

Análise de dados da resistividade  
complexa aparente conjugando  
polarização induzida espectral e  
acoplamento eletromagnético

TAÍLA CRÍSTIA SOUZA SANT'ANA

SALVADOR – BAHIA  
SETEMBRO – 2018





Análise de dados da resistividade complexa aparente conjugando  
polarização induzida espectral e acoplamento eletromagnético

por

TAÍLA CRÍSTIA SOUZA SANT'ANA

Orientador: Prof. Dr. Edson Emanuel Starteri Sampaio

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Submetida em satisfação parcial dos requisitos ao grau de  
MESTRE EM CIÊNCIAS

EM

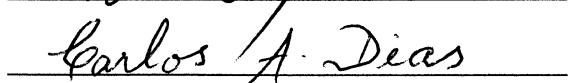
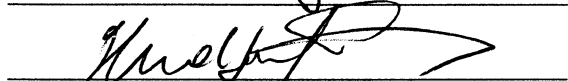
GEOFÍSICA

ao

Conselho Acadêmico de Ensino

da

Universidade Federal da Bahia



Comissão Examinadora

Dr. Edson Emanuel Starteri Sampaio - UFBA

Dr. Hédison Kiuity Sato - UFBA

Dr. Carlos Alberto Dias - UENF

Aprovada em 28 de setembro de 2018



A presente pesquisa foi desenvolvida no Centro de Pesquisa em Geofísica e Geologia da UFBA, com recursos próprios, da CAPES.

Ficha Catalográfica – Biblioteca do Instituto de Geociências da UFBA

S231a Sant'Ana, Taíla Crístia Souza,

Análise de dados da resistividade complexa aparente conjugando polarização induzida espectral e acoplamento eletromagnético / Taíla Crístia Souza Sant'Ana. — Salvador, 2018.

125 f.: il. Color.

Orientador: Prof. Dr. Edson Emanuel Starteri Sampaio

Dissertação (Mestrado) - Pós-Graduação em Geofísica. Instituto de Geociências da Universidade Federal da Bahia, 2018.

1. Polarização induzida espectral. 2. Acoplamento eletromagnético. 3. Exploração mineral. I. Sampaio, Edson Emanuel Starteri, orient. II. Título.

CDU: 537.632.4

Dedico aos meus pais,  
Véritas e Lindalva.

# Resumo

O método da polarização induzida espectral se destaca por fornecer diversas informações geofísico-geológicas através dos parâmetros de polarizabilidade, viabilizando a discriminação mineral no âmbito da exploração mineral. Embora constitua um dos principais ruídos nas medidas desse método, o acoplamento eletromagnético entre eletrodos de corrente e potencial também é capaz de auxiliar na compreensão do cenário geológico. Dessa forma, a maneira mais adequada de lidar com tais dados espectrais é o estudo integrado desses dois fenômenos, levando em conta suas particularidades. Propomos analisar a influência recíproca entre eles através de dados de impedância elétrica mútua e de resistividade complexa aparente sob um arranjo de dipolos elétricos no domínio da frequência. O objetivo é estimar os parâmetros geoeletricos que possibilitem a discriminação mineral. Nesse sentido, são implementadas formulações da impedância elétrica mútua para modelar e interpretar as respostas espectrais de modelos de terra homogênea e de  $\eta$ -camadas. Para a modelagem de meios polarizáveis, é empregado o modelo de resistividade complexa de Dias ou sua versão expandida que abrange o acoplamento eletromagnético. Através do método de inversão Gauss-Newton, os dados de impedância mútua foram invertidos para a determinação da resistividade complexa aparente. A análise de  $\rho_a$  em diferentes modelos de 3 camadas revela padrões espectrais específicos a variar pelas configurações geométricas adotadas. Os métodos dos Mínimos Quadrados e *Very Fast Simulated Annealing* se complementam na inversão de  $\rho_a$  e na estimativa dos sete parâmetros da versão expandida do modelo de resistividade, que são apresentados em pseudo-seções. O estudo foi aplicado em dados reais das áreas de Vermelhos, Baixa Funda e Sussuarana, localizadas no Distrito Cuprífero do Vale do Curaçá. Os espectros de  $\rho_a$  em Vermelhos e Baixa Funda exibiram comportamentos mais similares, enquanto Sussuarana se distinguiu por apresentar sinais de IP mais intensos. Nas pseudo-seções das três áreas, o parâmetro  $\rho_0$  manifestou um aumento da resistividade com a profundidade. Quanto ao efeito de IP, o parâmetro mais representativo foi a cargabilidade  $m_W$ , cujas anomalias coincidiram com regiões de resistividades anômalas, com destaque para uma anomalia detectada em Sussuarana.

**Palavras chaves:** polarização induzida espectral, acoplamento eletromagnético, parâmetros geoeletricos.

# Abstract

Induced polarization is characterized by providing geophysical and geological information through polarization parameters, making possible the mineral discrimination in the scope of mineral exploration. Although represents one of the main noises in measurements of this method, electromagnetic coupling between current and potential electrodes also contributes to the understanding of the geological scenario. Thus, the most appropriate way to deal with such data is an integrated study of these two phenomena, taking into account their particularities. We propose to analyze the reciprocal influence between them by means of the mutual impedance and apparent complex resistivity data considering an array of electric dipoles in the frequency domain. The objective is to estimate the geoelectric parameters that allow mineral discrimination. For this purpose, mutual impedance formulations are implemented in order to model and interpret the spectral responses of homogeneous and  $\eta$ -layered Earth. In the case of polarizable media, we employ the Dias complex resistivity model or its expanded version covering the electromagnetic coupling. With the Gauss-Newton inversion method, the mutual impedance data are inverted for the determination of the apparent complex resistivity. The analysis of  $\rho_a$  in different 3-layer models reveals specific spectral patterns according to the geometric configuration adopted. The least squares and VFSA methods perform the inversion of  $\rho_a$  and the estimation of the seven parameters of the expanded resistivity model, which are presented in pseudo-sections. The study was applied to real data of Vermelhos, Baixa Funda and Sussuarana areas, located in the Copper District of Vale do Curaçá. The  $\rho_a$  spectra in Vermelhos and Baixa Funda exhibited similar behaviors, while Sussuarana distinguished by showing more intense IP signals. In the pseudo-sections of the three areas, the  $\rho_0$  parameter revealed an increase in resistivity with depth. As for the IP effect, the most representative parameter was the chargeability  $m_W$ , whose anomalies coincided with regions of anomalous resistivities detected in Sussuarana.

**Keywords:** spectral induced polarization, electromagnetic coupling, geoelectric parameters.

# Índice

<b>Resumo</b> . . . . .	1
<b>Abstract</b> . . . . .	2
<b>Índice</b> . . . . .	3
<b>Índice de Tabelas</b> . . . . .	5
<b>Índice de Figuras</b> . . . . .	6
<b>Introdução</b> . . . . .	13
<b>1 O método da polarização induzida e o acoplamento eletromagnético</b> .	15
1.1 Contexto histórico . . . . .	15
1.2 Aspectos teóricos . . . . .	17
1.2.1 Fontes da polarização induzida . . . . .	18
1.2.2 Parâmetros de medição no IP . . . . .	20
1.2.3 Circuitos equivalentes . . . . .	21
1.2.4 O modelo de Dias . . . . .	22
1.2.5 Polarização induzida espectral . . . . .	26
1.2.6 Ruídos no método de IP . . . . .	26
1.2.7 Princípios teóricos do acoplamento eletromagnético . . . . .	28
<b>2 Formulação para análise do acoplamento eletromagnético em dados geofísicos</b> . . . . .	30
2.1 Fundamentos do acoplamento eletromagnético no domínio da frequência . . . . .	31
2.1.1 Campo elétrico de um dipolo elétrico no domínio da frequência . . . . .	34
2.1.2 Potencial elétrico e impedância elétrica mútua no domínio da frequência . . . . .	35
2.2 Abordagem do acoplamento eletromagnético por Millett (1967) . . . . .	37
2.2.1 Impedância mútua de dipolos em um plano horizontal . . . . .	37
2.2.2 Impedância mútua de dipolos colineares em um semi-espço homogêneo . . . . .	38

<b>3</b>	<b>Inversão: Teoria e Aplicação</b>	41
3.1	Formulação do problema inverso	42
3.1.1	Método dos Mínimos Quadrados	43
3.1.2	Problema inverso não-linear	44
3.2	Métodos de escopo local	44
3.2.1	Método de Gauss-Newton	44
3.3	Métodos de escopo global	46
3.3.1	Simulated Annealing	46
3.4	Especificações do método e aplicações	51
3.4.1	Estimativa da resistividade complexa aparente	51
3.4.2	Estimativa dos parâmetros da função expandida de Dias	58
<b>4</b>	<b>Análise espectral do acoplamento eletromagnético e polarização induzida</b>	65
4.1	Modelo homogêneo	66
4.1.1	Presença do efeito de polarização	68
4.2	Modelo de 2 camadas	69
4.2.1	1ª camada polarizável sobre semi-espço não polarizável	73
4.2.2	1ª camada não polarizável sobre semi-espço polarizável	74
4.3	Modelo de 3 camadas	78
4.3.1	Modelos Tipo H	78
4.3.2	Modelos Tipo K	82
4.3.3	Modelos Tipo A	86
4.3.4	Modelos Tipo Q	90
<b>5</b>	<b>Análise de dados reais</b>	95
5.1	Área de estudo	95
5.2	Espectro da resistividade complexa aparente	96
5.3	Análise expandida dos parâmetros geoeletricos	100
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	111
	<b>Agradecimentos</b>	114
	<b>Apêndice A Condições de contorno e funções do potencial total de um semi-espço homogêneo</b>	115
	<b>Apêndice B Derivadas da impedância mútua em relação à resistividade complexa</b>	118
	<b>Referências Bibliográficas</b>	121

# Índice de Tabelas

3.1	Comparação entre as inversões de amplitude e fase para um modelo sintético.	59
3.2	Intervalos de variação e valores iniciais dos parâmetros da função de Barreto e Dias (2014) expandida usados na inversão VFSA. Tempos de relaxação em segundos. . . . .	60
5.1	Faixas de variação dos parâmetros calculados na inversão da função de Barreto e Dias (2014) expandida. . . . .	101

# Índice de Figuras

1.1	O fenômeno da polarização induzida. Após desligar a corrente elétrica no tempo $t_1$ , a diferença de potencial decai abruptamente do valor estável $\Delta V_C$ para o potencial $\Delta V_P$ , a partir do qual o decaimento é gradual até chegar a zero. Uma sequência similar ocorre quando a corrente é ligada num tempo $t_2$ . Adaptado de Reynolds (1997). . . . .	17
1.2	Efeito da polarização de membrana. Adaptado de Reynolds (1997). . . . .	18
1.3	Efeito da polarização de eletrodo. Adaptado de Reynolds (1997). . . . .	19
1.4	Medida da cargabilidade $M$ . Adaptado de Reynolds (1997). . . . .	20
1.5	Circuito elétrico equivalente simulando o efeito de IP. Adaptado de Telford et al. (1990). . . . .	21
1.6	Princípio do modelo de Dias (Dias, 1968, 2000, 2017). . . . .	22
1.7	Amplitude e fase da resistividade complexa de Barreto e Dias (2014) empregando os parâmetros da expressão 1.8 e adotando $\rho_0 = 200 \Omega\text{m}$ . . . . .	24
2.1	Arranjo de dipolos. Adaptado de Madden e Cantwell (1967). . . . .	37
2.2	Representação dos dipolos colineares. Adaptado de Millett (1967). . . . .	38
3.1	Representação do parabolóide $\tilde{Q}(\mathbf{m})$ tangente ao modelo corrente $\mathbf{m}_k$ da função objetivo não linear $Q(\mathbf{m})$ (Santos, 2017). . . . .	46
3.2	Modelo de resistividade complexa estimado por meio da inversão GN e por meio da fórmula convencional da resistividade aparente (equação 3.38) comparados com o modelo verdadeiro para um meio homogêneo e polarizável de resistividade $\rho_0 = 200 \Omega\text{m}$ , parâmetros de Barreto e Dias (2014) definidos na expressão 1.8 e espaçamento transmissor-receptor $n = 7$ . . . . .	54
3.3	Dados de impedância mútua calculados por meio da inversão GN e por meio da fórmula convencional da resistividade aparente (equação 3.38) comparados com o dado observado para um meio homogêneo e polarizável de resistividade $\rho_0 = 200 \Omega\text{m}$ , parâmetros de Barreto e Dias (2014) definidos na expressão 1.8 e espaçamento transmissor-receptor $n = 7$ . . . . .	54



3.4	Dados de impedância mútua calculados por meio da inversão GN e por meio da fórmula convencional da resistividade aparente (equação 3.38) comparados com o dado observado para um meio de 3 camadas de resistividades $\rho_1 = \rho_3 = 500 \Omega\text{m}$ , $\rho_{0,2} = 50 \Omega\text{m}$ e espessuras $h_1 = 60 \text{ m}$ e $h_2 = 40 \text{ m}$ , com a 2ª camada polarizável. Parâmetros de Barreto e Dias (2014) definidos na expressão 1.8 e espaçamento transmissor-receptor $n = 7$ . . . . .	55
3.5	Dados de impedância mútua calculados por meio da inversão GN e por meio da fórmula convencional da resistividade aparente (equação 3.38) comparados com o dado observado para a estação 1250 W, linha 800 S, Vermelhos. Espaçamento transmissor-receptor $n = 6$ . . . . .	56
3.6	Dados de impedância mútua calculados por meio da inversão GN e por meio da fórmula convencional da resistividade aparente (equação 3.38) comparados com o dado observado para a estação 550 W, linha 600 S, Baixa Funda. Espaçamento transmissor-receptor $n = 6$ . . . . .	57
3.7	Dados de impedância mútua calculados por meio da inversão GN e por meio da fórmula convencional da resistividade aparente (equação 3.38) comparados com o dado observado para a estação 900 E, linha 2600 N, Sussuarana. Espaçamento transmissor-receptor $n = 2$ . . . . .	57
3.8	Comparação entre dado observado e calculado da resistividade complexa para um modelo sintético de parâmetros $\rho_0 = 500 \Omega\text{m}$ , $m_W = 0.1$ , $\tau_W = 0.1 \text{ s}$ , $m_D = 0.9$ , $\tau_D = 10^{-4} \text{ s}$ , $m_A = 0.3$ , $\tau_A = 10^{-3} \text{ s}$ . . . . .	60
3.9	Evolução da função objetivo e da estimativa dos parâmetros de resistividade complexa pelo VFSA e respectivos erros relativos percentuais. O parâmetro $\rho_0$ foi estimado por MMQ com um erro relativo insignificante. Modelo sintético de parâmetros $\rho_0 = 500 \Omega\text{m}$ , $m_W = 0.1$ , $\tau_W = 0.1 \text{ s}$ , $m_D = 0.9$ , $\tau_D = 10^{-4} \text{ s}$ , $m_A = 0.3$ , $\tau_A = 10^{-3} \text{ s}$ . . . . .	61
3.10	Comparação entre dado observado e calculado da resistividade complexa aparente e evolução da respectiva função objetivo para a estação 1250 W, linha 800 S, Vermelhos. Espaçamento transmissor-receptor $n = 1$ . . . . .	62
3.11	Comparação entre dado observado e calculado da resistividade complexa aparente e evolução da respectiva função objetivo para a estação 550 W, linha 600 S, Baixa Funda. Espaçamento transmissor-receptor $n = 3$ . . . . .	63
3.12	Comparação entre dado observado e calculado da resistividade complexa aparente e evolução da respectiva função objetivo para a estação 900 E, linha 2600 N, Sussuarana. Espaçamento transmissor-receptor $n = 5$ . . . . .	63

4.1	Impedância mútua normalizada $Z/Z_0$ para um modelo de terra homogênea não-polarizável de resistividade elétrica $\rho = 200 \Omega\text{m}$ , comprimento dos dipolos de $L = 50 \text{ m}$ , comparada à modelagem em Millett (1967) sob as mesmas condições. . . . .	66
4.2	Comportamento espectral da fase de $Z/Z_0$ para um modelo de terra homogênea não-polarizável com variação paramétrica da resistividade elétrica e do comprimento dos dipolos e fixados os parâmetros restantes. . . . .	67
4.3	Efeito da polarização sobre a impedância mútua normalizada $Z/Z_0$ para um modelo de terra homogênea de resistividade elétrica $\rho_0 = 200 \Omega\text{m}$ , $L = 50 \text{ m}$ , para $n = 1$ e $n = 7$ . . . . .	68
4.4	Impedância mútua normalizada $Z/Z_0$ para um modelo de 2 camadas não-polarizáveis mantendo fixos a espessura da 1ª camada $h = 15 \text{ m}$ e o comprimento dos dipolos de $L = 50 \text{ m}$ ; $n = 1, 4$ e $7$ , $\rho_1$ e $\rho_2$ variáveis. . . . .	70
4.5	Impedância mútua normalizada $Z/Z_0$ para um modelo de 2 camadas não-polarizáveis mantendo fixos as resistividades $\rho_1 = 200 \Omega\text{m}$ e $\rho_2 = 600 \Omega\text{m}$ e o comprimento dos dipolos de $L = 50 \text{ m}$ ; $n = 4$ e espessura da 1ª camada $h$ variável. . . . .	71
4.6	Impedância mútua normalizada $Z/Z_0$ para um modelo de 2 camadas não-polarizáveis mantendo fixos as resistividades $\rho_1 = 200 \Omega\text{m}$ e $\rho_2 = 20 \Omega\text{m}$ e o comprimento dos dipolos de $L = 50 \text{ m}$ ; $n = 4$ e espessura da 1ª camada $h$ variável. . . . .	71
4.7	Impedância mútua normalizada $Z/Z_0$ para um modelo de 2 camadas não-polarizáveis mantendo fixos a espessura da 1ª camada $h = 30 \text{ m}$ e o comprimento dos dipolos de $L = 50 \text{ m}$ ; $n = 4$ , $\rho_1 = 200 \Omega\text{m}$ e $\rho_2$ variável. . . . .	72
4.8	Varição em $Z/Z_0$ devido ao efeito da presença de polarização na 1ª camada para um modelo de 2 camadas, enquanto varia a espessura $h$ da 1ª camada. São parâmetros fixos o comprimento dos dipolos $L = 50 \text{ m}$ , $n = 4$ , $\rho_{0,1} = 50 \Omega\text{m}$ e $\rho_2 = 500 \Omega\text{m}$ . . . . .	73
4.9	Varição em $Z/Z_0$ devido ao efeito da presença de polarização na 1ª camada para um modelo de 2 camadas, enquanto varia a espessura $h$ da 1ª camada. São parâmetros fixos o comprimento dos dipolos $L = 50 \text{ m}$ , $n = 4$ , $\rho_{0,1} = 500 \Omega\text{m}$ e $\rho_2 = 50 \Omega\text{m}$ . . . . .	74
4.10	Varição em $Z/Z_0$ devido ao efeito da presença de polarização na 2ª camada para um modelo de 2 camadas, enquanto varia a espessura $h$ da 1ª camada. São parâmetros fixos o comprimento dos dipolos $L = 50 \text{ m}$ , $n = 4$ , $\rho_1 = 50 \Omega\text{m}$ e $\rho_{0,2} = 500 \Omega\text{m}$ . . . . .	75

4.11	Variação em $Z/Z_0$ devido ao efeito da presença de polarização na 2ª camada para um modelo de 2 camadas, enquanto varia a espessura $h$ da 1ª camada. São parâmetros fixos o comprimento dos dipolos $L = 50$ m, $n = 4$ , $\rho_1 = 500$ $\Omega\text{m}$ e $\rho_{0,2} = 50$ $\Omega\text{m}$ . . . . .	75
4.12	Diagrama de Argand de $Z/Z_0$ não-normalizado para um modelo de 2 camadas ilustrando o efeito de polarização em cada uma das camadas de resistividades $\rho_{0,1} = 500$ $\Omega\text{m}$ e $\rho_{0,2} = 50$ $\Omega\text{m}$ entre $10^{-2}$ Hz e $10^3$ Hz. São parâmetros fixos $L = 50$ m e $n = 4$ ; $h = 5$ m ou $h = 25$ m. . . . .	76
4.13	Diagrama de Argand de $Z/Z_0$ não-normalizado para um modelo de 2 camadas ilustrando o efeito de polarização em cada uma das camadas de resistividades $\rho_{0,1} = 50$ $\Omega\text{m}$ e $\rho_{0,2} = 500$ $\Omega\text{m}$ entre $10^{-2}$ Hz e $10^3$ Hz. São parâmetros fixos $L = 50$ m e $n = 4$ ; $h = 5$ m ou $h = 25$ m. . . . .	77
4.14	Modelo de resistividade tipo H empregado. . . . .	78
4.15	Impedância mútua normalizada para um modelo tipo H não-polarizável sob variação da espessura $h_2$ da 2ª camada. São parâmetros fixos a espessura da 1ª camada $h_1 = 60$ m, o comprimento dos dipolos $L = 50$ m, $n = 10$ , $\rho_1 = \rho_3 = 500$ $\Omega\text{m}$ e $\rho_2 = 50$ $\Omega\text{m}$ . . . . .	79
4.16	Resistividade aparente $\rho_a$ advinda do efeito indutivo em um modelo de 3 camadas do tipo H não polarizável para $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras $h_1 = 60$ m e $h_2 = 40$ m, comprimento dos dipolos $L = 50$ m, $\rho_1 = \rho_3 = 500$ $\Omega\text{m}$ e $\rho_2 = 50$ $\Omega\text{m}$ . . . . .	79
4.17	Variação em $Z/Z_0$ devido ao efeito de IP em cada uma das 3 camadas de um modelo tipo H para $n = 2$ e $n = 10$ . São parâmetros fixos as espessuras $h_1 = 60$ m e $h_2 = 40$ m, o comprimento dos dipolos $L = 50$ m, $\rho_{0,1} = \rho_{0,3} = 500$ $\Omega\text{m}$ e $\rho_{0,2} = 50$ $\Omega\text{m}$ . . . . .	80
4.18	Resistividade aparente $\rho_a$ advinda do efeito indutivo acrescido do efeito de polarização na 1ª camada em um modelo do tipo H para $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras $h_1 = 60$ m e $h_2 = 40$ m, comprimento dos dipolos $L = 50$ m, $\rho_{0,1} = \rho_3 = 500$ $\Omega\text{m}$ e $\rho_2 = 50$ $\Omega\text{m}$ . . . . .	81
4.19	Resistividade aparente $\rho_a$ advinda do efeito indutivo acrescido do efeito de polarização na 2ª camada em um modelo do tipo H para $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras $h_1 = 60$ m e $h_2 = 40$ m, comprimento dos dipolos $L = 50$ m, $\rho_1 = \rho_3 = 500$ $\Omega\text{m}$ e $\rho_{0,2} = 50$ $\Omega\text{m}$ . . . . .	81
4.20	Resistividade aparente $\rho_a$ advinda do efeito indutivo acrescido do efeito de polarização na 3ª camada em um modelo do tipo H para $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras $h_1 = 60$ m e $h_2 = 40$ m, comprimento dos dipolos $L = 50$ m, $\rho_1 = \rho_{0,3} = 500$ $\Omega\text{m}$ e $\rho_2 = 50$ $\Omega\text{m}$ . . . . .	82
4.21	Modelo de resistividade tipo K empregado. . . . .	82

- 4.22 Impedância mútua normalizada para um modelo tipo K não-polarizável sob variação da espessura  $h_2$  da 2ª camada. São parâmetros fixos a espessura da 1ª camada  $h_1 = 60$  m, o comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $n = 10$ ,  $\rho_1 = \rho_3 = 50 \Omega\text{m}$  e  $\rho_2 = 500 \Omega\text{m}$ . . . . . 83
- 4.23 Resistividade aparente  $\rho_a$  advinda do efeito indutivo em um modelo de 3 camadas do tipo K não-polarizável para  $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras  $h_1 = 60$  m e  $h_2 = 40$  m, comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $\rho_1 = \rho_3 = 50 \Omega\text{m}$  e  $\rho_2 = 500 \Omega\text{m}$ . . . . . 83
- 4.24 Variação em  $Z/Z_0$  devido ao efeito de IP em cada uma das 3 camadas de um modelo tipo K para  $n = 2$  e  $n = 10$ . São parâmetros fixos as espessuras  $h_1 = 60$  m e  $h_2 = 40$  m, o comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $\rho_{0,1} = \rho_{0,3} = 50 \Omega\text{m}$  e  $\rho_{0,2} = 500 \Omega\text{m}$ . . . . . 84
- 4.25 Resistividade aparente  $\rho_a$  advinda do efeito indutivo acrescido do efeito de polarização na 1ª camada em um modelo do tipo K para  $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras  $h_1 = 60$  m e  $h_2 = 40$  m, comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $\rho_{0,1} = \rho_3 = 50 \Omega\text{m}$  e  $\rho_2 = 500 \Omega\text{m}$ . . . . . 85
- 4.26 Resistividade aparente  $\rho_a$  advinda do efeito indutivo acrescido do efeito de polarização na 2ª camada em um modelo do tipo K para  $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras  $h_1 = 60$  m e  $h_2 = 40$  m, comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $\rho_1 = \rho_3 = 50 \Omega\text{m}$  e  $\rho_{0,2} = 500 \Omega\text{m}$ . . . . . 85
- 4.27 Resistividade aparente  $\rho_a$  advinda do efeito indutivo acrescido do efeito de polarização na 3ª camada em um modelo do tipo K para  $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras  $h_1 = 60$  m e  $h_2 = 40$  m, comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $\rho_1 = \rho_{0,3} = 50 \Omega\text{m}$  e  $\rho_2 = 500 \Omega\text{m}$ . . . . . 86
- 4.28 Modelo de resistividade tipo A empregado. . . . . 86
- 4.29 Impedância mútua normalizada para um modelo tipo A não-polarizável sob variação da espessura  $h_2$  da 2ª camada. São parâmetros fixos a espessura da 1ª camada  $h_1 = 60$  m, o comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $n = 10$ ,  $\rho_1 = 50 \Omega\text{m}$ ,  $\rho_2 = 200 \Omega\text{m}$  e  $\rho_3 = 500 \Omega\text{m}$ . . . . . 87
- 4.30 Resistividade aparente  $\rho_a$  advinda do efeito indutivo em um modelo de 3 camadas do tipo A não-polarizável para  $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras  $h_1 = 60$  m e  $h_2 = 40$  m, comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $\rho_1 = 50 \Omega\text{m}$ ,  $\rho_2 = 200 \Omega\text{m}$  e  $\rho_3 = 500 \Omega\text{m}$ . . . . . 87
- 4.31 Variação em  $Z/Z_0$  devido ao efeito de IP em cada uma das 3 camadas de um modelo tipo A para  $n = 2$  e  $n = 10$ . São parâmetros fixos as espessuras  $h_1 = 60$  m e  $h_2 = 40$  m, o comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $\rho_{0,1} = 50 \Omega\text{m}$ ,  $\rho_{0,2} = 200 \Omega\text{m}$  e  $\rho_{0,3} = 500 \Omega\text{m}$ . . . . . 88

4.32 Resistividade aparente $\rho_a$ advinda do efeito indutivo acrescido do efeito de polarização na 1ª camada em um modelo do tipo A para $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras $h_1 = 60$ m e $h_2 = 40$ m, comprimento dos dipolos $L = 50$ m, $\rho_{0,1} = 50$ $\Omega\text{m}$ , $\rho_2 = 200$ $\Omega\text{m}$ e $\rho_3 = 500$ $\Omega\text{m}$ . . . . .	89
4.33 Resistividade aparente $\rho_a$ advinda do efeito indutivo acrescido do efeito de polarização na 2ª camada em um modelo do tipo A para $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras $h_1 = 60$ m e $h_2 = 40$ m, comprimento dos dipolos $L = 50$ m, $\rho_1 = 50$ $\Omega\text{m}$ , $\rho_{0,2} = 200$ $\Omega\text{m}$ e $\rho_3 = 500$ $\Omega\text{m}$ . . . . .	89
4.34 Resistividade aparente $\rho_a$ advinda do efeito indutivo acrescido do efeito de polarização na 3ª camada em um modelo do tipo A para $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras $h_1 = 60$ m e $h_2 = 40$ m, comprimento dos dipolos $L = 50$ m, $\rho_1 = 50$ $\Omega\text{m}$ , $\rho_2 = 200$ $\Omega\text{m}$ e $\rho_{0,3} = 500$ $\Omega\text{m}$ . . . . .	90
4.35 Modelo de resistividade tipo Q empregado. . . . .	90
4.36 Impedância mútua normalizada para um modelo tipo Q não-polarizável sob variação da espessura $h_2$ da 2ª camada. São parâmetros fixos a espessura da 1ª camada $h_1 = 60$ m, o comprimento dos dipolos $L = 50$ m, $n = 10$ , $\rho_1 = 500$ $\Omega\text{m}$ , $\rho_2 = 200$ $\Omega\text{m}$ e $\rho_3 = 50$ $\Omega\text{m}$ . . . . .	91
4.37 Resistividade aparente $\rho_a$ advinda do efeito indutivo em um modelo de 3 camadas do tipo Q não-polarizável para $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras $h_1 = 60$ m e $h_2 = 40$ m, comprimento dos dipolos $L = 50$ m, $\rho_1 = 500$ $\Omega\text{m}$ , $\rho_2 = 200$ $\Omega\text{m}$ e $\rho_3 = 50$ $\Omega\text{m}$ . . . . .	91
4.38 Variação em $Z/Z_0$ devido ao efeito de IP em cada uma das 3 camadas de um modelo tipo Q para $n = 2$ e $n = 10$ . São parâmetros fixos as espessuras $h_1 = 60$ m e $h_2 = 40$ m, o comprimento dos dipolos $L = 50$ m, $\rho_{0,1} = 500$ $\Omega\text{m}$ , $\rho_{0,2} = 200$ $\Omega\text{m}$ e $\rho_{0,3} = 50$ $\Omega\text{m}$ . . . . .	92
4.39 Resistividade aparente $\rho_a$ advinda do efeito indutivo acrescido do efeito de polarização na 1ª camada em um modelo do tipo Q para $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras $h_1 = 60$ m e $h_2 = 40$ m, comprimento dos dipolos $L = 50$ m, $\rho_{0,1} = 500$ $\Omega\text{m}$ , $\rho_2 = 200$ $\Omega\text{m}$ e $\rho_3 = 50$ $\Omega\text{m}$ . . . . .	93
4.40 Resistividade aparente $\rho_a$ advinda do efeito indutivo acrescido do efeito de polarização na 2ª camada em um modelo do tipo Q para $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras $h_1 = 60$ m e $h_2 = 40$ m, comprimento dos dipolos $L = 50$ m, $\rho_1 = 500$ $\Omega\text{m}$ , $\rho_{0,2} = 200$ $\Omega\text{m}$ e $\rho_3 = 50$ $\Omega\text{m}$ . . . . .	93
4.41 Resistividade aparente $\rho_a$ advinda do efeito indutivo acrescido do efeito de polarização na 3ª camada em um modelo do tipo Q para $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras $h_1 = 60$ m e $h_2 = 40$ m, comprimento dos dipolos $L = 50$ m, $\rho_1 = 500$ $\Omega\text{m}$ , $\rho_2 = 200$ $\Omega\text{m}$ e $\rho_{0,3} = 50$ $\Omega\text{m}$ . . . . .	94

---

5.1	Mapa geológico esquemático do Cráton do São Francisco, com destaque para a área de estudo no Orógeno Itabuna-Salvador-Curaçá (Teixeira et al., 2010).	96
5.2	Espectro de amplitude e fase de $\rho_a$ para a estação 1250 W, linha 800 S, Vermelhos. . . . .	98
5.3	Espectro de amplitude e fase de $\rho_a$ para a estação 550 W, linha 600 S, Baixa Funda. . . . .	99
5.4	Espectro de amplitude e fase de $\rho_a$ para a estação 900 E, linha 2600 N, Sussuarana. . . . .	100
5.5	Fase de $\rho_a$ com as respectivas curvas características dos fenômenos de IP e AEM para o dado real da estação 900 E, linha 2600 N, Sussuarana. Espaçamento transmissor-receptor $n = 5$ . . . . .	101
5.6	Distribuição do log do parâmetro $\rho_0$ nas áreas de estudo. . . . .	104
5.7	Distribuição do parâmetro $m_W$ nas áreas de estudo. . . . .	105
5.8	Distribuição do log do parâmetro $\tau_W$ nas áreas de estudo. . . . .	106
5.9	Distribuição do parâmetro $m_D$ nas áreas de estudo. . . . .	107
5.10	Distribuição do log do parâmetro $\tau_D$ nas áreas de estudo. . . . .	108
5.11	Distribuição do parâmetro $m_A$ nas áreas de estudo. . . . .	109
5.12	Distribuição do log do parâmetro $\tau_A$ nas áreas de estudo. . . . .	110

# Introdução

Nas últimas décadas, o sucesso do método da polarização induzida espectral (SIP) na exploração de minerais metálicos tem estimulado inúmeros estudos científicos em torno desse tema. Em seu princípio, correntes elétricas aplicadas induzem o acúmulo de diferentes formas de energia nas rochas que se refletem nos parâmetros de polarizabilidade, precursores da discriminação mineral.

Entre os diversos ruídos nos dados de SIP, o acoplamento eletromagnético (AEM) entre os eletrodos de corrente e potencial assume um papel de destaque por gerar um falso efeito de polarização induzida (IP) muito representativo e de difícil remoção. Entretanto, além de ser a principal fonte de anomalias espúrias nesses dados, o AEM tem também seu valor intrínseco, podendo auxiliar no mapeamento das estruturas geológicas do interior da Terra, principalmente na ausência de fontes de IP.

Na literatura científica é possível encontrar vários procedimentos que propõem a minimização ou remoção do AEM e subsequente análise apenas do efeito do IP (Hallosf, 1974; Wynn e Zonge, 1975; Pelton et al., 1978; Çaglar, 2000). Já outras publicações se restringem ao estudo do AEM para diferentes modelos geológicos da subsuperfície (Millett, 1967; Dey e Morrison, 1973).

No presente trabalho, ambos os dados de AEM e SIP constituem objeto de estudo por meio de seus comportamentos espectrais. Além da habitual abordagem do desacoplamento, avalia-se o potencial dos parâmetros estimados de IP e AEM na identificação de anomalias geofísico-geológicas no interior da Terra.

Nesse contexto, são empregados métodos de modelagem direta e inversão com o objetivo de desenvolver a análise espectral de dados de impedância elétrica mútua e resistividade complexa aparente  $\rho_a$  abrangendo os fenômenos do AEM e SIP sob um arranjo de dipolos elétricos no domínio da frequência.

Essa dissertação está dividida em 5 capítulos. O primeiro capítulo discorre o contexto histórico e aspectos teóricos do AEM e dos métodos de IP e SIP, além de apresentar o modelo de resistividade complexa de Barreto e Dias (2014) e sua versão expandida. No capítulo 2, é

desenvolvido o formalismo físico-matemático básico das formulações da impedância elétrica mútua de Mocitaiba et al. (2017) e Millett (1967) para modelos de terra homogênea e de  $\eta$ -camadas. O capítulo 3 revisa a teoria do problema inverso com foco nos métodos de inversão utilizados e detalha as especificações dos procedimentos de inversão e estimativa de  $\rho_a$  e dos parâmetros de IP e AEM, exemplificando através de aplicações em dados sintéticos e reais. No capítulo 4, são apresentados e discutidos resultados da modelagem da impedância elétrica mútua e resistividade aparente invertida  $\rho_a$  para modelos de até 3 camadas polarizáveis ou não-polarizáveis. Por fim, o capítulo 5 trata da aplicação dos métodos sobre dados reais das áreas de Vermelhos, Baixa Funda e Sussuarana, localizadas no Distrito Cuprífero do Vale do Curaçá. As conclusões sintetizam as principais considerações acerca dos resultados obtidos.



# 1

## O método da polarização induzida e o acoplamento eletromagnético

Esse capítulo tratará inicialmente do contexto histórico do tema, seguido pelos conceitos teóricos primordiais do método de polarização induzida, suas vertentes e sua relação com o acoplamento eletromagnético. Também detalhará a função de resistividade complexa de Barreto e Dias (2014), um ponto fundamental na construção desse trabalho.

### 1.1 Contexto histórico

Em meados da década de 20, durante pesquisas originalmente voltadas para o método do potencial espontâneo, Conrad Schlumberger observou um lento decaimento da voltagem após interrompida a corrente elétrica, fenômeno por ele denominado como *polarisation provoquée*. O primeiro registro do efeito da polarização induzida (*induced polarization* ou IP) como método geofísico remonta ao ano de 1946 com as pesquisas lideradas por Brant (1959) na empresa *Newmont Exploration Ltd.*, popularizando-se a partir da década de 60 por seu sucesso na exploração de minerais metálicos. Por sua vez, a partir do trabalho pioneiro de Dias (1968), o método de polarização induzida espectral (*spectral induced polarization* ou SIP) teve suas primeiras citações na literatura científica quando se desenvolveu a aplicação do método de IP sob amplos espectros de frequência, principalmente para a discriminação mineral (Zonge, 1972; Zonge e Wynn, 1975; Pelton et al., 1978).

Conforme progrediam os estudos dos métodos de IP e SIP, ficou evidente a necessidade de compreender e saber lidar com o então indesejável acoplamento eletromagnético (AEM,

acoplamento indutivo ou *electromagnetic coupling*), que constituiu um ruído na interpretação dos dados de polarização induzida. As pesquisas iniciais abordaram o AEM através da impedância mútua entre dois fios de corrente elétrica em contato com um semi-espaco homogêneo (Foster, 1931; Sunde, 1949). Com base nesse último trabalho, Millett (1967) publicou uma importante tabela contendo dados de amplitude, fase e efeito percentual de frequência do AEM no domínio da frequência para um arranjo dipolo-dipolo colinear na superfície de um semi-espaco homogêneo. Sumner (1972) elaborou um esquema comparativo entre diversos arranjos de eletrodos empregados em levantamentos de IP e a relativa susceptibilidade ao acoplamento indutivo. Em uma abordagem mais quantitativa, Nair e Sanyal (1980) calcularam o AEM para os mais diversos arranjos de eletrodos com o objetivo de mostrar formas de minimizar ou evitar seu efeito.

A exigência de formulações e algoritmos mais sofisticados constituiu um obstáculo no estudo do acoplamento indutivo para meios estratificados, de forma que, inicialmente, poucos trabalhos abordaram o modelo de uma terra com  $\eta$ -camadas (Hohmann, 1973). Dey e Morrison (1973) publicaram o primeiro estudo mais detalhado sobre os efeitos do AEM em ambos os domínios do tempo e da frequência em uma terra com  $\eta$ -camadas para diferentes configurações de eletrodos, geometria de camadas e parâmetros elétricos da subsuperfície. Posteriormente, Çaglar (2000) fez um estudo do AEM e sua remoção do dado de IP em um modelo geológico no qual a condutividade varia exponencialmente com a profundidade. Wynn (1974, 1979) tratou do mesmo problema, porém considerando um meio anisotrópico.

Destaca-se ainda o trabalho de Pelton et al. (1978) que utilizou os modelos de dispersão de Cole-Cole (Cole e Cole, 1941) para representar o efeito IP + AEM, discriminar minerais através da análise dos parâmetros de Cole-Cole e remover o acoplamento indutivo quando em baixas frequências.

A partir disso, numerosos foram os estudos visando criar técnicas ou aprimorar os procedimentos já existentes para discernir ou remover o AEM do dado de IP em ambos os domínios do tempo (Trofimenkoff et al., 1982; Fullagar et al., 2000; Mocitaiba et al., 2017) e da frequência (Hallof, 1974; Major e Silic, 1981; Song, 1984; Wait e Gruszka, 1986; Routh e Oldenburg, 1996, 2001; Xiang et al., 2002; Hatch, 2013), para os mais diversos modelos geológicos e arranjos de eletrodos. Ao mesmo tempo, muitos destes autores alertaram para os erros e limitações associados a tais procedimentos. Por sua vez, alguns autores reconheceram a importância particular dos dados de acoplamento EM e buscaram evidenciá-la (Wynn e Zonge, 1975, 1977; Meyer, 1990; LaBrecque et al., 2010).

## 1.2 Aspectos teóricos

Em uma aquisição geofísica com um arranjo de quatro eletrodos, após desligada a corrente elétrica contínua (DC) aplicada ao solo, a voltagem entre os eletrodos de potencial não cairá a zero instantaneamente. Ao invés disso, ocorre um considerável decréscimo inicial da voltagem seguido por um decaimento gradual até chegar a zero, levando alguns segundos ou minutos (Figura 1.1). O evento também ocorre nos instantes iniciais após ligada a corrente. A esse fenômeno atribui-se o nome de polarização induzida, um fenômeno elétrico estimulado por uma corrente aplicada e que é constatado como um atraso na resposta da voltagem em materiais terrestres (Sumner, 1976). O levantamento de IP objetiva a medição de uma impedância para então interpretá-la em termos de propriedades da subsuperfície e, finalmente, compreender a geologia da subsuperfície (Ward, 1990).

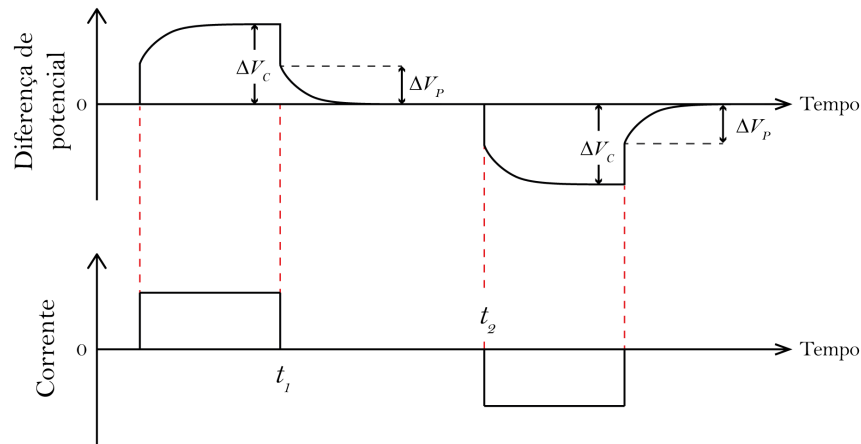


Figura 1.1: O fenômeno da polarização induzida. Após desligar a corrente elétrica no tempo  $t_1$ , a diferença de potencial decai abruptamente do valor estável  $\Delta V_C$  para o potencial  $\Delta V_P$ , a partir do qual o decaimento é gradual até chegar a zero. Uma sequência similar ocorre quando a corrente é ligada num tempo  $t_2$ . Adaptado de Reynolds (1997).

Quando a corrente elétrica é ligada ou desligada, há um tempo finito até que a voltagem estabilize. Segundo Parasnis (1997), isso implica que, para um fluxo de corrente ininterrupto, o efeito de polarização deve manifestar-se como uma dependência da impedância ou da resistividade aparente com a frequência da corrente elétrica. Assim, o fenômeno do IP pode ser observado em ambos os domínios do tempo e da frequência: O primeiro analisa o decaimento da voltagem em função do tempo, enquanto o segundo se baseia na medida da resistividade aparente como função da frequência, geralmente inferiores a 10 Hz (Telford et al., 1990).

Entre os métodos geofísicos, o método de polarização elétrica induzida assume um lugar de destaque na exploração mineral devido a sua alta capacidade de detectar depósitos mine-

rais, mesmo em baixas concentrações de mineralizações disseminadas. Em menor escala, esse método ainda é empregado em outras áreas, como exploração de hidrocarbonetos, pesquisas de água subterrânea, estudos ambientais e diversas aplicações em engenharias.

### 1.2.1 Fontes da polarização induzida

O efeito de polarização nas rochas é causado pelo acúmulo de energia momentâneo induzido pela corrente elétrica aplicada. Dentre as formas de armazenamento dessa energia nas rochas, a mais importante para o efeito de IP é a energia relacionada a processos eletroquímicos em função da formação da dupla camada elétrica de Helmholtz na vizinhança da interface de argilomineral-eletrólito (polarização de membrana) ou de minerais metálicos-eletrólito (polarização de eletrodo).

#### Polarização de membrana

A passagem da corrente elétrica na maioria das rochas ocorre principalmente através do transporte de íons fluindo em seus poros e fraturas, já que, em geral, os minerais formadores de rocha são maus condutores.

Segundo Telford et al. (1990), a maioria dos minerais formadores de rocha propicia uma carga total negativa na interface entre a rocha e o fluido eletrolítico. Dessa forma, enquanto os ânions são repelidos, os cátions são atraídos e acumulam-se nas paredes dos poros, formando concentrações passíveis de atingir até  $10 \mu\text{m}$ . Essa ordem de espessura muitas vezes é suficiente para bloquear a livre passagem dos íons negativos em fluxo, criando aglomerados de cargas de sinais opostos nos extremos obstruídos dos poros (Figura 1.2a). Quando a corrente elétrica é interrompida, os íons retornam a suas posições originais, levando um tempo finito para tal. Esse efeito é acentuado na presença de minerais de argila (Figura 1.2b).

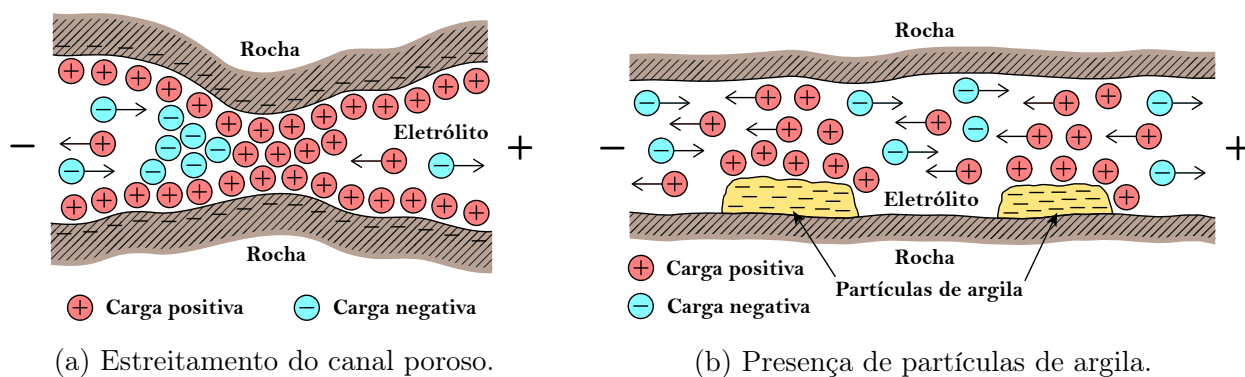


Figura 1.2: Efeito da polarização de membrana. Adaptado de Reynolds (1997).

## Polarização de eletrodo

A polarização de eletrodo tem seu princípio na existência de minerais metálicos disseminados em algumas rochas. Nesse caso, a condução da corrente é de caráter eletrônico e eletrolítico. Segundo Telford et al. (1990), alguns minerais bons condutores incluídos nessa categoria são os sulfetos, alguns óxidos (magnetita, ilmenita, pirolusita e cassiterita) e grafite.

Quando uma corrente elétrica é aplicada e a rocha possui minerais metálicos bloqueando ou em contato com os caminhos porosos por onde flui o eletrólito, os íons positivos e negativos são atraídos para as interfaces carregadas do grão mineral, incitando uma troca de elétrons com o mesmo (Figura 1.3). Como a velocidade da troca de elétrons é bem menor do que o fluxo de elétrons no mineral, os íons agrupam-se em cada lado do grão, causando um acúmulo de cargas sustentado pela voltagem. Quando a corrente é interrompida, os íons retornam lentamente para suas posições de equilíbrio e a voltagem decai. A polarização de eletrodo depende tanto da corrente aplicada quanto de algumas características do meio, como concentração mineral e porosidade (Telford et al., 1990). Um mineral disseminado gera uma resposta de polarização maior do que quando maciço, pois a polarização tem caráter superficial. Por sua vez, um aumento da porosidade se expressa como uma diminuição da polarização, já que surgem caminhos alternativos para uma mais eficiente condução dos íons.

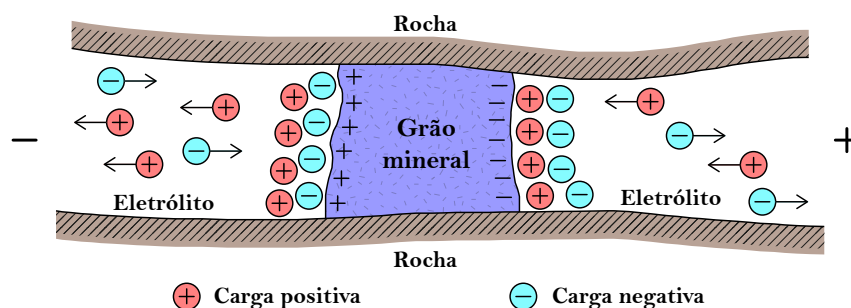


Figura 1.3: Efeito da polarização de eletrodo. Adaptado de Reynolds (1997).

Na pesquisa de prospecção mineral com o emprego do método IP, os minerais metálicos causadores da polarização de eletrodo são os principais alvos. Tal polarização ocorre simultânea à polarização de membrana, de forma que esta última constitui um ruído geológico, reduzindo a efetividade e precisão dos levantamentos de IP (Telford et al., 1990). Sumner (1976) afirma que não existe polarização induzida sem a presença de poros e fluidos percolantes na rocha, pois, mesmo que haja minerais metálicos, a ausência de eletrólito em contato com os grãos minerais inviabiliza o efeito de IP e a resistividade do material será alta.

## 1.2.2 Parâmetros de medição no IP

### Domínio do tempo

Uma forma simples de medição de IP no domínio do tempo é a relação da voltagem  $V_{on}$  de quando a corrente elétrica estava fluindo com a voltagem residual  $\Delta V$  em um intervalo de tempo de 0.1 a 10 s após a interrupção da corrente. Obtém-se, então, a medida de *polarizabilidade aparente*, que expressa a magnitude do IP pela expressão  $\Delta V/V_{on}$ , em milivolt por volt ( $\text{mV}\cdot\text{V}^{-1}$ ).

Um outro parâmetro muito empregado nas medições de IP no domínio do tempo é a *cargabilidade*  $M$ , em milissegundos, representada pela área abaixo da curva de decaimento em um intervalo de tempo  $t_2 - t_1$  após o desligamento da corrente normalizada pela medida de voltagem que antecede ao desligamento (Figura 1.4) (Parasnis, 1997):

$$M = \frac{1}{V_{on}} \int_{t_1}^{t_2} V(t) dt. \quad (1.1)$$

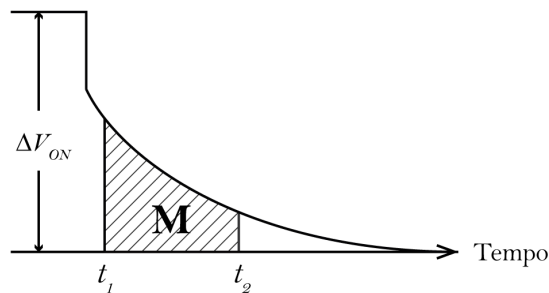


Figura 1.4: Medida da cargabilidade  $M$ . Adaptado de Reynolds (1997).

### Domínio da frequência

As medidas de resistividade aparente em função da frequência no IP podem ser representadas através do *efeito de frequência*  $FE$ , dado por

$$FE = \frac{\rho(f_1) - \rho(f_2)}{\rho(f_2)}, \quad (1.2)$$

onde a frequência  $f_1$  varia de 0.05 a 0.5 Hz,  $f_2$  de 1 a 10 Hz e  $\rho$  é a resistividade em função da frequência (Parasnis, 1997). O parâmetro *efeito percentual de frequência*  $PFE$  é também empregado e corresponde a

$$PFE = \frac{\rho(f_1) - \rho(f_2)}{\rho(f_2)} 100. \quad (1.3)$$

Uma outra medida no domínio da frequência é o *fator metálico*  $MF$ , em  $S.m^{-1}$ , que busca compensar a variação do efeito de IP devido à resistividade da rocha hospedeira. É obtido através de uma modificação da equação 1.2, obtendo

$$MF = 2\pi \times 10^5 \frac{\rho(f_1) - \rho(f_2)}{\rho(f_1)\rho(f_2)}. \quad (1.4)$$

### 1.2.3 Circuitos equivalentes

A resposta da subsuperfície à polarização induzida assemelha-se à descarga de um capacitor (domínio do tempo) ou à variação da impedância de um circuito constituído por uma resistência  $R$  e uma capacitância  $C$  em paralelo (domínio da frequência), de forma que a resistividade aparente diminui com o aumento da frequência. Entretanto, há um consenso de que essa semelhança é apenas superficial, já que o efeito de IP se revela muito mais complexo (Sumner, 1976; Telford et al., 1990; Ward, 1990; Parasnis, 1997).

Um circuito análogo simples, porém bem difundido na literatura, é representado na Figura 1.5. A resistência efetiva da corrente fluindo pelos poros é retratada por  $R_0$  e  $R_1$ . Em série com a resistência  $R_1$ , uma impedância  $Z_m$ , conhecida como *impedância de Warburg*, representa a resistência ao fluxo da corrente pelos poros contendo grãos de argila ou minerais metálicos e simula a interface metálico-iônica. A resistência  $R_0$  paralela a  $R_1$  e  $Z_m$  simula zonas alternativas de livre passagem da condução eletrolítica.

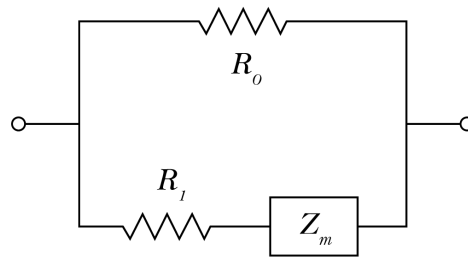


Figura 1.5: Circuito elétrico equivalente simulando o efeito de IP. Adaptado de Telford et al. (1990).

A partir da década de 50, a analogia com circuitos elétricos possibilitou o surgimento de diversas formulações teóricas que se propunham a representar os poros e fraturas das rochas, com ou sem mineralizações, viabilizando, de certa forma, uma quantificação do fenômeno de polarização induzida e de seus parâmetros.

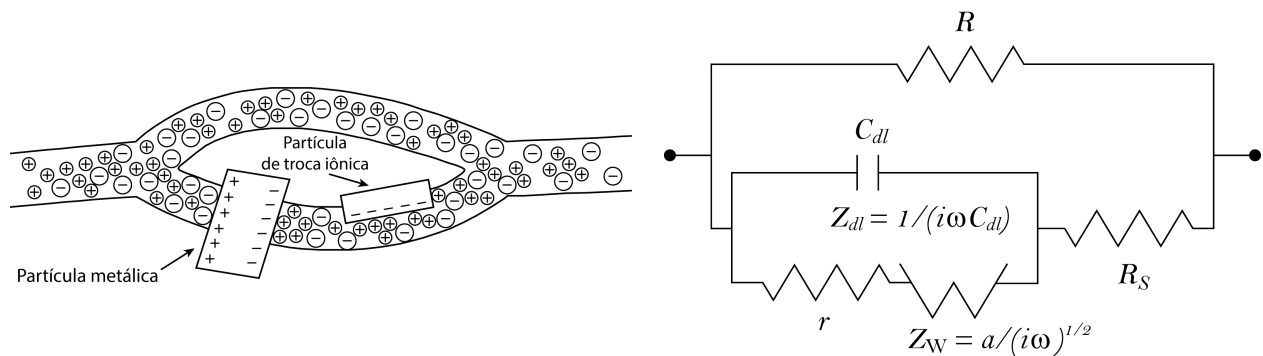
Liu et al. (2016) fizeram um estudo comparativo entre sete diferentes modelos (Dias, Warburg, Debye, Madden & Cantwell, Cole-Cole, Cole-Cole generalizado e multi-Cole-Cole), concluindo que eles influenciam distintamente o espectro de fase do dado, além de representa-

rem aplicabilidades específicas na pesquisa mineral. Em seus resultados, apenas os modelos de Dias (Dias, 2000) e multi-Cole-Cole (Pelton et al., 1978) caracterizaram bem ambos os espectros de fase unimodais e bimodais. Entretanto, Dias (2000) reitera que seu modelo está menos sujeito à ambiguidade na determinação dos coeficientes, já que sua função requer apenas cinco parâmetros, enquanto multi-Cole-Cole demanda sete parâmetros.

### 1.2.4 O modelo de Dias

O modelo considerado por Dias (1968, 1972, 2000, 2017) tem seu princípio em uma célula cujo comportamento elétrico é composto por uma interface sólido-líquido (uma partícula metálica ou uma partícula de troca iônica que interage com uma solução eletrolítica) e dois percursos de solução eletrolítica livres de polarização (Figura 1.6a).

No circuito análogo da Figura 1.6b, a impedância  $r + Z_W$  representa o efeito de IP devido ao mecanismo de difusão em série com a condução ôhmica induzida, enquanto o efeito capacitivo  $C_{dl}$ , em paralelo com essa impedância, é gerado pelas oscilações elétricas da dupla camada elétrica. O circuito se completa com os segmentos livres de polarização em série ( $R_S$ ) e em paralelo ( $R$ ).



(a) Esquema do efeito de IP em baixas frequências.

(b) Circuito análogo fundamental.

Figura 1.6: Princípio do modelo de Dias (Dias, 1968, 2000, 2017).

A função resistividade complexa de corrente total normalizada de Dias (2000) é então dada por:

$$\frac{\rho^* - \rho_\infty}{\rho_0} = \frac{m}{1 + i\omega\tau' \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)}, \quad (1.5)$$

com  $\tau' = (R + R_S)C_{dl} = [(1 - \delta)/(1 - m)\delta]\tau$ ,  $\mu = i\omega\tau[1 + \eta(i\omega)^{-1/2}] = i\omega\tau + (i\omega\tau'')^{1/2}$ ,  $\tau = rC_{dl}$ ,  $\tau'' = (rC_{dl}\eta)^2 = (\tau\eta)^2$ , onde  $\rho_0$  e  $\rho_\infty$  são os valores de resistividade, respectivamente, na frequência zero e em uma frequência muito maior que 1 MHz, em  $\Omega\text{m}$ ;  $m = (\rho_0 - \rho_\infty)/\rho_0 = R/(R + R_S)$ , cargabilidade, adimensional;  $\mu$ , uma função auxiliar;  $\tau$ , tempo de relaxação da



zona da dupla camada elétrica devido a um efeito de polarização capacitivo-indutivo, em  $s$ ;  $\tau'$ , tempo de relaxação devido à corrente de indução que escoar por fora da dupla camada elétrica, em  $s$ ;  $\tau''$ , tempo de relaxação da célula devido a um efeito misto da corrente gerada por difusão com o efeito capacitivo da dupla camada, em  $s$ ;  $\eta$ , parâmetro eletroquímico, em  $s^{-1/2}$ ;  $\delta$ , fração da célula afetada pela polarização, adimensional.

Por meio da decomposição da função 1.5 em frações parciais, Barreto e Dias (2014) chegaram à seguinte expressão simplificada para a resistividade complexa:

$$\frac{\rho^* - \rho_\infty}{\rho_0} = \frac{m_W}{1 + (i\omega\tau_W)^{1/2}} + \frac{m_D}{1 + i\omega\tau_D}. \quad (1.6)$$

Cada termo na equação 1.6 está relacionado a um ou mais processos de dispersão da resistividade. O primeiro termo, associado à uma função *Warburg* de cargabilidade  $m_W$  e tempo de relaxação  $\tau_W$ , predomina em baixas frequências (1 mHz -  $10^2$  Hz, aproximadamente) e refere-se à polarização por difusão iônica em regiões vizinhas à interface sólido-líquido. O segundo termo, associado à uma função *Debye* de cargabilidade  $m_D$  e tempo de relaxação  $\tau_D$ , predomina em altas frequências (10 kHz - 1 MHz, aproximadamente) e está relacionado com a polarização produzida pela interação entre a capacitância da dupla camada elétrica e as resistências dos percursos livres de polarização. Na faixa intermediária de frequências ( $10^2$  Hz - 10 kHz, aproximadamente), ambos os termos são igualmente importantes, gerando uma polarização "mista" por indução e difusão na dupla camada elétrica.

Sabendo que  $\rho_\infty = \rho_0(1 - m_W - m_D)$ , podemos reescrever a equação 1.6 como:

$$\rho^* = \rho_0 \left\{ 1 - m_W \left[ 1 - \frac{1}{1 + (i\omega\tau_W)^{1/2}} \right] - m_D \left[ 1 - \frac{1}{1 + i\omega\tau_D} \right] \right\}. \quad (1.7)$$

Em nosso trabalho, estaremos empregando a função da resistividade complexa 1.7 de Barreto e Dias (2014) tanto na modelagem quanto na inversão de dados, embora nesse último caso haja uma modificação da função. Considerando que a maior faixa de frequências empregada será de  $10^{-2}$  Hz a  $10^5$  Hz, todos os termos da função não de ser considerados.

Devido à grande multiplicidade e diversidade de testes e modelos abordados nesse trabalho, apenas um conjunto de parâmetros da resistividade complexa será empregado para a modelagem de meios polarizáveis. Dentre as 12 amostras investigadas por Barreto e Dias (2014), optamos pela amostra sintética<sup>1</sup> com 6.5% em volume de calcopirita disseminada em uma matriz de quartzo, de porosidade 34.3%, cujos parâmetros são:

$$m_W = 0,298; \quad \tau_W = 7,21 \text{ ms}; \quad m_D = 0,488; \quad \tau_D = 0,388 \mu\text{s} \quad (1.8)$$

<sup>1</sup>Amostra sintética 1 de Mahan et al. (1986) em Barreto e Dias (2014).

A Figura 1.7 exemplifica a função de resistividade complexa empregando os parâmetros da equação 1.8 para um meio de resistividade  $\rho_0 = 200 \Omega\text{m}$ . Mais informações sobre o desenvolvimento da função 1.7 podem ser encontradas em Barreto e Dias (2014).

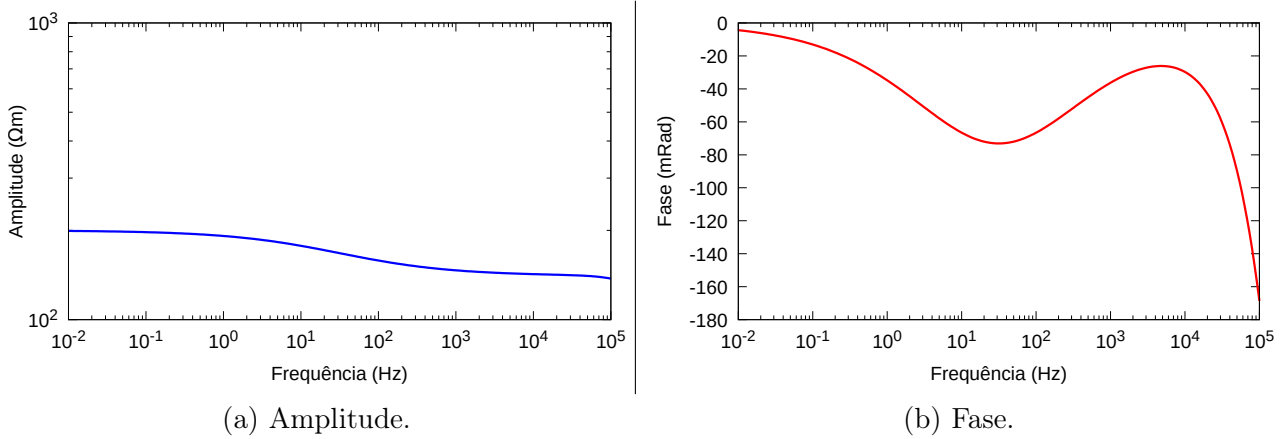


Figura 1.7: Amplitude e fase da resistividade complexa de Barreto e Dias (2014) empregando os parâmetros da expressão 1.8 e adotando  $\rho_0 = 200 \Omega\text{m}$ .

### Função de Barreto e Dias (2014) expandida

Uma das etapas desse trabalho será a inversão da resistividade complexa aparente para a determinação dos parâmetros correspondentes aos efeitos de IP e AEM, possibilitando a diferenciação entre eles. Para tal, é necessário o emprego de uma função de resistividade complexa que abranja ambos os fenômenos em seus parâmetros.

A função de Barreto e Dias (2014) retrata apenas o efeito de polarização. Dessa forma, adotamos expandir essa função acrescentando o efeito indutivo, cuja fase pode ser positiva ou negativa (Brown, 1985; Kemna, 2000). Essa expansão foi formulada por Luo e Zhang (1998) e Kemna (2000) e se baseia numa modificação da expressão originalmente introduzida por Pelton et al. (1978). Tal formulação define que, para faixas de frequências inferiores a 10 kHz, a impedância devido ao AEM pode ser razoavelmente aproximada por um termo de dispersão de Cole-Cole, dado por

$$\frac{\rho_A}{\rho_0} = \pm m_A \left[ 1 - \frac{1}{1 + (i\omega\tau_A)^{c_A}} \right], \quad (1.9)$$

onde  $m_A$ ,  $\tau_A$  e  $c_A$  são, respectivamente, cargabilidade, tempo de relaxação e expoente de dependência, que caracterizam o efeito indutivo.

Em geral, valores típicos de  $\tau_A$  e  $c_A$  estão dentro dos intervalos  $10^{-6} < \tau_A < 10^{-3}$  e  $0.8 < c_A < 1$  (Major e Silic, 1981; Kemna, 2000). Considerando o limitado número de frequências em nossos dados reais, optamos por manter fixo o expoente de dependência em

$c_A = 1$  no intuito de reduzir a quantidade de parâmetros desconhecidos na inversão.

A escolha do sinal que antecede a expressão 1.9 tem como base a natureza do fenômeno indutivo: Caso haja um deslocamento negativo da fase com o aumento da frequência, o sinal negativo é empregado e, por convenção, o AEM é dito positivo; se esse deslocamento na fase for positivo, adota-se o sinal positivo e o AEM é referido como negativo (Brown, 1985; Kemna, 2000).

Para atender a essa dualidade do acoplamento indutivo, o ideal seria adicionarmos dois termos de dispersão à equação 1.7 de Barreto e Dias (2014): um para AEM de fase negativa e outro para AEM de fase positiva. Entretanto, o último termo (função *Debye*) da equação 1.7 é semelhante à expressão 1.9 do AEM para um deslocamento negativo de fase e, portanto, já irá englobar esse efeito. Dessa forma, adicionamos à equação 1.7 somente o termo de dispersão referente ao AEM de fase positiva (i.e., equação 1.9 com sinal positivo). É importante ressaltar que os parâmetros cargaabilidade  $m_D$  e tempo de relaxação  $\tau_D$  deixam de representar unicamente o efeito de IP, passando a englobar também uma parcela do AEM.

Em síntese, a formulação final da função de Barreto e Dias (2014) expandida para abranger o AEM é dada por:

$$\rho^* = \rho_0 \left\{ \underbrace{1 - m_W \left[ 1 - \frac{1}{1 + (i\omega\tau_W)^{1/2}} \right]}_{\text{IP (1 mHz - } 10^2 \text{ Hz)}} - \underbrace{m_D \left[ 1 - \frac{1}{1 + i\omega\tau_D} \right]}_{\substack{\text{IP (10 kHz - 1 MHz)} \\ \text{+ AEM positivo}}} + \underbrace{m_A \left[ 1 - \frac{1}{1 + i\omega\tau_A} \right]}_{\text{AEM negativo}} \right\}. \quad (1.10)$$

Expandindo a equação 1.10 em termos de seus componentes real e imaginário, temos:

$$\text{Re}(\rho^*) = \rho_0 \left\{ 1 - m_W \left[ 1 - \frac{1 + \left(\frac{\omega\tau_W}{2}\right)^{1/2}}{1 + 2\left(\frac{\omega\tau_W}{2}\right)^{1/2} + \omega\tau_W} \right] - m_D \left[ 1 - \frac{1}{1 + (\omega\tau_D)^2} \right] + m_A \left[ 1 - \frac{1}{1 + (\omega\tau_A)^2} \right] \right\} \quad (1.11)$$

$$\text{Im}(\rho^*) = \rho_0 \left\{ -m_W \left[ \frac{\left(\frac{\omega\tau_W}{2}\right)^{1/2}}{1 + 2\left(\frac{\omega\tau_W}{2}\right)^{1/2} + \omega\tau_W} \right] - m_D \left[ \frac{\omega\tau_D}{1 + (\omega\tau_D)^2} \right] + m_A \left[ \frac{\omega\tau_A}{1 + (\omega\tau_A)^2} \right] \right\} \quad (1.12)$$

### 1.2.5 Polarização induzida espectral

O método de polarização induzida espectral constitui uma generalização do IP convencional que abrange medidas de amplitude e fase em uma maior faixa de frequências, fornecendo mais informações sobre a subsuperfície do que os outros métodos galvânicos (resistividade e IP convencional). Segundo Zonge et al. (2005), uma análise da dependência entre o dado medido e a frequência aplicada no método SIP permite reconhecer e discernir diferentes materiais responsáveis pelo efeito de polarização induzida.

O método de SIP é mais caro do que o IP convencional pois requer a aquisição de dados para um maior número de frequências e algoritmos mais sofisticados para o processamento de dados. Dessa forma, o emprego desse método geralmente ocorre quando a anomalia geofísica já foi identificada por IP ou resistividade convencional e é desejável melhor caracterizar a sua fonte (Zonge et al., 2005). Assim como o IP, o SIP tem sido muito empregado na indústria da mineração para mapeamento e detecção de sulfetos disseminados, e em menor escala para estudos ambientais e hidrológicos.

### 1.2.6 Ruídos no método de IP

Existem algumas fontes de ruído que afetam a acurácia das medidas de polarização induzida por causarem diferenças de potencial espúrias nos receptores. Essas fontes podem ter origem geológica, cultural, natural ou relacionada à interação (capacitiva, resistiva ou indutiva) entre os cabos dos eletrodos de corrente e de potencial, a qual se denomina acoplamento.

#### Ruídos geológicos, culturais e naturais

A presença de tubulações, cabos e outras estruturas metálicas antrópicas enterradas provoca o chamado ruído cultural nos levantamentos devido à canalização de corrente e polarização de eletrodo (Zonge et al., 2005). Por sua vez, o ruído geológico pode ter sua fonte em feições geológicas de baixa resistividade (uma lineação ou cobertura condutiva) que mascaram a resposta de IP de alvos mais profundos. Descargas elétricas atmosféricas podem se manifestar como pulsos indesejados nas medidas de IP. Esse ruído de origem natural de alta frequência é conhecido como *sferics*.

A interação eletromagnética de partículas carregadas do vento solar com a magnetosfera terrestre causa pequenas variações no campo magnético terrestre que são conhecidas como correntes telúricas ou magnetotelúricas. Esse ruído de caráter natural pode afetar consideravelmente as medidas de polarização induzida, já que seu sinal é de baixa frequência, coincidindo com a faixa de frequências das medidas de IP. Segundo Sumner (1976), levanta-

mentos de IP no domínio do tempo são mais susceptíveis ao ruído telúrico do que no domínio da frequência.

### **Acoplamento resistivo**

A corrente no transmissor promove uma diferença de potencial no receptor, a qual, dividida pela corrente aplicada e multiplicada por um fator geométrico adequado, fornece a resistividade aparente da subsuperfície entre os dipolos (Wynn, 1974). Nesse caso, diz-se que o transmissor e o receptor estão acoplados através das litologias em subsuperfície. Esse acoplamento não se constitui propriamente em um ruído, pois é a forma de medição da resistividade da subsuperfície e, portanto, o objetivo do método.

### **Acoplamento capacitivo**

O acoplamento capacitivo corresponde a mudanças na voltagem medida devido a fugas de corrente ou correntes de deslocamento entre os fios transmissor e receptor, ou entre o fio transmissor e o solo, em uma situação na qual o sistema se comporta como um capacitor.

Considerando que a polarização induzida é, em parte, um fenômeno capacitivo, esse ruído pode limitar a interpretação dos dados de IP e deve, portanto, ser evitado ou eliminado. Para minimizá-lo, opera-se em frequências maiores ou diminui-se a capacitância entre os cabos, alterando suas orientações ou separando-os.

### **Acoplamento indutivo**

Em certas situações, o transmissor e o receptor se comportam como um enrolamento primário e secundário de um circuito. O primário induz uma corrente no secundário, e o acoplamento se dá através de ondas eletromagnéticas (Sumner, 1976). Assim, a indução eletromagnética cria uma dependência complexa (em magnitude e fase) da resistividade com a frequência que não é devido ao efeito autêntico da polarização induzida, gerando um falso efeito de IP.

Também conhecido como acoplamento eletromagnético ou indução eletromagnética, o acoplamento indutivo é a maior fonte de anomalias espúrias nas medidas de polarização induzida. Em menor escala, os efeitos desse acoplamento podem ainda estar associados a materiais terrestres anisotrópicos e não homogêneos. Elementos culturais, como cercas e tubulações também podem contribuir para os efeitos do acoplamento indutivo (Sumner, 1976).

O AEM se constitui em um objeto de estudo desse trabalho, de forma que seus princípios

teóricos serão discutidos mais detalhadamente a seguir.

### 1.2.7 Princípios teóricos do acoplamento eletromagnético

O acoplamento eletromagnético pode ser definido como a resposta indutiva da Terra e se manifesta como um acréscimo de informações sobre o sinal de IP (Routh e Oldenburg, 2001). A grande discussão gira em torno de como separar a dependência da frequência causada pela resistividade complexa intrínseca da polarização da dependência da frequência causada pelo acoplamento eletromagnético, já que o método de IP/SIP registra a combinação de ambos os efeitos.

Embora as medidas de IP convencional sejam feitas em frequências menores ( $\leq 5$  Hz), nas quais o acoplamento é reduzido, todo dado de IP possui algum grau de contaminação pelo acoplamento indutivo, principalmente quando o meio em subsuperfície é condutivo ou quando se empregam largos comprimentos e afastamentos de dipolos para investigar alvos profundos. Por sua vez, os levantamentos de SIP, que empregam uma faixa maior de frequência, estão ainda mais susceptíveis ao efeito indutivo, e, portanto, aos erros de interpretação associados. Assim sendo, há um consenso sobre a necessidade de remover ou mitigar o efeito do AEM para interpretar o dado de IP em sua perspectiva verdadeira.

A resposta indutiva no método do IP se expressa em ambos os domínios do tempo e da frequência. Entretanto, enquanto no domínio da frequência seu efeito é mais substancial e de difícil remoção, costuma-se evitar o acoplamento indutivo no domínio do tempo simplesmente desconsiderando os instantes iniciais do decaimento da voltagem transiente, quando o seu impacto é mais pronunciado.

A depender do arranjo de eletrodos empregado na aquisição dos dados, o fenômeno do acoplamento se manifesta em intensidades e sinais diferentes, de forma que certos arranjos (como o dipolo-dipolo perpendicular) podem ser propositalmente escolhidos por minimizar esse ruído nas medidas de IP.

Além de uma adequada escolha do arranjo de eletrodos, o AEM no domínio da frequência pode ser minimizado empregando baixas frequências e pequenas distâncias na configuração dos dipolos. No entanto, ressaltamos que, a depender do alvo investigado na exploração mineral, nem sempre tais medidas podem ser adotadas.

Em geral, os métodos de desacoplamento no domínio da frequência se baseiam em aproximações e considerações que muitas vezes são questionáveis, porém são necessárias dada a complexidade da relação do IP com o acoplamento eletromagnético. Alguns partem da controversa premissa de que, em zonas de mineralizações disseminadas, a fase do efeito normal de IP é constante para baixas frequências, enquanto a fase do AEM possui um com-

portamento quase linear (Hallob, 1974; Coggon, 1984). Já Pelton et al. (1978) emprega o modelo de multi-Cole-Cole para desacoplar a resposta indutiva das medidas de IP em baixas frequências.

Ainda que seja normalmente tratado como ruído, o acoplamento eletromagnético tem o potencial de fornecer informações importantes acerca das características da subsuperfície. O AEM pode e deve ser usado como uma ferramenta de exploração para obter um melhor entendimento das estruturas e contrastes elétricos da subsuperfície, inclusive na ausência do efeito de polarização natural das rochas.

Em um levantamento geofísico de dados, o acoplamento indutivo é diretamente proporcional à frequência do sinal, à condutividade da subsuperfície, ao comprimento dos dipolos e à separação entre os dipolos transmissor e receptor. Dada sua relevância, se faz pertinente uma compreensão sobre a variação desse efeito para diferentes configurações de eletrodos, parâmetros elétricos e conjunturas geométricas da subsuperfície.

### **Formas de representação de dados complexos**

Por lidar com diversos parâmetros, dados de natureza complexa e grandes intervalos de frequência, a análise do AEM em conjunto com medidas de SIP exige o emprego de algumas formas específicas de representação dos dados.

Na literatura, muito se emprega a plotagem da impedância elétrica mútua (magnitude e fase ou componentes real e imaginária) em função da frequência do sinal para a análise do comportamento das curvas. Extensivamente utilizado, o Diagrama de Argand ou plano complexo (componente real  $\times$  componente imaginário) é uma outra forma eficaz de representação gráfica de dados complexos, embora possa comprometer a visualização da relação do dado com a frequência. Nos capítulos seguintes desse trabalho, essas serão as formas de apresentação dos resultados.

# 2

## Formulação para análise do acoplamento eletromagnético em dados geofísicos

A análise do acoplamento eletromagnético em levantamentos geofísicos no domínio da frequência tem sua fundamentação teórica com base nos conceitos do eletromagnetismo. Ao longo deste capítulo, será desenvolvido o formalismo físico-matemático das expressões da impedância elétrica mútua tanto para o modelo de terra homogênea, quanto em  $\eta$ -camadas, com base em Mocitaiba et al. (2017) e Millett (1967). Tais expressões, juntamente com as funções da resistividade complexa 1.6 e 1.10, serão o ponto de partida para os procedimentos de modelagem e inversão nas etapas posteriores.

Em tais aplicações, supõe-se um espaço isotrópico, homogêneo e linear, cujas propriedades elétricas são independentes do tempo, temperatura e pressão. Serão empregadas letras maiúsculas para representar as grandezas no domínio da frequência.



## 2.1 Fundamentos do acoplamento eletromagnético no domínio da frequência

O emprego de funções potenciais, como Hertz e Schelkunoff, é conhecido na teoria eletromagnética por favorecer a resolução de problemas, já que os vetores de campo podem ser facilmente obtidos por meio de técnicas apropriadas de diferenciação dessas funções potenciais (Telford et al., 1990). Seguindo a formulação de Sampaio (2006), temos o potencial vetorial no domínio da frequência  $\mathbf{A}(x, y, z, \omega)$ , onde  $(x, y, z)$  são medidas de distância em metros e  $\omega = 2\pi f$ , sendo  $\omega$  a frequência em rad/s e  $f$  a frequência em Hz.

O vetor campo de indução magnética  $\mathbf{B}(x, y, z, \omega)$  e o vetor campo elétrico  $\mathbf{E}(x, y, z, \omega)$  se relacionam com o potencial  $\mathbf{A}$  pelas seguintes relações (Sampaio, 2006; Mocitaiba et al., 2017):

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.1)$$

e

$$\mathbf{E} = -i\omega \left( \frac{1}{\kappa^2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \right), \quad (2.2)$$

onde  $\kappa = \sqrt{\mu\epsilon\omega^2 - i\mu\sigma\omega}$  corresponde ao número de onda, no qual  $\epsilon$  é a permissividade dielétrica,  $\mu$  é a permeabilidade magnética e  $\sigma$  é a condutividade elétrica, constantes independentes da frequência.

Em tal contexto, o potencial vetorial  $\mathbf{A}$  obedece à equação de onda não-homogênea de Helmholtz no domínio da frequência (Sampaio, 2006)

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \kappa^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_s, \quad (2.3)$$

na qual a fonte do campo é representada pela densidade de corrente elétrica  $\mathbf{J}_s$  em A/m<sup>2</sup>.

### Potencial primário do dipolo elétrico

Conforme explicitado na equação 2.2, para computar o campo elétrico horizontal  $\mathbf{E}_x$  é necessário obter o potencial total, nesse caso, a função potencial  $\mathbf{A}$ . O cálculo do potencial total se dá pela integração do potencial primário, causado apenas pela fonte externa, com o potencial secundário, o qual é a resposta dos corpos em subsuperfície à fonte externa imposta. Em um meio homogêneo, isotrópico e infinito, o potencial primário é o único (Sampaio, 2006).

A densidade de corrente no domínio da frequência em um dipolo elétrico orientado na direção  $x$  e localizado no ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  de um meio infinito e homogêneo é definido por

(Sampaio, 2006):

$$\mathbf{J}_s = I(\omega) dx_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \mathbf{i}, \quad (2.4)$$

onde  $I(\omega)$  representa a corrente elétrica em Ampère,  $dx_0$  é o comprimento elementar do dipolo e as funções  $\delta(\gamma - \gamma_0)$  são funções delta de Dirac com singularidade nos pontos  $\gamma = \gamma_0$ .

O potencial primário representa a solução particular da equação 2.3. Dessa forma, substituindo a equação 2.4 na equação 2.3, obtemos a solução para o potencial primário. Fazendo uso da função escalar de Green, Sampaio (2006) expressa tal potencial primário como:

$$\mathbf{A}_p(x, y, z, \omega) = C_{\hat{\mathbf{x}}} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{\alpha_0} e^{-\alpha_0|z-z_0|} J_0(\lambda r) d\lambda dx_0, \quad (2.5)$$

onde  $\alpha_0 = \sqrt{\lambda^2 - \kappa_0^2}$ ,  $\kappa_0^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2$  (no ar),  $\text{Re}(\alpha_0) > 0$ ,  $J_0(\lambda r)$  é a função de Bessel de primeira espécie, ordem zero e argumento  $\lambda r$ ,  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$  e

$$C = \frac{\mu I(\omega)}{4\pi}.$$

### O potencial secundário e o potencial total para um meio homogêneo, isotrópico e infinito

As expressões para o potencial secundário se diferenciam a depender do meio em subsuperfície em questão. Segundo Sampaio (2006), analisando um meio homogêneo, isotrópico e infinito, o potencial secundário nos componentes  $x$  e  $z$  pode ser expresso como:

$$\mathbf{A}_{S,x0}(x, x_0, y, y_0, z, z_0, \omega) = C_{\hat{\mathbf{x}}} \int_0^{+\infty} F_{x0}^+ e^{+\alpha_0 z} J_0(\lambda r) d\lambda, \quad z \leq 0, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{A}_{S,x1}(x, x_0, y, y_0, z, z_0, \omega) = C_{\hat{\mathbf{x}}} \int_0^{+\infty} F_{x1}^- e^{-\alpha_1 z} J_0(\lambda r) d\lambda, \quad z \geq 0, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{A}_{S,z0}(x, x_0, y, y_0, z, z_0, \omega) = C_{\hat{\mathbf{z}}} \cos \phi \int_0^{+\infty} F_{z0}^+ e^{+\alpha_0 z} J_1(\lambda r) d\lambda, \quad z \leq 0, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{A}_{S,z1}(x, x_0, y, y_0, z, z_0, \omega) = C_{\hat{\mathbf{z}}} \cos \phi \int_0^{+\infty} F_{z1}^- e^{-\alpha_1 z} J_1(\lambda r) d\lambda, \quad z \geq 0, \quad (2.9)$$

em que  $\alpha_1 = \sqrt{\lambda^2 - \kappa_1^2}$ ,  $\kappa_1^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 - i \mu_0 \sigma_1 \omega$  (representa o semi-espaco homogêneo),  $\text{Re}(\alpha_1) > 0$ ,  $J_1(\lambda r)$  é a função de Bessel de primeira espécie, primeira ordem e argumento

$\lambda r$  e

$$\cos \phi = \frac{x - x_0}{r}.$$

Considerando que a fonte do dipolo encontra-se no ar, ou seja, em  $z \leq 0$ , acrescenta-se a equação do potencial primário 2.5 ao lado direito da expressão de  $\mathbf{A}_{S,x_0}$ . Com esse acréscimo, as equações 2.9 passam a representar o **potencial total** para o semi-espaço homogêneo, isotrópico e infinito.

Neste ponto, a solução para o potencial total depende apenas da determinação das expressões das funções  $F_{\eta j}^{\pm}$  com  $\eta = x, z$  e  $j = 0, 1$ . Para isso, é necessário aplicar as **condições de contorno** pertinentes aos campos eletromagnéticos nas fronteiras das discontinuidades das propriedades físicas, ou seja, nesse caso em  $z = 0$ . As condições de contorno e o consequente desenvolvimento algébrico podem ser encontrados no apêndice A.

### O potencial secundário e o potencial total para um meio de $\eta$ -camadas

O potencial secundário para um meio com  $\eta$ -camadas é dado por (Wait, 1982)

$$\mathbf{A}_{S,x_0}(x, x_0, y, y_0, z, z_0, \omega) = C_{\hat{\mathbf{x}}} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{\alpha_0} (R_{te}) e^{\alpha_0(z+z_0)} J_0(\lambda r) d\lambda, \quad z \leq 0, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{A}_{S,z_0}(x, x_0, y, y_0, z, z_0, \omega) = C_{\hat{\mathbf{x}}} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda} (R_{te} + R_{tm}) e^{\alpha_0(z+z_0)} J_0(\lambda r) d\lambda, \quad z \leq 0, \quad (2.11)$$

onde os termos  $R_{te}$  e  $R_{tm}$  são os coeficientes de reflexão, definidos como:

$$R_{te} = \frac{\alpha_0 - \hat{\alpha}_1}{\alpha_0 + \hat{\alpha}_1}, \quad (2.12)$$

$$\hat{\alpha}_i = \alpha_i \frac{\hat{\alpha}_{i+1} + \alpha_i \tanh(\alpha_1 h_i)}{\alpha_i + \hat{\alpha}_{i+1} \tanh(\alpha_1 h_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, \eta - 1, \quad (2.13)$$

$$\hat{\alpha}_\eta = \alpha_\eta, \quad \alpha_i = \sqrt{\lambda - \kappa_i^2}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \eta \quad (2.14)$$

e

$$R_{tm} = \frac{\beta_0 - \hat{\beta}_1}{\beta_0 + \hat{\beta}_1}, \quad (2.15)$$

$$\hat{\beta}_i = \beta_i \frac{\hat{\beta}_{i+1} + \beta_i \tanh(\alpha_1 h_i)}{\beta_i + \hat{\beta}_{i+1} \tanh(\alpha_1 h_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, \eta - 1, \quad (2.16)$$

$$\hat{\beta}_\eta = \beta_\eta, \quad \beta_0 = \frac{\alpha_0}{i\epsilon_0\omega}, \quad \beta_i = \frac{\alpha_i}{\sigma_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \eta \quad (2.17)$$

A junção das expressões 2.10, 2.11 com o potencial primário em 2.5 resulta no potencial total para o meio de  $\eta$ -camadas.

### 2.1.1 Campo elétrico de um dipolo elétrico no domínio da frequência

Tendo expressas as formulações para o potencial primário e secundário para ambos os modelos de terra (homogênea e em  $\eta$ -camadas), são desenvolvidas as expressões para o campo elétrico, advindas da equação 2.2:

$$\mathbf{E} = -i\omega \left( \frac{1}{\kappa_j^2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \right),$$

$j = 0, 1, \dots, \eta$  para um meio de  $\eta$ -camadas e  $j = 0, 1$  no caso de um modelo homogêneo, isotrópico e infinito, de forma que  $k_0^2 = \mu_0\epsilon_0\omega^2$  representa o número de onda no ar e  $k_1^2 = \mu_0\epsilon_0\omega^2 - i\mu_0\sigma_1\omega$  representa o número de onda na subsuperfície.

Aplicando as expressões 2.5, 2.6 e 2.8 à equação 2.2 e com o auxílio de A.9 e A.11, chegamos à equação do componente  $x$  do campo elétrico no modelo da terra homogênea em  $y = y_0 = z = 0$ :

$$E_x(x, x_0, z_0, \omega) = -\frac{i\mu_0\omega I(\omega)dx_0}{4\pi} \int_0^{+\infty} \left( \frac{2}{\alpha_0 + \alpha_1} + \frac{2}{\alpha_0\kappa_1^2 + \alpha_1\kappa_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) e^{\alpha_0 z_0} \lambda J_0(\lambda(x - x_0)) d\lambda. \quad (2.18)$$

Da mesma forma, empregando em 2.2 as equações 2.5, 2.10 e 2.11 com o auxílio de 2.12 a 2.17 encontramos a expressão do componente  $x$  do campo elétrico para o modelo da terra de  $\eta$ -camadas:

$$E_x(x, x_0, z_0, \omega) = -\frac{i\mu_0\omega I(\omega)dx_0}{4\pi} \int_0^{+\infty} \left\{ \frac{2}{\alpha_0 + \hat{\alpha}_1} + \left[ \frac{R_{te} + R_{tm}}{\lambda^2\alpha_0} + \frac{2\hat{\beta}_1}{\alpha_0\kappa_0^2(\beta_0 + \hat{\beta}_1)} \right] \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} \times e^{\alpha_0 z_0} \lambda J_0(\lambda(x - x_0)) d\lambda. \quad (2.19)$$

Tendo em vista o emprego de frequências menores que 1 kHz, é válida a **condição quase-estática**, na qual  $|\kappa_0| \ll |\kappa_1|$ ,  $\sigma_1 \gg \epsilon_0\omega$  e  $\kappa_1^2 \approx -i\mu_0\sigma_1\omega$ . Dessa forma, considera-se

que  $\alpha_0 = \lambda$ ,  $|\beta_0| \gg |\hat{\beta}_1|$ ,  $R_{tm} \approx 1$  e

$$\left| \frac{2\hat{\beta}_1}{\alpha_0 \kappa_0^2 (\beta_0 + \hat{\beta}_1)} \right| \approx \left| \frac{2\sigma_1 \hat{\beta}_1}{\lambda^2 \kappa_1^2} \right|.$$

Com a adição da condição quase-estática, as expressões do campo elétrico 2.18 e 2.19 são reformuladas como:

$$E_x(x, x_0, z_0, \omega) = -\frac{i\mu_0\omega I(\omega)dx_0}{4\pi} \int_0^{+\infty} \left( \frac{2}{\lambda + \alpha_1} + \frac{2}{\lambda \kappa_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) e^{\lambda z_0} \lambda J_0(\lambda(x - x_0)) d\lambda, \quad (2.20)$$

para uma terra homogênea, isotrópica e infinita, e

$$E_x(x, x_0, z_0, \omega) = -\frac{i\mu_0\omega I(\omega)dx_0}{4\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \frac{2}{\lambda + \hat{\alpha}_1} + \frac{2}{\lambda^2} \left( \frac{1}{\lambda + \hat{\alpha}_1} + \frac{\sigma_1 \hat{\beta}_1}{\kappa_1^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \times e^{\alpha_0 z_0} \lambda J_0(\lambda(x - x_0)) d\lambda, \quad (2.21)$$

para uma terra de  $\eta$ -camadas.

## 2.1.2 Potencial elétrico e impedância elétrica mútua no domínio da frequência

Nessa formulação, um arranjo dipolo-dipolo é empregado com as seguintes configurações (Mocitaiba et al., 2017): comprimento do dipolo  $2a$ , afastamento entre o centro dos dipolos transmissor e receptor de  $2(n+1)a$ , com níveis  $n = 1, 2, 3, \dots$ . O potencial elétrico no domínio da frequência é dado por:

$$\Delta V(z_0, \omega) = \int_{(2n+1)a}^{(2n+3)a} \int_{-a}^{+a} E_x(x, x_0, z_0, \omega) dx \quad (2.22)$$

Levando em conta que as integrações em  $x$  e em  $x_0$  se aplicam apenas na função de Bessel, as seguinte funções auxiliares são utilizadas para facilitar a resolução das integrais:

$$G_x(\lambda) = \int_{(2n+1)a}^{(2n+3)a} \int_{-a}^{+a} J_0(\lambda(x - x_0)) dx_0 dx, \quad (2.23)$$

e

$$G_z(\lambda) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{(2n+1)a}^{(2n+3)a} \int_{-a}^{+a} J_o(\lambda(x - x_0)) dx_0 dx. \quad (2.24)$$

A função auxiliar  $G_x(\lambda)$  é resolvida por integração numérica, enquanto que a resolução de  $G_z(\lambda)$  leva em conta que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial x_0}$$

resultando em

$$G_z(\lambda) = J_0(2\lambda na) + J_0(2\lambda(n+2)a) - 2J_0(2\lambda(n+1)a). \quad (2.25)$$

Nesse contexto, temos que  $J_0(0) = 1$ ,  $G_x(0) = 4a^2$  e  $G_z(0) = 0$ . Finalmente, escrevendo em termos da impedância elétrica mútua dada por

$$Z(z_0, \omega) = \frac{\Delta V(z_0, \omega)}{I(\omega)}, \quad (2.26)$$

temos, para uma terra homogênea,

$$\Delta Z(z_0, \omega) \approx -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi} \int_0^{+\infty} \left( \frac{2}{\lambda + \alpha_1} G_x(\lambda) + \frac{2}{\lambda \kappa_1^2} G_z(\lambda) \right) e^{\lambda z_0} \lambda d\lambda, \quad (2.27)$$

e, para para uma terra de  $\eta$ -camadas,

$$\Delta Z(z_0, \omega) \approx -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \frac{2}{\lambda + \hat{\alpha}_1} G_x(\lambda) + \frac{2}{\lambda^2} \left( \frac{1}{\lambda + \hat{\alpha}_1} + \frac{\sigma_1 \hat{\beta}_1}{\kappa_1^2} \right) G_z(\lambda) \right] e^{\lambda z_0} \lambda d\lambda. \quad (2.28)$$

Embora as expressões 2.27 e 2.28 estejam em função do parâmetro condutividade elétrica  $\sigma$ , no presente trabalho empregamos o seu parâmetro inverso, a resistividade elétrica  $\rho$ . Mais detalhes acerca do formalismo físico-matemático dessa seção podem ser encontrados em Mocitaiba et al. (2017) e Mocitaiba (2014).

## 2.2 Abordagem do acoplamento eletromagnético por Millett (1967)

A formulação de Millett (1967) a seguir apresentada permitiu um reconhecimento inicial do comportamento do fenômeno indutivo para semi-espacos homogêneos, além de validar, através de comparações, a implementação da abordagem de Mocitaiba et al. (2017).

A solução teórica inicial para o problema do acoplamento EM entre fios aterrados na superfície de um plano horizontal sobre um meio homogêneo foi desenvolvida por Sunde (1949). Por sua vez, Millett (1967) integrou outros conceitos matemáticos e físicos nessa formulação para então investigar o acoplamento eletromagnético de um arranjo dipolo-dipolo em um semi-espaço homogêneo.

### 2.2.1 Impedância mútua de dipolos em um plano horizontal

Em um semi-espaço homogêneo, a impedância mútua,  $dZ_{Ss}$ , entre dois elementos de dipolos  $d_S$  e  $d_s$  horizontalizados, separados por uma distância  $r$  pode ser escrita da seguinte maneira (Sunde, 1949):

$$dZ_{Ss} = dSds \left[ P(r) \cos \epsilon + \frac{\partial^2 Q(r)}{\partial S \partial s} \right], \quad (2.29)$$

na qual  $\epsilon$  é o ângulo entre os elementos  $d_S$  e  $d_s$ , e os termos  $P(r)$  e  $Q(r)$  são funções de  $r$  e da constante de propagação (equação 2.33). Negligenciando os efeitos da propagação, a impedância mútua  $Z_{Ss}$  de um fio isolado  $S$ , entre os eletrodos de corrente  $A$  e  $B$  e outro fio isolado  $s$ , entre os eletrodos de potencial  $a$  e  $b$ , representados na Figura 2.1, é dada por

$$Z_{Ss} = \int_a^b \int_A^B \left[ \frac{\partial^2 Q(r)}{\partial S \partial s} + P(r) \cos \epsilon \right] dS ds. \quad (2.30)$$

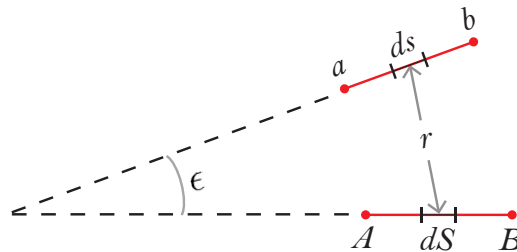


Figura 2.1: Arranjo de dipolos. Adaptado de Madden e Cantwell (1967).

## 2.2.2 Impedância mútua de dipolos colineares em um semi-espaço homogêneo

Em seu estudo, Millett (1967) tratou o caso de dipolos colineares em um semi-espaço homogêneo, no qual a impedância mútua (2.30) pode então ser representada pela integração das funções

$$P(r) = \frac{i\omega\mu}{2r} \left[ \frac{1 - (1 + \gamma r)e^{-\gamma r}}{(\gamma r)^2} \right], \quad (2.31)$$

termo puramente indutivo relacionado ao AEM, e

$$Q(r) = \frac{\rho}{2\pi r}, \quad (2.32)$$

termo puramente resistivo, variável em função da frequência caso o meio seja polarizável.

Nestas equações,  $\rho$  é a resistividade elétrica do meio e  $\gamma$  é a constante de propagação dada por

$$\gamma = \sqrt{\frac{i\mu\omega}{\rho}}. \quad (2.33)$$

Para um semi-espaço homogêneo e não-polarizável,  $Q(r)$  é real e constante, independente da frequência. No caso de um semi-espaço em camadas,  $Q(r)$  torna-se complexo e dependente da frequência (Wynn, 1979; Zonge et al., 2005).

O efeito do AEM pode ser minimizado com o emprego de determinados arranjos de eletrodos, como dipolo-dipolo perpendicular, no qual o ângulo entre os fios do dipolo é de  $90^\circ$ , fazendo com que  $\cos \epsilon \rightarrow 0$ . Para a configuração empregada de dipolos colineares (Figura 2.2),  $\cos \epsilon = 1$ , e os limites de integração da equação 2.30 são dados por  $a = mL$ ,  $b = (m + 1)L$ ,  $A = 0$  e  $B = L$ , onde  $L$  é o comprimento dos fios dos dipolos  $S$  e  $s$  e  $m$  é um número inteiro variável ( $m = 2, 3, \dots$ ) referente ao afastamento entre os dipolos.

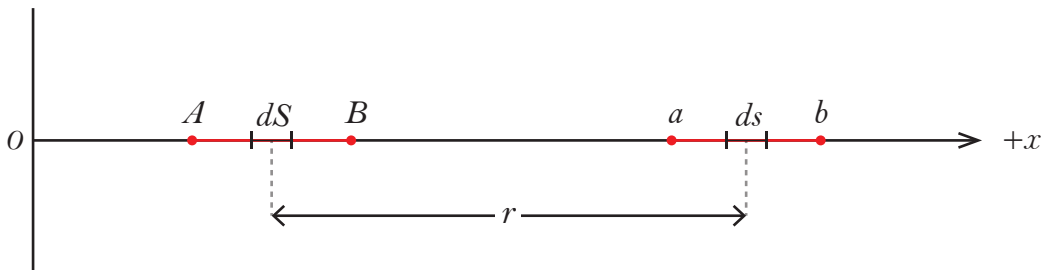


Figura 2.2: Representação dos dipolos colineares. Adaptado de Millett (1967).



A integração do primeiro termo da equação 2.30 é dada por

$$\int \int \frac{\partial^2 Q(r)}{\partial S \partial s} dS ds = -\frac{\rho}{\pi L m(m^2 - 1)}, \quad (2.34)$$

O segundo termo a ser integrado, correspondente à equação 2.31, pode ser expresso como uma série infinita, dada por

$$P(r) = \frac{\rho}{2\pi} \left[ \frac{\gamma^2}{2r} - \frac{\gamma^3}{3} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-1)^k (k-1) \gamma^k \gamma^{k-3}}{k!} \right]. \quad (2.35)$$

Para obter a expressão final da impedância em função do número de indução  $\theta$ , é estabelecida a seguinte relação:

$$L\gamma = \sqrt{i}\theta = \frac{(1+i)\theta}{\sqrt{2}}. \quad (2.36)$$

Dessa forma, após o desenvolvimento das expressões e inclusão do parâmetro  $\theta$ , a equação 2.30 pode finalmente ser escrita como

$$\begin{aligned} Z_{Ss} = \frac{\rho}{2\pi L} & \left\{ \left[ \frac{2}{m(m^2 - 1)} - \frac{\theta^3}{3\sqrt{2}} + \text{somaA} - \frac{1}{\sqrt{2}} \text{somaB} + \frac{1}{\sqrt{2}} \text{somaD} \right] \right. \\ & + i \left[ -\frac{\theta^2}{2} \left( m \ln \left( \frac{m^2 - 1}{m^2} \right) + \ln \left( \frac{m + 1}{m - 1} \right) \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{\theta^3}{3\sqrt{2}} + \text{somaC} - \frac{1}{\sqrt{2}} \text{somaB} - \frac{1}{\sqrt{2}} \text{somaD} \right] \right\}, \quad (2.37) \end{aligned}$$

onde

$$\text{somaA} = \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^{k+1} \theta^{4k} f(m^{4k-1})}{(4k-2)(4k)!}, \quad (2.38)$$

$$\text{somaB} = \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^{k+1} \theta^{4k+1} f(m^{4k})}{(4k-1)(4k+1)!}, \quad (2.39)$$

$$\text{somaC} = \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^{k+1} \theta^{4k+2} f(m^{4k+1})}{(4k)(4k+2)!}, \quad (2.40)$$

$$somaD = \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^{k+1} \theta^{4k+3} f(m^{4k+2})}{(4k+1)(4k+3)!}. \quad (2.41)$$

A função de  $f(m)$  é exemplificada por

$$f(m^{4k-1}) = [(m+1)^{4k-1} + (m-1)^{4k-1} - 2m^{4k-1}] \quad (2.42)$$

O emprego de grandes faixas de variação para o número de indução exige a escolha de mais altos valores do limite superior  $k$  das séries para que haja convergência. Para o seu caso, Millett (1967) estabeleceu  $k = 7$ , tido como suficiente para convergir as suas somas infinitas dada a faixa de variação do número de indução  $\theta$ , variável de 0 a 0.9, com passos de 0.01. A impedância mútua normalizada é dada por

$$Z_{S_{norm}} = \frac{Z_{S_s}}{(\rho/2\pi L)}. \quad (2.43)$$

Para representar a impedância mútua  $Z_{S_s}$  em função da frequência  $\omega$ , basta realizar uma substituição de variáveis por meio da expressão a seguir, baseada nas equações 2.33 e 2.36:

$$\theta = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\rho}} L. \quad (2.44)$$

Tal manipulação permite calcular a impedância mútua (equação 2.37) para um meio homogêneo e eventualmente polarizável para diferentes valores de frequência  $\omega$ , resistividade elétrica  $\rho$  e comprimento dos dipolos  $L$ .

# 3

## Inversão: Teoria e Aplicação

Dada sua ampla aplicabilidade, a inversão é um tema bastante recorrente na literatura das ciências aplicadas. Menke (1989) define a teoria inversa como o conjunto de métodos matemáticos usados para extrair informações úteis sobre a Terra a partir de observações diretas. Segundo Tarantola (2005), o problema inverso consiste na utilização dos resultados reais de alguma medida para inferir os valores dos parâmetros que caracterizam o sistema.

No âmbito da geofísica aplicada, a inversão permite estimar propriedades da subsuperfície quando elas correspondem aos parâmetros do modelo físico-matemático tido como mais compatível com os dados observados. É importante ressaltar que a relação entre os parâmetros do modelo e o dado observado pode seguir duas direções distintas:

*Modelagem direta:* Os parâmetros do modelo são supostamente conhecidos e modelam os dados geofísicos que representam o sistema. No presente trabalho, essa abordagem é empregada na modelagem da resistividade complexa de Barreto e Dias (2014) e ainda na modelagem da impedância mútua para um modelo homogêneo ou de  $\eta$ -camadas.

*Problema inverso:* Partindo dos dados medidos, estimam-se os parâmetros do modelo através de um procedimento inverso. A inversão será aqui empregada como um artifício para a determinação de uma resistividade complexa aparente e ainda na estimativa dos parâmetros da função expandida de Barreto e Dias (2014).

Nas seções deste capítulo, desenvolveremos a formulação básica do problema inverso com foco nos métodos de inversão empregados no presente trabalho: Método dos Mínimos Quadrados, Gauss Newton e *Very Fast Simulated Annealing*.

### 3.1 Formulação do problema inverso

A mais simples formulação para o problema inverso supõe uma relação linear entre dado e modelo e é dada pelo sistema de equações lineares (Menke, 1989; Sen e Stoffa, 1995):

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m}, \quad (3.1)$$

no qual

$$\mathbf{d} = [d_1, d_2, d_3, d_4, \dots, d_N]^T \quad (3.2)$$

representa o vetor coluna de  $N$  dados observados, onde o sobrescrito  $T$  denota matriz transposta,

$$\mathbf{m} = [m_1, m_2, m_3, m_4, \dots, m_M]^T \quad (3.3)$$

representa o vetor coluna de  $M$  parâmetros do modelo e

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1M} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & g_{N2} & \cdots & g_{NM} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

é um operador matricial  $N \times M$  que correlaciona os  $M$  parâmetros com os  $N$  dados do modelo. O problema é solucionado com a obtenção do vetor dos parâmetros estimados sob a condição de que a matriz  $\mathbf{G}$  seja conhecida e inversível, chegando a:

$$\mathbf{m} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{d}. \quad (3.5)$$

Entretanto, a dificuldade reside no fato de que  $\mathbf{G}$  só é inversível caso seja uma matriz quadrada e possua posto completo (Bermúdez, 2015). Os problemas geofísicos reais raramente atendem a tais condições, de forma que comumente recorre-se a soluções abrangendo matrizes não-quadradas ou com posto incompleto, como o método dos mínimos quadrados ou a decomposição em valores singulares (SVD).

Quando o sistema da equação 3.1 admite uma maior quantidade  $N$  de dados do que  $M$  de parâmetros, ele é dito ser sobredeterminado. É possível ainda encontrar sistemas de uma única solução, portanto, determinados ( $M = N$ ) ou sistemas de infinitas soluções, ou seja, subdeterminados ( $M > N$ ). Nesse trabalho, estaremos lidando com problemas determinados (estimativa da resistividade complexa aparente) e sobredeterminados (estimativa dos parâmetros da função de resistividade).

O problema linear é bem posto ou bem condicionado se satisfizer os seguintes critérios

- Existência: Implica na existência de solução para o sistema.
- Unicidade: Tal solução deve ser única. Não é incomum que diferentes modelos produzam um mesmo dado, levando ao problema da ambiguidade da solução.
- Estabilidade: Os parâmetros estimados do modelo devem manter-se estáveis frente a qualquer perturbação nos dados, por mínima que seja (como ruídos).

### 3.1.1 Método dos Mínimos Quadrados

O método dos mínimos quadrados (MMQ) se propõe a obter a solução de problemas lineares através da minimização do somatório dos erros,  $\mathbf{e}$ , entre os dados observados,  $\mathbf{d}$ , e calculados,  $\mathbf{d}_{calc}$  (Sen e Stoffa, 1995; Tarantola, 2005). Esse somatório, comumente denominado de função objetivo, pode ser dado por:

$$Q(\mathbf{m}) = \mathbf{e}^T \mathbf{e}, \quad (3.6)$$

onde

$$\mathbf{e} = \mathbf{d} - \mathbf{d}_{calc} = \mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}. \quad (3.7)$$

Expandindo algebricamente a equação 3.6 e considerando que  $\mathbf{d}^T \mathbf{G}\mathbf{m} = \mathbf{m}^T \mathbf{G}^T \mathbf{d}$ , temos:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{m}) &= (\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m})^T (\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}) \\ &= (\mathbf{d}^T - \mathbf{m}^T \mathbf{G}^T) (\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}) \\ &= \mathbf{d}^T \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{G}\mathbf{m} - \mathbf{m}^T \mathbf{G}^T \mathbf{d} + \mathbf{m}^T \mathbf{G}^T \mathbf{G}\mathbf{m} \\ &= \mathbf{d}^T \mathbf{d} - 2\mathbf{m}^T \mathbf{G}^T \mathbf{d} + \mathbf{m}^T \mathbf{G}^T \mathbf{G}\mathbf{m}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Pelo princípio matemático da otimização, a solução  $\mathbf{m}_{est}$  do sistema linear corresponde ao vetor  $\mathbf{m}$  que anula as derivadas parciais de  $Q(\mathbf{m})$ . Como tal derivada é dada por

$$\frac{\partial Q(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} = -2\mathbf{G}^T \mathbf{d} + 2\mathbf{G}^T \mathbf{G}\mathbf{m}, \quad (3.9)$$

a condição de nulidade permite obter

$$\mathbf{G}^T \mathbf{d} = \mathbf{G}^T \mathbf{G}\mathbf{m}. \quad (3.10)$$

Pré-multiplicando ambos os lados por  $(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1}$ , temos:

$$\mathbf{m}_{est} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d}, \quad (3.11)$$

que é a solução MMQ, pressupondo a existência de  $(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1}$ .

O MMQ será empregado posteriormente na determinação do parâmetro  $\rho_0$  da função de Barreto e Dias (2014) expandida após a estimativa dos demais parâmetros.

### 3.1.2 Problema inverso não-linear

Na prática, os problemas geofísicos de inversão em sua maioria guardam uma relação não-linear entre o vetor do dado,  $\mathbf{d}$ , e modelo,  $\mathbf{m}$ , quando a equação 3.1 é reescrita como:

$$\mathbf{d} = G(\mathbf{m}). \quad (3.12)$$

Essa não linearidade do operador de modelagem direta  $G$  torna mais complexa a busca pelo vetor de modelos que reproduza os dados medidos. Os métodos de inversão não-linear podem ser classificados como de escopo local ou escopo global.

## 3.2 Métodos de escopo local

Nos métodos de escopo local, a busca pelo mínimo da função objetivo se restringe ao mínimo local. A convergência é relativamente rápida, mas está sujeita à escolha de um modelo inicial suficientemente próximo do mínimo global da função. São bastante empregados os métodos locais *Steepest Descent*, Newton e Gauss-Newton.

Empregaremos o método de Gauss-Newton para solucionar um problema que envolve apenas quantidades complexas ( $Z$  e  $\rho_a$ ). Sendo assim, as transpostas ordinárias  $T$  das matrizes são substituídas por suas transportas hermitianas  $H$  (Menke, 1989).

### 3.2.1 Método de Gauss-Newton

O método de Gauss-Newton (GN) faz uso da expansão em série de Taylor de primeira ordem do erro residual para linearizar o problema em torno da estimativa do modelo corrente e assim simplificar sua resolução. Dessa forma, a área de busca é aproximada de uma superfície rugosa e cheia de mínimos locais para um simples parabolóide tangente ao modelo corrente (Figura 3.1), cujo mínimo pode ser encontrado por métodos lineares (Santos, 2017).

Nesse contexto, a função erro residual entre dados observados e calculados é dada por

$$\Delta \mathbf{d}(\mathbf{m}) = \mathbf{d}_{obs} - \mathbf{d}_{calc}(\mathbf{m}), \quad (3.13)$$

na qual  $\mathbf{d}_{calc} = G(\mathbf{m})$ . A expressão 3.13 é aproximada por uma expansão em série de Taylor até a primeira ordem, obtendo:

$$\Delta \mathbf{d}(\mathbf{m}) \approx \tilde{\Delta} \mathbf{d}(\mathbf{m}) = \Delta \mathbf{d}(\mathbf{m}_k) - \sum_{j=1}^M \left. \frac{\partial G(\mathbf{m})}{\partial m_j} \right|_{\mathbf{m}_k} (m_j - m_{j,k}), \quad (3.14)$$

em torno de algum modelo de referência  $\mathbf{m}_k$ . Em notação vetorial e matricial, temos que:

$$\tilde{\Delta} \mathbf{d}_k = \Delta \mathbf{d}_k - \mathbf{S}_k \Delta \mathbf{m} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_k & \mathbf{S}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\Delta \mathbf{m}_k \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

onde  $\mathbf{S}_k$  representa a matriz das derivadas ou matriz sensibilidade e  $\Delta \mathbf{m}_k = (\mathbf{m} - \mathbf{m}_k)$  é o vetor incremento dos parâmetros.

A função objetivo, agora em sua forma quadrática, é expressa por:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\mathbf{m}_k) &= \tilde{\Delta} \mathbf{d}_k^H \tilde{\Delta} \mathbf{d}_k = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta \mathbf{m}_k^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_k^H \\ \mathbf{S}_k^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_k & \mathbf{S}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\Delta \mathbf{m}_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -\Delta \mathbf{m}_k^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_k^H \Delta \mathbf{d}_k & \Delta \mathbf{d}_k^H \mathbf{S}_k \\ \mathbf{S}_k^H \Delta \mathbf{d}_k & \mathbf{S}_k^H \mathbf{S}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\Delta \mathbf{m}_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -\Delta \mathbf{m}_k^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(\mathbf{m}_k) & \Delta \mathbf{d}_k^H \mathbf{S}_k \\ \mathbf{S}_k^H \Delta \mathbf{d}_k & \mathbf{S}_k^H \mathbf{S}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\Delta \mathbf{m}_k \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

que, quando minimizada com relação ao parâmetro  $\mathbf{m}$ , resulta em

$$\mathbf{S}_k^H \mathbf{S}_k \Delta \mathbf{m}_k = \mathbf{S}_k^H \Delta \mathbf{d}_k, \quad (3.17)$$

ou

$$\Delta \mathbf{m}_k = (\mathbf{S}_k^H \mathbf{S}_k)^{-1} \mathbf{S}_k^H \Delta \mathbf{d}_k. \quad (3.18)$$

Finalmente, a expressão 3.18 permite calcular um novo modelo

$$\mathbf{m}^* = \mathbf{m}_k + \Delta \mathbf{m}_k, \quad (3.19)$$

correspondente ao mínimo do paraboloide. Caso  $Q(\mathbf{m}^*) < Q(\mathbf{m}_k)$ , a atualização é aceita,

isto é

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}^*, \quad (3.20)$$

e todo o processo iterativo segue até que seja alcançado o mínimo da função objetivo.

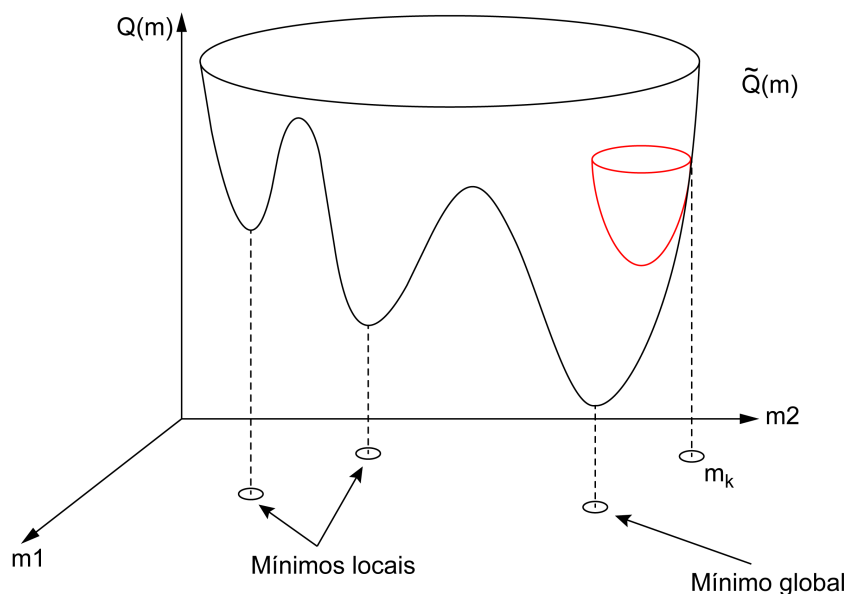


Figura 3.1: Representação do parabolóide  $\tilde{Q}(\mathbf{m})$  tangente ao modelo corrente  $\mathbf{m}_k$  da função objetivo não linear  $Q(\mathbf{m})$  (Santos, 2017).

### 3.3 Métodos de escopo global

Fazendo uso de buscas aleatórias em seus algoritmos, os métodos globais almejam o mínimo global da função objetivo. São menos dependentes do modelo inicial, podendo ter uma convergência mais demorada do que os métodos de busca local.

Alguns exemplos de métodos de inversão global são: Monte Carlo, Algoritmo Genético, *Simulated Annealing* e *Very Fast Simulated Annealing*. Esse último método é aplicado nesse trabalho para a determinação dos parâmetros da função expandida de Barreto e Dias (2014).

#### 3.3.1 Simulated Annealing

O método *Simulated Annealing* (SA ou Resfriamento Simulado, em português) é um método de escopo global e estocástico, isto é, de caráter aleatório, amplamente empregado na otimização de funções de muitas variáveis independentes. Seu princípio é fundamentado em problemas da mecânica estatística que envolvem a análise das propriedades de um grande número de átomos em amostras de líquidos ou de sólidos (Sen e Stoffa, 1995).



Esse método numérico se utiliza de uma analogia entre os parâmetros do modelo de um problema de otimização e as partículas em um sistema físico idealizado que resfria e reaquece lentamente até atingir um estado de energia mínima. A ideia é que o estado de energia mínima do sistema corresponda ao mínimo da função erro  $\mathbf{e}(\mathbf{m})$  entre dados observados e calculados.

Nesse processo, o sólido é inicialmente aquecido com um aumento gradual da temperatura de forma que as partículas sejam aleatoriamente distribuídas na fase líquida. Em seguida, ocorre um lento resfriamento da substância de tal forma que as partículas se rearranjam até um estado de baixa energia, formando um perfeito cristal. Entretanto, se o resfriamento for muito rápido, o material congela sob aspecto amorfo, ou seja, em um mínimo local.

A cada temperatura, a substância atinge um equilíbrio térmico, onde a probabilidade de estar em um estado  $i$  com energia  $E_i$  é dada pela distribuição de Gibbs-Boltzmann:

$$P(E_i) = \frac{1}{Z(T)} e^{-(E_i/\kappa T)}, \quad (3.21)$$

sendo

$$Z(T) = \sum_{j \in S} \frac{1}{Z(T)} e^{-(E_j/\kappa T)}, \quad (3.22)$$

onde o conjunto  $S$  concentra todas as configurações possíveis,  $\kappa$  é a constante de Boltzmann,  $T$  é a temperatura e  $Z(T)$  é a função de distribuição.

A seguir serão detalhados os algoritmos de Metropolis, *Fast Simulated Annealing* (FSA) e *Very Fast Simulated Annealing* (VFSA), considerados como ramificações do SA. Mais informações sobre esses métodos podem ser encontradas em Sen e Stoffa (1995).

### Algoritmo de Metropolis

O algoritmo de Metropolis, introduzido por Metropolis et al. (1953), simula a evolução de um sólido em banho de calor para o equilíbrio térmico. No contexto do SA, o algoritmo de Metropolis é um componente fundamental, pois ele coordena a distribuição de probabilidade no espaço de modelos (Tarantola, 2005).

Partindo de um modelo inicial  $\mathbf{m}_i$  com energia  $E(\mathbf{m}_i)$ , provoca-se uma pequena perturbação  $\Delta\mathbf{m}_i$  para obter um novo modelo  $\mathbf{m}_j$ , dado por:

$$\mathbf{m}_j = \mathbf{m}_i + \Delta\mathbf{m}_i, \quad (3.23)$$

com energia  $E(\mathbf{m}_j)$ . A aceitabilidade dessa perturbação está sujeita à avaliação em função

da diferença de energia  $\Delta E_{ij}$ , isto é:

$$\Delta E_{ij} = E(\mathbf{m}_j) - E(\mathbf{m}_i). \quad (3.24)$$

Se  $\Delta E_{ij} \leq 0$ , o novo modelo é sempre aceito. Entretanto, caso  $\Delta E_{ij} > 0$ , o novo modelo é aceito com a probabilidade (Sen e Stoffa, 1995):

$$P = e^{-(\Delta E_{ij}/\kappa T)}, \quad (3.25)$$

onde  $T$  é a temperatura e  $\kappa$  é a constante de Boltzmann. A regra de aceitação dada pela equação 3.25 é conhecida como *Critério de Metropolis*. Se esse critério de avaliação é repetido várias vezes em cada temperatura conforme segue o lento resfriamento, o equilíbrio térmico é atingido a cada temperatura e o estado mínimo global de energia pode ser alcançado quando a temperatura se aproxima de zero.

Enquanto nos métodos de busca local o novo modelo é aceito se, e somente se,  $\Delta E_{ij} \leq 0$ , i.e., podendo se aprisionar em mínimos locais, o método SA associado ao critério de Metropolis permite uma possibilidade finita  $P$  de aceitação mesmo que  $\Delta E_{ij} > 0$ , i.e., viabilizando uma fuga de mínimos locais. Pela expressão 3.25, nota-se que a diminuição da temperatura causa uma redução da probabilidade de aceite de modelos ruins. Sendo assim, quando  $T \rightarrow 0$  o algoritmo se reduz a um algoritmo "ganancioso", no sentido da ampla aceitação de modelos. O processo se repete até que seja alcançado o critério de convergência, nesse caso, dado pelo número de iterações estabelecido.

### Fast Simulated Annealing

O estado de energia mínima global somente é atingido se a taxa de rebaixamento da temperatura for adequada. A condição necessária e suficiente para essa convergência no método SA é dada pela seguinte expressão para o resfriamento (Sen e Stoffa, 1995):

$$T(l) = \frac{T_0}{\ln(l)}, \quad (3.26)$$

onde  $T(l)$  é a temperatura na  $l$ -ésima iteração e  $T_0$  é uma temperatura inicial suficientemente baixa. Essa relação logarítmica é bastante lenta e requer um longo tempo para a convergência no mínimo global.

Contornando essa limitação do SA, Szu e Hartley (1987) propuseram o algoritmo *Fast Simulated Annealing* (FSA ou Resfriamento Simulado Rápido, em português). Enquanto o algoritmo de Metropolis utiliza uma distribuição Gaussiana de geração de modelos, o FSA

usa uma distribuição de Cauchy (probabilidade de geração), dada por:

$$f(\Delta m_i) \propto \frac{T}{(\Delta m_i^2 + T^2)^{1/2}}, \quad (3.27)$$

onde  $T$  diminui de acordo com alguma função específica de resfriamento, e  $\Delta m_i$  é a perturbação nos parâmetros do modelo corrente.

Embora o critério de geração de modelos do FSA seja diferente do SA de Metropolis, o critério de aceitação é o mesmo. Szu e Hartley (1987) mostraram que, tendo a função de geração 3.27 sob uso, a expressão matemática para o resfriamento é inversamente proporcional ao número da iteração, i.e.,

$$T(l) = \frac{T_0}{l}. \quad (3.28)$$

### Very Fast Simulated Annealing

Nos procedimentos de inversão Metropolis *Simulated Annealing* e *Fast Simulated Annealing*, todos os parâmetros do modelo são igualmente perturbados. Tal fato nem sempre é aplicável, pois, para um espaço do modelo de dimensão  $NM$ , cada parâmetro tem diferentes faixas finitas de variação e cada um pode afetar a função objetivo de formas distintas. Outra limitação é que não existe um algoritmo rápido para o cálculo do gerador aleatório da distribuição de Cauchy em uma dimensão  $NM$  (Sen e Stoffa, 1995).

O problema da construção de uma distribuição de Cauchy de dimensão  $NM$  pode ser contornado usando uma distribuição de Cauchy unidimensional. Em tal formulação, é ainda possível escolher diferentes temperaturas para diferentes parâmetros do modelo. Entretanto, o uso da distribuição de Cauchy 1-D como função de geração requer um resfriamento muito lento para convergir.

Visando superar essas restrições, Ingber (1989) propôs o algoritmo Very Fast Simulated Annealing (VFSA ou Resfriamento Simulado Muito Rápido) baseado em uma nova distribuição de probabilidade para a geração do modelo, na qual o resfriamento lento é dispensável. O método VFSA será descrito a seguir:

Supondo que um parâmetro do modelo  $m_i$  na iteração  $k$  é representado por  $m_i^k$ , é válida a desigualdade:

$$m_i^{min} \leq m_i^k \leq m_i^{max}, \quad (3.29)$$

onde  $m_i^{min}$  e  $m_i^{max}$  são, respectivamente, os valores mínimo e máximo do parâmetro  $m_i$ . O valor desse parâmetro é perturbado na iteração  $k + 1$  por meio da relação:

$$m_i^{k+1} = m_i^k + y_i(m_i^{max} - m_i^{min}), \quad (3.30)$$

onde  $y_i \in [-1, 1]$  e  $m_i^{\min} \leq m_i^k \leq m_i^{\max}$ .

O parâmetro  $y_i$  é gerado pela distribuição

$$g_T(y) = \prod_{i=1}^{NM} \frac{1}{2(|y_i| + T_i) \ln\left(1 + \frac{1}{T_i}\right)} = \prod_{i=1}^{NM} g_{T_i}(y_i), \quad (3.31)$$

que possui a seguinte probabilidade cumulativa:

$$G_{T_i}(y_i) = \frac{1}{2} + \frac{\text{sgn}(y_i)}{2} \frac{\ln\left(1 + \frac{|y_i|}{T_i}\right)}{\ln\left(1 + \frac{1}{T_i}\right)}, \quad (3.32)$$

onde  $\text{sgn}(y_i)$  se refere à função sinal do parâmetro  $y_i$ .

Finalmente, um número aleatório  $u_i$  contido em uma distribuição uniforme  $U[0, 1]$  permite obter  $y_i$  por meio da relação:

$$y_i = \text{sgn}\left(u_i - \frac{1}{2}\right) T_i \left[ \left(1 + \frac{1}{T_i}\right)^{|2u_i-1|} - 1 \right]. \quad (3.33)$$

Para tal distribuição, o mínimo global pode ser estatisticamente obtido usando a seguinte função de resfriamento:

$$T_i(k) = T_{0i} \exp(-c_i k^{1/NM}), \quad (3.34)$$

onde  $T_{0i}$  é a temperatura inicial do parâmetro do modelo  $i$  e  $c_i$  é uma constante que controla a temperatura e ajuda a harmonizar o algoritmo em problemas específicos.

A regra de aceitação do algoritmo VFSA é a mesma do Metropolis SA. Em síntese, as principais características desse método são:

- As perturbações para os parâmetros do modelo são geradas de acordo com a distribuição dada pela equação 3.31.
- O método requer uma temperatura para cada parâmetro do modelo, a qual pode ser diferente para cada um dos parâmetros.
- Requer ainda uma temperatura a ser usada no critério de aceitação, a qual pode ser diferente das temperaturas dos parâmetros do modelo.

## 3.4 Especificações do método e aplicações

Os métodos de inversão GN, MMQ e VFSA serão empregados em procedimentos de inversão distintos, porém interligados: A inversão da impedância mútua  $Z$  para a estimativa da resistividade complexa aparente  $\rho_a$  e a inversão dessa resistividade complexa para a determinação dos parâmetros da função expandida de Barreto e Dias (2014). Em conjunto com a inversão VFSA, utilizamos o MMQ para a determinação do parâmetro  $\rho_0$  da função de resistividade.

Sendo assim, essa seção detalha as particularidades de ambos os processos de inversão, além de apresentar aplicações em dados sintéticos e reais. A eficácia dos métodos de inversão será avaliada com base no erro RMS (*Root Mean Square*) relativo percentual dos dados, expresso por

$$\epsilon_d^{RMS} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (d_i^{obs} - d_i^{cal})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (d_i^{obs})^2}} \times 100, \quad (3.35)$$

onde  $d^{obs}$  e  $d^{cal}$  são os vetores dos dados observados e calculados, respectivamente, para  $N$  frequências. No caso da inversão da impedância mútua, em que  $N = 1$ , avaliamos o erro relativo percentual entre os dados observados e calculados, dado por

$$\epsilon_d = \frac{|d^{obs} - d^{cal}|}{d^{obs}} \times 100. \quad (3.36)$$

Em aplicações sobre dados sintéticos, nas quais o modelo verdadeiro é conhecido, empregaremos ainda o erro relativo percentual de cada um dos parâmetros estimados, dado por

$$\epsilon_m = \frac{|m^{ver} - m^{est}|}{m^{ver}} \times 100, \quad (3.37)$$

em que  $m^{ver}$  e  $m^{est}$  são os parâmetros dos modelos verdadeiros e estimados, respectivamente.

Nos casos em que dado ou modelo tem natureza complexa, o respectivo erro é avaliado separadamente em amplitude e fase. Além da análise dos erros, adotamos o critério de convergência da função objetivo para avaliar o desempenho dos procedimentos de inversão.

### 3.4.1 Estimativa da resistividade complexa aparente

Conforme discutido em capítulos anteriores, o efeito intrínseco do acoplamento eletromagnético gera um falso sinal de IP em medidas geofísicas espectrais. Nos dados, esse efeito se expressa por meio de uma resistividade complexa e variável com a frequência de medição. É fato que o AEM está sempre presente nas medidas de impedância mútua, seja para um modelo homogêneo ou para um modelo de  $\eta$ -camadas. Entretanto, o modelo de  $\eta$ -camadas

possui um efeito indutivo adicional proveniente da heterogeneidade devido ao contraste de resistividade entre as camadas.

Sendo assim, ao estimar uma resistividade complexa aparente a partir da impedância mútua em modelos de  $\eta$ -camadas com ou sem polarização, temos que levar em conta esse falso efeito de IP fruto da heterogeneidade de resistividade entre as camadas. Por meio desse procedimento, buscamos identificar as condições nas quais o AEM é capaz de influenciar as medidas de IP, assim como analisar a intensidade e relevância dessa influência.

Dito isso, a ideia é encontrar uma forma de gerar uma resistividade complexa para cada frequência  $\omega$  e espaçamento  $n$  a partir da impedância mútua de um modelo em  $\eta$ -camadas (equação 2.28), supondo um modelo homogêneo (equação 2.27) e polarizável equivalente. Uma possibilidade seria o uso da expressão da resistividade elétrica aparente do arranjo dipolo-dipolo sugerida por Wait e Gruszka (1986) e já bastante conhecida na literatura:

$$\rho_a(\omega) = Z(\omega) \pi a n(n+1)(n+2), \quad (3.38)$$

onde  $Z(\omega)$  é a impedância mútua para um modelo de  $\eta$ -camadas na frequência  $\omega$  e  $a$  é o comprimento dos dipolos. Entretanto, essa expressão equivale a uma linearização do nosso problema, na qual aplica-se o limite  $\omega \rightarrow 0$  na equação 2.27 da impedância mútua para anular os termos que tornam não-linear a relação entre  $\rho_a(\omega)$  e  $Z(\omega)$ . Dessa forma, ao invés do uso da equação 3.38 que está associada à perda de informações causada por tal linearização, empregaremos nesse trabalho técnicas de inversão para um problema não-linear, a maneira mais fidedigna e coerente encontrada para gerar  $\rho_a(\omega)$  a partir de  $Z(\omega)$ .

Segundo Ward (1990), a resistividade aparente de uma terra em camadas não representa, necessariamente, a resistividade verdadeira de qualquer elemento da terra, tampouco uma média das resistividades verdadeiras. Assim, reitera-se que  $\rho_a$  não é um parâmetro físico já existente no modelo, de forma que se recorreu ao procedimento de inversão como um **artifício** para a obtenção de uma resistividade aparente mais representativa possível.

Considerando que a relação entre o parâmetro do modelo (resistividade complexa) e o dado (impedância mútua complexa) não é linear, optou-se pelo método iterativo de Gauss-Newton (seção 3.2.1), invertendo simultaneamente os componentes real e imaginário do dado. Nesse contexto, tanto o parâmetro quanto o dado constituem um único valor escalar de natureza complexa, já que a inversão ocorre para  $\omega$  e  $n$  fixos.

É importante ressaltar que adotamos como padrão para essa inversão uma impedância mútua correspondente à de um arranjo dipolo-dipolo com um comprimento dos dipolos de 50 m, mesma configuração dos dados reais a serem invertidos posteriormente.

Nesse procedimento de inversão, o operador de modelagem direta  $\mathbf{G}$  é a impedância

mútua  $Z$  do modelo homogêneo (equação 2.27) na frequência  $\omega$  e espaçamento  $n$  específicos. Já a matriz sensibilidade  $\mathbf{S}_k$  é a derivada de primeira ordem de  $Z$  com relação ao parâmetro resistividade complexa  $\rho$ .

Para determinar  $\mathbf{S}_k$ , aplicamos o conceito da diferenciabilidade de uma função complexa de variável complexa (Remmert, 1991; Providência, 2009): Seja  $f(h) = u(x, y) + iv(x, y)$  uma função complexa diferenciável de variável complexa  $h = x + iy$ , a derivada da função  $f$  no ponto  $h_0(x_0, y_0)$  é dada por

$$f'(h_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0), \quad (3.39)$$

caso as derivadas parciais existam nesse ponto e satisfaçam às condições de Cauchy-Riemann, nas quais:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \quad (3.40)$$

Cumprindo esses pré-requisitos, a expressão da matriz sensibilidade pode ser dada por:

$$\mathbf{S}_k = \left[ \frac{\partial Z_{Re}}{\partial \rho_{Re}} + i \frac{\partial Z_{Im}}{\partial \rho_{Re}} \right], \quad (3.41)$$

onde  $Z_{Re}$  e  $Z_{Im}$  são, respectivamente, as componentes real e imaginária da impedância mútua complexa  $Z$  e  $\rho_{Re}$  é a componente real do parâmetro resistividade complexa  $\rho^*$ . As expressões analíticas dessas derivadas parciais podem ser encontradas no apêndice B.

Tendo em posse a matriz das derivadas  $\mathbf{S}_k$ , a solução do problema GN é facilmente encontrada, já que se trata de um problema cujos dados e parâmetros são unitários. Empregamos como critério de parada da inversão uma função objetivo menor do que  $10^{-30}$ , atingido geralmente nas 5 primeiras iterações, evidenciando a rápida convergência do método. Além disso, embora seja de escopo local, para o nosso problema o método GN mostrou-se praticamente independente do modelo inicial, o qual foi padronizado, portanto, como o valor arbitrário  $\rho = 300 + i100$ .

A seguir exemplificamos a inversão GN para dados sintéticos e reais. Os mesmos testes foram feitos com o uso da expressão convencional da resistividade aparente (equação 3.38) para comparar a adequação de ambas as estimativas de  $\rho_a$ .

### Aplicação em dados sintéticos

Inicialmente, o algoritmo de inversão GN foi testado para o caso de um meio homogêneo e polarizável. Nesse caso, o modelo verdadeiro (resistividade complexa) é conhecido, sendo possível a avaliação do modelo estimado.

Simulando um meio homogêneo e polarizável de resistividade  $\rho_0 = 200 \text{ } \Omega\text{m}$ , parâmetros de Barreto e Dias (2014) definidos na expressão 1.8 e espaçamento transmissor-receptor  $n = 7$ , os resultados da inversão podem ser avaliados nas Figuras 3.2 e 3.3.

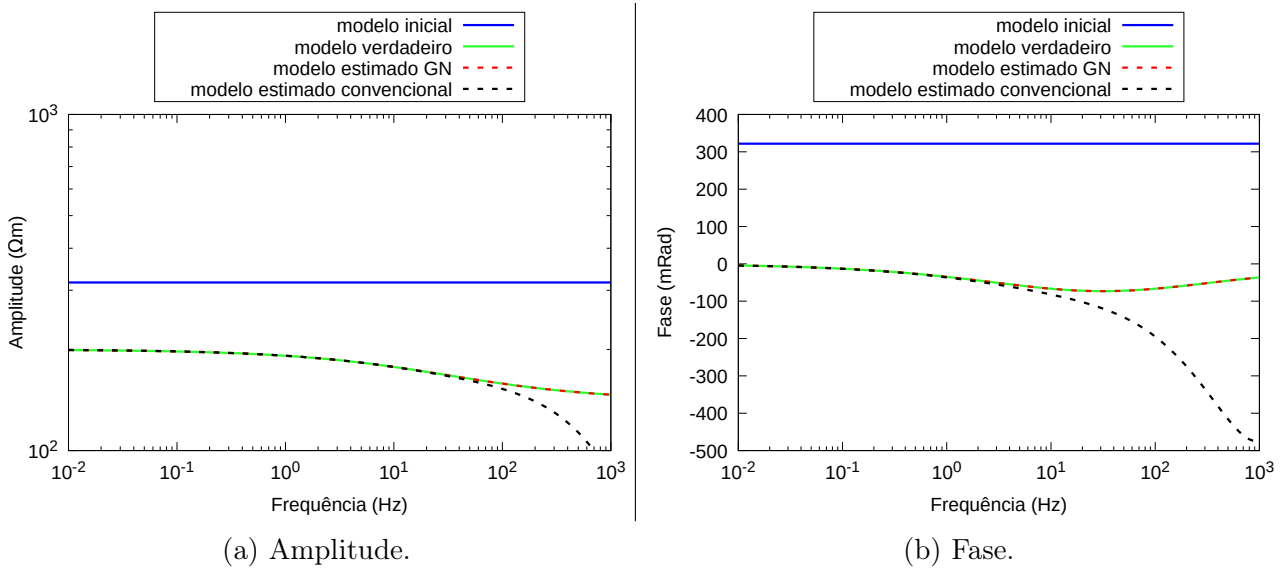


Figura 3.2: Modelo de resistividade complexa estimado por meio da inversão GN e por meio da fórmula convencional da resistividade aparente (equação 3.38) comparados com o modelo verdadeiro para um meio homogêneo e polarizável de resistividade  $\rho_0 = 200 \text{ } \Omega\text{m}$ , parâmetros de Barreto e Dias (2014) definidos na expressão 1.8 e espaçamento transmissor-receptor  $n = 7$ .

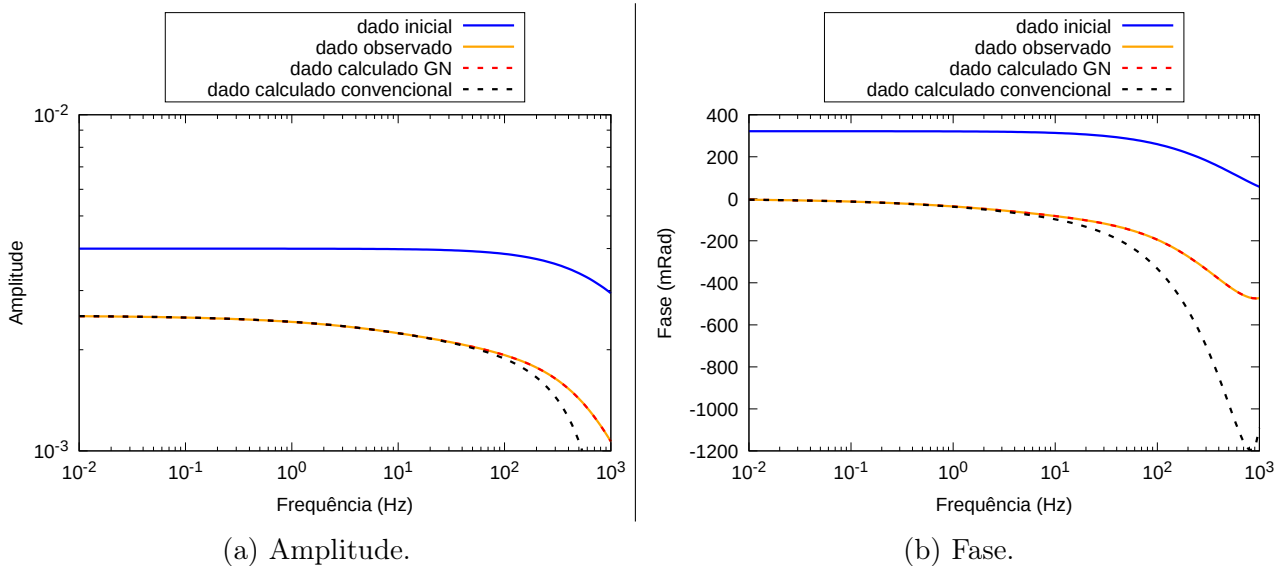


Figura 3.3: Dados de impedância mútua calculados por meio da inversão GN e por meio da fórmula convencional da resistividade aparente (equação 3.38) comparados com o dado observado para um meio homogêneo e polarizável de resistividade  $\rho_0 = 200 \text{ } \Omega\text{m}$ , parâmetros de Barreto e Dias (2014) definidos na expressão 1.8 e espaçamento transmissor-receptor  $n = 7$ .



Analisando a Figura 3.2, é possível notar que o modelo estimado pelo método GN se ajustou adequadamente ao modelo verdadeiro. Já a expressão convencional de  $\rho_a$  proporcionou um erro relativo máximo de 42% em amplitude e 1176% em fase nas últimas frequências.

A inversão GN proporcionou um erro relativo desprezível entre os dados observados e calculados para esse meio homogêneo e polarizável (Figura 3.3). Por sua vez, o emprego da expressão convencional 3.38 para o cálculo de  $\rho_a$  gerou um erro relativo máximo de 66% em amplitude e 155% em fase entre dados observados e calculados.

A aplicação mostrada na Figura 3.4 consiste na inversão de  $Z$  e estimativa de  $\rho_a$  de um modelo de 3 camadas de resistividades  $\rho_1 = \rho_3 = 500 \Omega\text{m}$ ,  $\rho_2 = 50 \Omega\text{m}$  e espessuras  $h_1 = 60 \text{ m}$  e  $h_2 = 40 \text{ m}$ , com a 2ª camada polarizável com parâmetros de Dias definidos na expressão 1.8 e espaçamento transmissor-receptor  $n = 7$ . O erro relativo decorrente da inversão GN se manteve desprezível, enquanto o uso da expressão 3.38 de  $\rho_a$  convencional proporcionou um erro relativo máximo nas últimas frequências de 33% em amplitude e 2138% em fase.

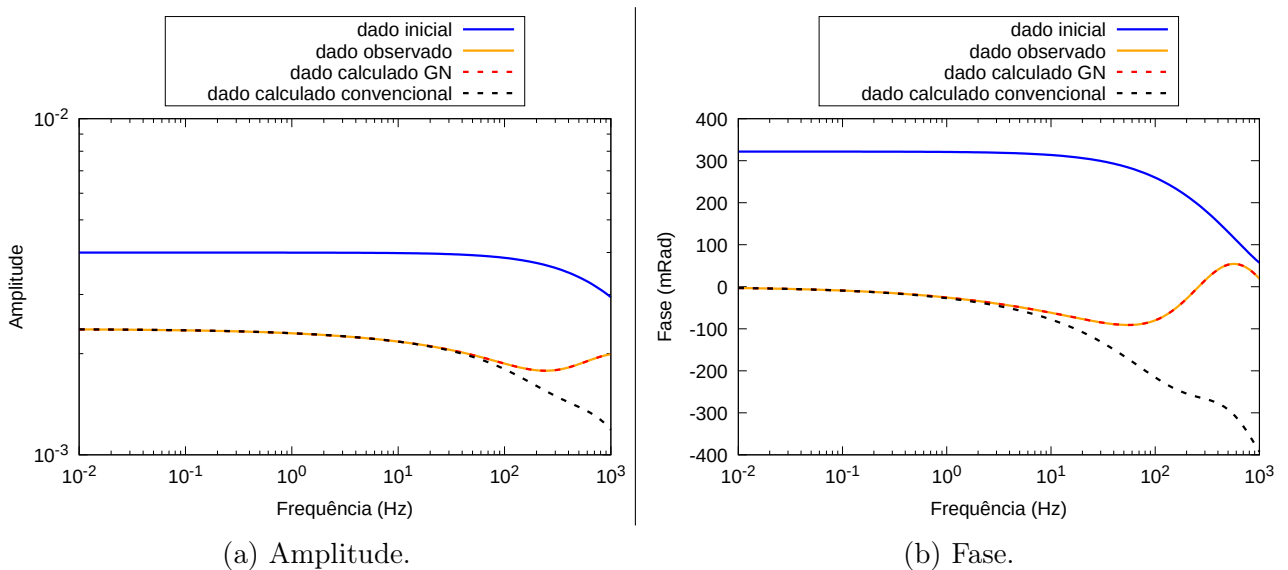


Figura 3.4: Dados de impedância mútua calculados por meio da inversão GN e por meio da fórmula convencional da resistividade aparente (equação 3.38) comparados com o dado observado para um meio de 3 camadas de resistividades  $\rho_1 = \rho_3 = 500 \Omega\text{m}$ ,  $\rho_{0,2} = 50 \Omega\text{m}$  e espessuras  $h_1 = 60 \text{ m}$  e  $h_2 = 40 \text{ m}$ , com a 2ª camada polarizável. Parâmetros de Barreto e Dias (2014) definidos na expressão 1.8 e espaçamento transmissor-receptor  $n = 7$ .

Em síntese, a determinação de  $\rho_a$  para modelos sintéticos através da expressão convencional 3.38 resultou em erros relativos percentuais consideráveis, principalmente na fase do dado. Notamos ainda que esse erro é proporcional à frequência e ao espaçamento transmissor-receptor utilizado. Para as simulações com o espaçamento  $n = 7$ , a convergência desse método é satisfatória até aproximadamente 5 Hz, frequência a partir da qual a fase do dado

sofre consideráveis desvios (Figuras 3.2b, 3.3b e 3.4b).

Por sua vez, a inversão GN proposta para a estimativa de  $\rho_a$  manteve um erro relativo insignificante em todos os testes sintéticos para todas as frequências e espaçamentos empregados. Sendo assim, a inversão GN é a opção mais adequada para a determinação de  $\rho_a$  pela acurada convergência e por viabilizar a análise em todo o espectro de frequência do dado.

### Aplicação em dados reais

Nas figuras seguintes exemplificamos resultados de inversões dos dados reais de diferentes áreas do Distrito Cuprífero do Vale do Rio Curaçá. Cada figura exemplifica o caso de apenas um nível de espaçamento arbitrariamente escolhido em uma estação das linhas 800 S, 600 S e 2600 N das áreas de Vermelhos, Baixa Funda e Sussuarana, respectivamente.

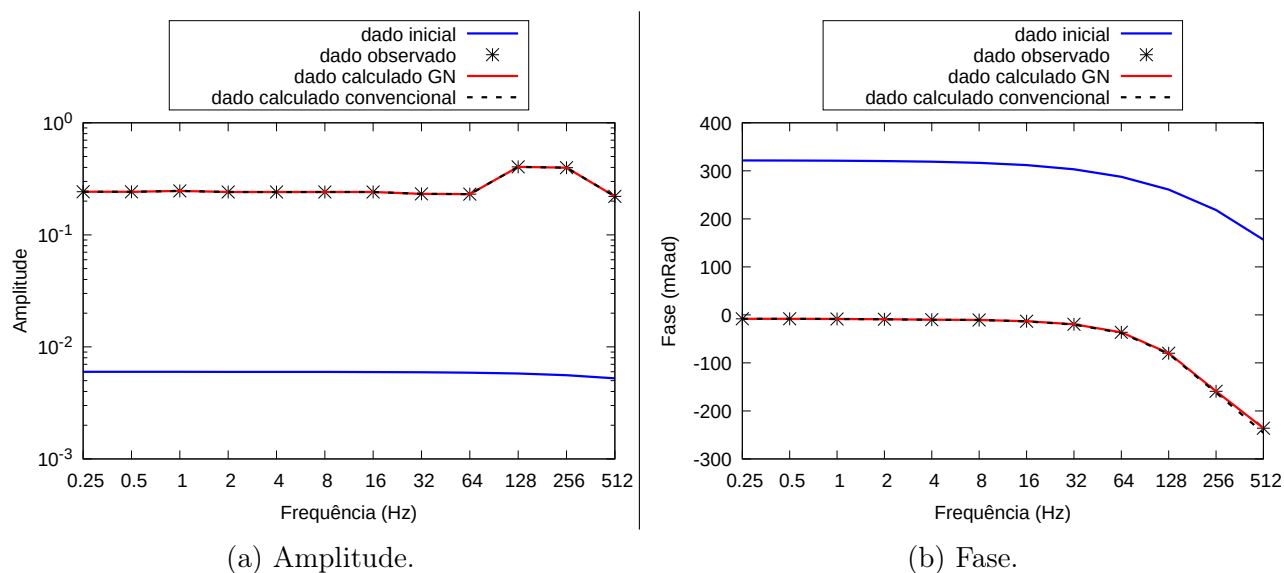


Figura 3.5: Dados de impedância mútua calculados por meio da inversão GN e por meio da fórmula convencional da resistividade aparente (equação 3.38) comparados com o dado observado para a estação 1250 W, linha 800 S, Vermelhos. Espaçamento transmissor-receptor  $n = 6$ .

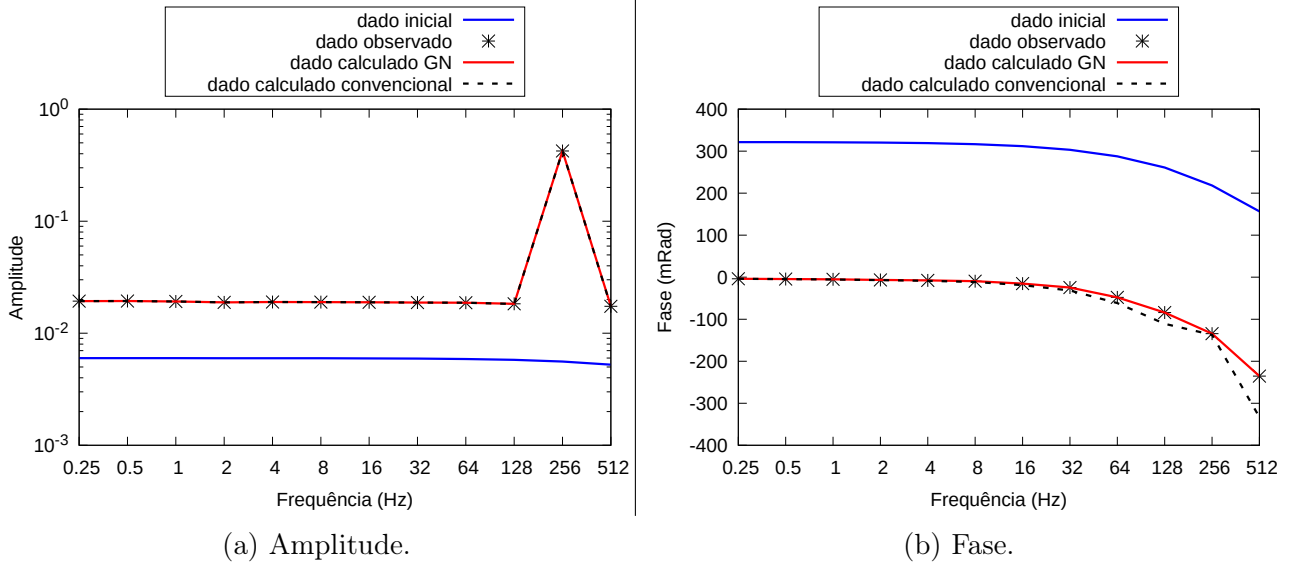


Figura 3.6: Dados de impedância mútua calculados por meio da inversão GN e por meio da fórmula convencional da resistividade aparente (equação 3.38) comparados com o dado observado para a estação 550 W, linha 600 S, Baixa Funda. Espaçamento transmissor-receptor  $n = 6$ .

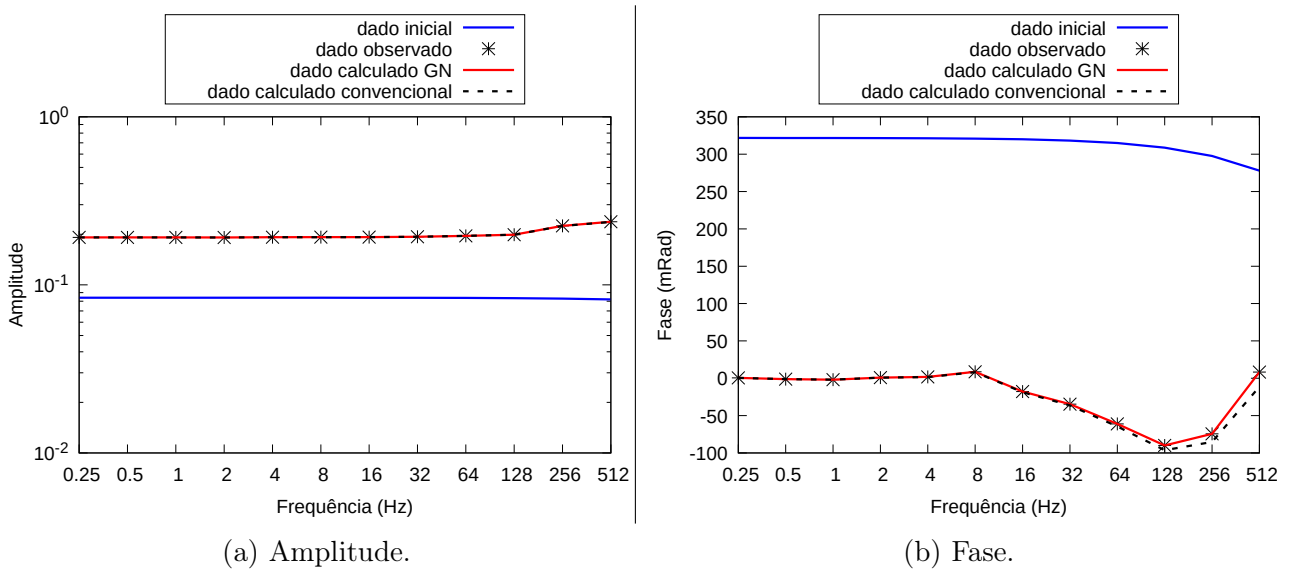


Figura 3.7: Dados de impedância mútua calculados por meio da inversão GN e por meio da fórmula convencional da resistividade aparente (equação 3.38) comparados com o dado observado para a estação 900 E, linha 2600 N, Sussuarana. Espaçamento transmissor-receptor  $n = 2$ .

Nesses exemplos, assim como nas demais inversões de dados reais, a inversão GN proporcionou um erro relativo desprezível entre os dados observados e calculados. Embora mais sutis do que nas aplicações sobre dados sintéticos, os erros relativos advindos do uso da formulação convencional de  $\rho_a$  foram consideráveis, principalmente no dado da fase: Na es-

tação 1250 W, linha 800 S de Vermelhos, sob espaçamento  $n = 6$ , o erro relativo foi 0,1% em amplitude e 4% em fase; na estação 550 W, linha 600 S de Baixa Funda, sob espaçamento  $n = 6$ , o erro relativo foi 0,8% em amplitude e 41% em fase; a estação 900 E, linha 2600 N de Sussuarana, sob espaçamento  $n = 2$ , apresentou um erro relativo de 0,3% em amplitude e 237% em fase.

Sendo assim, esses resultados reiteram a conveniência no uso da inversão GN para a estimativa da resistividade complexa aparente a partir de dados de impedância mútua.

### 3.4.2 Estimativa dos parâmetros da função expandida de Dias

Partindo da resistividade complexa aparente para um modelo de  $\eta$ -camadas estimada por meio da inversão Gauss-Newton (seção 3.4.1), buscamos um outro procedimento para a inversão de  $\rho_a$  e determinação de parâmetros que representam os efeitos de IP e AEM presentes nesses dados.

Considerando que  $\rho_a$  engloba ambos os fenômenos de IP e AEM e a função de resistividade complexa de Barreto e Dias (2014) atende apenas ao efeito de polarização, essa função foi ampliada a fim de abranger o efeito indutivo. Assim, nessa seção, o dado a ser invertido advém da função da resistividade complexa de Barreto e Dias (2014) expandida (equação 1.10).

O uso da inversão para a estimativa dos parâmetros de polarização é recorrente na literatura. Métodos como Gauss-Newton (Routh et al., 1998), Levenberg-Marquardt (Son et al., 2006), MMQ (Kemna, 2000) e VFSA (Yuval e Oldenburg, 1997) têm sido utilizados na determinação dos parâmetros de Cole-Cole. Já os parâmetros da função de Dias foram estimados por Ribeiro (2010) pelo método de Levenberg-Marquardt tendo como modelo inicial os valores advindos de um algoritmo genético.

Nesse trabalho, a função de Barreto e Dias (2014) expandida será invertida por meio do método VFSA (seção 3.2.1) com auxílio do MMQ. Em relação ao GN, além de ser menos influenciado pelo modelo inicial, o método VFSA tem a vantagem de dispensar a formulação de derivadas, já que a atualização do modelo se baseia em uma busca aleatória condicionada à diminuição da função objetivo. Embora seja de escopo global, a convergência do VFSA para o presente problema foi bastante satisfatória a ponto de dispensar a combinação com algum método local, como GN.

Em seus testes sobre a função de Cole-Cole, Luo e Zhang (1998) constataram que os parâmetros estimados por meio da inversão única do espectro de amplitude diferem grandemente daqueles derivados da inversão conjunta de amplitude e fase da resistividade complexa. Já os resultados advindos da inversão única da fase são muito próximos àqueles da inversão

conjunta de amplitude e fase, com exceção do parâmetro  $\rho_0$ .

Esse papel decisivo da fase na resistividade complexa foi ratificado em nossos testes para o modelo de Barreto e Dias (2014) expandido, como o exemplo da Tabela 3.1. Nesse caso, os parâmetros da função, à exceção do parâmetro  $\rho_0$ , foram melhor estimados pela inversão da fase, com um erro relativo máximo de 0.2%, enquanto a amplitude rendeu um erro relativo de até 69%. Sendo assim, nesse trabalho, todos os procedimentos de inversão da resistividade complexa se referem à inversão única do espectro de fase.

Valores	$\rho_0$ ( $\Omega\text{m}$ )	$m_W$	$\tau_W$ (s)	$m_D$	$\tau_D$ (ms)	$m_A$	$\tau_A$ (ms)
Verdadeiros	500	0.1	0.1	0.9	0.1	0.3	1
Estimados pela inversão da Amplitude	500.08	0.099	0.102	0.291	0.169	0.296	0.988
Estimados pela inversão da Fase	5.523	0.100	0.100	0.899	0.100	0.300	0.999

Tabela 3.1: Comparação entre as inversões de amplitude e fase para um modelo sintético.

O parâmetro  $\rho_0$  não pode ser bem estimado pela inversão da fase pois, como é possível deduzir pelas equações 1.11 e 1.12, ele não está incluso na fase. Desse modo, após estimados os 6 parâmetros ( $m_W$ ,  $m_D$ ,  $m_A$ ,  $\tau_W$ ,  $\tau_D$  e  $\tau_A$ ) pelo método VFSA, o parâmetro  $\rho_0$  foi determinado pelo método MMQ (equação 3.11), no qual o operador de modelagem  $\mathbf{G}$  é a expressão entre chaves da equação 1.10 calculada com base nos 6 parâmetros previamente estimados e o dado observado  $\mathbf{d}$  é a resistividade complexa  $\rho^*$  para  $N$  frequências.

Após diversos testes, os valores atribuídos às constantes da função de resfriamento 3.34 do VFSA foram  $T_0 = 500$ ,  $c = 2.5$  e  $1/NM = 0.4$ . Foram definidos ainda 2000 movimentos a cada temperatura/iteração e 5000 iterações para que a temperatura reduza de  $T_0$  até um valor suficientemente baixo. Tais valores foram padronizados e não sofreram modificações, já que permitem uma eficiente convergência do método. Em função de ser um método aleatório, cada procedimento de inversão foi repetido um determinado número de vezes (em geral, 10 vezes) e o resultado de menor função objetivo foi selecionado.

Devido ao amplo intervalo de busca dos parâmetros no VFSA, eles foram invertidos em sua forma logarítmica. Os valores máximo e mínimo de cada parâmetro foram estabelecidos com base em conhecimentos prévios a respeito deles. Os valores iniciais foram valores médios dos respectivos intervalos de variação. A Tabela 3.2 reúne essas informações.

Inversão VFSA	$\log(m_W)$	$\log(\tau_W)$	$\log(m_D)$	$\log(\tau_D)$	$\log(m_A)$	$\log(\tau_A)$
Intervalos de busca	-7 a 0	-3 a 3	-7 a 0	-6 a -3	-7 a 0	-6 a 3
Valores iniciais	-2	0	-2	-4	-2	-2

Tabela 3.2: Intervalos de variação e valores iniciais dos parâmetros da função de Barreto e Dias (2014) expandida usados na inversão VFSA. Tempos de relaxação em segundos.

A seguir o método de inversão da resistividade complexa é aplicado a dados sintéticos e reais. Em ambos os casos, é adotado o intervalo binário de frequência 0.25 Hz a 512 Hz. Nos gráficos, apenas o modelo inicial da fase é representado, já que a amplitude não é invertida.

### Aplicação em dados sintéticos

A aplicação a seguir corresponde à inversão da resistividade de Barreto e Dias (2014) expandida para um modelo sintético de parâmetros  $\rho_0 = 500 \Omega\text{m}$ ,  $m_W = 0.1$ ,  $\tau_W = 0.1 \text{ s}$ ,  $m_D = 0.9$ ,  $\tau_D = 10^{-4} \text{ s}$ ,  $m_A = 0.3$ ,  $\tau_A = 10^{-3} \text{ s}$ .

O erro RMS correspondente ao dado calculado (Figura 3.8) foi de 0.001% tanto em amplitude quanto em fase. Já o erro relativo dos parâmetros estimados teve um valor máximo de 0.12% para  $\tau_W$  (Figura 3.9). Da primeira até a última iteração, a função objetivo decaiu de  $4 \times 10^{-2}$  a  $7 \times 10^{-12}$  (Figura 3.9a).

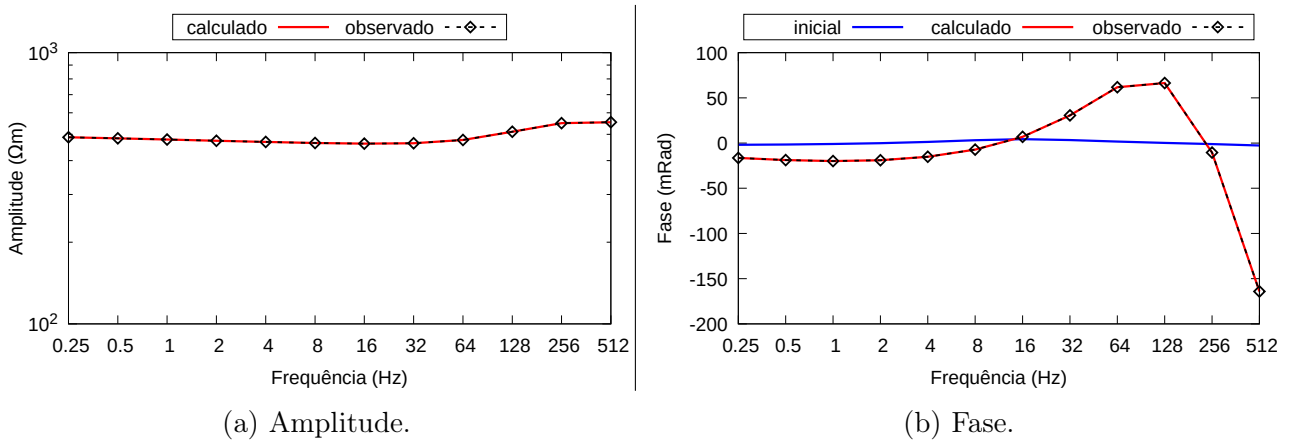
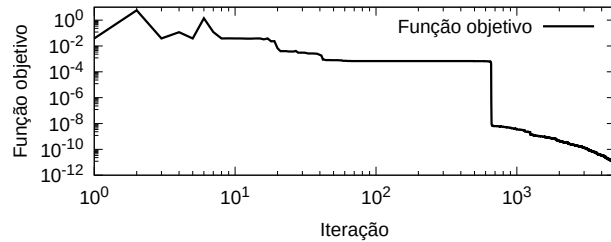


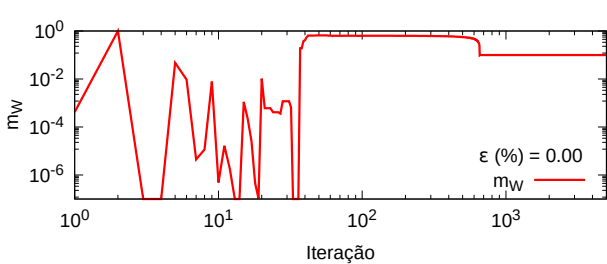
Figura 3.8: Comparação entre dado observado e calculado da resistividade complexa para um modelo sintético de parâmetros  $\rho_0 = 500 \Omega\text{m}$ ,  $m_W = 0.1$ ,  $\tau_W = 0.1 \text{ s}$ ,  $m_D = 0.9$ ,  $\tau_D = 10^{-4} \text{ s}$ ,  $m_A = 0.3$ ,  $\tau_A = 10^{-3} \text{ s}$ .

Analisando a Figura 3.9 é possível notar que os parâmetros variam em extensos intervalos nas iterações iniciais (i.e. a altas temperaturas) e, à medida que a temperatura diminui, o sistema tende a se estabilizar em torno de uma solução. Todos os parâmetros aparentam

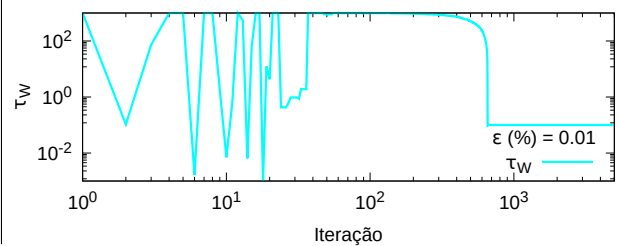
ter se estabilizado após a iteração 700, entretanto a persistente redução da função objetivo após essa iteração indica que prossegue um refinamento dos parâmetros para valores mais acurados, reiterando a adequada convergência do método.



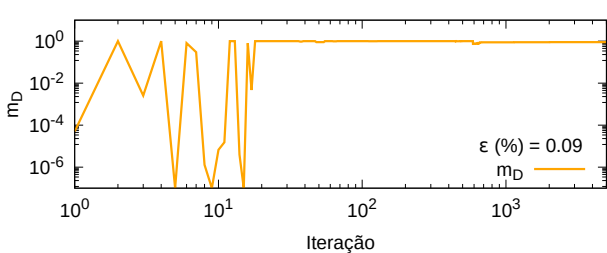
(a) Evolução da função objetivo.



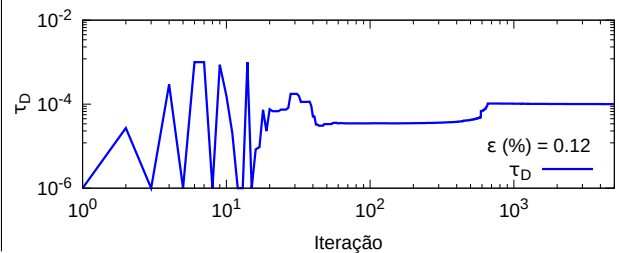
(b) Estimativa de  $m_W$ .



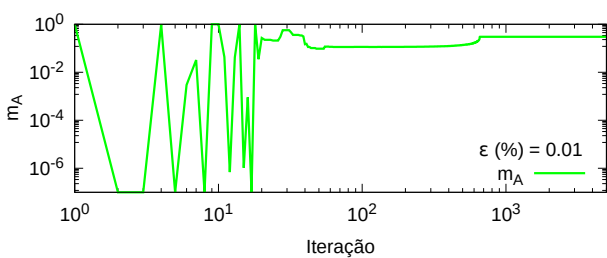
(c) Estimativa de  $\tau_W$ .



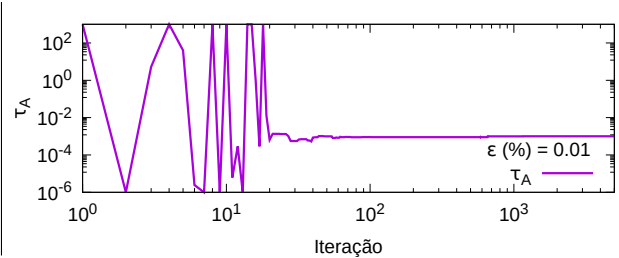
(d) Estimativa de  $m_D$ .



(e) Estimativa de  $\tau_D$ .



(f) Estimativa de  $m_A$ .



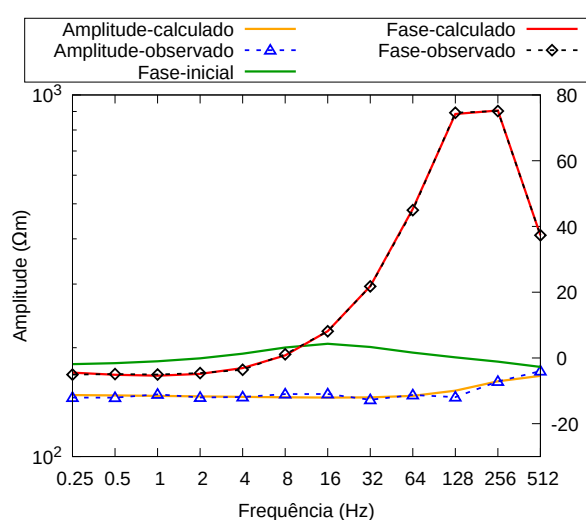
(g) Estimativa de  $\tau_A$ .

Figura 3.9: Evolução da função objetivo e da estimativa dos parâmetros de resistividade complexa pelo VFSA e respectivos erros relativos percentuais. O parâmetro  $\rho_0$  foi estimado por MMQ com um erro relativo insignificante. Modelo sintético de parâmetros  $\rho_0 = 500 \Omega\text{m}$ ,  $m_W = 0.1$ ,  $\tau_W = 0.1 \text{ s}$ ,  $m_D = 0.9$ ,  $\tau_D = 10^{-4} \text{ s}$ ,  $m_A = 0.3$ ,  $\tau_A = 10^{-3} \text{ s}$ .

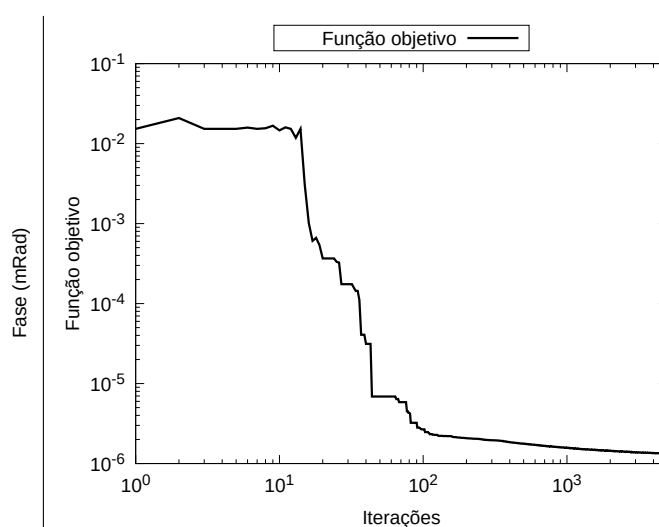
### Aplicação em dados reais

As aplicações em dados reais foram exemplificadas nas Figuras a seguir para uma estação das linhas 800 S, 600 S e 2600 N das áreas Vermelhos, Baixa Funda e Sussuarana, respectivamente.

Na inversão de dados reais, o intervalo de frequência para determinação de  $\rho_0$  pelo MMQ foi reduzido até 64 Hz no intuito de evitar heterogeneidades (picos) frequentemente presentes nas últimas frequências dos dados de amplitude. Isso reflete em maiores erros para os dados de amplitude, já que tais descontinuidades não são consideradas em nosso método de inversão.



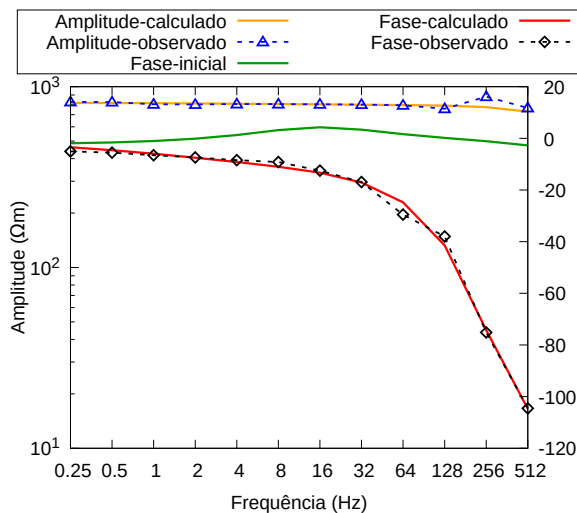
(a) Amplitude e Fase.



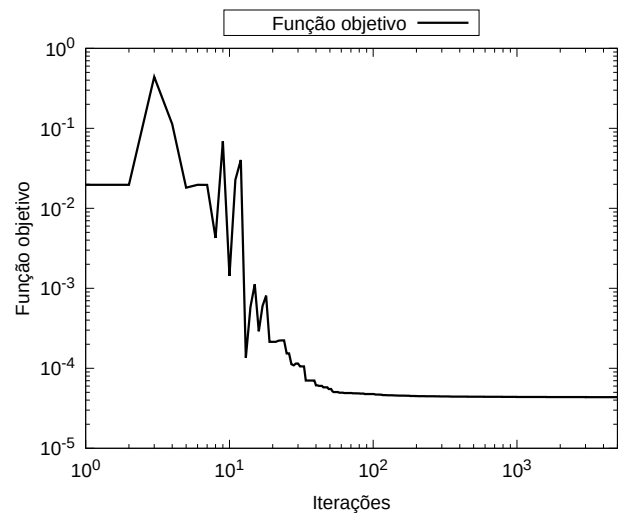
(b) Função objetivo.

Figura 3.10: Comparação entre dado observado e calculado da resistividade complexa aparente e evolução da respectiva função objetivo para a estação 1250 W, linha 800 S, Vermelhos. Espaçamento transmissor-receptor  $n = 1$ .



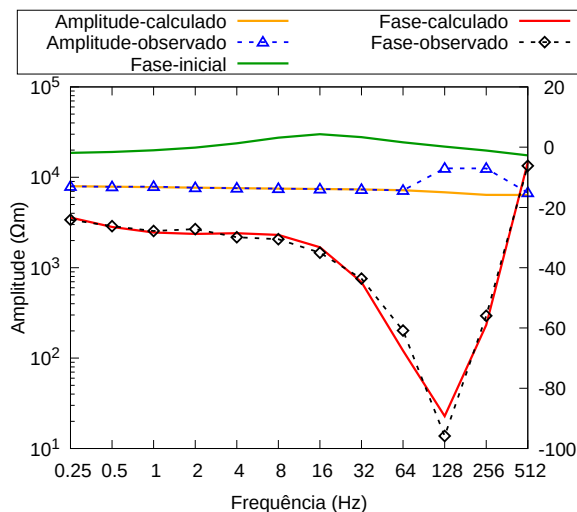


(a) Amplitude e fase.

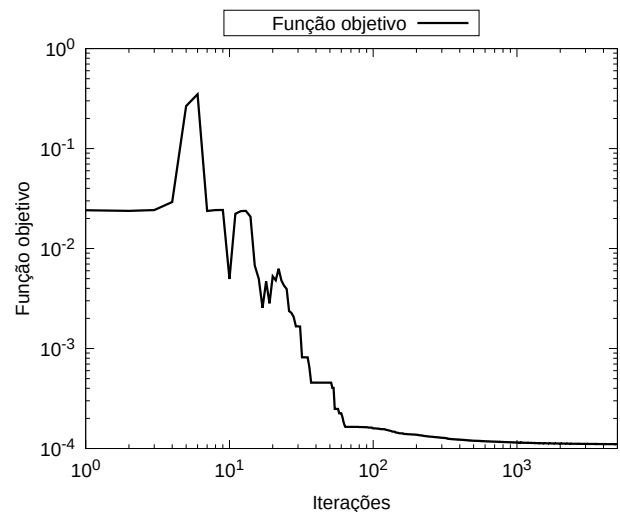


(b) Função objetivo.

Figura 3.11: Comparação entre dado observado e calculado da resistividade complexa aparente e evolução da respectiva função objetivo para a estação 550 W, linha 600 S, Baixa Funda. Espaçamento transmissor-receptor  $n = 3$ .



(a) Amplitude e fase.



(b) Função objetivo.

Figura 3.12: Comparação entre dado observado e calculado da resistividade complexa aparente e evolução da respectiva função objetivo para a estação 900 E, linha 2600 N, Sussuarana. Espaçamento transmissor-receptor  $n = 5$ .

Na estação 1250 W, linha 800 S de Vermelhos (Figura 3.10), sob espaçamento  $n = 1$ , o erro RMS foi 1.9% em amplitude e 0.9% em fase. Já a estação 550 W, linha 600 S de Baixa Funda (Figura 3.11), sob espaçamento  $n = 3$ , o erro RMS foi 4.4% em amplitude e 4.7% em fase. A estação 900 E, linha 2600 N de Sussuarana (Figura 3.12), sob espaçamento  $n = 5$ , apresentou um erro RMS de 28.4% em amplitude e 6.8% em fase.

Nos 3 casos apresentados, a função objetivo decresce conforme seguem as iterações até

estabilizar próximo da iteração 5000. Nas iterações iniciais são visualizados picos positivos da função objetivo gerados porque o método permite o aceite de modelos ruins para escapar de mínimos locais em temperaturas mais altas.

Em síntese, testes em dados sintéticos e reais demonstraram que os métodos VFSA e MMQ se mostraram eficientes no propósito da determinação dos parâmetros da função expandida de Barreto e Dias (2014).

# 4

## Análise espectral do acoplamento eletromagnético e polarização induzida

Nesse capítulo, serão apresentados e discutidos os resultados advindos da modelagem direta da impedância mútua  $Z$  e da resistividade aparente invertida  $\rho_a$  para dipolos elétricos no domínio da frequência abordando modelos de terra homogênea e de  $\eta$ -camadas baseados na formulação de Mocitaiba et al. (2017). Com a adição do efeito de polarização em meios da subsuperfície, será discutida a possibilidade de diferenciação entre ambos os fenômenos do AEM e IP em tais medidas.

Os dados de impedância elétrica mútua estão normalizados pelo fator  $\rho_j/2\pi L$ , onde  $\rho_j$  ( $j = 0$  para meio homogêneo e  $j = 1$  para meio de  $\eta$ -camadas) é a resistividade elétrica da subsuperfície sob corrente contínua e  $L$  é o comprimento dos dipolos. Por sua vez, os dados em diagrama de Argand estão normalizados com relação à componente real de  $Z$  na menor frequência. Embora tenham sido empregados grandes intervalos de frequência para obter uma visão mais ampla do efeito indutivo, abrangeu-se também as baixas frequências associadas ao fenômeno de IP.

Nos casos em que o meio é polarizável, é empregado o modelo de resistividade complexa de Barreto e Dias (2014) com os parâmetros descritos na expressão 1.8, ou seja

$$m_W = 0,298; \quad \tau_W = 7,21 \text{ ms}; \quad m_D = 0,488; \quad \tau_D = 0,388 \mu\text{s}.$$

## 4.1 Modelo homogêneo

Sendo o modelo homogêneo o mais simples cenário geológico para a modelagem da impedância mútua do AEM de dipolos elétricos, alguns estudos anteriores abrangeram tal aplicação (Millett, 1967; Dey e Morrison, 1973; Wynn, 1979; Brown, 1985; Wait e Gruszka, 1986). Assim, foi possível averiguar a validade da modelagem aqui empregada (Mocitaiba et al., 2017) através da repetição dos diversos testes de modelagem presentes em tais trabalhos, onde verificou-se a concordância entre os resultados.

Entre tais estudos, ressalta-se o trabalho de Millett (1967), considerado uma referência no estudo do AEM em dipolos elétricos no domínio da frequência para um semi-espaço homogêneo (seção 2.2). O algoritmo da modelagem de Millett (1967) foi então implementado de modo a permitir uma mais rigorosa validação da modelagem empregada. A Figura 4.1 exemplifica uma comparação entre os resultados para um meio homogêneo não-polarizável de resistividade elétrica  $\rho = 200 \Omega\text{m}$ , comprimento dos dipolos de  $L = 50 \text{ m}$ , para  $n$  separações entre dipolos transmissor e receptor; empregando-se  $k = 30$  em Millett (1967).

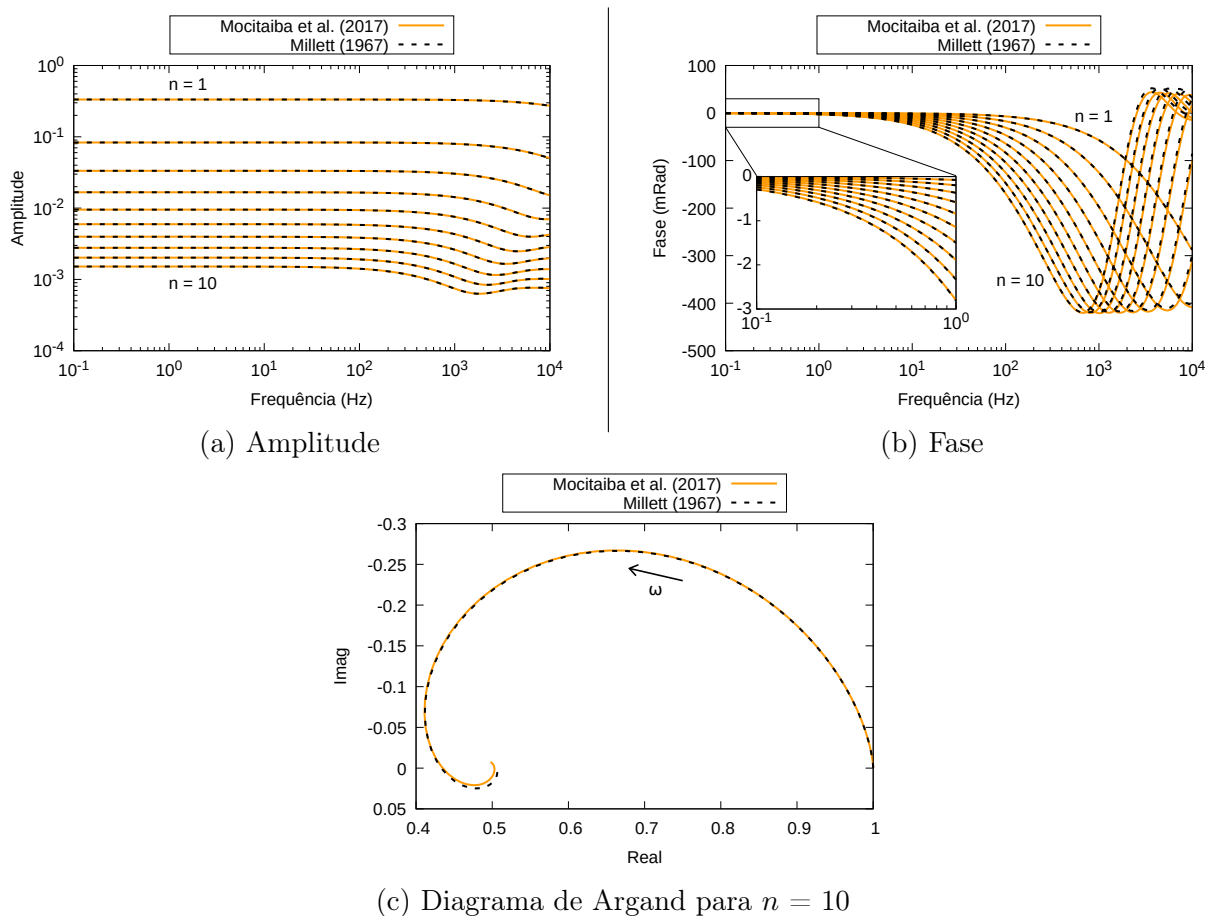


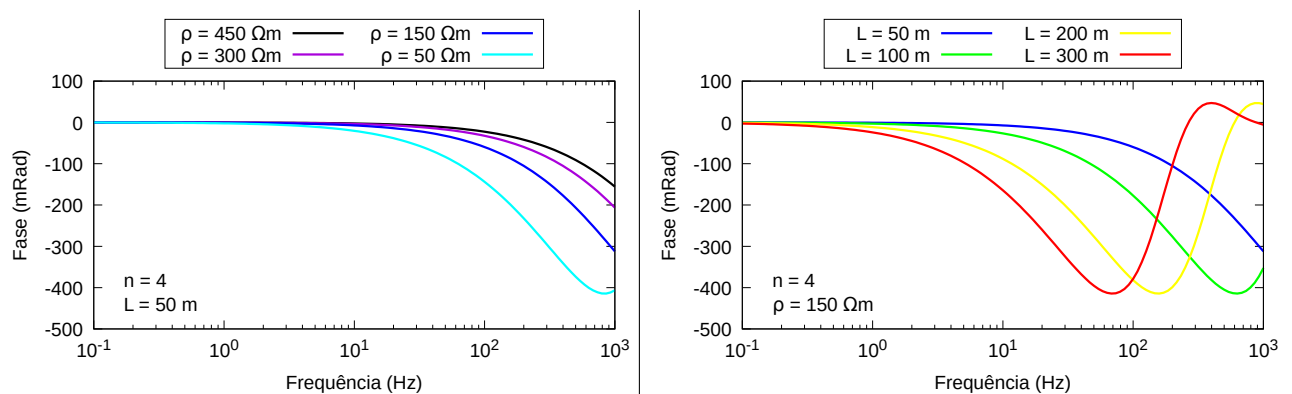
Figura 4.1: Impedância mútua normalizada  $Z/Z_0$  para um modelo de terra homogênea não-polarizável de resistividade elétrica  $\rho = 200 \Omega\text{m}$ , comprimento dos dipolos de  $L = 50 \text{ m}$ , comparada à modelagem em Millett (1967) sob as mesmas condições.

É possível notar o ajuste entre as curvas de ambas as formulações, sendo que o erro relativo máximo foi de 0.25% em amplitude e 1.3% em fase até a frequência de  $10^3$  Hz. Para os últimos valores de frequência, começa a haver uma discrepância entre os resultados causada pela limitação na convergência das séries infinitas de Millett (1967) quando lidamos com altos valores de frequência.

Embora pareça invariante para  $f \leq 1$  Hz, a fase do dado indutivo sofre pequenos deslocamentos desde as menores frequências (Figura 4.1b). Essa magnitude do sinal deve ser considerada, visto que, segundo Zonge et al. (2005), variações de fase na ordem de 5 mRad já podem ser significantes em levantamentos de IP. Em baixas frequências, alguns autores consideram esse comportamento espectral da fase como quase linear (Hallof, 1974). De qualquer forma, os dados de IP têm sempre um certo grau de "contaminação" pelo AEM, mesmo com o emprego de baixas frequências (0.125 Hz, por Hatch, 2013) a fim de evitá-lo.

Assim como em Dey e Morrison (1973) e Brown (1985), observa-se que com o aumento da frequência, a fase de  $Z/Z_0$  decai de zero até um mínimo negativo e então retorna até um máximo positivo passando por zero. No caso da Figura 4.1, o máximo deslocamento da fase está posicionado entre as frequências de  $10^3$  Hz a  $10^4$  Hz. Para um semi-espço homogêneo, em quase todo o espectro de frequências de  $10^{-1}$  Hz a  $10^4$  Hz, a fase apresenta sinal negativo e o acoplamento indutivo é dito ser positivo ou normal (Brown, 1985).

A amplitude da impedância mútua se revela menos sensível espectralmente, assumindo sutis variações apenas em maiores frequências (Figura 4.1a), o que justifica a preferência pela fase na observação espectral dos fenômenos do AEM e IP, inclusive no procedimento de desacoplamento de dados de IP (Hallof, 1974). Ainda assim, há um deslocamento negativo da amplitude de  $Z/Z_0$  para as maiores frequências.



(a) Variação paramétrica da resistividade elétrica  $\rho$ . (b) Variação paramétrica do comprimento dos dipolos  $L$ .

Figura 4.2: Comportamento espectral da fase de  $Z/Z_0$  para um modelo de terra homogênea não-polarizável com variação paramétrica da resistividade elétrica e do comprimento dos dipolos e fixados os parâmetros restantes.

Na Figura 4.1, quanto maior o espaçamento  $n$  entre os dipolos, maior é a variação da medida em amplitude e menor o valor da frequência na qual ocorre o mínimo da fase (Dey e Morrison, 1973; Brown, 1985). Dessa forma, é possível afirmar que são esperados consideráveis efeitos indutivos quando se emprega grandes espaçamentos no intuito de alcançar grandes profundidades de investigação. A Figura 4.2 demonstra o aumento do efeito indutivo com a condutividade elétrica da subsuperfície ( $1/\rho$ ) e com o comprimento dos dipolos  $L$ .

#### 4.1.1 Presença do efeito de polarização

Para exemplificar o efeito da presença de polarização sobre a impedância mútua de um modelo homogêneo, a Figura 4.3 compara a resposta de um meio não-polarizável de resistividade elétrica  $\rho_0 = 200 \Omega m$  com a resposta após a adição do efeito de polarização.

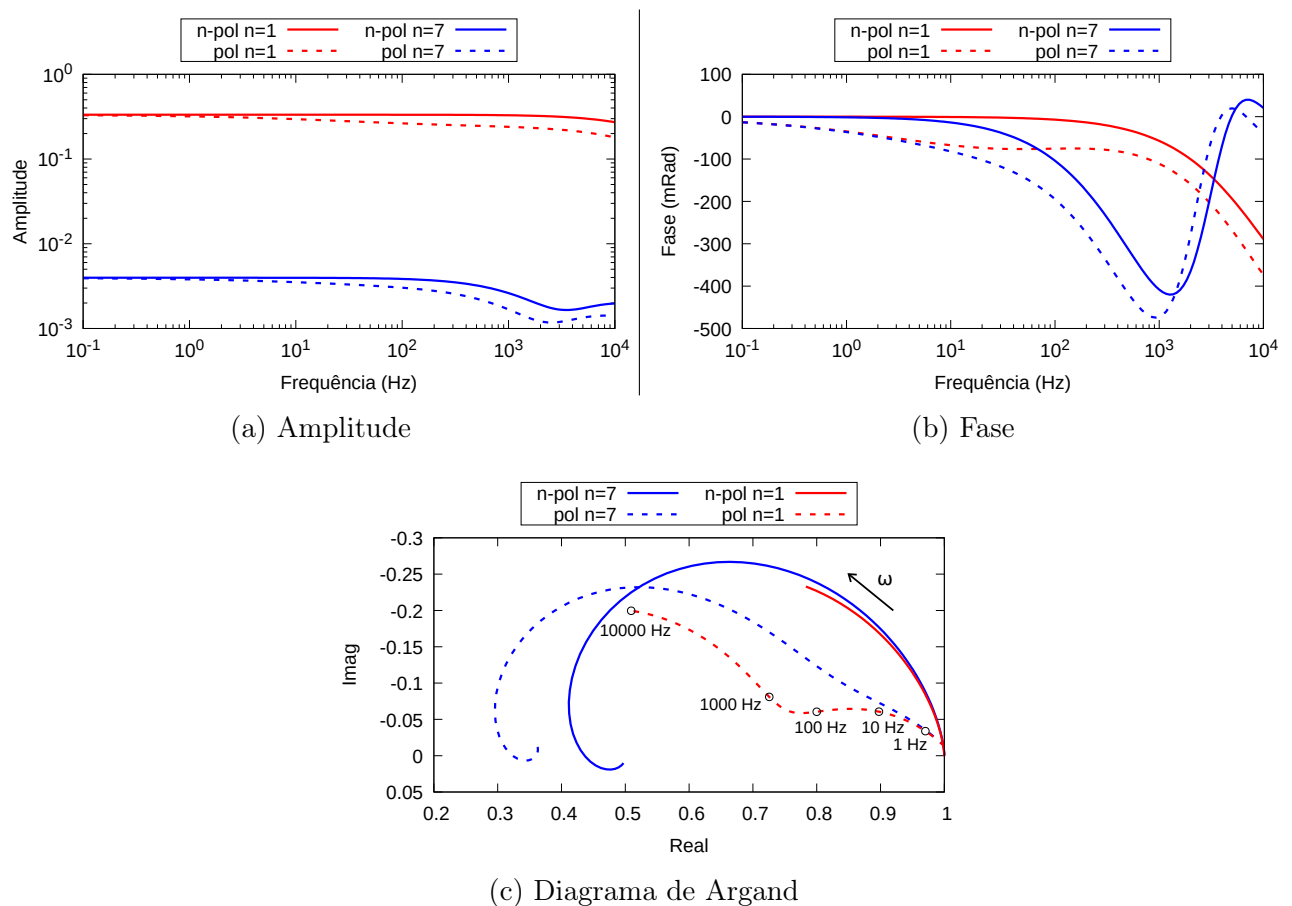


Figura 4.3: Efeito da polarização sobre a impedância mútua normalizada  $Z/Z_0$  para um modelo de terra homogênea de resistividade elétrica  $\rho_0 = 200 \Omega m$ ,  $L = 50$  m, para  $n = 1$  e  $n = 7$ .

A adição do efeito de polarização provoca um deslocamento negativo na fase de  $Z/Z_0$  desde as menores frequências e reflete em todo o comportamento espectral da curva, eviden-

ciando a dificuldade em separar os efeitos devido a suas similaridades comportamentais. Esse contraste devido ao efeito de IP é menos evidente em amplitude e se manifesta no diagrama de Argand por meio de um deslocamento das curvas nas frequências iniciais para ambos os níveis  $n = 1$  e  $n = 7$ . Para  $n = 1$ , esse deslocamento diferencial promovido pela polarização induzida é mais evidente e segue até aproximadamente 500 Hz.

Em síntese, a presença do efeito de polarização em um meio homogêneo é bem retratada principalmente na fase do dado de impedância mútua, ao mesmo tempo em que pode ocasionar um considerável desvio nas curvas do Diagrama de Argand.

## 4.2 Modelo de 2 camadas

Alguns estudos abordaram a resposta indutiva para um modelo de terra em camadas (Dey e Morrison, 1973; Hohmann, 1973; Wynn e Zonge, 1977; Spies e Frischknecht, 1991). Assim como no modelo homogêneo, a confiabilidade da modelagem de  $\eta$ -camadas aqui empregada foi confirmada por meio da comparação dos resultados ao repetir os diversos testes presentes nesses trabalhos sob as mesmas configurações dos parâmetros.

Pontua-se que a análise do acoplamento indutivo para um semi-espaco de  $\eta$ -camadas assume uma maior complexidade devido à presença do efeito de heterogeneidade decorrente do contraste de resistividade elétrica entre as camadas (Dias, 2017).

A Figura 4.4 exemplifica respostas de um semi-espaco de 2 camadas não-polarizáveis para uma 1ª camada condutiva sobreposta a um embasamento mais resistivo (Figura 4.4a) e o inverso (Figura 4.4b). O modelo no qual  $\rho_2 > \rho_1$  pode ser considerado uma adequada representação da geometria encontrada na busca por depósitos de cobre porfirítico por meio do método de IP (Hohmann, 1973; Hallof, 1974).

Como esperado, em ambos os exemplos, a intensidade do efeito indutivo aumenta com a frequência e com o espaçamento  $n$ . Segundo Brown (1985), em levantamentos dipolo-dipolo de  $Z/Z_0$  em que  $\rho_2 = \rho_1$  (semi-espaco homogêneo) ou  $\rho_2 > \rho_1$  (Figuras 4.4a e 4.4c), o acoplamento indutivo é normal ou positivo, sendo que a fase  $\phi < 0$  e  $Im(Z/Z_0) < 0$ . Por sua vez, quando  $\rho_2 < \rho_1$  (Figuras 4.4b e 4.4d),  $\phi > 0$  e  $Im(Z/Z_0) > 0$  em um grande intervalo de frequências, e o AEM é negativo.

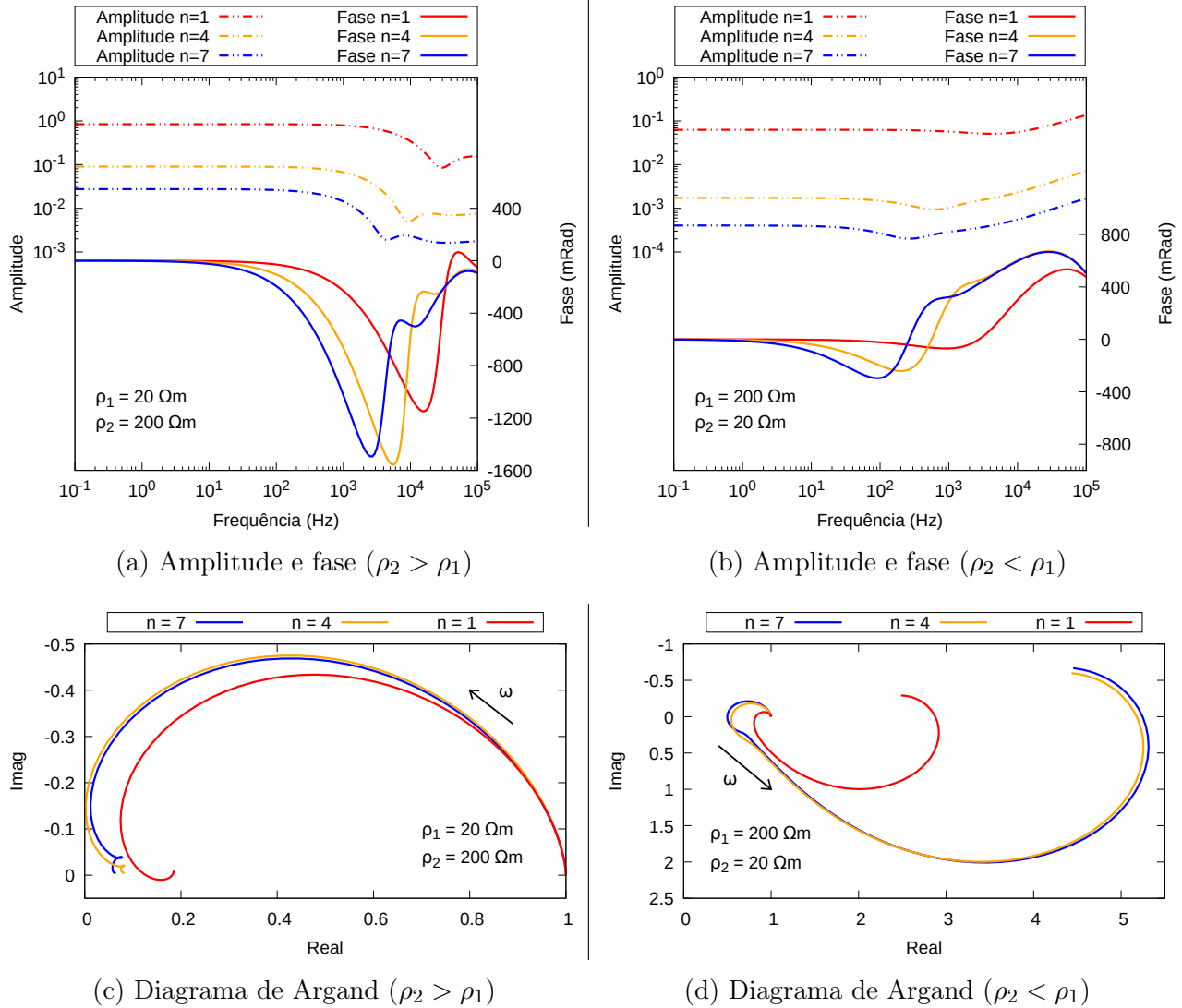


Figura 4.4: Impedância mútua normalizada  $Z/Z_0$  para um modelo de 2 camadas não-polarizáveis mantendo fixos a espessura da 1ª camada  $h = 15$  m e o comprimento dos dipolos de  $L = 50$  m;  $n = 1, 4$  e  $7$ ,  $\rho_1$  e  $\rho_2$  variáveis.

As Figuras 4.5 e 4.6 exemplificam a relação do AEM com o efeito de heterogeneidade entre as camadas em modelos de 2 camadas por meio do efeito da variação do termo  $h/L$  sobre a impedância mútua quando  $\rho_2 > \rho_1$  e  $\rho_2 < \rho_1$ , respectivamente. Em ambos os casos, para o extremo  $h/L = 10^{-3}$ , a espessura  $h$  da 1ª camada é excessivamente pequena a ponto de tornar desprezível o efeito de heterogeneidade, de forma que a resposta é equivalente à de um semi-espço homogêneo de resistividade  $\rho = \rho_2$ . Por sua vez, para  $h/L = 4$ , a espessura da 1ª camada se torna grande o suficiente para que a profundidade de investigação não atinja a 2ª camada e a resposta equivale à de um semi-espço homogêneo de resistividade  $\rho = \rho_1$ . O que diferencia os dois casos apresentados é o comportamento espectral em amplitude e fase para os valores de  $h/L$  intermediários.



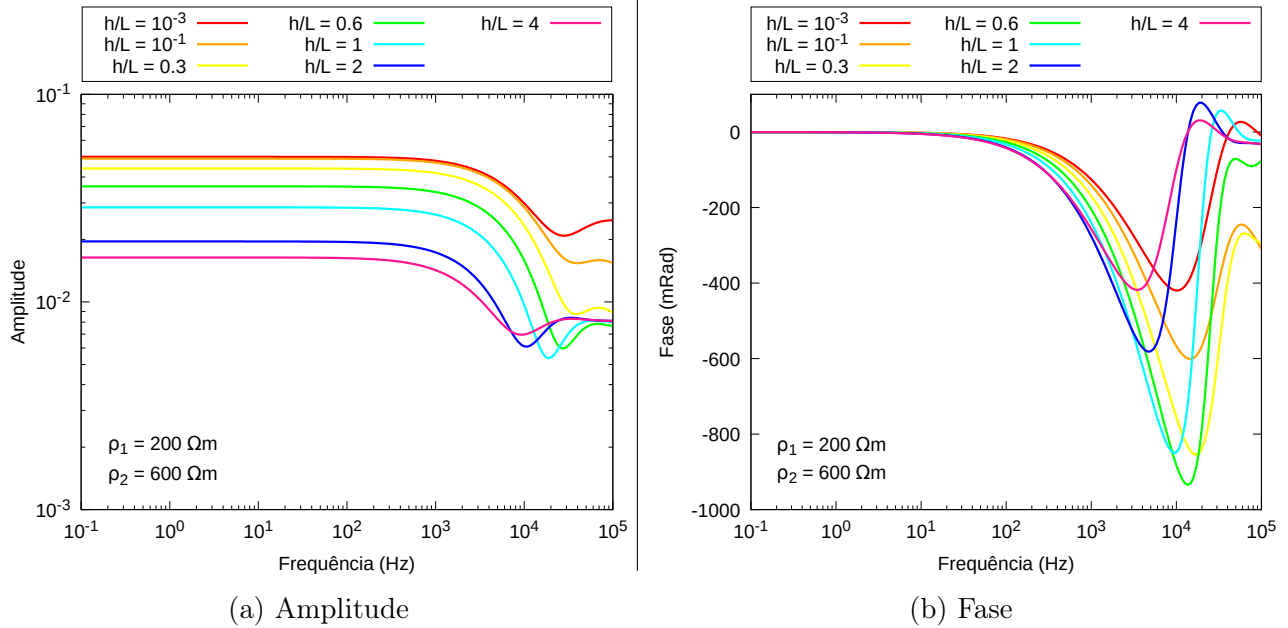


Figura 4.5: Impedância mútua normalizada  $Z/Z_0$  para um modelo de 2 camadas não-polarizáveis mantendo fixos as resistividades  $\rho_1 = 200 \Omega\text{m}$  e  $\rho_2 = 600 \Omega\text{m}$  e o comprimento dos dipolos de  $L = 50 \text{ m}$ ;  $n = 4$  e espessura da 1ª camada  $h$  variável.

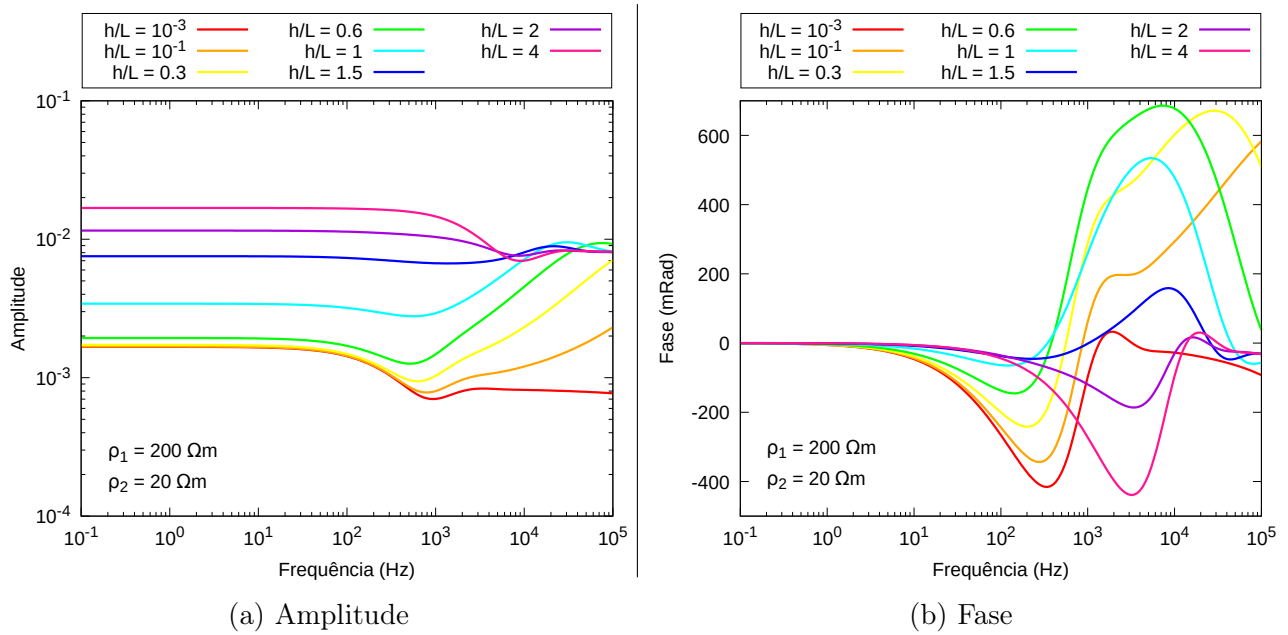


Figura 4.6: Impedância mútua normalizada  $Z/Z_0$  para um modelo de 2 camadas não-polarizáveis mantendo fixos as resistividades  $\rho_1 = 200 \Omega\text{m}$  e  $\rho_2 = 20 \Omega\text{m}$  e o comprimento dos dipolos de  $L = 50 \text{ m}$ ;  $n = 4$  e espessura da 1ª camada  $h$  variável.

No caso em que  $\rho_2 > \rho_1$  (Figura 4.5), amplitude e fase mantêm um padrão espectral em suas curvas e a fase permanece majoritariamente negativa para todos os valores de  $h/L$ . Nesse contexto, a heterogeneidade do contraste de resistividade entre as camadas provoca

um aumento do efeito indutivo em função da frequência, sendo que o maior deslocamento em fase e amplitude ocorre para  $h/L = 0.6$  (ou  $h = 30$  m), quando  $\phi \approx -930$  mRad.

Por sua vez, quando  $\rho_2 < \rho_1$  (Figura 4.6), o comportamento das curvas é mais variável com o valor de  $h/L$ . Para  $10^{-1} \leq h/L \leq 1.5$ , o aumento gradual do efeito da 1ª camada resistiva proporciona um aumento do efeito indutivo em amplitude e fase, no qual a fase inicialmente decai e então aumenta, passando por picos de valores positivos (máximo de  $\phi \approx 685$  mRad para  $h/L = 0.3$  a  $0.6$ ), enquanto a amplitude aumenta de uma forma singular com a frequência. Para  $h/L \geq 2$ , prevalece o efeito da 1ª camada e a resposta espectral tende à de um semi-espço homogêneo, como anteriormente dito.

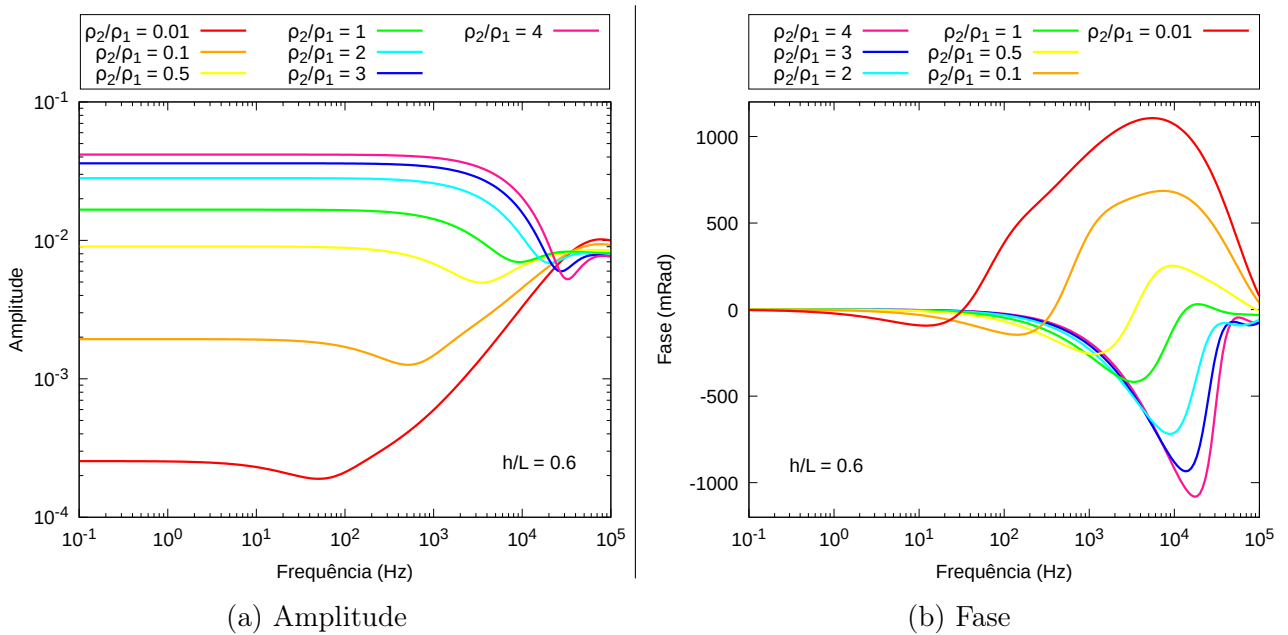


Figura 4.7: Impedância mútua normalizada  $Z/Z_0$  para um modelo de 2 camadas não-polarizáveis mantendo fixos a espessura da 1ª camada  $h = 30$  m e o comprimento dos dipolos de  $L = 50$  m;  $n = 4$ ,  $\rho_1 = 200 \Omega\text{m}$  e  $\rho_2$  variável.

Na Figura 4.7, é ilustrado o efeito da variação de  $\rho_2/\rho_1$ , fixados  $h/L = 0.6$ ,  $n = 4$  e  $\rho_1 = 200 \Omega\text{m}$ . Obviamente, para  $\rho_2/\rho_1 = 1$ , temos a conjuntura de um semi-espço homogêneo de resistividade  $\rho = 200 \Omega\text{m}$ . Caso  $\rho_2/\rho_1 > 1$ , há um aumento do efeito indutivo em comparação ao semi-espço homogêneo, o qual se dá pelo efeito da heterogeneidade do contraste entre  $\rho_1$  e  $\rho_2$ . Para  $\rho_2/\rho_1 < 1$ , esse aumento é ainda mais significativo e se inicia em menores frequências.

Tendo compreendido o comportamento espectral geral do AEM e do intrínseco efeito de heterogeneidade para um modelo de 2 camadas, podemos seguir para o próximo passo que consiste na adição do efeito de polarização em cada uma das camadas e análise em torno da possibilidade de diferenciação entre o AEM e o efeito de IP. Para facilitar a compreensão e

comparação entre dados, fixamos os parâmetros  $L = 50$  m e  $n = 4$ , buscando variar apenas as resistividades elétricas  $\rho_1$  e  $\rho_2$  das camadas e a espessura  $h$  da 1ª camada. Nas aplicações sobre um modelo em  $\eta$ -camadas, a resistividade sob frequência zero das eventuais camadas polarizáveis é representada na forma  $\rho_{0,j}$ , onde  $j$  é o índice de posição da camada.

Nas Figuras de 4.8 a 4.11, as curvas em linha contínua refletem a impedância devido ao simples efeito do AEM e heterogeneidade entre as camadas, enquanto as linhas tracejadas representam a mesma impedância mútua acrescida do efeito de polarização na 1ª ou 2ª camada. Nos gráficos de fase, plota-se ainda uma aproximação na faixa de frequências de  $10^{-2}$  a 10 Hz, detalhando assim o comportamento das curvas nas baixas frequências empregadas no método de IP.

### 4.2.1 1ª camada polarizável sobre semi-espaço não polarizável

As Figuras 4.8 e 4.9 mostram curvas espectrais de amplitude e fase que ilustram as condições de distinção entre os efeitos de IP e AEM para o caso de uma camada polarizável sobre um semi-espaço não-polarizável. Na Figura 4.8, temos a 1ª camada condutiva sobre um semi-espaço resistivo; o inverso ocorre na Figura 4.9.

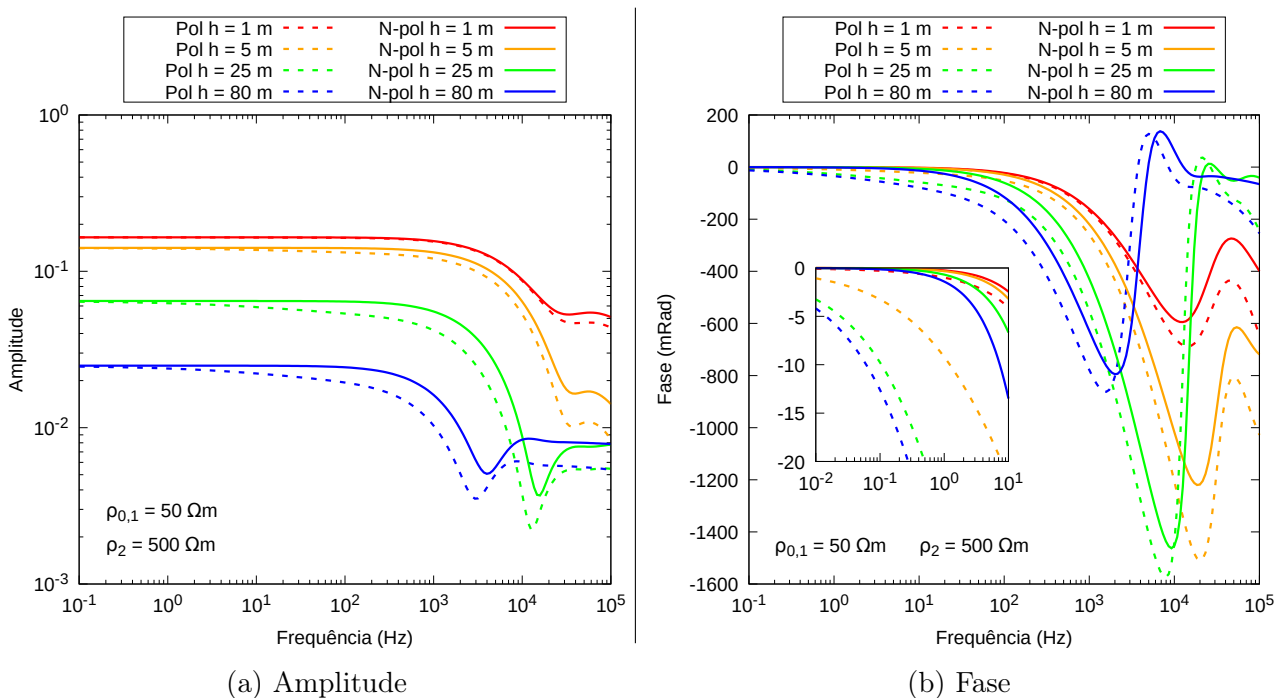


Figura 4.8: Variação em  $Z/Z_0$  devido ao efeito da presença de polarização na 1ª camada para um modelo de 2 camadas, enquanto varia a espessura  $h$  da 1ª camada. São parâmetros fixos o comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $n = 4$ ,  $\rho_{0,1} = 50 \Omega\text{m}$  e  $\rho_2 = 500 \Omega\text{m}$ .

Nos casos apresentados, para valores muito pequenos da espessura  $h$ , o efeito de po-

larização da 1ª camada é pouco distinguível do efeito do acoplamento e heterogeneidade. Nesses casos, a 2ª camada não-polarizável exerce maior influência sobre a impedância mútua resultante. Com o aumento da espessura  $h$ , o efeito de IP passa a se expressar através de deslocamentos em amplitude e fase. Para maiores valores de espessura, a fase sofre deslocamentos negativos desde as primeiras frequências.

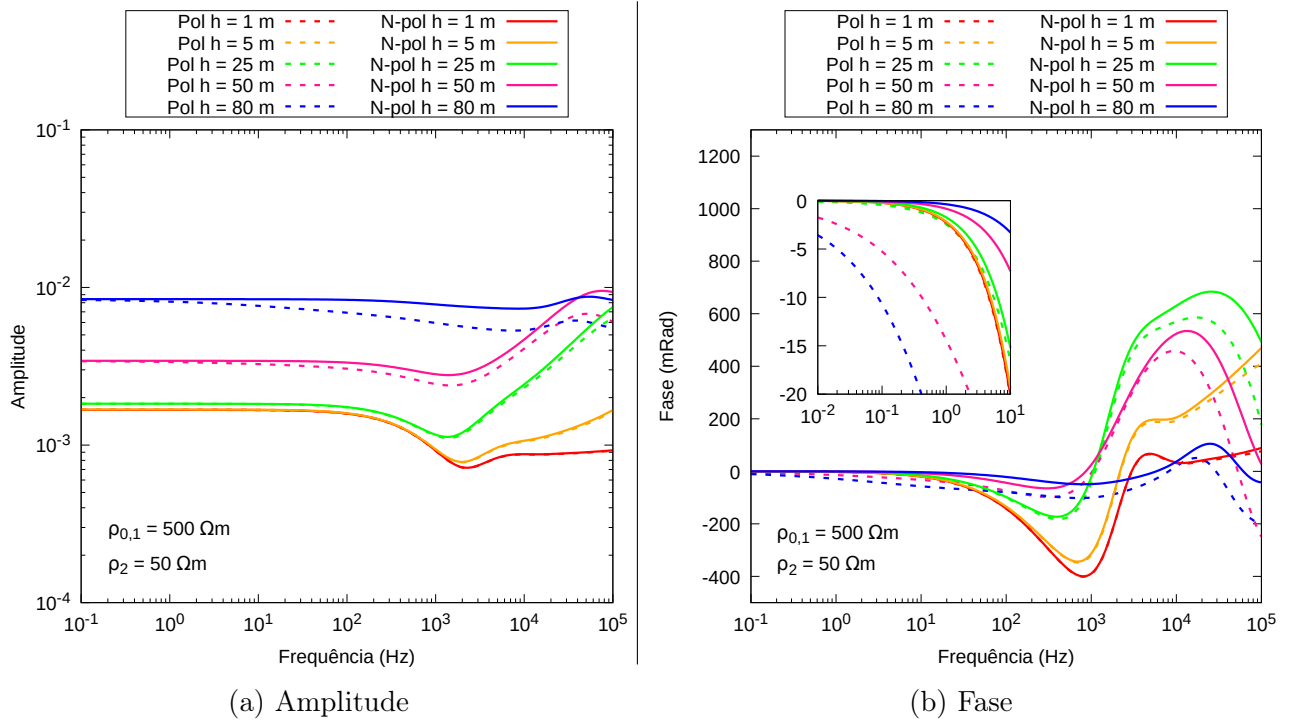


Figura 4.9: Variação em  $Z/Z_0$  devido ao efeito da presença de polarização na 1ª camada para um modelo de 2 camadas, enquanto varia a espessura  $h$  da 1ª camada. São parâmetros fixos o comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $n = 4$ ,  $\rho_{0,1} = 500 \Omega\text{m}$  e  $\rho_2 = 50 \Omega\text{m}$ .

É possível observar que quando  $\rho_2 > \rho_{0,1}$  (Figura 4.8) a espessura de  $h = 1$  m já atesta a separação do efeito de IP, fato que só ocorre para  $\rho_2 < \rho_{0,1}$  (Figura 4.9) em maiores valores de  $h$  (em torno de  $h = 25$  m). Tal circunstância ocorre pois, quanto menor a razão  $\rho_2/\rho_{0,1}$ , maior deve ser a espessura da 1ª camada para que o efeito de IP dessa camada seja discriminável (Dias, 2017).

#### 4.2.2 1ª camada não polarizável sobre semi-espaço polarizável

As Figuras a seguir evidenciam o efeito e diferenciação da polarização quando apenas a 2ª camada do modelo é polarizável. Na Figura 4.10, uma 1ª camada condutiva cobre o semi-espaço resistivo e o inverso ocorre na Figura 4.11.

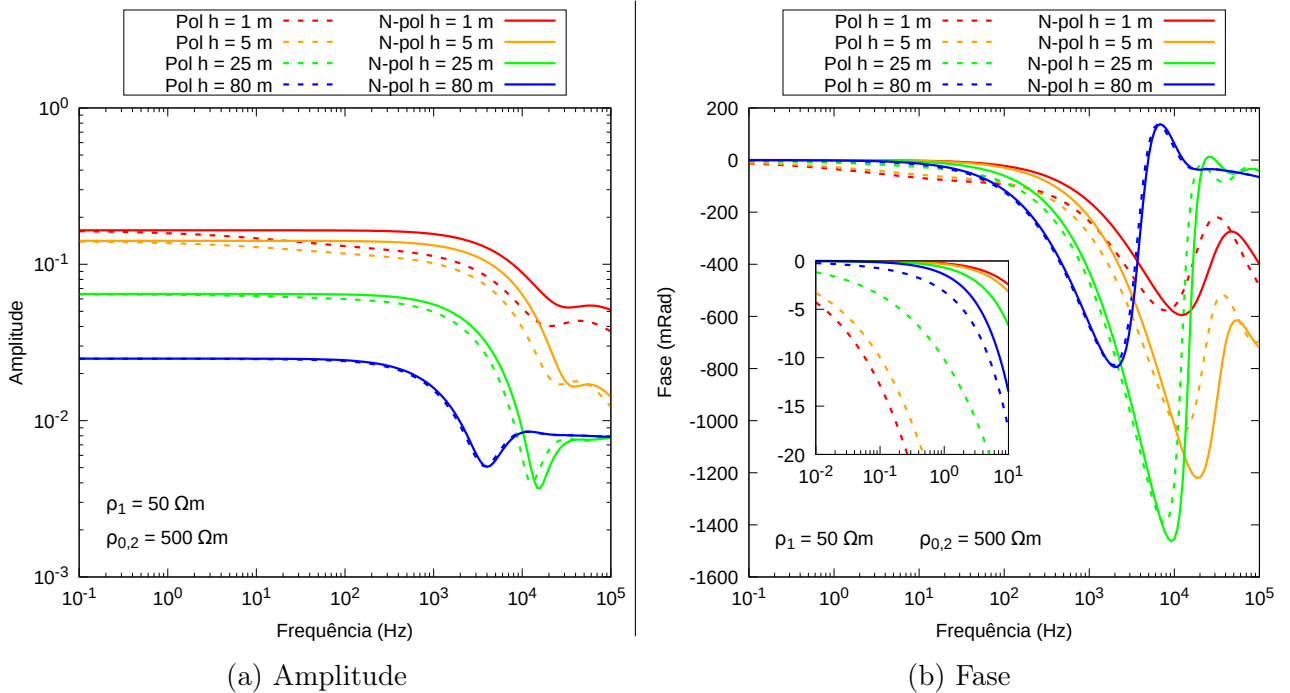


Figura 4.10: Variação em  $Z/Z_0$  devido ao efeito da presença de polarização na 2ª camada para um modelo de 2 camadas, enquanto varia a espessura  $h$  da 1ª camada. São parâmetros fixos o comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $n = 4$ ,  $\rho_1 = 50 \Omega\text{m}$  e  $\rho_{0,2} = 500 \Omega\text{m}$ .

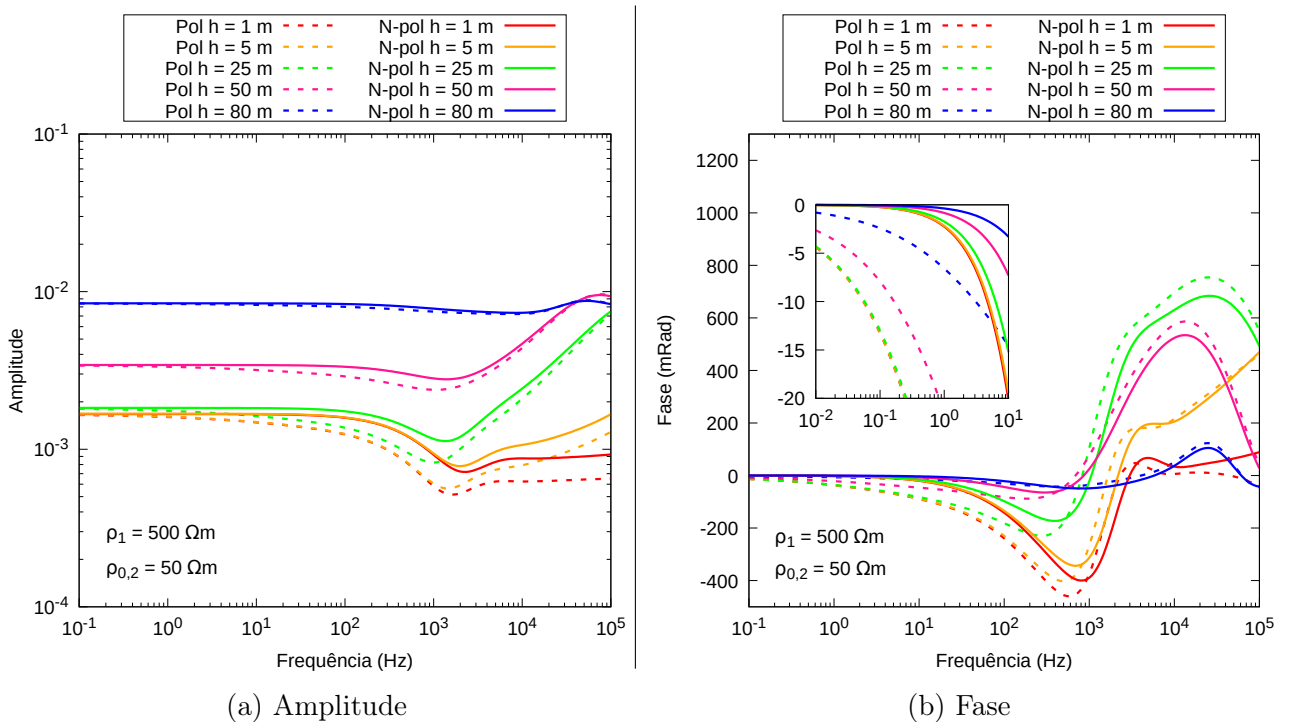


Figura 4.11: Variação em  $Z/Z_0$  devido ao efeito da presença de polarização na 2ª camada para um modelo de 2 camadas, enquanto varia a espessura  $h$  da 1ª camada. São parâmetros fixos o comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $n = 4$ ,  $\rho_1 = 500 \Omega\text{m}$  e  $\rho_{0,2} = 50 \Omega\text{m}$ .

Em ambos os exemplos, existe um limite de espessura  $h$  máximo (para dados  $L$  e  $n$ ) a partir do qual o efeito de polarização da 2ª camada é pouco distinguível do AEM. Essa espessura limite é menor para  $\rho_{0,2} > \rho_1$  (Figura 4.10) do que para  $\rho_{0,2} < \rho_1$  (Figura 4.11). Dessa forma, quanto mais condutiva a 1ª camada, menor é a sua espessura limite para que o efeito de IP da 2ª camada seja perceptível, pois uma cobertura mais condutiva exerce uma blindagem mais efetiva à penetração dos campos eletromagnéticos.

As Figuras 4.12 e 4.13 sintetizam a discussão acerca do efeito de IP em modelos de 2 camadas através de diagramas de Argand para um intervalo de frequência de  $10^{-2}$  a  $10^3$  Hz. Nesse caso, os dados não foram normalizados para uma melhor comparação entre os resultados para diferentes espessuras.

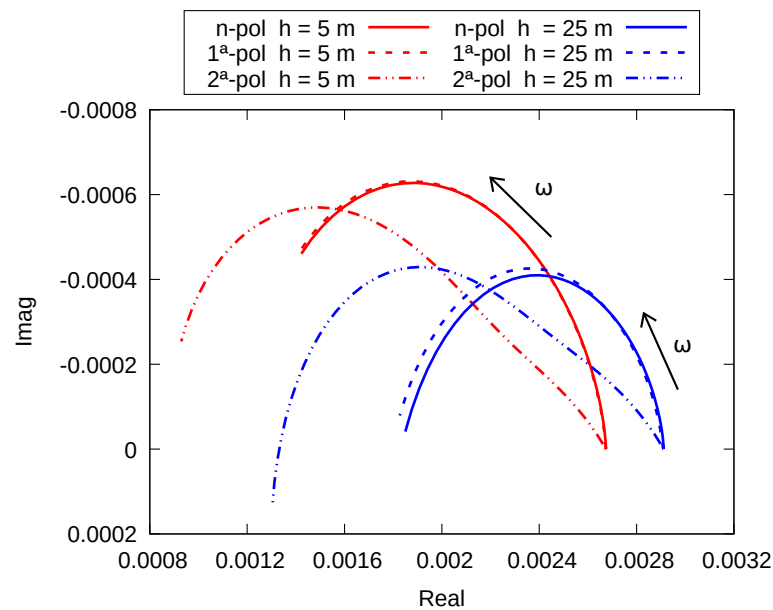


Figura 4.12: Diagrama de Argand de  $Z/Z_0$  não-normalizado para um modelo de 2 camadas ilustrando o efeito de polarização em cada uma das camadas de resistividades  $\rho_{0,1} = 500 \Omega\text{m}$  e  $\rho_{0,2} = 50 \Omega\text{m}$  entre  $10^{-2}$  Hz e  $10^3$  Hz. São parâmetros fixos  $L = 50$  m e  $n = 4$ ;  $h = 5$  m ou  $h = 25$  m.

A Figura 4.12 ilustra o caso de uma cobertura resistiva sobre um semi-espaco condutor. Para ambas as espessuras  $h = 5$  m e  $h = 25$  m, o efeito de IP atribuído à 2ª camada é nitidamente distinguível por meio do deslocamento das curvas com o aumento da frequência. Por sua vez, atribuindo a polarização à 1ª camada de espessura  $h = 5$  m, praticamente nenhuma alteração é observada. Caso essa cobertura polarizável seja mais espessa ( $h = 25$  m), o efeito de IP é sutilmente notável em maiores frequências. Nesse contexto, o semi-espaco condutor mascara fortemente uma eventual polarizabilidade da 1ª camada mais resistiva, tornando-a quase imperceptível mesmo sob uma maior espessura  $h$ .

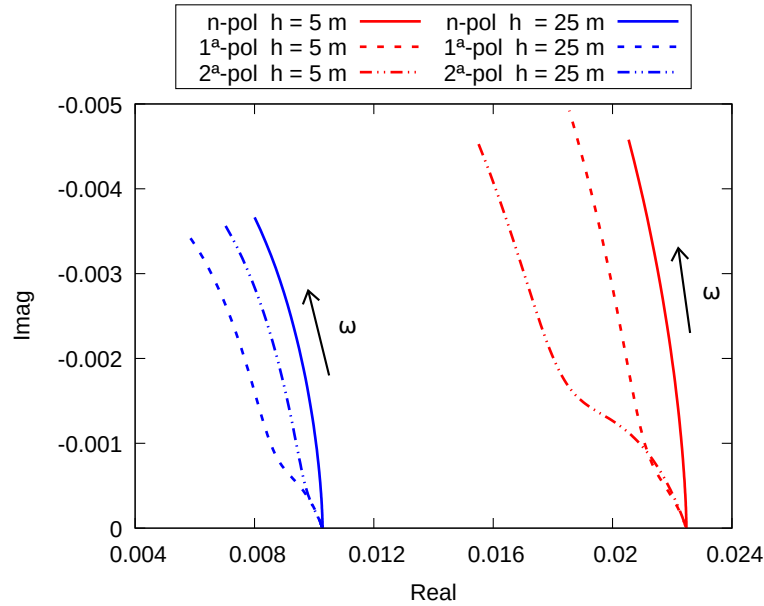


Figura 4.13: Diagrama de Argand de  $Z/Z_0$  não-normalizado para um modelo de 2 camadas ilustrando o efeito de polarização em cada uma das camadas de resistividades  $\rho_{0,1} = 50 \Omega\text{m}$  e  $\rho_{0,2} = 500 \Omega\text{m}$  entre  $10^{-2}$  Hz e  $10^3$  Hz. São parâmetros fixos  $L = 50$  m e  $n = 4$ ;  $h = 5$  m ou  $h = 25$  m.

No exemplo da Figura 4.13, uma cobertura condutiva sobrepõe um semi-espaço resistivo. Neste caso, a polarização é claramente diferenciável do efeito indutivo em todas as situações apresentadas, porém em intensidades distintas. Ao contrário do que ocorre na Figura 4.12, para uma espessura mais fina da 1ª camada ( $h = 5$  m) já é possível distinguir o efeito de IP dessa cobertura condutiva, embora seja ainda mais distinguível a polarizabilidade da 2ª camada. Caso essa cobertura seja mais espessa ( $h = 25$  m), ocorre uma inversão nessa expressão do efeito de IP: a polarizabilidade na 1ª camada passa a ser mais distinguível do que a polarizabilidade na 2ª camada.

Dessa forma, no caso de um modelo de 2 camadas, o efeito de IP de uma 1ª camada mais condutiva (do que o semi-espaço) é detectável a espessuras bem menores do que se essa camada for mais resistiva (do que o semi-espaço). Por sua vez, uma maior condutividade do semi-espaço (Figura 4.12) imprimiu uma resposta bastante nítida de sua polarizabilidade sobre o efeito indutivo.

### 4.3 Modelo de 3 camadas

A análise do efeito de IP sobre o AEM para modelos de 3 camadas foi aplicada empregando as distribuições de resistividade do tipo H ( $\rho_1 > \rho_2 < \rho_3$ ), do tipo K ( $\rho_1 < \rho_2 > \rho_3$ ), do tipo A ( $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ ) e do tipo Q ( $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$ ) (Telford et al., 1990, p. 545).

Além da usual interpretação em termos da impedância elétrica mútua, nessa seção analisaremos a resistividade complexa aparente  $\rho_a$ , determinada através da inversão da impedância mútua no procedimento descrito na seção 3.4.1. Nos casos em que não há qualquer efeito de polarização induzida, a medida espectral de  $\rho_a$  é reflexo do AEM e heterogeneidade decorrente do contraste de resistividade em um modelo de 3 camadas.

#### 4.3.1 Modelos Tipo H

Por meio do modelo tipo H é representado o efeito devido a uma camada intermediária condutiva sotoposta e sobreposta por camadas resistivas. O modelo específico empregado está representado na Figura 4.14.

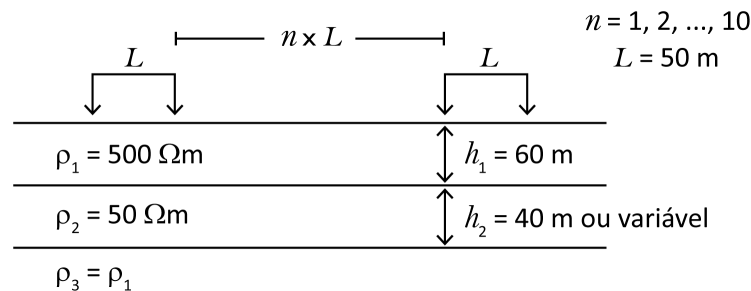


Figura 4.14: Modelo de resistividade tipo H empregado.

A Figura 4.15 mostra o comportamento típico da impedância mútua nesse modelo tipo H não-polarizável com a variação da espessura  $h_2$  da 2ª camada, estando fixos os outros parâmetros. Para  $h_2 = 1 \text{ m}$ , a 2ª camada é muito pouco expressiva, de forma que o resultado equivale ao de um modelo homogêneo de resistividade  $\rho = \rho_1 = \rho_3$ . Conforme  $h_2$  aumenta, as curvas sofrem transformações devido ao efeito da 2ª camada condutiva.

A resistividade aparente  $\rho_a$  é retratada na Figura 4.16 para o mesmo modelo tipo H não-polarizável, espaçamento  $n = 1, 2, \dots, 10$  e sendo ausente qualquer efeito de polarização nas camadas. Nota-se que qualquer variação espectral relevante de  $\rho_a$ , tanto em amplitude quanto em fase, se dá predominantemente em maiores frequências e espaçamentos. Sendo assim, para tal contraste de resistividade, somente a partir de aproximadamente 5 Hz o efeito da heterogeneidade passa a criar um falso efeito de IP significativo na medida de fase, o qual é caracterizado por um deslocamento positivo até atingir um pico em maiores frequências.



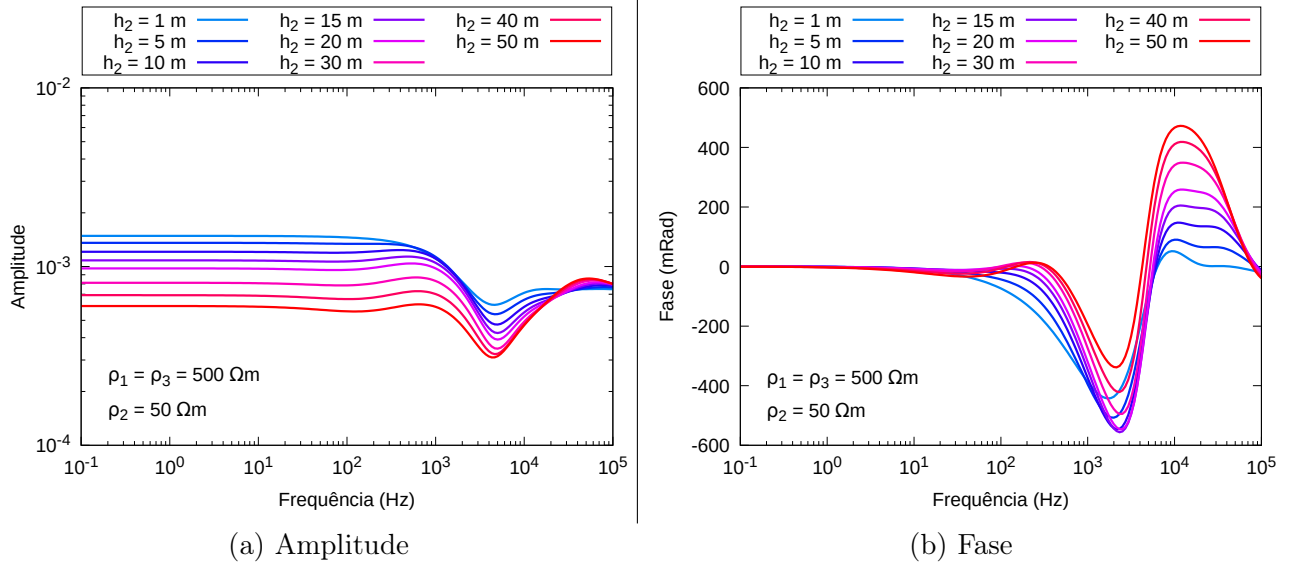


Figura 4.15: Impedância mútua normalizada para um modelo tipo H não-polarizável sob variação da espessura  $h_2$  da 2ª camada. São parâmetros fixos a espessura da 1ª camada  $h_1 = 60$  m, o comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $n = 10$ ,  $\rho_1 = \rho_3 = 500 \Omega\text{m}$  e  $\rho_2 = 50 \Omega\text{m}$ .

Nos gráficos da amplitude de  $\rho_a$  é interessante observar que, para as frequências iniciais (quando  $Im(\rho_a) \approx 0$  e, portanto,  $|\rho_a| \approx Re(\rho_a)$ ), a variação do dado com os níveis de afastamento  $n$  reflete as mudanças da resistividade elétrica com a profundidade de investigação atingida. Na Figura 4.16a, enquanto  $n = 1$  reproduz predominantemente o valor de  $\rho_1$ , os níveis subsequentes até  $n = 5$  indicam uma diminuição em direção a  $\rho_2$  e de  $n = 6$  a  $n = 10$  ocorre um aumento de  $\rho_a$ , tendendo ao valor de  $\rho_3$ .

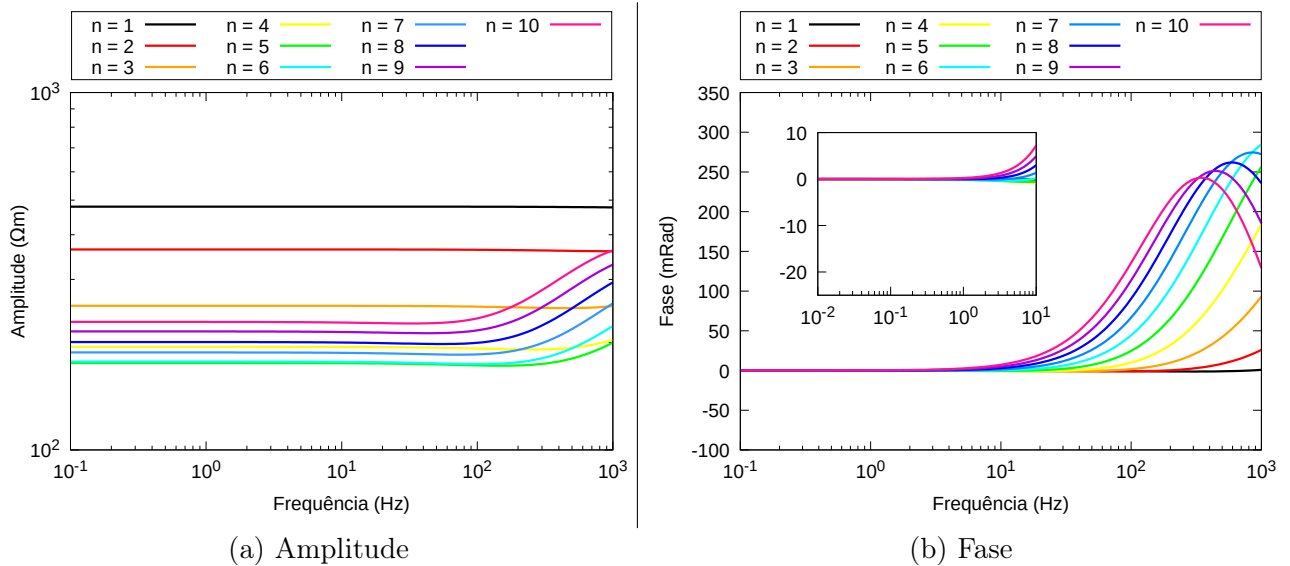


Figura 4.16: Resistividade aparente  $\rho_a$  advinda do efeito indutivo em um modelo de 3 camadas do tipo H não polarizável para  $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras  $h_1 = 60$  m e  $h_2 = 40$  m, comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $\rho_1 = \rho_3 = 500 \Omega\text{m}$  e  $\rho_2 = 50 \Omega\text{m}$ .

## Presença do efeito de polarização

A presença do efeito de IP sobre cada uma das camadas do modelo tipo H abordado (estando fixos  $h_2 = 40$  m,  $n = 2$  e  $n = 10$ ) causa as variações sobre a impedância mútua reproduzidas na Figura 4.17. Devido ao baixo alcance em profundidade de investigação, a resposta de  $n = 2$  é capaz de detectar apenas a polarização atribuída às camadas 1 e 2, esta última sob considerável limitação. Por sua vez, o nível  $n = 10$  distingue mais facilmente as alterações decorrentes do efeito de IP nas 3 camadas, embora com significativa complexidade associada aos comportamentos espectrais.

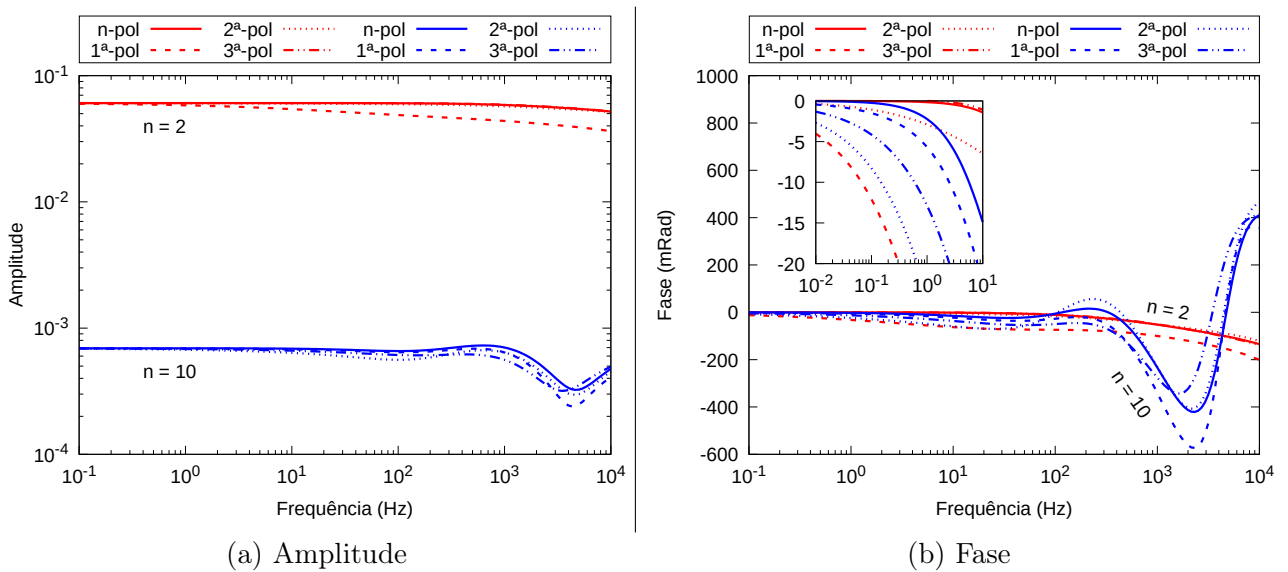


Figura 4.17: Variação em  $Z/Z_0$  devido ao efeito de IP em cada uma das 3 camadas de um modelo tipo H para  $n = 2$  e  $n = 10$ . São parâmetros fixos as espessuras  $h_1 = 60$  m e  $h_2 = 40$  m, o comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $\rho_{0,1} = \rho_{0,3} = 500 \Omega\text{m}$  e  $\rho_{0,2} = 50 \Omega\text{m}$ .

As Figuras 4.18 a 4.20 mostram as alterações sobre o modelo não-polarizável devido à adição do efeito de polarização em cada uma das 3 camadas. Um aspecto importante que pode ser observado aqui e em todos os outros modelos de resistividade de 3 camadas é a capacidade do efeito da heterogeneidade em mascarar o efeito de IP para maiores frequências ( $f \geq 5$  Hz).

Sendo apenas a 1ª camada polarizável, espera-se que os menores afastamentos  $n$  exibam as maiores alterações em amplitude e fase por estarem sob maior influência desta camada, contexto que é observado na Figura 4.18. Embora todos os níveis sofram um deslocamento negativo na fase desde as frequências mais baixas devido ao efeito de IP, tal alteração é mais acentuada para  $n < 5$ . Em amplitude, ocorre um gradual decaimento para  $n < 5$  apenas em maiores frequências.

Caso apenas a 2ª camada seja polarizável (Figura 4.19), os deslocamentos negativos

das curvas devido à polarização se transferem para maiores afastamentos  $n$  em função da profundidade de investigação alcançada, ressaltando a inalteração das curvas de  $n = 1$ . Tal cenário permite concluir que os últimos níveis de afastamentos já experimentam a influência da 2ª camada.

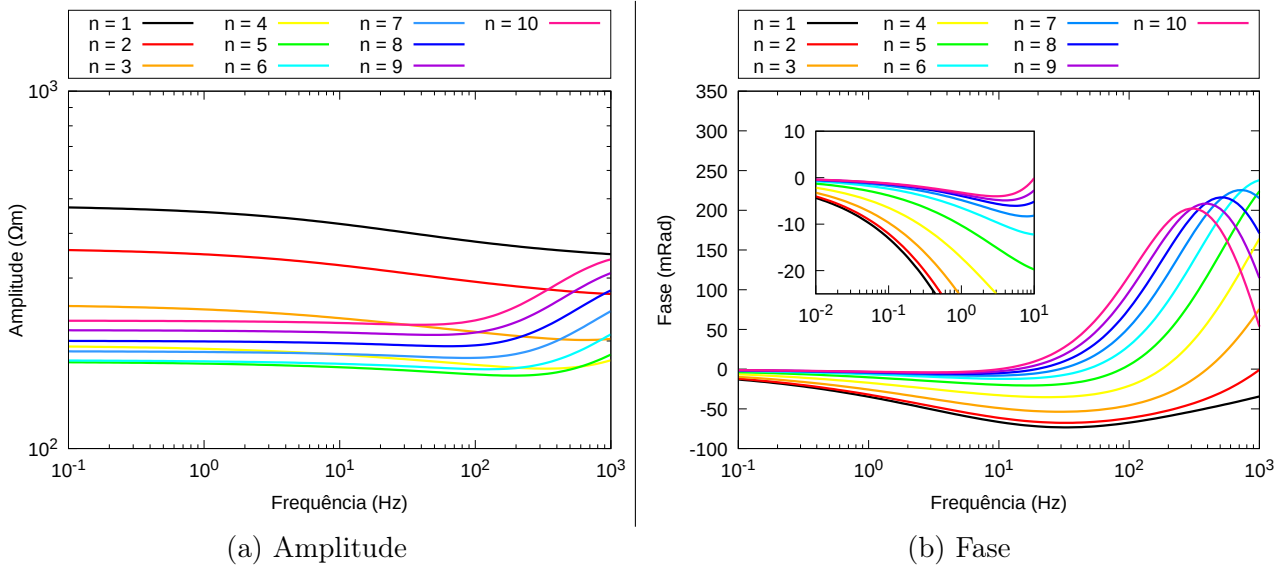


Figura 4.18: Resistividade aparente  $\rho_a$  advinda do efeito indutivo acrescido do efeito de polarização na 1ª camada em um modelo do tipo H para  $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras  $h_1 = 60$  m e  $h_2 = 40$  m, comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $\rho_{0,1} = \rho_3 = 500 \Omega m$  e  $\rho_2 = 50 \Omega m$ .

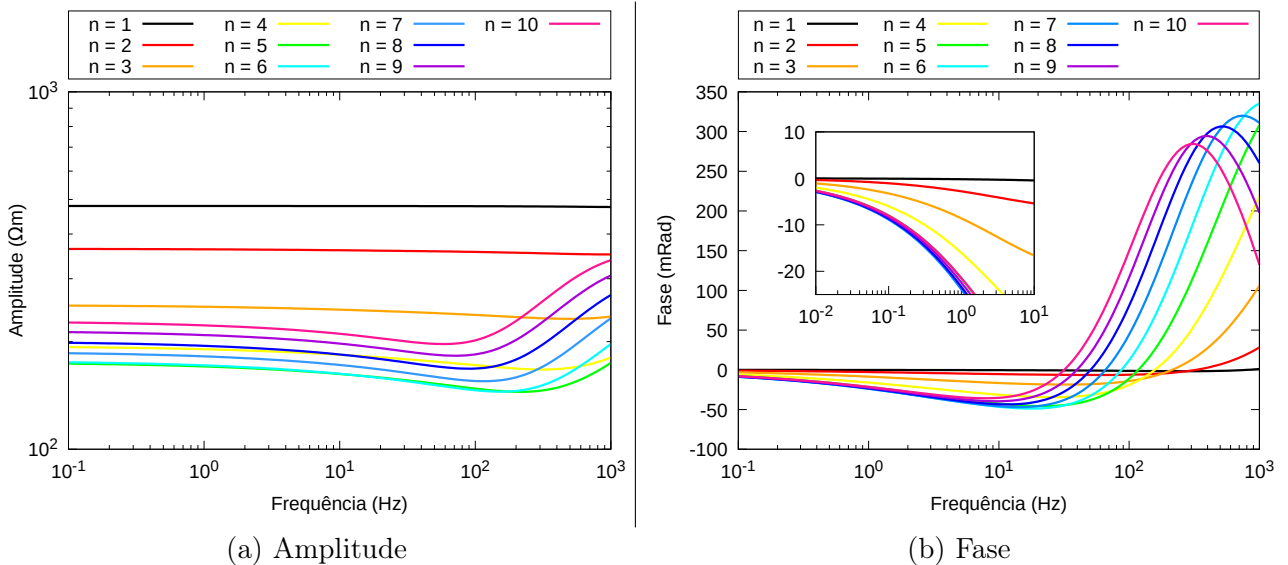


Figura 4.19: Resistividade aparente  $\rho_a$  advinda do efeito indutivo acrescido do efeito de polarização na 2ª camada em um modelo do tipo H para  $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras  $h_1 = 60$  m e  $h_2 = 40$  m, comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $\rho_1 = \rho_3 = 500 \Omega m$  e  $\rho_{0,2} = 50 \Omega m$ .

Quando apenas a 3ª camada é polarizável (Figura 4.20), são observados deslocamentos negativos bem mais sutis em amplitude e fase, os quais atuam apenas em  $n \geq 4$ . Para  $n \leq 3$  é praticamente ausente qualquer alteração decorrente do efeito de IP.

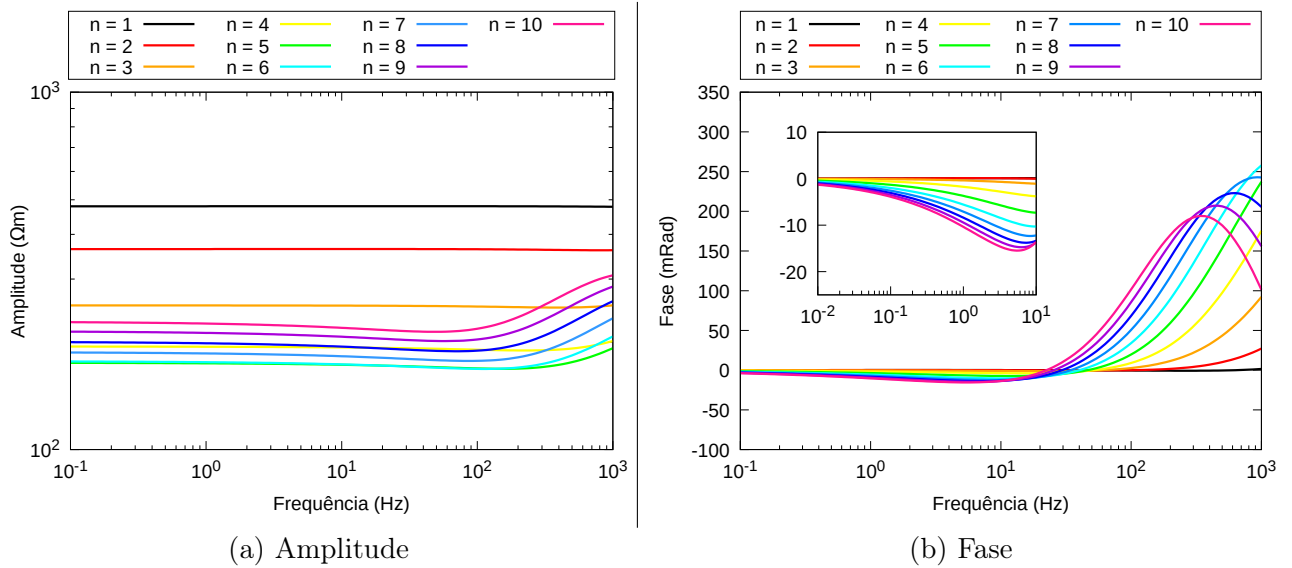


Figura 4.20: Resistividade aparente  $\rho_a$  advinda do efeito indutivo acrescido do efeito de polarização na 3ª camada em um modelo do tipo H para  $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras  $h_1 = 60$  m e  $h_2 = 40$  m, comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $\rho_1 = \rho_{0,3} = 500 \Omega\text{m}$  e  $\rho_2 = 50 \Omega\text{m}$ .

### 4.3.2 Modelos Tipo K

Modelos do tipo K representam o efeito devido a uma camada intermediária resistiva soto-posta e sobreposta por camadas condutivas. O modelo tipo K empregado nessa seção está representado na Figura 4.21.

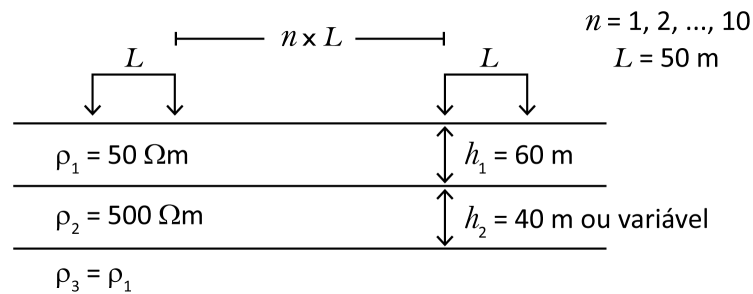


Figura 4.21: Modelo de resistividade tipo K empregado.

A Figura 4.22 mostra o comportamento da impedância mútua desse modelo com a variação da espessura  $h_2$  da 2ª camada, estando fixos os outros parâmetros. Novamente, para  $h_2 = 1$  m, a 2ª camada é pouco expressiva e o resultado tende ao de um modelo homogêneo

de resistividade  $\rho = \rho_1 = \rho_3$ . Conforme  $h_2$  aumenta, as curvas sofrem transformações devido ao efeito da 2ª camada resistiva.

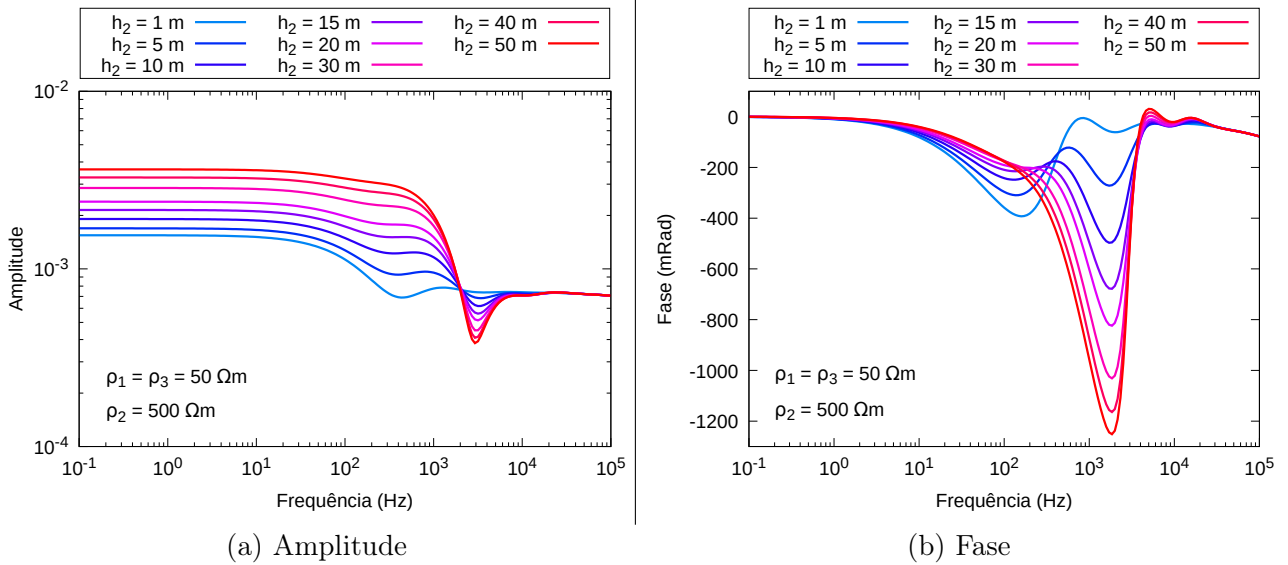


Figura 4.22: Impedância mútua normalizada para um modelo tipo K não-polarizável sob variação da espessura  $h_2$  da 2ª camada. São parâmetros fixos a espessura da 1ª camada  $h_1 = 60$  m, o comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $n = 10$ ,  $\rho_1 = \rho_3 = 50 \Omega\text{m}$  e  $\rho_2 = 500 \Omega\text{m}$ .

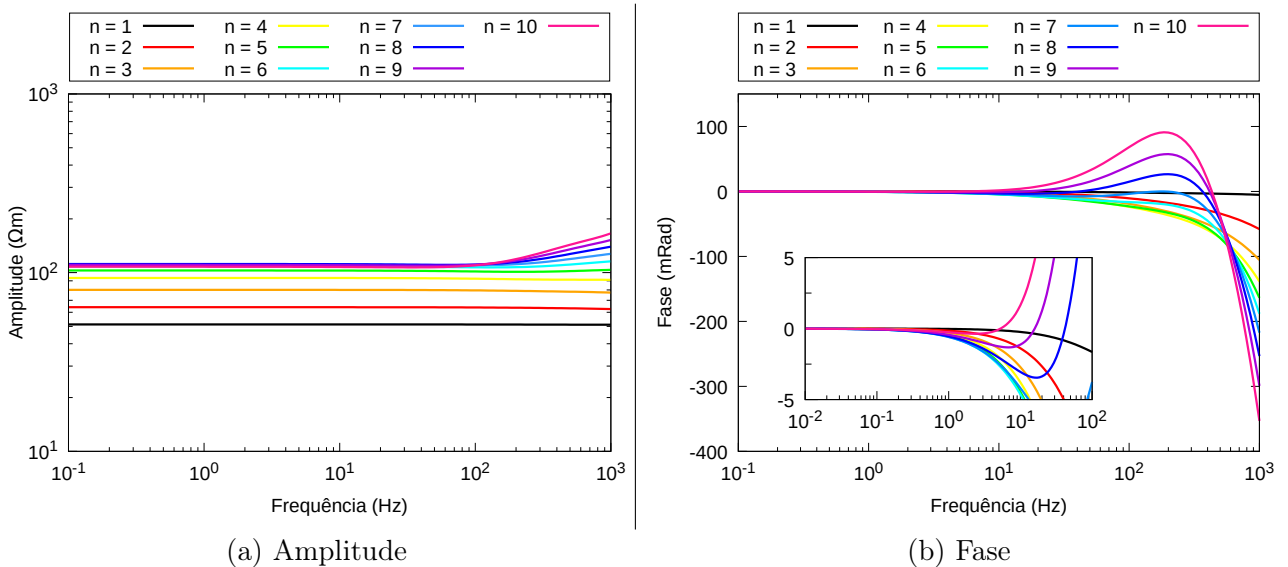


Figura 4.23: Resistividade aparente  $\rho_a$  advinda do efeito indutivo em um modelo de 3 camadas do tipo K não-polarizável para  $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras  $h_1 = 60$  m e  $h_2 = 40$  m, comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $\rho_1 = \rho_3 = 50 \Omega\text{m}$  e  $\rho_2 = 500 \Omega\text{m}$ .

A resistividade aparente espectral é mostrada na Figura 4.23. Em comparação ao modelo H (Figura 4.16a), a amplitude de  $\rho_a$  se revela mais limitada na expressão das variações de resistividade em profundidade, possivelmente devido à blindagem eletromagnética advinda da alta condutividade da 1ª camada. Ainda assim, é possível constatar a transição

da resistividade  $\rho_1$  para  $\rho_2$  com o aumento do espaçamento  $n$  (Figura 4.23a). Para  $n > 5$  e  $f > 200$  Hz, o efeito da heterogeneidade entre as camadas provoca variações positivas na amplitude.

A fase de  $\rho_a$  para o modelo K transparece um maior nível de complexidade e se manifesta aproximadamente para  $f > 5$  Hz. Os níveis de 1 a 7, os quais enquadrariam a transição da 1ª camada condutiva para a 2ª camada resistiva, exibem predominantemente deslocamentos negativos de fase. Para  $n > 7$ , o contraste entre  $\rho_2$  e  $\rho_3$  estaria proporcionando uma inversão de sinal da fase até um pico positivo, a partir do qual a fase volta a decair.

### Presença do efeito de polarização

A Figura 4.24 ilustra as variações sobre a impedância mútua para o modelo do tipo K quando é adicionado o efeito de polarização em cada uma das camadas. Assim como ocorreu no modelo H, enquanto o nível  $n = 2$  permite distinguir o efeito de polarização apenas na 1ª camada, o nível  $n = 10$  exhibe alterações principalmente na medida de fase quando a polarização está presente em cada uma das 3 camadas.

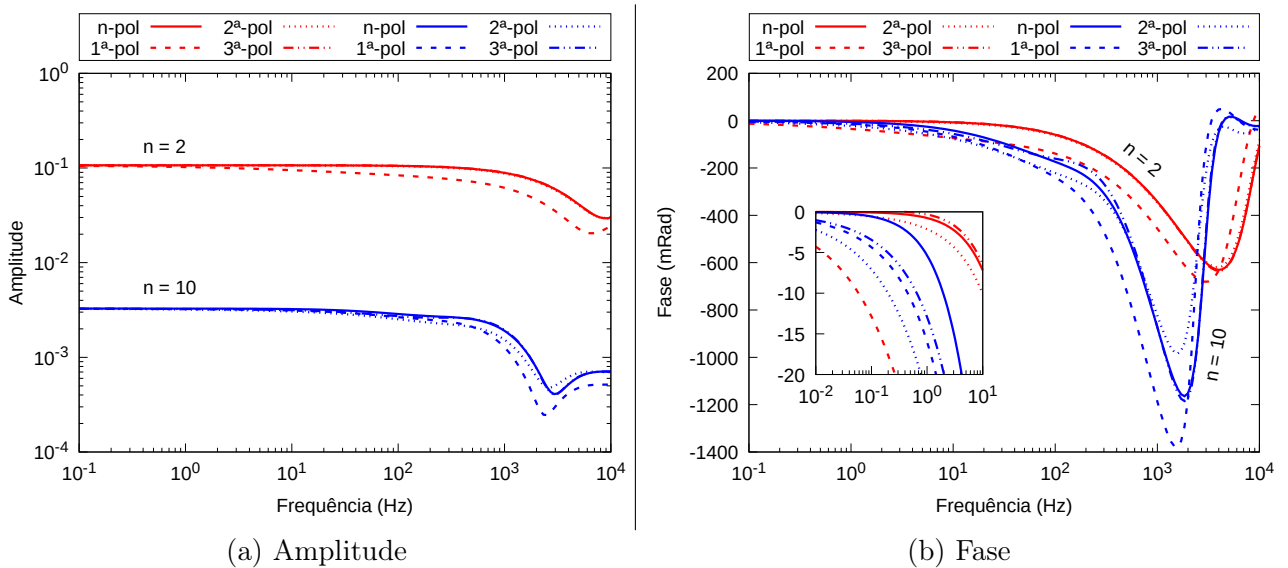


Figura 4.24: Variação em  $Z/Z_0$  devido ao efeito de IP em cada uma das 3 camadas de um modelo tipo K para  $n = 2$  e  $n = 10$ . São parâmetros fixos as espessuras  $h_1 = 60$  m e  $h_2 = 40$  m, o comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $\rho_{0,1} = \rho_{0,3} = 50 \Omega\text{m}$  e  $\rho_{0,2} = 500 \Omega\text{m}$ .

Nas Figuras 4.25 a 4.27, essa mesma análise do efeito de polarização é realizada sobre o dado de  $\rho_a$  do modelo não-polarizável da Figura 4.23.

Nesse contexto, o mais expressivo efeito de IP é observado quando apenas a 1ª camada é polarizável (Figura 4.25) e segue o padrão do decaimento espectral em amplitude e fase para todos os afastamentos  $n$ , embora seja mais acentuado para os níveis iniciais. Ainda que mais

sutil, o efeito de polarização na 2ª camada (Figura 4.26) é perceptível para  $n > 2$ , sendo que o deslocamento da fase não ultrapassa 30 mRad antes de ser mascarado pelo efeito da heterogeneidade a partir de 5 Hz.

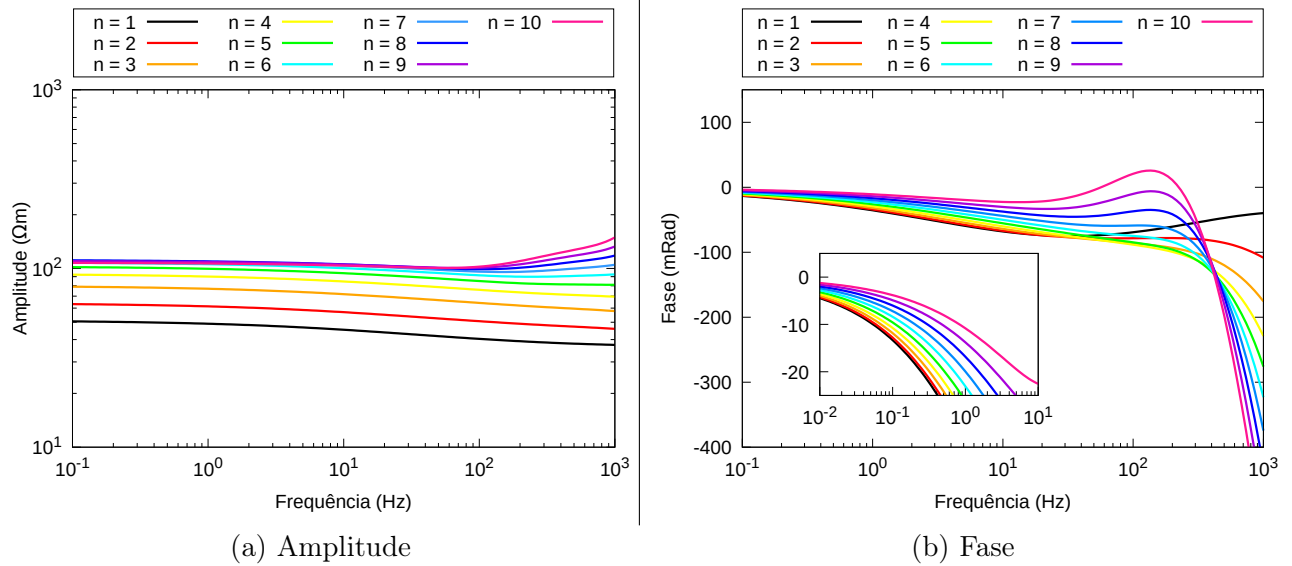


Figura 4.25: Resistividade aparente  $\rho_a$  advinda do efeito indutivo acrescido do efeito de polarização na 1ª camada em um modelo do tipo K para  $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras  $h_1 = 60$  m e  $h_2 = 40$  m, comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $\rho_{0,1} = \rho_3 = 50 \Omega m$  e  $\rho_2 = 500 \Omega m$ .

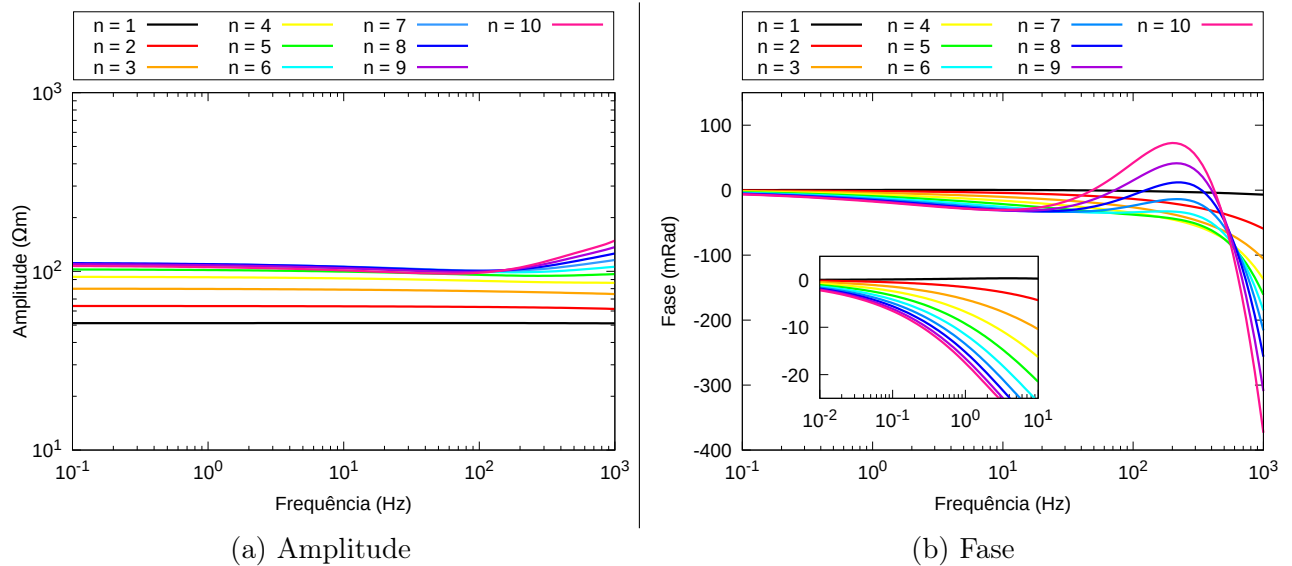


Figura 4.26: Resistividade aparente  $\rho_a$  advinda do efeito indutivo acrescido do efeito de polarização na 2ª camada em um modelo do tipo K para  $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras  $h_1 = 60$  m e  $h_2 = 40$  m, comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $\rho_1 = \rho_3 = 50 \Omega m$  e  $\rho_{0,2} = 500 \Omega m$ .

Alterações devido à polarização na 3ª camada (Figura 4.27) são quase imperceptíveis,

podendo ser facilmente confundidas com o efeito do puro contraste de resistividades, de forma que o deslocamento de fase atribuído ao IP atinge um valor máximo de 13 mRad para  $n = 10$  em  $f \approx 6$  Hz.

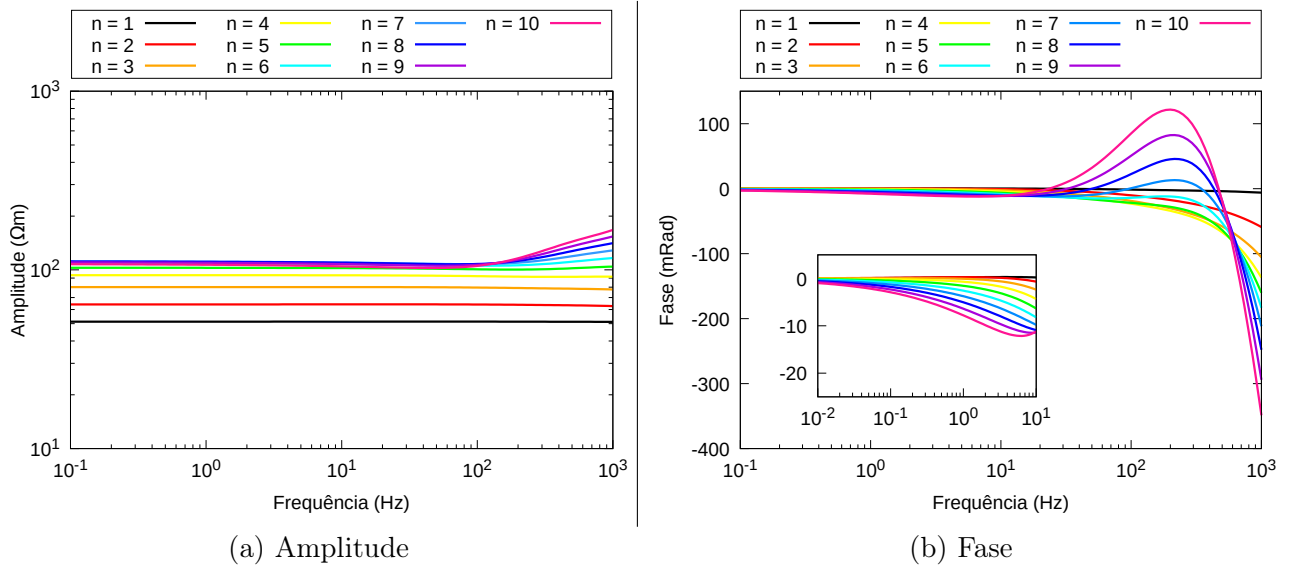


Figura 4.27: Resistividade aparente  $\rho_a$  advinda do efeito indutivo acrescido do efeito de polarização na 3ª camada em um modelo do tipo K para  $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras  $h_1 = 60$  m e  $h_2 = 40$  m, comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $\rho_1 = \rho_{0,3} = 50 \Omega\text{m}$  e  $\rho_2 = 500 \Omega\text{m}$ .

### 4.3.3 Modelos Tipo A

A Figura 4.28 ilustra os parâmetros do modelo tipo A empregado nessa seção, o qual apresenta valores de resistividade crescentes com a profundidade da camada.

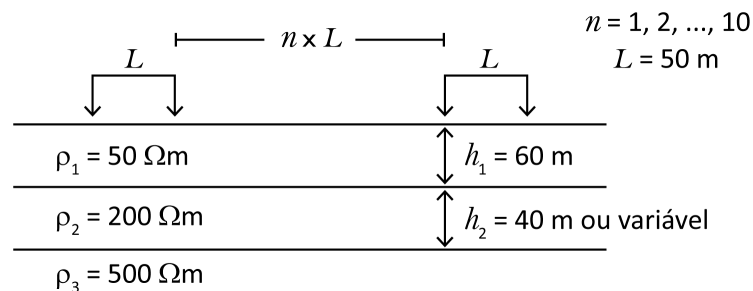


Figura 4.28: Modelo de resistividade tipo A empregado.

A resposta em termos da impedância mútua sob variação da espessura  $h_2$  da 2ª camada é mostrada na Figura 4.29. Em comparação às repostas dos modelos tipo H (Figura 4.15) e tipo K (Figura 4.22), a variação da espessura  $h_2$  provoca poucas alterações nos resultados,



sendo as curvas de amplitude e fase pouco espaçadas entre si. Nesse caso, o comportamento da impedância mútua muito se assemelha a um modelo de 2 camadas no qual  $\rho_1 < \rho_2$ .

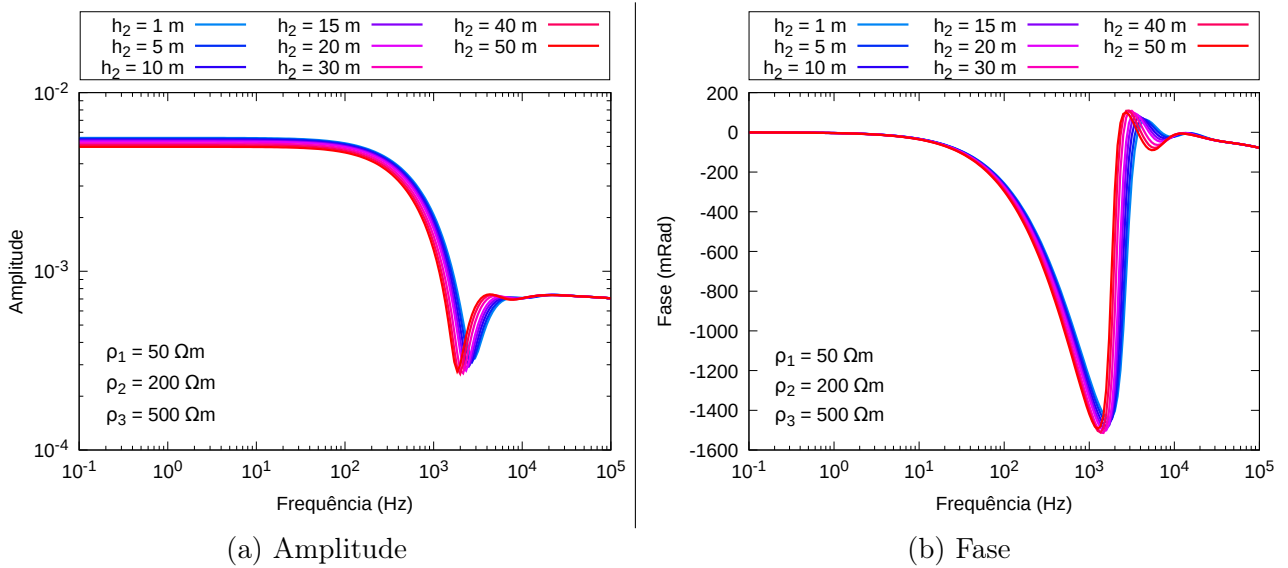


Figura 4.29: Impedância mútua normalizada para um modelo tipo A não-polarizável sob variação da espessura  $h_2$  da 2ª camada. São parâmetros fixos a espessura da 1ª camada  $h_1 = 60$  m, o comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $n = 10$ ,  $\rho_1 = 50 \Omega\text{m}$ ,  $\rho_2 = 200 \Omega\text{m}$  e  $\rho_3 = 500 \Omega\text{m}$ .

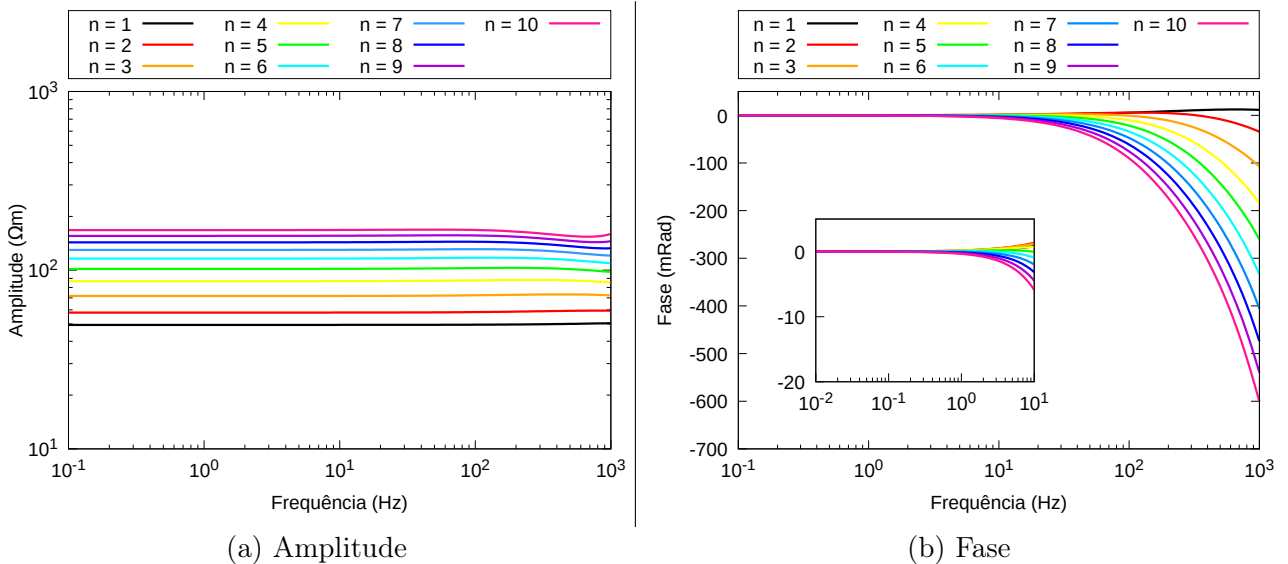


Figura 4.30: Resistividade aparente  $\rho_a$  advinda do efeito indutivo em um modelo de 3 camadas do tipo A não-polarizável para  $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras  $h_1 = 60$  m e  $h_2 = 40$  m, comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $\rho_1 = 50 \Omega\text{m}$ ,  $\rho_2 = 200 \Omega\text{m}$  e  $\rho_3 = 500 \Omega\text{m}$ .

A Figura 4.30 apresenta a resistividade aparente para esse modelo tipo A não-polarizável. Como esperado, a amplitude de  $\rho_a$  expõe implicitamente as transições entre as resistivida-

des  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  e  $\rho_3$  em profundidade e varia espectralmente apenas para  $n > 5$  sob maiores frequências. Por sua vez, a fase característica do modelo tipo A apresenta deslocamentos predominantemente negativos e somente a partir da frequência de 1 Hz.

### Presença do efeito de polarização

O efeito de polarização sobre as camadas do modelo tipo A da Figura 4.29 é ilustrado na Figura 4.31 em função da impedância mútua, estando fixos  $h_2 = 40$  m,  $n = 2$  e  $n = 10$ . Para ambos os níveis de afastamento  $n$ , a mais nítida diferenciação entre as curvas ocorre para o caso da 1ª camada polarizável. Entretanto, observando a fase para  $f \leq 10$  Hz, pontua-se que a resposta de  $n = 10$  ainda é capaz de discernir com considerável dificuldade a polarização sobre as camadas 2 e 3, e  $n = 2$  diferencia a polarização sobre a 2ª camada.

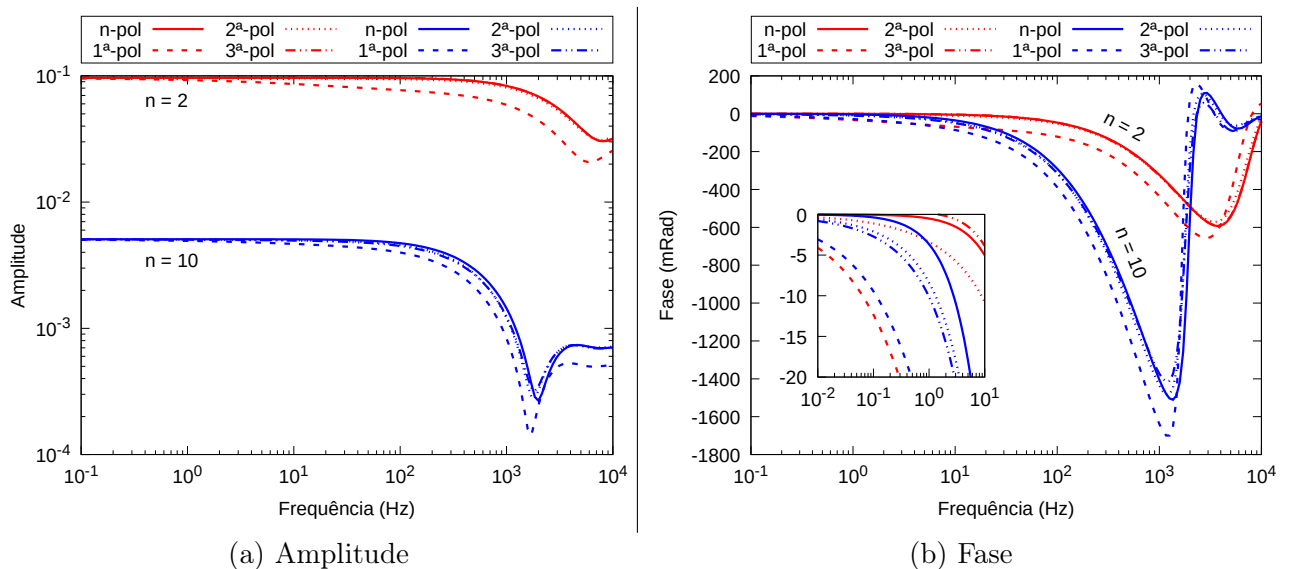


Figura 4.31: Variação em  $Z/Z_0$  devido ao efeito de IP em cada uma das 3 camadas de um modelo tipo A para  $n = 2$  e  $n = 10$ . São parâmetros fixos as espessuras  $h_1 = 60$  m e  $h_2 = 40$  m, o comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $\rho_{0,1} = 50 \Omega\text{m}$ ,  $\rho_{0,2} = 200 \Omega\text{m}$  e  $\rho_{0,3} = 500 \Omega\text{m}$ .

O deslocamento em amplitude e fase de  $\rho_a$  causado pela adição do efeito de polarização em cada uma das camadas é mostrado nas Figuras 4.32 a 4.34, com destaque para  $f \leq 10$  Hz.

Antes de ser camuflado pelo efeito indutivo, a polarização sobre a 1ª camada provoca um decaimento em cadeia para todos os espaçamentos  $n$ , com um deslocamento de fase de até 40 mRad (Figura 4.32). Em menor intensidade, o mesmo ocorre para a 2ª camada polarizável, à exceção de  $n = 1$  que permanece inalterável (Figura 4.33). Finalmente, a polarização sobre a 3ª camada é discriminável para  $n > 4$ , ainda que sob sutis deslocamentos em amplitude e fase (Figura 4.34).

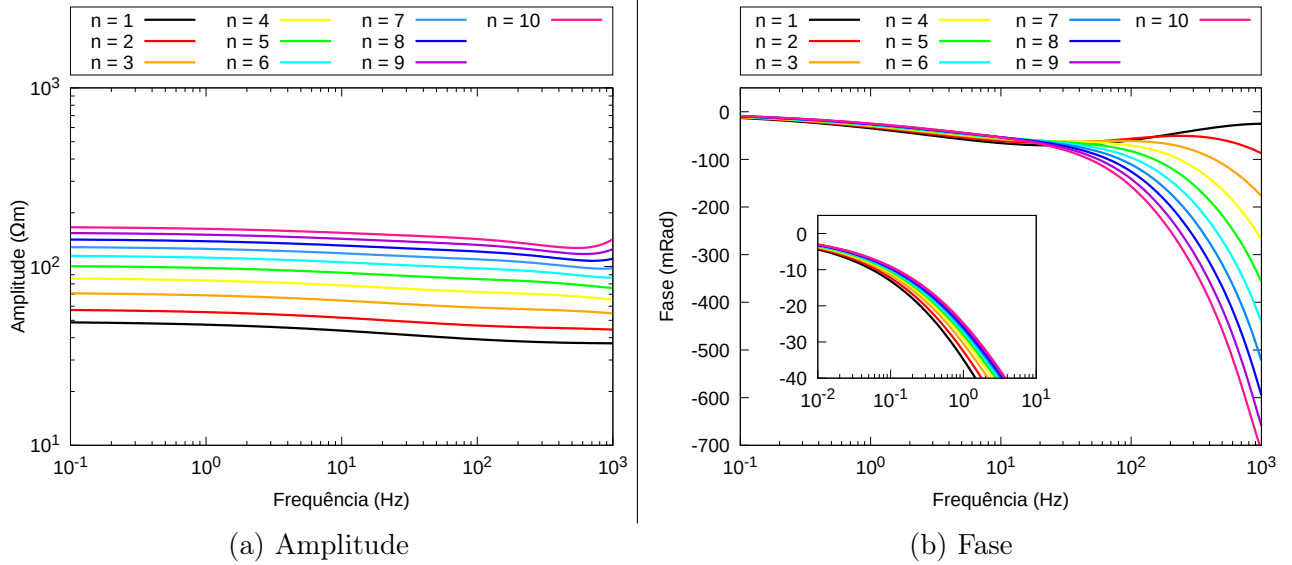


Figura 4.32: Resistividade aparente  $\rho_a$  advinda do efeito indutivo acrescido do efeito de polarização na 1ª camada em um modelo do tipo A para  $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras  $h_1 = 60$  m e  $h_2 = 40$  m, comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $\rho_{0,1} = 50 \Omega\text{m}$ ,  $\rho_2 = 200 \Omega\text{m}$  e  $\rho_3 = 500 \Omega\text{m}$ .

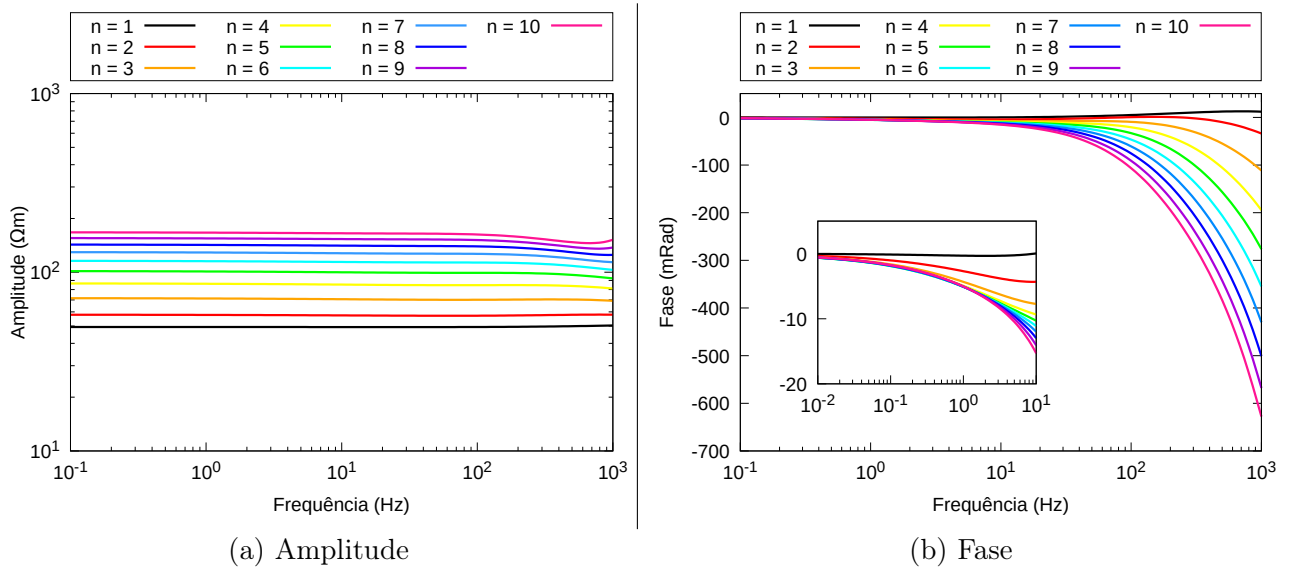


Figura 4.33: Resistividade aparente  $\rho_a$  advinda do efeito indutivo acrescido do efeito de polarização na 2ª camada em um modelo do tipo A para  $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras  $h_1 = 60$  m e  $h_2 = 40$  m, comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $\rho_1 = 50 \Omega\text{m}$ ,  $\rho_{0,2} = 200 \Omega\text{m}$  e  $\rho_3 = 500 \Omega\text{m}$ .

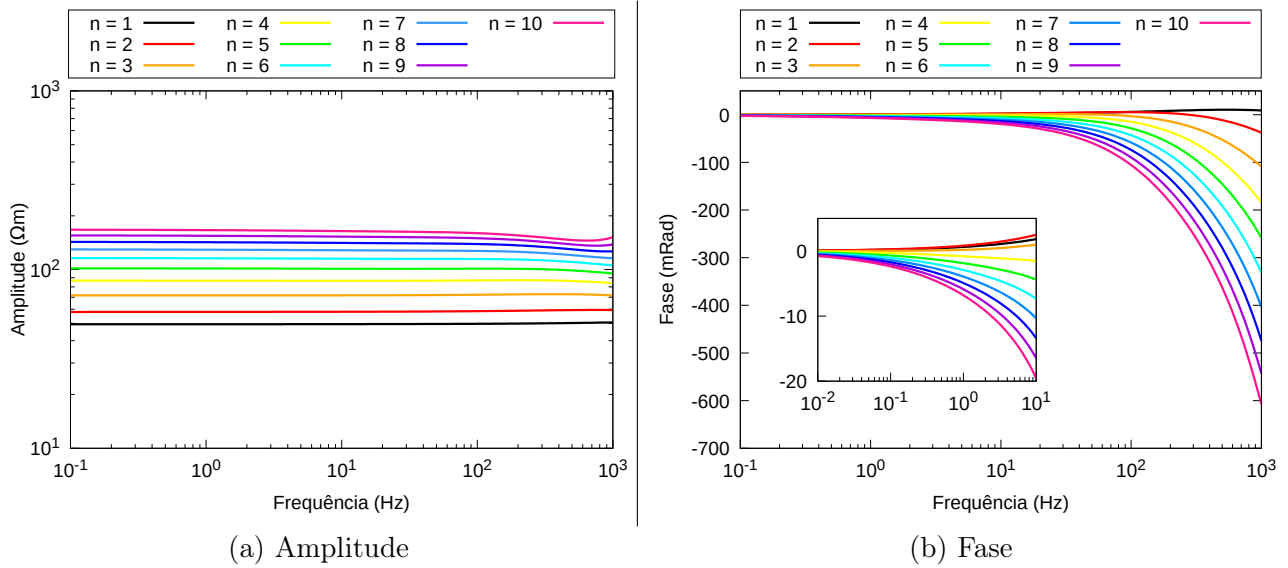


Figura 4.34: Resistividade aparente  $\rho_a$  advinda do efeito indutivo acrescido do efeito de polarização na 3ª camada em um modelo do tipo A para  $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras  $h_1 = 60$  m e  $h_2 = 40$  m, comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $\rho_1 = 50 \Omega\text{m}$ ,  $\rho_2 = 200 \Omega\text{m}$  e  $\rho_{0,3} = 500 \Omega\text{m}$ .

### 4.3.4 Modelos Tipo Q

No modelo tipo Q, as resistividades decrescem com a profundidade da camada. Os parâmetros empregados para esse modelo estão esquematizados na Figura 4.35.

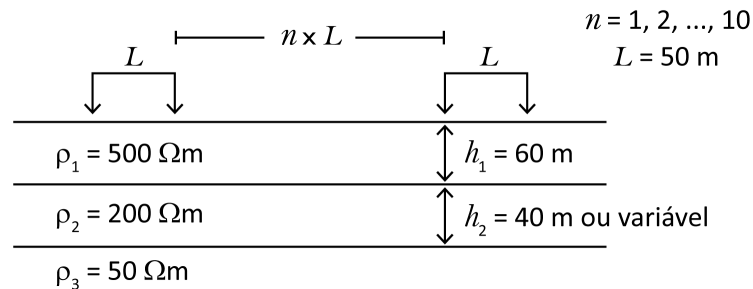


Figura 4.35: Modelo de resistividade tipo Q empregado.

A Figura 4.36 o exemplifica por meio de dados de impedância mútua variando com a espessura  $h_2$  da 2ª camada, estando fixos os outros parâmetros. Assim como no modelo tipo A, a impedância mútua é pouco sensível à variação da espessura  $h_2$ , resultando em curvas de amplitude e fase pouco espaçadas entre si. Desta maneira, o comportamento da impedância mútua muito se assemelha a um modelo de 2 camadas no qual  $\rho_1 > \rho_2$ .

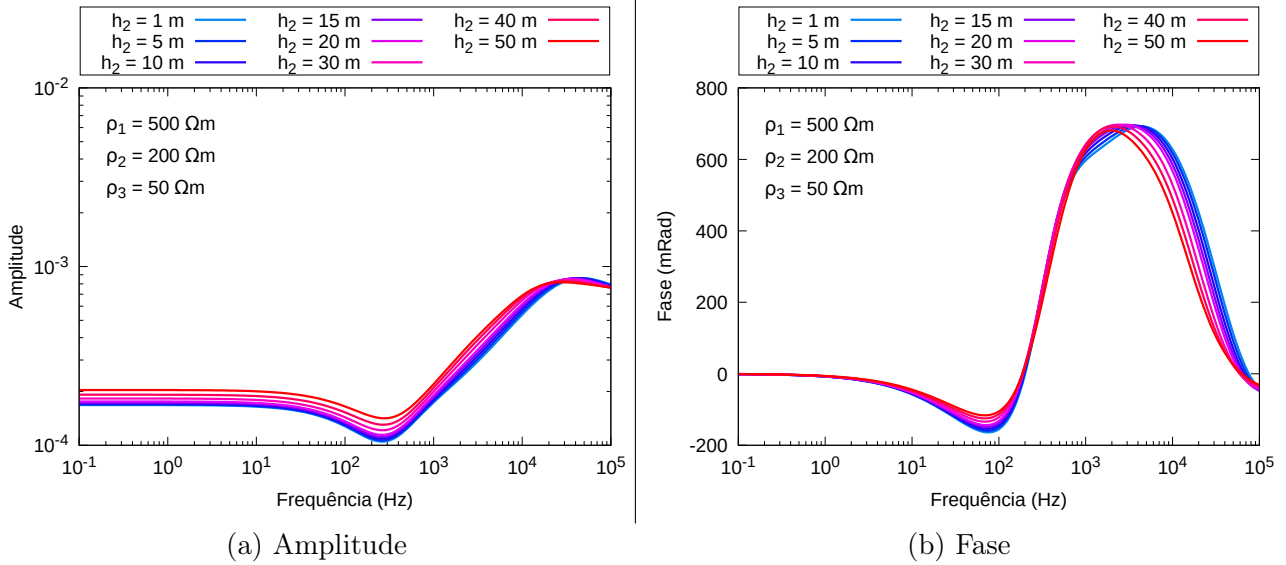


Figura 4.36: Impedância mútua normalizada para um modelo tipo Q não-polarizável sob variação da espessura  $h_2$  da 2ª camada. São parâmetros fixos a espessura da 1ª camada  $h_1 = 60$  m, o comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $n = 10$ ,  $\rho_1 = 500 \Omega\text{m}$ ,  $\rho_2 = 200 \Omega\text{m}$  e  $\rho_3 = 50 \Omega\text{m}$ .

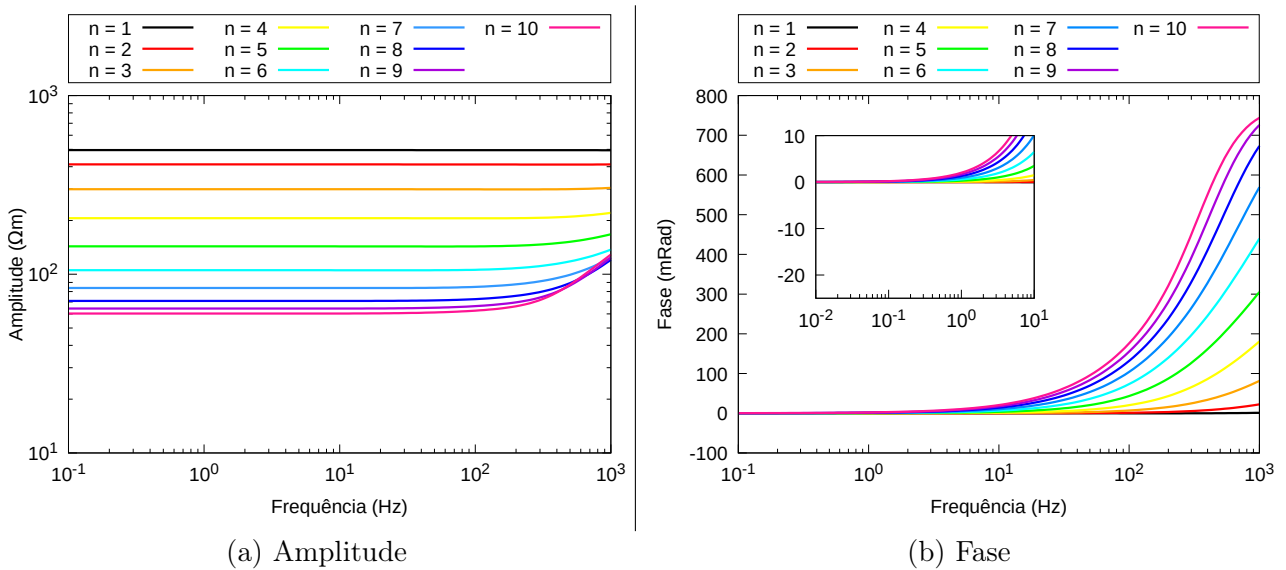


Figura 4.37: Resistividade aparente  $\rho_a$  advinda do efeito indutivo em um modelo de 3 camadas do tipo Q não-polarizável para  $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras  $h_1 = 60$  m e  $h_2 = 40$  m, comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $\rho_1 = 500 \Omega\text{m}$ ,  $\rho_2 = 200 \Omega\text{m}$  e  $\rho_3 = 50 \Omega\text{m}$ .

Analisando  $\rho_a$  não-polarizável na Figura 4.37, nota-se que, seguindo o padrão visto nos outros modelos, a amplitude em menores frequências manifesta a variação da resistividade com a profundidade, a qual, nesse caso, expressa um decrescimento com o afastamento  $n$ . Quanto à fase, o efeito de heterogeneidade devido a camadas cada vez mais condutivas em

profundidade é caracterizado por um deslocamento positivo de fase a partir de aproximadamente 1 Hz.

### Presença do efeito de polarização

Atribuindo o efeito de polarização em cada uma das camadas do modelo tipo Q abordado, obtivemos as curvas de impedância mútua da Figura 4.38. A baixa profundidade de investigação para  $n = 2$  limita a diferenciação do efeito de IP para até a 2ª camada nesse nível de afastamento. Por sua vez, a resposta para  $n = 10$  resalta o efeito de polarização principalmente da 3ª camada.

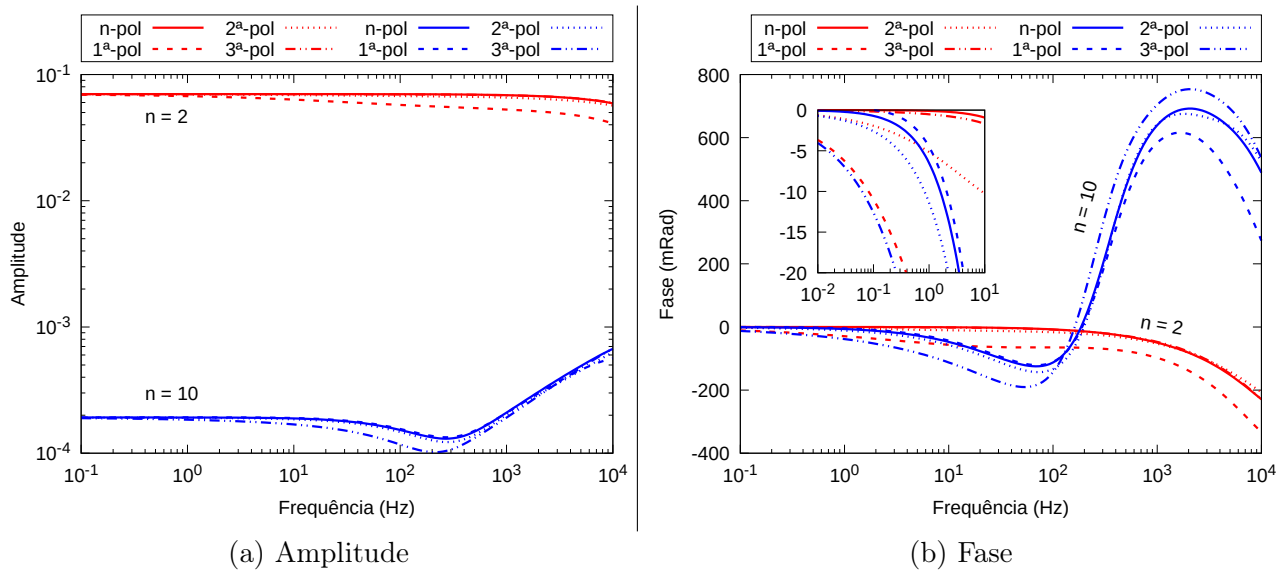


Figura 4.38: Variação em  $Z/Z_0$  devido ao efeito de IP em cada uma das 3 camadas de um modelo tipo Q para  $n = 2$  e  $n = 10$ . São parâmetros fixos as espessuras  $h_1 = 60$  m e  $h_2 = 40$  m, o comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $\rho_{0,1} = 500 \Omega\text{m}$ ,  $\rho_{0,2} = 200 \Omega\text{m}$  e  $\rho_{0,3} = 50 \Omega\text{m}$ .

As Figuras 4.39 a 4.41 ilustram o efeito de IP sobre a resistividade aparente do modelo tipo Q analisado (Figura 4.37).

Na Figura 4.39, quanto menor é o afastamento  $n$ , maior é o deslocamento em amplitude e fase provocado pela polarização sobre a 1ª camada, sendo que para  $n \geq 7$  praticamente não há alterações em relação ao caso puramente indutivo. Como esperado, quando o efeito de polarização é atribuído à 2ª camada, as maiores variações em comparação ao  $\rho_a$  não-polarizável se situam nos afastamentos intermediários, os quais estão associados à essa camada (Figura 4.40). Por fim, caso apenas a 3ª camada seja polarizável, as variações em amplitude e fase são mais significativas para maiores afastamentos  $n$ , quando se estará atingindo maiores profundidades de investigação.

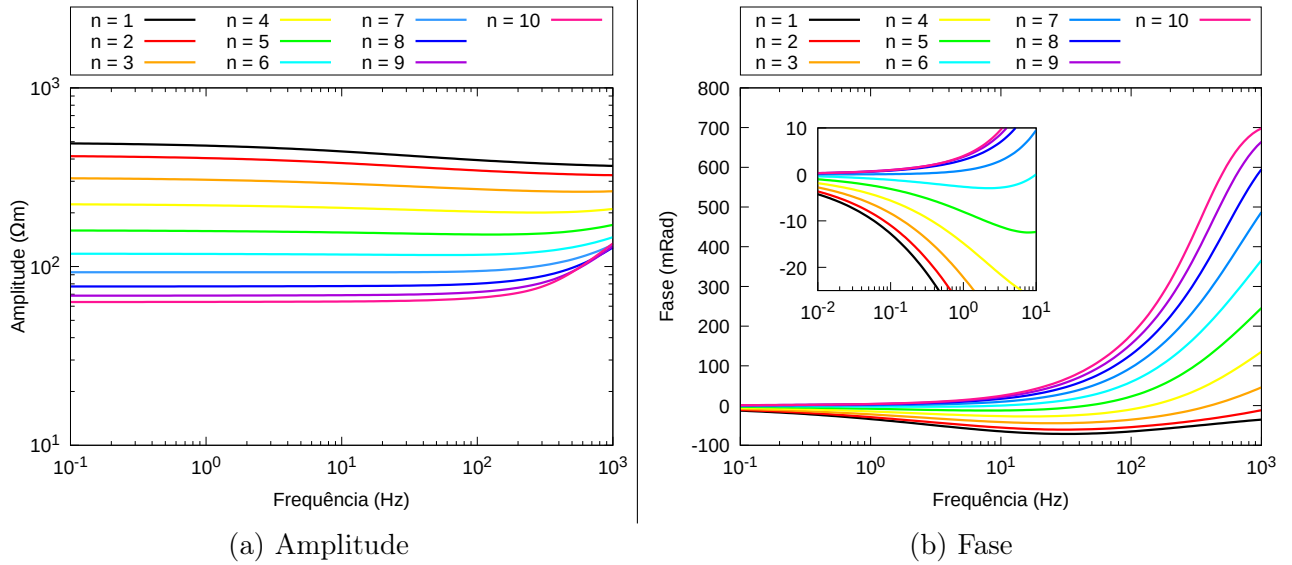


Figura 4.39: Resistividade aparente  $\rho_a$  advinda do efeito indutivo acrescido do efeito de polarização na 1ª camada em um modelo do tipo Q para  $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras  $h_1 = 60$  m e  $h_2 = 40$  m, comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $\rho_{0,1} = 500$   $\Omega\text{m}$ ,  $\rho_2 = 200$   $\Omega\text{m}$  e  $\rho_3 = 50$   $\Omega\text{m}$ .

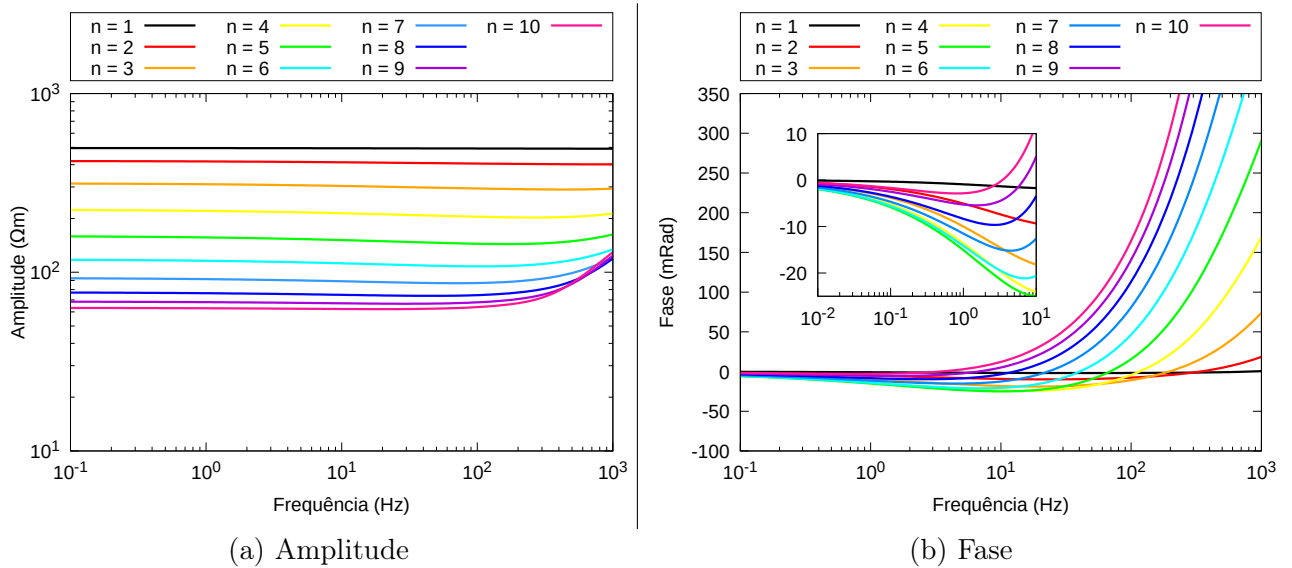


Figura 4.40: Resistividade aparente  $\rho_a$  advinda do efeito indutivo acrescido do efeito de polarização na 2ª camada em um modelo do tipo Q para  $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras  $h_1 = 60$  m e  $h_2 = 40$  m, comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $\rho_1 = 500$   $\Omega\text{m}$ ,  $\rho_{0,2} = 200$   $\Omega\text{m}$  e  $\rho_3 = 50$   $\Omega\text{m}$ .

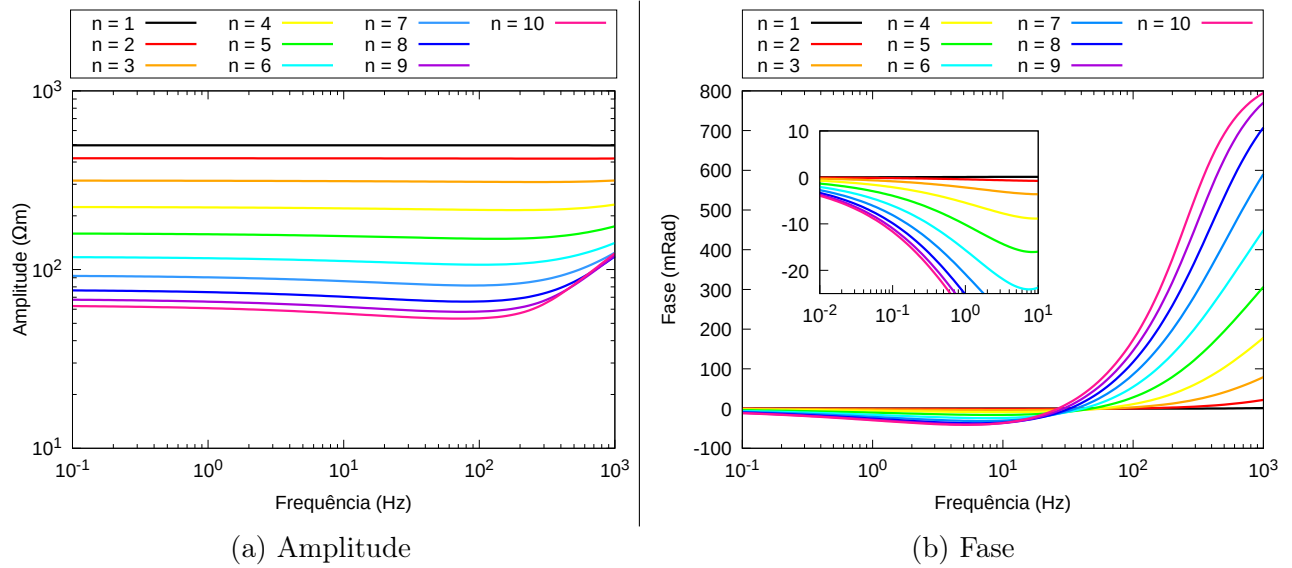


Figura 4.41: Resistividade aparente  $\rho_a$  advinda do efeito indutivo acrescido do efeito de polarização na 3<sup>a</sup> camada em um modelo do tipo Q para  $n = 1, 2, \dots, 10$ . São parâmetros fixos as espessuras  $h_1 = 60$  m e  $h_2 = 40$  m, comprimento dos dipolos  $L = 50$  m,  $\rho_1 = 500 \Omega\text{m}$ ,  $\rho_2 = 200 \Omega\text{m}$  e  $\rho_{0,3} = 50 \Omega\text{m}$ .



# 5

## Análise de dados reais

Trataremos agora da aplicação dos métodos apresentados sobre dados reais. Após uma breve descrição em torno dos aspectos gerais das áreas de estudo, serão apresentados e interpretados os resultados de resistividade complexa aparente e parâmetros da função expandida de Barreto e Dias (2014) advindos da inversão dos dados reais.

Serão invertidos e analisados dados de SIP de 3 diferentes áreas do Distrito Cuprífero do Vale do Curaçá: Vermelhos, Baixa Funda e Sussuarana. Esses dados foram trabalhados anteriormente por Sampaio et al. (1998) do ponto de vista do efeito de IP, sem considerar o acoplamento eletromagnético associado, tal qual iremos abordar.

Os dados foram obtidos no domínio da frequência sob um arranjo dipolo-dipolo, com espaçamento de 50 m entre os dipolos e 7 níveis de separação entre dipolos receptor e transmissor. A diferença de potencial  $\Delta V$  (mV) e a fase  $\phi$  (mRad) foram medidas para 12 valores de frequência entre 0.25 Hz e 512 Hz, com um espaçamento binário ( $2^k$  Hz,  $k = -2, -1, \dots, 9$ ). Mais informações podem ser obtidas em Sampaio et al. (1998).

### 5.1 Área de estudo

O distrito cuprífero do Vale do Curaçá está situado na região nordeste do estado da Bahia, abrangendo uma área de cerca de 1700 km<sup>2</sup> dos municípios de Jaguarari, Curacá e Juazeiro. Encontra-se inserido no Orógeno Itabuna-Salvador-Curaçá, uma entidade tectônica paleoproterozoica componente do embasamento do Cráton do São Francisco (Figura 5.1) (Garcia, 2013).

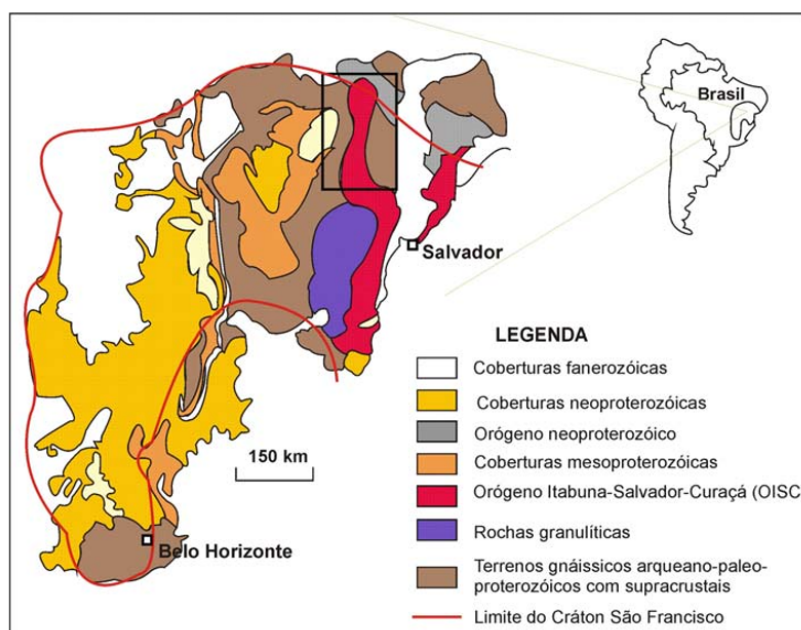


Figura 5.1: Mapa geológico esquemático do Crátão do São Francisco, com destaque para a área de estudo no Orógeno Itabuna-Salvador-Curaçá (Teixeira et al., 2010).

Segundo Teixeira et al. (2010), essa província cuprífera é constituída por centenas de corpos máficos-ultramáficos de dimensões variadas que, por vezes, contêm mineralizações econômicas sulfetadas de cobre, principalmente sob a forma de calcopirita + bornita, numa razão 70% para 30%. Ocorrem ainda outros sulfetos associados ao minério, como covelita, cubanita, digenita, pirita, pirrotita e pentlandita. Os sulfetos estão invariavelmente acompanhados de magnetita. Tais corpos ultramáficos são compostos de cumulatos ultramáficos (abundante piroxenito e raro peridotito) e cumulatos máficos (melanorito, norito, gabro-norito), além de leuconorito e raro anortosito.

Nossa região de estudo se concentra em três áreas do Vale do Curaçá: **Vermelhos** (linha 800 S), **Baixa Funda** (linha 600 S) e **Sussuarana** (linha 2600 N) com as respectivas mineralizações: pirita associada com pirrotita, pirita e grafita. São locais que apresentam anomalias geofísicas, porém nem sempre representam um sucesso geofísico-geológico - anomalia relacionada à calcopirita (Santos, 1997). De acordo com Teixeira et al. (2010), o depósito de Vermelhos possui alto potencial econômico.

## 5.2 Espectro da resistividade complexa aparente

A seguir serão apresentados e discutidos os espectros de amplitude e fase de  $\rho_a$  para uma estação das linhas de cada área. Cada estação foi escolhida de modo a representar uma região onde a resposta do efeito de polarizabilidade pode indicar a presença de minerais metálicos disseminados em rochas ultramáficas.

## Vermelhos

A Figura 5.2 ilustra o comportamento espectral de  $\rho_a$  para a estação 1250 W, linha 800 S, Vermelhos.

Quanto maior a separação entre os dipolos transmissor e receptor, maior é a profundidade de investigação alcançada. Assim, o espectro de amplitude dessa estação (Figuras 5.2a e 5.2b) permite inferir que, de forma geral, a resistividade aumenta com a profundidade, havendo uma variação brusca de mais de 20 vezes entre  $n = 3$  e  $n = 4$ .

Para  $f \leq 32$  Hz, o espectro de amplitude se mantém praticamente constante. Nas mais altas frequências dos níveis  $n = 1$  e  $n = 2$  há um sutil aumento da amplitude que se deve, provavelmente, ao acoplamento eletromagnético negativo, melhor visualizado na fase.

Entre 64 Hz e 256 Hz, são notados picos positivos de amplitude de  $n = 2$  a  $n = 6$ , que podem estar relacionados a uma descontinuidade geológica de resistividade mais elevada (cerca de  $10^4 \Omega\text{m}$ ) e de extensão vertical limitada, já que não é registrada em  $n = 1$  e  $n = 7$ . O pico em  $n = 2$  se manifesta na frequência de 64 Hz, indicando que sua profundidade de investigação apenas é suficiente para registrar resquícios dessa descontinuidade geológica. Em todas as outras estações da linha 800 S de Vermelhos, assim como em Baixa Funda e Sussuarana, tais picos de heterogeneidades estão presentes, embora com aspectos distintos.

Analisando os espectros de fase (Figuras 5.2c e 5.2d), o efeito de polarização de 0.25 Hz até 8 Hz expressa um sutil deslocamento negativo de fase, mais ressaltado nos maiores níveis de separação, chegando a 8 mRad em 0.25 Hz. Os espaçamentos  $n = 1$  e  $n = 2$  apresentam um comportamento diferencial na fase com relação ao demais espaçamentos, pois exibem um deslocamento positivo com pico entre 128 Hz e 256 Hz. Para os demais espaçamentos, esse deslocamento da fase devido à combinação dos efeitos de IP e AEM é negativo, com um pico em  $f \geq 512$  Hz.

À exceção dos níveis  $n = 1$  e  $n = 2$ , os espectros de fase e amplitude apresentaram similaridades com as respostas de um modelo de 3 camadas do tipo A, ou seja, um modelo de resistividades crescentes com a profundidade (subseção 4.3.3). O mesmo acontece para os comportamentos espectrais de Baixa Funda e Sussuarana.

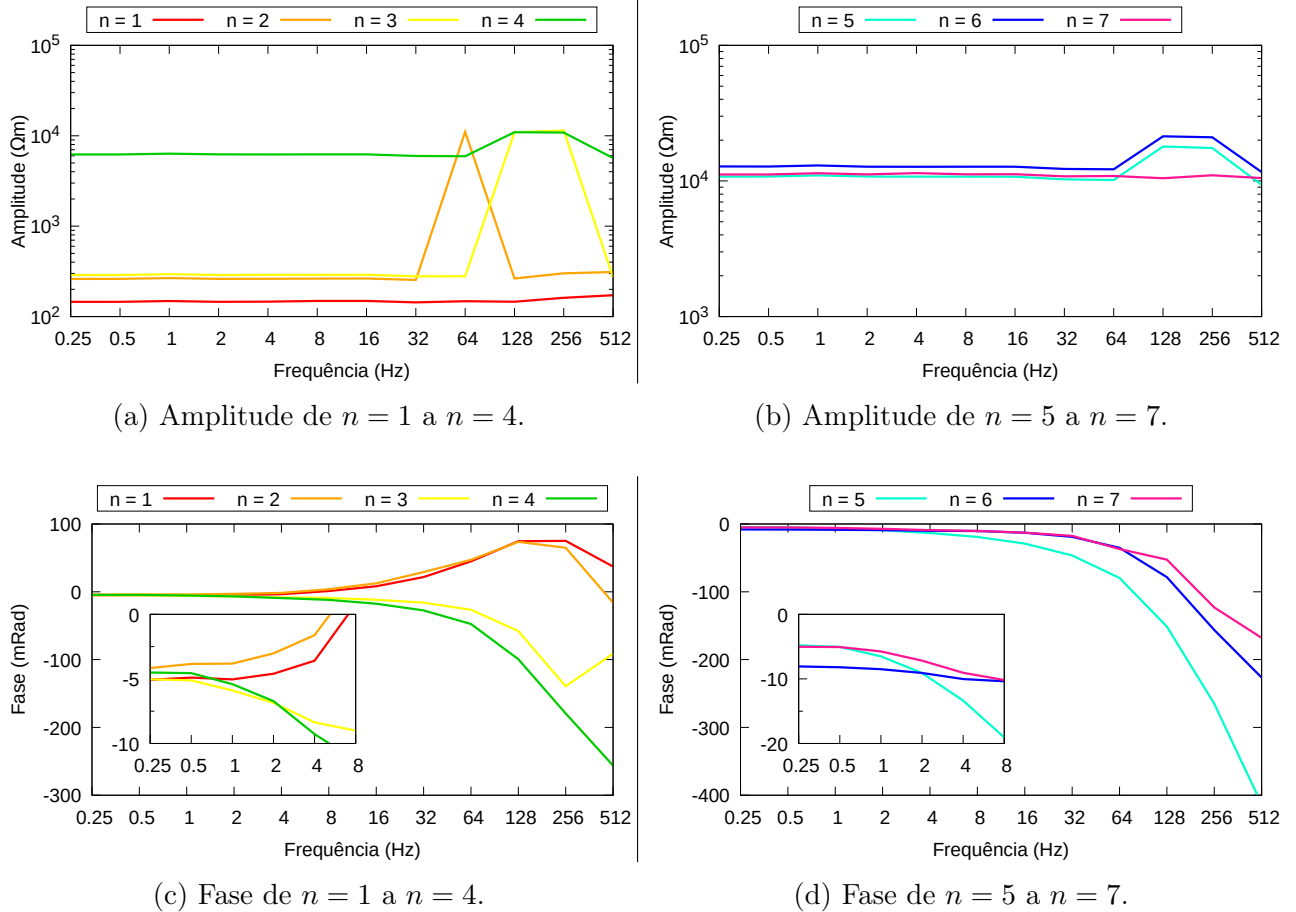


Figura 5.2: Espectro de amplitude e fase de  $\rho_a$  para a estação 1250 W, linha 800 S, Vermelhos.

## Baixa Funda

A Figura 5.3 ilustra o comportamento espectral de  $\rho_a$  para a estação 550 W, linha 600 S, Baixa Funda.

Na estação de Baixa Funda, o espectro de amplitude também exibe uma resistividade crescente com o espaçamento  $e$ , portanto, com a profundidade (Figuras 5.3a e 5.3b). De forma similar à estação de Vermelhos, os picos em amplitude indicam possíveis heterogeneidades geológicas nos níveis  $n = 3$  a  $n = 7$ . No mais, a amplitude em função da frequência é aproximadamente constante, havendo apenas sutis elevações decorrentes principalmente do AEM para  $n = 1$  e  $n = 2$  em  $f > 128$  Hz.

O espectro de fase de Baixa Funda (Figuras 5.3c e 5.3d) apresenta similaridades com o espectro do depósito de Vermelhos, inclusive com um deslocamento positivo de fase nas frequências mais altas para  $n = 1$  e  $n = 2$ , enquanto que, para os demais níveis de separação, é notado um pico negativo em fase. Quanto ao registro do fenômeno de IP nas frequências iniciais (0.25 Hz a 8 Hz), a fase tem valores negativos advindos do efeito de polarização,

porém atinge valores pouco significativos ( $\Delta\phi < 10$  mRad).

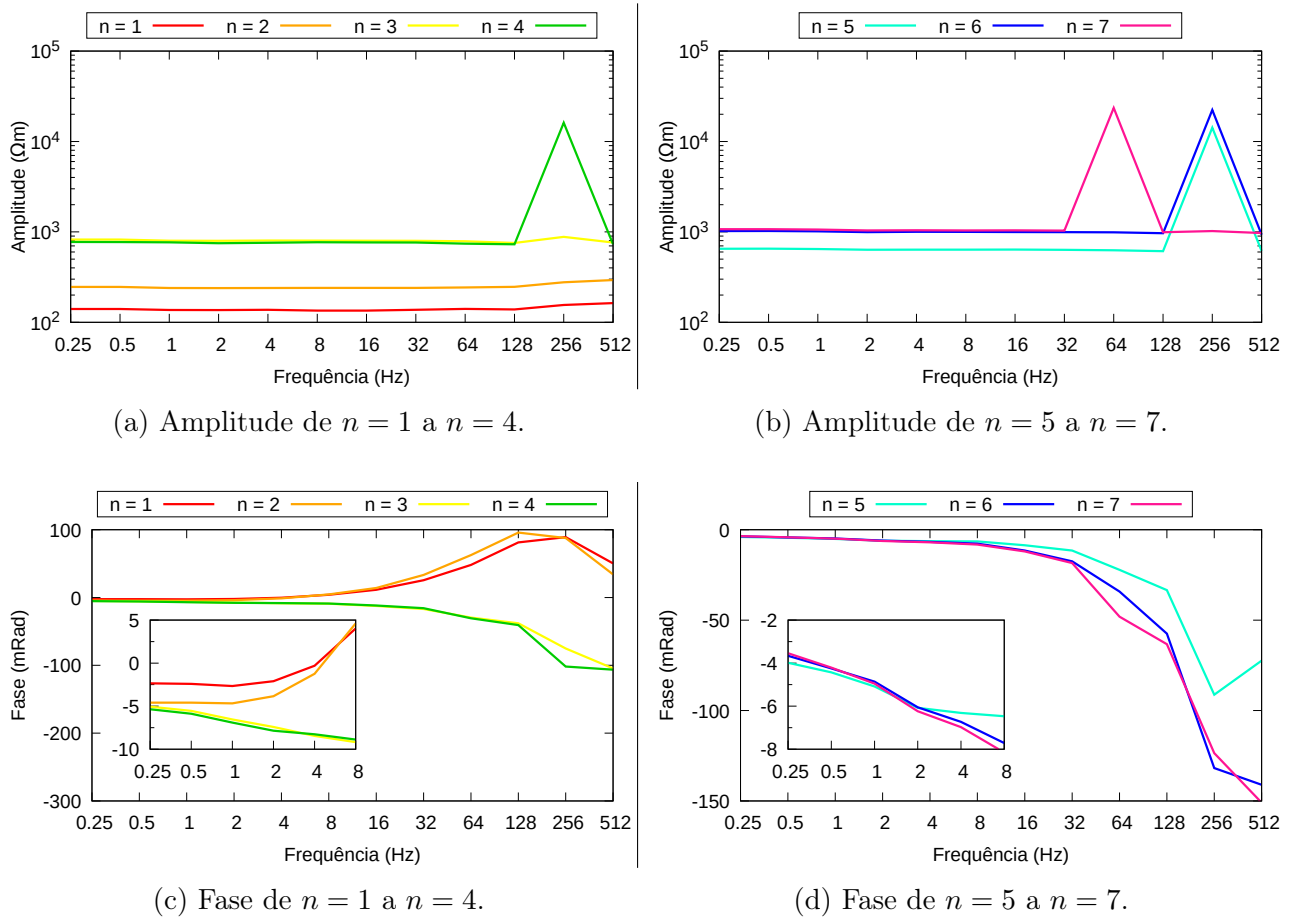


Figura 5.3: Espectro de amplitude e fase de  $\rho_a$  para a estação 550 W, linha 600 S, Baixa Funda.

## Sussuarana

A Figura 5.4 ilustra o comportamento espectral de  $\rho_a$  para a estação 900 E, linha 2600 N, Sussuarana.

O comportamento espectral da amplitude de  $\rho_a$  (Figuras 5.4a e 5.4b) permite deduzir que a resistividade é crescente com a profundidade, com variações mais bruscas entre  $n = 1$  e  $n = 2$ , entre  $n = 4$  e  $n = 5$  e entre  $n = 5$  e  $n = 6$ .

Até a frequência de 64 Hz, o espectro de amplitude de todos os espaçamentos é praticamente constante. É visto um suave aumento da amplitude nas altas frequências de  $n = 1$  e  $n = 2$ . Picos de discontinuidades geológicas são detectados nas frequências 128 Hz e 256 Hz para  $n = 3$  a  $n = 6$ . Para  $n = 4$ , essa heterogeneidade causa um aumento da amplitude de mais de 20 vezes.

Entre as 3 áreas estudadas, o espectro de fase de Sussuarana é o mais diferenciado, apresentando as mais significativas variações de fase atribuídas teoricamente ao efeito de IP. De 0.25 Hz até 8 Hz e entre os espaçamentos  $n = 3$  a  $n = 7$  são constatados valores negativos de fase devido ao efeito de IP, chegando a um deslocamento de 25 mRad para  $n = 5$  em 0.25 Hz. Os espectros de fase para  $n = 1$  e  $n = 2$  se diferenciam dos demais afastamentos por apresentarem um deslocamento positivo da fase até 8 Hz, o qual poderia estar associado ao contraste entre as resistividades da cobertura e da 2ª camada. Para frequências acima de 32 Hz, a combinação dos efeitos de IP e AEM estaria ocasionando um deslocamento negativo nas curvas de fase até um pico em aproximadamente 128 Hz a 256 Hz.

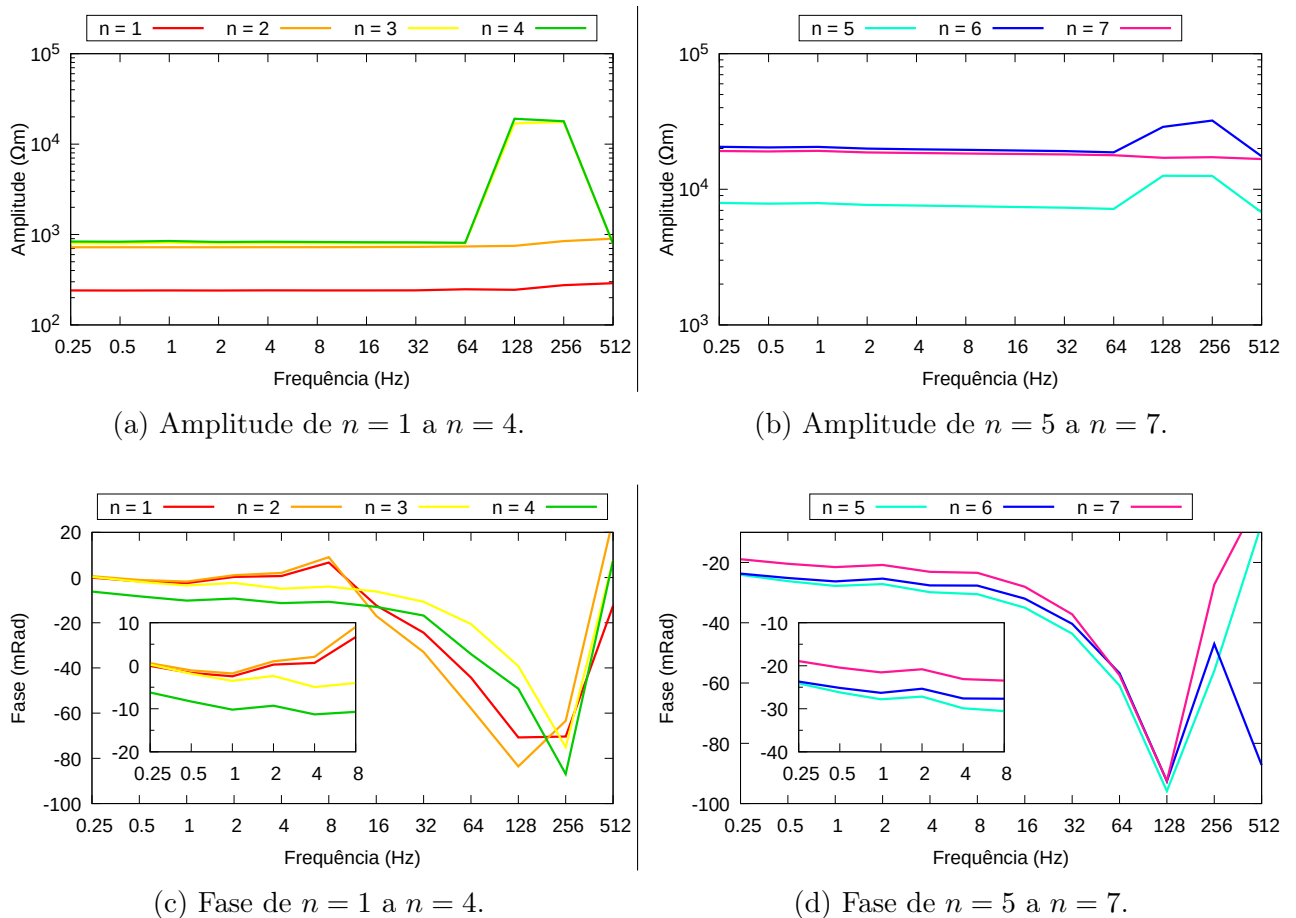


Figura 5.4: Espectro de amplitude e fase de  $\rho_a$  para a estação 900 E, linha 2600 N, Sussuarana.

### 5.3 Análise expandida dos parâmetros geolétricos

A inversão da resistividade complexa aparente dos dados reais do Vale do Curaçá resultou na determinação dos parâmetros de IP e AEM da função expandida de Barreto e Dias (2014). Nessa etapa, foram invertidos os dados de todas as estações das respectivas linhas de cada

área, possibilitando uma perspectiva espacial da distribuição dos parâmetros geoeletricos.

De posse desses parâmetros, é possível "desacoplar" o efeito de IP de baixas frequências (1 mHz -  $10^2$  Hz, relativo aos parâmetros  $m_W$  e  $\tau_W$ ) do AEM, já que o IP de altas frequências (10 kHz - 1 MHz, relativo aos parâmetros  $m_D$  e  $\tau_D$ ) está vinculado ao AEM positivo em nossa função da resistividade. A Figura 5.5 exemplifica esse procedimento. Nesse caso, o efeito de IP de baixas frequências é o responsável pelo deslocamento negativo da fase até cerca de -30 mRad, sendo que a partir de aproximadamente 2 Hz surge a influência do fator AEM + IP de altas frequências.

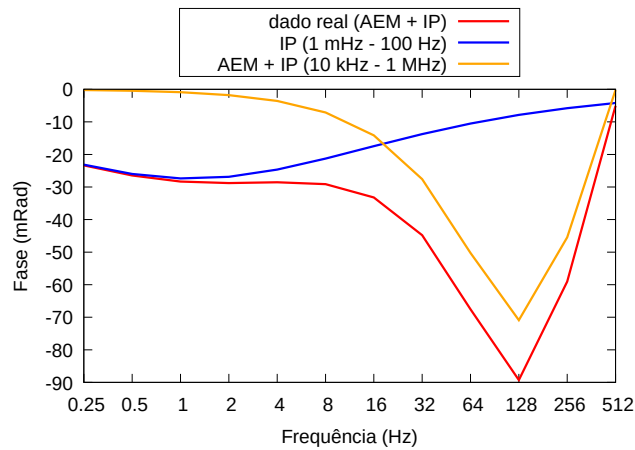


Figura 5.5: Fase de  $\rho_a$  com as respectivas curvas características dos fenômenos de IP e AEM para o dado real da estação 900 E, linha 2600 N, Sussuarana. Espaçamento transmissor-receptor  $n = 5$ .

A tabela 5.1 sintetiza as faixas de variação dos parâmetros de IP e AEM para as três áreas estudadas.

Parâmetros	Áreas do Vale do Curacá		
	Vermelhos	Baixa Funda	Sussuarana
$\rho_0$ ( $\Omega\text{m}$ )	52.5 a $1.3 \times 10^4$	107.6 a $1.7 \times 10^4$	38.8 a $2.2 \times 10^4$
$m_W$	0.01 a 0.47	0.01 a 0.65	0.00 a 0.77
$\tau_W$ (s)	0.00 a 1000	0.00 a 1000	0.01 a 1000
$m_D$	0.07 a 1	0.04 a 1	0.02 a 1
$\tau_D$ (ms)	0.01 a 0.79	0.00 a 0.98	0.00 a 1.12
$m_A$	0.00 a 1	0.02 a 1	0.02 a 1
$\tau_A$ (ms)	0.07 a $5 \times 10^5$	0.02 a 24.2	0.03 a 25.7

Tabela 5.1: Faixas de variação dos parâmetros calculados na inversão da função de Barreto e Dias (2014) expandida.

Pela tabela 5.1 é possível sumarizar os seguintes resultados: dentre os 7 parâmetros, a cargabilidade  $m_W$  de baixas frequências apresentou as variações mais relevantes, indicando anomalias de IP mais significativas para Sussuarana ( $m_W = 0.77$ ), seguida por Baixa Funda ( $m_W = 0.65$ ) e Vermelhos ( $m_W = 0.47$ ). A resistividade  $\rho_0$  assume tanto valores condutivos quanto valores bastante resistivos em todas as áreas. Influenciadas pelo AEM, as cargabilidades  $m_D$  e  $m_A$  variaram praticamente de 0 a 1 nas três linhas. O tempo de relaxação  $\tau_W$  abrangeu um amplo intervalo para as três áreas. O valor máximo de  $\tau_D$  foi maior para Sussuarana, seguido por Baixa Funda e Vermelhos. O tempo de relaxação  $\tau_A$  do acoplamento negativo atinge um valor máximo consideravelmente maior em Vermelhos do que nas demais áreas.

As Figuras 5.6 a 5.12 ilustram a distribuição espacial por meio de pseudo-seções dos parâmetros para as três áreas estudadas. Parâmetros com faixas de variação muito amplas foram representados em sua forma logarítmica. As escalas de cores foram padronizadas para uma melhor comparação entre os resultados.

Nas pseudo-seções de  $\rho_0$  (Figura 5.6) é perceptível o padrão em comum de aumento da resistividade com a profundidade, embora cada área possua suas peculiaridades. A linha de Vermelhos apresenta uma certa uniformidade no seu comportamento, assemelhando-se a um modelo de 3 camadas com uma cobertura condutiva (possivelmente uma zona intemperizada), sotoposta por uma camada intermediária resistiva (em aproximadamente  $n = 3$ ) e finalmente uma zona bastante resistiva na base; são observadas ainda algumas anomalias de baixa resistividade em maiores profundidades. À exceção de uma zona resistiva profunda, a linha de Baixa Funda exibe valores bem menores de resistividade. Por sua vez, a irregularidade na pseudo-seção de Sussuarana condiz com a existência de anomalias condutivas em pequenas e médias profundidades.

Analisando as pseudo-seções de  $m_W$  (Figura 5.7), notamos a presença de anomalias de IP em alguns níveis. Em Vermelhos, tais anomalias estão em profundidades intermediárias e parecem estar associadas com as anomalias de alta condutividade detectadas. Já as anomalias de IP da linha de Baixa Funda se concentram sob maiores profundidades e estão possivelmente correlacionadas com a zona resistiva dessa área. Em média, Sussuarana apresentou valores maiores de  $m_W$ , além de anomalias em vários níveis de profundidade, com destaque para uma forte anomalia superficial (até  $m_W = 0.8$  em  $n = 2$ ) condizente com uma zona condutiva.

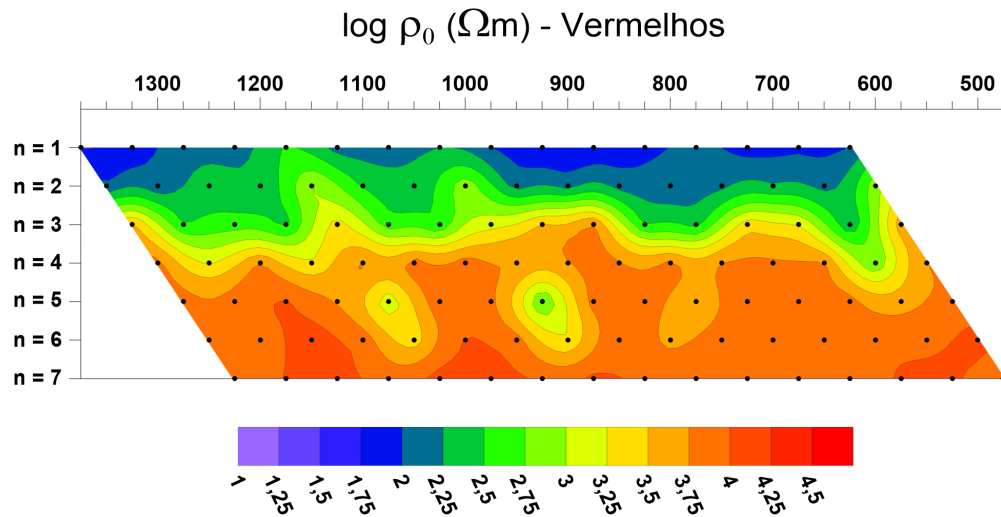
As anomalias de altos tempos de relaxação  $\tau_W$  em Vermelhos e em Baixa Funda (Figuras 5.8a e 5.8b, respectivamente) coincidem com as anomalias de  $m_W$  nas respectivas áreas. Por sua vez, em Sussuarana (Figura 5.8c) esse ajuste entre os parâmetros  $\tau_W$  e  $m_W$  é mais destoante e as anomalias de  $m_W$  nos níveis mais profundos se ajustam a anomalias de baixo



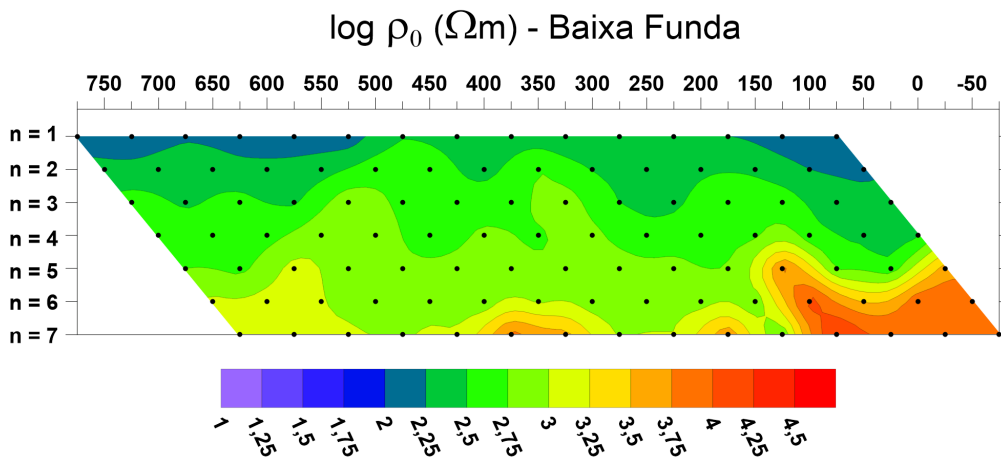
tempo de relaxação  $\tau_W$ .

As pseudo-seções de cargabilidade  $m_D$  (Figura 5.9) apresentam comportamentos bastante irregulares nas três áreas, provavelmente por assimilarem efeitos de naturezas distintas (AEM positivo e IP de altas frequências). O parâmetro  $\tau_D$  exibe um cenário mais uniforme com poucas e pontuais variações nas três linhas (Figura 5.10).

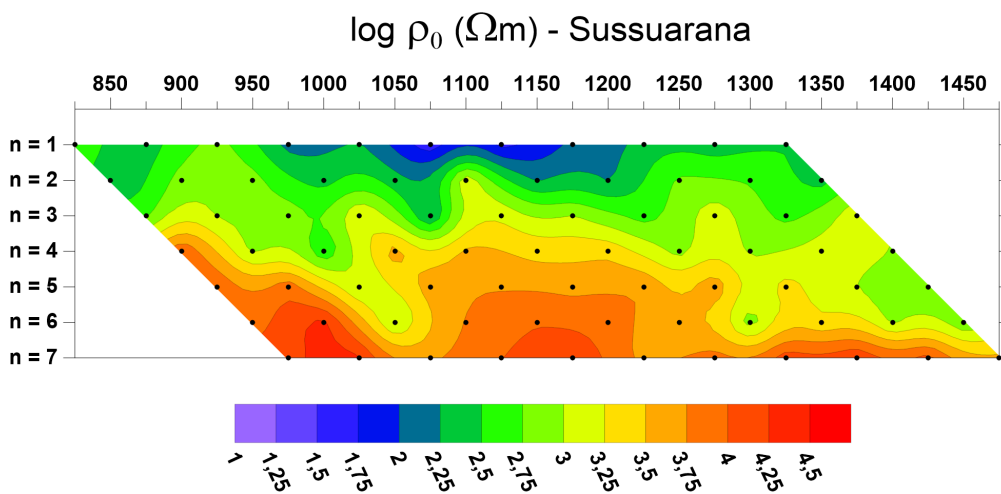
Em comparação com  $m_D$ , a cargabilidade  $m_A$  (correspondente ao AEM negativo) segue um padrão mais regular nas pseudo-seções (Figura 5.11). É interessante notar que as regiões com maiores valores de  $m_A$ , ou seja, trechos de intenso AEM, estão correlacionadas com as zonas mais condutivas das três áreas. Tal fato corrobora com a teoria de que o AEM é proporcional à condutividade da subsuperfície, indicando que o parâmetro  $m_A$  é bem representativo do efeito indutivo. Assim como o  $\tau_D$ , o parâmetro  $\tau_A$  (Figura 5.12) tem poucas variações significativas nas pseudo-seções, sendo constatadas apenas algumas anomalias na linha de Vermelhos.



(a) Distribuição do  $\log \rho_0$  na linha 800 S, Vermelhos.

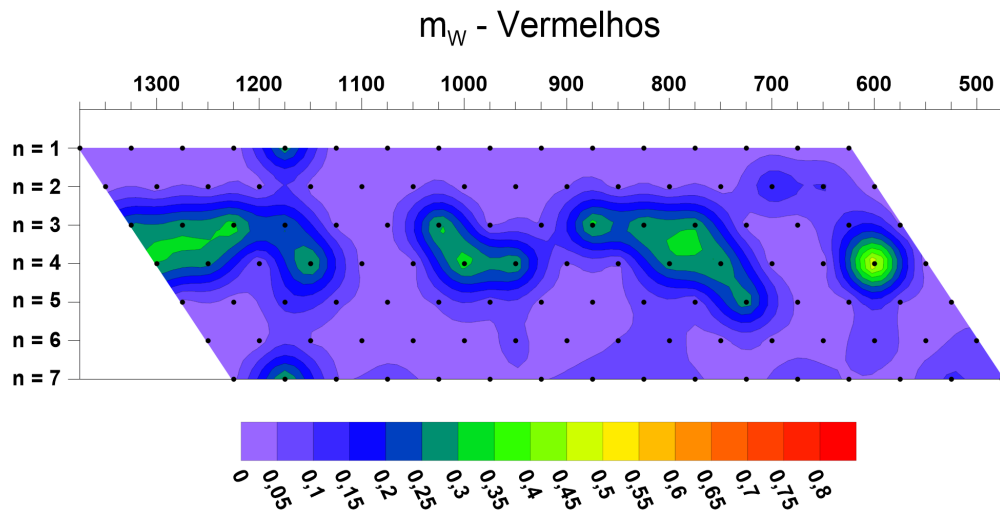


(b) Distribuição do  $\log \rho_0$  na linha 600 S, Baixa Funda.

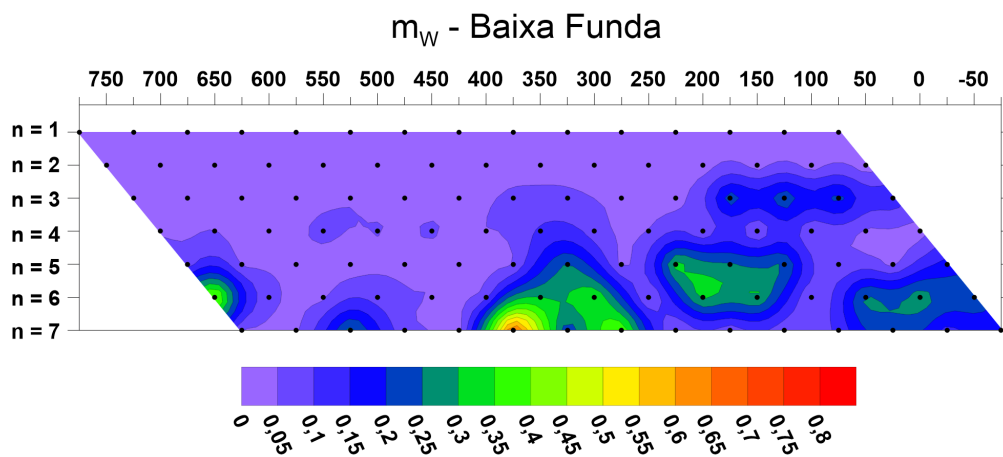


(c) Distribuição do  $\log \rho_0$  na linha 2600 N, Sussuarana.

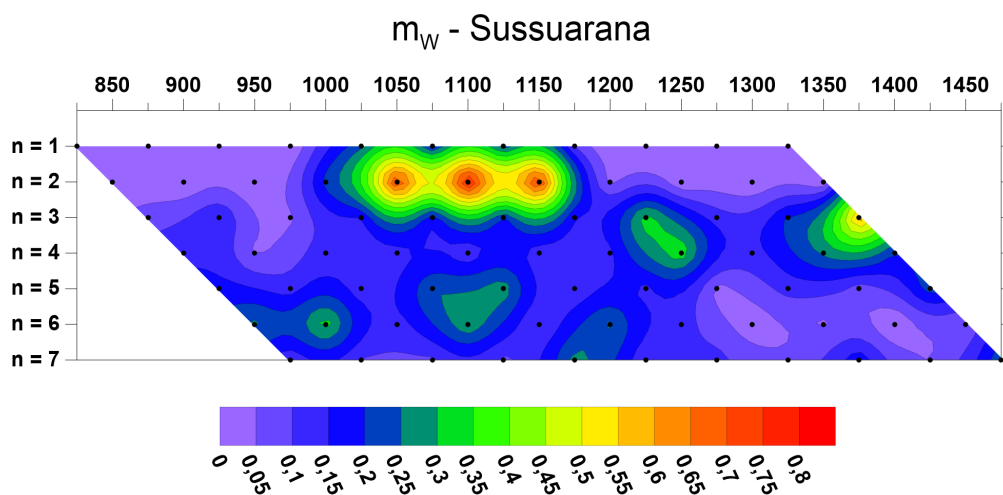
Figura 5.6: Distribuição do  $\log$  do parâmetro  $\rho_0$  nas áreas de estudo.



(a) Distribuição de  $m_W$  na linha 800 S, Vermelhos.

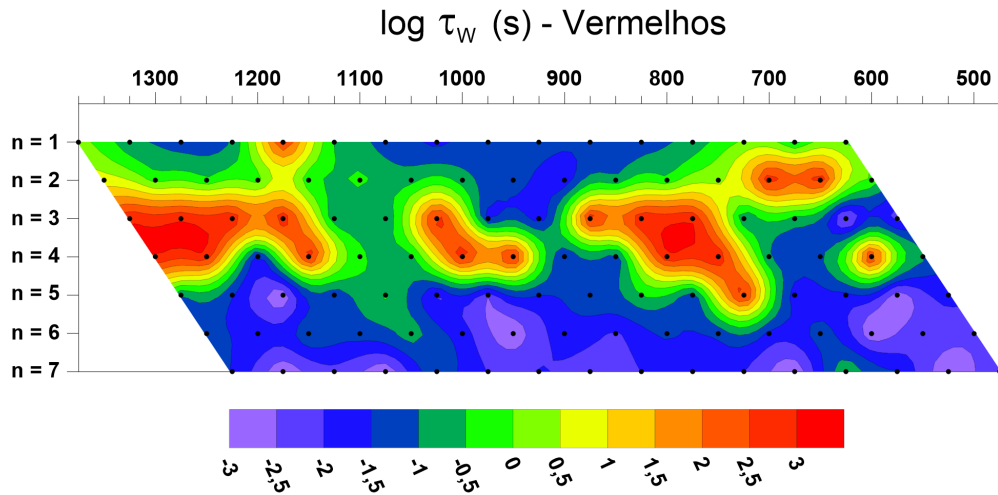


(b) Distribuição de  $m_W$  na linha 600 S, Baixa Funda.

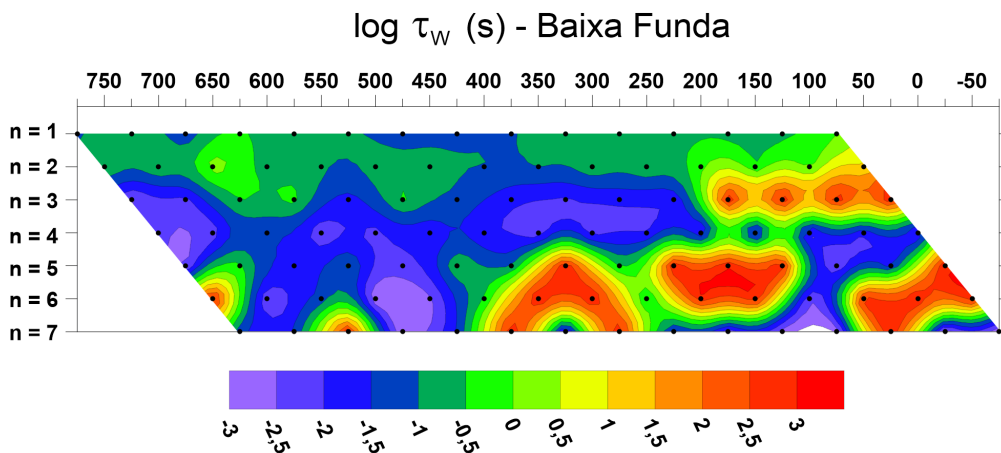


(c) Distribuição de  $m_W$  na linha 2600 N, Sussuarana.

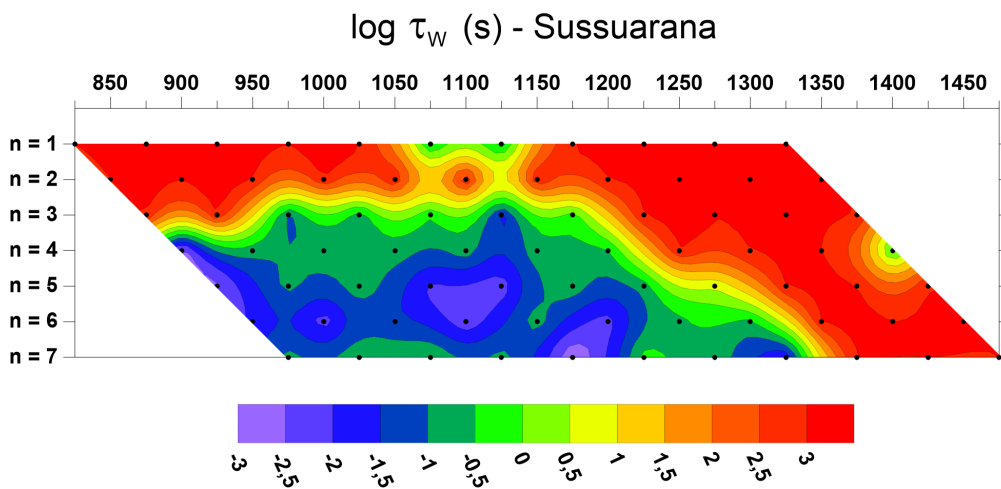
Figura 5.7: Distribuição do parâmetro  $m_W$  nas áreas de estudo.



(a) Distribuição do  $\log \tau_W$  na linha 800 S, Vermelhos.

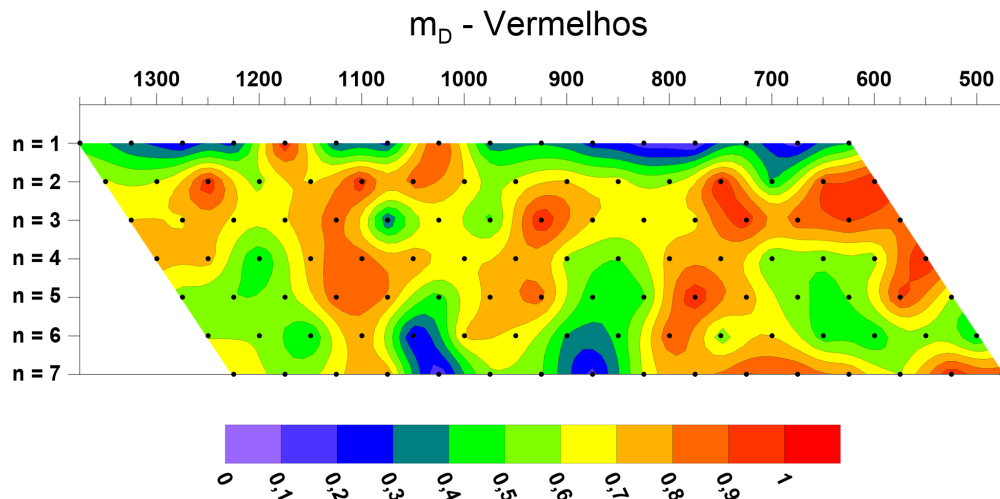


(b) Distribuição do  $\log \tau_W$  na linha 600 S, Baixa Funda.

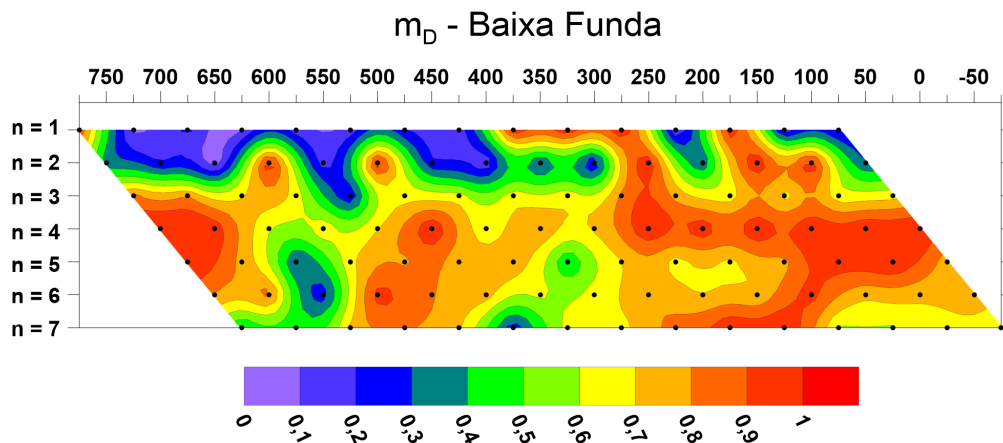


(c) Distribuição do  $\log \tau_W$  na linha 2600 N, Sussuarana.

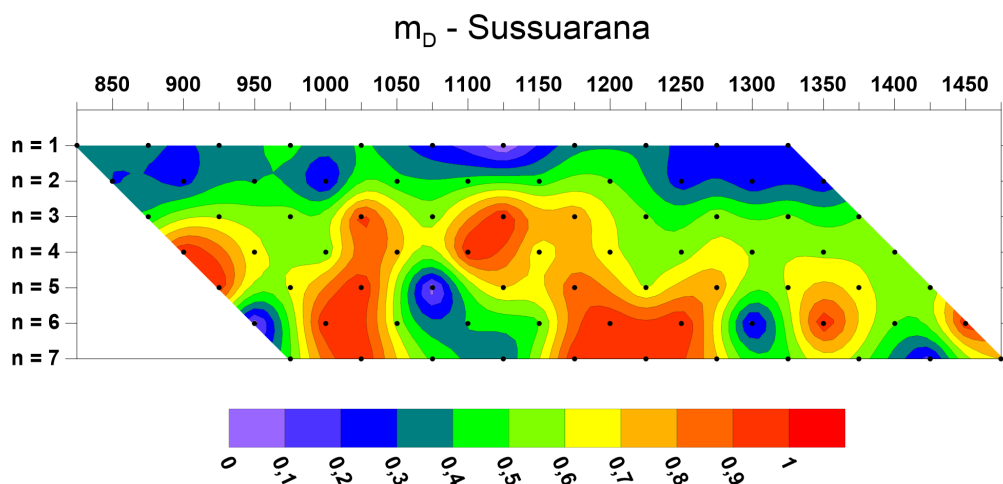
Figura 5.8: Distribuição do  $\log$  do parâmetro  $\tau_W$  nas áreas de estudo.



(a) Distribuição de  $m_D$  na linha 800 S, Vermelhos.

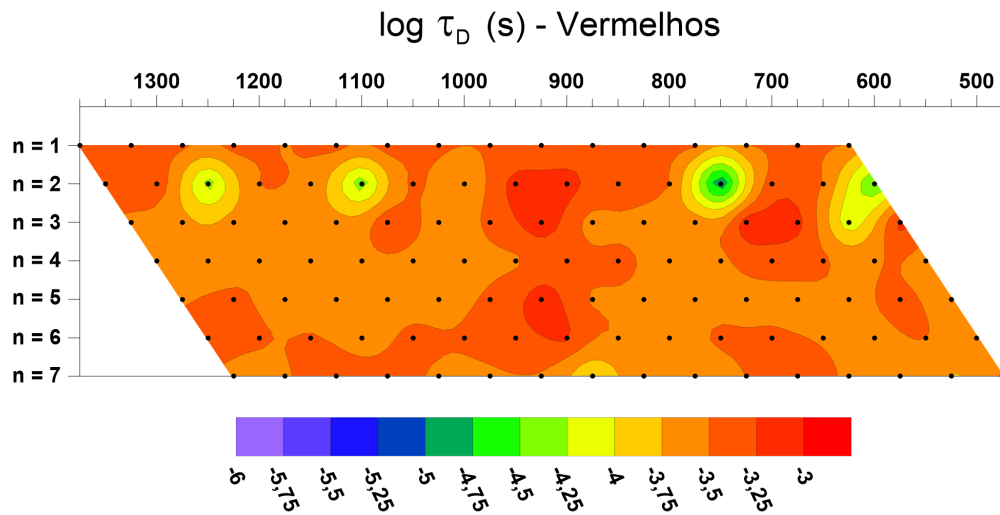


(b) Distribuição de  $m_D$  na linha 600 S, Baixa Funda.

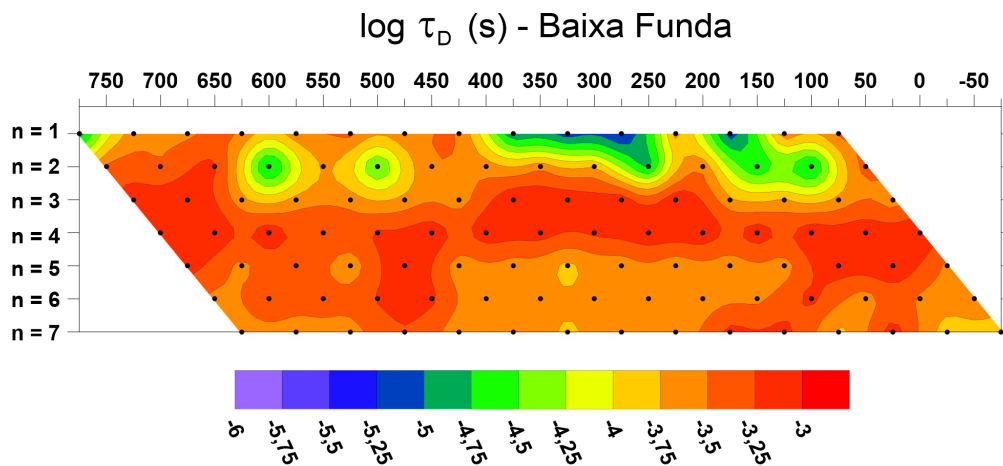


(c) Distribuição de  $m_D$  na linha 2600 N, Sussuarana.

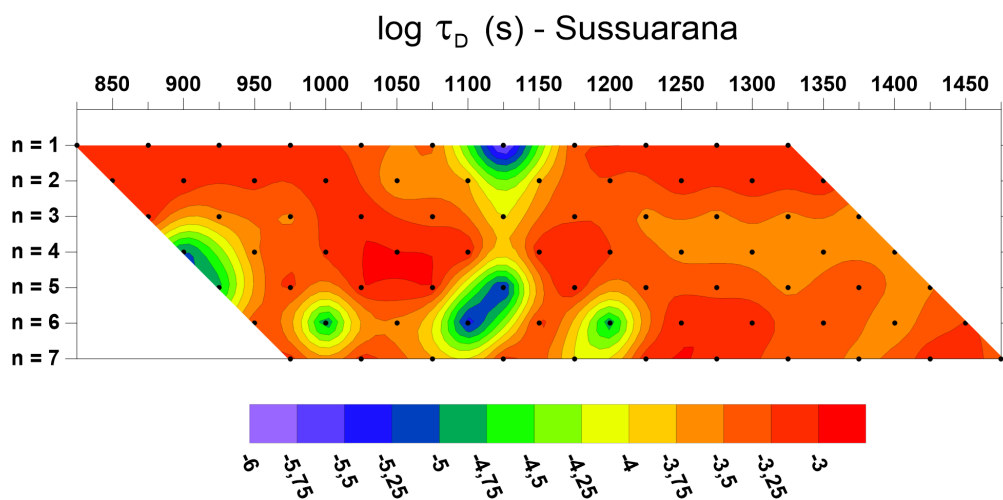
Figura 5.9: Distribuição do parâmetro  $m_D$  nas áreas de estudo.



(a) Distribuição do  $\log \tau_D$  na linha 800 S, Vermelhos.

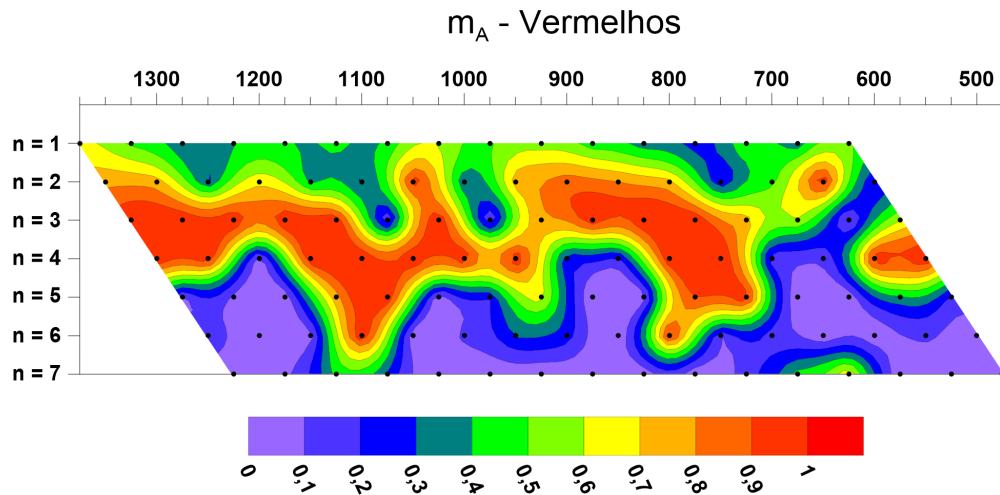


(b) Distribuição do  $\log \tau_D$  na linha 600 S, Baixa Funda.

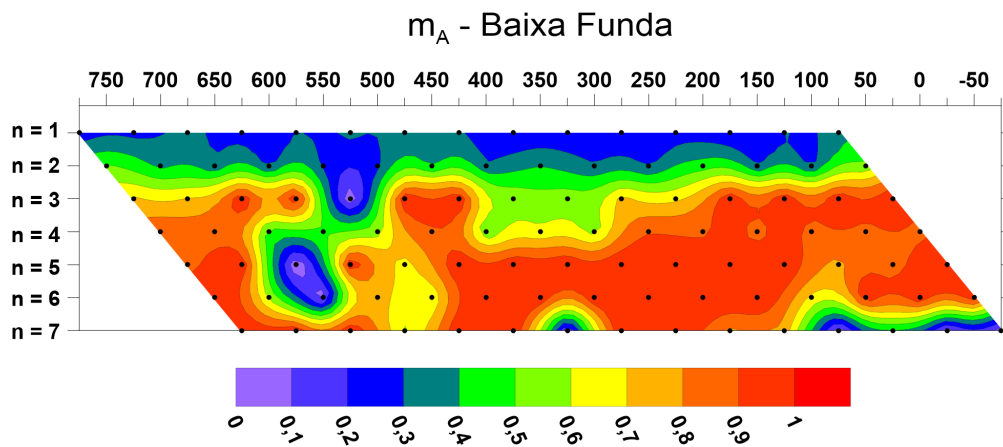


(c) Distribuição do  $\log \tau_D$  na linha 2600 N, Sussuarana.

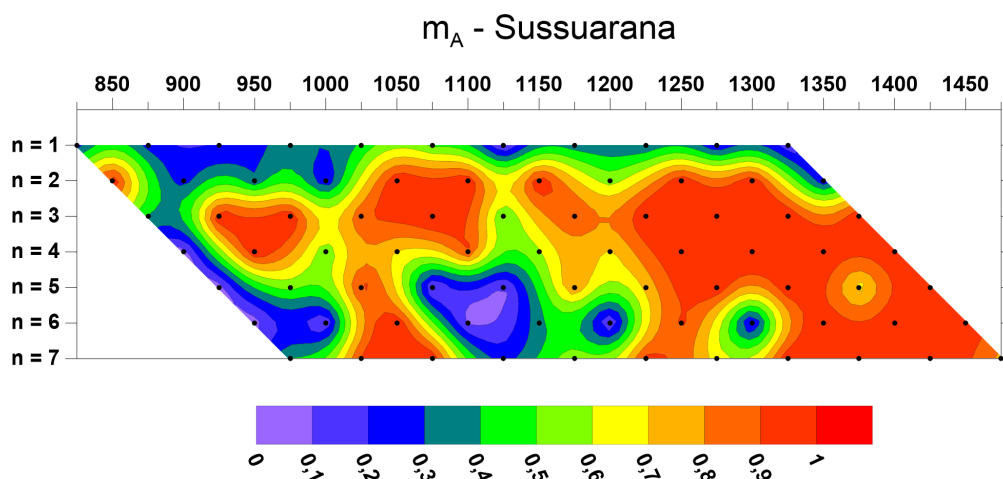
Figura 5.10: Distribuição do  $\log$  do parâmetro  $\tau_D$  nas áreas de estudo.



(a) Distribuição de  $m_A$  na linha 800 S, Vermelhos.

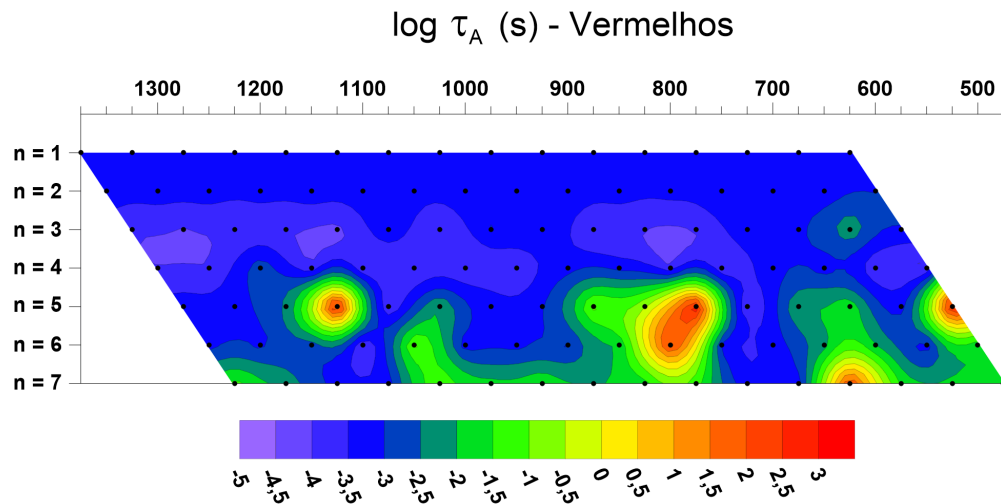


(b) Distribuição de  $m_A$  na linha 600 S, Baixa Funda.

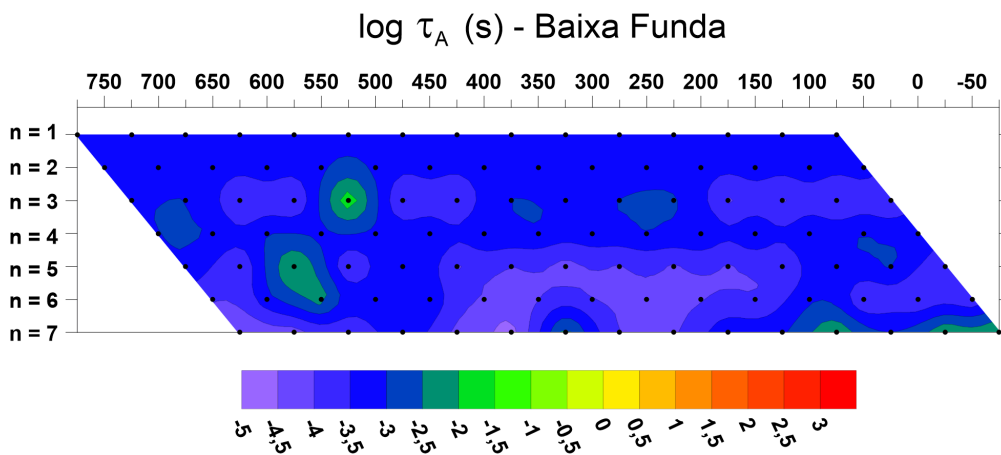


(c) Distribuição de  $m_A$  na linha 2600 N, Sussuarana.

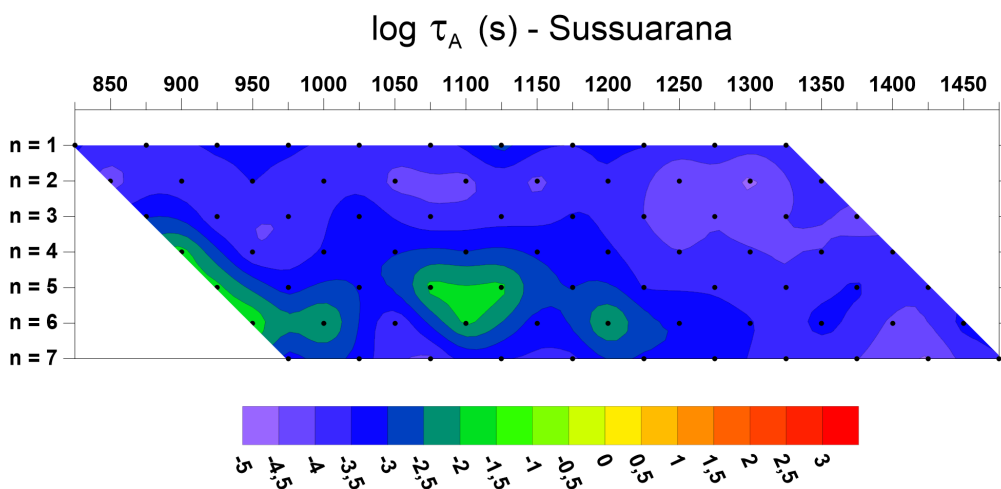
Figura 5.11: Distribuição do parâmetro  $m_A$  nas áreas de estudo.



(a) Distribuição do  $\log \tau_A$  na linha 800 S, Vermelhos.



(b) Distribuição do  $\log \tau_A$  na linha 600 S, Baixa Funda.



(c) Distribuição do  $\log \tau_A$  na linha 2600 N, Sussuarana.

Figura 5.12: Distribuição do  $\log$  do parâmetro  $\tau_A$  nas áreas de estudo.



# 6

## Conclusões

Nesse trabalho, no intuito de analisar e correlacionar os fenômenos de SIP e AEM, foram implementados e testados métodos de modelagem direta e inversão, tendo como produto final dados de impedância elétrica mútua  $Z/Z_0$ , resistividade complexa aparente  $\rho_a$  e parâmetros de IP e AEM.

A modelagem da impedância elétrica mútua para modelos de terra homogênea e em  $\eta$ -camadas foi baseada na formulação de Mocitaiba et al. (2017). No caso de um semi-espaço homogêneo, a implementação pôde ser verificada pela comparação com os resultados da formulação de Millett (1967). Em caso de meios polarizáveis, foi empregado o modelo de resistividade complexa de Barreto e Dias (2014). Para a inversão de  $\rho_a$ , esse modelo foi adaptado em uma versão expandida com a finalidade de abranger o efeito indutivo presente nos dados reais.

O emprego da inversão Gauss-Newton na estimativa da resistividade complexa aparente mostrou-se conveniente por proporcionar erros relativos insignificantes tanto para dados sintéticos quanto para dados reais. Já o uso da expressão convencional de  $\rho_a$  rendeu erros relativos consideráveis, principalmente nas maiores frequências. Os métodos dos Mínimos Quadrados e *Very Fast Simulated Annealing* se complementaram na inversão da fase de  $\rho_a$  e estimativa dos 7 parâmetros da função expandida de Barreto e Dias (2014).

Na análise espectral de dados sintéticos, foram verificados diferentes comportamentos de  $Z/Z_0$  e  $\rho_a$  para os diversos modelos de subsuperfície investigados. Para um semi-espaço homogêneo e não-polarizável, em quase todo o intervalo de frequência de  $10^{-1}$  Hz a  $10^4$  Hz, a fase de  $Z/Z_0$ , atribuída apenas ao AEM, apresenta sinal negativo. Adicionada polarizabilidade a esse meio, a impedância sofre um decaimento em seu espectro. Para os casos de

um meio de 2 e 3 camadas, a heterogeneidade devido ao contraste de resistividade entre as camadas gera espectros de impedância bem diversificados. O Diagrama de Argand foi capaz de representar e distinguir com sucesso o efeito de polarização em cada uma das camadas de um modelo de 2 camadas com cobertura condutiva.

Na análise de dados sintéticos de  $\rho_a$ , foram simulados modelos de 3 camadas com distribuições de resistividade do tipo H, K, A e Q. Em cada caso, o efeito indutivo apresentou um comportamento específico que retrata o modelo. Quando o efeito de polarização foi adicionado a alguma das camadas, foi observado um decaimento em amplitude e fase de  $\rho_a$  nos níveis de espaçamento  $n$  mais influenciados pela camada polarizável.

Por fim, o estudo foi aplicado a dados reais das áreas de Vermelhos, Baixa Funda e Sussuarana do Distrito Cuprífero do Vale do Curaçá. Os espectros de  $\rho_a$  das estações analisadas de Vermelhos e Baixa Funda mostraram comportamento parecidos, com um sutil efeito de IP. Já a estação de Sussuarana apresentou maiores deslocamentos de fase, atribuídos ao fenômeno de IP. Em todas as três áreas, a contribuição do AEM em maiores frequências apresentou similaridades com o efeito indutivo de um modelo de três camadas do tipo A, ou seja, um modelo de resistividade crescente com a profundidade.

A análise dos parâmetros de IP e AEM desses dados reais permitiu chegar a conclusões interessantes a respeito das áreas de estudo. Nas três áreas, o parâmetro  $\rho_0$  demonstrou um aumento da resistividade com a profundidade, em concordância com as deduções advindas dos espectros da resistividade complexa aparente. Quanto ao efeito de IP, o parâmetro mais representativo foi a cargabilidade  $m_W$ , cujas anomalias coincidiram com regiões de resistividades anômalas, com destaque para uma anomalia de IP na linha de Sussuarana. Os parâmetros  $m_D$  e  $\tau_D$  apresentaram pseudo-seções com curvas bastante irregulares por abordarem efeitos de natureza distintas (IP de altas frequências e AEM positivo). Os valores mais altos da cargabilidade,  $m_A$ , ligados a um intenso efeito do AEM negativo, coincidiram com as zonas mais condutivas das áreas.

Em suma, os métodos implementados e empregados na análise dos efeitos de IP e AEM em dados geofísicos espectrais se mostraram eficazes no que se propuseram. Tomados os devidos cuidados, foi visto que tais efeitos podem ser analisados separadamente já que possuem significados intrínsecos, embora o melhor caminho seja correlacionar tais informações para uma melhor compreensão geológica do problema. Na análise de dados reais, foram mapeadas anomalias de IP que podem estar relacionadas com minerais metálicos disseminados nas rochas ultramáficas das áreas de estudo.

Em trabalhos futuros, seria interessante reformular a função expandida da resistividade complexa de Barreto e Dias (2014) no intuito de desacoplar os efeitos de IP de altas frequências e AEM positivo, que, no presente trabalho, estiveram interligados nos parâmetros  $m_D$

e  $\tau_D$ . Para isso, será necessário uma maior faixa de frequências para cumprir o requisito de um problema de inversão sobredeterminado ( $N > M$ ). Em relação à aplicação sobre os dados reais do Distrito Cuprífero do Vale do Curaçá, tais resultados podem futuramente ser correlacionados com outros dados geológicos e geofísicos das áreas de estudo, possibilitando assim um aprofundamento das conclusões obtidas.

# Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por me abençoar e guiar o meu caminho e à minha Mãe, Nossa Senhora, pela proteção e amparo.

À minha amiga e mãe Lindalva, meu porto seguro, a quem tantas vezes recorri em momentos difíceis, agradeço pelo amor incondicional. Agradeço ao meu amado pai Vêritas Dei por todo apoio e incentivo aos estudos e por ser uma fonte de inspiração em minha vida.

Agradeço aos meus irmãos Tarcísio e Taiane por entender as minhas faltas nesses tempos. Cabe ainda agradecer à minha prima Joice, minha madrinha Orcanilde, meu avó Pedro Defensor e muitos outros familiares e amigos que fizeram parte dessa caminhada.

Pelo companheirismo, generosidade e por construir esse trabalho junto comigo de inúmeras formas, agradeço imensamente ao meu namorado Peterson Nogueira.

Ao professor Edson Sampaio, muito agradeço pela orientação e por todo o conhecimento pacientemente a mim repassado durante a construção desse trabalho.

Agradeço aos professores Olivar Lima, Carlos Dias (UENF), Milton Porsani, Joelson Batista, Reynam Pestana e Alexandre Barreto (IFF) pelo auxílio em muitos momentos e disponibilidade em esclarecer as minhas dúvidas. O meu muito obrigada a Dra. Rimary pelos esclarecimentos e sugestões. Agradeço ainda o apoio dos colegas da Pós Graduação em Geofísica Alex, Diego e Eduardo.

# Apêndice **A**

## Condições de contorno e funções do potencial total de um semi-espaço homogêneo

As condições de contorno a serem impostas para definir o comportamento dos campos eletromagnéticos nas interfaces de contato são:

**Componente normal de  $\mathbf{B}$**  - A componente normal  $B_n$  de  $\mathbf{B}$  é contínua através da interface entre meios de propriedades distintas. Assim,

$$B_{n_1} = B_{n_2}. \quad (\text{A.1})$$

**Componente tangencial de  $\mathbf{E}$**  - A componente tangencial  $E_t$  de  $\mathbf{E}$  é contínua através de uma interface. Assim,

$$E_{t_1} = E_{t_2}. \quad (\text{A.2})$$

**Componente tangencial de  $\mathbf{H}$**  - A componente tangencial  $H_t$  de  $\mathbf{H}$  é contínua através de uma interface caso não existam correntes superficiais. Assim,

$$H_{t_1} = H_{t_2}. \quad (\text{A.3})$$

Buscamos então determinar as funções  $F_{x0}^+$ ,  $F_{x1}^-$ ,  $F_{z0}^+$  e  $F_{z1}^-$  para encontrar a solução do potencial elétrico total de um semi-espaço homogêneo (equações 2.6 a 2.9). Assim, com base

em A.1 a A.3, tem-se, em  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} B_{z_0} &= B_{z_1}, \\ H_{x_0} = H_{x_1} &\longrightarrow \mu_1 B_{x_0} = \mu_0 B_{x_1}, \\ H_{y_0} = H_{y_1} &\longrightarrow \mu_1 B_{y_0} = \mu_0 B_{y_1}, \end{aligned}$$

$$E_{y_0} = E_{y_1}. \quad (\text{A.4})$$

Substituindo as equações 2.1 e 2.2 nas equações A.4 e considerando que a continuidade no plano horizontal não é afetada por derivação ou integração ao longo de qualquer coordenada tangente ao plano, chega-se às seguintes expressões para o potencial total  $A_{\eta_j}$ ,  $\eta = x, z$ ,  $j = 0, 1$ :

$$A_{x_0} = A_{x_1}, \quad (\text{A.5})$$

$$\mu_1 A_{z_0} = \mu_0 A_{z_1}, \quad (\text{A.6})$$

$$\mu_1 \frac{\partial A_{x_0}}{\partial z} = \mu_0 \frac{\partial A_{x_1}}{\partial z}, \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{1}{\kappa_0^2} \frac{\partial A_{x_0}}{\partial x} + \frac{1}{\kappa_0^2} \frac{\partial A_{z_0}}{\partial z} = \frac{1}{\kappa_1^2} \frac{\partial A_{x_1}}{\partial x} + \frac{1}{\kappa_1^2} \frac{\partial A_{z_1}}{\partial z}. \quad (\text{A.8})$$

Para obter as expressões de  $F_{\eta_j}^{\pm}$ , resta aplicar as condições A.5 a A.8 nas equações do potencial total, levando em conta que  $\mu_0 = \mu_1$  e, para o meio homogêneo, isotrópico e infinito,  $z = 0$ . Analisando inicialmente apenas a continuidade dos componentes de  $A_{x_j}$  (equações A.5 e A.7), tem-se

$$\frac{\lambda}{\alpha_0} e^{\alpha_0 z_0} + F_{x_0}^+ = F_{x_1}^-,$$

e

$$-\lambda e^{\alpha_0 z_0} + \alpha_0 F_{x_0}^+ = -\alpha_1 F_{x_1}^-,$$

que permitem obter

$$F_{x_0}^+ = \left( \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{\alpha_0 + \alpha_1} \right) \frac{\lambda}{\alpha_0} e^{\alpha_0 z_0}, \quad (\text{A.9})$$

e

$$F_{x_1}^- = \left( \frac{2\alpha_0}{\alpha_0 + \alpha_1} \right) \frac{\lambda}{\alpha_0} e^{\alpha_0 z_0}. \quad (\text{A.10})$$

Por sua vez, a continuidade dos componentes de  $A_{z_j}$  (equações A.6 e A.8) em conjunto

com as expressões A.9 e A.10 permitem encontrar

$$F_{z_0}^+ = F_{z_1}^-$$

e

$$-\frac{\lambda^2}{\alpha_0 \kappa_0^2} \left( 1 + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{\alpha_0 + \alpha_1} \right) e^{\alpha_0 z_0} + \frac{\alpha_0}{\kappa_0^2} F_{z_0}^+ = -\frac{\lambda^2}{\alpha_0 \kappa_1^2} \left( \frac{2\alpha_0}{\alpha_0 + \alpha_1} \right) e^{\alpha_0 z_0} - \frac{\alpha_1}{\kappa_1^2} F_{z_1}^-.$$

Consequentemente:

$$F_{z_0}^+ = F_{z_1}^- = \left( \frac{\kappa_1^2 - \kappa_0^2}{\alpha_0 \kappa_1^2 + \alpha_1 \kappa_0^2} \right) \frac{2\lambda^2}{\alpha_0 + \alpha_1} e^{\alpha_0 z_0}. \quad (\text{A.11})$$

# Apêndice **B**

## Derivadas da impedância mútua em relação à resistividade complexa

Nesse apêndice, serão desenvolvidas algebricamente as derivadas parciais das componentes real  $Z_{Re}$  e imaginária  $Z_{Im}$  da impedância mútua de um meio homogêneo e polarizável com relação às componentes real  $\rho_{Re}$  e imaginária  $\rho_{Im}$  da resistividade complexa  $\rho^*$ .

Para isso, a expressão 2.27 da impedância mútua de um meio homogêneo e, nesse caso, polarizável foi reorganizada e reescrita como:

$$\Delta Z(z_0, \omega) = \frac{\rho^*}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \lambda^2 G_x(\lambda) - \lambda G_x(\lambda) \sqrt{\lambda^2 + \frac{i\mu_0\omega}{\rho^*}} + G_z(\lambda) \right] e^{\lambda z_0} d\lambda. \quad (\text{B.1})$$

Considerando que  $\rho^* = \rho_{Re} + i\rho_{Im}$ , a expressão B.1 se torna

$$\begin{aligned} \Delta Z(z_0, \omega) &= \frac{(\rho_{Re} + i\rho_{Im})}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \lambda^2 G_x(\lambda) - \lambda G_x(\lambda) \sqrt{\lambda^2 + \frac{i\mu_0\omega}{(\rho_{Re} + i\rho_{Im})}} + G_z(\lambda) \right] e^{\lambda z_0} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left[ (\rho_{Re} + i\rho_{Im}) \lambda^2 G_x(\lambda) - \lambda G_x(\lambda) \overbrace{(\rho_{Re} + i\rho_{Im}) \sqrt{\lambda^2 + \frac{i\mu_0\omega}{(\rho_{Re} + i\rho_{Im})}}}^{\text{Expressão I} = c + id} + (\rho_{Re} + i\rho_{Im}) G_z(\lambda) \right] e^{\lambda z_0} d\lambda. \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$



Expandindo a expressão I de B.2:

$$\begin{aligned} (\rho_{Re} + i\rho_{Im}) \sqrt{\lambda^2 + \frac{i\mu_0\omega}{(\rho_{Re} + i\rho_{Im})}} &= \sqrt{\lambda^2(\rho_{Re} + i\rho_{Im})^2 + i\mu_0\omega(\rho_{Re} + i\rho_{Im})} \\ &= \left[ \underbrace{(\rho_{Re}^2\lambda^2 - \rho_{Im}^2\lambda^2 - \rho_{Im}\mu_0\omega)}_a + i \underbrace{(\rho_{Re}\mu_0\omega + 2\rho_{Re}\rho_{Im}\lambda^2)}_b \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (B.3)$$

Igualando  $\sqrt{a + ib} = c + id$ , elevando ao quadrado ambos os lados dessa igualdade e encontrando sua solução, temos

$$c = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}} \quad e \quad d = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{b}{\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}}. \quad (B.4)$$

Dessa forma, a impedância B.2 pode ser escrita em termos de suas componentes real e imaginária:

$$\begin{aligned} \Delta Z(z_0, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \rho_{Re}\lambda^2 G_x(\lambda) + \rho_{Re}G_z(\lambda) - \lambda G_x(\lambda) \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}} \right] e^{\lambda z_0} d\lambda \\ &+ i \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \rho_{Im}\lambda^2 G_x(\lambda) + \rho_{Im}G_z(\lambda) - \lambda G_x(\lambda) \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{b}{\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}} \right] e^{\lambda z_0} d\lambda, \end{aligned} \quad (B.5)$$

onde

$$a = \rho_{Re}^2\lambda^2 - \rho_{Im}^2\lambda^2 - \rho_{Im}\mu_0\omega \quad e \quad b = \rho_{Re}\mu_0\omega + 2\rho_{Re}\rho_{Im}\lambda^2. \quad (B.6)$$

A partir de B.5 e B.6, podem ser encontradas as seguintes expressões das derivadas parciais:

$$\begin{aligned} \partial Z_{Re}/\partial \rho_{Re} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left\{ \lambda^2 G_x(\lambda) + G_z(\lambda) \right. \\ &\left. - \lambda G_x(\lambda) \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}} \left[ \frac{\partial a}{\partial \rho_{Re}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( a \frac{\partial a}{\partial \rho_{Re}} + b \frac{\partial b}{\partial \rho_{Re}} \right) \right] \right\} e^{\lambda z_0} d\lambda, \end{aligned} \quad (B.7)$$

$$\partial Z_{Re}/\partial \rho_{Im} =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} -\lambda G_x(\lambda) \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}} \left[ \frac{\partial a}{\partial \rho_{Im}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( a \frac{\partial a}{\partial \rho_{Im}} + b \frac{\partial b}{\partial \rho_{Im}} \right) \right] e^{\lambda z_0} d\lambda, \quad (B.8)$$

$$\begin{aligned} \partial Z_{Im}/\partial \rho_{Re} = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} -\lambda G_x(\lambda) \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ \frac{\partial b}{\partial \rho_{Re}} \frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}} \right. \\ & \left. - \frac{b}{2} (a + \sqrt{a^2 + b^2})^{-3/2} \left[ \frac{\partial a}{\partial \rho_{Re}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( a \frac{\partial a}{\partial \rho_{Re}} + b \frac{\partial b}{\partial \rho_{Re}} \right) \right] \right\} e^{\lambda z_0} d\lambda, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

e

$$\begin{aligned} \partial Z_{Im}/\partial \rho_{Im} = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left\{ \lambda^2 G_x(\lambda) + G_z(\lambda) - \lambda G_x(\lambda) \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \frac{\partial b}{\partial \rho_{Im}} \frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{b}{2} (a + \sqrt{a^2 + b^2})^{-3/2} \left( \frac{\partial a}{\partial \rho_{Im}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( a \frac{\partial a}{\partial \rho_{Im}} + b \frac{\partial b}{\partial \rho_{Im}} \right) \right) \right] \right\} e^{\lambda z_0} d\lambda, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

nas quais

$$\frac{\partial a}{\partial \rho_{Re}} = \frac{\partial b}{\partial \rho_{Im}} = 2\rho_{Re}\lambda^2, \quad \frac{\partial a}{\partial \rho_{Im}} = -2\rho_{Im}\lambda^2 - \mu_0\omega \quad \text{e} \quad \frac{\partial b}{\partial \rho_{Re}} = -\frac{\partial a}{\partial \rho_{Im}} = 2\rho_{Im}\lambda^2 + \mu_0\omega.$$

# Referências Bibliográficas

- Barreto, A. N. e Dias, C. A. (2014) Fluid salinity, clay content, and permeability of rocks determined through complex resistivity partition fraction decomposition, *Geophysics*, **79**(5):D333–D347.
- Bermúdez, S. L. B. (2015) Critérios para avaliação de soluções em problemas inversos lineares e linearizados: Gravimetria e tomografia de tempo de trânsito, Tese de Doutorado, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Bahia, Brasil.
- Brant, A. A. (1959) Historical summary of overvoltage developments by Newmont Exploration Limited 1946–1955, In: *Wait, J. R., Overvoltage research and geophysical applications: Pergamon Press, Internat. Series on Earth Sciences*, vol. 4, pp. 1–3, Elsevier.
- Brown, R. J. (1985) EM coupling in multifrequency IP and a generalization of the Cole-Cole impedance model, *Geophysical Prospecting*, **33**(2):282–302.
- Çaglar, I. (2000) A method to remove electromagnetic coupling from induced polarization data for an "exponential" earth model, *Pure & Applied Geophysics*, **157**(10):1729–1748.
- Coggon, J. (1984) New three-point formulas for inductive coupling removal in induced polarization, *Geophysics*, **49**(3):307–309.
- Cole, K. S. e Cole, R. H. (1941) Dispersion and absorption in dielectrics I. Alternating current characteristics, *The Journal of Chemical Physics*, **9**(4):341–351.
- Dey, A. e Morrison, H. F. (1973) Electromagnetic coupling in frequency and time-domain induced-polarization surveys over a multilayered earth, *Geophysics*, **38**(2):380–405.
- Dias, C. A. (1968) A non-grounded method for measuring electrical induced polarization and conductivity, Tese de Doutorado, University of California, Berkeley.
- Dias, C. A. (1972) Analytical model for a polarizable medium at radio and lower frequencies, *Journal of Geophysical Research*, **77**(26):4945–4956.
- Dias, C. A. (2000) Developments in a model to describe low-frequency electrical polarization of rocks, *Geophysics*, **65**(2):437–451.
- Dias, C. A. (2017) Método geofísico eletromagnético a multifrequência: Um invento brasileiro, Blue Print Gráfica e Editora, Rio de Janeiro, 1<sup>o</sup> edic..

- Foster, R. M. (1931) Mutual impedance of grounded wires lying on the surface of the earth, *Bell System Technical Journal*, **10**(3):408–419.
- Fullagar, P. K.; Zhou, B. e Bourne, B. (2000) EM-coupling removal from time-domain IP data, *Exploration Geophysics*, **31**(1/2):134–139.
- Garcia, P. M. P. (2013) Metalogênese dos depósitos cupríferos de Caraíbas, Surubim, Vermelhos e Sussuarana, Vale do Curaçá, Bahia, Brasil, Dissert. de Mestrado, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Bahia, Brasil.
- Hallof, P. G. (1974) The IP phase measurement and inductive coupling, *Geophysics*, **39**(5):650–665.
- Hatch, M. (2013) Decoupling spectral induced polarisation data based on Cole-Cole parameters, *ASEG-PEGA*, **2013**(1):1–6.
- Hohmann, G. W. (1973) Electromagnetic coupling between grounded wires at the surface of a two-layer earth, *Geophysics*, **38**(5):854–863.
- Ingber, L. (1989) Very fast simulated re-annealing, *Mathematical and Computer Modelling*, **12**(8):967–973.
- Kemna, A. (2000) Tomographic inversion of complex resistivity: Theory and Application, Der Andere Verlag Osnabrück, Germany.
- LaBrecque, D.; Casale, D. e Adkins, P. (2010) Joint modeling of EM coupling and spectral IP data, In: *23rd EEGS Symposium on the Application of Geophysics to Engineering and Environmental Problems*.
- Liu, M.; Yang, J.; Feng, J.; Wang, T. e Zhang, H. (2016) A discussion on the performance of seven existing models proposed to describe induced polarization, *Geophysics*, **81**(6):E459–E469.
- Luo, Y. e Zhang, G. (1998) Theory and application of spectral induced polarization, Society of Exploration Geophysicists.
- Madden, T. e Cantwell, T. (1967) Part D: Induced polarization. A review, *Mining Geophysics*, **2**:373–400.
- Mahan, M.; Redman, J. e Strangway, D. (1986) Complex resistivity of synthetic sulphide bearing rocks, *Geophysical Prospecting*, **34**(5):743–768.
- Major, J. e Silic, J. (1981) Restrictions on the use of Cole-Cole dispersion models in complex resistivity interpretation, *Geophysics*, **46**(6):916–931.
- Menke, W. (1989) *Geophysical data analysis: Discrete inverse theory*, Academic Press, INC.
- Metropolis, N.; Rosenbluth, A. W.; Rosenbluth, M. N.; Teller, A. H. e Teller, E. (1953) Equation of state calculations by fast computing machines, *The Journal of Chemical Physics*, **21**(6):1087–1092.

- Meyer, W. H. (1990) EM inversion of spectral IP data, In: *Induced polarization: Applications and case histories*, cap. 2, pp. 104–127, Society of Exploration Geophysicists, 4th edic.
- Millett, F. B. (1967) Electromagnetic coupling of collinear dipoles on a uniform half space, *Mining Geophysics*, **2**:401–419.
- Mocitaiba, L. S. R. (2014) Análise da interferência do acoplamento eletromagnético na interpretação de dados de polarização induzida e resistividade, Trabalho de Graduação, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Bahia, Brasil.
- Mocitaiba, L. S. R.; Sampaio, E. E. S. e Lima, O. A. L. (2017) Effect of coupling noise on the interpretation of results of electromagnetic horizontal sounding and modeling, *Studia Geophysica et Geodaetica*, **61**(4):801–825.
- Nair, M. R. e Sanyal, N. (1980) Electromagnetic coupling in IP measurements using some common electrode arrays over a uniform half-space, *Geoexploration*, **18**(2):97–109.
- Parasnis, D. S. (1997) Principles of applied geophysics, Chapman & Hall, 5th edic.
- Pelton, W. H.; Ward, S. H.; Hallof, P. G.; Sill, W. R. e Nelson, P. H. (1978) Mineral discrimination and removal of inductive coupling with multifrequency IP, *Geophysics*, **43**(3):588–609.
- Providência, N. B. (2009) Análise Complexa, Editora Gradiva, Lisboa.
- Remmert, R. (1991) Theory of Complex Functions, vol. 122, Springer Science & Business Media.
- Reynolds, J. M. (1997) An introduction to applied and environmental geophysics, John Wiley & Sons.
- Ribeiro, E. S. (2010) Uma estratégia eficiente para inversão da função constitutiva "condutividade de corrente total" de rochas, segundo o modelo de Dias, Dissert. de Mestrado, Universidade Estadual do Norte Fluminense, Macaé, Rio de Janeiro, Brasil.
- Routh, P. S. e Oldenburg, D. W. (1996) Electromagnetic coupling removal from frequency domain IP data in 2D environments, In: *1996 SEG Annual Meeting*, Society of Exploration Geophysicists.
- Routh, P. S. e Oldenburg, D. W. (2001) Electromagnetic coupling in frequency-domain induced polarization data: A method for removal, *Geophysical Journal International*, **145**(1):59–76.
- Routh, P. S.; Oldenburg, D. W. e Li, Y. (1998) Regularized inversion of spectral IP parameters from complex resistivity data, In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 1998*, pp. 810–813, Society of Exploration Geophysicists.
- Sampaio, E. E. S. (2006) Campo eletromagnético devido a uma linha de dipolos elétricos em um meio condutor, Editora da Universidade Federal da Bahia, Salvador, Bahia, Brasil.

- Sampaio, E. E. S.; Santos, A. B. e Sato, H. K. (1998) Spectral induced polarization and mineral discrimination, In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 1998*, pp. 740–743, Society of Exploration Geophysicists.
- Santos, A. B. (1997) Aplicação do método de polarização induzida espectral à discriminação mineral, Trabalho de Graduação, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Bahia, Brasil.
- Santos, R. S. (2017) Determinação das velocidades intervalares por inversão híbrida em uma abordagem multiescala de parâmetros, Dissert. de Mestrado, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Bahia, Brasil.
- Sen, M. K. e Stoffa, P. L. (1995) Global optimization methods in geophysical inversion, vol. 4, Cambridge University Press.
- Son, J.-S.; Kim, J.-H. e Yi, M.-J. (2006) SIP parameter estimation from the multi-frequency IP data, In: *Proceedings of the 8th SEGJ International Symposium*, pp. 1–6, Society of Exploration Geophysicists of Japan.
- Song, L. (1984) A new IP decoupling scheme, *Exploration Geophysics*, **15**(2):99–112.
- Spies, B. R. e Frischknecht, F. C. (1991) Electromagnetic sounding, *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics*, **2**(Part A):285–426.
- Sumner, J. S. (1972) A comparison of electrode arrays in IP surveying, In: *AIME Annual Meeting—San Francisco, California*, pp. 9–10.
- Sumner, J. S. (1976) Principles of induced polarization for geophysical exploration, Elsevier Scientific Publishing Company.
- Sunde, E. D. (1949) Earth conduction effects in transmission systems, D. Van Nostrand Inc., New York.
- Szu, H. e Hartley, R. (1987) Fast simulated annealing, *Physics Letters A*, **122**(3-4):157–162.
- Tarantola, A. (2005) Inverse problem theory and methods for model parameter estimation, vol. 89, Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Teixeira, J. B. G.; Silva, M. G. e Andrade, J. B. F. (2010) Depósitos de cobre do Vale do Rio Curaçá, Bahia, In: *Modelos de depósitos de cobre no Brasil e sua resposta ao intemperismo*, cap. IV, Serviço Geológico do Brasil – CPRM.
- Telford, W. M.; Geldart, L. P. e Sheriff, R. E. (1990) Applied Geophysics, vol. 2, Cambridge University Press.
- Trofimenkoff, F. N.; Johnston, R. H. e Haslett, J. W. (1982) Electromagnetic coupling between parallel lines on a uniform earth, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, **GE-20**(2):197–200.
- Wait, J. (1982) Geo-electromagnetism, Academic Press.

- Wait, J. R. e Gruszka, T. P. (1986) On electromagnetic coupling "removal" from induced polarization surveys, *Geoexploration*, **24**(1):21–27.
- Ward, S. H. (1990) Resistivity and induced polarization methods, In: *Geotechnical and environmental geophysics*, vol. 1, pp. 147–189, Society of Exploration Geophysicists, 5th edic.
- Wynn, J. C. (1974) Electromagnetic coupling in induced polarization, Tese de Doutorado, The University of Arizona, Department of Geosciences, Arizona.
- Wynn, J. C. (1979) Electromagnetic coupling with a collinear array on a two-layer anisotropic earth, vol. 1077, US Government Printing Office–Washington.
- Wynn, J. C. e Zonge, K. L. (1975) EM coupling, its intrinsic value, its removal and the cultural coupling problem, *Geophysics*, **40**(5):831–850.
- Wynn, J. C. e Zonge, K. L. (1977) Electromagnetic Coupling, *Geophysical prospecting*, **25**(1):29–51.
- Xiang, J.; Jones, N. B.; Cheng, D. e Schlindwein, F. S. (2002) A new method to discriminate between a valid IP response and EM coupling effects, *Geophysical prospecting*, **50**(6):565–576.
- Yuval e Oldenburg, D. W. (1997) Computation of Cole-Cole parameters from IP data, *Geophysics*, **62**(2):436–448.
- Zonge, K.; Wynn, J. e Urquhart, S. (2005) Resistivity, Induced Polarization, and Complex Resistivity, In: *Near Surface Geophysics*, cap. 9, pp. 265–300, Society of Exploration Geophysicists, 13th edic.
- Zonge, K. L. (1972) Electrical properties of rocks as applied to geophysical prospecting, Tese de Doutorado, The University of Arizona, Department of Electrical Engineering, Arizona.
- Zonge, K. L. e Wynn, J. C. (1975) Recent advances and applications in complex resistivity measurements, *Geophysics*, **40**(5):851–864.