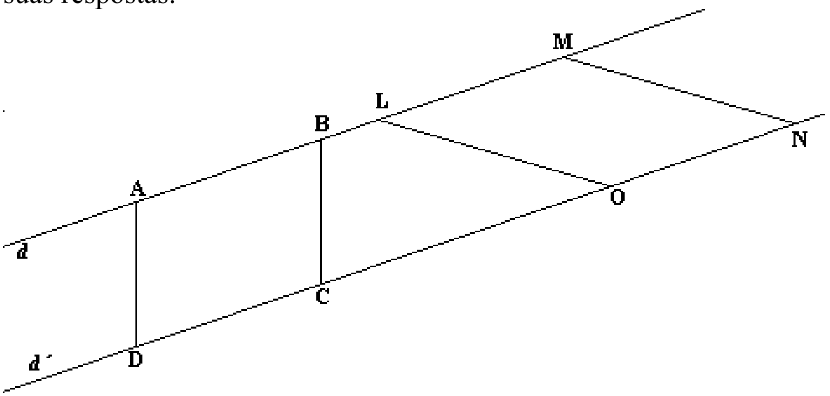
a) Que tipo de figura é essa? Por quê?
b) Qual a relação entre as diagonais dessa figura e as dimensões do retângulo original?
c) Qual a relação entre os oito triângulos formados pelas dobras?
d) Qual a relação entre as áreas do retângulo inicial e a do losango formado?
e) Você pode garantir que todo losango pode ser inscrito num retângulo? Como?

[16] Baseado em atividades do Projeto Fundão/UFRJ.

Comentários: na dobradura realizada a figura contornada é um losango por que todos os lados são congruentes, podemos observar nessa figura que sua diagonal maior é congruente ao maior lado do retângulo original e a diagonal menor é congruente ao menor lado. O losango obtido está dividido em oito triângulos congruentes e sua área é metade da área do retângulo inicial. Essa construção nos permite visualizar uma forma de inscrever um losango em um retângulo: basta traçar pelos vértices do losango, segmentos paralelos às diagonais.

Exercício 3

Os paralelogramos *ABCD* e *LMNO* abaixo são tais que *AB* = *LM*. Os dois paralelogramos têm a mesma área? E o perímetro? Justifique suas respostas.



Comentários: podemos inferir que se *ABCD* é um paralelogramo então as retas d e d´ são paralelas o que nos garante que os dois paralelogramos têm mesma altura. Como *AB* = *LM* podemos concluir que os dois têm mesma área. No entanto, eles não têm o mesmo perímetro porque na figura *LO* > *BC*.

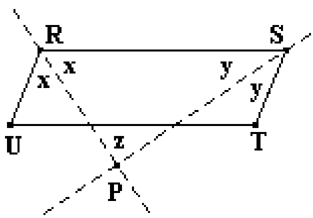
Exercício 4

Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações abaixo. Se for verdadeira, prove. Se for falsa, mostre um contra-exemplo.

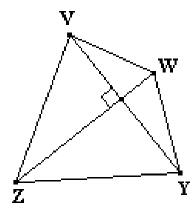
a) Todo quadrilátero tem os lados opostos paralelos.
b) Todo quadrado é um losango.
c) Todo quadrilátero tem os lados opostos congruentes.

d) Num paralelogramo *RSTU*, a diagonal $\overline{RT}$ é a bissetriz do ângulo $U\hat{R}S$.
e) As bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são perpendiculares.
f) Todo quadrilátero cujas diagonais são perpendiculares é um losango.
g) Todo quadrilátero cujas diagonais são congruentes é um quadrado.

Comentários:
No item (e) podemos provar que a afirmação é verdadeira, considerando a figura ao lado, que representa o paralelogramo RSTU em que $med(\hat{R}) = 2x$ e $med(\hat{S}) = 2y$.



Já sabemos que, no paralelogramo, os ângulos $\hat{R}$ e $\hat{S}$ são suplementares, isto é $med(\hat{R}) + med(\hat{S}) = 2x + 2y = 180^o$ o que nos garante que $x + y = 90^0$. Chamando de *P* o ponto de interseção das bissetrizes podemos observar que no triângulo *RSP* temos $x + y + z = 180^0$ que juntamente com o resultado anterior nos leva a concluir que $z = 90^0$ e que, portanto as bissetrizes são perpendiculares.
No item (f) podemos garantir que a afirmação é falsa mostrando a figura ao lado como um contra-exemplo, nela temos um quadrilátero com diagonais perpendiculares que não é um losango.



O mesmo podemos fazer no item (g), apresentando um retângulo que tem diagonais congruentes e no entanto não é um quadrado.

Exercício 5
Justifique as afirmações:
Para demonstrar que um quadrilátero é um:
a) **Retângulo**, basta mostrar que é um paralelogramo que tem um ângulo reto.

b) **Losango**, basta mostrar que um paralelogramo que tem dois lados consecutivos congruentes.
c) **Quadrado**, basta mostrar que é um losango com um ângulo reto.

Comentários: considerando as definições dadas para retângulo, losango e quadrado podemos dizer que um ângulo reto não garante que o paralelogramo seja um retângulo, que ter dois lados consecutivos congruentes não garante que o quadrilátero seja um losango, o mesmo acontecendo para o quadrado, podemos ter um losango com um ângulo reto que não é quadrado.

Exercício 6

Escreva, para cada uma das seguintes frases, sua recíproca, e diga se a frase inicial é verdadeira, bem como sua recíproca:

a) Se $\overline{AB} // \overline{CD}$, então $ABCD$ é um trapézio.

b) Se um quadrilátero é um paralelogramo, então suas diagonais se interceptam.

c) Se as diagonais de quadriláteros interceptam-se nos seus pontos médios, então esse quadrilátero é um losango.

d) Se os quatros lados de um quadrilátero têm mesmo medida, então esse quadrilátero é um losango.

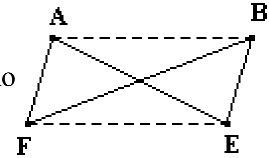
e) Se um quadrilátero tem suas diagonais perpendiculares, então é um losango.

f) Se $AB = EF$ e se $\overline{AB} // \overline{EF}$, então $AEBF$ é um paralelogramo.

Comentários: devemos sempre buscar as definições e as propriedades conhecidas dos quadriláteros em estudo para justificar a veracidade ou não das afirmações. Algumas merecem alguns comentários.
No item (c) a afirmação é falsa porque o retângulo também é um quadrilátero cujas diagonais interceptam-se nos seus pontos médios, sua recíproca pode ser enunciada da seguinte forma: "s*e um quadrilátero é um losango, então suas diagonais interceptam-se nos seus pontos médios*". A afirmação verdadeira é: *Todo losango é um paralelogramo e no paralelogramo as diagonais interceptam-se nos seus pontos médios.*

No item (d) as duas informações são verdadeiras e a definição de losango nos garante isso.

No item (f) a informação é falsa e podemos mostrar o quadrilátero *AEBF* não convexo como contra-exemplo.



Exercício 7

O seguinte raciocínio está correto? Por quê? Se estiver incorreto corrija-o.

a) *ABCD* é um paralelogramo, pois ele tem dois lados $\overline{AB}$ e $\overline{\mathrm{CD}}$ paralelos.

b) *ABCD* é um paralelogramo, pois suas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{\mathrm{BD}}$ têm um ponto comum.

c) *MNPQ* é um quadrilátero cujas diagonais são perpendiculares: é um losango.

d) Um retângulo é um paralelogramo particular.

Comentários: em (a) a forma correta seria: *ABCD é um paralelogramo, pois tem lados opostos paralelos.*
Em (b) a forma correta seria: *ABCD é um paralelogramo, pois suas diagonais* $\overline{AC}$ *e* $\overline{\mathrm{BD}}$ têm como ponto comum seus respectivos pontos médios.
Finalmente, em (d) o correto seria: *O retângulo tem quatro ângulos retos, portanto tem ângulos opostos congruentes, logo, é paralelogramo.*

Exercício 8

Nos teoremas seguintes, temos mais hipóteses que necessário. Suprima-as.

a) Um paralelogramo cujas diagonais têm mesma medida e interceptam-se nos seus pontos médios é um retângulo.

b) Um quadrilátero cujas diagonais têm mesmo ponto médio, mesma medida e são mediatrizes uma para outra é um quadrado.

c) Se *O* é ponto médio de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, *OA* = *OB* = *OC* = *OD* e $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se interceptam no ponto *O*, então *ABCD* é um retângulo.

Comentários: *a) Um paralelogramo cujas diagonais têm mesma medida é um retângulo.*
b) Um quadrilátero cujas diagonais têm mesma medida e são mediatrizes uma da outra, é um quadrado.
c) Se $\overline{AC}$ *e* $\overline{BD}$ *se interceptam no ponto O e* $\overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC} \equiv \overline{OD}$*, então ABCD é um retângulo.*

Exercício 9
Sabe-se de um quadrilátero que ele tem três lados de mesmo comprimento.
Henrique diz: "*Basta que suas diagonais se interceptam nos seus pontos médios para que ele seja um losango*"
Magalhães argumentou: "*Basta que tenha com um ângulo reto para que ele seja um quadrado*".
Malan : *"Basta que o quarto lado seja o dobro de um dos três lados para que ele seja um trapézio".*
Quem acertou? Quem errou? Por quê?

Comentários: é importante levar em consideração o trabalho do aluno interpretando seus erros e propondo alternativas para a superação de suas dificuldades.

Exercício 10
ABCD é um quadrilátero plano convexo. Os pontos *I*, *J*, *K*, *L* são os pontos médios respectivos de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$.
a) Os segmentos *IJ* e *KL* são paralelos? Por quê?
b) *IJKL* é um paralelogramo? Por quê?

Exercício 11
Seja *ABCD* um retângulo tal que *AB = 2BC*, *I* ponto médio do segmento *CD* e *K* o do segmento *AB*.
a) *KI = KA = KB*? Demonstre a sua resposta.
b) As retas *AI* e *BI* são perpendiculares? Por quê?

c) *J* e *L* são os pontos médios respectivos dos segmentos *IB* e *AI*. *IJKL* é um quadrado? Por quê?
d) A reta *JL* é paralela às retas *AB* e *CD*? Demonstre a sua afirmação.

Exercício 12
Seja *ABCD* um quadrado cujas diagonais interceptam-se no ponto *O* e *E* o ponto médio do segmento *BC*.
a) Construa o quadrado *CEFG* externo. Explique o seu algoritmo de construção.
b) *OBFC* é um quadrado? Por quê?

Exercício 13
a) Construa um triângulo *ABC* , isósceles em *A*, e considere um ponto *P* sobre o segmento $\overline{BC}$.
b) Construa a reta por *P* paralela à reta *AB*: ela intercepta a reta *AC* em *N*.
c) Construa a reta por *P* paralela à reta *AC*: ela intercepta a reta *AB* em *M*.
d) Compare os ângulos $B\hat{P}M$ e $B\hat{C}A$.
e) Qual é a natureza dos triângulos *BMP* e *PNC*.
f) Justifique a seguinte afirmação: "*Qualquer que seja a posição do ponto P sobre* $\overline{BC}$ *, o perímetro do paralelogramo AMPN é igual a AB + AC*".

Comentários: as situações propostas envolvem três aspectos importantes da geometria: visualização, construção geométrica e demonstração. Mesmo que a construção conduza à visualização, ela é um processo que depende somente da conexão entre as propriedades matemáticas e as técnicas de construção. A visualização é um auxílio intuitivo, às vezes necessário para encontrar a demonstração e esta, por sua vez, depende exclusivamente do conjunto de proposições (definições, axiomas e teoremas) envolvidas na situação.
Essas atividades envolvem também as possíveis interpretações das figuras. No sentido da compreensão da seqüência de orientações solicitada nas tarefas de construção ou nas tarefas de descrição com o objetivo de produzir uma figura; da interpretação das formas da figura em uma situação geométrica; da interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando a articulação dos enunciados e das

modificações possíveis de uma figura e a percepção das reorganizações que essas modificações sugerem.

PARA LER: QUADRILÁTEROS

Consideramos os quadriláteros um assunto pedagogicamente muito rico, pois ao enfocá-los, podemos explorar pontos importantes para a geometria de um modo geral. Por exemplo: paralelismo, perpendicularismo, construção com régua e compasso, definições, propriedades, classificação de acordo com as propriedades, conjecturas, teorema, teorema recíproco e demonstrações.

Encontramos nos livros didáticos, definições diferentes para quadrilátero. Autores que o definem como uma união de segmentos e autores que definem como uma região limitada por segmentos. No primeiro caso, ao se tratar de "área de quadrilátero" mais adiante, devemos deixar claro, que esta área diz respeito à superfície formada pela união do quadrilátero com o seu interior.

Existem em Educação Matemática, pesquisas sobre as transformações sofridas pelo saber desde a academia até ser ensinado nas escolas. Procuramos saber qual definição é adotada por pesquisadores. Constatamos que no livro: Geometria Euclidiana Plana, de João Lucas Marques Barbosa editado pela Sociedade Brasileira de Matemática, o quadrilátero considerado como união de segmentos. Por esse motivo, também adotaremos esta definição.

Segundo suas propriedades, os quadriláteros podem ser classificados de várias formas. Se observarmos a convexidade, podemos classificá-los em dois conjuntos: os quadriláteros convexos e os não convexos. Se observarmos a quantidade de lados paralelos, teremos aqueles que não apresentam lados paralelos, os que apresentam apenas um par de lados paralelos e os que têm dois pares de lados paralelos.

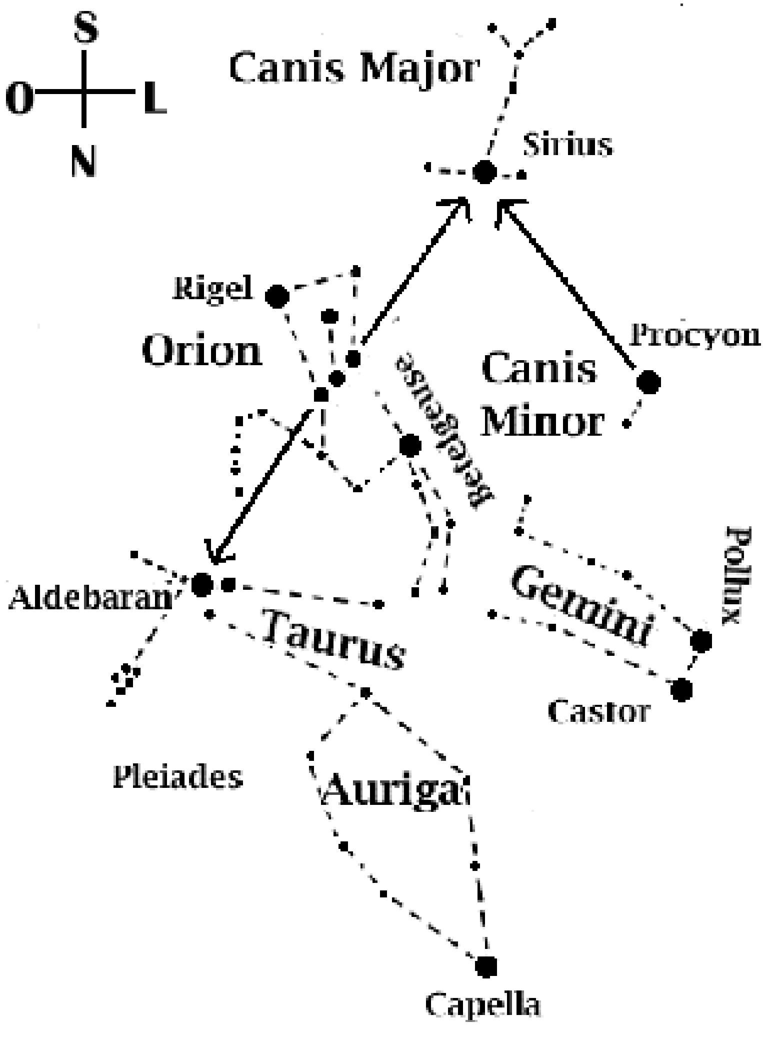
Encontramos autores que definem por trapézio, o quadrilátero que tem um par de lados paralelos e autores que definem por trapézio, o quadrilátero que tem apenas um par de lados paralelos. As implicações de cada uma destas definições são discutidas no decorrer das atividades deste trabalho. Os quadriláteros que não apresentam lados paralelos são chamados por alguns autores de trapezóides. Neste trabalho, chamá-los-emos por quadriláteros quaisquer.

Vejamos agora, apenas como curiosidade, algumas situações em que o termo quadrilátero é empregado.

Constelações

Constelações são agrupamentos *aparentes* de estrelas os quais os astrônomos da antiguidade imaginaram formar figuras de pessoas, animais ou objetos. As constelações nos ajudam a separar o céu em porções menores, mas identificá-las é em geral muito difícil.

Uma constelação fácil de enxergar é Órion, como é vista no hemisfério sul. Para identificá-la devemos localizar 3 estrelas próximas entre si, de mesmo brilho, e alinhadas. Elas são chamadas Três Marias, e formam o cinturão da constelação de Órion, o caçador. Seus nomes são Mintaka, Alnilan e Alnitaka. A constelação tem a forma de um quadrilátero com as Três Marias no centro. O vértice nordeste do quadrilátero é formado pela estrela avermelhada Betelgeuse, que marca o ombro direito do caçador. O vértice sudoeste do quadrilátero é formado pela estrela azulada Rigel, que marca o pé esquerdo de Órion. Estas são as estrelas mais brilhantes da constelação. Como vemos, no hemisfério Sul Órion aparece de ponta cabeça. Segundo a lenda, Órion estava acompanhado de dois cães de caça, representadas pelas constelaçõs do Cão Maior e do Cão Menor. A estrela mais brilhante do Cão Maior, Sírius, é também a estrela mais brilhante do céu, e é facilmente identificável a sudeste das Três Marias. Procyon é a estrela mais brilhante do Cão Menor, e aparece a leste das Três Marias. Betelgeuse, Sírius e Procyon formam um grande triângulo, como pode ser visto no esquema abaixo.


S
O
L
N
Canis Major
Sirius
Rigel
Orion
Betelgeuse
Procyon
Canis
Minor
Aldebaran
Taurus
Gemini
Pollux
Castor
Pleiades
Auriga
Capella

Pesca artificial

Executado pelo Instituto ECOPLAN e coordenado cientificamente pelo Centro de Estudos do Mar - CEM/ UFPR, este Programa visa a colocação de estruturas pré-fabricadas de concreto com o objetivo de atrair peixes e organismos marinhos, criando ecossistemas artificiais semelhantes aos substratos rochosos, beneficiando as atividades de mergulho, pesca esportiva e profissional, contribuindo para a conservação da biodiversidade e dos recursos pesqueiros através da criação de áreas de proteção.

O programa realiza também estudos pilotos sazonais da plataforma paranaense para caracterização ambiental e escolha dos melhores locais para colocação dos recifes artificiais. Na construção dos sistemas de recifes artificiais foram utilizadas estruturas quadriláteras de concreto, com objetivo de proteger os recifes mais delicados contra as redes de arrasto.

Com autorização do Ministério da Marinha e apoio operacional da Capitania dos Portos do Estado do Paraná e de mergulhadores profissionais da APASUB foram lançados os primeiros trinta e um blocos quadriláteros de concreto (ao lado), pesando 850 Kg cada, em três pontos selecionados. O sucesso da operação atestou a viabilidade de assentamento dos recifes artificiais.

Minas Gerais

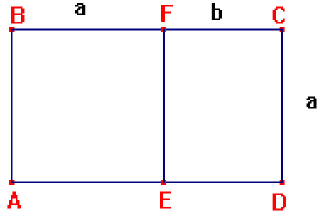
Prolongando a Mantiqueira na direção centro-leste do Estado de Minas Gerais, destaca-se um bloco elevado correspondente ao chamado Quadrilátero Ferrífero, com altitudes mais elevadas nas serras do Ouro Branco, de Itabira, do Curral e da Moeda.

O Quadrilátero Ferrífero, situado a sudeste de Belo Horizonte, é caracterizado pela abundância de elementos químicos como o ferro, o ouro, o manganês, o urânio e o alumínio. A extração mineral responde por parte considerável de sua atividade econômica. A importante ocorrência desses elementos pode ser explicada pela história geológica da região.

O retângulo áureo

Um quadrilátero muito utilizado por artistas e arquitetos é o retângulo áureo, considerado como o retângulo mais bem proporcionado e de grande valor estético.

Encontramos no artigo "Retângulo áureo, divisão áurea e seqüência de Fibonacci", de Geraldo Ávila, publicado na revista do professor de matemática n.6, o seguinte texto: *"Chama-se **retângulo áureo** qualquer retângulo ABCD com a seguinte propriedade: se dele suprimirmos um quadrado, como ABFE, o retângulo restante, CDEF, será semelhante ao retângulo original. Se $a+b$ e a são os comprimentos dos lados do retângulo original, a definição acima se traduz na relação:* $\frac{a}{a+b}=\frac{b}{a}$.



O retângulo áureo[17] exerceu grande influência na arquitetura grega. As proporções do Partenon prestam testemunho desta influência. Construído em Atenas no século V a.C., o Partenon é considerado uma das estruturas mais famosas do mundo. Quando seu frontão triangular ainda estava intacto, suas dimensões podiam ser encaixadas quase exatamente em um retângulo áureo.

O campo de visão dos dois olhos do ser humano, independente da distância dos olhos até o objeto observado é um retângulo na relação áurea. Os quadros pintados a partir da Idade Média, quase todos eles, têm a relação áurea.
Aparelhos de TV e monitores de computador têm aproximadamente a relação áurea entre altura e largura da tela.

[17] Fonte: http://www.inf.ufrgs.br/~cabral/goldenNumer.html

8 SEMELHANÇA DE FIGURAS

Atividades

Apresentar uma seqüência didática, em que se usa tanto a régua e o transferidor quanto o software, que permita ao aluno uma reflexão do que é variante e invariante nas figuras semelhantes, desenvolvendo o conceito de figuras semelhantes e aplicá-lo em situações diversas e em atividades que propiciem a compreensão do Teorema de Thales.

Atividade 01: utilizando régua e transferidor[18]

As figuras abaixo são ampliação e redução do desenho da figura 1 abaixo, via máquina copiadora. Meça os lados e os ângulos tanto da figura abaixo como também de sua ampliação e de sua redução. A seguir, responda:

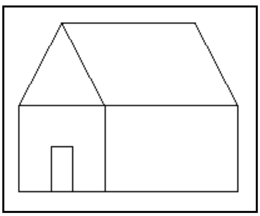
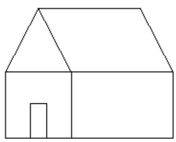
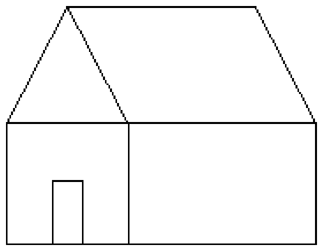


Figura 1





a) O que ocorreu com os ângulos quando a figura foi ampliada (houve variação)?
E quando a figura foi reduzida?
b) Calcule a razão entre a medida dos lados de cada figura com a medida dos lados correspondentes na ampliação e na redução.
c) Ampliando ou reduzindo as figuras, o que ficou invariante?
d) O que variou?

Objetivo: perceber que ao se ampliar ou se reduzir uma figura na máquina copiadora os ângulos permanecem congruentes e a medida dos lados proporcionais.

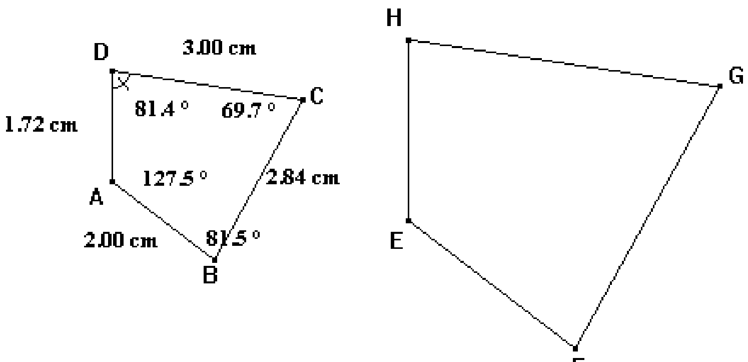
[18] Atividades inspiradas na dissertação de mestrado *Teorema de Thales: uma abordagem do processo ensino aprendizagem*. Nancy C. A Haruna. PUC-SP/2000.

Comentários: com essa atividade espera-se começar a entender o que é variante e o que é invariante nas figuras semelhantes, para a seguir, com as demais atividades desenvolvidas com um software formar, de fato, o conceito da semelhança de figuras planas.

Atividades para serem desenvolvidas no laboratório utilizando um software de geometria dinâmica

As atividades 2, 3 e 4, são atividades caixa preta, em que os arquivos foram elaborados utilizando-se um mesmo quadrilátero *ABCD* como referência e, um outro quadrilátero, que foi construído em cada arquivo de modo diferente. O objetivo dessas atividades é analisar essas construções observando o que é variante ou invariante ao se ampliar ou reduzir o quadrilátero construído.

Atividade 02: analisando primeira construção



Obs: Quatro segmentos são proporcionais se os números que exprimem suas medidas, na mesma unidade, formam uma proporção.

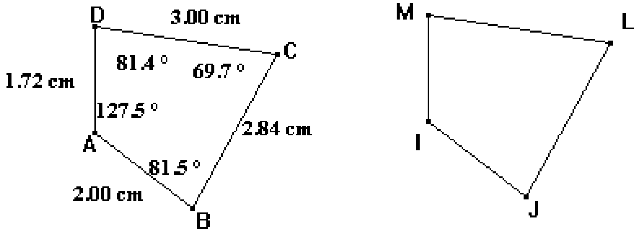
Abrindo o arquivo **mod_08_semel_01** você encontrará os quadriláteros *ABCD* e *EFGH*. Movendo o ponto *H* pode-se ampliar ou reduzir a área da superfície do quadrilátero *EFGH*, sem modificar as medidas do quadrilátero *ABCD*. Meça os lados e ângulos destes quadriláteros, observe estes valores e responda.

a) Deslocando o ponto *H* o quadrilátero *EFGH* mantém a mesma forma, ou seja, a mesma aparência em relação ao quadrilátero *ABCD* ou ele se deforma?
b) O que você observa com relação aos ângulos internos desses quadriláteros?
c) Deslocando o ponto *H*, o que você observou no item anterior continua válido?
d) Desloque o ponto *H* até que *EF* fique o dobro de *AB*. Observe e escreva que relação existe entre as outras medidas dos lados do quadrilátero *ABCD* com relação ao quadrilátero *EFGH*, ou seja, *AB* =......... *EF*, *AD* = ……. *EH*, *BC* = …. *FG*, *CD* = ……. *GH*.
e) Será que deslocando o ponto *H* em qualquer posição a razão entre as medidas dos lados correspondentes de um dos quadriláteros com relação ao outro se mantêm constante, ou seja, os lados correspondentes são proporcionais?
Nesse caso, os lados correspondentes são: *AB* e *EF*, *AD* e *EH*, *BC* e *FG*, *CD* e *GH*. Utilizando a calculadora do software determine e registre as razões entre os lados correspondentes. Deslocando o ponto *H* verifique o que ocorre com as razões.

1ª Posição					
AB		*EF*		*AB/EF*	
BC		*FG*		*BC/FG*	
CD		*GH*		*CD/GH*	
DA		*HE*		*DA/HE*	
2ª Posição					
AB		*EF*		*AB/EF*	
BC		*FG*		*BC/FG*	
CD		*GH*		*CD/GH*	
DA		*HE*		*DA/HE*	

O que podemos concluir dos quadriláteros *ABCD* e *EFGH* em relação aos lados e ângulos.

Atividade 03: analisando a segunda construção



Abrindo o arquivo **mod_08_semel_02**, você encontra os quadriláteros *ABCD* e *IJLM*. Movendo o ponto *I* desloca-se o quadrilátero *IJLM*, movendo os ponto *L* e *M* pode-se ampliar ou reduzir o quadrilátero *IJLM*. Meça os lados e ângulos destes quadriláteros e responda.

a) Os quadriláteros *ABCD* e *IJLM* têm a mesma forma, ou seja, a mesma aparência?

Deslocando os pontos *I*, *L* e *M* o quadrilátero *IJLM* mantém a mesma aparência em relação ao quadrilátero *ABCD*? Escreva o que você observou:

b) O que você observa com relação aos ângulos internos destes quadriláteros?

c) Deslocando os pontos *I*, *L* e *M*, o que você observou no item anterior continua válido?

d) Deslocando os pontos *L* e *M* , existe alguma relação entre os lados correspondentes *AB* e *IJ*, *AD* e *IM*, *BC* e *JL*, *CD* e *LM*?

Se achar necessário pode verificar se os lados são proporcionais.

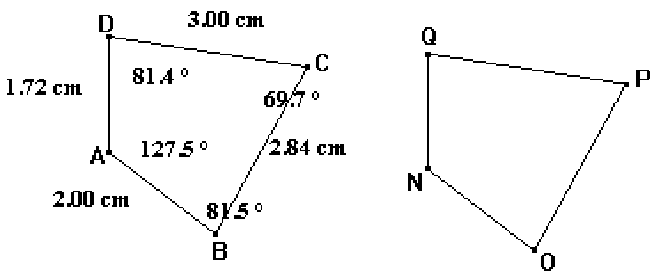
Desloque o ponto *L* e *M*, fixe uma posição, utilizando a calculadora do software calcule e registre as razões entre as medidas dos lados correspondentes e faça uma análise. Repita isso para uma outra posição.

1ª Posição					
AB		*IJ*		*AB/IJ*	
BC		*JL*		*BC/JL*	
CD		*LM*		*CD/LM*	
DA		*MI*		*DA/MI*	

2ª Posição					
AB		*IJ*		*AB/IJ*	
BC		*JL*		*BC/JL*	
CD		*LM*		*CD/LM*	
DA		*MI*		*DA/MI*	

O que podemos concluir dos quadriláteros *ABCD* e *IJLM* em relação aos lados e ângulos.

Atividade 04: analisando a terceira construção



Abrindo o arquivo **mod_08_semel_03**, você encontrará os quadriláteros *ABCD* e *NOPQ*. Deslocando o ponto *N* você poderá ampliar ou reduzir a área da superfície do quadrilátero *NOPQ* e deslocando o ponto *P* você mudará as medidas dos ângulos internos do quadrilátero *NOPQ*. Meça os lados e ângulos destes quadriláteros, observe estes valores e responda.a) Deslocando o ponto *N*, escreva o que você observa com relação as medidas dos dois quadriláteros ....

O quadrilátero *NOPQ* mantém a mesma forma, ou seja, a mesma aparência em relação ao quadrilátero *ABCD* ou ele se deforma? .... Deslocando o ponto *P*, o que você observa com relação a dimensão dos dois quadriláteros?

b) O que você observa com relação aos ângulos internos desses quadriláteros?

c) Deslocando os pontos *N* e *P*, o que você observou no item anterior continua válido?

d) Desloque o ponto *N* até que *NO* fique o dobro de *AB*. Observe e escreva que relação existe entre: *NO e AB, OP e BC, PQ e CD, NQ e AD* ....

e) Será que, deslocando o ponto *N* em qualquer posição, a razão entre as medidas dos lados *NO e AB*, *OP e BC*, *PQ e CD*, *NQ e AD* se mantêm constante, ou seja, os lados são proporcionais?

Você pode fazer esta verificação: desloque os pontos *N* e *P*, fixe uma posição, utilizando a calculadora do software calcule e registre as razões entre os lados correspondentes e faça uma análise. Repita isso para uma outra posição.

1ª Posição					
AB		*NO*		*AB/NO*	
BC		*OP*		*BC/OP*	
CD		*PQ*		*CD/PQ*	
DA		*QN*		*DA/QN*	

2ª Posição					
AB		*NO*		*AB/NO*	
BC		*OP*		*BC/OP*	
CD		*PQ*		*CD/PQ*	
DA		*QN*		*DA/QN*	

O que podemos concluir dos quadriláteros *ABCD* e *NOPQ* em relação aos lados e ângulos.

Atividade 05: analisando e comparando construções
Observando os quadriláteros das atividades 2, 3 e 4, responda:
- Ao "ampliar" e "reduzir" as figuras, quais delas mantiveram a medida dos lados correspondentes proporcionais?
- Ao "ampliar" e "reduzir" as figuras, quais delas mantiveram a medida dos ângulos correspondentes congruentes?
- Ao "ampliar" e "reduzir" as figuras, quais delas mantiveram a medida dos lados correspondentes proporcionais e dos ângulos correspondentes congruentes ?
- Em qual ou quais figuras, ao "ampliar" e "reduzir", as características foram as mesmas observadas nas figuras ampliadas e ou reduzidas pela máquina copiadora?

Definição: Chamamos de **figuras semelhantes** aquelas que possuem todos os ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais.

Institucionalização
Definição: Chamamos de **figuras semelhantes** aquelas que possuem todos os ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais.
Ângulos homólogos são ângulos cujos vértices se correspondem.
Lados homólogos são lados cujas extremidades são vértices que se correspondem.
Razão de semelhança é a razão entre a medida dos lados homólogos de dois polígonos semelhantes.

Complete:
Baseado nas atividades 2, 3 e 4, podemos afirmar que os quadriláteros *ABCD* e .... são semelhantes. Quando *EF* é o dobro de *AB*, a razão de semelhança entre os quadriláteros .... e *ABCD* é..............; e quando *EF* é o triplo de *AB*, a razão de semelhança entre os quadriláteros .... e *ABCD* é ....

Objetivo das atividades de 2 a 5: entender que ao ampliar ou reduzir a medida da área das superfícies das figuras, somente quando os ângulos correspondentes são congruentes e a medida dos lados proporcionais é que as figuras permanecem com a mesma forma e não sofrem deformação alguma. Essas mesmas características foram observadas na atividade 1 quando ampliamos e reduzimos as figuras por meio da máquina copiadora o que vem contribuir na formação da idéia de figuras semelhantes para a seguir, institucionalizar definindo esse conceito.
Comentários: nas três atividades iniciais, temos situações em que, ao ampliarmos ou reduzirmos a área das superfícies dos quadriláteros, seus lados são proporcionais e seus ângulos se mantêm constantes, outros que seus ângulos se mantêm constantes e seus lados não são proporcionais e uma que seus ângulos não são congruentes e seus lados são proporcionais, isso respectivamente nas atividades 2, 3 e 4. A atividade 5 é uma síntese das atividades de 1 a 4.

Atividade 06: explorando triângulos retângulos semelhantes
Abrindo o arquivo **mod_08_triret**, você encontrará alguns triângulos retângulos que podem ser movimentados por translação (ponto verde) ou por rotação (ponto azul).
Observe esses triângulos e reflita:
a) Todos esses triângulos são parecidos?
b) Parecido é o mesmo que semelhante?
c) Meça os ângulos e lados desses triângulos e complete a tabela.

Triângulos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Cateto maior							
Cateto menor							
Razão: $\dfrac{cateto\ \mathrm{maior}}{cateto\ \mathrm{menor}}$							
Ângulo agudo maior							
Ângulo agudo menor							

d) Quais dentre esses triângulos são semelhantes ....
e) Agrupe os triângulos semelhantes que você encontrou sobrepondo-os fazendo coincidir o ângulo reto.
f) Escreva o que você observou: ....

Objetivo: perceber que todos os triângulos cujos ângulos são congruentes são semelhantes, e, sobrepondo-os de modo a coincidir um de seus vértices, seus lados correspondentes possivelmente são paralelos.
Comentários: esta atividade proporciona a discussão e ruptura das idéias de que todo triângulo retângulo é semelhante, de que todo retângulo é semelhante, de que se tem a mesma forma é semelhante. Idéias estas observadas nos discursos tanto dos alunos quanto dos professores. Além disso, ao se sobrepor os triângulos retângulos semelhantes fazendo coincidir um de seus vértices (item (e) e (f)) pode-se discutir o paralelismo entre os lados e institucionalizar a idéia de figuras homotéticas como sendo as figuras semelhantes cujos lados correspondentes são paralelos.

Familiarização

Exercício 1

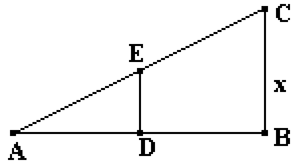
a) Dois quadrados são sempre semelhantes?
b) Dois retângulos são sempre semelhantes?
c) Dois círculos são sempre semelhantes?
d) Dois pentágonos regulares são sempre semelhantes?
e) Dois pentágonos não regulares podem ser semelhantes?
f) Um slide e a sua projeção na tela são semelhantes?

Comentários: a partir dos conhecimentos já vistos concluir que as figuras regulares de mesma espécie, como os quadrados, os círculos e os pentágonos regulares são semelhantes entre si. As figuras não necessariamente regulares, como alguns retângulos e pentágonos nem sempre serão semelhantes.

Exercício 2

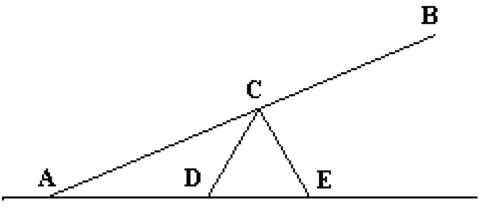
Estabelecer um procedimento para calcular a altura de um poste num dia ensolarado.

Comentários: utilizando a idéia de semelhança como estratégia de resolução e a partir do esboço ao lado em que *AB* é a medida da sombra do poste, *DE* uma estaca de comprimento conhecido, *AD* a medida da sombra da estaca perceber que os triângulos *ADE* e *ABC* são semelhantes e por isso $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{x}$.



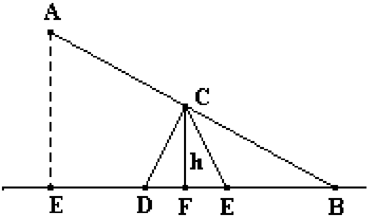
Exercício 3

Uma gangorra é formada por uma haste rígida *AB*, apoiada sobre uma mureta de concreto no ponto *C*, como na figura.

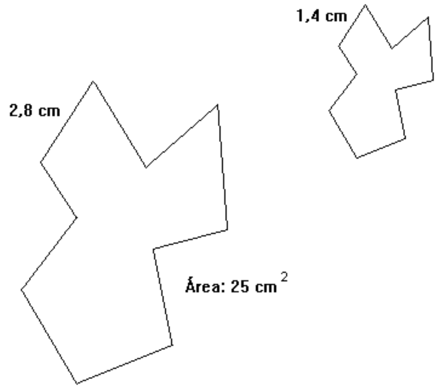


As dimensões são *AC = 1,2 m*, *CB = 1,8 m*, *DC = DE = CE = 1m*. Quando a extremidade *B* da haste toca o chão, a que altura em relação ao chão estará a extremidade *A*?

Comentários: na figura dada os triângulos semelhantes não estão nitidamente representados, o que dificulta a percepção do caminho de resolução. Esboçando a situação e observando que os triângulos *CFB* e *AEB* são semelhantes precisamos encontrar $h \cong 0{,}87$ (altura do triângulo *DCE*) e com ela montar a proporção $\frac{1{,}8}{0{,}87} = \frac{3}{AE}$.

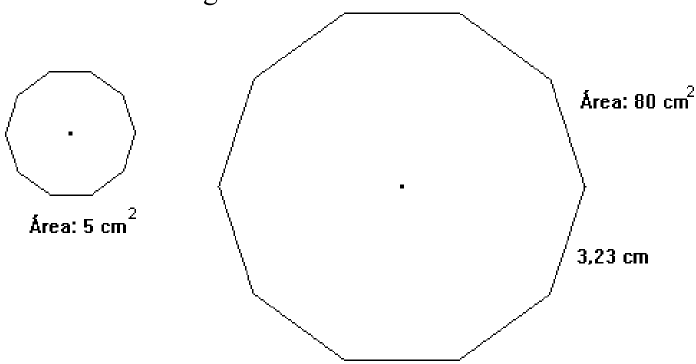


Exercício 4
Os polígonos ao lado são semelhantes. A medida da área da superfície do segundo é 25 cm^2. Dois segmentos correspondentes medem 1,4 cm e 2,8 cm. Obter a medida da área da superfície do primeiro polígono.



Comentários: não é evidente para os alunos que a razão entre as medidas dos lados e a razão entre as medidas das áreas de duas figuras semelhantes não sejam iguais. É necessário que percebam que se $\frac{1,4}{2,8} = \frac{1}{2}$ então $\frac{A_1}{25} = \frac{1}{4}$.

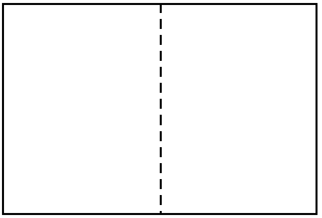
Exercício 5
As superfícies dos decágonos regulares ao lado têm medidas de áreas de 5 cm^2 e 80 cm^2. O lado do decágono maior mede 3,23 cm. Obter a medida do lado do decágono menor.



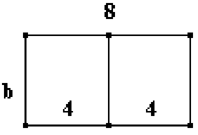
Comentários: nesta questão procurou-se trabalhar com a reversibilidade do pensamento da atividade anterior. No enunciado não está explícito que o conhecimento em jogo é a semelhança de figuras, tal fato deve ser entendido na informação de que os decágonos são regulares. Aplicando a noção de que a razão entre as medidas de dois lados correspondentes equivale a raiz quadrada da razão entre as medidas da área de suas superfícies.

Exercício 6

Um tipógrafo deseja fazer um cartão de comprimento 8 cm. Qual deve ser a largura do cartão de modo que, ao dobrá-lo ao meio, como na figura abaixo, ele conserve a mesma forma?

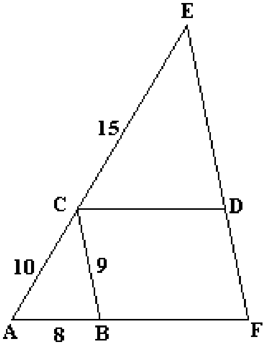


Comentários: como a semelhança não está explícita no enunciado e os retângulos semelhantes não estão na mesma posição, é necessário perceber que $\frac{8}{b} = \frac{b}{4}$. Em que $b = 4\sqrt{2} \equiv 5{,}7$ a partir do esboço ao lado.



Exercício 7

Se os triângulos *ABC* e *CDE* são semelhantes, quais as medidas de $\overline{DE}$ e $\overline{CD}$?

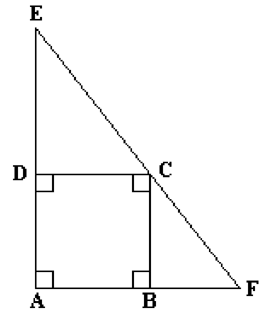


Comentários: descobrindo que as figuras úteis na resolução do problema (triângulos *ECD* e *CAB*) estão sobrepostas numa outra figura (triângulo *AEF*) que destaca um paralelogramo que não é necessário à resolução, temos que os triângulos *ECD* e *CAB* são semelhantes e, portanto $\frac{ED}{9} = \frac{15}{10} = \frac{CD}{8}$

Exercício 8

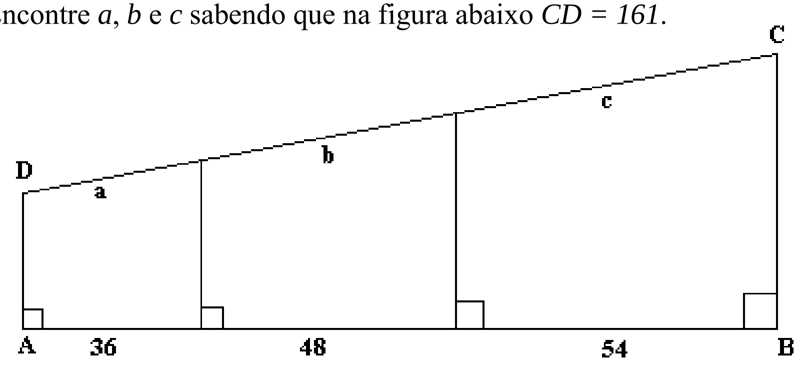
Sabendo que o quadrilátero *ABCD* é um quadrado e que *AE = 18* e *AF = 12*, determine o seu perímetro.

Comentários: a partir da solução do exercício anterior fica fácil perceber que se o lado do quadrado mede *x* e os triângulos *EDC* e *CBF* são semelhantes temos a proporção $\frac{18-x}{x} = \frac{x}{12-x}$ em que $x = 7{,}2$.



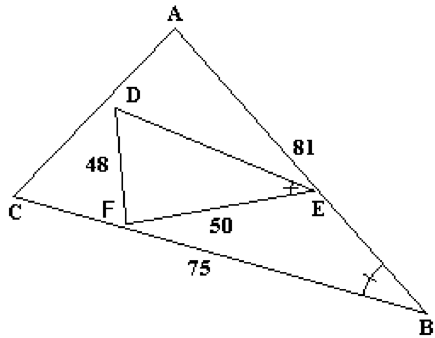
Exercício 9

Encontre *a*, *b* e *c* sabendo que na figura abaixo *CD = 161*.



Comentários: temos que perceber a sobreposição dos quadriláteros menores sobre o quadrilátero *ABCD* e a partir da semelhança das figuras obter as proporções $\frac{a}{a+b} = \frac{36}{36+48}$, $\frac{a}{161} = \frac{36}{138}$.

Exercício 10
Sabendo que o triângulo *ABC* é semelhante ao triângulo *DEF* determine a soma dos perímetros dos dois triângulos.



Comentários: O enunciado envolve o conceito de semelhança entre triângulos, isto é, há congruência entre o enunciado e o tratamento matemático, embora para a apreensão da figura faz-se necessário visualizar uma reflexão do triângulo *DEF* sobre o lado *DE*, para facilitar a percepção dos lados correspondentes.

9 TEOREMA DE THALES

Atividades[19]

Apresentar uma seqüência didática que permita ao aluno apreender o Teorema de Thales, observando-o sob três pontos de vista diferentes aplicando-o em diversas situações utilizando tanto os instrumentos de desenho quanto um software de geometria dinâmica.

Parte 1: relações entre paralelismo e proporcionalidade

Definição 1: Chamamos de razão entre dois números reais *a* e *b*, não nulos, o número real $\frac{a}{b}$.

Definição 2: Se a razão entre os números *a* e *b* é igual à razão entre os números *m* e *n* definimos essa igualdade como uma proporção e indicamos por: $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.

Propriedade Fundamental das Proporções: Em toda proporção se $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ ou $a : b :: m : n$ (notação de Euclides) então $a \cdot n = b \cdot m$, isto é o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Atividade 01: analisando reta paralela a um dos lados de um triângulo

Exercício 1

a) Construa um triângulo qualquer *ABC*, e determine um ponto *D* sobre o segmento *AC***.**

b) Passando por *D*, trace uma reta paralela à $\overline{BC}$, que corte a reta *AB* em *E*.

c) Desloque os pontos e verifique se a figura que você construiu permanece com as características dadas no enunciado.

d) Meça os segmentos: *AD, AC, AE, AB, DE e BC.*

---

[19] Atividades inspiradas na dissertação de mestrado *Teorema de Thales: uma abordagem do processo ensino aprendizagem*. Nancy C. A Haruna. PUC-SP/2000.

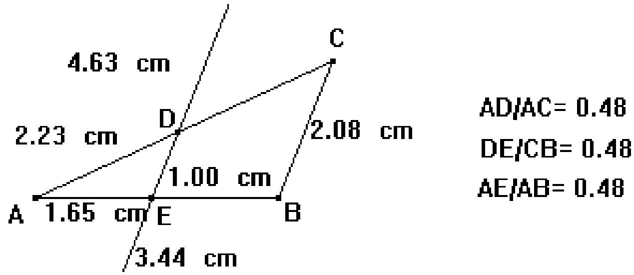
e) Anote as medidas: AB = ..., BC = ..., AC = ...
Não desloque mais os pontos A, B e C.

f) Altere a posição do ponto D sobre $\overline{AC}$ e preencha a tabela abaixo, calculando as razões.

Posição de D	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
AE						AE/AB					
DE						*DE/BC*					
AD						*AD/AC*					

Exercício 2: exploração
a) Ao traçar a reta paralela, quantos e quais triângulos você formou?
b) Se o ponto D estiver no meio de $\overline{AC}$, qual é o valor do quociente AD/AC ?
c) Em cada posição, as razões têm o mesmo valor?
d) Esses triângulos são semelhantes? Justifique.
e) Quais as proporções que podemos obter com as diferentes medidas na tabela?
f) Enuncie alguma relação entre a paralela a um dos lados do triângulo e os outros lados.

Objetivo: conjeturar que *"toda reta paralela a um dos lados de um triângulo, não passando por um de seus vértices, divide os outros dois lados em segmentos proporcionais"*. Essa propriedade poderá ser justificada pela semelhança dos triângulos formados ao traçar a reta paralela.
Comentários: a figura abaixo representa uma das configurações que se pode obter. Como são várias as soluções possíveis de serem encontradas, fica difícil descrevê-las, porém as conclusões encontradas deverão ser equivalentes, se a construção for feita adequadamente.



Nessa atividade, para não se ter problema com a construção, deve-se sempre: nomear os pontos para facilitar a identificação caso haja alguma ambigüidade; estar atentos na determinação do ponto *D*, usando a opção ponto sobre objeto; na paralela, fazer a construção e não simplesmente criar a reta aparentemente paralela.
Ao construir a situação proposta, cada um poderá representar a paralela em uma posição. Essa posição vai ser conseqüência de como foram nomeados os vértices do triângulo.

Atividade 02: explorando nas figuras relações de proporcionalidade

a) Tome três pontos, não colineares, *A*, *B* e *C* e trace as retas *AC* e *AB* e o segmento *BC* .

b) Determine um ponto *D* sobre a reta *AB* e por ele trace uma paralela à reta *BC*. Nomeie o ponto de intersecção desta reta com a reta *AC* de *E*.

c) Determine as medidas dos segmentos *AD*, *AE, DE*, *AB, AC, BC.*

d) Desloque o ponto *D* e represente as possíveis configurações em uma folha de papel sulfite anotando as medidas em cada uma.

e) Para cada configuração, os triângulos formados *ADE* e *ABC* são semelhantes?

f) Verifique em cada configuração quais são os lados correspondentes e complete a tabela de forma que os lados correspondentes fiquem associados nas colunas. A seguir, calcule a razão entre a medida dos segmentos correspondentes.

Triângulo ABC	AB =	AC =	BC =
Triângulo ADE	=	=	=
Razão			

Triângulo ABC	AB =	AC =	BC =
Triângulo ADE	=	=	=
Razão			

Triângulo ABC	AB =	AC =	BC =
Triângulo ADE	=	=	=
Razão			

Triângulo ABC	AB =	AC =	BC =
Triângulo ADE	=	=	=
Razão			

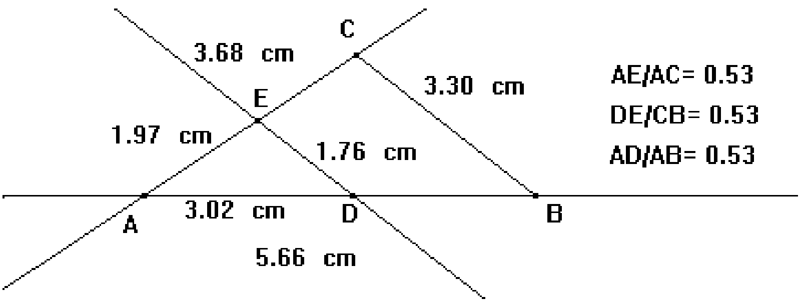
g) Represente para cada uma das configurações todas as proporções possíveis com esses segmentos e verifique se essas proporções são válidas para qualquer uma das configurações.

h) Troque idéias com seu parceiro e escreva uma relação ou conclusão para esta atividade.

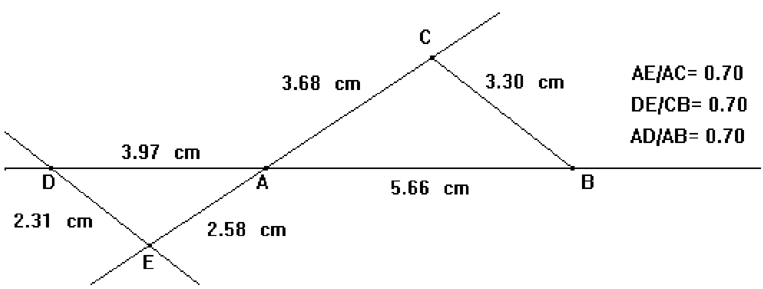
Objetivo: entender que além das diversas maneiras de se representar um par de retas concorrentes *AB* e *AC* interceptadas por paralelas ($\overleftrightarrow{DE} // \overleftrightarrow{BC}$) que, em qualquer uma das configurações pode-se obter segmentos proporcionais. Por meio da experimentação e da observação dos triângulos semelhantes pode-se expressar a proporcionalidade, ou seja, a igualdade das razões formadas entre os segmentos correspondentes dos triângulos semelhantes ou a igualdade entre a razão formada por dois segmentos de uma das transversais, em relação às paralelas, com a razão formada pelos dois segmentos correspondentes na outra transversal.

Comentários: são várias as soluções e configurações possíveis de serem encontradas. Fica difícil descrevê-las, porém, as conclusões deverão ser equivalentes. Espera-se que no mínimo os grupos consigam três configurações que julgamos serem pertinentes. Essas configurações surgirão como conseqüência da posição do ponto *D*, ou seja, quando o ponto *D* está entre *A* e *B*, temos dois triângulos sobrepostos, quando *D* está oposto a *B* em relação a *A*, temos os triângulos opostos pelo vértice, e a outra é quando o ponto *B* está entre *A* e *D* na qual os triângulos ficariam sobrepostos. A diferença entre as configurações dos triângulos sobrepostos está na razão de semelhança entre os triângulos *ADE* e *ABC* formados, pois, na primeira situação *ADE* é uma redução do triângulo *ABC* e na outra o triângulo *ADE* é uma ampliação. Na ação de deslocar o ponto *D* para explorar as várias configurações acredita-se que além de estarem se familiarizando com esse esquema também estão desenvolvendo a visualização das sub-figuras. Veja abaixo três possíveis configurações que podem ser encontradas:

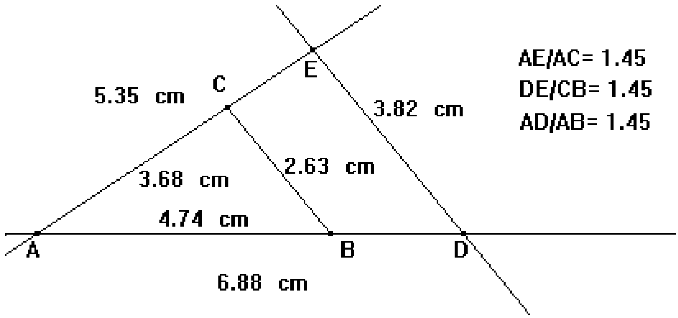
a) *ponto D entre os pontos A e B*



b) *ponto D não pertencente ao segmento AB e o ponto A entre os pontos D e B*



c) *ponto D não pertencente ao segmento AB e o ponto B está entre A e D*



<u>Observação</u>: <u>Projeção Paralela</u>

Dado um ponto *P* e uma reta *r*, chamamos de projeção de *P* sobre *r*, segundo uma direção *d*, o ponto (*P'*) de intersecção da reta paralela a *d* passando por *P* com a reta *r*. Veja figura 1 abaixo:

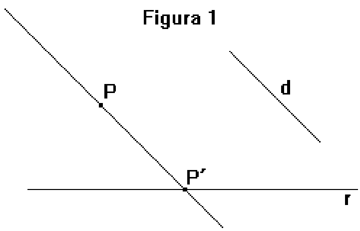


Figura 1

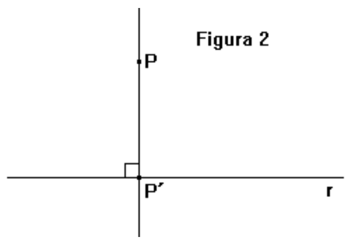


Figura 2

<u>Projeção Ortogonal</u>

Dado um ponto *P* e uma reta *r*, chamamos de projeção ortogonal de *P* sobre *r* o ponto (*P'*) de intersecção da reta perpendicular a *r* passando por *P*. Veja a figura 2 acima.

Atividade 03: explorando projeção de segmentos

Exercício 1

Usando um software de geometria dinâmica construa:

a) Duas retas concorrentes *r* e *s* e um segmento *XY* não paralelo a *r* e *s*.

b) Determine os pontos *A* e *B* sobre a reta ***r*** e os pontos *C* e *D*, projeção dos pontos *A* e *B* sobre a reta *s*, segundo a direção *XY*.

O segmento *CD* é a **projeção** do segmento *AB* sobre a reta *s*.

c) Determine *M*, ponto médio de $\overline{AB}$ e sua projeção *M´***.**

Exercício 2

Responda:

a) Em que posição do segmento *CD* você acha que está a projeção do ponto médio de *AB* sobre *s*?

b) Verifique sua hipótese medindo os segmentos *CM´* e *M´D* e deslocando as retas. Verifique a validade de sua hipótese.

c) Escreva uma conclusão:

Delete o ponto M.

Exercício 3

a) Marque um ponto qualquer *P* sobre *r* e determine *P´***,** sua projeção sobre *s*, segundo a direção *XY*.

b) Verifique, alterando a posição de *P*, se a razão entre os segmentos *AP* e sua projeção *CP´* se mantém constante.

c) Fixe uma posição, meça e anote as medidas dos segmentos:

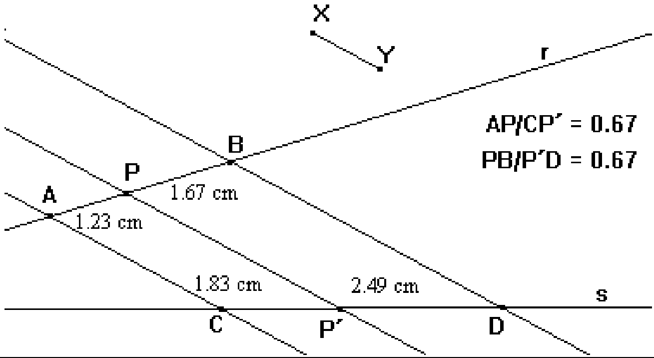
AB = ……., *AP* = ……., *PB* = ……., *CD* = ………., *CP´* = ………., *PD* = ………..

d) Escreva todas as razões e proporções que você conseguir formar com essas medidas.

Objetivo: entender que a proporcionalidade entre os segmentos de uma das retas e suas respectivas projeções na outra reta, além de rever o conceito de projeção segundo uma direção.

Comentários: a figura abaixo representa uma das configurações que se pode obter. São várias as soluções e configurações possíveis de serem encontradas, no entanto, deve-se chegar a conclusões equivalentes.

Essas configurações surgirão como conseqüência da posição das retas *r*, *s*, do segmento *XY* e dos pontos *A* e *B*, ou seja, se o segmento *XY* estiver na posição horizontal, vertical ou inclinada; as paralelas também estarão nessa posição respectivamente. Dependendo da localização dos pontos *A* e *B* sobre *r* encontram-se as configurações dos triângulos sobrepostos ou aquela dos triângulos opostos pelo vértice. Podem surgir problemas na construção da situação se não forem utilizadas convenientemente as seguintes ferramentas: ponto sobre objeto, intersecção de dois objetos, paralelas, o que talvez, iria induzir tirar conclusão não pertinente. Na ação de deslocar o ponto *P* verificando, nas várias posições, se a razão entre os segmentos e suas projeções se mantém constante, acredita-se, além da fixação do conceito de projeção, estar desenvolvendo a percepção e a exploração das configurações.



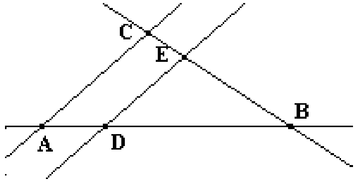
Institucionalização

Nas atividades 1, 2 e 3 podemos identificar algumas relações entre retas paralelas e segmentos proporcionais. A primeira relação (atividade 1) é que toda reta paralela a um dos lados de um triângulo, não passando por um de seus vértices, divide os outros dois lados em segmentos proporcionais, ou divide a figura em dois triângulos semelhantes.

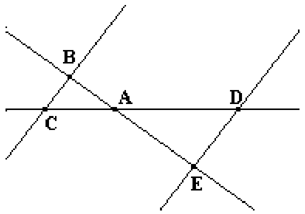
A segunda relação (atividade 2) duas ou mais retas paralelas interceptam um par de retas concorrentes formando triângulos semelhantes ou segmentos proporcionais, que podem ser representados pela igualdade entre a razão formada por dois segmentos de uma das transversais, em relação às paralelas, com a razão formada pelos dois segmentos correspondentes na outra transversal.

A terceira relação (atividade 3) é que dadas duas retas quaisquer *r* e *s*, projetando-se os segmentos da reta *r* na reta *s*, temos que a razão entre um segmento de *r* e sua projeção em *s* se mantém constante qualquer que seja o segmento de *r*, ou seja, há uma proporcionalidade entre os segmentos de uma das retas e suas respectivas projeções na outra reta.

Baseando-se nestas relações escreva para cada configuração abaixo as proporções sugeridas.



Relação 1:
Relação 2:
Relação 3:



Relação 1:
Relação 2:
Relação 3:

Essas relações, durante muito tempo, foram denominadas Teorema dos Segmentos Proporcionais e hoje as conhecemos por **Teorema de Thales.**

Atividade 04: observando enunciados

Leia alguns enunciados relativos ao Teorema de Thales, esboce uma configuração que represente cada enunciado e suas respectivas proporções.

a) Em “Os Elementos” de Euclides (proposição 2 do livro *VI*), temos: “*Se traçarmos uma paralela a um dos lados de um triângulo, esta reta cortará proporcionalmente os lados desse triângulo, e, se os lados de um triângulo são cortados proporcionalmente, a reta que une as secções será paralela ao outro lado do triângulo*”.

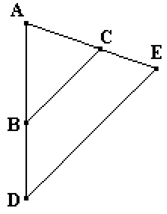
b) “*Se duas retas são transversais a um feixe de paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra*”.

c) “*Se retas paralelas determinam sobre duas transversais segmentos correspondentes, então as razões entre esses segmentos correspondentes formam uma proporção*”.

Objetivo: refletir sobre a maneira de se enunciar o teorema e observar suas representações figurais (configurações) e simbólicas (proporção).

Comentários: observando todos os enunciados da atividade, entendemos que a relação entre os conceitos de paralelismo e proporcionalidade pode ser representada de forma bem diversa. O que diferencia um enunciado de outro é a forma como induzem a montagem da proporção, ou seja, a diferença entre os enunciados está relacionada com o processo de compreensão para se representar a proporcionalidade. O primeiro, quando se pensa em semelhança de triângulos ou de polígonos; o segundo, quando compara as razões formadas por segmentos de uma mesma reta com a razão respectiva de segmentos formados em outra reta; e o terceiro, quando compara as razões entre um segmento e sua projeção.

Veja o exemplo abaixo:



1^0) $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{BD}{CE}$

2^0) $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DE}$

3^0) $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DE}$

Atividade 05: enunciando um teorema

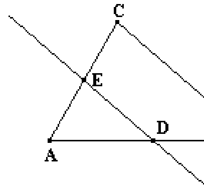
Enuncie o recíproco do Teorema de Thales

Objetivo: diagnosticar a compreensão do teorema recíproco de Thales e proporcionar a reflexão a respeito de implicações, causas e conseqüências, com relação a esse teorema.

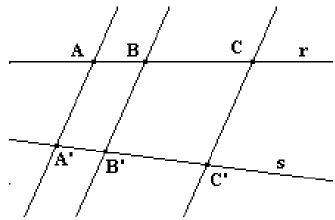
Comentários: pode-se enunciar o recíproco do teorema de Thales, pensando na paralela a um dos lados de um triângulo: *"se os lados de um triângulo são cortados proporcionalmente, a reta que une as secções será paralela ao outro lado do triângulo"*, ou, pensando nos segmentos formados por retas concorrentes: *"dadas duas retas quaisquer r e s, se os segmentos formados em r e s pelas retas concorrentes a, b e c forem proporcionais, a retas a, b e c serão paralelas"*.

Veja:

Na figura ao lado, se $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AD}{AB}$, então $\overline{DE} // \overline{BC}$.



Ou, se $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{EC}{DB}$ então $\overline{DE} // \overline{BC}$.



Na figura ao lado, se $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$

então $a // b // c$.

Ou, se $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'}$ então $a // b // c$.

Atividade 06:[20] **aplicando o recíproco do Teorema de Thales**

Exercício 1

a) Construa um pentágono *ABCDE* e um ponto *O* no interior da figura.

b) Determine os pontos *A´, B´, C´, D´, E´* tal que: $AO' = \dfrac{1}{2}OA$**;**

$OB' = \dfrac{1}{2}OB$**;** $OC' = \dfrac{1}{2}OC$

c) Trace os segmentos: *A´B´, B´C´, C´D´, D´E´ e E´A´.*

Exercício 2

Responda:

a) Quais retas ou segmentos são paralelos na figura do exercício 1? Justifique.

b) Prove utilizando as propriedades que conhece, que $O\hat{A}'B' \equiv O\hat{A}B$.

c) Compare os ângulos dos pentágonos *ABCDE e A´B´C´D´E*

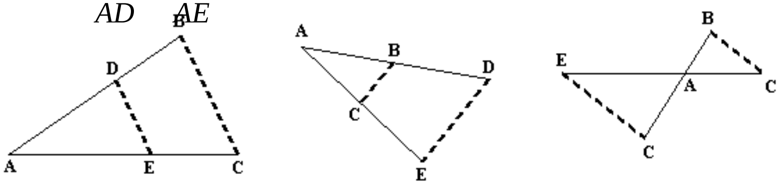
---

[20] As atividades de 1 a 6 foram inspiradas na dissertação de mestrado - Teorema de Thales: uma abordagem do processo ensino aprendizagem . Nancy Cury Andraus Haruna. PUC-SP/2000.

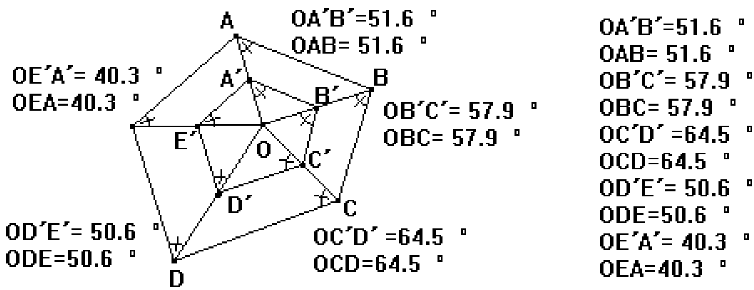
d) O pentágono *A´B´C´D´E´* é um(a) .... do pentágono *ABCDE* na escala ....

e) O pentágono *ABCDE* é um(a) .... do pentágono *A´B´C´D´E´* na escala ....

Observação: nesta atividade podemos perceber o recíproco do Teorema de Thales. Em cada figura abaixo, observe a propriedade: "se $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$ então $\overline{BC} // \overline{DE}$".



Objetivo: explorar o recíproco do Teorema de Thales.
Comentários: a figura abaixo representa uma das possíveis configurações que podemos obter nessa situação.



Nessa atividade, pesquisando e tentando justificar quais segmentos são paralelos, pode-se estar formando a propriedade do recíproco do Teorema de Thales, sob o aspecto da dilatação, ao se observar a proporcionalidade entre os segmentos *AO´* e *AO*, *OB´* e *OB*, *OC´* e *OC*, *OD´* e *OD*, *OE´* e *OE* e conseqüentemente a semelhança dos triângulos sobrepostos, pelo caso LLL, o que implicitamente acarreta a igualdade dos ângulos e o paralelismo entre os segmentos *AB* e *A´B´*, *BC* e *B´C´*, *CD* e *C´D´*, *DE* e *D´E´*, *EA* e *E´A´*. Observando experimentalmente que os ângulos correspondentes: $O\hat{A}B$ e $O\hat{A}'B'$, $O\hat{B}C$ e $O\hat{B}'C'$, $O\hat{C}D$ e $O\hat{C}'D'$, $O\hat{D}E$ e $O\hat{D}'E'$, $O\hat{E}A$ e $O\hat{E}'A'$ são congruentes, poderá se ter um outro modo para provar e justificar que os segmentos AB e $A'B'$, BC e $B'C'$, CD e $C'D'$, DE e $D'E'$, EA e $E'A'$ são paralelos.

Atividade 07: o e entendendo demonstrações

Foram escolhidas três demonstrações diferentes do Teorema de Thales.
- Demonstração de Euclides.
- Demonstração de Legendre.
- Demonstração de Lacroix.

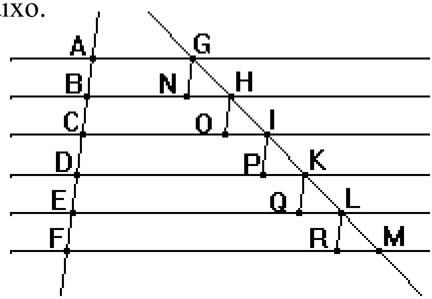
Cada grupo está encarregado de entender, discutir e apresentar uma das demonstrações.
Leia abaixo algumas considerações a respeito de cada uma.

a) Demonstração de Euclides
A demonstração euclidiana é baseada no método das áreas e na teoria das proporções:
- Do método das áreas a proposição 38 do livro I, que diz: *"os triângulos, construídos sobre duas bases iguais e entre as mesmas paralelas são equivalentes* (tem a mesma área)"
- Da teoria das proporções a proposição I do livro VI, que diz: *"Os triângulos e os paralelogramos que têm a mesma altura, estão entre si , como suas bases"* ou seja, a razão entre a área de dois triângulos ou paralelogramos que tenham a mesma altura é igual a razão entre suas respectivas bases.

b) Demonstração de Legendre
Esta demonstração segue o método das áreas proposta por Euclides, com a diferença de que associa a área de um retângulo com um número que seria o produto da medida da base desse retângulo por sua altura. Assim, fica evidente que se dois retângulos têm a mesma altura, a razão da área do primeiro pela área do segundo é igual à razão da base do primeiro pela base do segundo. O mesmo ocorrendo para o triângulo.

c) Demonstração de Lacroix

Lacroix demonstra que um feixe de retas paralelas determina sobre duas ou mais transversais segmentos proporcionais. Para demonstrar essa propriedade ele sugeriu traçar pelas extremidades dos segmentos formados numa das transversais, segmentos paralelos à outra transversal formando com as paralelas um paralelogramo e um triângulo. Veja figura abaixo.



Objetivo: refletir sobre as demonstrações do Teorema de Thales enunciados sob dois pontos de vista, na de Euclides e na de Legendre mostra-se que a reta paralela a um dos lados do triângulo corta os outros dois lados proporcionalmente e na de Lacroix verifica-se que um feixe de retas paralelas determina sobre duas ou mais transversais segmentos proporcionais.

Comentários: para utilizarmos a demonstração do teorema pelo método de Euclides, seria necessário que os alunos já tivessem apreendido as noções de área, de razão, de proporção, de figuras equivalentes, de figuras congruentes e os postulados das paralelas. A priori, a nosso ver, essa demonstração não parece ser a mais adequada. Um aspecto que nos parece estranho é o fato de comparar grandezas de natureza diferente, ou seja, razão entre as áreas e entre comprimentos. Outro fator em jogo está relacionado à necessidade de uma apreensão operatória, que exige um trabalho mental de visualização, decomposição e reconfiguração dos triângulos equivalentes, o que, talvez, não seja uma tarefa muito fácil para os alunos iniciarem um estudo com demonstração.

A demonstração de Legendre nada mais é que o método de Euclides associado às propriedades numéricas, o qual, antes de utilizar o método das áreas, define a área do retângulo como sendo o produto de sua base por sua altura que, como foi dito, não nos parece apropriada,

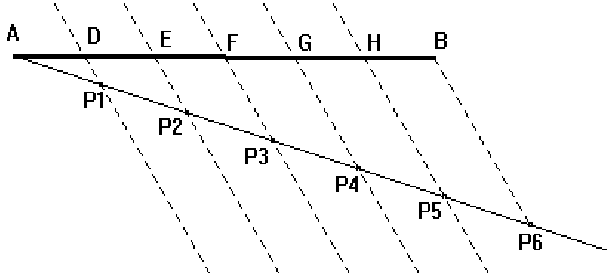
porém, o aspecto de estarmos comparando grandezas diferentes (área e comprimento) fica minimizado.
Para estudar a demonstração de Lacroix, o aluno deverá ter noção de proporção e de congruência de triângulos, pois por meio da congruência de triângulos, ele demonstrou a congruência dos ângulos alternos internos formados por duas paralelas interceptadas por duas transversais. Com isso, ele demonstrou que os segmentos formados por duas retas paralelas interceptadas por duas outras retas paralelas são iguais entre elas. A nosso ver, podemos adaptar essa demonstração a partir daí, considerando o paralelogramo e a propriedade dos lados opostos serem congruentes. A seguir, utilizando essas propriedades ele demonstrou o teorema, considerando as grandezas comensuráveis e para as grandezas incomensuráveis utilizou o método da exaustão. Esse método, a nosso ver, seria um bom caminho para iniciarmos o estudo da demonstração, devido ao fato de o encadeamento das demonstrações apresentar certa ordem utilizando em todas as etapas unidades figurais pertinentes comuns.

Parte 2: aplicações

Objetivo: proporcionar situações de aplicação doTeorema de Thales, explorando a conversão dos registros discursivos, figural e simbólico, tornando-o mais significativo. Elas foram elaboradas para serem aplicadas utilizando um software de geometria dinâmica.

Atividade 01: dividindo um segmento em partes iguais

Divida um segmento qualquer em três partes iguais.



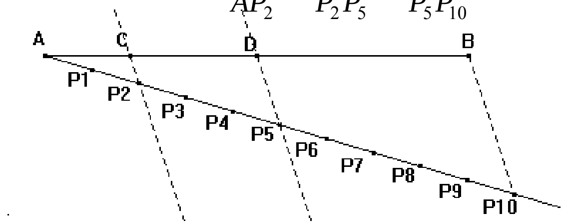
Solução Geométrica:
Como $AP_1=P_1P_2=P_2P_3=P_3P_4=P_4P_5=P_5P_6$ e $DP_1//EP_2//FP_3//GP_4//HP_5//BP_6$, pelo Teorema de Thales temos que $AD=DE=EF=FG=GH=HB$.

Atividade 02: dividindo um segmento em partes proporcionais

Divida um segmento *AB* qualquer em partes proporcionais a 2, 3 e 5.

Solução Geométrica

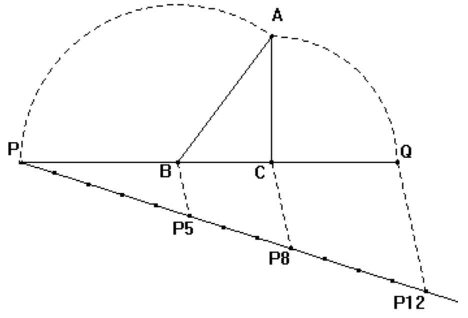
Considerando AP_2 com duas unidades, P_2P_5 com três unidades e P_5P_{10} com cinco unidades e sendo $CP_2 // DP_5 // BP_{10}$ pelo Teorema de Thales podemos dizer que: $\frac{AC}{AP_2} = \frac{CD}{P_2P_5} = \frac{DB}{P_5P_{10}}$



Atividade 03: dividindo segmento em partes proporcionais

Trace um segmento *PQ* qualquer para representar o perímetro do triângulo *ABC*. A seguir, construa esse triângulo sabendo que $\frac{AB}{5} = \frac{BC}{3} = \frac{AC}{4}$.

Solução Geométrica:
Considerando PP_5 com cinco unidades, P_5P_8 com três unidades e P_8P_{12} com quatro unidades e sendo BP_5 // CP_8 // QP_{12} , $PB = AB$ e $CQ = AC$ pelo Teorema de Thales podemos dizer que: $\frac{AB}{5} = \frac{BC}{3} = \frac{AC}{4}$.

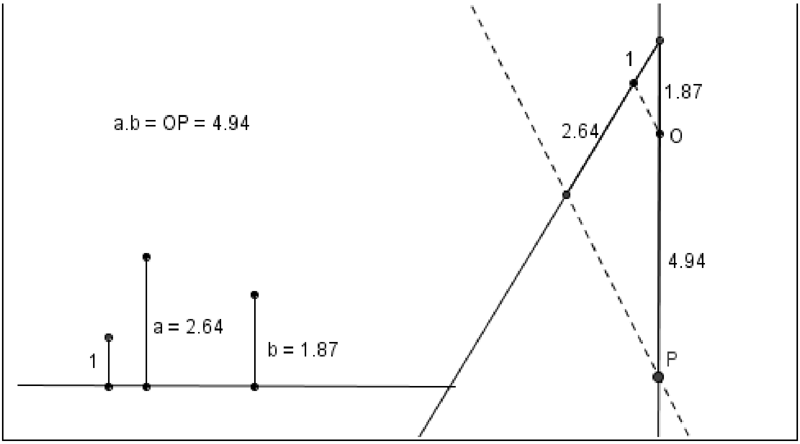


Atividade 04: multiplicando geometricamente as medidas de dois segmentos

a) Abra o arquivo **mod_09_thales_01**.

b) Obtenha o segmento $\overline{OP}$ na reta *r* tal que $OP = a \cdot b$. Meça o segmento $\overline{OP}$ e movimente *a* e *b* para validar sua construção.

Objetivo: aplicar o Teorema de Thales para determinar o produto entre a medida de dois segmentos.
Comentários: nessa atividade não é tão evidente a aplicação do Teorema de Thales e a forma de se representar a relação OP = ab, também não remete de imediato a perceber que a equivalência entre as relações: $\frac{1}{a} = \frac{b}{OP} \rightarrow OP = a \cdot b$
Uma das maneiras de se determinar geometricamente o produto de dois segmentos *a* e *b* é considerar esse produto *OP*, sendo a quarta proporcional entre os segmentos de medidas 1, *a* e *b* nesta ordem. Assim temos que: $\frac{1}{a} = \frac{b}{OP} \rightarrow OP = a.b$.
Veja representação abaixo:



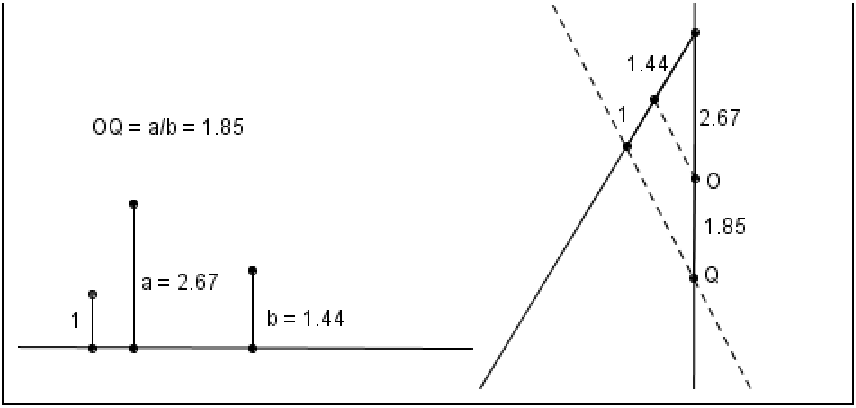
Atividade 05: dividindo geometricamente as medidas de dois segmentos

a) Abra o arquivo **mod_09_thales_02**.

b) Obtenha o segmento $\overline{OQ}$ na reta *r* tal que $OQ = \dfrac{a}{b}$. Meça o segmento $\overline{OQ}$ e movimente *a* e *b* para validar sua construção.

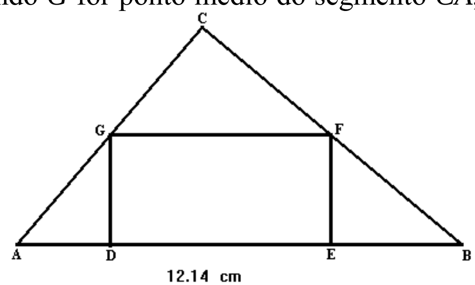
Objetivo: aplicar o Teorema de Thales para determinar o quociente entre a medida de dois segmentos.

Comentários: podemos escrever a relação $OQ = \dfrac{a}{b}$, como sendo $\dfrac{b}{1} = \dfrac{a}{OQ}$, desta forma OQ representa a quarta proporcional entre os segmentos de medidas *b*, 1 e *a*, nesta ordem, o que facilita a determinação geométrica do segmento *OQ*. Veja figura abaixo:



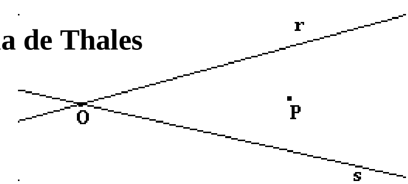
Atividade 06: verificando experimentalmente uma propriedade
a) Abra o arquivo **mod_09_thales_03**.
b) Movimente um vértice do retângulo e encontre a posição para que a área seja máxima (o segmento contido na reta ao lado representa a área do retângulo).

Objetivo: verificar experimentalmente uma propriedade. **Comentários:** explorando a construção feita no software e medindo os segmento *CG* e *GA*, podemos Observar com o deslocamento do ponto *D* que a área será máxima quando *G* for ponto médio do segmento *CA*, isto é $CG = \frac{CA}{2}$.



Atividade 07: aplicando o Teorema de Thales

a) Construa a figura ao lado.



b) Encontre, utilizando um software de geometria dinâmica, um ponto A em r e um ponto B em s tal que P seja ponto médio de $\overline{AB}$.

c) Faça a construção geral da solução.

d) Justifique sua construção.

Objetivo: usar o Teorema de Thales na solução geométrica do problema.

Construção: por P trace a reta t, paralela à reta s que intercepta a reta r no ponto C. Determinar o ponto A, simétrico de O em relação à C, tornando C ponto médio de AO. Traçar uma reta por A e P obtendo na interseção com a reta s, o ponto B. Se $t \parallel s$ e $AC = CO$ então $AP = PB$ e P é ponto médio de $\overline{AB}$.

Atividade 08: determinando geometricamente a quarta proporcional

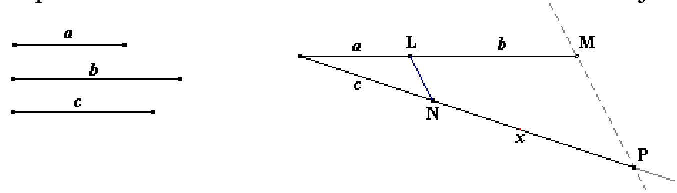
a) Trace três segmentos de medidas a, b e c.

b) Determine o segmento de medida x tal que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{x}$.

***x* é chamado de quarta proporcional entre *a*, *b* e *c*.**

Objetivo: determinar geometricamente a quarta proporcional entre os segmentos de medidas a, b e c.

Comentários: algebricamente sabemos que $x = \dfrac{b \cdot c}{a}$, mas podemos fazer um tratamento geométrico utilizando o Teorema de Thales. Esta resolução necessita da conversão do registro discursivo para o registro simbólico e do simbólico para o registro figural, no qual serão realizados os tratamentos necessários. Veja:



Na figura, como $\overline{LN} // \overline{MP}$, por Thales, x é a quarta proporcional entre as medidas a, b e c, isto é, $x = \dfrac{b \cdot c}{a}$.

Atividade 09: determinando geometricamente a terceira proporcional

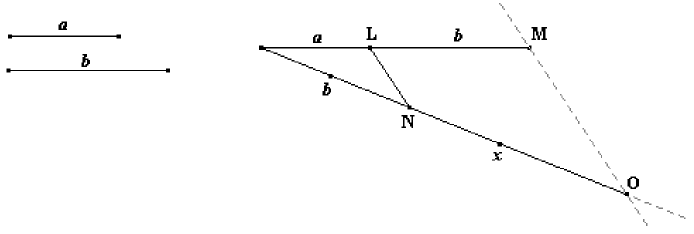
a) Trace dois segmentos de medidas a e b.

b) Determine o segmento de medida x tal que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{x}$.

***x* é chamado terceira proporcional entre *a* e *b*.**

Objetivo: determinar geometricamente, utilizando o software, a terceira proporcional entre os segmentos de medidas a e b, aplicando o Teorema de Thales.

Comentários: a solução algébrica é $x = \dfrac{b^2}{a}$ e para obtê-la basta aplicar a propriedade fundamental na proporção dada no enunciado. A resolução geométrica necessita da conversão do registro discursivo e simbólico para o registro figural, no qual serão realizados os tratamentos necessários.

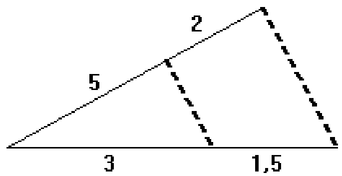


Na figura como $\overline{LN} // \overline{MO}$, por Thales, x é a terceira proporcional entre as medidas a e b e, portanto, $x = \dfrac{b^2}{a}$.

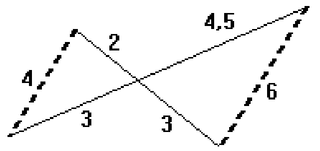
Atividade 10: aplicando o recíproco do Teorema de Thales

Verifique em quais configurações abaixo os segmentos pontilhados são paralelos.

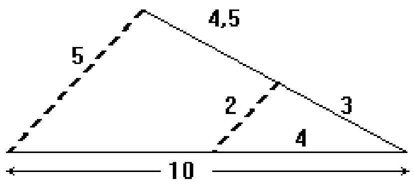
a)



b)



c)



Solução: para resolvermos essa questão devemos mobilizar o recíproco do Teorema de Thales, ou seja para que as retas pontilhadas sejam paralelas os segmentos formados nas transversais deverão ser proporcionais. Assim, as proporções possíveis são.

a) $\frac{5}{2} = \frac{3}{1,5}$ (Falso) $5 \times 1,5 \neq 2 \times 3$

b) $\frac{2}{3} = \frac{3}{4,5} = \frac{4}{6}$ (Verdadeiro) $2 \times 4,5 = 3 \times 3$, $3 \times 6 = 4 \times 4,5$ e $2 \times 6 = 3 \times 4$

c) $\frac{3}{7,5} = \frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ (Verdadeiro) $3 \times 5 = 2 \times 7,5$, $2 \times 10 = 4 \times 5$ e $3 \times 10 = 4 \times 7,5$

Observando as relações constatamos que só nas configurações dos itens *b* e *c* é que os segmentos pontilhados são paralelos. Além disso no item (c) a apreensão perceptiva dos dois triângulos não é tão evidente e pode conduzir a erros na determinação das proporções.

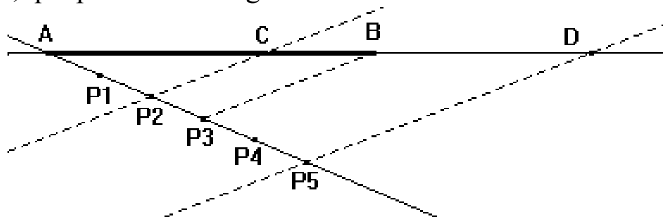
Atividade 11: dividindo segmento em partes proporcionais

Trace um segmento *AB* e determine:

a) o segmento *AC* tal que *AC = 2/3 AB*,

b) o segmento *AD* tal que *AD = 5/3AB.*

Comentários: para determinarmos graficamente o segmento *AC*, dividimos o segmento ***AB*** em três partes iguais, utilizando o Teorema de Thales, e consideramos duas destas partes como sendo ***AC***, pois ***AC*** equivale a dois terços de ***AB***. O segmento ***AD*** foi obtido acrescentando-se dois terços de ***AB*** ao segmento *AB*. Na figura acima $AP_1= P_1P_2=P_2P_3=P_3P_4=P_4P_5 = 1$ e $CP_2 \mathbin{//} BP_3 \mathbin{//} DP_5$. Logo, a razão entre ***AC*** e duas unidades é igual à razão entre ***AB*** e três unidades, que por sua vez é igual à razão entre *AD* e cinco unidades.



Familiarização

Objetivo: aplicar o Teorema de Thales, sem utilização de software. As atividades de construção devem ser feitas com instrumentos de desenho.

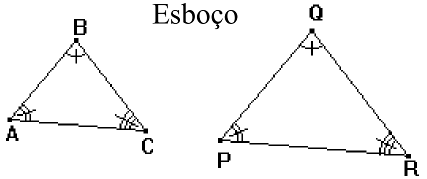
Exercício 1

Dois triângulos *ABC* e *PQR* são semelhantes. Os lados homólogos $\overline{AC}$ e $\overline{PQ}$ medem, respectivamente, 5cm e 8cm. Qual é o perímetro do triângulo *ABC*, sabendo que o do triângulo *PQR* é 22cm? (Bezerra, M. J., p. 142).

Comentários: como os triângulos *ABC* e *PQR* são semelhantes com lados homólogos $\overline{AC}$ e $\overline{PQ}$, sabemos que $\overline{AB}$ e $\overline{PR}$, $\overline{BC}$ e $\overline{RQ}$, e os respectivos perímetros são proporcionais. Considerando *p* o perímetro do triângulo *ABC* e *P*, o perímetro do triângulo *PQR*, podemos escrever as proporções seguintes:

$$\frac{AC}{PQ} = \frac{p}{P} \Rightarrow \frac{5}{8} = \frac{p}{22}$$

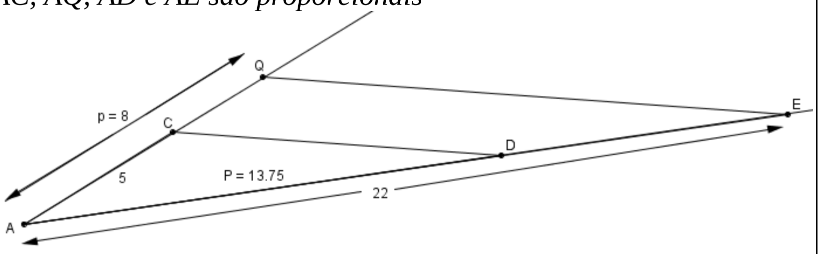
Esboço



ou $\dfrac{AC}{p} = \dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{P}} \Rightarrow \dfrac{5}{\mathrm{p}} = \dfrac{8}{22}$

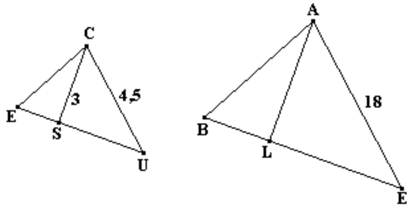
Para determinar o valor desconhecido *p* nas proporções acima podemos ter uma solução geométrica, utilizando o Teorema de Thales, ou uma solução algébrica, aplicando o princípio fundamental da proporcionalidade.

Na solução geométrica, de acordo com a figura abaixo, sendo os segmentos Cd e QE paralelos temos, por Thales que os segmentos AC, AQ, AD e AE são proporcionais



Exercício 2

Sabendo que os triângulos, abaixo, são semelhantes, determine a altura *AL*.



Exercício 3

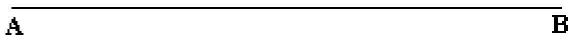
As bases de um trapézio retângulo medem 16cm e 12cm, a altura mede 8cm. Calcular a altura do menor triângulo obtido pelo prolongamento dos lados não paralelos do trapézio. (Bezerra, M. J.- pág. 144)

Exercício 4

Numa certa hora do dia um senhor de 1,6m observou que sua sombra era de 26cm e que a sombra do prédio onde mora era de 2,5m. Determine a altura desse prédio. $\overline{AC} \mathbin{//} \overline{DE}$

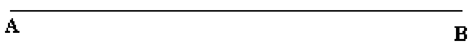
Exercício 5

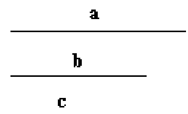
Divida o segmento *AB* em três partes iguais.



Exercício 6

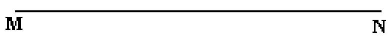
Divida o segmento *AB* em partes proporcionais aos segmentos de medidas *a*, *b*, *c*.





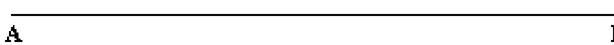
Exercício 7

Construa o retângulo *ABCD*, sabendo que seus lados são proporcionais a 2 e 3 e que seu perímetro mede *MN*.



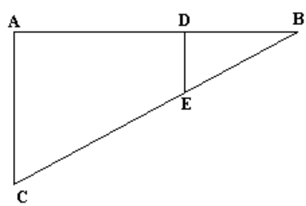
Exercício 8

Dado o segmento *AB*, obtenha geometricamente um segmento *x* tal que $x = \frac{2}{5}AB$.



Exercício 9

Encontre a medida de dois ângulos complementares que estão na razão $\frac{3}{2}$ e dois suplementares que estão na razão 1 : 3.



Exercício 10

Determine a medida de $\overline{CE}$ e $\overline{EB}$, sabendo que $AD = 3$, $DB = 1$ e $BC = 6$.

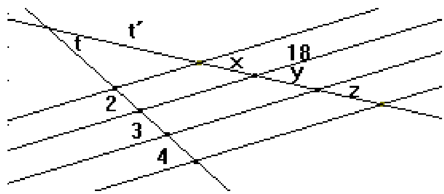
Exercício 11

Um feixe de quatro paralelas determina, sobre uma transversal *t*, segmentos de 2, 3, 4 centímetros, e sobre uma transversal *t´*, outros segmentos cuja soma das medidas é 18cm. Calcule os três segmentos determinados sobre *t´*. (Bezerra, M. J. – pág. 150)

Comentários: para determinarmos os valores de *x*, *y* ou *z*, como mostra a figura abaixo, podemos estar pensando no Teorema de Thales, sob qualquer um dos pontos de vistas já apresentados.

Pela conservação da relação de projeção temos:

$$\frac{2}{x} = \frac{3}{y} = \frac{4}{z} = \frac{2+3+4}{18} = \frac{1}{2} \rightarrow x = 4, \mathrm{y} = 6, \mathrm{z} = 8$$

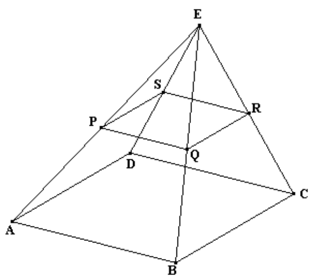


Exercício 12

Na figura representada abaixo temos

$\overline{PS} // \overline{AD}$, $\overline{SR} // \overline{DC}$ e $\overline{QR} // \overline{BC}$.

É possível mostrar que $\overline{PQ} // \overline{AB}$?



Comentários: se $\overline{PS} // \overline{AD}$ os triângulos *ESP* e *EDA* são semelhantes, logo $\frac{ES}{ED} = \frac{EP}{EA}$ (1). Se $\overline{SR} // \overline{DC}$ os triângulos ESR e EDC são semelhantes então $\frac{ES}{ED} = \frac{ER}{EC}$ (2). Se $\overline{QR} // \overline{BC}$ os triângulos EQR e EBC são semelhantes e $\frac{EQ}{EB} = \frac{ER}{EC}$ (3).

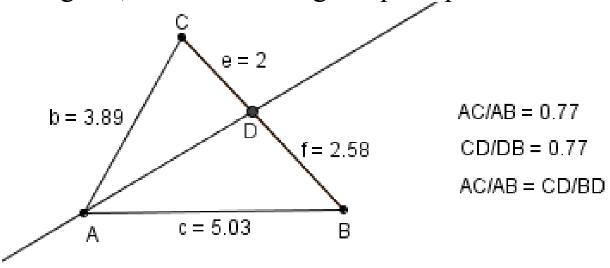
De (1), (2) e (3) podemos obter que $\frac{EQ}{EB} = \frac{ER}{EC} = \frac{ES}{ED} = \frac{EP}{EA}$ e concluir que se $\frac{EQ}{EB} = \frac{EP}{EA}$ os triângulos EPQ e EAB são semelhantes e portanto $\overline{PQ} // \overline{AB}$.

Exercício 13

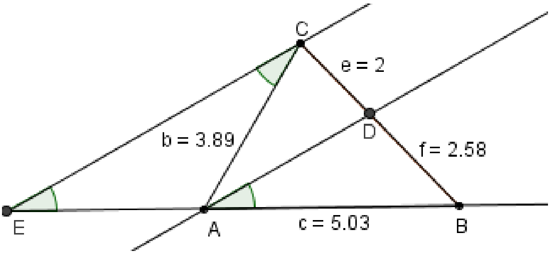
Mostre que: *A bissetriz de um ângulo interno de um triângulo determina no lado oposto ao ângulo, dois segmentos diretamente proporcionais aos outros dois lados desse triângulo.*

Objetivo: utilizar o Teorema de Thales para mostrar o teorema das bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo.

Comentários: nessa atividade, primeiramente, temos que interpretar o enunciado fazendo a conversão do registro discursivo para o registro figural, obtendo uma figura que represente a situação.



Para justificar essa afirmação utilizando o Teorema de Thales podemos traçar uma reta paralela a bissetriz por um dos outros ângulos do triângulo. Veja a figura abaixo:



Traçando pelo vértice C uma paralela à bissetriz AD e, prolongando o lado AB, determinando P como a intersecção dessa paralela com a reta AB, podemos perceber experimentalmente que AC = AP.

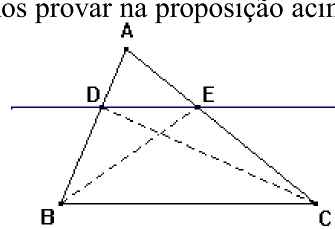
Sendo $\overline{AD} // \overline{CP}$, $P\hat{C}A \equiv D\hat{A}B \equiv C\hat{P}A$ que justifica ser o triângulo PAC isósceles. Por Thales temos que $\frac{CD}{DB} = \frac{AP}{AB}$. Como $AP = AC$, podemos escrever que: $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{DB}$.

Para Ler: Demonstrações do Teorema de Thales[21]

a) Demonstração de Euclides (proposição 2 do livro VI)

"Se traçarmos uma reta paralela a um dos lados de um triângulo, esta reta cortará proporcionalmente os lados desse triângulo, e se os lados de um triângulo são cortados proporcionalmente, a reta que une as secções será paralela ao outro lado do triângulo".

Considerando a figura ao lado, queremos provar na proposição acima que se DE // BC, então $\frac{BD}{DA} = \frac{CE}{EA}$



Tendo os triângulos *DEA* e *DEB* a mesma altura, considerando as bases $\overline{AD}$ e $\overline{DE}$, respectivamente. E os triângulos *DEA* e *DEC* tam-

[21] As demonstrações aqui apresentadas foram baseadas nas dissertação de mestrado de Nancy Cury Andraus Haruna, Teorema de Thales: uma abordagem do processo de ensino-aprendizagem, 2000, p. 13.

bém com mesma altura, considerando as bases $\overline{AE}$ e $\overline{EC}$, respectivamente, podemos pela proposição I do livro VI escrever que: $\frac{BD}{DA} = \frac{med(\acute{a}rea\ DEB)}{med(\acute{a}rea\ DEA)}$ ou $\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = \frac{med(\acute{a}rea\ DEC)}{med(\acute{a}rea\ DEA)}$ (I).

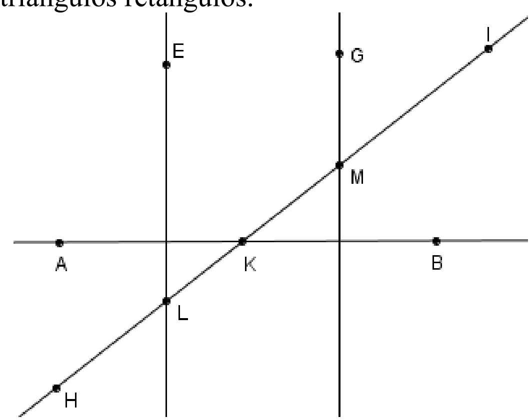
Por outro lado, os triângulos ***DEB*** e ***DEC***, têm a mesma base, $\overline{DE}$, e estão compreendidos entre as mesmas paralelas ($\overline{DE} // \overline{BC}$) são equivalentes, proposição **38** do livro **I**, logo, área *DEB* ≡ área DEC (II).

Comparando (I) e (II) temos que: $\frac{BD}{DA} = \frac{CE}{EA}$.

b) Demonstração de Lacroix

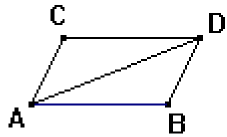
Sylvestre François Lacroix (1765-1843) utiliza em sua demonstração o teorema das paralelas, definindo retas paralelas como sendo as retas de um mesmo plano que não se encontram.

Ele admite o axioma que diz que *"uma reta perpendicular a uma outra é interceptada por todas aquelas que são oblíquas a essa outra"*. Para ele, assim como para Legendre *"um axioma é uma propriedade evidente por ela mesma"*, podendo mostrar a congruência dos ângulos correspondentes e alternos internos utilizando o caso da congruência dos triângulos retângulos.



Seja a reta *HI* cortando as paralelas $\overline{DE}$ e $\overline{FG}$ em dois pontos *L* e *M* e seja *K* o ponto médio de $\overline{LM}$, por *K* passa-se uma perpendicular às duas paralelas dadas, então os triângulos retângulos *DLK* e *FMK* são congruentes, o que implica as igualdades: *KM=KL*, *MF=LD*, *FK=KD*, $K\hat{M}F = K\hat{L}D, M\hat{K}F = D\hat{K}L, M\hat{F}K = L\hat{D}K = 90^{\circ}$.

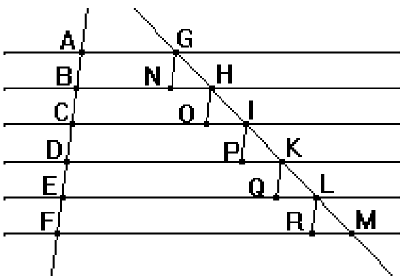
Lacroix pode, então, enunciar e demonstrar o teorema: "As partes $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ de duas retas paralelas interceptadas entre duas retas paralelas *CD* e *AB*, são iguais entre elas e reciprocamente".



Basta observar que os triângulos *ABD* e *ACD* são congruentes para se deduzir que duas paralelas "são em qualquer lugar igualmente distantes uma da outra".

Lacroix pode, então, enunciar e demonstrar o teorema:

"Se duas retas quaisquer *AF* e *GM* são cortadas por um número qualquer de paralelas *AG*, *BH*, *CI* etc. traçadas por pontos tomados a distâncias iguais sobre a primeira, as partes $\overline{GH}$, $\overline{HI}$, $\overline{IK}$ etc. da segunda, serão também iguais entre elas".



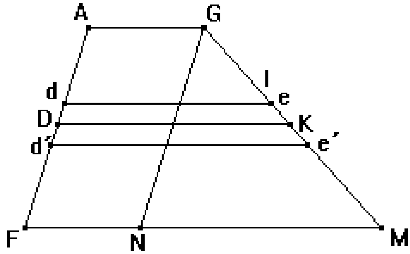
Basta observar, primeiramente, que os segmentos *GN*, *HO*, *IP*, etc., são congruentes, pois os triângulos *GNH*, *IOH*, *IPK* etc., são congruentes.

Mostra-se então o teorema:

"Três paralelas AG, BH e FM cortam duas retas quaisquer AF e GM em partes proporcionais".

Se $\overline{AD}$, conforme a figura, é comensurável com $\overline{AF}$, é uma conseqüência do teorema precedente. Quando $\overline{AD}$ e $\overline{AF}$ são incomensuráveis[22], Lacroix utiliza o método da exaustão, admitindo, implicitamente, a existência de uma quarta proporcional.

Seja I o ponto da reta *GM* tal que *AF*: *AD* :: *GM* : *GI,* mostrar-se-á que os ponto I e K coincidem.



Suponhamos *GI* < *GK* e dividindo $\overline{AF}$ em partes iguais suficientemente pequenas de modo que existe um ponto de divisão *d* tal que a paralela transportada por *AG* encontra $\overline{GM}$ num ponto *e* situado entre *I* e *K.*

Então $\overline{AF}$ está para $\overline{Ad}$, como, $\overline{GM}$ está para $\overline{Ge}$ e por conseqüência $\overline{Ad}$ está para $\overline{AD}$, como, $\overline{Ge}$ está para $\overline{GI}$ ou *Ad* < *AD* e *Ge* > *GI* o

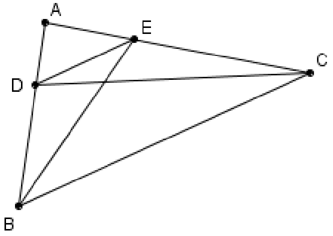
que é contraditório.

Desse modo se se supõem *GI* > *GK*, obtém-se uma contradição, por conseqüência $\overline{GI} \cong \overline{GK}$ ou seja *I* e *K* coincidem.

[22] Para comparar grandezas de mesma espécie, como dois segmentos retilíneos AB e CD dizer que a razão AB/CD é o número racional m/n significa dizer que existe um terceiro segmento EF tal que AB é m vezes EF e CD é n vezes esse segmento. Dois segmentos nessa condição são chamados de comensuráveis: é possível medi-los ao mesmo tempo, com a mesma unidade EF. Entretanto, não é verdade que dois segmentos quaisquer sejam sempre comensuráveis. Em outras palavras, existem segmentos AB e CD sem unidade comum EF, os segmentos incomensuráveis. Foram os próprios pitagóricos que descobriram grandezas incomensuráveis, provavelmente entre 450 e 400 a.C., ao que tudo indica isto se fez através de um argumento geométrico, demonstrando que o lado e a diagonal de um quadrado são incomensuráveis. (Retirado da Revista do Professor de Matemática, nº 5, 2º semestre de 1984, p.6-11: Grandezas incomensuráveis e números irracionais de Geraldo Ávila.

c) Demonstração sugerida na Proposta Curricular do Estado de São Paulo de 1991

"Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina segmentos que são proporcionais a esses lados".



Hipótese: {No triângulo ABC, tem-se: D é ponto de $\overline{AB}$ e E é ponto de $\overline{AC}$, tais que $\overline{DE} \ // \ \overline{BC}$

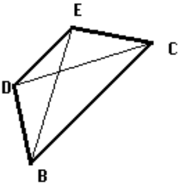
$$\text{Tese}: \left\{ \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \right.$$

Demonstração: Nos triângulos ADE e BDE, consideremos $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$ como as bases. Como esses triângulos têm a mesma altura $\overline{EF}$ em relação a essas bases, a razão entre suas áreas é igual à razão entre as bases:

$$\frac{med(área(BDE))}{med(área(ADE))} = \frac{1/2.(BD).(EF)}{1/2.(AD).(EF)} \rightarrow \frac{med(área(BDE))}{med(área(ADE))} = \frac{BD}{AD} \quad (1)$$

Analogamente, nos triângulos ADE *e* CDE, considerando como bases $\overline{AE}$ e $\overline{CE}$, teremos: $\dfrac{\text{med(área}\,(CDE))}{\text{med(área}\,(ADE))} = \dfrac{CE}{AE}$ (2)

Os triângulos BDE e CDE têm mesma base $\overline{DE}$ e mesma altura ($\overline{DE} // \overline{BC}$), portanto, têm áreas iguais.



Sabendo que a área (BDE) ≡ área (CDE) e comparando (1) e (2), tem–se: $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{CE}{AE}$

Somando 1 a ambos os membros dessa igualdade, temos: $\dfrac{BD + AD}{AD} = \dfrac{CE + AE}{AE}$ *ou* $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$

Comentários Históricos: a evolução da demonstração do Teorema de Thales

A demonstração de Adrien-Marie Legendre (1752-1833) é similar ao método das áreas proposto por Euclides.

Existem várias edições de suas obras. Nas primeiras edições, no início de suas obras ele lembra toda aritmética preliminar e as noções de razão e proporção.

No começo do livro III, intitulado "*Les proportions des figures*", Legendre destaca a respeito das proporções que:

"Se se tem a proporção A:B::C:D (A está para B como C está para D), diz-se que o produto dos extremos AxD é igual ao produto dos meios BxC".

Ele explica:

"Esta verdade é incontestável pelos números; e é também por quaisquer grandeza, contanto que elas se exprimam ou que se as imagine exprimidas em número; e é o que se pode sempre supor: por exemplo, se A, B, C, D, são linhas, pode-se imaginar que uma dessas quatro linhas, ou uma quinta, se se quiser, serve a todas de medida comum e seja tomada por unidade; então A, B, C, D representam cada uma um certo número de unidades inteiras ou rompidas, comensuráveis ou incomensuráveis, e a proporção entre as linhas A, B, C, D, deriva de uma proporção de números".

Assim, o autor funde, como quer a tradição cartesiana, cálculo numérico e cálculo especial.

Nesse livro, o autor mostra primeiramente, à maneira de Euclides, que os paralelogramos (respectivamente os triângulos) tendo as bases e alturas iguais são equivalentes, isto é, têm a mesma área, pois enuncia a afirmação (proposição 3):

"*Dois retângulos de mesma altura são entre si como suas bases*."

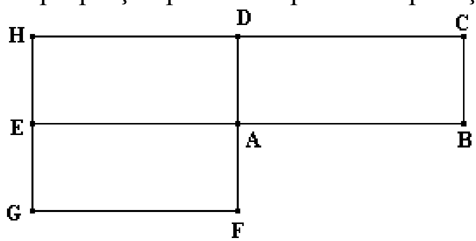
ou, melhor dizendo: se dois retângulos têm a mesma altura, a razão da área do primeiro pela área do segundo é igual à razão da base do primeiro pela base do segundo.

Quando as bases são comensuráveis, a afirmação resulta de uma decomposição conveniente e quando as bases são incomensuráveis, Legendre utiliza o método da exaustão para demonstrar (isto é, a dupla redução ao absurdo).

Os ingredientes da demonstração do Teorema de Thales pelo método das áreas são assim colocados, mas o teorema se prende somente à proposição 15. Antes de utilizar o método das áreas, Legendre explica, como se pode dizer, que a área de um retângulo é igual ao produto de sua base pela sua altura ao unir esta fórmula à escolha das unidades. De fato, enunciou a propriedade seguinte (proposição 4): Dois retângulos quaisquer *ABCD*, *AEGF* estão entre eles como os produtos das bases multiplicadas pelas alturas, de modo que se a área (*ABCD*) está para a área (*AEGF*), como, $AB \times AD$ está para $AE \times AF$. Com efeito, dispostos os dois retângulos como abaixo, tem-se as proporções

área (*ABCD*) está para a área (*AEHD*), como, *AB* está para *AE*,
área (*AEHD*) está para a área (*AEGF*) , como, *AD* está para *AF*,
das quais se obtém a proporção procurada pela multiplicação.

Veja a figura.



$$\frac{med(área(ABCD))}{med(área(AEHD))} = \frac{AB \times AD}{AE \times AD} = \frac{AB}{AE} \text{ e}$$

$$\frac{med(área(AEHD))}{med(área(AEGF))} = \frac{AD \times AE}{AF \times AE} = \frac{AD}{AF}$$

O autor observa, então, que podemos tomar por medida de um retângulo o produto de sua base pela sua altura, uma vez que se entende por esse produto aquele de dois números que são o número de unidades lineares contidas na base, e o número de unidades lineares contidas na altura.

Legendre explica que esta medida não é absoluta, mas que se deve tomar como unidade de superfície o quadrado no qual, o lado é a unidade de comprimento.

Dito isso, o método das áreas torna se um método de cálculo e este é, portanto o que utiliza na seqüência, transformando o cálculo de raci-

ocínio Euclidiano, misturando cálculo numérico e cálculo especial (Viète).
Desse modo, o autor demonstra vários resultados do livro I e II dos Elementos de Euclides, entre eles o Teorema de Pitágoras e o Teorema de Thales é enunciado somente na proposição 15, sendo o enunciado e a demonstração aqueles de Euclides.
A seqüência do livro III está consagrada ao estudo das figuras semelhantes. Em como deduz a clássica relação métrica de um triângulo.
A análise da evolução histórica da demonstração referente a noção do Teorema de Thales permitiu detectar que o estatuto mal definido dos números até final do século XIX (até a construção da teoria dos números reais com Richard Dedekind (1831-1916), Georg Cantor (1845-1918), Karl Weierstrass (1815-1897) e Méray) e as grandezas incomensuráveis foram os obstáculos epistemológicos[23] na definição da teoria das proporções. A descoberta dos segementos incomensuráveis e que os números naturais são insuficientes para definir a razão entre duas grandezas foi uma ruptura epistemológica, pois acreditava-se na possibilidade de explicar todos os fenômenos em termos dos números e de suas razões.
Essa crise foi superada ainda no século IV AC., por Eudoxo da Escola de Platão que desenvolveu uma teoria das proporções, a qual permitiu superar o obstáculo da incomensurabilidade sem a necessidade dos números irracionais (eliminou os recursos numéricos).
Notamos que Euclides utilizou-se do método das áreas para não tratar da proporcionalidade sob o aspecto numérico, considerando a razão como uma quantidade, logo, pode ser comparada (igual, maior, menor). No caso das grandezas incomensuráveis, Arnauld verificou se as razões eram iguais, comparando-as, utilizando a clássica dupla redução ao absurdo (método da exaustão dos geômetras gregos). Legendre misturou o método das áreas e as propriedades numéricas.

---

[23] Esse termo emprestamos da teoria de Brousseau que dentre vários tipos de obstáculos relacionados ao ensino-aprendizagem, destaca os obstáculos epistemológicos como sendo os que representaram rupturas importantes no desenvolvimento histórico dos conceitos. Eles são inerentes ao saber e identificáveis pelas dificuldades encontradas pelos matemáticos. (Saddo, 1997, p. 40 a 50).

Lacroix utilizou o método da exaustão admitindo a existência de uma quarta proporcional.
Só no século XIX, com a construção dos números reais é que o estatuto de número se torna preciso, permitindo, assim, redefinir a relação entre o geométrico e o numérico.

10 CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO[24]

Tratar diversos conhecimentos que envolvem circunferência ou círculo, inclusive propriedades e teoremas pertinentes a tais conhecimentos, desenvolvendo-os a partir de construções geométricas em um software de geometria dinâmica. Entenderemos neste trabalho a circunferência como sendo a fronteira de uma superfície que chamamos de círculo.
Desenvolvemos este trabalho em oito tópicos: definições e relações de posição; cordas, arcos e ângulos; potência de ponto e relações entre tangentes e secantes; médias e números irracionais; resolução geométrica de equação de 2º grau; lugares geométricos e circunferência; circunferência inscrita ou circunscrita e, finalmente, comprimento e área.

10.1 Definições e Relações de Posição

Atividade 01; definindo circunferência
Definições[25]
Atualmente, a maioria dos livros de Matemática apresenta a mesma definição de circunferência:
D_1: A circunferência de centro *O* e de raio medindo *r* é, no plano, o conjunto dos pontos situados à distância *r* de *O*.
Mas, uma circunferência pode estar bem definida de outras maneiras:
D_2: Chamamos circunferência toda curva plana que admite uma infinidade de eixos de simetria.
D_3: Uma curva plana γ é uma circunferência se, e somente se existe um ponto *O* do plano e um real positivo d tais que:
- γ determina em toda reta passando por *O* um segmento de comprimento *d*,

---

[24] Agradecemos a pesquisa bibliográfica realizada pela Prof. Dra. Renata Rossini para a elaboração deste módulo.
[25] As definições 1 a 4 foram retiradas do texto *Concepções de Circunferência das Criança da Escola Elementar”*, Michèle Artigue, Jacqueline Robinet, Institut de Recherche sur l’Enseignement des Mathématiques, Université Paris 7. A definição 5 do livro *Elementi di Geometria* de Francesco Severo Valecchi, Editora Firenze, volume 1, p. 123, 1945.

- *O* é o ponto médio deste segmento.

D_4: A circunferência de um círculo é uma linha curva cujos pontos são todos igualmente distantes de um ponto interior que chamamos centro (Legendre).

D_5: O lugar geométrico do ponto médio de um segmento que se move de maneira que seus extremos deslizem sobre duas retas perpendiculares é uma circunferência.

Analise as definições acima e observe semelhanças ou diferenças entre elas.

Objetivo: interpretar e discutir as diferenças e semelhanças entre cinco definições para circunferência.

Comentários: é importante observar que há várias maneiras de se definir um objeto matemático, neste caso a circunferência. Cada definição de um objeto apresenta esse objeto sob um ponto de vista, privilegiando uma ou mais de suas propriedades.

Por exemplo, em D_1 temos a definição mais encontrada nos livros didáticos em que a circunferência é vista como um conjunto de pontos e utiliza a propriedade de cada um de seus pontos ser eqüidistante de seu centro. Em D_2 a circunferência é vista como uma curva que possui infinitos eixos de simetria, que são as retas suportes de seus diâmetros. Em D_3 a circunferência também é considerada uma curva, definida a partir de um ponto *O*, de todas as retas que passam por esse ponto e de um segmento de comprimento dado em que *O* é ponto médio desses segmentos, ou seja esse segmento representa seus diâmetros. Em D_4 ela é vista como a fronteira de um círculo e como uma curva formada pelos pontos eqüidistantes do centro desse círculo. Em D_5 a circunferência é definida como um lugar geométrico do plano.

Podemos perceber que D_1 é a única que trata explicitamente a circunferência como um conjunto de pontos. Que em D_1 e D_4 o centro e a eqüidistância são fundamentais, enquanto que em D_2 e D_3 o diâmetro é fundamental sob dois pontos de vista diferentes: eixo de simetria e segmento que passa pelo centro.

Atividade 02: relacionando perímetro e área

a) Abra o arquivo **mod_10_perimetro-area**.

b) Observe que a medida do segmento *AB* representa o perímetro das figuras. Mova o ponto *B* e compare as áreas das figuras.

c) O que podemos dizer a respeito da área do círculo em relação a área das outras figuras?

Objetivo: comparar áreas de figuras que têm o mesmo perímetro.
Comentários: aqui entendemos o comprimento da circunferência como sendo seu perímetro para perceber, na exploração das construções apresentadas no arquivo dado, que o círculo é a figura de maior área dentre as que têm mesmo perímetro.

Atividade 03: observando eixos de simetria

a) Trace uma circunferência de centro *O* e diâmetro $\overline{AB}$.

b) Determine um ponto *C* na circunferência e seu simétrico em relação a $\overline{AB}$ e chame-o de *C´*.

c) Movimente o ponto *C* e os pontos *A* e *B*. O ponto *C´* pertence à circunferência?

d) O que você pode concluir a respeito dos diâmetros dessa circunferência?

e) Tome um ponto *D* na circunferência e determine seu simétrico, *D´*, em relação ao ponto *O*. Trace $\overline{DD'}$.

f) Movimente o ponto *D*. O que você pode concluir?

g) Altere a medida do raio da circunferência traçada e verifique a validade de suas conclusões.

Objetivo: identificar a circunferência como uma figura que tem infinitos eixos de simetria.
Comentários: após a construção e a exploração da figura no software, perceber que no item (e) deve-se concluir que a circunferência admite infinitos eixos de simetria e que estes são seus diâmetros. No item (g), concluir que o simétrico de um ponto da circunferência em relação ao centro também pertence à circunferência e determina um de seus diâmetros. No final, entender que essas propriedades são válidas para outras circunferências.

Atividade 04: relacionando ponto e circunferência

Estude as posições que um ponto pode ocupar no plano em relação a uma circunferência. Complete a tabela abaixo para cada situação encontrada, identificando a relação entre a distância do ponto ao centro da circunferência e a medida de seu raio.

Circunferência e Ponto		
Representação Geométrica	**Relação de Posição**	**Relações Métricas**

Objetivo: identificar as relações de posição entre ponto e circunferência e analisar as respectivas relações métricas.
Comentários: um ponto pode ser externo à circunferência quando a distância entre ele e o centro dessa circunferência for maior que a medida do raio, pode pertencer à circunferência quando sua distância ao centro for igual à medida do raio e pode ser interno à circunferência quando sua distância ao centro for menor que a medida do raio.

Atividade 05: relacionando reta e circunferência

Estude, construindo em um software de geometria dinâmica, as posições que uma reta pode ocupar no plano em relação a uma circunferência. Complete a tabela abaixo para cada situação encontrada, identificando a relação entre a distância do centro da circunferência até a reta e a medida de seu raio.

<table>
<tr><th colspan="3">Circunferência e Reta</th></tr>
<tr><th>Representação Geométrica</th><th>Relação de Posição</th><th>Relações Métricas</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Definição:</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Definição:</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Definição:</td></tr>
</table>

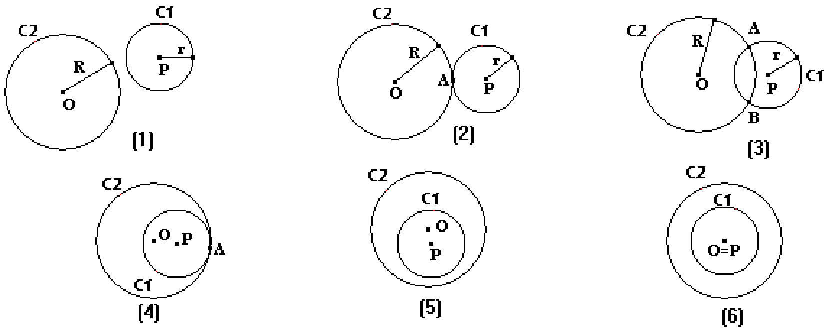
Objetivo: identificar as posições possíveis entre reta e circunferência e analisar as respectivas relações métricas.
Comentários: existem três possibilidades para essas relações: a reta não intercepta a circunferência e neste caso dizemos que a reta é externa à circunferência e a distância de seu centro à reta é maior que a medida do raio; a reta intercepta a circunferência em um único ponto e neste caso dizemos que a reta é tangente à circunferência e a distância de seu centro à reta é igual à medida do raio, e finalmente, a reta intercepta a circunferência em dois pontos e neste caso dizemos que a reta é secante à circunferência e a distância de seu centro à reta é menor que a medida do raio.

Atividade 06: relacionando duas circunferências

Trace, em um software de geometria dinâmica, duas circunferências distintas, C_1 e C_2, de raios diferentes. Movimente-as pelo centro e identifique as posições que uma circunferência pode ocupar no plano em relação a outra circunferência. Meça a distância entre os centros e complete a tabela abaixo com suas observações.

Circunferência e Circunferência		
Representação Geométrica	**Relações de Posição**	**Relações Métricas**
Definição:		
Definição:		
Definição:		
Definição:		
Definição:		
Definição:		

Objetivo: identificar as posições possíveis entre duas circunferências e analisar as respectivas relações métricas.
Comentários: Identificar as posições entre duas circunferências a partir das medidas entre seus centros e relacionar tais posições com as medidas dos raios das circunferências.
Existem seis posições possíveis para essas relações. Observe a figura abaixo.



Em (1) temos $d(O,P) > R+r$ e podemos dizer que C_1 é externa à C_2 e vice-versa; em (2) temos $d(O,P) = R+r$, $C_2 \cap C_1 = \{A\}$ e dizemos que C_1 é tangente externa à C_2 e vice-versa; em (3), (4) e (5) temos $d(O,P) < R+r$ mas em (3) $C_2 \cap C_1 = \{A,B\}$ e dizemos que C_2 e C_1 são secantes; em (4) $C_2 \cap C_1 = \{A\}$ e dizemos que C_1 é tangente interna à C_2 e em (5) dizemos que C_1 é interna à C_2; finalmente, em (6) temos $d(O,P) = 0$ e dizemos que C_2 e C_1 são concêntricas.
Observe que nas situações das circunferências serem tangentes os centros e o ponto de tangência são alinhados.

10.2 Cordas, Arcos e Ângulos

Atividade 01: cordas

a) Construa uma circunferência qualquer de centro *O*.

b) Trace um segmento com pontos *A* e *B* dessa circunferência. Esse segmento é chamado de ***corda*** da circunferência.

c) Manipule os pontos *A* e *B* e responda qual a corda de maior medida?

d) Trace a mediatriz da corda $\overline{AB}$ e movimente seus extremos. O que você pode concluir?

e) Marque um ponto *C* sobre a circunferência e trace a mediatriz da corda $\overline{BC}$.

f) Movimente o ponto C. Em que ponto interceptam-se as duas mediatrizes?

g) Enuncie a relação encontrada.

Objetivo: definir corda e estudar algumas de suas propriedades.
Comentários: após a definição de corda, observar que a corda de maior medida de uma circunferência é o seu diâmetro, que a mediatriz de uma corda qualquer da circunferência passa pelo seu centro e que as mediatrizes de duas cordas de uma circunferência interceptam-se no seu centro.

Atividade 02: aplicação

a) Determine três pontos quaisquer *A*, *B* e *C*, não colineares e trace uma circunferência por esses pontos. Movimente os pontos *A*, *B* e *C*.

b) Enuncie essa propriedade.

Objetivo: construir a circunferência que passa por três pontos distintos quaisquer, não colineares.
Comentários: Se *A*, *B* e *C* são pontos distintos de uma circunferência então $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são cordas dessa circunferência, logo suas mediatrizes interceptam-se no centro da circunferência que passa por esses três pontos.

Atividade 03: arcos e ângulos

a) Trace uma circunferência de centro *O* e marque nela pontos *A* e *B*.

b) Dois pontos quaisquer numa circunferência determinam quantos arcos?

c) Como podemos diferenciar os dois arcos obtidos?
d) Trace os raios por esses pontos.
e) Marque o ângulo menor $A\hat{O}B$ e o arco AB correspondente a esse ângulo.

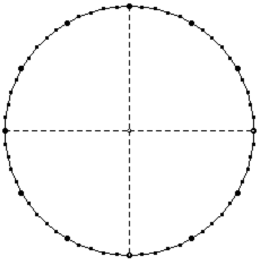
Todo ângulo cujo vértice coincide com o centro da circunferência é chamado de **ângulo central**.

f) Trace outras duas circunferências com centro em *O* e semi-retas com origem em *O* passando pelos pontos *A* e *B*. Determine nessas circunferências, os arcos correspondentes ao ângulo menor $A\hat{O}B$.
g) Meça o ângulo $A\hat{O}B$ e movimente o ponto *A* ou o ponto *B*.
h) A medida desse ângulo central depende do raio das circunferências?
i) Se *A* e *B* são extremos de um diâmetro os dois arcos obtidos são chamados de...........................
Neste caso qual é a medida do ângulo central? ....

Objetivo: definir ângulo central e identificar algumas de suas características. **Comentários:** observar a partir da exploração da construção que a medida de um ângulo central não depende do raio da circunferência e que os arcos que cujos extremos são extremos de um diâmetro são semi-circunferências e o ângulo central correspondente mede 180^0.

Atividade 04: ângulos formados pelos ponteiros do relógio

O mostrador de um relógio é dividido em 12 partes iguais pelas marcas que indicam as horas e em 60 partes iguais pelas marcas que indicam os minutos.
Complete as sentenças:



a) Em uma hora o ponteiro das horas descreve um ângulo de ... e o ponteiro dos minutos um ângulo de ...
b) Em 15 minutos o ponteiro dos minutos descreve um ângulo de ... e o ponteiro das horas um ângulo de ...
c) Em 20 minutos o ponteiro das horas descreve um ângulo de ...

e o ponteiro dos minutos um ângulo de ...
d) Em um minuto o ponteiro dos minutos descreve um ângulo de ...
e) Em meia hora o ponteiro dos minutos descreve um ângulo de ...
e o ponteiro das horas um ângulo de ...
f) Qual é o menor ângulo entre os ponteiros às 16h20min? ...
g) Qual é o menor ângulo entre os ponteiros às 8h45min? ...
h) Qual é o menor ângulo entre os ponteiros às 10h18min? ...
i) Qual é o menor ângulo entre os ponteiros às 13h12min? ...

Objetivo: calcular o menor ângulo entre os ponteiros do relógio em um determinado instante.
Comentários: em situações deste tipo é fundamental observar que enquanto o ponteiro dos minutos dá uma volta inteira, o ponteiro das horas percorre 1/12 da volta inteira, ou seja, faz um giro de 30^0. Assim, por exemplo, no item (c), temos que em 20 minutos o ponteiro das horas descreverá um ângulo de 10^0 e o ponteiro dos minutos 120^0. Por outro lado, queremos também observar o ângulo formado pelos ponteiros do relógio e aqui temos que estar atentos porque os dois ponteiros se movimentam simultaneamente. Notamos que a cada minuto o ponteiro dos minutos percorre 6^0 (360^0/60 min) e o ponteiro das horas $0,5^0$ (30^0 / 60 min). Para obter a resposta do item (g), $7,5^0$, devemos notar que, se o ponteiro dos minutos já percorreu 3/4 da volta inteira, o ponteiro das horas percorreu 3/4 de 30^0, sendo que o ângulo entre ele é de 1/4 de 30^0. Para o item (h) 10h18min notamos que às 10 horas em ponto, o ângulo entre os ponteiros é de 60^0, após 18 minutos o ponteiro dos minutos percorreu um ângulo de 108^0 (18 x 6^0) totalizando 168^0. No entanto temos que considerar que o ponteiro das horas nesses 18 minutos percorreu um ângulo de 9^0 (18x $0,5^0$) que devemos subtrair da medida anteriormente obtida: $168^0 - 9^0 = 159^0$.

Atividade 05: cordas e arcos
a) Trace uma circunferência e nela determine dois arcos *AB* e *CD* de mesmo comprimento.
b) Trace as cordas correspondentes a esses arcos e determine suas medidas.

c) Determine a medida do ângulo central correspondente a cada arco. O que você observou? .....
d) Altere o comprimento dos arcos. O que você pode concluir?

Objetivo: relacionar arcos de circunferência com cordas e ângulo central.
Comentários: a construção no software não é única e sua exploração deve conduzir ao fato de que arcos de uma circunferência com mesmo comprimento determinam cordas e ângulo central de mesma medida e vice-versa.

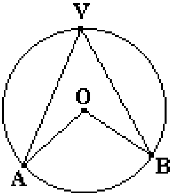
Atividade 06: propriedade das cordas
a) Trace uma circunferência de centro *O* e nela tome os pontos distintos *G* e *M*.
b) Trace os diâmetros $\overline{GH}$ e $\overline{MK}$.
c) Determine e meça as possíveis cordas, que não sejam diâmetros, com os pontos *G*, *M*, *K* e *H*.
d) Movimente os pontos *G* e *M*.
e) O que você pode concluir?
f) Volte à definição D_3 (atividade 1) e a relacione com suas conclusões.

Objetivo: relacionar cordas e diâmetros.
Comentários: explorando a construção no software pode-se conjeturar que dois diâmetros distintos determinam quatro cordas, duas a duas de mesma medida, formando um paralelogramo. Como os diâmetros são as diagonais desse paralelogramo e têm mesma medida, podemos concluir que se trata de um retângulo.
Revendo a definição 3 de circunferência e a construção feita podemos concluir que a circunferência pode ser gerada por meio da rotação de um segmento (diâmetro) em torno de seu ponto médio.

Atividade 07: usando propriedade das cordas
Definição: Um polígono cujos vértices pertencem a uma circunferência é chamado de polígono inscrito nessa circunferência.
a) Construa uma circunferência e esconda seu centro. A seguir inscreva um quadrado nessa circunferência.
b) Descreva sua construção.

Objetivo: aplicar a relação entre cordas e diâmetros.
Comentários: devemos lembrar que a mediatriz de uma corda qualquer determina um diâmetro da circunferência e que as diagonais de um quadrado são perpendiculares. Logo, traçando a mediatriz de uma corda qualquer da circunferência, obtemos um diâmetro com extremos nas intersecções da mediatriz com a circunferência, e a mediatriz desse diâmetro nos fornecerá o outro diâmetro. Os dois diâmetros encontrados são as diagonais do quadrado procurado.

Atividade 08: ângulo inscrito



a) Construa a figura ao lado.

b) Marque o ângulo central $A\hat{O}B$.

c) Marque o ângulo $A\hat{V}B$.

Definição: Todo ângulo com vértice na circunferência é chamado **ângulo inscrito**.

d) Meça os dois ângulos, $A\hat{V}B$ e $A\hat{O}B$, e determine a razão entre os valores encontrados.

e) Movimente os pontos *A* e *B*. O que você pode concluir?

f) Escreva o que acontece com as medidas desses ângulos quando se altera o raio da circunferência.

g) Movimente o ponto *V*, no arco $A\overset{\frown}{V}B$, sem considerar os pontos *A* e *B*. O que ocorre com a medida do ângulo $A\hat{V}B$?

h) Movimente o ponto *V*, sobre o arco menor *AB*. O que ocorre com a medida do ângulo $A\hat{V}B$? Existe alguma relação entre as medidas dos ângulos nesta situação?

g) Qual a medida de um ângulo inscrito numa semicircunferência?

Objetivo: definir ângulo inscrito e relacioná-lo com o ângulo central correspondente.
Comentários: observar que para um ângulo central correspondente a um arco podemos associar vários ângulos inscritos de mesma medida e igual a metade da medida do ângulo central correspondente. Além disso, observar que os ângulos não se alteram quando modificamos a medida do raio da circunferência e que a relação entre as medidas só

é válida quando o vértice do ângulo inscrito não está sobre o arco que determina o ângulo central considerado. O ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto.

Atividade 09: triângulo inscrito em uma circunferência

a) Trace uma circunferência de centro *O* e diâmetro $\overline{AB}$.
b) Tome um ponto *C* no arco *AB* e trace o triângulo *ACB*.
c) Movimente o ponto *C* sobre o arco *AB*, excluindo os pontos *A* e *B*.
d) Caracterize esse triângulo quanto aos ângulos e lados.
e) Enuncie as propriedades que você observou.

Objetivo: caracterizar algumas propriedades de um ângulo inscrito numa semicircunferência.
Comentários: a partir da construção e exploração da figura no software observar e enunciar que:
- Todo ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto.
- Todo triângulo inscrito numa circunferência tendo como um de seus lados um diâmetro dessa circunferência é retângulo.
- Por ser retângulo não pode ser eqüilátero, mas pode ser isósceles.
- A hipotenusa do triângulo inscrito numa semicircunferência é o seu diâmetro.

Atividade 10: propriedade do ângulo inscrito

a) Trace uma circunferência e nela determine um arco $A\overset{\smile}{C}B$.
b) Construa dois ângulos inscritos distintos, com vértices *E* e *F*, correspondentes a esse arco.
c) Meça esses ângulos. Altere o arco movimentando os pontos *A* ou *B*. Movimente *E* e *F*.
O que você pode concluir?

Objetivo: compreender que para um ângulo central existe mais do que um ângulo inscrito de mesma medida.

Atividade 11: arco capaz

a) Determine uma circunferência de centro *O* e raio de medida *r* e nela marque a corda $\overline{AB}$.
b) Determine o arco maior *AB* e nele tome um ponto *P*.
c) Determine e meça o ângulo inscrito $A\hat{P}B$.

d) Movimente o ponto *P* sobre o arco, sem considerar os pontos *A* e *B*. O que você pode concluir?

Definição: Considerando uma corda *AB* em uma circunferência. Para todo ponto *P* sobre um dos arcos determinados por *A* e *B*, a medida do ângulo $A\hat{P}B$ é constante. Este arco é chamado **arco capaz** do ângulo $A\hat{P}B$ sobre o **segmento** $\overline{AB}$ e recebe este nome por ser considerado como o arco capaz de ver o segmento $\overline{AB}$ sob um determinado ângulo.

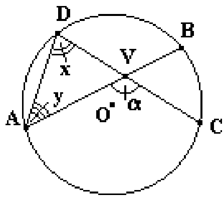
e) Movimente o ponto *A*, para obter um outro segmento *AB*, a seguir, movimente o ponto *P* e observe o ângulo? Escreva suas conclusões.
f) Procure um procedimento de construção para o arco capaz a partir de um segmento e um ângulo dados.

Outro ponto de vista
O arco capaz pode ser visto também como sendo o lugar geométrico dos pontos de um plano capazes de ver um segmento dado sob um ângulo determinado.

Objetivo: definir arco capaz.
Comentários: compreender, a partir da definição, que um observador que se movimenta sobre o arco capaz, consegue ver o segmento $\overline{AB}$ sempre sob o mesmo ângulo. Se um ponto *N* pertence ao outro arco, a medida do ângulo *ANB* também é constante e igual a $180^0 - med(A\hat{M}B)$.

Atividade 12: ângulo de vértice interno
a) Trace uma circunferência de centro *O* e nela determine as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ que se interceptam em *V*. Os quatro ângulos formados com vértice em *V* são chamados de ângulo de vértice interno.
b) Marque e meça o ângulo *AVC*.
c) Marque e meça o ângulo inscrito de vértice *A* que vê o arco *DB* e o ângulo inscrito de vértice *D* que vê o arco *AC*.
d) Relacione as medidas desses ângulos.
e) Generalize e justifique algebricamente a relação obtida.

Objetivo: definir ângulo de vértice interno e determinar sua medida.
Comentários: a medida do ângulo de vértice interno *AVC* é igual a soma das medidas dos ângulos inscritos *CDA* e *DAB*, pois no triângulo *ADV* os ângulos *A* e *D* são internos não adjacentes ao ângulo externo *AVC*. Podemos associar o ângulo *AVC* também ao triângulo *BVD*.
A mesma propriedade é válida para o ângulo *BVD* associado aos triângulos *AVD* ou *BVC*.
Podemos então enunciar que: *a medida de um ângulo de vértice interno é igual à metade da soma das medidas dos ângulos inscritos correspondentes ao arco do ângulo de vértice interno.*
Considerando na figura ao lado o ângulo de vértice interno *AVC* de medida α e o triângulo *ADV*, temos que $\alpha = x + y$. Por outro lado, como *ADC* é um ângulo inscrito sua medida pode ser dada também por $x = \dfrac{med(A\hat{O}C)}{2}$



e de modo análogo teremos

$y = \dfrac{med(B\hat{O}D)}{2}$.

O que nos leva a enunciar também que
a medida de um ângulo de vértice interno é igual à metade da soma das medidas dos ângulos centrais determinados pelos arcos formados por seus lados.

Atividade 13: ângulo de vértice externo

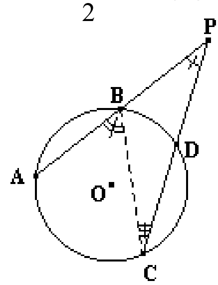
a) Trace uma circunferência de centro O.
b) Por um ponto P externo à circunferência trace duas secantes que a interceptam em A e B, e C e D respectivamente. O ângulo APC é chamado de ângulo de vértice externo.
c) Determine uma relação entre a medida do ângulo de vértice externo e os ângulos associados aos arcos internos determinados pelas secantes.
d) Enuncie e valide a relação determinada.

Objetivo: definir ângulo de vértice externo e determinar sua medida.
Comentários: a medida de um ângulo de vértice externo é igual ao módulo da diferença entre as medidas dos ângulos inscritos determi-

nados pelos arcos internos às secantes, BA e BC, ou também, a metade do módulo da diferença entre as medidas dos ângulos centrais associados aos arcos internos às secantes.

De fato, observando a figura ao lado e considerando o ângulo de vértice externo BPD de medida α e no triângulo BDC o ângulo BCD de medida x e o ângulo interno ABC de medida y, podemos concluir que $\alpha = |x - y|$. Por outro lado, como o ângulo ABC é um ângulo inscrito determinado pelo arco AC com medida $\frac{med(A\hat{O}C)}{2}$ e o ângulo BCP é um ângulo inscrito determinado pelo arco BD medindo $\frac{med(B\hat{O}D)}{2}$ o que nos leva a concluir que:

$$med(A\hat{P}C) = \frac{med(A\hat{O}C)}{2} - \frac{med(B\hat{O}D)}{2}.$$



Atividade 14: ângulo de segmento

a) Construa uma circunferência de centro *O*.

b) Determine, nessa circunferência, uma corda $\overline{AB}$.

c) Determine uma reta *t* tangente à circunferência no ponto *B*.

d) Tome um ponto *D* na reta *t*, de modo que o arco menor *AB* fique interno ao ângulo $A\hat{B}D$.

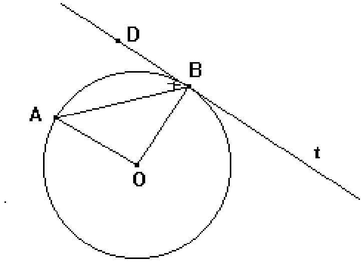
e) Marque e meça esse ângulo.

f) Marque e meça o ângulo central $A\hat{O}B$.

g) Que relação existe entre as medidas desses dois ângulos?

O **ângulo de segmento** relativo a uma circunferência é todo ângulo cujo vértice pertence à circunferência, sendo um de seus lados secante e outro tangente à circunferência. Sua medida é metade da medida do ângulo central correspondente à corda. No desenho abaixo, $A\hat{B}D$ é o ângulo de segmento.

$$med(A\hat{B}D) = \frac{med(A\hat{O}B)}{2}$$

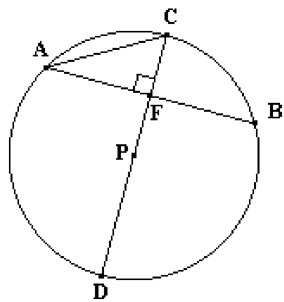


Objetivo: definir ângulo de segmento e sua medida.

Familiarização

Exercício 1

Em cada caso abaixo, determine justificando, se possível a resposta solicitada.



Caso contrário escreva: "supérflua" quando houver mais informações do que as necessárias para se obter a resposta numérica; "não é suficiente" quando as informações forem insuficientes para se obter a resposta numérica e "contraditório" quando os dados fornecidos forem contraditórios.

Na figura, P é o centro da circunferência e $\overline{AB} \perp \overline{CD}$.

a) $AF = 5$, $AB =$ b) $PB = 7$, $CD =$

c) $AC = 9$, $PB =$ d) $CF = 3$, $FP = 2$, $PD = 6$, $CD =$

e) $PB = 13$, $PF = 5$, $AB =$

f) $AB = 16$, $CD = 20$, CF = 4, $PB =$

g) $CF = 7$, $PB = 17$, $FB = 10$, $CD =$

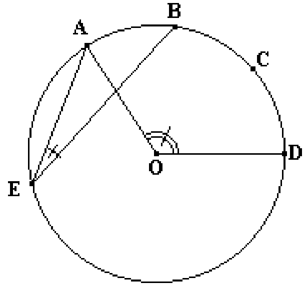
h) $CD = 30$, $AB = 24$, $AC =$

i) $PB = 25$, $FB = 20$, $CF = 10$, $AC =$

j) $PD = 12$, $CF = 6$, $AB =$

Exercício 2

Na figura $AB = BC = CD$ e $med(A\hat{O}D) = 126^o$, sendo O o centro da circunferência. Isso permite afirmar que a medida do ângulo $A\hat{E}B$ é:

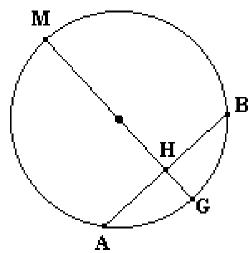


a) 18º | b) 36º
c) 21º | d) 42º
e) 43º

Exercício 3

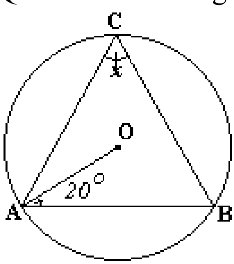
Na figura ao lado $med(A\hat{M}G) = med(B\hat{M}G)$.

Demonstre que $\Delta MHB \sim \Delta MAG$.

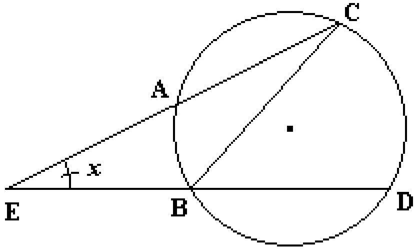


Exercício 4

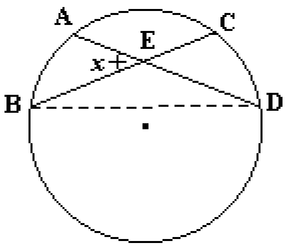
Quanto vale x em graus sabendo que O é o centro?



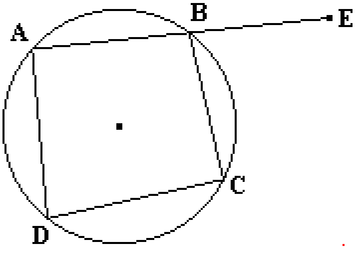
Exercício 5
O arco menor AB mede 50°. O arco menor CD mede 70°. Obter x.



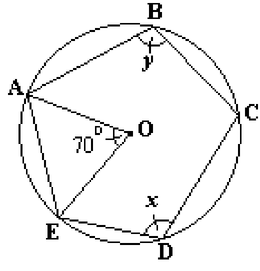
Exercício 6
O arco menor AB mede 30°. O arco menor CD mede 20°. Obter x.



Exercício 7
Na figura temos: $m(B\hat{A}D) = 108^0$ e $m(A\hat{D}C) = 112^0$. Qual a medida de $E\hat{B}C$?



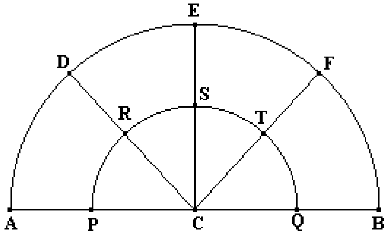
Exercício 8
Obter o valor de $x + y$ sabendo que O é o centro da circunferência.



Exercício 9

Dados: $\overset{\frown}{AB}$ uma semicircunferência de centro C, $\overset{\frown}{PQ}$ uma semicircunferência de centro C, $\overline{EC} \perp \overline{AB}$ e $\overline{DC} \perp \overline{CF}$.

Mostre que $med(\overset{\frown}{AD}) + med(\overset{\frown}{QT}) = med(\overset{\frown}{EF}) + med(\overset{\frown}{RS})$.

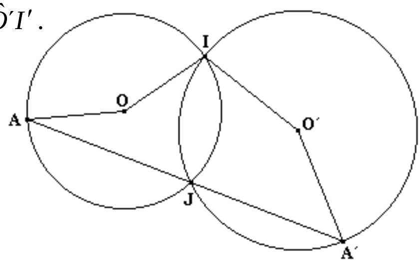


Exercício 10

Mostre que numa circunferência um diâmetro perpendicular a uma corda divide ao meio, o arco determinado por essa corda.

Exercício 11

Na figura abaixo, os pontos A, J e A’ são colineares. Compare as medidas dos ângulos $A\hat{O}I$ e $A\hat{O'}I'$.



Exercício 12

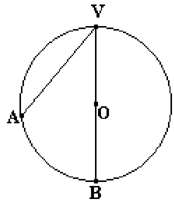
Demonstre o teorema do ângulo inscrito: A medida de um ângulo inscrito é igual à metade da medida do ângulo central correspondente.

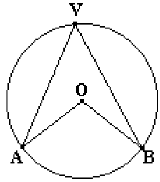
Considere os casos abaixo:

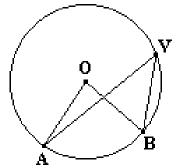
1º caso: um lado passa pelo centro.

2º caso: o centro é interno ao ângulo.

3º caso: o centro é externo ao ângulo.







10.3 Potência de ponto, relações entre tangentes e secantes

Atividade 01:procurando uma proporção

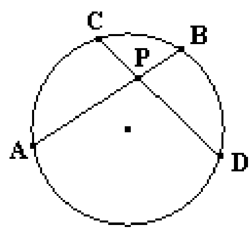
a) Trace uma circunferência e as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ que se interceptam no ponto P.

b) Meça os segmentos PA, PB, PC e PD.

c) Identifique uma proporcionalidade com essas medidas. Movimente os pontos.

d) Enuncie uma propriedade para essa relação.

Objetivo: explorar as relações entre as medidas dos segmentos formados por duas cordas concorrentes de uma circunferência.



Comentários: a partir da construção e exploração em um software conjeturar que temos a proporcionalidade $\frac{PA}{PC}=\frac{PD}{PB}$ e a partir dela enunciar a propriedade: dadas duas cordas, AB e CD, que se interceptam no ponto P, o produto das medidas dos segmentos formados em uma corda ($PA \times PB$) é igual ao produto dos segmentos formados na outra corda ($PC \times PD$).

Atividade 02: determinando a potência de um ponto em relação a uma circunferência

a) Trace uma circunferência e um ponto P na sua região exterior.

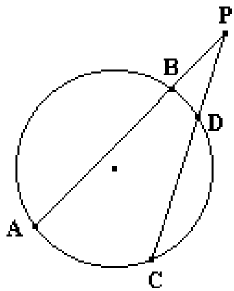
b) Trace por P, as secantes AB e CD.

c) Meça os segmentos PA, PB, PC e PD.

d) Identifique uma proporcionalidade com essas medidas. Movimente os pontos.

e) Compare estas relações com as obtidas na atividade anterior.
f) Generalize enunciando uma propriedade para esses resultados.

O produto $PA \cdot PB$ é constante para qualquer secante passando por P. Esse produto é chamado de potência do ponto P em relação à circunferência e se indica por Pot(P). Esse fato é conhecido desde a antiguidade, mas o termo potência foi utilizado pela primeira vez por Jacob Steiner (1796 – 1863), matemático suíço que deu enorme contribuição ao desenvolvimento da Geometria. (RPM-45).



Objetivo: definir potência de um ponto em relação a uma circunferência

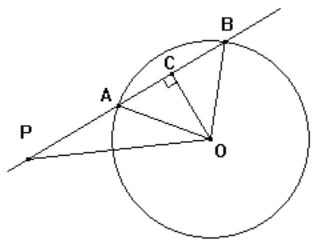
Comentários: se as retas suportes de duas cordas, *AB* e *CD* de uma circunferência, concorrem em um ponto *P*, interior ou exterior a essa circunferência, o produto $PA \times PB$ é igual ao produto $PC \times PD$. O produto $PA \times PB$ é chamado potência do ponto *P* em relação à circunferência.

Atividade 03: demonstrando uma propriedade

a) Trace uma circunferência de centro *O* e um ponto *P* na sua região externa.
b) Trace por *P* a secante *AB*.
c) Calcule a potência de *P* em relação a essa circunferência.
d) Movimente os pontos *A* e *B* e observe a potência calculada.
e) Determine o segmento *PO*.
f) Trace o triângulo *OAB* e classifique-o.
g) Trace a altura $\overline{OC}$ desse triângulo.
h) Classifique os triângulos *PCO* e *ACO*.

i) Observando os triângulos construídos relacione algebricamente a potência de *P* em relação a circunferência com as medidas de *PO* e do raio.
j) Enuncie essa propriedade.
k) Verifique a validade dessa propriedade para *P* no interior da circunferência.
l) O que acontece com a expressão $PO^2 - OA^2$ se *P* é exterior a circunferência, se *P* pertence a circunferência e se P é interior a circunferência?

Objetivo: relacionar a potência de ponto em relação a uma circunferência com a distância desse ponto ao centro dessa circunferência e seu raio.
Comentários: com a exploração da figura construída no software deve-se concluir que a potência de um ponto *P* em relação a uma circunferência de centro *O* e raio dado é constante, isto é $PA \times PB = k$ para quaisquer *A* e *B* pertencentes a uma secante que passa por *P*.



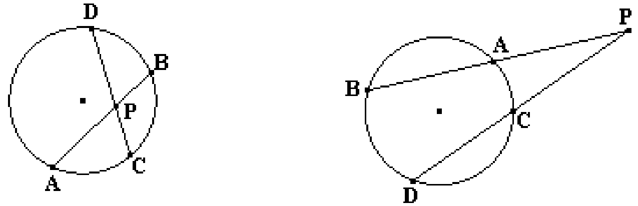
Podemos relacionar esse produto com a distância do ponto *P* ao centro e a medida do raio da circunferência:
$PA \times PB = PO^2 - r^2$ e justificar algebricamente da seguinte forma:
Observando os triângulos construídos temos que:
$PA \times PB = (PC - AC)(PC + CB)$, mas como $\overline{OC}$ é mediatriz de $\overline{AB}$, $CB = AC$, pois o triângulo *AOB* é isósceles podemos escrever:
$PA \times PB = (PC - AC)(PC + AC) = PC^2 - AC^2$
Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos *PCO* e *ACO* vem que:
$PC^2 - AC^2 = (PO^2 - OC^2) - (OA^2 - OC^2) = PO^2 - OA^2 = PO^2 - r^2$.
Assim, podemos concluir que $PA \times PB = (PC - AC)(PC + CB)$.
Podemos enunciar então que: *A potência de um ponto P em relação a uma circunferência pode ser encontrada por* $PO^2 - r^2$ *sendo PO a distância de P ao centro e r a medida do raio da circunferência.*
Explorando a figura construída no software percebemos que se *P* é exterior à circunferência $PO > r$ e $Pot(P) > 0$. Se *P* pertence à cir-

cunferência $PO = r$ e $Pot(P) = 0$. Se P é interior à circunferência $PO < r$ e $Pot(P) < 0$.

Atividade 04: identificando um lugar geométrico
Qual é o lugar geométrico dos pontos do plano que têm a mesma potência do ponto P em relação à circunferência de centro O e raio r?

Institucionalização

1) Dadas duas secantes a uma circunferência que se interceptam em um ponto *P*, conforme figuras abaixo, temos que $PA \times PB = PC \times PD$.



2) Se P é exterior à circunferência de centro O e raio de medida *r* temos $Pot(P) = PO^2 - r^2$ é positiva, isto é $PO^2 > r^2$.

Se P pertence à circunferência então $Pot(P) = PO^2 - r^2 = 0$, isto é $PO^2 = r^2$.

Se P é interior à circunferência então $Pot(P) = PO^2 - r^2$ é negativa, isto é $PO^2 < r^2$.

3) O lugar geométrico dos pontos que possuem determinada potência em relação à uma circunferência é outra circunferência concêntrica com a primeira.

Atividade 05: procurando uma relação entre tangentes
a) Trace uma circunferência de centro *O* e um ponto *P* em sua região exterior.
b) Por *P* construa as duas tangentes à circunferência e chame os pontos de tangência de *Q* e *R*.
c) Descreva sua construção.
d) Relacione as medidas de $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$.

e) Movimente o ponto P e verifique se a relação continua válida.

Objetivo: relacionar os segmentos formados por tangentes a uma circunferência que passam por um ponto exterior a essa circunferência.
Comentários: para encontrar os pontos *Q* e *R* determine o ponto *M*, médio de *PO*. Trace a circunferência de centro em *M* e raio $\overline{MO}$ que intercepta a circunferência inicial nos pontos *Q* e *R*. Observe que os triângulos *PRO* e *PQO* são inscritos em semicircunferências de diâmetro $\overline{PO}$ e por isso são retângulos em *Q* e *R*, o que garante que *PQ* e *PR* sejam tangentes à circunferência. Observe que mesmo movimentando o ponto *P* temos $PQ = PR$.

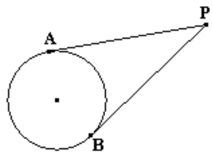
Atividade 06: procurando uma relação entre tangente e secante

a) Trace uma circunferência e um ponto *P* na sua região exterior.
b) Por *P* trace uma secante à circunferência que a intercepta nos pontos *Q* e *S*.
c) Por *P* trace uma tangente à circunferência e chame o ponto de tangência de *T*.
d) Meça os segmentos *PT*, *PS* e *PQ*.
e) Identifique uma proporcionalidade para essas medidas.
f) O que você pode concluir?

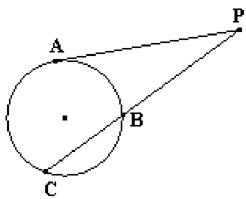
Objetivo: relacionar os segmentos formados por uma tangente e uma secante a uma circunferência que passam por um ponto exterior a essa circunferência.
Comentários: explorando a construção no software e usando a calculadora podemos perceber que existe a proporcionalidade $\frac{PQ}{PT} = \frac{PT}{PS}$ ou que $PT^2 = PQ \times PS$ e enunciar que quando uma secante e uma tangente a uma circunferência são concorrentes em um ponto *P*, a medida do segmento determinado pela tangente ao quadrado é igual ao produto do segmento maior determinado pela secante e a sua parte externa.

Institucionalização

Se duas tangentes a uma circunferência, nos pontos A e B, interceptam-se no ponto P. Então $PA = PB$.



Se uma secante a uma circunferência em B e C e uma tangente em A interceptam-se em P, temos: $\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PA}$ e, portanto $PA^2 = PB \times PC$.



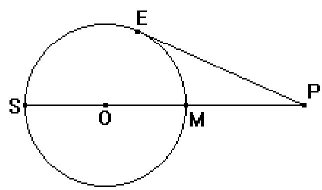
Familiarização

Exercício 1

Uma circunferência tem 10 cm de raio. Qual é a potência de um ponto P, que está distante 12 cm do centro, em relação a essa circunferência?

Exercício 2

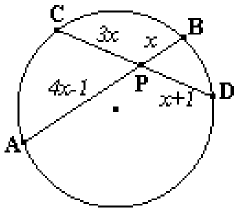
Na figura, O é o centro da circunferência e E é um ponto de tangência.
Se $PE = 6$ e $PO = 9$, qual a medida do raio da circunferência?



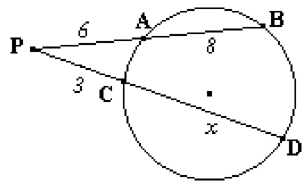
Exercício 3

Obtenha o valor de *x*.

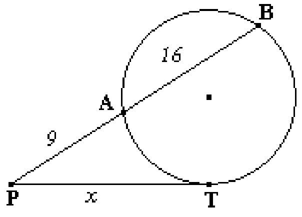
i)



ii)

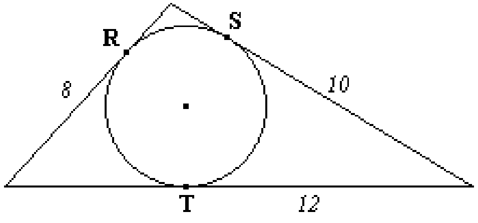


iii)

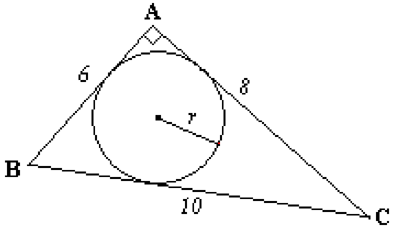


Exercício 4

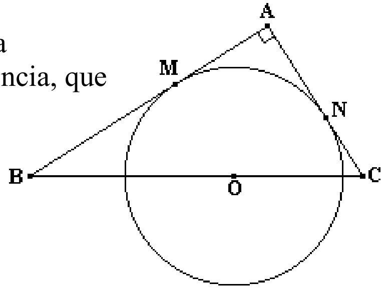
Obtenha o valor de *x* sabendo que *R*, *S* e *T* são pontos de tangência.



Exercício 5
Obtenha a medida do raio da circunferência inscrita.



Exercício 6
Quanto mede o raio da circunferência sabendo que *O* é centro da circunferência, que *M* e *N* são pontos de tangência e que *AB = 10* e *AC = 4.*



Exercício 7
Um balão de 29 cm de diâmetro está em contato com o muro e o chão. Podemos fazer passar uma bola de 5cm de diâmetro entre o muro, o chão e o balão?

10.4 Médias e Números Irracionais

Atividade 01: construindo a média aritmética
a) Trace dois segmentos de medidas *a* e *b*.
b) Trace uma reta horizontal e com ajuda do compasso determine o segmento $AB = a$ e $BC = b$.
c) Relacione algebricamente a medida *AC* com *a* e *b*.
d) Trace a circunferência de centro *O* e de diâmetro $a + b$.
e) O que você pode afirmar a respeito da medida do raio dessa circunferência?

Objetivo: obter geometricamente a média aritmética entre as medidas de dois segmentos.
Comentários: geometricamente, o ponto médio de dois segmentos colineares e consecutivos nos fornece dois segmentos cujas medidas representam a média aritmética das medidas dos dois segmentos

dados. A medida do raio de uma circunferência também pode ser observado como a média aritmética das medidas de dois segmentos que tem como soma o diâmetro dessa circunferência.

Atividade 02: construindo a média geométrica

a) Na mesma construção da atividade anterior trace por *B* uma perpendicular ao diâmetro que intercepta a circunferência no ponto *D*.

b) O que você pode afirmar a respeito do triângulo *ADC*?

c) Relacione algebricamente *BD* com *AB* e *BC*.

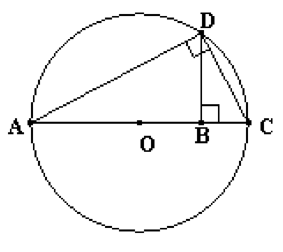
d) Identifique no triângulo *ADC* o segmento que representa $\sqrt{a \cdot b}$.

O número $\frac{a+b}{2}$ é chamado de **média aritmética** dos números *a* e *b*.

O número $\sqrt{a \cdot b}$ é chamado de **média geométrica (ou proporcional)** dos números *a* e *b*.

Objetivo: obter geometricamente a média geométrica entre as medidas de dois segmentos.

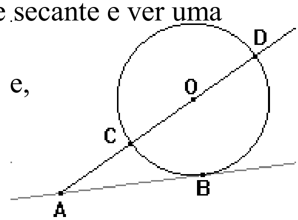
Comentários: na construção podemos ver três triângulos retângulos: *ADC*, *ABD* e *CBD*. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo *CBD* obtemos: $DC^2 = BD^2 + BC^2$ e no triângulo *ABD* obtemos $AD^2 = BD^2 + AB^2$. Por outro lado, no triângulo *ADC* temos que $AC^2 = AD^2 + DC^2$ ou $(AB + BC)^2 = AB^2 + 2 \times AB \times BC + BC^2 = AD^2 + DC^2$, mas das duas relações iniciais podemos ver que $AD^2 + DC^2 = 2 \times BD^2 + AB^2 + BC^2$. Substituindo este resultado na equação anterior obtemos $BD^2 = AB \times BC$ ou $BD = \sqrt{AB \times BC}$. Podemos então concluir que no triângulo retângulo *ADC* a altura em relação à hipotenusa é a média geométrica entre as medidas *a* e *b*. Pode-se também, justificar essa relação usando a semelhança entre os triângulos *ABD* e *BDC*.



Atividade 03: retomando relação entre tangente e secante

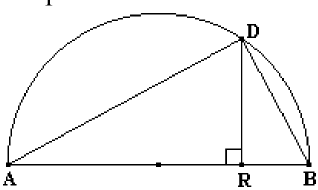
a) Trace uma circunferência de centro *O* e um ponto *A* na região externa.
b) Por *A* traçar uma tangente à circunferência no ponto *B*.
c) Trace por *A* uma reta secante que passe pelo centro e que intercepta a circunferência nos pontos *C* e *D*.
d) Relacione as medidas *AB*, *AC* e *AD*.

Objetivo: retomar a relação entre tangente e secante e ver uma média geométrica na relação já obtida.
Comentários: já vimos que $AB^2 = AD \times AC$ e, portanto *AB* é média geométrica entre as medidas *AD* e *AC*.



Atividade 04: médias geométricas em um triângulo retângulo

a) Construa em um software de geometria dinâmica figura representada pelo desenho abaixo:



b) Já vimos que *DR* é média geométrica entre *AR* e *RB*, isto é $DR = \sqrt{AR \times RB}$.
c) Verifique com o software que *DB* é média geométrica entre *AB* e *RB*. E, que *AD* é média geométrica entre *AB* e *AR*.
d) Mostre que se num triângulo *ABD* qualquer, em que *DR* é a altura em relação ao lado $\overline{AB}$, se *DB* é média geométrica de *AB* e *RB* e *AD* é média geométrica de *AB* e *AR* então o triângulo é retângulo.

Objetivo: estudar algumas relações métricas válidas para os triângulos retângulos.
Comentários: a partir da semelhança dos triângulos *ARD* e *DBR* podemos deduzir as proporções $\frac{AR}{DR}=\frac{DR}{RB}=\frac{AD}{DB}$ e a partir delas e do Teorema de Pitágoras podemos justificar as relações do item (c). No item (d) tem-se que se *DB* é média geométrica entre *AB* e *RB* temos $DB^2 = AB\times RB$ e que se *AD* é média geométrica entre *AB* e *AR* temos $AD^2 = AB\times AR$. Somando essas duas equações obtemos: $DB^2 + AD^2 = AB\times RB + AB\times AR = AB(RB + AR) = AB^2$, o que nos mostra que o Teorema de Pitágoras é válido, logo o triângulo *ABD* é retângulo.

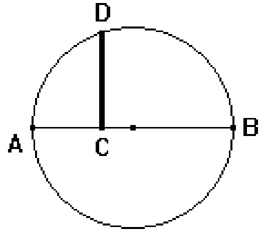
Atividade 05: construindo a raiz quadrada de um número

a) Trace um segmento qualquer de medida *a*.

b) Construa $\sqrt{a}$. (Observe que $a = 1\cdot a$).

c) Confira sua construção com a calculadora do software. Altere a medida do segmento para validar sua construção.

Objetivo: construir geometricamente um número irracional **Comentários**: a partir dos resultados das atividades anteriores podemos construir uma circunferência com diâmetro $\overline{AB}$ de medida *a* + 1 e obter a altura do triângulo *ADB* que terá medida $\sqrt{a}$, pois $CD=\sqrt{a}$ é a média geométrica entre *AC* = 1 e *CB* = *a*. Como não há nenhuma restrição sobre a medida *a* de um segmento esta técnica permite obter a representação geométrica de um número irracional



Atividade 06: construindo números irracionais do tipo $b\sqrt{3}$

a) Trace um segmento de comprimento *b*.

b) Construa graficamente o número irracional $b\cdot\sqrt{3}$. (Observe que $b\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3b\cdot b}$.

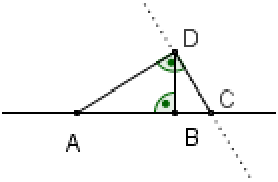
Objetivo: construir geometricamente números irracionais.
Comentários: nessa construção, o diâmetro da circunferência deve medir $3b + b$, para obter a altura do triângulo $h = \sqrt{3b \cdot b} = b\sqrt{3}$.

Atividade 07: representando geometricamente o inverso de um número

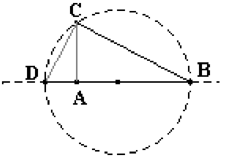
a) Dado um segmento de medida *a* construa um segmento de medida $\frac{1}{a}$.

b) Descreva sua construção.

Objetivos: representar geometricamente o inverso de um número.
Comentários: temos duas possibilidades para essa construção: 1) determinar em uma reta *r* o segmento *AB* de medida *a*. Traçar uma perpendicular por uma das extremidades de $\overline{AB}$ e marcar nesta perpendicular o segmento de medida *BD* = 1 cm (usando transferência de medidas e o 1 editado). Por *D* traçar uma perpendicular à $\overline{AD}$ que interceptará a reta *r* no ponto C. $BC = \frac{1}{a}$ pois os triângulos ABD e DBC são semelhantes e por isso $\frac{1}{a} = \frac{BC}{1}$.



2) Determinar em uma reta *r* o segmento *AB* de medida *a*. Traçar uma perpendicular por uma de suas extremidades.
Marcar nessa perpendicular o segmento de medida *AC* = 1 cm. Traçar a mediatriz de $\overline{CB}$ e determinar o ponto *M* de interseção desta reta com $\overline{AB}$. Traçar a circunferência de centro *M* e raio $\overline{MB}$ que interceptará a reta *r* no ponto *D*.
$DA = \frac{1}{a}$.

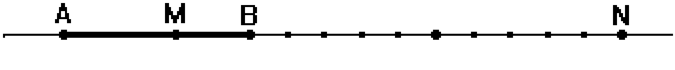


Atividade 08: dividindo harmonicamente um segmento
Situação: Dado um segmento *AB* determine os pontos *M* e *N* que divide esse segmento, interna e externamente, na razão 3/2.

Orientações
a) Trace uma reta *r* e nela determine um segmento *AB*.
b) Determine em $\overline{AB}$ o ponto *M* que divide internamente o segmento na razão 3 : 2, isto é $\frac{MA}{MB}=\frac{3}{2}$.
c) Para determinar o ponto *N* considere a proporção $\frac{NA}{NB}=\frac{3}{2}$ e determine algebricamente a relação entre *NA* e *AB* substituindo na proporção *NB* por $NA-AB$.
d) Agora, determine geometricamente esse ponto na reta r já construída.
e) Usando a calculadora do software verifique a validade da relação $\frac{MA}{MB}=\frac{NA}{NB}$

Quando um segmento está dividido por dois pontos, na mesma razão, chamamos tal divisão de **divisão harmônica.**
Dizemos que o ponto *M* divide internamente e o ponto *N* divide externamente $\overline{AB}$ na razão 3/2.
Os pontos *M* e *N* chamam-se conjugados harmônicos de *A* e *B* na razão 3/2.
Os pontos *A* e *B* chamam-se conjugados harmônicos de *M* e *N* na razão 3/2.

Objetivos: dividir harmonicamente um segmento.
Comentários: dado um segmento queremos encontrar dois pontos: *M* e *N* que dividem esse segmento na mesma razão.
Isto é $\frac{MA}{MB}=\frac{NA}{NB}=\frac{3}{2}$

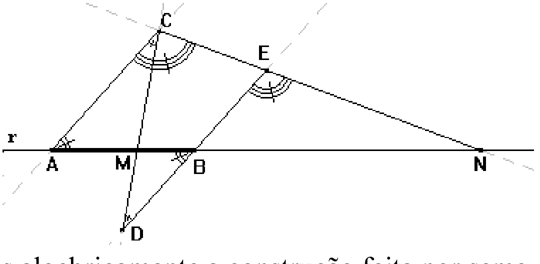


O ponto *M* é facilmente obtido com a divisão de *AB* em cinco segmentos de mesma medida e tomando para *MA* três dessas partes e para MB duas.O ponto N é um ponto externo ao segmento AB e precisamos encontrar sua localização. Para isso iremos considerar a razão $\frac{NA}{NB} = \frac{3}{2}$ e que $NB = NA - AB$ e verificar algebricamente que se $\frac{NA}{NA - AB} = \frac{3}{2}$ então $NA = 3AB$.

Atividade 09: explorando outra construção para divisão harmônica

a) Determine um segmento AB sobre uma reta r.
b) Por A trace uma reta s concorrente à r.
c) Por B trace uma reta t paralela à reta s.
d) Determine em s um ponto C tal que $AC = 3u$.
e) Determine em t, no semiplano oposto ao semiplano do ponto C em relação à reta r, um ponto D tal que $BD = 2u$.
f) Determine o ponto E simétrico do ponto D em relação ao ponto B.
g) Determine o ponto M de interseção de $\overline{CD}$ com r e o ponto N de interseção da reta CE com r. Observe que $M \in \overline{AB}$.
h) Meça os segmentos AM e MB e os segmentos NA e NB e verifique suas razões.
i) O que você pode concluir?
j) Movimente os pontos A e B e valide sua construção.
k) Observe a figura construída e justifique algebricamente sua construção.

Objetivos: propor outra construção para a divisão harmônica.
Comentários: após a construção podemos confirmar que $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = \frac{3}{2}$.



No item (h) justificamos algebricamente a construção feita por semelhança de triângulos.

Observando que o triângulo *MAC* é semelhante ao triângulo *MBD* podemos concluir que $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}$. Observando que o triângulo *NAC* é semelhante ao triângulo *NBE* podemos concluir que $\frac{NA}{NB} = \frac{3}{2}$. Pode-se também, justificar esta relação pelo Teorema de Thales uma vez que $\overline{DE} // \overline{AC}$ e as retas *CD*, *AB*, *CN* são transversais.

Atividade 10: relacionando divisão harmônica e triângulos

a) Mostre experimentalmente com um software de geometria dinâmica que as bissetrizes interna e externa que partem de um mesmo vértice de um triângulo *ABC* dividem harmonicamente (com os pontos *D* e *E*) o lado oposto, na mesma razão dos lados adjacentes. Considerando as bissetrizes que partem do vértice *A* teremos $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{EB}{EC}$.

b) Demonstre algebricamente essa propriedade.

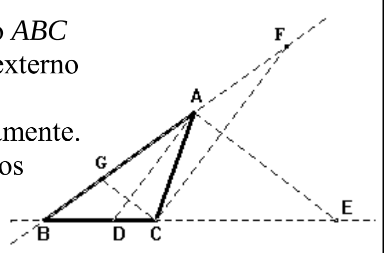
c) Movimente os vértices do triângulo e caracterize a posição de *D* e *E* para o valor da razão maior que 1, para o valor da razão entre 0 e 1 e para a razão igual a 1.

Outro ponto de vista

A circunferência com centro no ponto médio de $\overline{DE}$ é o lugar geométrico dos pontos *A*, tais que, a razão AB/AC é igual a *k*, sendo *k* uma constante e *B* e *C* pontos fixos, conhecido como circunferência (ou círculo) de Apolônius.

Objetivos: observar a relação entre as bissetrizes de um ângulo interno e externo de um triângulo (no mesmo vértice) com a divisão harmônica.

Comentários: construindo o triângulo *ABC* e as bissetrizes dos ângulos interno e externo de vértice *A*, obtemos na reta *BC* os pontos *D* e *E*, respectivamente. Para demonstrar a propriedade traçamos por *C* uma reta paralela ao $\overline{AD}$ que



encontra a reta *AB* no ponto *F*.
Como $B\hat{A}D \equiv D\hat{A}C$, por hipótese, $B\hat{A}D \equiv B\hat{F}C$ e $D\hat{A}C \equiv A\hat{C}F$, o triângulo *ACF* é isósceles com $\overline{AC} \equiv \overline{AF}$.
Como $\overline{AD} // \overline{CF}$, pelo Teorema de Thales podemos concluir que $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. De modo análogo, traçando por *C* uma reta paralela ao $\overline{AE}$, obtemos $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$ visto que $\overline{AG} \equiv \overline{AC}$. No item (c) explorando a figura construída no software podemos perceber que se a razão for maior que 1, o ponto *E* está na reta *r* à direita do segmento *BC*. Se a razão estiver entre 0 e 1 o ponto *E* está na reta *r* à esquerda do segmento *BC*. E, finalmente, se a razão for igual a 1 o ponto *E* deixa de existir porque a bissetriz torna-se paralela ao lado $\overline{BC}$.

Institucionalização
Diz-se que um segmento *AB* é dividido harmonicamente por dois pontos *M* e *N*, (interno e externo, respectivamente) quando a razão das distâncias do ponto *M* aos pontos *A* e *B* é igual à razão das distâncias de *N* aos mesmos dois pontos. Isto é $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{BN}$.

A medida de $\overline{AB}$ é média harmônica das medidas de $\overline{AM}$ e $\overline{AN}$.
Pitágoras definia a média harmônica entre *a* e *b* da seguinte forma: *h* é média harmônica de *a* e *b* se existe um número *n* tal que $a = h + \frac{a}{n}$ e $h = b + \frac{b}{n}$. Essa média recebeu o nome de **harmônica** (ou subcontrária) por causa da harmonia musical obtida em um monocórdio estudado por Pitágoras. Ele constatou que toda a harmonia musical estava condensada em uma proporção numérica. Podemos mostrar

que dados *a* e *b*, tal que, *m* média aritmética entre *a* e *b*, *h* é a média harmônica entre *a* e *b* e por isso $\frac{a}{m} = \frac{h}{b}$ ou $h = \frac{2ab}{a+b}$.

Atividade 11: outra construção para a média harmônica

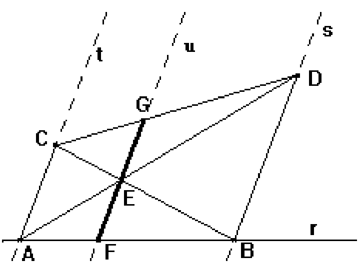
a) Determine dois segmentos de medidas *a* e *b*.
b) Trace uma reta horizontal *r* e nela, tome dois pontos distintos *A* e *B*.
c) Trace por *A* uma reta *t* qualquer concorrente à *r* e por *B* uma reta *s* paralela à *t*.
d) Determine, nessas paralelas, no mesmo semi-plano em relação à reta *r*, os pontos *C* e *D* tais que $AC = a$ e $BD = b$.
e) Trace os segmentos *CD*, *AD* e *BC*.
f) Determine o ponto *E* de interseção entre $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.
g) Trace por *E*, uma reta *u*, paralela à reta *t*, que intercepta $\overline{AB}$ no ponto *F* e $\overline{CD}$ no ponto *G*.
h) Calcule a média harmônica entre *a* e *b* e meça $\overline{FG}$.
i) O que você pode concluir?
j) Altere as medidas *a* e *b* e verifique a validade da relação.

Objetivo: analisar outra construção para a média harmônica.
Comentários: a partir da construção e exploração no software facilmente se comprova que a medida do segmento *FG* é a média harmônica entre as medidas *a* e *b*. Isto é $FG = \frac{2ab}{a+b}$. (1)

Sendo *t* // *s* // *u* temos:

1) a semelhança entre os triângulos *CBA* e *EBF*, em que $\frac{BC}{a} = \frac{BE}{EF}$ ou $EF = \frac{a \times BE}{BC}$.

2) a semelhança entre os triângulos *CBD* e *CEG*, em que $\frac{BC}{CE} = \frac{b}{EG}$ ou $EG = \frac{b \times CE}{BC}$. (2)



Como $FG = FE + EG$ das igualdades obtidas em (1) e (2) vem que

$$FG = \frac{a \times BE}{BC} + \frac{b \times CE}{BC}.$$

Mas, como $BC = CE + BE$ então $FG = \dfrac{a \times BE + b \times CE}{CE + BE}$. Para relacionar *BE* ou *CE* com *a* e *b*, observamos a semelhança entre os triângulos CEA e BED, em que $\dfrac{CE}{BE} = \dfrac{a}{b}$ ou $CE = \dfrac{a \times BE}{b}$.

Substituindo na última igualdade vem

$$FG = \frac{a \times BE + b \times \dfrac{a \times BE}{b}}{\dfrac{a \times BE}{b} + BE} = \frac{\dfrac{2BE \times a \times b}{b}}{\dfrac{BE(a+b)}{b}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Atividade 12: construindo as três médias em um mesmo semicírculo

Abra o arquivo **mod_10_medias** e mostre, com um software de geometria dinâmica que:

a) *AO* é a média aritmética entre *BD* e *DC* (isto é, $AO = \dfrac{BD + DC}{2}$).

b) *AD* é a média geométrica entre *BD* e *DC* (isto é, $AD = \sqrt{BD \times DC}$).

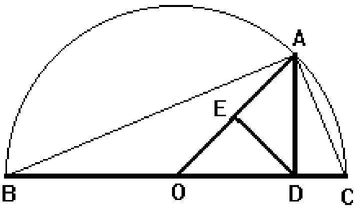
c) *AE* é a média harmônica entre *BD* e *DC* (isto é, $\dfrac{1}{AE} = \dfrac{\dfrac{1}{BD} + \dfrac{1}{DC}}{2}$ ou $AE = \dfrac{2 \times BD \times DC}{BD + DC}$).

d) $AE < AD < AO$, se $BD \neq DC$.

A figura apresentada é conhecida como construção de Papus em que coloca as três médias em uma semicircunferência.

Objetivo: explorar a construção de Papus feita no software e verificar experimentalmente as três médias nessa construção.

Comentários: Papus de Alexandria em 320, aproximadamente, escreveu uma obra intitulada *Coleção*. No livro II de a Coleção. Papus descreve a Teoria das Médias e dá uma atraente construção que apresenta as três médias em uma semicircunferência. (Boyer, 1996, p. 126). As igualdades dadas podem ser comprovadas usando a calculadora de um software de geometria dinâmica.



Justifica-se que AE é média harmônica de BD e DC porque os triângulos ODA e DAE são semelhantes e por isso $\frac{AD}{OA}=\frac{AE}{AD}$ que implica que $AE=\frac{\sqrt{ab}\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}}=\frac{2ab}{a+b}$ considerando $BD=a$ e $DC=b$.

Atividade 13: investigando uma propriedade da média harmônica

a) Abra o arquivo **mod_10_harmon** e mostre com um software de geometria dinâmica que $\frac{1}{BE}=\frac{1}{AF}+\frac{1}{CD}$.

b) Relacione *BE* com a média harmônica entre *AF* e *CD*.

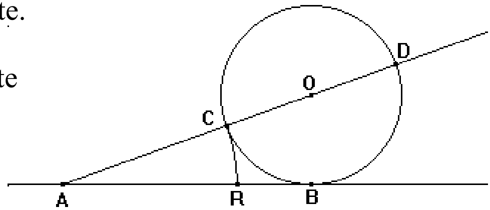
Objetivo: verificar uma propriedade da média harmônica algebricamente e experimentalmente com um software de geometria dinâmica.
Comentários: Algebricamente: se *x* é média harmônica entre *AF* e *CD* então $x=\frac{2\times AF\times CD}{AF+CD}$.

Daí podemos obter $\frac{1}{x}=\frac{AF+CD}{2\times AF\times CD}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{BE}$ e concluir que $x=2\times BE$.

Atividade 14: procurando algebricamente o segmento áureo

Situação: Determine em um segmento *AB* um ponto *R* de tal forma que $\frac{AB}{AR} = \frac{AR}{BR}$. Vamos procurar um processo de construção baseado na construção da atividade 03 e relacionando, em primeiro lugar, as duas proporções algebricamente.

A figura ao lado representa a construção feita anteriormente (na atividade 03).



a) Considere em $\overline{AB}$ um ponto *R* tal que *AR* = *AC*.

b) Vimos anteriormente que $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$ e na situação atual queremos $\frac{AB}{AR} = \frac{AR}{BR}$ ou temos $AB^2 = AD \times AC$ (1) e queremos $AR^2 = AB \times BR$ (2).

c) Reescreva a igualdade (1) observando que *AD* = *AC* + *CD*.

d) Como consideramos *AC* = *AR* reescreva a última igualdade fazendo essa substituição e desenvolva.

e) Observe que na igualdade (2) temos o valor de AR^2. Substitua este na última igualdade.

f) Divida ambos os termos por *AB* e encontre o valor de *AR* observando que $AR = AB - BR$.

g) Que relação deve existir entre *CD* e *AB* para que a igualdade seja verdadeira?

h) Relacione o raio da circunferência com o segmento *AB*.

i) Para usar a construção anterior na obtenção do ponto *R* desejado qual deve ser o raio da circunferência?

Objetivo: procurar um processo de construção para o segmento áureo a partir de um desenvolvimento algébrico.

Comentários: o desenvolvimento algébrico que a atividade pede a partir da equação $AR^2 = AB \times BR$ é o seguinte: No item (c) fazendo a substituição encontramos $AB^2 = (AC + CD)AC$. No item (d) vem

$AB^2 = (AR + CD)AR = AR^2 + CD \times AR$, que com a substituição solicitada no item (e) fica $AB^2 = AB \times BR + CD \times AR$. Dividindo ambos os termos por AB fica $AB = BR + \frac{CD}{AB} \times AR$ e observando que $AR = AB - BR$ temos $AR = \frac{CD}{AB} \times AR$ que só será verdadeira quando $AB = CD$. Assim o segmento AB tem o dobro da medida do raio da circunferência.

Atividade 15: construindo o segmento áureo

a) Use um software de geometria dinâmica e os resultados anteriores para determinar o ponto *R*, em um segmento *AB*, de tal forma que

$$\frac{AB}{AR} = \frac{AR}{BR}.$$

b) Descreva sua construção.

d) Verifique com o software se a medida do segmento encontrado satisfaz a proporção acima.

O segmento *AR* encontrado é chamado de **segmento áureo** de $\overline{AB}$.

Objetivo: determinar, a partir do resultado da atividade anterior, um processo de construção para o segmento áureo.

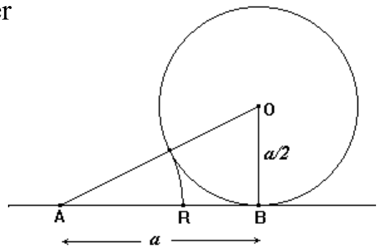
Comentários: a partir das discussões anteriores podemos determinar um processo de construção para o segmento áureo, que é o seguinte: Determine um segmento *AB* e marque seu ponto médio. Traçar por *B* uma perpendicular ao segmento *AB* = *a* e nela marque o ponto *O* tal que $BO = \frac{a}{2}$. Determinar no segmento *AO* o ponto *C* tal que $OC = OB$ e em $\overline{AB}$ o ponto *R* tal que $AR = AC$. Dessa forma, $\overline{AR}$ é o segmento áureo do segmento *AB*.

Outro ponto de vista

Dividir um segmento *AB* em dois segmentos de modo que o segmento dado esteja para o maior, assim como, este está para o menor. Chama-se ao maior segmento obtido de segmento áureo de $\overline{AB}$.

Atividade 16: localizando os pontos de ouro de um segmento

Situação: Dado o segmento *AB* obter o ponto R tal que $(AR)^2 = AB \times BR$.



Ponto de vista algébrico

a) Sabemos que nessas condições *AR* é segmento áureo de $\overline{AB}$.
A figura ao lado mostra a construção feita na atividade anterior.

b) Considere $AB = a$ e determine algebricamente o valor da hipotenusa *AO*.

c) Considere $AR = x$, $AB = a$, $BR = a - x$ e determine o valor de *x* na expressão $(AR)^2 = AB \times BR$.

d) Quantos resultados você encontrou? Quantos pontos teremos que encontrar?

Observe que na construção anterior já temos um desses pontos e $\overline{AR}$ já está determinado sendo $\overline{AR}$ segmento áureo de $\overline{AB}$, isto é $\frac{RB}{AR} = \frac{AR}{AB}$ sendo $AR = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2}$.

e) Na reta *AB* determine a posição do outro ponto *R'* tal que $\overline{AR'}$ seja segmento áureo de $\overline{R'B}$, isto é $\frac{BR'}{AR'} = \frac{AR'}{AB}$ sendo $AR' = \frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{a}{2}$.

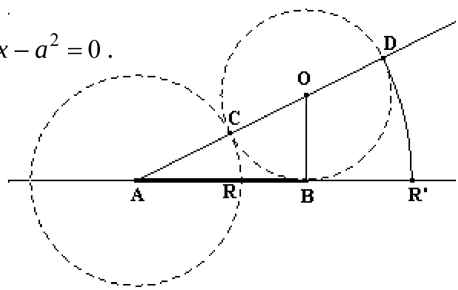
f) Existe outra posição na reta *AB* para o ponto *R'*? Neste caso, que relações você encontra para $\overline{AB}$ e $\overline{AR'}$?

g) *R* e *R'* dividem $\overline{AB}$ harmonicamente? Justifique sua resposta.

A obtenção geométrica dos pontos *R* e *R'* chama-se divisão do segmento *AB* em média e extrema razão. $\overline{AR}$ segmento áureo de $\overline{AB}$ e $\overline{AR'}$ é segmento áureo de $\overline{R'B}$.
A proporção áurea relaciona duas médias: o primeiro de dois números (*AR*) está para a sua média aritmética, assim como a média harmônica está para o segundo número (*AR'*). Isto é, se os números são $AR = a$ e $AR' = b$ temos a relação: $\dfrac{a}{\frac{a+b}{2}} = \dfrac{\frac{2ab}{a+b}}{b}$.

Objetivo: procurar uma construção a partir de um desenvolvimento algébrico.
Comentários: voltando a construção anterior, podemos aplicar Pitágoras no triângulo retângulo *ABO* e procurar o valor para *AO*.
Como $AB = a$ e $OB = \dfrac{a}{2}$ encontraremos que $AO = \pm a\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
Como estamos interessados nos possíveis valores de *AR* na equação $AR^2 = AB \times BR$, vamos substituir *AR* por *x*, *AB* por *a* e *BR* por $a - x$ nessa equação e obter

$$x^2 = a(a-x) = a^2 - ax \Rightarrow x^2 + ax - a^2 = 0.$$



Resolvendo-a encontraremos suas raízes: $x = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} - \dfrac{a}{2}$ ou

$$x = -\frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = -\left(\frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{a}{2}\right).$$

Logo teremos que encontrar dois pontos na construção, que estão associados a essas duas soluções. Como já vimos que a hipotenusa do triângulo *ABO* mede $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ para encontrar os pontos temos que somar $a/2$ e subtrair $a/2$ da medida da hipotenusa. Assim, na reta *AO* temos o segmento *AC* que representa a primeira solução: $\dfrac{a\sqrt{5}}{2} - \dfrac{a}{2}$ e o ponto *D* na outra interseção com a circunferência de centro *O*, que nos dará o valor absoluto da outra solução: $\frac{a\sqrt{5}}{2}+\frac{a}{2}$. Com a calculadora do software podemos verificar que $\frac{RA}{AB}=\frac{RB}{RA}$ e que $\frac{BR'}{AR'}=\frac{AR'}{AB}$. Isto é $\overline{AR}$ é segmento áureo de $\overline{AB}$ e $\overline{AR'}$ é segmento áureo de $\overline{R'B'}$. *R* e *R'* não dividem harmonicamente o segmento *AB* porque se assim o fosse teríamos $\frac{RA}{RB}=\frac{R'A}{R'B}$, mas temos $\frac{R'A}{R'B}=\frac{RB}{RA}$, ou seja, são inversamente proporcionais.

O segmento *AB* é dividido harmonicamente por *R* e *R'* se $\frac{RA}{RB}=\frac{R'A}{R'B}$ e neste caso *AB* é média harmônica de *AR* e *AR'*.

Atividade 17: tratamento algébrico

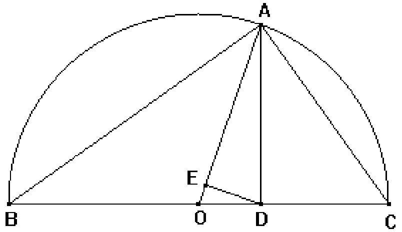
Observando a figura abaixo mostre **algebricamente** cada uma das igualdades.

a) *AO* é a média aritmética entre *BD* e *DC* (isto é, $AO=\frac{BD+DC}{2}$).

b) *AD* é a média geométrica entre *BD* e *DC* (isto é, $AD=\sqrt{BD\times DC}$).

c) *AE* é a média harmônica entre *BD* e *DC* (isto é, $\frac{1}{AE}=\frac{\frac{1}{BD}+\frac{1}{DC}}{2}$ ou $AE=\frac{2\times BD\times DC}{BD+DC}$).

d) $AE<AD<AO$, se $BD\neq DC$.



Objetivos: demonstrar algebricamente relações já validadas experimentalmente no Cabri.

Comentários: em (a) queremos mostrar que $\mathrm{AO} = \frac{\mathrm{BD} + \mathrm{DC}}{2}$, como $BD + DC = BO + OC$ e BO, $\overline{OC}$ e $\overline{AO}$ são raios da circunferência temos $2AO = BD + DC$ e $\mathrm{AO} = \frac{\mathrm{BD} + \mathrm{DC}}{2}$.

Em (b) queremos mostrar que $\mathrm{AD} = \sqrt{\mathrm{BD.DC}}$. No triângulo *BAC*, retângulo em *A*, $\overline{AD}$ é altura e determina os triângulos retângulos *ADB* e *ADC*.

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos três triângulos obtemos:

No triângulo retângulo *ABC*, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (1).

No triângulo retângulo *ADB*, $AB^2 = BD^2 + AD^2$ (2).

No triângulo retângulo *ADC*, $AC^2 = DC^2 + AD^2$ (3).

Como $BC = BD + DC$,

$$BC^2 = (BD + DC)^2 = BD^2 + 2BD \times DC + DC^2 \overset{(1)}{=} AB^2 + AC^2 .$$

Substituindo os resultados de (2) e (3) na última igualdade temos:

$$BD^2 + 2BD \times DC + DC^2 = BD^2 + AD^2 = DC^2 + AD^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2BD \times DC = 2AD^2 \Rightarrow AD = \sqrt{BD \times DC} .$$

Em (c) queremos mostrar que $\frac{1}{AE} = \frac{\frac{1}{BD} + \frac{1}{DC}}{2}$. Para isso observamos que no triângulo *ADO* temos $AD^2 = AO \times AE$ pois $\overline{AE}$ é projeção de $\overline{AD}$ sobre a hipotenusa $\overline{AO}$. Como $AO = \frac{BD + DC}{2}$ obtemos que $AD^2 = \frac{BD + DC}{2} \times AE$ (1).

Por outro lado no triângulo *ABC* temos $AD^2 = BD \times DC$ (2).

De (1) e (2) podemos ver que $BD \times DC = \frac{BD + DC}{2} \times AE$ e por isso $AE = 2 \times \frac{BD \times DC}{BD + DC}$ e, por conseguinte

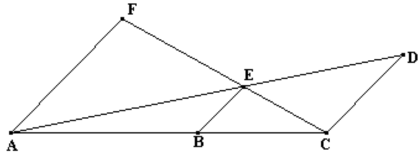
$$\frac{1}{AE} = \frac{BD + DC}{2 \times BD \times DC} = \frac{\frac{1}{BD} + \frac{1}{DC}}{2}.$$

Finalmente, em (d), como $BD \neq DC$ no triângulo *ADO*, retângulo em *D*, temos $\overline{AE}$ como projeção do cateto $\overline{AD}$ sobre a hipotenusa $\overline{AO}$, logo $AE < AD$ (1).

$\overline{AO}$ é hipotenusa e $\overline{AD}$ é cateto, logo $AD < AO$ (2). De (1) e (2) vem que $AE < AD < AO$.

Atividade 18: propriedade da média harmônica

Observando o desenho abaixo e sabendo que $\overline{AF} // \overline{BE} // \overline{CD}$ mostre algebricamente que $\frac{1}{BE} = \frac{1}{AF} + \frac{1}{CD}$ e relacione *BE* com a média harmônica entre *AF* e *CD*.



Objetivo: demonstrar algebricamente relações já validadas experimentalmente no software.

Comentários: Primeiro queremos mostrar que $\frac{1}{BE} = \frac{1}{AF} + \frac{1}{CD}$. Para isso observamos que os triângulos *AFC* e *BEC* são semelhantes o que nos permite afirmar que $\frac{AF}{BE} = \frac{AC}{BC} = \frac{FC}{EC}$ (1).

O mesmo para os triângulos *ADC* e *AEB* nos dando as proporções $\frac{CD}{BE} = \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE}$ (2).

De (1) obtemos $BE = \frac{AF \times BC}{AC} = \frac{AF \times BC}{AB + BC}$

Assim, $\frac{1}{BE} = \frac{AB + BC}{AF \times BC} = \frac{AB}{AF \times BC} + \frac{BC}{AF \times BC}$.

Como $AF \times BC \overset{(1)}{=} AC \times BE$ e $AC \times BE \overset{(2)}{=} CD \times AB$, temos $\frac{1}{BE} = \frac{AB}{CD \times AB} + \frac{1}{AF} = \frac{1}{CD} + \frac{1}{AF}$.
A seguir, queremos relacionar *BE* com a média harmônica entre *AF* e *CD*. Para isso iremos considerar que *x* é a média harmônica entre *AF* e *CD* e por isso $\frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{AF} + \frac{1}{CD}}{2}$ o que nos leva a $\frac{2}{x} = \frac{1}{AF} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{BE}$. Logo $BE = \frac{1}{2}x$, isto é *BE* é metade da média harmônica entre *AF* e *CD*.

10.5 Resolução Geométrica de Equação de 2º Grau

Atividade 01: descobrindo a construção de Descartes

a) Considerando a equação $x^2 - bx + c^2 = 0$, trace dois segmentos de medidas *b* e *c*.
b) Meça esses segmentos e escreva a equação correspondente.
c) Trace uma reta horizontal e sobre ela o segmento *AB* tal que $AB = 2c$.
d) Construa um triângulo *ABC*, retângulo em *A* com $BC = b$.
e) Essa construção é possível para quaisquer valores de *b* e *c*? Justifique sua resposta.
f) Qual a relação entre *b* e *c* para que exista o triângulo?
g) Calcule algebricamente a medida de $\overline{AC}$.
h) Determine o ponto *P*, médio de $\overline{BC}$ e por ele trace uma reta paralela à $\overline{AB}$ que intercepta $\overline{AC}$ no ponto *Q*.
i) Quanto mede o segmento *QP* e o segmento *PC*? Relacione essas medidas com a equação.
j) Observando a medida de $\overline{AC}$ encontrada no item (g) determine algebricamente a medida de $\overline{CQ}$.
l) Trace a circunferência de centro *C* e raio $\overline{CQ}$ e determine na reta *BC* os pontos *M* e *N*, com *M* entre *C* e *P*.

m) Observe nessa circunferência que $\overline{QP}$ é tangente à ela em Q e $\overline{PN}$ é secante passando pelo centro. O que você pode concluir?
n) Usando a fórmula de Báskara determine as raízes da equação $x^2 - bx + c^2 = 0$.
o) Identifique na construção os segmentos que representam essas raízes.
p) Meça esses segmentos para obter as raízes da equação que você escolheu.
q) Movimentando os segmentos escreva mais duas equações e suas respectivas raízes.

Objetivo: resolução geométrica de uma equação do 2º grau utilizada por Descartes.[26]
Comentários: fazendo a construção no software e considerando as medidas de b e c podemos, por exemplo escrever $x^2 - 4{,}92x + 1{,}88 = 0$ em que $b = 4{,}92$ e $c^2 = 1{,}88$. Tal construção não é possível para quaisquer valores de b e c, somente para aqueles que garantam a existência do triângulo *ABC*, isto é $b > 2c$. Usando o Teorema de Pitágoras temos $b^2 = AC^2 + 4c^2$ que nos permite determinar $AC = \sqrt{b^2 - 4ac}$. Depois de determinado os pontos *P* e *Q* verificamos que $QP = c$, $PC = \frac{b}{2}$ e que $CQ = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$. Determinando os pontos *M* e *N* observamos que $PQ^2 = PM \times PN$ e que como a equação dada tem solução $x = \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$ ou $x = \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$

[26] René Descartes (1595-1650) foi mais longe de qualquer de seus predecessores em sua álgebra simbólica e na interpretação geométrica da álgebra. O seu mais célebre tratado, o *Discours de ler méthode pour bien conduire as raison ET chercher La verité dans lês sciences* é de 1637. Em um dos apêndices, *La gèometrie* se encontram instruções detalhadas para resolver equações quadráticas. (Boyer, 1996, p. 232).

que são representadas na construção pelas medidas dos segmentos *PM* e *PN* respectivamente. Para a equação citada acima no exemplo, teríamos $PM = 0{,}87$ e $PN = 4{,}05$.

Atividade 02: identificando as raízes da equação

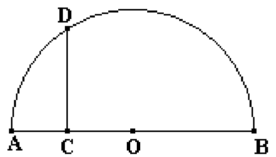
a) Considerando a equação $x^2 - px + q^2 = 0$, o que podemos observar a respeito dos sinais das raízes?

b) Identifique na equação o valor da soma dessas raízes.

c) Identifique na mesma equação o valor do produto das raízes.

d) Que relação existe entre q e as raízes da equação?

e) Com as informações acima, identifique na figura abaixo as raízes x_1 *e* x_2 e q.



f) Relacione o diâmetro dessa semicircunferência com as raízes.

g) Que relação existe entre o raio da circunferência e as raízes da equação?

Objetivo: resolver graficamente uma equação do segundo grau do tipo: $x^2 - px + q^2 = 0$, em que p e q são medidas de segmentos dados.

Comentários: dada a equação acima podemos observar que as raízes têm o mesmo sinal, isto é ou ambas são positivas ou ambas são negativas. A soma das raízes é p e seu produto é q. Sendo q a média geométrica das raízes e a medida do raio da circunferência a média aritmética dessas raízes, isto é, a medida do diâmetro representa sua soma. Na figura acima podemos dizer que $CD = q = \sqrt{x_1 \times x_2}$ e que $AC = x_1$ e $CB = x_2$.

Atividade 03: generalizando resultados

Vamos generalizar os resultados da atividade anterior[27].

a) Considerando a equação $x^2 + bx + c = 0$ com $\boxed{c > 0}$, o que podemos afirmar a respeito dos valores dessas raízes?

b) Quais as possibilidades que temos para a soma e produto das raízes?

c) Se a resolução é geométrica como teremos que considerar as possibilidades do item anterior?

d) Para determinar as raízes da equação o que temos que encontrar?

e) Trace, em um software de geometria dinâmica, dois segmentos quaisquer de medidas *b* e *c*.

f) Meça os segmentos e escreva a equação para as duas raízes positivas.

g) Para construir a $\sqrt{c}$ traçamos uma reta horizontal *r* e determinamos sobre ela o diâmetro $\overline{EA}$ de uma circunferência, que mede $c + 1 = EF + FA$. Por *F* traçamos uma reta perpendicular à *r* que determina na interseção com a circunferência de diâmetro $\overline{EA}$, $FG = \sqrt{c}$.

h) Para encontrar as duas raízes, na mesma construção, determinamos o diâmetro de medida $AB = |b|$, sobre a reta *r* e traçamos a circunferência. Traçando por *G* a reta *s* paralela à reta *r* que intercepta a circunferência de diâmetro $\overline{AB}$ em dois pontos. Escolhemos um deles para traçar a perpendicular a *r* que intercepta $\overline{AB}$ no ponto *C* e determina as duas raízes procuradas: *AC* e *CB*.

i) Determine os valores das raízes.

j) Escreva a equação resolvida na forma fatorada.

k) Escreva a equação considerando que as duas raízes sejam negativas.

l) Quais as raízes dessa equação?

m) Escreva essa equação na forma fatorada.

---

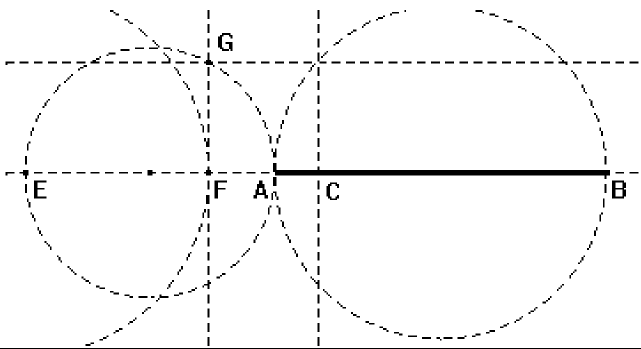
[27] As atividades 3 e 5 foram baseadas no artigo *Resolução Geométrica da Equação do 2º Grau de Nelson Tunala, RPM 12, p. 34-35.*

n) Altere as medidas *b* e *c* e verifique se essa construção é válida para quaisquer valores. Justifique sua resposta.

Objetivo: generalizar os resultados obtidos anteriormente

Comentários: a equação $x^2 + bx + c = 0$ em que $c > 0$ tem as duas raízes positivas ou ambas negativas (se existirem), e, portanto, sendo x_1 e x_2 essas raízes, $x_1 + x_2 > 0$, ou $x_1 + x_2 < 0$ e $x_1 \cdot x_2 > 0$. Como a resolução é geométrica temos que considerar $x_1 + x_2 = |b|$ e $x_1 \cdot x_2 = c$ e encontrar dois segmentos de reta cuja soma das medidas seja |b| e cujo produto seja *c*.

Após a construção no softare, a partir das medidas b e c podemos obter, por exemplo, a equação $x^2 + 4{,}95x + 2{,}73 = 0$ cujas raízes são $x_1 = AC = 0{,}63$ e $x_2 = CB = 4{,}32$, podendo ser escrita na forma fatorada por $(x - 0{,}63)(x - 4{,}32) = 0$. Considerando as raízes negativas teríamos a equação $x^2 - 4{,}95x + 2{,}73 = 0$ com as raízes $x_1 = -0{,}63$ e $x_2 = -4{,}32$ que na forma fatorada pode ser escrita por $(x + 0{,}63)(x + 4{,}32) = 0$. Movimentando a construção podemos perceber que a construção só é válida para $\frac{b}{2} \geq \sqrt{c}$.



Atividade 04: outra construção

a) Considere a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ e usando fatoração determine as raízes dessa equação.

b) Em um software de geometria dinâmica trace a circnferência de diâmetro $\overline{AB}$ de medida 3. Observe que a soma das raízes resulta em 3 e o produto resulta em 2.

c) Trace por *B* a reta *t* tangente à circunferência nesse ponto.

d) Usando a calculadora determine a $\sqrt{2}$ e em *t* o ponto *C* tal que $BC = \sqrt{2}$.

e) Por *C* trace uma paralela ao $\overline{AB}$ e chame de *D* uma das interse-ções com a circunferência.

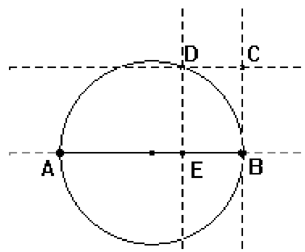
f) Por *D* trace uma perpendicular ao $\overline{AB}$ para determinar as raízes da equação. Verifique se os resultados coincidem com os encontrados no item (a).

g) Verifique se $x_1 + x_2 = 3$ e $x_1 \cdot x_2 = 2$.

h) Considere as raízes negativas e escreva a equação correspondente na forma parcelada e na forma fatorada.

i) Altere a edição numérica dos valores 3 e 2, colocando uma casa decimal e escreva outras equações com suas respectivas raízes.

Objetivo: perceber outra possibilidade de construção
Comentários: fatorando a equação dada $(x-2)(x-1)=0$ facilmente percebemos que as raízes são $x_1 = 2$ e $x_2 = 2$ que são encontradas após a construção nas medidas dos segmentos *AE* e *EO*. Alterando a edição numérica poderíamos obter
por exemplo, a equação $x^2 + 3{,}5x + 2{,}3 = 0$
e verificar que $x_1 = 2{,}62$ e $x_2 = 0{,}88$.



Atividade 05: encontrando raízes de sinais diferentes

a) Considerando a equação $x^2 + bx + c = 0$ com $\boxed{c<0}$, o que podemos afirmar a respeito dos sinais das raízes?

b) Nesse caso, supondo $|x_1| > |x_2|$, que possibilidades temos para a soma e o produto das raízes? Como a resolução é geométrica e supondo que $|x_1| > |x_2|$ teremos que considerar $|x_1| - |x_2| = |b|$ e $|x_1| \cdot |x_2| = |c|$ e, encontrar na construção, dois segmentos cuja diferença entre as medidas seja $|b|$ e cujo produto seja $|c|$.

c) Trace em um software de geometria dinâmica dois segmentos quaisquer de medidas $|b|$ e $|c|$.
d) Meça os segmentos e escreva a equação.
e) Para determinar $\sqrt{|c|}$ trace uma reta *r* e sobre ela o diâmetro de medida $MO = MA + AO = 1 + c$. Chame de *AQ* o segmento que mede $\sqrt{|c|}$.
f) Determine na reta *r* o diâmetro de medida $OP = b$, nomeie de *I* o ponto médio de $\overline{OP}$ e trace a circunferência.
g) Por *O* trace uma reta *t* perpendicular à *r* e por *Q* uma reta paralela à *r* que intercepta a reta *t* no ponto *U*. Qual a medida do segmento *OU*?
h) Trace uma reta por *U* e *I* e chame de *G* e *H* os pontos de intersecção com a circunferência de centro *I*, de modo que *G* fique entre *U* e *I*.

i) Qual é a medida de $\overline{GH}$?
j) Qual é a medida de $UH - UG$? Comparando este resultado com a soma das raízes no item (b), o que você pode concluir?
l) Considerando as relações entre tangentes e secantes a uma circunferência o que podemos afirmar a respeito das medidas dos segmentos *UO*, *UH* e *UG*?
m) Compare esse resultado com o produto das raízes no item (b). O que você conclui?
n) Utilizando a calculadora do software e as medidas de *b* e *c* calcule o valor das raízes utilizando Báskara.
o) Se $UH - UG = |b|$ e $b < 0$ qual é a equação e suas raízes?

p) Repita para $b > 0$.
q) Movimente sua construção e escreva mais duas equações e suas respectivas raízes.
r) Movimente sua construção e determine uma equação e suas raízes para o caso em que $b = 0$.
s) Movimente sua construção e observe as raízes para $c = 0$.

Objetivo: encontrar uma construção que forneça raízes de sinais diferentes

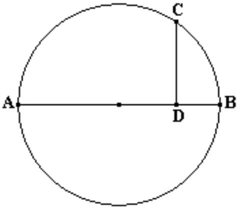
Comentários: se na equação $x^2 + bx + c = 0$ temos $c < 0$ isso significa que as raízes têm sinais contrários. Supondo que $|x_1| > |x_2|$ podemos ter $x_1 > 0$ e $x_2 < 0$ com $x_1 + x_2 = b$ ou $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$ com $x_1 + x_2 = -b$ e $x_1 \cdot x_2 = c < 0$. Determinando no software as medidas de b e c , por exemplo $b = 3{,}36$ e $c = 4{,}60$ podemos escrever, segundo as condições dadas, a equação $x^2 + 3{,}36x - 4{,}40 = 0$. Depois de seguir os passos da construção encontramos o segmento de medida $OU = \sqrt{|c|}$ e o segmento de medida $GH = |b|$. Observando a construção percebemos que $UH - UG = GH = |b|$ e comparando com a soma das raízes podemos concluir que $UH = x_1$ e $UG = x_2$. Esse resultado também pode ser obtido se observarmos que $UO^2 = UH \times UG = NQ^2 = |c|$. A resolução a partir da fórmula de Baskara com a calculadora do Cabri também irá confirmar os resultados obtidos.

Se $UH - UG = |b|$ e $b < 0$ teremos a equação $x^2 - 3{,}36x - 4{,}40 = 0$ em que $x_1 = UH$ e $x_2 = -UG$. Se $b > 0$ teremos $x_1 = -UH$ e $x_2 = UG$. Quando $b = 0$ a medida do raio da circunferência de centro *I* é zero e as raízes são UO e $-UO$ e se $c = 0$ as raízes são $x_1 = 0$ e $x_2 = -b$

Familiarização

Exercício 1

Considerando a figura ao lado:



a) Determine *CD* para *AD = 9* e *DB = 4*.

b) Determine *CD* para *AB = 25* e *AD = 5*.

c) Determine *DB* para *AD = 32* e *CD = 8*.

d) Determine *CD* para *AD = 3* e *DB = 1*.

e) Determine *AD* e *DB* para *AB = 25* e *CD =12*.

Exercício 2
Dados os segmentos *AB* e *CD*, construa as médias aritmética e geométrica entre suas medidas.

Exercício 3
Construa geometricamente as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Exercício 4
Construa uma semi-circunferência e nela represente a média geométrica e aritmética de *AB* e *CD* dados $AB = 3{,}5$ cm e $CD = 5$ cm. A seguir escreva a equação que tem como raízes *AB* e *CD*.

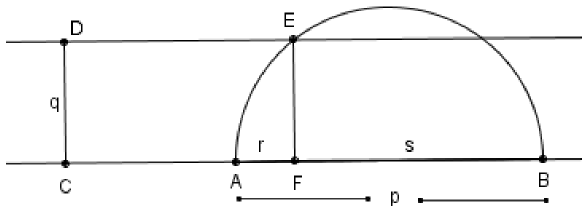
Exercício 5
Resolver graficamente a equação $x^2 - px + q^2 = 0$ dados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ tais que $AB = p$ e $CD = q$.

Exercício 6
Determine os segmentos *AB* e *CD* e construa as raízes da equação, que relação deve existir entre *p* e *q* para que possamos encontrar duas raízes distintas, duas raízes iguais ou equação não tem raízes reais?

Exercício 7[28]
A discussão sobre o número de raízes reais distintas de uma equação do 2º grau é comumente feita por meio do discriminante da equação. Para o caso da equação $x^2 - px + q^2 = 0$, ($p > 0$, $q > 0$), isso pode ser feito geometricamente, como mostra a figura.
Nela o arco é uma semicircunferência de diâmetro $\overline{AB}$, com $AB = p$ e $CD = EF = q$.
As raízes r e s da equação são representadas pelos segmentos AF e BF, respectivamente.

[28] Baseado no Provão de 1998, questão 10.

De fato, $r + s = p$ e $r \cdot s = q^2$, uma vez que o triângulo AEB é retângulo e EF é a altura relativa a hipotenusa.



a) A partir da construção acima, conclusa qual é a relação entre r e s no caso em que $q = p/2$.

b) Calcule o valor do discriminante da equação para $q = p/2$ e compare o que você concluiu com o observado em a).

Observe que um mesmo resultado foi analisado sob os pontos de vista geométrico e algébrico.

10.6 Lugares Geométricos e Circunferência

Utilize a ferramenta *lugar geométrico* de um software de geometria dinâmica.

Atividade 01

a) Qual o lugar geométrico dos centros das circunferências de mesmo raio que tangenciam uma reta?

b) Descreva sua construção.

Comentários: o lugar geométrico procurado é um par de retas paralelas à reta tangente ambas distando a medida do raio desta reta.

Traçar uma reta *r* e nela tomar um ponto *A*. Por este ponto traçar uma reta *t*, perpendicular à reta *r*. Determinar na reta *t* um ponto *O* e seu simétrico *O'* em relação ao ponto *A*. Traçar as circunferências de centro *O* e raio $\overline{OA}$ e de centro *O'* e raio $\overline{OA'}$. Determine o lugar geométrico do ponto *O* enquanto *A* percorre *r* e do ponto *O'* enquanto *A* percorre *r*.

Atividade 02

a) Qual o lugar geométrico dos centros das circunferências tangentes à duas retas concorrentes *r* e *s*?

b) Descreva sua construção.

Comentários: o lugar geométrico procurado é o par de retas bissetrizes dos ângulos suplementares determinados pelas concorrentes.

Traçar duas retas *r* e *s*, concorrentes no ponto *X*. Tomar na reta *s* um ponto *A* e determinar na reta *r* o ponto *B* tal que $XA = XB$. Tome o ponto M, médio de $\overline{AB}$ e por ele trace uma reta perpendicular à reta *r* que determinará o ponto *T* de tangência da circunferência com a reta *r* (esta reta poderia ser perpendicular à reta *s*). Tome o simétrico dos pontos *A*, *B*, *M* e *T* em relação ao ponto *X* e determine nas semi-retas opostas determinadas por *X* os pontos *A'*, *B'*, *M'* e *T'*. Trace as circunferências com centro em *M* e raio $\overline{MT}$ e com centro em *M'* e raio $\overline{M'T'}$. Determine o lugar geométrico e *M* e *M'* enquanto *A* percorre a reta *s*.

Atividade 03

a) Qual o lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por dois pontos fixos *P* e *Q*?

b) Descreva sua construção.

> **Comentários:** dados dois pontos fixos já sabemos que o centro da circunferência que passa por ele está na mediatriz do segmento *PQ*. Determine os pontos *P* e *Q* e sua mediatriz, tome nessa reta um ponto *R* qualquer e movimente-o para confirmar que a reta é o lugar geométrico procurado.

Atividade 04

a) Qual o lugar geométrico dos centros das circunferências de um plano que são tangentes a uma reta fixa *r* e passam por um ponto *P* não pertencente a essa reta?

b) Descreva sua construção.

> **Comentários:** o lugar geométrico procurado é uma parábola com foco em P.
> Traçar uma reta *r* e determinar o ponto *P* não pertencente à reta *r*. Determine o ponto *A*, de tangencia da circunferência que passa por P com a reta. Para isso tome um ponto A na reta r e por ela trace uma perpendicular à reta r. Traçar a reta *n* que passa por *P* e *A* e por *P* a reta *t* perpendicular à reta *n*. Marque o ponto *B* de intersecção da reta *t* com a reta s. Determine o ponto *M*, médio do segmento *AB*, e a circunferência de centro em *M* que passa por *A* e *B*. Movimente o ponto *A* e observe que a circunferência passa por *P* e é tangente à reta *r*. Determine o lugar geométrico de *M* enquanto o ponto *A* percorre a reta *r*.

Atividade 05

a) Dada uma circunferência de centro *B* e um ponto *A* interno à essa circunferência, determine o lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por *A* e tangenciam internamente a circunferência de centro *B*, em um ponto *P*.

b) Descreva sua construção.

c) Desloque o ponto *A* para o exterior da circunferência de centro *B*. Qual o lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por *A* e tangenciam externamente a circunferência de centro *B*?
d) O que acontece com as circunferências tangentes?
e) Qual o lugar geométrico? Descreva-o.
f) Use "redefinir objeto" para verificar o que acontece com o lugar geométrico se o ponto *A* pertencer à circunferência? E quando *A* coincide com *B*?

Comentários: trace uma circunferência com centro em *B* e raio qualquer tome um ponto P na circunferência e em sua região interior um ponto *A* qualquer. Trace por *P* a reta *r* que passa por *A* e a reta *s* que passa por *B*. Trace por *A* a reta *t* perpendicular a reta *r*, que intercepta a reta *s* no ponto *Q*. Determine o ponto *M*, médio de $\overline{PQ}$ e trace a circunferência de centro em *M* que passa por *P*. Observe que essa circunferência tangencia a circunferência de centro em *B*, internamente. Determine o lugar geométrico do ponto *M* enquanto *P* percorre a circunferência. Observe que o ponto *M* descreve uma elipse com focos em *A* e *B*.
Deslocando o ponto *A* para a região externa da circunferência notamos que o lugar geométrico se transforma nos dois ramos de uma hipérbole com focos *A* e *B* e que a circunferência de centro *M* passa a tangenciar externamente a circunferência de centro *B*.
Se o ponto *A* pertencer à circunferência os pontos *M* e *B* coincidem e o lugar geométrico deixa de existir. Mas, se o ponto *A* coincide com o ponto *B* o lugar geométrico será uma circunferência concêntrica com a circunferência de centro em *B*.

Outro ponto de vista
a) Elipse é o lugar geométrico dos pontos cujas distâncias a F_1 e F_2 têm soma constante igual a $2a$. $PF_1 + PF_2 = 2a$. ($2a$ é a medida do eixo maior da elipse).
b) Parábola é o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de um ponto F_2 e de uma reta *t*.
c) Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos cujas distâncias a F_1 e a F_2 têm diferença, em módulo, constante e igual a $2a$. $| PF_1 - PF_2 | = 2a$.

10.7 Circunferência Inscrita e Circunscrita

Atividade 01: relacionando ângulos internos de um quadrilátero inscrito em uma circunferência

a) Construa uma circunferência e nela tome os pontos distintos *ABCD*, nessa ordem.

b) Determine o quadrilátero *ABCD*.

c) Meça os ângulos internos desse quadrilátero.

d) O que você pode concluir?

Definição: Um quadrilátero está **inscrito** numa circunferência se os vértices do quadrilátero estão na circunferência. Dizemos também que a circunferência está circunscrita no quadrilátero.
Teorema: Os ângulos opostos de um quadrilátero inscrito em uma circunferência são suplementares.

Objetivo: construir um quadrilátero inscrito em uma circunferência e comprovar experimentalmente um de seus teoremas.
Comentários: contruindo e manipulando a figura, podemos verificar ao manipularmos esta figura que :
$med(\hat{A}) + med(\hat{C}) = med(\hat{B}) + med(\hat{D}) = 180^0$

Atividade 02: verificando propriedade

a) Construa o quadrilátero *ABCD* inscrito em uma circunferência.

b) Tome um ponto *E*, externo à circunferência e determine o quadrilátero *ABCE*.

c) O que ocorre com os ângulos opostos desse novo quadrilátero?

Objetivo: **v**erificar experimentalmente a validade de uma propeiedade.
Comentários: explorando a construção podemos notar que se um dos vértices do quadrilátero não pertencer à circunferência o teorema deixa de ser válido.

Atividade 03: investigando a existência de uma circunferência circunscrita a um quadrilátero

a) Determine um quadrilátero *MNPQ*.

b) É possível construir uma circunferência circunscrita nesse quadrilátero? Justifique sua resposta.

c) É possível afirmar que se o quadrilátero *ABCD* está inscrito em uma circunferência de forma que $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$ o quadrilátero é um trapézio isósceles? Justifique sua resposta.

Objetivo: verificar a existência de quadriláteros inscritos. **Comentários:** dado um quadrilátero não é possível construir por seus vértices uma circunferência, pois por três vértices consecutivos passa uma circunferência e o quarto vértice pode não pertencer a ela. No item (c) se essa congruência é observada temos um retângulo, que é um trapézio isósceles.

Atividade 04: validando uma propriedade

Mostre experimentalmente com um software de geometria dinâmica e demonstre algebricamente que se $\overline{AB}$ é um diâmetro de uma circunferência e tomando os pontos *C* e *D*, na circunferência, de modo que $BC = BD$ então o triângulo *ABC* é congruente ao triângulo *ABD*.

Objetivo: validar uma propriedade de quadriláteros inscritos experimentalmente e depois algebricamente. **Comentários:** os triângulos *ABC* e *ABD* são congruentes pois ambos são retângulos (estão inscritos em uma semicircunferência), possuem um cateto de mesma medida e hipotenusa comum.

Atividade 05: investigando uma propriedade dos quadriláteros circunscritos

a) Determine em uma circunferência de centro *O*, os pontos *P*, *Q*, *R* e *S*, nessa ordem.

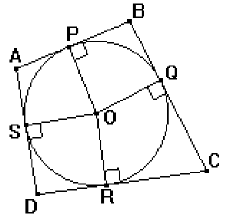
b) Construa o quadrilátero *ABCD* de tal forma que $\overline{AB}$ tangencie a circunferência no ponto *P*, $\overline{BC}$ no ponto *Q*, $\overline{CD}$ no ponto *R* e $\overline{AD}$ no ponto *S*.

c) Meça os segmentos *AP*, *AS*, *BP*, *BQ*, *CR*, *CQ*, *DS* e *DR*.

d) Que relação existe entre os lados do quadrilátero *ABCD*?
e) Enuncie e valide essa relação.

Definição: um quadrilátero está **circunscrito** em uma circunferência se cada um de seus lados é tangente à circunferência.

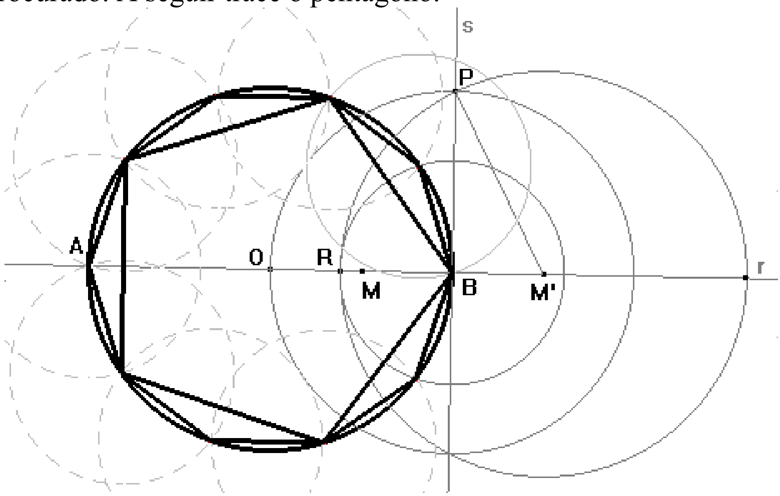
Objetivo: enunciar e validar uma propriedade dos quadriláteros circunscritos.
Comentários: após a construção medindo os segmentos e explorando a figura podemos concluir que $AB + CD = AD + BC$.
A soma das medidas de dois lados opostos de um quadrilátero circunscrito é igual a soma das medidas dos outros dois lados.
De fato, como os lados do quadrilátero são tangentes à circunferência nos pontos P, Q, R e S temos $AP = AS$, $BP = BQ$, $DS = DR$ e $CQ = CR$.
Logo, $AB + CD = AP + PB + CR + DR = AS + SD + BQ + QC = AD + BC$.



Atividade 06: relacionando o segmento áureo e o lado do decágono inscrito
a) Construa um decágono regular inscrito numa circunferência cujo lado é o segmento áureo do raio dessa circunferência.
b) Construa um pentágono regular inscrito.
c) Descreva sua construção.

Objetivo: construir um decágono e um pentágono regulares inscritos em uma circunferência.
Comentários: Traçar uma reta *r* e sobre ela tomar os pontos *O* e *A*, traçar a circunferência de centro *O* e raio $\overline{OA}$, determine o diâmetro $\overline{AB}$. Por *B* trace a reta *s* perpendicular à reta *r* e nela tome o ponto *P*

tal que $BP = OB$. Determine o ponto M, médio de OB e seu simétrico M' em relação ao ponto B. Trace o triângulo BPM' e o ponto R tal que $M'R = M'P$. $\overline{RB}$ é o segmento áureo do raio e tem a medida do lado do decágono inscrito. Determine os vértices e trace o decágono procurado. A seguir trace o pentágono.



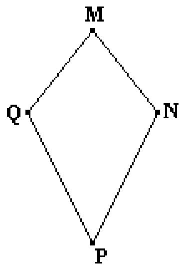
Familiarização

Exercício 1

A que distância está o horizonte quando o observamos de uma praia sabendo que o raio da terra mede aproximadamente 6750 km?

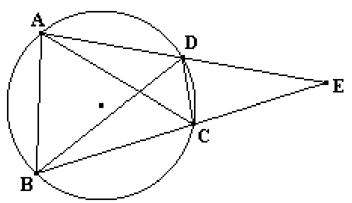
Exercício 2

O quadrilátero *MNPQ* é inscritível em um círculo de diâmetro $\overline{MP}$. Os lados *MN* e *MQ* têm o mesmo comprimento (1) e o ângulo *NMQ* é de 120^0. Qual o comprimento de *NP*?



Exercício 3

O quadrilátero *ABCD* está inscrito numa circunferência e suas diagonais formam um ângulo de 110^0. Se $med(D\hat{A}C) = 20^0$ e $med(D\hat{B}A) = 50^0$, determine os ângulos do triângulo *CDE* indicado na figura.



10.8 Comprimento e Área

Atividade 01: um primeiro encaixe de π[29]

Desde os tempos mais remotos, sabia-se como obter o perímetro de uma circunferência: multiplicava-se a medida do diâmetro por um número um pouco maior que três. Os valores eram determinados, sem dúvida, empiricamente. Mas, deste número misterioso (atualmente identificado pela letra π) conhecemos há muito tempo valores aproximados.

Um dos grandes méritos de Arquimedes (III A.C.) foi ter encontrado e explicado um método, apoiado em raciocínios geométricos, que permitiu encaixar π de maneira indiscutível. Esta e as próximas atividades têm como objetivo dar uma idéia do raciocínio de Arquimedes.

Exercício 1: cálculo do perímetro do hexágono inscrito

a) Construa uma circunferência c de centro O e raio de medida r.
b) Tome um ponto qualquer de c e nomeie-o de A.
c) Determine um ponto B de c tal que $AB = r$.
d) O que você pode afirmar a respeito do triângulo AOB?
e) Determine, em c, os pontos C, D, E e F de forma que $BC = CD = DE = EF = FA = AB$.
f) Desenhe o hexágono regular determinado por esses pontos.
g) Calcule o perímetro p do hexágono regular inscrito na circunferência, em função do raio de medida r.
h) Determine o ponto H médio de $\overline{AB}$.
i) Mostre que o triângulo OHA é retângulo.
j) Determine algebricamente a medida de $\overline{OH}$ em função de r.
l) Confira o resultado com a calculadora do software.

$\overline{OH}$ é chamado de apótema do hexágono.

[29] As atividades 1, 2 e 3 foram baseadas no artigo *Sur lês pás d´Arc himede un prémier encadrement de π.* In: M.A.T.H. tomo 2, mathématiques approche par des textes historiques, IREM, jan 90, université Paris VII, p. 40-44.

Exercício 2: cálculo do perímetro do hexágono circunscrito

Na mesma construção anterior:

a) Considere a semi-reta $\overrightarrow{OH}$ e determine o ponto *T* na intersecção com o arco *AB*.

b) Determine a reta tangente à c ircunferência no ponto *T*. Ela intercepta o prolongamento de $\overline{OA}$ em *M* e o prolongamento de $\overline{OB}$ em *N*.

c) O segmento *MN* é um dos lados do hexágono regular circunscrito à circunferência *c*.

d) Determine esse hexágono com os vértices *M*, *N*, *P*, *Q*, *R* e *S*.

e) Verifique que relação existe entre os lados dos dois hexágonos.

f) Considerando os triângulos *OHA* e *OTM* e utilizando o Teorema de Thales, determine algebricamente a medida de *TM* em função de *r*.

g) Mostre que o hexágono circunscrito tem perímetro $P = 4r\sqrt{3}$.

Exercício 3: cálculo de π

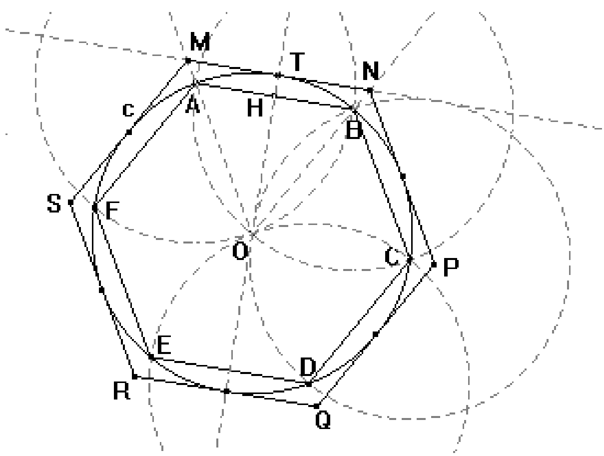
Admitindo, como fez Arquimedes, no seu tratado sobre a medida da circunferência, que a medida *L*, do comprimento da circunferência, está entre a medida de *P* e a de *p* ($P < L < p$) mostre que o número π, definido como a razão $\frac{L}{D}$, está seguramente entre 3 e 3,47.

Objetivo: estudar um método aproximado para a determinação gráfica do comprimento de uma circunferência.

Comentários: veremos na parte histórica que Arquimedes em seus estudos a respeito de
um valor aproximado, por falta ou excesso, para π utilizava o quociente entre o perímetro
do polígono regular inscrito em uma circunferência e a medida do diâmetro, e o quociente entre o perímetro de um polígono circunscrito na mesma circunferência pela medida do diâmetro.

Seguindo esta idéia para um hexágono regular temos que seu perímetro é $6 \times r$ e que a medida do apótema do hexágono é $\frac{r\sqrt{3}}{2}$. No exercício 2, após a construção do hexágono circunscrito na circunferência para determinar a medida do lado do hexágono circunscrito podemos aplicar o Teorema de Thales no triângulo *OHA* e *OTM* chegamos na proporção $\frac{OH}{OT}=\frac{r/2}{R/2}=\frac{r}{R}$, ou seja, a razão entre a medida dos lados do hexágono inscrito e a medida dos lados do hexágono circunscrito é igual a $\frac{OH}{OT}=\frac{\frac{r\sqrt{3}}{2}}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ e o lado do hexágono circunscrito será $\frac{r}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2r\sqrt{3}}{3}$ sendo então seu perímetro $4r\sqrt{3}$.

No exercício 3, concluímos como fez Arquimedes que o número π está entre 3 e $2\sqrt{3}$ ou seja entre 3 e 3,4.



Atividade 02: a procura de um encaixe mais preciso para π

Como Arquimedes, utilizaremos desta vez dois dodecágonos regulares (inscrito e circunscrito).

Exercício 1: figura

a) Trace uma circunferência de centro *O* e raio de medida *r* e construa um hexágono regular inscrito.

b) A partir desse hexágono divida a circunferência em doze arcos de mesma medida.

c) Nomeie os pontos *A*, *B*, ..., *M* (sendo A um vértice do hexágono inscrito) e determine o dodecágono regular inscrito. Já sabemos que $\overline{AC}$ é um lado do hexágono regular inscrito e que $AC = r$.
d) Observando a construção da atividade 1, construa o dodecágono regular circunscrito com os lados paralelos ao inscrito e nomeie seus vértices de A1, B1, ..., M1.

Exercício 2: cálculo do perímetro do dodecágono inscrito

a) Determine o ponto *H* médio de $\overline{AC}$ e observando a atividade 01 determine o valor de AH e de OH.
b) Considere o triângulo *HAB* e determine o valor de *AB*.
c) Calcule o perímetro *p* do dodecágono regular inscrito.

Exercício 3: cálculo do perímetro do dodecágono circunscrito

a) Seja *X* o ponto médio de $\overline{AB}$.
b) Mostre que o triângulo *OXA* é retângulo.

$\overline{OX}$ é chamado de apótema do dodecágono inscrito.

c) Calcule algebricamente a medida de $\overline{OX}$ em função de *r*.
d) Prove que os dois dodecágonos têm seus lados dois a dois, paralelos.
e) Determine T o ponto médio de A1B1.
f) Utilizando o Teorema de Thales aplicado aos triângulos *OXA* e *OTA1*, calcule *TA1* em função de *r* e conclua que $TA1 = 2r\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.
g) Deduza que o dodecágono circunscrito tem perímetro $P'_{12} = 24r \cdot \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 24r(2-\sqrt{3})$.
h) Com a calculadora verifique que $P'_{12} \cong 6{,}431$ (por excesso).
i) Suponha, como fez Arquimedes, que o comprimento *L* da circunferência verifica: $P_{12} < L < P'_{12}$. Utilizando os valores encontrados mostre que $3{,}10 < \pi < 3{,}22$.

Objetivo: estudar um método para obtenção geométrica de um valor aproximado para π.

Comentários: para obter um valor mais preciso para o número π, utilizamos nesta atividade as idéias de Arquimedes partindo das razões entre o perímetro de um decágono regular (inscrito e circunscrito) pela medida do diâmetro da circunferência.

Institucionalização

Arquimedes, com uma obstinação notável, chega aos cálculos do perímetro de um polígono regular inscrito e circunscrito de 96 lados. Ele obteve valores aproximados fracionários de π (por falta, a partir dos polígonos inscritos, por excesso, a partir dos polígonos circunscritos), melhorando a precisão em cada etapa. Arquimedes pôde assim, enunciar a célebre Proposição 3 de seu tratado "*Da medida da circunferência*":

O perímetro de toda circunferência é igual ao triplo da medida do diâmetro aumentado de um segmento compreendido entre $\frac{10}{71}$ ***e*** $\frac{1}{7}$ ***do diâmetro.***

Escrevendo de outra maneira: $P = 3d + S$ em que $\frac{10}{71}d < S < \frac{1}{7}d$.

Assim, $3d + \frac{10}{71}d < 3d + S < 3d + \frac{1}{7}d$ que dividido por d nos leva a $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$.

Atividade 03: algumas questões

Exercício 1

Se Arquimedes tivesse conhecido o sistema de escrita decimal:

a) Quantas decimais exatas, este resultado poderia assegurar?

b) Mostre que ele poderia ter dado um encaixe de π com amplitude de 3.10^{-3}, isto é com três casas decimais.

Exercício 2

Arquimedes fez seus cálculos, partindo de n = 6 (hexágono), e dobrando n a cada etapa. Veja os resultados obtidos por Arquimedes, na escrita decimal:

n	$\frac{P_n}{d}$ (por falta)	$\frac{P'_n}{d}$ (por excesso)
6	3	3,464151
12	3,105765	3,215411
24	3,132446	3,159727
48	3,139223	3,146193
96	3,140909	3,142827

Observe que para n = 6, obtem-se $3 < \pi < 3{,}47$ (atividade 01). Para n = 12, obtem-se $3{,}10 < \pi < 3{,}22$ (atividade 02).

a) Dê os mesmos encaixes de π para decimais de ordem 2 obtidos para n = 24, n = 48 e n = 96.

b) Compare as precisões destes encaixes sucessivos.

Exercício 3

O holandês Huygens, século XVII, melhorou consideravelmente a eficácia do método de Arquimedes. Mostrou que: $P_{12} + \frac{1}{3}(P_{12} - P_6) < L < \frac{2}{3}P_{12} + \frac{1}{3}P'_{12}$

a) Mostre que esta desigualdade permite obter a mesma precisão que Arquimedes com os polígonos de 96 lados.

Huygens utiliza em seguida polígonos com 30 e 60 lados e da mesma forma escreveu: $P_{60} + \frac{1}{3}(P_{30} - P_{60}) < L < \frac{2}{3}P_{60} + \frac{1}{3}P'_{60}$, levando-o a encontrar 6,283183 < 2π < 6,283188.

Enfim, utilizando os cálculos de certo Ludolfo de Colonia (1540 – 1610), que estudou polígonos de 5.400 e 10.800 lados, Huygens obteve: 6,283185307179584 < 2π < 6,283185307179589.

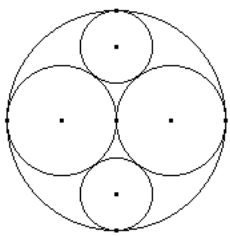
Ludolfo de Colônia, com obstinação, utilizou um polígono de 60229 lados e encontrou, em 1609, 35 casas decimeis para o número π.

Durante muito tempo, na Alemanha, π foi chamado “o número de Ludolfo”.
Liu Hui, na China, no ano 264 de nossa era, obteve o valor $\pi = 3{,}14159$, com cinco algarismos decimais exatos.
A última notícia de que temos conhecimento a esse respeito foi publicada na revista “Science News¨, de setembro de 1989, segundo a qual David e Gregory Chudnovsky, da Universidade Columbia, nos Estados Unidos, calcularam um valor aproximado de π com um bilhão de algarismos decimais exatos!

Familiarização
Exercício 1
São traçados cinco círculos que se tangenciam como está determinado na figura abaixo. A razão entre a área de um dos dois círculos menores e área do maior
círculo vale:

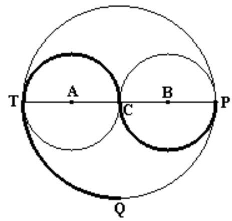
a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{2}{9}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{16}$

Questão do Concurso para o Magistério do Estado do e Município do Rio de janeiro 1988



Exercício 2
Na figura, têm-se 3 circunferências de centros *A*, *B* e *C*, tangentes duas a duas. As retas *QC* e *PT* são perpendiculares. Sendo 4m a medida do raio da circunferência maior, quantos metros devemos percorrer para ir de *P* a *Q*, passando por *C* e *T* ? (PUC-SP)

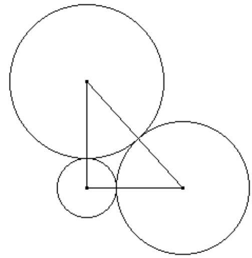
a) 2π b) 3π c) 4π d) 6π e) 12π



Exercício 3
A trajetória da Lua em torno da Terra corresponde aproximadamente à uma circunferência de raio medindo $3{,}82 \cdot 10^8$ m. Qual a distância percorrida pela Lua num giro completo? Esse giro se completa em 27,3 dias. Quantos quilômetros a Lua percorre em um dia?

Exercício 4
O raio da Terra mede aproximadamente 6370 km. Calcule o comprimento do equador terrestre. (Fonte de dados: Resnick , Robert & Halliday, David & Krane, Kenneth S.. *Física 1* . L TC Editora, Rio de Janeiro,1996).

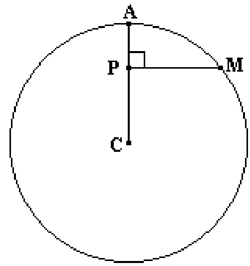
Exercício 5
Os centros de 3 circunferências mutuamente tangentes são vértices de um triângulo de lados 6, 8 e 10. Ache a medida do raio da circunferência menor.
(Extraído do livro Aprendendo e ensinando geometria de Mary Montgomery Lindquist e Albebert P Shulte Editora Atual).



Exercício 6

A circunferência de centro C da figura tem 16 m de raio.

Se *AP = 4 cm*, a medida do segmento *AM* é :



a) $4\sqrt{3}$ cm b) $16\sqrt{2}$ cm c) $12\sqrt{3}$ cm

d) $10\sqrt{2}$ cm e) $8\sqrt{2}$ cm

Questão do concurso público do Estado de São Paulo – Professor Educação Básica II/ 98

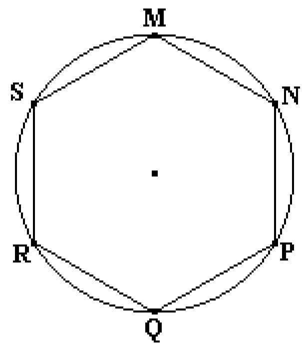
Exercício 7

Questão do Concurso para o Magistério do Estado do e Município do Rio de janeiro 1988

Os pontos *M*, *N*, *P*, *Q*, *R* e *S* são os vértices consecutivos de um hexágono regular, como se vê na figura abaixo.

A partir de *M*, no sentido horário de rotação, associemos a cada ponto um número de sucessão dos naturais, como está indicado na tabela que se segue.

M	0	6	12	....
N	1	7	13	.....
P	2	8	14	.....
Q	3	9	....	.....
R	4	10	....	.....
S	5	11	.....	.....



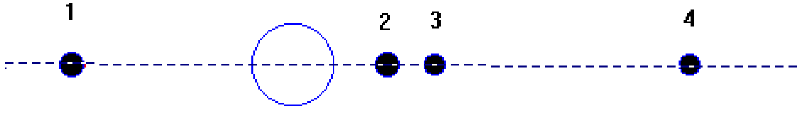
Então, o número 1988 ficará associado ao vértice:

a) *N* b) *P* c) *Q* d) *R* e) *S*

Exercício 8
Teste do Enem 2000
A tabela abaixo resume alguns dados importantes sobre os satélites de Júpiter

Nome	Diâmetro (km)	Distância média ao centro de Júpiter (km)	Período orbital (dias terrestres)
Io	3.642	421.800	1,8
Europa	3.138	670.900	3,6
Ganimedes	5.262	1.070.000	7,2
Calisto	4.800	1.880.000	16,7

Ao observar os satélites de Júpiter pela primeira vez, Galileu Galilei fez diversas anotações e tirou importantes conclusões sobre a estrutura de nosso universo. A figura abaixo reproduz uma anotação de Galileu referente a Júpiter e seus satélites.
De acordo com essa representação e com os dados da tabela, os pontos indicados por 1, 2, 3 e 4 correspondem, respectivamente, a :



a) Io, Europa, Gaminedes e Calisto.
b) Gaminedes, Io, Europa e Calisto.
c) Europa, Calisto , Gaminedes e Io.
d) Calisto, Gaminedes,, Io e Europa.
e) Calisto, Io, Europa e Gaminedes.

PARA LER: Alguns Aspectos Históricos[30]

O número π

Arquimedes (287 AC – 212 AC) deixou numerosos trabalhos, entre eles um a respeito da medida da área de um círculo em que demonstra três proposições.

Proposição 1

Todo círculo é equivalente[31] a um triângulo retângulo no qual a medida de um dos lados do ângulo reto é igual a medida do raio do círculo e a medida do outro lado do ângulo reto é igual ao perímetro da circunferência. Em termos modernos se *A*, *P* e *R* são respectivamente, a medida da área, o perímetro e a medida do raio do círculo, então $A = \frac{1}{2} R \cdot P$ ou $\frac{A}{R^2} = \frac{P}{2R}$. Em outras palavras, é a mesma constante, que chamamos de π, que intervem no cálculo das medidas da área e do perímetro de uma circunferência.

Proposição 3

O perímetro de todo círculo é igual ao triplo da medida do diâmetro, aumentado de um segmento de comprimento entre dez – setenta e um avos e um sétimo do diâmetro. Assim, sendo *P* o perímetro e *D* a medida do diâmetro então $3 + \frac{10}{71} < \frac{P}{D} < 3 + \frac{1}{7}$.

A partir destas duas proposições podemos deduzir um valor aproximado para a medida da área de um círculo dado por $A \cong \frac{11}{14} d^2$. Chamamos a atenção para o fato que a preocupação de Arquimedes foi achar um encaixe para a razão P/D e não um número.

A notação π data do início do século XVIII. Arquimedes obteve este enquadramento pelo cálculo de valores aproximados, por falta e por excesso, de $\frac{P_{96}}{D}$ e $\frac{Q_{96}}{D}$, sendo P_{96} o perímetro do polígono

---

[30] Baseado no texto *Archimede*, em Mathematiques: approche par des textes historiques, Groupe IREM, Universidade Paris VII, Jan. 1990, volume 2, p. 36-37.

[31] Utilizamos o termo equivalente para indicar que as figuras têm a mesma área.

regular de 96 lados inscrito em uma circunferência e Q_{96} o perímetro do polígono regular de 96 lados circunscrito na mesma circunferência. Estes valores aproximados são calculados graças a um procedimento iterativo: Arquimedes parte de um hexágono regular (para o qual a relação é conhecida) e dá um método de cálculo que permite obter a relação procurada para um polígono que tem o dobro de lados.

O método de Arquimedes foi retomado numerosas vezes por: Al-Kashi (século XV), Fibonacci (século XIII), Métius (século XVII) etc.

Viète (1540 – 1603), com um trabalho análogo sobre medida de áreas, obteve a famosa relação como produto infinito:

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots\cdots}.$$

Huygens (1629 – 1695) melhora este método. Newton (1642 – 1727) encontrou um método radicalmente diferente, calculando uma aproximação de π com a ajuda de um desenvolvimento em série e de um cálculo de integral.

Lambert (1728 – 1777) demonstrou a irracionalidade de π quando reencontrou esta demonstração, como também a irracionalidade de π^2, nos Elementos de Geometria de Legendre (1794). Enfim, a transcendência[32] de π foi demonstrada por C. L. F. Lindemann (1852-1939), em 1882.

AL KHWARIZMI[33]

Abu Abd Allah Muhammad Ben Musa Al Khwarizmi nasceu numa vila denominada Khwarizmi (hoje Khiva, na República do Uzbekistão) no final

---

[32]O número π é transcendente porque não pode ser raiz de nenhuma equação polinomial a coeficientes inteiros.

[33]Adaptado de *Al Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wa I – Muqabala*, editado por A. M. Mashrafa e Mursi Ahma. Cairo, 1968. Tradução: A Djebbar (para o Francês), p. 20 – 21 e p. 23 – 24 (do original) e de *Al Khwarizmi* in M.A.T.H. vol2, mathematiques approche par des textes historiques. IREM, Université Paris VII, Jan. 1990, p. 72-73.
Tradução para o Português de Renata Rossini.

do século VIII e morreu um pouco antes do ano 850 d.C. Seus pais migraram para um lugar ao sul de Bagdá quando era criança, a data exata de seu nascimento não é conhecida. Viveu na época do califa abássida al-Ma'mum (r. 813–833) e sabe-se que ele morreu em 846. Ele trabalhou na biblioteca formada pelo pai de al-Ma'mun, Harune Arraxide, denominada casa da Sabedoria, na qual foram reunidas todas as obras científicas da matemática. Ele foi membro da "Casa da Sabedoria" fundada em Bagdá pelo califa Al-Mâmu que atraiu os sábios do mundo árabe, muçulmano, cristão, sírio e judeu; eles traduziram para o árabe todos os grandes textos gregos e indus.

O nome Al Khwarizmi, seguido de diversas modificações, tornou-se "algorithmo", provavelmente por causa de sua obra sobre a aritmética (denominada em latin de *numero Indorum*), onde ele expõe numerosas regras de cálculo numérico.

A principal obra de Al Khwarizmi denomina-se *Al Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wa I – Muqabala,* considerada como a melhor exposição de álgebra até os tempos modernos; o principal objetivo dessa obra é a resolução de problemas da vida cotidiana (em particular, problemas de herança); também trata de equações do 1º grau e do 2º grau.

Ele considera três tipos de números: os números simples ou dirham (unidade monetária), o gizr (raíz) e o màl (quantidade de uma soma, mas também quadrado do gizr). Alem disso, ele considera seis formas canônicas de equações do 1º grau e do 2º grau (onde todos os termos são positivos e a única operação é de adição) que são do tipo: $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $ax = c$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, $bx + c = ax^2$.

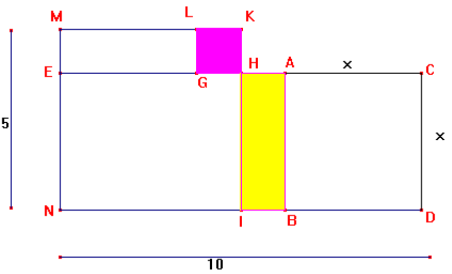
Al Khwarizmi considera somente as soluções positivas destas equações. Qualquer outra equação não pode ser resolvida antes de ser transformada numa destas formas. Ele se livra dos termos com sinal negativo com a ajuda do gabr, operação que consiste em adicionar aos dois termos da equação aquele que tem o sinal negativo.Em seguida se reduzem todos os termos semelhantes com a ajuda do muqabala que consiste em anular os termos semelhantes nos dois lados da equação. Finalmente o coeficiente do termo de 2º grau deve ser igual à unidade para aplicar as regras de resolução das equações.

A transformação al-jabr nos dá a palavra álgebra que designa a ciência da resolução de equações.

O conteúdo da obra de Al Khwarizmi assemelha-se à álgebra dos babilônios ou dos indus sem a utilização da notação indu. Por outro lado, encontramos uma nítida influência dos matemáticos gregos na parte onde o autor julga necessário demonstrar geometricamente a validade das soluções propostas para as equações. Diferentemente

das demonstrações gregas que tratam de problemas geométricos (determinar segmentos e áreas), Al Khwarizmi indica enfaticamente que seu problema se aplica à toda quantidade numérica.
O texto que segue apresenta o mais antigo testemunho de um avançado critério de discussão do número de soluções de uma equação do segundo grau.

Al–Khwarizmi toma como exemplo a equação $x^2 + 21 = 10x$ que ele exprime como "*um quadrado e vinte e um número igualado a dez de suas raízes*", onde ele procura uma solução positiva graças a uma interpretação geométrica desta equação. Ele vai determinar o lado *x* de um retângulo *ECDN* onde o outro lado vale 10 (e cuja área vale $10x$), de tal forma que o retângulo *ECDN* se decompõe no retângulo *EABN* de área 21 e um quadrado *ADCB*. A equação se traduz por: *Área(ACDB)* + *Área(EABN)* = *Área(ECDN)*, com $EC = 10$, $AC = x$ e *Área(EABN)* =21
Seu método de resolução consiste no que segue:
Tome a metade de 10 e terás 5
Multiplique 5 por ele mesmo e terás 25.
Subtraia 21 de 25 e terás 4.
Tome a raiz de 4 que é 2.
Subtraia 2 de 5 e terás 3.
Esta é a raiz procurada e o quadrado é 9.



(.....) Quanto à justificação da solução: de um quadrado e vinte e um em número igualado a dez de suas raízes. Tomaremos para o quadrado uma superfície quadrada de lado desconhecido e que é a superfície (*ABDC*), em seguida a uniremos a uma superfície com a mesma largura de um dos lados e de lados paralelos; a superfície será (*EABN*) e o lado será *EN*. O comprimento das duas superfícies reunidas será então *CE*. E nós sabemos que este comprimento é dez em número. Como dissemos: um quadrado e vinte e um em número igualado a dez de suas raízes, então o comprimento do lado *CE* é dez em número, pois o lado *CD* é o lado do quadrado. Em seguida, nós dividiremos o lado *CE* em duas metades, no ponto *H*. Nós vemos que *HI* é igual a *CD*. Acrescentamos ao segmento *HI*, no seu prolongamento, o equivalente do excesso de *CH* sobre *HI*, (acrescentamos ao segmento *EN*, no seu prolongamento, o segmento *EM*) a fim de que a superfície (*NIKM*) seja um quadrado. O segmento *IK* é igual ao segmento *KM*. Temos uma superfície quadrada de lados e ângulos iguais que é a superfície (*MKIN*). Vimos que o segmento *IK* é igual a cinco. A superfície (*MKIN*) é igual a 25 e isto é o resultado do produto da metade de 10 por ele mesmo. Mas, vimos que a superfície (*EABN*) vale 21. Com a ajuda do segmento *IK* que é um dos lados da superfície (*MKIN*), dissociaremos (*EHIN*) da superfície (*EABN*) e resta a superfície (*ABIH*). Nós tomaremos, do segmento *KM*, o segmento *KL* que é igual ao segmento *HK* (e, sobre *HE*, o segmento *HG* igual ao segmento *LK*). Veremos que o segmento *IH* é igual ao segmento *ML*. A superfície (*MLGE*) é igual à superfície (*IBAH*).

Vemos então que a superfície (*EHIN*) , aumentada da superfície (*MLGE*) é igual à superfície (*EABN*) que vale 21. Mas, a superfície (*MMKIN*) vale 25. Quando suprimimos da superfície (*MKIN*) as superfícies (*EGIN*) e (*MLGE*) restará uma pequena superfície que e´ a superfície (*GHKL*) que vale a diferença entre 25 e 21 , isto é, 4. Sua raiz é o segmento *GH* que é igual ao segmento *HÁ* e que é igual a dois. Então o segmento *AC* vale três e é a raiz do primeiro quadrado. O segmento *GC* vale sete. Isto será a raiz de um quadrado maior que o primeiro quadrado e que se acrescentarmos 21 será igual a dez de suas raízes. Aqui está a figura da demonstração.

11 TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRIAS 1: simetria axial e simetria central

Objetivos gerais: Estudar a simetria axial e a simetria central, a partir de situações envolvendo dobradura, colagem, malhas quadrangulares e triangulares, sistematizando definições e propriedades para cada uma das transformações.

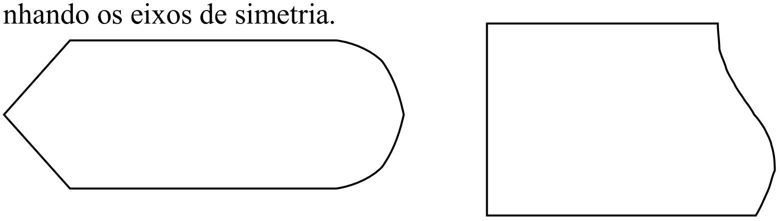
11.1 Simetria axial ou ortogonal[34]

Atividade 1: dobrando e coincidindo

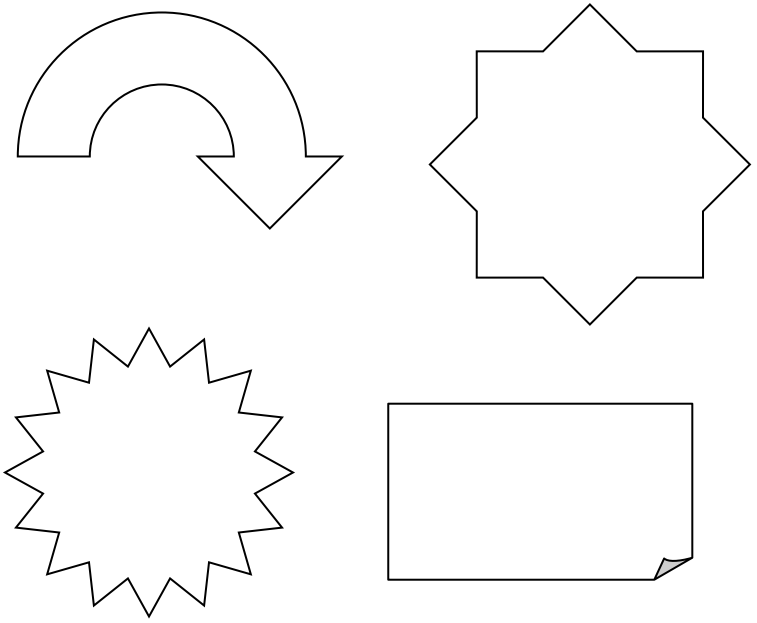
a) Recorte as figuras do **anexo 09** e dobre-as de modo que as duas partes coincidam.
b) Cole abaixo, destacando com lápis e régua, o vinco da dobradura que permitiu fazer com que as duas partes coincidissem.

Figuras como essas, nas quais existe uma dobradura que faz com que as duas partes obtidas coincidam, são denominadas **figuras com simetria** e a reta que passa pelo vinco da dobradura é considerado seu **eixo de simetria.**

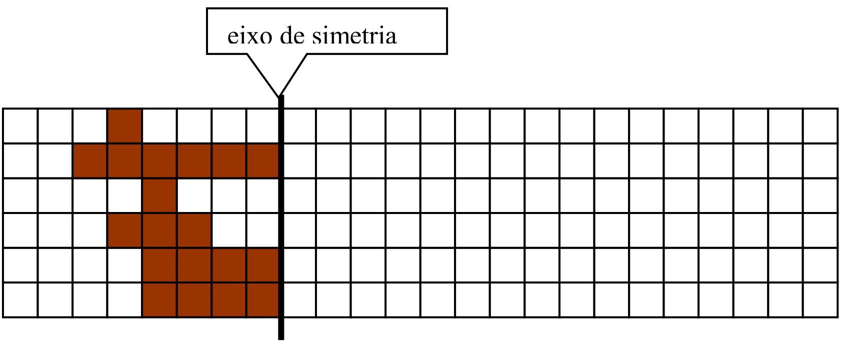
c) Verifique se existem, para cada uma das figuras, outras maneiras de efetuar a dobra de modo que as duas partes coincidam.
d) Nem sempre é possível dobrar uma figura no seu eixo de simetria (se é que ela possui um).
Imagine que as figuras abaixo tenham sido desenhadas na lousa. Neste caso você não poderia dobrar a lousa para prever se elas são ou não figuras com simetria. Explique como faria tal previsão desenhando os eixos de simetria.



[34] As atividade 1 e 2 foram inspiradas em *Transformando a Prática das Aulas de Matemática*, volume 4 – 7ª série, coordenado por Tânia Campos, PROEM Editora Ltda, pp. 84-84, 200, São Paulo.



e) No quadro abaixo está desenhada parte de uma figura e seu eixo de simetria. Complete-a.

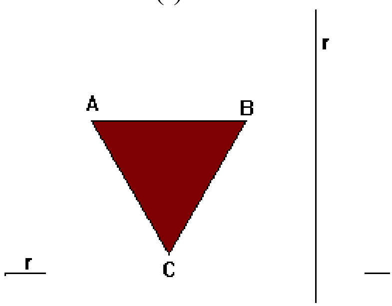


f) No quadriculado abaixo, desenhe a metade de uma figura e seu eixo de simetria.
Dê a um colega para completá-la.

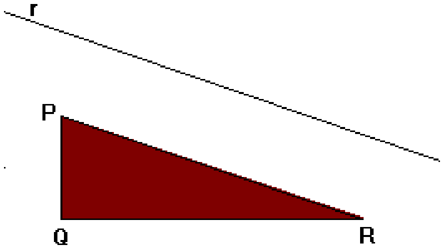
Objetivo: reconhecer figuras com simetria e identificar seus eixos.
Comentários: a dobradura e a malha quadriculada facilitam a visualização e a compreensão da simetria e de seu eixo. A simetria em relação a uma reta também é chamada de reflexão em reta.

Atividade 2: espelhando

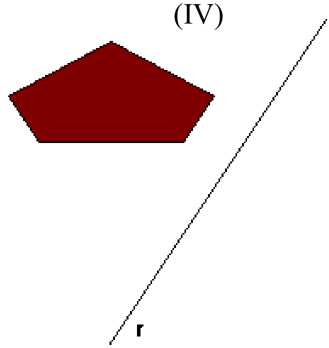
a) Se você colocar um espelho "em pé" sobre a reta *r*, em cada caso, que imagem vai obter?
Desenhe-as. (I) (II)



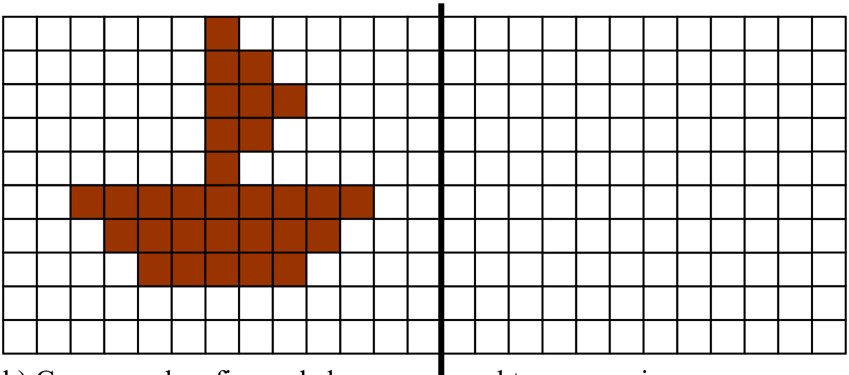
(III)



(IV)



(V)



b) Comparando a figura dada com a que obteve como imagem, o que você observa?

Objetivo: observar as propriedades fundamentais da simetria axial a partir da utilização de um espelho para obter a imagem de uma figura dada.

Comentários: a partir de uma figura e do eixo de simetria e da colocação de um espelho "em pé" sobre o eixo de simetria obtemos, no espelho, a imagem dessa figura. Observando suas características podemos desenhar a figura simétrica em relação a esse eixo considerando, por exemplo, na figura (I) que temos que construir a reta *AB* perpendicular à reta *r* e a reta perpendicular à reta *r* que passa por *C*. A seguir obter nessas retas respectivamente, os pontos *A' B'* e *C'* de tal forma que $d(A,r) = d(A',r)$, $d(B,r) = d(B',r)$ e $d(C,r) = d(C',r)$.

Atividade 3: descobrindo a simetria ortogonal (ou axial)

a) Numa folha de sulfite marque uma reta *d* e um ponto *P* fora dela.
b) Dobre a folha sobre a reta *d* e marque o ponto coincidente com *P*.
c) Desdobre a sua folha e nomeie esse ponto de *P'*.
d) Crie o segmento *PP'* e nomeie de *O* a intersecção do segmento *PP'* com a reta *d*.
e) Compare os segmentos *OP* e *OP'*. Qual é a natureza dos ângulos formados pela reta *d* e o segmento *PP'*? O que representa a reta *d* para o segmento *PP'*?

Definição 1: O ponto *P'* assim construído é o simétrico do ponto *P* em relação à reta *d*.

f) Qual é o simétrico de *P'* em relação à reta *d*? Explique por quê.

Definição 2: Dizemos que os pontos P e P' são simétricos em relação à reta d. A reta d é chamada eixo de simetria.

g) Apoiando-se no que você acabou de descobrir, explique a seguinte afirmação: "*O ponto A' é simétrico de um ponto A em relação a uma reta t*".
h) Proponha um processo para a construção, com régua e compasso, do simétrico de um ponto *M* em relação a uma reta *r*.
i) Seja *L* um ponto qualquer da reta *r*. Qual é o simétrico de *L* em relação à reta *r*?

Objetivo: introduzir o conceito de ponto simétrico a outro em relação a uma reta.
Comentários: constatar que o eixo de simetria é a mediatriz do segmento formado pelo ponto dado e o seu simétrico, e elaborar um processo para a construção geométrica do simétrico de um ponto em relação a uma reta. Para essa simetria iremos considerar a seguinte notação: $A' = S_d(A)$ leia-se "*A'* é o simétrico de *A* em relação à reta *d*". Podemos concluir também que se $A' = S_d(A)$ então d é a mediatriz de $\overline{AA'}$.

Atividade 4: Construindo o simétrico de um segmento

a) Trace uma reta *d* e um segmento *MN*, não pertencente à *d*.

b) Explique como construiria o simétrico do segmento *MN* em relação à reta *d*.

c) Construa-o e nomeie-o de *OP*.

d) O que você pode afirmar a respeito dos segmentos *MN* e *OP*?

Objetivo: determinar o simétrico de um segmento em relação a uma reta.

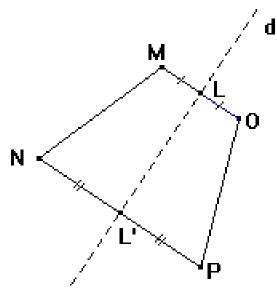
Comentários: para determinar o simétrico de um segmento em relação a uma reta basta construir os simétricos dos extremos desse segmento, percebendo que todos os pontos do segmento dado tem um simétrico na imagem desse segmento pela simetria axial.

No item (d) temos: $O = S_d(M) \Leftrightarrow d$ é mediatriz de $\overline{MO}$ e

$P = S_d(N) \Leftrightarrow d$ é mediatriz de $\overline{NP}$.

$L \in d \Rightarrow \overline{LN} \equiv \overline{LP}$

d é mediatriz de $\overline{MO} \Rightarrow \overline{ML} \equiv \overline{LO}$



(1) $L\hat{N}P \equiv L\hat{P}N$ (o triângulo *LNP* é isósceles).

(2) $L\hat{N}P \equiv L\hat{P}N$ (ângulos alternos).

(3) $O\hat{L}P \equiv L\hat{P}N$ (ângulos alternos).

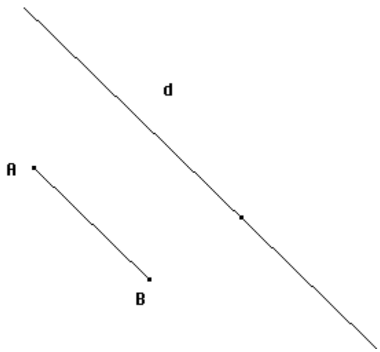
De (1), (2) e (3) podemos concluir que $M\hat{L}N \equiv O\hat{L}P$.

Resumindo: Nos triângulos *NML* e *OPL* temos $\overline{NL} \equiv \overline{PL}$, $M\hat{L}N \equiv O\hat{L}P$ e $\Rightarrow \overline{ML} \equiv \overline{LO}$ que nos dá que o triângulo *NML* é congruente ao triângulo *OPL* e como conseqüência $\overline{MN} \equiv \overline{OP}$. Logo se $O = S_d(M)$ e $P = S_d(N)$ então $\overline{MN} \equiv \overline{OP}$.

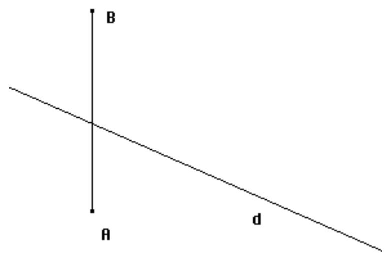
Atividade 5: construindo simétricos de segmentos

Nos seguintes casos, construa o segmento *MN* simétrico do segmento *AB* em relação à reta *d*.

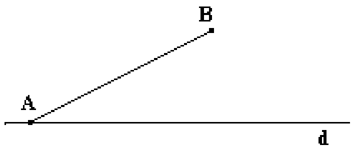
a)



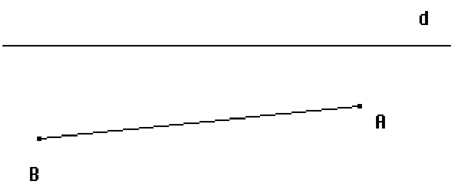
b)



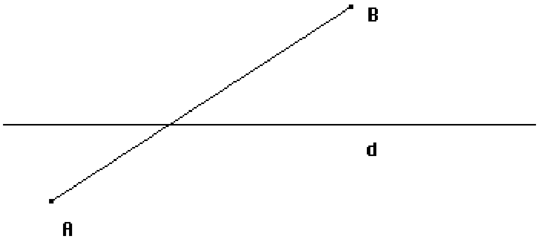
c)



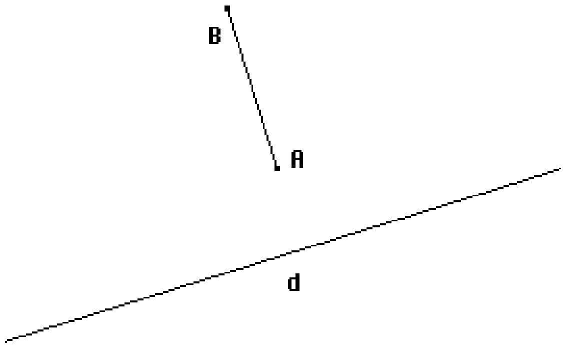
d)



e)



f)



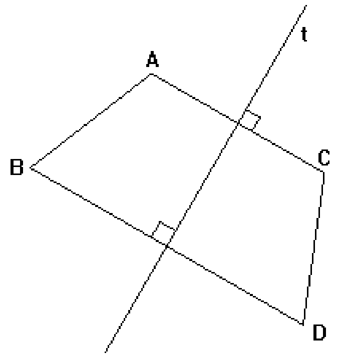
Objetivo: determinar o simétrico de um segmento em relação a uma reta alterando a posição da reta e do segmento.
Comentários: com relação apenas a posição do eixo observar que na horizontal e vertical é mais evidente. Verifica-se menos erros na determinação da simetria e quando está na posição inclinada o índice de erros aumenta. Com relação a posição eixo – figura o índice de erros aumenta quando o eixo de simetria reparte o segmento em 2 partes. Quando as extremidades do segmento dado estão em semi-planos opostos em relação ao eixo.

Atividade 6: identificando o simétrico de um segmento

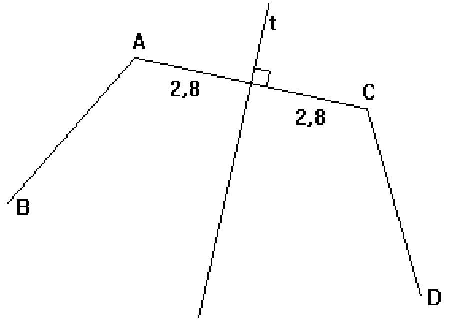
Nas figuras abaixo, o segmento *CD* é simétrico do segmento *AB* em relação à reta *t*?

Justifique a sua afirmação.

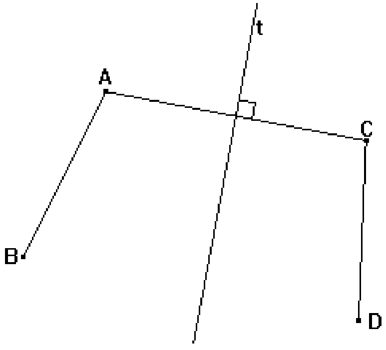
a)



b)



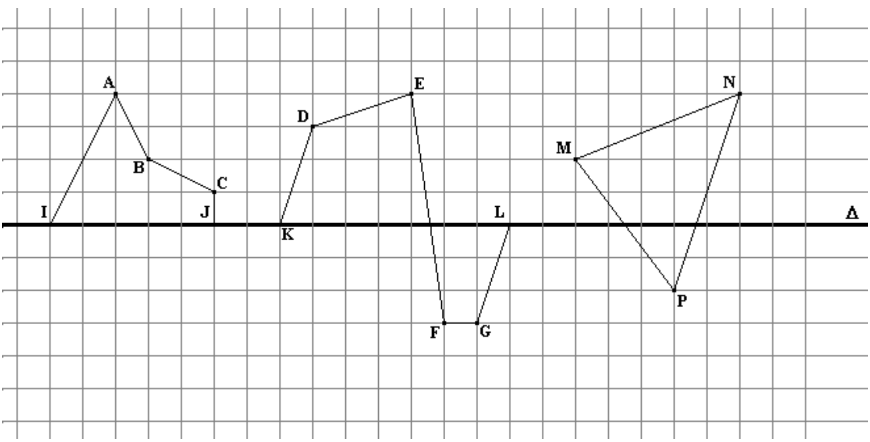
c)



Objetivo: reconhecer se um segmento é simétrico ou não a outro em relação a uma reta.
Comentários: a partir da utilização das propriedades que os caracterizam concluímos que na primeira figura é dado que a reta *t* é perpendicular aos segmentos determinados pelos pontos e seus possíveis simétricos, necessitando apenas conferir se as interseções são pontos médios. Na 2ª figura a reta *t* é mediatriz do segmento determinado por uma extremidade e seu simétrico em relação à essa reta, ficando a outra extremidade para verificar. Na 3ª figura sabe-se que a reta *t* é perpendicular ao segmento determinado por uma das extremidades e seu simétrico em relação a essa reta, faltando verificar se a intersecção é ponto médio e se a outra extremidade apresenta as 2 características da simetria (perpendicular e ponto médio).

Atividade 7: construindo os simétricos de figuras mais complexas

a) Considere o desenho abaixo.



b) Construa os pontos *A'*, *B'*, *C'*.... simétricos dos pontos *A*, *B*, *C*, ... em relação à reta Δ. O que representa a reta Δ para o novo desenho obtido.

c) Complete:

A'B' = ... *B'C'* = ... $med(I\hat{A}B) =$ .... $med(P\hat{M}N) =$ ....

d) Escreva cinco outras igualdades que relacionem os triângulos *M'N'P'* e *MNP*.

Objetivo: construir figuras simétricas a figuras dadas em relação a uma reta dada.
Comentários: observar as relações de igualdade entre as medidas dos elementos da figura e do seu simétrico.
Na situação proposta embora haja a dificuldade pela posição do eixo-objeto o uso da malha quadriculada a posição horizontal do eixo facilitam a percepção da solução. Nesta atividade deve-se perceber além da igualdade entre a medida dos lados correspondentes da figura e do seu simétrico também a congruência entre os ângulos correspondentes.

Institucionalização

Dizer que dois pontos *A* e *M* são simétricos em relação à uma reta *r*, significa que *r* é a mediatriz do segmento *AM*. Assim, se $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$ são simétricos em relação à reta r então são congruentes, isto é, $\overline{AB} = S_r(\overline{MN})$ então $\overline{AB} \equiv \overline{MN}$.
Podemos dizer também que:
- *A* é simétrico de *M* em relação à reta *r*.
- *M* é simétrico de *A* em relação à reta *r*.
- Todo ponto de *r* é seu próprio simétrico em relação à reta *r*.

Atividade 8: desvendando as propriedades da simetria axial
Complete as seguintes afirmações:
a) Se um ponto *A'* é simétrico de um ponto *A* em relação à uma reta *d*, então:

- as retas *d* e $\overleftrightarrow{AA'}$ são ...
- a reta *d* é .... do segmento $\overline{AA'}$.

b) Se um segmento $\overline{L'K'}$ é simétrico de um segmento $\overline{LK}$ em relação à uma reta *t*, então $\overline{L'K'}$ e $\overline{LK}$ são ...
c) A imagem de uma reta *b* em relação ao eixo *q* é:

- uma reta *b'* paralela a *b* , se *b* e *q* são ...
- a reta $b \equiv b'$, se *b* e *q* são ...
- a reta *b'* que intercepta a reta *b* no eixo *q*, se *b* e *q* são ...

d) Se os triângulos *ABC* e *A'B'C'* são simétricos em relação à uma reta *x*, então os triângulos *ABC* e *A'B'C'* são ....pois ...

Objetivo: refletir a respeito das propriedades que caracterizam a simetria axial.

Comentários: a partir do que foi visto a respeito da simetria axial de ponto, de segmento, de reta e de triângulos, analisar as posições relativas de uma reta, sua imagem e do eixo de simetria. Observar a congruência entre um triângulo e sua imagem pela simetria axial.

Nesta atividade aplicou-se o que já foi visto procurando enfocar os conceitos geométricos sobre diferentes pontos de vista.

No item (d) faz-se necessário elaborar um esquema explorando e analisando as possibilidades.

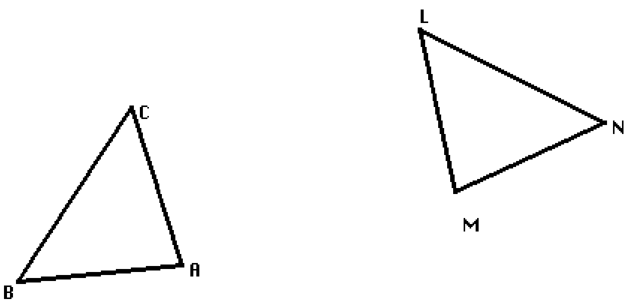
Podemos demonstrar a congruência dos triângulos *ABC* e *A'B'C'*:

$$\left.\begin{array}{l} A' = S_x(A) \\ B' = S_x(B) \\ C' = S_x(C) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ o triângulo *ABC* é congruente ao triângulo *A'B'C'*.

Atividade 9: identificando eixos de simetria

Exercício 1

a) No desenho abaixo, os triângulos são simétricos em relação à uma reta *d*? Por quê?



b) Em caso afirmativo, explique como construiria o eixo de simetria e construa-o.

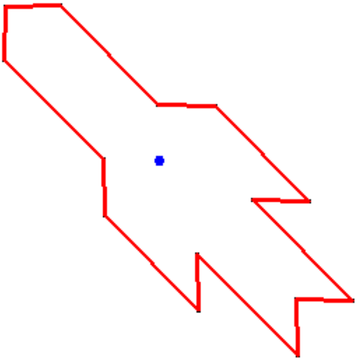
Exercício 2

a) O desenho ao lado representa um avião. Existe alguma simetria no desenho? Justifique sua resposta.

b) Nomeie os vértices do desenho. Quantos eixos de simetria possui este desenho?

c) Explique sua resposta.

d) Construa um eixo de simetria e indique os vértices correspondentes em relação a esse eixo.



Exercício 3

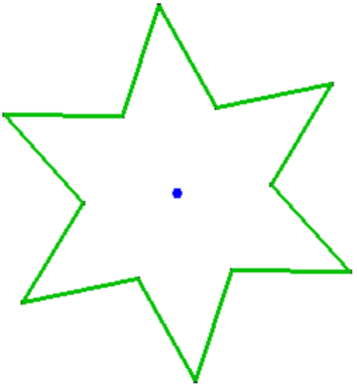
a) O desenho ao lado representa uma FLOR. Existe alguma simetria no desenho?

b) Nomeie os vértices. Quantos eixos de simetria possui este desenho?

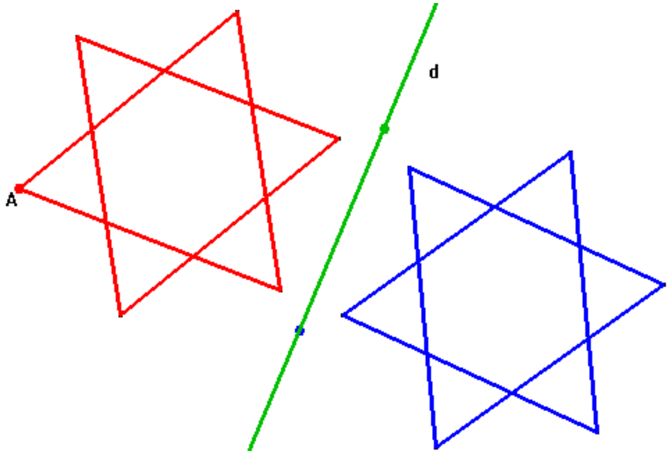
c) Quais são eles?

d) Construa-os.

c) Explique suas respostas.



Exercício 4
Analise a figura abaixo.



a) Quantos eixos de simetria têm cada um dos triângulos que formam a estrela da esquerda?

b) Construa-os e explique como você fez.

c) Os eixos de simetria dos dois triângulos da esquerda são os mesmos? Por quê?

d) Quantos eixos de simetria possui cada estrela?

e) As respostas das questões (a), (c) e (d) também valem para a estrela da direita?

f) A estrela da direita é o simétrico da estrela da esquerda em relação à reta *d*. Verifique esta afirmação ligando os vértices correspondentes das duas estrelas.

g) A reta *d* é o eixo de simetria da figura inicial? Por quê?

Objetivo: identificar a simetria e construir os eixos em figuras dadas redigindo os procedimentos de solução.
Comentários: para a resolução do exercício 1 desta atividade deve-se, primeiramente, identificar se as figuras dadas são congruentes, associar os vértices correspondentes e verificar se as mediatrizes de todos os segmentos formados pelos pares de pontos correspondentes coincidem. Nos exercícios 2 e 3 os eixos de simetria cortam a figura em duas partes que coincidem por superposição (evidente por visua-

lização) no inicio podem responder pela aparência e depois para justificar deverá pensar nas propriedades. Na simetria da figura do exercício 4 analisa-se a simetria de partes da figura e depois da figura inteira considerando as 2 estrelas como uma só figura.

Atividade 10: procurando eixo(s) de simetria

Exercício 1

a) A afirmação: ”*as diagonais de um retângulo qualquer são eixos de simetria desse retângulo*” é verdadeira ou falsa? Justifique a sua resposta.

b) Construa um retângulo de comprimento 6 cm e de largura 4 cm e trace seus eixos de simetria. Explique sua resposta.

Exercício 2

a) Construa um quadrado.

b) Quantos eixos de simetria tem um quadrado? Justifique sua resposta.

Exercício 3

a) Construa um triângulo isósceles.

b) Quantos eixos de simetria tem um triângulo isósceles? Justifique sua resposta.

Exercício 4

a) Construa um triângulo eqüilátero.

b) Quantos eixos de simetria tem um triângulo eqüilátero? Justifique sua resposta.

Exercício 5

a) Construa um losango.

b) Quantos eixos de simetria tem um losango? Justifique sua resposta.

Objetivo: investigar eixos de simetria em polígonos particulares.
Comentários: nessa atividade deve-se pensar nas propriedades dos quadriláteros e triângulos particulares, salientando que o quadrado é um caso particular do retângulo e do losango. Em um retângulo qualquer, apenas as mediatrizes dos lados são eixos de simetria (as

diagonais, não são, pois embora interceptem-se no ponto médio, não necessariamente são perpendiculares. No quadrado tanto as mediatrizes dos lados, quanto as diagonais são eixos de simetria, pois as diagonais são congruentes, se interceptam no ponto médio e são perpendiculares. No losango só as diagonais são eixos de simetria por serem perpendiculares e se interceptarem no ponto médio.
Destacar que o triângulo eqüilátero é um caso particular do triângulo isósceles. No triângulo eqüilátero temos três eixos de simetria. Em um triângulo isósceles qualquer de vértice *A*, tem-se apenas um eixo de simetria que passa por *A* coincidindo com a mediatriz, mediana e altura traçada por esse vértice. O triângulo eqüilátero é um caso particular do triângulo isósceles e como conseqüência terá três eixos de simetria (qualquer um de seus vértices poderá ser vértice considerado vértice de um triângulo isósceles.

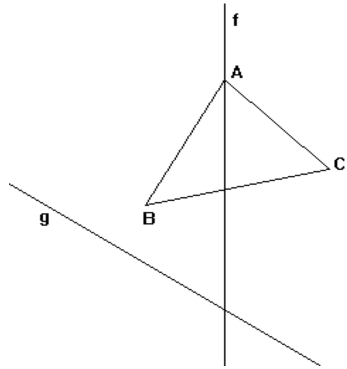
Atividade 11: construindo os simétricos de figuras notáveis

Construa o simétrico de um ângulo, de um paralelogramo e de uma circunferência em relação à uma reta *d*. Em cada caso explique seu processo de construção.

Objetivo: verificar a quantidade mínima de elementos que devem ser observados para construir o simétrico de figuras poligonais e não poligonais.
Comentários: explorar e analisar os elementos mínimos necessários para realização e justificativa desta construção. Nessa atividade é preciso, antes de realizar a construção, analisar quais os elementos mínimos de cada figura são necessários para se obter o simétrico da figura toda. Na construção do simétrico de um ângulo deve-se determinar o simétrico do vértice e de um outro ponto qualquer pertencentes a cada lado deste ângulo. Na circunferência deve-se construir o simétrico do centro e de um ponto qualquer da circunferência. No paralelogramo Obtém-se o simétrico da figura construindo o simétrico de cada vértice da figura.

Atividade 12: construindo e justificando com a simetria axial

a) Considere a figura abaixo.



b) Construa o triângulo *A'B'C'*, simétrico do triângulo *ABC* em relação à reta *g*.

c) Construa o triângulo *A"B"C"*, simétrico do triângulo *A'B'C'* em relação à reta *f*.

d) Construa o triângulo *A'''B'''C'''* simétrico do triângulo *A"B"C"* em relação à reta *g*.

e) Compare os triângulos *ABC* e *A'''B'''C'''*. Eles são simétricos em relação a que reta? Justifique sua resposta.

Objetivo: construir sucessivamente a imagem de um triângulo por simetria axial.

Comentários: tendo como referência duas retas concorrentes e um triângulo construir as imagens sucessivas que se pode obter alternando o eixo de simetria e verificar se a terceira imagem obtida mantém a simetria com a figura original e a relação entre os eixos de simetria. Transitividade. Nesta atividade percebe-se que a simetria entre a figura original e a terceira imagem é conservada, porém o eixo de simetria será a bissetriz do ângulo entre as retas concorrentes. Pode haver dificuldade por se ter as retas concorrentes.

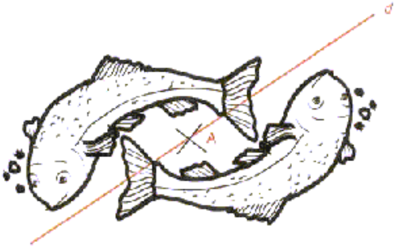
11.2 Simetria central

Atividade 01: descobrindo a simetria central

Exercício 1

a) Recorte as figuras do **anexo 10.**

b) Considere o desenho 1 e dobre-o segundo a reta *d*. Os dois peixes são simétricos em relação à reta *d*? Explique por quê.

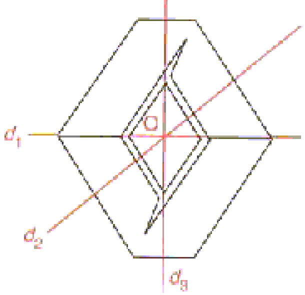


Exercício 2

a) Observe o logotipo da Renault – desenho 2. As retas d_1, d_2 e d_3 são eixos de simetria desse logotipo? Por quê?

b) Usando um papel transparente copie um dos peixes e faça-o girar de uma meia-volta ao redor do ponto *A*. O que você observa?

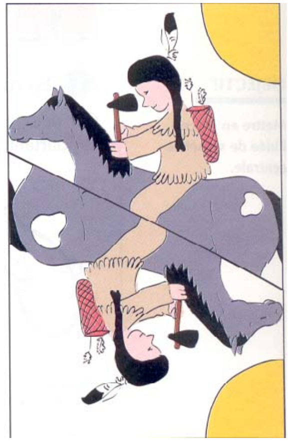
c) Usando um papel transparente copie o logotipo da Renault e faça-o girar ao redor do ponto *O*. O que você observa?



Observação: Dizemos que os dois peixes são simétricos em relação ao ponto *A* e que o ponto *O* é o centro de simetria do logotipo da Renault.

Exercício 3

Um pintor cometeu cinco erros ao querer usar a técnica da meia-volta no desenho ao lado. Quais são eles?

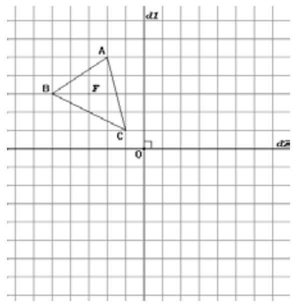


Objetivo: explorar a noção de simetria central ou reflexão em um ponto.
Comentários: O uso de papel transparente e a técnica da meia-volta ajudam na percepção da simetria central nas figuras e logotipos dados.

Atividade 02: construindo o simétrico de uma figura

a) Observe o desenho ao lado.

b) Construa o triângulo F_1 simétrico de F em relação à reta d_1 e o triângulo F_2 simétrico do triângulo F_1 em relação à reta d_2.



c) Verifique se F e F_2 são simétricos em relação ao ponto O.

d) Nomeie de A', B', C' os simétricos dos pontos A, B, C em relação ao ponto O.

e) Crie os segmentos AA', BB', CC'. Complete a seguinte frase: "*Parece que esses três segmentos passam pelo ponto .... e que O seja.. desses segmentos*".

f) Qual a relação entre a simetria central e a simetria axial?

Objetivo: relacionar a imagem de duas simetrias centrais em retas perpendiculares e diferenciar a simetria central da axial.
Comentários: nesta atividade é fácil traçar os triângulos simétricos pela utilização da malha quadriculada e observar que a simetria em relação ao ponto *O* é equivalente a uma simetria em relação ao eixo *x*, seguida de uma simetria em relação ao eixo *y*, ou vice-versa.

Atividade 03: definindo o simétrico de um ponto em relação a um ponto

a) Determine dois pontos, *A* e *O*. A seguir, construa um ponto *A'* tal que *O* seja ponto médio do segmento *AA'*.

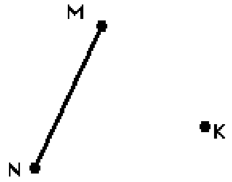
Dizemos que o ponto A' é o simétrico de A em relação ao ponto O.

b) Quando se pode dizer que um ponto *N* é o simétrico de um ponto *M* em relação a um ponto *K*?

c) Qual seria o simétrico do ponto *A'* em relação ao ponto *O* ? Explique.

Objetivo: conceituar a simetria central ou a reflexão num ponto.
Comentários: observar características dos pontos simétricos. Nessa atividade deve-se concluir a colinearidade entre os pontos *A*, *O* e *A'*, a congruência entre os segmentos *AO* e *OA'* uma vez que *O* é ponto médio de *AA'*.

Atividade 04: construindo o simétrico de um segmento



a) Explique como você construiria o segmento *PQ*, simétrico do segmento *MN* em relação ao ponto *K* e construa-o.

b) Compare o segmento *MN* e seu simétrico em relação ao ponto *K*.

c) Considere uma reta *d* e um ponto *A* fora dela. Explique como construiria o simétrico da reta *d* em relação ao ponto *A*. Faça a construção. Qual é o simétrico da reta *d* em relação ao ponto *A*?

Objetivo: obter a imagem de um segmento pela simetria central.
Comentários: A partir da simetria central de um ponto obter a simetria central para um segmento. Nos itens (a) obtém-se o simétrico do segmento *MN* em relação ao ponto *K* construindo os pontos *P* e *Q*, simétricos respectivamente das extremidades *M* e *N* em relação ao

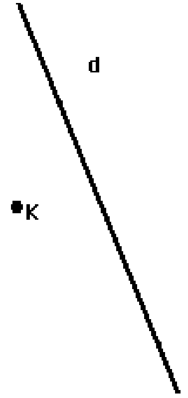
ponto K, observando que os demais pontos de $\overline{MN}$ têm imagens sobre $\overline{PQ}$. No item (b) comparando o segmento MN e o seu simétrico $\overline{PQ}$ em relação a K tem-se a congruência entre $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ e o paralelismo entre os mesmos justificado pelo recíproco do Teorema de Thales aplicado nos triângulos MNK e PQK. Ou, usando as propriedades do paralelogramo. De fato, $MQPN$ é um paralelogramo, pois suas diagonais $\overline{MP}$ e $\overline{NQ}$ têm mesmo ponto médio.

Atividade 05: construindo simétricos de figuras

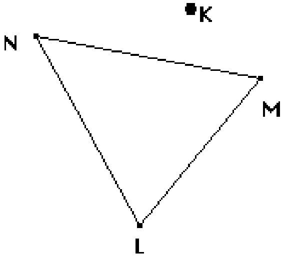
a) Em cada uma das seguintes situações construa o simétrico da figura-objeto em relação ao ponto K.

b) Explique, em cada situação, sua construção e compare a figura-objeto e a figura construída, anotando o que você observou.

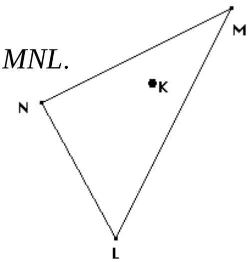
Exercício 1: A figura-objeto é a reta d.



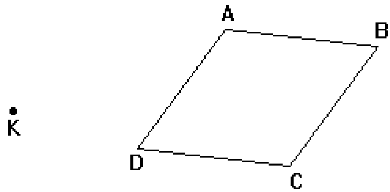
Exercício 2: A figura-objeto é o triângulo MNL.



Exercício 3: A figura-objeto é o triângulo *MNL*.



Exercício 4: A figura-objeto é o paralelogramo *ABCD*.



Objetivo: construir o simétrico de figuras mais complexas em relação a um ponto *K*.
Comentários: para cada figura é necessário que após a construção estas sejam discutidas e comparadas observando as propriedades geométricas que as relacionam tais como congruência de segmentos, de ângulos correspondentes e o paralelismo de retas. Na figura do exercício 1, observa-se que dois pontos distintos determinam uma reta e por isso determinando o simétrico de dois pontos da reta teremos a imagem dessa reta que será paralela à reta original. As figuras dos exercícios 2 e 3 tratam da simetria de dois triângulos com centros de simetria na região externa e na região interna respectivamente. Para a construção devemos obter o simétrico de cada vértice do triângulo em relação à *K* e observar a congruência dos triângulos e o paralelismo dos lados correspondentes entre a figura original e sua imagem. Na construção do exercício 3 observa-se que a figura original e sua imagem ficam sobrepostas o que dificulta, um pouco, a construção e a identificação das propriedades. Na figura do exercício 4 temos um paralelogramo e da mesma forma obter o simétrico de seus vértices em relação ao ponto *K*. Em todas as construções é importante observar que as propriedades de cada figura dada são mantidas na sua imagem pela simetria central.

Atividade 06: imaginando um processo de construção do simétrico de uma figura

a) Descreva um processo que permita a construção do simétrico de uma circunferência em relação a um ponto *M*. Faça a construção com o seu processo.

b) Crie uma circunferência de centro *O*. Qual é o simétrico dessa circunferência em relação ao ponto O? Explique a sua resposta.

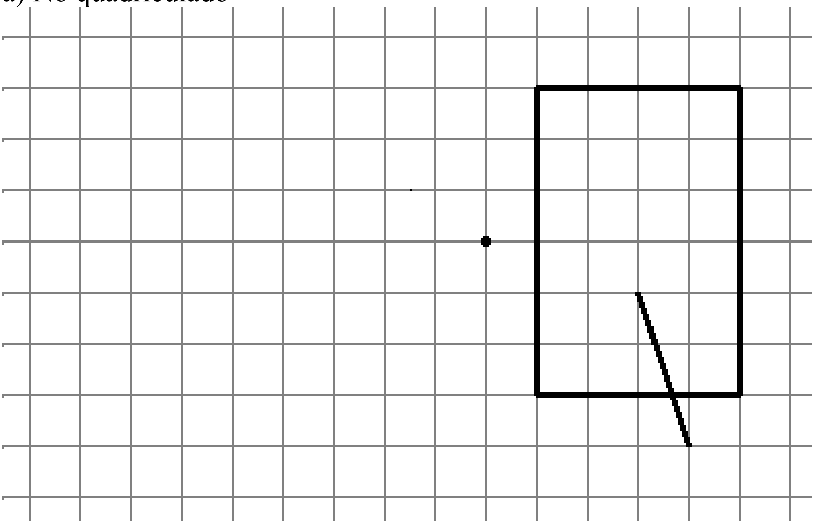
Objetivo: construir o simétrico de uma reta e de uma circunferência em relação a um ponto.

Comentários: para construir o simétrico de uma circunferência de centro *O* em relação a um ponto *M*, devemos construir os simétricos *O'* e *A'* do centro e de um ponto *A* dessa circunferência em relação ao ponto *M* e depois construir a circunferência de centro *O'* e raio *O'A'*. Se o ponto *M* coincide com o centro da circunferência dada sua imagem é a própria circunferência. Se o ponto *M* pertence a circunferência sua imagem será uma circunferência tangente externa à circunferência dada. Se o ponto *M* pertence à região externa da circunferência sua imagem será uma circunferência externa. Se o ponto M pertence à região interna da circunferência, sua imagem será uma circunferência secante.

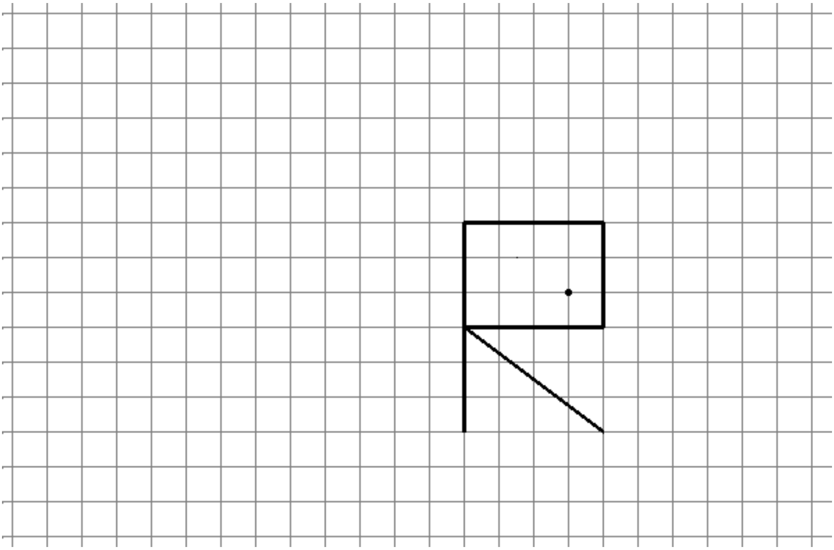
Atividade 07: construindo simétricos de desenhos mais complexos[35]

Nos seguintes casos, construa o simétrico em relação ao ponto marcado.

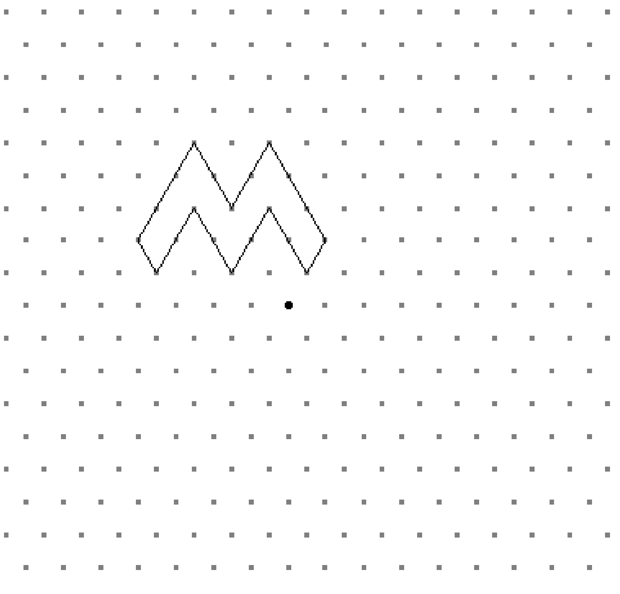
a) No quadriculado

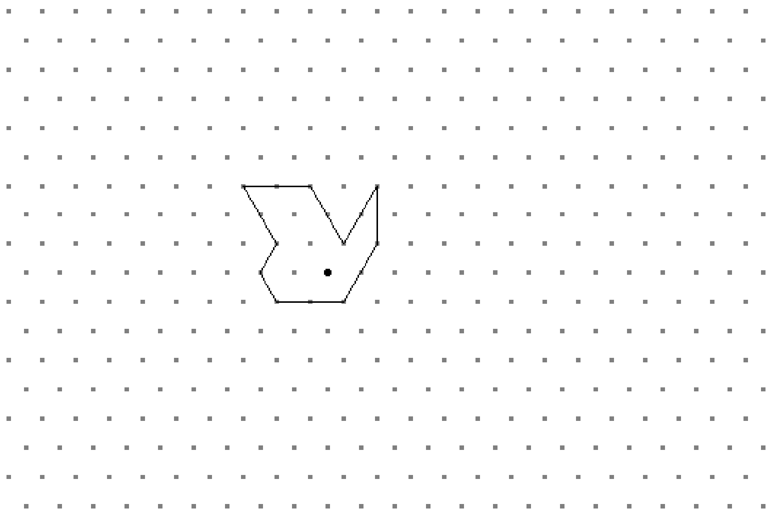


[35] Esta atividade foi inspirada na dissertação de mestrado em Educação Matemática, *Transformações Geométricas: A trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores* de Setsuko Takara Mabuchi, PUC/SP, 2000.



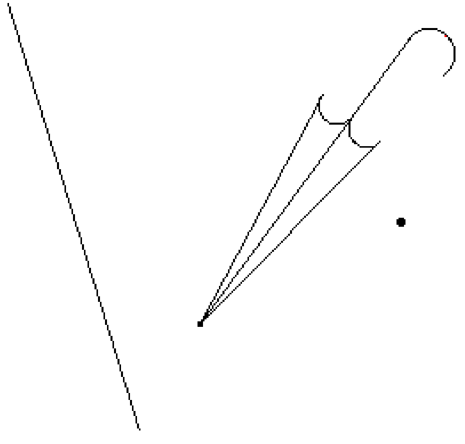
b) No pontilhado



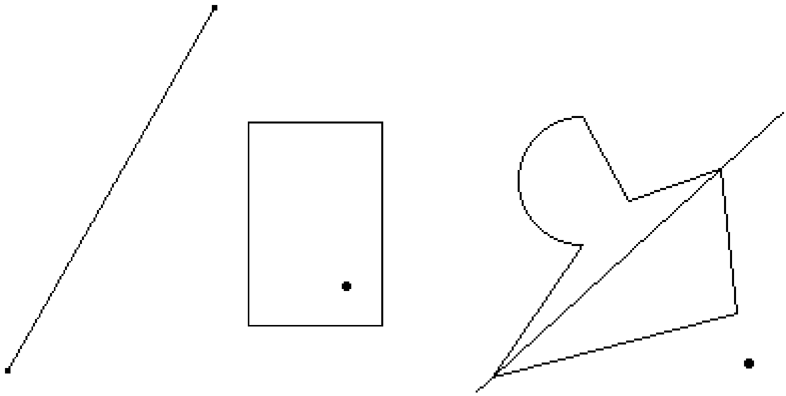


Para os desenhos abaixo, construir também, a simétrica da figura em relação à reta

c) A mão livre



d) Com régua, compasso e esquadro



Objetivo: construir o simétrico de figuras mais complexas em relação a um ponto.
Comentários: as situações propostas nesta atividade apresentam maior grau de dificuldade. Nos itens (a) e (b) as figuras são representadas sobre malhas quadriculadas e pontilhadas fazendo-se coincidir os vértices das figuras com os pontos das malhas, o que facilita a construção das imagens. Nos itens (c) e (d) não temos mais a malha, fazendo-se necessário identificar os pontos significativos das figuras, traçar retas passando por esses pontos e o centro de simetria, e no item (d) utilizando os instrumentos de desenho, determinar suas imagens.

Atividade 08: desvendando as propriedades da simetria central

Complete as seguintes afirmações:

a) Se o segmento $\overline{M'N'}$ é o simétrico do segmento $\overline{MN}$ em relação a um ponto *I*, então $\overline{MN}$ e $\overline{M'N'}$ são ...., e as retas *MN* e *M'N'* são ....

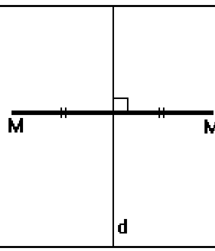
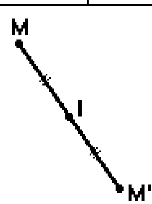
b) Se uma reta *d'* é a simétrica de uma reta *d* em relação a um ponto *O*, então *d* e *d'* são ....

c) Se o segmento $\overline{M'N'}$ é o simétrico do segmento $\overline{MN}$ em relação a um ponto *I*, então o ponto *I* é ....dos segmentos $\overline{MM'}$ e $\overline{NN'}$.

d) Se o segmento $\overline{M'N'}$ é o simétrico do segmento $\overline{MN}$ em relação a um ponto I, então o quadrilátero $MNM'N'$ é um ...., pois suas diagonais $\overline{MM'}$ e $\overline{NN'}$ têm ....
e) Se o triângulo $A'B'C'$ é a imagem do triângulo ABC pela simetria de centro O, então os triângulos ABC e $A'B'C'$ são ....pois ....

Objetivo: reforçar a aquisição das principais propriedades relacionadas com a simetria central.
Comentários: nesta atividade deve-se concluir as principais propriedades e características da simetria central, tais como: congruência e paralelismo entre um segmento e seu simétrico em relação a um ponto; paralelismo entre retas simétricas em relação a um ponto; o centro de simetria é o ponto médio entre um ponto e sua imagem na simetria central; se dois segmentos são simétricos em relação a um ponto então eles são lados opostos de um paralelogramo e suas diagonais se interceptam no ponto médio; na simetria central um triângulo e sua imagem são congruentes.

Institucionalização

Transformação	**"M' é imagem de M" significa:**	**Ilustração**	**Os pontos invariantes**
Simetria axial de eixo *d*: S$_d$	• ***Se*** $M \in d$, $M' \equiv M$ • ***Se*** $M \notin d$, ***d é a mediatriz de*** $\overline{MM'}$		***os pontos de d***
Simetria central de centro I: S$_I$	***I é o ponto médio de*** $\overline{MM'}$		***o centro I***

Propriedades

Simetria Axial e Simetria Central

1) *A imagem de um segmento é um segmento de mesmo comprimento.*

2) *A imagem de uma circunferência é uma circunferência de mesmo raio e os centros dessas circunferências correspondem-se na transformação.*

3) *Um **triângulo** (isósceles, equilátero, retângulo...) e um **quadrilátero** (paralelogramo, retângulo, losango, quadrado...) têm como imagens um triângulo e um quadrilátero de **mesma natureza**.*

Imagem de uma reta por uma simetria central

Uma reta d e sua imagem d', por uma simetria central, são paralelas

$S_I(d) = d'$ e $d \parallel d'$

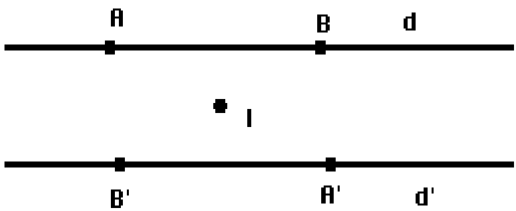
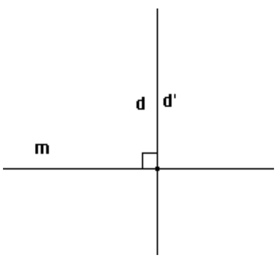


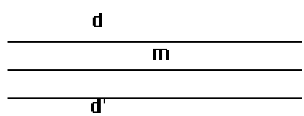
Imagem de uma reta *d* por uma simetria axial de eixo *m*

1º Caso: $d \perp m$



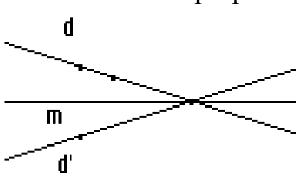
d' = d.

2º Caso: $d \parallel m$



d // d'.

3º Caso: *d* não é perpendicular nem paralela à *m*.



d e *d'* interceptam-se na reta *m*.

Atividade 09: encontrando eixos e centros de simetria em letras

Quais das letras maiúsculas abaixo:
A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z apresentam eixo(s) de simetria? E centro de simetria?

Objetivo: identificar letras maiúsculas que possuam simetria.
Comentários: encontramos simetria axial nas letras: A, D, E, H, I, M, O, T, U, V, W, X e Y; simetria central nas letras: H, I, N, O, S, X e Z.

Atividade 10: provando e explicando a partir da simetria central

Exercício 1

a) Considere três pontos *L*, *M*, *W* não colineares.
b) Construa os pontos *O* e *P* simétricos respectivos dos pontos *L* e *M* em relação ao ponto *W*.
c) O quadrilátero *LMOP* é um paralelogramo? Justifique a sua resposta?

Exercício 2

a) Construa duas retas *d* e *d'* perpendiculares no ponto *A*.
b) Marque:
- um ponto *M* não pertencente nem à reta *d*, nem à reta *d'*;
- o ponto *N*, simétrico de *M* em relação ao ponto *A*;
- o ponto *P*, simétrico de *N* em relação à reta *d*.

c) O triângulo *AMP* é isósceles? Por quê?

Exercício 3

a) Crie uma circunferência δ de centro *I* e marque três pontos distintos *A*, *B* e *C*, nessa circunferência.
b) Marque um ponto *O* exterior à circunferência δ e construa o simétrico *A'B'C'* do triângulo *ABC* pela simetria de centro *O*.
c) Explique como construiria, da maneira mais simples possível, a circunferência circunscrita ao triângulo *A'B'C'*. Faça a construção.

Exercício 4

a) Trace três circunferência C_1, C_2 e C_3 de mesmo centro *O*. Construa um triângulo *ABC* tal que *A* pertença a C_1, *B* pertença à C_2 e *C* pertence a C_3.
b) Construa o simétrico do triângulo *ABC* em relação ao centro *O*.
O que você observa?

Objetivo: aplicar as características e propriedades da simetria central para justificar algumas construções.
Comentários: no exercício 1 temos que *LMOP* é um paralelogramo, pois suas diagonais *LO* e *MP* têm como ponto médio o ponto *W* que é o ponto de intersecção entre elas.
No exercício 2, o triângulo *AMP* é isósceles pois como *P* é simétrico de *M* em relação à reta *d'* esta é bissetriz de $\overline{MP}$ e passa pelo vértice *A* do triângulo, o que nos leva a concluir que o triângulo *AMP* é isósceles. No exercício 3, após encontrar os pontos *A'*, *B'* e *C'* pela simetria de centro *O* podemos encontrar o simétrico do centro *I* em relação ao ponto *O* e traçar a circunferência que passa por *A'*, *B'* e *C'* ou, traçar a mediatriz de $\overline{A'B'}$ e de $\overline{B'C'}$ para encontrar o centro da circunferência. No exercício 4, após a construção dos pontos *A'*, *B'* e *C'* podemos observar que esses pontos pertencem respectivamente às circunferências C_1, C_2 e C_3. Além disso, notamos também que $\overline{AB} // \overline{A'B'}$, $\overline{AC} // \overline{A'C'}$ e $\overline{BC} // \overline{B'C'}$.

Atividade 11: relacionando simetria e perímetro
a) Construa um triângulo *ABC* tal que *AB = 5 cm*, *BC = 6,2 cm* e *CA = 8,3 cm*. Construa o ponto *I* médio do segmento *BC*.
b) Construa os pontos *E* e *F*, simétricos respectivos de *B* e *C* em relação à reta *AI*.
c) Calcule o perímetro do triângulo *AEF*.
d) O que você pode concluir?

Objetivo: relacionar os perímetros entre dois triângulos simétricos em relação a um ponto.
Comentários: podemos observar que pela simetria axial temos $AC = AF = 8{,}3$ cm e $AB = AE = 5$ cm. O quadrilátero *BECF* é um trapézio isósceles, pois $\overline{BE} // \overline{FC}$ e a reta *AI* é mediatriz dos segmentos *BE* e *FC*, logo as diagonais $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$ são congruentes e medem 6,2 cm. Podemos então concluir que o perímetro do triângulo *ABC* é igual ao perímetro do triângulo *AEF*.

Atividade 12: relacionando simetria e ponto médio

a) Construa um triângulo *ABC* retângulo em *A*, e o ponto *M* médio do lado $\overline{AB}$.

b) Construa os pontos *D* e *N*, simétricos respectivos dos pontos *A* e *M* em relação à reta *BC*.

c) Os pontos *D*, *N* e *B* são alinhados? Por quê?

d) Os segmentos *AM* e *MB* são congruentes? E os segmentos *AM* e *DN*? E $\overline{MB}$ e NB e $\overline{NB}$? Por quê?

e) O que representa o ponto *N* para o segmento *BD*? Por quê?

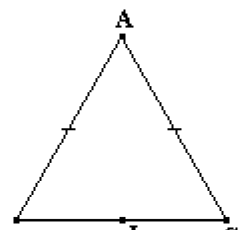
Objetivo: relacionar ponto médio e simetria axial.

Comentários: Após a construção solicitada podemos notar $\overline{AD} // \overline{MN}$ pois a reta *BC* é mediatriz de $\overline{AD}$ e de $\overline{MN}$. Além disso, $AB = BD$ e $MB = BN$ o que nos leva a concluir que os triângulos *ABD* e MBN são semelhantes. Como *M* é ponto médio de $\overline{AB}$ então *N* é ponto médio de $\overline{BD}$.

Atividade 13: interpretando e raciocinando sobre enunciados e figuras

Exercício 1

Apresentamos abaixo uma figura e o texto do aluno Pedro a respeito dessa figura:



"*A mediatriz de* $\overline{BC}$ *passa pelo ponto A. Então, esta mediatriz é um eixo de simetria do Triângulo ABC. Posso dizer, então, que a semi-reta AI é a bissetriz do ângulo* $B\hat{A}C$ *e que* $A\hat{B}C \equiv A\hat{C}B$.*"*

O seu professor Paulo fez a seguinte observação: "*Todas as afirmações são exatas, mas você não as demonstrou*".

Faça uma figura respeitando os dados do problema e justifique as afirmações de Pedro.

Exercício 2
Trace uma reta *d* e construa um triângulo *UVW* que tem a reta *d* como eixo de simetria.
Qual é a natureza do triângulo UVW?

Exercício 3
Você concorda, ou não, com a seguinte afirmação de Raimundo?
"*Pode-se desenhar triângulos que não têm eixo de simetria, que têm um eixo de simetria, que têm dois eixos de simetria, que têm três eixos de simetria*".

Objetivo: analisar afirmações feitas baseadas em uma figura.
Comentários: nesta atividade pretendemos desenvolver um encadeamento de idéias relacionando-as com eixos de simetria e propriedades dos triângulos. No exercício 1, Pedro só poderia afirmar que a semi-reta *AI* é a bissetriz do ângulo *BAC* se na figura do triângulo isósceles que foi dada estivesse explícito que *I* é ponto médio de $\overline{BC}$. Neste caso $\overline{AI}$ é altura e mediana do triângulo com relação ao vértice *A*. No exercício 2 para que um triângulo tenha uma reta como eixo de simetria esse triângulo deve ser isósceles ou eqüilátero. Na afirmação do exercício 3, podemos relacionar o triângulo que não tem eixo de simetria ao triângulo escaleno, com um eixo de simetria ao triângulo isósceles que não é eqüilátero e com três eixos de simetria ao triângulo eqüilátero, não sendo possível construir um triângulo com dois eixos de simetria, porque se este possui dois eixos também terá o terceiro.

Familiarização

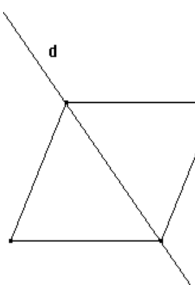
Exercício 1: desvendando suas dúvidas
Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) as seguintes afirmações:
a) A mediatriz de uma corda de uma circunferência passa pelo centro dessa circunferência. (   )
b) Um segmento tem apenas um eixo de simetria. (   )
c) Uma circunferência tem infinitos eixos de simetria. (   )
d) As diagonais de um retângulo são as bissetrizes dos ângulos desse retângulo. (   )

e) Um quadrilátero tendo dois eixos de simetria perpendiculares é, com certeza, um retângulo.

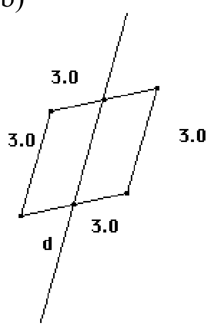
Comentários: nesta atividade faz-se uma retomada de algumas propriedades das figuras geométricas tais como: (a) a mediatriz de uma corda $\overline{AB}$ de uma circunferência passa pelo centro dessa circunferência, pois a mediatriz é um conjunto de pontos eqüidistantes a dois pontos A e B e o centro da circunferência também é eqüidistante a qualquer ponto da circunferência; (b) um segmento tem apenas um eixo de simetria; a circunferência têm infinitos eixos de simetria; (c) esta afirmativa só seria verdadeira no caso particular do quadrado, pois as diagonais de qualquer retângulo não são eixos de simetria, então os ângulos adjacentes formados com as diagonais não são congruentes e a diagonal não é bissetriz; (e) um quadrilátero com eixos de simetria perpendiculares ou é um losango qualquer ou um quadrado, logo não pode ser um retângulo e por isso a afirmativa está incorreta.

Exercício 2: testando seus conhecimentos sobre eixo de simetria
Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F), justificando sua resposta. Nos casos seguintes, a reta d não é eixo de simetria da figura desenhada.

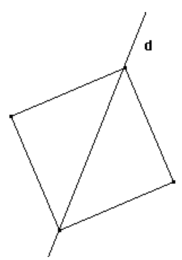
(a)



(b)

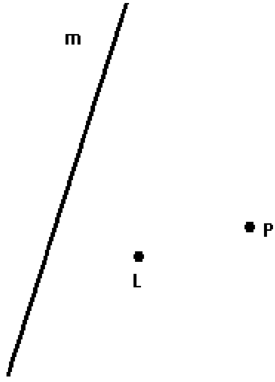


(c)



Comentários: nesta questão deve-se tomar cuidado com a negação (d não é eixo de simetria) e observar que d só não é eixo de simetria na segunda figura.

Exercício 3: construindo um triângulo isósceles usando simetria axial



a) Construa o ponto *K* da reta *m* de modo que o triângulo *LKP* seja isósceles. Justifique sua construção.
b) É possível marcar na reta *m* um ponto *D* de modo que *LPD* seja isósceles com vértice *L*? Há quantas soluções?
c) É possível marcar na reta *m* um ponto *V* de modo que *LPV* seja isósceles com vértice *P*?

Comentários: na situação proposta há duas soluções. A primeira: se o triângulo é isósceles em *K* temos que ter *KP* = *KL*, sendo *K* eqüidistante de *L* e *P* e como *K* tem que pertencer à reta *m* basta traçar a mediatriz de $\overline{LP}$ para obter, na intersecção com a reta *m*, o ponto *K* procurado. A segunda solução é, se o triângulo *KLP* é isósceles em *L*, temos que ter *LP* = *LK*, sendo *K* eqüidistante a *L* e *P* e como *K* tem que pertencer à reta *m* basta traçar a circunferência de centro em *L* e raio $\overline{LP}$ que intercepta *m* no ponto *K*.

Exercício 4: construindo um triângulo eqüilátero usando simetria axial

a) Crie uma reta *d* e um ponto *A* fora dela.
b) Construa dois pontos *B* e *C* de modo que:

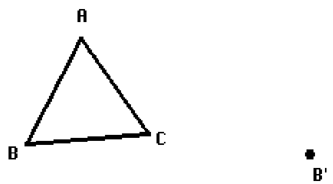
- *ABC* seja um triângulo eqüilátero.
- *d* seja um dos eixos de simetria desse triângulo.

Comentários: como o eixo de simetria é a mediatriz de um dos lados do triângulo, traçamos por *A* uma perpendicular à reta *d* e determinamos seu simétrico *B*. Sendo *AB* a medida dos lados do triângulo, traçamos uma circunferência com centro em *A* (ou *B*) de raio $\overline{AB}$ que intercepta a reta *d* no vértice *C*.

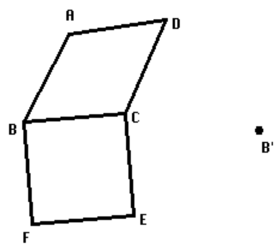
Exercício 5: construindo o eixo de simetria

Nas figuras abaixo, os pontos *B* e *B'* são simétricos em relação à uma reta *d* que foi apagada. Construa *d*, depois construa a imagem da figura pela simetria de eixo *d*.

a)



b)



Comentários: deve-se lembrar que o eixo de simetria é a mediatriz entre um ponto e sua imagem. Construído o eixo de simetria, a imagem da figura pode ser obtida por meio da imagem de seus vértices.

Exercício 6: construindo um triângulo particular

a) Construa um triângulo *ABC* retângulo em *A* tal que $BC = 6\ cm$ e $AC = 3\ cm$.

b) Determine o ponto *D* simétrico de *C* em relação à reta *AB*. Os pontos *C*, *A* e *D* são alinhados? Justifique sua afirmação.

c) Calcule *AD*, *CD* e *DB*. O que se pode dizer a respeito do ΔBCD?

Comentários: sendo o triângulo *ABC* retângulo em *A*, a reta suporte do cateto *AC* é perpendicular ao cateto $\overline{AB}$ e o simétrico de *C* em relação a reta *AB* pertence a reta *AC* distando 3cm de *A*. Assim, os pontos *D*, *A* e *C* são alinhados com $AD = AC = 3\,\text{cm}$ e $CD = AD + AC = 6\,\text{cm}$. Como $DB = BC = 6\,\text{cm}$ pois a reta *AB* é mediatriz de $\overline{DC}$ e o triângulo *DBC* é isósceles em *B*.

Exercício 7: construindo e analisando um losango

a) Construa um losango *GHKL* cujos lados medem 4,5 cm e tal que $med(G\hat{H}K) = 78^0$.

b) Qual é o simétrico do losango em relação à reta *GK*? O que representa essa reta?

c) Construa o simétrico do losango em relação à reta *GH*.

Comentários: se realizarmos a construção fazendo uso de um software de geometria dinâmica, para marcar o ângulo de 78º devemos utilizar a ferramenta rotação (seria um bom exercício de aplicação dessa ferramenta). Para realizar a construção com instrumentos de desenho traçamos o segmento *GH* com 4,5 cm de comprimento e com auxílio do transferidor desenhamos o ângulo *GHK* com 78^0. Com o compasso determinamos o ponto *K* traçando a circunferência de centro em *G* e raio de medida *GH*. A seguir, mantendo a mesma abertura do compasso, traçamos uma circunferência de centro H e outra com centro em K. A intersecção é o ponto L. Construindo e analisando a figura do simétrico do losango em relação à reta *GK*, diagonal do losango, é o próprio losango pois a reta *GK* representa um de seus eixos de simetria.

Exercício 8: construindo um quadrilátero particular

a) Construa um triângulo isósceles *ABC* de base $\overline{BC}$ e seu eixo de simetria Δ.

b) Marque um ponto qualquer, *M*, do segmento *AB* e construa a reta *d*, que passa por *M* e é perpendicular à reta Δ. A reta *d* e o segmento *AC* interceptam-se no ponto *N*.

c) Qual é o simétrico em relação à reta Δ:

- da reta *AB*?
- da reta *d*?
- do ponto *M*?

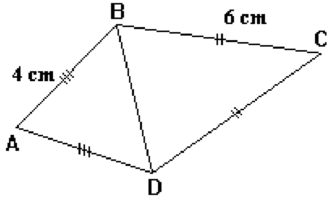
d) O quadrilátero *BMNC* tem dois lados paralelos. Quais?
Ele tem dois lados de mesma medida. Quais?
Ele tem um eixo de simetria. Qual?
Ele é um trapézio isósceles? Por quê?

Comentários: como o triângulo *ABC* é isósceles temos $AB = AC$ e Δ é eixo de simetria e mediatriz de $\overline{BC}$. Como $\overline{BM}$ e $\overline{NC}$ são simétricos em relação a Δ temos $BM = CN$, $AM = NA$ e $AB = AC$. Além disso, como os triângulos *AMN* e *ABC* são semelhantes temos $\overline{MN} \,//\, \overline{BC}$ e podemos então concluir que o quadrilátero *BMNC* é um trapézio isósceles. Dessa forma, utilizamos propriedades de simetria e construímos um trapézio isósceles a partir de um triângulo isósceles.

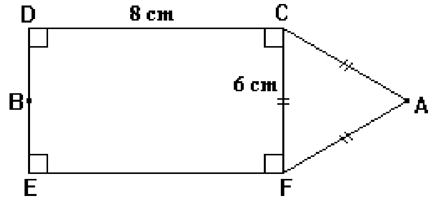
Exercício 9: construindo simétrico e identificando eixo(s) de simetria

Nos seguintes casos:

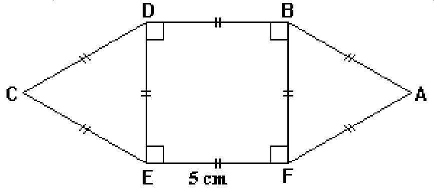
a)



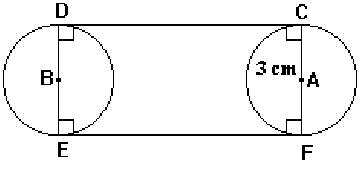
b) *B* é ponto médio de $\overline{DE}$.



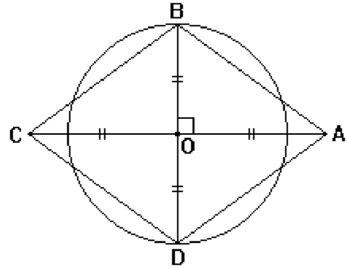
c)



d)



e) AC = 10 cm e BD = 8 cm



- construa todas as figuras com régua e compasso.
- identifique qual das retas *AB* ou *AC* é eixo de simetria da figura,
- construa o simétrico dessa figura em relação à reta *AB* ou *AC*,
- identifique outros eixos de simetria da figura original.

Comentários: em (a) a figura dada é o quadrilátero ABCD em que a diagonal $\overline{BD}$ divide a figura em dois triângulos isósceles de mesma base $\overline{BD}$, a diagonal $\overline{AC}$ é mediatriz dos dois triângulos ABD e BCD logo a figura tem simetria sendo a reta AC seu eixo de simetria. Em (b) a figura dada é o pentágono DCAFE composto por um retângulo DCFE e um triângulo eqüilátero CAF. A figura tem simetria e o eixo de simetria é a reta AB. Em (c) a figura é composta por um quadrado e dois triângulos eqüiláteros e possui dois eixos de simetria que são as retas mediatrizes dos lados do quadrado, reta AC e PQ sendo P e Q pontos médios dos lados $\overline{DB}$ e $\overline{EF}$. Em (d) a figura também possui dois eixos de simetria que são as retas mediatrizes dos lados do retângulo $\overline{ED}$ e $\overline{DC}$. Finalmente, na figura (e) temos dois eixos de simetria que são as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ do losango.

Exercício 10: ladrilhando com a simetria central

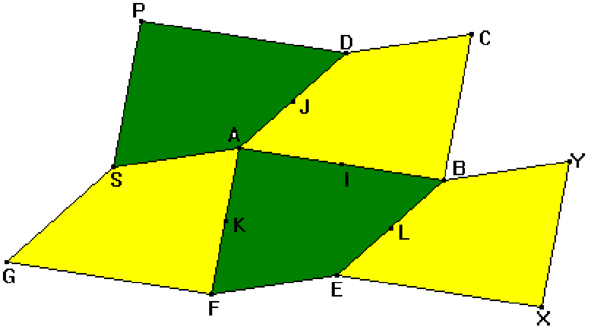
a) Construa um quadrilátero convexo *ABCD* com lados opostos não paralelos.

b) Construa o simétrico, *BAFE*, desse quadrilátero em relação ao ponto *I*, ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

c) Construa o quadrilátero *D'A'PS*, simétrico do quadrilátero *ABCD* em relação ao ponto *J*, ponto médio do segmento $\overline{AD}$.

d) Construa o quadrilátero *F'A'GS* simétrico de *BAFE* em relação ao ponto *K*, ponto médio do segmento $\overline{AF}$.
e) Com essas construções obtém-se o início de um ladrilhamento. Continue esse processo e pinte com a mesma cor os ladrilhos que não têm um lado comum.

Comentários: considerando que *A'* (coincidente com *B*) é o simétrico de *A* em relação a *I* e *B´* (coincidente com *A*) é o simétrico de *B* em relação a *I*, podemos ver no desenho abaixo que o ladrilhamento poderá ter continuidade a partir da obtenção do simétrico do quadrilátero em relação aos pontos médios dos lados que não são comuns aos quadriláteros já traçados. Por exemplo, para continuar podemos construir o simétrico do quadrilátero *ADPS* em relação aos pontos médios de $\overline{PD}$ e $\overline{PS}$.



Exercício 11: justificando com a simetria central

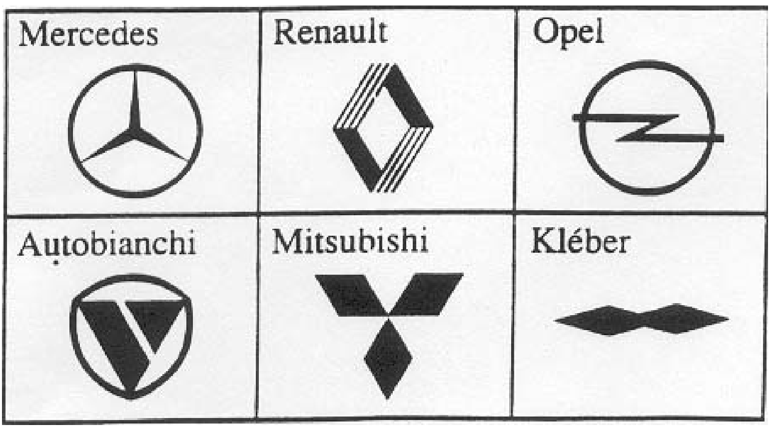
a) Crie um ângulo $X\hat{A}Y$. Construa sua bissetriz e determine um ponto *O* dessa bissetriz.

b) Construa o ângulo $X'\hat{C}Y'$ simétrico do ângulo $X\hat{A}Y$ em relação ao ponto *O*. Nomeie de *B* e *D* as intersecções dos lados desses dois ângulos.
c) *ABCD* é um losango? Justifique sua afirmação?

Comentário: pela simetria central temos que os ângulos XAY e $X'CY'$ são congruentes e sendo a reta AC bissetriz desses ângulos temos a congruência entre os ângulos BAC, BCA, DAC e ACD e por isso podemos concluir que os triângulos ABC e ADC são isósceles. Como os ângulos ABC e ADC possuem um lado comum e ângulos congruentes, podemos concluir que são congruentes e por isso $AB = BC = CD = DA$ e o quadrilátero $ABCD$ é um losango em que a reta AC é eixo de simetria.

Exercício 12: descobrindo eixos de simetria e centro de simetria

Para cada um dos signos abaixo, indique se existe um centro de simetria, um ou vários eixos de simetria (dizer quantos).



12 TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS 2: translação e rotação

12.1 Translação

ATIVIDADES

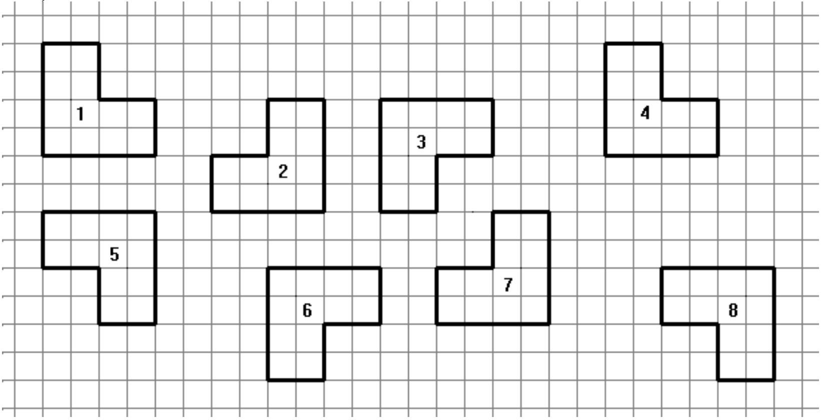
Estudar as relações entre figuras e suas imagens obtidas por translações e rotações. A translação e suas propriedades são vistas por meio de deslocamentos vetoriais e também associada a pares ordenados. A rotação e suas propriedades por meio de giros no sentido horário e anti-horário. No final, definimos analiticamente as transformações vistas a partir de vetores em um sistema cartesiano no plano. Este fascículo contém atividades que podem ser trabalhadas no ensino fundamental e outras que são mais indicadas para o ensino médio e eventualmente em formação de professor.

Atividade 01: descobrindo o que é uma translação

Exercício 1

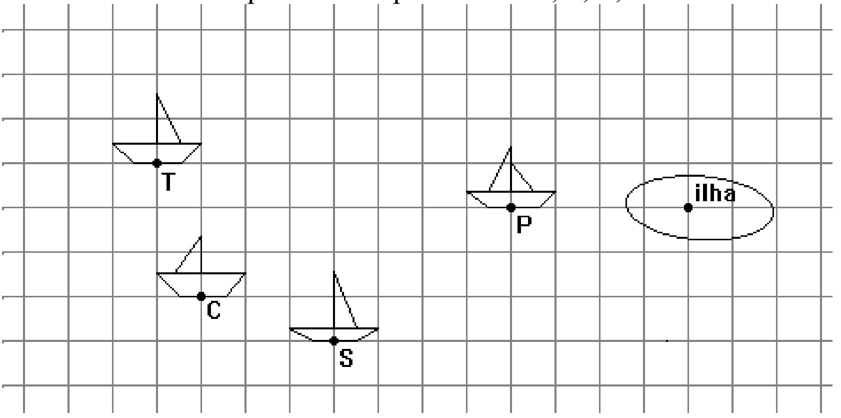
a) Agrupe as figuras abaixo de modo a passar de uma para outra por *deslizamento* seguindo as linhas do quadriculado.

b) Em cada caso, explique como fez o *deslizamento* da seguinte maneira: ...quadradinhos Leste (ou Oeste); ..... quadradinhos Norte (ou Sul).



Exercício 2

Observe os barcos representados pelas letras *C*, *T*, *P*, *S*.



a) Cada barco movimenta-se de “3 quadradinhos Leste e depois 2 quadrinhos Norte”.

Identifique os pontos *C’*, *T’* e *P’*, posições dos três primeiros barcos depois de seus deslocamentos.

b) Determine um valor aproximado das distâncias *CC’*, *TT’* e *PP’* usando como unidade de medida o lado do quadradinho.

d) Determine, usando apenas o compasso, o ponto *S’*, posição do barco *S* depois do mesmo deslocamento.

Objetivo: introduzir a noção de translação por deslocamento

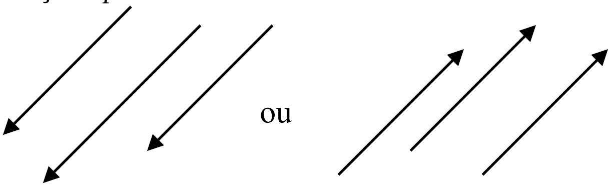
Comentário: aos deslizamentos sucessivos “3 quadradinhos Leste; 2 quadradinhos Norte” pode-se associar um deslocamento único caracterizado:

- pelo paralelismo das retas *TT’*, *CC’*, *PP’* e *SS’*,
- pela igualdade das distâncias *TT’*, *CC’*, *PP’* e *SS’*,
- pelo mesmo “sentido” de deslocamento (de *C* para *C’*, de *T* para *T’*, de *P* para *P’* e de *S* para *S’*). Dizemos, que os pontos *T’*, *P’* e *S’* são as imagens dos pontos *T*, *P* e *S* pela translação que leva *C* para *C’*, *T* para *T´*, *P* para *P´* e *S* para *S´*.

Atividade 2: definindo a translação a partir de vetor

Vocabulário:

- *Quando retas são paralelas entre si, dizemos que elas têm a mesma direção.*
- *Dada uma direção podemos escolher um entre os dois sentidos possíveis.*



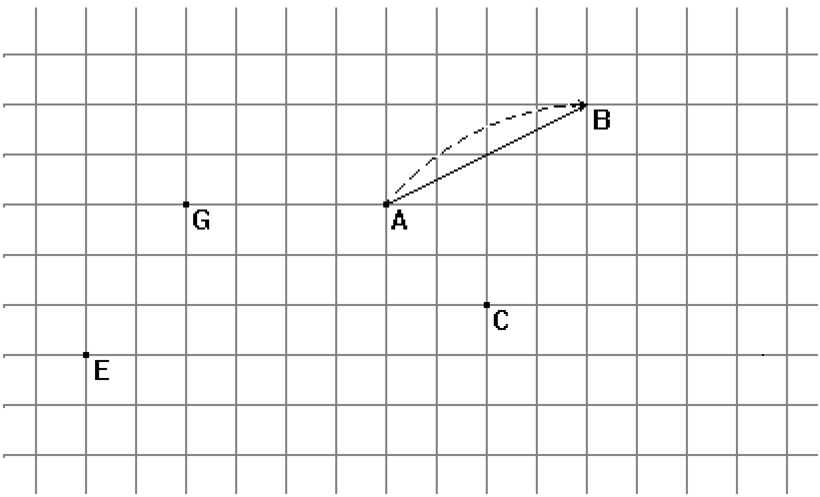
a) Na figura abaixo, construa os pontos *D*, *F*, *H* e *I*, imagens respectivas de *C*, *E*, *G* e *B* pela translação que “leva” *A* para *B*.

b) Preencha os espaços vazios

$\overleftrightarrow{CD}$ .... $\overleftrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{AB}$ têm mesmo ....

$\overleftrightarrow{EF}$ .... $\overleftrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{AB}$ têm mesmo ....

c) Verdadeiro ou falso? *D* é a imagem de *C* pela translação que leva *B* para *A*. (   )



Objetivo: associar a noção de translação com vetor.
Comentário: aos deslocamentos precedentes (que levam *A* para *B*, *C* para *D*, *E* para *F*, *G* para *H* e *B* para *I*) feitos na mesma direção, no mesmo sentido e com o mesmo comprimento, associa-se um vetor, denotado por $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{CD}$ ou $\overrightarrow{EF}$ ou $\overrightarrow{GH}$ ou $\overrightarrow{BI}$ (ler: "vetor *AB*", "vetor *CD*", ...).

Atividade 03: construindo uma imagem por translação
Exercício 1
Leia e interprete o que segue:
Sejam dois pontos distintos *A* e *B*. Para construir a imagem *M'* de um ponto *M* pela translação de vetor $\overrightarrow{AB}$, proceda da seguinte maneira:
- trace uma semi-reta com origem em *M* que seja paralela e tenha mesmo sentido que a semi-reta *AB*,
- construa o ponto *M'* na semi-reta construída de tal forma que *MM'* = *AB*.

Exercício 2
a) Trace uma reta *d* e um vetor $\overrightarrow{AB}$ que não esteja contido em *d*.
b) Considere dois pontos *M* e *N* sobre a reta *d*.
c) Construa a imagem *M'* do ponto *M* e a imagem *N'* do ponto *N* pela translação de vetor $\overrightarrow{AB}$.
d) Qual é a imagem *d'* da reta *d*? Explique sua resposta.
e) O que você observa em relação as retas *d* e *d'*? Demonstre.

Exercício 3
a) Determine um vetor $\overrightarrow{AB}$ e três pontos distintos e não colineares *C*, *D* e *E*. Construa suas imagens *C'*, *D'* e *E'* pela translação do vetor $\overrightarrow{AB}$.
b) Explique sua construção.
c) *ABC´C*, *ABD´D* e *ABE´E* são paralelogramos? Por quê?

Institucionalização
Denotamos por $E' = T_{\overrightarrow{AB}}(E)$ e $F' = T_{\overrightarrow{AB}}(F)$ a translação de vetor $\overrightarrow{AB}$.
E´ é a imagem de E e F´ é a imagem de F se $E' = T_{\overrightarrow{AB}}(E)$ e $F' = T_{\overrightarrow{AB}}(F)$ então $\overrightarrow{EE'} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FF'}$.

Dizemos então que os vetores $\overrightarrow{EE'}$ e $\overrightarrow{FF'}$ são iguais.
Os quadriláteros *EE'AB*, *FF'AB*, *EE'FF'* são paralelogramos pois os vetores $\overrightarrow{EE'}$, $\overrightarrow{FF'}$ e $\overrightarrow{AB}$ têm mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento.

Exercício 4

a) Trace uma circunferência de centro *O* e raio qualquer e crie dois pontos *A* e *B* não pertencentes a essa circunferência.

b) Considere dois pontos *P* e *Q* extremos de um diâmetro da circunferência.

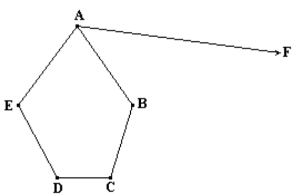
c) Construa as imagens *P'* e *Q'* dos pontos *P* e *Q* pela translação de vetor $\overrightarrow{AB}$. Explique como você fez.

d) Qual é a imagem da circunferência?

Exercício 5

a) Construa a imagem *FGHIJ*, da figura abaixo, por translação, segundo o vetor $\overrightarrow{AF}$.

b) O que você pode afirmar da figura obtida?



Figuras semelhantes cujos lados correspondentes são paralelos chamam-se figuras homotéticas.

Objetivos: construir imagens de figuras por translação.
Comentários: no exercício 1 estamos construindo a imagem do ponto *M* pela translação do vetor $\overrightarrow{AB}$. No exercício 2, para obter o ponto *M'* é necessário traçar por *M* uma semi-reta que seja paralela ao vetor $\overrightarrow{AB}$ e tenha mesmo sentido que o vetor; nesta reta determinar o ponto *M'* de tal forma que *MM'* = *AB*. Com o mesmo procedimento podemos obter o ponto *N'*. A imagem da reta *d* pela translação do vetor $\overrightarrow{AB}$ será a reta *d'* que passa pelos pontos *M'* e *N'* que é pa-

ralela a reta *d* traçada inicialmente. No exercício 3, após a construção das imagens facilmente se observa que os quadriláteros *EABE'*, *CABC'* e *DABD'* são paralelogramos porque $\overline{AB} // \overline{EE'}$ e $AB = EE'$; $\overline{AB} // \overline{CC'}$ e $AB = CC'$; $\overline{AB} // \overline{DD'}$ e $AB = DD'$, respectivamente. No exercício 4, para obter as imagens dos pontos *P* e *Q* pela translação do vetor $\overrightarrow{AB}$ basta construir os paralelogramos *PABP'* e *QABQ'*. Determinando o ponto médio de $\overline{P'Q'}$ obtemos o ponto *O'*, imagem do ponto *O* pela translação do vetor $\overrightarrow{AB}$ e assim podemos traçar a imagem da circunferência inicial, que será uma outra circunferência com centro em *O'* e diâmetro $\overline{P'Q'}$.

No exercício 5, a imagem do pentágono *ABCDE* pela translação do vetor $\overrightarrow{AF}$ será o pentágono *FGHIJ* congruente ao pentágono dado e com lados correspondentes paralelos.

Atividade 04: consolidando seus novos conhecimentos

Exercício 1

Para cada caso, descreva um procedimento que permita construir a imagem solicitada, pela translação de um vetor $\overrightarrow{AB}$, fazendo cada uma das construções.

a) de um ponto *M*,

b) de um segmento *LP*,

c) de uma reta *d*,

d) de um triângulo *UVW*,

e) de um quadrilátero *CDEF*.

Exercício 2

Suponha que $M' = T_{\overrightarrow{AB}}(M)$, $N' = T_{\overrightarrow{AB}}(N)$, $P' = T_{\overrightarrow{AB}}(P)$ e $Q' = T_{\overrightarrow{AB}}(Q)$ sendo *M*, *N*, *P* e *Q* pontos distintos e não colineares.

Classifique em verdadeiro (V) ou falso(F) justificando sua resposta.

a) $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$. (   )

b) $\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{AB}$. (   )

c) $M = T_{\overrightarrow{BA}}(M')$. (   )

d) Os triângulos *MNP* e *M'N'P'* são congruentes. (   )
e) O quadrilátero *MM'N'N* não é um paralelogramo. (   )

Exercício 3

a) Construa um paralelogramo *ABCD*.

b) Qual é a imagem do ponto *A* pela translação de vetor $\overrightarrow{AB}$? E do ponto *D*?

c) Qual é a imagem do ponto *A* pela translação de vetor $\vec{BC}$? E do ponto *B*?

d) *O* é o centro do paralelogramo. Qual é a imagem do ponto *O* pela translação de vetor $\vec{DO}$.

e) Construa a imagem do paralelogramo *ABCD* por esta translação.

Objetivo: rever os novos conhecimentos em outras situações.

Comentários: no exercício 1, no item (a), determinado o vetor $\overrightarrow{AB}$ e um ponto *M*, não pertencente ao vetor, para obter a imagem solicitada basta construir o paralelogramo *MABM'*. No item (b), traçando os paralelogramos *LABL'* e *PABP'* obtemos as imagens dos pontos *L* e *P* pela translação do vetor $\overrightarrow{AB}$. O segmento *L'P'* será a imagem do segmento *LP* determinado inicialmente. Note que todos os pontos de $\overline{L'P'}$ são imagens de todos os pontos de $\overline{LP}$. No item (c) a reta *d'*, imagem da reta *d* pela translação de $\overrightarrow{AB}$, será uma reta obtida pela translação de dois pontos distintos da reta *d* e paralela a esta. No item (d) a imagem do triângulo *UVW* pela translação do vetor $\overrightarrow{AB}$ será o triângulo *U'V'W'* de lados correspondentes paralelos ao triângulo inicial. Da mesma forma, no item (e) obtemos o quadrilátero *C'D'E'F'* congruente e de lados correspondentes paralelos ao quadrilátero inicial. No exercício 2, construindo as imagens apresentadas podemos concluir que a afirmação do item (a) é verdadeira porque os dois vetores têm mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento, o que não acontece no item (b) em que o sentido de $\overrightarrow{M'M}$ é oposto de $\overrightarrow{AB}$. No item (c) a afirmação é verdadeira pois $\overrightarrow{BA}$ tem sentido oposto ao vetor *AB* e *M* será a imagem do ponto *M'* pela translação de $\overrightarrow{BA}$. No item (d) a afirmação é verdadeira pois os lados correspondentes dos dois triângulos são lados opostos de paralelogramos e portanto são congruentes. Finalmente, no item (e) a afirmação é falsa, pois o quadrilátero *MM'N'N* é um paralelogramo justificado da mesma forma que no item anterior.

12.2 Rotação

Atividade 01: descobrindo a rotação

a) O desenho abaixo representa as asas de um moinho.

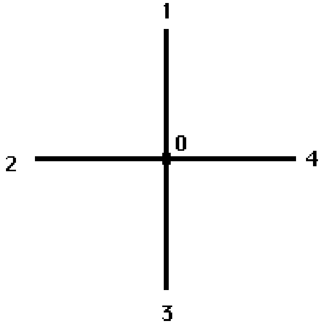
- *Uma semi-volta é uma rotação de 180°.*
- *Um quarto de uma volta é uma rotação de 90°.*

b) Qual é o ângulo formado por duas asas consecutivas?

c) Qual é a posição da asa 4 quando ela fizer um quarto de uma volta no sentido horário (sentido em que se deslocam os ponteiros do relógio)?

d) Onde ficará a asa 2?

e) E quando a asa 4 fizer uma semi-volta no sentido horário?



Objetivo: descobrir a transformação que ocorre em uma figura após uma rotação.

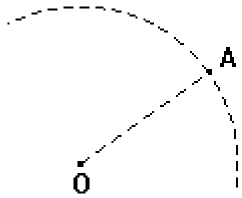
Comentários: observando a figura apresentada notamos que duas asas consecutivas formam ângulos retos e que quando a asa 4 girar um quarto de volta no sentido horário ela irá ocupar a posição inicial da asa 3 e a asa 2 irá ocupar a posição da asa 1. E, quando a asa 4 girar uma semi-volta no sentido horário a asa 4 irá ocupar a posição inicial da asa 2 e a asa 2 a posição inicial da asa 4.

Atividade 02: construindo imagens por uma rotação
Exercício 1: construindo a imagem de um ponto

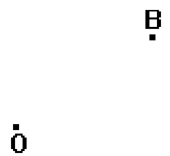
a) Leia e interprete a seguinte frase:

"Se um ponto *A* é submetido a uma rotação de centro *O*, obtém-se um
ponto *A'* chamado imagem de *A* pela rotação de centro *O*."

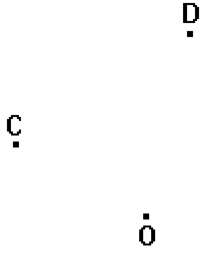
b) Construa a imagem *A´* pela rotação de centro *O* de 45^0 no sentido anti-horário.



c) Construa a imagem *B´* pela rotação de centro *O* de 60^0 no sentido anti-horário.



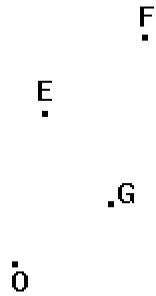
d) Construa a imagem *C´* e *D´* pela rotação de centro *O* de 30^0 no sentido horário.



e) Construa a imagem *E´*, *F´* e *G´* dos pontos E, F e G pela rotação de centro *O* de 90^0 no sentido anti-horário e complete:

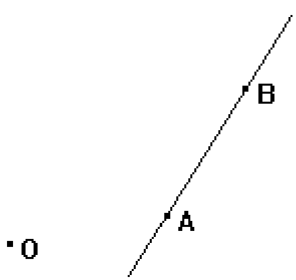
$med(E\hat{O}E') =$............., $med(F\hat{O}F') =$.............,

$med(G\hat{O}G') =$ ...., $\overline{OE} \equiv$ …….…., $\overline{OF} \equiv$ ....,
$\overline{OG} \equiv$ ....

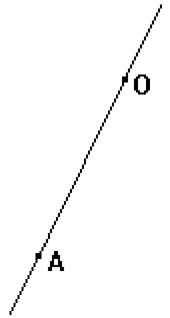


Exercício 2: construindo a imagem de uma reta e de uma circunferência

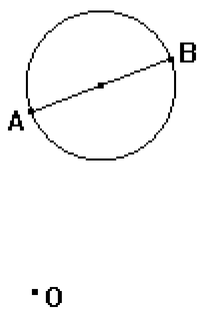
a) Construa a imagem da reta pela rotação de centro *O* de 45^0 no sentido anti-horário. Qual o ângulo agudo formado pelas retas *AB* e *A’B´*?



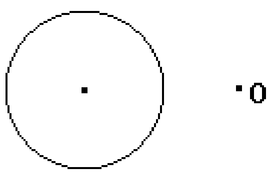
b) Construa a imagem da reta pela rotação de centro *O*, de 30^0, no sentido anti-horário.



c) Construa a imagem da circunferência pela rotação de centro *O*, de 60^0, no sentido horário.



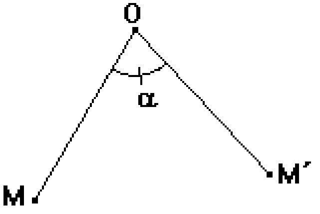
d) Construa a imagem da circunferência pela rotação de centro *O*, de 90^0, no sentido horário.



Objetivo: construir imagens de figuras-objeto por rotação.
Comentários: no exercício 1, item (a) com a ajuda de um transferidor obtemos o ponto *A'* no arco traçado de tal forma que $A\hat{O}A'$ meça 45^0. No item (b) temos que construir o ponto *B'* de tal forma que $B\hat{O}B'$ meça 60^0 e $\overline{OB} \equiv \overline{OB'}$, com a ajuda do transferidor e de um compasso. No item (c) traçando a circunferência de centro *O* e raio $\overline{OC}$ podemos determinar o ponto *C'* dessa circunferência de tal forma que o ângulo $C\hat{O}C'$ meça 30^0 e repetimos os mesmos procedimentos para obter o ponto *D'*. Em (d) da mesma forma que fizemos no item anterior obtemos os pontos *E'*, *F'* e *G'*. Podemos então concluir que $med(E\hat{O}E') = med(F\hat{O}F') = med(G\hat{O}G') = 90^0$ e que $\overline{OE} \equiv \overline{OE'}$, $\overline{OF} \equiv \overline{OF'}$ e que $\overline{OG} \equiv \overline{OG'}$.
No exercício 2, no item (a), após a construção podemos perceber que existe um ponto *P* de intersecção das retas *AB* e *A'B'* e, que o ângulo agudo formado por elas é de 45^0. No item (b) após a construção obtemos a reta *OA'* como imagem da rotação solicitada e concluimos que o ponto *O* é a intersecção das duas retas e que o ângulo agudo ($A\hat{O}A'$) formado por elas mede 30^0.
No item (c), construindo as imagens *A'* e *B'* pela rotação de 60^0, no sentido horário, tomando o ponto médio de $\overline{A'B'}$ obtemos o ponto *O'*, imagem do centro da circunferência dada, que permitirá construir a circunferência imagem da circunferência dada. No item (d), traçando uma reta por *O* e pelo centro da circunferência dada obtemos um diâmetro que nos permitirá fazer a construção anterior para obter a circunferência imagem solicitada.

Institucionalização

- *O* é um ponto fixo. A imagem do ponto *M* pela rotação de centro *O* e de ângulo α, no sentido anti-horário, é o ponto *M'* representado na figura:



- $\begin{cases} OM' = OM \\ M\hat{O}M' = \alpha \end{cases}$
- A imagem do ponto *O* é o próprio ponto *O*.

Uma rotação transforma: uma reta em uma reta, uma circunferência em uma circunferência de mesmo raio, um segmento em segmento de mesma medida.

Atividade 03: construindo imagens de triângulos particulares

Exercício 1

a) Construa um triângulo *ABC* retângulo em *A* cuja $med(A\hat{B}C) = 60°$.
I é o ponto médio do segmento *BC*.

b) Qual é a imagem do triângulo *ABC* pela rotação de centro *I* e de 120° no sentido horário?

c) Relacione a figura e a sua imagem.

Exercício 2

a) O triângulo *ABC* é eqüilátero.

b) Construa sobre os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ os pontos *P*, *Q* e *R*, respectivamente, tais que *AP* = *BQ* = *CR*.

c) Caracterize o triângulo *PQR*. Justifique sua resposta.

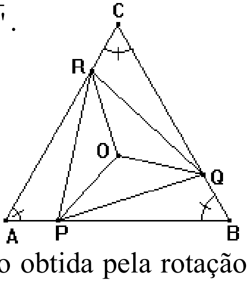
d) Considere a rotação R_θ de ângulo 120° no sentido horário cujo centro é o centro do triângulo eqüilátero. Determine as imagens dos pontos *P*, *Q* e *R* pela rotação R_θ.

e) Relacione a figura e a sua imagem.

Objetivo: construir a imagem de triângulos particulares por rotação e relacioná-los.

Comentários: no exercício 1, após a construção, podemos notar que a imagem do triângulo *ABC* pela rotação de 120^0 em torno do ponto médio do lado $\overline{BC}$ é um triângulo retângulo, congruente ao triângulo *ABC* em que *I* também é ponto médio de $\overline{B'C'}$.

No exercício 2, qualquer que seja a medida de $\overline{AP}$ escolhida, obtemos um triângulo *PQR* também eqüilátero pois pelo caso *LAL* os triângulos *APR*, *BQP* e *CRQ* são congruentes. O centro do triângulo *ABC* coincide com o centro do triângulo *PQR* e a imagem deste triângulo obtida pela rotação de 120^0 com centro em *O* resulta no próprio triângulo *PQR*.

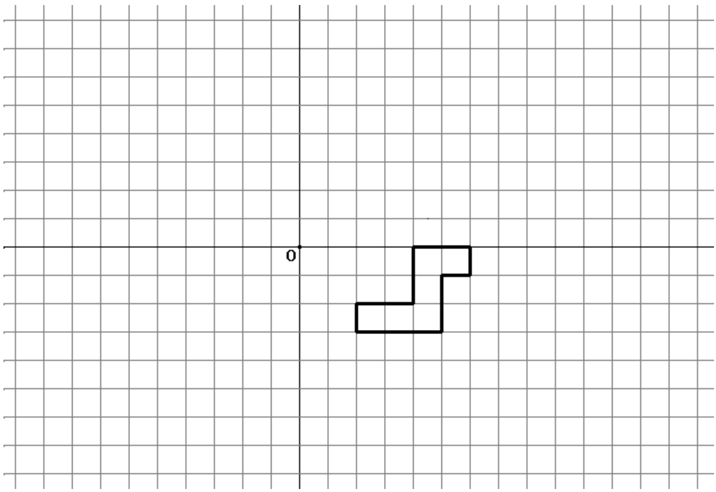


Atividade 04: construindo a imagem de uma figura por uma rotação

Nos seguintes casos as rotações se fazem no sentido anti-horário.

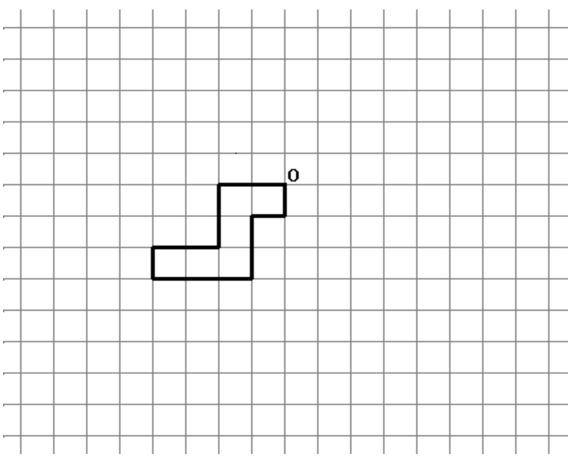
Exercício 1

Construa a imagem da figura pela rotação de centro *O* e de ângulo 90°.



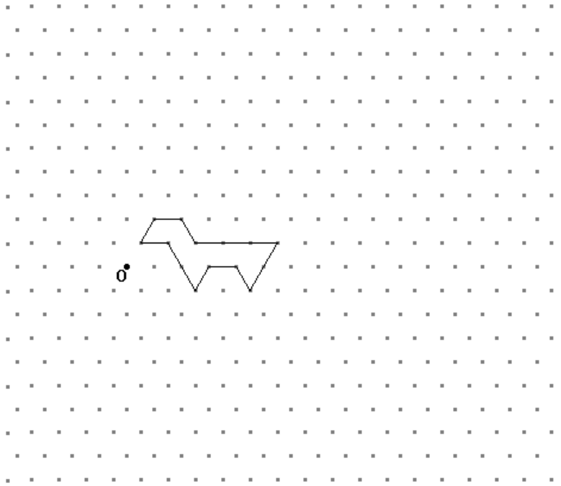
Exercício 2

Construa a imagem da figura pela rotação de centro *O* e de ângulo 90°



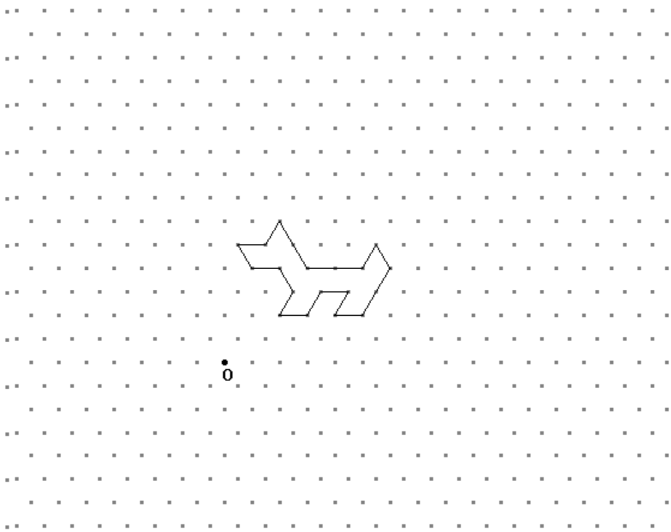
Exercício 3

a) Construa a imagem da figura pela rotação de centro *O* e de ângulo 60°. (O ladrilhamento é formado de triângulos eqüiláteros).



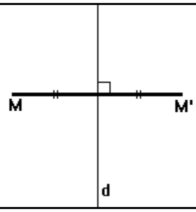
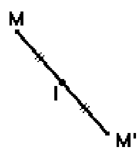
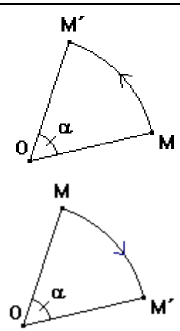
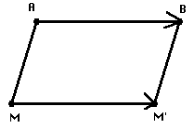
Exercício 4

a) Construa a imagem da figura pela rotação de centro *O* e de ângulo 120°.



Objetivo: construir a imagem de figuras por rotação a partir de malhas.
Comentários: a malha quadriculada facilita giros de 90^0 enquanto que a malha triangular facilita giros de 60^0 e de 120^0. Note que a malha apresentada, nos exercícios 3 e 4, é formada pelos vértices de triângulos equiláteros.

Institucionalização das Propriedades Observadas (Simetrias, Translação e Rotação)

Transformação	"M' é imagem de M" significa:	Ilustração	Os pontos invariantes
Simetria axial de eixo d: S_A	• ***Se $M \in d$, $M'=M$*** • ***Se $M \notin d$, d é a mediatriz de $\overline{MM'}$***		***os pontos de d***
Simetria central de centro I: S_I	***I é o ponto médio de $\overline{MM'}$***		***centro I***
Rotação de centro O e de ângulo α: R_α	• ***Se M = O, então M' = O*** • ***Se $M \neq O$, então*** $\begin{cases} OM' = OM \\ M\hat{O}M' = \alpha \end{cases}$		***centro O***
Translação de vetor $\overrightarrow{AB}$: $T_{\overrightarrow{AB}}$	$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ ***(MABM' é um paralelogramo)***		***nenhum***

Observações:

- Três rotações têm um papel importante em geometria: a rotação de ângulo de 90°, de 60° (ligada ao **triângulo eqüilátero**) e de 180° (que é, na realidade a **simetria central**).
- A rotação de ângulo 0° ou 360°, bem como a translação de vetor nulo deixa todos os pontos invariantes: qualquer que seja o ponto *M*, a imagem de M por essas rotações é *M'* tal que *M* = *M'*. Esta transformação é chamada de ***transformação idêntica ou ainda identidade.***

Atividade 05: aplicando direta dos novos conhecimentos

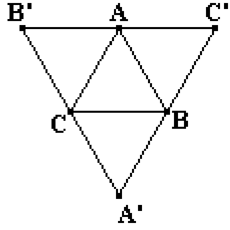
Exercício 1: usando a simetria axial

a) Construa um triângulo eqüilátero *ABC*.

b) Qual a imagem do triângulo *ABC* com a simetria dos vértices em relação aos lados opostos?

Comentários: a figura ao lado mostra a imagem solicitada e nela podemos concluir que essa imagem também é um triângulo equilátero com o dobro do perímetro e com área quatro vezes maior. Se $A' = S_{\overrightarrow{BC}}(A)$, $B' = S_{\overrightarrow{AC}}(B)$ e $C' = S_{\overrightarrow{AB}}(C)$ e o triângulo ABC é eqüilátero, $\overrightarrow{AA'}$ é mediatriz de $\overline{BC}$, $\overrightarrow{BB'}$ é mediatriz de $\overline{AC}$ e $\overrightarrow{CC'}$ é mediatriz de $\overline{AB}$ então $AC' = BC'$, $AB' = CB'$ e $BA' = CA'$.

Por outro lado, temos que AB'CB é losango pois $A\hat{B}C \equiv A\hat{B}'C$ e medem 60^0 e, suas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BB'}$ são perpendiculares, o que nos leva a $AB = B'C$. O quadrilátero *ABA'C*, pelos mesmos motivos também é um losango com $AB = A'C$. O que nos leva a concluir que AC' = *BC'* = *BA'* = *A'C* = *CB'* = *B'A*, isto é, o triângulo *A'B'C'* é eqüilátero.



Exercício 2: usando a simetria central:

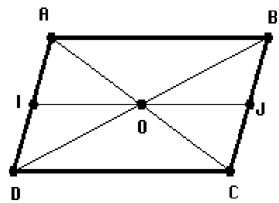
a) *ABCD* é um paralelogramo de centro *O*.

b) Quais as imagens dos pontos *A*, *B*, *C* e *D* pela simetria S_o (simetria central de centro O).

Comentários: como o ponto *O* é a intersecção das diagonais do paralelogramo e estas interceptam-se no ponto médio, a imagem obtida será o próprio paralelogramo *ABCD*.

Exercício 3: usando as transformações para demonstrar

a) Na figura ao lado, *ABCD* é um paralelogramo de centro *O*. *I* e *J* são os pontos médios respectivos dos segmentos *AD* e *BC*. Classifique em verdadeiro ou falso justificando sua resposta:



a) Os pontos *I*, *O* e *J* estão alinhados. (   )

b) Os segmentos *AB* e *CD* são simétricos em relação à reta *IJ*. (   )

c) A translação que transforma *D* em *C* transforma *I* em *J*. (   )

d) A rotação de centro *O* e de ângulo $\hat{AOB}$ transforma *C* em *B*. (   )

e) A translação de vetor $\overrightarrow{AC}$ é igual à translação de vetor $\overrightarrow{BD}$. (   )

Comentários: em (a) a afirmação é verdadeira, pois o ponto *I* é o simétrico do ponto *J* em relação ao ponto *O*. Em (b) é falsa porque $\overline{AD}$ não é perpendicular a $\overline{DC}$. Em (c) é verdadeira porque *IJCD* é um paralelogramo, isto é, a translação foi obtida por um vetor igual aos vetores *AB* e *DC*. No item (d) a afirmação é falsa porque a rotação de centro *O* que transforma *C* em *B* é de ângulo $A\hat{O}D$. No idem (d) a translação do vetor $\overrightarrow{AC}$ não é igual a do vetor $\overrightarrow{BD}$ porque estes vetores não têm mesma direção e mesmo sentido.

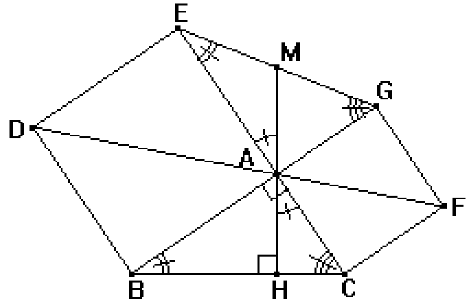
Atividade 06: resolvendo problemas

Exercícios 1: *ABC* é um triângulo retângulo em *A*, o segmento *AH* é a altura deste triângulo. Constrói-se externamente ao triângulo dois quadrados *ABDE* e *ACFG*. As retas *AH* e *EG* interceptam-se no ponto *M*.

a) $\hat{DAF} = 180^0$ e então *D*, *F* e *A* estão alinhados? Por quê?

b) O triângulo *AEG* é imagem de *ABC* pela simetria em relação à reta *DF*? Por quê?

c) Qual propriedade da simetria ortogonal permite afirmar que $A\hat{E}G \equiv A\hat{B}C$ e $E\hat{G}A = B\hat{C}A$?



d) Classifique em verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: No triângulo retângulo *ABC*, $\hat{ABC} \equiv \hat{HAC}$. Justifique.

e) O triângulo *AME* é isósceles em *M*? Por quê? .

f) O triângulo *GAM* é isósceles em *M*? Por quê?

g) Explique então por que a reta *AH* passa pelo ponto médio do segmento *EG*.

Objetivo: demonstrar que o ponto *M* é ponto médio do segmento *EG*
Comentários: o triângulo *AEG* é imagem de *ABC* pela simetria em relação à reta *DF* porque $\overline{EB}$ é mediatriz de $\overline{AD}$ (diagonais do quadrado *ABDE*) e $\overline{AD}$ está contido na reta *DF*. O mesmo para $\overline{GC}$ e $\overline{AF}$. O que justifica a afirmação do item (c) é que a simetria central garante a congruência do triângulo com sua imagem. No item (d) considerando que $med(B\hat{A}H) = \beta$ e $med(A\hat{B}H) = \alpha$, sabemos que a soma dessas duas medidas deve dar 90^0, porque o ângulo $A\hat{H}B$ mede 90^0. Por outro lado, temos $med(B\hat{A}C) = med(B\hat{A}H) + med(C\hat{A}H) = 90^0$ e $med(B\hat{A}H) = \beta$, logo $med(C\hat{A}H) = \alpha$.

No item (e) sabemos que $A\hat{E}G \equiv A\hat{B}C$ pela congruência dos triângulos *ABC* e *AEG* e que $A\hat{B}C \equiv H\hat{A}C$, já visto na questão (d). Por outro lado, temos $H\hat{A}C \equiv E\hat{A}M$ porque são ângulos opostos pelo vértice.

Resumindo temos: $\begin{cases} A\hat{E}G \equiv A\hat{B}C \\ A\hat{B}C \equiv H\hat{A}C \\ H\hat{A}C \equiv E\hat{A}M \end{cases} \Rightarrow E\hat{A}M \equiv A\hat{E}M \Leftrightarrow$ o triângulo *EMA* é isósceles em *M*.

No item (f), pelo mesmo processo, demonstra-se que $\left.\begin{matrix} B\hat{A}H \equiv A\hat{C}H \\ B\hat{A}H \equiv M\hat{A}G \end{matrix}\right\} \Rightarrow M\hat{A}G \equiv M\hat{G}A$. Logo o triângulo *MGA* é isósceles em *G*.

No item (g) sabemos que *EMA* e *AMG* são isósceles em M, portanto *EM* = *MA* = *MG* e por isso *M* é ponto médio de $\overline{EG}$ pois *M* está entre *E* e *G* e *EM* = *MG*.

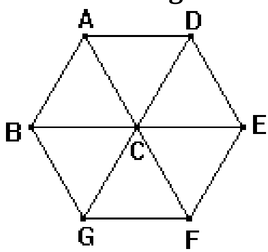
Exercício 2: descobrindo pontos transladados no hexágono

No hexágono regular ao lado, quais são as imagens dos pontos *A*, *B*, e *C*:

a) pela translação de vetor $\vec{AB}$.

b) pela translação de vetor $\vec{AC}$.

c) pela translação de vetor $\vec{BC}$.



Comentários: a imagem do pontos *A* pela translação do vetor $\vec{AB}$ é o ponto *B*, a imagem de *B* pela mesma translação é o ponto *B'* tal que $\overline{BB'}$ está contido na reta *AB* e $BB' = AB$, a imagem de *C* pela mesma translação é o ponto *G*. No item (b), com relação a translação de vetor $\vec{AC}$, temos que a imagem de *A* é o ponto *C*, a imagem de *B* é o ponto *G* e a imagem de *C* é o ponto *F*. No item (c), a translação de vetor $\vec{BC}$ nos dá o ponto *D* como imagem do ponto *A*, o ponto *C* como imagem do ponto *B* e o ponto *E* como imagem do ponto *C*.

Exercício 3: translação e triângulos

ABC é um triângulo, *I* é o ponto médio do segmento *AC*, *J* é o ponto médio do segmento *AB* e *K* o ponto médio do segmento *BC*.

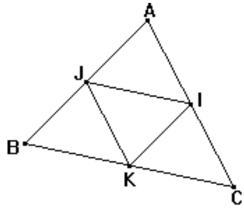
a) Qual é a translação que leva o ΔCIK no ΔIAJ ?

b) O triângulo *CIK* tem por imagem o triângulo *IAJ* por que translação? Justifique sua resposta

c) Qual translação transforma *IAJ* em *KJB*? Justifique sua resposta.

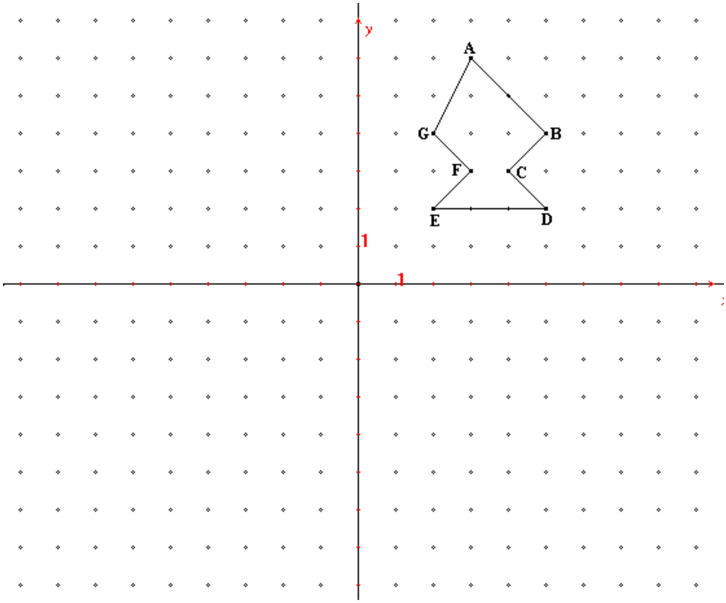
d) Caracterize a translação que transforma o triângulo *CIK* em *KJB*? Justifique sua resposta.

Comentários: o triângulo *CIK* tem por imagem o triângulo *IAJ* pela translação do vetor $\overrightarrow{CI}$.
A translação que transforma *IAJ* em *KJB* é a translação do vetor $\overrightarrow{AJ}$ porque o ponto *J* é ponto médio de $\overline{AB}$ e *AJKI* é um paralelogramo.
A translação que transforma o triângulo *CIK* em *KJB* é a translação de vetor $\overrightarrow{KB}$.



Comentários: em (a) podemos observar que houve uma rotação de centro A e de 90^0 no sentido anti-horário. Em (b) e (e) houve uma translação. Em (c) a imagem foi obtida por uma simetria de centro A, em (d) por uma simetria de centro C e em (f) por uma simetria de centro B.

Atividade 07: relacionando transformações e pares ordenados



a) Determine as coordenadas dos pontos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* e *G*.

b) Determine a imagem da figura segundo a lei: $(a, b) \mapsto (-a, -b)$.

c) Determine a imagem da figura segundo a lei: $(a, b) \mapsto (a, -b)$.

d) Determine a imagem da figura segundo a lei: $(a, b) \mapsto (-a, b)$.

e) Determine a imagem da figura segundo a lei: $(a, b) \mapsto (a+2, b+3)$.

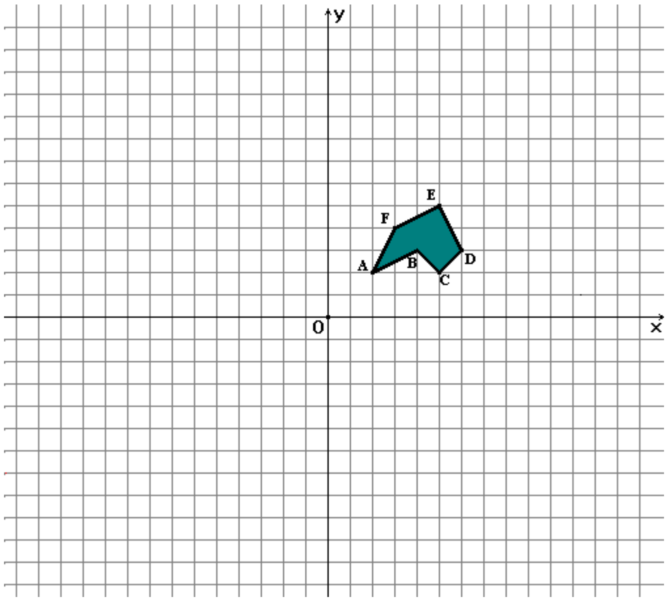
f) Determine a imagem da figura segundo a lei: $(a, b) \mapsto (b, a)$.

g) Registre suas observações.

Objetivo: relacionar as transformações já vistas a pares ordenados no plano cartesiano.

Comentários: as coordenadas dos pontos são: *A*(3, 6), *B*(5,4), *C*(4, 3), *D*(5, 2), *E*(2, 2), *F*(3, 3) e *G*(2,4). Em (b) a lei dada vai transformar por exemplo o ponto *A*(3,6) no ponto *A'*(-3, -6) e a imagem da figura obtida será equivalente a imagem de uma simetria central com centro na origem do eixo cartesiano. No item (c) obteremos uma imagem equivalente a uma simetria axial em que o eixo de simetria é o eixo das abscissas. Em (d) temos uma simetria em relação ao eixo das ordenadas. Em (e) temos uma translação em que o ponto *A* se desloca duas unidade para o leste e 3 unidades para o norte. A imagem do ponto *D*(5,2) será o ponto *D'*(7, 5) que é equivalente a uma translação de vetor $\overrightarrow{DD'}$. Finalmente, no item (f), a simetria em relação à bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes.

Atividade 08: ainda transformações e pares ordenados



a) Construa a imagem *A'B'C'D'E'* da figura acima segundo a lei (x, y) a $(2x, 2y)$.

b) No mesmo sistema construa a imagem *A"B"C"D"E"* da figura inicial pela lei (x, y) a $(-1{,}5x; -1{,}5y)$.

c) Construa a imagem da figura $A'''B'''C'''D'''E'''$ inicial pela lei (x, y) a $(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$.

d) Una os vértices correspondentes das quatro figuras. O que você pode concluir?

Comentários: no item (a) dessa atividade temos pela lei dada que $A(2,2)$ a $A'(4,4)$, $B(4,3)$ a $B'(8,6)$, $C(5,2)$ a $C'(10,4)$, $D(6,3)$ a $D'(12,6)$, $E(5,5)$ a $E'(10,10)$ e $F(3,4)$ a $F'(6,8)$ que fornece uma homotetia de razão 2. A imagem obtida por essa ampliação tem o dobro do perímetro da figura inicial. Em (b) temos uma ampliação de razão 3/2 seguida de uma rotação de 180^0 que transforma a figura dada no 1º quadrante para uma figura no 3º quadrante. Em (c) temos uma redução de razão 0,5 que também é uma homotetia. Finalmente em (d) unindo os vértices das quatro figuras, podemos concluir que os vértices correspondentes são alinhados, por exemplo, *A*, *A'*, *A"* e A''' estão alinhados e mais $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OA''} = -1{,}5\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OA'''} = 0{,}5\overrightarrow{OA}$.

Atividade 09: definindo analiticamente as transformações no plano

Exercício 1: definindo analiticamente uma translação.

Considere um sistema cartesiano plano $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ em que $\vec{j}$ e $\vec{i}$ são ortogonais e unitários, e $T_{\vec{u}}$ a translação de vetor $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

a) Defina $T_{\vec{u}}(M) = M'$.

b) Se $M(x, y)$ e $M'(x', y')$ determine *x´* e *y´* em função das coordenadas de $\vec{u}$

c) Defina analiticamente a translação de vetor $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.

d) A aplicação *f* do plano que a todo ponto $M(x, y)$ faz corresponder o ponto $M'(x', y')$ tal que $\begin{cases} x' = x + \sqrt{2} \\ y' = y + \sqrt{3} \end{cases}$ é uma translação? Por quê? Em caso afirmativo determine o seu vetor.

Exercício 2: definindo analiticamente a simetria central

a) Considere a simetria de centro *I*. Num referencial ortogonal plano, o ponto *I* tem por coordenadas *(a, b)*. O ponto $M'(x', y')$ é o simétrico do ponto $M(x, y)$ em relação ao ponto *I*.

b) Defina analiticamente esta simetria central de centro *I*.

c) Defina analiticamente a simetria de centro $I = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

d) A aplicação *f* do plano que a todo ponto $M(x, y)$ faz corresponder o ponto $M'(x', y')$ tal que $\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y + 3 \end{cases}$ é uma simetria? Por quê? Se sim determine o seu centro.

Exercício 3: determinando analiticamente simetrias ortogonais

Defina analiticamente a simetria ortogonal de eixo Δ, nos seguintes casos:

a) Δ é a reta de equação $x = -1$

b) Δ é a reta de equação $x = a$

c) Δ é a reta de equação $y = 3$

d) Δ é a reta de equação $y = b$

e) Δ é a reta de equação $y = x$

f) Δ é a reta de equação $y = -x$

Objetivo: definir analiticamente as diferentes transformações e mostrar que esses objetos matemáticos podem ser definidos sob vários pontos de vista.

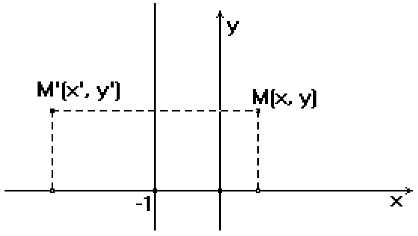
Comentários: no exercício 1, temos, no item (a), a relação expressa por $M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{MM'} \Leftrightarrow$ $(a, b) = (x' - x, y' - y) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = a + x \\ y' = b + y \end{cases}$. No item (b) temos uma aplicação direta de (a). Em (c) temos $\begin{cases} x' = x + \sqrt{2} \\ y' = y + \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = \sqrt{2} \\ y' - y = \sqrt{3} \end{cases}$ ou seja $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ em que $\vec{u} = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$, logo *f* é a translação de vetor $\vec{u} = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$. No exercício 2, item (a), $M' = S_I(M) \Leftrightarrow I$ é ponto médio de $\overline{MM'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_M + x_{M'}}{2} \\ Y_I = \dfrac{y_M + y_{M'}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{x + x'}{2} \\ b = \dfrac{y + y'}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$. No item

(c) temos uma aplicação direta do resultado de (b). No item (d)

$$\begin{cases} x' = -x+2 \\ y' = -y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2\times 1 - x \\ y' = 2\times \dfrac{3}{2} - y \end{cases} \Leftrightarrow f \text{ é uma simetria de centro } I(1, \frac{3}{2}).$$

No exercício (3) temos em a) $M(x, y) = M'(x', y')$

$$\begin{cases} x' = -2 - x \\ y' = y \end{cases}$$



PARA LER: GÊNESE DO CONCEITO DE TRANSFORMAÇÃO[36]

A obra de Euclides, sem dúvida, foi a contribuição mais importante da Antigüidade para a metodologia das ciências, influenciando durante vários séculos a Matemática. No período do Renascimento, final do século XIV e início do século XV, artistas e arquitetos se interessaram pela representação plana de figuras espaciais e a relação entre a arte e a Matemática era evidente na obra de Leonardo da Vinci (1452-1519), na Itália. A mesma combinação de interesses artísticos e matemáticos se encontra também na obra de Albrecht Dürer (1471-1528), na Alemanha.

As noções renascentistas sobre perspectiva seriam expandidas mais tarde para um novo ramo da geometria. A preocupação dos pintores e artistas em representar objetos do espaço fez surgir a idéia de projeções centrais (cônicas) e de projeções paralelas e, apareceram as noções de geometria projetiva e de geometria descritiva, importantes na gênese Do conceito de transformações.

Depois dos gregos, a grande mudança na geometria verificou-se com René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665), que conceberam as idéias da geometria analítica, substituindo os pontos do plano por pares de números e as curvas por equações, passando o estudo das propriedades das curvas a ser realizado com o estudo das propriedades algébricas das equações correspondentes. Nessa época o maior desenvolvimento da Matemática ocorreu na geometria analítica e na análise infinitesimal.

Fermat se interessou pela obra *As Cônicas*, de Apolônio, se dedicando mais aos métodos analíticos enquanto, Apolônio e os demais geômetras gregos, consideravam as cônicas como seções planas de um cone de base circular, estudando separadamente a elipse, a parábola e a hipérbole, pois eram curvas bem distintas.

O estudo de *As Cônicas* foi retomado por Girard Desargues (1591-1661) arquiteto e engenheiro que, influenciado pelas noções de perspectiva utilizadas pelos artistas da Renascença, trabalhou-as com

---

[36] Baseado na dissertação de Mestrado: Transformações Geométricas: A Trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores, de Setsuko Takara Mabuchi, PUC/SP, 2000.

métodos projetivos. A geometria projetiva de Desargues tinha uma enorme vantagem, em generalidade, sobre a geometria métrica de Apolônio e de Fermat.
Blaise Pascal (1623-1662) e Philippe de Lahire (1640-1718) continuaram os trabalhos sobre o assunto.
Desargues e Pascal recorreram a um método de transformações que a pontos e retas de uma circunferência faz corresponder pontos e retas de uma cônica arbitrária, em que as transformações geométricas foram usadas como ferramentas de demonstrações, que possibilita transferir propriedades de uma figura para outras mais complexas, com o objetivo de destacar as propriedades geométricas invariantes por transformações.
O ressurgimento da geometria no espaço deveu-se aos trabalhos revolucionários de Gaspard Monge (1746-1818) com uma nova idéia: a geometria descritiva.
Os geômetras, depois dos métodos de Desargues, Pascal e Monge, passam a considerar duas categorias de propriedades geométricas: aquelas que dizem respeito à distâncias e medidas dos ângulos e as propriedades descritivas ou de posição, nas quais importa a posição relativa dos elementos geométricos.
Só no fim do século XIX a geometria projetiva foi sistematicamente desenvolvida, principalmente por Jean-Victor Poncelet (1788-1867). Sua idéia central estava no uso de duas operações: a projeção e a seção. Estudou as propriedades das figuras que são invariantes por uma projeção central e tornou-se um firme defensor da geometria pura ou sintética e, constatando a vantagem que a generalidade da geometria analítica proporcionava, procurou tornar os enunciados geométricos o mais geral possível. Michel Chasles (1798-1880) segue um caminho semelhante ao de Poncelet chegando às mesmas conclusões.
A geometria projetiva foi muito importante na evolução da concepção da geometria, sendo a responsável pelo movimento das idéias que, durante o século XIX, confrontaram as diferentes geometrias e deram à noção de transformação geométrica papel preponderante.
Nessa mesma época, com as geometrias não-euclidianas de Nicolai Ivonovich Lobachewsky (1793-1856), Jonas Bolyai (1802-1860) e Georg Friedrich Riemann (1826-1866), os matemáticos passaram a aceitar o fato de que existia mais de um espaço e, portanto, mais de

uma geometria. Surge um dos conceitos mais importantes, considerado o elemento unificador na matemática: a noção de grupo[37], que recebeu esse nome por Evariste Galois (1812-1832).
A idéia de transformação introduzida até então tinha origem intuitiva. Para cada caso particular aplicava-se um tipo de transformação, faltando meios para identificar e exprimir a estrutura do conjunto dessas transformações. A noção de grupo das transformações e os invariantes correspondentes permitiram fazer distinções entre os diferentes tipos de geometria, como foi desenvolvido por Felix Klein (1849-1925). Na Alemanha juntamente com o norueguês Sophus Lie (1842-1899), Klein tornou-se responsável pela concepção moderna da geometria, em que para definir uma geometria deve-se considerar:

- um conjunto S de elementos quaisquer chamados "pontos",
- um conjunto de transformações aplicadas sobre esses pontos formando um grupo G com a operação de composição.

Euclides havia estabelecido a igualdade de figuras por superposição, o que significa que as figuras permanecem invariantes quando deslocadas no plano. Isso equivale a considerar as transformações chamadas rígidas, obtidas a partir de translações, rotações, simetrias e de suas composições, como constituindo um grupo de transformações. Klein considerou as homotetias e semelhanças como transformações mais gerais que as isometrias e, portanto, o grupo principal da geometria euclidiana não é o das isometrias; este é um subgrupo do grupo das similitudes. As homotetias e as semelhanças constituem o grupo principal da geometria euclidiana.
A generalidade do conceito de grupo é evidente, Klein em uma célebre aula inaugural, em 1872, quando tornou-se professor em Erlangen, mostrou como podia ser aplicado como um meio conveniente

[37] Diz-se que uma coleção de elementos forma um grupo com relação a uma dada operação se: 1) a coleção é chada sob a operação; 2) a coleção contém um elemento identidade com relação à operação; 3) para cada elemento na coleção há um elemento inverso com relação à operação e 4) a operação é associativa. Os elementos podem ser números, pontos, transformações etc. A operação pode ser aritmética (como adição ou multiplicação) ou geométrica (como uma rotação em torno de um ponto ou eixo) ou qual outra regra para combinar dois elementos (tais como duas transformações) de modo a formar um terceiro elemento do conjunto. (Boyer, 1996, p. 379).

para caracterizar as várias geometrias que tinham aparecido durante o século (Boyer, 1996, p.379). De acordo com Klein, diz-se que a geometria euclidiana é mais ampla que a métrica, ou que a geometria métrica é uma subgeometria da euclidiana. A geometria projetiva é aquela cujo grupo deixa invariantes, entre outras propriedades, a razão anarmônica[38]. Num segundo nível encontram-se a geometria afim e as geometrias não-euclidianas. Em seguida, as subdivisões da geometria afim e a geometria métrica parabólica, na qual a medidas dos ângulos é um invariante e, por fim, a geometria euclidiana, com o grupo dos deslocamentos. Precedendo todas, encontra-se a topologia que é a geometria dos invariantes do grupo das transformações pontuais contínuas.

PANORAMA DAS IDÉIAS GEOMÉTRICAS[39]

A Geometria é considerada como o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes quando "se faz alguma coisa". A Geometria Euclidiana é o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes nos deslocamentos.

Existe outro aspecto particularmente importante das transformações. Podemos "desfazer" certas transformações, enquanto que para outras isso é difícil.

A Geometria é o estudo das propriedades do espaço. Nós nos deslocamos e modificamos a posição dos objetos do espaço. Podemos modificar os próprios objetos, esticando-os ou dobrando-os, por exemplo. As propriedades das transformações formam um ramo da Geometria.

Existem transformações mais simples. Deslocar um objeto, por exemplo. Esta transformação modifica a posição do objeto. Podemos também fazer rodar o objeto em torno de um ponto fixo. Tal transformação se chama rotação. É também possível fazer girar um objeto em torno de um eixo fixo. É o caso de uma roda que gira em torno de

---

[38] Dados 4 pontos colineares A, B, C e D, chama-se razão anarmônica à razão $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$.

[39] Baseado no livro: *A Geometria Pelas Transformações:Topologia, Geometria Projetiva e Afim*, Dienes-Golding, E.P.U./MEC, 1975.

seu eixo, sem rolar. Todos os pontos da roda mudam de posição, menos os do eixo. É claro que é possível modificar a posição dos pontos do eixo, fazendo rolar a roda no chão.
Há transformações que conservam as distâncias e os ângulos e por isso são chamadas de isometrias. É evidente que a projeção de uma sombra não é uma isometria. Uma sombra é menor ao meio-dia do que pela manhã, cedo, ou no fim da tarde. A distância entre dois pontos de nosso corpo não se mantém, na sombra. De fato, esta distância varia em função do tempo. Daí decorre que essa transformação não é uma isometria.
Achamos que as crianças devem estudar, de início, transformações mais gerais, que não conservam as distâncias, nem os ângulos. Só depois disso, lhe apresentaremos, em pormenores, as isometrias.
Tomemos, por exemplo, um aro de arame. Dobremo-los sem cortá-lo. Pontos do arame, que eram vizinhos antes desta transformação, continuarão vizinhos. Existe no entanto, uma transformação inversa da transformação precedente. É a transformação que faz desaparecer a dobra e restitui ao aro sua forma primitiva. Nesta transformação inversa, pontos vizinhos são transformados em pontos vizinhos. Assim, a transformação é *bicontínua* A *topologia* é o estudo das propriedades das figuras que são invariantes nas transformações bicontínuas. Tais transformações se chamam transformações topológicas. Consideremos uma superfície esférica, uma bola, por exemplo. Façamos nela uma depressão, sem furá-la. Essa transformação é uma transformação topológica. Quais são as propriedades invariantes dessa transformação? Conservam-se os mesmos o interior e o exterior. É, de fato, impossível passar do interior da bola ao exterior sem atravessar a superfície dela. Esta propriedade foi conservada na transformação precedente. Assim, o *interior* e o *exterior* são propriedades topológicas. Se, no entanto, fizermos um furo na bola, não haverá mais conservação do interior. Em verdade, não haverá mais interior nem exterior. Alem disso, podemos, graças ao furo, passar do interior da bola ao exterior. Mas, fazer um furo em uma bola não é uma transformação contínua. Pontos que eram vizinhos não serão mais vizinhos, particularmente em se tratando de dois pontos situados de um lado e de outro do furo. É por isso que “furar” não é uma transformação contínua. É, pois, não-topológica.

A *Geometria Projetiva* é o estudo das propriedades das figuras que, traçadas em um plano e projetadas a partir de uma fonte puntiforme, continuam invariantes.
A noção de convexidade está a meio-caminho entre a Topologia e a medida. É uma noção projetiva. A noção de convexidade implica na de segmento de reta. Se nos deslocarmos ao longo de uma linha reta, conservaremos uma direção constante. Se, porém, nos deslocarmos ao longo de uma curva, mudaremos de direção. As noções de direção e de linha “reta” não são topológicas. Acontece o mesmo com a convexidade. No entanto, a noção de reta é projetiva e o mesmo acontece com noções de interior e de exterior. Um ponto interior de uma figura projeta-se em um ponto interior da figura projetada. Assim, os *interiores* são invariantes, em projeção. Por outro lado, a projeção de um segmento de reta que une dois pontos interiores de uma figura é um segmento de reta que se encontra no interior da figura projetada. Resulta daí que a projeção de uma figura convexa é convexa.
A transformação afim é um caso particular de transformação projetiva. Na Geometria Afim afastamos o centro de projeção para muito longe, de modo que os raios luminosos se tornem praticamente paralelos. Uma das primeiras propriedades que devemos por em evidencia em projeção afim e a conservação do paralelismo de duas retas. Outra propriedade e a conservação da relação das distâncias.
Tomando como fonte o Sol, obtemos uma idéia aproximada de projeção de uma fonte puntiforme, que cada vez mais se distancia. O sol está tão longe que seus raios chegam a nós praticamente paralelos. Em uma projeção desse tipo, retas não paralelas são transformadas em retas paralelas. Entretanto, esse resultado não é mais verdadeiro se tomarmos uma fonte puntiforme situada muito perto da figura. Lembremo-nos, por outro lado, que os trilhos de uma estrada-de-ferro parecem encontrar-se, embora saibamos que são paralelos. O paralelismo não é uma noção projetiva, é uma noção afim.
Outra propriedade que se mantém em projeção paralela é a relação entre os comprimentos de dois segmentos situados sobre duas retas paralelas. Verificaremos que o mesmo não se dá no caso de uma projeção central em que a fonte esteja suficientemente próxima da figura. As noções de Geometria Projetiva e Afim estão a meio-caminho entre a Topologia e a Geometria Euclidiana. Se considerarmos as projeções simples, trataremos de casos particulares das trans-

formações afins e projetivas. Para considerarmos um caso bastante geral, precisaremos admitir que a inversa (significa que não apenas a transformação que faz passar do objeto à sombra é projetiva como também é projetiva a transformação "que reconstitui" o objeto, a partir da sombra) e a composição/combinação (significa que não apenas a transformação de um objeto em sua sombra é projetiva, como também é projetiva a sucessão de duas transformações quaisquer desse tipo) das projeções são possíveis.

A Geometria Euclidiana é o estudo das propriedades das figuras que se mantêm invariantes em um deslocamento, no espaço, conservando as distâncias e os ângulos das figuras. Assim, toda proposição relativa às distâncias e aos ângulos é uma noção euclidiana. Os teoremas de congruência são pedras angulares da maior parte das demonstrações clássicas da Geometria Euclidiana. Inúmeros teoremas da Geometria Euclidiana podem ser estabelecidos, sem recorrer à noção de distância, mas sim à de razão entre distâncias. Esses teoremas pertencem à Geometria Projetiva ou Afim.

É importante entender que a Geometria Euclidiana baseia-se em axiomas, que são relações entre retas paralelas ou ângulos. As noções de ângulos alternos e de ângulos correspondentes estão totalmente ligadas à Geometria Euclidiana. Não há razão nenhuma para crer que tais relações continuam verdadeiras quando se trata de grandes distâncias. Com os instrumentos de que dispunham, os gregos não podiam medir senão pequenas distâncias. Pensavam que as estrelas e os planetas se deslocavam sobre uma esfera e que todos os corpos celestes guardavam a mesma distância da Terra. Para distâncias astronômicas, os teoremas Euclidianos sobre retas paralelas não são mais verdadeiros.

Não é o caso de apresentar aqui uma introdução às geometrias não-euclidianas, mas de colocar em evidência que certos teoremas e idéias, que chamamos topológicos, projetivos e afins, são independentes das noções euclidianas. Resulta daí que certas relações continuarão verdadeiras em geometrias não euclidianas.

Nas transformações topológicas, em que podemos torcer, dobrar ou mesmo esticar a figura, poucas propriedades são conservadas, porque nos permitimos coisas demais, com a figura. Nas transformações projetivas, menos coisas são permitidas e por isso maior número de propriedades é conservado.

Quanto maior número de coisa nos permitirmos na transformação de nossa figura, menos relações verdadeiras teremos, enquanto que, se nos permitirmos poucas coisas, mais relações verdadeiras teremos. É por isso que a Geometria Euclidiana é a mais rica de todas as Geometrias, enquanto que as relações topológicas são as mais gerais. Tudo o que é verdadeiro em Topologia, é verdadeiro também em Geometria Projetiva, Afim e Euclidiana e tudo o que é verdadeiro em Geometria Afim, é verdadeiro em Geometria Euclidiana. Entretanto, o que é verdadeiro em Geometria Euclidiana não é necessariamente verdadeiro nas outras geometrias.
A Semelhança e um caso particular da transformação de uma figura na respectiva sombra. E o caso em que as dimensões da figura aumentam ou diminuem na mesma proporção. Isso não acontece no caso da projeção por uma ponte puntiforme (vela).
Quatro tipos de geometria obtidos por projeção: projetiva, afim, das semelhanças, geometria euclidiana.

13 INICIAÇÃO À DEMONSTRAÇÃO EM GEOMETRIA

ENSINAR GEOMETRIA PARA QUE?

É fundamental para o ensino da Geometria que o professor perceba que a capacidade de visão espacial dos alunos é maior que a sua habilidade de trabalhar com números.
Ao reforçar este potencial, o professor está despertando o interesse pela Matemática e promovendo progressos em relação à compreensão dos números e suas operações.
O aluno é um ente geométrico, mergulhado no espaço e acha interessante, com a ajuda da Geometria, poder representar e descrever de maneira ordenada o mundo no qual ele vive.
É necessário que o professor também se aproprie dessa visão de que a Geometria é parte importante do currículo no ensino fundamental, no sentido de perceber que é a partir das concepções dos alunos que ele pode agir para facilitar a aprendizagem e a construção dos conceitos.

ENSINAR A DEMONSTRAR POR QUÊ?

Os problemas em Geometria constituem, geralmente, o domínio dos primeiros encontros dos alunos com as exigências da demonstração. Quando se vê o que contém a atividade demonstrativa nos problemas da Geometria, percebe-se que o raciocínio dedutivo constitui uma das tarefas decisivas. A utilização de definições e teoremas já destaca esta prática.
Como preparar os alunos para essa tomada de consciência?
A partir da 7ª série, uma das questões que devem constar dos exercícios de Matemática propostos aos alunos é: “demonstrar que...”
A tomada de consciência do que é uma demonstração comporta etapas.Ao analisarmos essas etapas, constatamos diferentes obstáculos que o aluno deve transpor para produzir um texto no qual se revele a organização profunda da demonstração.
Propomos enriquecer o progresso dos alunos nesse assunto da demonstração, por meio de várias atividades a serem feitas pelos alunos.

Atividades

Atividade 01: iniciando o debate

Cada aluno receberá uma tira de papel com uma afirmação. Um deles lerá a sua frase e qualquer outro fará a relação da frase lida com a sua frase.

F_1: Q é um retângulo.
F_2: As diagonais de Q interceptam-se nos seus pontos médios.
F_3: Dois lados consecutivos de Q são iguais.
F_4: Q é um paralelogramo que tem um ângulo reto.
F_5: Q é um quadrado.
F_6: Q é um paralelogramo que tem suas diagonais congruentes.
F_7: Q é um losango.
F_8: Os lados opostos de Q são paralelos.
F_9: As diagonais de Q são perpendiculares.
F_{10}: Q é um losango que tem um ângulo reto.
F_{11}: Q é um paralelogramo que tem dois lados consecutivos congruentes.
Registre as possíveis proposições.

Objetivo: na medida em que as relações são determinadas, levantar nas discussões as concepções que os alunos têm a respeito do que é conjeturar, o que é hipótese e conclusão, o que é comprovar uma hipótese, o que é demonstrar, a diferença entre "qualquer que seja" ou "para todo" e "existe" ou "existe pelo menos um".
Comentários: por exemplo, se um aluno tem F_{10}: Q é um losango que tem um ângulo reto o aluno que tem F_5 faz a relação: então Q é um quadrado. Questões do tipo "a recíproca é verdadeira?" podem ser feitas para enriquecer o debate.

Atividade 02: conjeturando ou provando?[40]

Trace um triângulo *ABC* tal que o lado $AB = 6\ cm$, ângulo $A = 33^o$ e ângulo $B = 56^o$.
O triângulo ABC é retângulo?

---

[40] As atividades desta seqüência, a partir da atividade 02, foram baseadas em alguns elementos da dissertação de Mestrado em Educação Matemática: *Aprendendo e Ensinando Geometria com a Demonstração* de Filomena Aparecida Teixeira Gouvêa, PUC/SP, 1998.

Respostas orais de três alunos:

***João**: "Sim; medindo o ângulo C com o meu transferidor, eu encontro 90º."*
***Paulo**: "Concordo com você, João, eu verifiquei com o meu esquadro."*
***Ana**: "Não concordo! Eu estou segura de que o ângulo C não é reto: ele mede 91º."*
a) Um só dos três alunos tem razão. Quem é? Por quê?
b) Dê uma explicação para o erro dos outros alunos.

Objetivos: diferenciar conjetura de prova.
Comentários: é importante que o aluno perceba que o "resultado de medições" após o uso de instrumentos o leva a constatar certas propriedades de uma figura, o que chamamos de conjetura. Neste caso temos uma verificação ou argumentação experimental. Os resultados obtidos dessa forma precisam sempre ser provados. Provar é justificar uma ou mais propriedades estudadas de maneira dedutiva.
Ana está certa, pois usou o teorema que diz que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo resulta em 180^0, ou seja, foi além do visual e usou conhecimentos anteriores. Os outros alunos verificaram experimentalmente com instrumentos de desenho e por isso chegaram a uma medida aproximada. Ressaltamos que a visualização e a medição são estratégias fundamentais para a descoberta de propriedades geométricas, mas não se pode demonstrar usando apenas figuras e medidas.

Atividade 03: buscando contra-exemplo
Um aluno da professora Ana, numa prova, respondeu:

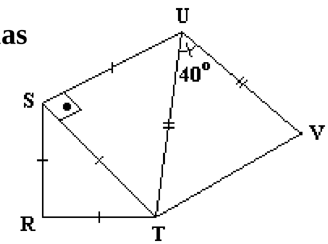
- *Não importa qual triângulo eqüilátero, ele tem somente um eixo de simetria.*
- *Todo quadrilátero, tendo suas diagonais perpendiculares, é um losango.*
- *Se os segmentos MA e MB têm MA = MB, então M é o ponto médio do segmento AB.*

a) Você acha que o aluno acertou tudo?
b) Se não acertou, como você poderia convencê-lo de que ele está errado?

Objetivos: entender o papel do contra-exemplo na demonstração.
Comentários: o aluno deve compreender que para demonstrar que uma propriedade é falsa, basta encontrar um elemento que não a satisfaça. Esse elemento é chamado de contra-exemplo e é suficiente para invalidar uma conjetura. Em casos de resultados negativos, podemos usar figuras como contra-exemplo e para decidir se uma afirmação é verdadeira ou falsa, devemos antes considerar casos diferentes.

Atividade 04: desconfiando das aparências

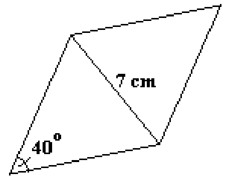
Apoiando-se sobre os dados desta figura, feita a mão livre, pode-se afirmar que os pontos *R*, *T* e *V* estão alinhados? Justifique matematicamente sua resposta.



Objetivos: compreender o papel da figura em situações de demonstração
Comentários: o aluno deve ser sensibilizado para a demonstração, não levando em conta a imperfeição da figura, pois o que importa são as informações contidas nela, além da articulação entre hipótese, teorema e conclusão. Para a prova é necessário lembrar as características dos triângulos eqüilátero, isósceles e retângulo; do teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e da condição de alinhamento de três pontos.

Atividade 05: reproduzindo em verdadeira grandeza

Reproduza em verdadeira grandeza o losango que foi desenhado a mão livre, em papel sulfite. Redija os passos de sua construção.

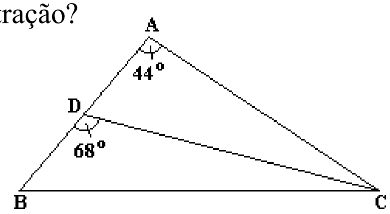


Objetivos: construir e redigir os passos da construção solicitada reproduzindo em verdadeira grandeza o desenho dado.
Comentários: é importante estimular o espírito explorador e as estratégias de raciocínio conduzindo o aluno a experimentar suas próprias intuições para compreender conceitos e propriedades, refletir para fazer a construção, separando os dados e ordenando os argumentos, além de trabalhar a forma escrita da construção justificando as palavras utilizadas. A construção pode ser obtida a partir do traçado da diagonal menor e de sua mediatriz, que será a reta suporte da diagonal maior. Construir em um ponto qualquer dessa reta um ângulo de 40^0 considerando-a como bissetriz desse ângulo. Traçar pelos extremos da diagonal menor paralelas ao lado do ângulo construído.

Atividade 06: raciocinando sobre a figura dada no enunciado
Considere a figura abaixo feita a mão livre.

Um aluno quer demonstrar que *CB* = *CD*.

Com os dados do problema, quais deverão ser as etapas de sua demonstração?

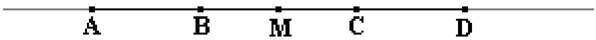


O ângulo *ACB* mede 68^0.

Objetivos: provar uma propriedade de uma figura dada.
Comentários: o aluno deve perceber a passagem do quadro geométrico (ângulos, triângulos) para o quadro numérico (medidas de ângulos) o que favorece o surgimento de estratégias para a demonstração. Além disso, perceber que o uso de propriedades, suas recíprocas e os conceitos estudados anteriormente servirão para organizar os passos de sua demonstração.
É indispensável compreender que as propriedades matemáticas são necessárias para resolver problemas e que a prova o faz sentir-se esclarecido e o ajuda a convencer os colegas se necessário for.

Atividade 07: provando a lei do ponto médio

Sejam quatro pontos *A*, *B*, *C* e *D* alinhados nesta ordem e tal que *AB* = *CD*.



a) Prove que o ponto médio do segmento de *BC* é também o ponto médio do segmento *AD*.

b) Coloque em ordem as sete frases abaixo, a fim de obter uma demonstração dessa propriedade:

(I) Donde *AM* = *MD*

(II) Ora, por hipótese: *AB* = *CD*

(III) M é, então, o ponto médio de *AD*

(IV) Por definição de ponto médio, tem-se: *BM* = *MC*

(V) Seja *M* o ponto médio de *BC*

(VI) Então, *AB* + *BM* = *CD* + *MC*

(VII) *A*, *M* e *D* alinhados.

Objetivo: organizar as frases da demonstração de uma propriedade.
Comentários: para resolver esta atividade o aluno precisa redescobrir a propriedade do ponto médio, mobilizar os conhecimentos já adquiridos e reorganizar da melhor maneira possível as sete frases apresentadas obtendo finalmente a seguinte ordem: II, V, IV, VI, I, VII e III.

Atividade 08: organizando os passos de uma demonstração
Exercício 1

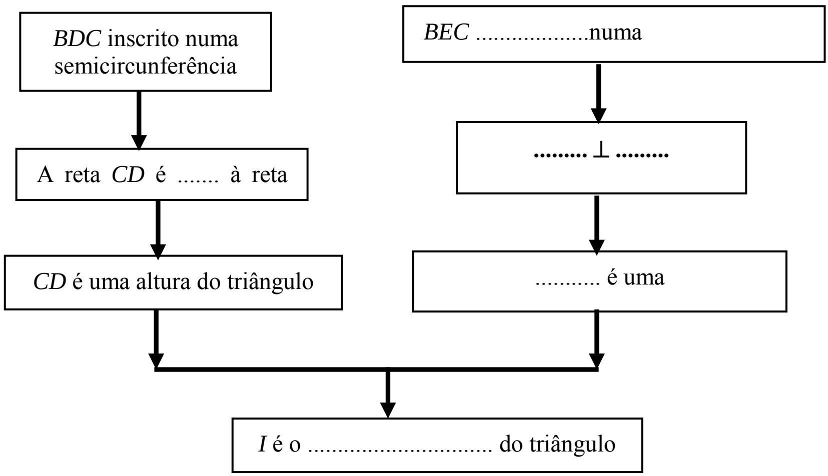
Eis um diálogo entre um aluno e seu professor:

Traçar uma semicircunferência de diâmetro medindo BC, em seguida marcar dois pontos D e E sobre a semicircunferência.
Seja A o ponto de intersecção das retas BD e CE.
Apenas com a régua, traçar a perpendicular à reta BC passando por A.

Rui: “*Eu tracei as retas BE e CD que se cortam em I. Em seguida, eu tracei a reta AI : usei este caminho*”.

O “**Prof**” (irônico): “*Você não tinha muitas possibilidades para traçar retas a partir da figura; mas é preciso agora justificar sua construção*.”

a) Efetue a construção de Rui, em seguida complete, justificando o seguinte organograma:



b) Redija a justificativa para a construção de Rui.

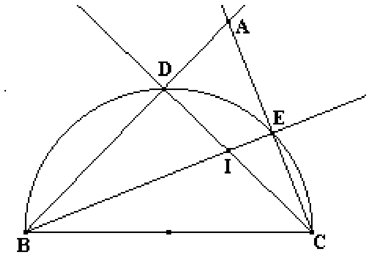
Exercício 2

Trace uma circunferência de diâmetro medindo AB, em seguida marque um ponto M no seu interior.

É possível construir, apenas com a régua, a perpendicular à *AB* passando por *M*? *Como?* Explique.

Objetivo: elaborar uma construção a partir de um enunciado e justificá-la, completar os passos de uma demonstração e redigi-la.
Comentários: nessa situação o aluno deve perceber a necessidade de uma construção bem feita da figura proposta e que, embora as figuras sejam de importância fundamental para as demonstrações, elas não bastam para tal. Os alunos devem julgar e raciocinar baseados em definições e dados do problema, independente da aparência visual da figura construída, e confrontar suas conjeturas com as dos colegas, discutindo e se convencendo das propriedades envolvidas tais como:

alturas de um triângulo, seu ortocentro, triângulo inscrito numa semicircunferência, a hipotenusa coincide com um diâmetro e a existência de uma única reta por dois pontos dados.



No exercício 1 deve-se preencher que: a reta *CD* é perpendicular à reta *BD* e *BEC* está inscrito numa circunferência, $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CE}$, $\overline{BE}$ é uma altura do triângulo *ABC* e concluir que I é o ortocentro desse triângulo. No exercício 2, usando os resultados do exercício 1, basta traçar as semi-retas *AM* que intercepta a circunferência em *P* e *BM* que intercepta a circunferência em *Q*. Traçando as semi-retas *AQ* e *AP* obtemos sua interseção *C*. Como *M* é ortocentro do triângulo *ABC* a reta *CM* será perpendicular ao $\overline{AB}$.

Atividade 09: pesquisando e redigindo uma demonstração

Trace dois paralelogramos *ABCD* e *AECF* e prove que *EBFD* é um paralelogramo.

a) Assinale com um (**x**), dentre as afirmações verdadeiras abaixo, a única que seja útil para resolver o problema. Qual? Por quê?

"Um quadrilátero convexo

(   ) cujos lados opostos são paralelos é um paralelogramo".

(   ) cujas diagonais têm o mesmo ponto médio é um paralelogramo"

(   ) cujos lados opostos têm o mesmo comprimento é um paralelogramo"

b) Coloque as frases seguintes na ordem de um esquema de demonstração:

Ora, se as diagonais de um quadrilátero têm o mesmo ponto médio, é um paralelogramo.

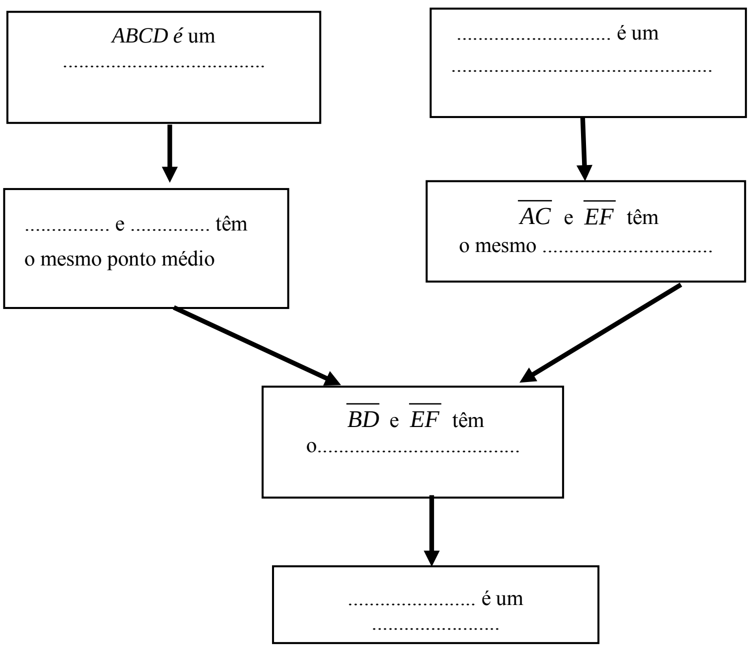
ABCD é um paralelogramo, portanto AC e BD têm o mesmo ponto médio.

Portanto, EBFD é um paralelogramo.

Resulta que BD e EF têm o mesmo ponto médio

AECF é um paralelogramo, então AC e EF têm o mesmo ponto médio.

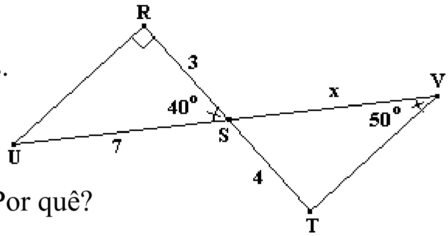
c) Complete o esquema abaixo:



Comentários: é necessário que o aluno trace uma figura que seja a mais geral possível, evitando figuras que particularizem a situação. E também que verifique as hipóteses, tire conclusões e demonstre a propriedade enunciada. Em (a) a segunda afirmação será a única afirmação útil. Em (b) a ordem correta será (4), (1), (5), (3) e (2).
Finalmente, em (c) temos que completar o esquema com: *ABCD* é um paralelogramo, $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ têm o mesmo ponto médio e do outro lado com *AECF* é um paralelogramo, $\overline{AC}$ e $\overline{EF}$ têm o mesmo ponto

médio então $\overline{BD}$ e $\overline{EF}$ têm o mesmo ponto médio, concluindo que *EBFD* é um paralelogramo.

Atividade 10: provando, calculando e refletindo



Considere a figura ao lado.

a) as retas *RU* e *VT* são paralelas.
( ) Verdadeiro? ( ) Falso?
Por quê?

b) $x = 7$.
( ) Verdadeiro? ( ) Falso? Por quê?

c) $\frac{VT}{SV} = \frac{RU}{US}$? ( ) Verdadeiro? ( ) Falso? Por quê?

Objetivo: justificar a veracidade ou não de afirmações feitas a respeito de uma figura.
Comentários: o aluno deve pensar a respeito de cada uma das afirmações apoiadas na figura dada, associando-as e coordenando os aspectos visuais da figura com os cálculos necessários. Além disso, mobilizar conhecimentos já adquiridos que reforçarão seus argumentos. O professor deve, por sua vez, estimular o debate para confrontar respostas diferentes. Em (a) a partir da propriedade de que ângulos opostos pelo vértice são congruentes e que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180^0 e considerando as retas *RT* e *VU* como transversais das retas *RU* e *VT* podemos observar que os ângulos alternos internos são congruentes e concluir que as retas *RU* e *VT* são paralelas. Em (b) como as retas *RU* e *VT* são paralelas, pelo Teorema de Thales temos que $\frac{3}{4} = \frac{7}{x}$ e portanto $x \neq 7$. Em (c) a proporção dada é verdadeira pela semelhança entre os triângulos *RSU* e *TSV* .

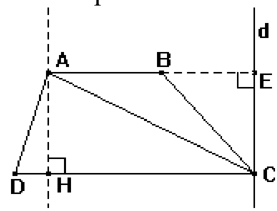
Atividade 11: buscando a verdade
Exercício 1
Uma só das duas alunas tem razão. Qual?
Rita: "*Um triângulo retângulo tem uma única altura*".
Cris: *"As três alturas de um triângulo retângulo são concorrentes"*.

Exercício 2
Explique por que, num triângulo eqüilátero, as alturas passam pelo centro da circunferência circunscrita.
Exercício 3
Considere um triângulo *ABC* isósceles em *A*.
a) Verdadeiro ou falso? "A altura que parte de *A* é eixo de simetria do triângulo." ( )
b) Trace as alturas que partem dos vértices *B* e *C*. Sobre qual reta está situada seu ponto de intersecção? Justifique a resposta.

Objetivo: demonstrar algumas propriedades confrontando sua pesquisa com a de outros colegas e explicar os passos de sua demonstração.
Comentários: no exercício 1 a única afirmação correta foi a de Cris. No exercício 2, as alturas passam pelo centro da circunferência circunscrita pois nesse tipo de triângulo as retas suportes das alturas coincidem com as mediatrizes dos lados do triângulo, isto é o ortocentro e o circuncentro são coincidentes. No exercício 3, de fato a altura que parte do vértice A é eixo de simetria do triângulo e a intersecção entre as outras duas alturas é um ponto desse eixo, pois sempre as três alturas de um triângulo interceptam-se em um único ponto.

Atividade 12: cultivando a arte de demonstrar
O problema: seja *ABCD* um trapézio tal que as retas *AB* e *CD* são paralelas. Constrói-se a reta suporte da altura $\overline{AH}$ do triângulo *ACD*, em seguida, a reta *d* que passa por *C* e é paralela à reta *AH*.
Demonstre que *d* é a reta suporte da altura do triângulo *ABC* relativa ao vértice *C*.
a) A figura: construa a figura utilizando instrumentos de desenho.
b) As hipóteses e a conclusão: quais são as *hipóteses* (o que se sabe) e qual é a *conclusão* (o que se quer demonstrar)?
c) Um esquema de demonstração: identifique qual definição ***D*** devemos usar e que propriedades ***P*** nos interessam para a demonstração.
d) A redação: redija esta demonstração.

Comentários: a situação pede em primeiro lugar a construção da figura utilizando os instrumentos de desenho necessários. A seguir, a partir do enunciado e da figura construída observar que temos como hipóteses que: *ABCD* é um trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, $\overline{AH}$ é altura do triângulo *ACD* e *d* é paralela ao $\overline{AH}$ e passa por *C*. E como conclusão que *d* é a reta suporte do triângulo *ABC* passando por *C*.



No item (c) deve ser observado que a definição necessária é: *no triângulo ACD a altura relativa à A é a reta passando por A e perpendicular à reta CD.* E a propriedade que nos interessa para a demonstração é: *se duas retas são paralelas toda perpendicular a uma, é perpendicular à outra.* No item (d) a redação poderia ser: Seja *ABCD* um trapézio tal que as retas *AB* e *CD* sejam paralelas. Por hipótese a reta *AH* é a reta suporte da altura do triângulo *ACD*. Por definição as retas *AH* e *CD* são perpendiculares. Se, por hipótese, as retas *AB* e *CD* são paralelas então as retas *AH* e *AB* são perpendiculares a partir da propriedade: se duas retas são paralelas toda perpendicular a uma delas será perpendicular à outra. Mas, por hipótese, as retas *d* e *AH* são paralelas. Logo, as retas *d* e *AB* são perpendiculares pela mesma propriedade. Ainda, por hipótese, a reta *d* passa pelo vértice *C*, portanto, por definição, a reta *d* é a reta suporte da altura do triângulo *ABC* em relação ao vértice *C*.

Atividade 13: aprofundando a arte de demonstrar

O problema: Num triângulo qualquer *ABC,* traça-se a altura $\overline{AH}$, o ponto médio *I* do lado $\overline{BC}$ e a reta passando por *I*, paralela ao $\overline{AH}$. Esta reta corta $\overline{AB}$ ou $\overline{AC}$ em *J*.

Demonstre que o triângulo *BJC* é isósceles.

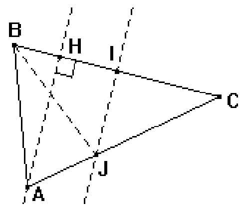
a) A figura: construa a figura utilizando instrumentos de desenho.

b) As hipóteses e a conclusão: indique as *hipóteses* (o que se sabe) e a *conclusão* (o que se quer provar).

c) Indique três **definições** e duas **propriedades** que serão usadas como ferramentas nesta demonstração.

D_1:
D_2:
D_3:
P_1:
P_2: Todo ponto da mediatriz de um segmento é eqüidistante das extremidades do segmento.
d) A redação: redija esta demonstração.

Objetivo: espera-se que o aluno se familiarize com a técnica de demonstrar, mesclando teoria da Geometria e prática da prova.



Comentários: a partir da figura construída e do enunciado podemos destacar como hipóteses: $\overline{AH}$ é altura do triângulo *ABC*, $\overline{AH}$ e $\overline{BC}$ são perpendiculares, as retas *IJ* e *AH* são paralelas, *I* é ponto médio de $\overline{BC}$. E como conclusão que: o triângulo *BJC* é isósceles. No item (c) temos:
D_1: Num triângulo *ABC* a altura relativa ao vértice *A* é perpendicular à reta *BC*.
D_2: A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular a este segmento
passando por seu ponto médio.
D_3: Um triângulo isósceles é um triângulo tendo dois lados de igual comprimento.
P_1: Se duas retas são paralelas, então toda perpendicular a uma, é perpendicular à outra.
P_2: Todo ponto da mediatriz de um segmento é eqüidistante das extremidades do segmento.
Finalmente, a redação poderia ser: Como por hipótese $\overline{AH}$ é altura então por D_1 as retas *BC* e *AH* são perpendiculares e ainda, as retas *IJ* e *AH* sendo paralelas pela propriedade P_1 concluímos que as retas *BC* e *IJ* são perpendiculares. Por outro lado, por hipótese sabemos que *I* é ponto médio de $\overline{AH}$ então pela definição D_2 concluímos que a reta *IJ* é mediatriz de $\overline{BC}$ e por P_2 que *J* é eqüidistante dos pontos *B* e *C* . Logo, por D_3 temos que o triângulo *JBC* é isósceles.

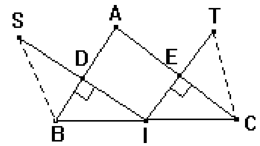
Atividade 14: demonstrando com simetrias

Seja ABC um triângulo e seja I o ponto médio de $\overline{BC}$.

Seja S o simétrico de I em relação à reta AB e seja T o simétrico de I em relação à reta AC.

a) Demonstre que os segmentos *SB* e *TC* têm o mesmo comprimento.

Comentários: é importante que o aluno participe de momentos de provas e demonstrações de proposições afirmativas, individual e coletivamente, utilizando definições e propriedades já conhecidas.



Por hipótese *S* é simétrico de *I* em relação à reta *AB*, então esta reta é mediatriz de $\overline{SI}$ e o triângulo *SIB* é isósceles em *B*, sendo $\overline{SB} \equiv \overline{BI}$. Por hipótese, temos também o ponto *T* simétrico de *I* em relação à reta *AC,* então a reta *AC* é mediatriz de $\overline{TI}$ e o triângulo *TCI* é isósceles em *C* sendo $\overline{TC} \equiv \overline{CI}$. Como por hipótese o ponto *I* é ponto médio de $\overline{BC}$ temos a congruência entre os segmentos *BI* e *IC*, o que nos leva a concluir que os segmentos *SB* e *TC* são congruentes.

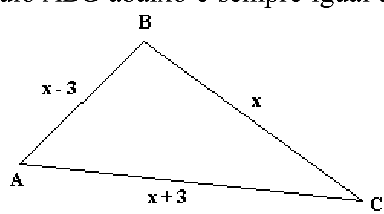
Atividade 15: justificando a validade de sentença matemática

a) A medida do lado *BC* do triângulo *ABC* abaixo é sempre igual a ***terços*** do perímetro (*x > 3*).

( ) Sim

( ) Não

Por quê?



b) Considerando o produto $5n$, se aumentarmos ***n*** de 2, o produto aumenta de 7.

( ) Sim

( ) Não

Por quê?

Comentários: no item (a) observamos que o perímetro do triângulo dado é 3x e portanto a afirmação é verdadeira, pois a medida do lado BC é um terço do perímetro. No item (b) a afirma
ção é falsa pois $5(n+2)=5n+10$ logo se aumentarmos *n* de 2 aumentamos o produto em 10.

Atividade 16: debate sobre argumentos

O problema: Na expressão n^2-n+11, se substituirmos *n* por qualquer número natural, obter-se-á sempre um número que tem exatamente dois divisores?

Comentários: o aluno deve concluir que mesmo apresentando numerosos exemplos que satisfaçam uma afirmação, estes não são suficientes para se concluir que a afirmativa é verdadeira. Isto pode ser percebido nesta atividade, em que substituindo o *n* da expressão dada por números naturais a partir de zero encontramos até $n=10$ resultados favoráveis, porém para $n=11$ obtemos um contra exemplo. Isto é, se $n=11$ então a expressão ficaria $121-11+11=121$ que tem como divisores os números: 1, 11 e 121. O que nos leva a concluir que a afirmativa não é verdadeira. É bom lembrar que uma afirmação matemática sem prova não tem valor e que um contra-exemplo é suficiente para invalidar uma proposição matemática.

PARA LER: ORIGEM E EVOLUÇÃO DA DEMONSTRAÇÃO[41]

Costuma-se buscar as raízes da demonstração matemática na Antigüidade Clássica, precisamente na Grécia do século VI a.C., apoiando-se em raros comentários de matemáticos posteriores a essa época, tendo em vista a inexistência de documentos da época.

A demonstração, entre os gregos, é conseqüência do pensamento reflexivo influenciado pelas exigências político-sociais e filosóficas que se instauraram pela necessidade de “convencer” o outro. A tríade Sócrates, Platão e Aristóteles teve a função de suplantar, pelo pen-

[41] Baseado na dissertação de mestrado em Educação Matemática: *Aprendendo e Ensinando Geometria com a Demonstração* de Filomena Aparecida Teixeira Gouvêa, PUC/SP, 1998.

samento reflexivo, a crença mítica primitiva. O pensamento reflexivo passou da preocupação cosmológica para a antropológica com os sofistas, mestres de retórica e de eloqüência na Atenas democrática, que precisavam preparar os cidadãos para a disputa dos cargos públicos por meio de eleições livres.

O chamado "milagre grego", com a coincidência histórica do aparecimento da Democracia, da Filosofia e da Geometria (hoje, Matemática), consistia na descoberta da "razão", entendida como estrutura de pensamento universal, independente das civilizações.

A demonstração é um procedimento de validação que caracteriza a Matemática e, do ponto de vista epistemológico, ocupa lugar de destaque nesta disciplina. Todavia sua aprendizagem tem sido fator de insucesso para muitos alunos e seu ensino, frustração para muitos professores. Esse quadro fez com que pesquisadores se debruçassem sobre o tema. Citamos, entre eles, Arsac, Barbin, Szabo, Balacheff, Bkrouche.

G. Arsac (1987), estudando a gênese da demonstração, diz que seu aparecimento na Matemática grega deve-se ao seu emprego sistemático ao lado dos enunciados gerais e da axiomatização. Os axiomas, com os gregos, não têm a interpretação formal da Matemática atual, já que versam a respeito dos objetos do pensamento. Pode-se identificar a criação de uma Matemática com autonomia de pensamento dotada de regras próprias de funcionamento e de validação em os "Elementos" de Euclides, mas a forma estereotipada das demonstrações gregas está bem fixada e é anterior a Euclides.

Para esse pesquisador o aparecimento da demonstração provém da resolução de problemas e assim foram criados os conceitos e os métodos, e o encadeamento de sucessivos problemas explica a evolução da matemática. Surge a demonstração, talvez para resolver certos problemas matemáticos específicos, dentre os quais o da irracionalidade. Nesse caso, há uma coincidência histórica entre o aparecimento da demonstração e o da resolução deste problema, ou seja, por um lado 2 não tem raiz quadrada racional e, por outro, a diagonal do quadrado é incomensurável em relação ao lado. Todavia, a solução do problema, que implica o recurso do raciocínio pelo absurdo e certa idealização dos objetos da Matemática, não se justificaria para resolver o problema em questão, mas reside nas variadas maneiras de pensar existentes na sociedade grega.

Segundo Arsac, o elo entre a transformação do estatuto dos objetos da Matemática e o modo de raciocínio, a fim de permitir validar os enunciados matemáticos produzidos naqueles objetos é muito estreito, principalmente no raciocínio pelo absurdo.

Evelyne Barbin (1988) estuda as significações epistemológicas e as questões didáticas da demonstração matemática, destacando três grandes momentos ao longo de sua história: a origem junto aos gregos e duas rupturas: uma no século XVII e outra no século XIX.

A demonstração surge, entre os gregos, no século VI a.C. com o advento do pensamento racional e geométrico. Não há notícias da demonstração entre os egípcios ou babilônios, salvo levando-se em conta que a acumulação de passos idênticos possa constituir provas.

Szabo (1972) atribui a evolução qualitativa da Matemática grega ao desenvolvimento político do estado grego e à sua vida cultural, fazendo com que o desenvolvimento da dialética, ou seja, da arte da disputa e do embate das idéias, atingisse um alto grau de desempenho que possibilitou o aparecimento do pensamento filosófico independente da religião.

A demonstração surge para ser a regulamentação do debate contraditório, público, de acesso a todos, com os discursos argumentados opondo-se uns aos outros. Verdadeiros jogos de argumentos, conduzidos por sofistas, ocorriam em praça pública, na organização da sociedade grega, modelando os espíritos e, certamente, transferindo isso à Matemática. Com os assuntos da cidade postos em discussão pública, a demonstração surge como ato social que visa "convencer" o outro. O jogo é político em praça pública, enquanto é filosófico na escola de Platão ou Aristóteles, preocupados em distinguir ciência de opinião. Para estes, a ciência é o conhecimento verdadeiro e certo.

Segundo Barbin, a segunda etapa na evolução da demonstração situa-se no século XVII, quando surge uma primeira ruptura a propósito do objetivo da demonstração, que visa agora a não mais "convencer" e, sim, "esclarecer". A justificativa para essa ruptura se deve à vontade de inventar e esclarecer dos geômetras desse século, que corresponde ao privilégio dado à elaboração e à explicação de métodos de resolução, chamados de "métodos de descoberta". O termo "esclarecer" significa, em primeiro lugar, fazer compreender a razão pela qual um enunciado é verdadeiro, no lugar de convencer por meio de um raciocínio sem falha e, em segundo lugar, fazer coincidir demonstração e método de descoberta como sugere Descartes.

No século XIX, ocorre o terceiro momento da evolução da demonstração com uma nova ruptura marcada pelas pesquisas matemáticas de Bolzano que prega o retorno ao "rigor" nos métodos matemáticos e que justifica o aparecimento do formalismo, que difere do pensamento grego no sentido de que os objetos matemáticos definidos pelo axioma não mais têm existência objetiva, mas devem apenas satisfazer o princípio da não-contradição interna para os matemáticos. A demonstração não deve ser simples procedimento de "fábrica de evidências", mas deve ser sobretudo fundamento da verdade a ser demonstrada.

Balacheff (1992) se interessa pelo significado da demonstração como instrumento de validação e analisa o assunto sob três pontos:

1) A distinção entre "explicação", "prova" e "demonstração".

A "explicação" situa-se no nível do sujeito locutor com a finalidade de comunicar a outrem o caráter de verdade de um enunciado matemático. Reconhecida como convincente por uma comunidade, a explicação torna um estatuto social constituindo-se uma "prova" para esta comunidade, seja a proposição verdadeira ou não. Quando a prova se refere a um enunciado matemático, o autor chama, somente neste caso de "demonstração".

As provas são explicações aceitas por outros num determinado momento, podendo ter o estatuto de prova para determinado grupo social, mas não para um outro.

As demonstrações são prova particulares caracterizadas: por serem as únicas aceitas pelos matemáticos, por respeitarem certas regras (axiomática) e por trabalharem sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico, não pertencente ao mundo sensível, embora a ele façam referência.

2) A função fundamental da "contradição" na evolução dos tipos de provas produzidas. A produção de um "contra-exemplo" diante de uma hipótese, para Balacheff, leva a uma análise complexa: de início, a percepção da contradição colocada em evidência pelo contra-exemplo a uma hipótese pode não ser compartilhada pelos sujeitos cujas concepções quanto aos conhecimentos em questão são diferentes. Em seguida, as conseqüências tiradas podem ser muito variadas e não se resumem ao aspecto lógico que levaria a uma rejeição pura e

simples da hipótese, pode haver aí uma mudança da hipótese para melhor, a retomada de uma definição, a rejeição do contra-exemplo, etc...

3) A ligação entre o tipo de prova e o nível de conceitualização diferencia-se igualmente no plano da linguagem.

Para Balachef (1988), o aspecto experimental desse seu trabalho prevê verificar junto aos alunos, antes do ensino, a existência efetiva dos diferentes “tipos de prova”, constituindo uma hierarquia, sua evolução diante das contradições e sua ligação com o nível de formalização de conceitos. A hierarquia dessas provas é a seguinte: o “empirismo ingênuo”, a “experiência crucial”, “exemplo genérico” e a “experiência mental”. As três primeiras constituem um procedimento “pragmático” e a última, um procedimento “intelectual”. É bom salientar que esta hierarquia não constitui a análoga hierarquia dos estágios piagetianos, pois um aluno pode passar de um nível de prova a um outro superior numa determinada situação.

Por outro lado, Bkouche (1988, 1990) ressalta a necessidade de se fazer o estudo epistemológico da demonstração em Geometria antes de introduzí-la no ensino da Matemática. O pesquisador constatando os métodos de raciocínio que se transformam, na medida em que novos problemas questionam sua validade, está preocupado com uma questão crucial para o professor, qual seja, se podem ser recuperadas, ao longo dessas evoluções históricas, as características permanentes do que se convencionou chamar de demonstração; ou então, tratando-se de uma unificação de linguagem *“a posteriori”* de procedimentos de validação diferentes cujo único ponto em comum seriam os objetos aos quais eles se aplicam (a Geometria).

Segundo Bkouche, três características permanentes (no caso de elas existirem) podem se constituir nos objetivos principais no ensino: o caráter “a priori”, o caráter de “necessidade” e o caráter de “universalidade” da demonstração. O caráter “a priori” refere-se ao fato de que a demonstração possibilita fazer economia da experiência e ter certeza de se atingir um objeto que já possua estatuto matemático,. Nesse caso, a manipulação do “objeto” é substituída por uma manipulação de idéias, um raciocínio, que leva a uma certeza superior. Essa certeza revela o caráter de “necessidade” resultante das conclusões demonstradas, necessidade esta obtida graças ao fato de serem respeitadas certas regras bastante rígidas para se obter novos conhecimentos a partir do que se conhece. Esta necessidade, enfim, se insere no caráter “universal” da demonstração ao referir-se ao fato de que as características precedentes supõem que os objetos sobre os quais se produz o raciocínio, que estão sempre presentes na demonstração, têm estatuto de abstração, em que se apóia e se constrói o raciocínio.

14 POLIEDROS E CORPOS REDONDOS[42]

INTRODUÇÃO

> **Objetivo:** apresentar os principais objetivos para os 3º e 4º ciclos do ensino fundamental, baseados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), a fim de que os professores se interem das necessidades de aprendizagem dos alunos nos respectivos ciclos.

Esse documento apresenta os seguintes objetivos para os 3º e 4º ciclos (2º ao 9º ano) do Ensino Fundamental

Quanto ao pensamento geométrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem programadas para permitir ao aluno:

- resolver situações-problema de localização e deslocamento de pontos no espaço, reconhecendo nas noções de direção e sentido, de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo elementos fundamentais para a constituição de sistemas de coordenadas cartesianas.
- Estabelecer relações entre figuras espaciais e suas representações planas envolvendo a observação das figuras sob diferentes pontos de vista, construindo e interpretando suas representações.
- Resolver situações-problema que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução.
- Interpretar e representar a localização e o deslocamento de um objeto no plano cartesiano segundo um segmento de reta orientado.
- Produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança.
- Desenvolver noções geométricas como incidência, paralelismo, perpendicularismo e ângulo para estabelecer relações, particularmente as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais.

---

[42] Baseado na apostila: *Poliedros e /corpos /redondos – Começando a Aprender Geometria* do Projeto: Inovações no Ensino Básico, SEE-SP, PROEM, PUC/SP, 1997.

ATIVIDADES

A partir da manipulação, experimentação, observação e visualização de alguns objetos e figuras planas e espaciais identificar semelhanças e diferenças que permitam classificar e definir tais objetos e figuras, além de verificar algumas de suas propriedades.

Nas atividades que seguem propõem-se os seguintes procedimentos:
Metodologia: participantes distribuídos em grupos
Dicas: Todos os critérios de classificação levantados devem ser considerados e discutidos, respeitando a linguagem usada pelo aluno.
Fechamento: Discussão geral com a classe a respeito dos critérios encontrados, gerenciada pelo professor.

Atividade 01: classificando objetos diversos
Material: *m*odelos em cartolina de prisma qualquer, pirâmide, cone e círculo. Um cubo e um cilindro de sabão. Algumas superfícies poligonais quaisquer, bolinha de isopor, linha fina, clipes retorcidos, superfície retangular dobrada.
a) Determine um critério para separar os objetos em duas categorias.
b) Descubra qual o critério utilizado pelo grupo vizinho. Explique-o.

> **Objetivo:** classificar os objetos em planos e não-planos.
> **Comentários:** apesar da classificação ser pessoal, é necessário que os critérios sejam discutidos, até que os alunos percebam que o prisma, a pirâmide, o cubo, o cone, a bolinha, o clipe e o retângulo dobrado são figuras não-planas. Uma boa classificação deve responder as seguintes questões: todas as figuras foram classificadas? Cada figura pertence a um e somente a um grupo? Todos os grupos têm pelo menos uma figura?

Atividade 02: procurando critérios de classificação
Material: mesmo da atividade 01
a) Determine um critério para separar os objetos em três categorias.
b) Os outros colegas deverão dizer qual foi o critério utilizado.

Objetivo: classificar os objetos como uni, bi ou tridimensional.
Comentários: todos devem perceber que serão unidimensionais o barbante e o clipe (só têm comprimento);
os modelos em cartolina do cone, do prisma, da pirâmide, as superfícies poligonais, o círculo e o retângulo dobrado são bidimensionais (pois têm área, mas não tem volume); o cubo de sabão, a bolinha e o cilindro de sabão são tridimensionais, pois têm volume. Não podemos confundir a dimensão da figura com a dimensão do espaço que a contém.

Atividade 03: fazendo cortes em diversos objetos

Material: um prisma qualquer, um cubo, um cone, um cilindro de sabão, uma superfície poligonal qualquer e um círculo em cartolina, fio de linha, clipes retorcidos, bolinha de isopor, faca ou estilete e tesoura.

a) Com uma faca ou estilete corte cada uma das peças em uma única direção e pinte a região do corte em cada uma.
b) Identifique as figuras que foram obtidas no corte de cada objeto.
c) Agrupe os objetos que têm o mesmo tipo de figura no corte.
d) Quais apresentam só comprimento?
e) Quais apresentam área, mas não apresentam volume?
f) Quais apresentam volume?

Objetivo: caracterizar geometricamente, a partir dos cortes, as figuras quanto à dimensão.
Comentários: os objetos em que apareceu um número finito de pontos na região do corte são figuras unidimensionais (clipes, fio de linha), esses objetos apresentam apenas comprimento.
Aqueles em que a região do corte é uma linha (no caso do círculo e das superfícies poligonais) são bidimensionais, isto é, apresentam área mas não apresentam volume. Quando o corte for uma linha poligonal fechada, como no caso dos objetos ocos (aqueles feitos de cartolina) são bidimensionais e não terão volume, mas sim capacidade. Nos objetos em que a região do corte é uma superfície temos modelos de figuras tridimensionais, isto é, eles têm volume. Para as figuras unidimensionais existe pelo menos um plano que as secciona segundo um número finito de pontos. O plano que secciona as figuras bidimensionais determina nelas uma linha que é unidimensional. As tri-

dimensionais são de tal maneira que sempre existe um plano que tem em comum com elas uma superfície (que é bidimensional).

Atividade 04: caracterizando a convexidade de vários objetos

Material: um prisma e um cilindro de sabão, uma superfície poligonal qualquer e um círculo em cartolina, fio de linha, clipes retorcidos, bolinha de isopor, um poliedro estrelado.

a) Nos objetos distribuídos imagine uma formiga e uma gota de mel em qualquer posição. É sempre possível a formiga chegar ao mel em linha reta?

b) Justifique sua resposta.

c) Classifique os objetos segundo esse critério.

Objetivo: reconhecer a convexidade como uma característica de algumas figuras planas e de alguns sólidos.

Comentários: a superfície arredondada de alguns objetos não tem todos seus pontos num mesmo plano, por exemplo, a bola toca a mesa num só ponto, o cone e o cilindro tocam a mesa numa linha. Para os demais sempre é possível colocar cada uma de suas faces inteiramente num plano. Enquanto a superfície de um poliedro é constituída de partes planas (as faces), o mesmo não acontece com os corpos redondos. Entre esses objetos há os que têm uma parte de sua superfície plana e outra não-plana e há ainda os que não têm qualquer parte plana em sua superfície, é o caso da esfera. As secções de um poliedro por um plano serão sempre regiões poligonais, enquanto que secções de corpos redondos por um plano podem ser regiões circulares. A região de apoio de um poliedro sobre um plano é sempre uma superfície, mas quando se trata da região de apoio de um corpo redondo podemos ter superfície, uma linha ou mesmo um ponto. Definição: Se cada plano, que contém cada face de um poliedro, deixa as demais faces do mesmo lado, em relação a ele, então o poliedro é convexo, caso contrário ele é dito não-convexo.

Atividade 05: observando objetos apoiados em uma mesa

Material: modelos de prismas, pirâmides, cones, cilindros, esferas, poliedros de Platão e poliedros quaisquer convexos e não-convexos.

a) Classifique as figuras em dois grupos, observando como os corpos se apóiam na mesa.

b) Escreva as características encontradas para cada um dos grupos.

Objetivo: diferenciar poliedros de corpos redondos.
Comentários: a superfície de um poliedro é constituída apenas de partes planas (as faces) o que não acontece com os corpos redondos. Há corpos redondos que não possuem partes planas (a esfera) e outros que, além de possuir parte da sua superfície plana, têm outra parte não plana (cilindros e cones). As secções de um poliedro por um plano serão sempre regiões poligonais, enquanto secções de corpos redondos por um plano podem ser circulares.

Atividade 06: caracterizando faces, arestas e vértices de figuras diversas

Material: modelos de prismas, pirâmides, cones, cilindros, esferas, poliedros de Platão e poliedros quaisquer convexos e não-convexos.

a) Identifique, em cada objeto que recebeu, os elementos: face, aresta e vértice.

b) Identifique todos os poliedros convexos.

c) Identifique todos os poliedros em cujos vértices concorrem o mesmo número de arestas.

d) Qual a característica dos poliedros separados no item (b) e (c)?

e) Nomeie os poliedros.

f) Complete a tabela abaixo. Observe a relação que existe entre a quantidade de vértices, faces e arestas.

Poliedro	Qtde. de vértices	Qtde. de faces	Qtde. de arestas	Relação

Objetivos: caracterizar face, aresta e vértice de figuras do espaço e perceber a relação existente entre a quantidade de cada um deles.
Comentários: definir poliedro de Platão como um poliedro convexo, que têm todas as faces com a mesma quantidade de lados e em cujos

vértices concorre o mesmo número de arestas. Definir poliedro regular como um poliedro de Platão cujas faces são regiões poligonais regulares e congruentes. Perceber a relação de Euler: V + F = A + 2 em que V é a quantidade de vértices, F a quantidade de faces e A a quantidade de arestas do poliedro.

Atividade 07: construindo poliedros

Material: 40 superfícies de triângulos eqüiláteros com 3 cm de lado, 20 superfícies quadrangulares com 3 cm de lado, 20 superfícies hexagonais com 3 cm de lado, 20 superfícies pentagonais com 3 cm de lado, fita adesiva. Ver modelo de material para ser recortado no **anexo 11**.

a) Construa superfícies poliédricas diversas utilizando as superfícies poligonais fornecidas.
b) Separe as superfícies de poliedros regulares.
c) Preencha a tabela abaixo, nomeando os poliedros de acordo com a quantidade de faces e procurando uma relação entre os dados encontrados.

Poliedro	Qtde. de vértices	Qtde. de faces	Qtde. de arestas	Relação

(Guardar o material produzido)

Objetivos: construir poliedros a partir de suas faces. Verificar as relações entre a quantidade de faces, de vértices e de arestas de poliedros convexos. Perceber a relação de Euler: $V + F = A + 2$.

Atividade 08: caracterizando prismas e pirâmides

Material: Modelos diversos de prismas e pirâmides.
a) Separe, justificando seu critério, o material recebido em dois grupos.
b) Preencha o quadro abaixo:

Nome	V	F	A	Vértices da base	Arestas laterais	Faces laterais

Objetivos: caracterizar prismas e pirâmides. Identificar: base, face lateral, arestas da base e arestas laterais.

Comentários: todo prisma tem um número par de vértices; o número de arestas de um prisma é o triplo do número de vértices de uma base. Numa pirâmide o número de vértices é igual ao número de faces. Os prismas têm pelo menos um par de faces paralelas, enquanto as pirâmides nunca têm faces paralelas. As faces laterais das pirâmides são sempre triangulares, enquanto que as do prisma são paralelogramos. Todas as faces da pirâmide, com exceção de uma, se encontram num ponto. Quando todos os vértices de uma pirâmide, com exceção de um deles, estão numa mesma face ela é denominada base. Num prisma os vértices se distribuem entre as faces, de tal forma que metade fica numa face, a outra metade fica na face paralela e congruente à essa (ambas são denominadas bases). A base de um prisma ou pirâmide independe de sua posição no espaço.

Atividade 09: planificando superfícies poliédricas
Material: Cone, cilindro, cubo, dodecaedro, octaedro e tetraedro. Alguns modelos em cartolina e outros em madeira ou sabão.
a) Observe as figuras sobre a mesa e obtenha a planificação de uma superfície cônica, de uma superfície cilíndrica, de uma superfície cúbica e da superfície de um dodecaedro.
b) Planifique: a superfície de um icosaedro, de um octaedro e de um tetraedro.

Objetivo: representar no plano superfícies de sólidos.
Comentários: utilizando figuras que não podem ser abertas, deixar que imaginem suas planificações.

Institucionalização
Complete as frases abaixo na ordem em que aparecem.
a) A palavra polígono significa *muitos ângulos.*
Você sabia que: "Edro" – vem do grego Hedras e quer dizer face, base?
b) Um poliedro é um sólido limitado por um conjunto finito de *superfícies polígonais*, chamados *faces* de tal modo que cada lado de um *polígono* desse conjunto coincide com um *lado* de um outro *polígono* desse mesmo conjunto.
c) Os lados dos polígonos são as *arestas* dos poliedros.
d) Os *vértices* dos polígonos são também *vértices* do poliedro composto por eles.
e) Entre os chamados *Poliedros de Platão* existem apenas *cinco* poliedros regulares que são os: *cubos, tetraedros, octaedros, dodecaedros e icosaedros*.
f) Dos demais poliedros os mais conhecidos são: *os prismas* e *as pirâmides.*
g) Para todo poliedro convexo, vale a relação: $V + F = A + 2$, chamada de *Relação de Euler*.
h) Nem todos os sólidos do espaço tridimensional são poliédricos. Há os que são limitados por uma superfície *arredondada* como *a esfera* e os que são limitados por superfícies *arredondadas* e *planas* como *os cones e os cilindros*.
i) Os prismas têm pelo menos um par de faces *paralelas*.

j) Todo prisma tem *um número par* de vértices.
l) As pirâmides nunca têm faces *paralelas*.
m) As faces laterais do prisma são *paralelogramos*.
n) As faces laterais das pirâmides são sempre *triângulos*.
o) É verdade que todas as faces de uma pirâmide se encontram em um único ponto? Justifique *Não é. Exceto uma delas (base) as demais faces se encontram em um único ponto*.
p) É verdade que todos os vértices de uma pirâmide estão numa mesma face? Justifique *Não, com exceção de um, pois se todos os vértices estivessem numa única face teríamos uma figura plana.*
q) Qual a relação entre a quantidade de vértices e faces em uma pirâmide? *São iguais.*
r) Qual a relação entre a quantidade de arestas e a quantidade de vértices da base de uma pirâmide? *A quantidade de arestas é o dobro da quantidade de vértices da base.*
s) O que é um polígono convexo? *Um polígono é convexo quando quaisquer dois pontos do polígono podem ser extremidades de um segmento de reta inteiramente contido nele.*
t) O que é um poliedro convexo? *Se cada plano que contém uma face de um poliedro deixa as demais faces do mesmo lado desse plano, então o poliedro é convexo; caso contrário ele é dito não-convexo.*
u) Você concorda que a figura ao lado, construída de arame é unidimensional embora esteja contida em um espaço tridimensional?.
Sim, porque dela eu só posso medir o comprimento.
v) Considerando as retas suporte das arestas de um prisma, como podemos relacioná-las?
Paralelas: ..... estão contidas num mesmo plano e não possuem pontos em comum.
Concorrentes: .... possuem um ponto comum.
Reversas: ..... não estão contidas em um plano.

Objetivo: fazer uma síntese e sistematizar as relações e observações encontradas durante a realização das atividades.
Comentários: esta atividade deve ser feita individualmente, mas corrigida e debatida coletivamente para que os resultados e as dúvidas sejam socializados.

PARA LER: NO ESPAÇO[43]

No espaço comum, qualquer condição é variável. Nenhuma expressão é definitiva. Tudo se move, e, em última análise, não existem partes: só existe o todo. No espaço, o pequeno não é pouco nem o grande é muito. É a forma, e não a dimensão, que define o espaço. O espaço isolado é o vazio inconcebível.

Quando parado ele se fecha, e quando se move então se abre.

(Mover é o tempo. Não se pode ver o espaço se não se vê também o tempo).

Da mesma forma não se vê o espaço-tempo se não se vêem as cargas e as massas, princípios fundamentais que habitam o espaço-tempo.

"Um jarro se faz com a massa palpável do envoltório limite, mas é o espaço interior, vazio e impalpável, que o faz útil".

Estudar o espaço é organizar o aonde, e as relações entre os vários aondes, para base de análise das variações no tempo dos pontos de massa e de carga.

Como na realidade tudo é finito, o tempo acaba (tem início e tem fim).

Uma reta volta sempre ao ponto de partida, um plano é sempre fechado, o espaço é limitado e curvo.

O movimento no espaço tem 3 liberdades:

Em uma direção – a linha

Em duas direções – o plano

Em três direções – o volume

Tridirecional: assim é o espaço. ....

Quando analisamos os movimentos de uma só direção temos, então, as retas, as curvas e os ângulos.

Naquele antigo conceito de que a reta é o menor caminho entre 2 pontos, fica claro que esse é o movimento de mínima energia. Os ângulos são uma repentina modificação na direção do caminho, causada, sem dúvida, por uma interferência instantânea de maior ou menor intensidade. As curvas são causadas por uma interferência contínua, constante ou variável na direção do caminho.

---

[43] Retirado da Apostila *Edros* de Ricardo Sá, publicada pela Projeto Editores Associados Ltda.

15 CONCEITOS PRIMITIVOS E POSTULADOS[44]

Objetivos e comentários gerais

Um dos objetivos do estudo dos postulados em Geometria é o encaminhamento que permite a discussão a respeito da importância da linguagem usada pelo professor no seu diálogo com os alunos quando trata do assunto. Muitas vezes imaginamos que estamos sendo perfeitamente claros e, na verdade, a forma de nos expressarmos está tão distante daquela do aluno que este não consegue entender o que está sendo transmitido. Ao discutir os postulados, o estudante tem oportunidade de lidar com a linguagem e o entendimento dos textos matemáticos.

Outro objetivo que podemos atingir é que, ao discutir o significado de um determinado postulado (interpretação) ou o que ele permite ou ainda como ele se enquadra no conjunto dos postulados "anteriores" a ele, podemos observar muitas vezes como nos deixamos levar pelo "sentimento" e não pelo raciocínio. Assim, aquele que está estudando a Geometria com base em postulados começa a organizar suas idéias de forma sistemática, cria uma estrutura de raciocínio coerente, onde cada coisa é decorrente das anteriores e não é possível deduzir x de y e y de x, pois isso seria uma contradição.

Pode-se dizer ainda que, ao estudar Geometria a partir dos postulados, pode-se abrir a discussão de "o que aconteceria se não tivéssemos este?" ou "o que aconteceria se fosse este antes daquele?" ou "o que aconteceria se substituíssemos este por aquele?", permitindo assim uma exposição ao método científico e suas etapas: observação, experimentação, levantamento de hipóteses possíveis, busca de argumentos plausíveis e comprovação.

Conceitos Primitivos e Postulados

Admitiremos, sem definição, conceitos denominados primitivos: ponto, reta e plano.

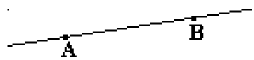
Aceitaremos, sem demonstração, certas proposições que relacionam pontos, retas e planos e que são conhecidas como axiomas ou postulados. Os postulados serão utilizados para justificar as demonstrações dos teoremas.

---

[44] Baseada no Material do Pró-Ciências, PUC/SP,1997.

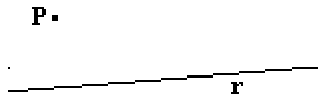
Alguns Postulados

P_1 Dois pontos distintos determinam uma única reta.



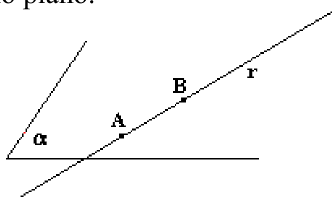
P_2 Qualquer reta contém infinitos pontos.

P_3 Qualquer que seja a reta *r*, existe um ponto *P* tal que $P \notin r$.



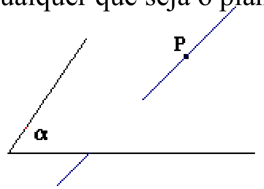
P_4 Três pontos não alinhados determinam um único plano.

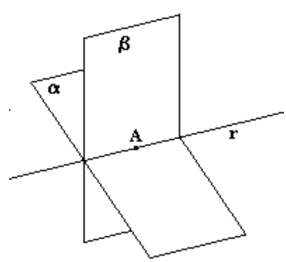
P_5 Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então a reta está contida no plano.



P_6 Qualquer plano contém infinitos pontos.

P_7 Qualquer que seja o plano, existe um ponto *P* fora desse plano.

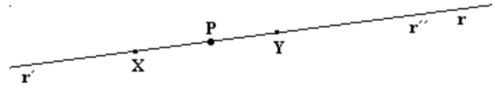




P_8 Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a intersecção desses planos é uma única reta que passa por aquele ponto.

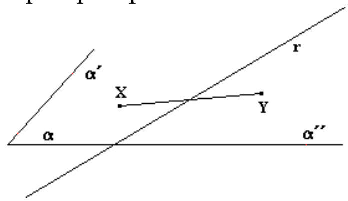
P_9 O espaço *E* contém infinitos pontos.

P_{10} Se $P \in r$, então P determina em r dois subconjuntos r' e r'' tais que:



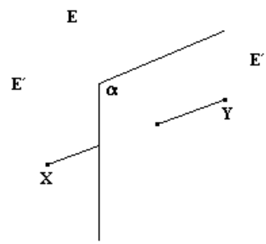
a) $r' \cap r'' = \varnothing$;
b) r' e r'' são convexos;
c) se $X \in r'$ e $Y \in r''$, então $P \in \overline{XY}$.

P_{11} Se $r \subset \alpha$, então r determina em qualquer plano α dois subconjuntos α' e α'' tais que:



a) $\alpha \cap \alpha' = \square$
b) α' e α'' são convexos ;
c) se $X \in \alpha'$ e $Y \in \alpha''$, então $r \cap \overline{XY} \neq \varnothing$.

P_{12} Seja E o espaço, se $\alpha \subset E$, então α determina em E dois subconjuntos E' e E'' tais que:

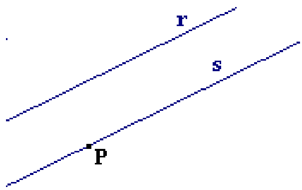


a) $E' \cap E'' = \varnothing$;

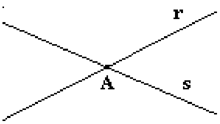
b) E' e E'' são convexos ;

c) Se $X \in E'$ e $Y \in \alpha''$, então $\overline{XY} \cap \alpha \neq \varnothing$.

<u>Definição</u>: Duas retas r e s são paralelas se, e somente se, r e s são coplanares e $r \cap s = \varnothing$.
P_{13} Por um ponto P, situado fora de uma reta r, existe uma única reta paralela à reta dada (é o *Postulado de Euclides* ou *Postulado das Paralelas*).



<u>Definição</u>: Duas retas distintas r e s são concorrentes se, e somente se, possuem um único ponto comum, isto é $r \cap s \neq \varnothing$.



Objetivo: resolver problemas a partir de postulados, definições e teoremas apresentados no decorrer do trabalho. Não pretendemos, neste momento, a demonstração de tais teoremas.

ATIVIDADES

Atividade 01: resolvendo problemas usando os postulados

a) Considere 3 pontos não alinhados, pertencentes a um plano α , e fora dele um quarto ponto. Com esses quatro pontos, quantas retas podemos determinar? ....

b) Considere 3 pontos não alinhados, pertencentes a um plano α , e fora dele um quarto ponto. Com esses quatro pontos, quantos planos podemos determinar? ....

c) Considere quatro pontos coplanares, três a três não alinhados. Com esses quatro pontos, quantas retas podemos determinar? ....

d) Considere 4 pontos coplanares, três a três não alinhados. Fora desse plano consideremos um quinto ponto. Com esses cinco pontos, quantas retas podemos determinar? ....

e) Considere quatro pontos distintos dois a dois. Com esses quatro pontos, quantos planos podemos determinar? ....

Atividade 02: determinando planos

Leia e interprete o postulado e teoremas abaixo:

Um plano pode ser determinado de quatro modos:

1° modo: Por três pontos não alinhados (**é o postulado P_4**).

2° modo: Por uma reta e um ponto fora dela (**Teorema 1**).

3° modo: Por duas retas concorrentes (**Teorema 2**).

4° modo: Por duas retas paralelas (**Teorema 3**).

Use-os como ferramenta para responder as seguintes questões:

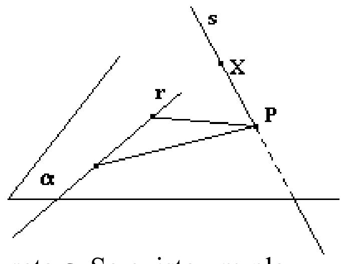
a) Três retas distintas são paralelas duas a duas. Com essas retas, quantos planos podemos determinar?

b) Três retas distintas são concorrentes duas a duas. Com essas retas, quantos planos podemos determinar?
c) Quantos são os planos que passam por uma reta?
d) Quantos são os planos que passam por três pontos distintos?
e) Sejam quatro pontos *A*, *B*, *C* e *D* não coplanares. Quantos são os planos determinados por dois desses pontos e pelo ponto médio do segmento que liga os outros dois?

Atividade 03: identificando retas reversas

Leia e interprete as definições, o teorema e sua demonstração apresentados abaixo:

Definição: Duas retas são reversas se, e somente se, não existe plano contendo as duas.



Teorema 4: Existem retas reversas.

Demonstração: Consideremos uma reta *r* e um ponto *P* fora de *r*. A reta *r* e o ponto P determinam um plano α. Tomemos fora de α um ponto *X*.
Os pontos distintos P e X determinam uma reta *s*. Se existe um plano $\beta = (r, s)$ (plano determinado pelas retas *r* e *s*) temos $r \subset \beta$ e $P \in \beta$ e portanto $\beta = (r, P)$ isto é $\beta = \alpha$.
Por outro lado, se $\beta = \alpha$, $s \subset \beta$ e $X \in s$ e, portanto $X \in \alpha$. O que é um absurdo, pois tomamos $X \notin \alpha$. Logo não existe um plano contendo *r* e *s*. Assim, *r* e *s* são reversas.

Definição: Um quadrilátero é reverso se, e somente se, não existe um plano contendo seus quatro vértices.

Posições Relativas de duas Retas: Duas retas distintas *a* e *b* podem ser coplanares ou reversas. Sendo coplanares, podem ser concorrentes ou paralelas.
Use esses resultados como ferramenta para responder as seguintes questões:
a) Quantos são os pares de arestas reversas que podemos formar com as arestas de um cubo?

b) Considere um cubo. Raciocinando com as retas que contêm as arestas, podemos formar quantos pares de retas reversas?
c) Numa pirâmide *ABCD*, quantos são os pares de arestas reversas?

Atividade 04: identificando intersecção de planos
Leia e interprete as definições abaixo:

Intersecção de Planos: Dois planos distintos ou não se interceptam ou têm uma única reta em comum (postulado 8).

Definição: Dois planos distintos que têm uma única reta em comum são chamados **secantes ou concorrentes.**
Use esses resultados como ferramenta para responder as seguintes questões:
a) Duas retas a e b são reversas. Em a há um ponto M e em b há um ponto N. Qual é a intersecção dos planos $pl(b, M)$ e $pl(a, N)$?

b) Num plano há dois segmentos não colineares $\overline{MN}$ e $\overline{GH}$ não contidos em retas paralelas. Fora desse plano há um ponto P. Qual é a intersecção dos planos $pl(P, G, H)$ e $pl(P, M, N)$?

c) As retas que contêm os lados de um triângulo *ABC* interceptam um outro plano nos pontos *M*, *N* e *P*. Pergunta-se: *M*, *N* e *P* são colineares?

Atividade 05: demonstrando um teorema
Leia e interprete as definições e teoremas abaixo:

Definição: Uma reta e um plano são paralelos se, e somente se, não têm ponto em comum.
Teorema 5: Se uma reta não está contida num plano e é paralela a uma reta do plano, então ela é paralela ao plano.

Teorema 6: Se uma reta é paralela a um plano, então ela é paralela a uma reta do plano.
Posições Relativas de Retas e Planos: Dados uma reta e um plano, podem ocorrer três posições relativas: a reta está contida no plano, a reta e o plano são paralelos ou a reta e o plano são secantes ou concorrentes.

Use esses resultados como ferramenta para demonstrar o seguinte teorema:

Seja s uma reta contida em um plano α *qualquer e P um ponto não pertencente a* α*. Demonstre que se r é uma reta que passa por P e é paralela a s, então* $r \cap \alpha = \varnothing$.

Atividade 06: demonstrando outro teorema
Leia e interprete as definições e teoremas abaixo:

Definição: Dois planos são paralelos se, e somente se, não têm ponto em comum.
Teorema 8: Se um plano contém duas retas concorrentes, ambas paralelas a um outro plano, então esses planos são paralelos.

Definição: Dois planos distintos podem ser paralelos ou secantes.

Teorema 9: Se dois planos são paralelos, então um deles contém duas retas concorrentes, ambas paralelas ao outro.
Use esses resultados para mostrar a validade do teorema abaixo:

Considere os planos α e β e a reta *r* contida em α e demonstre que se $\alpha \cap \beta = \varnothing$ então $r \cap \beta = \varnothing$.

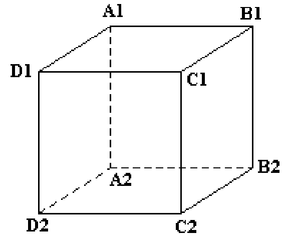
Atividade 07: usando perpendiculares e ortogonais
Leia e interprete as definições abaixo:

Definição: Ângulos entre duas retas reversas são os ângulos formados pelas paralelas às retas dadas, conduzidas por um ponto qualquer do espaço.

Definição: Duas retas são perpendiculares se, e somente se, são coplanares e formam ângulo reto.

Definição: Duas retas são ortogonais se, e somente se, são reversas e formam ângulo reto.
Use esses resultados como ferramenta para responder as questões abaixo:

a) No cubo representado ao lado, qual a medida do ângulo formado pelas retas reversas $\overleftrightarrow{D_1C_2}$ e $\overleftrightarrow{B_1B_2}$?



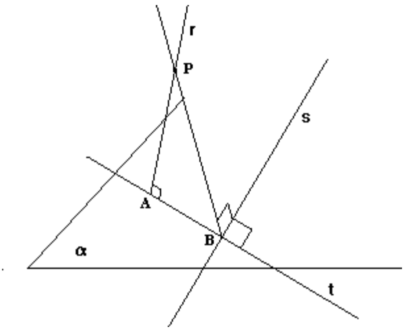
b) *a*, *b* e *c* são três retas distintas no espaço tais que $a \perp b$ e $c \perp a$. Que se pode concluir a propósito da posição relativa das retas *b* e *c*?

Atividade 08: aplicando teoremas
Leia e interprete a definição e os teoremas abaixo:

Definição: Uma reta é perpendicular a um plano se, e somente se, é concorrente com o plano e perpendicular a todas as retas do plano que passam pelo ponto de intersecção.

Teorema Fundamental (**Teorema 10**): Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular a esse plano.

Teorema das Três Perpendiculares (Teorema 11): São dados um plano α , uma reta *s* contida em α e um ponto *P* fora de α . Por *P* traçamos a reta *r* perpendicular a α e que o intercepta no ponto *A* ($A \notin s$). Se por *A* traçarmos a reta *t* perpendicular à reta *s* e se *s* intercepta *t* em *B*, então a reta *PB* é perpendicular à reta *s*.



O ponto A é chamado de **traço** da reta *r* no plano α .

Use esses resultados como ferramenta para responder as questões abaixo:

a) São dados cinco pontos não coplanares *A*, *B*, *C*, *D* e *E*. Sabe-se que: *ABCD* é um retângulo, $\overline{AE} \perp \overline{AB}$ e $\overline{AE} \perp \overline{AD}$. Pode-se concluir que são perpendiculares as retas:

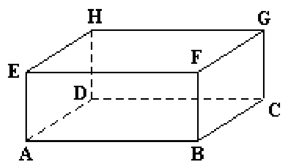
a) *EA* e *EB*	d) *EC* e *CA*
b) *EB* e *BA*	e) *BC* e *BE*
c) *EA* e *AC*	

b) $\overline{AB}$ é um dos diâmetros de uma circunferência e *C* um ponto da mesma, distinto de *A* e de *B*. A reta *VA*, com $V \not\equiv A$, é perpendicular ao plano da circunferência. Quantas faces da pirâmide *VABC* são triângulos retângulos?

c) Seja *ABCDEF* um hexágono regular contido num plano e *VABCDEF* uma pirâmide tal que $\overline{VA}$ é perpendicular ao plano do hexágono. Quantas faces laterais da pirâmide são triângulos retângulos?

d) Seja *P* o ponto médio de $\overline{AB}$ de comprimento m não nulo, cujas extremidades pertencem, respectivamente, a um plano e a uma reta perpendiculares entre si. Sendo *O* o traço da reta no plano, qual é o comprimento de $\overline{OP}$?

e) A figura ao lado representa um bloco retangular. Sabe-se que *ABCD* é um retângulo, $\overline{EB} \perp \overline{BC}$ e $\overline{EA} \perp \overline{AB}$. Tomando-se os pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *E*, dois a dois, quantos são os pares de retas ortogonais ?



Atividade 09: calculando medida de ângulos

Leia e interprete as definições abaixo:

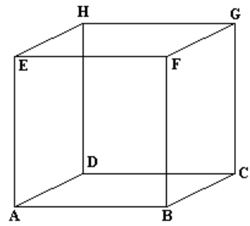
Definição: Chama-se ângulo de uma reta e um plano (oblíquos) ao ângulo agudo que a reta forma com a sua projeção ortogonal sobre o plano.

Definição: Chama-se reta de maior declive do plano α em relação ao plano β a toda reta de α perpendicular à intersecção dos planos α e β.

Utilize esses resultados como ferramenta para resolver os seguintes problemas:

Exercício 1

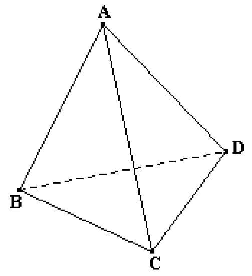
Considere o cubo *ABCDEFGH*.



a) Calcule a medida do ângulo formado pela reta *DE* com o plano $\beta = pl(F, B, A)$.

b) Calcule a tangente do ângulo formado pela reta *AG* com o plano $\alpha = pl(C, D, H)$.

Exercício 2



Na figura ao lado, *ABCD* é um tetraedro regular. Considere *R* o ponto médio de $\overline{BC}$ e *S* o ponto médio de $\overline{AD}$. Assinale a alternativa FALSA a respeito dessa figura.

EXAME NACIONAL DE CURSOS – 98

a) $\overline{AR}$ é altura do triângulo *ABC*.

b) $\overline{RS}$ é altura do triângulo *ARD*.

c) $\overline{RS}$ é mediana do triângulo *BSC*.

d) O triângulo *BSC* é isósceles.

e) O triângulo *ARD* é eqüilátero.

Atividade 10: identificando projeções

Leia e interprete as definições abaixo:

Definição: Um plano é perpendicular a outro se, e somente se, um deles contém uma reta perpendicular ao outro.

Definição: Chama-se projeção ortogonal de um ponto sobre um plano ao pé da perpendicular ao plano conduzida pelo ponto.

Definição: Chama-se projeção ortogonal de uma figura sobre um plano ao conjunto das projeções ortogonais dos pontos dessa figura sobre o plano.

Utilize esses resultados como ferramenta para responder as seguintes questões:

Classifique em V (verdadeiro) ou F (falso):
a) A projeção ortogonal de um ponto sobre um plano pode coincidir com ele mesmo. ( )
b) A projeção ortogonal de uma reta sobre um plano pode ser um ponto. ( )
c) A projeção ortogonal de uma reta sobre um plano pode ser outra reta paralela a ela ( )
d) A projeção ortogonal de uma reta sobre um plano é sempre outra reta. ( )
e) A projeção ortogonal de um círculo sobre um plano pode ser também um círculo. ( )
f) A projeção ortogonal de um círculo sobre um plano pode ser um segmento de reta.( )
g) A projeção ortogonal de um círculo sobre um plano só pode ser um círculo ou um segmento de reta. ( )
h) A projeção ortogonal de um segmento tem comprimento menor ou igual ao do segmento. ( )
i) A projeção ortogonal de um segmento tem o mesmo comprimento do segmento quando esse estiver contido em uma reta. paralela ao plano. ( )
j) A projeção ortogonal de duas retas paralelas distintas pode ser uma reta. ( )
k) A projeção ortogonal de duas retas paralelas pode ser duas retas paralelas distintas ( )
l) A projeção ortogonal de duas retas paralelas distintas pode ser dois pontos. ( )
m) A projeção ortogonal de duas retas concorrentes será sempre formada por duas retas concorrentes. ( )
n) A projeção ortogonal de um ângulo reto é sempre um ângulo reto. ( )
o) A projeção ortogonal de um ângulo agudo pode ser um ângulo obtuso. ( )
p) A projeção ortogonal de um ângulo obtuso pode ser um ângulo agudo. ( )
q) A projeção ortogonal de um triângulo eqüilátero pode ser um triângulo retângulo. ( )
r) A projeção ortogonal de um triângulo pode ser um segmento. ( )
s) A projeção ortogonal de um ângulo pode ser uma reta. ( )

t) A projeção ortogonal de um ângulo pode ser uma semi-reta. (   )
u) As projeções ortogonais de duas retas reversas podem ser duas retas concorrentes. (   )

Atividade 11: aplicando definições de distância

Leia e interprete as seguintes definições:

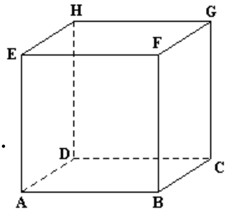
Definição 1: Chama-se distância entre um ponto e uma reta à distância entre este ponto e o pé da perpendicular à reta conduzida pelo ponto.

Definição 2: Chama-se distância entre duas retas paralelas à distância entre um ponto qualquer de uma delas e a outra reta.

Definição 3: Chama-se distância entre um ponto e um plano à distância entre este ponto e o pé da perpendicular ao plano conduzida pelo ponto.

Definição 5: Chama-se distância entre dois planos paralelos à distância entre um ponto qualquer de um deles e o outro plano.

Definição 6: Chama-se distância entre duas retas reversas à distância entre um ponto qualquer de uma delas e o plano que passa pela outra e é paralelo à primeira.



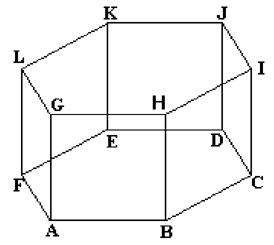
Utilize esses resultados como ferramenta para resolver os seguintes problemas:

Exercício 1

Considere o cubo *ABCDEFGH* de aresta $a = 2cm$.
a) Calcule a distância de *A* à reta *EF*.
b) Calcule a distância de *B* a reta *HG*.
c) Calcule a distância entre as retas reversas *AB* e *GF*.

Exercício 2

Considere o prisma regular hexagonal de bases *ABCDEF* e *GHIJKL*, altura *2 cm* e aresta da base *2 cm*.



a) Calcule a distância entre duas faces laterais paralelas.

b) Calcule a distância entre duas arestas reversas.

Familiarização

Exercício 1

Um segmento tem duas extremidades situadas em semi-espaços diferentes com relação a um plano. Sabendo que suas extremidades estão a uma distância de *8cm* do plano e que sua projeção ortogonal sobre ele mede *12cm*, obter a medida do segmento.

Exercício 2

Assinale a alternativa correta:

a) Se as projeções ortogonais de duas retas, sobre um plano, são paralelas, então as retas são paralelas.

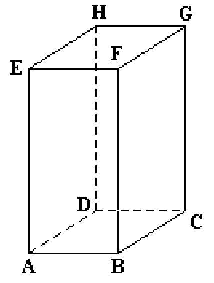
b) Se as projeções ortogonais de duas retas, sobre um plano, são concorrentes, então as retas são concorrentes.

c) Se um ângulo reto tem um lado paralelo ao plano de projeção e o outro lado não perpendicular a esse plano, então a projeção ortogonal desse ângulo, sobre o plano, é um ângulo reto.

d) Se as projeções ortogonais de duas retas, sobre um plano, são uma reta, então as retas são paralelas.

Exercício 3

Considere o bloco retangular onde $AE = 8cm$, $FE = 6cm$ e $EH = 5cm$. Determine a distância entre as retas reversas *CG* e *AB* e entre as retas reversas *AD* e *GH*.



Exercício 4

Sejam r e s duas retas distintas. Podemos afirmar que sempre:

a) Existe uma reta perpendicular a r e a s.

b) r e s determinam um único plano.

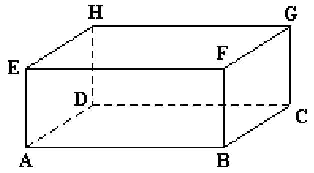
c) Existe um plano que contém s e não intercepta r.

d) Existe uma reta que é paralela a r e a s.

e) Existe um plano que contém r e um único ponto de s.

Exercício 5

A figura ao lado representa um bloco retangular em que $ADHE$ é um quadrado de lado medindo 2, calcule a distância entre as retas AD e EF e entre as retas AB e DH.



REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Thèse d'universite l'ordinateur, outil d'aide à l'apprentissage de la demonstration et de traitement de données didactiques.** Lylle. França, 1992.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ARSAC, G.. **Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France**. RDM, vol. 9, n. 3, 1988.

BALACHEFF, N. **Preuve et démonstration au collège**. RDM, n.3, 1982, p. 261-304.

BALLORE, R. M. **Cours de Mathématiques.** Collection Ch. De Comberousse. Tome deuxième, première partie, septième edition. Gauthier-Villars, imprimeur-éditeur. Paris, 1941.

BARBOSA, J. L M. **Geometria Euclidiana Plana**. Coleção do Professor de Matemática; SBM – Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2000.

BARBOSA, R. e CÂNDIDO, S. L. **Geometria I.** Coleção Prática Pedagógica, volume 2, Matemática – Ensino Médio. Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, CENP, São Paulo, 1998.

BASTIAN, I. V. **O Teorema de Pitágoras**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC/SP, 2000, 235f.

BIANCHINI, E. **Matemática 8ª série**. 4ª edição. São Paulo: Moderna, 1996.

BIGODE, A. J. L. **Matemática atual.** 8ª série. São Paulo: Atual Editora, 1994.

BKOUCHE, R. **De la démonstration**. IREM de Lille, 1989.

BKOUCHE, R. **Enseigner la géometrie, pourquoi?** IREM de Lille. Repères n. 1, 1990, p. 92-102.

BKOUCHE, R. **Variations sur les liens entre le géométrique et le numérique: Autour du théorèma de Thalès.** França: IREM de Lille. Bulletin Inter IREM, Commission Premier Cycle, 1994.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1996, 2.ed..

BROUSSEAU, G. **Les obstacles épistemologiques et les problèmes en mathématiques.** RDM,vol. 4, nº 2, 1983.

BROUSSEAU, G. **Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques.** França: *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 7, n° 2, pp. 33-115, 1986.

BROUSSEAU, G. **Promenade avec Thalès, de la Maternelle à l`Université. du théorèma de Thalès.** França: Bulletin Inter IREM, Commission Premier Cycle, 1995.

CAMPOS, T. M. M. (coord.). PROGRAMA PRÓ-CIÊNCIAS – Matemática: Geometria. São Paulo: PUC. (1997). CAPES. FAPESP. SEE-SP. SEMTEC. Projeto concluído.

CÂNDIDO, S. L. **Formas num Mundo de Formas.** São Paulo: Moderna, 1997.

CARVALHO, P. C. P. **Introdução à Geometria Espacial**. Rio de Janeiro: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 1999. Coleção do Professor de Matemática.

DOLCE, O. e POMPEO, J. N. (1985). *Geometria Espacial*. Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, volume 10. Atual Editora. São Paulo.

DOLCE, O. e POMPEO, J. N. **Geometria Plana.** São Paulo: Atual, 1985. Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, v.9.

DUVAL, R. **Registres de répresentation sémiotique et fonctionnement congnitif de la pensée.** In: Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. IREM de Strasbourg , 1993, v.5, p. 37-65.

DUVAL, R. **Sémiosis et Pensée Humaine: registros sémiotiques et apprentissages intellectuels.** Paris: Peter Lang, 1995.

EVES, H. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Geometria.** Tradução: Hygino H. Domingues.São Paulo: Atual, 1992.

FARIAS, L.M.S.: **Étude des interrelations entre les domaines numérique, algébrique et géométrique dans l'enseignement des mathématiques au secondaire: Une analyse des pratiques enseignantes en classes de troisième et de seconde**. Thèse de Doctorat, Université de Montpellier 2, France 2010.

FETISSOV, A. I. **A Demonstração em Geometria.** São Paulo, Atual. Série Russa.

GIORGIUTTI, I. et al. **La démonstration écrire des mathématiques au collège et au lycée.** Paris: Hachette éducation, 1998.

GONÇALVES JR, O. **Geometria Plana e Espacial.** São Paulo: Scipione, 1988. São Paulo. Coleção Matemática por Assunto, v.6.

GONZÁLEZ, R. L. (coord.). **Proporcionalidad Geometrica y Semejanza.** Madrid: Sintesis, 1990.

GOUVÊA, F. A. T. **Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC/SP, 1998. 194 f..

GRENOBLE, Université Joseph Fourier. Instituté d`Informatique et de Mathématiques Aplliqués de Grenoble, (IMAG). **Cabri-classe Apprendre la géometrie avec un logiciel.** *Didatech*- Laboratoire de Strutures Discrètes e de didactique (LSD2). Editions Arquimede.

HARUNA, N. C. A. **Teorema de Thales: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC/SP, 2000, 235f..

HOUDEBINE, J. **Démontrer ou ne pas démontrer, voilà la question.** IREM de Rennes. Repères n. 1, p. 5-27. Rennes, 1990.

IMENES, L. M. e LELLIS, M. **Matemática. 7ª série.** São Paulo: Scipione, 1997.

IMENES, L. M. e JAKUBOVIC J. e LELLIS, M. **Geometria.** São Paulo: Atual, 1992. Coleção Para que Serve a Matemática.

IREM. **Mathématiques approche par des textes historiques**, jan 90, université Paris VII, .

LAKATOS, I. **Preuves et réfutations**. Paris: Hermann, 1985.

LEME DA SILVA, M. C. et al. **Explorando Conceitos da Geometria Elementar com o Software Cabri Géomètre**. São Paulo: EDUC, 1998.

LIMA, E. L. (1991). **Medida e Forma em Geometria.** Rio de Janeiro: SBM, 1991. Coleção do Professor de Matemática.

LINDQUIST, M. M. e SHULTE, A. (org.) **Aprendendo e Ensinando Geometria.** São Paulo: Atual, 1994.

LORENZATO, S. (1995). **Por que não ensinar Geometria**. In: A Educação Matemática em Revista. SBEM, 1995, n. 4, p. 3-13.

MABUCHI, S. T. **Transformações geométricas : a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC/SP, 2000. 201 f.

MACHADO, A. S. **Áreas e Volumes**. São Paulo: Atual, 1988. Coleção Temas e Metas, v.4.

MAIOLI, M. **Uma oficina para formação de professores com enfoque em quadriláteros.** Dissertação (mestrado em Educação Matemática) PUC/SP, 2002.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências**. In: Revista Zetetiqué, nº l. Campinas: UNICAMP, 1993, p. 7-17.

PIAGET, J. **Para onde vai a educação?** Rio de Janeiro: José Olympio, 1988, 10ª ed.

MARMO, C. M. B. **Curso de Desenho. Livro 1: Construções Fundamentais.** São Paulo: Moderna, 1964.

MARMO, C. M. B. **Curso de Desenho. Livro 2: Métodos I.** São Paulo: Moderna Ltda, 1964.

MOISE, E. E. e DOWNS Jr, F. L. **Geometria Moderna.** Tradução: Renate G. Watanabe e Dorival A. Mello. São Paulo: Edgard Blücher, 1971.

MEC. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental-Matemática.** Brasília, 1998.

QUINTELA, A. **Matemática**. Terceiro ano. São Paulo: Nacional, 1945.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. SBM – Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro.

ROXO, THIRÉ, MELO e SOUZA. **Matemática ginasial.** 3ª série. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1944.

SANGIACOMO, L. et. Al. **Geometria Plana com Cabri Géomètre: Diferentes Metodologias**. São Paulo: Proem, 1999.

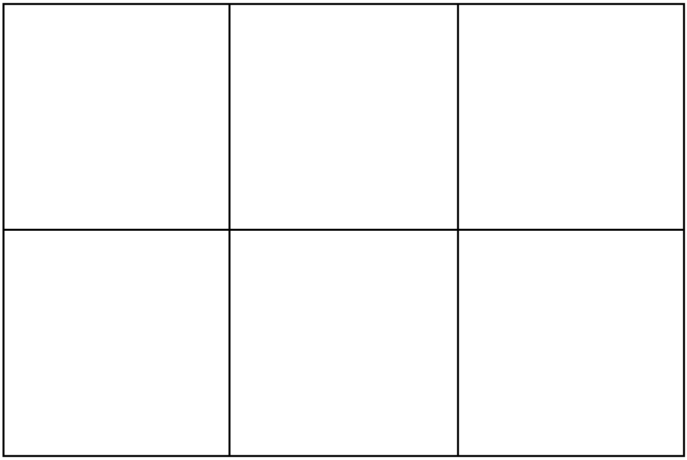
SANGIACOMO, L. et al. **Explorando Geometria Elementar com o Dinamismo do Cabri Géomètre**. São Paulo: Proem, 1999.

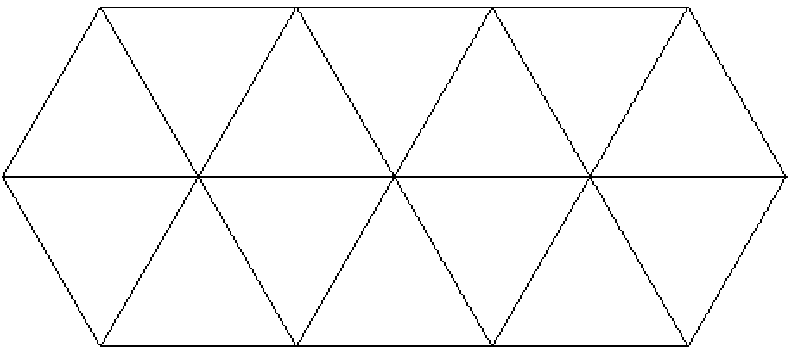
SANGIORGI, O. **Matemática, curso ginasial**. 3ª série. São Paulo: Nacional, 1958.

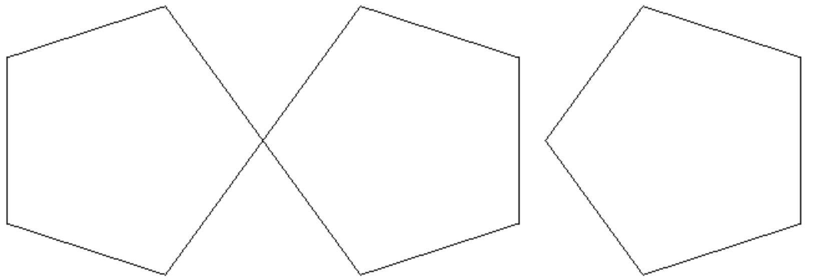
SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. (1991). **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática.** 1° grau. 4ª edição. SE / CENP. São Paulo. SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. (1994). *Experiências matemáticas* – 5ª a 8ª série. São Paulo.

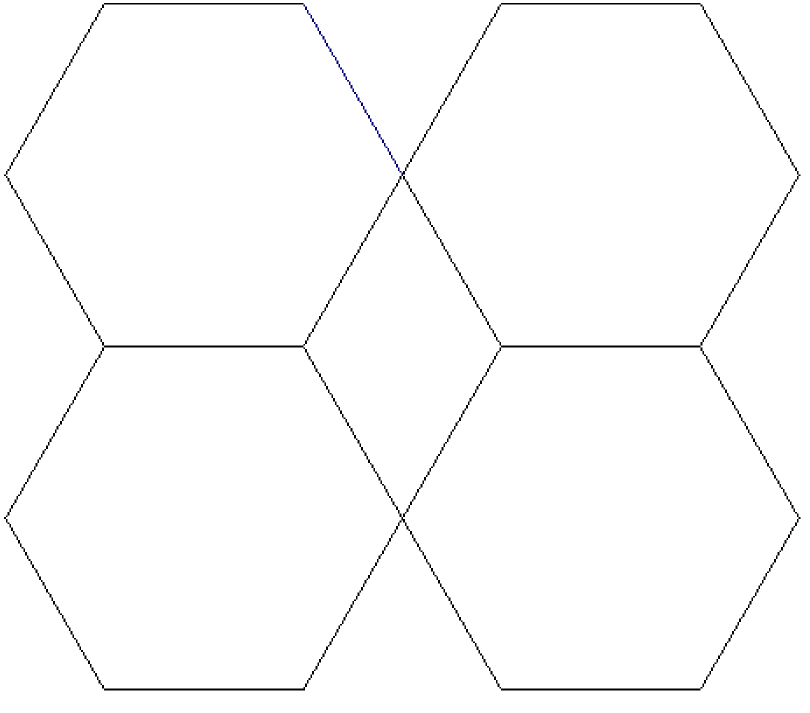
SILVA, M. J. F. et al. **Explorando conteúdos do ensino médio e fundamental.** São Paulo: PROEM, 2000.WAGNER, E. **Construções Geométricas.** Rio de Janeiro: SBM, 2000. Rio de Janeiro. Coleção do Professor de Matemática.

APÊNDICE 01: Material do módulo 02 – ângulo

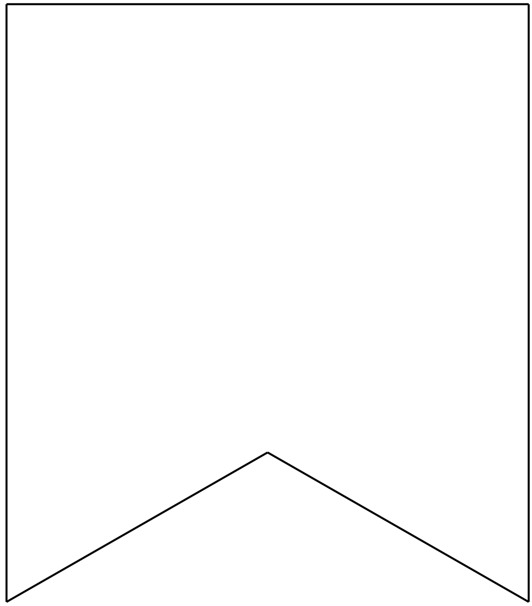


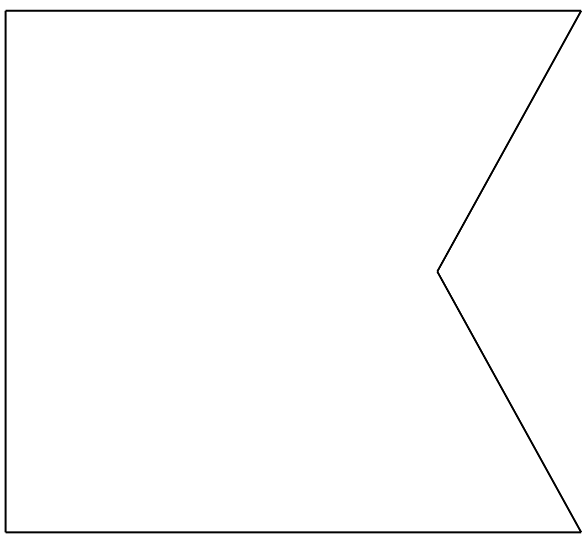




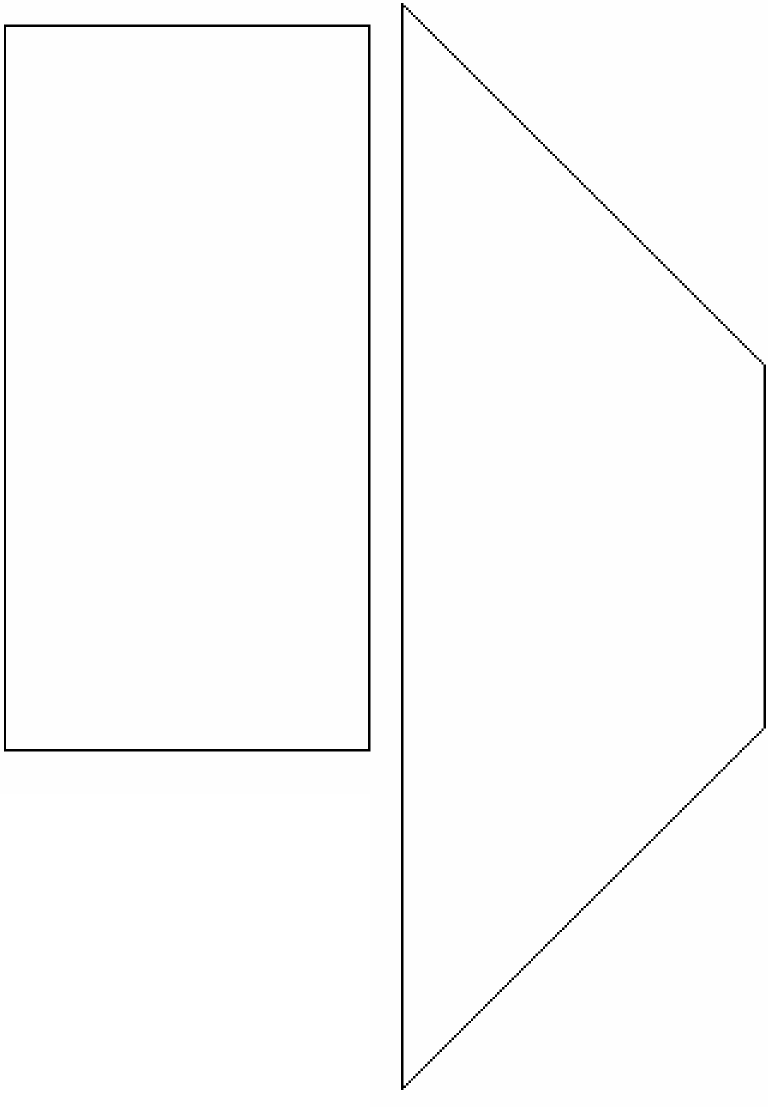


APÊNDICE 02: Figuras para a atividade 1 – exercício 3 – módulo 5

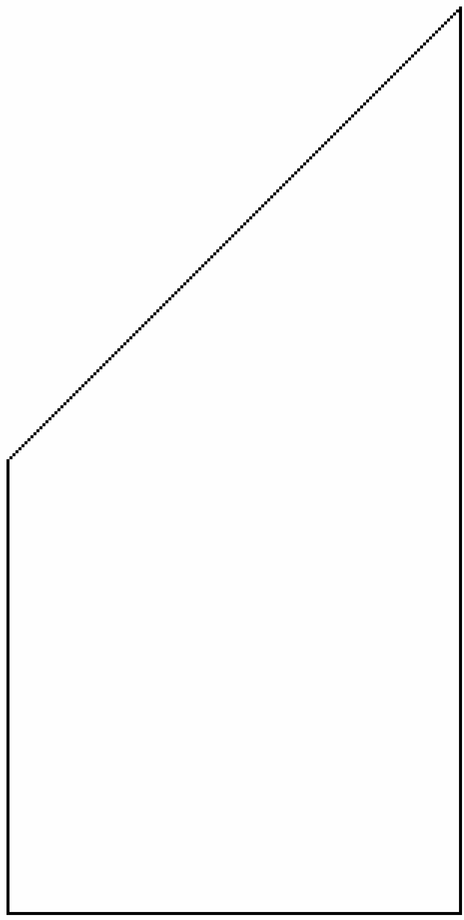


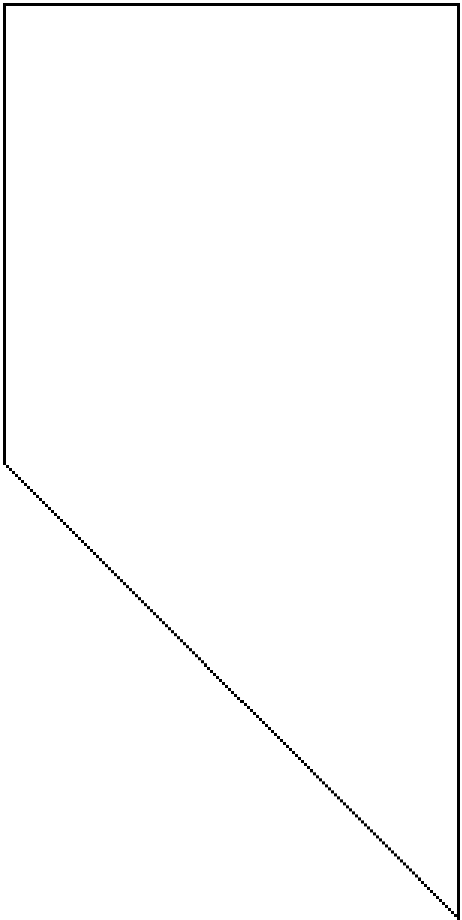


APÊNDICE 03: figuras da atividade 01 – exercício 4, módulo 5

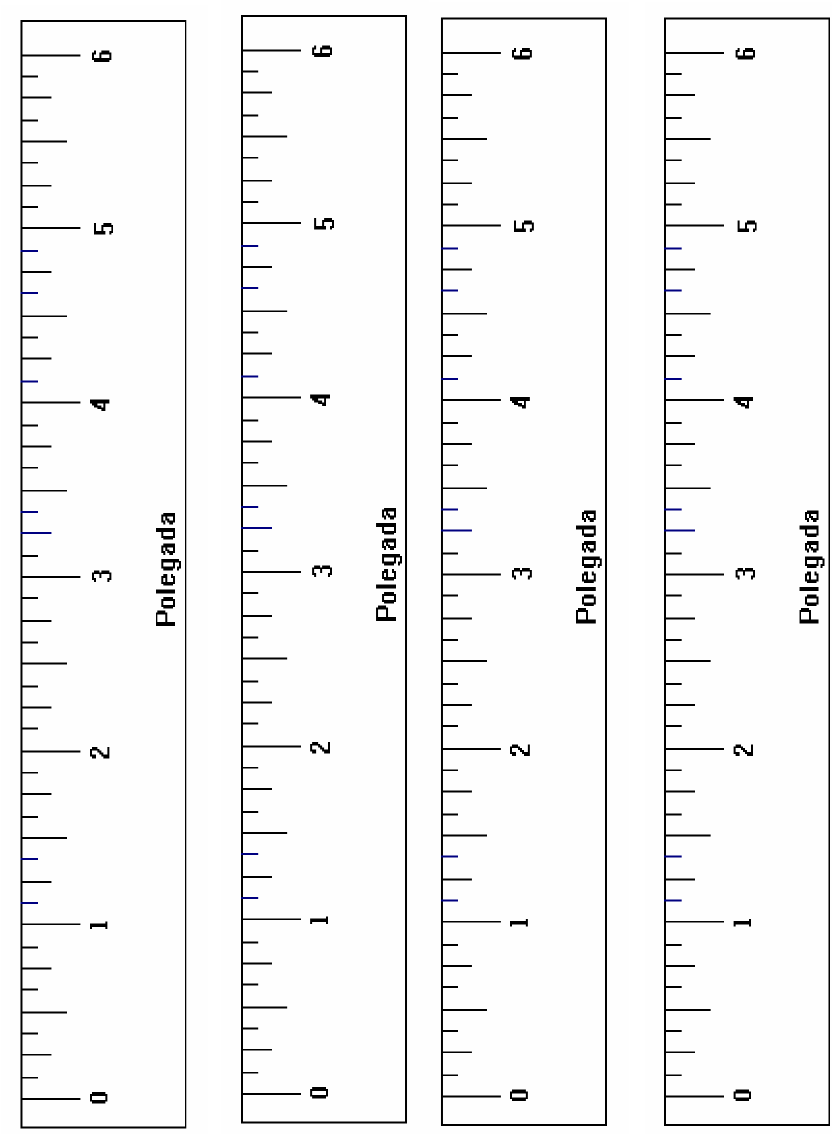


APÊNDICE 04: figuras da atividade 1 – exercício 5, módulo 5

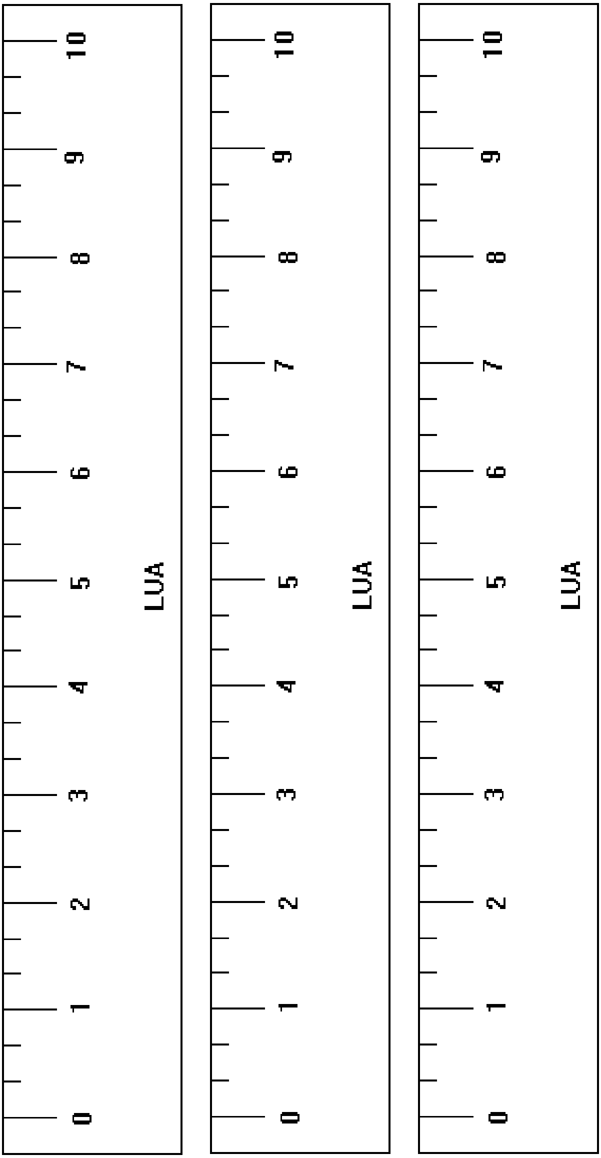




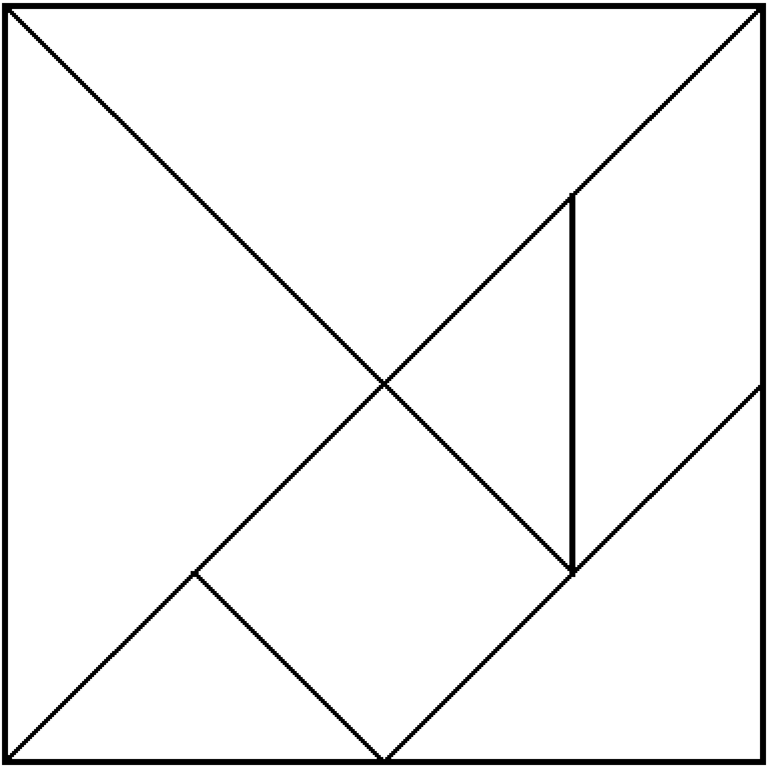
APÊNDICE 05: réguas em polegadas – atividade 03 – módulo 05



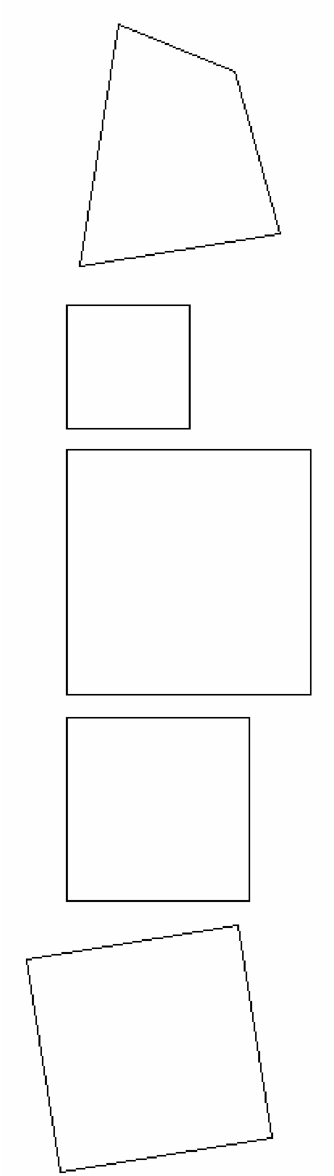
APÊNDICE 06: réguas em luas – atividade 03 – módulo 05

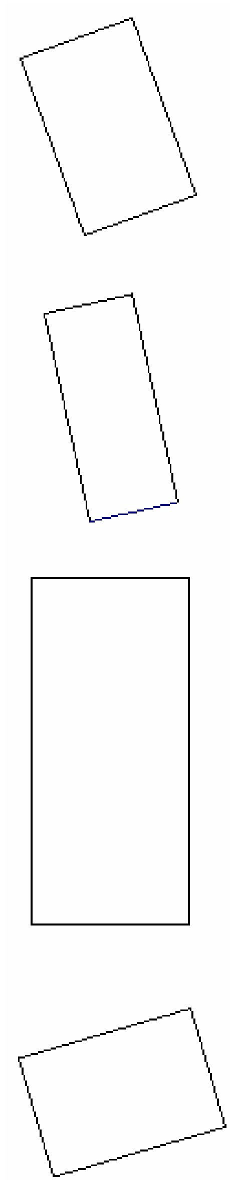


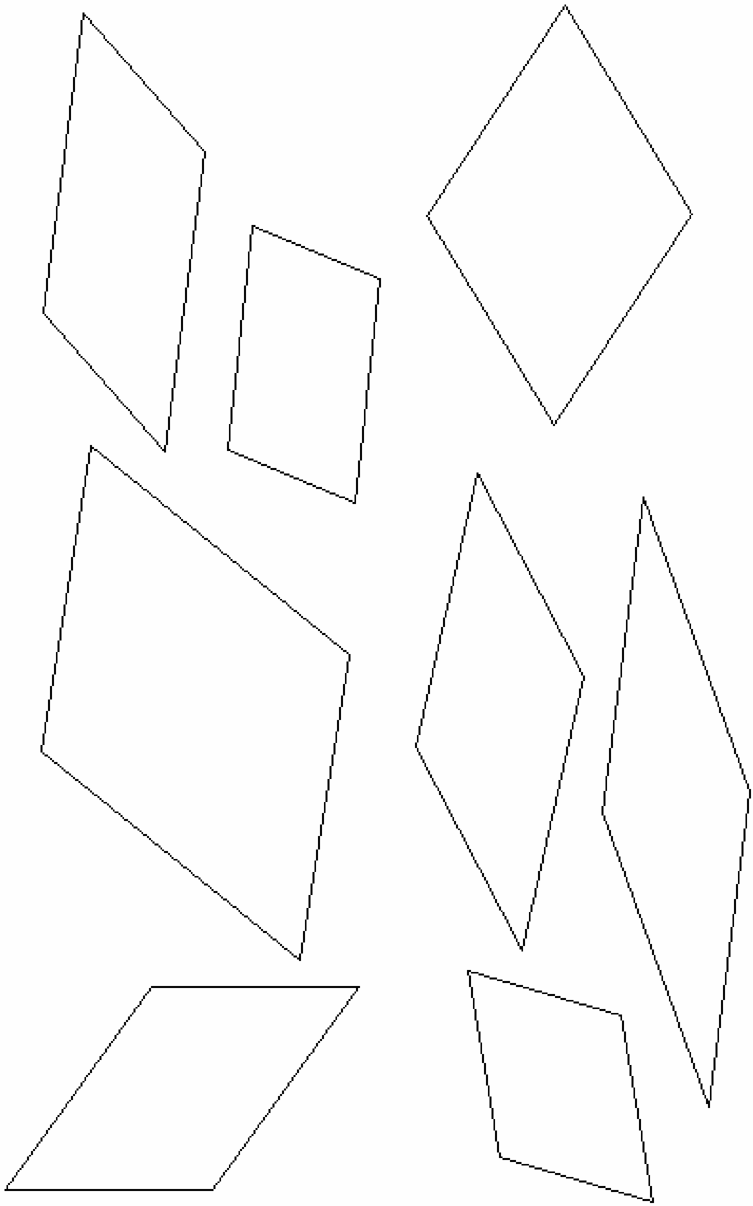
APÊNDICE 07: tangran – atividade 05 – módulo 05

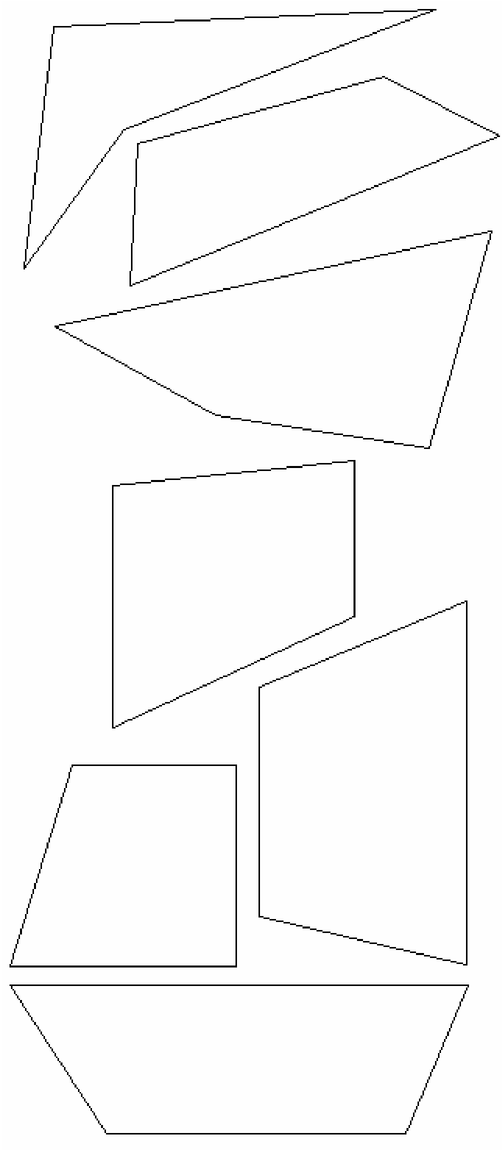


APÊNDICE 08: material da atividade 01 – módulo 07

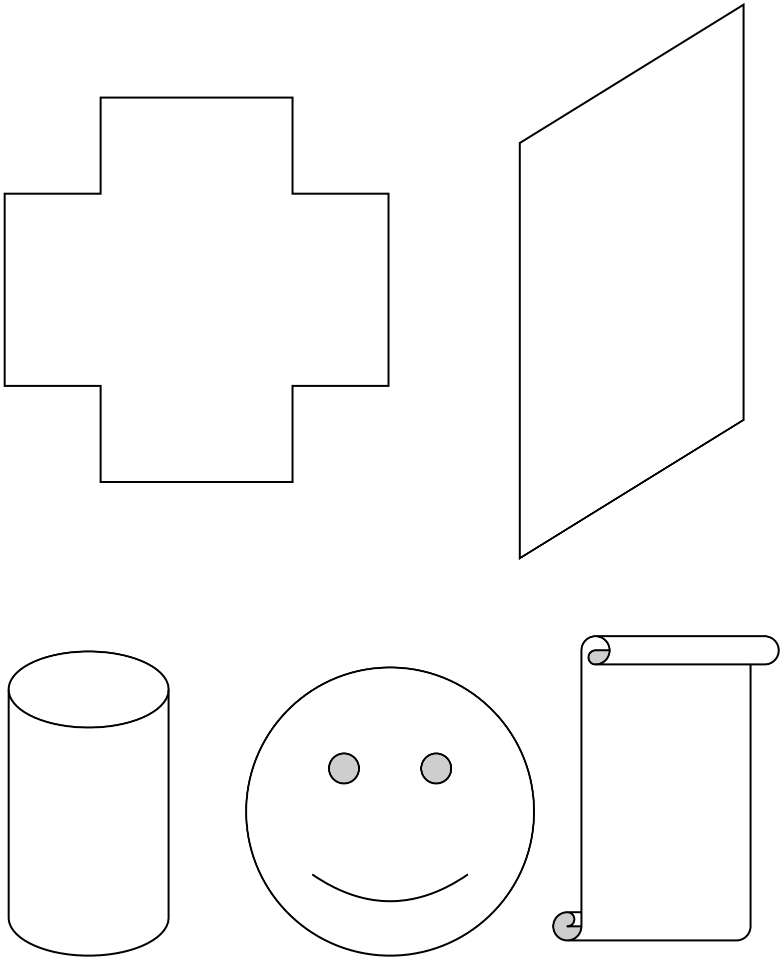


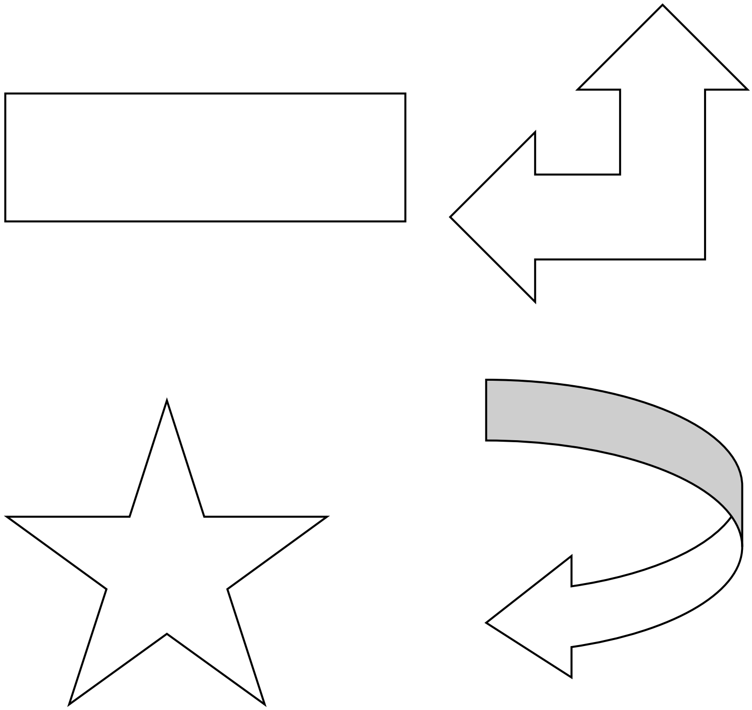




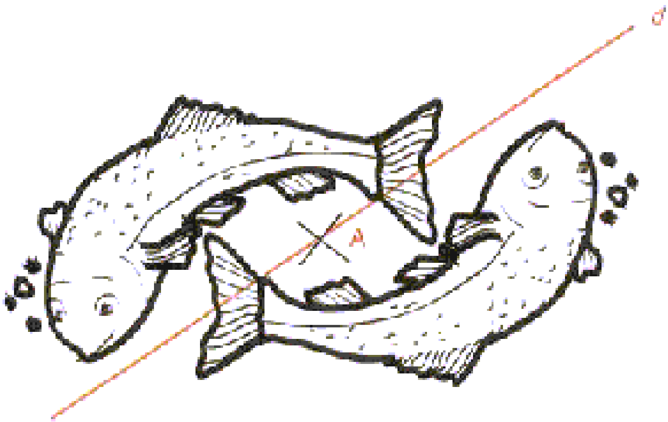


APÊNDICE 09: figuras da atividade 01 de simetria axial – módulo 11

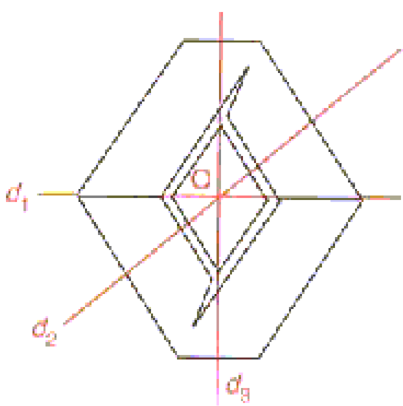




APÊNDICE 10: figuras da atividade 01 de simetria central – módulo 11

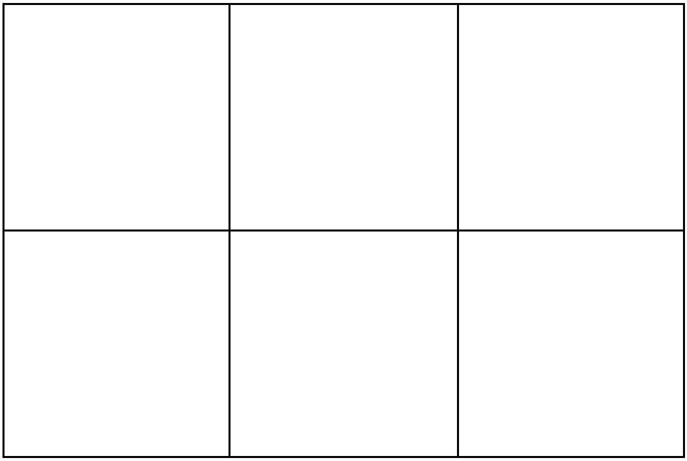


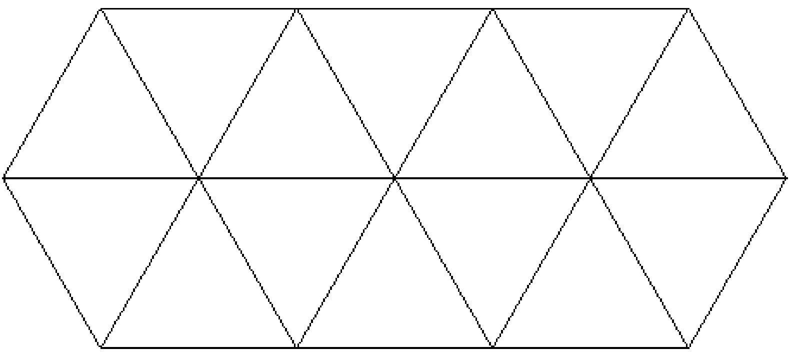
Desenho 1: Peixes

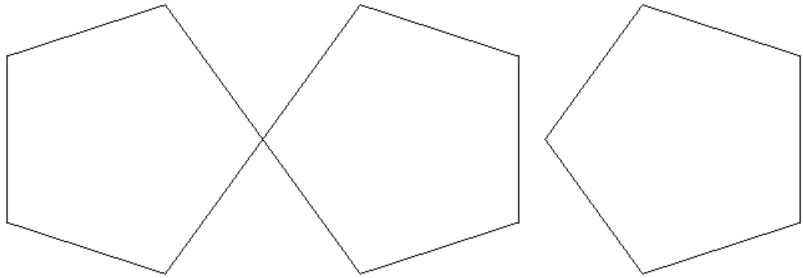


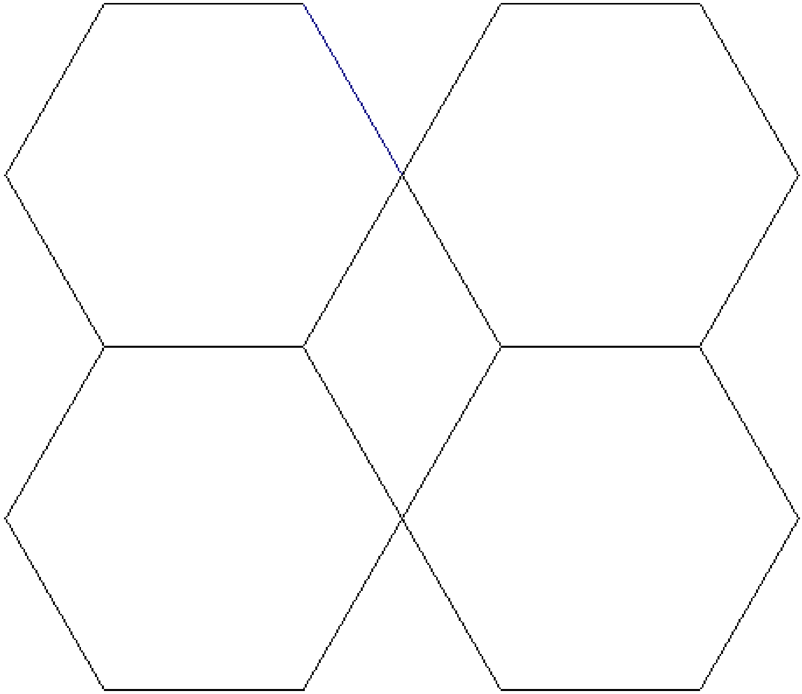
Desenho 2: Logotipo da Renault

APÊNDICE 11: figuras da atividade 07 – módulo 14









COLOFÃO

Formato	160 x 220 mm
Tipografia	Times New Roman e Bookman Old Style
Papel	Miolo Alta Alvura 75 g/m² Capa Cartão Supremo 300 g/m²
Impressão	EDUFBA
Capa e Acabamento	Bigraf
Tiragem	300 exemplares