matrix

André Dantas Tanure

Geometria Simplética e o Teorema de Darboux

Brasil

2019

André Dantas Tanure

Geometria Simplética e o Teorema de Darboux

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística - IME UFBA como parte dos pré-requisitos para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Universidade Federal da Bahia – UFBA.

Instituto de Matemática e Estatística.

Programa de Graduação

Orientador: Juan Pablo Roggiero Ayala

Brasil

2019

André Dantas Tanure

Geometria Simplética e o Teorema de Darboux/ André Dantas Tanure. – Brasil, 2019-

85 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Juan Pablo Roggiero Ayala

Monografia (Graduação) – Universidade Federal da Bahia – UFBA.
Instituto de Matemática e Estatística.
Programa de Graduação, 2019.

1. Geometria Simplética. 2. Formas Simpléticas. I. Juan Pablo Roggiero Ayala. II. UFBA. III. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Geometria Simplética e o Teorema de Darboux

CDU 02:141:005.7

André Dantas Tanure

Geometria Simplética e o Teorema de Darboux

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística - IME UFBA como parte dos pré-requisitos para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Juan Pablo Roggiero Ayala
Orientador

Eliane da Silva dos Santos
Convidado 1

Benigno Oliveira Alves
Convidado 2

Brasil
2019

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer à Deus, pois sem Ele eu nem aqui estaria agora.

Agradeço à meus pais, por tudo o que já fizeram e pelo suporte continuado até aqui, e à minha irmã, pela companhia e paciência durante todos esses anos. Agradeço à UFBA, pela possibilidade de ter feito este curso. Agradeço ao meu orientador, Juan Pablo Roggiero Ayala, pelo aprendizado, pela paciência e pela oportunidade da Iniciação Científica e agora, da Monografia. Também quero expressar meus agradecimentos ao professor Vinícius Casteluber Laass, pelos aconselhamentos.

Aos amigos, gostaria de agradecer à Matheus, cujas ajudas foram indispensáveis nesse processo de escrita; à Raquel, cujas ligações de 1h30 no mínimo, embora foram poucas, proporcionaram momentos de grande alegria e que me ajudaram muito à passar por esse semestre; à Juliana Pombo, por todos os momentos de companhia e risadas, seja falando de física, refletindo sobre o café, falando das nossas vidas ou falando mal de pitanga; à Janaína, pelos momentos bons e também por aqueles que dividimos nossos problemas com nossas monografias e nossas ânsias; à Juliana Pinho, pelos momentos de descontração e pelas conversas sobre as coisas da vida; à Francehelder, por ter me ajudado quando o LaTeX mais quis me dar problema.

À todos os que me acompanharam nesse período turbulento e que fizeram meus dias mais alegres, meus agradecimentos.

Resumo

Neste trabalho, demonstraremos o Teorema de Darboux no contexto da Geometria Simplética. Estudaremos os espaços vetoriais simpléticos e as variedades simpléticas, e mostraremos a relação que difeomorfismos entre variedades tem com simplectomorfismos nos fibrados cotangentes. Exporemos um pouco da teoria destes, e estudaremos o Teorema de Moser. Em seguida, demonstraremos o Teorema de Darboux.

Palavras-chave: Variedades Simpléticas, Teorema de Moser, Teorema de Darboux.

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho é demonstrar o Teorema de Darboux da Geometria Simplética. Para isto, tivemos duas etapas:

1. Estudamos os espaços vetoriais simpléticos e suas propriedades, até usá-los para definir nossso ambiente de estudo: as variedades simpléticas.
2. Estudamos o comportamento das formas simpléticas em variedades compactas, culminando no Teorema de Moser.

O primeiro capítulo trata de conceitos e resultados preliminares, onde introduziremos conceitos e definições gerais no âmbito das variedades diferenciáveis, e exploramos a teoria das mesmas. As definições e resultados deste capítulo são cruciais para o entendimento deste trabalho.

Abordaremos brevemente a noção de variedade diferenciável, e do que significa uma função entre variedades ser diferenciável. Depois, exploraremos os vetores tangentes e o diferencial de uma aplicação; e com estas ferramentas podemos estudar o comportamento local das funções diferenciáveis.

Após este início, exporemos um pouco sobre campos de vetores em variedades e os seus fluxos, para em seguida, entendermos os k-Tensores em espaços vetoriais. Munidos destes conceitos, podemos introduzir as formas diferenciais e seus grupos de Cohomologia, concluindo com uma breve exposição sobre famílias suaves de formas diferenciais.

No segundo capítulo, desenvolveremos a teoria das variedades simpléticas. Começaremos pelos espaços vetoriais simpléticos, para poder definir os conceitos iniciais que nos permitirão levar à teoria para o âmbito das variedades diferenciáveis.

Posteriormente, estudaremos o principal exemplo de uma variedade simplética - O fibrado cotangente T^*M de uma variedade diferenciável. Mostraremos como um difeomorfismo entre variedades induz um simplectomorfismo entre os seus fibrados cotangentes, e estudaremos um pouco da estrutura das subvariedades lagrangianas de T^*M.

Em seguida, daremos alguns resultados sobre a teoria dos campos de vetores que dependem do tempo, e exporemos a noção de Derivada de Lie de uma forma diferencial, para podermos obter igualdades que serão úteis na obtenção do Teorema de Moser.

Então, analisaremos o chamado *Truque de Moser*, que é o resultado do *Insight* alcançado por Jürgen Moser sobre o comportamento de certas classes de cohomologia de formas simpléticas em variedades compactas.

Enfim, de posse do Teorema de Moser, provaremos o Teorema de Darboux, cuja importante consequência é mostrar que na Geometria Simplética, não existem invariantes locais.

1 Variedades Diferenciáveis

1.1 Variedades Topológicas.

Definição 1.1.1. *Uma* ***variedade topológica de dimensão n*** *ou uma* ***n-variedade*** *é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável, localmente homeomorfa à $\mathbb{R}^n$.*

Observação 1.1.1. *É equivalente definir variedade como sendo um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável, localmente homeomorfo à um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. De fato, se o espaço for localmente homeomorfo à $\mathbb{R}^n$, basta tomarmos uma bola $V \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfo à $\mathbb{R}^n$ usando uma homotetia. Por outro lado, se o espaço é localmente homeomorfo à um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, podemos restringir o homeomorfismo de forma que sua imagem seja uma bola aberta contida no aberto. Como bolas abertas são homeomorfas à $\mathbb{R}^n$, temos a primeira definição.*

Dada uma n-variedade M, chamamos um par (U, φ) onde U é aberto de M e $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo de **carta de M**, e o homeomorfismo é chamado de **parametrização de U**. Se $p \in M$, uma carta (U, φ) contendo p é dita **carta sobre p**. Caso $\varphi(p) = 0$, dizemos que a carta está **centrada em p**. Dadas duas cartas (U, φ) e (V, ψ), temos que as funções $(\psi \circ \varphi^{-1}) : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ e $(\varphi \circ \psi^{-1}) : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$ são chamadas **mudança de coordenadas**.

Vejamos agora alguns exemplos:

Exemplo 1.1.1. *O espaço $\mathbb{R}^n$ com a única carta $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$ é uma n-variedade.*

Exemplo 1.1.2. *Dada uma base $\{v_1, ..., v_n\}$, um espaço vetorial real V é uma n-variedade, sendo o homeomorfismo φ dado pelo mapa que leva cada ponto nas suas coordenadas. Note que cada escolha de uma base determina um homeomorfismo em $\mathbb{R}^n$*

Exemplo 1.1.3 (A esfera $\mathbb{S}^n$). *Seja $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ a esfera n-dimensional. Denotando por $S := (0, 0, ..., 0, -1)$ e $N := (0, 0, ..., 1)$, definimos $\varphi_N : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ por $(x_1, ..., x_{n+1}) \mapsto \left(\dfrac{x_1}{x_{n+1} - 1}, ..., \dfrac{x_n}{x_{n+1} - 1}\right)$, e $\varphi_S : \mathbb{S}^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n$ por $(x_1, ..., x_{n+1}) \mapsto \left(\dfrac{x_1}{1 + x_{n+1}}, ..., \dfrac{x_n}{1 + x_{n+1}}\right)$. Com essas duas cartas, $\mathbb{S}^n$ é uma variedade topológica de dimensão n. $\varphi_N(\varphi_S)$ é chamada projeção estereográfica a partir do polo norte(polo sul).*

Exemplo 1.1.4 (O espaço projetivo real $\mathrm{P}^n(\mathbb{R})$). *No $\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$, introduzimos a relação $(x_1, ..., x_{n+1}) \sim (y_1, ..., y_{n+1}) \iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $x_i = \alpha y_i, \forall i \in \{1, ..., n + 1\}$.*

Munimos $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ da topologia quociente induzida por $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Denotando os pontos de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ por $[x_1, ..., x_{n+1}]$, note que dado $x_i \neq 0$, temos

$$[x_1, ..., x_{n+1}] = \left[\frac{x_1}{x_i}, ... \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_{n+1}}{x_i}\right]$$

Definamos em $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ os conjuntos $V_i = \{[x_1, ..., x_{n+1}] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \mid x_i \neq 0\}$. Temos funções $\varphi_i : V_i \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ por $[x_1, ..., x_{n+1}] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_i}, ... \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$.

Cada $\varphi_i : V_i \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ é injetora, pois dados $(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n+1})$, $(y_1, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_{n+1}) \in \mathbb{R}^n$ com $\left(\frac{x_1}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_{n+1}}{x_i}\right) = \left(\frac{y_1}{y_i}, ..., \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_{i+1}}{y_i}, ..., \frac{y_{n+1}}{y_i}\right)$, temos que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x_1}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_{n+1}}{x_i}\right) &= \left(\frac{y_1}{y_i}, ..., \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_{i+1}}{y_i}, ..., \frac{y_{n+1}}{y_i}\right) \\
(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n+1}) &= x_i \left(\frac{y_1}{y_i}, ..., \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_{i+1}}{y_i}, ..., \frac{y_{n+1}}{y_i}\right) \\
(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n+1}) &= \frac{x_i}{y_i}(y_1, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_{n+1})
\end{aligned}$$

Note que isso implica que $(x_1, ..., x_{n+1}) \sim (y_1, ..., y_{n+1})$, pois $(x_1, ..., x_{n+1}) = \frac{x_i}{y_i}(y_1, ..., y_{n+1})$. Assim, φ_i é injetora.

A continuidade de φ_i vem de $\varphi_i \circ \pi$ ser contínua $\forall i \in \{1, ..., n\}$, e da inversa vem de ser a própria projeção canônica. Logo, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ é uma variedade topológica de dimensão n.

1.2 Variedades Diferenciáveis.

Nossa intenção é trazer as noções de diferenciabilidade para o ambiente das variedades. Mas para isso precisamos de definições preparatórias.

Definição 1.2.1. *Seja M uma n-variedade. Dizemos que duas cartas (U, φ) e (V, ψ) são C^∞***-relacionadas** *se as funções*

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \varphi^{-1}) &: \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V) \\
(\varphi \circ \psi^{-1}) &: \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)
\end{aligned}$$

são C^∞.

Definição 1.2.2. *Um* ***atlas*** *C^∞ para uma variedade topológica M é uma coleção de cartas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ tal que*

1. $\bigcup_{\alpha} U_\alpha = M$

2. $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ *e* (U_β, φ_β) *são* C^∞*-relacionadas,* $\forall \alpha, \beta \in A$ *tal que* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$*.*

*Um **atlas maximal** é o elemento maximal entre os possíveis atlas* C^∞ *de uma variedade com respeito à inclusão.*

Proposição 1.2.1. *Dado um atlas* Γ *para uma* n*-variedade* M*, existe um atlas maximal único* $\overline{\Gamma}$ *que o contém.*

Demonstração. Seja $\Gamma = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ um atlas de M. Definimos $\overline{\Gamma} := \{(U, \varphi) \mid \exists \alpha \in A$ com $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ compatível com $(U, \varphi)\}$

Primeiro, notemos que $\overline{\Gamma}$ é um atlas, pois temos que $\Gamma \subset \overline{\Gamma}$ e $\bigcup_{\alpha} U_\alpha = M, (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Gamma$, e dadas (U, φ) e $(V, \psi) \in \overline{\Gamma}$, temos cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e (U_β, φ_β) compatíveis com (U, φ) e (V, ψ) respectivamente, temos:

$$\psi \circ \varphi^{-1} = \underbrace{\psi \circ \varphi_\beta^{-1}}_{C^\infty} \circ \underbrace{\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}}_{C^\infty} \circ \underbrace{\varphi_\alpha \circ \varphi}_{C^\infty}$$

O que mostra que $\psi \circ \varphi^{-1}$ é C^∞. A outra composição pode ser analisada de forma análoga. Concluímos assim que (U, φ) e (V, ψ) são C^∞-relacionadas e que $\overline{\Gamma}$ é um atlas.

Agora vejamos que $\overline{\Gamma}$ é um atlas maximal. Se Δ é um atlas contendo Γ, então todas as cartas de Δ são C^∞-compatíveis com alguma carta de Γ, e logo elas estão em $\overline{\Gamma}$.

Para provar a unicidade, seja Θ um atlas contendo $\overline{\Gamma}$. Temos assim que toda carta de Θ é C^∞-compatível com alguma carta de $\overline{\Gamma}$. Mas isso implica que toda carta de Θ é C^∞-compatível com alguma carta de Γ, o que, por definição de $\overline{\Gamma}$, significa que $\Theta \subset \overline{\Gamma}$, o que prova a maximalidade de $\overline{\Gamma}$. $\square$

Definição 1.2.3. *Uma **Variedade Diferenciável*** (M, Γ) *é uma variedade topológica* M *munida de um atlas maximal* Γ*.*

Em geral, vamos suprimir o atlas da notação ao falar de uma variedade diferenciável M.

Exemplo 1.2.1. *O espaço* $\mathbb{R}^n$ *com o atlas maximal contendo a carta* $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$ *é uma variedade diferenciável.*

Exemplo 1.2.2. *Um espaço vetorial* V *com um atlas contendo as cartas indicadas no **Exemplo 1.1.2**, é uma variedade diferenciável. As mudanças de coordenadas são dadas pelas mudanças de base, que como são isomorfismos, então são difeomorfismos.*

Exemplo 1.2.3. *A esfera $\mathbb{S}^n$ com um atlas contendo as projeções estereográficas é uma variedade diferenciável, de fato, as mudanças de coordenadas entre as projeções são dadas por:*

$$\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(x_1, ..., x_n) = \varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(x_1, ..., x_n) = \frac{(x_1, ..., x_n)}{\|x\|}$$

Exemplo 1.2.4. *O espaço projetivo real $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ com um atlas maximal contendo as cartas dadas no **Exemplo 1.1.4** é uma variedade diferenciável. De fato, seja, V_i e V_j em $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ com $V_i \cap V_j \neq \emptyset$. Temos que $\varphi_i(V_i \cap V_j) = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_j \neq 0\}$.*

Supondo s.p.g. $i > j$, podemos ver que:

$$\begin{aligned}
\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x_1, ..., x_n) &= \varphi_i\left([x_1, ..., x_{j-1}, 1, x_{j+1}, ..., x_n]\right) \\
&= \varphi_i\left(\left[\frac{x_1}{x_i}, ..., \frac{x_{j-1}}{x_i}, \frac{1}{x_i}, \frac{x_{j+1}}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i} ..., \frac{x_n}{x_i}\right]\right) \\
&= \left(\frac{x_1}{x_i}, ..., \frac{x_{j-1}}{x_i}, \frac{1}{x_i}, \frac{x_{j+1}}{x_i}, ..., \frac{x_n}{x_i}\right)
\end{aligned}$$

que é C^∞ pois $x_i \neq 0$.

Exemplo 1.2.5. *Seja $U \subset M$ um aberto. Podemos ver U como uma variedade diferenciável (chamada **subvariedade aberta**) com o atlas $\{U \cap V \mid \varphi|_{U \cap V}\}$, onde (V, φ) são cartas de M.*

1.3 Aplicações diferenciáveis entre variedades.

Com a estrutura de atlas, podemos agora definir a noção de diferenciabilidade de aplicações entre variedades:

Definição 1.3.1. *Sejam M e N duas variedades, de dimensões n e m respectivamente. Uma função $f : M \to N$ é **diferenciável em** $p \in M$ se existem cartas (U,φ) de M ao redor de p e (V, ψ) de N ao redor de $f(p)$ tal que $\hat{f} := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $\varphi^{-1}(p)$. Dizemos que $f : M \to N$ é **diferenciável** se ela é diferenciável $\forall p \in M$.*

Note que a definição independe da parametrização escolhida, pois a mudança de coordenadas é C^∞.

Assim como o caso de funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, temos o seguinte:

Proposição 1.3.1. *Seja $f : M \to N$ uma função diferenciável. Então f é contínua.*

Demonstração. Seja $p \in M$ e $f : M \to N$ uma função diferenciável em p. Como f é diferenciável, então existem (U, φ) ao redor de p e (V, ψ) ao redor de $f(p)$ de forma que

$\hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável. Assim, temos que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável, logo contínua. Como a composição é contínua e as parametrizações são homeomorfismos, temos que f deve ser contínua. □

Observação 1.3.1. *A identidade é uma aplicação diferenciável, e dadas duas aplicações diferenciáveis $f : M \to N$ e $g : N \to P$, temos que a composta delas também é diferenciável.*

Definição 1.3.2. *Uma bijeção $f : M \to N$ diferenciável cuja inversa é diferenciável é chamada **difeomorfismo**.*

Uma consequência importante das definições é:

Proposição 1.3.2. *Dada uma n-variedade M, e (U, φ) carta de M.Então a função $\varphi : U \to \varphi(U)$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. Seja $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ uma carta de M. Para verificarmos a suavidade de φ e de φ^{-1}, usaremos os atlas $\{(U, \varphi)\}$ para U e $\{(\varphi(U), id_{\varphi(U)})\}$ para $\varphi(U)$. Temos:

$$id_{\varphi(U)} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = id_{\varphi(U)}$$
$$\varphi \circ \varphi^{-1} \circ id_{\varphi(U)}^{-1} = id_{\varphi(U)}$$

Como ambas são suaves, temos que $\varphi : U \to \varphi(U)$ é difeomorfismo. □

1.4 O Espaço Tangente e o diferencial de uma aplicação.

Definição 1.4.1. *Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva diferenciável em uma n-variedade M. Considere o conjunto $C_p^\infty(M)$ o conjunto de todas as funções diferenciáveis em $p = \alpha(0)$. O **vetor tangente à curva** α **em** p é o operador $\dot{\alpha} : C_p^\infty(M) \to \mathbb{R}$ dado por*

$$\dot{\alpha}(f) = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_0$$

*Um **vetor tangente à** M **em** p é um vetor tangente à alguma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto de todos os vetores tangentes à M em p é chamado **Espaço tangente à** M **em** p, e denotado T_pM.*

Podemos obter uma expressão da derivada usando cartas. Para isso, seja (U, φ) uma carta sobre p. A curva α se escreve, em coordenadas locais, por

$$(\varphi \circ \alpha)(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}(f) &= \left.\frac{d(\varphi \circ \alpha)}{dt}\right|_0 \\
&= \left.\frac{d}{dt}\left(\overbrace{(f \circ \varphi^{-1})}^{\hat{f}} \circ \overbrace{(\varphi \circ \alpha)}^{\hat{\alpha}}\right)\right|_0 \\
&= \frac{d}{dt}(\hat{f}(x_1(t), ..., x_n(t))) \mid_0 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}\right|_{\hat{\alpha}(0)} \left.\frac{dx_i}{dt}\right|_0 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\varphi(p)}\right)(\hat{f})
\end{aligned}$$

Obtemos assim uma expressão

$$\dot{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

onde $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (f) := \left(\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}\right)_{\varphi(p)}$

Observe que pela definição acima, $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ é o operador associado à curva α em M cuja representação local seja dada por $(x_1, ..., x_i + t, ..., x_n)$, pois como derivar parcialmente uma função real é derivar a composição $(f \circ \beta)(t)$ com $\beta(t) = (x_1, ...x_i + t, ..., x_n)$, podemos tomar a curva $\alpha := \varphi^{-1} \circ \beta$ em M e por verificação direta, obtemos o desejado.

Note que duas curvas determinam o mesmo vetor tangente se existe uma carta φ onde as derivadas parciais de sua representação local são iguais.

Em particular, temos o seguinte:

Teorema 1.4.1. *O espaço tangente à M em p é um espaço vetorial n-dimensional.*

Demonstração. Seja (U, φ) uma carta sobre p e $\varphi(p) = (x_1, ..., x_n)$

Como T_pM é a imagem do operador $\alpha \mapsto \frac{d(\cdot \circ \alpha)}{dt}$, ele é um espaço vetorial.

Seja agora $\mathcal{B} = \text{span}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right\} \subset T_pM$. Mostremos que $\mathcal{B}$ é uma base de T_pM.

- *$\mathcal{B}$ gera T_pM.* Seja $v \in \mathcal{B}$. v pode ser escrito como $v = \sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$, para $v_i \in \mathbb{R}$. Considere a curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ definida por $\gamma(t) = \varphi^{-1}(x_1 + v_1 t, ..., x_n + v_n t)$. Então $\hat{\gamma}(t) = (x_1 + v_1 t, ..., x_n + v_n t)$, e $x_i'(0) = v_i$, implicando que $\dot{\gamma} = v$. Logo $v \in T_pM$

- *B é L.I.* Sejam $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que

  $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = 0$$

  Como essa igualdade vale para toda função real, então vale também para $f = \pi_i \circ \varphi$. Substituindo, temos

  $$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (\pi_i \circ \varphi) &= 0 \\ \alpha_i &= 0 \end{aligned}$$

  Repetindo o processo para todo $i \in 1, ..., n$, obtemos que os $\alpha_i = 0$.

Concluímos assim que $\mathcal{B}$ é uma base de T_pM. □

Dizemos que a base formada por esses operadores $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ é a **base associada** à (U, φ)

Vale notar que a base encontrada depende da carta escolhida - diferentes cartas nos dão diferentes bases de T_pM. Neste caso, vale perguntar qual a expressão da matriz da mudança de base. A resposta é dada pelo:

Proposição 1.4.1. *Sejam $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right\}$ e $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p, ..., \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_p\right\}$ duas bases de T_pM associadas às cartas (U, φ) e (V, ψ) sobre p. Se $v = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ e $w = \sum_{i=1}^{n} b_i \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p$, então a matriz de mudança de base é dada por $[a_{ij}]_n = \left[\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)\right]_n$*

Demonstração. Temos que $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right\}$ e $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p\right\}$ são bases de T_pM. Logo, existe uma matriz $[a_{ij}]$ tal que $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p$.

Aplicando os dois lados à função $y_i := \pi_i \circ \psi$, temos

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_p &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\left(\frac{\partial y_i}{\partial y_k}\right)_p \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\delta_{ik} \\ &= a_{ij}\end{aligned}$$

□

Veremos agora que uma aplicação diferenciável $f : M \to N$ entre variedades induz uma aplicação entre espaços tangentes.

Definição 1.4.2. *Seja $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável em p, e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva diferenciável em M. Temos que $\gamma := (f \circ \alpha) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$ é uma curva diferenciável em N. Definimos o* ***diferencial de*** f ***em*** p *por*

$$\begin{array}{rccccc}(df)_p : & T_pM & \to & T_{f(p)}N & & \\ & v & \mapsto & (df)_p(v) : & C^\infty(N) & \to \mathbb{R} \\ & & & & g & \mapsto \left.\dfrac{d(g\circ f\circ\alpha)}{dt}\right|_0\end{array}$$

Uma característica importante do diferencial de uma função é:

Proposição 1.4.2. *O diferencial $(df)_p$ de uma função $f : M \to N$ independe da curva α escolhida.*

Demonstração. Sejam (U, φ) e (V, ψ) cartas sobre p e $f(p)$ respectivamente, com $f(\varphi^{-1}(U)) \subset \psi(V)$. Sejam $v \in T_pM$ e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$ e $\dot\alpha = v$. Em coordenadas locais, temos que a curva α é dada por $\hat\alpha(t) = (\varphi \circ \alpha)(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, e, a curva $\gamma := f \circ \alpha$ é dada por $\hat\gamma(t) = (\psi \circ f \circ \alpha)(t) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1(t), ..., x_n(t)) = (y_1(x(t)), ..., y_n(x(t)))$.

O vetor $\dot\gamma \in T_{f(p)}N$ é dado por

$$\begin{aligned}\dot\gamma &= \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}(y_i(x_1(t), ..., x_n(t)))\bigg|_0 \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{f(p)} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{m} x_k'(0)\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right)\bigg|_0\right]\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{f(p)} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{m} v_k\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right)\bigg|_0\right]\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{f(p)}\end{aligned}$$

Com v_k sendo os componentes de v na base associada à (U, φ). Assim, o diferencial não depende da curva usada enquanto $\dot\alpha = v$. □

Além disso, as coordenadas de $w = (df)_p(v)$ na base associada à (V, ψ) são

$$w_i = \sum_{j=1}^{m} v_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$$

Uma regra que se transfere das funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ é:

Proposição 1.4.3. *Sejam $p \in M$; $f : M \to N$, $g : N \to P$ funções diferenciáveis em p e $f(p)$ respectivamente. Temos que $g \circ f$ é diferenciável em p, e além disso, $d(g \circ f)_p = (dg)_{f(p)} \circ (df)_p$.*

Demonstração. Sejam $f : M \to N$ diferenciável em p, e $g : N \to P$ diferenciável em $f(p)$. Podemos escrever:

$$g \circ f := \eta \circ g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi$$

Para (U, φ) carta sobre p, (V, ψ) carta sobre $f(p)$ e (Z, η) carta sobre $g(f(p))$ Como $\eta \circ g \circ \psi^{-1}$ é diferenciável em $f(p)$, e $\psi \circ f \circ \varphi$ é diferenciável em p, temos que $g \circ f$ é diferenciável em p.

Para verificar a relação dos diferenciais, sejam $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $f : M \to N$, $g : N \to P$, e $h \in C^\infty(P)$ temos:

$$\begin{aligned}
d(g \circ f)_p(v)(h) &= \left(\frac{d}{dt}\right)_0 (h \circ g \circ f \circ \alpha) \\
&= (df)_p(v)(h \circ g) \\
&= (dg)_{f(p)}(df)_p(v)(h) \qquad\qquad \text{pois}(f \dot{\circ} \alpha)(g) = \dot{\alpha}(g \circ f) \\
&= (dg)_{f(p)}((df)_p(v))(h)
\end{aligned}$$

$\square$

Observação 1.4.1. *A base dual de $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p \right\}$ é dada por $\{dx_1, ..., dx_n\}$, pois como $x_i : U \subset M \to \mathbb{R}$, temos que $(dx_i)_p : T_pM \to T_{x_i(p)}\mathbb{R}$, mas $T_{x_i(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ por $a\frac{d}{dt} \mapsto a$, então $(dx_i)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \in \mathbb{R}$.*

$$
\begin{aligned}
(dx_i)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 x_i \circ \varphi^{-1}(x_1, ..., x_i + t, ..., x_n) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \pi_i \circ \varphi \circ \varphi^{-1}(x_1, ..., x_i + t, ..., x_n) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \pi_i((x_1, ..., x_i + t, ..., x_n)) \\
&= \delta_{ij}
\end{aligned}
$$

Definição 1.4.3. *Dada uma n-variedade M, definimos o* ***fibrado tangente à M*** *por $TM := \bigsqcup_{p\in M} T_pM := \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_pM\}$.*

Proposição 1.4.4. *Seja M uma n-variedade. O fibrado tangente TM é uma $2n$-variedade.*

Demonstração. Seja $TM := \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_pM\}$. Para cada carta $(U, \varphi) = (U, x_1, ..., x_n)$ de M, definimos uma carta de TM por

$$
\begin{array}{rccl}
\tilde{\varphi}: & \pi^{-1}(U) & \to & \mathbb{R}^{2n} \\
& (p, v) & \mapsto & (x_1(p), ..., x_n(p), dx_1(v), ..., dx_n(v))
\end{array}
$$

Temos que $\tilde{\varphi}$ tem uma inversa dada por

$$
\begin{array}{rccl}
\tilde{\varphi}^{-1}: & \mathbb{R}^{2n} & \to & \pi^{-1}(U) \\
& (q_1, ..., q_n, c_1, ..., c_n) & \mapsto & \left(p, \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right)
\end{array}
$$

onde $x_i(p) = q_i$.

E com isso podemos transportar a topologia de $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ para $U \times \mathbb{R}^n$. Dessa forma, definimos uma base

$$\mathcal{B} := \bigcup_{p\in M} \{A \mid A \text{ é aberto em } TU_\alpha, \text{ onde } U_\alpha \text{ é aberto de uma carta de } M\}.$$

Damos a TM a topologia gerada pela base $\mathcal{B}$. Com esta, ele é um espaço de Hausdorff com base enumerável.

Vejamos agora que para $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ parametrizações, a mudança de coordenadas é diferenciável.

Sejam $(U, \varphi) = (U, x_1, ..., x_n)$, $(V, \psi) = (V, y_1, ..., y_n)$ cartas de M, e $p \in U \cap V$, com $\varphi(p) = q$ e $\psi(p) = r$. Temos

$$(\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1})(q, c) = \tilde{\psi}\left(p, \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right) = (r_1, ..., r_n, b_1, ..., b_n)$$

onde as primeiras n coordenadas são dadas pela mudança de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1}$, e $b_i = \sum_{i=1}^{2n} c_i \left(\frac{\partial(\psi^{-1} \circ \varphi)_i}{\partial x_i} \right)_{\varphi^{-1}(p)}$. Temos assim que as mudanças de coordenadas são C^∞, e portanto, TM é uma $2n$-variedade. $\square$

Outro espaço notório é o **espaço cotangente à p em M**, dado por $(T_pM)^* = T_p^*M$. Analogamente, pode-se definir o **fibrado cotangente à M** por $T^*M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M = \{(p, \xi) \mid p \in M, \xi \in T_p^*M\}$. Temos também que o Fibrado cotangente é uma $2n$-variedade, com cartas

$$\begin{array}{rccl} \overline{\varphi}: & \pi_*^{-1}(U) & \to & \mathbb{R}^{2n} \\ & (p, \xi) & \mapsto & \left(x_1(p), ..., x_n(p), \xi \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, ..., \xi \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p \right) \end{array}$$

onde $(U, x_1, ..., x_n)$ é uma carta de M, e $\pi_* : T^*M \to M$ é dada por $(p, \xi) \mapsto p$. Note que a mudança entre duas bases $\{dx_1, ..., dx_n\}$ e $\{dy_1, ..., dy_n\}$ é dada por $\left[\left(\frac{dy_i}{dx_j} \right) \right]^T$.

Tanto o fibrado tangente como o cotangente são exemplos de uma outra estrutura, chamada **Fibrado Vetorial**.

Definição 1.4.4. *Um **Fibrado Vetorial Real de posto** n **sobre** M é um espaço topológico X, com uma função contínua π sobre M, satisfazendo as condições:*

1. *$\forall p \in M$, $\pi^{-1}(p)$ é um n-espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.*

2. *$\forall p \in M$, $\exists U \subset M$, $\exists h : \pi^{-1}(U) \overset{\cong}{\to} U \times \mathbb{R}^n$(chamado uma **trivialização local de E sobre U**) satisfazendo:*

   - *$\pi_U \circ h = \pi$ (onde $\pi_U : U \times \mathbb{R}^n \to U$ é a projeção em U)*
   - *$\forall q \in U$, $h |_{\pi^{-1}(q)}$ é um isomorfismo entre $\pi^{-1}(q)$ e $\{q\} \times \mathbb{R}^n$*

*No caso de X e M serem variedades diferenciáveis, π diferenciável e as trivializações locais sejam difeomorfismos, dizemos que X é um **fibrado vetorial suave**.*

*Dizemos que uma função $\varphi : M \to X$ é uma **seção** de X se $\pi \circ \varphi = id_M$.*

1.5 Comportamento local das funções diferenciáveis.

Dada uma função suave $f : M \to N$, dependendo de como seja a derivada da função, podemos avaliar seu comportamento localmente. Faremos as seguintes definições:

Definição 1.5.1. *Sejam M e N variedades diferenciáveis de dimensões n e m respectivamente. Temos que*

- *f é uma **imersão** em p se $(df)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é injetora.*
- *f é uma **submersão** em p se $(df)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é sobrejetora.*

Note que se f é uma imersão, então $n \leq m$, e se f é uma submersão, $m \leq n$.

Exemplo 1.5.1. *A função $f(t) = (cos(t), sen(2t))$ é uma imersão, mas a função $f(t) = (t^2, t^3)$ não é uma imersão em 0.*

Exemplo 1.5.2. *A função $f(x, y) = x+y^2k$ é uma submersão de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, pois $(df)_{(x,y)} = 2ky$ é sobrejetora.*

Teorema 1.5.1 (Forma local das imersões.)**.** *Sejam M e N variedades de dimensão n e m respectivamente, e $f : M \to N$ uma imersão em p. Então existem cartas (U, φ) de p e (V, ψ) de $f(p)$ tal que*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n, 0, ..., 0)$$

Demonstração. Seja $f : M \to N$ uma imersão em p. S.p.g. tomemos cartas (U, φ) e (V, ψ) de p e $f(p)$ respectivamente com $\varphi(p) = 0$ e $\psi(f(p)) = 0$.

Como o diferencial é injetor, a menos de uma mudança de bases, podemos supor que a matriz que o representa é da forma

$$\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$$

Definimos a aplicação

$$\begin{array}{rccl} F: & \varphi(U) \times \mathbb{R}^{m-n} & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x_1, ..., x_m) & \mapsto & \hat{f}(x_1, ..., x_n) + (0, ..., 0, x_{n+1}, ..., x_m) \end{array}$$

O diferencial de F em 0 tem como matriz

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

Portanto dF_0 é um isomorfismo e pelo teorema da função inversa, temos que existem A e B em $\mathbb{R}^m$ com $A \subset U \times \mathbb{R}^{m-n}$, $B \subset V$ tal que $0 \in A$, $0 \in B$ e $F \mid_A$ é um difeomorfismo.

Definimos uma nova parametrização de $\psi^{-1}(B)$ por $F^{-1} \circ \psi$. Note que $F^{-1} \circ \psi$ é uma parametrização, porque a mudança de coordenadas entre ela e ψ é F ou F^{-1}, ambas C^∞.

Agora, seja:

$$\begin{array}{rccl} j: & \varphi(U) & \to & \varphi(U)\times\mathbb{R}^{m-n} \\ & (x_1,...,x_n) & \mapsto & (x_1,...,x_n,0,...,0) \end{array}$$

Mostraremos que j é representação local de f nas cartas φ e $F^{-1}\circ\psi$.

De um lado, temos $(F^{-1}\circ\psi\circ f\circ\varphi)(x) = F^{-1}\circ\hat{f}(x) = y \implies \hat{f}(x) = F(y) = \hat{f}(y_1,...,y_n) + (0,...,0,y_{n+1},...,y_m)$.

Por outro lado $F(x) = \hat{f}(x_1,...,x_n)$. Logo $(y_1,...,y_m) = (x_1,...,x_n,0,...,0)$, e assim concluímos que

$$F^{-1}\circ\psi^{-1}\circ f\circ\varphi = j.$$

□

Teorema 1.5.2 (Forma local das submersões.)**.** *Sejam $f: M\to N$ uma submersão em p. Então existem cartas (U,φ) ao redor de p, e (V,ψ) ao redor de $f(p)$, tal que*

$$(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(x_1,...,x_n) = (x_1,...,x_m).$$

Demonstração. Seja f uma submersão em p, e π a projeção nas primeiras n coordenadas. S.p.g $\varphi(p)=0$, e $\psi(f(p))=0$. A menos de uma mudança de bases, a matriz do diferencial de f é dada por

$$\begin{bmatrix} I_n & * \end{bmatrix}$$

Definimos uma função

$$\begin{array}{rccl} F: & \varphi(U)\subset\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x_1,...,x_n) & \mapsto & (\hat{f}(x_1,...,x_n),x_{m+1},...,x_n) \end{array}$$

Note que $\pi\circ F = \hat{f}$

Temos que a matriz que representa dF_0 é da forma

$$[\mathrm{dF}_0] = \begin{bmatrix} I_n & * \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

Pelo Teorema da Função Inversa, temos que existem abertos $A\subset\varphi(U)$, $B\subset\mathbb{R}^m$ tal que $0\in A$, $0\in B$, e $F\mid_A$ é um difeomorfismo.

Definimos uma nova parametrização $F\circ\varphi$ de $\varphi^{-1}(A)$. Note que como a mudança de coordenadas com φ é F ou F^{-1}, logo é C^∞.

Mostraremos que a representação local de f nas coordenadas $F\circ\varphi$ e ψ é π.

Definimos uma função

$$\begin{array}{rccc} h: & F\circ\varphi(U) & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x_1,...,x_m) & \mapsto & (x_1,...,x_n) \end{array}$$

Temos que $(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\circ F^{-1})(x) = (\hat{f}\circ F^{-1})(x) = \pi(x)$. Concluímos que a representação local de f é a projeção nas primeiras n coordenadas. $\square$

Existe mais um tipo de função relevante para o estudo das variedades:

Definição 1.5.2. *Sejam M e N duas variedades. Uma função $f: M\to N$ é dita um* ***mergulho*** *se f é uma imersão e M é homeomorfa à sua imagem munida com a topologia induzida de N.*

Exemplo 1.5.3. *A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ dada por $t\mapsto(e^t cost, e^t sent)$ é um mergulho de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$. De fato, $f'(t) = (e^t(cost - sent), e^t(sent + cost))$ é injetora, e f é contínua com inversa $f^{-1}(e^t cost, e^t sent) = \dfrac{\|(e^t cost, e^t sent)\|}{e^t}$. Logo $\mathbb{R}\cong f(\mathbb{R})$.*

Exemplo 1.5.4. *A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ dada por $t\mapsto(t^2-1, t^3-t)$ é uma imersão que não é mergulho. De fato, sua derivada $f'(t) = (2t, 3t^2-1)$ é injetora, porém f não é injetora, pois $f(1) = f(-1) = (0,0)$.*

Usando os conceitos apresentados até agora, podemos definir a nossa noção de ”subestrutra”:

Definição 1.5.3. *Seja M uma n-variedade, e $N\subset M$. Dizemos que N é uma* ***subvariedade*** *de M se existir um mergulho de N em M.*

Uma importante condição equivalente para ser uma subvariedade é dada por:

Teorema 1.5.3. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n, e $N\subset M$. N é uma subvariedade de dimensão m de M se, e somente se, $\forall p\in M$, existe uma carta $(U, x_1, ..., x_n)$ ao redor de p em N tal que em $N\cap U$, $x^{m+1} = ... = x^n = 0$(tais cartas são chamadas* ***cartas adaptadas****).*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Seja N com a topologia induzida de M, e seja $i: N\to M$ a inclusão. Considerando $i(N)$ com a topologia induzida, temos que i é um homeomorfismo. Basta verificarmos que i é uma imersão.

Tomemos uma carta $(U, x_1, ..., x_n)$ de N satisfazendo $x_{m+1} = ... = x_n = 0$ em $N\cap U$. Relativa às cartas $(N\cap U, x_1, ..., x_m)$ e $(U, x_1, ..., x_n)$, temos

$$(x_1,...,x_m)\mapsto(x_1,...,x_m,0,...,0)$$

O que mostra que de fato ela é uma imersão.

($\Rightarrow$) Suponha agora que N é uma subvariedade de M, sendo f o mergulho de N em M. Provaremos que $f(N)$ tem cartas adaptadas.

Como f é uma imersão, temos, pela Forma Local das Imersões, que existem cartas $(U, x_1, ..., x_n)$ ao redor de p e $(V, y_1, ..., y_n)$ ao redor de $f(p)$ tal que a representação local de f é

$$(x_1, ..., x_n) \mapsto (x_1, ..., x_m, 0, ..., 0)$$

Precisamos agora que, em uma vizinhança de $f(p)$ em V, o conjunto $f(N)$ seja definido por $x_{m+1} = ... = x_n = 0$.

Como f é um homeomorfismo, então $f(U)$ é aberto em $f(N)$. Pela definição de topologia induzida, temos que existe V' aberto de M tal que $V' \cap f(N) = f(U)$. Em $V \cap V'$, temos:

$$V \cap V' \cap f(N) = V \cap f(U) = f(U)$$

e $f(U)$ é definido por $x_{m+1} = ... = x_n = 0$. Assim, temos que $(V \cap V', x_1, ..., x_n)$ é uma carta adaptada à $f(N)$ contendo $f(p)$. Como $f(p)$ é um ponto arbitrário de $f(N)$, concluímos que podemos definir cartas adaptadas para $f(N)$.

$\square$

Agora, encontraremos um critério para podermos reconhecer quando um determinado conjunto é uma subvariedade. Antes, precisamos de umas definições:

Definição 1.5.4. *Seja $f : M \to N$ uma função diferenciável entre variedades de dimensão n e m respectivamente. Temos que um ponto $q \in M$ é chamado **ponto regular** de f se $(df)_p$ é sobrejetora, e um ponto $p \in N$ é um **valor regular** de f se todo ponto em $f^{-1}(p)$ é um ponto regular de f.*

*Um ponto $q \in M$ é um **ponto crítico** de f se não é um ponto regular. Da mesma forma, um ponto $p \in N$ é um **valor crítico** de f se existe um ponto em $f^{-1}(p)$ que é um ponto crítico de f.*

Podemos ver que imagens inversas de valores regulares são subvariedades:

Teorema 1.5.4. *Seja $q \in N$ um valor regular de $f : M \to N$ e suponha que $L = f^{-1}(q)$ é não-vazio. Então L é uma subvariedade de M e $T_pL = ker(df)_p \subset T_pM$, $\forall p \in L$.*

Demonstração. Pela forma local das submersões, para cada ponto $p \in f^{-1}(q)$, podemos escolher cartas (U, φ) e (V, ψ) ao redor de p e $f(p)$ respectivamente, com $\varphi(p) = 0$, $\psi(q) = 0$, e cuja representação local nelas seja a projeção π_1 nas n primeiras coordenadas. Para construir um atlas, usaremos esses conjuntos U obtidos pela Forma Local das Submersões.

Seja $U \cap f^{-1}(q) := \tilde{U}$. Definamos em $\tilde{U}$ uma parametrização

$$\begin{array}{rccl} \eta: & \tilde{U} & \to & \mathbb{R}^{m-n} \\ & p & \mapsto & (x_{n+1}, ..., x_m) \end{array}$$

Temos que a coleção $(\tilde{U}, \eta)$ forma um atlas para $f^{-1}(q)$, o que o torna uma variedade de dimensão $m - n$.

Agora, seja $g : f^{-1}(q) \to M$ sendo a inclusão. Como $Im(g) = f^{-1}(q)$, temos que g é homeomorfismo na imagem. Em coordenadas locais, $\hat{g}(x_{n+1}, ..., x_m) = (x_1(x_{n+1}, ..., x_m), ..., x_m(x_{n+1}, ..., x_m))$, que tem diferencial injetor. Logo, g é um mergulho de $f^{-1}(q)$ em M.

Agora vamos mostrar que $T_p(f^{-1}(q)) = ker(df)_p$. Para isso, para toda curva α em $f^{-1}(q)$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\dot{\alpha} = v$. Então $(f \circ \alpha)(t) = q$, $\forall t$ e assim

$$\left. \frac{df \circ \alpha}{dt} \right|_0 = 0 \iff (df)_p \dot{\alpha} = (df)_p(v) = 0$$

Implicando que $v \in ker(df)_p$. Como $dimT_pL = dim(ker(df)_p) = m - n$, o resultado segue.

$\square$

1.6 Campos de vetores

Nesta seção vamos falar de alguns dos objetos mais importantes da teoria das variedades: Os campos de vetores.

Definição 1.6.1. *Seja M uma variedade diferenciável. Um* ***campo de vetores em M*** *é uma aplicação $X : M \to TM$ tal que $\forall p \in M, X(p) := X_p \in T_pM$.*

Dizemos que um campo de vetores é **suave** se X é uma função C^∞. O conjunto de todos os campos de vetores suaves em M é denotado $\mathfrak{X}(M)$.

Temos os seguintes critérios:

Proposição 1.6.1. *Seja M uma n-variedade, e $(U, x_1, ..., x_n)$ uma carta em M. Uma função $X : U \to TU$ é um campo de vetores suave em U se, e somente se, existem $X_i : U \to \mathbb{R}, i \in \{1, ..., n\}$ suaves, tal que*

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} X_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

Demonstração. Consideremos a carta $(U, x_1, ...x_n)$ em M. Como $X_p \in T_pM$, temos que

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} X_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

Para $X_i : U \to \mathbb{R}, i \in \{1, ..., n\}$

Na carta $(U \times \mathbb{R}^n, \tilde{\varphi})$ associada à carta, temos que a representação local de X é

$$\tilde{X}(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n, \hat{X}_1(x_1, ..., x_n), ..., \hat{X}_n(x_1, ..., x_n))$$

Então X é diferenciável se, e somente se $\hat{X}_i : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ é diferenciável para cada $i \in \{1, ..., n\}$, ou seja, se e somente se $X_i : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável, $\forall i \in \{1, ..., n\}$. □

Proposição 1.6.2. *Seja M uma variedade diferenciável, e X um campo de vetores em M. Temos que X é diferenciável em M se, e somente se, $\forall f \in C^\infty(M)$, a função $Xf : M \to \mathbb{R}$ é diferenciável.*

Demonstração. $(\Leftarrow)$ Suponha que $Xf : M \to \mathbb{R}$ é diferenciável. Temos então que

$$Xf(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\cdot) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{(\cdot)}$$

Compondo com dx_i, temos

$$dx_i(Xf)(\cdot) = a_i(\cdot)$$

Como dx_i e Xf são diferenciáveis, temos que as a_i são funções diferenciáveis, e logo X é diferenciável.

$(\Rightarrow)$ Seja X um campo de vetores diferenciável, e f uma função real diferenciável. Tomando $(U, \varphi) = (U, x_1, ..., x_n)$, temos:

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}\right)$$

Como Xf é soma de produtos de funções diferenciáveis, temos que Xf é diferenciável.

□

Note que

$$\begin{aligned} X_p f &= \sum_{i=1}^{n} X_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (f) \\ &= \sum_{i=1}^{n} X_i(p)(df)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \\ &= (df)_p \left(\sum_{i=1}^{n} X_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right) = (df)_p X_p \end{aligned}$$

Dados dois campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, podemos definir um terceiro campo chamado **colchete de Lie** por

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf), \forall f \in C^\infty(M)$$

Para vermos que o conchete de Lie é um campo de vetores, considere uma parametrização $\varphi : U \subset M \to \mathbb{R}^n$. Temos que

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \text{ e } Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

Dada $f \in C^\infty(M)$, avaliando um termo da soma, temos

$$\begin{aligned} X_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \left(Y_j \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_j}\right) - Y_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \left(X_i \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}\right) &= X_i \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_j} + Y_j \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial x_i \partial x_j}\right) \\ &\quad - Y_j \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i} + X_i \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial x_j \partial x_i}\right) \\ &= X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i} \\ &= \left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\hat{f} \\ &= \left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(f) \end{aligned}$$

Onde os termos mistos se anulam pelo Teorema de Schwarz sobre derivadas mistas. Invertendo os i e j, e agrupando os termos $\forall i, j$, temos que $[X,Y] = \sum_{i,j} \left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}$ é um campo de vetores.

Note que $[X,Y]$ é um campo suave, pois $X(Yf) - Y(Xf)$ é suave para toda $f \in C^\infty(M)$.

Dizemos que dois campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ **comutam** se $[X, Y] = 0$.

O Colchete de Lie tem as seguintes propriedades:

Proposição 1.6.3. *Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, valem:*

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}[\alpha X + \beta Y, Z] &= \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z] \\ [X, \alpha Y + \beta Z] &= \alpha[X, Y] + \beta[X, Z]\end{aligned}$$

2. $[X, Y] = -[Y, X]$

3. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ *(Identidade de Jacobi)*

4. $\forall f, g \in C^\infty(M)$,$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$ *(Regra de Leibniz)*

Demonstração. Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f \in C^\infty$ e $p \in M$.

1.

$$\begin{aligned}[\alpha X + \beta Y, Z]_p f &= ((\alpha X_p + \beta Y_p)(Z_p f)) - (Z_p(\alpha X_p + \beta Y_p) f) \\ &= \alpha X_p(Z_p f) + \beta Y_p(Z_p f) - Z_p(\alpha X_p f + \beta Y_p f) \\ &= \alpha X_p(Z_p f) + \beta Y_p(Z_p f) - Z_p(\alpha X_p f) - Z_p(\beta Y_p f) \\ &= \alpha(X_p(Z_p f) - Z_p(X_p f)) + \beta(Y_p(Z_p f) - Z_p(Y_p f)) \\ &= \alpha[X_p, Z_p]f + \beta[Y_p, Z_p]f\end{aligned}$$

Como p e f foram arbitrários, vale a identidade desejada. A segunda identidade é análoga.

2. $[X, Y]_p f = X_p(Y_p f) - Y_p(X_p f) = -(Y_p(X_p f) - X_p(Y_p f)) = -[Y_p, X_p]f$

Como p e f foram arbitrários, vale a identidade desejada.

3.

$$\begin{gathered}[[X_p, Y_p], Z_p]f + [[Y_p, Z_p], X_p]f + [[Z_p, X_p], Y_p]f = [X_p, Y_p]Z_p f \\ - Z_p[X_p, Y_p]f + [Y_p, Z_p]X_p f - X_p[Y_p, Z_p]f + [Z_p, X_p]Y_p f - Y_p[Z_p, X_p]f = \\ X_pY_pZ_pf - Y_pX_pZ_pf - Z_pX_pY_pf + Z_pY_pX_pf + Y_pZ_pX_pf - Z_pY_pX_pf - \\ X_pY_pZ_pf + X_pZ_pY_pf + Z_pX_pY_pf - X_pZ_pY_pf - Y_pZ_pX_pf + Y_pX_pZ_pf = 0\end{gathered}$$

Como p e f foram arbitrários, vale a Identidade de Jacobi.

4. Seja $h \in C^\infty(M)$. Temos que:

$$\begin{aligned}[fX, gY]h &= fX(gY)h - gY(fX)h \\ &= f(Xg)h + fg(XY)h - g(Yf)h - gf(YX)h \\ &= (fg[X,Y] + f(Xg) - g(Yf))h\end{aligned}$$

Como h é arbitrária, temos que vale a regra de Leibniz.

□

Uma consequência dessa proposição é que $\mathfrak{X}(M)$ é um exemplo de uma **Álgebra de Lie**, i.e., um espaço vetorial munido de um mapa bilinear anti-simétrico que satisfaz a identidade de Jacobi(chamado **Colchete de Lie**). Ainda nisso, dizemos que uma transformação linear que preserva o colchete de Lie é um **homomorfismo de álgebras de Lie**.

À partir de um difeomorfismo $f : M \to N$, podemos definir uma forma de induzir um campo de vetores em N usando um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ da seguinte forma:

Definição 1.6.2. *Dado um difeomorfismo $f : M \to N$, e um campo de vetores X em M, definimos o **push-forward** de X, denotado f_*X, pela seguinte forma: dado $p \in M$, $(f_*X)_{f(p)} := (df)_p(X_p)$.*

Note que o push-forward realmente define um campo de vetores em N, pois podemos escrever $(df)_pX_p = (df)_p \circ X \circ f^{-1}(f(p)) : N \to TN$.

O push-forward pode ser usado para relacionar campos de vetores de duas variedades, da seguinte forma: Dados $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$, e $f : M \to N$ suave; dizemos que X e Y são **f-relacionados**(e escrevemos $Y = f_*X$) se, $\forall q \in N, \forall p \in f^{-1}(q), (df)_pX_p = Y_q$.

Proposição 1.6.4. *Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$; $f : M \to N$ e $g : N \to P$ funções diferenciáveis. Valem:*

1. $Y = f_*X \iff \forall g : \underbrace{W}_{aberto} \subset N \to \mathbb{R}$, $(Yg) \circ f = X(g \circ f)$.
2. $Y = f_*X$ *e* $Z = g_*Y \Rightarrow Z = (g \circ f)_*X$

Demonstração. 1. ($\Rightarrow$) Seja $p \in M$. Temos:

$$\begin{aligned}X(g \circ f)_p &= d(g \circ f)_pX_p \\ &= (dg)_{f(p)}(df)_pX_p \\ &= (dg)_{f(p)}Y_{f(p)} \\ &= (Yg)_{f(p)}\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Seja $g = y_i : M \to \mathbb{R}$. Por um lado, temos que $(dy_i)_{f(p)} Y_{f(p)} = Y_i(f(p))$. Por outro lado, $X(y_i \circ f) = (d(y_i \circ f)_p X_p = (dy_i)_{f(p)})(df)_p X_p = b_i(f(p))$. Assim, $b_i(f(p)) = Y_i(f(p))$, e como as coordenadas são iguais, temos que $Y_p = (df_p)X_p$. Como o ponto é arbitrário, $Y = f_* X$.

2. Suponha que X e Y sejam f-relacionadas, e Y e Z g-relacionadas, seja $h : Z \to \mathbb{R}$ e $p \in M$. Temos

$$\begin{aligned}
X(h \circ g \circ f) &= d(h \circ g \circ f)_p X_p \\
&= (dh)_{g(f(p))}(dg)_{f(p)}(df)_p X_p && \text{pela regra da cadeia} \\
&= (dh)_{g(f(p))}(dg)_{f(p)} Y_{f(p)} && \text{pois } X \text{ e } Y \text{ são } f-\text{relacionados} \\
&= (dh)_{g(f(p))} Z_{g(f(p))} && \text{pois } Y \text{ e } Z \text{ são } g-\text{relacionados} \\
&= (Zh)_{g(f(p))}
\end{aligned}$$

Concluímos assim que X e Z são $g \circ f$-relacionados. □

Proposição 1.6.5. *Se $f : M \to N$ é uma função diferenciável, e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ f-relacionados à $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathfrak{X}(N)$ respectivamente. Então $[X, Y]$ é f-relacionado à $[\overline{X}, \overline{Y}]$.*

Demonstração. Seja $g \in C^\infty(M)$.

$$\begin{aligned}
[X, Y](g \circ f) &= X(Y(g \circ f) - Y(X(g \circ f) \\
&= X((\overline{Y}g) \circ f) - Y((\overline{X}g) \circ f) && \text{pela } \textbf{Proposição 1.6.4.} \\
&= (\overline{XY}g) \circ f - (\overline{YX}g) \circ f && \text{pela } \textbf{Proposição 1.6.4.} \\
&= ([\overline{X}, \overline{Y}]g) \circ f
\end{aligned}$$

Pela **Proposição 1.6.4.**, temos que $[X, Y]$ e $[\overline{X}, \overline{Y}]$ são f-relacionados. □

Note que no caso de f ser um difeomorfismo, temos que $f_*[X_1, X_2] = [f_* X_1, f_* X_2]$, e como $(df)_p$ é linear e bijetora, ela é um isomorfismo de álgebras de Lie.

Um dos conceitos mais importantes associados à Campos de Vetores é o de *curvas integrais.*

Definição 1.6.3. *Dado um campo de vetores X em uma variedade M, uma* ***curva integral de X*** *é uma curva $\alpha : I \to M$ com $\dot{\alpha}(t) = X_{\alpha(t)}$, $\forall t \in I$. Se $\alpha(0) = p$, chamamos α de* ***curva integral à*** *X* ***em*** *p e dizemos que 0 é o valor inicial de α, e neste caso, notamos α_p.*

Pra encontrar uma curva integral α de um campo de vetores X, compomos a equação que define uma curva integral com $(d\varphi)_p$, obtendo

$$\dot{\hat{\alpha}}(t) = \hat{X}(\hat{\alpha}(t))$$

onde $\hat{X} = (d\varphi) \circ X \circ \varphi^{-1}$ é a representação local de X.

Essa igualdade é dada por um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias:

$$\frac{d}{dt}(\hat{\alpha}_i(t)) = \hat{X}_i(\alpha(t))$$

Usando o Teorema de Picard sobre a existência local de soluções de EDO, temos que localmente, uma curva integral sempre existe.

Resumimos isto à seguir:

Teorema 1.6.1. *Seja M uma variedade diferenciável e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dado $p \in M$, existe uma curva $\alpha_p : I \to M$ de X em p. Além disso, essa curva é única, i.e., quaisquer duas destas curvas são iguais na interseção dos seus domínios.*

Teorema 1.6.2. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. $\forall p \in M$, existe uma vizinhança W de p, e um intervalo $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, e uma função diferenciável $F : W \times I \to M$ tal que para $q \in W$, a curva $F(q,t) : I \to M$ é uma curva integral de X em q, i.e., $\frac{d}{dt}F(q,t) = X_{F(q,t)}$.*

Tal função é chamada ***fluxo local de X em p****.*

No caso de termos campos f-relacionados, existe uma relação entre suas curvas integrais e fluxos locais associados, dada por

Proposição 1.6.6. *Seja $f : M \to N$ uma função diferenciável, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$.*

1. *Se Y e X são f-relacionados, então toda curva integral de X é mapeada em uma curva integral de Y por f.*

2. *Y e X são f-relacionados se, e somente se, os fluxos locais de X e Y satisfazem $f(F_X(p,t)) = F_Y(f(p,t)), \forall (p,t)$ onde ambos os fluxos estão definidos.*

Demonstração. 1. Sejam X e Y campos f-relacionados, $p \in M$ e α uma curva integral de X em p, i.e., $\alpha(0) = p$ e $\dot{\alpha}(t) = X_{\alpha(t)}$. Temos que em p

$$\begin{aligned}
(df)_{\alpha(t)} X_{\alpha(t)} &= (df)_{\alpha(t)}(\dot{\alpha(t)}) && \text{pois } \alpha \text{ é curva integral de X} \\
&= (\dot{f \circ \alpha})(t) && \text{Pela regra da cadeia} \\
&= Y_{f\circ\alpha(t)} && \text{pois } X \text{ e } Y \text{ são } f-\text{relacionados}
\end{aligned}$$

2. ($\Rightarrow$) Seja $t \to F_X(p,t)$ é uma curva integral de X. Então, pelo item anterior, $f(F_X(p,t))$ é uma curva integral de Y. Logo, $f(F_X(p,t)) = F_Y(f(p),t)$.
   ($\Leftarrow$) Seja $f(F_X(p,t)) = F_Y(f(p),t)$, $\forall (p,t)$ onde os fluxos estão definidos.

   Derivando com relação ao tempo ambos os lados da igualdade, temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)_0 (f(F_X(p,t))) &= \left(\frac{d}{dt}\right)_0 (F_Y(f(p),t)) \\ (df)_{F_X(p,0)} \left(\frac{d}{dt}\right)_0 F_X(p,t) &= Y(F_Y(f(p),0)) \\ (df)_{F_X(p,0)} X(F_X(p,0)) &= Y(f(p)) \\ (df)_p X_p &= Y_{f(p)} \end{aligned}$$

   O que nos mostra que X e Y são f-relacionados.

$\square$

Usando um fluxo local F de X em p, podemos definir uma coleção importante de funções da seguinte forma: fixando $t \in I$, temos

$$\begin{array}{rccl} \psi_t : & W & \to & M \\ & q & \mapsto & \psi_t(q) := F(q,t) \end{array}$$

Uma propriedade importante é:

Proposição 1.6.7. *As funções ψ_t definidas acima são difeomorfismos locais e satisfazem*

$$(\psi_t \circ \psi_s)(q) = \psi_{(t+s)}(q)$$

sempre que, $t, s, t+s \in I$, e $\psi_s(q) \in W$.

Demonstração. Observemos que para q fixado, $F(F(q,s)t)$ e $F(q,t+s)$ são curvas integrais com a mesma condição inicial, pois $F(F(q,s),0) = F(q,s)$, e $F(q,0+s) = F(q,s)$. Logo, pelo **Teorema 1.6.1.**, existe $\tilde{I} \subset I$ onde as duas curvas são iguais. Assim, $\psi_t \circ \psi_s = \psi_{(t+s)}$.

Por conseguinte, temos que $\psi_t \circ \psi_{-t} = \psi_0 = Id$, e logo ψ_t são difeomorfismos locais. $\square$

Muitas vezes, o fluxo local está definido apenas para um intervalo. Mas em alguns casos, ele pode ser estendido para a reta inteira, como no caso das variedades compactas.

Dado um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$, dizemos que o **suporte** de X é $supp(X) = \overline{\{p \in M : X_p \neq 0\}}$.

Definição 1.6.4. *Seja M uma n-variedade. Uma coleção $\{\psi_t : M \to M\}_{t\in I}$, com $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ de difeomorfismos é denominada um **grupo local à 1-parâmetro de difeomorfismos**. Se $I = \mathbb{R}$, o conjunto é chamado de **grupo à 1-parâmetro de difeomorfismos**.*

Teorema 1.6.3. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ com $supp(X)$ compacto. Então os fluxos locais de X formam um grupo à 1-parâmetro de difeomorfismos.*

Demonstração. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ com $supp(X)$ compacto. Para cada ponto de M, tomamos uma vizinhança W de p e um intervalo I de forma que o fluxo ψ_t de X está definido em $W \times I$. Com isso, cobrimos o suporte de X com esses abertos W. Como o suporte é compacto, podemos extrair uma subcobertura $\{W_k\}$ de $supp(X)$, e considerar um intervalo $I_0 = (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ contido na interseção de todos os intervalos correspondentes I_k. Note que para $q \in supp(X)$, $X_q = 0$, e logo $F(q,t)$ está trivialmente definida em I_0, e com o **Teorema 1.6.1.**, podemos estender F para $M \times I_0$. Como para $|s|, |t| \in \left(\frac{-\varepsilon_0}{2}, \frac{\varepsilon_0}{2}\right)$, vale $\psi_t \circ \psi_s = \psi_{t+s}$, e como o intervalo I_0 pode ser escolhido uniformemente para todo $q \in M$, podemos escrever $t \in \mathbb{R}$ como

$$t = k\frac{\varepsilon_0}{2} + s, k \in \mathbb{Z}, 0 \leq s < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

e assim, estender o mapa F para todo o $M \times \mathbb{R}$, definindo $F(q,t) = F^k\left(F(q,s), \frac{\varepsilon_0}{2}\right)$. □

Dizemos que um campo de vetores cujo fluxo define um grupo à 1-parâmetro de difeomorfismos é **completo**.

Corolário 1.6.1. *Seja M uma variedade compacta. Então todo campo de vetores em M é completo.*

Demonstração. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. Como $supp(X) \subset M$, e $supp(X)$ é fechado, temos que $supp(X)$ é compacto, e pelo teorema anterior, X é completo. □

Existe também um conceito associado à campos de vetores que nos dá outro ponto de vista de noções já vistas; o de **Derivada de Lie**, tanto de uma função, e de um campo.

Definição 1.6.5. *Seja $X \to \mathfrak{X}(M)$ com fluxo local ψ_t e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. A **Derivada de Lie** de f na direção de X é*

$$\mathcal{L}_X(f)(p) := \left(\frac{d}{dt}\right)_0 (f \circ \psi_t(p))$$

Teorema 1.6.4. $\mathcal{L}_X(f) = Xf$

Demonstração. Sejam X,ψ_t e f como na definição de Derivada de Lie. Temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(f) = \left(\frac{d}{dt}\right)_0 (f \circ \psi_t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)_0 (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \psi_t) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}\right)_p \left(\frac{d}{dt}\right)_0 (\varphi \circ \psi_t) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}\right)_p \left(\frac{d\hat{\psi}_t}{dt}\right)_0 \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}\right)_p \hat{X}_i(p) = X_p(f)
\end{aligned}$$

□

Definição 1.6.6. *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, ψ fluxo local de X. A **Derivada de Lie** de Y na direção de X é definida por:*

$$\mathcal{L}_X(Y) = \left(\frac{d}{dt}\right)_0 (\psi_{-t})_* Y$$

Teorema 1.6.5. $\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y]$

Demonstração. Sejam X, Y e ψ como na **Definição 1.6.6.**. Procederemos por partes.

Primeiro, temos que, em coordenadas:

$$(\psi_t)_* \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = d\psi_t \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = \sum_{i=1}^n \left.\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}\right|_{(t,p)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\psi_t(p)}$$

Segundo, como $Y_p = \sum_{i=1}^n Y_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$, temos que

$$\begin{aligned}
(\psi_{-t})_* Y_{\psi_t(p)} &= (\psi_{-t})_* \left(\sum_{j=1}^n Y_j(\psi(t,p)) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{\psi(t,p)}\right) \\
&= \sum_{j=1}^n Y_j(\psi(t,p)) (\psi_{-t})_* \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{\psi(t,p)} \\
&= \sum_{i,j=1}^n Y_j(\psi(t,p)) \left.\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}\right|_{(-t,p)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p
\end{aligned}$$

Enfim, temos

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X(Y))_p &= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\bigg|_0 \left(Y_j(\psi(t,p)) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}\bigg|_{(-t,p)} \right) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \\
&= \left[\sum_{i,j,k=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}(Y_j(\psi(t,p)) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}\bigg|_{(-t,p)} - \sum_{i,j} Y_j(\psi(t,p)) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_i}{\partial t}\bigg|_{(-t,p)} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right] \bigg|_0 \\
&= \left[\sum_{i,j,k=1}^{n} \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x_k}\bigg|_{\psi(t,p)} \frac{\partial \psi_k}{\partial t}\bigg|_{(t,p)} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}\bigg|_{(-t,p)} - \sum_{i,j=1}^{n} Y_j(\psi(t,p)) \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\bigg|_{(-t,p)} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right] \bigg|_0 \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x_j}\bigg|_p X_k(p) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}\bigg|_{(0,p)} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p - \left(\sum_{i,j=1}^{n} Y_j(p) \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\bigg|_p \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p
\end{aligned}
$$

Como ψ_0 é a identidade, seu jacobiano é

$$
\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}\bigg|_{(0,p)} = \delta_{ij}
$$

Assim, renomeando j para k no segundo termo, temos:

$$
(\mathcal{L}_X Y)_p = \sum_{i,k=1}^{n} \left(X_k(p) \frac{\partial Y_i}{\partial x_k}\bigg|_p - Y_k(p) \frac{\partial X_i}{\partial x_k}\bigg|_p \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \bigg|_p = [X,Y]_p
$$

Como a escolha do ponto é arbitrária, temos que $\mathcal{L}_X(Y) = [X,Y]$ □

Intuitivamente, a derivada de Lie de uma função nos dá a variação da mesma ao longo do fluxo de um campo, e a derivada de Lie de um campo nos dá a variação de um campo ao longo do fluxo de outro.

1.7 Tensores

Definição 1.7.1. *Seja V um espaço vetorial. Um k-**tensor** é uma transformação multilinear $T : \underbrace{V \times ... \times V}_{k \text{ vezes}} \to \mathbb{R}$.*

O espaço de todos os k-tensores em um espaço vetorial é denotado $\mathcal{T}^k(V^*)$.

Exemplo 1.7.1. *O espaço dual V^* a um espaço vetorial é equivalente à $\mathcal{T}^1(V^*)$*

Exemplo 1.7.2. *Um produto interno em um espaço vetorial é um 2-tensor.*

Exemplo 1.7.3. *O determinante é um n-tensor em $\mathbb{R}^n$.*

Dados um k-tensor T e um l-tensor S, podemos definir um $k+l$-tensor em V^{k+l}, denotado o **produto tensorial** de T e S, por

$$(T \otimes S)(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_{k+l}) := T(v_1, ..., v_k)S(v_{k+1}, ..., v_{k+l}).$$

A pergunta natural à se fazer é "Qual é uma base do espaço dos k-tensores em um espaço vetorial?"A resposta é dada por:

Proposição 1.7.1. *Seja $\{T_1, ..., T_n\}$ uma base de $\mathcal{T}^1(V^*)$. O conjunto $\{T_{i_1} \otimes ... \otimes T_{i_k} \mid 1 \leq i_1, ..., i_k \leq n\}$ é uma base de $\mathcal{T}^k(V^*)$, e logo, $dim\mathcal{T}^k(V^*) = n^k$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B} := \{T_{i_1} \otimes ... \otimes T_{i_k} \mid 1 \leq i_1, ..., i_k \leq n\}$, onde $T_{i_j} \in \{T_1, ..., T_n\}$. Provaremos primeiro que $\mathcal{B}$ é L.I.

Seja $\displaystyle\sum_{i_1,...,i_k} a_{i_1,...,i_k} T_{i_1} \otimes ... \otimes T_{i_k} = 0$ uma combinação linear de elementos de $\mathcal{B}$. Tomando $(v_1, ..., v_n)$ a base dual de $\{T_1, ..., T_n\}$, e substituindo na soma temos $a_{i_1,...,i_n} = 0$. Repetindo o processo para outras escolhas de vetores, obtemos que os coeficientes devem ser zero.

Provaremos agora que $\mathcal{B}$ gera $\mathcal{T}^k(V^*)$. Sejam $w_1, ..., w_k$ vetores em V com $w_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$, e $T \in \mathcal{T}^k(V^*)$. Temos:

$$\begin{aligned} T(w_1, ..., w_k) &= \sum_{j_1,...,j_n=1}^{n} a_{1,j_1} ... a_{k,j_k} T(v_{j_1}, ..., v_{j_n}) \\ &= \sum_{i_1,...i_n=1}^{n} T(v_{i_1}, ..., v_{i_n}) T_1 \otimes ... \otimes T_n(w_1, ..., w_k) \end{aligned}$$

Assim, temos que $T = \sum_{i_1,...i_n=1}^{n} T(v_{i_1}, ..., v_{i_n}) T_1 \otimes ... \otimes T_n$, e concluímos que $\mathbb{B}$ é uma base de $\mathcal{T}^k(V^*)$. $\square$

O tipo de tensor mais importante para nós é:

Definição 1.7.2. *Um k-tensor $T \in \mathcal{T}^k(V^*)$ é dito* ***alternado*** *se $T(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k) = -T(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k)$.*

O conjunto de k-tensores alternados forma um subespaço $\Lambda^k(V^*)$ de $\mathcal{T}^k(V^*)$.

Proposição 1.7.2. *Seja $T \in \mathcal{T}^k(V^*)$. T e alternado se, e somente se, $T(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n) = 0, v_i = v_j$.*

Demonstração. Seja T um k-tensor alternado em V, e $(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n) \in V^k$. Então

$$\begin{aligned} T(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k) &= -T(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_n) \\ T(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k) + T(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_n) &= 0 \end{aligned}$$

Donde concluímos que $T(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n) = 0$. Reciprocamente, Se $T(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n) = 0$ com $(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n)$ tal que $v_i = v_j$, então

$$\begin{aligned} T(v_1, ..., v_i + v_j, ..., v_i + v_j, ..., v_n) &:= 0 \\ T(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n) + T(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_n) &:= 0 \\ T(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n) &:= -T(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_n) \end{aligned}$$

Concluímos assim que T é alternada.

□

Exemplo 1.7.4. *O determinante é um n-tensor alternado em $\mathbb{R}^n$.*

À partir de um k-tensor, podemos definir um k-tensor alternado, usando um operador $Alt : \mathcal{T}^k(V^*) \to \Lambda^k(V^*)$ por

$$T(\cdot) \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (sgn\sigma) T(\sigma(\cdot))$$

onde $\sigma(v_1, ..., v_n) = (v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(n)})$.

O operador Alt tem as seguintes propriedades:

Proposição 1.7.3. *Sejam $T \in \mathcal{T}^k(V^*), \omega \in \Lambda^k(V^*)$. Temos:*

1. $Alt(T) \in \Lambda^k(V^*)$
2. $Alt(\omega) = \omega$
3. $Alt(Alt(T)) = Alt(T)$

Demonstração. 1. Seja σ_{ij} a permutação que troca os termos de subíndices i e j. Se $\sigma \in S_k$, escrevendo $\sigma' = \sigma \cdot \sigma_{ij}$.

$$\begin{aligned} Alt(T)(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (sgn\sigma) T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(i)}, ..., v_{\sigma(j)}, ..., v_{\sigma(n)}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (sgn\sigma) T(v_{\sigma'(1)}, ..., v_{\sigma'(j)}, ..., v_{\sigma'(i)}, ..., v_{\sigma'(n)}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma' \in S_k} -(sgn\sigma') T(v_{\sigma'(1)}, ..., v_{\sigma'(n)}) \\ &= -Alt(T)(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n) \end{aligned}$$

2. Seja $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ e σ_{ij} como definida acima. Então $\omega(v_{\sigma_{ij}(1)}, ..., v_{\sigma_{ij}(n)}) = $ (sgn $\sigma_{ij})\omega(v_1, ..., v_k)$. Como toda permutação é produto de transposições, a equação vale para toda permutação.

   Logo

$$\begin{aligned} Alt(\omega)(v_1, ..., v_k) &= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_k}(sgn\sigma)\omega(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}) \\ &= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_k}(sgn\sigma)(sgn\sigma)\omega(v_1, ..., v_k) \\ &= \omega(v_1, ..., v_k) \end{aligned}$$

3. Segue de (1) e (2).

□

Em seguida, definimos o conceito mais importante para à discussão à seguir: O **Produto Exterior**.

Definição 1.7.3. *Dados $T \in \Lambda^k(V^*)$, e $S \in \Lambda^l(V^*)$, definimos o* ***produto exterior*** *entre T e S por*

$$T \wedge S := \frac{(k+l)!}{k!l!}Alt(T \otimes S)$$

Exemplo 1.7.5. *Sejam $T, S \in \Lambda^1(V^*)$. Temos então que $T \wedge S = 2Alt(T \otimes S) = T \otimes S - S \otimes T$.*

Para provarmos que o produto exterior é associativo, precisamos de um lema:

Lema 1.7.1. *Sejam $T \in \mathcal{T}^k(V^*)$, $S \in \mathcal{T}^l(V^*)$ e $R \in \mathcal{T}^m(V^*)$*

1. *Se $Alt(T) = 0$, então, $Alt(T \otimes S) = Alt(S \otimes T) = 0$*
2. *$Alt(Alt(T \otimes S) \otimes R) = Alt(T \otimes S \otimes R) = Alt(T \otimes Alt(S \otimes R))$*

Demonstração. 1. Consideremos $(k+m)!(Alt(T \otimes S)(v_1, ..., v_{k+m})$. Temos

$$(k+m)!(Alt(T \otimes S)(v_1, ..., v_{k+m}) = \sum_{\sigma \in S_{k+m}}(sgn\sigma)T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)})S(v_{\sigma(k+1)}, ..., v_{\sigma(k+m)})$$

Consideremos o subgrupo G de S_{k+l} de todas as permutações que fixam $k+1$ até $k+m$. Temos então

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\in G}(sgn\sigma)T(v_{\sigma(1)},...,v_{\sigma(k)})S(v_{\sigma(k+1)},...,v_{\sigma(k+m)})\\
&=\left(\sum_{\sigma\in G}(sgn\sigma)T(v_{\sigma(1)},...,v_{\sigma(k)})\right)S(v_{\sigma(k+1)},...,v_{\sigma(k+m)})\\
&=k!(Alt(T)\otimes S)(v_1,...,v_{k+m})=0
\end{aligned}$$

Como G particiona S_{k+m} em classes $G\tilde{\sigma}$, e para cada classe, temos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\in G\tilde{\sigma}}(sgn\sigma)(T\otimes S)(v_{\sigma(1)},...,v_{\sigma(n)})\\
&=(sgn\tilde{\sigma})\sum_{\sigma\in G}(sgn\sigma)(T\otimes S)(v_{\sigma(\tilde{\sigma}(1))},...,v_{\sigma(\tilde{\sigma}((n))})\\
&=(sgn\tilde{\sigma})k!(Alt(T)\otimes S)(v_{\tilde{\sigma}(1)},...,v_{\tilde{\sigma}(n)})=0
\end{aligned}$$

Temos assim que $Alt(T\otimes S)=0$. Analogamente, temos que $Alt(S\otimes T)=0$.

2. Como $Alt\circ Alt=Alt$, temos $Alt(Alt(S\otimes R)-S\otimes R)=0$.

   Logo,

$$\begin{aligned}
0&=Alt(T\otimes(Alt(S\otimes R)-S\otimes R))\\
&=Alt(T\otimes Alt(S\otimes R)-Alt(T\otimes S\otimes R)
\end{aligned}$$

   Para a segunda igualdade, temos:

$$\begin{aligned}
0&=Alt(Alt(T\otimes S)-T\otimes S)\otimes R)\\
&=Alt(Alt(T\otimes S)\otimes R)-Alt(T\otimes S\otimes R)
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.7.4. *Dados* $T\in\Lambda^k(V^*),S\in\Lambda^l(V^*),R\in\Lambda^m(V^*)$, *temos* $(T\wedge S)\wedge R=T\wedge(S\wedge R)$.

Demonstração. Note que, por um lado:

$$\begin{aligned}
(T\wedge S)\wedge R&=\frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!}Alt((T\wedge S)\otimes R)\\
&=\frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!}\frac{(k+l)!}{k!l!}Alt(T\otimes S\otimes R)\\
&=\frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}Alt(T\otimes S\otimes R)
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$
\begin{aligned}
T \wedge (S \wedge R) &= \frac{(k+l+m)!}{(k!(l+m)!}Alt(T \otimes (S \wedge R) \\
&= \frac{(k+l+m)!}{k!(l+m)!}\frac{(l+m)!}{l!m!}Alt(T \otimes S \otimes R) \\
&= \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}Alt(T \otimes S \otimes R)
\end{aligned}
$$

Logo, vale a associatividade do produto exterior. □

Proposição 1.7.5. *Se $\{T_1, ..., T_n\}$ é uma base de V^*, então o conjunto*

$$\mathcal{B}' = \{T_{i_1} \wedge ... \wedge T_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < ... < i_k < n\}$$

é uma base pra $\Lambda^k(V^*)$, e temos que

$$dim\ \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Demonstração. Seja $T \in \Lambda^k(V^*) \subset \mathcal{T}^k(V^*)$. Temos então que $T = \sum\limits_{i_1,...,i_k} a_{i_1...i_k} T_{i_1} \otimes ... \otimes T_{i_k}$.

Como T é alternado, $Alt(T) = T$, e logo

$$T = \sum_{i_1,...,i_k} a_{i_1...i_k} Alt(T_{i_1} \otimes ... \otimes T_{i_k})$$

Mostraremos que $Alt(T_{i_1} \otimes ... \otimes T_{i_k}) = \frac{1}{k!} T_{i_1} \wedge ... \wedge T_{i_k}$. Fazendo indução em k, para $k = 1$ o resultado vale, pois $Alt(T_{i_1}) = T_{i_1}$. Supondo o resultado válido para k tensores da base, temos

$$
\begin{aligned}
Alt(T_{i_1} \otimes ... \otimes T_{i_{k+1}}) &= Alt(T_{i_1} \otimes ... \otimes T_{i_k} \otimes T_{i_{k+1}}) \\
&= \frac{k!}{(k+1)!} Alt(T_{i_1} \otimes ... \otimes T_{i_k}) \wedge T_{i_{k+1}} \\
&= \frac{k!}{(k+1)!}\frac{1}{k!}(T_{i_1} \wedge ... \wedge T_{i_{k+1}}) \\
&= \frac{1}{(k+1)!}(T_{i_1} \wedge ... \wedge T_{i_{k+1}})
\end{aligned}
$$

Logo, temos que $T = \frac{1}{k!} \sum\limits_{i_1,...,i_k} T_{i_1} \wedge ... \wedge T_{i_k}$. Porém, os tensores $T_1 \wedge ... \wedge T_n$ não são L.I. Pois pela anticomutatividade do produto exterior, dadas duas listas $(i_1, ..., i_k)$ e $(j_1, ..., j_k)$

com os mesmos elementos diferindo apenas de sua ordenação, temos $T_{i_1} \wedge ... \wedge T_{i_k} = \pm T_{j_1} \wedge ... \wedge T_{j_k}$. Agrupando os tensores cujos subíndices diferem apenas de sua oredenação, podemos trabalhar apenas com subíndices crescentes, e assim, podemos escrever:

$$T = \sum_{i_1 < ... < i_k} b_{i_1 ... i_k} T_{i_1} \wedge ... \wedge T_{i_k}$$

Assim, $\mathcal{B}'$ gera $\Lambda^k(V^*)$. Mostraremos agora que $\mathcal{B}'$ é L.I. Tomemos uma combinação linear

$$\sum_{i_1 < ... < i_k} b_{i_1 ... i_k} T_{i_1} \wedge ... \wedge T_{i_k} = 0$$

Seja $(v_{j_1}, ..., v_{j_k})$ uma base dual de $(T_{j_1}, ..., T_{j_k})$, onde $(j_1, ..., j_k)$ é uma lista crescente de índices. Avaliando, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= k! \sum_{i_1 < ... < i_k} b_{i_1 ... i_k} T_{i_1} \wedge ... \wedge T_{i_k}(v_{j_1}, ..., v_{j_k}) \\ &= \sum_{i_1 < ... < i_k} c_{i_1 ... i_k} Alt(T_{i_1} \otimes ... \otimes T_{i_k})(v_{j_1}, ..., v_{j_k}) \\ &= \sum_{i_1 < ... < i_k} c_{i_1 ... i_k} \sum_{\sigma \in S_k} T_{i_1}(v_{\sigma(j_1)}) \cdots T_{i_k}(v_{\sigma(j_k)}) \end{aligned}$$

Como as duas sequências de índices são crescentes, a única permutação que leva uma a outra é a identidade. Assim, temos que $0 = b_{j_1, ..., j_k}$. Logo, $b_{j_1 ... j_k} = 0$, para toda lista de índices $(j_1, ..., j_k)$. Concluímos assim que $\mathcal{B}'$ é uma base para $\Lambda^k(V^*)$. $\square$

Proposição 1.7.6. *Se $T \in \Lambda^k(V^*)$ e $S \in \Lambda^m(V^*)$, então*

$$T \wedge S = (-1)^{km}(S \wedge T)$$

Demonstração. Sejam $(v_1, ..., v_k) \in V^k$ e $(v_{k+1}, ..., v_{k+m}) \in V^m$. Como $T \wedge S = \sum_{i_1 < ... < i_{k+m}} b_{i_1 ... i_{k+m}} T_{i_1} \wedge ... \wedge T_{i_{k+m}}$, temos que

$$\begin{aligned} T \wedge S(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_{k+m}) &= \sum_{i_1 < ... < i_{k+m}} b_{i_1 ... i_{k+m}} T_{i_1} \wedge ... \wedge T_{i_{k+m}}(v_{i_1}, ..., v_{i_{k+m}}) \\ &= (-1)^k \sum_{i_1 < ... < i_{k+m}} b_{i_1 ... i_{k+m}} T_{i_2} \wedge ... \wedge T_{i_{k+m}} \wedge T_{i_1}(v_{i_2}, ..., v_{i_{k+m}}, v_{i_1}) \\ &= \cdots \\ &= (-1)^{km} \sum_{i_1 < ... < i_{k+m}} b_{i_1 ... i_{k+m}} T_{i_{k+1}} \wedge ... \wedge T_{i_{k+m}} \wedge T_{i_1} \\ & \wedge ... \wedge T_{i_k}(v_{i_{k+1}}, ..., v_{i_{k+m}}, v_1, ..., v_k) \\ &= S \wedge T(v_{k+1}, ..., v_{k+m}, v_1, ..., v_k) \end{aligned}$$

Concluímos que $T \wedge S = (-1)^{km} S \wedge T$. $\square$

Para 1-Tensores T_i, temos uma forma conhecida de calcular os produtos exteriores $T_{i_1} \wedge ... \wedge T_{i_k}$.

Proposição 1.7.7. *Sejam $T_1, T_2, ..., T_k \in V^*$, e $v_1, v_2, ..., v_k \in V$. Temos que*

$$T_1 \wedge ... \wedge T_k(v_1, ..., v_k) = det[T_i(v_j)]$$

Demonstração. Sejam $T_1, ..., T_k \in V^*$, $v_1, ..., v_k \in V$. Temos que

$$\begin{aligned} T_1 \wedge ... \wedge T_k(v_1, ..., v_k) &= k! Alt(T_1 \otimes ... \otimes T_k)(v_1, ..., v_k) \\ &= k! \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma) T_1(v_{\sigma(1)}) \cdot ... \cdot T_k(v_{\sigma(k)}) = det[T_i(v_j)] \end{aligned}$$

$\square$

Podemos induzir k-tensores em espaços à partir de espaços dados, usando uma noção chamdada **pullback**. Seja $f : V \to W$ uma transformação linear, e $T \in \mathcal{T}^k(W)$. Definimos o **pullback** de T por f por

$$\begin{array}{rccl} f^* : & \mathcal{T}^k(W^*) & \to & \mathcal{T}^k(V^*) \\ & T(\cdot) & \mapsto & f^*T(\cdot) = \ T(f(\cdot)) \end{array}$$

Esse mapa tem as seguintes propriedades:

Proposição 1.7.8. *Sejam V, W e Z espaços vetoriais, $f : V \to W$ e $g : W \to Z$, e $T \in \mathcal{T}^k(W^*)$ e $S \in \mathcal{T}^l(W^*)$. Temos então que*

1. $f^*(T \otimes S) = f^*T \otimes f^*S$
2. $T = Alt(T) \implies f^*T = Alt(f^*T)$
3. $f^*(T \wedge S) = f^*T \wedge f^*S$
4. $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

Demonstração. Sejam V, W e Z espaços vetoriais, $f : V \to W$ e $g : W \to Z$, e $T \in \mathcal{T}^k(W^*)$, $S \in \mathcal{T}^l(W^*)$, e $v_i \in V, \forall i \in \{1, ..., k + l\}$.

1.

$$\begin{aligned} f^*(T \otimes S)(v_1, ..., v_{k+l}) &= (T \otimes S)(f(v_1), ..., f(v_{k+m})) \\ &= T(f(v_1)) \cdots T(f(v_k)) \cdot S(f(v_{k+1}) \cdots S(f(v_{k+m})) \\ &= f^*T \otimes f^*S. \end{aligned}$$

2. $f^*T = f^*(\sum_{\sigma \in S_k}(T_{j_1} \otimes ... \otimes T_{j_k})\sigma) = (\sum_{\sigma \in S_k}(f^*T_{j_1} \otimes ... \otimes f^*T_{j_k})\sigma) = Alt(f^*T)$
3. $f^*(T \wedge S) = \dfrac{(k+l)!}{k!l!} f^*(Alt(T \otimes S)) = \dfrac{(k+l)!}{k!l!}(Alt(f^*T \otimes f^*S)) = f^*(T \wedge S)$
4. $(g \circ f)^*T = T(g \circ f(\cdot)) = g^*T(f(\cdot)) = f^*g^*T(\cdot)$.

□

Um fato importante sobre tensores alternados é:

Proposição 1.7.9. *Sejam V um espaço de dimensão n, e $f : V \to V$ uma transformação linear e $T \in \Lambda^n(V^*)$. Então $f^*T = (detA)T$, onde A é alguma matriz representando F.*

Demonstração. Como $\Lambda^n(V^*)$ tem dimensão 1 e f^* é linear, então ela é a multiplicação por uma constante C. Seja H um isomorfismo entre V e $\mathbb{R}^n$. Então H^*det é um n-tensor alternado em V, e logo $f^*H^*det = CH^*det$. Logo

$$(H^{-1})^*F^*H^*det = Cdet \iff (H \circ F \circ H^{-1})^*det = Cdet \iff A^*det = Cdet.$$

Tomando a base canônica em $\mathbb{R}^n$, $\{e_1, ..., e_n\}$, temos

$$A^*det(e_1, ..., e_n) = C$$

Ou seja, $det(A) = C$.

□

Existe uma operação importante entre vetores e tensores, chamada **produto interior**, cujo resultado rebaixa o grau do tensor envolvido. À seguir:

Definição 1.7.4. *Seja V um espaço vetorial de dimensão n, $v \in V$ e $T \in \mathcal{T}^k(V^*)$. Definimos o **produto interior** de T por v como*

$$\begin{array}{rccl} i_v : & \mathcal{T}^k(V^*) & \to & \mathcal{T}^{k-1}(V^*) \\ & T(v_2, ..., v_k) & \mapsto & T(v, v_2, ..., v_k), \quad \forall (v_1, ..., v_k) \in V^k \end{array}$$

O produto interior de um elemento da base por um vetor é simples de calcular:

Proposição 1.7.10. *Seja $v \in V$, e $T_1, ..., T_k \in V^*$. Temos que*

$$i_v(T_1 \wedge ... \wedge T_k) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}T_i(v)T_1 \wedge ... \wedge \hat{T}_i \wedge ... \wedge T_k$$

Demonstração. Sejam $v_2, ..., v_k \in V$. Temos

$$
\begin{aligned}
i_v(T_1 \wedge ... \wedge T_k)(v_2, ..., v_k) &= T_1 \wedge ... \wedge T_k(v, v_2, ..., v_k) \\
&= det \begin{bmatrix} T_1(v) & T_1(v_2) & \cdots & T_1(v_n) \\ T_2(v) & T_2(v_2) & \cdots & T_2(v_k) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ T_k(v) & T_k(v_2) & \cdots & T_k(v_k) \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} T_i(v) det[T_l(v_j)]_{1 \le l \le k; l \ne i; 2 \le j \le k} \\
&= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} T_i(v) T_1 \wedge ... \hat{T_i} \wedge ... \wedge T_k(v_2, ..., v_k)
\end{aligned}
$$

□

Proposição 1.7.11. *Seja V um espaço vetorial de dimensão n; $v, v_1, v_2 \in V$, $T \in \Lambda^k(V^*)$ e $S \in \Lambda^m(V^*)$. O produto interior satisfaz:*

1. $i_v(i_v(T) = 0$
2. $i_{v_1}(i_{v_2}T) = -i_{v_2}(i_{v_1}T)$
3. $i_v(T \wedge S) = i_v(T) \wedge S + (-1)^k T \wedge i_v S$

Demonstração. 1. $i_v(i_vT))(\cdot) = i_v(T(v, \cdot)) = T(v, v, \cdot) = 0$, pois T é alternada.

2. $i_{v_1}(i_{v_2}T)(\cdot) = i_{v_1}(T(v_2, \cdot)) = T(v_1, v_2, \cdot) = -T(v_2, v_1, \cdot) = -i_{v_2}(T(v_1, \cdot)) = -i_{v_2}(i_{v_1}(T))(\cdot)$.

3. Como ambos os lados da igualdade são lineares em T e S, podemos assumir que $T = T_1 \wedge ... \wedge T_k$ e $S = T_{k+1} \wedge ... \wedge T_m$

$$
\begin{aligned}
i_v(T \wedge S) &= i_v(T_1 \wedge ...T_k \wedge T_{k+1} \wedge ... \wedge T_m) \\
&= \sum_{i=1}^{k+m} (-1)^{i+1} T_i(v) T_1 \wedge ... \wedge \hat{T_i} \wedge ... \wedge T_{k+m} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} T_i(v) T_1 \wedge ... \wedge \hat{T_i} \wedge ... \wedge T_k \right) \wedge T_{k+1} \wedge ... \wedge T_{k+m} + \\
&(-1)^k T_1 \wedge ... \wedge T_k \wedge \left(\sum_{i=k+1}^{m} T_i(v) T_{k+1} \wedge ... \wedge \hat{T_i} \wedge ... \wedge T_{k+m} \right) \\
&= i_v T \wedge S + (-1)^k T \wedge i_v S
\end{aligned}
$$

□

1.8 Formas Diferenciais

Definição 1.8.1. *Uma* ***forma de grau k*** *em M é uma função $p \in M \mapsto \omega(p) := \omega_p \in \Lambda^k(T_pM)$.*

Dada uma carta $(U, x_1, ..., x_n)$, a expressão local de ω é

$$\omega = \sum_{i_1 < ... < i_k} \omega_{i_1,...,i_k} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} = \sum_I \omega_I dx_I$$

onde $I = (i_1, ..., i_k)$ é uma lista crescente de índices, e ω_I são funções reais em U. Dizemos que ω é uma **forma diferencial de grau k** se as funções ω_I são diferenciáveis para toda carta do atlas maximal de M. Uma 0-forma é uma função $f : M \to \mathbb{R}$.

À partir de uma função suave $f : M \to N$ e uma forma ω em N, podemos induzir uma forma $\eta := f^*\omega$ em M usando o pullback por f, com a diferença aqui que o pullback de uma forma diferencial por uma função usa o diferencial de f para trazer o tensor em N para M, ou seja, se $p \in M$, $v \in (T_pM)^k$, e $(V, y_1, ..., y_n)$ uma carta de N ao redor de $f(p)$, temos:

$$(f^*\omega)_p(v) = \sum_I (\omega_I \circ f)_p d(y_I \circ f)_p(v)$$

No caso de ω ser uma 0-forma, então $f^*\omega = \omega \circ f$.

Note que isso nos permite reescrever a expressão para $f^*\omega$ como

$$\sum_I (\omega_I \circ f)_p d(y_I \circ f)_p = \sum_I (\omega_I \circ f)_p d(f^* y_I)$$

Proposição 1.8.1. *Sejam $f : M \to N$ uma função diferenciável, e $\omega \in \Omega^k(N), \eta \in \Omega^m(N)$. Temos*

1. $f^*(\omega + \eta) = f^*\omega + f^*\eta$
2. $f^*(g\omega) = (g \circ f)f^*\omega = (f^*g)(f^*\omega), \forall g \in C^\infty(N)$
3. $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$
4. $g^*f^*\omega = (f \circ g)^*\omega, \forall g : L \to M$, *com L uma variedade diferenciável.*

Demonstração. 1. Seja $(V, y_1, ..., y_n)$ carta de N. Temos

$$\begin{aligned}
f^*(\omega+\eta) &= f^*(\sum_I(\omega_I+\eta_I)dx_I) \\
&= (\sum_I(\omega_I+\eta_I)\circ f)d(y_I\circ f) \\
&= \sum_I \omega_I\circ f d(y_I\circ f) + \sum_I \eta_I\circ f d(y_I\circ f) \\
&= f^*\omega + f^*\eta
\end{aligned}$$

2. Seja $(U, x_1, ..., x_n)$ uma carta de M. Temos

$$\begin{aligned}
f^*(g\omega) &= f^*\left(\sum_I g\omega_I dx_I\right) \\
&= \sum_I (g\omega\circ f)d(x_i\circ f) \\
&= (g\circ f)\left(\sum_I(\omega\circ f)d(x_i\circ f)\right) \\
&= (f^*g)(f^*\omega)
\end{aligned}$$

3. Sejam ω e η k-formas e m-formas em N respectivamente. Temos:

$$\begin{aligned}
f^*(\omega\wedge\eta) &= f^*(\sum_I \omega_I dx_I \wedge \sum_I \eta_I dx_I) \\
&= \frac{(k+m)!}{k!m!}Alt(f^*(\omega\otimes\eta) \\
&= \frac{(k+m)!}{k!m!}Alt(f^*\omega\otimes f^*\eta) \\
&= f^*\omega\wedge f^*\eta
\end{aligned}$$

4. Sejam $f: M\to N$ e $g: L\to M$ C^∞. Temos

$$\begin{aligned}
(g\circ f)^*(\omega) &= (g\circ f)^*(\sum_I \omega_I dx_I) \\
&= \sum_I(\omega_I\circ g\circ f)d(x_I\circ g\circ f) \\
&= f^*\sum_I(\omega_I\circ g)d(x_I\circ g) \\
&= f^*g^*(\sum_I \omega_I dx_I) \\
&= f^*g^*\omega
\end{aligned}$$

□

Dada uma k-forma ω em N, uma função $f : M \to N$ suave, e cartas $(U, \varphi) = (U, x_1, ..., x_n)$ ao redor de p e $(V, y_1, ..., y_n)$ ao redor de $f(p)$, podemos expressar $f^*\omega$ em termos das coordenadas:

$$f^*\omega = f^*(\sum_I \omega_I dy_I) = \sum_I (\omega_I \circ f) f^* dy_I = \sum_I (\omega_I \circ f) f^* dy_{i_1} \wedge ... \wedge f^* dy_{i_k}$$

Note que $f^*dy_i(v) = (dy_i)_{f(p)}((df)_p(v)) = d(y_i \circ f)_p(v)$, pela regra da cadeia.

Assim, temos

$$\begin{aligned} f^*\omega &= f^*(\sum_I (\omega_I \circ f) d(y_{i_1} \circ f) \wedge ... \wedge d(y_{i_k} \circ f)) \\ &= \sum_I (\omega_I \circ f) d(y_{i_1} \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi) \wedge ... \wedge d(y_{i_k} \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi) \\ &= \sum_I (\omega_I \circ f) d(\hat{f}_{i_1} \circ \varphi) \wedge ... \wedge d(\hat{f}_{i_k} \circ \varphi) \end{aligned}$$

Dada $\omega \in \Omega^k(M)$, e uma carta (U, φ) de M, dizemos que $(\varphi^{-1})^*\omega$ é a **representação local** de ω nesta carta.

Um fato importante é:

Proposição 1.8.2. *Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave, então a função $p \mapsto (df)_p$ é uma 1-forma.*

Podemos definir uma transformação importante que aumenta o grau de uma forma diferencial, chamada a **derivada exterior**.

Definição 1.8.2. *Seja $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$. Definimos a **derivada exterior** de ω, $d\omega$ por:*

$$\begin{array}{rccl} d: & \Omega^k(\mathbb{R}^n) & \to & \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n) \\ & \omega = \sum_I \omega_I dx_I & \mapsto & d\omega = \sum_I d\omega_I \wedge dx_I \end{array}$$

Exemplo 1.8.1. *Seja $\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$, definida em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Calculando $d\omega$, obtemos*

$$\begin{aligned} d\omega &= d\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) \wedge dx + d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \wedge dy \\ &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} dx \wedge dy + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} dy \wedge dx = 0 \end{aligned}$$

Teorema 1.8.1. *Sejam α, ω, ω_1, ω_2 formas em $\mathbb{R}^n$. Temos que valem as seguintes propriedades:*

1. $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$
2. $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n) \implies d(\omega \wedge \alpha) = d\omega \wedge \alpha + (-1)^k \omega \wedge d\alpha$
3. $d(d\omega) = 0$
4. *Se* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *é suave,* $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$

Demonstração. 1. $d(\omega_1+\omega_2) = \sum_I d(\omega_1+\omega_2)_I \wedge dx_I = \sum_I d\omega_{1I} \wedge dx_I + \sum_I d\omega_{2I} \wedge dx_I = d\omega_1 + d\omega_2$

2. Usando (1), é suficiente provar para $\omega = a_I dx_I$, e $\alpha = b_J dx_J$.

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \alpha) &= d(a_I b_J dx_I \wedge dx_J) \\ &= d(a_I b_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (b_J da_I + a_I db_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= b_J da_I \wedge dx_I \wedge dx_J + a_I db_J \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= d\omega \wedge \alpha + (-1)^k a_I dx_I \wedge db_J \wedge dx_J \\ &= d\omega \wedge \alpha + (-1)^k \omega \wedge d\alpha \end{aligned}$$

3. Usando (1), é suficiente provar para uma forma $\omega = a_I dx_I$. Temos

$$d\omega = da_I \wedge dx_I = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I$$

Então

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I = 0 \end{aligned}$$

4. Primeiro, consideremos uma 0-forma g.

$$\begin{aligned} f^*(dg) = f^* \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i \right) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \circ f \right) df_i = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \circ f \right) \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j} dx_j = d(g \circ f) = d(f^* g) \end{aligned}$$

Seja então $\omega = a_I dx_I$. Temos que

$$\begin{aligned} d(f^*\omega) &= d((f^*a_I)df_I) = d(f^*a_I) \wedge df_I + (f^*a_I)d(df_I) = d(f^*a_I) \wedge df_I \\ &= (f^*da_I) \wedge (f^*dx_I) = f^*(da_I \wedge dx_I) = f^*(d\omega) \end{aligned}$$

onde $df_I = df_{i_1} \wedge ... \wedge df_{i_k}$, e o resultado segue.

□

Suponha agora que ω seja uma k-forma em uma variedade diferenciável. Para definir a sua derivada exterior, vamos definir como ela é localmente, e mostrar que nas interseções das cartas, ela não muda, o que permite que sua definição nos dê um objeto definido globalmente.

Definimos $d\omega$ como a forma localmente representada por $d\omega_\alpha$, onde $\omega_\alpha = (\varphi_\alpha^{-1})^*\omega$, i.e., $d\omega = (\varphi_\alpha^{-1})^* d\omega_\alpha$ em U_α, sendo $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset M \to \mathbb{R}^n$ uma parametrização de M.

Seja $\varphi_\beta : U_\beta \subset M \to \mathbb{R}^n$ tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Mostraremos que $(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})^*\omega_\alpha = \omega_\beta$. Como $f = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ é uma função suave de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$, temos que $f^*(d\omega_\alpha) = d(f^*\omega_\alpha) = d\omega_\beta$. Logo,

$$\begin{aligned} (\varphi_\beta^{-1})^* d\omega_\beta &= (\varphi_\beta^{-1})^* f^*(d\omega_\alpha) \\ &= (f \circ \varphi_\beta^{-1})^* d\omega_\alpha \\ &= (\varphi_\alpha^{-1})^*(d\omega_\alpha) \end{aligned}$$

O que nos mostra que, na interseção, as duas formas são iguais. Logo $d\omega$ está bem-definida. A derivada exterior de uma k-forma em uma variedade também satisfaz as mesmas propriedades do **Teorema 1.8.3.**, e a prova é essencialmente uma redução ao caso das formas no $\mathbb{R}^n$, seguido da aplicação do **Teorema 1.8.3.**.

1.9 Cohomologia de De Rham

Usando as formas diferenciais, podemos definir um invariante de variedades, denominado **Grupo de Cohomologia de De Rham**. Para isto, precisamos de umas definições preliminares.

Definição 1.9.1. *Seja $\omega \in \Omega^k(M)$. Dizemos que ω é **fechada** se $d\omega = 0$, e **exata** se existe $\xi \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $\omega = d\xi$.*

Note que toda forma exata é fechada, pelo item (3) do **Teorema 1.8.3.**. Denotando por $Z^k(M)$ o grupo das k-formas fechadas e por $B^k(M)$ o conjunto das k-formas exatas em M, podemos definir uma relação em Z^k por

$$\omega_1 \sim \omega_2 \iff \exists \xi \in \Omega^{k-1}(M) : \omega_1 - \omega_2 = d\xi$$

Proposição 1.9.1. *A relação definida anteriormente é uma relação de equivalência em $Z^k(M)$.*

Demonstração. Sejam $\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in Z^k(M)$.

1. *Reflexividade*: $\omega \sim \omega$ pois $\omega - \omega = 0$, e $0 \in \Omega^{k-1}(M)$.

2. *Simetria*: Suponha que $\omega_1 \sim \omega_2$. Então, existe $\xi \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $\omega_1 - \omega_2 = d\xi$. Mas $\omega_2 - \omega_1 = -d\xi = d(-\xi)$, e assim $\omega_2 \sim \omega_1$.

3. *Transitividade*: Suponha que $\omega_1 \sim \omega_2$, e $\omega_2 \sim \omega_3$. Então existem $\xi_1, \xi_2 \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $\omega_2 - \omega_1 = d\xi_1$, $\omega_3 - \omega_2 = d\xi_2$. Consequentemente

$$\omega_3 - \omega_1 = \omega_3 - \omega_2 + \omega_2 - \omega_1 = d\xi_2 + d\xi_1 = d(\xi_2 + \xi_1)$$

O que mostra que $\omega_1 \sim \omega_3$.

□

Definição 1.9.2. *Seja M uma n-variedade. Definimos o **k-ésimo grupo de Cohomologia de De Rham** de M por*

$$H^k(M) := \frac{Z^k(M)}{B^k(M)}$$

Um fato importante é que toda função suave $f : M \to N$ induz uma função $f^\# : H^k(N) \to H^k(M)$ pelo pullback de formas.

Proposição 1.9.2. *Seja $f : M \to N$ uma função diferenciável. Temos que:*

1. *O pullback f^* leva formas fechadas em fechadas, e exatas em exatas.*

2. *Se $\omega \sim \xi$ em N, então $f^*\omega \sim f^*\xi$ em M.*

3. *f^* induz um mapa $f^\# : H^k(N) \to H^k(M)$ em cohomologia, definido naturalmente por $f^\#[\omega] = [f^*\omega]$.*

4. *Se $g : L \to M$ é um mapa suave, então $(g \circ f)^\# = f^\# \circ g^\#$.*

Demonstração. Seja $f : M \to N$ uma função diferenciável.

1. Sejam $\omega_1 \in Z^k(M)$, e $\omega_2 \in B^k(N)$. Temos $df^*\omega_1 = f^*d\omega_1 = f^*0 = 0$, e $f^*\omega_2 = f^*(d\xi) = df^*\xi$, para $\xi \in \Omega^{k-1}(N)$.
2. Suponha $\omega \sim \xi$. Então $\exists \eta \in \Omega^{k-1}(N)$ tal que $\omega - \xi = d\eta$. Logo, $f^*\omega - f^*\xi = f^*d\eta = df^*\eta \Rightarrow f^*\omega \sim f^*\xi$.
3. Dado $f : M \to N$, podemos definir o mapa $f^\# : H^k(N) \to H^k(M)$ por $\omega \mapsto [f^*\omega]$. Note que este mapa é bem-definido pelo item (2).
4. Segue da **Proposição 1.8.1.**

□

Proposição 1.9.3. *Seja $f : M \to N$ um difeomorfismo entre variedades. Então $H^k(M) \cong H^k(N)$.*

Demonstração. Seja $f : M \to N$ um difeomorfismo. Então existe $f^{-1} : N \to M$, e além disso, $(f^{-1})^*$ é a função inversa de f^*, e podemos ver

$$(f^{-1})^\# \circ f^\#[\omega] = (f^{-1})^\#[f^*\omega] = [((f^{-1})^* \circ f^*)\omega] = [\omega] = [(f^* \circ (f^{-1})^*)\omega] = (f^\# \circ (f^{-1})^\#)[\omega]$$

Logo, $f^\#$ é isomorfismo entre $H^k(M)$ e $H^k(N)$. □

1.9.1 Famílias suaves de formas diferenciais

Será relevante para o nosso trabalho estudar **famílias à 1-parâmetro** de formas diferenciais. Seu uso será importante para a construção de alguns difeomorfismos.

Definição 1.9.3. *Uma* ***família à 1-parâmetro de formas diferenciais*** *em M é um conjunto $\{\omega_t\}_{t\in I}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ e ω_t é uma forma diferencial em M, $\forall t \in I$. Dizemos que $\omega_t\}_{t\in I}$* ***depende suavemente de t*** *se, $\forall p \in M$, $\exists (U, x_1, ..., x_n)$ carta tal que*

$$(\omega_t)_p = \sum_J b_J(t,p)(dx_J)_p, (t,p) \in I \times U$$

onde b_J são funções suaves em $I \times U$. Neste caso, chamamos $\{\omega_t\}$ também de ***família suave de formas diferenciais****.*

Definição 1.9.4. *Dada $\{\omega_t\}_{t\in I}$ família suave de formas diferenciais, definimos a* ***derivada com respeito à t*** *dela por*

$$\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t_0} \right)_p = \sum_J \frac{db_J}{dt}\bigg|_{(t_0,p)} (dx_J)_p$$

Note que a derivada independe da carta tomada, pois em uma carta $(U, x_1, ..., x_n)$, temos $(\omega_t)_p = \sum_J b_J(t,p)(dx_J)_p$, para $(t,p) \in I \times U$; e $\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} \omega_t \right) = \sum_J \frac{db_J}{dt}(t_0,p)(dx_J)_p$. Da mesma forma, dada outra carta $(V, y_1, ..., y_n)$ com $(t,p) \in I \times V$, temos $(\omega_t)_p = \sum_L c_L(t,p)(dx_L)_p$, assim como $\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} \omega_t \right) = \sum_L \frac{dc_L}{dt}(t_0,p)(dx_L)_p$.

Note que, $\forall (t,p) \in I \times (U \cap V)$, temos

$$\sum_J b_J(t,p)(dx_J)_p = (\omega_t)_p = \sum_L c_L(t,p)(dx_L)_p$$

Então, para $I = (i_1, ..., i_k)$, temos que

$$\begin{aligned} c_I(t,p) &= \sum_L c_L(t,p)(dx_L)_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\right|_p, ..., \left.\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\right|_p \right) \\ &= \sum_J b_J(t,p) \underbrace{(dx_J)_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\right|_p, ..., \left.\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\right|_p \right)}_{F_I^J(p)} \end{aligned}$$

Avaliando, temos:

$$\begin{aligned} \sum_L \frac{dc_L}{dt}(t,p)(dx_L)_p &= \sum_L \frac{d}{dt} \left(\sum_J b_J(t,p) F_L^J(p) \right) \Bigg|_{(t_0,p)} (dx_L)_p \\ &= \sum_L \sum_J \frac{db_J}{dt}(t_0,p) F_L^J(p)(dx_L)_p \\ &= \sum_J \frac{db_J}{dt}(t_0,p) \underbrace{(\sum_L F_L^J(p)(dx_L)_p}_{dx_J} \\ &= \sum_J \frac{db_J}{dt}(t_0,p)(dx_J)_p \end{aligned}$$

O que prova que a derivada independe da carta tomada.

Proposição 1.9.4. *Sejam $\{\omega_t\}_{t\in I}$ e $\{\tau_t\}_{t\in I}$ duas famílias suaves de formas em M. Valem:*

1. $\frac{d}{dt}(\omega_t \wedge \tau_t) = \frac{d\omega_t}{dt} \wedge \tau_t + \omega_t \wedge \frac{d\tau_t}{dt}$
2. $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} d\omega_t = d \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} \omega_t \right)$

Demonstração. Sejam $\{\omega_t\}_{t\in I}$ e $\{\tau_t\}_{t\in I}$ duas famílias suaves de formas em M.

1. Como a derivada é linear, basta provarmos para o caso $\omega_t = a(t, \cdot)_I dx_I$ e $\tau_t = b(t, \cdot)_J dx_J$.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\omega_t \wedge \tau_t) &= \frac{d}{dt}(a_I b_J) dx_I \wedge dx_J \\
&= \frac{da_I}{dt} b_J dx_I \wedge dx_J + a_I \frac{db_J}{dt} dx_I \wedge dx_J \\
&= \frac{d\omega_t}{dt} \wedge \tau_t + \omega_t \wedge \frac{d\tau_t}{dt}
\end{aligned}
$$

2. Primeiro, provaremos que d comuta com $\frac{d}{dt}$.

   Note que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} d\omega_t &= \frac{d}{dt}\left(\sum_J \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_J}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_J\right) \\
&= \sum_J \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}\frac{\partial b_J}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_J \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_J \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{db_J}{dt}\right) dx_i \wedge dx_J \\
&= d\left(\sum_J \frac{db_J}{dt}\right) dx_J = d\left(\frac{d}{dt}\omega_t\right)
\end{aligned}
$$

   Agora, vemos que a avaliação em t_0 comuta com d.

$$
\begin{aligned}
\left(d\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \omega_t\right)\right) &= \left.\left(\sum_{i=1}^n \sum_J \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{db_J}{dt} dx_i \wedge dx_J\right)\right|_0 \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_J \frac{\partial}{\partial x_i}\left.\left(\frac{db_J}{dt}\right)\right|_0 dx_i \wedge dx_J \\
&= d\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} \omega_t\right)
\end{aligned}
$$

   Assim, concluímos que $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} d\omega_t = d\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} \omega_t\right)$.

$\square$

2 Variedades Simpléticas

Nosso foco é estudar a estrutura local de um tipo de variedades, chamadas **Variedades Simpléticas**. Para isso, precisamos de algumas noções de Álgebra Linear.

2.1 Álgebra Linear Simplética.

Neste capítulo, todos os nossos espaços vetoriais tem dimensão finita.

Teorema 2.1.1 (Forma Padrão para funções bilineares anti-simétricas)**.** *Seja* $T : V \times V \to \mathbb{R}$ *uma função bilinear anti-simétrica. Então existe uma base* $\{u_1, ..., u_k, e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n\}$ *com*

- $T(e_i, f_j) = \delta_{ij}$
- $T(e_i, e_j) = 0 = T(f_i, f_j)$
- $T(u_i, v) = 0, \forall v \in V, \forall i \in \{1, ..., n\}$

Demonstração: Seja $U = \{u \in V \mid T(u, v) = 0, \forall v \in V\}$. Como U é subespaço de V pela bilinearidade de T, podemos escolher um subespaço Z em V tal que

$$V = U \bigoplus Z$$

Tome $e_1 \in Z$ com $e_1 \neq 0$. Existe $f_1 \in Z$ com $T(e_1, f_1) \neq 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor $T(e_1, f_1) = 1$. Seja:

- $Z_1 = span\{e_1, f_1\}$
- $Z_1^T = \{u \in Z \mid T(u, v) = 0, \forall v \in Z_1\}$

Afirmamos que $Z_1 \cap Z_1^T = \{0\}$. De fato, se $w = ae_1 + bf_1 \in Z_1 \cap Z_1^T$, temos

- $T(w, e_1) = T(ae_1 + bf_1, e_1) = -b$
- $T(w, f_1) = T(ae_1 + bf_1, f_1) = a$

Pela definição de Z_1^T, temos $a = -b = 0$

Temos também que $Z = Z_1 \bigoplus Z_1^T$. Para ver isto, tomemos $v \in Z_1 \cap Z_1^T$.

Seja $v \in Z$. $\forall w \in Z_1$, definimos

$$z_w := w + (v - w)$$

Embora essa definição pareça trivial, temos que $v - w \in Z_1^T$, pois

$$\begin{aligned} T(v, z_w) &= T(v, w + (v - w)) \\ &= T(v, w) + T(v, v - w), \text{pela bilinearidade de T} \\ &= T(v, w) + T(v, v) - T(v, w), \text{pela bilinearidade de T} \\ &= 0, \text{pois } T(v, v) = 0 \end{aligned}$$

E como $w \in Z_1$, temos que z_w é soma de elementos de Z_1 e de Z_1^T, temos que todo elemento de Z é dessa forma, logo concluímos que $Z = Z_1 \bigoplus Z_1^T$

Repetimos o processo para Z_1^T. Selecionamos $e_2 \in Z_1^T$, e temos que existe $f_2 \in Z_1^T$ com $T(e_2, f_2) \neq 0$. Definimos Z_2 e Z_2^T de forma análoga à anterior, e encontramos que $Z_1^T = Z_2 \bigoplus Z_2^T$.

Podemos repetir esse processo um número finito de vezes, pois V tem dimensão finita, e encontramos

$$V = U \bigoplus Z_1 \bigoplus Z_2 \bigoplus ... \bigoplus Z_n$$

Como a união das bases e_i, f_i com uma base $u_1, ..., u_k$ de U é base de V, obtemos a base desejada. $\square$

Como a dimensão de U é independente com respeito à escolha de bases, temos que $k = \dim U$ é um invariante de (V, T), assim como $n = \dfrac{m - k}{2}$, denominado o **posto** de T.

Observação 2.1.1. *Com respeito a essa base, T tem representação matricial*

$$T(u, v) = \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}— & u & —\end{bmatrix}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Id \\ 0 & Id & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ v \\ | \end{bmatrix}$$

Observação 2.1.2. *Note que a base encontrada no Teorema não é única. Dependendo da base escolhida para U, ela varia.*

Definição 2.1.1. *Dados V espaço vetorial, e $T : V \times V \to \mathbb{R}$ aplicação bilinear alternada. Dado $v \in V$, definimos*

$$\begin{aligned} \tilde{T} : V &\to V^* \\ u &\mapsto T(u, \cdot) \end{aligned}$$

Note que $\ker \tilde{T}$ é o subespaço U definido no Teorema 2.1.1.

Definição 2.1.2. *Dizemos que a aplicação $\tilde{T}$ definida acima é **simplética** se $\tilde{T}$ é bijetiva, ou equivalentemente, se $U = \{u \in V \mid T(u,v) = 0, \forall v \in V\} = \{0\}$. O mapa $\tilde{T}$ é chamado de **Estrutura linear simplética** em V, e o par (V,T) é chamado de **Espaço Vetorial Simplético**.*

Observação 2.1.3. *Dada uma estrutura linear simplética $\tilde{T}$ em um espaço vetorial V, temos que pelo teorema da forma padrão, dim U = dim $\ker \tilde{T} = 0$, então temos que existe uma base $\{e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n\}$ satisfazendo $T(e_i, e_j) = T(f_i, f_j) = 0$ e $T(e_i, f_j) = \delta_{ij}$. Uma base nessas condições é chamada de **base simplética** de V. Temos que nela:*

$$T(u,v) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} — & u & — \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ v \\ | \end{bmatrix}$$

Em um espaço vetorial simplético V, podemos destacar alguns tipos de subespaços:

Definição 2.1.3. *Dizemos que um subespaço $W \subset V$ é **simplético** se $T\mid_{W\times W}$ é não-degenerada.*

Exemplo 2.1.1. *$W = span\{e_1, f_1\}$ é simplético.*

Definição 2.1.4. *Dizemos que um subespaço $W \subset V$ é **isotrópico** se $T\mid_{W\times W} \equiv 0$*

Exemplo 2.1.2. *$W = span\{e_1, e_2\}$ é isotrópico.*

Definição 2.1.5. *Dizemos que um subespaço $W \subset V$ é **co-isotrópico** se $W^T \subset W$.*

Exemplo 2.1.3. *$W = span\{e_1, f_2, ..., f_n\}$ é co-isotrópico, pois $W^T = \{e_1\}$.*

Proposição 2.1.1. *Sejam W, Y subespaços de um espaço vetorial simplético V. Temos as propriedades:*

1. *dim Y + dim Y^T = dim V*
2. *$((Y^T)^T) = Y$*

3. $W \subset Y \implies Y^T \subset W^T$

4. W *é simplético* $\iff W \cap W^T = \{0\} \iff V = W \bigoplus W^T$

5. Y *é isotrópico* $\implies$ *dim* $Y \leq \dfrac{dim\, V}{2}$

6. Y *é co-isotrópico* $\implies$ *dim*$Y \geq \dfrac{dim\, V}{2}$

Demonstração. Sejam V espaço vetorial simplético, W e Y subespaços de V, e T a estrutura simplética em V.

1. Defina $\varphi : V \to Y^*$ por $v \mapsto T(v, \cdot) \mid_Y$. Temos que o $\ker \varphi = \{v \in V \mid T(v, y) = 0, \forall y \in Y\} = Y^T$. Provamos que Im($T$.) $\cong$Y.
   Seja $\alpha \in Y^*$. Usando a existência de $W \subset V$ com $V = Y \bigoplus W$, podemos definir uma $\tilde{\alpha} \in V^*$ por $y + w \mapsto \alpha(y)$. Pela bijetividade de $\tilde{T} : V \to V^*$, existe $v \in V$ tal que $\tilde{\alpha} = \tilde{T}_v$. Porém $\tilde{\alpha} \mid_Y = \alpha$. Logo $\alpha = \tilde{T}(v, \cdot) \mid_Y$. Logo, temos que φ é sobrejetora, e pelo teorema do núcleo e da imagem, concluímos que dim Y + dim Y^T = dim V.

2. ($\supseteq$) Seja $y \in Y$. $\forall v \in Y^T$ temos que $T(v, y) = 0$, por definição de Y^T. Logo $y \in (Y^T)^T$.
   ($\subseteq$) Seja $v \in (Y^T)^T$. Temos que $\exists! y \in Y, y' \in Y^T$ t.q. $v = y + y'$. $T(v, y') = 0 \Rightarrow T(y, y') + T(y', y') = 0$. Como $T(y, y') = 0$, $y' = 0$ e portanto, $v = y \in Y$.

3. ($\Rightarrow$) Seja $y \in Y^T$. Temos que $T(y, v) = 0, \forall v \in Y$. Logo $T(y, w) = 0, \forall w \in W$, pois $W \subset Y$. Assim, temos que $y \in W^T$.
   ($\Leftarrow$) Seja $Y^T \subset W^T$. Pela implicação anterior, temos que $(W^T)^T \subset (Y^T)^T$, logo, por (2), temos que $W \subset Y$.

4. ($\Rightarrow$) Se W é simplético, temos que $T \mid_{W \times W} \equiv 0$. Seja $u \in W \cap W^T$. Temos que $T(u, v) = 0$, $\forall v \in W$. Porém, como T é simplética, T é não-degenerada e logo $T(u, v) = 0$, $\forall v \in W \Rightarrow u = 0$.
   ($\Leftarrow$) Suponha que $W \cap W^T = \{0\}$. Então temos que $\{w \in W \mid T(u, w) = 0, \forall u \in W\} = \{0\}$. Logo $T \mid_{W \times W} \equiv 0$.

   A outra equivalência segue da definição de soma direta de espaços vetoriais. Como vimos no Teorema 2.1.1., $V = W + W^T$. Daí, temos que $W \cap W^T = \{0\} \iff V = W \bigoplus W^T$.

5. Seja Y um subespaço isotrópico. Temos que $Y \subset Y^T$. Logo, dim $Y \leq$ dim Y^T. Por (1), 2dim $Y \leq$ dim$Y$ + dimY^T = dim V. Logo dim $Y \leq \dfrac{dimV}{2}$.

6. Seja Y um subespaço co-isotrópico. Temos que $Y^T \subset Y$. Logo, dim $Y^T \leq$ dim Y. Por (1), 2dim $Y^T \leq$ dim Y^T + dim$Y$ = dim V. Logo dim $Y^T \leq \dfrac{dimV}{2}$.

$\square$

Uma classe importante de subespaços de um espaço vetorial simplético é dada pelos subespaços **lagrangianos**.

Definição 2.1.6. *Seja W um subespaço isotrópico de V. Dizemos que W é **lagrangiano** se dim $W = \dfrac{dimV}{2}$.*

Proposição 2.1.2. *Seja Y um subespaço de um espaço vetorial simplético V. São equivalentes:*

1. *Y é lagrangiano.*
2. *Y é isotrópico e co-isotrópico.*
3. *$Y = Y^T$*

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2): Provaremos a contrapositiva. Se Y não é isotrópico, Y não é lagrangiano. Se Y não é co-isotrópico, dim $Y < \dfrac{dimV}{2}$, e assim Y não pode ser lagrangiano.
(2) $\Rightarrow$ (3): Se Y é isotrópico e co-isotrópico, temos $Y \subset Y^T$ e $Y^T \subset Y$, e logo $Y = Y^T$.
(3) $\Rightarrow$ (1) $Y = Y^T \Rightarrow$ dim Y = dim $Y^T \Rightarrow$ 2dim$Y$ = dim$V$, o que nos dá dim$Y$ = $\dfrac{dimV}{2}$. $\square$

Essa classe de espaços ganhará mais importância posteriormente no estudo de certas subvariedades do fibrado cotangente.

Assim como em outras estruturas, existe uma "modelo canônico" de espaço vetorial simplético.

Definição 2.1.7. *O **protótipo de um espaço vetorial simplético** é $(\mathbb{R}^{2n}, T_0)$ com T_0 de forma que a base canônica é vista como uma base simplética, vista da forma:*

$$
\begin{aligned}
e_1 &= (1, 0, ..., 0) \\
&\vdots \\
e_n &= (0, 0, ..., \underbrace{1}_{n}, 0, ..., 0) \\
f_1 &= (0, 0, ..., 0, \underbrace{1}_{n+1}, 0, ..., 0) \\
&\vdots \\
f_n &= (0, 0, ..., 1)
\end{aligned}
$$

O valor de T_0 em outros vetores é avaliado usando os vetores da base e a bilinearidade de T_0.

Espaços vetoriais simpléticos também admitem uma noção de equivalência, chamada **simplectomorfismo**.

Definição 2.1.8. *Um **simplectomorfismo** φ entre espaços (V, T) e (V', T') é um isomorfismo $\varphi : V \to V'$ satisfazendo $\varphi^* T' = T$. (V, T) e (V', T') são ditos **simplectomorfos** se existe um simplectomorfismo entre eles.*

Proposição 2.1.3. *A relação de ser Simplectomorfo é uma relação de equivalência no conjunto dos espaços vetoriais simpléticos.*

Demonstração. Sejam (V, T), (W, S) e (X, R) espaços vetoriais simpléticos, e $\varphi : V \to W$, $\psi : W \to X$.

- *Reflexividade*: A identidade é um simplectomorfismo, pois é um isomorfismo e $(id)^* T = T$.

- *Simetria*: Suponha que V e W sejam simplectomorfos, com $\varphi : V \to W$ sendo o simplectomorfismo. Temos que $\varphi^{-1} : W \to V$ é um simplectomorfismo, pois

$$(\varphi^{-1})^* T = (\varphi^{-1})^* \varphi^* S = (\varphi \circ \varphi^{-1})^* S = (Id)^* S = S.$$

- *Transitividade*: Suponha que (V, T) e (W, S) sejam simplectomorfos, e (W, S) e (X, R) também, sendo φ e ψ os simplectomorfismos respectivamente. Temos que $\psi \circ \varphi : V \to X$ é um simplectomorfismo. Pois:

$$(\psi \circ \varphi)^* R = \varphi^* (\psi^* R) = \varphi^* S = T$$

□

Ainda, pelo Teorema da Forma Padrão, temos que cada escolha de uma base simplética para um espaço vetorial simplético V induz um simplectomorfismo para o protótipo padrão - basta definir um mapa de V para $\mathbb{R}^{2n}$, levando os $e_i' s$ e $f_i' s$ da base de V nos $e_i' s$ e $f_i' s$ da base de V.

2.2 Variedades Simpléticas.

Definição 2.2.1. *Seja M uma variedade diferenciável e ω uma 2-forma em M. Dizemos que ω é simplética se ω é fechada e ω_p é simplética $\forall p \in M$.*

Note que se ω é simplética, dim T_pM = dim M é par.

Definição 2.2.2. *Uma **variedade simplética** é um par (M, ω) onde ω é uma forma simplética em M.*

Exemplo 2.2.1. *Seja $M = \mathbb{R}^{2n}$ com coordenadas $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$. Podemos definir a forma*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$$

Temos que ela é simplética. Para ver isso, seja $v \in T_pM$. Temos

$$\begin{aligned}
&\omega(v,w) = 0 \ , \forall w \in T_pM \\
&\iff dx_i \wedge dy_i(v,w) = 0, \ \forall w \in T_pM \\
&\iff dx_i(v)dy_i(w) - dy_i(v)dx_i(w) = 0, \ \forall w \in T_pM \\
&\iff dx_i \left(a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) dy_i \left(b_i' \frac{\partial}{\partial y_i}\right) - dy_i \left(b_i \frac{\partial}{\partial y_i}\right) dx_i \left(a_i' \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = 0, \ \forall w \in T_pM \\
&\iff a_i b_i' - b_i a_i' = 0, \ \forall b_i, b_i' \in \mathbb{R} \\
&\iff a_i = a_i' = 0
\end{aligned}$$

Também temos que $d\omega = 0$ porque os coeficientes da forma são constantes. Concluímos assim que ω é simplética.

Nesse caso temos que a base simplética é $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p, ..., \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_p \right\}$.

Exemplo 2.2.2. *Seja $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$. Podemos definir uma forma simplética em $\mathbb{S}^2$ por $\omega_p = \langle p, u \times v \rangle$. Essa forma é fechada por ter grau máximo, e é simplética pois se $v \in T_p\mathbb{S}^2$ é tal que $\langle p, u \times v \rangle = 0, \forall u \in T_p\mathbb{S}^2$, então pela não-degeneração do produto interno, $u \times v = 0$, $\forall u \in T_p\mathbb{S}^2$, o que nos dá $v = 0$.*

Variedades simpléticas admitem uma noção correspondente de simplectomorfismo.

Definição 2.2.3. *Sejam (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) variedades simpléticas, e seja $\varphi : M_1 \to M_2$ um difeomorfismo. Dizemos que φ é um simplectomorfismo se $(\varphi)^*\omega_2 = \omega_1$.*

2.3 O fibrado cotangente como variedade simplética

Seja T^*M o fibrado cotangente de uma variedade diferenciável M, com cartas dadas por $(\pi_*^{-1}(U), \varphi \times (\xi_1, ..., \xi_n))$, onde (U, φ) é uma carta de M e $\xi = \xi_1(dx_1)_p + \cdots + \xi_n(dx_n)_p$ é um funcional em T_p^*M Podemos definir uma forma simplética no mesmo, por:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge d\xi_i$$

Esta forma é denotada 2**-forma simplética canônica**. Como nossas proposições envolvendo esta forma envolvem pullbacks, é interessante notar que na verdade, ela é a derivada de uma 1-forma, denotada 1**-forma tautológica**, definida por $\alpha_p = (d\pi_p)^*\xi$, onde $p = (x, \xi)$ é um ponto de T^*M, e $\pi_p : T^*M \to M$ é definida por $(x, \xi) \mapsto x$.

Podemos mostrar que, em coordenadas, $\alpha_p = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i$. Para isso, sejam $(U, \varphi) = (U, x_1, ..., x_n)$ e $(\pi^{-1}(U), x_1, ..., x_n, \xi_1, ..., \xi_n)$ respectivamente cartas de M e T^*M, e $v \in T_p(T^*M)$. Temos que $v = \sum\limits_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p + b_i \left(\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right)_p$. Fazendo

$$\begin{aligned}
\alpha_p(v) &= (d\pi_p)^*\xi \left(\sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p + b_i \left(\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right)_p\right) \\
&= \xi \left(d\pi_p \left(\left(\sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p + b_i \left(\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right)_p\right)\right)\right) \\
&= \xi \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right)_{(\overline{\varphi}(p))}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_x\right. \\
&= \xi \left(\sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_x\right) \\
&= \sum_{j=1}^n \xi_j (dx_j)_x \left(\sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_x\right) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i \xi_i \\
&= \sum_{i=1}^n \xi_i (dx_i) v
\end{aligned}$$

Como todas as funções envolvidas são diferenciáveis, temos que α_p é diferenciável.

Note que

$$-d\alpha = -d\left(\sum_{i=1}^n \xi_i dx_i\right) = -\left(\sum_{i=1}^n d\xi_i \wedge dx_i\right) = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\xi_i = \omega$$

Um fato importante é que um difeomorfismo f entre variedades M_1 e M_2 determina um simplectomorfismo entre fibrados cotangentes. Para isso, definimos uma função

$$\begin{array}{rccc}
f_\# : & T^*M_1 & \to & T^*M_2 \\
& (x_1, \nu) & \mapsto & (x_2, (df_{x_2}^{-1})^*\nu)
\end{array}$$

Onde $x_2 = f(x_1)$.

Proposição 2.3.1. *$f_\# : T^*M_1 \to T^*M_2$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. Primeiro, note que o diagrama

$$\begin{tikzcd} T^*M_1 \arrow[r, "f_\#"] \arrow[d, "\pi_{*1}"] & T^*M_2 \arrow[d, "\pi_{*2}"] \\ M_1 \arrow[r, "f"] & M_2 \end{tikzcd}$$

comuta, pois dado $(x,\nu) \in T^*M_1$, $(f \circ \pi_{*1})(x,\nu) = f(x)$, e $(\pi_{*2} \circ f_\#)(x,\nu) = \pi_{*2}(f(x), (df^{-1}_{f(x)})^*\nu) = f(x)$.

Segundamente, $f_\#$ é bijetora pois ambas as coordenadas são bijetoras.

Terceiramente, $f_\#$ é suave pois dadas cartas $(U,\varphi) = (U, x_1, ..., x_n)$ e $(V,\psi) = (V, y_1, ..., y_n)$ cartas de M_1 e M_2 respectivamente, com cartas associadas $(\pi_1^{-1}(U), \overline{\varphi})$ e $(\pi_2^{-1}(V), \overline{\psi})$, temos

$$\begin{aligned} \overline{\psi} \circ f_\# \circ \overline{\varphi}^{-1}(x_1, ..., x_n, \xi_1, ..., \xi_n) &= \overline{\psi} \circ f_\#(x, \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i) \\ &= \overline{\psi}(f(x), \sum_{i=1}^n \xi_i (df^{-1})^*_{f(x)}(dx_i)) \end{aligned}$$

Como as coordenadas de $(df^{-1})^*_{f(x)}(dx_i)$ são diferenciáveis, temos que $\hat{f}_\#$ é diferenciável, logo $f_\#$ também o é. □

Corolário 2.3.1. *Sejam α_1 e α_2 as 1-formas tautológicas em T^*M_1 e T^*M_2 respectivamente. Temos que $(f_\#)^*(\alpha_2) = \alpha_1$.*

Demonstração. Sejam $p_1 \in M_1$, $p_2 \in M_2$ com $p_2 = f_\#(p_1)$, e $\xi_1 \in T^*_{p_1}M_1$, $\xi_2 \in T^*_{p_2}M_2$ com $\xi_1 = (df_{p_2})^*\xi_2$. Temos

$$\begin{aligned} (f_\#)^*_{p_1}(\alpha_2)_{p_2} &= (df_\#)^*_{p_1}(d\pi_*)^*_{p_2}\xi \\ &= d(\pi_{*p_2} \circ f_\#)^*_{p_1}\xi \\ &= d(f \circ \pi_{*p_1})^*_{p_1}\xi \\ &= d\pi_{*p_1}^{*} df^*_{p_1}\xi = (d\pi_{*p_1})^*\xi_1 = (\alpha_1)_{p_1} \end{aligned}$$

Como os pontos são arbitrários, a igualdade vale em todos os pontos das variedades.

□

Proposição 2.3.2. *$f_\# : T^*M_1 \to T^*M_2$ é um simplectomorfismo com relação à estrutura simplética dada pela forma simplética canônica, ou seja, $(f_\#)^*\omega_2 = \omega_1$.*

Demonstração. A prova segue de um cálculo simples:

$$\begin{aligned}
(f_\#)^*\omega_2 &= (f_\#)^* d\alpha_2 & \\
&= d(f_\#)^*\alpha_2 & \text{pois } df^*(\cdot) = f^*d(\cdot) \\
&= d\alpha_1 & \text{pelo corolário anterior} \\
&= \omega_1
\end{aligned}$$

□

Obtemos assim que um difeomorfismo $f : M_1 \overset{\cong}{\to} M_2$ induz um simplectomorfismo $f_\# : T^*M_1 \overset{\cong}{\to} T^*M_2$ entre os seus fibrados cotangentes. Agora vamos estudar um pouco dos mesmos, por serem o exemplo mais importante de variedades simpléticas. É neles que a mecânica hamiltoniana é feita.

Antes de começarmos, é necessário fazer uma adaptação em uma definição. Deste momento até o fim da monografia, nós temos:

Definição 2.3.1. *Sejam N e M variedades diferenciáveis de dimensão k e n, com $k \leq n$. Dizemos que N é uma* ***subvariedade*** *de M se existe uma imersão $f : M \to N$ injetora e própria(denotada também por* ***mergulho fechado****).*

Temos o útil critério para determinar quando uma função é uma imersão fechada:

Proposição 2.3.3. *Sejam N e M variedades de dimensão k e n, respectivamente, com $k \leq n$. Uma função $f : N \to M$ é um mergulho fechado se, e somente se, f é um mergulho e $f(N)$ é fechada em M.*

Demonstração. Seguimos a prova indicada em [6], [7], [8]. ($\Leftarrow$) Seja $f : N \to M$ um mergulho com imagem fechada em M, e seja $C \subset M$ compacto. Temos que como f é mergulho, então é injetora, e assim $f^{-1}(C) \cong C \cap f(X)$. Como C é compacto, $f(X)$ também o é. Logo, f é uma imersão injetiva e própria.

($\Rightarrow$) Seja f um mergulho fechado, i.e., uma imersão injetiva e própria. Como f é imersão, pela forma local das imersões, temos que $\forall p \in N$, existem cartas (U, φ) e (V, ψ) ao redor de p e $f(p)$ tal que $\hat{f}$ é a imersão canônica, e pela natureza da função, $\varphi(U) \cong \hat{f}(\varphi(U))$. Como f é injetiva, temos que nas interseções destas cartas, as funções coincidem, logo, podemos estendê-la para a variedade inteira, tomando uma cobertura de N por cartas. Assim, $N \cong f(N)$ e f é um mergulho. Nos resta provar que $f(N)$ é fechada em M, e o faremos mostrando que f é fechada.

Seja $C \subset N$ fechado. Provaremos que $M - f(C)$ é aberto. Como M é localmente compacta, $\forall y \in M - f(C), \exists U_y$ aberto tal que $\overline{U_y}$ é compacto. Como f é própria, temos que $f^{-1}(\overline{U_y})$ é compacto. Logo, $C \cap f^{-1}(\overline{U_y})$ é compacto,e assim a sua imagem $f(C \cap f^{-1}(\overline{U_y})) = f(C) \cap \overline{U_y}$ também o é; e como compactos em espaços de Hausdorff são fechados, temos que ele também é fechado.

Assim, $\forall y \in M - f(C)$, podemos encontrar $V_y = U_y - (f(C) \cap \overline{U_y}) = U_y - f(C)$ aberto que não intersecta $f(C)$. Logo, $M - f(C)$ é aberto, e $f(C)$ é fechado.

Como N é fechada em N, temos que $f(N)$ é fechada em M. Assim, f é um mergulho e $f(N)$ é fechada em M. □

Vamos estudar uma classe de subvariedades do fibrado cotangente, chamada de **subvariedades lagrangianas**.

Definição 2.3.2. *Seja (M, ω) uma variedade simplética. Dizemos que uma subvariedade de M é uma* ***subvariedade lagrangiana*** *se $\forall p \in X$, T_pX é um subespaço lagrangiano de T_pM. Equivalentemente, temos que X é uma subvariedade lagrangiana de M se $i^*\omega = 0$ e $dim\ X = \dfrac{dimM}{2}$.*

Começaremos estudando a **seção zero** de T^*M, definida por $M_0 := M \times \{0\}$.

Proposição 2.3.4. *M_0 é uma subvariedade de T^*M.*

Demonstração. Seja $M_0 = M \times \{0\}$. Tomemos a função $f : M \to T^*M$ definida por $x \mapsto (x, 0)$. Temos que f é contínua, pois suas coordenadas são contínuas, e tem uma inversa definida em $f(M)$ por $(x, 0) \mapsto x$, que também é contínua, por ser uma projeção. Logo temos que f é homeomorfismo na imagem, e $f(M) = M_0$. Assim, concluímos também que $f(M)$ é fechado.

Nos resta ver que f é uma imersão. Para isso, seja (U, φ) uma carta de M e $(\pi_*^{-1}(V), \overline{\psi})$ uma carta de T^*M. Em coordenadas locais, temos:

$$\overline{\psi} \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, ..., x_n) = (\psi_1(p), ..., \psi_n(p), 0, ..., 0) = (\psi \circ \varphi^{-1})(x) \times 0.$$

Como ambas as funções são diferenciáveis, temos que a representação local é diferenciável. E como a mudança de variáveis é difeomorfismo, então sua derivada é bijetora, logo injetora. Concluímos que f é uma imersão. □

Proposição 2.3.5. *M_0 é uma subvariedade lagrangiana de T^*M.*

Demonstração. Seja $(U, \varphi) = (U, x_1, ..., x_n)$ carta de M. Temos que, em coordenadas locais:

$$\begin{aligned} p \in M_0 &\iff \varphi(p) = (x_1(p), ..., x_n(p), 0, ..., 0) \\ q \in \pi_*^{-1}(U) &\iff \overline{\varphi}(q) = (x_1(q), ..., x_n(q), \xi_1, ..., \xi_n) \end{aligned}$$

Como $r \in M_0 \cap \pi^{-1}(U) \iff \xi_1 = ... = \xi_n = 0$, temos que $\alpha\mid_U = \sum_{i=1}^{n} \xi_i dx_i = \sum_{i=1}^{n} 0 dx_i = 0$. Por U ser arbitrário, $\alpha \equiv 0$ em $M_0 \cap T^*M$. Logo, $\omega = -d\alpha \equiv 0$ também. Temos então que $i_0^*\omega = i_0^* 0 = 0$, para $i_0 : M_0 \to T^*M$. Assim, M_0 é subvariedade lagrangiana de T^*M. □

Note que M_0 é o conjunto formado por uma seção(a seção zero). Podemos nos perguntar "para quais 1-formas μ, o conjunto $\{(x, \mu) : \mu \in T_x^*M\}$ é uma subvariedade lagrangiana de T^*M?".

Seja $M_\mu = \{(x, \mu) : \mu \in T_x^*M\}$, onde $\mu : M \to T^*M$ é uma 1-forma.

Proposição 2.3.6. *Seja Y uma subvariedade de T^*M. Então $Y = M_\mu$ para alguma 1-forma $\mu \iff \pi \circ i : Y \to M$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $Y = M_\mu$ para alguma $\mu : M \to T^*M$ 1-forma, e $\pi \circ i : M_\mu \to M$ definida por $(x, \mu) \mapsto x$. Provemos que $\pi \circ i$ é bijeção.

Seja $x \in M$. Temos que $\exists (x, \mu) \in M_\mu$ tal que $\pi \circ i(x, \mu) = x$. Assim, temos que $\pi \circ i$ é sobre.

Sejam (x, μ) e (y, μ) em M_μ. Temos que

$$\pi \circ i(x, \mu) = x \neq y = \pi \circ i(y, \mu)$$

Assim, temos que $\pi \circ i$ é injetora, logo bijetora.

Note que como π e i são suaves, sua composição também o é. E como a inversa de $\pi \circ i$ é dada por $x \mapsto (x, \mu)$, esta também é C^∞. Assim, $\pi \circ i : Y \to M$ é difeomorfismo.

($\Leftarrow$) Suponha que, para Y subvariedade de T^*M, $\pi \circ i : Y \to M$ é um difeomorfismo. Pela sobrejetividade de $\pi \circ i$, $\forall x \in M$, $\exists (x, \mu) \in Y$ tal que $\pi \circ i(x, \mu) = x$. Pela injetividade de $\pi \circ i$, temos que a 1-forma que acompanha o ponto é única. Assim, temos que $\forall x \in M, \exists! \mu : M \to T^*M$ tal que $(x, \mu) \in Y$. Logo, $Y = X_\mu$. □

Podemos enunciar um critério para dizer quando um X_μ é lagrangiano. Para isto, precisamos do seguinte lema.

Lema 2.3.1. *Seja $M_\mu = \{(x, \mu) : \mu \in T_x^*M$, com $\mu : M \to T^*M$ uma 1-forma. Denotando por s_μ a 1-forma μ vista apenas como função suave, e sendo α a 1-forma tautológica em T^*M, temos*

$$s_\mu^*\alpha = \mu$$

Demonstração. Sejam $p = (x, \mu) \in T^*M$, e $\alpha_p = (d\pi_{*p})^*\mu$. Temos

$$\begin{aligned}
(s_\mu^*)_x\alpha_p &= (ds_\mu)_x^*\alpha_p \\
&= (ds_\mu)_x^*(d\pi_{*p})^*\mu && \text{por definição de } \alpha_p \\
&= (d(\pi_* \circ s_\mu))_x^*\mu && \text{pois } f^* \circ g^* = (g \circ f)^* \\
&= (d(id_M))^*\mu \\
&= \mu
\end{aligned}$$

□

Para $M_\mu \subset T^*M$, temos que $s_\mu : M \to T^*M$ é um mergulho com imagem M_μ, e há um difeomorfismo $\tau : M \to M_\mu$, $x \mapsto (x, \mu)$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "s_\mu"] \arrow[dr, "\tau"'] & & T^*M \\
& M_0 \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

Podemos então enunciar a

Proposição 2.3.7. *M_μ é subvariedade lagrangiana de T^*M $\iff$ μ é uma forma fechada.*

Demonstração. □

$$\begin{array}{rcll}
\mathrm{X}_\mu \text{ é lagrangiano} & \iff & i^*d\alpha = 0 & \\
& \iff & \tau^*i^*d\alpha = 0 & \text{pois } \tau^*\text{é isomorfismo} \\
& \iff & (i \circ \tau)^*d\alpha = 0 & \text{pois } f^* \circ g^* = (g \circ f)^* \\
& \iff & (s_\mu)^*d\alpha = 0 & \text{pelo diagrama} \\
& \iff & d(s_\mu^*\alpha) = 0 & \text{pois } df^* = f^*d \\
& \iff & d\mu = 0 & \\
& \iff & \mu \text{ é fechada.} &
\end{array}$$

Além de M_μ, temos outros tipos de subvariedades lagrangianas, como as fibras do fibrado cotangente, como veremos à seguir.

Agora estudaremos um novo fibrado.

Definição 2.3.3. *Seja S uma k-subvariedade de uma n-variedade M. O* ***espaço conormal*** *à X em S é*

$$N_x^*S = \{\xi \in T_x^*M \mid \xi(v) = 0, \forall v \in T_xS\}$$

O ***fibrado conormal*** *de S é $NS = \bigsqcup_{x \in S} N_x^*S$*

Vamos mostrar que o fibrado conormal de uma subvariedade é uma subvariedade lagrangiana do fibrado cotangente.

Proposição 2.3.8. *N^*S é uma subvariedade de T^*M.*

Demonstração. Seja $f : NS \to T^*M$ definida por $f(x, \xi) = (x, \xi)$. Note que f é contínua, pois suas coordenadas são contínuas. Como S é subvariedade de M, existe um atlas para S com cartas (U, φ) tal que $\varphi(U) = \mathbb{R}^k \times \{0\}$.

Note que dim $N_x^*S = n-k$. Assim, temos que N^*S tem um atlas composto de cartas da forma $(\pi^{-1}(U), (x_1, ...x_k, 0, ..., 0) \times (0, ..., 0, \xi_{k+1}, ..., \xi_n))$, onde $(U, \varphi) = (U, x_1, ..., x_n)$ é uma carta de M adaptada à S, o que nos mostra que NM tem dimensão n.

Temos que, em coordenadas locais, o mapa f é dado por:

$$\hat{f}(x_1, ..., x_k, \xi_{k+1}, ..., \xi_n) = (x_1, ..., x_k, \underbrace{0, ..., 0}_{\text{n zeros}}, \xi_{k+1}, ..., \xi_n)$$

Onde $\xi_{k+1}, ..., \xi_n$ são os coeficientes da $\xi \in N_x^*S$. Dessa expressão, podemos concluir que $f(NS)$ é fechado em T^*M, e que f é uma imersão. Note que essa função é suave, pois cada coordenada é suave. $\square$

Proposição 2.3.9. *Seja $i : N^*S \to T^*M$ a inclusão, e α a 1-forma tautológica em T^*M. Então*

$$i^*\alpha = 0$$

Demonstração. Seja $(U, x_1, ..., x_n)$ uma carta em X centrado em $x \in S$ adaptado à S. Temos que, em coordenadas, $U \cap S$ é dado por $x_{k+1} = ... = x_n = 0$. Seja $(T^*(U), x_1, ..., x_n, \xi_1, ..., \xi_n)$ a carta associada em T^*M. A subvariedade $N^*S \cap T^*U$ é descrita por

$$x_{k+1} = ... = x_n = 0;\ \xi_1 = ... = \xi_k = 0$$

Temos então que

$(i^*\alpha)_p = \alpha \mid_{T_p(N^*S)} = \sum_{i>k} \xi_i dx_i \Big|_{span\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}, i \leq k\right\}} = 0$, pois $dx_i \left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij} = 0$ nesse caso, já que $i \neq j$. $\square$

Como corolário, obtemos que para qualquer subvariedade S de uma variedade M, o fibrado conormal N^*S é subvariedade lagrangiana de T^*M. Para $S = \{x\}$, temos que $NS = N^*_xS = \{\xi \in T^*_xM \mid \xi(v) = 0, \forall v \in T_x\{x\}\} = T^*_xS$, e para $S = M$, $NS = M_0$.

Uma aplicação da discussão de subvariedades lagrangianas é um critério para determinarmos quando um difeomorfismo é um simplectomorfismo. Para isso, seja $\varphi : M_1 \to M_2$ um difeomorfismo entre variedades simpléticas (M, ω_1) e (M, ω_2), e considere as projeções

$$\begin{array}{rccl} \pi_1 : & M_1 \times M_2 & \to & M_1 \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \pi_2 : & M_1 \times M_2 & \to & M_2 \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & x_2 \end{array}$$

Podemos considerar em $M_1 \times M_2$ a forma $\omega = \pi_1^*\omega_1 + \pi_2^*\omega_2$. É fácil ver que ω é fechada, pois

$$d\omega = \pi_1^* \underbrace{d\omega_1}_{0} + \pi_2^* \underbrace{d\omega_2}_{0} = 0.$$

E simplética, pois

$$\omega^n = (\pi_1^*\omega_1 + \pi_2^*\omega_2)^n = \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (\pi_1^*\omega_1)^k \wedge (\pi_2^*\omega_2)^{n-k} = \binom{2n}{n} (\pi_1^*\omega_1)^n \wedge (\pi_2^*\omega_2)^n \neq 0$$

Onde a última igualdade decorre da observação que, se $k < n$, $(\pi_2^*\omega_2)^{n-k} = 0$, e se $k > n$, $(\pi_1^*\omega_1)^k = 0$.

Mais geralmente, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a forma $\alpha\pi_1^*\omega_1 + \beta\pi_2^*\omega_2$ é uma forma simplética em $M_1 \times M_2$, pelas mesmas razões apresentadas acima. Escolhendo $\alpha = 1$ e $\beta = -1$, temos a **forma de produto torcido**, $\tilde{\omega} = \pi_1^*\omega_1 - \pi_2^*\omega_2$.

O gráfico de um difeomorfismo $\varphi : M_1 \overset{\cong}{\to} M_2$ é a $2n$-subvariedade $\Gamma_\varphi = \{(p, \varphi(p)) : p \in M_1\}$, tal subvariedade sendo uma imersão de M_1 em $M_1 \times M_2$, dada pelo mapa $p \mapsto g(p) = (p, \varphi(p))$.

Proposição 2.3.10. *Um difeomorfismo $\varphi : M_1 \to M_2$ é um simplectomorfismo se, e somente se, Γ_φ é uma subvariedade lagrangiana de $M_1 \times M_2$.*

Demonstração. Suponha que Γ_φ é uma subvariedade lagrangiana de $M_1 \times M_2$, i.e. $g^*\tilde{\omega} = 0$.

Avaliando, temos:

$$\begin{aligned} g^*\tilde{\omega} &= g^*(\pi_{*1}^*\omega_1 - \pi_{*2}^*\omega_2) \\ 0 &= g^*(\pi_{*1}^*\omega_1) - g^*(\pi_{*2}^*\omega_2) \\ 0 &= (\pi_{*1} \circ g)^*\omega_1 - (\pi_{*2} \circ g)^*\omega_2 \\ 0 &= id^*\omega_1 - \varphi^*\omega_2 \\ &\iff \varphi^*\omega_2 = \omega_1 \end{aligned}$$

□

2.4 Preparação para os truques de Moser.

Nesta seção, trataremos de tópicos preparatórios para a ferramenta principal do Teorema de Darboux: Os *truques de moser*.

2.4.1 Campos de vetores dependentes do tempo

Nesta subseção, usaremos os resultados sobre campos de vetores de [1].

Definição 2.4.1. *Seja M uma variedade. Uma função $\rho : M \times \mathbb{R} \to M$ é chamada uma **isotopia** se $\forall t \in \mathbb{R}$, $\rho(t, \cdot) : M \to M$ é um difeomorfismo e $\rho(0, \cdot) = id \mid_M$*

Denotaremos $\rho(t, p)$ por $\rho_t(p)$.

Definição 2.4.2. *Dada uma variedade M, **um campo de vetores dependente do tempo** é uma função $X : \mathbb{R} \times M \to TM$, $\forall (t, p) \in \mathbb{R} \times M$, $X(t, p) \in T_pM$.*

Dada uma isotopia, podemos definir um campo de vetores X_t por

$$X_t(q) = \left.\frac{d\rho_s(q)}{ds}\right|_t, q = \rho_t^{-1}(p)$$

Ou seja

$$\left.\frac{d\rho(s, p)}{ds}\right|_t = X_t \circ \rho(t, p)$$

Reciprocamente, dado um campo de vetores X_t dependente do tempo, se M é compacta(ou se cada X_t tem suporte compacto), existe isotopia $\rho_t : M \to M$ satisfazendo a EDO anterior.

No caso de M ser compacta, existe uma correspondência 1-1 entre isotopias de M e campos de vetores dependentes do tempo.

Para um campo de vetores dependente do tempo, existe isotopia ao menos localmente pelo Teorema de Picard.

2.4.2 Derivadas de Lie

Definição 2.4.3. *Seja M uma variedade. Dados X_t campo dependente do tempo, com ρ_t é a isotopia local de X_t, e $\omega \in \Omega^k(M)$, definimos a* ***derivada de Lie*** *de ω por X_t, $\mathscr{L}_{X_t}\omega$ como*

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{L}_{X_t}: & \Omega^k(M) & \to & \Omega^k(M) \\ & \omega & \mapsto & \left.\dfrac{d}{dt}\right|_0 (\rho_t)^*\omega \end{array}$$

Temos algumas propriedades importantes da Derivada de Lie:

Teorema 2.4.1. *Sejam $X \in \mathfrak{X}(M), \omega \in \Omega^k(M)$, $\tau \in \Omega^l(M)$ X_t um campo dependente do tempo, e $\{\omega_t\}_{t\in I}$ uma família suave de formas. Temos:*

1. *A derivada de Lie $\mathcal{L}_X$ é uma derivação, isto é,*

$$\mathcal{L}_X(\omega \wedge \tau) = \mathcal{L}_X\omega \wedge \tau + \omega \wedge \mathcal{L}_X\tau$$

2. *L_X comuta com d.*
3. ***(Fórmula mágica de Cartan)*** *$\mathscr{L}_X\omega = i_Xd\omega + di_X\omega$*
4. *$\dfrac{d}{dt}\rho_t^*\omega = \rho_t^*\mathscr{L}_{X_t}\omega$ onde ρ_t é o fluxo local gerado por X_t.*
5. *$\dfrac{d}{dt}\rho_t^*\omega_t = \rho_t^*\left(\mathscr{L}_{X_t}\omega_t + \dfrac{d\omega_t}{dt}\right)$*

Note que (5) é o item (4) para uma família suave de formas.

Demonstração. Seja $p \in M$ e $\varphi_t : U \to M$ um fluxo local de X em uma vizinhança U de p.

1.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\omega \wedge \tau)_p &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (\varphi_t^*(\omega \wedge \tau))_p \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (\varphi_t^*\omega_p) \wedge (\varphi_t^*\tau_p) && \text{Pelo item (1) da } \textbf{Proposição 1.8.1.} \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (\varphi_t^*\omega_p) \wedge \tau_p + \omega_p \wedge \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (\varphi_t^*\tau_p) && \text{pelo item (1) da } \textbf{Proposição 1.9.4.} \\ &= (\mathcal{L}_X\omega)_p \wedge \tau_p + \omega_p \wedge (\mathcal{L}_X\tau)_p \end{aligned}$$

2.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_X d\omega &= \frac{d}{dt}\bigg|_0 (\varphi_t^* d\omega) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_0 (d\varphi_t^* \omega) && \text{pelo item (4) do } \textbf{Teorema 1.8.4.} \\
&= d\frac{d}{dt}\bigg|_0 (\varphi_t^* \omega) && \text{pelo item (1) da } \textbf{Proposição 1.9.4.} \\
&= d\mathcal{L}_X \omega
\end{aligned}
$$

3. Provaremos por indução no grau das formas nas quais vale a identidade.

   Para ω com grau 0, i.e. $\omega : M \to \mathbb{R}$, e $X \in \mathfrak{X}(M)$ temos

$$i_X(d\omega) + di_X\omega = i_X d\omega = d\omega(X) = X\omega = \mathcal{L}_X\omega$$

   Agora, seja $k \leq 1$ e suponha o resultado válido para formas de grau menor que k, e seja ω uma k-forma. Escrevendo ω em coordenadas, temos

$$\omega = \sum_I \omega_I dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$

   Fazendo $u = x_{i_1}$ e $\beta = \omega_I dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$, temos que cada termo dessa soma pode ser escrito na forma $du \wedge \beta$. Aplicando $\mathcal{L}_X$, temos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(du \wedge \beta) &= \mathcal{L}_X du \wedge \beta + du \wedge \mathcal{L}_X \beta \\
&= d(Xu) \wedge \beta + du \wedge (i_X d\beta + di_X\beta) && \text{pela hipótese de indução}
\end{aligned}
$$

   Por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
i_X(d(du \wedge \beta) + d(i_X(du \wedge \beta) &= \\
&= i_X(-du \wedge d\beta) + d(Xu\beta - du \wedge i_X\beta) \\
&= -(Xu)d\beta + du \wedge (i_X d\beta) + d(Xu) \wedge \beta + (Xu)d\beta + du \wedge di_X\beta \\
&= d(Xu) \wedge \beta + du \wedge (i_X d\beta + di_X\beta)
\end{aligned}
$$

   Assim, $\mathscr{L}_X\omega = i_X d\omega + di_X\omega$

4. Seja

$$X_t = \frac{d}{dt}\rho_t$$

Onde notamos $\rho_t = \rho_0^t$ para o fluxo ρ_t^s do campo X_t.

Temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\rho_t^*\omega &= \left.\frac{d}{ds}\right|_t \rho_s^*\omega \\
&= \lim_{s\to t} \frac{\rho_s^*\omega - \rho_t^*\omega}{s-t} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\rho_{t+h}^*\omega - \rho_t^*\omega}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\rho_t^{t+h}\rho_0^t)^*\omega - (\rho_0^t)^*\omega}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\rho_0^t)^*(\rho_t^{t+h})^*\omega - (\rho_0^t)^*\omega}{h} \\
&= (\rho_0^t)^* \left(\lim_{h\to 0} \frac{(\rho_t^{t+h})^*\omega - \omega}{h} \right) \\
&= (\rho_0^t)^* \left.\frac{d}{ds}\right|_0 (\rho_t^{t+s})^*\omega \\
&= (\rho_0^t)^* \mathcal{L}_{X_t}\omega
\end{aligned}$$

5. Se $f(x,y)$ é uma função real de duas variáveis, então pela regra da cadeia, temos

$$\frac{d}{dt} f(t,t) = \left.\frac{d}{dx}\right|_t f(x,t) + \left.\frac{d}{dy}\right|_t f(t,y)$$

Podemos ver $\rho_t^*\omega_t$ como uma $f(t,t)$. Assim, fazemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\rho_t^*\omega_t &= \frac{d}{dx}\rho_x^*\omega_t + \frac{d}{dy}\rho_t^*\omega_y \\
&= \rho_x^*\mathcal{L}_{X_t}\omega_t \mid_t + \rho_t^* \left.\frac{d\omega_y}{dy}\right|_t \\
&= \rho_t^* \left(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt} \right)
\end{aligned}$$

□

2.4.3 Teorema da Vizinhança Tubular.

Nesta subseção, demonstraremos um teorema importante, que nos ajuda a obter "mais estrutura" em abertos que não a tem.

Seja M uma n-variedade e X uma k-subvariedade de M.

Definição 2.4.4. *O espaço quociente $N_pX := T_pM/T_pX$ é chamado **espaço normal à p em X**. A união $NX := \bigsqcup_{p\in X} N_pX = \{(x,v) \mid x \in X, v \in N_pX\}$ é chamado **Fibrado Normal à X**.*

Proposição 2.4.1. *O fibrado normal à X é um fibrado vetorial de posto $n-k$, e também uma n-variedade. Além disso, a **seção zero** $X \times \{0\}$ de NX é uma subvariedade fechada de NX.*

Demonstração. Seja $\varphi : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ uma carta de M adaptada à S, i.e.

$$\varphi = (x_1, ..., x_n), \text{ e } X \cap U = \{\varphi^{-1}(x_1, ..., x_k, 0, ..., 0) \mid (x_1, ..., x_k, 0, ..., 0) \in \varphi(U)\}$$

Seja $q \in M$, e $v = \sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q$. Temos que $v \in T_qX$ se $v_i = 0$ i.e. $v = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q$.

Dessa forma, temos que para $[v]_q = v + T_qX$ é da forma $\sum_{i=s+1}^{k} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q + T_qX$

Definimos uma carta ao redor de $[v]_q \in NX$ por

$$\begin{array}{rrcl} \tilde{\varphi}: & NX\mid_U & \to & \varphi(U) \times \mathbb{R}^{n-k} \\ & (q, [v]_q) & \mapsto & (\varphi(q), v_{k+1}, ..., v_n) \end{array}$$

onde $v + T_qX = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q$. Estas cartas dão uma trivialização local de NX

Sejam $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ e $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ cartas adaptadas à X, sendo $\varphi = (x_1, ..., x_n)$ e $\psi = (y_1, ..., y_n)$.

Dado $x \in U \cap V$, temos

$$\begin{array}{rrcl} \tilde{\varphi}: & NX\mid_U & \to & \varphi(U) \times \mathbb{R}^{n-k} \\ & (q, [v]_q) & \mapsto & (\varphi(q), v^x_{k+1}, ..., v^x_n) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \tilde{\psi}: & NX\mid_V & \to & \psi(V) \times \mathbb{R}^{n-k} \\ & (q, [v]_q) & \mapsto & (\psi(q), v^y_{k+1}, ..., v^y_n) \end{array}$$

Vamos encontrar a forma de

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^{n-k} \to \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^{n-k}$$

Temos que a primeira coordenada será $\psi \circ \varphi^{-1}$, que é diferenciável.

Podemos escrever

$$
\begin{aligned}
v &= \sum_{i=1}^{n} v_i^x \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q \\
&= \sum_{i=1}^{n} v_i^x \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_q \\
&= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^x \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)}_{v_j^y} \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_q
\end{aligned}
$$

onde $\left[\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)\right]$ é a jacobiana da mudança de cartas.

Pela definição das cartas, ψ e φ, temos que se os vetores tem coordenadas $(0, \alpha)$ e $(0, \beta)$ e $\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, temos:

$$
\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
B\alpha &= 0 \\
D\alpha &= \beta
\end{aligned}
$$

Como α é arbitrário, temos que $B = [0]$, e assim concluímos que

$$
D = \left(\frac{dy_j}{dx_i}\right)_{i,j=1,\ldots,n}
$$

E

$$
v_j^y = \sum_{i=s+1}^{n} v_i^x \frac{\partial y_j}{\partial x_i}; j = s+1, ..., n
$$

Portanto a segunda coordenada de $\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}^{-1}$ é $D \begin{bmatrix} v_{j+1}^* \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ e $\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}^{-1}(q, v_{j+1}^x, ..., v_n^x) = \left(\psi \circ \varphi^{-1}(q), \sum_{i=s+1}^{n} v_i \frac{\partial y_{s+1}}{\partial x_i}, ..., \sum_{i=s+1}^{n} v_i \frac{\partial y_n}{\partial x_i}\right)$ que é diferenciável porque $\frac{\partial y_j}{\partial x_i} \in C^\infty(U \cap V)$.

Assim, temos que a mudança de coordenadas é C^∞, e NX é uma variedade diferenciável, de dimensão n. $\square$

Definição 2.4.5. *Uma vizinhança* $\mathcal{U}_0$ *da seção zero* X_0 *é dita* ***convexa*** *se sua interseção com cada fibra* N_pX *de* NX *é convexa.*

Com isto, podemos enunciar o:

Teorema 2.4.2 (Teorema da Vizinhança Tubular)**.** *Sejam* M *uma* n*-variedade, e* X *uma* k*-subvariedade de* M*, com* X_0 *sendo sua seção zero em* NX*. Então existe uma vizinhança convexa* $\mathcal{U}_0$ *de* X_0*, uma vizinhança* $\mathcal{U}$ *de* X *e um difeomorfismo* $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}_0$ *tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
NX \supseteq \mathcal{U}_0 & & \mathcal{U} \subseteq M \arrow[ll, "\varphi"'] \\
& X \arrow[ul, "i_0"] \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

Uma prova desse teorema pode ser encontrada em [4].

A idéia desse teorema é que possamos passar de um aberto da variedade para um aberto do Fibrado Normal, e aproveitar a estrutura extra que o fibrado tem para provar afirmações sobre o aberto inicial.

Com o teorema da vizinhança tubular, podemos provar o isomorfismo entre $H^k(\mathcal{U}_0)$ e $H^k(X)$, importante na discussão à seguir. Dividiremos a prova em duas partes:

Proposição 2.4.2. *Seja* X *uma subvariedade de* M*, com* $i : X \to M$ *a inclusão. Temos que* $i^* : H^k(\mathcal{U}_0) \to H^k(X)$ *é sobrejetiva.*

Demonstração. Seja $[\alpha] \in H^k(X)$. Temos que $\alpha \in \Omega^k(X)$, e definimos $\tilde{\alpha} \in \Omega^k(\mathcal{U}_0)$ por

$$\tilde{\alpha}(v) := (\pi^*\alpha)(v)$$

Temos que $i^*[\tilde{\alpha}] = \alpha$, pois:

$i^*[\tilde{\alpha}] = i^*[\pi^*\alpha] = [i^*\pi^*\alpha] = [(\pi \circ i)^*\alpha] = [id^*\alpha] = [\alpha]$.

□

Para provar a injetividade de i^*, precisamos do seguinte lema:

Lema 2.4.1. *Se* $\omega \in Z^k(\mathcal{U})$ *satisfaz* $i^*\omega = 0$*, então* $\omega \in B^k(\mathcal{U})$*. Além disso, podemos escolher* $\mu \in \Omega^{k-1}(\mathcal{U})$ *com* $\mu_x = 0, \forall x \in X$*.*

Demonstração. Como $\mathcal{U} \cong \mathcal{U}_0$, trabalharemos em $\mathcal{U}_0$.

Definimos uma homotopia $\rho_t : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_0$ por $(x, v) \mapsto (x, tv)$.

Temos que :

- ρ_t está bem definida pois $\mathcal{U}_0$ é convexo.
- $\rho_0 = i_0 \circ \pi_0$
- $\rho_1 = id\,|_{\mathcal{U}_0}$
- $\rho_t(x,0) = (x,0) = i_0(X)$

Temos assim que, de fato, ρ_t é uma homotopia entre id e $i_0 \circ \pi$ preservando $i_0(X)$.

Com ρ_t, definimos uma homotopia de cocadeias $Q : \Omega^k(\mathcal{U}_0) \to \Omega^{k-1}(\mathcal{U}_0)$ por:

$$Q(\omega) = \int_0^1 \rho_t^*(i_{X_t}\omega)dt$$

Temos que Q:

1. É uma homotopia de cocadeias entre id e $i_0 \circ \pi$, pois

$$\begin{aligned}
Qd\omega + dQ\omega &= \int_0^1 \rho_t^*(i_{X_t}d\omega)dt + \int_0^1 \rho_t^*(di_{X_t}\omega)dt \\
&= \int_0^1 \rho_t^*(i_{X_t}d\omega + di_{X_t}\omega)dt \\
&= \int_0^1 \rho_t^*\mathscr{L}_{X_t}\omega dt && \text{pela Fórmula Mágica de Cartan} \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}\rho_t^*\omega dt && \text{pelo } \textbf{Teorema 2.3.1.} \\
&= \rho_1^*\omega - \rho_0^*\omega && \text{pelo TFC.}
\end{aligned}$$

2. Nos permite definir uma forma $\mu \in \Omega^{k-1}(\mathscr{U}_0)$ com $\omega = d\mu$, basta fazer:

$$\mu = Q\omega$$

Como temos $\omega \in Z^k(\mathcal{U}_0)$, e $i_0^*\omega = 0$, podemos concluir

$$\begin{aligned}
Id^*\omega - (i_0 \circ \pi)^*\omega &= Qd\omega + dQ\omega \\
\omega &= dQ\omega = d\mu.
\end{aligned}$$

Além disso, como $\forall x \in X$, $\rho_t(i_0(x)) = i_0(x) = (x,0)$, então $X_{\rho_t}(x) = 0$, logo $\mu_x = 0$.

□

Pelo Lema, temos que para $\omega \in Z^k(\mathcal{U}_0)$, $id^*\omega - (i_0 \circ \pi)^* = dQ\omega$. Como $dQ\omega$ é exata, temos que $[\omega] - [(i_0 \circ \pi)^*\omega] = [\rho_1^*] - [\rho_0^*] = [B^k(\mathcal{U}_0)]$. Portanto, temos que $[id] = [(i_0 \circ \pi)^*]$, e como id^* é isomorfismo, temos que π^* é sobrejetora e i_0^* é injetora. Assim, podemos concluir que i^* é isomorfismo.

2.5 Os truques de Moser.

Com essa preparação feita, podemos analisar o seguinte problema: Dada uma $2n$-variedade M, uma k-subvariedade X,vizinhanças $\mathcal{U}_0$ e $\mathcal{U}_1$ de X com formas simpléticas ω_0 e ω_1, existe um simplectomorfismo $\varphi : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_1$ que preserva X, i.e., $\varphi(X) = X$?

Mais precisamente, Jürgen Moser perguntou se poderíamos achar um φ homotópica à identidade. Temos que uma condição necessária para tal é que $[\omega_0] = [\omega_1]$, pois se existe $\varphi \sim id_M$, temos uma homotopia de cocadeias Q de forma que

$$\begin{aligned} id^*\omega - \varphi^*\omega &= dQ\omega \\ \omega_1 &= \varphi^*\omega_1 + dQ\omega_1 \\ \omega_1 &= \omega_0 + dQ\omega_1 \end{aligned}$$

Como $dQ\omega_1$ é exata, temos que $[\omega_0] = [\omega_1]$.

A recíproca, porém, para variedades compactas, vale com uma condição à mais.

Teorema 2.5.1 (Truque de Moser). *Seja M compacta. Se $[\omega_0] = [\omega_1]$ e a 2-forma $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1$ é simplética, $\forall t \in I$, então existe uma isotopia $\rho : M \times \mathbb{R} \to M$ tal que $\rho_t^*\omega_t = \omega_0, 0 \leq t \leq 1$.*

Demonstração. Primeiramente, note que se existe uma isotopia $\rho : M \times \mathbb{R} \to M$ com $\rho_t^*\omega_t = \omega_0, 0 \leq t \leq 1$. Então podemos definir um campo de vetores dependente do tempo por:

$$X_t = \frac{d}{dt}\rho_t \circ \rho_t^{-1}; \forall t \in \mathbb{R}$$

Então

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\omega_0 \\ &= \frac{d}{dt}(\rho_t^*\omega_t) \\ &= \rho_t^*\left(\mathscr{L}_{X_t}\omega_t + \frac{d}{dt}\omega_t\right) && \text{pelo } \textbf{Teorema 2.3.1} \end{aligned}$$

O que equivale à $\mathscr{L}_{X_t}\omega_t + \dfrac{d}{dt}\omega_t = 0; 0 \leq t \leq 1$.

Reciprocamente, se existe um campo X_t satisfazendo $\mathscr{L}_{X_t}\omega_t + \dfrac{d}{dt}\omega_t = 0$, $0 \leq t \leq 1$, como M é compacto, podemos encontrar uma isotopia ρ_t que satisfaça, $0 \leq t \leq 1$

$$\rho_t^*\left(\mathscr{L}_{X_t}\omega_t + \frac{d}{dt}\omega_t\right) = 0 \iff \frac{d}{dt}\rho_t^*\omega_t = 0 \iff \rho_t^*\omega_t = \rho_0^*\omega_0 = 0$$

Logo podemos resolver o problema equivalente de encontrar um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ que satisfaça a identidade $\mathscr{L}_{X_t}\omega_t + \dfrac{d}{dt}\omega_t = 0$.

Note que como $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1$, vale

$$\frac{d}{dt}\omega_t = \omega_1 - \omega_0$$

De $[\omega_0] = [\omega_1]$, existe $\mu \in B^k(\mathcal{U}_0)$ com

$$\omega_1 - \omega_0 = d\mu$$

Pela Fórmula mágica de Cartan, temos

$$\mathscr{L}_{X_t}\omega_t = di_{X_t}\omega_t + i_{X_t}\underbrace{d\omega_t}_{=0}$$

Juntando essas informações, temos:

$$\left(\mathscr{L}_{X_t}\omega_t + \frac{d}{dt}\omega_t\right) = di_{X_t}\omega_t + d\mu = 0$$

É suficiente resolver $i_{X_t}\omega_t + \mu = 0$. Para isso, definimos uma função $\omega^\flat : TM \to T^*M$ por $X \mapsto i_X\omega$, onde ω é uma forma simplética. Temos que a não-degeneração de ω implica em $\omega^\flat$ injetora. Como T_pM e T_p^*M tem a mesma dimensão, logo $\omega^\flat$ é um isomorfismo entre T_pM e T_p^*M, $\forall p \in M$.

Assim, pontualmente, podemos reescrever a nossa equação como $(\omega_t^\flat)(X_t(p)) = -(\mu_p)$. Aplicando a inversa dos dois lados, temos $X_t(p) = -(\omega_t^\flat)^{-1}(\mu_p)$, e podemos definir X_t por $p \mapsto X_t(p)$ que é o campo de vetores desejado. □

Com o truque de Moser provado, podemos obter o

Teorema 2.5.2 (Teorema de Moser - Versão Relativa)**.** *Seja M uma $2n$-variedade, X uma k-subvariedade compacta, ω_0 e ω_1 formas simpléticas em M. Se $\omega_0 |_X = \omega_1 |_X$, então existem vizinhanças $\mathcal{U}_0$ e $\mathcal{U}_1$ de X e um simplectomorfismo $\varphi : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_1$ tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
M \supseteq \mathcal{U}_0 & & \mathcal{U}_1 \subset M \arrow[ll, "\varphi"'] \\
& X \arrow[ul, "i_0"] \arrow[ur, "i_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Primeiramente, tomando uma vizinhança tubular $\mathcal{U}_0$ de X, temos que a forma $\omega_1 - \omega_0$ é fechada em $\mathcal{U}_0$. Além disso, $(\omega_1 - \omega_0)_p = 0$, $\forall p \in X$. Logo, podemos definir um operador de homotopia Q satisfazendo a fórmula de homotopia entre Id e $i_0 \circ \pi$, e assim obtemos uma 1-forma μ tal que $\mu_{(p,0)} = 0$, $\forall (p, 0) \in X_0$ e $\omega_1 - \omega_0 = d\mu$.

Segundamente, tomando a família $\omega_t = (1 - t)\omega_0 + t\omega_1$, sabemos que ela é fechada, pois como $i_0^*\omega_0(p) = i_0^*\omega_1(p)$,$\forall p \in X$ então:

$$\begin{aligned} i_0^*\omega_t &= i_0^*((1-t)\omega_0 + t\omega_1) \\ &= (1-t)i_0^*\omega_0 + t i_0^*\omega_1 \\ &= i_0^*\omega_0. \end{aligned}$$

Note que ω_t é não-degenerada se $\omega_t^\flat : TM \to T^*M$ é um isomorfismo $\forall x \in M$. Em outras palavras, se $det(\omega_t^\flat)_x \neq 0$, $\forall x \in M$. Como, em X, $det(\omega_t^\flat)_x \neq 0$, temos que pela continuidade de $\omega_t^\flat$, existe uma bola coordenada B de M, e um intervalo J tal que $det(\omega_t^\flat)_x \neq 0$, $\forall (x, t) \in B \times J$. Tomemos uma cobertura de $X \times I$ por esses abertos $U = B \times J$. Como $X \times I$ é compacto, podemos tomar uma subcobertura finita $\{U_i\}$.

Para encontrar nossa nova vizinhança tubular, vamos encurtar o "comprimento" das fibras tomando $\varepsilon = min\ d(I \times \mathcal{U}_0 - \bigcup U_i, I \times X)$. Como $I \times X$ é compacto e $I \times \mathcal{U}_0 - \bigcup U_i$ é fechado, temos que existe $\varepsilon > 0$, e definimos nossa nova vizinhança tubular por $\mathcal{U}_0' := \{(p, v) \in \mathcal{U}_0 : \|v\| < \varepsilon\}$. Pelas observações acima, temos que ω_t é simplética em $\mathcal{U}_0'$.

Pelo truque de Moser, existe isotopia $\rho_t : \mathcal{U}_0' \times \mathbb{R} \to \mathcal{U}_0'$ com $\rho_t^*\omega_t = \omega_0$, $0 \leq t \leq 1$. Tomando o campo X_t correspondente, temos que dado $(x, t) \in X \times I$, existe V aberto de M e $L \subset I$ tal que o fluxo de X_t está definido em $V \times L$. Como $X \times I$ é compacto, podemos extrair uma sucobertura finita $\{V_i\}$ de $X \times I$.

Reduzindo $\mathcal{U}_0'$ novamente, pelo mesmo processo feito anteriormente, obtemos uma nova vizinhança $\mathcal{U}_0''$, donde podemos obter uma isotopia $\rho : \mathcal{U}_0 \times [0, 1] \to M$ com $\rho_t^*\omega_t = \omega_0$, $\forall t \in [0, 1]$.(Para isto, usamos o Lema 3.1. de [2]). Mais ainda, $\rho \mid_X = id_X$, pois dado $p \in \mathcal{U}_0''$, $\rho_t(p)$ é uma curva integral de X_t se

$$\frac{d}{dt}\rho_t(p) = X_t(\rho_t(p))$$

Mas $X_t(\rho_t(p)) = 0$, logo $\rho_t(p) = p$. Assim, $\rho_t \mid_X = id_X$, e definimos $\varphi = \rho_1$ e $\mathcal{U}_1 = \rho_1(\mathcal{U}_0'')$.

□

Com o Teorema de Moser, podemos provar o teorema central deste trabalho: O Teorema de Darboux.

Teorema 2.5.3. *Seja (M,ω) uma variedade simplética, e $p \in M$. Então podemos achar um sistema de coordenadas $(U, x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ centrado em p tal que em U,*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$$

Demonstração. Seja (M,ω) uma variedade simplética, e (U,φ) carta de M. Temos que ω_p é uma forma simplética em T_pM, e, tomando $\{e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n\}$ uma base simplética de T_pM, definimos:

$$e'_i = (d\varphi)e_i$$
$$f'_j = (d\varphi)f_j$$

Sejam $\varphi' = (x', y')$ as coordenadas de $\mathbb{R}^{2n}$ na base $\{e'_1, ..., e'_n, f'_1, ..., f'_n\}$. Definimos uma forma simplética ω_0 em $\mathbb{R}^{2n}$ por

$$\omega_0(e'_i, e'_j) = 0$$
$$\omega_0(f'_i, f'_j) = 0$$
$$\omega_0(e'_i, f'_j) = \delta_{ij}$$

Note que $\delta_{ij} = \omega_0(e'_i, f'_j) = \omega_0((d\varphi)e_i, (d\varphi)f_j) = (\varphi^*\omega_0)_p(e_i, f_j)$. Analogamente, obtemos $(\varphi^*\omega_0)_p(e_i, e_j) = 0$ e $(\varphi^*\omega_0)_p(f_i, f_j) = 0$. Denotando $\hat{\omega}_0 := \varphi^*\omega_0$, vemos que $\hat{\omega}_{0p}$ e ω_p tem os mesmos valores na mesma base, e logo, em p elas são iguais.

Aplicando o Teorema de Moser à $X = \{p\}$, temos que existem V, V' vizinhanças de p e $f : V \to V'$ simplectomorfismo com $f^*(\hat{\omega_0}) = \omega$.

Note que, escrevendo as coordenadas dadas pela base $\{e'_1, ..., e'_n, f'_1, ..., f'_n\}$ em $\mathbb{R}^{2n}$ por $\{x'_1, ..., x'_n, y'_1, ..., y'_n\}$, temos que $dx'_i(e'_j) = dy'_i(f'_j) = \delta_{ij}$, então, podemos escrever

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dx'_i \wedge dy'_i$$
$$\varphi^*\omega_0 = \hat{\omega}_0 = \sum_{i=1}^{n} d(x'_i \circ \varphi) \wedge d(y'_i \circ \varphi)$$

Escrevendo $x_i = x'_i \circ \varphi$ e $y_i = y'_i \circ \varphi$, temos que $(V \cap U, x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ é a carta desejada.

$\square$

Referências

[1] DA SILVA, Ana Cannas. **Lectures on Sympletic Geometry**. 1 ed. Springer. 2001. Citado na página 72.

[2] WEINSTEIN, Alan. **Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds**. Adv. in Math. **6** (1971), 329-346. Citado na página 82.

[3] GODINHO, Leonor; NATÁRIO, José. **An Introduction to Riemannian Geometry**: With Applications to Classical Mechanics and Relativity. 1 ed. Springer. 2014. Nenhuma citação no texto.

[4] LEE, John. **Introduction to Smooth Manifolds**. 2 ed. Springer. 2012. Citado na página 78.

[5] TU, Loring. **An Introduction to Manifolds**. 2 ed. Springer. 2011. Nenhuma citação no texto.

[6] nLab. proper maps to locally compact spaces are closed. Disponível em: https://ncatlab.org/nlab/show/proper+maps+to+locally+compact+spaces+are+closed. Acesso em 05 dez. 2019. Citado na página 66.

[7] nLab. closed injections are embeddings. Disponível em: https://ncatlab.org/nlab/show/closed+injections+are+embeddings. Acesso em 05 dez. 2019. Citado na página 66.

[8] nLab. injective proper maps to locally compact spaces are equivalently the closed embeddings. Disponível em: https://ncatlab.org/nlab/show/injective+proper+maps+to+locally+compact+spaces+are+equivalently+the+closed+embeddings. Acesso em 05 dez. 2019.

Citado na página 66.