



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - IME
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

GEOMETRIA FRACTAL E ATIVIDADES PARA O ENSINO DE
MATEMÁTICA: DEGRAUS FRACTAIS
E ESPONJA DE MENGER

MARCUS VINÍCIUS OLIVEIRA LOPES DA SILVA

Salvador - Bahia
Setembro de 2020

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Universitário de Bibliotecas (SIBI/UFBA),
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Silva, Marcus Vinícius Oliveira Lopes da
Bibliotecas Universitárias da UFBA: Geometria
Fractal e Atividades para o Ensino de Matemática:
Degraus Fractais e Esponja de Menger. / Marcus
Vinícius Oliveira Lopes da Silva. -- Salvador, 2020.
73 f. : il

Orientador: Simone Maria de Moraes.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional - PROFMAT) -- Universidade Federal da
Bahia, Instituto de Matemática e Estatística, 2020.

1. Geometria fractal. 2. Degraus fractais.
3. Esponja de Menger. 4. Ensino de Matemática. I.
Marcus Vinícius Oliveira Lopes da Silva. II.
Universidade Federal da Bahia, Programa de Pós-
Graduação em Matemática. III. Título.

GEOMETRIA FRACTAL E ATIVIDADES PARA O ENSINO DE
MATEMÁTICA: DEGRAUS FRACTAIS
E ESPONJA DE MENGER

MARCUS VINÍCIUS OLIVEIRA LOPES DA SILVA

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof.a. Dr.a. Simone Maria de Moraes

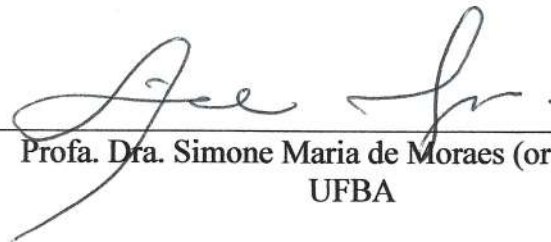
Salvador - Bahia
Setembro de 2020

Geometria Fractal e Atividades para o Ensino de Matemática:
Degraus Fractais e Esponja de Menger

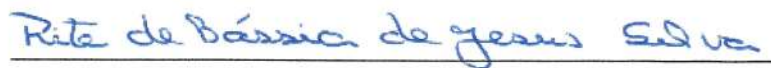
Marcus Vinicius Oliveira Lopes da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 02/09/2020.

Banca Examinadora:



Prof. Dra. Simone Maria de Moraes (orientadora)
UFBA



Prof. Dra. Rita de Cássia de Jesus Silva
UFBA



Prof. Dra. Eliane Costa Santos
UNILAB

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha mãe, Maria Raimunda, pelo grande suporte e inesgotável amor; a meu pai, Geraldo, por ser meu exemplo de excelência e segurança; aos meus irmãos Gabrielle e Gabriel, por sempre estarem por perto desde o berço; a minha tia Aldirene, por me ensinar a enxergar as cores da vida; a minha tia Cida, grande exemplo para mim e para toda a família.

A meu marido Sanio Santos da Silva, que me ensina a viver e me permite ser feliz ao lado dele todos os dias.

A Thalita Lírio, Larissa Freitas e Tainá Cavalcante, que me apoiam incondicionalmente e fazem da minha vida muito mais completa.

A meus amigos Ana Flávia, Daniela Cunha, Fábio Nascimento, Fabíola Borges, Vivia Santana e Zafira Gurgel, por terem tornado meus dias mais leves e meus problemas superáveis.

A meus amigos Bruna Chaves, Luiz Cordeiro, Heinz Gruger e Patrick dos Santos, por fazerem parte de minha vida por tanto tempo.

A meus colegas do PROFMAT Alex, Alfano, Cláudio, Diego, Gabriel, Isana, Lucas, Marcelo, Thiago, Thyago cuja união garantiu que todos nós trilhássemos juntos o caminho do sucesso.

Aos meus alunos da *Escola Municipal Santa Rita* e do *Colégio Estadual Pinto de Aguiar* por terem aceitado o desafio das oficinas e terem alcançado um êxito maior do que era esperado.

A CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) por ter me apoiado financeiramente durante minha jornada acadêmica.

Em especial a minha orientadora Professora Doutora Simone Maria de Moraes, pelo imenso empenho, apoio, ideias e paciência. Nada disso seria possível sem você. Muito obrigado!!

RESUMO

SILVA, Marcus Vinícius Oliveira Lopes da, M,Sc., Universidade Federal da Bahia, abril 2020. **Geometria Fractal e Atividades para o Ensino de Matemática: Degraus Fractais e Esponja de Menger**. Orientadora: Simone Maria de Moraes.

Nesta dissertação elaboramos atividades didáticas a serem aplicadas em aulas de Matemática do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio. Iniciamos o trabalho estudando a **Geometria Fractal**, através de seus aspectos históricos e conceituais, em seguida passamos a aplicações desta geometria em outras ciências e em atividades de ensino de Matemática. Também dedicamos uma parte da dissertação ao estudo de estruturas fractais atendonos às particulares características geométricas de comprimento, área, volume e às características fractais de auto similaridade e dimensão fractal. Concluímos apresentando as atividades didáticas, *Oficina Degraus Fractais* e *Oficina Esponja de Menger*. Na primeira atividade utilizamos a técnica de dobraduras e cortes para construir degraus tridimensionais, cujos tamanho e forma possibilitam uma riqueza de possibilidades. Já na segunda atividade através da técnica japonesa de dobradura de papel, origami, construímos a estrutura cúbica da esponja de Menger, estrutura concebida pelo matemático austríaco *Karl Menger* em 1926.

Palavras-chave: Geometria fractal, degraus fractais, esponja de Menger, ensino da Matemática.

ABSTRACT

SILVA, Marcus Vinícius Oliveira Lopes da, M,Sc., Universidade Federal da Bahia, April, 2020. **Fractal Geometry and Mathematics Teaching Activities: Fractal Steps and Menger's Sponge**. Adviser: Simone Maria de Moraes.

In this dissertation we elaborate didactic activities to be applied in Mathematics classes of Elementary School and High School. We started the work studying **Fractal Geometry**, through its historical and conceptual aspects, then we started to apply this geometry in other sciences and in Mathematics teaching activities. We also dedicate part of the dissertation to the study of fractal structures taking into account the particular geometric characteristics of length, area, volume and the fractal characteristics of self-similarity and fractal dimension. We conclude by presenting the didactic activities, *Fractal Steps Workshop* and *Menger's Sponge Workshop*. In the first activity, we used the folding and cutting technique to build three-dimensional steps, whose size and shape enable a wealth of possibilities. In the second activity using the Japanese paper folding technique, origami, we built the cubic structure of Menger's sponge, a structure designed by the Austrian mathematician *Karl Menger* in 1926.

Key words: Fractal geometry, fractal steps, Menger's sponge, Mathematics teaching.

LISTA DE FIGURAS

1	Desempenho de Matemática do Brasil no PISA 2003-2018	3
1.1	Ilha de Enmedio, zonas húmidas de El Odiel, Huelva	7
1.2	Johannes Kepler e Galileo Galilei	8
1.3	Curva de Weierstrass	8
1.4	Conjunto de Cantor	9
1.5	Construção de um curva de Peano	9
1.6	Construção da curva de Hilbert por iterações	9
1.7	Construção da curva de Koch	10
1.8	Conjunto de Julia $z^2 - 1$	10
1.9	Conjunto de Mandelbrot	11
1.10	Benoit Mandelbrot	11
1.11	Brócolis romanesco	15
1.12	Ampliação do brócolis romanesco	16
1.13	Uma reta e uma curva de Koch - objetos unidimensionais	17
1.14	Segmento e quadrado divididos	17
1.15	Análise do comportamento da Esponja de Menger durante a ampliação	18
1.16	Vista aérea da aldeia de Logone Birni	19
1.17	Modelo fractal utilizado na construção do palácio da aldeia Logone Birni	20
1.18	Palácio da aldeia de Logone Birne	20

1.19	Vista aérea do povoado de Ba-ila	21
1.20	Processo recursivo na criação da estrutura do povoado de Ba-ila	21
1.21	Exemplo de fractais em um penteado trançado e em um cobertor	22
1.22	Ilha de Minkowski	22
1.23	Antena Patch baseada na ilha de Minkowski	23
1.24	Ramificações do sistema circulatório	23
1.25	Ramificações do sistema respiratório	24
1.26	Célula do câncer de mama em seu estágio de rigidez	24
1.27	Modelo da pipa tetraédrica construída por Graham Bell	25
1.28	Pirâmide de Sierpinski	26
1.29	À esquerda modelo utilizado na construção da pipa e à direita demonstração da sua funcionalidade durante o campeonato	26
1.30	Triângulo e tapete de Sierpinski na primeira iteração	27
1.31	Árvore fractal pelo software <i>the geometers Sketchpad</i>	27
1.32	Processo de construção da árvore fractal através de colagens	28
1.33	Primeiras iterações do pentágono de Sierpinski	29
1.34	Análise do fator de redução p em relação ao lado AB para obtenção do valor da dimensão fractal	29
2.1	Gráfico de uma função de Weierstrass com a auto similaridade	31
2.2	Construção do conjunto de Cantor	33
2.3	Passos da construção da curva de Peano	35
2.4	Passos da construção da curva de Hilbert	37
2.5	Passos da construção da curva de Koch	38
2.6	Passos da construção do floco de neve de Koch	40
2.7	Passos da construção do triângulo de Sierpinski	42
2.8	Triângulo de Pascal	43
2.9	Números do triângulo de Pascal no triângulo de Sierpinski	44
2.10	Passos da construção do tapete de Sierpinski	44
2.11	Passos da construção da esponja de Menger	46
2.12	Esponja de Menger na 1 ^a e 2 ^a iterações	47

3.1	Folha após ser realizada a 1 ^a dobra	51
3.2	Folha após ser realizada a 2 ^a dobra	52
3.3	Folha após ser realizada a 3 ^a dobra	52
3.4	Folha após ser realizada a 4 ^a dobra	52
3.5	Folha após ser realizada a 5 ^a dobra	53
3.6	Folha após ser realizada a 6 ^a dobra e o degrau fractal	53
3.7	Degrau fractal com fundo colorido	54
3.8	Folha de papel com quadrado traçado	57
3.9	Dobradura do quadrado pela diagonal	57
3.10	Quadrado após ser realizada a 2 ^a dobra	57
3.11	Quadrado após ser realizada a 3 ^a e 4 ^a dobras	58
3.12	Dobraduras na diagonal do quadrado	58
3.13	Dobradura na bissetriz de um dos ângulos	58
3.14	Dobradura para a posição do 3^o Passo	59
3.15	Dobradura formando dois triângulos	59
3.16	Triângulos formando um paralelogramo	59
3.17	Formando um quadrado	60
3.18	Peças para construção do modelo - parte 1	60
3.19	Peças para construção do modelo - parte 2	60
3.20	Peças para construção do modelo - parte 3	61
3.21	Montagem do cubo	63
3.22	Dobradura das peças restantes após a montagem do cubo	63
3.23	Folhas dobradas pelos alunos	64
3.24	Início da montagem da 1 ^a iteração da esponja de Menger	64
3.25	A precisão das dobras iniciais garante um melhor encaixe das peças	65
3.26	A cada momento é verificada a precisão dos encaixes	65
3.27	Inicialmente as esponjas de Menger foram montados em trios	66
3.28	Primeira esponja de Menger a ser finalizada	66
3.29	Esponja de Menger vista de cima	67
3.30	Outra perspectiva da esponja de Menger	67

SUMÁRIO

Resumo	iii
Abstract	iv
Introdução	2
1 Geometria Fractal	6
1.1 Aspectos Históricos da Geometria Fractal	6
1.1.1 Primórdios da Geometria	6
1.1.2 Cronologia	7
1.1.3 A Geometria Fractal de Mandelbrot	11
1.2 Característica de um Fractal	14
1.2.1 Auto Similaridade	15
1.2.2 Iteração Infinita	15
1.2.3 Dimensão Fractal	16
1.3 Aplicações da Geometria Fractal	18
1.3.1 Fractais na Música	18
1.3.2 Fractais na Arquitetura e em Culturas Africanas	19
1.3.3 Fractais na Fabricação de Antenas	22
1.3.4 Fractais na Biologia	23

1.4	Aplicações da Geometria Fractal nos Ensinos Fundamental e Médio . . .	25
1.4.1	Pipa Tetraédrica	25
1.4.2	Jogos de Dardo	26
1.4.3	Árvore Fractal	28
1.4.4	Dimensão do Pentágono de Sierpinski	29
2	Tipos de Fractais	30
2.1	A Função de Weierstrass	30
2.2	Conjunto de Cantor	31
2.2.1	Construção do Conjunto de Cantor	32
2.2.2	Propriedades do Conjunto de Cantor	33
2.3	Curva de Peano	35
2.3.1	Construção da Curva de Peano	35
2.3.2	Curva de Hilbert	36
2.4	Curva de Koch	38
2.5	Floco de Neve de Koch	39
2.6	Estruturas de Sierpinski	41
2.6.1	Triângulo de Sierpinski	41
2.6.2	Tapete de Sierpinski	44
2.7	Esponja de Menger	45
2.7.1	Volume da Esponja de Menger	46
2.7.2	Área da Esponja de Menger	46
3	Oficinas	49
3.1	Oficina 1 - Degraus Fractais	49
3.1.1	Preliminares	50
3.1.2	Indicações para o Professor	50
3.1.3	Realização da Oficina	51
3.1.4	Atividades a partir da Oficina Degraus Fractais	54
3.1.5	Considerações sobre a aplicação da Oficina	55

3.2	Oficina 2 Esponja de Menger através de Origami	55
3.2.1	Preliminares	55
3.2.2	Indicações para o Professor	56
3.2.3	Realização da Oficina	57
3.2.4	Atividades a partir da Oficina Esponja de Menger.	61
3.2.5	Considerações sobre a aplicação da Oficina	62
	Considerações Finais	68
	Referências Bibliográficas	70

INTRODUÇÃO

Na medida em que nos desenvolvemos como profissionais de ensino na rede pública, em especial do ensino de Matemática, nos deparamos com a desafiadora tarefa de mantermos este ensino desafiador, inovador e instigante. Com o avanço tecnológico e o imediatismo juvenil, as antigas metodologias para o ensino de Matemática muitas vezes não são eficazes ou suficientes para que o ensino ocorra de maneira eficiente.

O professor, vivenciando a realidade do ensino e muitas vezes trabalhando em situações precárias, para conseguir a atenção e dedicação dos alunos necessita aliar diferentes metodologias em sua prática de ensino, reinventando o modo de pensar a Matemática, para poder também mudar o modo de ensinar. Principalmente porque o professor tem o papel fundamental na inserção da Matemática na realidade dos seus alunos.

Durante os oito anos que vivenciei a realidade do ensino público, sempre inserido no ensino fundamental II, pude compreender o quão forte e significativo é o afastamento do estudante ao abstrato. O distanciamento entre os conteúdos que são ensinados nas salas de aula e com o que o estudante vê, sente e compreende do mundo fora da escola contribui não só no desinteresse à matemática, mas como também na desvalorização do ensino e no não reconhecimento dele como possibilidade de ascensão socioeconômica.

Quando me permiti a experienciar novas metodologias em minha prática, como o uso de oficinas e atividades que, além de não carregarem a abstração já rejeitada pelos alunos durante as aulas convencionais, tinham a leveza e a familiaridade com os conhecimentos prévios dos discentes, tornou-se nítido o que precisava ser feito. Esta mudança oportunizou que a compreensão dos conteúdos fosse alcançada com muito mais naturalidade e muito menos esforço, e por isso precisava estar inserida em cada etapa do processo de ensino-aprendizagem.

Novas formas de conduzir o ensino da Matemática se caracterizam como uma espécie de nova linguagem, a qual deve ser apresentada aos alunos como formas do pensar e agir utilizando os conceitos matemáticos. *Ole Skovsmose* reverbera esta ideia ao afirmar que:

“[...] introduzir uma nova linguagem significa criar novas perspectivas e novas racionalidades com que se tomam decisões. Quando descrevemos algo em termos matemáticos, criamos um novo modo de ver as coisas. Ações dependem das linguagens, e modificar uma linguagem implica modificar as formas de agir.” (Scovsmose, 2008, [29])

Também devemos considerar que as avaliações nacionais e internacionais indicam que o ensino de Matemática no Brasil e as estratégias didáticas precisam ser reavaliadas.

O *PISA*, *Programa Internacional de Avaliação de Estudantes* (Programme for International Student Assessment), um exame de conteúdo e competências básicas, aponta que em Matemática o país teve avanços consideráveis alcançados entre 2000 e 2009. Porém, na edição de 2018, em Matemática, o Brasil ficou com a colocação 70 dentre os 77 países participantes, mostrando uma estagnação na última década, como mostra o gráfico abaixo:

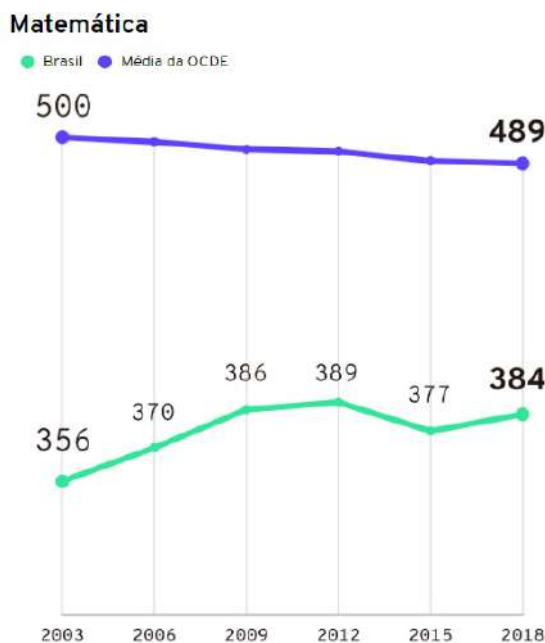


Figura 1: Desempenho de Matemática do Brasil no PISA 2003-2018
 Fonte: OCDE/Pisa 2018 Infográfico: Chantal Wagner/Gazeta do Povo

O desempenho do Brasil no PISA de 2015 nos mostra que nossos alunos estão abaixo da média dos alunos em países da *Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico* - OCDE, especificamente em Matemática o desempenho é de 377 pontos, comparados à média de 490 pontos.

Por outro lado, há várias discussões de como a atuação dos professores pode contribuir na melhoria da aprendizagem.

No texto *10 Questões para Professores de Matemática ... e como o PISA pode ajudar a Respondê-las*, originalmente publicado pela OCDE e publicado pelo IMPA em 2018, há uma discussão sobre estratégias de ensino direcionadas pelo aluno:

“Há décadas, especialistas em educação têm encorajado dar aos estudantes mais controle sobre seu próprio aprendizado; portanto, estratégias de ensino direcionadas pelo aluno estão cada vez mais encontrando seu espaço em salas de aulas de todas as disciplinas. Como o nome indica, estratégias de ensino direcionadas pelo aluno colocam o estudante no centro da atividade, dando a eles um papel mais ativo do que em estratégias tradicionais direcionadas pelo professor. Essas estratégias de ensino direcionadas pelo aluno podem incluir atividades como passar para os alunos projetos que podem levar uma semana ou mais, para que eles o façam em pequenos grupos através dos quais devem trabalhar juntos para resolver um problema ou completar uma tarefa.” (OCDE, 2018, [22])

Na perspectiva de apresentar propostas de mudança e de contribuir com o ensino de Matemática, nessa dissertação indicamos uma estratégia de ensino direcionadas pelo aluno a ser utilizada em aulas de Matemática.

Percebi na minha prática em ambas as escolas públicas em que atuo que, dentre os conteúdos matemáticos pertinentes ao ensino fundamental II, os conteúdos de Geometria eram constantemente negligenciados. Alunos continuavam a avançar as séries sem o domínio das noções geométricas básicas.

Desta forma, a ferramenta de trabalho escolhida foi a *Geometria Fractal*. Ela nos fornece abordagens distintas que podem ser utilizadas em diversos contextos, sobre conteúdos matemáticos do ensino fundamental, do ensino médio e do ensino superior. Através da desta geometria apresentamos duas atividades de ensino de Matemática, em que os alunos são os protagonistas e que possibilita que a compreensão e a apreensão dos conteúdos se dê de uma forma significativa coletiva e consciente.

No intuito de abordar os diversos aspectos da Geometria Fractal e apresentar organizadamente as atividades de ensino dividimos o trabalho em três capítulos.

Iniciamos com um capítulo sobre a *Geometria Fractal*, apresentamos aspectos históricos desta geometria, discorrendo da curva de Weierstrass, passando pelo conjunto de Cantor, as curvas de Peano, de Hilbert e de Koch, até os conjuntos de Julia e de Mandelbrot, em seguida passamos às características de um fractal e às aplicações tanto em outras ciências e como no ensino de Matemática.

Ainda no primeiro capítulo dedicamos um seção ao conjunto de Mandelbrot, destacando a forma com que o matemático *Benoit Mandelbrot*, considerado o pai da geometria fractal, conseguiu enxergar em todas as estruturas supracitadas um ponto em comum: a auto similaridade. Esta característica foi a chave para o desenvolvimento dos conceitos iniciais da geometria fractal.

Em seguida apresentamos as características fractais, a saber, auto similaridade, iterações infinitas e a dimensão fractal, aspectos estes que diferenciam os fractais de qualquer outra estrutura da geometria clássica e que proporcionam uma vastidão de comportamentos.

Nas aplicações da *Geometria Fractal* apresentamos diversos exemplos da utilização da geometria fractal e finalizamos apresentando trabalhos recentes de utilização desta geometria como metodologia para o ensino de Matemática.

Já no capítulo 2 fazemos uma descrição detalhada dos fractais geométricos clássicos apresentados na seção 1.1.2, em cada caso apresentamos o método de construção e informações obtidas em cada passo, destacamos as características fractais de auto-similaridade, iterações infinitas e calculamos a dimensão fractal. Além disso, calculamos comprimento de curvas, áreas de regiões limitadas e volumes de estruturas, afim de apontar características de cada fractal estudado.

O último capítulo da dissertação é dedicado às duas oficinas de ensino de Matemática, objeto central deste trabalho. A proposta é de que os alunos, que previamente instruídos sobre os fractais, sintam-se convidados a experimentar a Matemática estudada através da construção dos modelos selecionados: dos *Degraus Fractais* e da *Esponja de Menger*.

Cada um desses modelos possibilita a abordagem de conteúdos de diferentes níveis de ensino, tais como conceitos básicos e avançados da geometria plana e espacial, razão e proporção, progressões aritmética e geométrica e noções de limites, que como vimos no capítulo 2 são alguns dos conteúdos passíveis de serem trabalhados utilizando a geometria fractal como veículo de imersão.

As oficinas do capítulo 3 são apresentadas em separado, em cada uma iniciamos com as preliminares, fazendo uma breve descrição da atividade e de seus objetivos, indicamos o material necessário e o número de aulas para ser aplicada. Em seguida passamos às indicações ao professor, com sugestão de ações antes, durante e após a atividade. Finalmente passamos à descrição do passo a passo da oficina, com fotos indicando cada passo, também apresentamos ao final sugestão de questões de Matemática que podem ser abordadas com a aplicação da oficina.

CAPÍTULO 1

GEOMETRIA FRACTAL

Neste capítulo, perscrutaremos a **Geometria Fractal** desde aspectos históricos desta geometria, da curva de Weierstrass, passando pelo conjunto de Cantor, as curvas de Peano, de Hilbert e de Koch, até os conjuntos de Julia e de Mandelbrot, ainda apresentamos as características fundamentais de um fractal e finalizamos com aplicações tanto em outras ciências e como no ensino de Matemática.

As referências para este capítulo são [1], [3]-[17], [19], [20], [23]-[28], [30] e [31].

1.1 Aspectos Históricos da Geometria Fractal

1.1.1 Primórdios da Geometria

Desde os povos antigos até os dias de hoje, um dos alicerces do desenvolvimento social e científico da humanidade tem sido o constante desejo que o homem tem de compreender o que há ao seu redor. Para os matemáticos, esta compreensão sempre foi norteada pelo desejo de traduzir à linguagem matemática os mais diversos elementos, fenômenos e objetos encontrados na natureza ou construídos pelo homem.

Um dos mecanismos utilizados nesta tradução foi justamente a **Geometria Euclidiana**, a qual contribuiu imensamente no desbravamento de novos saberes, nos quais baseamos o nosso estudo de geometria atual. A geometria euclidiana foi a primeira linguagem matemática que propunha definir e analisar figuras como quadrados, triângulos, esferas, figuras estas, em sua grande maioria, provenientes da própria construção humana.

Euclides de Alexandria nasceu no século III a.C e é considerado o “*Pai da Geometria*”. Apesar de que a geometria já era um importante tópico no Egito antigo, foi com

Euclides que a geometria do Egito se tornou tão relevante. Através de simples definições, conhecidas como axiomas, e de afirmações que podiam ser provadas, chamadas de teoremas, Euclides conseguiu encadear e sintetizar estudos de diversos matemáticos que o precederam, como *Tales de Mileto*, *Pitágoras*, *Platão* entre outros.

Para Euclides o espaço era simétrico, geométrico e imutável, a solidez de sua geometria possibilitou importantes avanços em diversas áreas. A partir de seus ensinamentos foi possível desenvolver estudos de mecânica, aritmética e álgebra, do som, das harmonias musicais, da luz, da ciência atômica, da medicina e de vários outros campos da tecnologia e ciência.

Porém, para elementos naturais como as nuvens, as montanhas, as corredeiras dos rios, os galhos das árvores e a estrutura dos seres vivos, a geometria euclidiana permanecia sem possuir elementos que os representassem.



Figura 1.1: Ilha de Enmedio, zonas húmidas de El Odiel, Huelva
Fonte: <https://armoniafractal.blogspot.com/?m=0>

1.1.2 Cronologia

Séculos XVII e XVIII: Kepler, Galileu, Newton e Leibniz

Johannes Kepler (1571-1630) e *Galileu Galilei* (1564-1642)) na antiga astronomia iniciam o estudo dos comportamento e regularidades presentes na natureza, através da investigação do movimento.

Apoiados nos estudos de regularidades de movimentos e fenómenos naturais *Isaac Newton* (1643-1727) e *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646-1716) criaram o **Cálculo Diferencial e Integral**, com base na ideia de infinitésimo e de limite, descrevendo e formalizando em teoremas leis do mundo físico e natural, tornando a natureza de maneira espantosamente compreensível.



Figura 1.2: Johannes Kepler e Galileo Galilei

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler e
<https://www.thoughtco.com/galileo-galilei-biography-1991864>

Séculos XIX e XX: Weierstrass, Cantor, Peano, von Koch, ... Mandelbrot

Em 1872 *Karl Weierstrass* (1815-1897) exhibe a primeira função contínua, que não admite derivada em nenhum dos seus pontos.

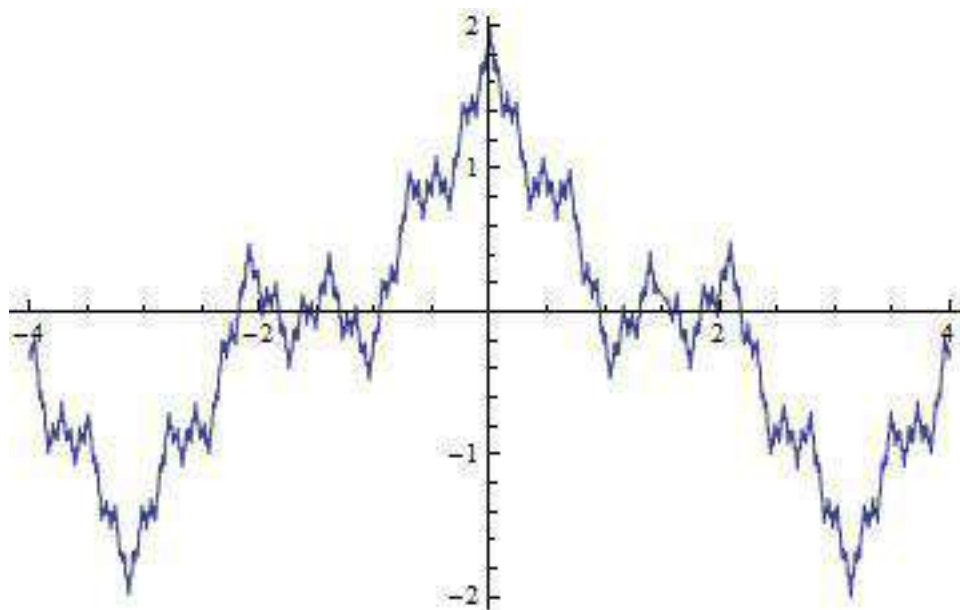


Figura 1.3: Curva de Weierstrass

Fonte: <https://lusoacademia.org/tag/funcao-de-weierstrass/>

Uma década mais tarde, em 1882, o matemático alemão *Georg Cantor* (1845-1918) utiliza um método análogo para construir um subconjunto infinito de pontos no intervalo unitário $[0, 1]$, obtendo o hoje conhecido **Conjunto de Cantor**. Também denominado *poeira de Cantor*, esta construção numérica nos proporciona um subconjunto fechado de números reais.

Em 1890, *Giuseppe Peano* (1858-1932) publicou um artigo intitulado “*Sur une courbe qui remplit to une aire plane*”, que foi o prelúdio da curva Peano, anunciada em

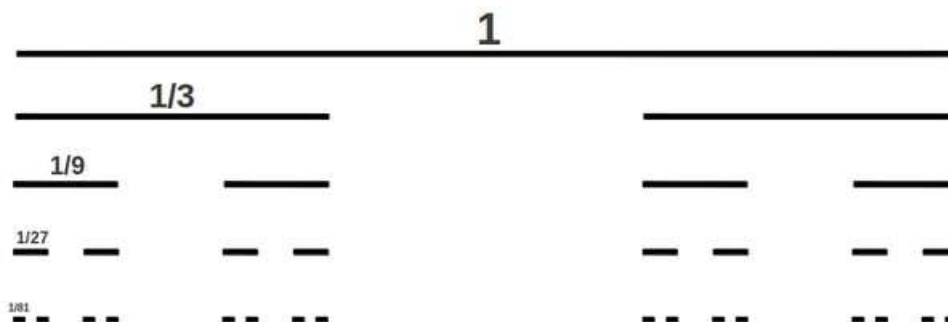


Figura 1.4: Conjunto de Cantor

Fonte: <http://georgcantorbyelithompson.blogspot.com/2015/02/the-cantor-set.html>

1891, designação aplicada a uma família de curvas com a característica de preencher na totalidade uma região do plano.

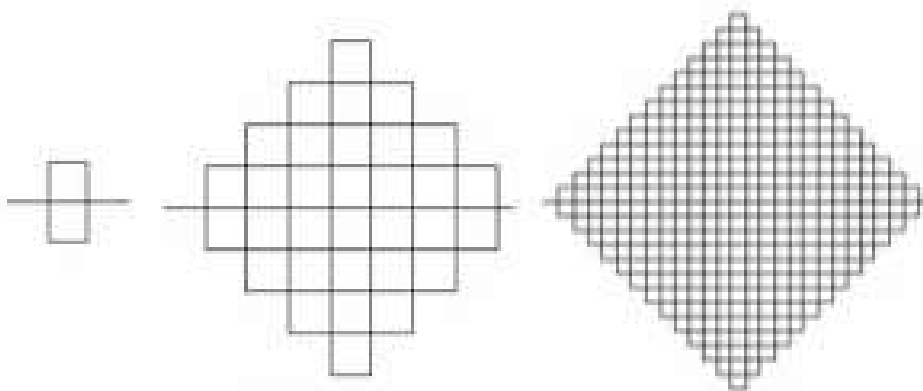


Figura 1.5: Construção de um curva de Peano

Fonte: <https://mathworld.wolfram.com/PeanoCurve.html>

Em 1892, *David Hilbert* fez uma variação nessa curva é conhecida como **curva de Hilbert**, também com a propriedade de “encher” o plano sem intersecção.

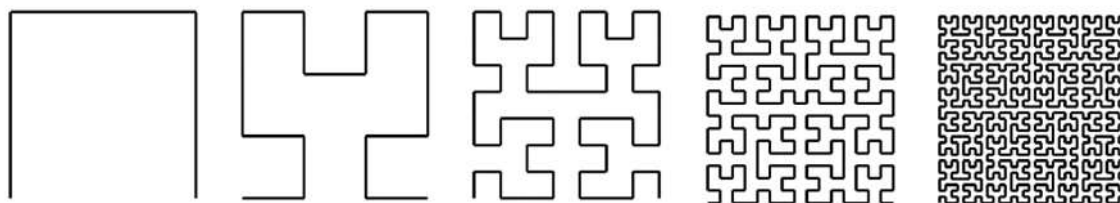


Figura 1.6: Construção da curva de Hilbert por iterações

Fonte: <https://www.obaricentrodamente.com/2010/09/as-curvas-continuas-sem-derivadas.html>

Em 1904, *Helge von Koch* exibe uma curva que oculta uma propriedade surpreendente: o perímetro infinito delimita uma área finita.

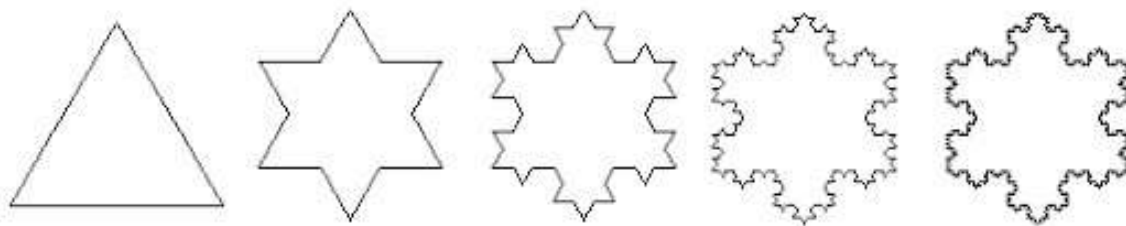


Figura 1.7: Construção da curva de Koch

Fonte: <http://amazingfractals.blogspot.com/2013/06/fractalii-la-granita-dintre-arta-si.html>

Em 1918, *Gaston Julia* e *Pierre Fatou* apresentaram um trabalho sobre processos iterativos envolvendo números complexos que mais tarde viriam a ser conhecidos como **conjuntos de Julia**.

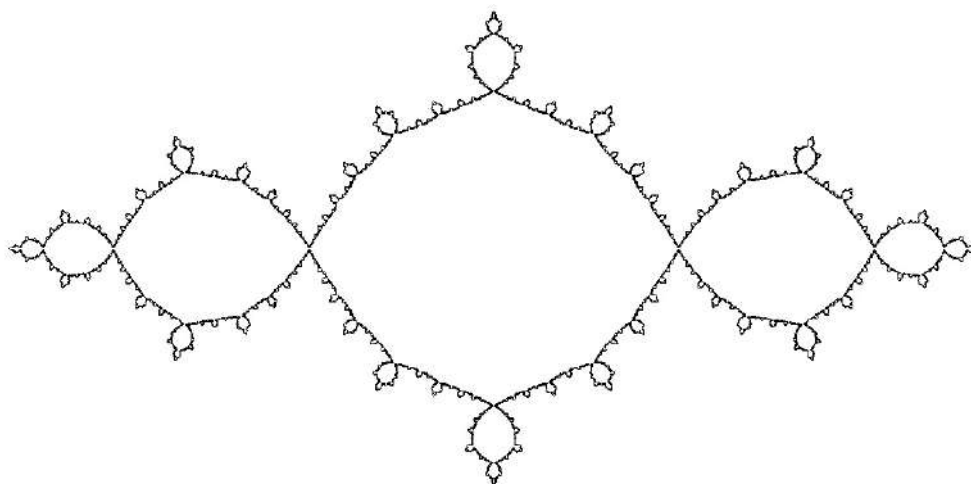


Figura 1.8: Conjunto de Julia $z^2 - 1$

Fonte: <https://www.math.tamu.edu/~grigorch/publications/standrews.pdf>

Na década de sessenta *Oleksandr Sharkovsky*, verificou com a ajuda do computador, que iterando funções simples, como funções quadráticas por exemplo, se obtinham objetos com propriedades insólitas e ordens muito estranhas, tal como as formas idealizadas antes por Cantor, Peano, von Koch e Julia.

Assim, o desenvolvimento das tecnologias da informação e do computador incentivaram a análise e discussão destes objetos, já que tornaram possível a reprodução com maior detalhe do comportamento de funções iterativas.

Tanto o conjunto de Cantor, como as curvas de Peano e von Koch e os conjuntos de Julia, se inserem hoje, numa classe mais ampla de objetos denominados **fractais**. Este termo foi utilizado em 1975 por *Benoit Mandelbrot* (1924-2010) para descrever objetos matemáticos fragmentados e irregulares, cuja estrutura se repete a diferentes escalas. Do ponto de vista matemático podem ser objetos infinitos, em que escalas cada vez mais pequenas repetem a geometria da escala maior.

O fractal estudado por Mandelbrot, hoje conhecido como **conjunto de Mandelbrot**, tem a característica de que em sua representação gráfica, pode ser dividido em um conjunto infinito de figuras, sendo a maior delas uma curva cardióide localizado no centro do pla

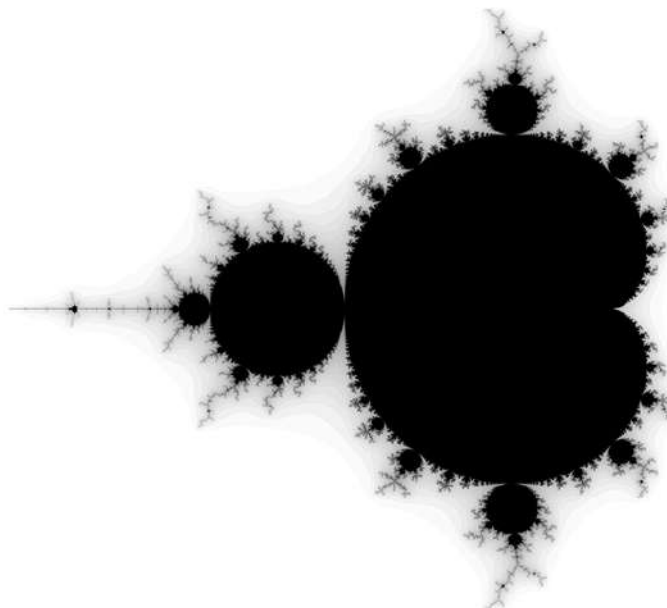


Figura 1.9: Conjunto de Mandelbrot

Fonte: <http://paulbourke.net/fractals/mandelbrot/>

1.1.3 A Geometria Fractal de Mandelbrot

O matemático *Benoit B. Mandelbrot* nasceu em Varsóvia, Polônia, em 1924, e morreu em Cambridge, Massachusetts, Estados Unidos, em 2010. Durante sua infância, Mandelbrot foi mantido fora da escola por anos, pois sua mãe tinha medo de uma epidemia que já tinha levado outro filho. Um de seus tios, Loterman, lhe dava aulas domiciliares, contudo, sem muito sucesso, já que nem a tabuada e o alfabeto Mandelbrot chegou a aprender.



Figura 1.10: Benoit Mandelbrot

Fonte: <https://alchetron.com/Benoit-Mandelbrot>

Somente na sua adolescência, após ter se mudado para Paris, Mandelbrot, inspirado na carreira de professor universitário de seu outro tio, *Szolem Mandelbrot*, começou a considerar se tornar matemático.

Mandelbrot se submeteu a exames de admissão para as universidades *École Normale Supérieure* e *École Polytechnique*, em um destes exames foi o único candidato a solucionar um problema de integral tripla, considerado impossível pelo seu professor. Em [31] *Ian Stewart* (2019) afirma que “Mandelbrot riu” pela simplicidade do problema, que se tratava do volume de uma esfera e se tornava óbvio quando se utilizava um sistema de coordenadas adequado, para *Stewart* Mandelbrot era geômetra nato.

Em um de seus exames de admissão, o qual prestou para as universidades *École Normale Supérieure* e *École Polytechnique*, Mandelbrot foi o único candidato a solucionar um problema considerado impossível pelo seu professor. Tratava-se de uma integral tripla. Segundo *Ian Stewart* (2019), “Mandelbrot riu” pela simplicidade do problema, considerado por *Stewart* (2019) um geômetra nato, o problema tratava do volume de uma esfera e se tornava óbvio quando se utilizava um sistema de coordenadas adequado.

A simplificação de problemas simbólicos através da interpretação geométrica era uma característica da percepção visual avançada que Mandelbrot possuía.

Temas clássicos da Matemática falharam em despertar o interesse de Mandelbrot, como as funções complexas presentes no trabalho de *Gaston Julia*. A forte abstração e o excesso de simbologia eram aspectos evitados por ele em sua investigação criativa.

Somente após seu tio ter lhe apresentado um trabalho do linguista americano *George Kingsley Zipt* que teve o seu interesse capturado. O trabalho relatava sobre a propriedade estatística que *Zipt* acreditava ser comum em todas as línguas. Resoluto, Mandelbrot se propôs a desvendar esta propriedade que muitos outros malograram em explicar.

Daniel Lima ([13]), que utilizou a Lei de *Zipt-Mandelbrot* para auxiliá-lo na análise comportamental de macacos-prego da espécie *Sapajus Libidinosus*, afirma que esta lei, alvitada inicialmente por *Zipf* em 1949, surgiu através do estudo da distribuição da frequência de palavras em textos escritos. Afirma também que somente em 1953, Mandelbrot a reformula e a ressignifica, que passa a ser chamada *Lei de Zipt-Mandelbrot*.

Este importante resultado norteou a carreira de Mandelbrot, após investigar estranhos padrões estatísticos que não necessariamente possuíam relações entre si, publicou diversos artigos. De acordo com *Stewart* (2019), estes abrangiam áreas como:

“[...] distribuição de riqueza, mercado de ações, termodinâmica, psicolinguística, comprimento de linhas costeiras, turbulência de fluidos, demografia populacional, a estrutura do Universo, áreas de ilhas, estatística de redes fluviais, percolação, polímeros, movimento browniano, geofísica, ruído aleatório e outros tópicos inusitados.” (*Stewart*, 2019, [31]).

Em 1975, Mandelbrot encontra um importante denominador comum velado em grande parte de seus artigos, e este denominador era geométrico. Na verdade tratava-se de um novo conceito geométrico, que possui a flexibilidade matemática distinta dos conceitos clássicos e enrijecidos os quais Mandelbrot evitava a todo custo, se tornou seu novo objeto de estudo.

Este novo conceito geométrico, chamado de **Geometria Fractal**, distingue-se da geometria clássica justamente na sua irregularidade. Quando observamos eventos naturais, constata-se que fortuitamente há alguma semelhança com as formas da geometria Euclidiana. Cubos, esferas, pirâmides e outros elementos da geometria espacial, quando ampliadas, apresentam, em sua maioria, uma superfície lisa, com linhas retas ou curvas e que não deixam pistas sobre a figura original.

Já nas formas naturais, observa-se uma irregularidade que existe quase como uma regra. É notória a imperfeição harmoniosa presente na natureza e em seus elementos. Stewart (2019) corrobora com este pensamento ao afirmar que:

Montanhas são denteadas e irregulares. Nuvens são fofas, com saliências e tufos. Árvores se ramificam repetidamente a partir do tronco, passando pelos galhos até os rebentos nas pontas. Samambaias têm frondes que parecem uma porção de frondes menores amarradas em pares opostos. Ao microscópio, a fuligem é um monte de pequenas partículas aglomeradas, com lacunas e vazios. Todas elas estão a grande distância da lisa rotundidade da esfera. A natureza detesta a linha reta e não morre de amores por outras coisas vindas de Euclides e dos textos sobre cálculos. (Stewart, 2019, [31]).

A geometria fractal modela as formas naturais com muito mais coerência e precisão do que a geometria euclidiana. A eficiência em evidenciar a essência e o comportamento caótico, mas organizado, das formas naturais valida e reafirma a importância da utilização desta nova geometria na análise dos mais diversos temas.

Através dos fractais, houve uma significativa mudança na forma como estudiosos enxergavam o mundo real. Esta nova maneira de modelar diversas estruturas permitiu avanços em áreas distintas como biologia, física, química, linguística, financeira, astronômica, geológica e, principalmente, matemática, dentre muitas outras.

Como vimos anteriormente, a estrutura fractal é pré-existente ao próprio Mandelbrot, o conjunto de Cantor, a curva de Hilbert, a curva de Weierstrass, o conjunto de Julia, o floco de neve de Koch, o triângulo de Sierpinsky são, dentre outros, representantes desta nova geometria. Contudo, estas estruturas foram tratadas inicialmente, cada uma em uma área da Matemática, como excentricidades, e estavam insuladas umas das outras.

Somente quanto Mandelbrot percebeu a geometria por trás das supracitadas estruturas que deu início ao estudo e desenvolvimento do que conhecemos hoje como Geometria fractal. Para Stewart (2019), isto só se tornou possível pois:

Para uma temática acontecer de verdade, alguém precisa juntar os pedaços, compreender sua unidade subjacente, formular os requeridos conceitos em generalidade suficiente e então sair e vender as ideias para o mundo. Mandelbrot, embora não fosse um matemático no sentido ortodoxo, teve visão e tenacidade para fazer exatamente isso. (Stewart, 2019, [31]).

O termo fractal (do latim *fractus*, fração, quebrado) se remete a objetos e construções diversos, sejam como formas abstratas ou nas formas naturais, que são objeto de estudo da nova teoria do Caos, enquanto forma e leis de formação e de escala. Nussenzveig (1999) complementa esta definição ao trazer que:

Os fractais são conjuntos cuja forma é extremamente irregular ou fragmentada; e que têm essencialmente a mesma estrutura em todas as escalas. A origem do termo fractal, introduzido por Mandelbrot, está no radical *fractus*, proveniente do verbo latino *frangere*, que significa quebrar, produzir pedaços irregulares; vem da mesma raiz a palavra fragmentar, em português. (Nussenzveig, 1999, [21]).

Faz-se necessária uma explanação inicial sobre as características principais que definem os fractais, como comprimentos, áreas e as correspondentes dimensões fractais. Uma definição dada por Mandelbrot em Barbosa (2005, p.18): “*Um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos.*”

Algumas das principais características inerentes aos fractais existentes é a auto similaridade, exata ou não; a iteração infinita e a proporcionalidade das suas partes, além da dimensão fractal. Existem também fractais que são igualmente construídos através de mini cópias, que, por sua vez, são anisotrópicas, isto é, não há a fixação das proporções originais em todas as direções. Ao se passar de uma escala para outra, pode-se perceber que o tamanho destas cópias não segue uma variação uniforme. Neste caso, tais fractais são ditos auto afins.

1.2 Característica de um Fractal

Em 1982 Mandelbrot publicou o livro *The fractal geometry of nature*, no qual introduz as noções de auto similaridade e de comportamento de escalamento e a dimensão fractal, características de um objeto ou uma distribuição irregular que determinam um fractal.

A seguir vamos descrever estas características e incluindo também a iteração infinita.

1.2.1 Auto Similaridade

Dentre as características intrínsecas a estrutura dos fractais, a **auto similaridade** ou autossemelhança é a mais notória. A identificação de formas semelhantes a uma figura inicial, em escalas menores, é geralmente o primeiro indício de que nos deparamos com um fractal.

A autossemelhança ou auto similaridade é uma propriedade de acontecimentos, de objetos geométricos, de elementos naturais que, em sua estrutura, mostra uma macrocosmização de suas partes através de repetições sucessivas, em diferentes escalas, de unidades menores. Esta é uma das fundamentações que norteiam o conceito de Fractal, quando o maior elemento é composto de menores elementos similares.

Esta composição que consiste em repetições infinitas de um mesmo elemento, segue escalas distintas que são regidas por uma razão. Cada elemento novo do fractal é formado pelo anterior segundo uma razão, configurando uma Progressão Geométrica, cujo crescimento ou decréscimo depende inteiramente do elemento inicial adotado.

Em vários elementos naturais, é possível identificarmos a auto similaridade. Contudo, além de não ser exata, há um limite no número de iterações. O brócolis romanesco (cujo nome científico é *Brassica oleracea* “*Romanesco*”) possui, de forma bastante evidenciada, a característica da auto similaridade.



Figura 1.11: Brócolis romanesco

Fonte: <https://br.depositphotos.com/78798866/stock-photo-one-romanesco-broccoli.html>

1.2.2 Iteração Infinita

Com as figuras matemáticas, como a curva de Peano (2.3), é possível obtermos a auto similaridade exata, isto significa que quando ampliamos a figura é fácil de identificar claramente o seu “*ponto de partida*” e as subsequentes iterações. Comum aos fractais matemáticos, a auto similaridade proporciona a ocorrência de outra característica dos fractais: a **iteração infinita**.



Figura 1.12: Ampliação do brócolis romanesco

Fonte: <https://parade.com/23643/linzlowe/what-the-heck-is-romanesco-and-how-do-you-cook-it/>

Conhecida também como complexidade infinita, trata-se de uma cadeia de procedimentos que ocorrem de maneira recursiva. A cada iteração, a figura produz cópias de si em escalas menores. O fractal é, portanto, a figura resultante da infinitésima iteração. Em virtude disso, podemos observar diversos fatos interessantes que ocorrem quando observamos o comportamento do fractal quando o número de iterações tende ao infinito.

Quando analisamos, por exemplo, o floco de neve de Koch (2.5), é fácil observamos que, em sua infinitésima iteração, o seu perímetro tende ao infinito. Este fato será melhor explanado posteriormente.

Já na curva de Hilbert (2.4), classificada como curva de preenchimento, o seu comprimento tende ao infinito na infinitésima iteração, apesar da mesma ser limitada à área de um quadrado.

Este comportamento errático dos fractais fez com que alguns matemáticos encontrassem um valor, chamado de “*dimensão*”, para destacar o que Stewart (2019) traz como “*grau de irregularidade de um fractal*”.

1.2.3 Dimensão Fractal

Na Matemática é bem conhecida a **dimensão topológica**, em que: um ponto ou um conjunto de pontos isolados tem dimensão zero; retas ou curvas são objetos unidimensionais; plano, polígonos com seu interior e superfícies são objetos bidimensionais e esferas com seu interior, poliedros com seu interior e o espaço são objetos tridimensional. Esta noção pode ser matematicamente generalizada e intuitivamente a dimensão de um objeto está associado ao número de coordenadas independentes necessárias para descrevê-lo.

Esta noção de dimensão não distingue uma reta e uma curva de Koch, ambas são unidimensionais.

A dimensão fractal, como veremos a seguir, distingue os objetos da figura 1.2.3, pois



Figura 1.13: Uma reta e uma curva de Koch - objetos unidimensionais

Fonte: http://www.dma.fi.upm.es/recursos/aplicaciones/geometria_fractal/praticas/fractales_clasicos/koch.html

podemos ter dimensões fracionárias e até irracionais.

A fim de estabelecer a dimensão fractal objetos conhecidos da geometria euclidiana, cuja dimensão topológica já é conhecida, vamos assumir que o número de cópias do objeto é dado por $N = \left(\frac{1}{r}\right)^d$, N número de cópias auto similares, r fator de redução e d a dimensão do objeto.

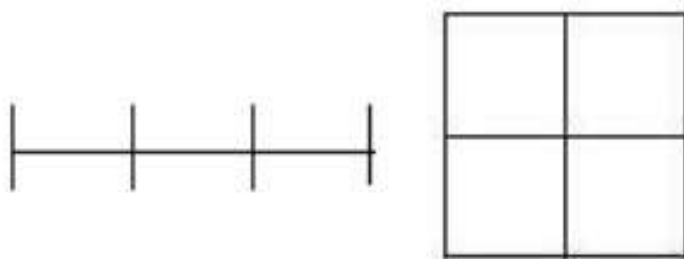


Figura 1.14: Segmento e quadrado divididos

Fonte: Tese de mestrado de Raquel Nunes [20]

Por exemplo, o segmento da figura acima, de dimensão 1, está dividido em três segmentos de mesmo comprimento, portanto $r = \frac{1}{3}$, logo $N = \left(\frac{1}{1/3}\right)^1 = 3$, ou seja, o objeto tem três cópias de um objeto de dimensão 1.

Logo, seguindo este raciocínio para encontrar uma fórmula que determine a dimensão de objetos auto similares devemos isolar o parâmetro d do restante da equação.

Definição 1.1. *Seja X um objeto dividido N número cópias auto similares, com fator de redução r , a **dimensão de fractal** de X é o número real*

$$d = \frac{\ln N}{\ln(1/r)}.$$

Exemplo 1.2. *Veremos que o comportamento do fractal esponja de Menger, ao ter o seu tamanho triplicado, o seu volume é multiplicado por 20.*

Portanto, $N = 20$ e $r = \frac{1}{3}$, já que houve uma ampliação pelo fator 3.

Sendo assim, a dimensão da esponja de Menger é dada por

$$d = \frac{\log 20}{\log 3} = 2,73.$$

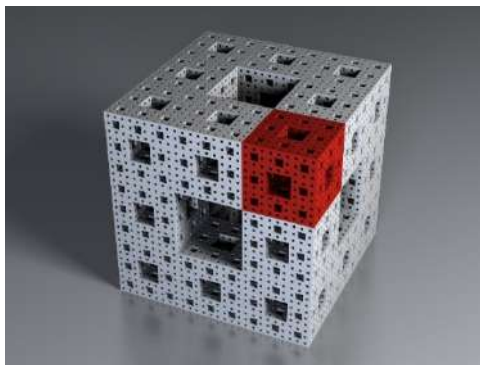


Figura 1.15: Análise do comportamento da Esponja de Menger durante a ampliação
Fonte: <https://en.wikipedia.org/wiki/File:Menger-Schwamm.png>

1.3 Aplicações da Geometria Fractal

A geometria fractal está inserida em diversos contextos, alguns deles pré-datam os resultados de Mandelbrot, enquanto outros se desenvolveram a partir deles. No que segue vamos apresentar alguns desses contextos.

1.3.1 Fractais na Música

Durante a década de 1970, as primeiras publicações de Mandelbrot sobre a geometria fractal e suas diversas ramificações começaram a se tornar conhecidas pela comunidade científica. Em 1975, Richard Voss e John Clarke fizeram análises de fenômenos musicais conhecidos como ruídos $1/f$ (f representa a frequência) associados à dimensão fractal.

Após a publicação do livro *the Fractal Geometry of Nature* (Mandelbrot, 1983), músicos passaram a associar a noção de fractais com estruturas musicais. Segundo Queiroz e Kon (2013), estas associações incluem o uso de ruídos com características fractais na geração de parâmetros musicais, tais como altura, duração, intensidade e timbre.

O compositor brasileiro Villa-Lobos (1887-1959) também utilizou a influência do conhecimento fractal em algumas de suas composições, como é mencionado em Barbosa (2002) apud Martin Gardner (1992):

“Como as cadeias de montanhas se aproximam de passeios aleatórios, é possível criar música de montanha fotografando uma cadeia de montanhas e traduzindo suas alturas flutuantes em tons que flutuam no tempo. Villa-Lobos fez isso usando o horizonte das montanhas no Rio de Janeiro.” (Gardner, 1992, tradução nossa).¹

¹ *since mountain ranges approximate random walks, one can create mountain music by photographing a mountain range and translating its fluctuating Heights to tones that fluctuate in time. Villa-Lobos actually did this using mountain skylines around Rio de Janeiro. (Gardner, 1992), [?].*

1.3.2 Fractais na Arquitetura e em Culturas Africanas

Em 1980, o etnomatemático *Ron Eglash*, professor do *Rensselaer Polytechnic Institute*, Nova York, descobriu fractais ao se deparar com fotos aéreas de uma vila africana *Logone Birni*, localizada em Camarões, país da África central. Surpreso com a descoberta, Eglash percebeu que as construções da vila seguiam o mesmo modelo fractal utilizado na construção do palácio, que se localizava no centro da vila. Decidido, Eglash foi até o continente africano investigar a história por trás do surgimento daqueles fractais.



Figura 1.16: Vista aérea da aldeia de Logone Birni

Fonte: Scientific American (Brasil). Etnomatemática Edição especial, nº 11.

Ao chegar na vila, Eglash visitou o palácio, o qual pertencia ao chefe da vila, durante a visita, constatou que havia tanto intenção quanto consciência na construção do palácio. O modelo fractal utilizado tomava um retângulo como base, em seguida, eram criados quatro retângulos de mesmas proporções em posições distintas, estes quatro eram então sujeitos ao mesmo procedimento, dando origem a dezesseis retângulos, também de mesmas proporções.

Esta espiral retangular que compõe toda a estrutura do palácio é chamada de “*caminho da luz*”, e termina na sala do trono, a etiqueta e a linguagem utilizadas por visitantes no palácio se tornam mais polidas e respeitadas à medida que se aproximam da sala do trono.

Na Zâmbia, país do leste africano, também é possível identificar estruturas fractais nas construções de vilas e aldeias, é o caso da vila do povoado “*Ba-ila*”.

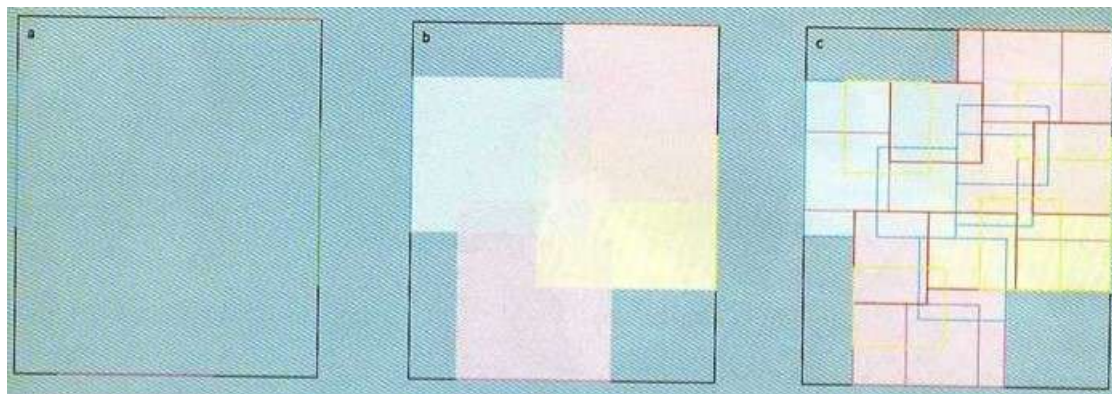


Figura 1.17: Modelo fractal utilizado na construção do palácio da aldeia Logone Birni
 Fonte: Scientific American (Brasil). Etnomatemática Edição especial, n° 11.



Figura 1.18: Palácio da aldeia de Logone Birne
 Fonte: Scientific American (Brasil). Etnomatemática Edição especial, n° 11.

Em sua construção, foi tomada como figura inicial uma curva circular com uma pequena abertura, a qual corresponde à entrada da vila, e a residência do chefe da vila em frente à entrada. Toda a extensão da curva é “cortada” e cada pedaço é substituído por cópias da estrutura inicial, só que em proporções menores. O processo se repete a cada iteração, gerando estruturas idênticas, porém reduzidas.

As construções próximas ao portão da vila e do portão de cada estrutura menor são utilizadas como armazéns para alimentos e produtos, ao longo da curva inicial estão localizadas as estruturas familiares, e estas se tornam cada vez maiores na medida que se distanciam do portão. Esta distância refere-se ao status social da família na vila: quanto maior for a distância entre uma estrutura familiar e o portão, maior será status

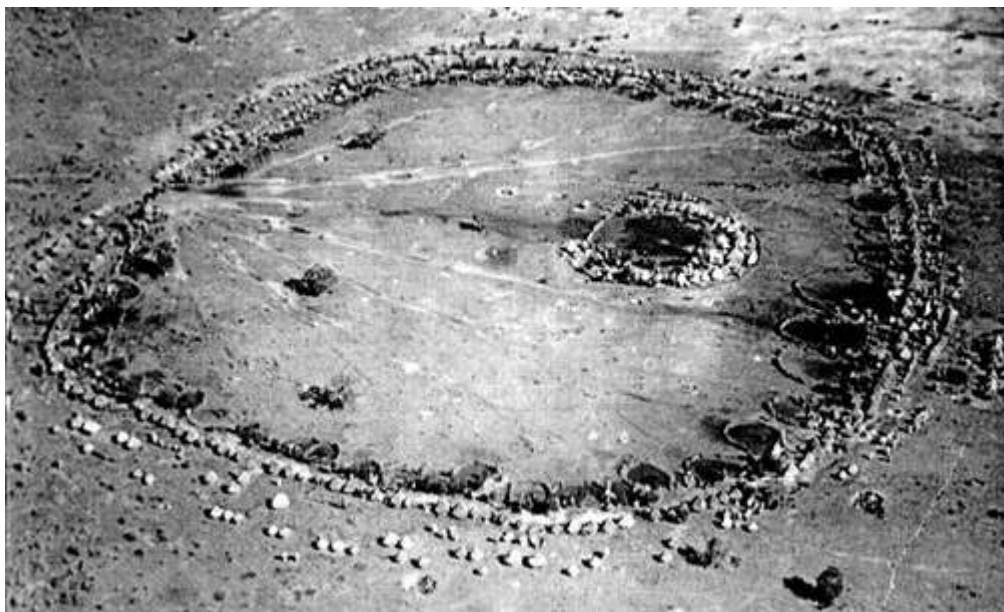


Figura 1.19: Vista aérea do povoado de Ba-ila

Fonte: <http://www.geometriadinamica.cl/2009/11/fractales-africanos/>

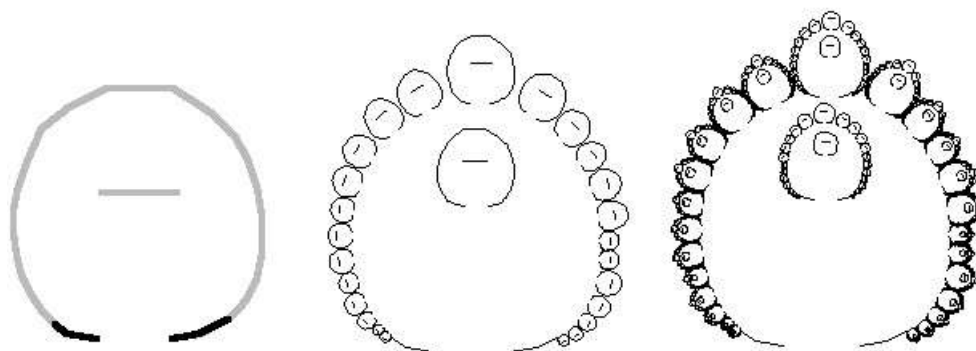


Figura 1.20: Processo recursivo na criação da estrutura do povoado de Ba-ila

Fonte: <http://www.geometriadinamica.cl/2009/11/fractales-africanos/>

social desta família na vila.

Cada uma dessas estruturas é construída de forma análoga a estrutura da vila. Portanto, assim como a casa do centro da vila pertence ao chefe da vila, a casa do centro de cada estrutura familiar pertence ao chefe daquela família. Na parte de trás de cada uma dessas estruturas se encontra um altar dedicado aos ancestrais.

Para Eglash, que teve seu artigo *Fractais Africanos* publicado na edição especial *Etnomatemática* da *Scientific American* (Eglash, 2005), além da arquitetura, é possível identificar a existência de fractais nos têxteis, nos penteados tradicionais e no artesanato africanos.

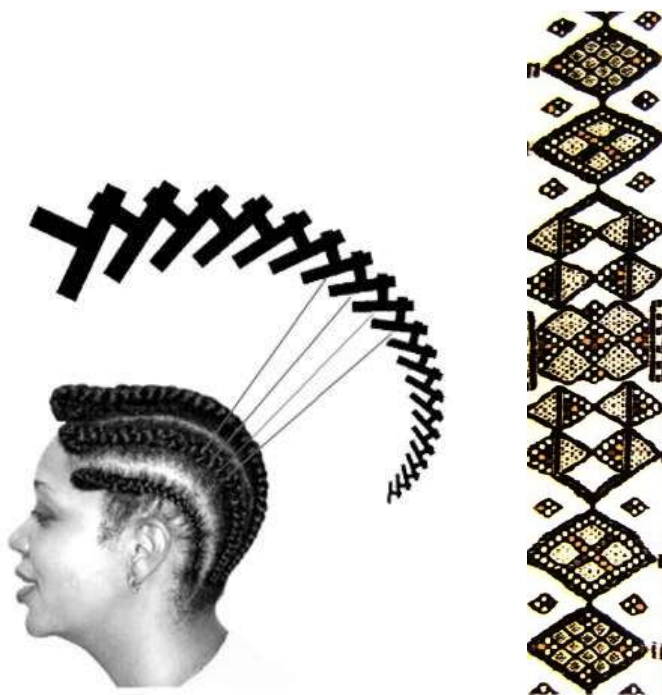


Figura 1.21: Exemplo de fractais em um penteado trançado e em um cobertor
 Fonte: <http://www.geometriadinamica.cl/2009/11/fractales-africanos/>

1.3.3 Fractais na Fabricação de Antenas

Com o avanço contínuo de dispositivos eletrônicos, o desenvolvimento da grande maioria deles dá-se pela confecção de produtos cada vez mais portáteis, leves e compactos, para o desenvolvimento do produto *Antena Patch de Microfitas*, um dos caminhos encontrados baseia-se na geometria fractal.

Em 2013, para que o tamanho da estrutura da antena fosse reduzido sem que se perdesse muito de sua eficácia, Oliveira et al tomou como norteador dos seus experimentos a propriedade de preenchimento espacial constante do *fractal de Minkowski*, que é considerado também como uma curva de preenchimento.

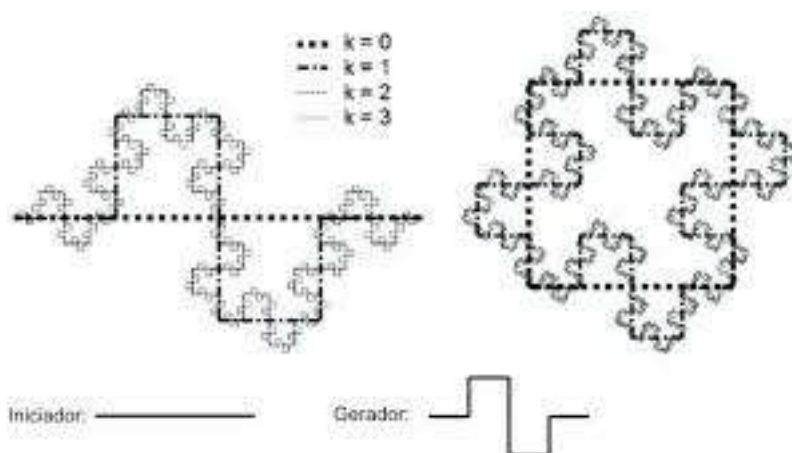


Figura 1.22: Ilha de Minkowski

Fonte: <http://connepi.ifal.edu.br/ocs/anais/conteudo/anais/files/conferences/1/schedConfs/1/papers/8/public/8-4483-1-PB.pdf>

Oliveira et al fez a adaptação da antena patch de microfita de seu formato retangular original para o formato baseado na *ilha de Minkowski*, como observa-se na figura a seguir:

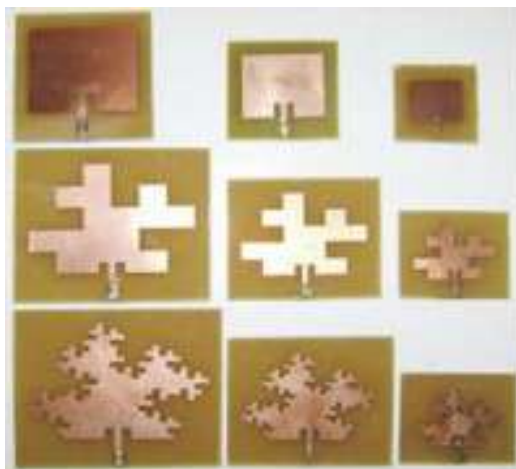


Figura 1.23: Antena Patch baseada na ilha de Minkowski

Fonte: <http://connepi.ifal.edu.br/ocs/anais/conteudo/anais/files/conferencias/1/schedConfs/1/papers/8/public/8-4483-1-PB.pdf>

1.3.4 Fractais na Biologia

Atualmente, é possível observarmos no corpo humano órgãos, sistemas e tecidos que possuem formas semelhantes aos fractais. Nosso sistema circulatório, por exemplo, tem um comportamento de uma curva de preenchimento, chegando a até 30 níveis de ramificações. A extensão deste sistema, que preenche o espaço limitado do nosso corpo, é extensa. Se alinharmos todos os vasos sanguíneos, artérias e capilares, o comprimento seria suficiente para dar, pelo menos, duas voltas completas em torno do globo terrestre.



Figura 1.24: Ramificações do sistema circulatório

Fonte: <https://i.pinimg.com/originals/70/8a/8a/708a8a4da6af3be53deecd6a7ed5533e.jpg>

Os nossos intestinos possuem ondulações em diversas escalas durante toda a sua extensão. Estas ondulações aumentam de forma considerável a capacidade de absorção de nutrientes provenientes dos alimentos que ingerimos. Esta rugosidade promove uma absorção superior à de um tecido liso e uniforme.

No nosso sistema respiratório, a estrutura das ramificações que se estendem em nossos pulmões possui a auto semelhança fractal em sua formação. É na traqueia que a primeira ramificação acontece, surgindo assim os brônquios. Estes, por sua vez, passam pelo mesmo algoritmo, dando origem aos bronquíolos. Por fim, os bronquíolos se ramificam em diversos e cada vez menores bronquíolos, até o nível dos alvéolos.

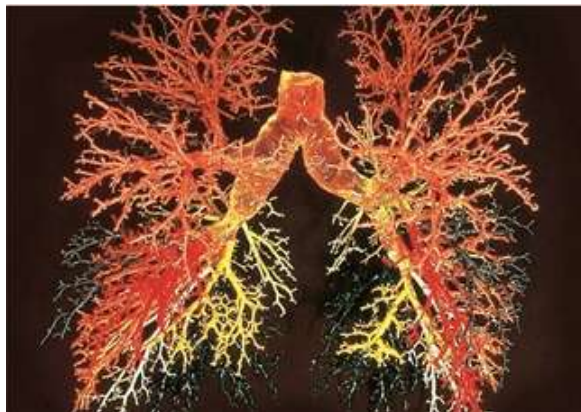


Figura 1.25: Ramificações do sistema respiratório

Fonte: https://static.docsity.com/documents_pages/notas/2013/12/08/8a8084765f0cd6c895282b045203c6aa.png

A nível celular, é possível também verificar a existência da geometria fractal quando analisamos o comportamento de uma célula cancerígena. Na figura abaixo, observa-se as células do câncer de mama em seu estágio de rigidez. Somente após este estágio que elas se tornam invasivas.

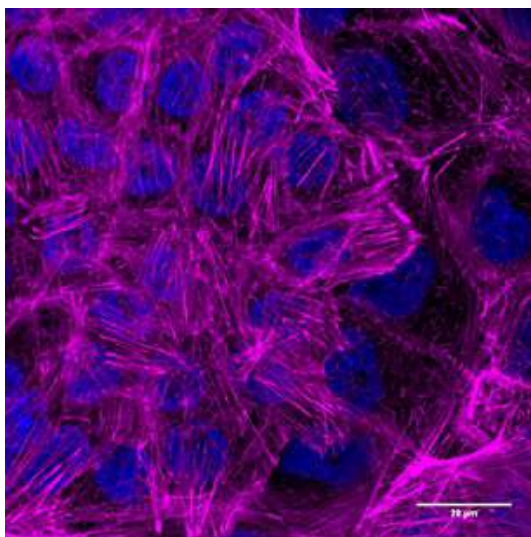


Figura 1.26: Célula do câncer de mama em seu estágio de rigidez

Fonte: <https://www.diariodasaude.com.br/news/imgs/010110170530-celulas-tumorais-rigididas.jpg>

1.4 Aplicações da Geometria Fractal nos Ensinos Fundamental e Médio

A geometria fractal é considerada ainda recente no universo matemático, porém, é possível encontrar muitos trabalhos relevantes que contribuem, através do uso dos fractais, para o ensino dos diversos conteúdos matemáticos concernentes dos ensinos fundamental e médio.

1.4.1 Pipa Tetraédrica

A pipa tetraédrica, idealizada pelo renomado cientista *Alexander Graham Bell* (1847-1922), possui uma estrutura semelhante à da pirâmide de Sierpinski, versão tri-dimensional do conhecido triângulo de Sierpinski.

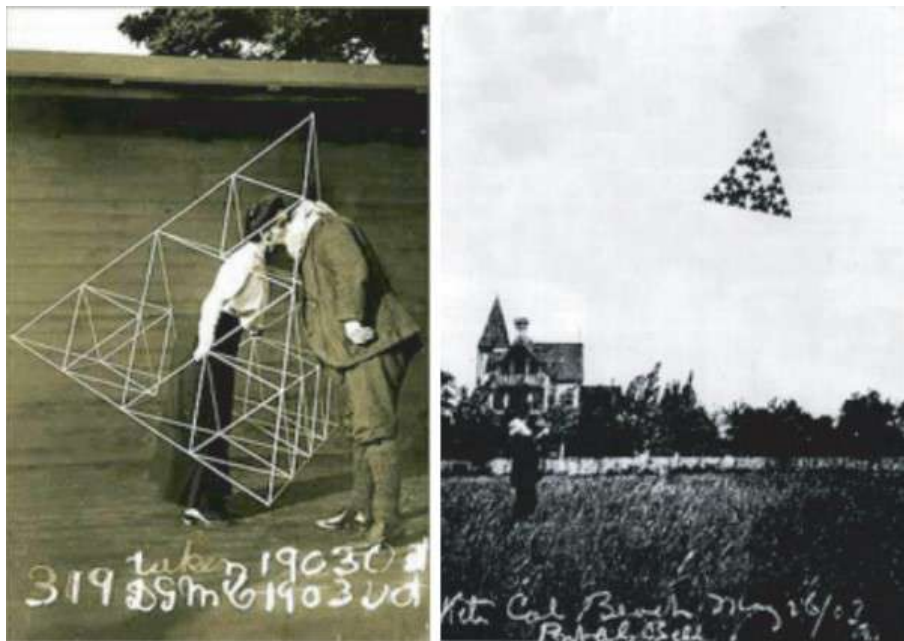


Figura 1.27: Modelo da pipa tetraédrica construída por Graham Bell

Fonte: Dissertação de mestrado de Jossara Bicalho [6]

Em 2013, a professora *Jossara B. S. Bicalho*, em sua dissertação de mestrado “*Um estudo sobre poliedros e atividades para o ensino da matemática: geometria da bola de futebol e pipa tetraédrica*” (veja [6]), propôs a seus estudantes oficinas que oportunizavam o estudo e a construção desse modelo fractal. Durante o processo de construção, Bicalho harmonizou a análise do comportamento do modelo com os conteúdos matemáticos área e volume de figuras geométricas espaciais, aplicando exercícios norteadores.

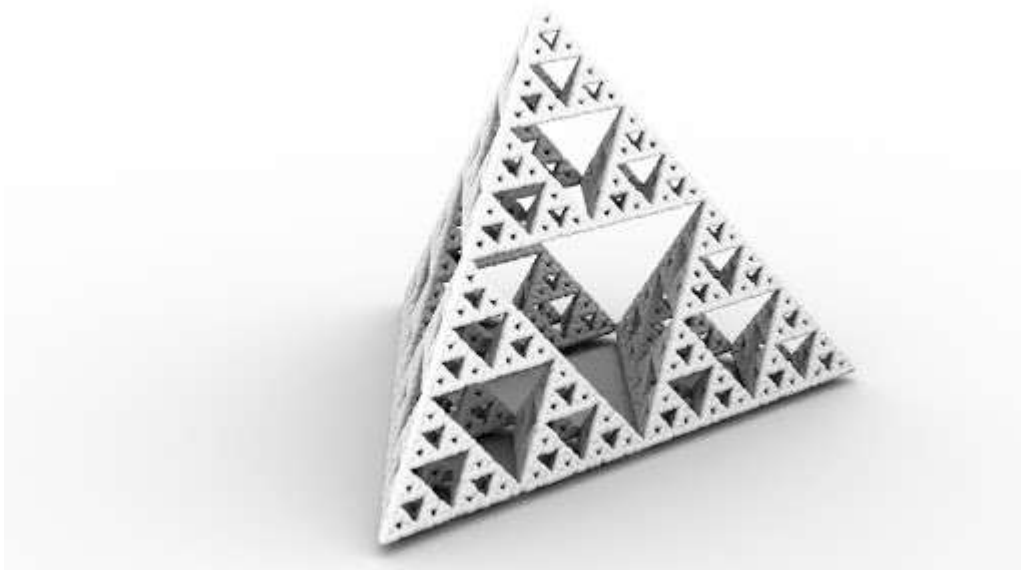


Figura 1.28: Pirâmide de Sierpinski

Fonte: http://www.fundza.com/algorithmic/sierpinski/python/img/sierpinski_lobby_small.jpg

Após os estudantes terem construído as suas pipas tetraédricas em grupos, foi proposto como fim da oficina um campeonato de pipas, no qual os estudantes puderam desfrutar, além da ludicidade oferecida pela atividade, da implicação positiva de seus esforços durante todo o processo.

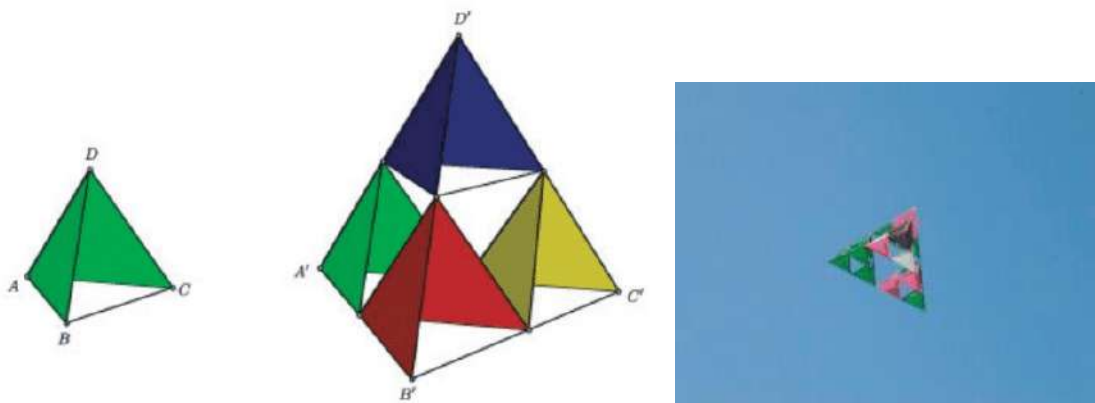


Figura 1.29: À esquerda modelo utilizado na construção da pipa e à direita demonstração da sua funcionalidade durante o campeonato

Fonte: Dissertação de mestrado Jossara Bicalho [6]

1.4.2 Jogos de Dardo

Também é possível trabalhar *probabilidade geométrica* utilizando tanto o triângulo quando o tapete de Sierpinski. Em 2015, o professor *Kauê M. Silva*, em seu trabalho de conclusão do curso superior de licenciatura em Matemática pelo IFSP, intitulado “*Fractais e algumas aplicações ao ensino*” (veja [28]), propôs aos seus alunos atividades que consistem em utilizar os fractais em soluções de situações-problemas propostas aos seus alunos.

Uma delas, chamada de Jogo de dardos, solicita que o aluno calcule a probabilidade de um dardo, ao ser jogado contra o triângulo ou tapete de Sierpinski, atinja um dos “buracos” espaços na cor preta. A cada iteração os valores correspondentes às probabilidades se tornam menores e devem ser calculados pelos alunos na forma de atividade, para que seja analisado por eles o comportamento desta probabilidade durante as iterações.

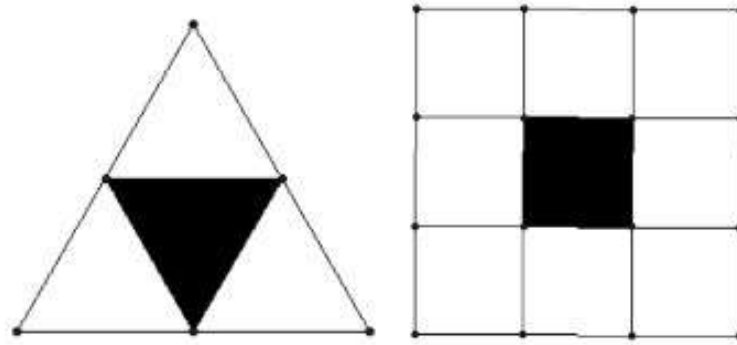


Figura 1.30: Triângulo e tapete de Sierpinski na primeira iteração
 Fonte: Trabalho de conclusão de curso de Kauê Silva [28]

O professor Kauê traz também uma atividade na qual solicita que seus alunos calculem o número de galhos de uma árvore fractal em diversas etapas, para a construção da árvore utiliza com seus alunos o software gratuito *the geometers Sketchpad*.

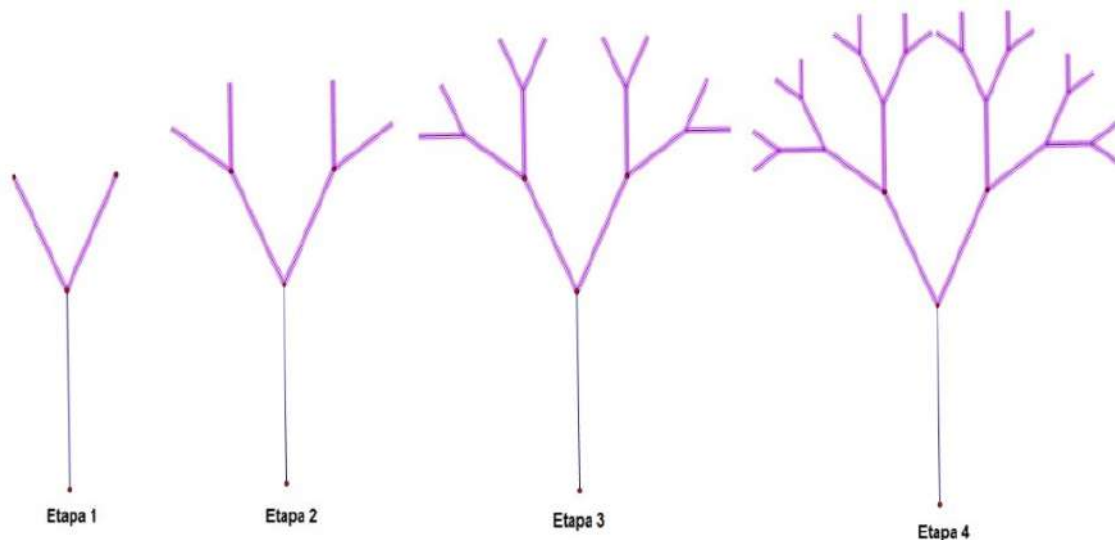


Figura 1.31: Árvore fractal pelo software *the geometers Sketchpad*
 Fonte: Trabalho de conclusão de curso [28]

1.4.3 Árvore Fractal

É possível também construir a árvore fractal por meio de colagens, na oficina proposta pela professora *Calcilda de Souza* em sua dissertação de mestrado “*Geometria Fractal e Aplicações no Ensino Médio*” (veja [30]) há três momentos distintos. No primeiro inicia a oficina apresentando e explicando a geometria fractal com exemplos visuais. Após esta etapa, seus alunos construíram fractais clássicos - conjunto de Cantor, tapete de Sierpinski, esponja de Menger, curva de Koch e floco de Neve.

Por fim, a professora distribui os “*galhos*” e orienta seus alunos durante a construção da árvore fractal. A escolha do modelo, segundo ela, dá-se “*por ser uma figura fractal cujo procedimento de construção está presente no nosso dia-a-di*”, como raízes de árvores e a rede neural. Durante o processo de construção, os alunos precisam calcular, utilizando os conhecimentos de potenciação e progressão geométrica para calcular os valores da quantidade de “*galhos*” necessários em cada etapa e o total de galhos utilizados em toda a construção, respectivamente.



Figura 1.32: Processo de construção da árvore fractal através de colagens
Fonte: Dissertação de mestrado de Cacilda de Souza [30]

1.4.4 Dimensão do Pentágono de Sierpinski

Em em sua dissertação de mestrado *“Equações de Diferenças, Caos e Fractais”* (veja [17]) o professor *Leonardo Morais* instiga os seus alunos, dentre outras atividades, a calcularem o valor da dimensão do *fractal pentágono de Sierpinski*. Noções de trigonometria e da própria geometria plana, como as relações do triângulo retângulo, são estudadas e aplicadas durante a atividade.

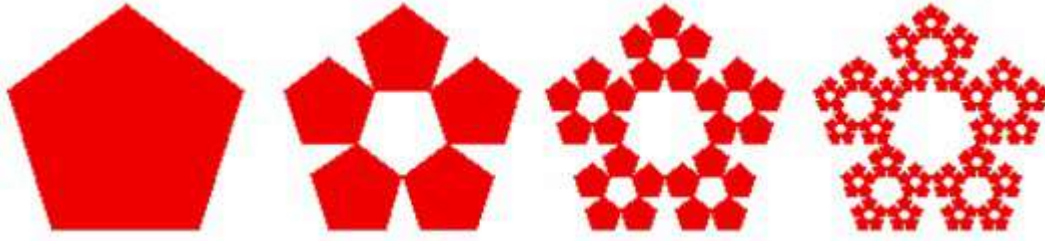


Figura 1.33: Primeiras iterações do pentágono de Sierpinski
 Fonte: Dissertação de mestrado de Leonardo Morais [17]

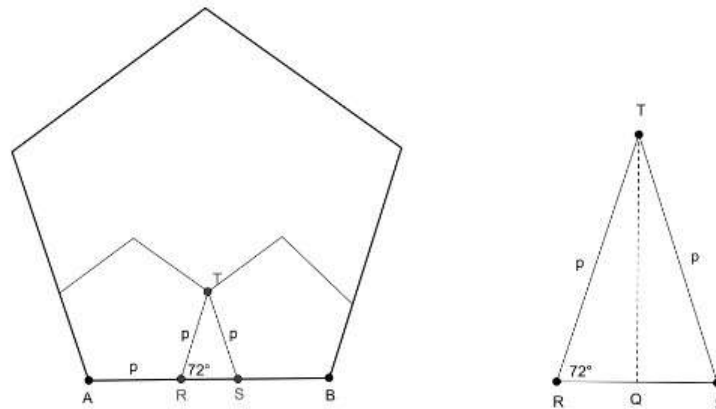


Figura 1.34: Análise do fator de redução p em relação ao lado AB para obtenção do valor da dimensão fractal

Fonte: Dissertação de mestrado de Leonardo Morais [17]

CAPÍTULO 2

TIPOS DE FRACTAIS

Neste capítulo vamos apresentar alguns fractais clássicos que foram citados no seção 1.1.2, dando uma atenção especial àqueles cujo processo de construção serão utilizados nas oficinas do capítulo 3.

Em cada caso apresentamos o método de construção e informações obtidas em cada passo da construção, também calculamos comprimento de curvas, áreas de regiões limitadas e volumes de estruturas, afim de apontar características de cada fractal estudado.

As referências para este capítulo são [2], [3], [18], [20] e [33].

2.1 A Função de Weierstrass

Um exemplo interessante de fractal surgiu quando o matemático alemão *Karl Weierstrass* (1815-1897) estudava funções contínuas que não são diferenciáveis, em 1872 Weierstrass publicou um trabalho que surpreendeu a comunidade matemática, pois apresentava uma função contínua em todos os pontos, porém não é diferenciável em ponto algum de seu domínio.

Definição 2.1. *A função dada por*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cdot \cos(a^n \pi x), \end{aligned}$$

com $b \in (0, 1)$, a inteiro positivo ímpar e $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, é chamada *função de Weierstrass*.

Considerando $b \in (0, 1)$, então

$$|f(x)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cdot \cos(a^n \pi x) \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |b^n| \cdot |\cos(a^n \pi x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} b^n = \frac{1}{1-b}.$$

Logo, como cada termo $b^n \cdot \cos(a^n \pi x)$ é contínua em x e a série é majorada por $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$ uniformemente em x , segue que f está bem definida e é contínua.

Utilizando o fato de que a inteiro positivo ímpar e que $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ pode-se mostrar que f não é diferenciável em ponto algum de seu domínio (veja a demonstração em [33]).

Assim, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.2. ([33]) *A função de Weierstrass é contínua em todos os pontos de \mathbb{R} , mas não é diferenciável em ponto algum de \mathbb{R} .*

Finalmente, podemos observar no gráfico de f repetições de padrões, o que o caracteriza como uma estrutura fractal, veja a figura abaixo.

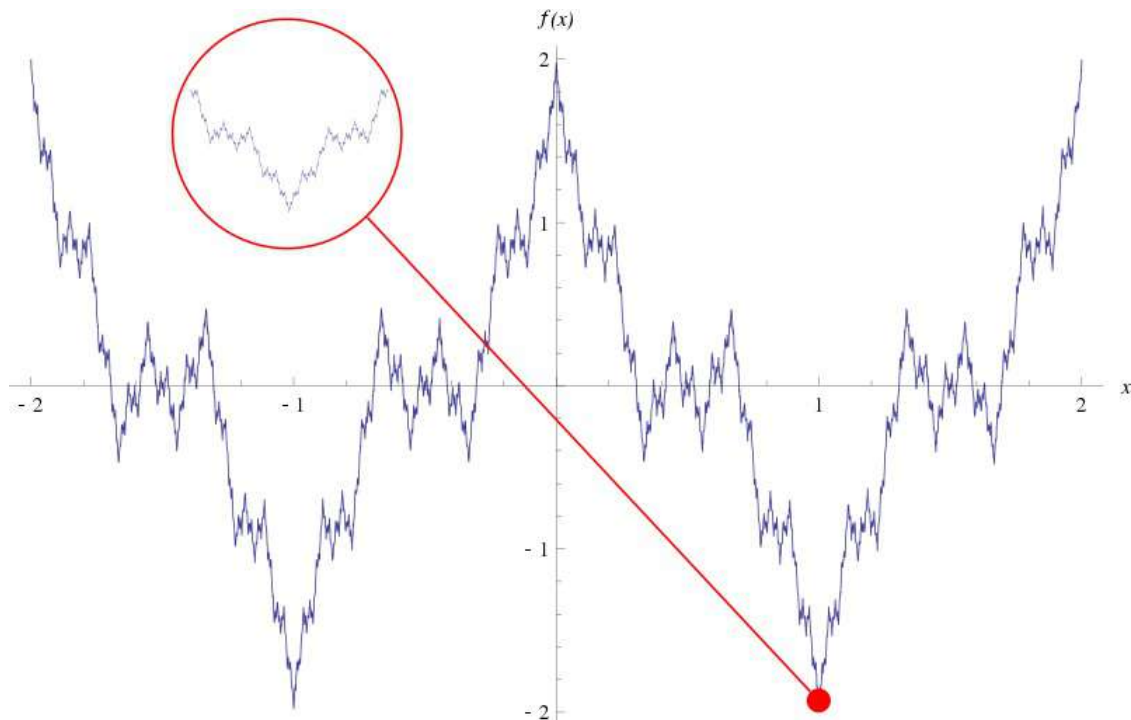


Figura 2.1: Gráfico de uma função de Weierstrass com a auto similaridade

Fonte: https://www.wikiwand.com/pt/Função_de_Weierstrass#

2.2 Conjunto de Cantor

Sendo provavelmente um dos primeiros objetos reconhecidos como fractal, o **conjunto de Cantor** é um interessante exemplo de um subconjunto da reta, em 1883

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 - 1918) publicou um trabalho referente à criação deste conjunto.

Cantor nasceu na Rússia, mas por ter vivido na Alemanha é considerado um matemático alemão, ele foi um matemático dedicado a pesquisas sobre os fundamentos da Matemática, chegou à noção de infinito, infinito real, sem considerar diretamente os números, mas sim os conjuntos. Foi por intermédio da idéia de Weierstrass de definir números irracionais como limites de seqüências racionais que ele chegou a essa linha de pensamento. Além disso, suas contribuições à *Teoria dos Conjuntos* é de extrema relevância até os dias atuais.

A ideia de cardinalidade de conjuntos infinitos se tornou mais elaborada quando Cantor demonstrou a possibilidade de se estabelecer uma relação biunívoca entre o conjunto dos números naturais \mathbb{N} e racionais \mathbb{Q} . Desta forma, provou-se que ambos os conjuntos possuem a mesma cardinalidade e que portanto o conjunto dos números racionais é enumerável. Posteriormente, mostrou também que não era possível estabelecer a mesma relação biunívoca com os números reais \mathbb{R} , concluindo que este é não-enumerável.

2.2.1 Construção do Conjunto de Cantor

Para construir o conjunto de Cantor consideramos o intervalo fechado $I = [0, 1]$ da reta real e procedemos da seguinte maneira:

1º Passo: Dividimos o intervalo I em três intervalos fechados,

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right], \quad I_2 = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \quad \text{e} \quad I_3 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

e retiramos de I o interior do intervalo central I_2 , obtendo o conjunto

$$C_1 = I \setminus \text{interior de } I_2 = [0, 1] \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

2º Passo: Aplicamos o procedimento acima em cada um dos intervalos fechados de C_1 , obtemos o conjunto:

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

3º Passo: Repetindo o procedimento nos intervalos fechados de C_2 , obtemos o conjunto:

$$C_3 = \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right].$$

4º Passo: Prosseguindo dessa maneira, obtemos uma sequência de conjuntos:

$$I, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$$

tais que

$$I \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \dots \supset C_n \supset \dots,$$

e cada conjunto C_n é constituído de pontos do conjunto C_{n-1} excluídos os intervalos abertos terços médios e C_n consiste em 2^n intervalos fechados, cada um de comprimento de comprimento $\frac{1}{3^n}$, e dois a dois disjuntos. O conjunto de Cantor é o que resta do intervalo I após aplicarmos esse procedimento para todo $n \in \mathbb{N}$, assim temos a seguinte definição:

Definição 2.3. O conjunto de Cantor C é a interseção dos conjuntos C_n , obtidos através da remoção sucessiva dos intervalos abertos terços médios do intervalo $I = [0, 1]$, ou seja, $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.

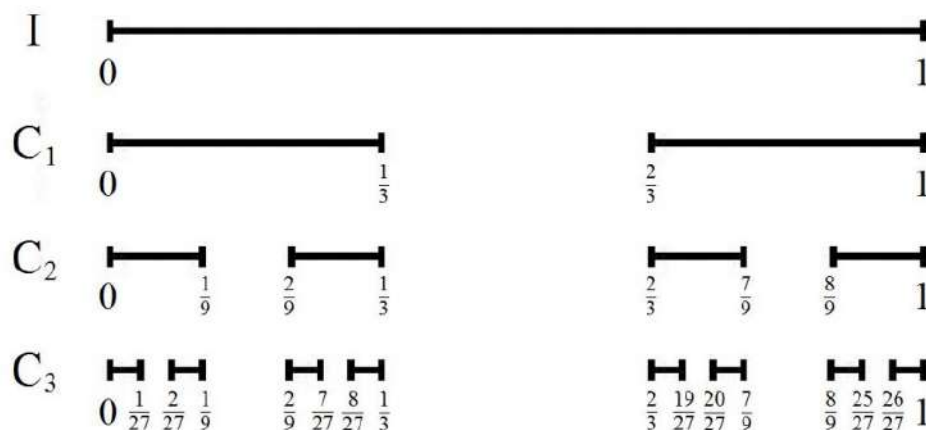


Figura 2.2: Construção do conjunto de Cantor

Fonte: https://impa.br/wp-content/uploads/2017/07/31CBM-P_ECMoura.pdf

2.2.2 Propriedades do Conjunto de Cantor

Podemos observar no conjunto de Cantor algumas propriedades interessantes que têm consequências no estudo de \mathbb{R} , o conjunto dos números reais, aqui omitiremos as demonstrações destas propriedades, porém podem ser encontradas em [2] ou em [18].

PC_1 O conjunto de Cantor C não contém intervalos.

PC_2 Todos os pontos do conjunto de Cantor C são pontos de acumulação, ou seja, C é um conjunto perfeito.

PC_3 O conjunto de Cantor C é um subconjunto fechado e compacto da reta real.

PC_4 Dado $x \in [0, 1]$, a representação de x na base 3 é dada por $x = (0, x_1x_2x_3 \cdots x_n \cdots)_3$, com cada um dos algarismos x_i igual a 0, 1 ou 2, de modo que:

$$x = \frac{x_1}{3^1} + \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + \cdots + \frac{x_n}{3^n} + \cdots.$$

Os elementos do conjunto de Cantor C possuem expansão ternária (base 3) usando os algarismos 0 e 2, ou seja,

$$C = \left\{ x \in [0, 1]; x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i_n}{3^n} \text{ com } i_n = 0 \text{ ou } i_n = 2 \right\}.$$

PC_5 $\frac{1}{4} \in C$, conseqüentemente $C \neq \emptyset$, porém o interior de C é vazio, ou seja, $\text{int}(C) = \emptyset$.

PC_6 O conjunto de Cantor C não é enumerável, conseqüentemente, C é infinito e como $C \subset \mathbb{R}$, segue também que \mathbb{R} não é enumerável.

PC_7 O complemento do conjunto de Cantor em $I = [0, 1]$ é denso em I , ou seja, $\overline{I \setminus C} = [0, 1]$, conseqüentemente para todo $x \in I$, existe uma sequência de elementos em $I \setminus C$ que converge para x .

PC_8 O conjunto de Cantor C tem medida de Lebesgue nula.

Observação 2.4. O comprimento de C^C , complemento do conjunto de Cantor C em $I = [0, 1]$, é o comprimento dos intervalos retirados em cada iteração, no **1º Passo** retiramos um $\frac{1}{3}$ do intervalo I , que tem comprimento $\frac{1}{3}$; no **2º Passo** retiramos um $\frac{1}{3}$ de cada um dos dois intervalos de C_1 , que totalizam o comprimento de $2 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{9} = \frac{2}{3^2}$; no **3º Passo** retiramos um $\frac{1}{3}$ de cada um dos quatro intervalos de C_2 , que totalizam o comprimento de $4 \times \frac{1}{27} = \frac{4}{27} = \frac{2^2}{3^3}$.

Logo, no **n º Passo** retiramos um $\frac{1}{3}$ de cada um dos 2^{n-1} intervalos de C_{n-1} , que totalizam o comprimento de $2^{n-1} \times \frac{1}{3^n} = \frac{2^{n-1}}{3^n}$.

Conseqüentemente, o comprimento de C^C é dado por:

$$\text{compr}(C^C) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{2^3}{3^4} + \cdots = \frac{1}{3} \times \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \frac{2^4}{3^4} + \cdots \right) = \frac{1}{3} \times \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n,$$

mas como $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3$, segue que quando $n \rightarrow \infty$, então o $\text{compr}(C^C) \rightarrow \frac{1}{3} \times 3 = 1$.

Percebemos então que quanto maior for a quantidade de iterações, não só reduzimos o comprimento de cada segmento que é retirado, como também o comprimento total dos segmentos retirados se aproxima do zero, ainda assim, por mais contraditório que se pareça, o conjunto de Cantor possui uma infinidade de pontos, que são originados das extremidades de cada segmento formado pelas iterações.

Auto similaridade e Dimensão Fractal do Conjunto de Cantor

Observemos que na figura 2.2 vemos a característica fractal de auto similaridade no conjunto de Cantor.

Além disso, em cada iteração ficamos com 2 segmentos que serão divididos em três partes iguais. Assim, $N = 2$ e $r = \frac{1}{3}$, portanto

$$d = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,63.$$

2.3 Curva de Peano

O matemático italiano *Giusepoe Peano* (1858-1932) conhecido por suas contribuições na obra "*Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*", de 1889, desenvolve os famosos axiomas de Peano, considerados até hoje a axiomatização dos números naturais. Em 1890 publica a sua famosa curva, propondo o cobrimento de uma superfície plana quadrangular, um exemplo de fractal que preenche uma fração do plano e que é construída por um processo iterativo.

2.3.1 Construção da Curva de Peano

Para construir a **curva de Peano** consideramos um segmento de reta e procedemos da seguinte maneira:

1º Passo: Dividimos o segmento de reta em três segmentos de comprimentos iguais

2º Passo: Em seguida construímos um retângulo sobre o segmento central, de modo a obter dois quadrados, com o segmento central lado comum, obtendo a curva geradora com nove segmentos.

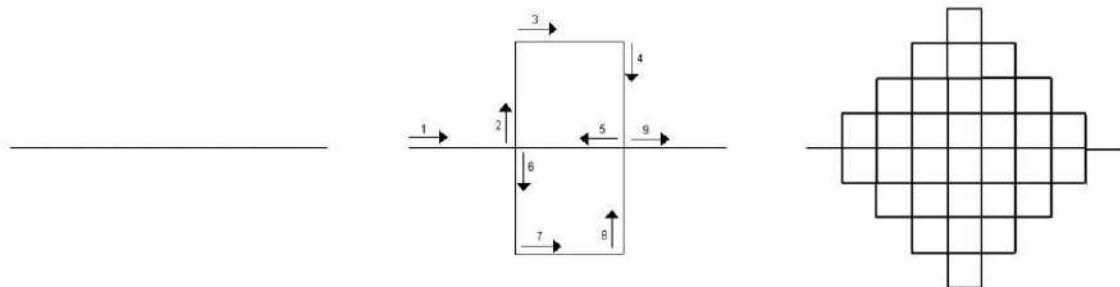


Figura 2.3: Passos da construção da curva de Peano
Fonte: Tese de mestrado de Raquel Nunes [20]

3º Passo: Repetimos, em cada um dos nove segmentos o **1º Passo** e o **2º Passo**.

4º Passo: Repetindo sucessivamente o **1º Passo** e o **2º Passo** de obtemos o objeto final da construção, um quadrado completamente preenchido.

Informações da curva de Peano em cada passo			
	Quantidade de segmentos	Comprimento dos segmentos	Comprimento da curva
1º Passo	1	l	l
2º Passo	9	$\frac{l}{3}$	$9 \times \frac{l}{3} = 3 \cdot l$
3º Passo	9^2	$\frac{l}{3} \times \frac{l}{3} = \frac{l}{3^2}$	$9^2 \times \frac{l}{3^2} = 3^2 \cdot l$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
nº Passo	9^n	$\frac{l}{3^n}$	$9^n \times \frac{l}{3^n} = 3^n \cdot l$

Como o comprimento da curva de Peano, quando $n \rightarrow \infty$, é dado por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \times l = \infty,$$

segue que o comprimento desta curva é infinito.

Observamos que a curva de Peano não é uma estrutura fractal, pois não há auto similaridade, é na verdade um exemplo de curva que preenche o plano.

Auto similaridade e Dimensão Fractal da Curva de Peano

A auto similaridade da curva de Peano bem sutil, notada apenas a partir da 3ª iteração.

Observemos que na construção da curva de Peano o fator de redução é $r = \frac{1}{3}$ e em cada segmento são obtidas 9 partes, portanto $N = 9$,

$$d = \frac{\ln 9}{\ln 3} = \frac{\ln 3^2}{\ln 3} = \frac{2 \cdot \ln 3}{\ln 3} = 2.$$

2.3.2 Curva de Hilbert

Em 1891, um ano depois da curva de Peano, o matemático alemão *David Hilbert* (1862-1943) publicou uma variação da proposta de Peano, incluindo pela primeira vez uma imagem permitindo a visualização da técnica de construção.

A **curva de Hilbert** é mais complicada do que a de Peano, para construí-la consideramos um quadrado e procedemos da seguinte maneira:

1º Passo: Dividimos o quadrado em quatro quadrados de mesma área e consideramos os quadrados ordenados e tomamos os segmentos do centro do primeiro quadrado ao centro do segundo, do centro do segundo ao centro do terceiro e do centro de terceiro ao centro do quarto quadrado.

2º Passo: Em seguida, em cada um dos quatro quadrados do **1º Passo**, repetimos o procedimento e consideramos a sequência de segmentos que unem os respectivos centros dos dezesseis novos quadrados.

3º Passo: Repetindo o processo sucessivamente obtemos a curva de Hilbert.

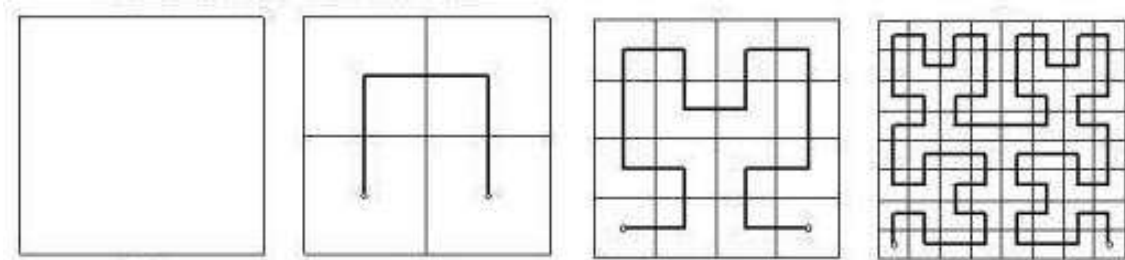


Figura 2.4: Passos da construção da curva de Hilbert

Fonte: https://www.ecured.cu/Curva_de_Hilbert

Informações da curva de Hilbert em cada passo			
	Quantidade de segmentos	Comprimento dos segmentos	Comprimento da curva
1º Passo	$3 = 4^1 - 1$	$\frac{l}{2}$	$\frac{3}{2} \cdot l = \frac{4^1 - 1}{2} \cdot l$
2º Passo	$15 = 4^2 - 1$	$\frac{l}{4} = \frac{l}{2^2}$	$\frac{15}{4} \cdot l = \frac{4^2 - 1}{2^2} \cdot l$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
nº Passo	$4^n - 1$	$\frac{l}{2^n}$	$\frac{4^n - 1}{2^n} \cdot l$

Observemos que o comprimento da curva de Hilbert, quando $n \rightarrow \infty$, é dado por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4^n - 1)l}{2^n} = l \times \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{2^n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \right) = l \times \infty = \infty.$$

Dai que a curva de Hilbert tem comprimento infinito.

Auto similaridade e Dimensão Fractal da Curva de Hilbert

A auto similaridade da curva de Hilbert é um pouco sutil, a partir da 3ª que vemos claramente o todo nas partes.

Por outro lado, aqui também, como na curva de Peano, a dimensão fractal é 2, pois o fator de redução é $r = \frac{1}{2}$ e em cada segmento são obtidas 4 partes, portanto $N = 4$, daí que

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 2} = \frac{\ln 2^2}{\ln 2} = \frac{2 \cdot \ln 2}{\ln 2} = 2.$$

2.4 Curva de Koch

Entre 1904 e 1906 o matemático sueco *Niels Fabian Helge von Koch* (1870 - 1924), construiu uma curva com estrutura fractal, que posteriormente também daria nome ao fractal floco de neve de Koch.

Para construir a **curva de Koch** iniciamos um segmento de reta e procedemos da seguinte maneira:

1º Passo: Dividimos o segmento de reta em três segmentos de mesmo comprimento, sobre o segmento central construímos um triângulo equilátero e retiramos o segmento central obtendo uma curva com quatro segmentos de reta.

2º Passo: Em seguida, em cada um dos quatro segmentos obtidos no **1º Passo**, aplicamos o procedimento obtendo uma curva com 16 segmentos de reta.

3º Passo: Em cada um dos 16 segmentos obtidos no **2º Passo**, aplicamos o procedimento do **1º Passo** obtendo agora uma curva com 64 segmentos de reta.

4º Passo: Repetindo o processo sucessivamente obtemos a curva de Koch.

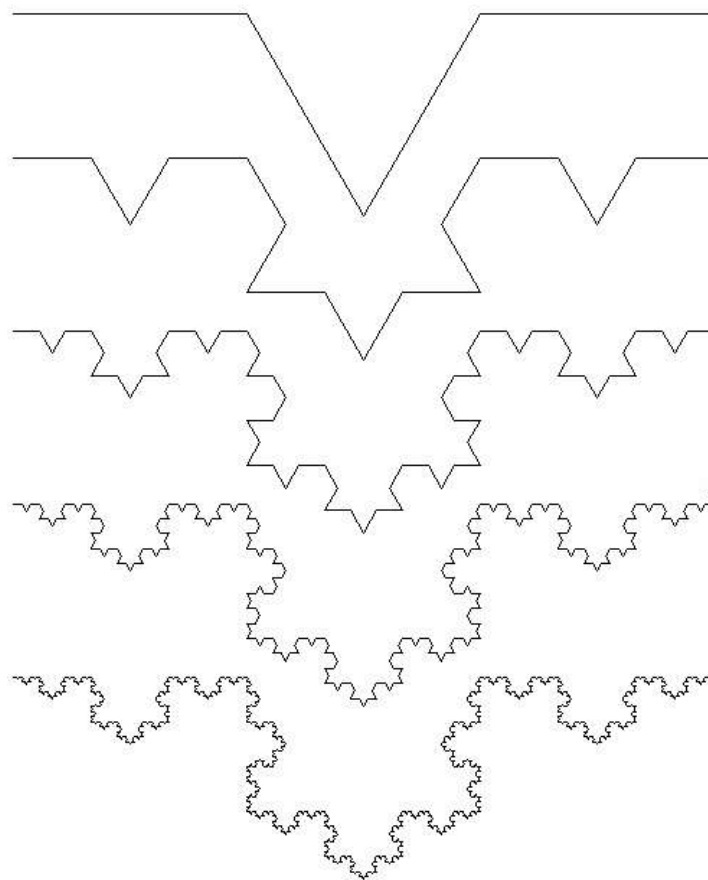


Figura 2.5: Passos da construção da curva de Koch

Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/52/Koch_snowflake0192.png

Observação 2.5. *A curva de Koch é outro exemplo de curva contínua que não possui tangente em ponto algum.*

Informações da curva de Koch em cada passo			
	Quantidade de segmentos	Comprimento dos segmentos	Comprimento da curva
1º Passo	4	$\frac{l}{3}$	$\frac{4}{3} \cdot l = \left(\frac{4}{3}\right)^1 \cdot l$
2º Passo	$16 = 4^2$	$\frac{l}{9} = \frac{l}{3^2}$	$\frac{16}{9} \cdot l = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot l$
3º Passo	$16 = 4^3$	$\frac{l}{27} = \frac{l}{3^3}$	$\frac{64}{27} \cdot l = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot l$
⋮	⋮	⋮	⋮
nº Passo	4^n	$\frac{l}{3^n}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot l$

Pela tabela acima vemos que o comprimento da curva de Koch, quando $n \rightarrow \infty$, é dado por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot l = \infty \cdot l = \infty.$$

Portanto, este é outro exemplo de curva de comprimento infinito.

Auto similaridade e Dimensão Fractal da Curva de Koch

Na figura 2.5 vemos a característica fractal de auto similaridade na curva de Koch.

Por outro lado, na construção da curva de Koch o fator de redução é $r = \frac{1}{3}$ e em cada segmento são obtidas 4 novos segmentos, portanto $N = 4$,

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26.$$

2.5 Floco de Neve de Koch

Ao considerar um triângulo equilátero e em cada uma de suas arestas utilizar, sucessivamente, o procedimento da construção da curva de Koch obtemos uma curva fechada conhecida como **floco de neve de Koch** ou **ilha de Koch**.

Na construção do floco de neve de Koch, em cada passo, são “incluídos” triângulos equiláteros que cujas arestas têm uma relação de proporção com o comprimento l da aresta do triângulo original, é claro que a área A do triângulo inicial é dada por $A = \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{4}$, assim temos:

Informações da curva do floco de neve de Koch em cada passo				
	Quantidade de lados	Comprimento do lado	Comprimento da curva	Área de cada triângulo
1º Passo	$3 \times 4^1 = 12$	$\frac{1}{3} \times l = \frac{l}{3}$	$3 \times 4 \times \frac{l}{3} = 4 \cdot l$	$\frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{4} \times \frac{1}{9}$
2º Passo	$3 \times 4^2 = 48$	$\frac{l}{9} \times l = \frac{l}{3^2}$	$3 \times 4^2 \times \frac{l}{9} = \frac{4^2}{3} \cdot l$	$\frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{4} \times \left(\frac{1}{9}\right)^2$
3º Passo	$3 \times 4^3 = 192$	$\frac{l}{27} \times l = \frac{l}{3^3}$	$3 \times 4^3 \times \frac{l}{27} = \frac{4^3}{3^2} \cdot l$	$\frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{4} \times \left(\frac{1}{9}\right)^3$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
nº Passo	3×4^n	$\frac{l}{3^n}$	$\frac{4^n}{3^{n-1}} \cdot l$	$\frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{4} \times \left(\frac{1}{9}\right)^n$

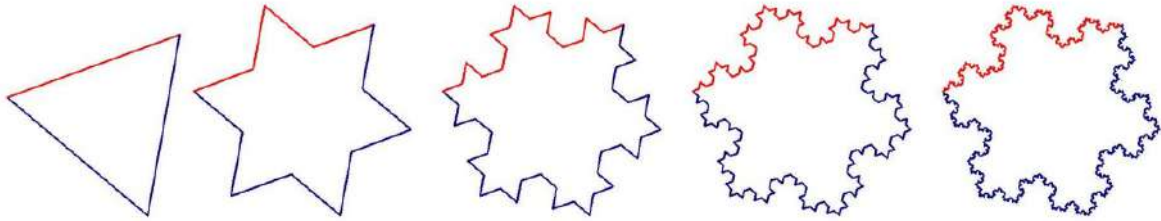


Figura 2.6: Passos da construção do floco de neve de Koch
Fonte: Tese de mestrado de Raquel Nunes [20]

Observemos que o floco de neve de Koch é uma curva fechada que limita uma região do plano, podemos determinar o comprimento desta curva e a área da região limitada.

De fato, pelas informações da tabela acima o comprimento da curva é dado por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} \cdot l = 3l \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = 3l \cdot \infty = \infty.$$

Portanto, o comprimento da curva do floco de neve de Koch é infinito.

Já para a área da região limitada consideremos A_i a área da região limitada no **iº Passo**, então temos:

$$\begin{aligned} A_1 &= A + 3 \cdot A \cdot \frac{1}{9} = \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{4} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{4} + \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{12} \\ A_2 &= A_1 + 3 \cdot 4 \cdot A \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{4} + \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{12} + \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{12} \cdot \frac{4}{9} \\ A_3 &= A_2 + 3 \cdot 4^2 \cdot A \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 = \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{4} + \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{12} + \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{12} \cdot \frac{4}{9} + \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 \\ &\vdots \\ A_n &= \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{4} + \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{12} + \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{12} \cdot \frac{4}{9} + \dots + \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Observemos que

$$S_n = \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{12} + \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{12} \cdot \frac{4}{9} + \dots + \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

é a soma dos primeiros n elementos da progressão geométrica (P.G.) de termos inicial $a_1 = \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{12}$ e razão $q = \frac{4}{9}$, logo

$$S_n = \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{12} \cdot \frac{1 - (4/9)^n}{1 - 4/9} = \frac{3\sqrt{3} \cdot l^2}{20} \cdot \frac{9^n - 4^n}{9^n} = \frac{3\sqrt{3} \cdot l^2}{20} \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right),$$

e é claro que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{3} \cdot l^2}{20} \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = \frac{3\sqrt{3} \cdot l^2}{20}.$$

Consequentemente, a área da região limitada pelo floco de neve de Koch é:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{4} + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{4} + \frac{3\sqrt{3} \cdot l^2}{20} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \cdot l^2.$$

Assim, a curva do floco de neve de Koch tem a característica de que, quando $n \rightarrow \infty$, limita uma região de área finita, porém sua curva é de comprimento infinito.

Auto similaridade e Dimensão Fractal do Floco de Neve de Koch

Também vemos, na figura 2.6, a característica fractal de auto similaridade no floco de neve de Koch.

As divisões na construção do floco de neve de Koch é a mesa da construção da curva de Koch, portanto, neste a dimensão fractal também é dada por:

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26.$$

2.6 Estruturas de Sierpinski

Esta seção dedicada ao estudo de estruturas fractais que têm todas o mesmo procedimento de construção, estas estruturas foram objeto de pesquisa do matemático polonês *Waclaw Sierpinski* (1882-1969).

2.6.1 Triângulo de Sierpinski

A primeira estrutura que vamos estudar, foi introduzida por Sierpinski em 1915, e é conhecida como **triângulo de Sierpinski**, para construí-lo consideramos um triângulo equilátero, que indicaremos por T_0 , e procedemos da seguinte maneira:

1º Passo: Removemos do triângulo inicial T_0 o triângulo equilátero central T_c definido pelos pontos médios de T_0 , obtendo assim a estrutura T_1 constituída por três triângulos equiláteros todos de lado $\frac{l}{2}$, mais precisamente esta estrutura é obtida retirando de T_0 o triângulo equilátero central T_c .

2º Passo: Em seguida, em cada um dos três triângulos de T_1 , obtidos no **1º Passo**, aplicamos o procedimento do **1º Passo** obtendo uma estrutura constituída por 9 triângulos equiláteros.

3º Passo: Em cada um dos 9 triângulos equiláteros obtidos no **2º Passo**, aplicamos o procedimento do **1º Passo** obtendo uma estrutura com 27 triângulos equiláteros.

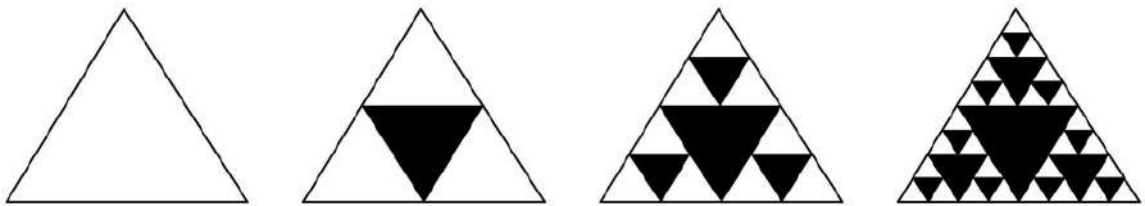


Figura 2.7: Passos da construção do triângulo de Sierpinski
Fonte: Tese de mestrado de Raquel Nunes [20]

4º Passo: Repetindo o processo sucessivamente obtemos a estrutura conhecida como triângulo de Sierpinski.

Na construção do triângulo de Sierpinski, em cada passo, são “retirados” triângulos equiláteros que cujas arestas têm uma relação de proporção com o comprimento l da aresta do triângulo original T_0 , é claro que a área A do triângulo T_0 é dada por $A = \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{4}$, assim temos:

Informações do triângulo de Sierpinski em cada passo					
	Quant. de lados	Compr. do lado	Compr. da curva	Área de cada triângulo	Área total
1º Passo	3	$\frac{l}{2}$	$3 \cdot l \times \frac{3}{2}$	$\frac{A}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4^2} \cdot l^2$	$\frac{3}{4} \cdot A = \frac{3\sqrt{3}}{4^2} \cdot l^2$
2º Passo	3^2	$\frac{l}{2^2}$	$3 \cdot l \times \left(\frac{3}{2}\right)^2$	$\frac{A}{4^2} = \frac{\sqrt{3}}{4^3} \cdot l^2$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot A = \frac{3^2\sqrt{3}}{4^3} \cdot l^2$
3º Passo	3^3	$\frac{l}{2^3}$	$3 \cdot l \times \left(\frac{3}{2}\right)^3$	$\frac{A}{4^3} = \frac{\sqrt{3}}{4^4} \cdot l^2$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot A = \frac{3^3\sqrt{3}}{4^4} \cdot l^2$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
nº Passo	3^n	$\frac{l}{2^n}$	$3 \cdot l \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$	$\frac{A}{4^n} = \frac{\sqrt{3}}{4^{n+1}} \cdot l^2$	$\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot A = \frac{3^n\sqrt{3}}{4^{n+1}} \cdot l^2$

Das informações da tabela acima concluímos que o comprimento da curva definida pelo triângulo de Sierpinski é dado por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot l \times \left(\frac{3}{2}\right)^n = 3 \cdot l \times \infty = \infty.$$

Já a área da região limitada pelo triângulo de Sierpinski é dada por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \sqrt{3}}{4^{n+1}} \cdot l^2 = \frac{l^2}{4} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{l^2}{4} \times 0 = 0.$$

Logo, o triângulo de Sierpinski quando $n \rightarrow \infty$ é uma curva de comprimento infinito, que limita uma região do plano de área nula.

Auto similaridade e Dimensão Fractal do Triângulo de Sierpinski

Nas iterações dadas na figura 2.7 vemos a característica fractal de auto similaridade no triângulo de Sierpinski.

Além disso, na construção do triângulo de Sierpinski o fator de redução é $r = \frac{1}{2}$ e em cada triângulo são obtidas 3 novos triângulos, portanto $N = 3$,

$$d = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,58.$$

Triângulo de Pascal e Triângulo de Sierpinski

Em 1654 o matemático francês *Blaise Pascal* (1623-1662) *Traité du triangle arithmétique* (Tratado do triângulo aritmético) no qual apresenta o hoje conhecido triângulo de Pascal ou triângulo aritmético, em que os elementos são C_n^p os coeficientes binomiais, com n e p números naturais, com $p \leq n$ e $C_n^p = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$.

					1																																
					1		1																														
					1		2		1																												
					1		3		3		1																										
					1		4		6		4		1																								
					1		5		10		10		5		1																						
					1		6		15		20		15		6		1																				
					1		7		21		35		35		21		7		1																		
					1		8		28		56		70		56		28		8		1																
					1		9		36		84		126		126		84		36		9		1														
					1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1												
					1		11		55		165		330		462		462		330		165		55		11		1										
					1		12		66		220		495		792		924		792		495		220		66		12		1								
					1		13		78		286		715		1287		1716		1716		1287		715		286		78		13		1						
					1		14		91		364		1001		2002		3003		3432		3003		2002		1001		364		91		14		1				
					1		15		105		455		1365		3003		5005		6435		6435		5005		3003		1365		455		105		15		1		
					1		16		120		560		1820		4368		8008		11440		12870		11440		8008		4368		1820		560		120		16		1

Figura 2.8: Triângulo de Pascal

Fonte: <https://busy.org/@j1337/lion777-number-theory-primers-and-vault-8-connection-unsolvable>

Os triângulos de Pascal e de Sierpinski tem semelhança geométrica, porém além disso, podemos verificar que sobrepondo estes dois triângulos, ambos de mesmo tamanho, os números ímpares, do triângulo de Pascal, ficam sempre sobre os triângulos

preenchidos do triângulo de Sierpinski, enquanto os números pares ficam sobre os triângulos retirados no processo de construção.

Na figura abaixo podemos ver isso sobrepondo o triângulo de Pascal com oito linhas no triângulo de Sierpinski obtido no **3^o Passo**:

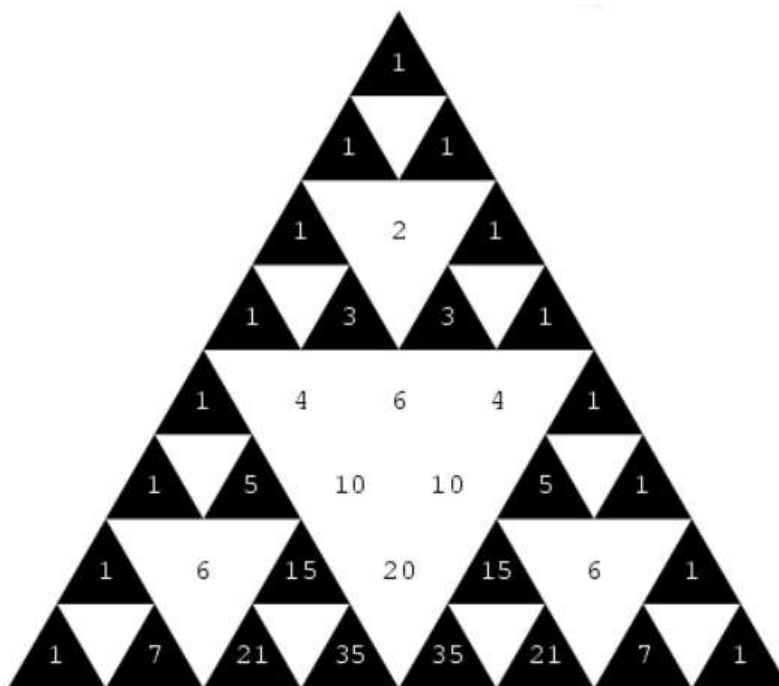


Figura 2.9: Números do triângulo de Pascal no triângulo de Sierpinski
Fonte: fisic.org/universidade-de-coimbra-v2.html?page=14

2.6.2 Tapete de Sierpinski

Para construir o **tapete de Sierpinski** iniciamos com um quadrado Q_0 dividimos seus lados em 3 partes iguais, obtendo 9 quadrados de lados de comprimento $\frac{l}{3}$, retirando o quadrado central, obtendo o **1^o Passo** do tapete. Em seguida repetimos o processo em nos oito quadrados restantes e assim sucessivamente, obtendo assim o tapete de Sierpinski.

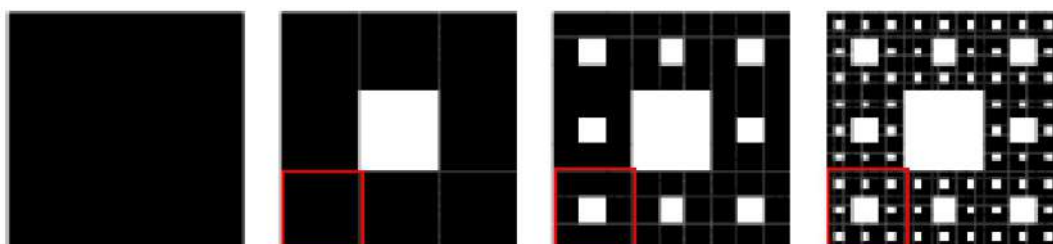


Figura 2.10: Passos da construção do tapete de Sierpinski
Fonte: Tese de mestrado de Augusto Corrêa [7]

Informações do tapete de Sierpinski				
	Quantidade de arestas	Comprimento da aresta	Área de cada quadrado	Área total
1º Passo	8	$\frac{l}{3}$	$\left(\frac{l}{3}\right)^2 = \frac{l^2}{3^2}$	$8 \times \left(\frac{l^2}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} \cdot l^2$
2º Passo	$64 = 8^2$	$\frac{l}{3^2}$	$\left(\frac{l}{3^2}\right)^2 = \frac{l^2}{3^4}$	$8^2 \times \left(\frac{l}{3^2}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot l^2$
3º Passo	$512 = 8^3$	$\frac{l}{3^3}$	$\left(\frac{l}{3^3}\right)^2 = \frac{l^2}{3^5}$	$8^3 \times \left(\frac{l}{3^3}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^3 \cdot l^2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
nº Passo	8^n	$\frac{l}{3^n}$	$\left(\frac{l}{3^n}\right)^2 = \frac{l^2}{3^{n+2}}$	$8^n \times \left(\frac{l}{3^n}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^n \cdot l^2$

Auto similaridade e Dimensão Fractal do Tapete de Sierpinski

Aqui também, nas iterações dadas na figura 2.10 vemos a característica fractal de auto similaridade no tapete de Sierpinski.

Já na construção do tapete de Sierpinski o fator de redução é $r = \frac{1}{3}$ e em cada quadrado são obtidas 8 novos quadrados, portanto $N = 8$,

$$d = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1,89.$$

2.7 Esponja de Menger

Em 1926 o matemático austríaco Karl Menger (1902- 1985) apresentou uma estrutura fractal tridimensional, enquanto ele explorava o conceito de dimensão topológica, trata-se da **esponja de Menger**, cuja construção é uma generalização das estruturas de Sierpinski, para construí-la iniciamos com um cubo C_0 de aresta a e procedemos da seguinte maneira:

1º Passo: Dividimos cada aresta do cubo em três segmentos de mesmo comprimento, obtendo em cada face nove quadrados de aresta $\frac{a}{3}$ e 27 cubos de mesmo volume, finalmente retiramos o cubo de cada face e o cubo no centro do cubo inicial C_0 , obtendo uma estrutura com 20 cubos.

2º Passo: Em seguida, em cada um dos 20 cubos, obtidos no **1º Passo**, aplicamos o mesmo procedimento obtendo uma estrutura constituída por $20 \times 20 = 20^2$ cubos.

3º Passo: A esponja de Menger é o limite deste processo depois de um número infinito de iterações.

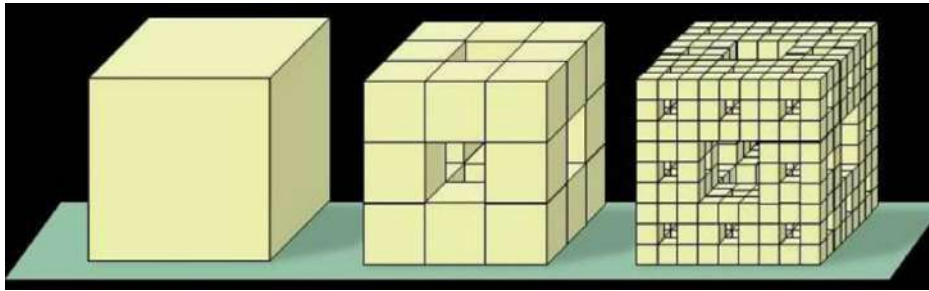


Figura 2.11: Passos da construção da esponja de Menger
 Fonte: Artigo A geometria da esponja de Menger [3]

2.7.1 Volume da Esponja de Menger

Para determinar o volume da esponja de Menger observemos que a cada iteração em cada cubo dividido obtemos 20 cubos de aresta $\frac{1}{3}$ da aresta do cubo dividido. Além disso, pela construção da esponja de Menger a cada iteração o volume da figura diminui, denotando por a o comprimento da aresta do cubo inicial, V_0 o volume do cubo inicial e V_i o volume da figura obtida na i -ésima iteração temos:

$$\begin{aligned} V_0 &= a^3 \\ V_1 &= 20 \times \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{20}{27} \cdot a^3 \\ V_2 &= 20^2 \times \left(\frac{a}{3^2}\right)^3 = \left(\frac{20}{27}\right)^2 \cdot a^3 \\ &\vdots \\ V_n &= 20^n \times \left(\frac{a}{3^n}\right)^3 = \left(\frac{20}{27}\right)^n \cdot a^3. \end{aligned}$$

Logo, $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$, a sequência dos volumes, é uma progressão geométrica (P.G.) de termo inicial V_0 e razão $q = \frac{20}{27}$, como $q < 1$, a sequência é decrescente o que já esperado pela construção.

Consequentemente, o volume da esponja de Menger é dado por

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{20}{27}\right)^n \cdot a^3 = 0 \cdot a^3 = 0.$$

2.7.2 Área da Esponja de Menger

Já para o cálculo da área na construção, em cada face, retiramos um quadrado de aresta $\frac{1}{3}$ da aresta do cubo dividido, formando um buraco com faces quatro quadrados (quadrados de face) de mesma área do quadrado retirado.

Observemos também que a área de cada face com o buraco somada com a área de um dos quadrados de face obtido é a área da face do cubo que foi dividido, portanto

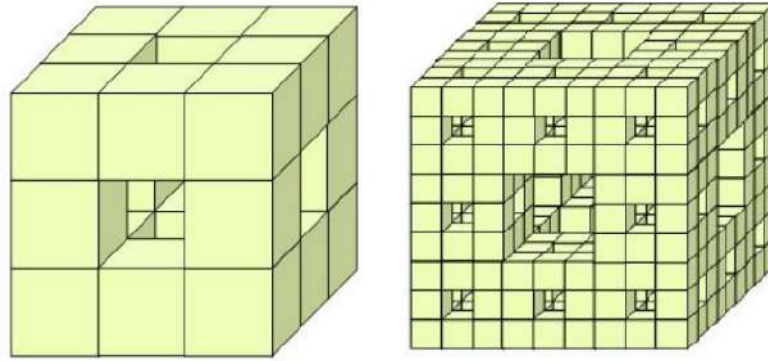


Figura 2.12: Esponja de Menger na 1ª e 2ª iterações
Fonte: Artigo A geometria da esponja de Menger [3]

na primeira iteração a área será a área do cubo C_0 adicionada com 6×3 a área de cada quadrado de face; na segunda iteração a área será a área obtida na primeira adicionada com $20 \times 6 \times 3$ a área de cada quadrado de face desta iteração, e assim sucessivamente.

Portanto, a área A_i da superfície da esponja de Menger, na i -ésima iteração é dada por:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 6 \cdot a^2 \\
 A_1 &= A_0 + \underbrace{6}_{\# \text{ faces}} \times \underbrace{3}_{\# \text{ quadrados de face}} \times \left(\frac{a}{3}\right)^2 = 6 \cdot a^2 + 2 \cdot a^2 \\
 A_2 &= A_1 + \underbrace{20}_{\# \text{ cubos incluídos}} \times \underbrace{6}_{\# \text{ faces}} \times \underbrace{3}_{\# \text{ quadrados de face}} \times \left(\frac{a}{3^2}\right)^2 = 6 \cdot a^2 + 2 \cdot a^2 + \frac{20}{9} \cdot a^2 \\
 A_3 &= A_2 + \underbrace{20^2}_{\# \text{ cubos incluídos}} \times \underbrace{6}_{\# \text{ faces}} \times \underbrace{3}_{\# \text{ quadrados de face}} \times \left(\frac{a}{3^3}\right)^2 \\
 &= 6 \cdot a^2 + 2 \cdot a^2 + 2a^2 \cdot \frac{20}{27} + 2a^2 \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^2 \\
 &\vdots \\
 A_n &= 6 \cdot a^2 + 2 \cdot a^2 + 2a^2 \cdot \frac{20}{9} + \dots + 2a^2 \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^{n-1} = 6a^2 + 2a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{20}{9}\right)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Da última igualdade segue que a área da superfície da Esponja de Menger, quando $n \rightarrow \infty$, é dada por

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(6a^2 + 2a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{20}{9}\right)^{n-1} \right) = \infty,$$

pois $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{20}{9}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $q = \frac{20}{9} > 1$, portanto é uma série divergente e seu limite tende ao infinito.

Assim, concluímos que o fractal esponja de Menger é uma estrutura tridimensional que tem volume nulo e área infinita.

Na tabela abaixo resume toda a discussão acima, na qual indicamos por I_0 o cubo sem ter sofrido nenhuma iteração e I_i a i -ésima iteração.

Dados obtidos nas iterações da Esponja de Menger				
Iteração	Comprimento da aresta	Quantidade de cubos	Volume da figura	Área da superfície esponja
I_0	$a = \frac{a}{3^0}$	$20^0 = 1$	$V_0 = a^3$	$A_0 = 6a^2$
I_1	$\frac{a}{3} = \frac{a}{3^1}$	$20^1 = 20$	$V_1 = 20 \times \left(\frac{a}{3}\right)^3$ $= \frac{20}{27} \times a^3$	$A_1 = 6a^2 + 20^0 \times 3 \times 6 \left(\frac{a}{3}\right)^2$
I_2	$\frac{a}{9} = \frac{a}{3^2}$	$20^2 = 400$	$V_2 = 20^2 \times \left(\frac{a}{3^2}\right)^3$ $= \left(\frac{20}{27}\right)^2 \times a^3$	$A_2 = 6a^2 + 20^0 \times 3 \times 6 \left(\frac{a}{3}\right)^2$ $+ 20^1 \times 3 \times 6 \times \left(\frac{a}{3^2}\right)^2$
I_3	$\frac{a}{27} = \frac{a}{3^3}$	20^3	$V_3 = 20^3 \times \left(\frac{a}{3^3}\right)^3$ $= \left(\frac{20}{27}\right)^3 \times a^3$	$A_3 = 6a^2 + 20^0 \times 3 \times 6 \left(\frac{a}{3}\right)^2$ $+ 20^1 \times 3 \times 6 \times \left(\frac{a}{3^2}\right)^2$ $+ 20^2 \times 3 \times 6 \times \left(\frac{a}{3^3}\right)^2$
I_4	$\frac{a}{81} = \frac{a}{3^4}$	20^4	$V_4 = 20^4 \times \left(\frac{a}{3^4}\right)^3$ $= \left(\frac{20}{27}\right)^4 \times a^3$	$A_4 = 6a^2 + 20^0 \times 3 \times 6 \left(\frac{a}{3}\right)^2$ $+ 20^1 \times 3 \times 6 \times \left(\frac{a}{3^2}\right)^2$ $+ 20^2 \times 3 \times 6 \times \left(\frac{a}{3^3}\right)^2$ $+ 20^3 \times 3 \times 6 \times \left(\frac{a}{3^4}\right)^2$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
I_n	$\frac{a}{3^n}$	20^n	$V_n = 20^n \times \left(\frac{a}{3^n}\right)^3 =$ $\left(\frac{20}{27}\right)^n \times a^3$	$A_n = 6a^2 + 20^0 \times 3 \times 6 \left(\frac{a}{3}\right)^2$ $+ \dots +$ $20^{n-1} \times 3 \times 6 \times \left(\frac{a}{3^n}\right)^2$

Auto similaridade e Dimensão Fractal da Esponja de Menger

Observemos que na figura 2.11 vemos a característica fractal de auto similaridade na esponja de Menger.

Como já vimos anteriormente, em sua construção o fator de redução é $r = \frac{1}{3}$ e em cada cubo são obtidas 20 novos cubos, portanto $N = 20$,

$$d = \frac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2,73.$$

CAPÍTULO 3

OFICINAS

Neste capítulo apresentadas as oficinas: **Degraus Fractais** e **Esponja de Menger**, que têm o objetivo de desenvolver direta e indiretamente algumas noções da *Geometria Fractal*, aqui todo o processo de construção dos modelos é explicitado através de figuras, todas produzidas pelo autor desta dissertação.

Propomos que o professor apresente alguns exemplos de fractais geométricos, como os apresentados no capítulo 2 e introduza a noção de fractal em aulas expositivas dialogadas com a inclusão de recursos como projetor multimídia e impressões, a fim despertar o interesse, estimular a participação dos alunos e guiar o desenvolvimento progressivo dos conhecimentos que serão abordados nas oficinas.

Ressaltamos que as oficinas foram aplicadas em turmas do 6^o e 7^o anos do Ensino Fundamental II da *Escola Municipal Santa Rita* em turmas do 9^o ano do Ensino Fundamental II e 2^o e 3^o anos do Ensino Médio do *Colégio Estadual Pinto de Aguiar*, com uma média de 30 estudantes por turma.

3.1 Oficina 1 - Degraus Fractais

A primeira atividade é a construção de degraus centrais, os **degraus fractais**, uma atividade introdutória da geometria fractal, que pode ser aplicada tanto em aulas de Matemática do ensino fundamental como do ensino médio.

3.1.1 Preliminares

Sinopse:

Esta é uma atividade em que, através de dobraduras, se constrói degraus que têm uma estrutura fractal.

Objetivos:

- Introduzir e desenvolver o conteúdo abordado na construção dos degraus fractais;
- Auxiliar o aluno na construção intuitiva do conhecimento;
- Instigar a curiosidade e o envolvimento dos alunos durante as aulas.

Materiais necessários: Lápis, borracha, régua, tesoura e folha de papel (tipo A4).

Duração 2 aulas de 50 minutos.

Equipes: A turma deve dividida em grupos de 4 alunos.

Conteúdos: Geometria plana (medidas de lados, perímetro, área e volume), números racionais, potenciação, razão e proporção, progressão geométrica, séries numéricas e limite de função.

Séries a ser aplicada: 6^o ao 9^o ano do ensino fundamental e 1^o ao 3^o ano do ensino médio.

3.1.2 Indicações para o Professor

Antes da Execução:

O professor, inicialmente, distribui os materiais e elucida aos alunos como devem ser feitas as dobras e os cortes, evidenciando a importância da atenção deve haver em cada procedimento.

Em seguida, deve informar aos alunos que os fractais são modelos obtidos na infinitésima iteração, e que em qualquer tipo de modelagem, o número de iterações é bastante limitado.

Durante a Execução:

A obtenção dos degraus fractais ocorre gradativamente, a cada novo degrau, é importante guiar o processo de aprendizagem os alunos, elucidando os pontos que desencadearão a compreensão do conteúdo proposto.

Após a Execução:

Após a obtenção dos degraus fractais, deve ser feita uma análise final da figura obtida. É importante reforçar as características dos fractais presente nos degraus, principalmente a autossimilaridade observada a cada iteração.

Posteriormente, é relevante salientar a possibilidade de novos tipos de degraus, considerando diferentes cortes e razões. Neste momento, é importante que o professor disponha de modelos distintos ao que foi criado pelo aluno, desta forma cada novo modelo criado pela equipe contribuirá na compreensão e fundamentação do conteúdo matemático em estudo.

Por fim, faz-se a verificação da aprendizagem através de atividades norteadoras, aqui sugerimos algumas atividades de fixação a serem realizadas pelos alunos.

3.1.3 Realização da Oficina

Por ser uma atividade que possibilita a abordagem de conteúdos matemáticos como geometria plana (medidas dos lados, perímetro, área e volume), números racionais, potenciação, razão e proporção, progressão geométrica, séries e até limite, fica a critério do professor o momento que ele decidirá aplicar a oficina. O professor inicia a oficina lembrando aos alunos que os fractais são os modelos obtidos na infinitésima iteração, e que em qualquer tipo de modelagem, o número de iterações é bastante limitado. Após isso, inicia-se a construção do cartão Degraus centrais.

1º Passo: Distribui-se uma folha de ofício tamanho A4 para cada estudante;

2º Passo: Em seguida, pede-se que dobre a folha ao meio horizontalmente (no seu lado mais comprido), como mostra a figura a seguir. Pedir que a dobra seja bem vincada;



Figura 3.1: Folha após ser realizada a 1ª dobra

3º Passo: Nesta etapa, dividimos a base do retângulo em 4 partes iguais, como mostra a figura;

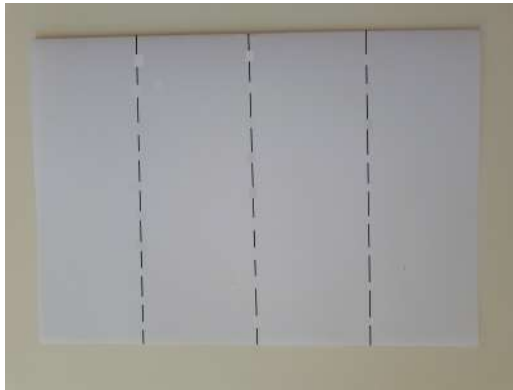


Figura 3.2: Folha após ser realizada a 2ª dobra

4º Passo: Dentre as 3 marcas de divisões, corta-se na primeira e na terceira marca até a metade da folha (a medida pode ser marcada dobrando a folha ao meio horizontalmente ou com auxílio de uma régua), como na figura;



Figura 3.3: Folha após ser realizada a 3ª dobra

5º Passo: Agora, dobra-se o retângulo formado após o corte para dentro da folha, conforme a figura;



Figura 3.4: Folha após ser realizada a 4ª dobra

6º Passo: Abre-se agora a folha dobrada, percebendo o primeiro degrau



Figura 3.5: Folha após ser realizada a 5ª dobra

7º Passo: Para se construir mais degraus, basta repetir o mesmo procedimento nos retângulos a partir da terceira etapa.

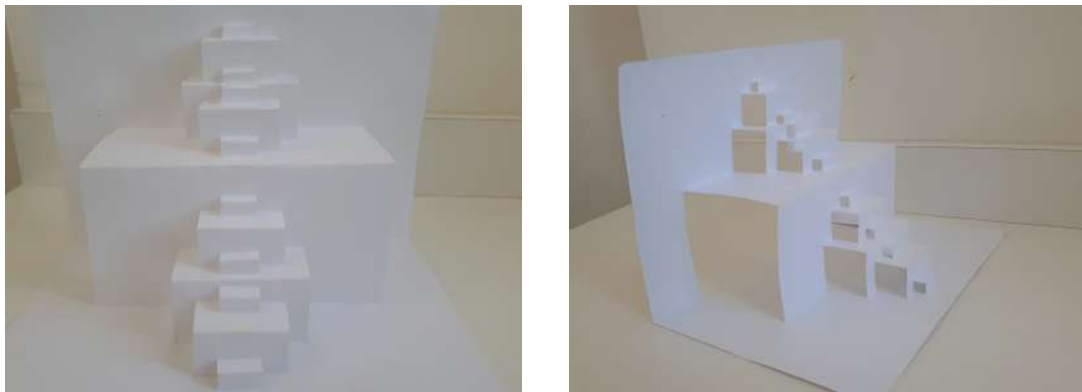


Figura 3.6: Folha após ser realizada a 6ª dobra e o degrau fractal

- Observações 3.1.**
1. *As divisões realizadas no 3º Passo: podem ser em razões diferentes. Ao se dividir, nesta etapa, a base do retângulo em 3 partes iguais e recortando o terço central, pode-se relacionar a criação do primeiro degrau com o conjunto de Cantor.*
 2. *A cada novo corte e dobra, obtemos paralelepípedos menores semelhantes aos anteriores, a razão de redução de cada novo paralelepípedo pode ser encontrada pelos alunos por comparação da medida dos lados, perímetros, áreas ou volumes.*
 3. *Também é possível utilizar folhas de papel coloridas ao fundo dos degraus, como na figura 3 a seguir:*



Figura 3.7: Degrau fractal com fundo colorido

3.1.4 Atividades a partir da Oficina Degraus Fractais

Questão 1 Durante a construção dos Degraus Fractais, percebemos que a cada nova dobra e corte (iteração), surgem **novos degraus**. Complete a tabela abaixo, indicando a quantidade de degraus novos a cada etapa.

Etapa	1	2	3	4	5
Quantidade de degraus					

Sugestão: Durante a construção, oriente os alunos para que percebam a relação entre a quantidade de degraus e as potências de 2.

Questão 2 Observe que a quantidade de novos degraus aumenta progressivamente e de maneira ordenada. Explique como ocorre. Em seguida, responda: trata-se de uma **progressão aritmética (P.A.)** ou **progressão geométrica (P.G.)**?

Sugestão: Ter previamente apresentado aos alunos os conceitos de P.A. e P.G.

Questão 3 Calcule qual será a quantidade de degraus:

- (a) 8^a etapa (b) 10^a etapa (c) 12^a etapa (d) 15^a etapa

Sugestão: Após a obtenção dos resultados, recalcúl-os utilizando a fórmula do termo geral da P.G.

Questão 4 Qual o **total** de degraus obtidos até a 5^a etapa da oficina? Caso continuemos a construção até a 10^a etapa, qual será o total de degraus?

Sugestão: Indicar para os alunos a utilização da fórmula da P.G. finita:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Questão 5 Ao considerarmos apenas o comprimento da maior aresta de cada degrau, que razão obtemos entre as arestas dos degraus da 1^a etapa e 2^a etapa? E entre os degraus da 2^a etapa e 3^a etapa?

Sugestão: Verificar se o resultado se manterá para as etapas seguintes.

3.1.5 Considerações sobre a aplicação da Oficina

Durante a aplicação desta oficina em uma turma de 6^o ano do Ensino Fundamental II, foi notória a empolgação e participação dos alunos. Ao trabalharmos com razão e proporção, os alunos puderam perceber as relações de proporcionalidade sendo obtidas após cada dobra e cada corte. A sinergia entre a construção e compreensão coletiva resultaram numa aprendizagem sólida e significativa.

Quando a oficina é utilizada como aula introdutória do conteúdo, é possível perceber uma melhora bastante significativa no desempenho e na participação dos alunos. Seu rendimento cresce, sua autoestima é enriquecida e sua aprendizagem se dá de forma leve e segura.

A generalização do conteúdo deve ocorrer somente após esse primeiro contato. A partir do conhecimento prévio dos alunos, aliado ao conhecimento construído por eles e para eles durante a execução dos passos da oficina, temos uma base cognitiva segura que possibilita o desenvolvimento da aprendizagem.

3.2 Oficina 2 Esponja de Menger através de Origami

A segunda atividade é a construção da esponja de Menger através de origami, uma atividade que possui diversos níveis de dificuldade, de acordo com as iterações, que pode ser aplicada tanto em aulas de Matemática do ensino fundamental como do ensino médio.

3.2.1 Preliminares

Sinopse:

Esta é uma atividade em que, utilizando a técnica de origami, se constrói cubos e a partir destes a estrutura fractal da esponja de Menger.

Objetivos:

- Introduzir e desenvolver o conteúdo abordado na construção da esponja de Menger;
- Auxiliar o aluno na construção intuitiva do conhecimento;
- Instigar a curiosidade e o envolvimento dos alunos durante as aulas.

Materiais necessários: Folha de papel coloridas (tipo A4), cada uma com a impressão de um quadrado de lado 15 *cm*, projetor multimídia.

Duração 4 aulas de 50 minutos.

Equipes: A turma deve dividida em grupos de 4 alunos.

Conteúdos: Geometria plana (medidas de lados, perímetro, área e volume), números racionais, potenciação, razão e proporção, progressão geométrica, séries numéricas e limite de função.

Séries a ser aplicada: 6^o ao 9^o ano do ensino fundamental e 1^o ao 3^o ano do ensino médio.

3.2.2 Indicações para o Professor

Antes da Execução:

O professor, inicialmente, distribui os materiais e elucida aos alunos como devem ser feitas as dobras, evidenciando a importância da atenção que deve haver em cada procedimento.

Em seguida, deve informar aos alunos que os fractais são modelos obtidos na infinitésima iteração, e que em qualquer tipo de modelagem, o número de iterações é bastante limitado.

A exposição do modelo, previamente construído pelo professor ou exposto virtualmente, deve ser feita a fim de que os alunos consigam visualizar o formato do modelo que estarão construindo em breve.

Durante a Execução:

Para garantir que a construção do modelo ocorra de forma correta e sem folgas entre as peças, é extremamente importante observar a qualidade das peças produzidas pelos alunos. Neste momento, o uso do projetor multimídia é importante para auxiliar o professor e os alunos em relação às etapas da oficina.

Após terem sido confeccionadas todas as peças necessárias para a montagem do modelo, é necessário que o professor oriente os alunos, em cada grupo, quanto à montagem. É recomendado que o professor já tenha feito a montagem do modelo previamente à oficina, para que o mesmo perceba as dificuldades e os melhores caminhos durante a montagem.

Após a Execução:

Após a montagem da Esponja de Menger, deve ser feita uma análise as etapas de iteração, com o modelo físico, os alunos devem ser orientados para que, através da análise e do manuseio do modelo, percebam as mudanças ocorridas a cada iteração. Desta forma a aprendizagem ocorrerá de forma espontânea, coletiva e verdadeira.

Por fim, faz-se a verificação da aprendizagem através de atividades norteadoras, aqui sugerimos algumas atividades de fixação a serem realizadas pelos alunos.

3.2.3 Realização da Oficina

Iniciamos a oficina distribuindo folhas de papel (tipo A4), cada uma com impressão de um quadrado de lado 15 cm, para que os alunos cortem os quadrados ou distribuí-se já os quadrados cortados, conforme a figura abaixo.

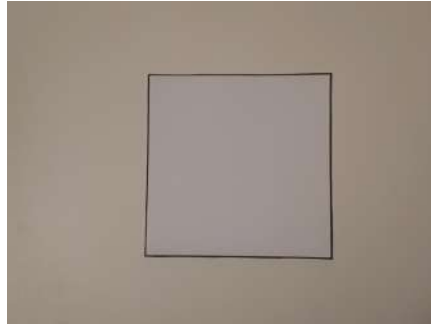


Figura 3.8: Folha de papel com quadrado traçado

A seguir as etapas para a construção da esponja de Menger com Origami:

1º Passo: Dobramos o quadrado na diagonal, firmamos bem na dobra e, em seguida, o desdobramos:

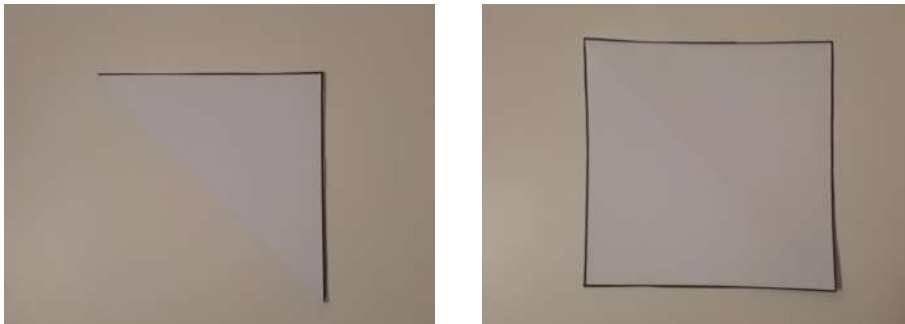


Figura 3.9: Dobradura do quadrado pela diagonal

2º Passo: Dobramos o quadrado ao meio verticalmente, firmamos bem a dobra e abrimos novamente.

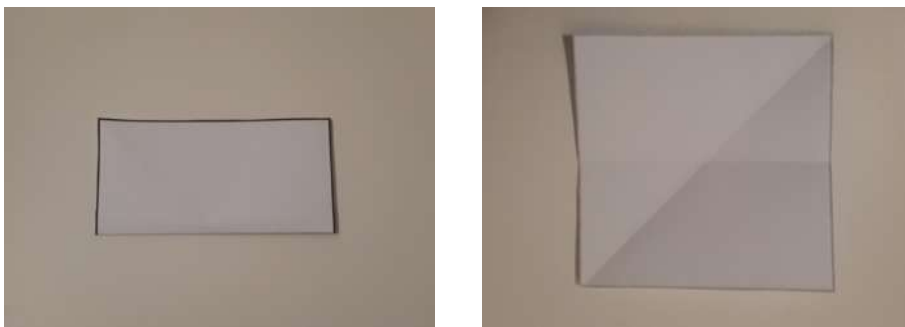


Figura 3.10: Quadrado após ser realizada a 2ª dobra

3º Passo: Com a folha dividida em duas metades, dobramos cada uma na metade, ficamos a dobra e abrimos novamente, conforme figuras abaixo:

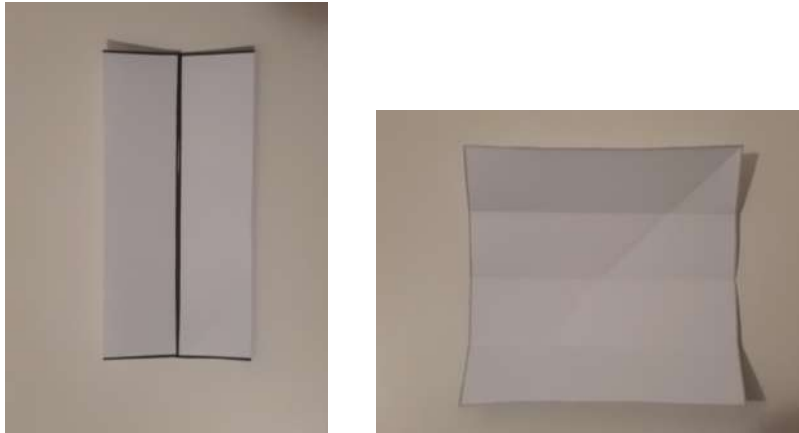


Figura 3.11: Quadrado após ser realizada a 3ª e 4ª dobras

4º Passo: Em seguida, na mesma direção da diagonal, dobramos os vértices opostos até a dobra que acabamos de construir, conforme demonstrado na figura a seguir:



Figura 3.12: Dobraduras na diagonal do quadrado

5º Passo: Dobramos agora os triângulos formados na bissetriz de um de seus ângulos, sobrepondo a diagonal a um dos catetos, conforme se observa na figura a seguir:

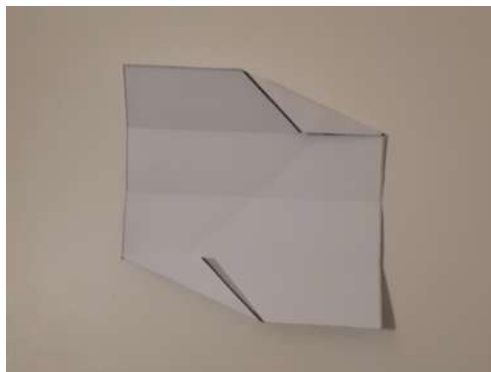


Figura 3.13: Dobradura na bissetriz de um dos ângulos

6º Passo: Dobramos o quadrado para a posição do **3º Passo** como na figura abaixo:

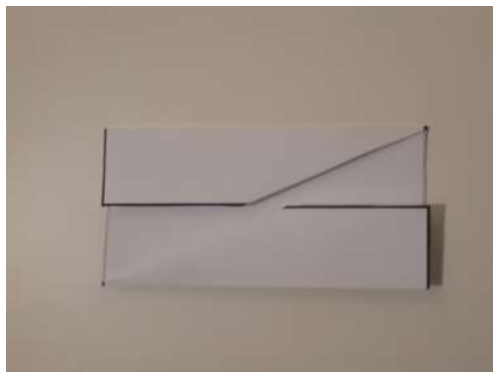


Figura 3.14: Dobradura para a posição do **3º Passo**

7º Passo: Em seguida, com cada uma das partes que não foram dobradas, formamos dois triângulos, como vemos a seguir:



Figura 3.15: Dobradura formando dois triângulos

8º Passo: Colocamos os triângulos formados nas aberturas existentes em cada aba oposta, formando assim um paralelogramo.



Figura 3.16: Triângulos formando um paralelogramo

9º Passo: Por fim, viramos para cima a face do paralelogramo que não possui abertura e dobramos de modo a formar um quadrado.



Figura 3.17: Formando um quadrado

10º Passo: E assim, formamos a peça que utilizaremos para construir nossos modelos.

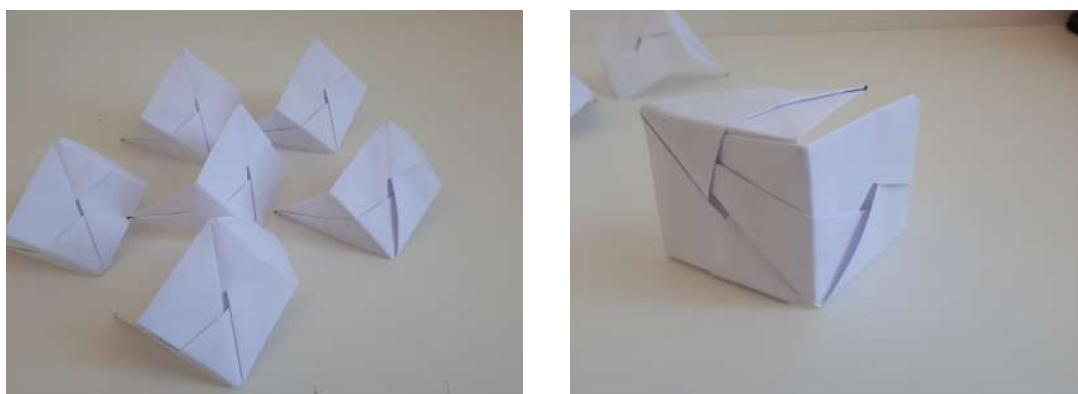


Figura 3.18: Peças para construção do modelo - parte 1

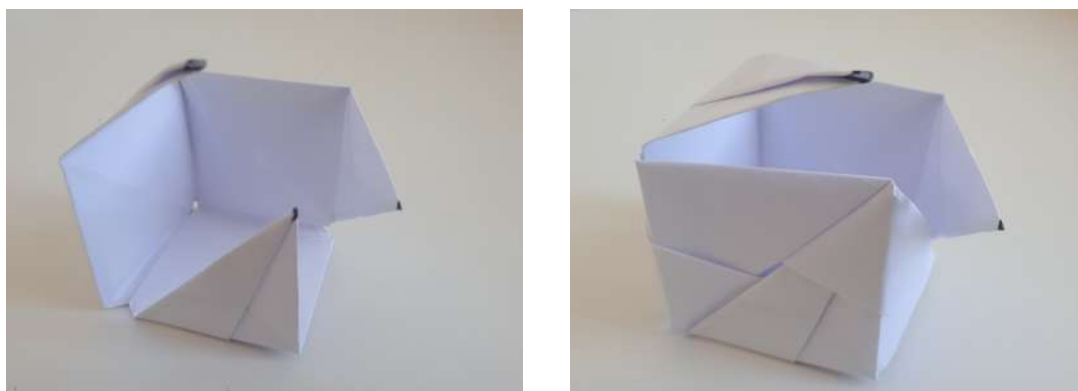


Figura 3.19: Peças para construção do modelo - parte 2

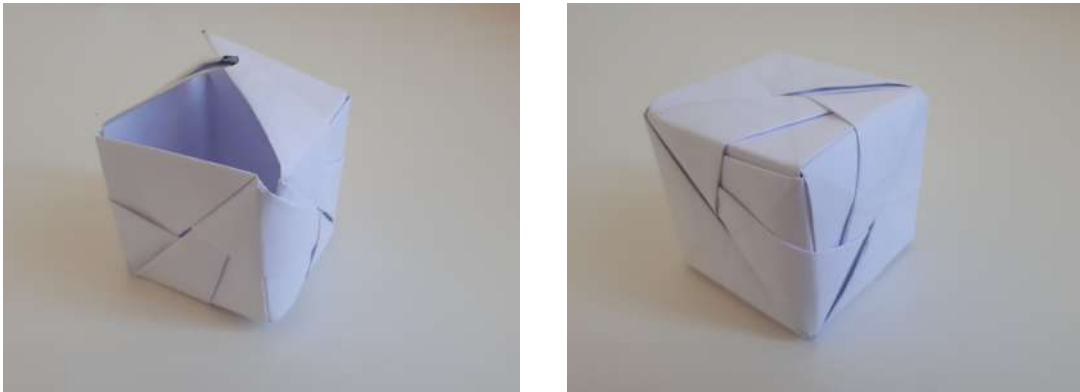


Figura 3.20: Peças para construção do modelo - parte 3

3.2.4 Atividades a partir da Oficina Esponja de Menger.

Questão 1 Quais figuras geométricas podemos obter durante a construção da peça inicial?

Sugestão: Durante a construção de uma das peças, perguntar aos alunos sobre a figura geométrica obtida em cada etapa?

Questão 2 Na primeira iteração, como foi observado durante a oficina, os cubos menores centrais de cada face e o cubo menor do centro são retirados. Supondo que a aresta do cubo inicial vale $1 m$, qual o volume antes da 1ª iteração? E após?

Questão 3 Complete a tabela abaixo. Considere que a aresta do cubo inicial vale $1 m$.

Iteração	Comprimento da aresta	Quantidade de cubos	Área da face	Volume da estrutura
0				
1				
2				

Sugestão: Utilize o modelo construído para que os alunos verifiquem os dados da 1ª iteração. Para obter os dados da 2ª iteração, faça uma análise coletiva utilizando o projetor multimídia.

Questão 4 O que deve ocorrer com o volume e com a área da superfície da Esponja de Menger na sua infinitésima iteração? Explique.

Sugestão: Permita que a discussão se inicie nos grupos menores (com 4 alunos cada), e em seguida abra a discussão para toda a sala.

Questão 5 Demonstre os resultados obtidos na questão 4 utilizando os conceitos de limite.

Sugestão: Introduza inicialmente aos alunos os conceitos de limites que tendem a zero e ao infinito.

3.2.5 Considerações sobre a aplicação da Oficina

A oficina esponja de Menger com origami foi aplicada em turmas do 2º ano e 3º ano do ensino médio. Após a explanação inicial sobre a esponja de Menger e suas propriedades, os alunos de ambas as turmas não apresentaram nenhuma dificuldade na compreensão.

Não muito familiarizados com o **origami**, *a arte tradicional japonesa de dobrar papel*, os alunos só produziram peças que poderiam ser usadas na montagem da esponja após algumas tentativas. Superada esta dificuldade, a produção das peças para a montagem seguiu com tranquilidade.

Devido ao material ter sido folha de papel tipo A4, a maleabilidade do papel não contribuiu na solidez do modelo. Contudo, a substituição deste papel por matérias como papel cartão ou papel seda mostrou uma grande melhora no processo da montagem.

A possibilidade da manipulação de um modelo abstrato traz contribuições para o processo de ensino aprendizagem. Diferentemente de uma aula expositiva, na qual a compreensão demanda um nível de abstração nem sempre alcançado pelos alunos, ter a possibilidade de manipular o objeto auxilia no entendimento dos conceitos. O contato direto com a ideia e com o processo de descoberta do conteúdo corrobora diretamente com a proposição de conjecturas matemáticas, seguida de discussões que visam contribuir com a consolidação do conhecimento desenvolvido coletivamente.

Observação 3.2. *Mesmo não sendo o nosso público-alvo, esta oficina também foi aplicada com alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Bahia. Os conceitos da Geometria Fractal ainda eram desconhecidos para a grande maioria dos alunos, inclusive para aqueles que se encontram nos últimos semestres do curso. Apesar de terem reconhecido os fractais clássicos como o conjunto de Cantor e o triângulo de Sierpinski, não tinham conhecimento de que se inseriam nesta geometria, tampouco de suas propriedades.*

Fotos da aplicação da oficina da esponja de Menger com origami

Na oficina desenvolvemos dois modelos da esponja de Menger, o primeiro, referente a iteração de nível zero da esponja de Menger, é um cubo formado por 6 peças, conforme foi mostrado no **10º Passo** da construção.

Já para desenvolvermos o segundo modelo, utilizamos 72 peças, confeccionadas em folhas de papel (tipo A4) coloridas, a construção pode ser visualizada nas fotos a seguir.

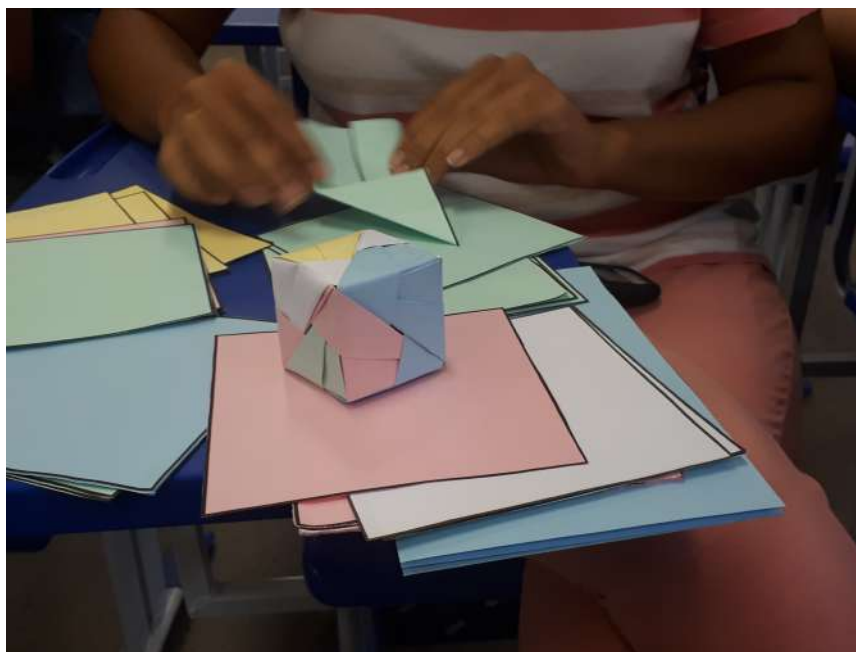


Figura 3.21: Montagem do cubo



Figura 3.22: Dobradura das peças restantes após a montagem do cubo



Figura 3.23: Folhas dobradas pelos alunos

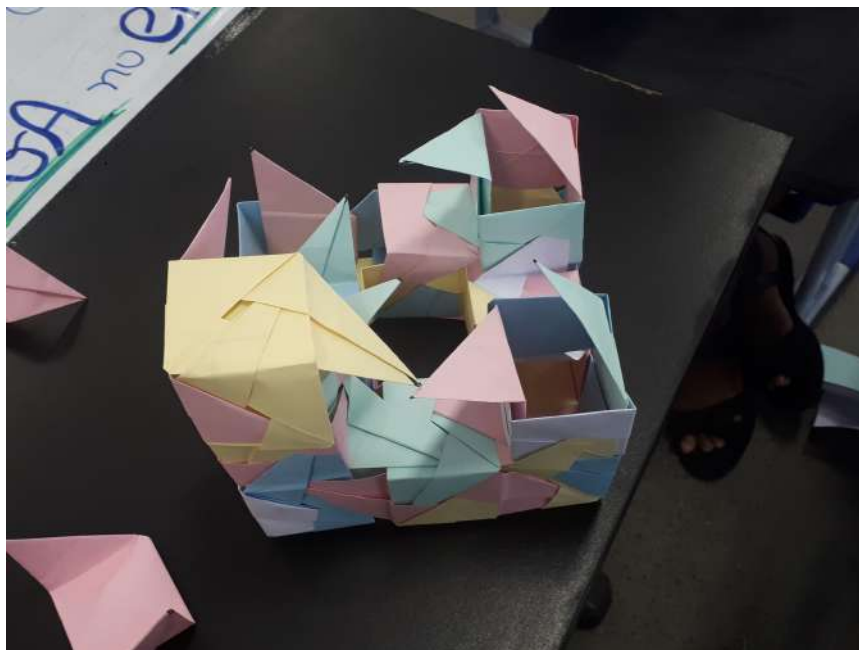


Figura 3.24: Início da montagem da 1ª iteração da esponja de Menger



Figura 3.25: A precisão das dobras iniciais garante um melhor encaixe das peças

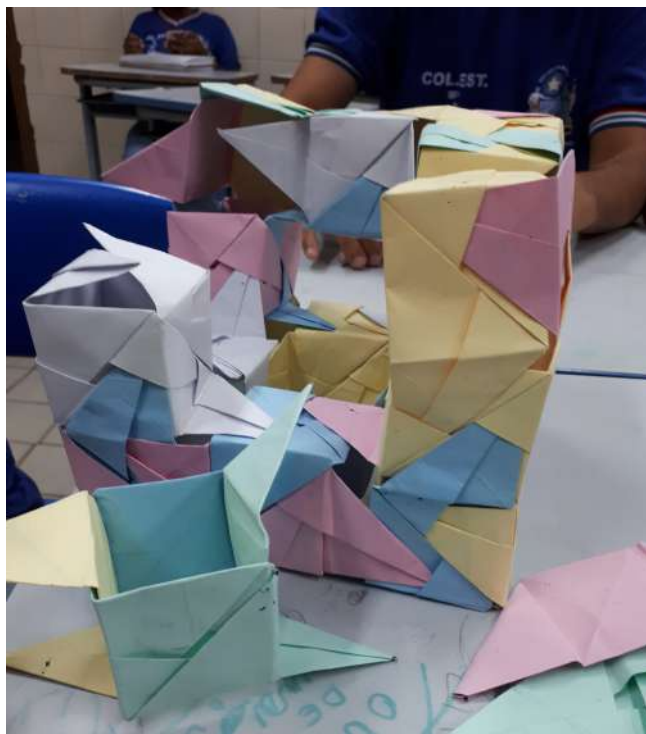


Figura 3.26: A cada momento é verificada a precisão dos encaixes



Figura 3.27: Inicialmente as esponjas de Menger foram montados em trios

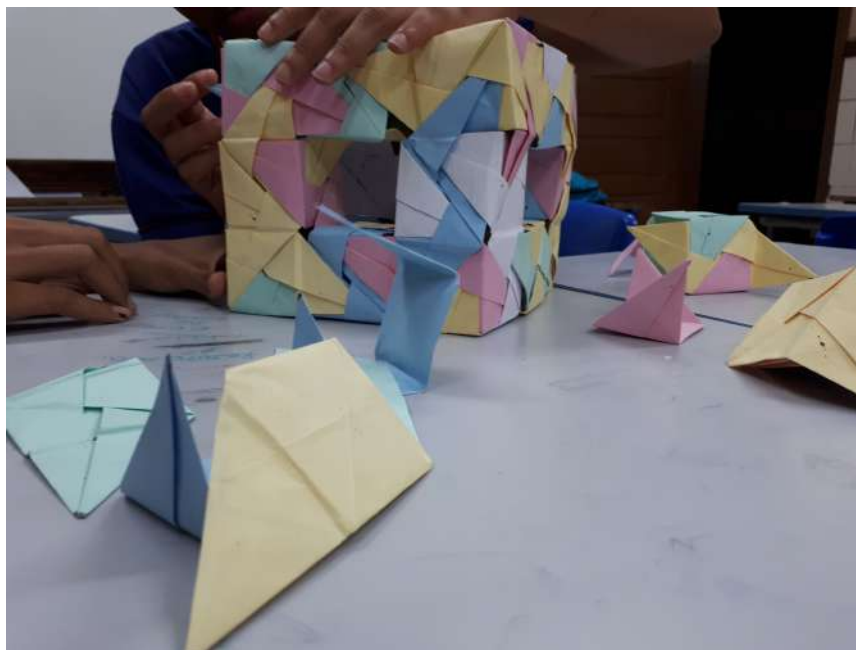


Figura 3.28: Primeira esponja de Menger a ser finalizada

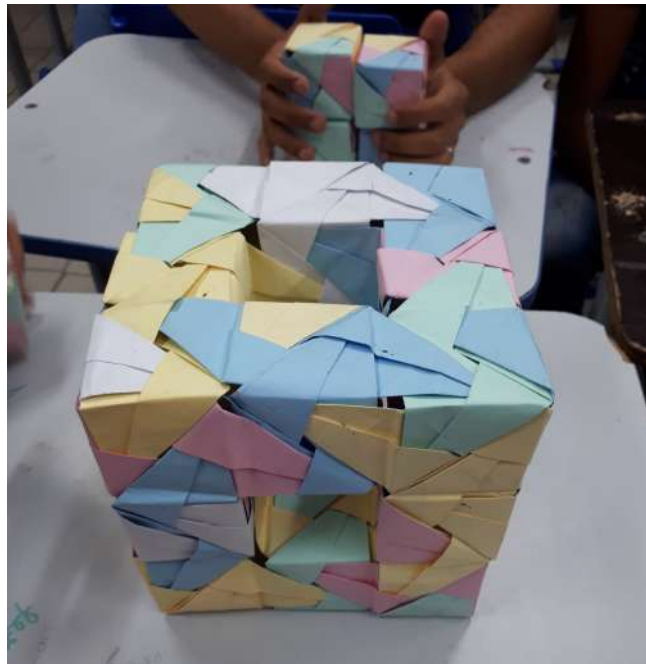


Figura 3.29: Esponja de Menger vista de cima



Figura 3.30: Outra perspectiva da esponja de Menger

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo introduzir, através de oficinas, uma perspectiva no ensino-aprendizagem de Geometria, bem como um modo de tornar o estudo e a construção dos conteúdos matemáticos, especificamente de Geometria, mais atraentes, concretos e vultosos.

Historicamente a *Geometria*, enquanto área de conhecimento da Matemática, tem sido colocada em segundo plano, muitas vezes com professores que tem pouco conhecimento da área e, conseqüentemente, alunos com dificuldades em explorar questões que envolvam conceitos geométricos, pois em geral estes estão limitados a construir figuras geométricas e a aprender sobre elas utilizando apenas lápis, papel e instrumentos de desenho. Assim, a vivência de Geometria fica limitada e pouco relevante para os alunos.

Desde o final dos anos 80 a questão do ensino de Geometria vem sendo objeto de estudo de pesquisadores da Educação Matemática, sendo a dissertação *O abandono do ensino de Geometria: uma visão histórica* ([24]), de Regina Maria Pavanello, o trabalho precursor nesta discussão e essencial para entender as nuances desta situação.

A mudança neste cenário requer ações e discussões que fogem ao escopo deste trabalho, no entanto opinamos que a utilização da *Geometria Fractal* no ensino de Geometria é uma das ferramentas possíveis para contribuir com a mudança desse cenário. Não somente através de oficinas, projetos e trabalhos pontuais, mas também é possível repensar metodologias antigas e ineficazes, de modo a transformá-las e inseri-las na contemporaneidade e na realidade dos alunos.

Especificamente no nosso caso, durante as oficinas, constatamos que o sucesso na compreensão, construção e análise dos modelos fractais permitiu que surgisse nos alunos, de forma gradativa, a confiança em seus próprios conhecimentos matemáticos. Opinamos que quando os alunos percebem a possibilidade de aprender os conteúdos através de tentativas e erros, e aliam essa possibilidade com a ludicidade proporcionada pela atividade, eles têm a sua autoconfiança e autoestima incitadas. Fazer com que o aluno se sinta capaz de aprender e estimular sua autoestima é pré-requisito para o sucesso do processo de ensino-aprendizagem.

Aplicativos computacionais matemáticos, a exemplo do *Geogebra* e do *Cabri*, são ferramentas auxiliares que fortalecem e ressignificam esta proposta didática, pois nos permite visualizar os aspectos dos fractais de autossimilaridade e iterações infinitas durante a construção de cada modelo. Já os aplicativos computacionais específicos da Geometria Fractal, tais como o *Fractal Explorer*, o *Ultrafractal* e o *Tiera-zon*. Estes aplicativos ferramentas excelentes na criação e animação de fractais diversos.

As múltiplas possibilidades de se contextualizar a Geometria Fractal por meio de diversos conteúdos matemáticos, seja dentro ou fora dos limites da sala de aula, nos permite vislumbrar a elaboração de outras atividades dirigidas pelo aluno utilizando esta geometria. Neste sentido, em um próximo momento, pretendemos dar continuidade a este trabalho, incluindo inclusive atividades para os cursos de Matemática (licenciatura e bacharelado).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ADAMI, PAULO S., **Fractais no Ensino Médio: Uma sequência didática**, *Dissertação de Mestrado Profissional*, PROFMAT, UFSCar, 2013.
- [2] ALMEIDA, ELDER C. e SANTOS, THIAGO F. **Uma breve introdução ao Conjunto de Cantor**, *Revista de Matemática de Ouro Preto*, v.1 pp:60-65, UFOP, 2017.
- [3] ARITA, A. C. P., SILVA, F. S. M. e GAMBERA, L. R. A. **A geometria da esponja de Menger**, *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, Bauru, v. 2, n. 2, 70-77, 2013.
- [4] BARBOSA, RUY M., **Descobrimo a Geometria Fractal para sala de aula**, 3ª edição, Coleção Tendências em Educação Matemática, *Editora Autêntica*, 2007.
- [5] BARNSLEY, MICHAEL F., **Fractals Everywhere**, 2nd edition, *Academic Press, Inc.*, 1998.
- [6] BICALHO, JOSSARA B. S., **Um Estudo sobre Poliedros e Atividades para o Ensino de Matemática: Geometria da Bola de Futebol e Pipa Tetraédrica**, *Dissertação de Mestrado Profissional*, PROFMAT, UFV, 2013.
- [7] CORRÊA, AUGUSTO O., **Geometria Fractal no Ensino Médio**, *Dissertação de Mestrado Profissional*, PROFMAT, UNIFAP, 2014.
- [8] CÔRTEZ, IVANA R. C., **Geometria Fractal no Ensino Médio: Teoria e Prática**, *Dissertação de Mestrado Profissional*, PROFMAT, UFRJ, 2014.
- [9] EGLASH, RON, **Fractales africanos, charla de Ron Eglash**, disponível em <http://www.geometriadinamica.cl/2009/11/fractales-africanos/>, acesso em 25 de janeiro de 2020.
- [10] EGLASH, RON, **Fractais africanos**, *Scientific American Brasil*, edição especial Etnomatemática, nº 11, 66-67, 2005.

- [11] FRACTIGAMI, **Origami Fractals**, disponível em <http://origami.barcodebattler.co.uk/index.htm>, acesso em 1^o de outubro de 2019.
- [12] JANOS, MICHEL, **Geometria Fractal**, Editora Ciência Moderna, 2008.
- [13] LIMA, DANIEL S. S., **Orçamento de atividades diárias e complexidade comportamental de macacos-prego *Sapajus libidinosus* (Spix, 1823) livres e cativos**, *Dissertação de Mestrado*, Instituto de Biologia, UFBA, 2017.
- [14] MANDELBROT, BENOIT, **Objectos Fractais**, 2^a edição, Coleção Ciência Aberta, Editora Gradiva, 1998.
- [15] MENDONÇA, FERNANDO A. C., **Aplicações da Geometria Fractal: uma proposta didática para o Ensino Médio**, *Dissertação de Mestrado Profissional*, PROFMAT, UFAL, 2016.
- [16] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**, Brasília, 1998.
- [17] MORAIS, LEONARDO, **Equações de Diferenças, Caos e Fractais**, *Dissertação de Mestrado Profissional*, PROFMAT, UFSC, 2014.
- [18] MOURA, E. C. e SANTOS, E. R. **Conjunto de Cantor: um conjunto não enumerável com medida de Lebesgue zero**, 31 *Colóquio Brasileiro de Matemática*, IMPA, Rio de Janeiro, 2017.
- [19] MUCHERONI, LAÍS F. **Dimensão de Hausdorff e algumas aplicações.**, *Dissertação de Mestrado*, UNESP, Rio Claro, 2017.
- [20] NUNES, RAQUEL S. R. **Geometria Fractal e Aplicações**, *Tese de mestrado*, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2006.
- [21] NUSSENZVEIG, H. MOYSÉS (organizador), **Complexidade e Caos**, Editora da UFRJ/COPEA, 1999.
- [22] OCDE, **10 Questões para Professores de Matemática ... e como o PISA pode ajudar a Respondê-las**, IMPA, 2018.
- [23] PAULA, CLAYTON E. S. e SOUZA, TATIANA. M. R. **Uma abordagem da geometria fractal para o ensino médio**, *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 10, p. 135-148, 2017.
- [24] PAVANELLO, REGINA M., **O abandono do ensino de Geometria: uma visão histórica**, *Dissertação de Mestrado*, UNICAMP, 1989.
- [25] PESTANA, PAULA e DIAS, TERESA **Curiosidades Matemáticas: à Descoberta dos Fractais**, *Millenium - Revista do ISPV*, n. 24, 17-23, 2001.
- [26] REIS, JAKSON N. C., **Fractais no Ensino Médio: da observação de padrões da natureza ao uso do GeoGebra**, *Dissertação de Mestrado Profissional*, PROFMAT, UFERSA, 2014.

- [27] SALLUM, ÉLVIA M., **Fractais no ensino médio**, *Revista do Professor de Matemática (RPM)*, SBM, 57, 1-8, 2005.
- [28] SILVA, KAUE M., **Fractais e algumas aplicações ao ensino**, *Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática*, IFSP, 2015.
- [29] SKOVSMOSE, OLE, **Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica**, tradução: Orlando de Andrade Figueiredo e Jonei Cerqueira Barbosa, *Papirus Editora*, Campinas, 2008.
- [30] SOUZA, CACILDA, **Geometria Fractal e Aplicações no Ensino Médio**, *Dissertação de Mestrado Profissional*, PROFMAT, UnB, 2014.
- [31] STEWART, IAN, **Desbravadores da matemática: da alavanca de Arquimedes aos fractais de Mandelbrot**, 1ª edição *Editora Zahar*, Rio de Janeiro, 2019.
- [32] TAYLOR, RICHARD, **Fractal Expressionism Where Art Meets Science**, 1-28, Santa Fe Institute, 2002.
- [33] THOMPSON, MARK, **Métodos de Matemática Aplicada**, *Editora Esequia Sauter*, Porto Alegre, 2013.
- [34] VAN DER ZIEL, ALDERT, **Noise: Sources, Characterization, Measurement**, *Prentice-Hall*, New Jersey, 1970.