UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA – UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA – IM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – SBM
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CELSO HENRIQUE MOTTA RIBEIRO

O USO DE DOBRADURAS COMO FERRAMENTA DE APRENDIZAGEM SOBRE QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

SALVADOR
2021

CELSO HENRIQUE MOTTA RIBEIRO

USO DE DOBRADURAS COMO FERRAMENTA DE APRENDIZAGEM SOBRE QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade Federal da Bahia.

Orientadora: Profa. Dra. Mariana Cassol

Salvador
2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária de Ciências e Tecnologias Prof. Omar Catunda, SIBI - UFBA.

R484 Ribeiro, Celso Henrique Motta

O uso de dobraduras como ferramenta de aprendizagem sobre quadriláteros notáveis na educação básica / Celso Henrique Motta Ribeiro. – Salvador, 2021.

74 f.

Orientadora: Profª. Drª. Mariana Cassol

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Bahia. Instituto de Matemática e Estatística, 2021.

1. Matemática. 2. Educação Básica. 3. Ensino – Aprendizagem. I. Cassol, Mariana. II. Universidade Federal da Bahia. III. Título.

CDU 51

O Uso de Dobraduras como Ferramenta de Aprendizagem sobre Quadriláteros Notáveis na Educação Básica

Celso Henrique Motta Ribeiro

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 12/08/2021.

Banca Examinadora:

Mariana Cassol

Profa. Dra. Mariana Cassol
Instituto de Matemática e Estatística – Universidade Federal da Bahia

Rita de Cássia de Jesus Silva

Prof. Dra. Rita de Cássia de Jesus Silva
Instituto de Matemática e Estatística – Universidade Federal da Bahia

SWouters

Profa. Dra. Susan Wouters
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Salvador
2021

À Deus e à minha família.

Agradecimentos

Agradeço à Deus, por abençoar minha família com saúde e iluminar nossas vidas.

À minha mãe Josy, à Rômulo e a minha avó Zezeca, por todos os ensinamentos, incentivos à minha formação e por sempre terem acreditado e me apoiado em todos os momentos.

Agradeço à minha esposa Bela pelo incentivo durante todo o curso, pela paciência, contribuições e ideias durante a elaboração desse trabalho. Ao meu filho Gabriel e ao meu cachorro Teddy por me manterem forte e com coragem para seguir adiante. Agradeço aos meus irmãos André e Marcelle pela torcida e confiança em mim.

À orientadora dessa dissertação Profa. Dra. Mariana Cassol pela disponibilidade, sugestões, paciência e suporte para realização desse trabalho e a todos que não foram citados aqui e que de alguma forma acreditaram e contribuíram para realização desse projeto. Obrigado!

"Ninguém começa a ser educador numa certa terça-feira às quatro da tarde. Ninguém nasce educador ou marcado para ser educador. A gente se faz educador, a gente se forma, como educador, permanentemente, na prática e na reflexão sobre a prática."

(Paulo Freire)

RESUMO

O atual cenário de aprendizagem em Matemática na Educação Básica evidenciado pelos indicadores de educação como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) traz, cada vez mais, a necessidade de uma transformação na abordagem dos conteúdos de Matemática na sala de aula. É relevante destacar a importância do papel do professor nesse processo de transformação, adotando práticas pedagógicas que contribuam com a melhoria do ensino. Nesse contexto, os materiais manipuláveis podem auxiliar no processo de aprendizagem, pois além de facilitarem a visualização de objetos, contribuem para aulas mais dinâmicas, divertidas e interativas, auxiliando os estudantes no desenvolvimento do raciocínio e associação com objetos do dia a dia. O presente trabalho apresenta uma proposta de sequência didática sobre quadriláteros notáveis pautada no uso das técnicas de dobraduras como ferramenta de aprendizagem sobre Matemática. A atividade inicia com uma proposta de avaliação diagnóstica de modo a auxiliar na detecção de dificuldades relacionadas ao conteúdo, passando pela organização dos recursos, o passo a passo do material manipulável com os estudantes e finalizando com uma sugestão de avaliação de aprendizagem.

Palavras-chave: Materiais Manipuláveis. Quadriláteros Notáveis. Dobraduras. Matemática.

ABSTRACT

The current learning scenario in Mathematics in Basic Education evidenced by education indicators such as the National Secondary Education Examination and the Basic Education Assessment System increasingly brings the necessity of a transformation in the way of approach the Math in the classroom. It is important to point out the importance of the teacher's role in this transformation process, adopting pedagogical practices that contribute to the improvement of Mathematics teaching. In this context, manipulable materials can help in the learning process, because they can facilitate the visualization of objects, and contribute to more dynamic, fun and interactive classes, helping students to develop their reasoning and association with everyday objects. This work presents a proposal for a didactic sequence on remarkable quadrilaterals based on the use of folding techniques as a learning tool on Mathematics. The activity starts with a proposal for diagnostic assessment in order to help in the detection of difficulties related to the content, going through the organization of resources, the step-by-step material that can be manipulated with students and ending with a suggestion for learning assessment.

Keywords: Manipulable materials. Notable quadrilaterals. Paper folding. Mathematics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – *Tsuru*: ave símbolo de boa sorte, prosperidade e saúde no Japão 21
Figura 2 – Diagrama de Akira Yoshizawa 22
Figura 3 – Design de papel do dispositivo Starshade..23
Figura 4 – Trecho do Papiro de Ahmes, 1650 a.C. 25
Figura 5 – Trecho do Papiro de Moscou, 1850 a.C. 26
Figura 6 – Polígono convexo de cinco vértices (e lados)......................................29
Figura 7 – Tipos de Polígonos 30
Figura 8 – Elementos de um polígono 30
Figura 9 – Polígono ABCDE e as diagonais 31
Figura 10 – Quadrilátero 32
Figura 11 – Paralelogramo: ângulos opostos congruentes 33
Figura 12 – Paralelogramo: lados opostos congruentes......................................34
Figura 13 – Demonstração do Teorema 2 sobre o Paralelogramo 01..................34
Figura 14 – Demonstração do Teorema 2 sobre o Paralelogramo 02..................35
Figura 15 – Demonstração do Teorema 3..36
Figura 16 – Trapézio 36
Figura 17 – Retângulo 37
Figura 18 – Losango 37
Figura 19 – Quadrado 38
Figura 20 – Propriedade do paralelogramo: ângulos opostos congruentes.........38
Figura 21 – Paralelogramo (demonstração da propriedade 1) 39
Figura 22 – Paralelogramo (demonstração da propriedade 1) 39
Figura 23 – Propriedade do paralelogramo: lados opostos congruentes.............40
Figura 24 – Paralelogramo (Demonstração da propriedade 2)............................40
Figura 25 – Propriedade do paralelogramo: divisão das diagonais ao meio........41
Figura 26 – Paralelogramo (demonstração da propriedade 3) 42
Figura 27 – Propriedade do retângulo: diagonais congruentes 42
Figura 28 – Propriedade do losango: diagonais perpendiculares 43
Figura 29 – Propriedade do trapézio: ângulos adjacentes dos lados não paralelos possuem soma igual a 180° 43

Figura 30 – Demonstração da propriedade 6 dos trapézios: ângulos adjacentes dos lados não paralelos possuem soma igual a 180° 44
Figura 31 – Propriedade do trapézio isósceles: ângulos das bases congruentes44
Figura 32 – Demonstração da propriedade 7: ângulos das bases congruentes de um trapézio isósceles 45
Figura 33 – Propriedade do trapézio isósceles: diagonais congruentes 45
Figura 34 – Demonstração Teorema 4..47
Figura 35 – Escala de desempenho percentual dos estudantes na avaliação diagnóstica 56
Figura 36 – Folhas coloridas em formato quadrado 58
Figura 37 – Transformar uma folha A4 para um formato quadrado 59
Figura 38 – Ilustração no quadro branco dos quadriláteros e seus elementos....60
Figura 39 – Passo a passo para construção do modelo geométrico através do uso de dobraduras 62
Figura 40 – Passo a passo para montagem do cubo 64

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 14
1. OS MATERIAIS MANIPULÁVEIS 18
1.1. Arte e Técnica de Dobraduras de Papel 20
2. UMA BREVE HISTÓRIA DA GEOMETRIA 25
2.1. Origem da geometria 25
2.2. Tales, Pitágoras, Platão e Aristóteles 26
2.3. Os Elementos de Euclides 27
3. CONCEITOS GEOMÉTRICOS 29
3.1. Polígonos 29
3.1.1. Elementos de um Polígono 30
3.2. Quadriláteros 32
3.3. Quadriláteros Notáveis 32
3.3.1. O Paralelogramo 33
3.3.2. O Trapézio 36
3.3.3. O Retângulo 37
3.3.4. O Losango 37
3.3.5. O Quadrado 38
3.4. Propriedade dos Paralelogramos 38
3.5. Propriedade dos Retângulos 42
3.6. Propriedade do Losango 43
3.7. Propriedade dos Trapézios 43
3.8. Propriedade dos Quadrados 46
3.9. Teorema 4 46
4. PROPOSTA DE ATIVIDADE COM USO DE DOBRADURAS 48

4.1. Avaliação Diagnóstica ... 48
4.1.1. Proposta para avaliação diagnóstica ... 50
4.1.2. Pré-Análises das Respostas ... 52
4.1.3. Classificação das respostas da avaliação diagnóstica ... 56
4.2. Aplicação da proposta da atividade com uso de dobraduras de papel 58
4.2.1. Preparação ... 58
4.2.2. Organização da sala de aula e exposição das figuras geométricas no quadro branco ... 59
4.3. Construindo figuras geométricas e identificando os elementos através do uso de dobraduras ... 61
4.4. Sugestão de Avaliação de Aprendizagem ... 64
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS ... 67
6. REFERÊNCIAS ... 69
APÊNDICE 1: PLANO DE AULA ... 72
APÊNDICE 2: PASSO A PASSO PARA CONSTRUÇÃO DO MODELO. ... 73
APÊNDICE 3: AUTOAVALIAÇÃO ... 74

INTRODUÇÃO

O processo de ensino e aprendizagem de Matemática nas escolas de Educação Básica enfrenta grandes dificuldades por parte dos estudantes e professores. Se por um lado os professores ficam insatisfeitos com o desempenho e compromisso dos estudantes, esses evidenciam que não compreendem e frequentemente questionam sobre a utilização da disciplina Matemática em suas vidas (OLIVEIRA; FREITAS, 2020).

A dificuldade na disciplina Matemática enfrentada pelos estudantes é evidenciada nos indicadores de educação como ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica). De acordo com os dados divulgados do SAEB 2017 pelo MEC (Ministério da Educação), dos estudantes brasileiros concluintes do Ensino Médio apenas 4,5% apresentam aprendizagem adequada (níveis 7 a 10) dos conteúdos em Matemática. Esse panorama, registrado em números, coloca uma enorme pressão para que sejam implementadas práticas educacionais de modo a contribuir com o desenvolvimento profissional dos professores (BRASIL, 2018 ; MURARI, 2011).

Oliveira e Freitas (2020) afirmam que para os professores de Matemática, a má formação, aliada a uma carga horária desgastante de trabalho, contribui para que os conteúdos sejam apresentados aos estudantes somente como definições e fórmulas, totalmente desconectados de qualquer aplicação prática ou lógica. Lima (2017) critica os extensos currículos e livros didáticos com conteúdos e procedimentos mecanizados e sem significado aos estudantes.

Segundo Oliveira (2016), a geometria é um dos conteúdos de Matemática com maior potencial para fazermos correlações teórico-práticas. Entretanto, muitas vezes ela vem sendo abordada de uma maneira abstrata, sem significância e desvinculada da realidade dos estudantes, divergindo da observação das formas e fenômenos naturais que deram origem a essa ciência.

Almouloud e Manrique (2004) sustentam a ideia de que a área da geometria, embora indicada por grande parte dos professores como importante e que mereça lugar em todos os níveis de ensino, é mal planejada e muitas vezes deixada para ser trabalhada no último bimestre do ano letivo. Além disso, afirmam que a dificuldade de aprendizagem dos alunos em geometria também está associada à falta de organização e seleção dos conteúdos pelos professores.

Para Barbosa (2017), a grande dificuldade no ensino de geometria decorre da omissão, insegurança e falta de preparo dos professores de Matemática. Já Marques e Caldeira (2018), relatam como principais fatores que interferem e dificultam o ensino e aprendizagem de geometria, os problemas no entendimento e na socialização com a disciplina pelos estudantes e na objeção dos professores de Matemática em repensar suas metodologias de ensino, muitas vezes voltadas somente para atividades meramente teóricas, sem aplicação didática e nenhum significado para os estudantes.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs):

> Em nosso país o ensino de Matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão (BRASIL, 1998, p.19).

Diante desse cenário, é fundamental repensarmos as práticas pedagógicas como alternativa metodológica para implementação de uma proposta centrada na relação teórico-prática. Nesse sentido, os materiais manipuláveis podem ser uma ferramenta no processo de aprendizagem. A proposta de trabalhar com materiais manipuláveis, além de facilitar a visualização de objetos, contribui para aulas mais dinâmicas, divertidas e interativas, auxiliando os estudantes no desenvolvimento do raciocínio e associação com objetos do dia a dia (FONSECA FILHO, 2015).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), a utilização de recursos tecnológicos e materiais manipuláveis podem trazer para o ensino um modo mais eficiente e didático para resolução de problemas além de propiciar uma melhor compreensão de conceitos e visualizações dos objetos, principalmente relacionados a geometria plana e espacial. Essa prática é uma alternativa facilitadora no aprendizado de Matemática (IBRAIM, 2013).

Um dos grandes entraves encontrados no processo de ressignificação da Matemática está na concepção da aprendizagem sustentada nas práticas escolares adotadas pelos professores. Refletindo sobre essas questões, faz-se necessário a busca por alternativas para os conteúdos de Matemática trabalhados em sala de aula. Por sua vez, os professores devem buscar estimular a curiosidade e a criatividade dos estudantes para com os assuntos relacionados a disciplina (OLIVEIRA, 2016).

A arte e o uso das técnicas de dobraduras Matemáticas como um exemplo de material manipulável nas escolas, corrobora com a construção do pensamento geométrico nos estudantes. O que torna essencial para estabelecer uma relação continua entre a percepção visual e o raciocínio espacial, indo ao encontro com as diretrizes dos Parâmetros Curriculares Nacionais (LIMA, 2014).

Dentre as competências específicas de Matemática e suas tecnologias da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) disponibilizado pelo Ministério da Educação em 2018 como novo modelo do Ensino Médio, está a capacidade dos estudantes em:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p.28).

Nesse trabalho é apresentada uma proposta de ensino sobre quadriláteros notáveis pautada no uso de materiais manipuláveis como base no desenvolvimento dos estudantes. Além disso, a sequência didática proposta, oferece a possibilidade de aplicação em quase toda Educação Básica regular como ferramenta de apoio pedagógico.

Utilizaremos as técnicas de dobraduras como um fator motivador e lúdico, para qualificar os estudantes na compreensão dos conceitos, identificação de elementos e aplicação das propriedades dos quadriláteros notáveis.

O trabalho é estruturado em 5 capítulos. No capítulo 1, serão discutidos aspectos sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática com a utilização de materiais manipuláveis, bem como suas vantagens e desafios. Além disso, definiremos materiais manipuláveis e destacaremos seus tipos. Como destaque do capítulo, além do histórico e desenvolvimento, traremos a arte e técnica das dobraduras de papel como ferramenta de aprendizagem nas aulas de Matemática.

No capítulo 2, abordaremos a origem da geometria, bem como os principais fatores históricos desde os primeiros registros até as definições sobre os quadriláteros notáveis feitas por Euclides. O capítulo 3 será um aporte teórico sobre o conteúdo matemático trabalhado com os estudantes durante a dinâmica com dobraduras. São os polígonos e seus principais elementos, os tipos de quadriláteros notáveis, suas propriedades e demonstrações.

No capítulo 4, de forma detalhada e destacando os principais objetivos, será relatado como deve ser conduzida a avaliação diagnóstica, desde o planejamento até a análise das respostas. Além disso, esmiuçaremos a aplicação da sequência didática, desde a preparação do material de apoio, passando pela abordagem teórica breve do conteúdo, até o fechamento com a construção do modelo espacial. Por fim, no capítulo 5 traremos as conclusões dessa dissertação.

1. OS MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Nesse capítulo apresentaremos a história, os conceitos, as vantagens e as aplicações do uso de materiais manipuláveis para as aulas de Matemática na Educação Básica. Além disso, veremos a consonância dessa discussão com os Parâmetros Curriculares Nacionais. Também abordaremos o uso da técnica da dobradura de papel, desde o seu surgimento, desenvolvimento até as modernas aplicações no mundo e nas aulas de Matemática como auxílio na aprendizagem.

Primeiramente, é importante lembrar que desde os primórdios da humanidade o homem recorre ao uso dos materiais concretos diversos para realização de atividades de Matemática. O uso de pedras, ossos de animais e conchas, serviram como ferramentas funcionais para estabelecerem um sistema de contagem de ovelhas e outros animais naquela época (CALDEIRA, 2019).

Desta forma, o uso de materiais manipuláveis se apresenta como uma possibilidade prática de aproximação do sujeito com o objeto do conhecimento, já que a manipulação concreta é o eixo condutor de interligação dos conteúdos com as experiências vivenciadas pelo indivíduo (FONSECA FILHO, 2015).

Nesse contexto, Lorenzato (2006) e Rodrigues e Gazire (2012) concordam que qualquer instrumento, seja ele um papel, um lápis, um caderno ou uma caneta, sendo usado de forma útil e contribuidora no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem, pode ser classificado como um material didático pedagógico.

Lorenzato (2006) chama a atenção para o fato de que somente a utilização dos materiais didáticos não é garantidor de sucesso de aprendizagem dos estudantes, porém afirma que aqueles estudantes que fazem o uso contínuo dos materiais didáticos, tem superado aqueles que não utilizam.

Caldeira (2009) destaca a utilização de materiais didáticos como um instrumento facilitador na construção do pensamento matemático. Ressalta ainda que a manipulação desses materiais nas aulas de Matemática contribui para o desenvolvimento de um ambiente de trabalho participativo e estimulante.

Pereira e Oliveira (2016, p.2) apontam que materiais manipuláveis podem ser classificados como “qualquer objeto que venha a compor o material, que pode ser sentido em sua totalidade, no intuito de cumprir o objetivo das tarefas que serão apresentadas". Além disso, os mesmos autores destacam que o uso de uma folha de papel, uma régua ou uma tesoura, não podem ser descartados como sendo materiais manipuláveis, uma vez que, quando usados pelos estudantes, favorecem a elaboração de conjecturas, ideias, promovem a aprendizagem e momentos em grupo onde eles podem interagir e agir a partir de um desafio. Vejamos que essa afirmação segue de acordo ao que diz os Parâmetros Curriculares Nacionais.

> Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadora, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base da atividade Matemática (BRASIL, 1998, p.19).

Aprofundando o estudo de materiais manipuláveis, Lorenzato (2006) os classifica de duas maneiras. Uma delas é o material manipulável estático e o outro é o material manipulável dinâmico.

Material manipulável estático é o material concreto que não permite transformação ou alteração da estrutura física a partir da manipulação. Ou seja, durante a execução da atividade o estudante somente manuseia e visualiza o objeto.

Material manipulável dinâmico é o material concreto que permite uma transformação contínua da estrutura física a medida que o sujeito o manipula por meio das orientações do professor. Segundo Lorenzato (2006), o principal benefício do material manipulável dinâmico em relação ao estático, está em relação a capacidade de ressignificar e facilitar a percepção de propriedades por parte dos estudantes. Dessa forma, a aprendizagem pode se tornar mais significativa com mais clareza dos conceitos, propriedades e aplicações.

Segundo Rego e Gaudêncio (2003), com atividades que integram geometria e arte, o uso de materiais manipuláveis, como por exemplo as dobraduras de papéis, pode representar um importante recurso metodológico para a Educação Matemática.

No Brasil, a ideia de trabalhar com materiais manipuláveis dentro da sala de aula, iniciou-se na década de 1920 como uma tendência empirista-ativista, tendo como pressuposto básico a compreensão de que o aluno aprende fazendo. Com isso, pressupõe-se que os estudantes compreendem melhor os conceitos e propriedades matemáticas a partir da manipulação e visualização de objetos (SANTOS, 2011).

Assim, conjecturamos que utilizar materiais manipuláveis na sala de aula, além de trabalhar na compreensão dos conceitos, possibilita no estudante um momento de interiorização, de criação, de expressão de estado emocional e de contato consigo mesmo no momento da execução. O que se observa é uma preferência significativa dos estudantes por esse tipo de abordagem, uma vez que é enriquecedor no que se refere às inúmeras possibilidades dentro do ramo da geometria, além de envolver o lúdico, a manipulação e o prazer de aprender (NARVAZ, 2005).

1.1. Arte e Técnica de Dobraduras de Papel

A arte e técnica de dobradura de papel, sem precisar cortar, rasgar ou colar, conhecida também como *Origami*, (em japonês “ori” = dobrar e “kami” = papel) é uma atividade que auxilia no desenvolvimento da inteligência lógico-matemática, espacial, intrapessoal e interpessoal. Essa técnica não só transforma uma folha de papel em animais, flores, objetos utilitários e formas geométricas planas e espaciais, mas também, quando usada como auxílio nas aulas de Matemática, contribui para o desenvolvimento do aprendizado de forma agradável e lúdica (GAUDIOSO; SILVA, 2014).

Os origamistas são aque las pessoas que se dedicam a estudar e produzir *origamis* a partir de inspirações da natureza, transformando papel em arte. Historicamente, o período exato da invenção/criação do papel (material fundamental para uso das técnicas de dobraduras), ainda é incerto. A história mais divulgada é de que por volta de 105 d.C na China, *T’Sai Lun*[1] o administrador do palácio do imperador tenha feito um mistura umedecida com casca de árvores, retalhos de tecidos e rede de pesca, batido, colocado pra secar e assim surgiu a primeira folha de papel (LIMA, 2017).

Após essa descoberta, a fórmula para confecção ficou escondida por quase 500 anos devido ao seu negócio lucrativo. Dessa forma, o papel só chegou e ficou conhecido

---

[1] *T’Sai Lun* (50 – 121 d.C.) foi o alto funcionário da corte imperial, na dinastia *Han* na china.

no Japão por volta do século VI d.C., porém por se tratar de um artigo de luxo, somente as classes mais nobres tinham acesso (LIMA, 2017).

Podemos destacar três períodos para o desenvolvimento das dobraduras ao longo da história. Primeiro período, entre 794 – 1185 d.C., a arte de dobrar papéis era apreciada somente pela classe rica ou por Samurais como ornamentação devido ao alto custo. No segundo período, entre 1338 – 1573 d.C., com o crescimento da produção e utilização do papel, as dobraduras passaram a ser usadas por diversas classes sociais como adereços pessoais ou outras funções. Já no terceiro período, entre 1603 – 1867 d.C., foram publicados os primeiros livros contendo diversas formas de construir figuras, animais e objetos dobrando o papel (PASSARONI, 2015).

Um desses primeiros livros sobre a arte de dobrar papel foi publicado em 1797 e é titulado como: *Sembazuru Orikata*, que significa: Como dobrar mil pássaros, de *Akisato Rito*. A partir daí, as técnicas de dobraduras de papéis disseminaram tendo como principal símbolo o pássaro *tsuru* ou *grou* que representa uma ave sagrada no Japão (Figura 1).

Figura 1 – *Tsuru*: ave símbolo de boa sorte, prosperidade e saúde no Japão

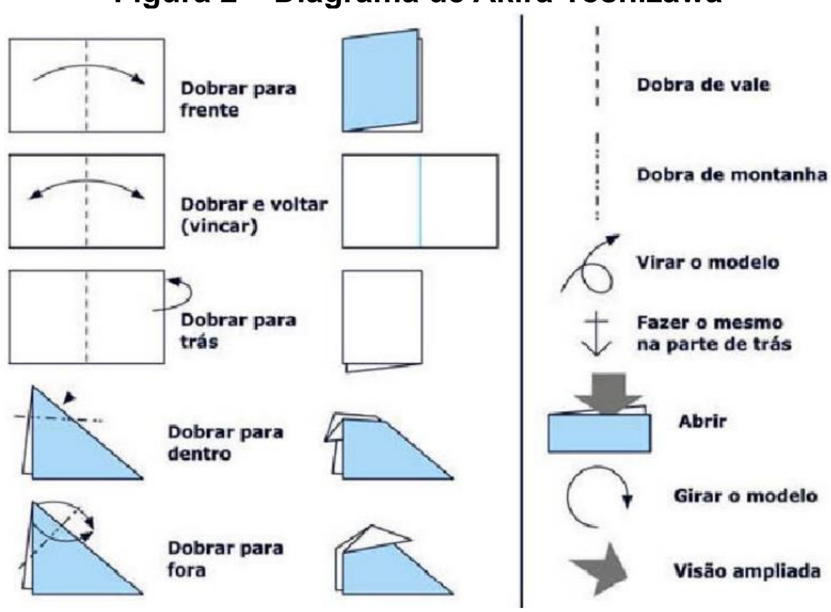
Fonte: (BASSO, 2013)

Ainda sobre a história e desenvolvimento do uso das dobraduras, segundo Saldanha e Araujo (2014), foi o educador alemão *Friedrich Froebel*[2] o percursor no uso de dobraduras como ferramenta educacional. Froebel classificava o uso de dobraduras na educação em três estágios:

- Estágio 1 (dobras da verdade): a criança começa dobrando o papel e reconhece os princípios da geometria euclidiana;
- Estágio 2 (dobras da vida): as dobraduras são usadas no sentido de obter desenhos de animais e plantas, mais como uma brincadeira e diversão ao invés do rigor com demonstrações Matemáticas;
- Estágio 3 (dobras da beleza): o objetivo é despertar nas crianças a criatividade, estimular o senso estético e incentivar a fazerem arte com as dobraduras.

Utilizando sua metodologia e técnicas não só como diversão, mas como modo de criar representações do mundo concreto com a finalidade de entendê-lo, *F. Froebel* difundiu essa prática por toda a Europa e obteve resultados satisfatórios e positivos. Isso segundo Lima (2014), mudou significativamente o rumo da educação tradicional.

Figura 2 – Diagrama de Akira Yoshizawa



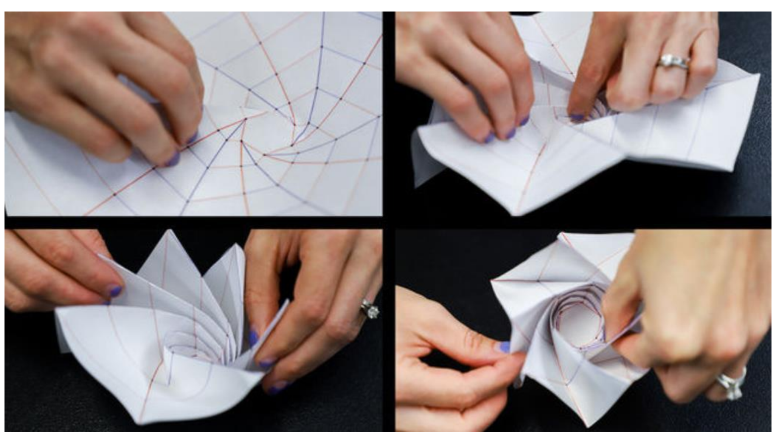
Fonte: (BASSO, 2013)

[2] Friedrich Froebel (1782 – 1852) foi um pedagogo com raízes na escola Pestalozzi. Também foi o fundador do primeiro jardim de infância ou kindergarten.

Ainda no século XIX o uso de dobraduras de papéis passou a ser disciplina obrigatória no Japão. Entretanto somente na década de 1950, tivemos as primeiras criações patenteadas por *Uchiyama Koko*[3]. Nessa mesma década, tivemos as primeiras representações gráficas que serviram como base para outras construções com a dobradura de papel. O responsável por essa criação foi *Akira Yoshizawa*[4] que com uma representação de linhas, setas e alguns símbolos (Figura 2), proporcionou uma difusão internacional sobre a linguagem das dobraduras. Assim, as pessoas de vários idiomas seriam capazes de construir modelos através de formas simples e intuitivas (LIMA, 2017).

A partir da década de 1960 a técnica de dobradura de papel se popularizou no ocidente de tal forma que hoje em dia, até a NASA está criando dispositivos baseados nessa arte. Desde 2010 há estudos em andamento sobre a criação de um novo dispositivo, chamado *Starshade*, capaz de através do seu design, bloquear a luz de uma estrela para que o telescópio pudesse capturar as imagens dos planetas ao redor da estrela. Para desenvolver esse novo dispositivo, os engenheiros da NASA contrataram especialistas na arte de dobradura de papel para ajudar a criar o design perfeito em formato de girassol (Figura 3). O custo desde o desenvolvimento até a construção gira em torno de US$750 milhões.

Figura 3 – Design de papel do dispositivo Starshade



Fonte: (NASA, 2019)

[3] *Uchiyama Koko* (1912 – 1998) foi um sacerdote japonês autor de mais de 20 livros sobre Budismo e *Origami*.

[4] Akira Yoshizawa (1911 – 2005) foi um artista japonês considerado um mestre do origami. Creditado por elevar esta técnica a um estado artístico. Criou mais de 50.000 modelos em seus mais de 18 livros.

No Brasil, há duas vertentes para a chegada das técnicas de dobraduras de papel. Alguns autores e historiadores acreditam que isso ocorreu primeiro através da Argentina, com a influência cultural espanhola. Porém, outros acreditam que com a imigração japonesa no ano de 1908, vieram a cultura, as técnicas e a arte de dobrar papel (BARRETO, 2013; PILLARECK, 2010).

Isso tudo chegou para ressignificar o ensino e a aprendizagem de Matemática diante das inúmeras possibilidades que as dobraduras de papéis oferecem nos diversos ramos dessa ciência. Pode-se trabalhar com várias figuras geométricas, planas ou espaciais, proporcionalidade, fração, funções, enfim, a sala de aula pode se tornar um espaço onde os estudantes podem colocar em prática a criatividade e com isso quebrar o paradigma de que as aulas de Matemática são maçantes e tediosas (SALDANHA, 2014).

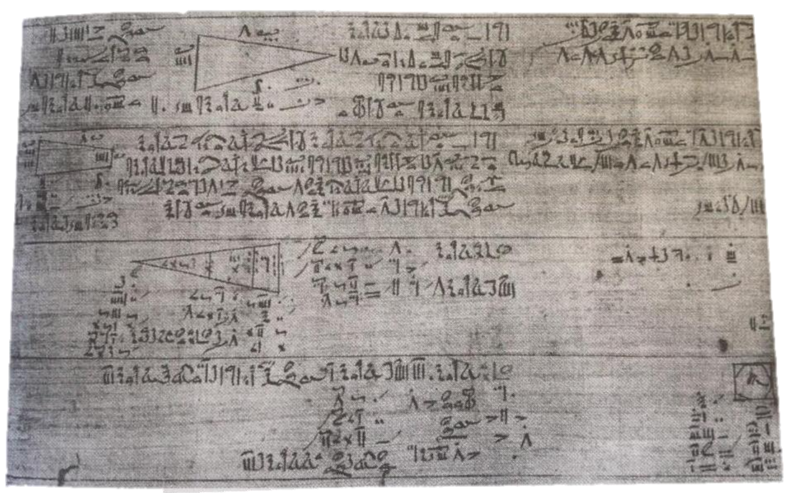
2. UMA BREVE HISTÓRIA DA GEOMETRIA

Neste capítulo, apresentaremos a história da geometria contada de forma cronológica, desde os primeiros registros até os postulados de Euclides no que diz respeito aos polígonos e quadriláteros notáveis.

2.1. Origem da geometria

Sobre a história da geometria, ainda hoje, é muito difícil destacar um ponto de partida para os primeiros registros geométricos feitos pelo homem. Garbi (2009) elucida que talvez os mais famosos e antigos documentos matemáticos que chegaram aos dias de hoje são: o Papiro de Ahmes (ou de Rhind) e o Papiro de Moscou. Para o Papiro de Ahmes estima-se que foi escrito há cerca de 1650 a.C., contém mais de 85 problemas de Aritmética e Geometria e atualmente está exposto no Museu Britânico em Londres (Figura 4). Já o Papiro de Moscou, atualmente localizado no Museu de Moscou de Finas Antes, tem uma estimativa ainda mais antiga, cerca de 1850 a.C. e contém 25 problemas de Aritmética e Geometria. Demonstrando um notável conhecimento para a época, no Papiro de Moscou há uma forma para o cálculo do volume de um tronco de pirâmide (Figura 5).

Figura 4 – Trecho do Papiro de Ahmes, 1650 a.C.



Fonte: (GARBI, 2009)

Figura 5 – Trecho do Papiro de Moscou, 1850 a.C.

Fonte: (GARBI, 2009)

Visto esses registros antigos, é consensual entre os historiadores matemáticos que esse campo do conhecimento surgiu a partir da necessidade de compreender o meio e associá-lo às relações espaciais, comparando formas e tamanhos. Boyer (1996) e Piaseski (2010) destacam o desenvolvimento da geometria na região do Egito antigo, região do fértil vale rio Nilo, cujas inundações anuais traziam a necessidade das remarcações das terras. Ou seja, todas as vezes após as inundações da região pelo referido rio, eram os esticadores de corda os responsáveis por demarcar novamente as terras dos lavradores. Esse cálculo de áreas das terras foi relatado pelo historiador grego Heródoto no século V a.C. e associava o tamanho das terras dos agricultores ao pagamento dos impostos ao rei Sesóstris.

2.2. Tales, Pitágoras, Platão e Aristóteles

Após esse período, na Mesopotâmia, a geometria teve sua aplicação às extensões espaciais, com a construção das pirâmides. Porém, ainda sendo essencialmente tratada como exercícios de aplicação de processos numéricos a problemas específicos. Pressupõem-se que foi o matemático e filósofo grego, Tales de Mileto (625 – 546 a.C), o primeiro a incorporar a geometria a uma estrutura intelectual e uma discussão filosófica de princípios. Para ele, o conceito geométrico estava mais relacionado ao amor à sabedoria do que a exigência na vida prática (BOYER, 1996).

Por sua vez, Pitágoras de Samos (580 – 500 a.C.) e sua escola de matemáticos conhecida como Escola Pitagórica, cujo lema era “Tudo é número”, tinha uma afinidade muito forte com as ideias dos mesopotâmicos, seja associando valores numéricos às coisas que os cercavam ou até mesmo nos movimentos dos corpos celestes e o custo dos escravos. Conjectura-se que, o teorema que o nome de Pitágoras está associado, tenha surgido com os babilônicos. Entretanto foram os pitagóricos os primeiros a demonstrar (BOYER, 1996).

No quarto século a.C., Platão e Aristóteles tiveram destaque no desenvolvimento da geometria. Esse primeiro, tinha na porta da sua escola a frase: “Que ninguém que ignore a geometria entre aqui”. Em uma visita a um amigo chamado Arquitas em 388 a.C. na Sicília, ele soube dos 5 sólidos regulares (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e o Icosaedro) e a associação com elementos da natureza (fogo, terra, ar e água). O dodecaedro era considerado o quinto sólido regular e era o símbolo do universo. Por sua vez, Aristóteles ocupou-se entre diversos assuntos, com o estudo da astronomia. Para ele, os movimentos estudados na astronomia não eram nada menos do que geometria (BOYER, 1996).

2.3. Os Elementos de Euclides

Por volta de 300 anos a.C., Euclides de Alexandria publicou o best-seller Os Elementos. Obra composta por 13 livros com definições, postulados, proposições e demonstrações Matemáticas. Essa obra é conhecida até hoje por ser o livro didático mais bem sucedido do mundo e consequentemente a base de toda Educação Matemática (BOYER, 1996).

Roque (2012) compartilha a hipótese de que a coleção Os Elementos de Euclides é uma compilação de conhecimentos matemáticos anteriores. Segundo a própria autora, não é possível confirmar essa tese, porém é verdadeiro que boa parte desse trabalho está associado a outros trabalhos gregos como o de Platão, Aristóteles, Pitágoras, entre outros.

No início de cada livro, Euclides detalha e define os objetos que serão usados nas proposições e demonstrações. No primeiro livro, por exemplo, há uma lista de definições que na reedição latina do livro Os Elementos de Euclides, escrita por Federico Commandino (1509 – 1575 d.C.) e ilustrada por Simson (1944, p.6) podemos ver que da definição XX à XXV temos referências ao que posteriormente chamaremos de polígono e estão descritas da seguinte forma:

> Figuras retilíneas são as que são formadas com linhas retas. As triláteras são aquelas, que são formadas com três linhas retas. As quadriláteras são aquelas, que são feitas por quatro linhas retas. Ás multiláteras são as que são feitas por mais de quatro linhas retas.

Além disso, Simson (1944, p.6 e 7) descreve a definição XXX e XXXI para o quadrado e retângulo “Entre as figuras quadriláteras, o quadrado é o que é justamente equilátero de retângulo e a figura, que de uma parte, for mais comprida, pode ser retângula, mas não equilátera.”

Simson (1944, p. 7) ainda traz as definições XXXII, XXXIII e XXXIV para o losango, paralelogramo e finalmente a extensão e definição para o trapézio, respectivamente. “O rombo é uma figura equilátera, e não retângula”; “Rombóide é uma figura quadrilátera, que temos os lados opostos iguais, nem é equilátera, nem equiângula” ; “Todas as demais figuras quadriláteras, que não são as referidas, se chamam trapézios”.

Segundo Boyer (1996), para o conhecimento contemporâneo, em algumas definições listadas na coleção Os Elementos de Euclides, pode-se fazer objeções. Entretanto, em seu tempo, os 13 volumes de Os Elementos desenvolveram a Matemática elementar de forma grandiosa. Os ensinamentos presentes nessa obra são considerados pelos matemáticos como uma lógica satisfatória e pedagogicamente aceitável.

3. CONCEITOS GEOMÉTRICOS

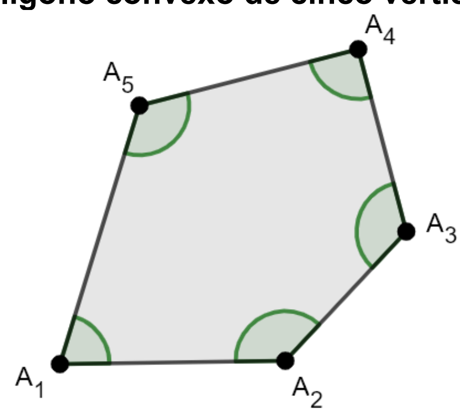
Nesse capítulo 3, traremos uma abordagem teórica dos principais conceitos geométricos. Iniciando com a definição de polígonos, passando pelos tipos e elementos dos polígonos, tipos de quadriláteros e finalizando com as propriedades dos quadriláteros notáveis e demonstrações. Vale ressaltar que todas as figuras desse capítulo foram construídas no software GeoGebra[5].

3.1. Polígonos

A palavra polígono é formada por dois radicais gregos: *poli*, que significa muitos, e *gono*, ângulo. Assim a palavra polígono significa, muitos ângulos.

Existem muitas definições para polígonos, então apresentaremos a seguir alguns exemplos. Segundo Silveira (2013), um polígono é uma figura plana formada por segmentos de retas consecutivos, não-colineares, dois a dois, que não se cruzam e somente se tocam nos extremos. Conforme Giovanni (2019), polígono é uma figura plana formada por uma linha fechada simples, composta apenas de segmentos de retas. De acordo com Name (1996), polígono é um conjunto de segmentos consecutivos, não-colineares no qual os extremos do primeiro e do último coincidem.

Figura 6 – Polígono convexo de cinco vértices (e lados)

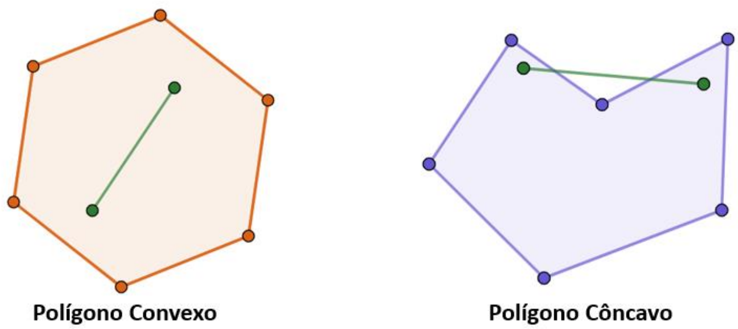


[5] Acesso gratuito ao software GeoGebra: http://geogebra.org/

Definição 1: Sejam $n \geq 3$ um natural e $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontos distintos do plano. Dizemos que os pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formam um polígono (convexo) se, para $1 \leq i \leq n$, a reta que contém dois pontos consecutivos ($\overleftrightarrow{A_i A_{i+1}}$), não contém nenhum outro ponto A_i, e deixa todos eles em um mesmo semiplano dentre os que ela determina. Caso contrário o polígono será côncavo.

Outra maneira de definir polígonos convexos e côncavos é verificando se dados quaisquer dois pontos no interior da região limitada pelo polígono, o segmento de reta determinado por esses dois pontos estará inteiramente contido nessa região, nesse caso definimos o polígono como convexo. Caso haja pontos no segmento de reta que não estejam inteiramente na região, podemos afirmar que esse polígono é côncavo (Figura 7).

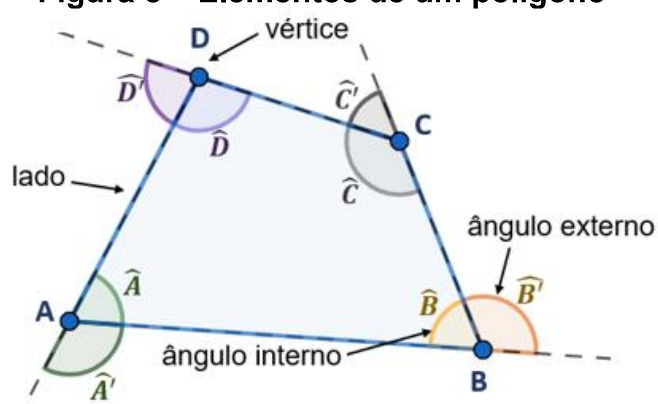
Figura 7 – Tipos de Polígonos



3.1.1. Elementos de um Polígono

Considerando o polígono da Figura 8, temos:

Figura 8 – Elementos de um polígono



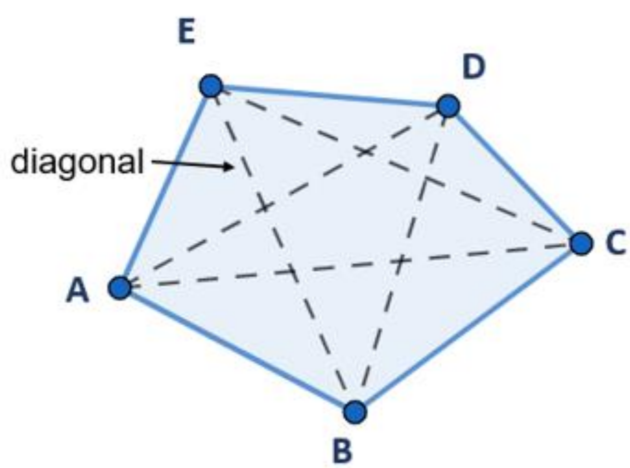
- $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ e D são os vértices do polígono.
- Os segmentos $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$ e $\overline{\mathrm{DA}}$ são os lados.
- $\widehat{\mathrm{A}}$, $\widehat{\mathrm{B}}$, $\widehat{\mathrm{C}}$ e $\widehat{\mathrm{D}}$ são os ângulos internos.
- $\widehat{\mathrm{A}}$', $\widehat{\mathrm{B}}$', $\widehat{\mathrm{C}}$' e $\widehat{\mathrm{D}}$' são os ângulos externos.

Com base na descrição, temos algumas correlações entre os elementos do polígono.

- Dois lados que possuem um vértice/extremidade comum são chamados de lados consecutivos.
- Dois lados não consecutivos não tem vértice/extremidade comum.
- Dois ângulos de um polígono são consecutivos se têm um lado do polígono em comum. Esse é o ângulo interno e externo referente a um vértice.
- Um polígono de *n* vértices possui, *n* lados, *n* ângulos internos e *n* ângulos externos.
- A soma dos lados do polígono é conhecida como perímetro.

Uma diagonal de um polígono é o segmento de reta cujas extremidades são vértices não consecutivos do polígono (Figura 9).

Figura 9 – Polígono ABCDE e as diagonais

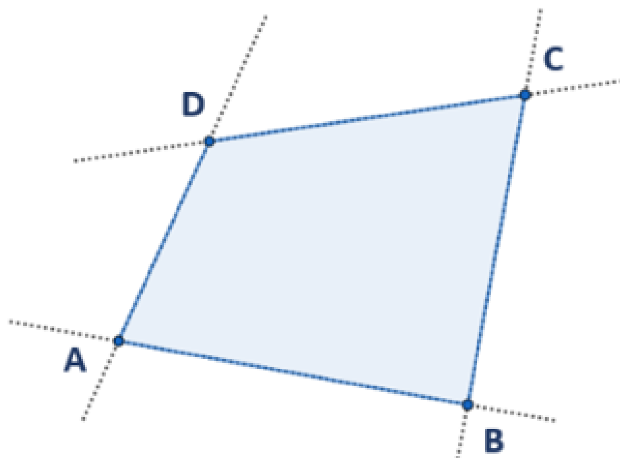


3.2. Quadriláteros

Nessa seção, iniciaremos o estudo sistêmico sobre geometria dos quadriláteros. Desta forma, temos a definição de quadrilátero a seguir:

Definição 2: Sejam $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ e D quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos e três não colineares (Figura 10). Definimos como quadrilátero, o polígono formado quando os segmentos $\overline{\mathrm{AB}}, \overline{\mathrm{BC}}, \overline{\mathrm{CD}}$ e $\overline{\mathrm{DA}}$ se interceptam somente nas extremidades.

Figura 10 – Quadrilátero



Em outras palavras, o quadrilátero ABCD é um polígono de quatro lados. Os elementos do quadrilátero são:

- $\overline{\mathrm{AB}}, \overline{\mathrm{BC}}, \overline{\mathrm{CD}}$ e $\overline{\mathrm{DA}}$ são os lados;
- $\hat{\mathrm{A}} = \mathrm{D\hat{A}B}, \hat{\mathrm{B}} = \mathrm{A\hat{B}C}, \hat{\mathrm{C}} = \mathrm{B\hat{C}D}$ e $\hat{\mathrm{D}} = \mathrm{C\hat{D}A}$ são os ângulos internos;
- $\overline{\mathrm{AC}}$ e $\overline{\mathrm{BD}}$ são as diagonais;

Assim, temos que um quadrilátero tem duas diagonais, a soma dos ângulos internos é igual a 360° e a soma dos ângulos externos também é igual a 360°.

3.3. Quadriláteros Notáveis

Definimos como quadriláteros notáveis os 5 quadriláteros a seguir:

- Os paralelogramos;

- Os retângulos;
- Os losangos;
- Os quadrados;
- Os trapézios.

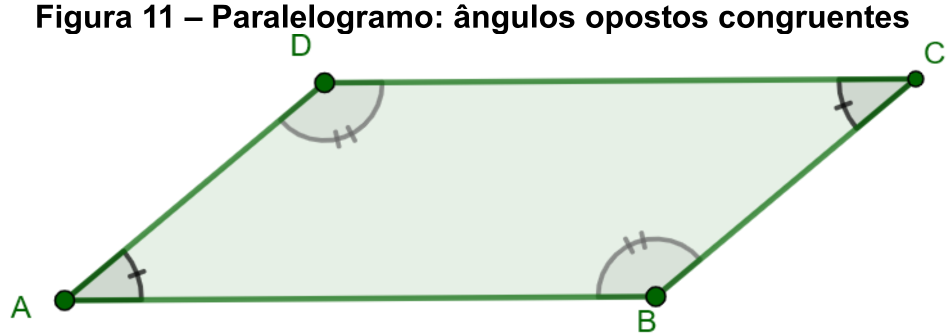
A seguir, descreveremos melhor cada uma dessas figuras.

3.3.1. O Paralelogramo

Definição: Paralelogramo é um quadrilátero convexo que possui lados opostos paralelos.

Teorema 1: Um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, seus ângulos opostos forem congruentes (Figura 11).

Figura 11 – Paralelogramo: ângulos opostos congruentes



ABCD é um paralelogramo $\Leftrightarrow \widehat{\mathrm{A}} \equiv \widehat{\mathrm{C}}$ e $\widehat{\mathrm{B}} \equiv \widehat{\mathrm{D}}$

Demonstração: Suponhamos primeiramente que o quadrilátero ABCD da Figura 11 é um paralelogramo. Sendo assim, $\overline{\mathrm{AD}} \parallel \overline{\mathrm{BC}}$ e como os ângulos $\widehat{\mathrm{A}}$ e $\widehat{\mathrm{B}}$ são colaterais internos em relação à reta $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$, temos então que:

$$\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}} = 180° \text{ (eq.I).}$$

De forma análoga:

$$\widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\mathrm{C}} = 180° \text{ (eq. II).}$$

Dessa forma, a partir das eq. I e eq. II temos que:

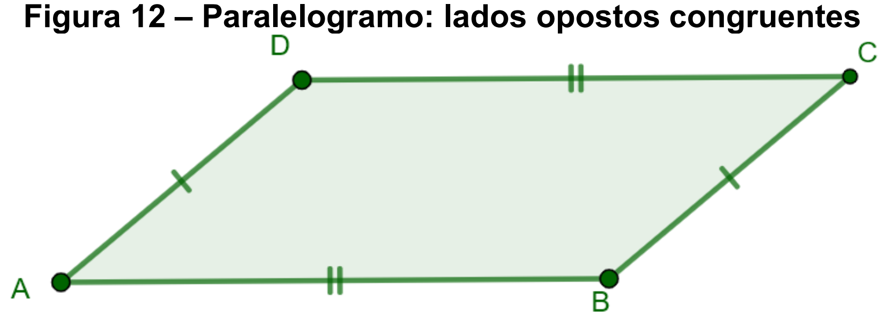
$$\widehat{\mathrm{A}} = 180° - \widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{C}}.$$

Do mesmo modo temos $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{D}}$.

Demonstrando a volta da bicondicional temos que se em um quadrilátero convexo de vértices ABCD e com $\hat{A} \equiv \hat{C}$ e $\hat{B} \equiv \hat{D}$, então $\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D}$. Sabemos também que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero corresponde a 360° ($\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$), logo temos que $\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D} = 180°$. De forma análoga, $\hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} = 180°$. Como $\hat{A} + \hat{B} = 180°$, temos que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. Da mesma forma, se $\hat{B} + \hat{C} = 180°$ então $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Logo, podemos concluir que o quadrilátero ABCD é um paralelogramo.

Teorema 2: Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e somente se, seus pares de lados opostos são congruentes (Figura 12).

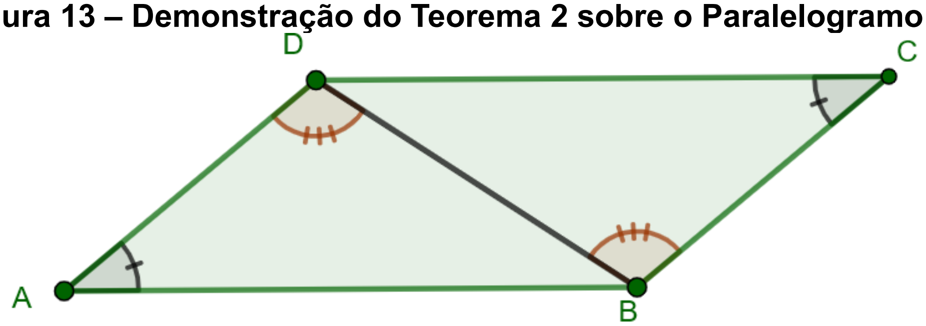
Figura 12 – Paralelogramo: lados opostos congruentes



ABCD é um paralelogramo $\Leftrightarrow \overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$

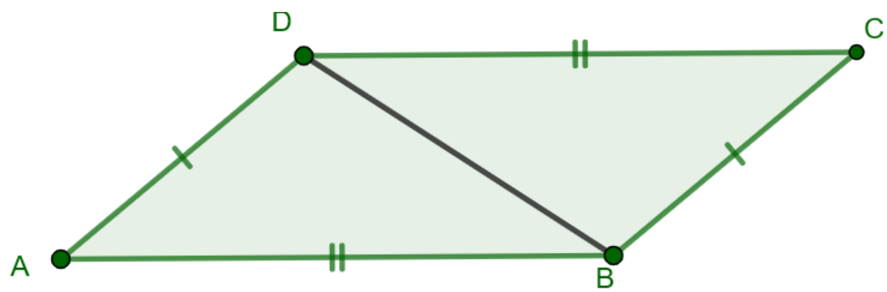
Demonstração: Suponhamos primeiramente que o quadrilátero ABCD é um paralelogramo. Já sabemos pela demonstração do Teorema 1 que $\hat{A} \equiv \hat{C}$ e por hipótese, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, então $A\hat{D}B \equiv C\hat{B}D$ ângulo alternos internos (Figura 13). Portanto os triângulos ABD e CDB são congruentes pelo caso LAA_o (lado-ângulo-ângulo oposto). Dai temos que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$.

Figura 13 – Demonstração do Teorema 2 sobre o Paralelogramo 01



Demonstrando a volta da bicondicional, temos que se ABCD é um quadrilátero convexo tal que $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CD}}$ e $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{BC}}$ (Figura 14), então os triângulos ABD e CDB são congruentes pelo caso LLL (lado-lado-lado), com isso $\mathrm{A\hat{D}B} \equiv \mathrm{C\hat{B}D}$ e $\mathrm{A\hat{B}D} \equiv \mathrm{C\hat{D}B}$. Isso acarreta em $\overline{\mathrm{AD}} \parallel \overline{\mathrm{BC}}$ e $\overline{\mathrm{AB}} \parallel \overline{\mathrm{CD}}$. Sendo assim, podemos concluir que se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então essa figura é um paralelogramo.

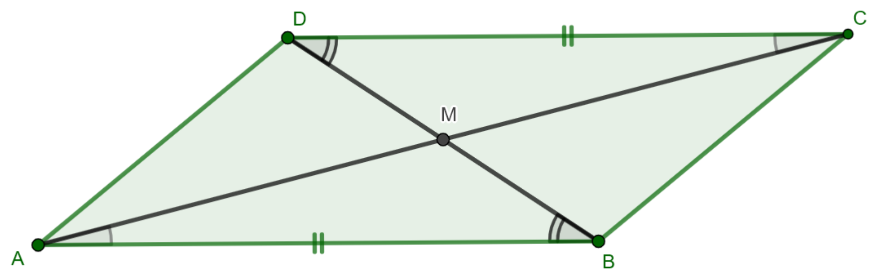
Figura 14 – Demonstração do Teorema 2 sobre o Paralelogramo 02



Teorema 3: Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e só se, suas diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios.

Demonstração: Primeiramente, seja ABCD um paralelogramo e M o ponto de interseção de suas diagonais (Figura 15). Se $\overline{\mathrm{AB}} \parallel \overline{\mathrm{CD}}$ então $\mathrm{B\hat{A}M} \equiv \mathrm{D\hat{C}M}$ e $A\hat{\mathrm{B}}\mathrm{M} \equiv \mathrm{C\hat{D}M}$. Como já sabemos que $\overline{\mathrm{AB}} \equiv \overline{\mathrm{CD}}$, então podemos dizer que os triângulos ABM e CDM são congruentes pelo caso ALA (ângulo-lado-ângulo). Logo, $\overline{AM} = \overline{CM}$ e $\overline{BM} = \overline{DM}$. Reciprocamente, ainda na Figura 15, sejam ABCD um quadrilátero tal que suas diagonais AC e BD se interceptam no ponto M, o ponto médio de ambas as diagonais. Sendo assim $\overline{AM} = \overline{CM}$, $\overline{BM} = \overline{DM}$ e $\mathrm{A\hat{M}B} \equiv \mathrm{C\hat{M}D}$ (ângulos opostos pelo vértice), de modo que os triângulos ABM e CDM são congruentes, pelo caso LAL (lado-ângulo-lado). Analogamente, BCM e DAM também são congruentes por LAL. Tais congruências nos dão respectivamente $\overline{\mathrm{AB}} \equiv \overline{\mathrm{CD}}$ e $\overline{\mathrm{AD}} \equiv \overline{\mathrm{BC}}$ e com isso, provamos que o quadrilátero ABCD é um paralelogramo.

Figura 15 – Demonstração do Teorema 3

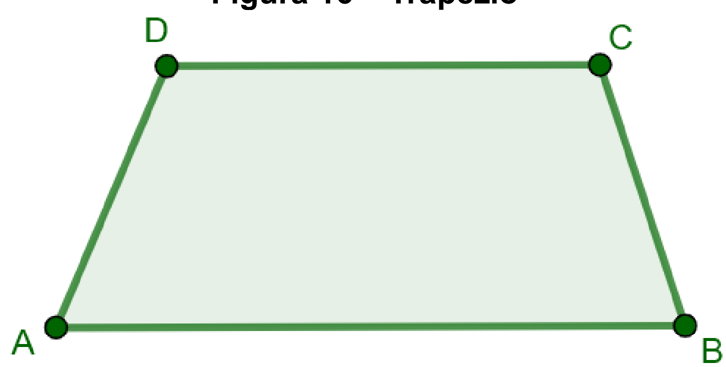


3.3.2. O Trapézio

<u>Definição:</u> Trapézio é um quadrilátero convexo que possui dois lados paralelos (Figura 16). Ou seja:

ABCD é um trapézio com $\overline{\mathrm{AB}} \parallel \overline{\mathrm{CD}}$.

Figura 16 – Trapézio



Os lados paralelos são as bases do trapézio. No caso da Figura 16, $\overline{\mathrm{AB}}$ é chamada base maior e $\overline{\mathrm{CD}}$ é base menor.

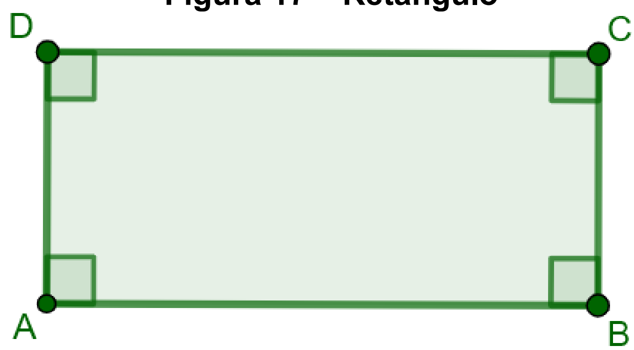
De acordo com os outros dois lados do trapézio, podemos classificá-lo em:

- Trapézio isósceles: se os outros 2 lados são congruentes.
- Trapézio escaleno: se os outros 2 lados não são congruentes.
- Um trapézio retângulo (ou bi-retângulo) é um trapézio que tem dois ângulos retos.
- Caso os outros 2 lados do trapézio sejam também paralelos, temos um caso particular de um trapézio que também é um paralelogramo.

3.3.3. O Retângulo

Definição: Retângulo é um quadrilátero convexo que possui os quatro ângulos congruentes (Figura 17).

Figura 17 – Retângulo

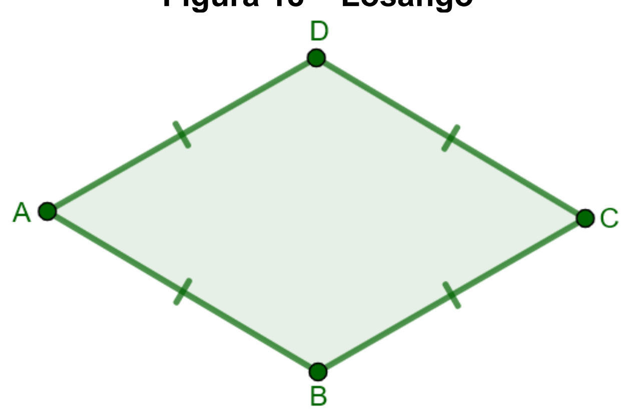


ABCD é um retângulo $\Leftrightarrow \hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D}$.

3.3.4. O Losango

Definição: Losango é um quadrilátero convexo que possui os quatro lados congruentes (Figura 18).

Figura 18 – Losango

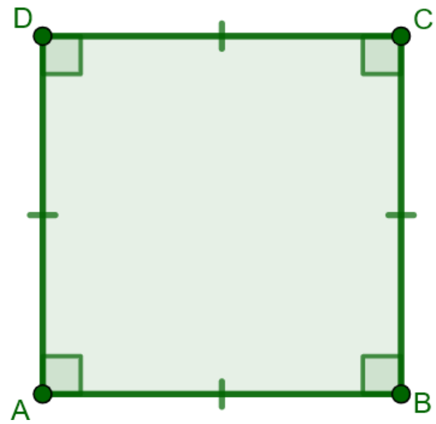


ABCD é um losango $\Leftrightarrow \overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$.

3.3.5. O Quadrado

Definição: Quadrado é um quadrilátero convexo que possui os quatro lados e os quatros ângulos congruentes (Figura 19).

Figura 19 – Quadrado

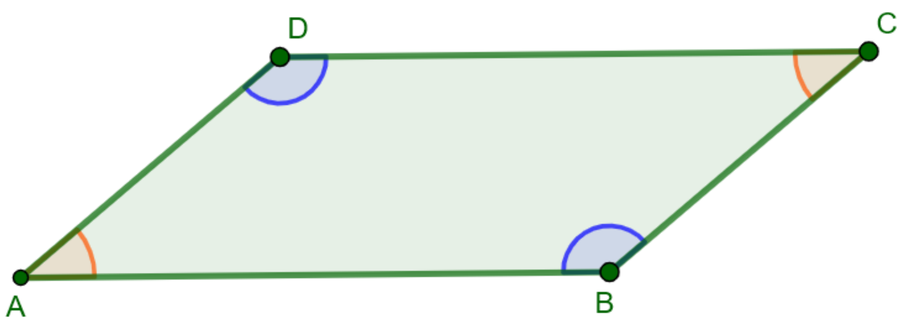


ABCD é um quadrado $\Leftrightarrow (\widehat{\mathrm{A}} \equiv \widehat{\mathrm{B}} \equiv \widehat{\mathrm{C}} \equiv \widehat{\mathrm{D}} \text{ e } \overline{\mathrm{AB}} \equiv \overline{\mathrm{BC}} \equiv \overline{\mathrm{CD}} \equiv \overline{\mathrm{DA}})$.

3.4. Propriedade dos Paralelogramos

Propriedade 1 – Ângulos Opostos Congruentes.

Figura 20 – Propriedade do paralelogramo: ângulos opostos congruentes

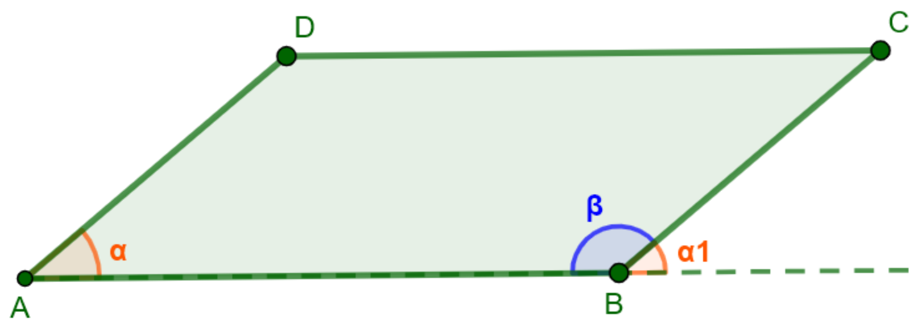


a) Em todo paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes. Ou seja, dado o paralelogramo ABCD, temos que: $\widehat{\mathrm{A}} \equiv \widehat{\mathrm{C}}$ e $\widehat{\mathrm{B}} \equiv \widehat{\mathrm{D}}$.

Demonstração:

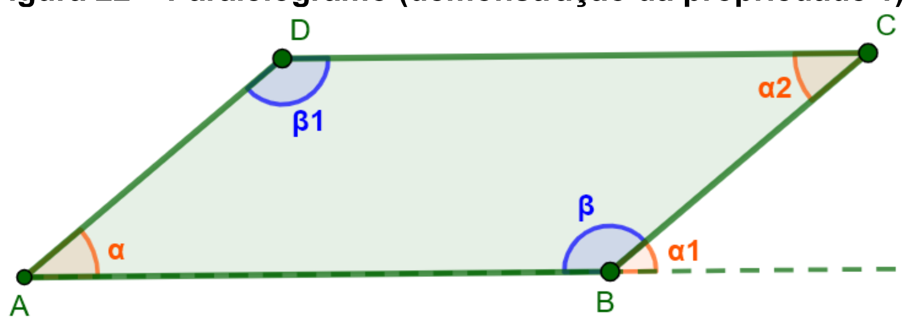
Na Figura 21, α é o ângulo interno de vértice A e β o ângulo interno do vértice B. Fazendo o prolongamento do lado AB a partir do vértice B, temos o ângulo $\alpha 1$ projetado como ângulo externo do vértice B. Visto que temos dois ângulos correspondentes marcados a partir dos dois segmentos paralelos AD e BC e a transversal AB, podemos concluir que $\alpha 1 \equiv \alpha$.

Figura 21 – Paralelogramo (demonstração da propriedade 1)



Além disso, pela Figura 22, temos o ângulo $\alpha 2$ (ângulo interno de vértice C) como sendo um ângulo alterno e interno do sistema dos segmentos paralelos AB, CD e transversal BC. Então, $\alpha 2 \equiv \alpha 1$.

Figura 22 – Paralelogramo (demonstração da propriedade 1)



Portanto, pela transitividade, se $\alpha \equiv \alpha 1$ e $\alpha 1 \equiv \alpha 2$, temos que $\alpha \equiv \alpha 2$. Ou seja, o ângulo interno de vértice A é congruente ao ângulo interno de vértice C. Analogamente, os ângulos internos dos vértices B e D, também são congruentes, $\beta \equiv \beta 1$.

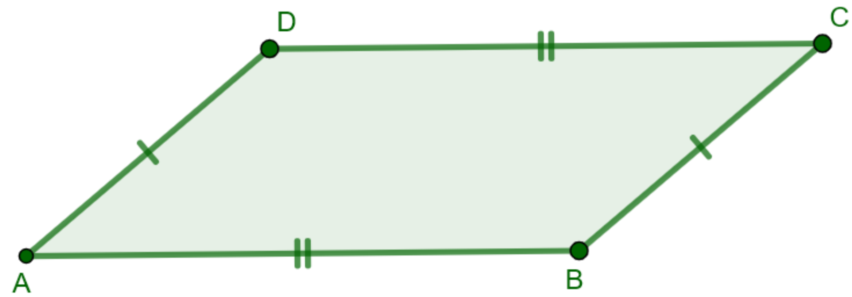
Concluímos então que em todo paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes.

b) Todo quadrilátero convexo que tem ângulos opostos congruentes é um paralelogramo. Consequentemente, baseado na definição de cada um dos quadriláteros notáveis, podemos afirmar que:

Todo retângulo é um paralelogramo.

Propriedade 2 – Lados opostos congruentes.

Figura 23 – Propriedade do paralelogramo: lados opostos congruentes

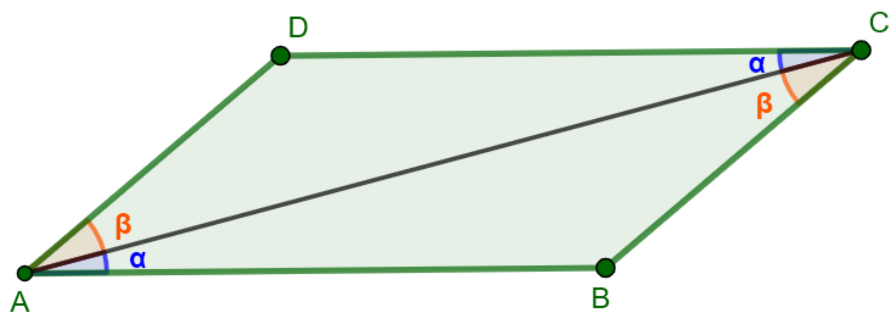


a) Em todo paralelogramo, dois lados opostos quaisquer são congruentes (Figura 23). Ou seja, dado o paralelogramo ABCD, temos que: $\overline{\mathrm{AB}} \equiv \overline{\mathrm{CD}}$ e $\overline{\mathrm{AD}} \equiv \overline{\mathrm{BC}}$.

<u>Demonstração:</u>

Seja a Figura 24 a seguir, um paralelogramo de vértices ABCD. A partir dela, traçaremos a diagonal AC.

Figura 24 – Paralelogramo (Demonstração da propriedade 2)



Como os lados AB e CD são paralelos por definição, então os ângulos α são alternos e internos, portanto são congruentes.

Como os outros dois lados AD e BC também são paralelos por definição, então os ângulos β também são congruentes pois são alternos e internos.

Temos que o lado AC é comum aos dois triângulos ACB e ACD. Sendo assim, pelo caso de congruência de triângulos LAL (lado-ângulo-lado), podemos afirmar que os triângulos ACB e ACD são congruentes.

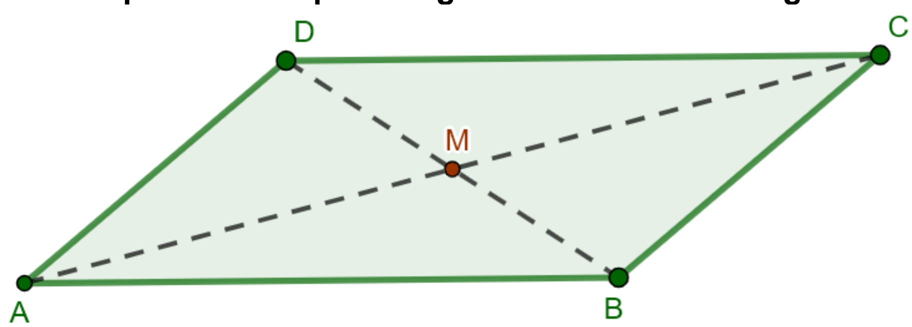
Conclusão: dado um paralelogramo $ABCD$ temos que os lados AB e CD são congruentes e os lados AD e BC também são congruentes. Ou seja, $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$.

b) Todo quadrilátero convexo que tem lados opostos congruentes é um paralelogramo. Consequentemente, baseado na definição de cada um dos quadriláteros notáveis, podemos afirmar que:

Todo losango é um paralelogamo.

Propriedade 3 – Divisão das diagonais ao meio.

Figura 25 – Propriedade do paralelogramo: divisão das diagonais ao meio



Todo quadrilátero convexo é um paralelogramo, se e somente se, as diagonais interceptam-se nos respectivos pontos médios (Figura 25).

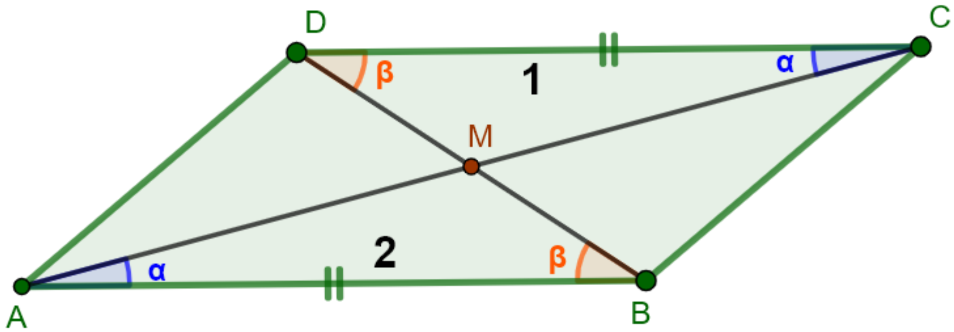
Demonstração:

Na Figura 26, o triângulo 1 formado pelos vértices ABM e o triângulo 2 formado pelos vértices CDM são congruentes pois pelo caso ALA (ângulo-lado-ângulo), o lado AB é congruente ao lado CD (como já demonstramos na propriedade 2) e como $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, os ângulos momeados α são congruentes pois são alternos e internos. Nas mesmas paralelas, os ângulos momeados β também são congruentes pois são alternos e internos.

Sendo os triângulos 1 e 2 congruentes, todos os seus lados correspondentes são também congruentes. Então, $\overline{MA} \equiv \overline{MC}$ e $\overline{MD} \equiv \overline{MB}$.

Concluímos então que, o ponto M é o ponto médio das diagonais do paralelogramo.

Figura 26 – Paralelogramo (demonstração da propriedade 3)

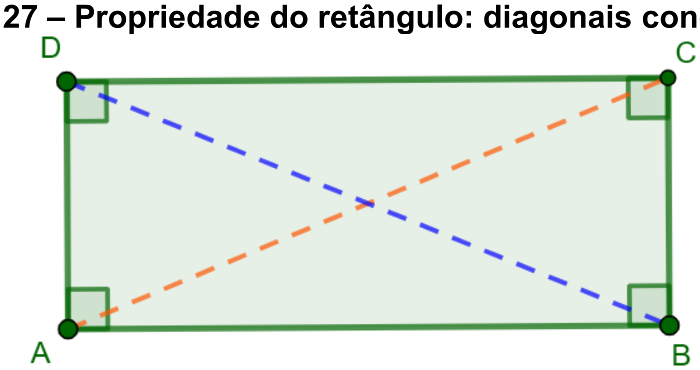


3.5. Propriedade dos Retângulos

O retângulo é um paralelogramo, logo possui as propriedades P1, P2 e P3 anteriores. Porém, a propriedade 4 representada na Figura 27 a seguir é exclusiva do retângulo.

Propriedade 4 – Diagonais Congruentes.

Figura 27 – Propriedade do retângulo: diagonais congruentes



a) Todo retângulo possui as diagonais congruentes.

b) Todo paralelogramo que possui as diagonais congruentes é um retângulo.

Demonstração:

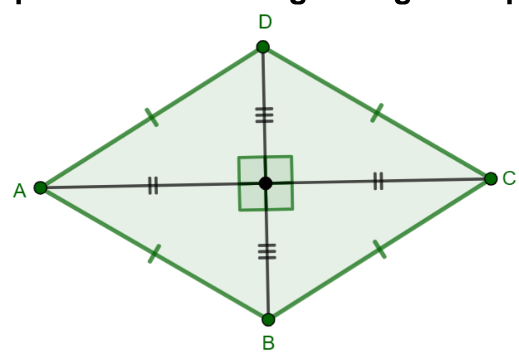
A demonstração da propriedade 4 é feita através da congruência LAL (lado-ângulo-lado) entre os triângulos ABC e BAD da Figura 27.

Como o lado AB é comum aos triângulos ABC e BAD, por definição o ângulo interno do vértice A é igual ao ângulo interno do vértice B ($\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{B}} = 90°$) e de acordo com a propriedade 2, nos paralelogramos os lados oposto são congruentes ($\overline{\mathrm{AD}} \equiv \overline{\mathrm{BC}}$). Então, podemos concluir que as diagonais do retângulo ABCD são congruentes, ou seja $\overline{\mathrm{AC}} \equiv \overline{\mathrm{BD}}$.

3.6. Propriedade do Losango

Propriedade 5 – As diagonais de um losango são perpendiculares.

Figura 28 – Propriedade do losango: diagonais perpendiculares

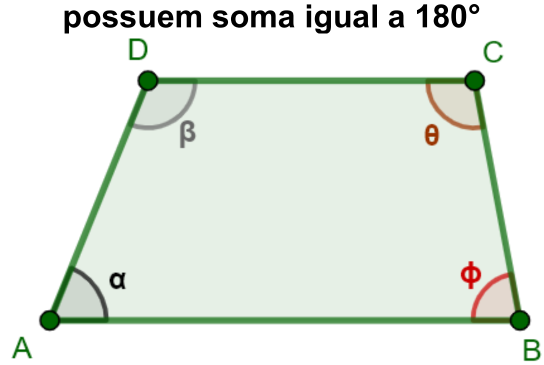


3.7. Propriedade dos Trapézios

Propriedade 6 – Em qualquer trapézio $\mathbf{ABCD}$ de base $\overline{\mathbf{AB}}$ e $\overline{\mathbf{CD}}$, temos que:

$\widehat{\mathbf{A}} + \widehat{\mathbf{D}} = \widehat{\mathbf{B}} + \widehat{\mathbf{C}} = 180º$.

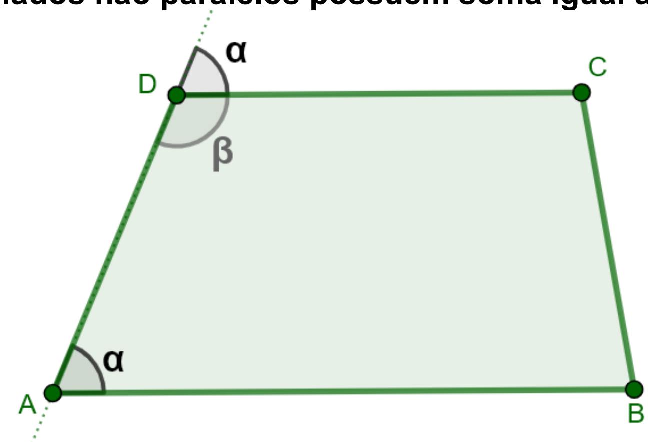
Figura 29 – Propriedade do trapézio: ângulos adjacentes dos lados não paralelos possuem soma igual a 180°



Demonstração:

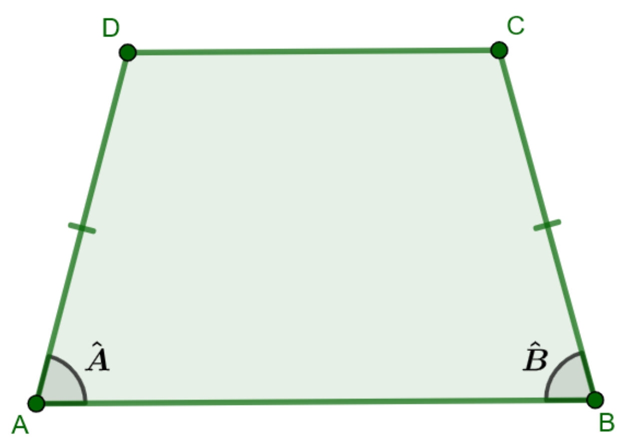
Por definição de trapézio, a reta suporte do lado AB é paralela à reta suporte do lado CD, temos que o ângulo α e o ângulo β (Figura 30) são alternos internos do sistema de retas paralelas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, cortadas pela reta transversal $\overleftrightarrow{AD}$. Sendo assim, o ângulo externo do trapézio do vértice D é congruente ao ângulo α. Podemos concluir então que $\alpha + \beta = 180°$. Analogamente, aos ângulos internos dos vértices B e C.

Figura 30 – Demonstração da propriedade 6 dos trapézios: ângulos adjacentes dos lados não paralelos possuem soma igual a 180°



Propriedade 7 – Os ângulos das bases de um trapézio isósceles são congruentes. Ou seja, no trapézio ABCD da Figura 31, $\hat{\mathbf{A}} \equiv \hat{\mathbf{B}}$.

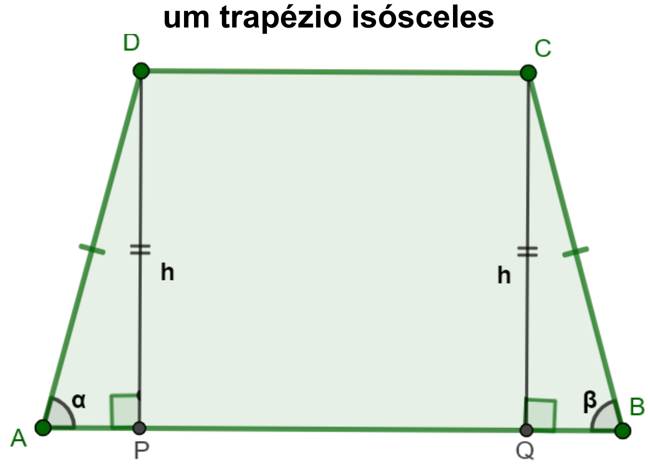
Figura 31 – Propriedade do trapézio isósceles: ângulos das bases congruentes



Demonstração:

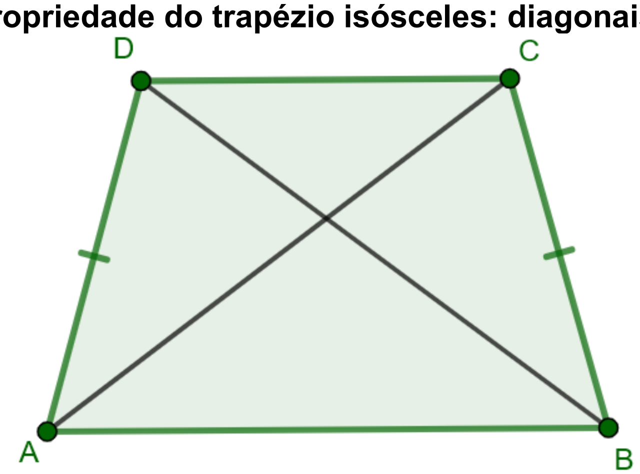
Se fato, sejam os segmentos $\overline{PD}$ e $\overline{CQ}$ da Figura 32, as alturas do trapézio isósceles ABCD. Desta forma, temos os triângulos ADP e BCQ congruentes entre si pelo caso LLAₒ, ou seja $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$, $\overline{DP} \equiv \overline{CQ}$ e $A\hat{P}D \equiv B\hat{Q}C \equiv 90°$. Portanto temos que $\alpha \equiv \beta$, ou seja, os ângulos da base maior do trapézio isósceles ABCD são congruentes. Da mesma forma é válida a propriedade para base menor.

Figura 32 – Demonstração da propriedade 7: ângulos das bases congruentes de um trapézio isósceles



Propriedade 8 – As diagonais de um trapézio isósceles são congruentes. Ou seja, considerando o trapézio isósceles ABCD da Figura 33, temos que $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$.

Figura 33 – Propriedade do trapézio isósceles: diagonais congruentes



Demonstração:

Considerando os triângulos ABC e BAD da Figura 33 e como consequência da propriedade 7, temos que $A\hat{B}C \equiv B\hat{A}D$. Como o trapézio ABCD é isósceles, então podemos afirmar que os triângulos ABC e BAD são congruentes pelo caso LAL. Sendo assim temos que $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$. Portanto. considerando o trapézio isósceles ABCD, temos que as diagonais AC e BD são congruentes, ou seja $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$.

3.8. Propriedade dos Quadrados

Referente as diagonais do quadrado, podemos afirmar que temos duas diagonais congruentes e perpendiculares.

De acordo com as definições dos quadriláteros notáveis, podemos afirmar que:

Todo quadrado é um retângulo e também é um losango.

Podemos afirmar isso pois, como um quadrado possui 4 ângulos retos congruentes, então, por definição, ele pode ser chamado de retângulo. Além disso, como o quadrado possui os 4 lados congruentes, por definição, ele também pode ser chamado de losango.

Sendo assim, além das propriedades do paralelogramo, o quadrado tem as mesmas propriedades e características do retângulo e do losango. Portanto, o quadrado possui as propriedades 1, 2 e 3 pois é um paralelogramo, possui a propriedade 4 pois é um retângulo e por fim, possui a propriedade 5 pois é também um losango.

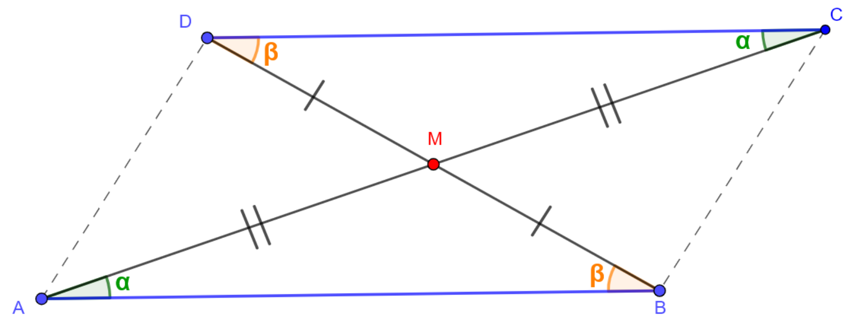
3.9. Teorema 4

Se um quadrilátero possui dois lados iguais e paralelos, ele é um paralelogramo.

Demonstração:

Seja a Figura 34 a seguir, por hipótese, temos que as retas AB e CD são paralelas e os segmentos AB e CD são congruentes.

Figura 34 – Demonstração Teorema 4



Para demonstrar que a figura é um paralelogramo devemos observar a congruência entre os triângulos AMB e CMD. Os lados AB e CD são congruentes (por hipótese), e por serem paralelos, há ângulos alternos internos nomeados como α e ângulos alternos internos nomeados como β. Assim, através do caso de congruência de triângulos ALA (ângulo-lado-ângulo), temos que os triângulos AMB e CMD são congruentes.

Com isso, podemos afirmar que AM ≡ CM e BM ≡ DM. Visto isso, concluímos que as diagonais cruzam ao meio. Portanto, pela propriedade 3 o quadrilátero ABCD é um paralelogramo.

4. PROPOSTA DE ATIVIDADE COM USO DE DOBRADURAS

Nesse capítulo apresentaremos, de forma detalhada, toda a dinâmica para aplicação da sequência didática com uso das técnicas de dobraduras como ferramenta para o ensino dos quadriláteros notáveis, seus elementos e propriedades. Iniciaremos com uma proposta de avaliação diagnóstica, detalhando a metodologia, a aplicação e a pré-análise das respostas do gabarito e dos distratores. Depois, apresentaremos toda a organização prévia à aplicação da atividade, como a disponibilização dos recursos, tempo para aplicação e layout da sala de aula. Em seguida, traremos de maneira minuciosa, todos os passos para aplicação da dinâmica com os estudantes, passando pela abordagem teórica até a finalização com a construção de um cubo. Finalmente, apresentaremos uma proposta de avaliação de aprendizagem e uma autoavaliação. Essa sugestão para a autoavaliação pretende ponderar em cada estudante o grau do desempenho individual e medir a receptividade deles com o uso do material manipulável.

4.1. Avaliação Diagnóstica

Uma avaliação diagnóstica tem como premissa básica, considerar o processo avaliativo como instrumento que subsidiará o professor no redimensionamento da prática pedagógica. Desta forma, essa avaliação diagnóstica de aprendizagem será um instrumento que ajudará o professor a alcançar os objetivos propostos pela atividade, auxiliando na detecção de dificuldades anteriores com o conteúdo por parte do estudante e possibilitando o seu desenvolvimento no momento da aplicação da proposta de atividade com uso de dobraduras (MENEZES, 2013).

Nessa perspectiva, as cinco questões da avaliação diagnóstica propostas neste trabalho, buscam verificar em cada estudante, o grau de conhecimento sobre quadriláteros notáveis, seus principais elementos e propriedades. Além disso, essa avaliação coloca em evidência os pontos fortes e pontos de melhoria do grupo, tendo em vista o mapeamento e diagnose do processo de aprendizagem como o próprio nome sugere. Ou seja, com base nos dados quantitativos, o professor terá ferramentas para compreender de forma mais adequada o ponto apropriado para iniciar a atividade com uso de dobraduras.

Consoante com os próprios Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL,1998), a avaliação deve ser capaz de fornecer ao professor informações relevantes sobre as habilidades e competências do estudante em interpretar, raciocinar, resolver problemas e usar a linguagem Matemática de modo a ajudá-lo nas questões propostas. Em outras palavras:

> [...] cabe à avaliação fornecer aos professores as informações sobre como está ocorrendo a aprendizagem: os conhecimentos adquiridos, os raciocínios desenvolvidos, as crenças, hábitos e valores incorporados, o domínio de certas estratégias, para que ele possa propor revisões e reelaborações de conceitos e procedimentos ainda parcialmente consolidados (BRASIL, 1998, p.54).

Desta forma, propomos que a avaliação diagnóstica seja aplicada a todos os estudantes de forma individual, sem consulta e com alguns dias de antecedência da aplicação da atividade, para que o professor consiga estudar com detalhes os resultados e assim consiga ser o mais assertivo possível, principalmente na abordagem inicial do conteúdo e condução da atividade.

A avaliação composta por 5 questões objetivas foi idealizada de forma a ser um material auto-instrutivo. Como sugestão, deve ser aplicada com duração máxima de 15 minutos aproximadamente. Para tal, é importante adotar previamente algumas medidas de modo a contribuir com o bom andamento do processo. A organização da sala de aula de modo a possibilitar que a avaliação seja realizada individualmente e a entrega da avaliação impressa aos estudantes, favorecerá para que tudo ocorra de maneira como planejado.

É igualmente importante ressaltar aos estudantes a natureza diagnóstica dessa avaliação, destacando que se trata de uma avaliação não pontuada e que servirá de parâmetro para o professor, norteando-o principalmente no início da aplicação da sequência didática com uso das dobraduras. Com isso, espera-se que tenhamos respostas que representem, autenticamente, os conhecimentos sobre quadriláteros dos estudantes até aquele instante.

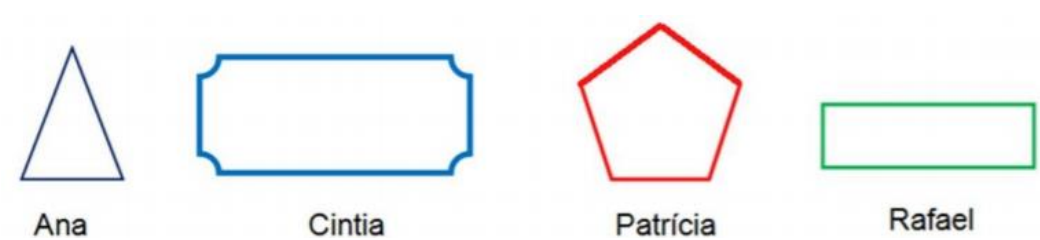
4.1.1. Proposta para avaliação diagnóstica

Apresentamos a seguir, uma proposta de questões para ser aplicada como avaliação diagnóstica destacando os conteúdos abordados, bem como o que buscamos ao receber de resposta dos estudantes.

A questão 01 traz no enunciado o conceito do retângulo e com isso, pretende-se buscar no estudante, a habilidade de interpretar definições e associá-las a uma figura geométrica plana. Na questão 02, temos uma figura com quatro quadriláteros notáveis destacando os lados e ângulos, através da simbologia utilizada na geometria. Desta forma, procura-se no estudante o conhecimento em associar as figuras às definições de cada um dos quadriláteros notáveis em destaque, além da utilização da simbologia geométrica. Na questão 03, temos a bandeira do Kuwait[6] como apoio na identificação de figuras geométricas. Os trapézios (retângulos e isósceles) desenhados na bandeira em posições diferentes, trazem ingredientes a mais para o estudante na interpretação e identificação dos quadriláteros. Além dos 3 trapézios, ainda há a representação de um retângulo no centro-direto da bandeira pintado de branco como mais um tipo de quadrilátero. Deseja-se com essa aplicação, identificar nos estudantes a capacidade em identificar diferentes tipos de quadriláteros, mesmo em diferentes posições. Por fim, a questão 04 busca compreender a familiarização do estudante com os elementos de um polígono e a questão 05, o conhecimento dele sobre as propriedades e as relações entre os quadriláteros notáveis.

Proposta de Avaliação Diagnóstica

QUESTÃO 01: Uma professora pediu aos alunos que fizessem o desenho de um quadrilátero, cujos lados fossem paralelos dois a dois e que possuíssem os quatro ângulos internos retos. Observe o desenho de quatro alunos dessa professora.



---

[6] O Kuwait é um país árabe no Golfo Pérsico, cuja capital chama-se Cidade do Kuwait e população cerca de 2,7 milhões de habitantes.

Qual desses alunos desenhou o quadrilátero solicitado pela professora?

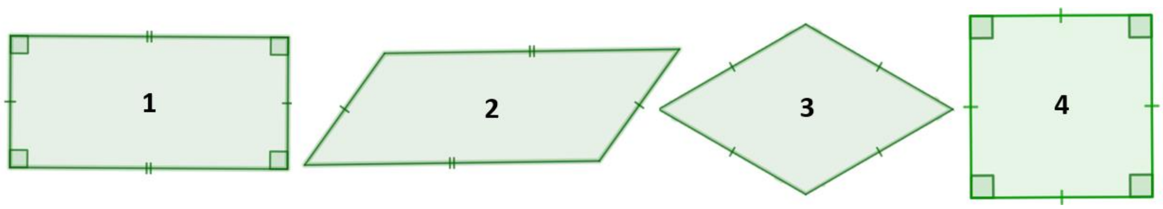
a) Ana

b) Cintia

c) Patrícia

d) Rafael

QUESTÃO 02: Pedro decidiu desenhar as quatro figuras abaixo para desafiar você a escrever os nomes corretos conforme numeradas de 1 à 4:



Dessa forma, qual a sequência correta?

a) Retângulo, Trapézio, Losango e Quadrado.

b) Retângulo, Paralelogramo, Triângulo e Quadrado.

c) Retângulo, Paralelogramo, Losango e Quadrado.

d) Trapézio, Retângulo, Triângulo, Cubo.

QUESTÃO 03: A professora levou o desenho da bandeira de um país para os estudantes na aula de Matemática. A bandeira apresenta algumas figuras geométricas desenhadas e pintadas de cores diferentes.

Podemos dizer que as figuras geométricas de cada cor presentes na bandeira são:

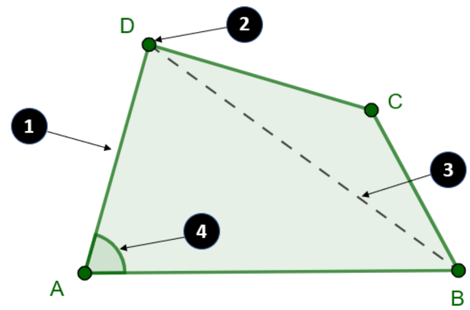
a) Losango e Paralelogramos.

b) Trapézios e Quadrado.

c) Retângulo e Triângulos.

d) Trapézios e Retângulo.

QUESTÃO 04: Dado o polígono abaixo, destacamos os principais elementos e enumeramos de 1 à 4.



Podemos afirmar que o nome corretos dos elementos conforme sequência de 1 à 4 é:

a) Lado, Ponto, Apótema e Bissetriz.

b) Lado, Vértice, Eixo de Simetria e Ângulo.

c) Lado, Vértice, Diagonal e Ângulo Interno.

d) Aresta, Ponto, Linha, Área.

QUESTÃO 05: Com base nos conceitos e propriedade dos quadriláteros notáveis, podemos classificar as proposições a seguir como Verdadeira (V) ou Falsa (F).

__Todo retângulo é um paralelogramo.

__Todo quadrado é um retângulo.

__Todo losango é um quadrado.

Então, a ordem correta apresentada é:

a) F F F   b) F F V   c) V F F   d) V V F

4.1.2. Pré-Análises das Respostas

Primeiramente, é importante destacar que as pré-análises das respostas das questões da avaliação diagnóstica que serão apresentadas a seguir, são hipóteses de resolução, ou seja, são pressuposições de respostas que podem ser dadas pelos estudantes. Racionalmente, cabe ao professor realizar uma análise dos registros dos estudantes de acordo com a realidade do processo de aprendizagem e o momento que está sendo aplicada a avaliação e não considerando meramente as suposições a seguir como padrões para toda e qualquer situação.

Similarmente, o Brasil (2018) apresenta um sistema para elaboração das alternativas das questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) chamada de gabarito para a alternativa correta e distratores para as alterativas incorretas. Esses distratores são alternativas incorretas baseadas em erros comuns cometidos pelos estudantes que não desenvolveram a habilidade exigida para a questão. Isso é, na busca pela solução da situação-problema, os distratores retratam hipóteses de raciocínios prováveis não representando situações capazes de induzir o estudante ao erro.

Desta forma, as pré-análises, servirão como guias para auxiliar o professor na interpretação dos dados coletados antes da aplicação da atividade com dobraduras de papéis.

Alguns estudiosos da educação defendem a elaboração de uma avaliação objetiva e destacam suas vantagens e desvantagens. Podemos destacar como pontos fortes, a rapidez na correção pelo professor e resolução pelo estudante, e a praticidade na interpretação dos dados pelo professor. Entretanto, figura-se dentre as oportunidades desse tipo de avaliação, a possibilidade de o estudante atribuir uma alternativa aleatória sem que haja conhecimento agregado, fazendo com que haja uma interpretação equivocada dos dados pelo professor. Segundo, a limitação da habilidade de expressão dos estudantes, restringindo a correção do professor a somente notificar os acertos, desconsiderando o que levou o estudante a escolher a alternativa incorreta.

Projetando essa perspectiva e com o propósito de minimizar essas lacunas, trazemos como proposta inicial, um diálogo transparente e franco entre professor e estudantes antes da distribuição da avaliação diagnóstica impressa. A intenção é esclarecer a real natureza diagnóstica, e não pontuada, da avaliação. Desta forma, espera-se que os estudantes contribuam e colaborem com o processo.

Por fim, esforçando-se para captar as diversas possibilidade de marcação que podem ter levado o estudante a julgar uma alternativa como correta, elaboramos um roteiro guia que servirá como norteador ao professor na interpretação dos resultados coletados baseado nos conhecimentos sobre quadriláteros notáveis de cada estudante.

Com isso, seguindo todo o planejamento abordado até aqui, a expectativa é que tenhamos uma avaliação diagnóstica clara, prática e com respostas autênticas com a realidade dos estudantes de modo a qualificar o professor com subsídios para interpretação dos dados.

Pré-análise das questões:

QUESTÃO 01:

a) Incorreta: A indicação da alternativa A indica que o estudante pode ter confundido o trecho no enunciado “lados paralelos dois a dois” como sendo figuras de lados iguais.

b) Incorreta: Quem escolher a alternativa B, pode ter considerado somente a expressão “lados paralelos dois a dois”, porém não foi considerado os ângulos internos retos.

c) Incorreta: A indicação da alternativa C indica que não há a compreensão correta do enunciado e associação com o formato da figura geométrica.

d) Correta: O estudante que escolher a letra D reconhece a definição citada, bem como as propriedades dos quadriláteros, especialmente as características de um retângulo. Além disso, mostra uma próxima relação com as descrições e termos usados na geometria plana.

QUESTÃO 02:

a) Incorreta: A escolha da alternativa A, sugere que o estudante reconhece o retângulo, o losango e o quadrado, porém não consegue distinguir as características do trapézios e paralelogramo.

b) Incorreta: Quem responder alternativa B, consegue identificar o retângulo, o paralelogramo e o quadrado, porém apresenta dificuldade na identificação do losango, confundindo-o com um triângulo.

c) Correta: O estudante que indicar a alternativa C, consegue identificar os 4 tipos de quadriláteros, o retângulo, o paralelogramo, o losango e o quadrado. Além disso, apresenta familiaridade com a simbologia para identificar lados e ângulos das figuras geométricas.

d) Incorreta: A escolha da alternativa D sugere que o estudante não domina os conceitos básicos, definições e características de figuras geométricas planas.

QUESTÃO 03:

a) Incorreta: A indicação da alternativa A, sinaliza que o estudante apresenta dificuldade na identificação das figuras: retângulo e trapézio.

b) Incorreta: O estudante que escolher a alternativa B, consegue reconhecer os trapézios mesmo em posições e tipos diferentes, porém, confunde os conceitos de quadrado e retângulo.

c) Incorreta: A escolha pela alternativa C indica que o estudante consegue identificar o retângulo, pintado de branco na bandeira, porém apresenta dificuldade na identificação dos 3 trapézios, confundindo-os com triângulos. Talvez pela posição e tipos diferentes.

d) Correta: Quem escolher a alternativa D consegue identificar os diferentes tipos de trapézios em diferentes posições e o retângulo como complemento. Os seja, está claro a definição e propriedades dos trapézios e retângulos.

QUESTÃO 04:

a) Incorreta: Quem escolher a alternativa A, sinaliza que conheça de forma elementar os elementos de um polígono.

b) Incorreta: O estudante ao marcar a alternativa B, sugere que consegue identificar o lado, o vértice e o ângulo interno de um polígono, porém, apresenta dificuldade para classificar e identificar uma diagonal de um polígono.

c) Correta: A escolha da alternativa A, indica que o estudante consegue interpretar as figuras geométricas planas, destacando os principais elementos como, lados, vértices, diagonais e ângulos internos.

d) Incorreta: A indicação da alternativa D sugere que o estudante não domina e desconhece os elementos de um polígono.

QUESTÃO 05:

a) Incorreto: O estudante ao marcar a alternativa A, indica que não domina os conceitos sobre os quadriláteros, principalmente a relação entre paralelogramo, retângulo e quadrado.

b) Incorreto: A indicação da alternativa B, leva-nos a supor que o estudante não compreende as definições e propriedades dos quadriláteros notáveis.

c) Incorreto: Quem escolher a alternativa C sugere que compreende a relação entre retângulo, paralelogramo e losango, porém, ainda está confuso com a relação entre quadrado e retângulo. Muito provavelmente devido a não compreensão de que os 4 lados congruentes e paralelos de um quadrado também representam lados iguais dois a dois como da definição de retângulo.

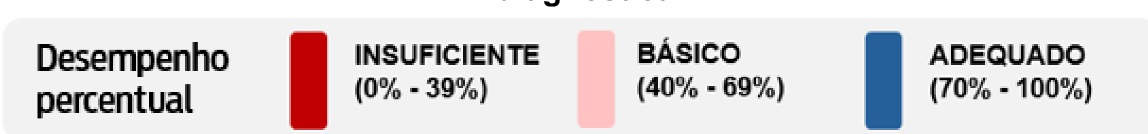
d) Correto: A escolha pela alternativa D indica que o estudante domina os conceitos dos quadriláteros notáveis e a relação entre eles.

4.1.3. Classificação das respostas da avaliação diagnóstica

Com base na correção da avaliação diagnóstica, elaboramos um guia escalonado que servirá de orientação para o professor identificar os pontos mais importantes e que mereçam destaque na introdução e no desenvolvimento da atividade com dobraduras.

A categorização criada para a avaliação diagnóstica se assemelha a classificação por níveis de proficiência do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) do Ministério da Educação (MEC). Assim, as faixas seguirão uma escala de 0% à 100% de acordo a taxa de acerto dos estudantes na avaliação diagnóstica como na Figura 35 (BRASIL, 2018).

Figura 35 – Escala de desempenho percentual dos estudantes na avaliação diagnóstica



Nas cinco questões da avaliação diagnóstica são explorados o conhecimento, a compreensão e a fundamentação dos estudantes em relação à definição do retângulo, representação de diferentes tipos de quadriláteros notáveis, percepção de figuras geométricas combinadas, identificação dos elementos de um polígono, noções sobre a linguagem matemática usadas nas figuras geométricas planas e a clareza sobre as propriedades dos quadriláteros notáveis. Desta forma, temos as seguintes recomendações para o professor.

- Rendimento insuficiente: recomendamos uma abordagem dos conceitos básicos de maneira detalhada durante a exposição do conteúdo no quadro. Além disso, sugerimos uma explicação de maneira minuciosa do que significa e o que representa geometricamente os elementos das figuras como os lados, ângulos internos, vértices e diagonais de um polígono, bem como os diferentes tipos de quadriláteros e a relação entre eles. Além de ter o cuidado com as orientações geométricas conceituais durante as dobraduras, sugerimos instigar e entusiasmar os estudantes a externarem os conhecimentos adquiridos durante cada passagem das dobraduras a fim de obter um retorno rápido de como está acontecendo a aprendizagem desses conceitos básicos que serão importantes durante toda a atividade.
- Rendimento básico: para essa faixa de rendimento, é plausível que os estudantes tenham conhecimento sobre a nomenclatura das principais figuras geométricas planas e alguns elementos. Desta forma, sugerimos ao professor iniciar a atividade fazendo um reforço de maneira mais simples destacando as definições de cada uma das figuras geométricas com a linguagem Matemática apropriada. Durante o desenvolvimento das dobraduras, é importante reforçar as relações e diferenças entre os quadriláteros notáveis, enfatizando as propriedades e os elementos de cada uma delas.
- Rendimento adequado: nesse caso, pressupomos que os estudantes tenham conhecimento satisfatório sobre as figuras geométricas planas. Visto isso, o professor pode aprofundar as explicações sobre as figuras e seus elementos durante a exposição do conteúdo no quadro usando a linguagem matemática oportuna. Além disso, durante o decorrer dos passos das dobraduras, o professor pode fazer questionamentos aos estudantes com desafios e com isso aguçar o pensamento investigativo.

É relevante mencionar que o desempenho servirá como orientação para o professor iniciar a dinâmica e desenvolver as dobraduras sem contratempos. Ou seja, cabe ao professor avaliar cuidadosamente os resultados das avaliações diagnósticas individuais dos estudantes e não somente observar o rendimento do grupo. Em outras palavras, uma vez que os rendimentos individuais dos estudantes apresentarem uma discrepância muito grande, ou haja pelo menos um estudante com o desempenho relativamente muito abaixo dos demais, propomos que seja feito uma abordagem atentiva dos elementos e das figuras geométricas básicas ao iniciar a atividade de modo a buscar uma homogeneização conceitual e com isso uma produção com mais qualidade durante o uso das técnicas de dobraduras de papéis.

4.2. Aplicação da proposta da atividade com uso de dobraduras de papel

Nesse tópico será apresentado, detalhadamente, todo o processo desde a abordagem teórica inicial, passando pelas técnicas de dobraduras com a identificação dos diversos tipos de quadriláteros notáveis e seus elementos, até a finalização e construção do modelo geométrico tridimensional pelos estudantes com auxílio do professor.

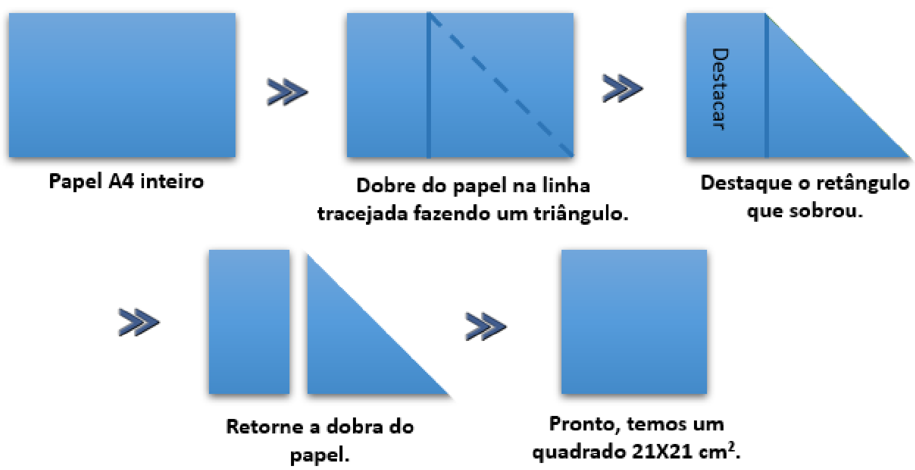
4.2.1. Preparação

Após a análise e estudo dos resultados da avaliação diagnóstica, o professor deve elaborar um plano de aula, de preferência com a participação da coordenação pedagógica da instituição, detalhando os objetivos, a metodologia utilizada, os recursos necessários e a forma de avaliação adotada para a atividade das técnicas de dobraduras no ensino dos quadriláteros notáveis e seus elementos geométricos. No APÊNDICE 1: PLANO DE AULA, temos um exemplo de plano de aula, que pode seguir como guia com as informações da atividade de dobraduras.

Figura 36 – Folhas coloridas em formato quadrado

Em posse do plano de aula, o professor deve iniciar com a aquisição e preparação das folhas de papel colorido em formato quadrado tamanho aproximado 21x21 cm². Serão 6 folhas por estudante (Figura 36) e esse é o único recurso necessário para aplicação da atividade. Como recomendação, sugerimos diversificar o colorido dos papéis, ou seja, quanto mais colorido melhor. Como material alternativo, é totalmente viável a utilização de folhas em tamanho A4 coloridas, pois através de uma única dobra e um corte, o professor consegue transformar a folha retangular em um formato quadrado (Figura 37).

Figura 37 – Transformar uma folha A4 para um formato quadrado



Após a organização dos papéis coloridos, separando-os por cores e deixando uma quantidade mínima suficiente para que cada estudante utilize pelo menos 6 folhas, o professor pode iniciar a preparação da aula.

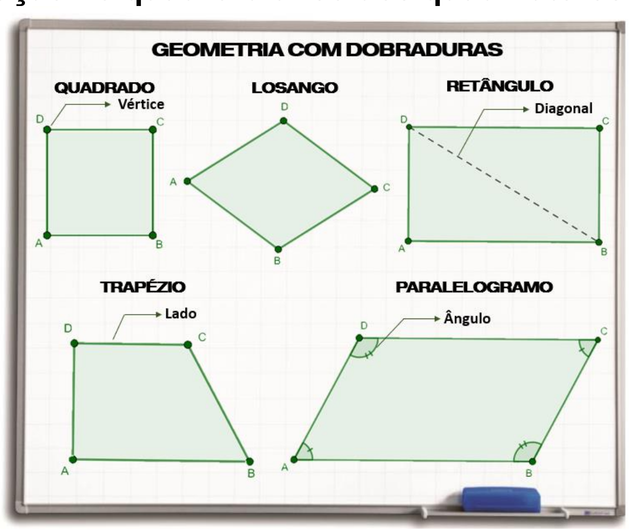
4.2.2. Organização da sala de aula e exposição das figuras geométricas no quadro branco

Por experiência, geralmente essa atividade tem duração média de 1 hora e 10 minutos considerando sua aplicação com estudantes da Educação Básica regular, seguindo o processo desde a abordagem teórica até a finalização com a construção do objeto tridimensional. À vista disso, o mais adequado e confortável para o professor pode ser a utilização de 2 aulas geminadas de 50 minutos cada, totalizando 1 hora e 40 minutos. Possivelmente, esse tempo seja suficiente para que todos os estudantes interajam com o material manipulável, compreendam as características e diferenças entre os quadriláteros notáveis, identifiquem os principais elementos dos polígonos construídos durante o processo e confeccionem individualmente um cubo, como será detalhado adiante.

Como forma de aumentar a integração entre os estudantes e para que o professor consiga orientar prontamente a todos, sugerimos que haja uma organização preliminar das carteiras, dentro da sala de aula, em formato de um "U". Desta forma, com as carteiras dos estudantes lado a lado, o professor poderá observar a todos de maneira equidistante no momento da construção das dobraduras. Isso facilitará na identificação de possíveis erros, não compreensões das dobraduras e atrasos na condução do processo.

Com a sala de aula devidamente organizada, daremos início à explanação ilustrativa das figuras geométricas e seus elementos dispostos no quadro. Na Figura 38 temos uma sugestão para exposição dos quadriláteros notáveis e seus principais elementos. Coerentemente, esse modelo ilustrado no quadro, pode ser alterado conforme resultado preliminar da avaliação diagnóstica. Porém, recomendamos fortemente que seja abordado os conceitos elementares durante a explicação, mesmo que seja de maneira breve.

Figura 38 – Ilustração no quadro branco dos quadriláteros e seus elementos



Durante essa parte expositiva, o professor pode apresentar aos estudantes todas as figuras planas previamente desenhadas no quadro branco. É o momento de reforçar o conceito de cada uma das figuras, compará-las, discutir cada uma das características e as diferenças entre as figuras planas, assinalar e localizar os principais elementos e salientar as principais propriedades dos quadriláteros notáveis. Juntamente com esse momento, é importante frisar para os estudantes que durante o processo de dobraduras, eles terão a oportunidade de identificar e observar todos as figuras ilustradas no quadro branco através do material manipulável.

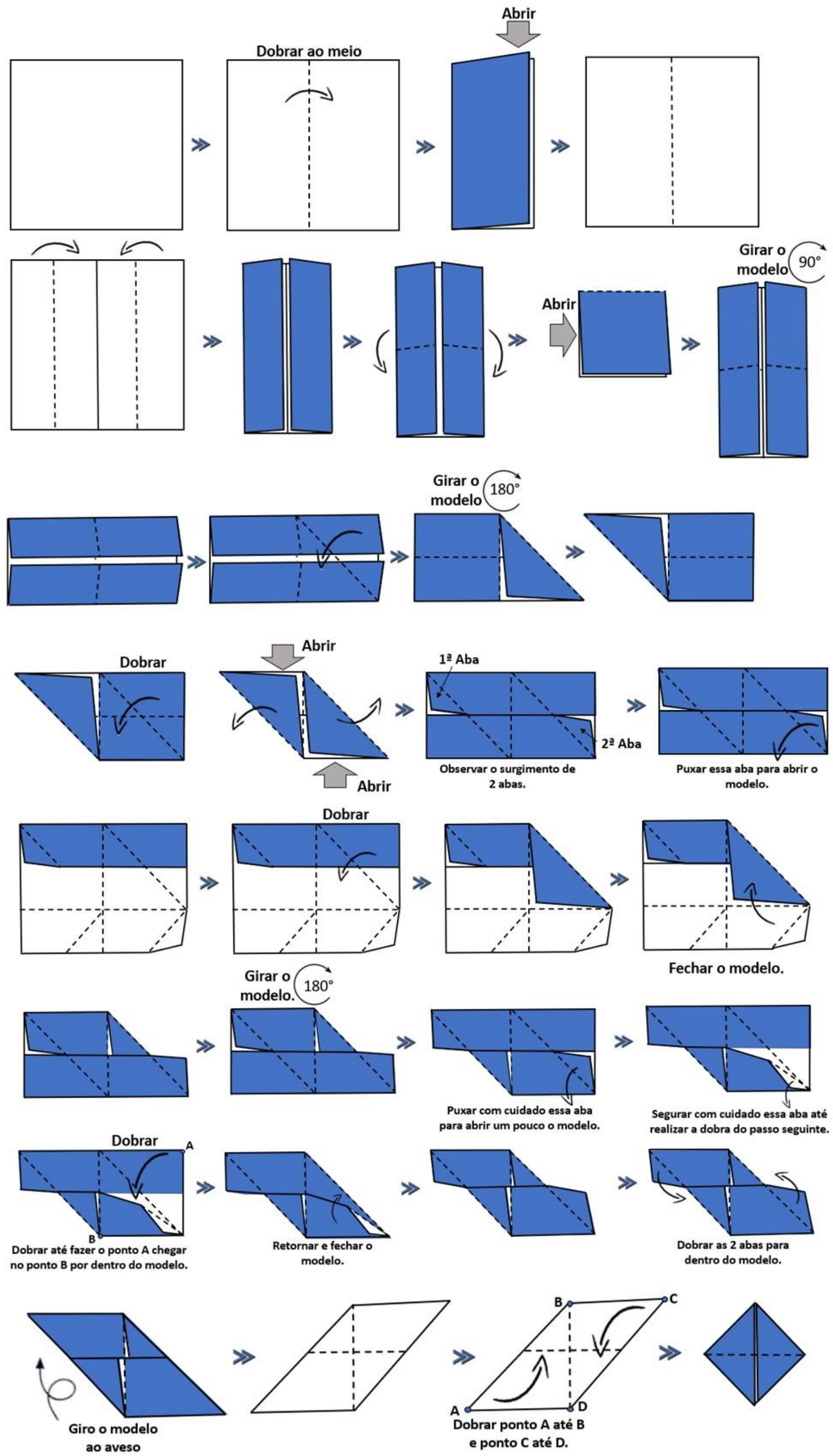
4.3. Construindo figuras geométricas e identificando os elementos através do uso de dobraduras

Inicialmente, é relevante mencionar a importância dos estudantes deixarem a mesa ou o braço da carteira totalmente livre de objetos. Tudo o que vamos precisar para executar as dobraduras são, as próprias mãos e os papéis coloridos. Sendo assim, distribuiremos 6 (seis) papéis quadrados coloridos para cada estudante, de preferência cada papel de uma cor ou o mais sortido possível.

Geralmente, uma boa parte dos estudantes nunca tiveram contato com a arte de dobrar papel, principalmente ligado a geometria. Nessa perspectiva, faz-se necessário realizar uma introdução sobre o que é essa arte, fazer um breve histórico sobre a origem e mostrar alguns outro modelos finalizados. Certamente, isso será um mecanismo a mais para estimular o grupo a participar ativamente da dinâmica.

Para iniciarmos o passo a passo (Figura 39), o professor e cada um dos estudantes devem pegar o primeiro papel colorido e seguir as orientações para a realização das dobraduras. A medida que avançamos nas dobraduras, o professor como mediador, destaca as figuras geométricas construídas, reiterando as definições de cada um dos quadriláteros notáveis, os elementos e as propriedades. Ao passo que os estudantes constroem as figuras geométricas dobrando o papel sob a orientação do professor, eles também podem ser estimulados e desafiados sobre o tema abordado. Dessa forma, podemos encorajar a participação mais ativa dos estudantes na atividade e receber um *feedback* imediato e contínuo sobre como está sendo a compreensão sobre quadriláteros notáveis.

Figura 39 – Passo a passo para construção do modelo geométrico através do uso de dobraduras



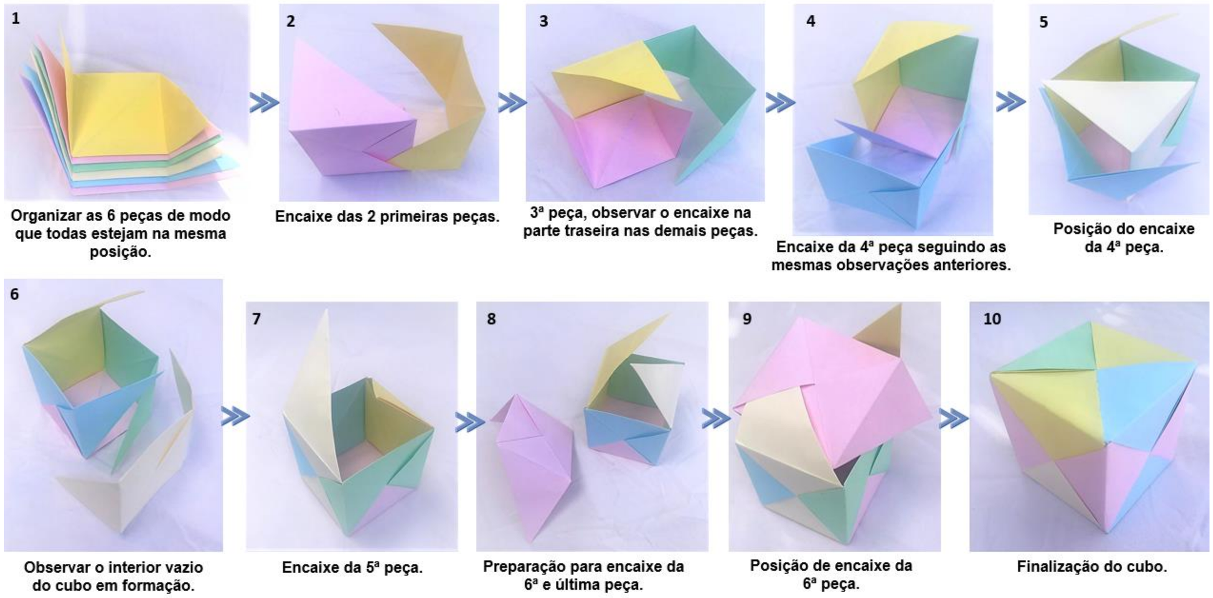
Dentre essas perguntas, podemos destacar as características que diferenciam cada um dos quadriláteros notáveis, como podemos identificar os elementos, seus nomes e as propriedades das figuras. Como recomendação, por exemplo, pode-se questionar durante a manipulação do papel o porquê de considerarmos o quadrado também como sendo um retângulo e um losango. Pressupõe-se que os estudantes, no momento da manipulação e uso das técnicas de dobraduras, consigam perceber as principais diferenças prontamente e não demonstrem dificuldades em reconhecer as figuras.

Ao finalizarmos o primeiro modelo, devemos aplicar o mesmo procedimento para os demais papéis a fim de obter 6 modelos sob as mesmas dobraduras. Ou seja, após a finalização da dobradura com o primeiro papel colorido, o estudante deve ser capaz de reproduzir o mesmo procedimento, individualmente, para os outros 5 (cinco) papéis coloridos que foram entregues a ele inicialmente. Com o favorecimento do layout da sala de aula em formato de um “U”, o professor deve manter-se atendo à continuidade das dobraduras por parte dos estudantes. Com isso, o professor pode suportar todas as dúvidas individualmente, indo até a carteira de cada um dos alunos. Nesse momento, também é interessante o professor estimular a interação entre os estudantes, incentivando aqueles com maior facilidade a interagir com quem está com dificuldade.

Ao final da produção das 6 peças com os papéis coloridos, é chegado o momento da construção do cubo (figura geométrica espacial regular com 6 faces congruentes). Para isso, seguiremos os 10 passos detalhados na Figura 40. Podemos observar que cada uma das 6 peças construídas a partir das técnicas de dobraduras de papel compõem uma face do cubo.

Com o detalhamento abaixo, conjectura-se que cada estudante consiga construir a sua figura espacial (cubo).

Figura 40 – Passo a passo para montagem do cubo



4.4. Sugestão de Avaliação de Aprendizagem

Após a conclusão de todas as etapas detalhadas dos tópicos anteriores, sugerimos que o professor realize um balanço do que foi desenvolvido, aprendido e como isso irá retroalimentar essa sequência didática, com pontos de melhorias e aprendizagem, baseado nos resultados alcançados. Desta forma, conseguiremos manter essa atividade cada vez mais atrativa, interativa e produtiva para o aprendizado dos estudantes sobre quadriláteros notáveis.

Seguindo as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais, a avaliação pode ser um instrumento para “fornecer aos estudantes informações sobre o desenvolvimento das capacidades e competências que são exigidas socialmente” (BRASIL, 1998, p. 54), e “fornecer aos professores as informações sobre como está ocorrendo a aprendizagem” (BRASIL, 1998, p. 54).

Nessa ótica, temos como primeira sugestão, uma avaliação através das respostas e argumentos oral dos estudantes durante a realização das dobraduras. O professor pode encorajar os estudantes a expressar o domínio e a compreensão do conteúdo abordado, bem como, propor questionamentos que impulsionem o uso da linguagem matemática para justificar as conclusões. Principalmente a respeito das propriedades dos quadriláteros notáveis, como o raciocínio lógico que os fundamenta. Desta forma, uma avaliação oral através da participação dos estudantes no momento da realização da atividade, contribui para que o professor compreenda como está ocorrendo a aprendizagem e se a forma como está sendo abordado está tangível para os estudantes construírem um raciocínio lógico a respeito do assunto. Entretanto, para a realização de uma avaliação qualitativa e subjetiva como essa, o professor precisa manter-se atento as reações dos estudantes, pois é comum alguns alunos não se sentirem confortáveis ou convidativos a participarem oralmente dos questionamentos do professor, principalmente caso a turma seja relativamente grande, o que pode causar constrangimento em alguns diante do grupo.

Como segunda forma de avaliação de aprendizagem sobre a atividade de dobraduras, sugerimos a aplicação das mesmas cinco questões da avaliação diagnóstica. Desta forma, podemos tentar mensurar o grau de conhecimento adquirido pelos estudantes após a aplicação das técnicas de dobraduras para o ensino dos quadriláteros notáveis. Ou seja, ao aplicarmos as quatro questões objetivas após a finalização da atividade, podemos tentar analisar comparativamente o grau de evolução e desenvolvimento dos estudantes antes e após a dinâmica, considerando os erros e acertos nas questões.

Por fim, temos como última sugestão de avaliação, a autoavaliação dos estudantes sobre a atividade de dobraduras. O objetivo dessa autoavaliação é despertar em cada estudante o autoconhecimento e a possibilidade de analisar sua postura diante de uma atividade lúdica que promove a interação no grupo. Além disso, essa autoavaliação pretende inserir o aluno como parte ativa no processo de aprendizagem. Ou seja, assim como as outras formas de avaliação mencionadas nos parágrafos anteriores, após o professor analisar e interpretar os resultados da autoavaliação dos estudantes, ele precisa refletir, redimensionar e redirecionar o que foi feito para que as próximas atividades sejam mais produtivas do ponto de vista pedagógico. Na autoavaliação, temos três questões complementares a fim de fazer uma correspondência entre o que foi planejado e executado para a sequência didática de dobraduras e o que aconteceu na prática na percepção dos estudantes. Para isso, traremos no APÊNDICE 3:

AUTOAVALIAÇÃO, uma sugestão destacando alguns tópicos como: resultados alcançados, comportamento, aprendizagem e reação à atividade.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A idealização e aplicação da sequência didática sobre dobraduras para o ensino de quadriláteros notáveis na Educação Básica sugerido nessa dissertação, apresenta-se como um instrumento pedagógico que pode contribuir com a aprendizagem de conceitos e propriedades que, por muitas vezes, são reveladas aos estudantes meramente de forma expositiva. Além disso, essa proposta favorece o desenvolvimento de habilidades e competências ligado a interações, atenção, comunicação e coordenação motora, simplesmente com uso de recurso de fácil acesso, baixo custo e grande efeito.

Ensinar Matemática baseado em um currículo 'engessado' é um desafio. Entretanto, é preciso encontrar mecanismos que auxiliem os estudantes a vencer as adversidades. Com engajamento, criatividade e empenho de todos os membros da comunidade escolar, acreditamos que seja possível a aplicação de práticas que contribuam para a aprendizagem dos estudantes. O ensino tradicional de Matemática, onde o aluno é agente passivo do saber, precisa dar espaço às aulas interativas, participativas e produtivas de modo a despertar nos estudantes a vivência e interesse pela disciplina. Desta forma, é relevante destacar a importância do trabalho do professor nesse processo de reconstrução, adotando práticas pedagógicas organizadas de modo a contribuir com a melhoria do ensino de Matemática.

Sobre o uso de materiais manipuláveis, como as dobraduras de papel, destacado nos PCNs e na nova BNCC, é indubitável o fato de que é necessário integrar essa ferramenta às práticas nas aulas de Matemática. As representações geométricas construídas de forma táteis e representadas através do papel, pelos estudantes, possibilitam uma transformação no significado das figuras planas e um desenvolvimento do pensamento dedutivo.

É igualmente significativo mencionar que não é simplesmente o fato de usarmos materiais manipuláveis, como as dobraduras, nas aulas de Matemática que será o gatilho transformador para que os estudantes consigam se desenvolver cognitivamente a respeito do assunto, mas as perguntas e provocação feitas pelo professor, a interação entre professor-aluno e aluno-aluno, a manipulação no papel, a construção das figuras geométricas, a condução da sequência didática e que, juntos com a organização e outros fatores já mencionados nessa dissertação, poderão contribuir para uma aprendizagem significativa.

Conjectura-se que com o uso das técnicas de dobraduras apresentadas, correlacionado com os conhecimentos geométricos adquiridos durante todo o processo, os estudantes consigam identificar, diferenciar e classificar naturalmente as figuras geométricas planas, bem como os conceitos e propriedades.

Em suma, essa dissertação foi desenvolvida na expectativa de contribuir com uma sequência didática com uso de dobraduras de papéis, criando uma opção criativa para que os professores de Matemática potencializem o instinto inovador e engenhoso nos estudantes.

6. REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A.; MANRIQUE, A. L. e outros, **A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos***. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. Rev. Bras. Educ. no.27 Rio de Janeiro Sept./Oct./Nov./Dec. 2004

BARBOSA, P. M. **O estudo da geometria**. Instituto Benjamin Constant. Rio de Janeiro, 2017.

BARRETO, C. A. **A geometria do origami como ferramenta para o ensino da geometria euclidiana na Educação Básica**. Dissertação de Mestrado Profissional PROFMAT. Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvao, 2013.

BASSO, R. A História do Origami. Blogspot. Disponível em: http://rodrigoborigamis.blogspot.com/. Acesso em: 21 abril 2013.

BOYER, C. **História da Matemática**. Editora Edgard Blucher LTDA. São Paulo, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. **Guia de Elaboração e Revisão de Itens**. INEP. Diretoria de Avaliação da Educação Básica. Vol.1. Brasília, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Sistema de Avaliação da Educação Básica**. INEP. Brasília, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CALDEIRA, M. **A importância dos materiais para uma aprendizagem significativa da Matemática**. Tese de Doutoramento em Ciências da Educação. Málaga: Facultad de Ciencias de la Educación - Universidade de Málaga, 2009.

COSTA, E.; ROSA, M. **Fragmentos históricos do desenho geométrico no currículo Matemático brasileiro**. Universidade Federal de Juiz de Fora, 2015.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos da Matemática elementar – Geometria plana**. Vol.9. Ed. Atual. 2001.

FONSECA FILHO, Nilmar Almeida. **Laboratório de ensino de Matemática:** algumas atividades para o ensino de geometria. Dissertação de Mestrado Profissional PROFMAT. Universidade Federal do Piauí, 2015.

GARBI, G. G.. **O romance das equações algébricas.** 3ª ed. São Paulo. Editora Livraria da Física. 2009.

GAUDIOSO, T. K.; SILVA, J. C. R.. **Aprendendo a geometria com a dobradura de papel**. Santa Catarina, Universidade Federal de Santa Catarina, 2014.

GIOVANNI, José Ruy. **A conquista da Matemática 8**. 4ª ed. São Paulo: FTD, 2019.
GLOWECKI, K. B. D. **O uso de dobraduras como recurso para o estudo de conceitos.** Dissertação de Mestrado Profissional PROFMAT. UFRPE, Recife, 2015.

IBRAIM, E.; BARRETO, M. **O uso de dobraduras e origami no ensino da geometria plana**. SBEM . 2013.

LIMA, J. L. P. **Origami modular como abordagem para aulas de polígonos no ensino fundamental**. Revista Encontros – Ano 12 – Número 23, Rio de Janeiro, 2014.

LIMA, M. B. L. **Atividades para sala de aula usando como recurso pedagógico a geometria das dobraduras: da geometria Euclidiana básica às Cônicas**. Dissertação de Mestrado. UNICAMP, Campinas, 2017.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de Matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

MARQUES, V. D., & CALDEIRA, C. R. da C. (2018). **Dificuldades e carências na aprendizagem da Matemática do Ensino Fundamental e suas implicações no conhecimento da geometria**. Revista Thema, 15(2), 403-413.

MENDEZ, D. SILVA, J. **O uso de dobraduras como recurso para o ensino da geometria plana: história, teoremas e problemas**. Universidade Federal Do Ceará. 2015.

MENEZES, A. L. **Avaliação Diagnóstica E Grupos De Estudos: Uma Das Etapas Da Aprendizagem Matemática**. In: VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática-2013. 2013.

MURARI, C. **Experienciando materiais manipulativos para o ensino e a aprendizagem da Matemática**. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Rio Claro, Brasil, 2011.

NAME, Miguel Assis. **Tempo de Matemática**. São Paulo, Editora do Brasil, 1996.

NARVAZ, M. B.; MACHADO, A. **A geometria das dobraduras: trabalhando o lúdico e ressignificando saberes**. 2005.

NASA. Space Origami: *Make Your Own Starshade*. *NASA Jet Propulsion Laboratory*. Disponível em: https://www.jpl.nasa.gov/edu/learn/project/space-origami-make-your-own-starshade/. Acesso em: 16 setembro 2019.nasa

MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. 1ª ed. Rio de Janeiro, Coleção PROFMAT - SBM, 2013.

OLIVEIRA, I.; FREITAS, T. **O GeoGebra como recurso na promoção da interdisciplinaridade na Educação Básica: a geometria das bandeiras**. Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática, 2020.

OLIVEIRA, N.; CAMARGO, J. **O mundo da geometria conhecido através das dobraduras**. 2016.

PASSARONI, L. C. S. **Construções geométricas por dobraduras (origami) – aplicações ao ensino básico**. 131f 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

PEREIRA, J. ; Oliveira, A. **Materiais manipuláveis e engajamento de estudantes nas aulas de Matemática envolvendo tópicos de geometria**. Bauru, 2016.

PIASESKI, C. M. **A geometria no ensino fundamental**. Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e Das Missões Campus de Erechim, 2010.

PILLARECK, M. E. **Uso do origami como recurso pedagógico**. Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE. Governo do estado do Paraná. Paraná, 2010.

RÊGO, R. G. ; RÊGO, R. M. ;GAUDÊNCIO, S. J. **A geometria do origami.** João Pessoa, PA: Editora Universitária/ UFPB, 2003.

RODRIGUES, F. ; GAZIRE, E. **Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de Matemática: da ação experimental à reflexão**. Revista eletrônica de Educação Matemática, 2012.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica desfazendo mitos e lendas**. Editora Zahar, Rio de Janeiro, 2012.

SALDANHA, D; ARAUJO, A. A. **PAPELMÁTICA: Geometria da dobradura**. V Seminário Nacional de Pesquisa em Educação.UNISC, Santa Cruz do Sul, 2014.

SANTOS, D.; CURY, H. **O uso de materiais manipuláveis como ferramenta na resolução de problemas trigonométricos**. 2011.

SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Claudio. **Matemática: compreensão e prática**. 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2013.

SIMSON, R. **Elementos de Euclides: da versão latina de Federico Commandino**. São Paulo, 1944.

APÊNDICE 1: PLANO DE AULA

DISCIPLINA: MATEMÁTICA

PROFESSOR:

SÉRIE: **TURNO:**

DATA:

PLANO DE AULA

CONTEÚDO:

Quadriláteros Notáveis e suas Propriedades.

OBJETIVO:

- Compreender os conceitos geométricos e suas propriedades através do uso de dobraduras como recurso didático metodológico.
- Reconhecer, distinguir e classificar os quadriláteros notáveis.
- Identificar os elementos que compoem ums figura geométrica plana.

METODOLOGIA:

- Abordagem expositiva sobre os principais elementos de um polígono e os conceitos e propriedades dos quadriláteros notáveis.
- Manipulação do papel colorido A4 (uso das dobraduras) conforme as coordenadas do professor, construindo figuras geométricas planas e identificando os elementos das figuras.
- Observações e orientação aos alunos na construção das figuras geométricas durante a manipulação do papel colorido.

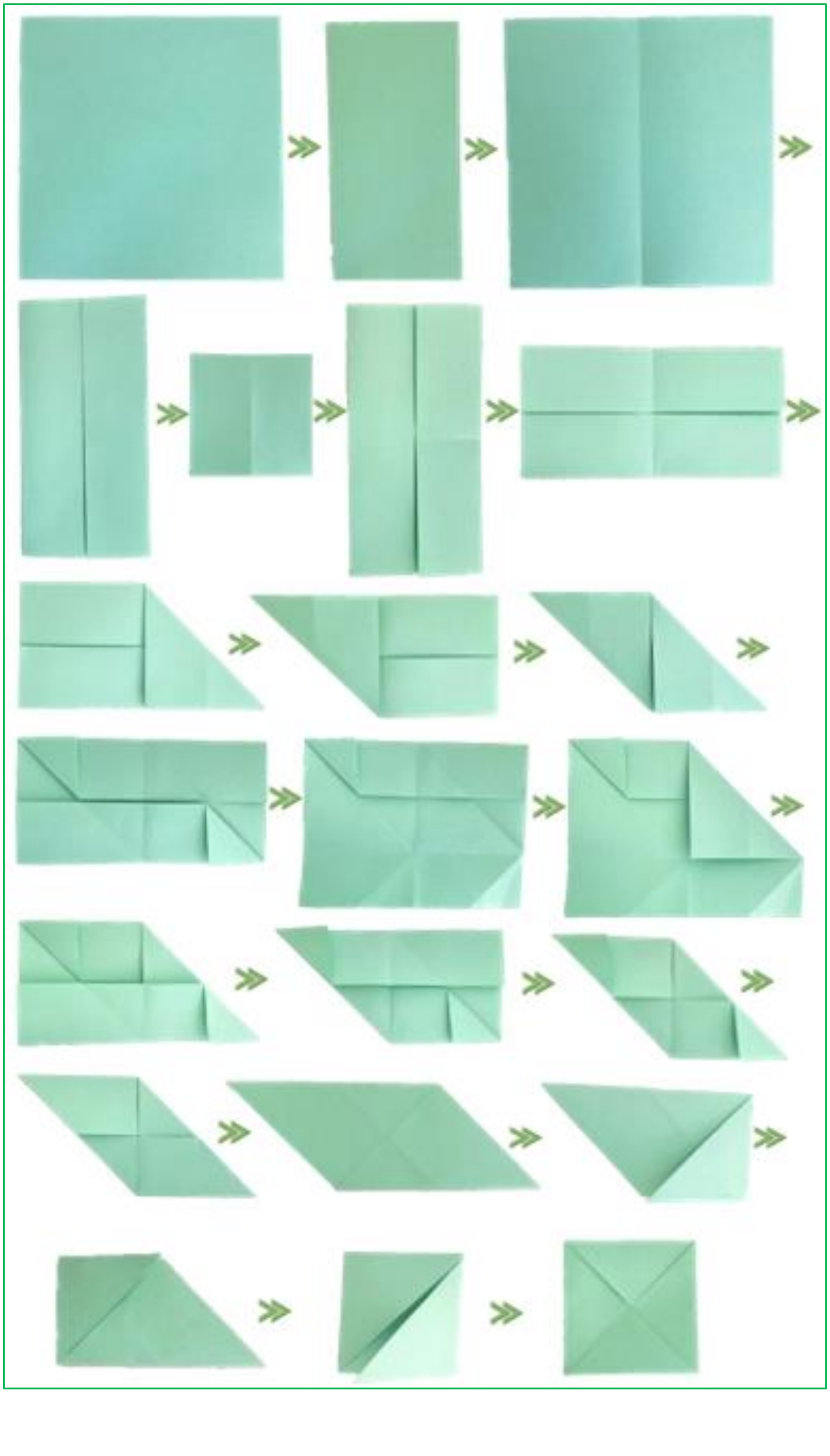
MATERIAIS:

- 6 Folhas de Papéis Coloridos.

AVALIAÇÃO:

- Interação com o material manipulável.
- Construção e montagem de um cubo através da dobradura das 6 folhas de papel colorido.
- Identificação dos quadriláteros notáveis e os principais elementos das figuras.

APÊNDICE 2: PASSO A PASSO PARA CONSTRUÇÃO DO MODELO.



APÊNDICE 3: AUTOAVALIAÇÃO

Uso das Técnicas de Dobraduras para o Ensino de Quadriláteros Notáveis
Disciplina: Matemática
Profº.:
Estudante: ______________________

AUTOAVALIAÇÃO

SOBRE A ATIVIDADE DE DOBRADURAS PARA O ENSINO DOS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS.	SIM, MUITO	ÀS VEZES	NÃO, NUNCA
1. Estive atento e concentrado à explicação do professor ?			
2. Demonstrei interesse pelo assunto ?			
3. Participei da aula de forma ativa e adequada ?			
4. Fiz perguntas e respondi ao professor durante a explicação ?			
5. Ajudei outros colegas de classe com as dobraduras ?			
6. Consegui montar o cubo após as dobraduras ?			
7. Gostei da dinâmica da aula com dobraduras de papéis ?			
8. Gostaria de mais aulas criativas de Matemática ?			
9. Senti que consegui aprender muito mais através das dobraduras ?			
10. Gostei do tema e fui além do que o professor pediu ?			
11. Me senti muito a vontade e mais disposto para aprender Matemática ?			
12. Me senti mais confortável e confiante para responder a avaliação de aprendizagem após a atividade com dobraduras ?			

O que eu aprendi sobre quadriláteros notáveis?

No geral, descreva os principais aspectos positivos e negativos da atividade com dobraduras?

Sugira ideias de melhoria para a atividade de dobraduras com papel realizada.