



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**MIGRAÇÃO REVERSA NO  
TEMPO COM FILTRO DE  
FORMA NO DOMÍNIO DA  
IMAGEM**

NEI DAVI COSTA FIGUEIREDO

SALVADOR – BAHIA







# Migração reversa no tempo com filtro de forma no domínio da imagem

por

NEI DAVI COSTA FIGUEIREDO

Geofísico (UFBA – 2009)

Orientador: Prof. Dr. Reynam da Cruz Pestana

## DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Submetida em satisfação parcial dos requisitos ao grau de

MESTRE EM CIÊNCIAS

EM

GEOFÍSICA

ao

Conselho Acadêmico de Ensino

da

Universidade Federal da Bahia



Comissão Examinadora

Dr. Reynam da Cruz Pestana

Dr. Edvaldo Suzarthe De Araújo

Dr. Michelângelo Gomes da Silva

Aprovada em 18 de agosto de 2022

A presente pesquisa foi desenvolvida no Centro de Pesquisa em Geofísica e Geologia da UFBA, com recursos próprios e da PETROBRAS.

Figueiredo, Nei Davi Costa,

Migração reversa no tempo com filtro de forma no domínio da imagem / Nei Davi Costa Figueiredo. — Salvador, 2022.

97 f.: il

Orientador: Prof. Dr. Reynam da Cruz Pestana

Dissertação (Mestrado) - de Pós-Graduação em Geofísica. Instituto de Geociências da Universidade Federal da Bahia, 2022.

1. Migração de dados sísmicos. 2. Migração reversa no tempo. 3. Migração por mínimos quadrados. 4. Imageamento. 5. Inversão. I. Pestana, Reynam. II. Título.

A Carla e Gabo, meus amores.

# Resumo

A construção de imagens sísmicas através da migração reversa no tempo (*Reverse Time Migration* - RTM), em dados pré-empilhados e no domínio do tempo, requer a correlação cruzada entre o campo de onda da propagação direta da fonte e aquele oriundo da propagação reversa dos receptores. No presente trabalho, além do que é feito convencionalmente, a migração RTM será feita mediante propagação direta do campo de onda da fonte e propagação reversa do campo nos receptores realizadas ao mesmo tempo e, a cada passo de extrapolação, sendo transformadas para o domínio da frequência. Nesse novo domínio a condição de imagem é aplicada e a imagem é construída sem a necessidade de armazenar os instantâneos de propagação direta da fonte.

Ademais, tais resultados da migração RTM são utilizados como entrada para a migração RTM por mínimos quadrados (*Least-Squares Reverse Time Migration* - LSRTM) no domínio da imagem. Diversas são as maneiras de fazer LSRTM e obter uma aproximação da inversa da matriz Hessiana para remover o seu efeito na imagem migrada final, sendo esta matriz o operador de desfocalização responsável pelo efeito “borrador” presente na imagem migrada oriunda da migração convencional. Neste trabalho, busca-se calcular filtros de focalização não-estacionários no domínio da imagem que aproximem a Hessiana para então removê-la do dado migrado, resultando numa imagem com melhor qualidade em termo de resolução e iluminação.

Assim, parte-se do resultado das migrações RTM no tempo e na frequência para avaliar o resultado da aplicação posterior do LSRTM no domínio da imagem para essas duas entradas distintas. Ademais, demonstra-se aqui ser mais adequado, numa abordagem de mínimos quadrados, estimar o filtro que aproxima a Hessiana para depois estimar a imagem final, ao invés de estimar o filtro que aproxima a inversa da Hessiana e a partir da aplicação deste obter a imagem final. Os resultados aqui obtidos foram gerados utilizando os modelos Marmousi e Pluto, demonstrando-se que a abordagem através de filtros de forma no domínio da imagem consegue produzir resultados superiores aos obtidos com RTM convencional.

# Abstract

The construction of seismic images through reverse time migration (RTM) on pre-stacked data and in the time domain requires the cross-correlation between the wavefield of the direct propagation of the source and the one coming from the reverse propagation of the receivers. In the present work, in addition to what is conventionally done, RTM will be executed by direct propagation of the source wavefield and reverse propagation of the field at the receivers performed simultaneously and at each extrapolation step, being transformed to the frequency domain. In this new domain, the imaging condition is applied, and the image is built without storing the direct propagation snapshots of the source.

Furthermore, such RTM results are input for least-squares RTM (LSRTM) in the image domain. There are several ways to do LSRTM and obtain an approximation of the inverse of the Hessian matrix to remove its effect on the final migrated image. This matrix is the defocusing operator responsible for the blurring effect in the migrated image from the conventional migration. In this paper, we seek to calculate non-stationary focusing filters on the image domain that approximate the Hessian and then remove it from the migrated image. Finally, it is shown here to be more appropriate, in the least-squares approach, to estimate the filter that approximates the Hessian and then assess the final image instead of the filter that matches the inverse of the Hessian from the application of this, obtaining the final image. The results obtained here were generated using the Marmousi and Pluto models, demonstrating that the approach of using matching filters in the image domain can produce results superior to those obtained with conventional RTM.

# Índice

Resumo . . . . .	4
Abstract . . . . .	5
Índice . . . . .	6
Índice de Figuras . . . . .	8
Introdução . . . . .	11
<b>1 Fundamentos . . . . .</b>	<b>14</b>
1.1 Migração de dados sísmicos . . . . .	14
1.2 Migração reversa no tempo de dados pré-empilhados . . . . .	20
1.2.1 Método das diferenças-finitas . . . . .	23
1.2.2 Método de expansão rápida (REM) . . . . .	29
<b>2 RTM pré-empilhamento no domínio da frequência . . . . .</b>	<b>34</b>
2.1 Teoria de espalhamento - modelagem Born e RTM . . . . .	34
2.2 Extrapolação REM no esquema “ <i>on the fly</i> ” . . . . .	39
<b>3 Migração de dados sísmicos por mínimos quadrados . . . . .</b>	<b>43</b>
3.1 O método de mínimos quadrados . . . . .	43
3.1.1 Método gradiente . . . . .	45
3.1.2 Método conjugado gradiente . . . . .	47
3.2 Migração RTM iterativa por mínimos quadrados . . . . .	49
3.3 Migração RTM mínimos quadrados no domínio da imagem utilizando filtro de forma . . . . .	54
<b>4 Metodologia . . . . .</b>	<b>58</b>
<b>5 Resultados e discussão . . . . .</b>	<b>62</b>
5.1 Modelo Marmousi . . . . .	62

---

5.2	Modelo Pluto . . . . .	76
<b>6</b>	<b>Conclusões . . . . .</b>	<b>87</b>
	<b>Agradecimentos . . . . .</b>	<b>90</b>
<b>7</b>	<b>Referências Bibliográficas . . . . .</b>	<b>92</b>

# Índice de Figuras

1.1	Geometria de aquisição para (a) fonte comum, (b) receptor comum, (c) afastamento comum e (d) ponto médio comum, onde círculos representam fontes e quadrados representam receptores. Essa representação para fontes e receptores será adotada em todo o texto. . . . .	15
1.2	(a) Registro obtido no levantamento sísmico e (b) Representação de uma seção sísmica do volume final de dados processados. . . . .	16
1.3	(a) Modelo de velocidade constante com um ponto difrator no plano $x - z$ ; (b) registro no plano $x - t_0$ das trajetórias representadas no plano $x - z$ . . .	16
1.4	(a) Modelo de velocidade constante e um refletor semi-circular no plano $x - z$ ; (b) registro no plano $x - t_0$ das trajetórias representadas no plano $x - z$ . . .	18
1.5	Em vermelho, refletor inclinado na seção de afastamento nulo com ângulo de mergulho $\theta$ ; em preto, refletor migrado com ângulo de mergulho $\theta_M > \theta$ . . .	19
1.6	Representação esquemática do algoritmo de migração reversa no tempo, adaptado de Oliveira (2014). . . . .	21
1.7	Representação esquemática do fluxograma de migração reversa no tempo. . .	22
1.8	Diagrama de dispersão para o método das diferenças-finitas de segunda ordem aplicado ao caso uni-dimensional. . . . .	29
2.1	Representação esquemática da propagação do campo de onda da fonte no modelo de fundo e do campo de onda espalhado devido ao fator de perturbação no modelo ( $\delta s$ ). . . . .	35
2.2	Representação esquemática da transformada de Fourier no esquema “ <i>on the fly</i> ” . . . . .	40
3.1	Método gradiente no qual o vetor auxiliar $\mathbf{v}_j$ é o gradiente $\mathbf{g}_j$ e, à medida que as iterações ocorrem, o resultado tende à solução mínimos quadrados ( $\tilde{\mathbf{h}}_{j+1} \rightarrow \mathbf{h}_{MQ}$ ). . . . .	46
3.2	Representação esquemática do fluxograma de migração reversa no tempo iterativa por mínimos quadrados. . . . .	53

3.3	Representação esquemática do fluxograma de migração reversa no tempo por mínimos quadrados utilizando filtro de forma. . . . .	55
4.1	Representação ilustrativa de janelamento da imagem $\mathbf{m}_1$ do modelo Marmo. . . . .	60
4.2	Representação ilustrativa de vetorização. . . . .	61
5.1	Campo de velocidades do modelo Marmousi. . . . .	63
5.2	Campo de velocidades suave do modelo Marmousi. . . . .	63
5.3	Refletvidades do modelo Marmousi. . . . .	64
5.4	Tiros no modelo Marmousi; (a) primeiro tiro, (b) tiro central e (c) último tiro. . . . .	64
5.5	Migração RTM no domínio do tempo - modelo Marmo. . . . .	65
5.6	Migração RTM no domínio do frequência - modelo Marmo. . . . .	65
5.7	Controle de qualidade da estimativa do filtro $\mathbf{F}$ para a migração no domínio do tempo - Modelo Marmousi; (a) $\mathbf{m}_1$ - RTM em tempo, (b) $\mathbf{m}_2$ e (c) $\mathbf{m}_2^{calc}$ . . . . .	69
5.8	Erro e performance - Marmousi - RTM no domínio do tempo; (a) energia do erro e (b) performance. . . . .	69
5.9	Controle de qualidade da estimativa do filtro $\mathbf{F}$ para a migração no domínio da frequência - Modelo Marmousi; (a) $\mathbf{m}_1$ - RTM na frequência, (b) $\mathbf{m}_2$ e (c) $\mathbf{m}_2^{calc}$ . . . . .	70
5.10	Erro e performance - Marmousi - RTM no domínio da frequência; (a) energia do erro e (b) performance. . . . .	70
5.11	Migração RTM no domínio do tempo com filtro de forma em dois passos - 3 iterações - Modelo Marmousi. . . . .	71
5.12	Migração RTM no domínio do tempo com filtro de forma em dois passos - 20 iterações - Modelo Marmousi. . . . .	71
5.13	Migração RTM no domínio da frequência com filtro de forma em dois passos - 3 iterações - Modelo Marmousi. . . . .	72
5.14	Migração RTM no domínio da frequência com filtro de forma em dois passos - 20 iterações - Modelo Marmousi. . . . .	72
5.15	Migração RTM no domínio do tempo com filtro de forma em dois passos - FISTA - Modelo Marmousi. . . . .	73
5.16	Migração RTM no domínio da frequência com filtro de forma em dois passos - FISTA - Modelo Marmousi. . . . .	73
5.17	Migração RTM no domínio do tempo com filtro de forma em um passo - 20 iterações - Modelo Marmousi. . . . .	74
5.18	Migração RTM no domínio da frequência com filtro de forma em um passo - 20 iterações - Modelo Marmousi. . . . .	74

5.19	Perfil comparando refletividade verdadeira com os resultados da aplicação do algoritmo em dois passos. . . . .	75
5.20	Perfil comparando refletividade verdadeira com o resultado de migração RTM na frequência e a aplicação do algoritmo em dois passos. . . . .	75
5.21	Campo de velocidades do modelo Pluto. . . . .	76
5.22	Campo de velocidades suave do modelo Pluto. . . . .	77
5.23	Refletividades do modelo Pluto. . . . .	77
5.24	Migração RTM no domínio do tempo - Modelo Pluto. . . . .	80
5.25	Migração RTM no domínio do frequência - Modelo Pluto. . . . .	80
5.26	Controle de qualidade da estimativa do filtro $\mathbf{F}$ para a migração no domínio do tempo - Modelo Pluto; (a) $\mathbf{m}_1$ - RTM em tempo, (b) $\mathbf{m}_2$ e (c) $\mathbf{m}_2^{calc}$ . . .	81
5.27	Erro e performance - Pluto - RTM no domínio do tempo; (a) energia do erro e (b) performance. . . . .	81
5.28	Controle de qualidade da estimativa do filtro $\mathbf{F}$ para a migração no domínio da frequência - Modelo Pluto; (a) $\mathbf{m}_1$ - RTM na frequência, (b) $\mathbf{m}_2$ e (c) $\mathbf{m}_2^{calc}$ . . .	82
5.29	Erro e performance - Pluto - RTM no domínio da frequência; (a) energia do erro e (b) performance. . . . .	82
5.30	Migração RTM no domínio do tempo com filtro de forma em dois passos - 3 iterações - Modelo Pluto. . . . .	83
5.31	Migração RTM no domínio do tempo com filtro de forma em dois passos - 20 iterações - Modelo Pluto. . . . .	83
5.32	Migração RTM no domínio da frequência com filtro de forma em dois passos - 3 iterações - Modelo Pluto. . . . .	84
5.33	Migração RTM no domínio da frequência com filtro de forma em dois passos - 20 iterações - Modelo Pluto. . . . .	84
5.34	Migração RTM no domínio do tempo com filtro de forma em um passo - 20 iterações - Modelo Pluto. . . . .	85
5.35	Migração RTM no domínio da frequência com filtro de forma em um passo - 20 iterações - Modelo Pluto. . . . .	85
5.36	Perfil comparando refletividade verdadeira com os resultados de migração RTM no tempo e o resultado da aplicação do algoritmo em dois passos - Modelo Pluto. . . . .	86
5.37	Perfil comparando refletividade verdadeira com os resultados de migração RTM na frequência e o resultado da aplicação do algoritmo em dois passos - modelo Pluto. . . . .	86

# Introdução

O método sísmico consiste na excitação controlada do meio físico através de fontes artificiais de energia, e na medida das amplitudes e tempos de percurso da energia sísmica e, por fim, na estimativa de informações do meio investigado. Ou seja, fontes de energia artificiais e controladas são usadas para gerar ondas sísmicas que percorrerão o meio físico e canais receptores espalhados na superfície ao longo da região a ser investigada captarão a resposta da Terra à tal excitação, sendo esse registro utilizado para investigar a subsuperfície.

Esse tipo de dado sísmico adquirido possui diversas limitações: caráter banda-limitada em termos de conteúdo de frequência, medidas de tempo e amplitude são função tanto do meio físico quanto do afastamento entre fontes e receptores, o dado é amostrado tanto no tempo quanto no espaço e há presença de ruídos associados aos instrumentos e ao ambiente no qual o mesmo foi adquirido. Assim, como o objetivo é obter informações de estruturas e interfaces geológicas, convém realizar um processamento adequado dos dados adquiridos para que representem da melhor forma possível a realidade em subsuperfície. Dentre os processos e tratamentos aos quais os dados adquiridos são submetidos, pode-se destacar a migração sísmica como sendo a etapa final de reconstrução do modelo de refletividades. Portanto, a migração de dados sísmicos tem por objetivo principal a construção de imagens fidedignas da subsuperfície, cuja focalização e posicionamento das reflexões sejam confiáveis. Desta forma, constitui-se como etapa crucial nos esforços para a diminuição do risco econômico na atividade de exploração e produção de hidrocarbonetos.

Diversos são os métodos de migração disponíveis, entre os quais pode-se destacar: os que são baseados na solução integral da equação da onda, como a migração Kirchhoff (Schneider, 1978); os que se baseiam na solução da equação da onda através de operadores de diferenças-finitas (Alford, Kelly e Boore, 1974); as implementações no domínio da transformada de Fourier, como as migrações  $f - k$  (Stolt, 1978) e *Phase-Shift* (Gazdag, 1978); e a migração a partir da solução da equação da onda (Baysal, Kosloff e Sherwood, 1983), etc.

O trabalho aqui proposto tem por objetivo implementar a migração reversa no tempo por mínimos quadrados (*Least Squares Reverse Time Migration* - LSRTM) com vistas à

obtenção de resultados que recuperem melhor o modelo de refletividades obtido com o RTM convencional, aumentando assim a qualidade e a confiabilidade do resultado final sem perder de vista questões de custo computacional envolvidos, fator crítico na formulação da migração reversa no tempo, e ainda mais utilizando o método dos mínimos quadrados. A ênfase aqui será, portanto, o estudo e desenvolvimento de algoritmos que resolvam a equação completa da onda de forma factível para a realidade da indústria levando em consideração questões como tempo de processamento, espaço de armazenamento em disco e a qualidade da imagem migrada final. Logo, entre as principais etapas aqui discutidas estão: i) o entendimento dos problemas e limitações da migração reversa no tempo convencional; ii) aplicação de algoritmo RTM no domínio da frequência; iii) desenvolvimento de metodologia para obtenção da imagem em abordagem mínimos quadrados com construção de filtros de forma no domínio da imagem.

Neste trabalho os esforços estão concentrados na tentativa de obter melhores resultados, em relação à migração RTM convencional no domínio do tempo e no domínio da frequência, sendo este último utilizando a transformada de Fourier “*on the fly*” proposto por Andrade, Pestana e Revelo (2017). Assim, a partir desses resultados de migração RTM, segue-se a construção e aplicação de filtros convolutivos não-estacionários obtidos numa abordagem mínimos quadrados. Sabe-se que a imagem migrada, mesmo aquela de melhor qualidade, não representa a refletividade verdadeira e sim sua versão distorcida por vários fatores, entre os quais destacam-se: geometria de aquisição dos dados, limitação na abertura fonte-receptor provocando problemas de iluminação, e lentes de desfocalização, como corpos de sal. Para resolver esses problemas e melhorar a qualidade da imagem migrada final, aproximando-a mais da refletividade procurada, pode-se implementar esquemas de migração por mínimos quadrados (*Least Squares Reverse Migration* - LSM), sendo essa a motivação principal deste trabalho.

No LSM clássico os dados observados são migrados e a imagem resultante é utilizada para, mediante modelagem Born, gerar o que é denominado aqui de dados calculados. Tais dados calculados são utilizados para gerar o resíduo mediante subtração com os dados observados, resíduo esse que será migrado para gerar o gradiente utilizado para calcular o comprimento do passo em busca do resíduo mínimo, o que torna possível, finalmente, atualizar a imagem migrada (Dai, Fowler e Schuster, 2012). Espera-se que, depois de uma quantidade de iterações, o resultado obtido seja mais próximo da refletividade. Os benefícios desse tipo de migração são interessantes mas com alto custo, tendo em vista que a cada iteração é feita uma demigração e uma migração. Para resolver este problema, ou ao menos diminuir o impacto em termos de custo, Dai e Schuster (2013) propuseram o LSM de ondas-planas, melhorando assim sua eficiência computacional.

Ademais, nos anos recentes, a migração RTM por mínimos quadrados (LSRTM) tem apresentado bons resultados (e.g. Wong, Ronen e Biondi, 2011; Dong et al., 2012). Trata-se de uma técnica promissora para imageamento, tendo em vista que, como citado anteriormente, entre seus benefícios principais está o aumento de resolução lateral e vertical e a compensação de iluminação devido à características de aquisição dos dados sísmicos e de *overburden*. Ou seja, como a imagem migrada convencionalmente é equivalente à refletividade “borrada” pela matriz Hessiana, deve-se aplicar a esse resultado da migração alguma estimativa adequada da inversa dessa matriz, tendo em vista que sua determinação exata é inviável computacionalmente.

A LSRTM pode ser feita no domínio do dado na sua forma iterativa, mencionada anteriormente, ou adotando abordagem “*one step*”, onde ao resultado da demigração do dado migrado convencionalmente é aplicado um operador de ajuste, ou “*matching filter*”, para aproximá-lo dos dados observados e então remigrá-lo (e.g. Khalil et al., 2016; Liu e Peter, 2018). Outra abordagem pode ser levada a cabo no domínio da imagem para calcular filtros de forma não-estacionários que aproximem a Hessiana e sua inversa para posterior atenuação dos seus efeitos sobre a imagem migrada. Ressalta-se que, no presente trabalho, são apresentados os resultados da LSRTM no domínio da imagem em dois passos, sendo o primeiro para estimativa do operador que aproxima os efeitos da Hessiana sobre a imagem migrada e o segundo para a estimativa da imagem LSRTM final (e.g. Lipari et al., 2019; Song Guo e Huazhong Wang, 2019). Além disso, também é apresentado o resultado da mesma abordagem para algoritmo em um passo, onde é estimado o operador que aproxima os efeitos da inversa da Hessiana sobre a imagem migrada para posterior aplicação ao resultado da migração convencional (e.g. Guitton, 2004, 2017). Ressalta-se que, nos dois algoritmos, um e dois passos, sempre são utilizados, como imagens iniciais, os resultados da RTM no domínio do tempo e da frequência para posterior comparação. Dessa forma, espera-se avaliar a sensibilidade do esquema de mínimos quadrados no domínio da imagem à qualidade da imagem migrada utilizada como entrada no processo.

# 1

## Fundamentos

### 1.1 Migração de dados sísmicos

Em sismica de reflexão o meio físico é excitado através de fontes artificiais de energia (dinamites nas aquisições em terra e *air-guns* nas aquisições feitas em ambiente marítimo, por exemplo) para gerar assim dados sísmicos para estudar a subsuperfície. Nos experimentos de aquisição de dados sísmicos a energia emitida pela fonte se propagava através do meio físico e, ao encontrar interfaces que separam meios com diferentes propriedades, parte dela é refletida e parte é transmitida. A fração refletida da energia é registrada em receptores que medem o tempo de percurso e a amplitude da energia propagante. Esse registro é representado por traços sísmicos que nada mais são do que séries temporais que representam a resposta do meio à excitação.

Adquirido o dado sísmico, o objetivo no processamento destes dados é, principalmente, atenuar ruídos coerentes e aleatórios (reverberações, reflexões múltiplas, *Swell Noise*, etc.) e remover distorções inerentes à sua aquisição, associadas aos efeitos de propagação da energia em subsuperfície. Para alcançar tais objetivos, os traços sísmicos podem ser processados em diversos domínios ou famílias, sendo escolhidos aqueles nos quais os processos aplicados podem ser mais eficientes e entre os quais pode-se destacar:

- Família de tiro comum (Figura 1.1a), domínio no qual a aquisição é feita e um grupo de traços é gravado por receptores para determinada detonação ou tiro. Trata-se do chamado registro de campo.
- Família de receptor comum (Figura 1.1b), grupo de traços registrados pelo mesmo

receptor, oriundos de diversos tiros.

- Família de afastamento comum (Figura 1.1c), grupo de traços registrados cuja distância entre fonte e receptor é a mesma.
- Família ponto médio comum (Figura 1.1d), em inglês *Common Mid Point - CMP*, grupo de traços registrados com coordenada de ponto médio comum entre fonte e receptor.

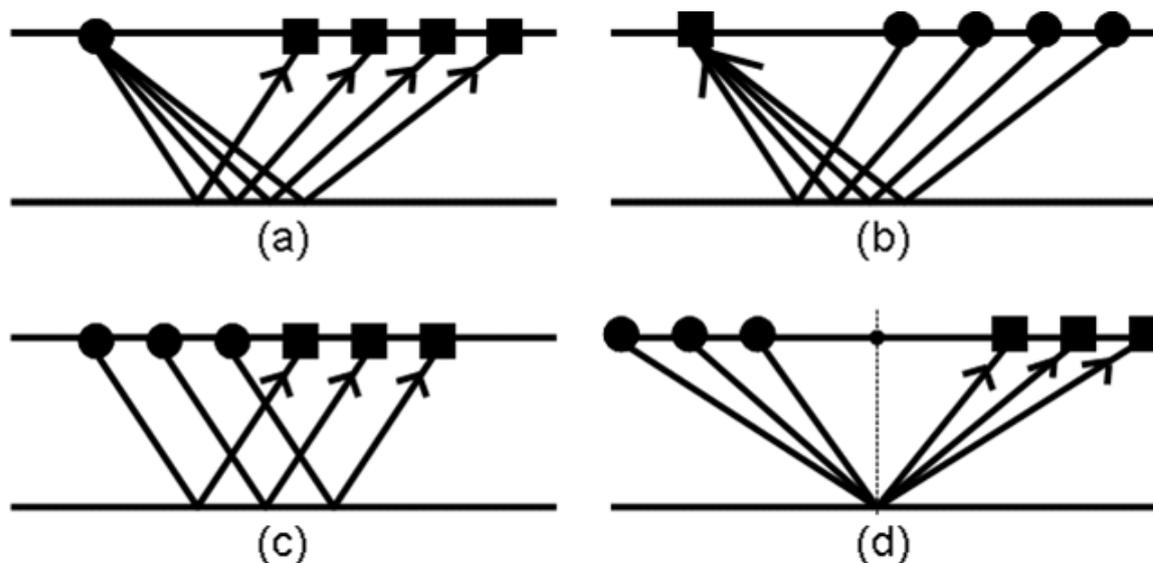


Figura 1.1: Geometria de aquisição para (a) fonte comum, (b) receptor comum, (c) afastamento comum e (d) ponto médio comum, onde círculos representam fontes e quadrados representam receptores. Essa representação para fontes e receptores será adotada em todo o texto.

Um volume de dados adquiridos em levantamento sísmico marítimo 3D, por exemplo, deve ser submetido a uma sequência de processos com vistas ao melhor entendimento dos eventos geológicos que originaram a resposta sísmica. Portanto, inicialmente, é necessário que haja precisão na informação de posicionamento de fontes e receptores utilizados no levantamento e um controle de qualidade minucioso do dado adquirido para garantir sua confiabilidade. Ademais, é requerido a submissão dos dados à diversas etapas de processamento que visam a produção de imagem tridimensional da subsuperfície com a confiabilidade devida. Assim, a partir dos dados adquiridos no campo (Figura 1.2a) nosso trabalho é obter um volume de dados que seja uma representação do modelo de refletividades em subsuperfície (Figura 1.2b). Essa etapa final de reconstrução do modelo de refletividades é chamada de migração de dados sísmicos e, neste trabalho, toda atenção estará voltada para isso especificamente.

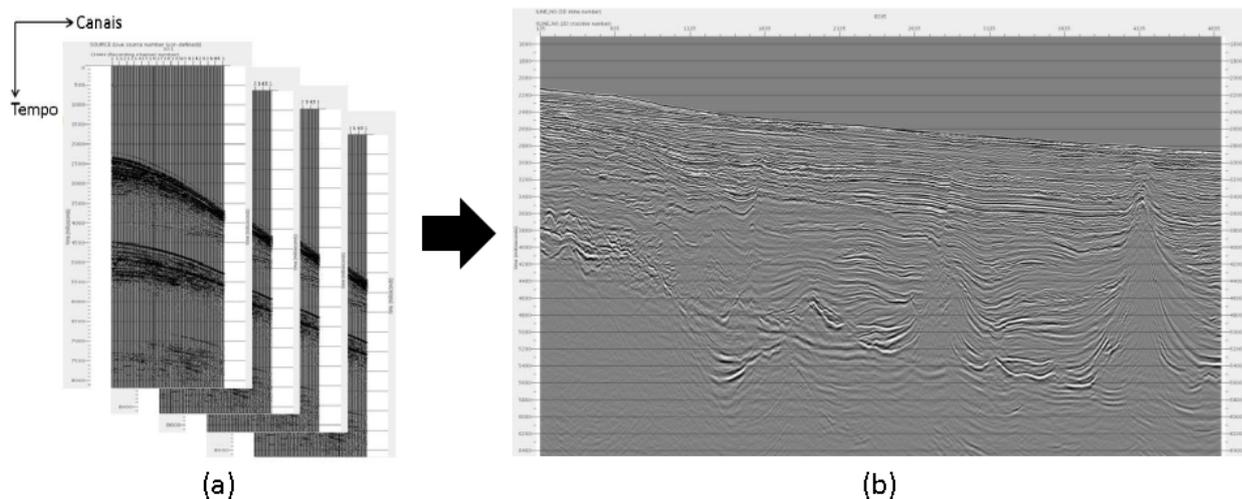


Figura 1.2: (a) Registro obtido no levantamento sísmico e (b) Representação de uma seção sísmica do volume final de dados processados.

Para que haja entendimento adequado dos objetivos da migração sísmica, é necessário compreender os tipos de distorções presentes nos dados e a maneira de removê-las. Iniciemos, portanto, considerando que o modelo de subsuperfície é constituída de pontos difratores. A partir dessa concepção, e para simplificação do entendimento, será utilizado um modelo de velocidade constante com um ponto difrator  $D$  e geometria de aquisição de afastamento nulo (Figura 1.3).

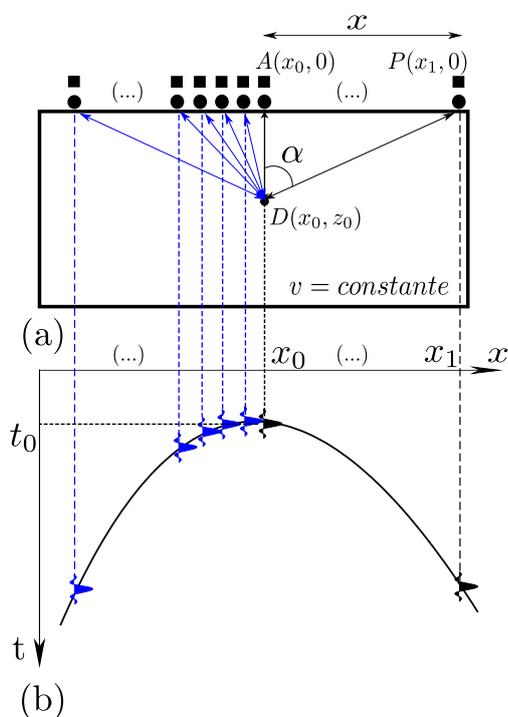


Figura 1.3: (a) Modelo de velocidade constante com um ponto difrator no plano  $x - z$ ; (b) registro no plano  $x - t_0$  das trajetórias representadas no plano  $x - z$ .

Na Figura 1.3a é representado um levantamento de afastamento nulo feito para o modelo do difrator e o registro associado é representado na Figura 1.3b. Utilizando tal representação esquemática, percebe-se que o tempo mínimo da curva de tempo de trânsito ocorre quando a coordenada horizontal do par fonte-receptor coincide com a coordenada horizontal do difrator  $D$ . Além disso, pode-se calcular todos os demais tempos de trânsito para os diversos valores de coordenada horizontal  $x$  mediante utilização das relações no triângulo  $DAP$ , retângulo em  $A$ :

$$\begin{aligned} \overline{DP}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{AP}^2 \\ \left(\frac{vt_x}{2}\right)^2 &= (Z_0)^2 + x^2 \\ t_x^2 &= \left(\frac{2Z_0}{v}\right)^2 + \frac{4x^2}{v^2} \\ t_x &= \left(t_0^2 + \frac{4x^2}{v^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{com} \quad t_0 = \frac{2Z_0}{v} \end{aligned} \quad (1.1)$$

onde  $t_0$  é o tempo duplo mínimo,  $Z_0$  é a distância vertical da superfície ao ponto difrator  $D$ ,  $v$  é a velocidade do meio,  $x$  é a distância horizontal do par fonte-receptor ao ponto difrator  $D$  e  $t_x$  é o tempo duplo de trânsito associado ao afastamento  $x$ .

A partir dessas considerações, para o caso  $2D$ , um ponto no plano  $x - z$  equivale a uma hipérbole no plano  $x - t_0$  (equação 1.1), com curvatura governada pela velocidade do meio. Ou seja, pode-se afirmar que as amplitudes associadas a reflexões em pontos difratores aparecem espalhadas ao longo de hipérbolas de difração na seção de afastamento nulo. Logo, para obter uma representação adequada do modelo em subsuperfície apresentado na Figura 1.3a, a partir da seção de afastamento nulo representada na Figura 1.3b, é necessário somar as amplitudes espalhadas ao longo da hipérbole de difração e posicioná-las no ápice da referida hipérbole, que está posicionado na coordenada horizontal correspondente àquela do ponto difrator que a originou. Ressalta-se que essa soma de amplitudes ao longo de hipérbolas de difração é denominada migração sísmica, e o colapso de difrações aqui descrito é um dos objetivos da migração de dados sísmicos.

Adicionalmente, outro objetivo da migração é o correto posicionamento dos eventos em subsuperfície. Assim, pode-se afirmar que a migração é uma transformação do plano  $x - t$  para o plano  $x - z$  ou  $x - \tau$ , onde  $\tau$  é o tempo migrado. Para ilustrar a questão do reposicionamento de eventos, será apresentada uma maneira de fazer migração que é equivalente ao somatório das amplitudes nas hipérbolas de difração: o espalhamento de amplitudes em semi-círculos, também conhecido como método das frentes de onda. Utilizando a repre-

sentação esquemática da Figura 1.4a, na qual há um meio de velocidade constante com um refletor semi-circular de raio  $R$ , percebe-se que um levantamento de afastamento nulo produzirá uma amostra no plano  $x - t$  (Figura 1.4b). A razão para isso é que a distância percorrida nas diversas trajetórias representadas é sempre o raio  $R$  do semi-círculo, o que faz com que todas as reflexões sejam registradas no mesmo tempo  $t_0$ , já que o meio possui velocidade constante. Ressalta-se que, como o levantamento utilizado é de afastamento nulo, para que haja registro com representação no plano  $x - t$  é necessário que o par fonte receptor esteja posicionado em  $A$ , caso contrário a incidência na interface refletora não será normal e as trajetórias ascendentes e descendentes não serão coincidentes (Figura 1.4a).

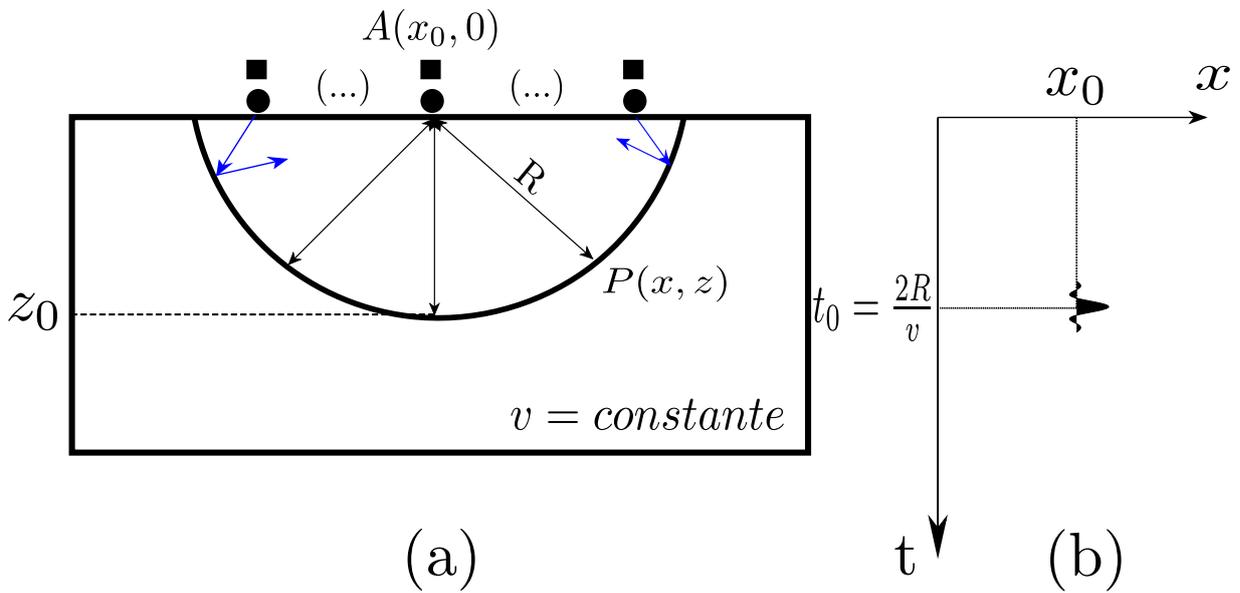


Figura 1.4: (a) Modelo de velocidade constante e um refletor semi-circular no plano  $x - z$ ; (b) registro no plano  $x - t_0$  das trajetórias representadas no plano  $x - z$ .

Assim, pode-se afirmar que a distância do ponto  $A$  à qualquer ponto do semi-círculo é  $R$  (Figura 1.4a). Portanto, um ponto no plano  $x - t$  equivale a um semi-círculo de raio  $R$  no plano  $x - z$ , para o caso  $2D$  e com velocidade constante, dado pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 z^2 + (x - x_0)^2 &= R^2 \quad \text{com} \quad R = \left(\frac{vt_0}{2}\right) \\
 z^2 &= \left(\frac{vt_0}{2}\right)^2 - (x - x_0)^2
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

ou, no plano  $x - \tau$ :

$$\tau^2 = t_0^2 - \frac{4(x - x_0)^2}{v^2} \quad \text{com} \quad \tau = \frac{2z}{v} \quad (1.3)$$

onde  $\tau$  é a pseudo-profundidade ou tempo migrado.

Segundo a equação 1.3, cada ponto na seção de afastamento nulo pode ser espalhado ao longo de semi-círculos para que, mediante o processo de interferência construtiva e destrutiva, a seção migrada seja construída. Assim, pode-se aplicar esse tipo de abordagem ao modelo de uma camada com refletor inclinado, admitindo que tal refletor é constituído por vários pontos no plano  $x - t$  (Figura 1.5).

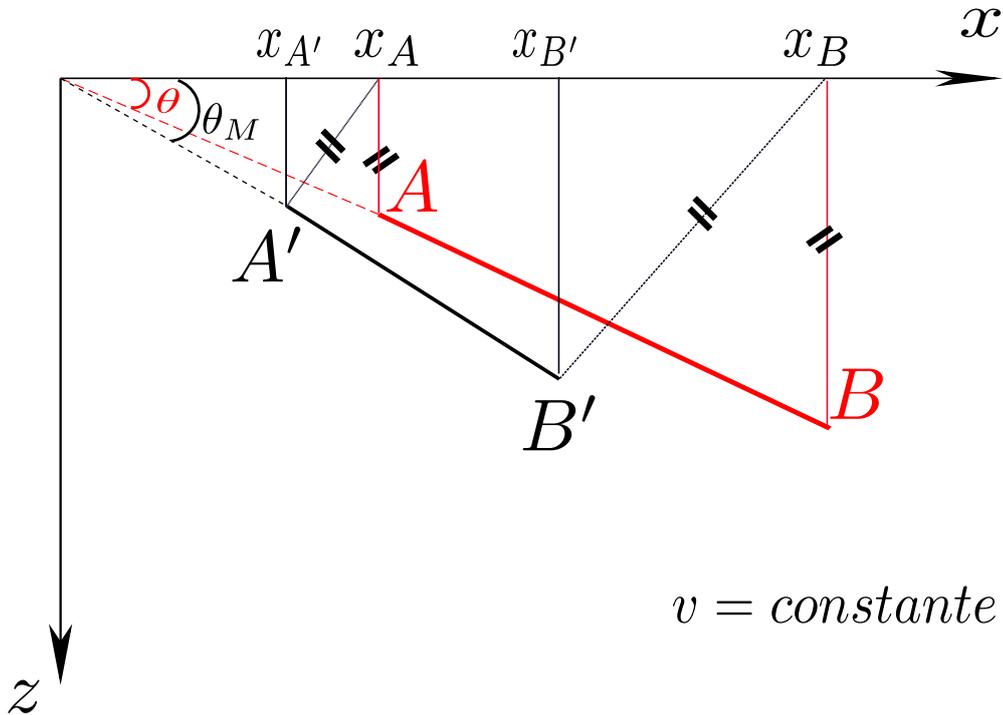


Figura 1.5: Em vermelho, refletor inclinado na seção de afastamento nulo com ângulo de mergulho  $\theta$ ; em preto, refletor migrado com ângulo de mergulho  $\theta_M > \theta$ .

A seção de afastamento nulo obtida, a partir do modelo de velocidade constante com refletor inclinado, é representada em vermelho na Figura 1.5. Ressalta-se que a velocidade do meio é constante e igual a  $2\text{km/s}$  para que os eixos  $t$  e  $z$ , da seção empilhada e migrada, respectivamente, sejam intercambiáveis. Assim, a seção de afastamento nulo, em vermelho, e o modelo em subsuperfície, em preto, podem ser representados estando sobrepostos na Figura 1.5. A partir dessa representação, percebe-se que o registro da incidência normal no ponto  $A'$  do refletor em subsuperfície aparecerá no ponto  $A$  e o registro de incidência normal no ponto  $B'$  aparecerá no ponto  $B$ . Logo, na seção de afastamento nulo a posição do refletor representado pelo segmento  $\overline{AB}$  não é equivalente à posição verdadeira do refletor representado pelo segmento  $\overline{A'B'}$  em subsuperfície, sendo essa uma das razões pela qual é

necessário migrar o refletor  $\overline{AB}$  para a posição correta do evento  $\overline{A'B'}$  que deu origem a tal reflexão.

Para que tal objetivo seja alcançado, pode-se considerar que cada amostra no refletor  $\overline{AB}$  da seção de afastamento nulo é um ponto a ser espalhado em semi-círculos, cujos raios estarão associados aos valores de  $t_0$  (equação 1.2), para cada ponto do referido refletor. O resultado de tal espalhamento é que, mediante a interferência construtiva e destrutiva das amplitudes espalhadas, o refletor  $\overline{AB}$  será migrado para a posição do refletor  $\overline{A'B'}$ . Portanto, entre os efeitos da migração, pode-se listar (Yilmaz, 1987):

1. O ângulo de mergulho do refletor no modelo é maior que o ângulo de mergulho do refletor na seção de afastamento nulo. Logo, a migração faz com que o mergulho dos refletores inclinados aumente.
2. O comprimento do refletor no modelo é menor que na seção de afastamento nulo. Logo, a migração diminui o comprimento dos refletores inclinados.
3. A migração desloca os refletores na direção mergulho acima.

Ressalta-se que, somar amplitudes ao longo de hipérbolas de difração (equação 1.1) e espalhá-las ao longo de semi-círculos (equação 1.3) são maneiras equivalentes de migrar o dado sísmico, ilustradas aqui, com vistas à facilitação do entendimento, por meio de situações associadas à aquisição hipotética de dados sísmicos com afastamento nulo entre fontes e receptores.

## 1.2 Migração reversa no tempo de dados pré-empilhados

Entre as principais técnicas de migração de dados sísmicos está a migração reversa no tempo em dados pré-empilhados (os tiros representados na Figura 1.1a, por exemplo). Esse tipo de migração constrói a imagem em subsuperfície mediante a correlação cruzada entre o campo de onda da fonte propagado diretamente e o campo de onda registrado nos canais receptores propagados em tempo reverso (Figura 1.6). Está implícito nesta afirmação que o processo de imageamento, de maneira geral, constituiu-se principalmente de duas etapas principais: extrapolação do campo de ondas e aplicação da condição de imagem (J. F. Claerbout, 1971).

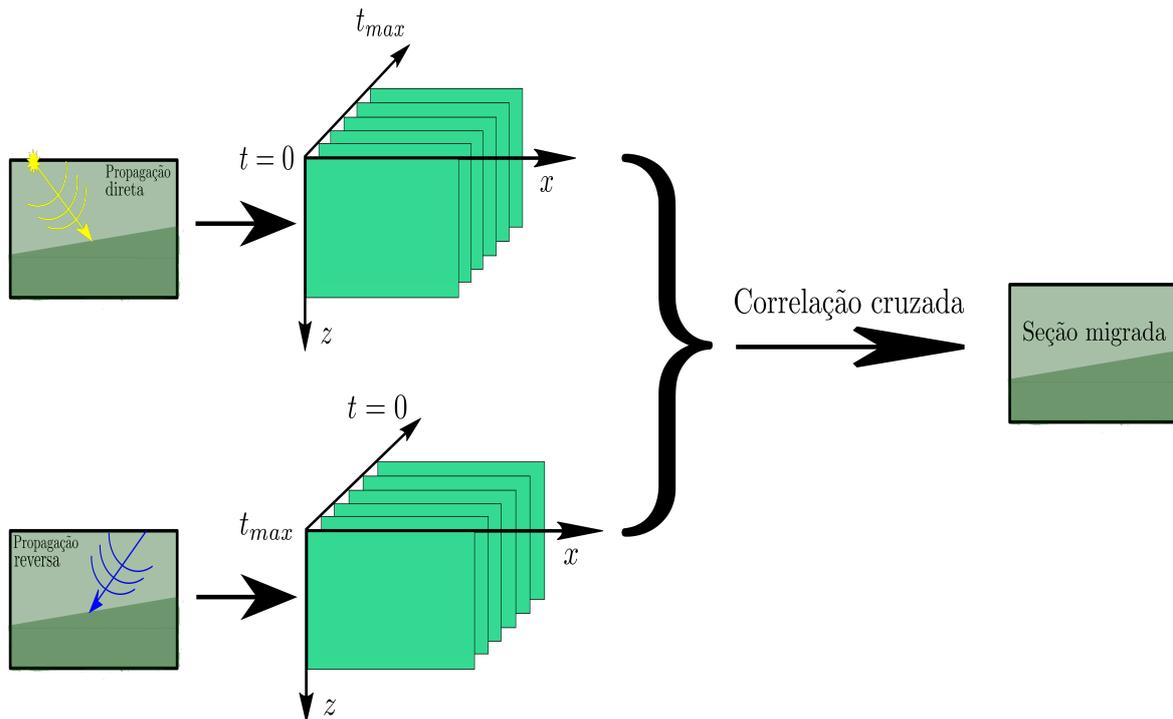


Figura 1.6: Representação esquemática do algoritmo de migração reversa no tempo, adaptado de Oliveira (2014).

A extrapolação utilizada na migração de dados sísmicos é o cálculo do campo de ondas que seria registrado em diversas profundidades e tempos. Ou seja, é possível calcular o campo de onda em qualquer posição no espaço do modelo estudado e em qualquer tempo, através da equação da onda. Ressalta-se que, no que se refere à RTM, não há qualquer restrição quanto ao campo de velocidades utilizado e à complexidade das estruturas em subsuperfície. Sendo, portanto, esta uma técnica muito eficiente em termos da qualidade do imageamento. A grande questão é o seu alto custo computacional.

Conforme ilustra a Figura 1.6, o campo da fonte deve ser propagado diretamente e, para cada posição da fonte ao longo do modelo de velocidades, devem ser armazenados todos os instantâneos. Ou seja, deve-se calcular e armazenar o campo de onda em todos os pontos do modelo para cada instante de tempo. O que requer grande quantidade de espaço em disco e/ou em memória, além de implicar em tempo de processamento por causa da conseqüente necessidade de escrita e leitura dos instantâneos. Um possível maneira de minimizar o impacto relacionado ao armazenamento de todos os instantâneos, é trabalhar com “*checkpoints*”. Nesse caso, armazena-se uma determinada quantidade de instantâneos e recupera-se os demais à medida que se dá a propagação reversa dos receptores. Assim, de forma semelhante à propagação das fontes, faz-se a propagação reversa dos receptores do tempo final até o tempo inicial, gerando assim os instantâneos oriundos da propagação reversa.

Para fazer a referida extrapolação de fontes e receptores, é utilizada a equação diferencial parcial de segunda ordem no tempo, conhecida como equação da onda acústica para meios isotrópicos e com densidade constante, dada por:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} - \nabla^2 p(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}_s, t) \quad (1.4)$$

onde  $p(\mathbf{r}, t) = p(x, z, t)$  é o campo de onda que se propaga no espaço do modelo ao longo do tempo,  $c = c(\mathbf{r})$  é o campo de velocidades,  $f(\mathbf{r}_s, t)$  é o termo fonte e  $\nabla^2$  é o operador Laplaciano que aplica derivadas parciais espaciais de segunda ordem dado por  $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

Logo, feita a extrapolação dos campo de ondas, pode-se construir a imagem, de acordo com a sequência de passos apresentada no fluxograma da Figura 1.7, utilizando a seguinte equação conhecida como condição de imagem (J. F. Claerbout, 1971):

$$m(\mathbf{r}) = \int_0^T p_S(\mathbf{r}, t) \cdot p_R(\mathbf{r}, t) dt, \quad (1.5)$$

onde  $p_S(\mathbf{r}, t) = p_S(x, z, t)$  é o campo de ondas da fonte que é propagado diretamente,  $p_R(\mathbf{r}, t) = p_R(x, z, t)$  é o campo de ondas registrado nos canais receptores e propagado reversamente e  $m(\mathbf{r})$  é a imagem migrada resultante da correlação cruzada entre estes campos de onda do tempo zero ao tempo máximo.

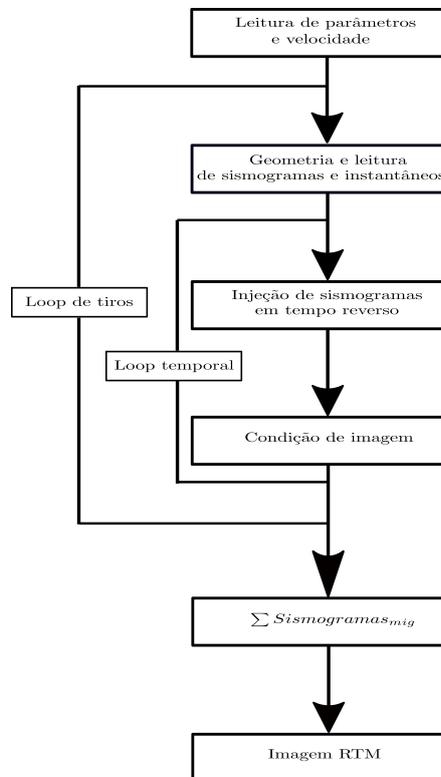


Figura 1.7: Representação esquemática do fluxograma de migração reversa no tempo.

### 1.2.1 Método das diferenças-finitas

A equação que descreve a propagação de ondas acústicas para meios com densidade constante pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\mathbf{L}^2 p(\mathbf{r}, t) \quad (1.6)$$

onde  $-\mathbf{L}^2 = c^2 \nabla^2$ .

Que possui solução do tipo:

$$p(\mathbf{r}, t) = A \cos(\mathbf{L} t) + B \sin(\mathbf{L} t), \quad (1.7)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes que podem ser calculadas à partir das seguintes condições iniciais:

$$p(\mathbf{r}, t = 0) = p_0 \quad \text{e} \quad \left[ \frac{\partial p(\mathbf{r}, t = 0)}{\partial t} \right]_{t=0} = \dot{p}_0 \quad (1.8)$$

Para  $t = 0$  e utilizando as condições expressas pela equação 1.8, pode-se, portanto, escrever:

$$p(\mathbf{r}, t) = p_0 \cos(\mathbf{L} t) + \frac{\dot{p}_0}{\mathbf{L}} \sin(\mathbf{L} t) \quad (1.9)$$

Dessa forma, pode-se escrever equações equivalentes à equação 1.9 para tempos posteriores e anteriores respectivamente:

$$p(\mathbf{r}, t + \Delta t) = p_0 \cos[\mathbf{L}(t + \Delta t)] + \frac{\dot{p}_0}{\mathbf{L}} \sin[\mathbf{L}(t + \Delta t)] \quad (1.10)$$

e

$$p(\mathbf{r}, t - \Delta t) = p_0 \cos[\mathbf{L}(t - \Delta t)] + \frac{\dot{p}_0}{\mathbf{L}} \sin[\mathbf{L}(t - \Delta t)] \quad (1.11)$$

Desenvolvendo os cossenos e senos presentes nas equações 1.10 e 1.11, e somando-as, obtém-se a solução analítica da equação da onda 1.6:

$$p(\mathbf{r}, t + \Delta t) + p(\mathbf{r}, t - \Delta t) = 2 \cos(\mathbf{L} \Delta t) p(\mathbf{r}, t) \quad (1.12)$$

Expandindo o  $\cos(\mathbf{L} \Delta t)$  presente na equação 1.12 em série de Taylor, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}\cos(\mathbf{L} \Delta t) &= 1 - \frac{(\mathbf{L} \Delta t)^2}{2} + \frac{(\mathbf{L} \Delta t)^4}{24} - \frac{(\mathbf{L} \Delta t)^6}{720} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(\mathbf{L} \Delta t)^{2k}}{2k!}\end{aligned}\quad (1.13)$$

Portanto, reescreve-se a solução analítica (equação 1.12) utilizando essa expansão, como segue:

$$p(\mathbf{r}, t + \Delta t) + p(\mathbf{r}, t - \Delta t) = 2 \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(\mathbf{L} \Delta t)^{2k}}{2k!} \right] p(\mathbf{r}, t) \quad (1.14)$$

Truncando a série apresentada na equação 1.13 no segundo termo, obtém-se:

$$\begin{aligned}p(\mathbf{r}, t + \Delta t) + p(\mathbf{r}, t - \Delta t) &= 2 \left[ 1 - \frac{(\mathbf{L} \Delta t)^2}{2} \right] p(\mathbf{r}, t) \\ &= 2p(\mathbf{r}, t) - (\mathbf{L} \Delta t)^2 p(\mathbf{r}, t)\end{aligned}\quad (1.15)$$

Tem-se, portanto, a solução por diferenças-finitas de segunda ordem no tempo:

$$p(\mathbf{r}, t + \Delta t) - 2p(\mathbf{r}, t) + p(\mathbf{r}, t - \Delta t) = -(\mathbf{L} \Delta t)^2 p(\mathbf{r}, t) \quad (1.16)$$

Assim, lembrando que  $-\mathbf{L}^2 = c^2 \nabla^2$  e a partir da equação 1.6, pode-se afirmar que:

$$\frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \approx \frac{p(\mathbf{r}, t + \Delta t) - 2p(\mathbf{r}, t) + p(\mathbf{r}, t - \Delta t)}{\Delta t^2}, \quad (1.17)$$

sendo essa a aproximação por diferenças-finitas de segunda ordem para a derivada temporal presente na equação acústica da onda.

Para obter a expansão de quarta ordem no tempo, basta incluir mais um termo na expansão do cosseno por série de Taylor (equação 1.13):

$$\begin{aligned}p(\mathbf{r}, t + \Delta t) + p(\mathbf{r}, t - \Delta t) &= 2 \left[ 1 - \frac{(\mathbf{L} \Delta t)^2}{2} + \frac{(\mathbf{L} \Delta t)^4}{24} \right] p(\mathbf{r}, t) \\ &= 2p(\mathbf{r}, t) - (\mathbf{L} \Delta t)^2 p(\mathbf{r}, t) + \frac{(\mathbf{L} \Delta t)^4}{12} p(\mathbf{r}, t)\end{aligned}\quad (1.18)$$

Portanto, a solução por diferenças-finitas de quarta ordem no tempo é dada por:

$$p(\mathbf{r}, t + \Delta t) - 2p(\mathbf{r}, t) + p(\mathbf{r}, t - \Delta t) = -(\mathbf{L} \Delta t)^2 p(\mathbf{r}, t) + \frac{(\mathbf{L} \Delta t)^4}{12} p(\mathbf{r}, t) \quad (1.19)$$

Ademais, da equação 1.6, pode-se inferir o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \right) &= -\mathbf{L}^2 \left( \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \right) \\ &= -\mathbf{L}^2 \cdot (-\mathbf{L}^2 p(\mathbf{r}, t)) \\ &= \mathbf{L}^4 p(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (1.20)$$

O que leva, para o caso da equação da onda, à seguinte inferência:

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4} \iff \mathbf{L}^4 \quad (1.21)$$

Logo, pode-se fazer o seguinte desenvolvimento para a solução por diferenças-finitas de quarta ordem no tempo apresentada na equação 1.19:

$$\frac{p(\mathbf{r}, t + \Delta t) - 2p(\mathbf{r}, t) + p(\mathbf{r}, t - \Delta t)}{\Delta t^2} = -\mathbf{L}^2 p(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{L}^4 \Delta t^2}{12} p(\mathbf{r}, t)$$

$$\frac{p(\mathbf{r}, t + \Delta t) - 2p(\mathbf{r}, t) + p(\mathbf{r}, t - \Delta t)}{\Delta t^2} - \frac{\mathbf{L}^4 \Delta t^2}{12} p(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{L}^2 p(\mathbf{r}, t)$$

$$\frac{p(\mathbf{r}, t + \Delta t) - 2p(\mathbf{r}, t) + p(\mathbf{r}, t - \Delta t)}{\Delta t^2} - \frac{1}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \right) \Delta t^2 = -\mathbf{L}^2 p(\mathbf{r}, t)$$

Vale ressaltar que pode-se aumentar a ordem do método de diferenças-finitas o quanto for conveniente. O incremento da ordem aumenta a precisão da aproximação e torna possível a definição de intervalos de amostragem cada vez maiores. No que se refere à derivada temporal presente na equação da onda acústica, contudo, será utilizada a aproximação de segunda ordem para a implementação da migração RTM no domínio do tempo. Logo, neste ponto pode-se afirmar que estão lançadas as bases para a referida implementação, através do método de diferenças-finitas, uma vez que se pode fazer a propagação direta do campo

de onda da fonte e a propagação em tempo reverso dos receptores através da equação 1.16. Os únicos requisitos para isso são a velocidade do meio e o cálculo do Laplaciano por algum método de aproximação das derivadas espaciais utilizando, por exemplo, diferenças-finitas (Alford, Kelly e Boore, 1974), similarmente ao que foi feito para o tempo, ou o método pseudo-espectral (Kosloff e Kessler, 1990).

## Estabilidade

A questão da estabilidade é de grande importância no sentido de garantir que os valores dos campos de pressão calculados ao longo da propagação não cresçam indefinidamente à medida que a propagação ocorre. Assim, é necessário estudar o intervalo de tempo  $\Delta t$  para garantir a estabilidade da propagação dos campos. Com vista à esse tipo de análise, seja a seguinte solução de onda plana equivalente a uma variação harmônica no campo de pressão:

$$p_{l,m}^n = e^{i(\omega n \Delta t - k_x l \Delta x - k_z m \Delta z)} \quad (1.22)$$

Substituindo 1.22 nas aproximações das derivadas parciais presentes na equação da onda acústica (ver equações 1.6 e 1.17) utilizando a aproximação por diferenças-finitas de 2º ordem e feita alguma manipulação algébrica, tem-se que:

$$\frac{\partial^2 p_{l,m}^n}{\partial t^2} = -\frac{4}{\Delta t^2} \cdot e^{i(\omega n \Delta t - k_x l \Delta x - k_z m \Delta z)} \cdot \sin^2 \left( \frac{\omega \Delta t}{2} \right) \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial^2 p_{l,m}^n}{\partial x^2} = -\frac{4}{\Delta x^2} \cdot e^{i(\omega n \Delta t - k_x l \Delta x - k_z m \Delta z)} \cdot \sin^2 \left( \frac{k_x \Delta x}{2} \right) \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial^2 p_{l,m}^n}{\partial z^2} = -\frac{4}{\Delta z^2} \cdot e^{i(\omega n \Delta t - k_x l \Delta x - k_z m \Delta z)} \cdot \sin^2 \left( \frac{k_z \Delta z}{2} \right) \quad (1.25)$$

Assim, considerando malha quadrada com  $\Delta x = \Delta z = h$ , pode-se escrever o Laplaciano como:

$$\nabla^2 p_{l,m}^n = -\frac{4}{h^2} \cdot e^{i(\omega n \Delta t - k_x l \Delta x - k_z m \Delta z)} \cdot \left[ \sin^2 \left( \frac{k_x \Delta x}{2} \right) + \sin^2 \left( \frac{k_z \Delta z}{2} \right) \right] \quad (1.26)$$

Substituindo as equações 1.23 e 1.26 na equação da onda 1.6, e manipulando algebricamente um pouco mais, tem-se que:

$$\sin^2 \left( \frac{\omega \Delta t}{2} \right) = \frac{c^2 \Delta t^2}{h^2} \left[ \sin^2 \left( \frac{k_x \Delta x}{2} \right) + \sin^2 \left( \frac{k_z \Delta z}{2} \right) \right] \quad (1.27)$$

Finalmente, isolando  $\omega$ , chega-se à relação de dispersão que expressa a frequência angular como função do número de onda:

$$\omega = \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1} \left\{ \frac{c \Delta t}{h} \left[ \sin^2 \left( \frac{k_x \Delta x}{2} \right) + \sin^2 \left( \frac{k_z \Delta z}{2} \right) \right]^{1/2} \right\} \quad (1.28)$$

Neste ponto concentra-se atenção no argumento do arco seno, levando em consideração que  $k_x = k_{xNyquist} = \frac{\pi}{\Delta x}$  e  $k_z = k_{zNyquist} = \frac{\pi}{\Delta z}$ :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1} \left\{ \frac{c \Delta t}{h} \left[ \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) + \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \right]^{1/2} \right\} \\ &= \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1} \left( \frac{c \Delta t}{2} \cdot \sqrt{2} \right) \end{aligned} \quad (1.29)$$

Na condição de frequência de Nyquist, não existe  $\omega$  com valor real se o argumento do arco seno for maior que 1. Logo:

$$\frac{c \Delta t}{h} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1.30)$$

Daí, a equação 1.30 pode ser utilizada para a definição de  $\Delta t$  estável para o caso da aproximação por diferenças-finitas de ordem 2 no caso bi-dimensional, sendo necessário desenvolvimento análogo para estender a análise para ordens superiores e/ou para o caso tri-dimensional.

## Dispersão Numérica

Dispersão é um fenômeno associado ao relacionamento entre velocidade de fase e velocidade de grupo (Telford et al., 1976), de forma que se a velocidade de fase e de grupo são iguais, não há dispersão física. Com a discretização, na qual o espaço físico é amostrado em intervalos definidos, surge o que é denominado dispersão numérica, fenômeno que guarda relação com o relacionamento entre velocidade de fase e a velocidade do meio físico onde a propagação ocorre.

Velocidades de fase e grupo são expressas como:

$$c_f = \frac{\omega}{k}, \quad (1.31)$$

$$c_g = \frac{d\omega}{dk}, \quad (1.32)$$

onde  $\omega$  é a frequência angular e  $k$  é o número de onda.

Voltando à equação de dispersão (1.28) e considerando o caso uni-dimensional, tem-se que:

$$\omega = \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1} \left[ \alpha \sin \left( \frac{k_x \Delta x}{2} \right) \right], \text{ com } \alpha = \frac{c \Delta t}{\Delta x}. \quad (1.33)$$

Se  $\alpha = 1$ , pode-se reescrever a equação 1.33 como:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1} \left[ \sin \left( \frac{k_x \Delta x}{2} \right) \right] \\ &= \frac{k \Delta x}{\Delta t} = k \frac{dx}{dt} \end{aligned} \quad (1.34)$$

Ou ainda:

$$\frac{\omega}{k} = c_f = \frac{dx}{dt} = c, \quad (1.35)$$

portanto não existe dispersão numérica se  $\alpha = 1$

Ademais, pode-se construir um diagrama de curvas para análise da dispersão numérica à medida que  $\alpha$  varia. Para isso, reescreve-se a equação 1.33 utilizando uma variável auxiliar  $\xi$ , como segue:

$$\xi = 2 \sin^{-1} \left[ \alpha \sin \left( \frac{k_x \Delta x}{2} \right) \right] \text{ com } \omega = \frac{\xi}{\Delta t} \quad (1.36)$$

Como  $\omega = c_f k$ , pode-se escrever:

$$c_f k = \frac{\xi}{\Delta t} \implies c_f k \Delta x = \xi \frac{\Delta x}{\Delta t} = \xi c$$

E finalmente:

$$\frac{c_f}{c} = \frac{\xi}{k \Delta x} \quad (1.37)$$

Portanto, para cada valor de  $k \Delta x$  o valor de  $\xi$  é calculado através da equação 1.36. Em seguida, segundo a equação 1.37, o valor de  $\xi$  é dividido por  $k \Delta x$ , o que corresponde à velocidade de fase normalizada  $c_f / c$ . Para valores de  $\alpha$  menores que 1, o segundo membro da equação 1.37 deve ser normalizado por  $\alpha$  e constrói-se as curvas para diversos valores de  $\alpha$  (Figura 1.8).

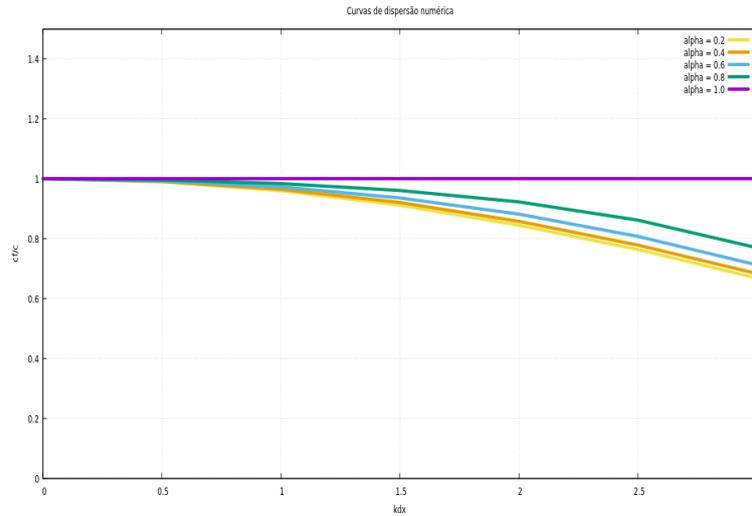


Figura 1.8: Diagrama de dispersão para o método das diferenças-finitas de segunda ordem aplicado ao caso uni-dimensional.

Da análise das curvas na Figura 1.8 percebe-se que para  $\alpha = 1$  não há dispersão numérica, tendo em vista que a velocidade de fase é igual à velocidade do meio neste caso. Todavia, para valores de  $\alpha$  menores que 1 a dispersão sempre existe, tornando-se mais proeminente nos maiores valores de  $k \Delta x$ . Ademais, nota-se que a dispersão é suficientemente pequena se  $k \Delta x < 5$ . Portanto, no limite:

$$k \Delta x = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta x = \frac{\pi}{5} \implies \Delta x = \frac{\lambda}{10},$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda. Ou seja, o comprimento de onda corresponde a 10 elementos da malha para a aproximação por diferenças-finitas de ordem 2.

## 1.2.2 Método de expansão rápida (REM)

O método de expansão rápida (“*Rapid Expansion Method*” - REM) é um método explícito aplicado à solução analítica da equação da onda acústica (ver seção 1.2.1 - equação 1.12) que

utiliza a expansão em polinômios de Chebyshev (e.g. Kosloff et al., 1989; Pestana e Stoffa, 2010). Apesar do uso comum do método das diferenças-finitas no dia a dia da indústria, ao utilizá-lo é necessário estudar o fenômeno de estabilidade apresentado anteriormente para definir o intervalo de amostragem temporal a ser utilizado na propagação dos campos de onda. Esse tipo de análise, conforme visto na seção 1.2.1 (equação 1.30), a depender do meio físico e da amostragem espacial, pode levar à escolha de intervalos de tempo cada vez menores, o que causa grande impacto no custo computacional da migração RTM. Por essa razão o REM recursivo utilizado aqui (Pestana e Stoffa, 2010) pode ser uma alternativa interessante para ser aplicada à solução analítica expressa pela equação 1.12, expandindo a função cosseno ali presente através da expansão em série de Chebyshev para a implementação da migração RTM, numericamente estável mesmo quando são utilizados valores de amostragem temporal  $\Delta t$  maiores.

Seja a expansão Jacob-Anger assim representada:

$$e^{iKR\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(KR) \cos(n\theta), \quad (1.38)$$

onde  $\epsilon_0 = 1$ ,  $\epsilon_n = 2$  para  $n \geq 1$  e  $J_n$  é a função de Bessel.

Fazendo  $z = i \cos \theta$ , pode-se escrever:

$$e^{KRz} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n J_n(KR) Q_n(z), \quad (1.39)$$

onde  $Q_n(z) = i^n \cos(n\theta)$  são os polinômios de Chebyshev modificados.

Sabendo que os polinômios de Chebyshev de primeiro tipo são dados por  $T_n(x) = \cos(n\theta)$ , com  $x = \cos \theta$  e  $-1 \leq x \leq 1$ , e para  $n \geq 2$ , pode-se escrever:

$$\cos(n\theta) = 2\cos\theta \cdot \cos[(n-1)\theta] - \cos[(n-2)\theta] \quad (1.40)$$

O que implica em:

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad (1.41)$$

Assim, pode-se escrever a seguinte relação de recorrência para os polinômios de Chebyshev:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad (1.42)$$

para  $n \geq 2$  e com  $T_0(x) = 1$  e  $T_1(x) = x$ .

A construção da relação de recorrência dos polinômios de Chebyshev modificados  $Q_n(z)$ , presente na equação 1.39, é obtida a partir da equação 1.40. Assim, pode-se escrever a seguinte relação de recorrência para os polinômios de Chebyshev modificados:

$$Q_{n+1}(z) = 2z Q_n(z) + Q_{n-1}(z), \quad (1.43)$$

para  $n \geq 2$  e com  $Q_0(z) = 1$  e  $Q_1(z) = z$ .

Desenvolvendo um pouco mais a relação de recorrência em 1.43, obtém-se:

$$z Q_{n+1}(z) = \frac{Q_{n+2}(z) - Q_n(z)}{2} \quad (1.44)$$

$$z Q_{n-1}(z) = \frac{Q_n(z) - Q_{n-2}(z)}{2} \quad (1.45)$$

Finalmente, multiplicando a equação 1.43 por  $z$  e substituindo na mesma as equações 1.44 e 1.45, obtém-se a relação de recorrência utilizada na implementação do REM utilizada aqui:

$$Q_{n+2}(z) = 2(2z^2 + 1) Q_n - Q_{n-2}(z), \quad (1.46)$$

para  $n > 2$  e com  $Q_0(z) = 1$ ,  $Q_1(z) = z$  e  $Q_2(z) = 2z^2 + 1$ .

Voltando à expansão Jacob-Anger (equação 1.39) e fazendo  $K = t$  e  $z = \frac{A}{R}$ , obtém-se:

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n J_n(tR) Q_n\left(\frac{A}{R}\right) \quad (1.47)$$

De onde pode-se escrever:

$$e^{i\mathbf{L}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n J_n(tR) Q_n\left(\frac{i\mathbf{L}}{R}\right) \quad (1.48)$$

$$e^{-i\mathbf{L}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n J_n(tR) Q_n\left(\frac{-i\mathbf{L}}{R}\right) \quad (1.49)$$

Sabendo que:

$$Q_n\left(\frac{-i\mathbf{L}}{R}\right) = \begin{cases} -Q_n\left(\frac{i\mathbf{L}}{R}\right), & \text{n ímpar} \\ Q_n\left(\frac{i\mathbf{L}}{R}\right), & \text{n par} \end{cases} \quad (1.50)$$

Pode-se agora fazer a expansão em série de Chebyshev do cosseno, como segue:

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{L}t) &= \frac{e^{i\mathbf{L}t} + e^{-i\mathbf{L}t}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n J_n(tR) Q_n\left(\frac{i\mathbf{L}}{R}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n J_n(tR) Q_n\left(\frac{-i\mathbf{L}}{R}\right) \right] \end{aligned} \quad (1.51)$$

Desenvolvendo os somatórios na equação 1.51 os termos ímpares serão cancelados e só restará a contribuição dos termos pares. Portanto, pode-se escrever:

$$\cos(\mathbf{L} \Delta t) = \sum_{n_{par}=0}^{\infty} c_{2n} J_{2n}(R \Delta t) Q_{2n}\left(\frac{i\mathbf{L}}{R}\right) \quad (1.52)$$

com  $c_0 = 1$  e  $c_n = 2$  para  $n \geq 1$ .

Conforme expresso na equação da onda 1.6, temos que  $-\mathbf{L}^2 = c^2 \nabla^2$ , que pode ser expresso em termos dos números de onda como:

$$\mathbf{L} = c \sqrt{\mathbf{k}_x^2 + \mathbf{k}_z^2} \quad (1.53)$$

Tomando os números de onda de Nyquist, tem-se:

$$\mathbf{L}_{max} = c_{max} \sqrt{\left(\frac{\pi}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{\Delta z}\right)^2}$$

Portanto,  $R$  é o máximo valor de  $\mathbf{L}$ , tendo em vista que  $\left(\frac{i\mathbf{L}}{R}\right)$  tem relação com o argumento de um cosseno, conforme expresso pela equação 1.52. O que leva à relação:

$$R = c_{max} \sqrt{\left(\frac{\pi}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{\Delta z}\right)^2}, \quad (1.54)$$

onde  $c_{max}$  é a velocidade máxima do meio e  $\Delta x$  e  $\Delta z$  são as dimensões da malha de discretização do referido meio.

Portanto, a implementação da migração RTM utilizando REM pode ser feita através da seguinte aplicação na solução analítica da equação acústica da onda:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}, t + \Delta t) + p(\mathbf{r}, t - \Delta t) &= 2 \cos(\mathbf{L} \Delta t) p(\mathbf{r}, t) \\ &= 2 \left[ \sum_{k=0}^M c_{2k} J_{2k}(R \Delta t) Q_{2k} \left( \frac{i\mathbf{L}}{R} \right) \right] p(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (1.55)$$

com somatório convergindo satisfatoriamente quando  $M \geq R \Delta t$  (Tal-Ezer, Kosloff e Koren, 1987).

# 2

## RTM pré-empilhamento no domínio da frequência

### 2.1 Teoria de espalhamento - modelagem Born e RTM

Para desenvolvimento da migração RTM no domínio da frequência, a equação 1.4, escrita no domínio do tempo, acrescida do termo fonte será transformada para o domínio da frequência. Portanto, seja a equação acústica da onda no domínio do tempo para meios isotrópicos, com densidade constante e termo fonte, expressa por:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} - \nabla^2 p(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}_s, t) \quad (2.1)$$

onde  $p(\mathbf{r}, t) = p(x, z, t)$  é o campo de onda que se propaga no espaço do modelo ao longo do tempo,  $c = c(\mathbf{r})$  é o campo de velocidades,  $\nabla^2$  é o operador Laplaciano que aplica derivadas parciais espaciais de segunda ordem dado por  $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  e  $f(\mathbf{r}_s, t) = f(x_s, z_s, t)$  é o termo fonte.

Como será feito o desenvolvimento matemático para o cálculo do operador de migração no domínio da frequência, é necessário reescrever a equação da onda no referido domínio mediante aplicação da transformada de Fourier, obter a denominada equação de Helmholtz para então resolvê-la e, por fim, aplicar a aproximação de Born. Portanto, aplicando transformada direta de Fourier no campo de pressão e no termo fonte, pode-se escrever a referida equação de Helmholtz oriunda da equação acústica da onda (equação 2.1) como segue:

$$[\omega^2 s^2(\mathbf{r}) + \nabla^2] P(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega) = -W(\omega) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) \quad (2.2)$$

onde  $\omega$  é a frequência angular,  $s(\mathbf{r}) = \frac{1}{c(\mathbf{r})}$  é a vagarosidade,  $\mathbf{r} = (x, z)$  é o vetor posição e  $\mathbf{r}_s = (x_s, z_s)$  é a posição da fonte.  $P(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega)$  é o campo de pressão, no domínio da frequência, oriundo de uma fonte na posição  $\mathbf{r}_s$  tomado na posição  $\mathbf{r}$ ,  $F(\mathbf{r}, \omega) = -W(\omega) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)$  e o termo  $W(\omega)$  é o seu espectro.

Representando o modelo de vagarosidades como sendo composto do modelo de fundo mais uma perturbação, e fazendo o análogo para campo de pressão tem-se que:

$$s(\mathbf{r}) = s_0(\mathbf{r}) + \delta s(\mathbf{r}) \quad (2.3)$$

e

$$P(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega) = P_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega) + \delta P(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega) \quad (2.4)$$

onde  $s_0(\mathbf{r})$  é o modelo de fundo e  $P_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega)$  é o campo propagado nesse modelo,  $\delta s(\mathbf{r})$  é a perturbação e  $\delta P(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega)$  é o campo de pressão espalhado.

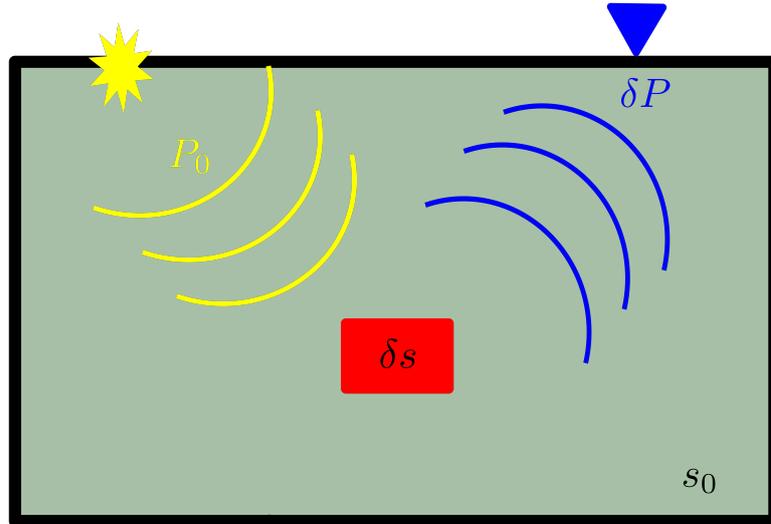


Figura 2.1: Representação esquemática da propagação do campo de onda da fonte no modelo de fundo e do campo de onda espalhado devido ao fator de perturbação no modelo ( $\delta s$ ).

O objetivo ao final do desenvolvimento aqui iniciado é obter uma expressão para  $\delta P$  que, na representação esquemática da Figura 2.1, é o campo de onda espalhado que será registrado nos canais receptores distribuídos ao longo da superfície de levantamento. Portanto, seguindo adiante, seja a fonte uma função delta no modelo de fundo e a equação de onda no domínio da frequência anteriormente apresentada (equação 2.2) pode ser escrita como segue:

$$[\omega^2 s_0^2(\mathbf{r}) + \nabla^2] G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s), \quad (2.5)$$

onde  $G_0(\mathbf{r}, \omega)$  é a função de Green para o modelo de fundo.

Para a propagação da fonte no modelo de fundo, usa-se a seguinte equação:

$$[\omega^2 s_0^2(\mathbf{r}) + \nabla^2] P_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega) = -W(\omega) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s), \quad (2.6)$$

onde  $P_0(\mathbf{r}, \omega)$  é o campo no modelo de fundo.

Observando as equações 2.5 e 2.6, obtém-se que:

$$P_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega) = W(\omega) G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega) \quad (2.7)$$

Logo, a fim de obter uma solução para a equação da onda, o campo de onda total também pode ser dado por:

$$P(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega) = W(\omega) G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega) \quad (2.8)$$

onde  $G(\mathbf{r}, \omega)$  é a função de Green que satisfaz a equação de Helmholtz:

$$[\omega^2 s^2(\mathbf{r}) + \nabla^2] G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) \quad (2.9)$$

Ademais, como a vagarosidade aparece ao quadrado na equação da onda, faz-se:

$$\begin{aligned} s^2(\mathbf{r}) &= [s_0(\mathbf{r}) + \delta s(\mathbf{r})]^2 \\ &= s_0^2(\mathbf{r}) + 2s_0(\mathbf{r}) \delta s(\mathbf{r}) + \delta s^2(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Desprezando o termo de grau 2 no quadrado da vagarosidade da equação 2.10, tendo em vista que  $\delta s^2(\mathbf{r}) \ll 1$ , substitue-se na equação da onda (2.2) as relações definidas e obtém-se:

$$[\omega^2 s_0^2(\mathbf{r}) + \nabla^2] P(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega) = F(\mathbf{r}_s, \omega) - 2\omega^2 s_0(\mathbf{r}) \delta s(\mathbf{r}) P(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega) \quad (2.11)$$

Multiplicando ambos os lados da equação 2.11 por  $G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}', \omega)$  e integrando em todo o volume contendo o índice  $\mathbf{r}'$ , obtém-se a equação de Lippmann-Schwinger:

$$\int [\omega^2 s_0^2(\mathbf{r}) + \nabla^2] P(\mathbf{r}' | \mathbf{r}_s, \omega) G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}' = \int F(\mathbf{r}') G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}' - 2\omega^2 \int s_0(\mathbf{r}') \delta s(\mathbf{r}') P(\mathbf{r}' | \mathbf{r}_s, \omega) G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}', \quad (2.12)$$

que é uma equação integral com  $P(\mathbf{r}' | \mathbf{r}_s, \omega)$  desconhecido de ambos os lados e  $m(\mathbf{r}') = 2 s_0(\mathbf{r}') \delta s(\mathbf{r}')$  representando o modelo de refletividades.

Temos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 &= \omega^2 s_0^2(\mathbf{r}) + \nabla^2 \\ \mathbf{L}_0 G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega) &= -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) \end{aligned}$$

E sendo:

$$F(\mathbf{r}, \omega) = -W(\omega) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)$$

Pode-se, portanto, reescrever a equação 2.12 como:

$$\int \mathbf{L}_0 P(\mathbf{r}' | \mathbf{r}_s, \omega) G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}' = \int F(\mathbf{r}') G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}' - \omega^2 \int m(\mathbf{r}') P(\mathbf{r}' | \mathbf{r}_s, \omega) G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}', \quad (2.13)$$

Prosseguindo:

$$\begin{aligned} \int -P(\mathbf{r}' | \mathbf{r}_s, \omega) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) d\mathbf{r}' &= \\ \int -W(\omega) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}' - \omega^2 \int m(\mathbf{r}') P(\mathbf{r}' | \mathbf{r}_s, \omega) G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}' & \quad (2.14) \end{aligned}$$

A substituição das relações  $P_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega) = W(\omega) G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega)$  e  $P(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega) = W(\omega) G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega)$  resulta em:

$$\begin{aligned} - \int P(\mathbf{r}' | \mathbf{r}_s, \omega) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) d\mathbf{r}' &= \\ - \int P_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}', \omega) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) d\mathbf{r}' - \omega^2 \int m(\mathbf{r}') W(\omega) G(\mathbf{r}' | \mathbf{r}_s, \omega) G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}' & \quad (2.15) \end{aligned}$$

Aplicando a aproximação de Born  $G(\mathbf{r}' | \mathbf{r}_s, \omega) = G_0(\mathbf{r}' | \mathbf{r}_s, \omega)$ , temos que:

$$P(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega) = P_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega) + \omega^2 \int m(\mathbf{r}') W(\omega) G_0(\mathbf{r}' | \mathbf{r}_s, \omega) G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}', \quad (2.16)$$

onde o termo integral é o componente de campo espalhado.

Logo, avaliando o campo ao longo dos receptores ( $x = x_r$ ) e sendo  $\delta P(\mathbf{r}_r | \mathbf{r}_s, \omega) = P(\mathbf{r}_r | \mathbf{r}_s, \omega) - P_0(\mathbf{r}_r | \mathbf{r}_s, \omega)$ , obtém-se:

$$\delta P(\mathbf{r}_r | \mathbf{r}_s, \omega) = \omega^2 \int m(\mathbf{r}') W(\omega) G_0(\mathbf{r}' | \mathbf{r}_s, \omega) G_0(\mathbf{r}_r | \mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}', \quad (2.17)$$

Tendo em vista que a equação 2.17 representa o problema direto, pode-se reescrevê-la em sua forma linearizada como segue:

$$\delta P(\mathbf{r}_r | \mathbf{r}_s, \omega) = L(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_r | \mathbf{r}, \omega) m(\mathbf{r}) \quad (2.18)$$

Portanto, o operador de modelagem direta é explicitamente dado por:

$$L(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_r | \mathbf{r}, \omega) = \omega^2 W(\omega) G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega) G_0(\mathbf{r}_r | \mathbf{r}, \omega), \quad (2.19)$$

onde  $G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega)$  é a função de Green, no modelo de fundo, da fonte na posição  $\mathbf{r}_s$  para a posição espalhadora  $\mathbf{r}$ ;  $G_0(\mathbf{r}_r | \mathbf{r}, \omega)$  é a função de Green, no modelo de fundo, da posição espalhadora  $\mathbf{r}$  para os receptores em  $\mathbf{r}_r$ .

É possível sumarizar a modelagem Born, portanto, da seguinte forma:

$$\begin{cases} [\omega^2 s_0^2(\mathbf{r}) + \nabla^2] P_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega) = F(\mathbf{r}_s, \omega) \\ [\omega^2 s_0^2(\mathbf{r}) + \nabla^2] \delta P(\mathbf{r}_r | \mathbf{r}_s, \omega) = \omega^2 m(\mathbf{r}) P_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega) \end{cases}$$

A partir da primeira equação obtém-se  $P_0$  utilizando o campo de fundo  $s_0(\mathbf{r})$ , e em seguida  $\delta P$  resolvendo-se a segunda equação com termo fonte dado por  $\omega^2 m(\mathbf{r}) P_0$ .

Aplicando o operador adjunto do  $L$  obtido anteriormente (equação 2.19) aos dados observados  $\delta P = \mathbf{d}^{obs}$ , e levando em consideração a relação de reciprocidade das funções de Green,  $G_0(\mathbf{r}_r | \mathbf{r}, \omega) = G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}_r, \omega)$ , temos:

$$m(\mathbf{r}) = \mathbf{L}^* \delta P(\mathbf{r}_r | \mathbf{r}_s, \omega) \quad (2.20)$$

Que pode ser reescrita como:

$$m(\mathbf{r}) = Re \left[ \sum_{\omega} \omega^2 \sum_{x_s} \sum_{x_r} \overbrace{W(\omega) G_0^*(\mathbf{r} | \mathbf{r}_s, \omega)}^{\text{Propagação direta}} \underbrace{G_0^*(\mathbf{r} | \mathbf{r}_r, \omega) \delta P(\mathbf{r}_r | \mathbf{r}_s, \omega)}_{\text{Propagação reversa}} \right] \quad (2.21)$$

onde \* representa o conjugado transposto.

Essa última equação (2.21) representa a condição de imagem para a migração na frequência. Nesse tipo de condição a imagem é construída a partir da multiplicação do campo de onda da fonte propagado diretamente com o campo de onda do receptor propagado reversamente, para a mesma frequência, e com posterior soma de todas as frequências e fontes.

## 2.2 Extrapolação REM no esquema “*on the fly*”

A extrapolação REM aqui utilizada é recursiva (Pestana e Stoffa, 2010), sendo implementada a partir da equação 1.55, cujo desenvolvimento está demonstrado na seção 1.2.2. Conforme discutido, a extrapolação no tempo utilizando REM recursivo é estável e não apresenta problemas relacionados à dispersão numérica, sendo mais atrativa, portanto, do que os conhecidos métodos diferenças-finitas e pseudo-espectral.

Como será utilizado aqui o REM para a extrapolação no tempo, a transformação do campo de onda para o domínio da frequência será feita a cada passo no tempo. Ou seja, calcula-se os campos referentes às propagações direta e reversa em determinado tempo, respectivamente relacionadas a fontes e receptores, para então levá-los para o domínio transformado. Para fazer essa mudança de domínio é utilizada aqui a transformada discreta de Fourier, como segue:

$$P(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{n=0}^{nt-1} e^{i\omega n\Delta t} p(\mathbf{r}, n\Delta t), \quad (2.22)$$

com  $\Delta t$  o intervalo de amostragem temporal e  $nt$  o número de amostras no tempo.

Diferente da migração RTM feita no domínio do tempo, na qual é requerido o armazenamento em disco de todos instantâneos referentes ao campo de onda da fonte, ou pelo menos parte deles (gravação de “*checkpoints*”), no esquema “*on the fly*” são feitas a propagação direta e reversa, em um único *loop* temporal, sem a necessidade de ter sido gravado anteriormente os instantâneos referentes às fontes. O que ocorre é que, tendo sido calculado o núcleo da transformada fora do *loop* no tempo (equação 2.22), a cada passo  $\Delta t$  os campos

das fontes e receptores são transformados para o domínio da frequência e, nesse domínio, a imagem é construída aplicando a condição de imagem (ver equação 2.24).

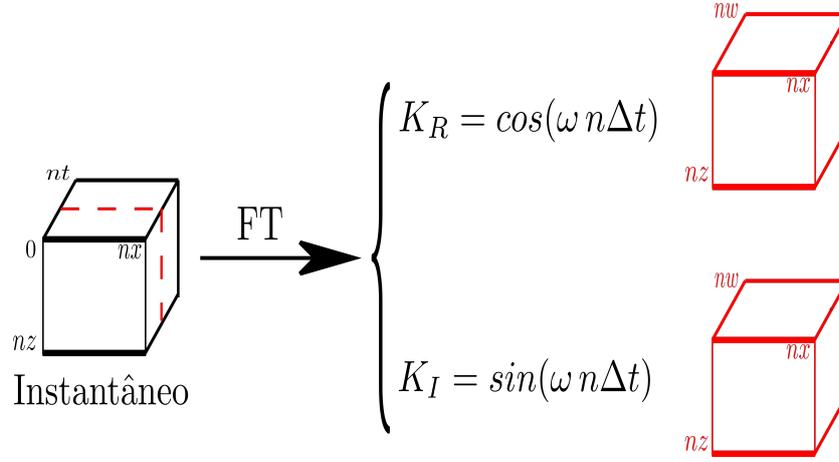


Figura 2.2: Representação esquemática da transformada de Fourier no esquema “on the fly”

Assim, conforme representação na Figura 2.2, os núcleos da transformada previamente calculados receberão painéis de instantâneos e produzirão volumes de dados no domínio transformado. Logo, calculados todos os componentes da transformada de Fourier, será feita a multiplicação dos campos no novo domínio, a cada passo no tempo, como segue:

$$\begin{aligned}
 P_s(\mathbf{r}, \omega) \cdot P_r(\mathbf{r}, \omega) &= [P_{s,real}(\mathbf{r}, \omega) + i P_{s,imag}(\mathbf{r}, \omega)] \cdot [P_{r,real}(\mathbf{r}, \omega) + i P_{r,imag}(\mathbf{r}, \omega)] \\
 &= [P_{s,real}(\mathbf{r}, \omega) \cdot P_{r,real}(\mathbf{r}, \omega) - P_{s,imag}(\mathbf{r}, \omega) \cdot P_{r,imag}(\mathbf{r}, \omega)] \\
 &\quad + i [P_{s,real}(\mathbf{r}, \omega) \cdot P_{r,imag}(\mathbf{r}, \omega) + P_{s,imag}(\mathbf{r}, \omega) \cdot P_{r,real}(\mathbf{r}, \omega)] \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

Tomando a parte real para construir a imagem, segue que, a cada passo temporal, temos que:

$$Re [P_s(\mathbf{r}, \omega) \cdot P_r(\mathbf{r}, \omega)] = P_{s,real}(\mathbf{r}, \omega) \cdot P_{r,real}(\mathbf{r}, \omega) - P_{s,imag}(\mathbf{r}, \omega) \cdot P_{r,imag}(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.24)$$

onde  $P_s(\mathbf{r}, \omega)$  é o campo da fonte,  $P_r(\mathbf{r}, \omega)$  é o campo do receptor,  $P_{s,real}(\mathbf{r}, \omega)$  é a parte real do campo de onda da fonte,  $P_{s,imag}(\mathbf{r}, \omega)$  é a parte imaginária do campo de onda da fonte,  $P_{r,real}(\mathbf{r}, \omega)$  é a parte real do campo de onda do receptor e  $P_{r,imag}(\mathbf{r}, \omega)$  é a parte imaginária do campo de onda do receptor.

Portanto, a imagem é dada por:

$$m(\mathbf{r}) = \sum_w Re (P_s \cdot P_r) \quad (2.25)$$

**Algorithm 1** Pseudo-código RTM no domínio da frequência

---

```

1: Read:  $\Delta x, \Delta z, \Delta t, nx, nz, nt, f_{peak}, f_{min}, f_{max}, v(\mathbf{r}), sismo$ 
2: Calculate:  $R, M, df, n\omega, \omega$ 
3:
4: for  $i\omega = 0, 1, \dots, (n\omega - 1)$  do
5:    $\omega(i\omega) = 2\pi \cdot (i\omega \cdot df + f_{min})$ 
6: end for
7:
8: for  $it = 0, 1, \dots, (nt - 1)$  do
9:   for  $i\omega = 0, 1, \dots, (n\omega - 1)$  do
10:     $TDF_{real}(it, i\omega) = \cos[\omega(i\omega) \cdot it \cdot dt]$ 
11:     $TDF_{imag}(it, i\omega) = \sin[\omega(i\omega) \cdot it \cdot dt]$ 
12:   end for
13: end for
14:
15: Carrega fonte
16: for  $it = 0, 1, \dots, (nt - 1)$  do
17:   Propaga:  $P_S, PP_S$ 
18:    $P_S = P_S + src(it)$ 
19:   Propaga:  $P_R, PP_R$ 
20:    $P_R = P_R + sismo(nt - it - 1)$ 
21:   for  $i\omega = 0, 1, \dots, (n\omega - 1)$  do
22:     $P_{S,real} = P_{S,real} + TDF_{real}(it, i\omega) \cdot PP_S$ 
23:     $P_{S,imag} = P_{S,imag} + TDF_{imag}(it, i\omega) \cdot PP_S$ 
24:     $P_{R,real} = P_{R,real} + TDF_{real}(it, i\omega) \cdot PP_R$ 
25:     $P_{R,imag} = P_{R,imag} + TDF_{imag}(it, i\omega) \cdot PP_R$ 
26:     $Img_f = Img_f + \omega^2 (P_{S,real} \cdot P_{R,real} - P_{S,imag} \cdot P_{R,imag})$ 
27:   end for
28:   Atualização dos campos:
29:    $AUX = PP_S; PP_S = P_S; P_S = AUX$ 
30:    $AUX = PP_R; PP_R = P_R; P_R = AUX$ 
31: end for

```

---

Então, de forma sumarizada e conforme o pseudo-código 1, pode-se descrever o algoritmo aqui apresentado (Andrade, 2017), como segue: i) leitura de parâmetros (dimensões do modelo, amostragem temporal e espacial, frequência de pico da fonte, frequência mínima e máxima para a transformada discreta de Fourier); ii) leitura das entradas requeridas (velocidade e sismograma de tiros); iii) cálculo de variáveis requeridas pelo REM ( $R$  e  $M$  - ver seção 1.2.2); iv) cálculo do intervalo entre frequências  $df$ , do número de frequências  $n\omega$  e geração do vetor de frequências  $\omega$ ; v) cálculo do núcleo da transformada discreta de Fourier  $TDF$ ; vi) carregamento da fonte  $src$ ; vii) início do *loop* temporal e, dentro do *loop*, injeção da fonte (no campo do tempo presente  $P_S$ ) e sismograma (também no campo do tempo presente  $P_R$ ) para fazer propagação direta e reversa, respectivamente, e assim obter  $PP_s$  (campo da fonte no futuro) e  $PP_r$  (campo dos receptores no passado) utilizando REM; viii) dentro do *loop* no tempo abre-se um *loop* de frequência para gerar os volumes ilustrados na Figura 2.2 e aplicar a condição de imagem expressa pela equação 2.24; ix) finalmente, atualiza-se os campos para dar prosseguimento à propagação.

# 3

## Migração de dados sísmicos por mínimos quadrados

### 3.1 O método de mínimos quadrados

A maioria dos problemas geofísicos podem ser transformados ou aproximados para versões lineares (Menke, 2018), que podem ser descritas pela seguinte relação:

$$\mathbf{X} \mathbf{h} = \mathbf{y}, \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{y}$  é o vetor de dados observados,  $\mathbf{h}$  é o vetor de parâmetros do modelo desconhecido e  $\mathbf{X}$  é a matriz que relaciona o espaço dos dados com o espaço do modelo.

Definida a relação matemática para construção da matriz  $\mathbf{X}$ , ou seja, definida a geometria do experimento, pode-se obter um vetor de dados calculados  $\tilde{\mathbf{y}}$  e, conseqüentemente, o vetor erro  $\mathbf{e}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}} \\ &= \mathbf{y} - \mathbf{X} \tilde{\mathbf{h}}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde  $\mathbf{e}$  é o erro que contém o desvio entre os valores observados e calculados e  $\tilde{\mathbf{h}}$  é o vetor parâmetros estimados do modelo, não necessariamente corretos, mas próximos disso.

O método dos mínimos quadrados se propõe a calcular o vetor parâmetros do modelo  $\tilde{\mathbf{h}}$  para o qual o somatório dos elementos do vetor erro  $\mathbf{e}$ , elevados ao quadrado, é mínimo.

Para expressar essa sentença matematicamente, o erro será escrito em forma matricial, como segue:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\tilde{\mathbf{h}} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Pode-se introduzir, portanto, a denominada forma quadrática  $\mathbf{Q}$  como função dos parâmetros do modelo:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{h}}) &= \mathbf{e}^T \mathbf{e} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -\tilde{\mathbf{h}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}^T \\ \mathbf{X}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\tilde{\mathbf{h}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -\tilde{\mathbf{h}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}^T \mathbf{y} & \mathbf{y}^T \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^T \mathbf{y} & \mathbf{X}^T \mathbf{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\tilde{\mathbf{h}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Como espera-se calcular  $\tilde{\mathbf{h}}$  para o qual  $\mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{h}})$  é mínimo, pode-se obter as chamadas equações normais fazendo a seguinte minimização:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \tilde{\mathbf{h}}^T} = \nabla \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

O que leva a uma expressão matricial para o gradiente:

$$\nabla \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^T \mathbf{y} & \mathbf{X}^T \mathbf{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\tilde{\mathbf{h}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{b} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{\mathbf{h}} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (3.6)$$

com  $\mathbf{b} = \mathbf{X}^T \mathbf{y}$  e  $\mathbf{A} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$

De onde obtém-se:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (3.7)$$

E, finalmente, a solução mínimos quadrados (Menke, 2018):

$$\tilde{\mathbf{h}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (3.8)$$

### 3.1.1 Método gradiente

Variadas são as maneiras de resolver as equações normais expressas pela equação 3.7. Uma delas é o método gradiente, e para entendê-lo faça-se  $\mathbf{X} \tilde{\mathbf{h}} = \tilde{\mathbf{y}}$  sobre-determinado (Menke, 2018). Assim, tomando as equações normais, pode-se escrever:

$$\mathbf{A} \tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{b} \quad (3.9)$$

Logo, a forma quadrática fica (Claerbout e Fomel, 2012):

$$\mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{h}}) = \begin{bmatrix} 1 & \tilde{\mathbf{h}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}^T \mathbf{y} & -\mathbf{b}^T \\ -\mathbf{b} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{\mathbf{h}} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Fazendo, portanto, os produtos matriciais na forma quadrática e lembrando que  $\mathbf{b}^T \tilde{\mathbf{h}} = (\mathbf{b}^T \tilde{\mathbf{h}})^T = \tilde{\mathbf{h}}^T \mathbf{b}$ , obtém-se:

$$\mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{h}}) = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - 2 \tilde{\mathbf{h}}^T \mathbf{b} + \tilde{\mathbf{h}}^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{h}}, \quad (3.11)$$

que nada mais é que a equação de um parabolóide.

Para reduzir a forma quadrática 3.11 à equação de uma parábola, utiliza-se o seguinte relacionamento iterativo:

$$\tilde{\mathbf{h}}_{j+1} = \tilde{\mathbf{h}}_j + \alpha \mathbf{v}_j, \quad (3.12)$$

que expressa o fato de que o vetor parâmetros do modelo na etapa posterior é igual ao vetor parâmetros do modelo na etapa anterior acrescido de um passo  $\alpha$  na direção do vetor auxiliar  $\mathbf{v}_j$ .

Portanto, pode-se escrever o  $\tilde{\mathbf{h}}$  iterativo na forma matricial como segue:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{\mathbf{h}}_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{\mathbf{h}}_j & \mathbf{v}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Substituindo a equação matricial 3.13 na forma quadrática da equação 3.10, obtém-se:

$$\mathbf{Q}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \tilde{\mathbf{h}}_j \\ 0 & \mathbf{v}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}^T \mathbf{y} & -\mathbf{b}^T \\ -\mathbf{b} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{\mathbf{h}}_j & \mathbf{v}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Assim, desenvolvendo os produtos matriciais na equação 3.14, pode-se escrever a equação parabólica em  $\alpha$  como segue:

$$\mathbf{Q}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{h}}_j) & \mathbf{g}_j^T \mathbf{v}_j \\ \mathbf{v}_j^T \mathbf{g}_j & \mathbf{v}_j^T \mathbf{A} \mathbf{v}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

com  $\mathbf{g}_j = -\mathbf{b} + \mathbf{A} \mathbf{h}_j$ .

Desenvolvendo os produtos matriciais da equação 3.15 e calculando o gradiente com relação a  $\alpha$ , tem-se:

$$\frac{d\mathbf{Q}(\alpha)}{d\alpha} = \nabla \mathbf{Q}(\alpha) = 2 \begin{bmatrix} \mathbf{v}_j^T \mathbf{g}_j & \mathbf{v}_j^T \mathbf{A} \mathbf{v}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Finalmente, minimizando, o mínimo da parábola  $\mathbf{Q}(\alpha)$  contida no parabolóide  $\mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{h}})$  no passo  $\alpha$  (ver Figura 3.1) é dado por:

$$\text{Min}\{\mathbf{Q}(\alpha)\} = \mathbf{Q}(\alpha^*) \quad \text{com } \alpha^* = -\frac{\mathbf{v}_j^T \mathbf{g}_j}{\mathbf{v}_j^T \mathbf{A} \mathbf{v}_j} \quad (3.17)$$

Logo, pode-se recorrer à relação linear iterativa (equação 3.12) para atualizar o modelo para o qual a forma quadrática é mínima (ver pseudo-código 2):

$$\tilde{\mathbf{h}}_{j+1} = \tilde{\mathbf{h}}_j - \frac{\mathbf{v}_j^T \mathbf{g}_j}{\mathbf{v}_j^T \mathbf{A} \mathbf{v}_j} \mathbf{v}_j \quad (3.18)$$

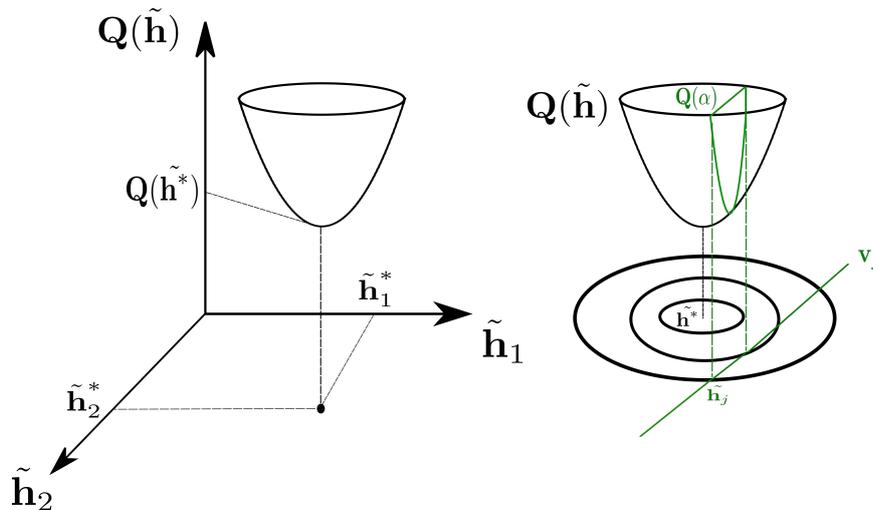


Figura 3.1: Método gradiente no qual o vetor auxiliar  $\mathbf{v}_j$  é o gradiente  $\mathbf{g}_j$  e, à medida que as iterações ocorrem, o resultado tende à solução mínimos quadrados ( $\tilde{\mathbf{h}}_{j+1} \rightarrow \mathbf{h}_{MQ}$ ).

**Algorithm 2** Pseudo-código do método gradiente

---

```

1:  $\mathbf{h}_0$  inicial arbitrário
2:  $\mathbf{g}_0 = -\mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{h}_0$ 
3:  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{g}_0$  ▷ vetor auxiliar igual ao vetor gradiente
4: while  $j < niter$  do
5:    $\alpha^* = -\frac{\mathbf{v}_j^T \mathbf{g}_j}{\mathbf{v}_j^T \mathbf{A} \mathbf{v}_j}$ 
6:    $\tilde{\mathbf{h}}_{j+1} = \mathbf{h}_j + \alpha \mathbf{v}_j$ 
7:    $\tilde{\mathbf{g}}_{j+1} = -\mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{h}_{j+1}$ 
8:    $\mathbf{v}_{j+1} = \tilde{\mathbf{g}}_{j+1}$ 
9: end while

```

---

**3.1.2 Método conjugado gradiente**

O método conjugado gradiente, originalmente proposto por Hestenes e Stiefel (1952), pode ser desenvolvido a partir da equação parabólica em  $\alpha$  (equação 3.15) e sua minimização (equação 3.16), ambas apresentadas anteriormente. Logo, pode-se escrever:

$$\text{Min}\{\mathbf{Q}(\alpha)\} = \mathbf{Q}(\alpha_{MQ}) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{h}}_j) & \mathbf{g}_j^T \mathbf{v}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_{MQ} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Assim, tem-se a seguinte forma compacta:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{h}}_j) & \mathbf{g}_j^T \mathbf{v}_j \\ \mathbf{v}_j^T \mathbf{g}_j & \mathbf{v}_j^T \mathbf{A} \mathbf{v}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_{MQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Min}\{\mathbf{Q}(\alpha)\} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{h}}_{j+1}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Da forma compacta pode-se fazer o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{h}}_{j+1}) &= \mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{h}}_j) + \alpha \mathbf{g}_j^T \mathbf{v}_j \\ &= \mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{h}}_j) - \frac{(\mathbf{g}_j^T \mathbf{v}_j)^2}{\mathbf{v}_j^T \mathbf{A} \mathbf{v}_j} \end{aligned} \quad (3.21)$$

O que implica em:

$$\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{h}}_j) - \mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{h}}_{j+1}) = \frac{(\mathbf{g}_j^T \mathbf{v}_j)^2}{\mathbf{v}_j^T \mathbf{A} \mathbf{v}_j} \quad (3.22)$$

A partir da equação 3.22, a idéia é maximizar  $\Delta \mathbf{Q}$ . Ou seja, diminuir o erro quadrático no passo posterior a um valor mínimo. Para isso, pode-se simplesmente minimizar o denominador no lado direito da equação 3.22. Assim, neste ponto, tendo disponíveis  $\mathbf{g}_{j+1}$  e  $\mathbf{v}_j$ , utiliza-se na forma quadrática  $\mathbf{Q}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v}$  o seguinte relacionamento linear:

$$\mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{g}_{j+1} + \beta \mathbf{v}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{j+1} & \mathbf{v}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Substituindo o relacionamento linear da equação 3.23 na referida forma quadrática, segue que:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\beta) &= \begin{bmatrix} 1 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{j+1}^T \\ \mathbf{v}_j^T \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{j+1} & \mathbf{v}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{j+1}^T \mathbf{A} \mathbf{g}_{j+1} & \mathbf{g}_{j+1}^T \mathbf{A} \mathbf{v}_j \\ \mathbf{v}_j^T \mathbf{A} \mathbf{g}_{j+1} & \mathbf{v}_j^T \mathbf{A} \mathbf{v}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Desenvolvendo os produtos matriz-vetor da equação 3.24 e fazendo a minimização com relação a  $\beta$ , obtém-se:

$$\frac{d\mathbf{Q}(\beta)}{d\beta} = \nabla \mathbf{Q}(\beta) = 2\mathbf{v}_j^T \mathbf{A} \mathbf{g}_{j+1} + 2\beta \mathbf{v}_j^T \mathbf{A} \mathbf{v}_j = \mathbf{0} \quad (3.25)$$

Portanto:

$$\beta^* = -\frac{\mathbf{v}_j^T \mathbf{A} \mathbf{g}_{j+1}}{\mathbf{v}_j^T \mathbf{A} \mathbf{v}_j} \text{ ou ainda: } \beta^* = -\frac{\mathbf{p}_j^T \mathbf{g}_{j+1}}{\mathbf{v}_j^T \mathbf{p}_j}, \quad (3.26)$$

onde  $\mathbf{p}_j = \mathbf{A} \mathbf{v}_j$

Assim, tem-se o pseudo-código 3 para o método conjugado gradiente:

---

**Algorithm 3** Pseudo-código do método conjugado gradiente

---

- 1:  $\mathbf{h}_0$  inicial arbitrário
  - 2:  $\mathbf{g}_0 = -\mathbf{b} + \mathbf{A} \mathbf{h}_0$
  - 3:  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{g}_0$  ▷ vetor auxiliar igual ao vetor gradiente
  - 4: **while**  $j < niter$  **do**
  - 5:      $\mathbf{p}_j = \mathbf{A} \mathbf{v}_j$
  - 6:      $\alpha^* = -\frac{\mathbf{v}_j^T \mathbf{g}_j}{\mathbf{v}_j^T \mathbf{A} \mathbf{v}_j}$
  - 7:      $\tilde{\mathbf{h}}_{j+1} = \mathbf{h}_j + \alpha \mathbf{v}_j$
  - 8:      $\tilde{\mathbf{g}}_{j+1} = -\mathbf{b} + \mathbf{A} \tilde{\mathbf{h}}_{j+1} = \mathbf{g}_j + \alpha \mathbf{p}_j$
  - 9:      $\beta^* = -\frac{\mathbf{p}_j^T \tilde{\mathbf{g}}_{j+1}}{\mathbf{v}_j^T \mathbf{p}_j}$  ▷ conjugado gradiente
  - 10:      $\mathbf{v}_{j+1} = \tilde{\mathbf{g}}_{j+1} + \beta \mathbf{v}_j$  ▷ conjugado gradiente
  - 11: **end while**
-

## 3.2 Migração RTM iterativa por mínimos quadrados

Conforme desenvolvimento matemático apresentado na seção 2.1 (ver equações 2.18 e 2.19), vê-se que problemas geofísicos podem ser transformados ou aproximados para versões lineares, podendo ser descritos pela seguinte relação:

$$\mathbf{d}^{obs} = \mathbf{L} \mathbf{m}^{true} \quad (3.27)$$

onde  $\mathbf{d}^{obs}$  são os dados observados,  $\mathbf{m}^{true}$  é o modelo verdadeiro desconhecido e  $\mathbf{L}$  é a matriz que relaciona o espaço do modelo com o espaço dos dados e representa o operador Born de modelagem direta.

Segundo Claerbout e Fomel (2012), o operador de migração pode ser representado como sendo o adjunto do operador de modelagem (ver equações 2.20 e 2.21). Portanto, pode-se representar a migração RTM como segue:

$$m(\mathbf{r}) = \mathbf{L}^T \mathbf{d}^{obs}, \quad (3.28)$$

onde  $m(\mathbf{r})$  representa o resultado da migração RTM convencional e  $\mathbf{L}^T$  é o operador de migração (ver equações 2.20 e 2.21).

Tudo estaria resolvido implementando a equação 3.28 se o resultado da migração convencional fosse equivalente ao modelo de refletividades em subsuperfície. Mas, como não é esse o caso, é necessário seguir adiante no tratamento dos resultados obtidos. Afinal, da equação 3.27 pode-se inferir que o modelo de refletividades verdadeiro seria recuperado exatamente aplicando a inversa do operador de modelagem  $\mathbf{L}$  aos dados observados  $\mathbf{d}^{obs}$ . Contudo, em se tratando de migração convencional, aplica-se o adjunto de  $\mathbf{L}$  conforme expresso por 3.28. Logo, a qualidade desse tipo de migração é afetada porque o operador adjunto não aproxima exatamente o operador inverso (Jon F Claerbout, 1992). Para visualizar em uma representação de equação matricial este fato, substitue-se a equação 3.27 em 3.28 e, para efeito de simplificação na representação, faz-se  $m(\mathbf{r}) = \mathbf{m}_1$  como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_1 &= \mathbf{L}^T \mathbf{d}^{obs} \\ &= \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{m}^{true} \\ &= \mathbf{H} \mathbf{m}^{true}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde  $\mathbf{H}$  é a matriz Hessiana.

Interpreta-se a Hessiana na equação 3.29 como sendo um operador de “desfocalização” atuando sobre a refletividade verdadeira. Portanto, pode-se afirmar que a migração convencional não é capaz de recuperar o modelo de refletividades verdadeiro, tendo em vista que o que se obtém, como resultado da aplicação do operador adjunto, é a refletividade verdadeira “desfocada”. Assim, para tentar obter um resultado mais próximo da refletividade verdadeira, é aplicada a abordagem de mínimos quadrados apresentada na seção 3.1.

Para tanto, define-se o erro  $\mathbf{e}$  como:

$$\mathbf{e} = \mathbf{L} \mathbf{m} - \mathbf{d}^{obs}, \quad (3.30)$$

onde  $\mathbf{e}$  é o vetor erro que contém o desvio entre os dados calculados e observados, e  $\mathbf{m}$  é o modelo de refletividades que se espera obter. Não necessariamente correto, mas próximo disso.

E a forma quadrática, nessa seção denominada função custo, como segue:

$$\begin{aligned} \Phi_{LS}(\mathbf{m}) &= \|\mathbf{Lm} - \mathbf{d}^{obs}\|_2^2 \\ &= \|\mathbf{e}\|_2^2 \\ &= \left\{ \left[ \sum_i |e_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^2 \\ &= \sum_i |e_i|^2 \\ &= \mathbf{e}^T \mathbf{e}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde as barras verticais  $\|\bullet\|_2^2$  representam a norma  $L_2$  elevada ao quadrado e, consequentemente, a função custo  $\Phi_{LS}(\mathbf{m})$  o somatório dos erros quadráticos.

Substituindo 3.30 em 3.31, obtém-se:

$$\begin{aligned} \Phi_{LS}(\mathbf{m}) &= (\mathbf{Lm} - \mathbf{d})^T (\mathbf{Lm} - \mathbf{d}) \\ &= \mathbf{m}^T \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{m} - 2\mathbf{m}^T \mathbf{L}^T \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \mathbf{d}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde  $\mathbf{d} = \mathbf{d}^{obs}$

Pode-se minimizar, portanto, a função custo expressa por 3.32 e obter os parâmetros do modelo para os quais o erro é mínimo no contexto clássico de mínimos quadrados:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_{LS}(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}^T} &= 2\mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{m} - 2\mathbf{L}^T \mathbf{d} \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{3.33}$$

O que implica na seguinte solução:

$$\begin{aligned}\mathbf{m}^{true} \approx \mathbf{m} &= [\mathbf{L}^T \mathbf{L}]^{-1} \mathbf{L}^T \mathbf{d} \\ &= \mathbf{H}^{-1} \mathbf{m}_1,\end{aligned}\tag{3.34}$$

onde  $\mathbf{m}$  é a solução mínimos quadrados e  $\mathbf{H}^{-1}$  é a inversa da matriz Hessiana.

A equação 3.34 mostra que a imagem migrada convencionalmente  $\mathbf{m}_1$  pode ser focalizada por uma boa estimativa da inversa da matriz Hessiana  $\mathbf{H}^{-1}$ , o que é caro computacionalmente. Assim, pode-se obter a solução mínimos quadrados através de algoritmos iterativos, como *steepest descent* e conjugado gradiente (Nemeth, Wu e Schuster, 1999). Aplicando o método *steepest descent*, equivalente ao método gradiente apresentado anteriormente na seção 3.1, para que o modelo seja atualizado de forma a garantir a minimização do resíduo (equação 3.30), pode-se caminhar na direção do negativo do gradiente. Logo, o modelo deve ser atualizado de acordo com a seguinte relação iterativa:

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_{k+1} &= \mathbf{m}_k - \alpha_k \mathbf{g}_k \\ &= \mathbf{m}_k - \alpha_k \mathbf{L}^T \mathbf{e}_k\end{aligned}\tag{3.35}$$

onde  $\alpha$  é o passo em cada iteração e o gradiente é a migração convencional do resíduo (ver equação 3.33).

Da equação 3.35 pode-se inferir que o modelo na etapa posterior  $\mathbf{m}_{k+1}$  é igual ao modelo na etapa anterior  $\mathbf{m}_k$  acrescido de um passo  $\alpha$  na direção oposta ao gradiente, sendo esta a característica principal do *steepest descent*. Para calcular a magnitude do passo a cada iteração, é necessário reduzir a equação do parabolóide (expresso por 3.32) à equação de uma parábola em  $\alpha$  para posterior busca do mínimo e consequente determinação do passo. Assim, mais uma vez, de forma análoga ao apresentado na seção 3.1, deve-se substituir a relação iterativa 3.35 na função custo 3.32 para então minimizá-la como segue:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_{LS}(\alpha)}{\partial \alpha} &= -2 \mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k + 2 \alpha \mathbf{g}_k^T \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{g}_k \\ &= \mathbf{0},\end{aligned}\tag{3.36}$$

Finalmente, obtém-se o passo  $\alpha$ :

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k}{(\mathbf{L}\mathbf{g}_k)^T (\mathbf{L}\mathbf{g}_k)} \quad (3.37)$$

Ademais, para avaliar a relação entre os gradientes a cada iteração, seja o gradiente na etapa posterior  $k + 1$  dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{k+1} &= \mathbf{L}^T \mathbf{e}_{k+1} \\ &= \mathbf{L}^T (\mathbf{L} \mathbf{m}_{k+1} - \mathbf{d}) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Assim, substituindo a equação 3.35 em 3.38, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{k+1} &= \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{m}_{k+1} - \mathbf{L}^T \mathbf{d} \\ &= \mathbf{L}^T \mathbf{L} (\mathbf{m}_k - \alpha_k \mathbf{g}_k) - \mathbf{L}^T \mathbf{d} \\ &= \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{m}_k - \alpha_k \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{g}_k - \mathbf{L}^T \mathbf{d} \\ &= \mathbf{L}^T (\mathbf{L} \mathbf{m}_k - \mathbf{d}) - \alpha_k \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{g}_k \\ &= \mathbf{g}_k - \alpha_k \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{g}_k \end{aligned} \quad (3.39)$$

O que leva a:

$$\mathbf{g}_k = \mathbf{g}_{k+1} + \alpha_k \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{g}_k \quad (3.40)$$

Substituindo 3.40 em 3.36, tem-se que:

$$-\mathbf{g}_k^T (\mathbf{g}_{k+1} + \alpha_k \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{g}_k) + \alpha \mathbf{g}_k^T \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{g}_k = 0 \quad (3.41)$$

O que resulta em:

$$\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k = 0 \quad (3.42)$$

Portanto, a equação 3.42 mostra que o gradiente na iteração anterior é perpendicular ao gradiente na iteração posterior. Tal fato torna o método iterativo usando *steepest descent* aqui apresentado lento, tendo em vista que a iteração seguinte buscará o mínimo na direção perpendicular à anterior, caracterizando um percurso de “zig-zag”. Ou seja, a busca pelo

mínimo se dá em trajetória dentilhada e não em percurso suave ou com poucos passos até o destino final que é o mínimo da função custo 3.31.

Pode-se assim definir os seguintes passos para a realização da migração RTM por mínimos quadrados com abordagem iterativa (ver fluxograma - Figura 3.2):

1. Geração de dado observado  $\mathbf{d}^{obs}$  utilizando modelagem Born;
2. Modelo inicial  $\mathbf{m}_1$  obtido com migração RTM convencional;
3. Modelagem Born para geração de dado calculado  $\mathbf{d}^{calc} = \mathbf{L}\mathbf{m}_k$ ;
4. Cálculo do resíduo  $\mathbf{e}_k = \mathbf{L}\mathbf{m}_k - \mathbf{d}^{obs}$ ;
5. Cálculo do gradiente  $\mathbf{g}_k = \mathbf{L}^T \mathbf{e}_k$ ;
6. Cálculo do passo  $\alpha = \frac{\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k}{(\mathbf{L}\mathbf{g}_k)^T (\mathbf{L}\mathbf{g}_k)}$ ;
7. Atualização do modelo  $\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k - \alpha \mathbf{g}_k$ ;
8. Volta para a terceira etapa e repete o processo até uma quantidade previamente determinada de iterações.

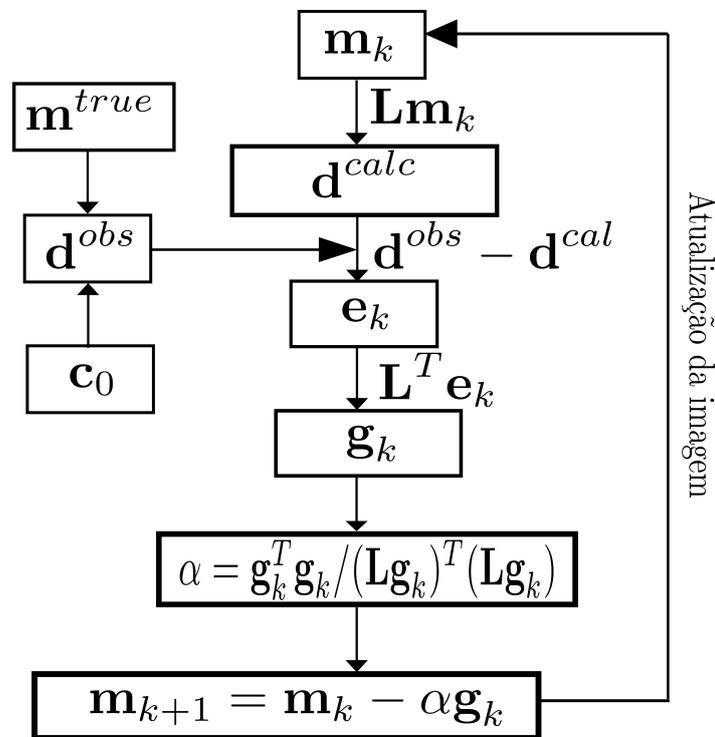


Figura 3.2: Representação esquemática do fluxograma de migração reversa no tempo iterativa por mínimos quadrados.

### 3.3 Migração RTM mínimos quadrados no domínio da imagem utilizando filtro de forma

Conforme visto anteriormente (equação 3.34), para focalizar a imagem migrada convencionalmente  $\mathbf{L}^T \mathbf{d}$  “borrada” pela Hessiana, deve-se aplicar a esse resultado da migração alguma estimativa adequada da inversa da matriz Hessiana, tendo em vista que sua determinação exata é inviável computacionalmente. Nesse sentido, Guitton (2017) propôs estimar a inversa da Hessiana com filtros de forma não-estacionários locais evitando-se fazer uma demigração e uma migração a cada iteração, como no LSM convencional no domínio do dado (Figura 3.2). Para entender a abordagem proposta, retoma-se a migração convencional (equação 3.29), seguida de demigração (modelagem Born), como segue:

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_1 &= \mathbf{L}^T \mathbf{d}^{obs} \\ \mathbf{d}_1 &= \mathbf{L} \mathbf{m}_1\end{aligned}$$

Com esse resultado pode-se fazer nova migração convencional, obtendo assim a seguinte relação:

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_2 &= \mathbf{L}^T \mathbf{d}_1 \\ &= \mathbf{L}^T (\mathbf{L} \mathbf{m}_1) \\ &= \mathbf{H} \mathbf{m}_1,\end{aligned}\tag{3.43}$$

onde  $\mathbf{d}_1 = \mathbf{L} \mathbf{m}_1$  é a demigração do resultado da primeira migração convencional  $\mathbf{m}_1$ , e  $\mathbf{m}_2 = \mathbf{L}^T \mathbf{d}_1$  é a migração convencional do dado demigrado. Ou seja, da equação 3.43 pode-se afirmar que  $\mathbf{m}_2$  está para  $\mathbf{m}_1$  assim como  $\mathbf{m}_1$  está para  $\mathbf{m}^{true}$ , conforme visto na equação 3.29.

Assim, conhecidos  $\mathbf{m}_1$  e  $\mathbf{m}_2$ , resolvendo o seguinte problema de minimização de função custo (e.g. Guitton, 2004, 2017):

$$\Phi(\mathbf{F}_{inv}) = \|\mathbf{m}_2 * \mathbf{F}_{inv} - \mathbf{m}_1\|_2^2,\tag{3.44}$$

onde  $\mathbf{F}_{inv} \approx \mathbf{H}^{-1}$  é o filtro que minimiza o resíduo  $(\mathbf{m}_2 * \mathbf{F}_{inv} - \mathbf{m}_1)$ .

O filtro  $\mathbf{F}_{inv}$  calculado deve posteriormente ser aplicado a  $\mathbf{m}_1$ , levando à obtenção de algo mais próximo da refletividade procurada, conforme sugere a equação 3.29. Dessa forma, obtém-se uma boa aproximação da solução mínimos quadrados expressa pela equação 3.34 (ver fluxograma - Figura 3.3). Tal fato torna atrativa esse tipo de abordagem, se comparada

à abordagem iterativa apresentada na seção 3.2, que a cada iteração faz uma migração RTM e uma modelagem Born.

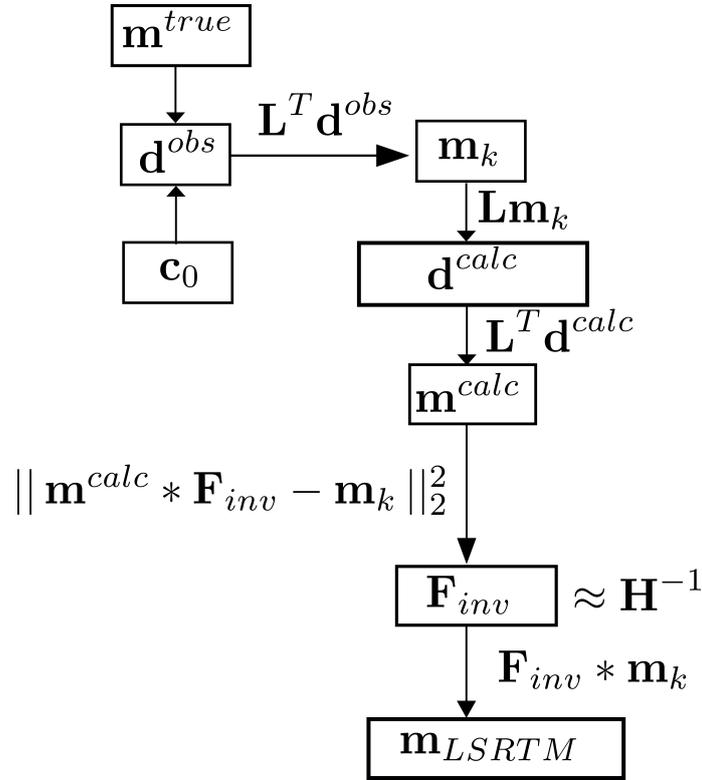


Figura 3.3: Representação esquemática do fluxograma de migração reversa no tempo por mínimos quadrados utilizando filtro de forma.

Uma outra abordagem em duas etapas também será utilizada aqui (e.g. Lipari et al., 2019; Song Guo e Huazhong Wang, 2019). Na primeira etapa é feita uma estimativa da Hessiana propriamente, para então ser estimada a refletividade procurada. Logo são dois problemas de minimização, como segue:

$$\Phi(\mathbf{F}) = \|\mathbf{m}_1 * \mathbf{F} - \mathbf{m}_2\|_2^2, \quad (3.45)$$

$$\Phi(\mathbf{m}) = \|\mathbf{m} * \mathbf{F} - \mathbf{m}_1\|_2^2, \quad (3.46)$$

onde  $\mathbf{F} \approx \mathbf{H}$  e  $\mathbf{m} \approx \mathbf{m}^{true}$ .

Nesse esquema em dois passos, primeiro estima-se um filtro  $\mathbf{F}$  que minimiza o resíduo  $(\mathbf{m}_1 * \mathbf{F} - \mathbf{m}_2)$ . Esse filtro, tendo em vista o que expressa a equação 3.43 é uma aproximação da matriz Hessiana. Tal aproximação será utilizada, portanto, como entrada para um segundo problema de minimização no qual busca-se estimar  $\mathbf{m}$  que, baseado no que expressa 3.29, é uma aproximação da solução mínimos quadrados procurada. Segundo S. Guo e H. Wang

(2019), estimar um filtro inverso que minimiza o resíduo ( $\mathbf{m}_2 * \mathbf{F}_{inv} - \mathbf{m}_1$ ) é um problema mal posto, tendo em vista que nesse esquema tenta-se aproximar dados com um conteúdo de frequência e resolução menores a dados cujo conteúdo de frequência e resolução são maiores. O que faz com que o filtro que aproxima a inversa da Hessiana obtido nesse esquema em um passo (Guitton, 2017) perca em capacidade.

Pode-se, também, ainda na abordagem em dois passos, inserir no segundo passo (equação 3.46) uma restrição para garantir esparsidade à solução, aumentando resolução e atenuando ruído, como segue:

$$\Phi(\mathbf{m}) = \|\mathbf{m} * \mathbf{F} - \mathbf{m}_1\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{m}\|_1, \quad (3.47)$$

onde o segundo termo é utilizado para penalizar soluções não-esparsas e  $\lambda$  é uma constante utilizada para equilibrar o peso dos dois termos.

Para resolver o problema de minimização expresso pela equação 3.47, será utilizado o algoritmo FISTA (*Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm*) proposto por Beck e Teboulle (2009). Neste trabalho, adaptou-se o passo a passo apresentado por Perez, Velis e Sacchi (2012) como segue:

1. Determinação de  $\alpha$  mediante cálculo do máximo autovalor da matriz  $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$  (ver matriz construída para a representação da convolução como produto matriz-vetor no capítulo 4);
2. Definir  $\mathbf{z}_1 = \mathbf{m}_0$  e  $t_1 = 1.0$ , com  $\mathbf{m}_0$  sendo uma solução inicial;
3. Realização das seguintes operações dentro do *loop* de iterações FISTA:

(i)

$$\mathbf{m}_k = T_{\lambda/2\alpha} \left[ \mathbf{z}_k - \frac{1}{\alpha} \mathbf{F}^T (\mathbf{F} \mathbf{z}_k - \mathbf{m}_1) \right],$$

onde  $T_\beta$  é definida como:

$$T_\beta(y) = \begin{cases} y \left(1 - \frac{\beta}{|y|}\right) & \text{se } |y| \geq \beta \\ 0 & \text{se } |y| < \beta \end{cases}$$

(ii)

$$t_{k+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_k^2}}{2}$$

(iii)

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{m}_k + \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}} (\mathbf{m}_k - \mathbf{m}_{k-1})$$

(iv) Avalia convergência e/ou força parada.

# 4

## Metodologia

Conforme visto na seção 3.2 do capítulo 3, a inversa da matriz Hessiana é um operador de focalização da image migrada, como segue:

$$\mathbf{m}^{true} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{m}_1,$$

onde  $\mathbf{H}^{-1}$  é a inversa da matriz Hessiana e  $\mathbf{m}_1$  é o resultado da migração convencional.

Ainda conforme visto anteriormente, a migração por mínimos quadrados tenta aproximar a inversa da Hessiana de forma iterativa tendo em vista que calcular de forma exata a referida matriz inversa é inviável devido ao alto custo computacional que essa tarefa demandaria. Esse tipo de abordagem iterativa também envolve um alto custo computacional, uma vez que é necessário demigrar e migrar os dados a cada iteração (ver fluxograma - Figura 3.2). Assim, neste trabalho, foram utilizados filtros convolutivos não-estacionários para aproximar a inversa da matriz Hessiana  $\mathbf{H}^{-1}$ .

Conforme visto no capítulo 3, seção 3.3, para estimativa desse tipo de filtro, tira-se proveito do fato de que demigrar e remigrar o resultado da migração convencional  $\mathbf{m}_1$ , leva a seguinte relação:

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{m}_2,$$

onde  $\mathbf{H}^{-1}$  é a inversa da matriz Hessiana e  $\mathbf{m}_2$  é o resultado da demigração de  $\mathbf{m}_1$  e posterior migração convencional.

Ou seja, nota-se deste último par de equações que  $\mathbf{m}_2$  está para  $\mathbf{m}_1$  assim como  $\mathbf{m}_1$  está para  $\mathbf{m}^{true}$ . Assim, numa abordagem em um passo, pode-se obter o referido filtro convolutivo que aproxima a inversa da matriz Hessiana, resolvendo o problema de minimização da função custo, apresentado na equação 3.44. Assim, o filtro obtido desta maneira deve ser aplicado à

imagem migrada convencionalmente para obter a solução por mínimos quadrados no domínio da imagem como segue:

$$\mathbf{m} = \mathbf{F}_{inv} * \mathbf{m}_1. \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{m}$  é a solução mínimos quadrados.

Procedimento análogo é feito numa abordagem em dois passos, contudo, ao invés de estimar um filtro que aproxima a inversa da Hessiana, estima-se no primeiro passo um filtro que aproxima a Hessiana propriamente. Feito isso, ou seja, conhecido o filtro que aproxima o efeito da matriz Hessiana sobre a imagem, no segundo passo estima-se a solução mínimos quadrados  $\mathbf{m}$ . Ressalta-se que, nesse tipo de abordagem, a imagem final é resultado da resolução do segundo problema de minimização, fato esse já discutido no capítulo 3 (ver equações 3.45 e 3.46).

Assim, para calcular esses filtros convolucionais, foram necessárias as seguintes etapas:

1. Geração de  $\mathbf{m}_1$  utilizando migração RTM convencional;
2. Geração de  $\mathbf{m}_2$  obtido com demigração (modelagem Born) de  $\mathbf{m}_1$  e posterior migração convencional deste dado demigrado;
3. Normalização pela máxima amplitude;
4. Janelamento das imagens migrada e remigrada  $\mathbf{m}_1$  e  $\mathbf{m}_2$ , respectivamente;
5. Vetorização das imagens janeladas para resolução dos problemas de minimização expressos pelas equações 3.44, 3.45, 3.46 e 3.47;
6. Cálculo dos filtros utilizando conjugado gradiente (ver algoritmo 3);
7. Aplicação do filtro e consequente obtenção de imagem mínimos quadrados para o procedimento em um passo;
8. Recuperação da imagem mínimos quadrados no procedimento em dois passos (equação 3.46) e no contexto da utilização do algoritmo FISTA (ver equação 3.47 e etapas do FISTA);
9. Reconstrução das imagens finais a partir das janelas.

Dentre essas etapas, convém detalhar a maneira como foi feito o janelamento e a vetorização, etapas cruciais para a geração dos resultados apresentados no próximo capítulo. No

que se refere ao janelamento, foram feitas janelas quadradas com sobreposição de metade do tamanho da janela nas duas direções, horizontal e vertical. Ou seja, definida a dimensão da janela na direção  $x$  como  $dimx$  e na direção  $z$  como  $dimz$ , com  $dimx = dimz$ , é utilizado um fator de deslizamento de tamanho  $\frac{dimx}{2} = \frac{dimz}{2}$  (Figura 4.1).

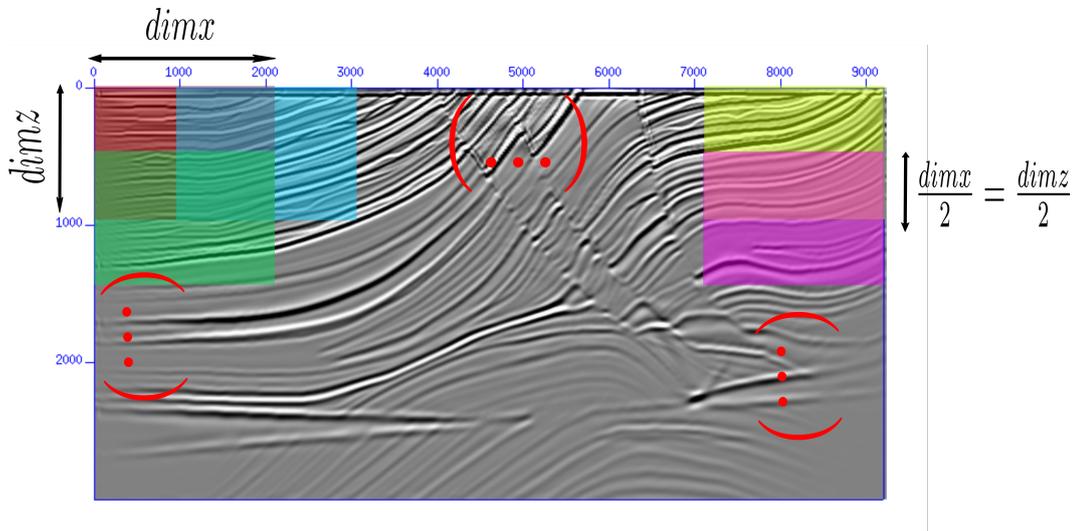


Figura 4.1: Representação ilustrativa de janelamento da imagem  $\mathbf{m}_1$  do modelo Marmo.

A partir dessas janelas foram gerados vetores para serem utilizados como entrada no algoritmo conjugado gradiente de forma que os filtros pudessem ser calculados janela a janela, impondo assim a característica de não-estacionaridade. Ou seja, como o filtro procurado é variável espacialmente, não é possível obter um filtro único para toda a imagem. Logo, faz-se o cálculo do mesmo janela a janela utilizando conjugado gradiente e tendo como entrada as imagens oriundas das janelas após vetorização. Para isso utilizou-se o conceito de vetor abstrato apresentado por Claerbout e Fomel (2012) segundo o qual, em análise de sinal, o vetor pode conter todos os elementos de cada sinal precedendo o próximo. Tal fato torna possível que, quando se trata de processamento de imagens, um vetor contenha uma imagem inteira, que é uma lista de sinais (Figura 4.2).

Outra questão a ser mencionada é a maneira como foi implementada a convolução presente em todas as equações de minimização aqui discutidas. No algoritmo em um passo (equação 3.44), por exemplo, a convolução entre o filtro a ser estimado e a imagem remi-grada vetorizada  $\mathbf{m}_2$  foi implementada em forma de produto matriz-vetor como segue:

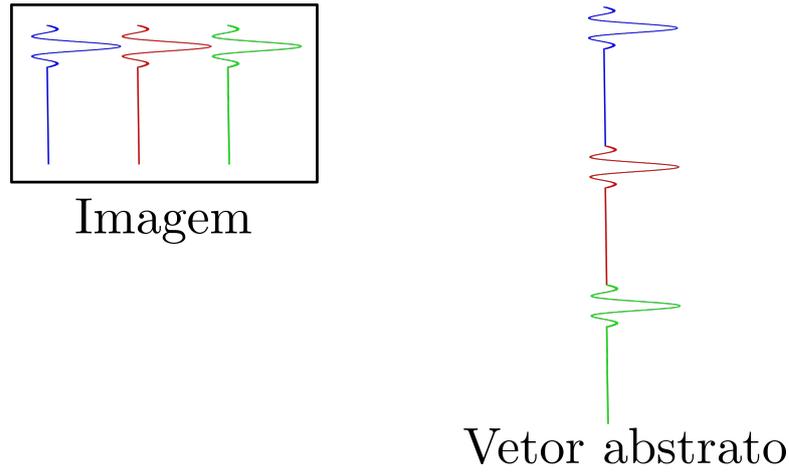


Figura 4.2: Representação ilustrativa de vetorização.

$$\mathbf{F}_{inv} * \mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_1^{calc} = \begin{bmatrix} m_{1,1}^{calc} \\ m_{1,2}^{calc} \\ m_{1,3}^{calc} \\ \vdots \\ m_{1,n}^{calc} \\ m_{1,n+1}^{calc} \\ m_{1,n+2}^{calc} \\ \vdots \\ m_{1,m+n-1}^{calc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{2,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{2,2} & m_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ m_{2,3} & m_{2,2} & m_{2,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{2,n} & m_{2,n-1} & m_{2,n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & m_{2,n} & m_{2,n-1} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_{2,n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{2,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{inv,1} \\ F_{inv,2} \\ F_{inv,3} \\ \vdots \\ F_{inv,m} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_2 \mathbf{F}_{inv}, \quad (4.2)$$

onde  $\mathbf{M}_2$  é uma matriz construída com o deslocamento vetical para baixo dos elementos da imagem vetorizada  $\mathbf{m}_2$ ,  $m$  é o número de elementos do filtro e  $n$  é o numero de elementos da referida imagem vetorizada.

Finalmente, ressalta-se que a reconstrução da imagem a partir das janelas foi realizada mediante aplicação de pesos nas regiões sobrepostas e posterior soma das referidas janelas.

# 5

## Resultados e discussão

Neste capítulo serão apresentados os resultados de migrações convencionais nos domínios do tempo e frequência, conforme discutido nos capítulos 1 e 2. Esses resultados serão utilizados como entrada para o esquema de construção dos filtros convolutivos expressos pelas equações 3.44 a 3.46, resultados esses que se espera melhorar.

Além das imagens, também serão analisados perfis de traços migrados para comparação com aqueles oriundos da refletividade propriamente. Espera-se que quanto mais próxima a imagem for da refletividade, mais próximos os perfis resultantes dos diversos resultados de migração aqui apresentados serão da mesma.

Os resultados acima referidos foram gerados utilizando os modelos Marmousi e Pluto.

### 5.1 Modelo Marmousi

O Marmousi é bem representativo de situações de geologia com grau de complexidade alta. O modelo possui muitas falhas de alto mergulho e intrusões com velocidades bastante altas (Figura 5.1). Dados sísmicos gerados a partir deste modelo são, portanto, muito úteis para testes de métodos de migração de dados sísmicos. O Marmousi original possui 751 amostras na direção vertical espaçadas de 4 *m* e 2301 amostras na direção horizontal espaçadas também de 4 *m*, possuindo portanto 3 *km* de profundidade e 9.2 *km* de comprimento. Utilizou-se aqui o Marmousi decimado para  $dx = 25\text{ m}$  e  $dz = 8\text{ m}$ , com 375 amostras na direção vertical e 369 amostras na direção horizontal, mantendo assim a profundidade e o comprimento do modelo original.

Os dados foram gerados com modelagem Born utilizando uma versão suavizada do modelo Marmousi (Figura 5.2) e a refletividade (Figura 5.3). A geometria utilizada na modelagem foi variável: 369 tiros, sendo o primeiro posicionado na extrema-esquerda do modelo, com 112 canais espalhados à direita da posição da fonte e com distanciamento entre si de 25 m (Figura 5.4a). A distância entre tiros também de 25 m e com aumento do número de canais à medida que os tiros vão sendo gerados para posições em direção à direita do modelo. De forma que no meio do modelo a geometria de aquisição é do tipo *split-spread* com 224 canais (Figura 5.4b) e no final, no último tiro, terá novamente 112 canais posicionados à esquerda da posição da fonte (Figura 5.4c). O tempo de registro é de 3.5 s com intervalo de amostragem  $dt = 0.004$  s e a fonte utilizada possui 20 Hz de frequência de pico.

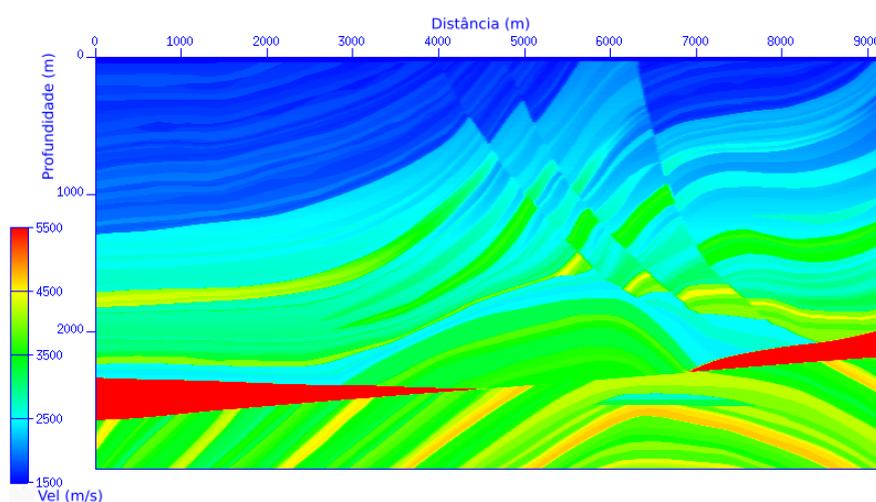


Figura 5.1: Campo de velocidades do modelo Marmousi.

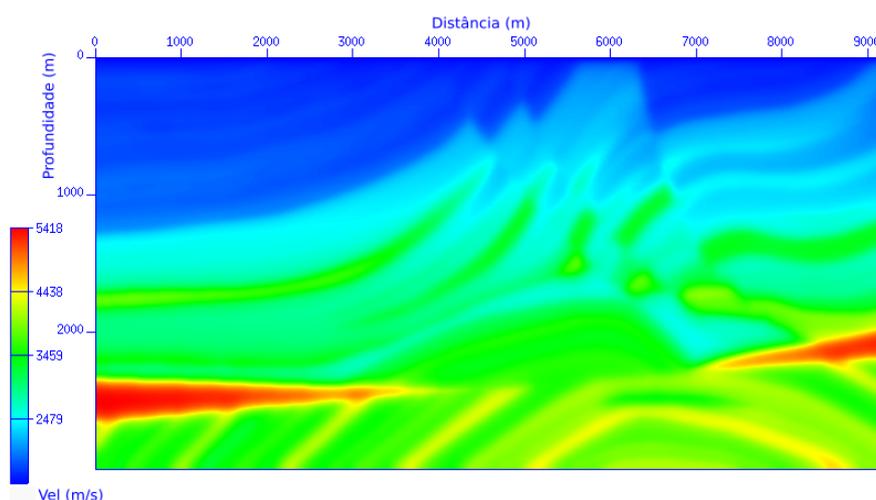


Figura 5.2: Campo de velocidades suave do modelo Marmousi.

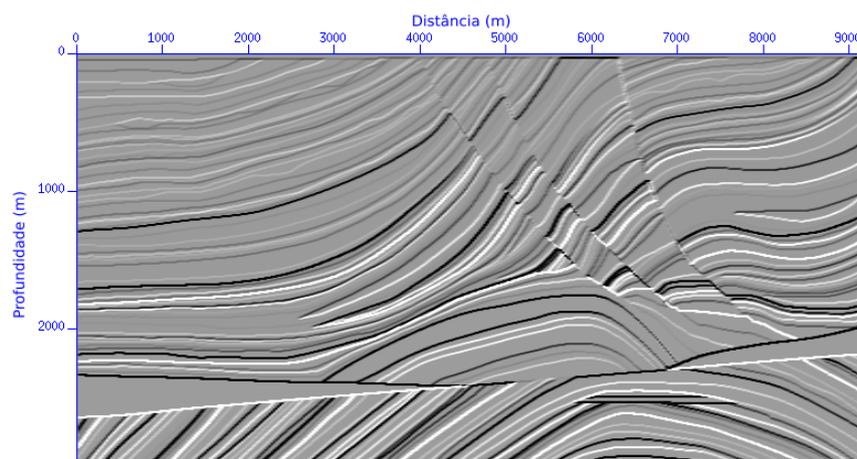


Figura 5.3: Refletvidades do modelo Marmousi.

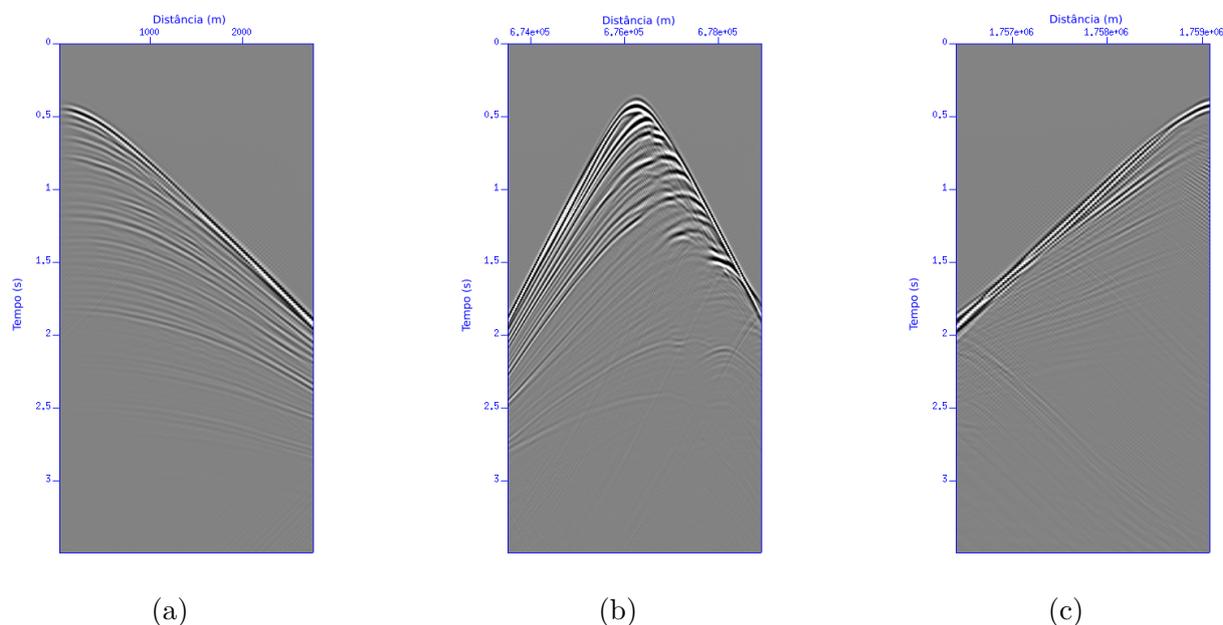


Figura 5.4: Tiros no modelo Marmousi; (a) primeiro tiro, (b) tiro central e (c) último tiro.

Para a migração RTM no domínio do tempo (Figura 5.5) foram utilizados todos os tiros do levantamento gravando todos os instantâneos da fonte, sem utilizar a estratégia de *check points* mencionada anteriormente. Para a migração RTM no domínio da frequência foram utilizadas 141 frequências, uma vez que o intervalo entre frequências utilizado é  $df = \frac{1}{nt \cdot dt}$  e a frequência máxima utilizada foi  $f_{max} = 40 \text{ Hz}$ . A implicação imediata deste fato é que cada instantâneo de dimensão  $n_x \times n_z$  gerará quatro cubos de dados com dimensões  $n_x \times n_z \times 141$ , conforme representação esquemática na Figura 2.2. Isso terá algum impacto no tempo de execução do algoritmo em contrapartida ao fato de não precisar gravar os instantâneos, tendo em vista que todo o processo se dá em *loop* único (ver algoritmo 1). O resultado da migração RTM no domínio da frequência é apresentada na Figura 5.6 e apresenta um melhor

delineamento dos refletores e melhor distribuição de amplitudes ao longo da seção. Como o objetivo aqui é encontrar uma imagem o melhor possível em termos de qualidade para ser utilizada como entrada no processo de estimativa dos filtros convolutivos que virão a seguir, os dois resultados serão levados adiante para posterior comparação em termos de melhor estimativas dos filtros discutidos no capítulo 3, seção 3.3.

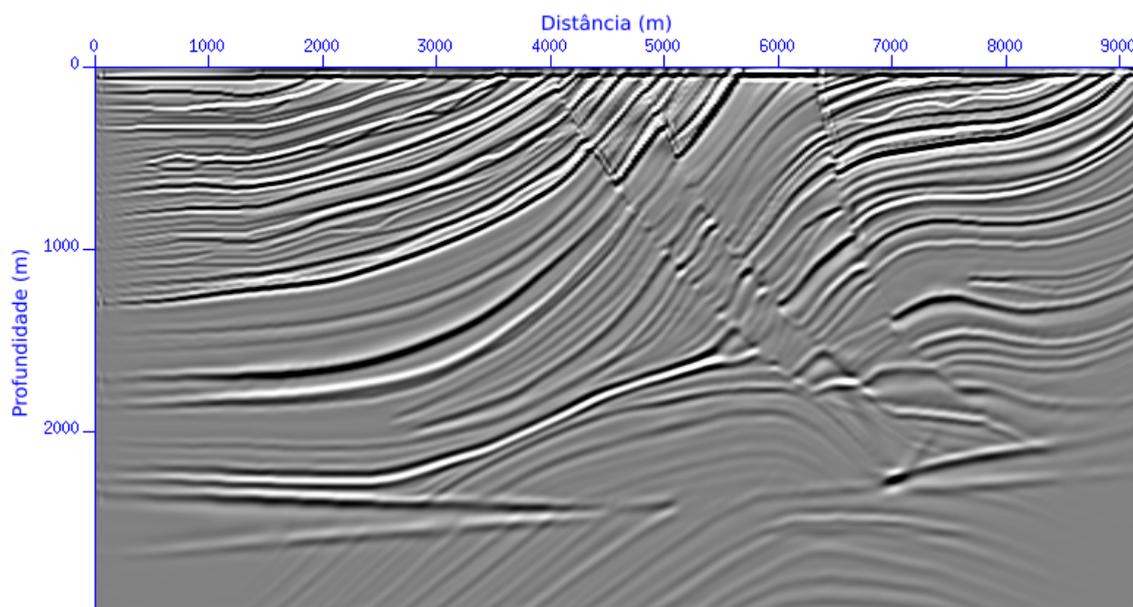


Figura 5.5: Migração RTM no domínio do tempo - modelo Marmo.

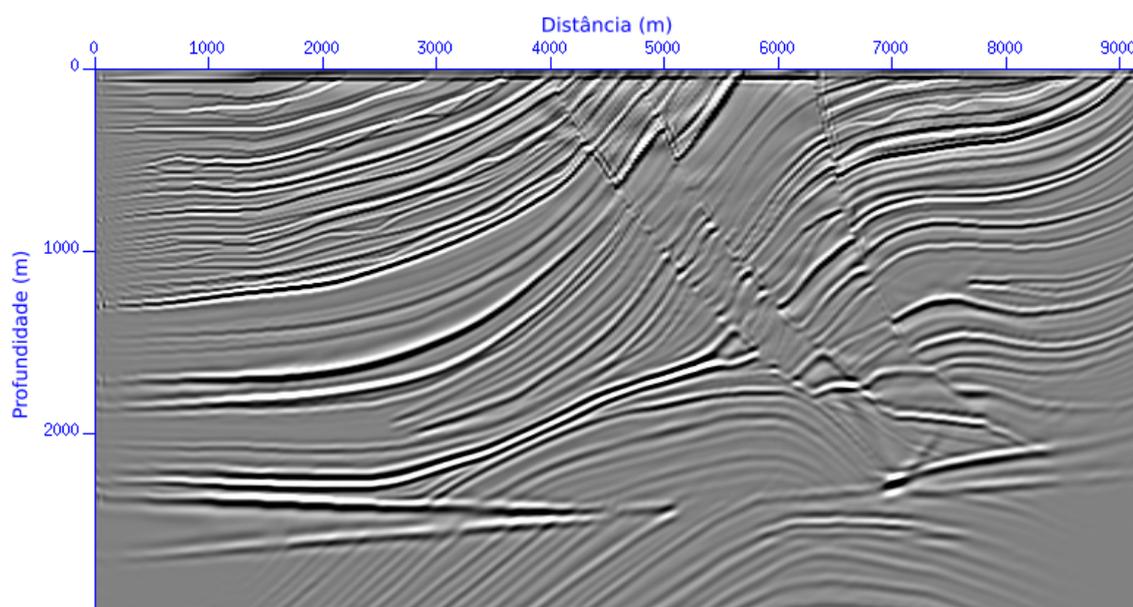


Figura 5.6: Migração RTM no domínio do frequência - modelo Marmo.

Para aplicação da metodologia aqui apresentada é necessário que seja feita demigração dos resultados obtidos (Figuras 5.5 e 5.6) e posterior remigração e consequente obtenção do que aqui é denominado de  $\mathbf{m}_2$  (Figura 3.3). A partir desse ponto, tem-se os elementos necessários para, conhecendo a relação expressa pela equação 3.43, resolver os problemas de minimização expressos pela equação 3.44 (algoritmo em 1 passo) e pelo par de equações 3.45 e 3.46 (algoritmo em dois passos). Para construção dos filtros foi utilizado o algoritmo conjugado-gradiente (ver pseudo-código 3) e, com vistas à não-estacionaridade dos filtros, fez-se necessária a construção de janelas que percorrem as imagens (Figuras 5.5 e 5.6) para estimá-los localmente, tanto na abordagem em dois passos como na abordagem em um passo. As janelas utilizadas aqui são de tamanho  $31 \times 31$  com salto de 15 amostras em ambas as direções. Ademais, utilizou-se o conceito de vetor abstrato apresentado por Claerbout e Fomel (2012) segundo o qual, em análise de sinal, o vetor pode conter todos os elementos de cada sinal precedendo o próximo. Tal fato torna possível que, quando se trata de processamento de imagens, um vetor contenha uma imagem inteira, que é uma lista de sinais.

Portanto, começando com o algoritmo em dois passos, a primeira etapa é estimar um filtro numa abordagem mínimos quadrados que seja uma aproximação, em termos de efeito sobre o dado, da Hessiana propriamente e não de sua inversa, conforme expressa a equação 3.45. Estimados os filtros, para controle de qualidade, foram analisados o resultado da aplicação nas janelas mediante reconstrução das imagens calculadas (Figuras 5.7 e 5.9). Nota-se que o  $\mathbf{m}_2^{calc}$  se aproxima de forma satisfatória do  $\mathbf{m}_2$  verdadeiro, resultante da demigração e remigração mencionadas anteriormente. Além disso, para aumentar a confiabilidade dessa análise, foram utilizadas duas métricas de medida de similaridade: energia do erro e performance. A energia do erro é calculada fazendo a soma do quadrado da diferença entre  $\mathbf{m}_2^{calc}$  e  $\mathbf{m}_2$  a cada iteração, enquanto a performance é calculada utilizando a seguinte equação:

$$p = 1 - \frac{\sum_n [\mathbf{m}_1 * \mathbf{F} - \mathbf{m}_2]^2}{\sum_n [\mathbf{m}_2]^2}, \quad (5.1)$$

onde  $\mathbf{F}$  é o filtro estimado na janela, utilizando conjugado gradiente, e  $n$  é a quantidade de amostras dentro da janela.

Na segunda etapa do algoritmo em dois passos utiliza-se o filtro calculado na etapa anterior, como entrada para o segundo problema de minimização (equação 3.46), e calcula-se uma estimativa da refletividade (Figuras 5.11 a 5.14). Além disso, foi feita a implementação do algoritmo FISTA para o segundo problema de minimização, representado pela equação 3.47, e que também utiliza como entrada o filtro estimado na etapa anterior (Figuras 5.15 e 5.16). Nessas imagens são apresentados os resultados tanto para o caso no qual a entrada para o processo é a migração RTM no domínio do tempo como a migração RTM no domínio

da frequência, ambas mostradas anteriormente.

Mediante análise das imagens nota-se que os resultados da utilização do filtro convolutivo são muito próximos tanto quando é utilizada a migração RTM no domínio do tempo como entrada para o processo, como quando utiliza-se a migração RTM no domínio da frequência (Figuras 5.12 e 5.14). Nota-se também que aumentar o número de iterações trouxe ganho substancial ao resultado, como visto mediante comparação da Figura 5.11 com 5.12 e da Figura 5.13 com 5.14. Ademais, nota-se que os resultados oriundos da utilização do algoritmo FISTA (Figuras 5.15 e 5.16) são satisfatórios no sentido de aumentar a resolução lateral e vertical e atenuar ruídos vistos nos resultados obtidos sem impor a restrição de esparsidade vista na equação 3.47. Por fim, ressalta-se que o algoritmo em dois passos apresentou resultados melhores em termos de qualidade, com melhor delineamento dos refletores e maior preservação de eventos de mergulho alto, se comparado ao algoritmo em um passo (Figuras 5.12 e 5.17). Vale ressaltar, entretanto, que todos os resultados de aplicação do filtro convolutivo não-estacionário foram satisfatórios no que se refere à compensação de iluminação se comparados com os resultados obtidos fazendo migração RTM convencional, tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência.

Pode-se também fazer análise de perfil comparando os traços migrados com a refletividade verdadeira. Nesse tipo de análise é possível verificar a qualidade das imagens apresentadas anteriormente de forma mais quantitativa, tendo em vista que o objetivo é obter um traço migrado o mais próximo possível da refletividade. Observando os resultados nota-se que a construção dos filtros convolutivos não-estacionários, à partir do resultado da migração RTM no domínio do tempo, apresenta bom resultado quando o traço migrado é comparado com a refletividade verdadeira. O mesmo ocorrendo quando se utiliza como entrada o resultado da migração RTM no domínio da frequência. Como consequência, pode-se afirmar que ambos apresentam grande compatibilidade com a referida refletividade (Figuras 5.20 e 5.19). Tal fato demonstra que o processo de minimização no domínio da imagem, mediante construção de filtros aqui apresentado, alcança bons resultados garantida certa qualidade na imagem utilizada como entrada, fato importante ao considerar questões de custo. Ou seja, não vale a pena aumentar muito o custo para a obtenção de uma boa imagem inicial se o ganho não for tão substancial.

Portanto, neste ponto, é interessante levar em consideração o custo computacional da geração desses resultados. A modelagem dos tiros, a migração RTM no domínio do tempo e no domínio da frequência foram todas feitas utilizando processamento paralelo MPI (*Message Passing Interface*) utilizando 1 nó como mestre e outros 35 nós como *slaves*. Para modelar os tiros e migrá-los no domínio do tempo com esse recurso computacional foi necessária

1 hora de execução, aproximadamente. Enquanto a migração no domínio da frequência, utilizando o mesmo recurso, gastou o dobro desse tempo. Já a construção dos filtros nas janelas seguida da geração das imagens gastou metade do tempo da migração no domínio do tempo. Ressalta-se contudo que este custo é muito sensível ao tamanho da janela podendo ser reduzido drasticamente com a diminuição da mesma. Por exemplo, utilizando uma janela  $21 \times 21$  este tempo cai para menos de um terço do tempo de execução da migração no domínio do tempo. Assim, o custo de construção dos filtros é muito menor do que, por exemplo, o da execução de um fluxograma de migração por mínimos quadrados iterativa no domínio do dado, no qual é necessário demigrar e migrar a cada iteração. Para se ter ideia, uma migração desse tipo foi testada para medição de tempo de execução e, com o mesmo recurso computacional e realizando 30 iterações, custou 12 vezes o tempo da migração RTM no domínio do tempo.

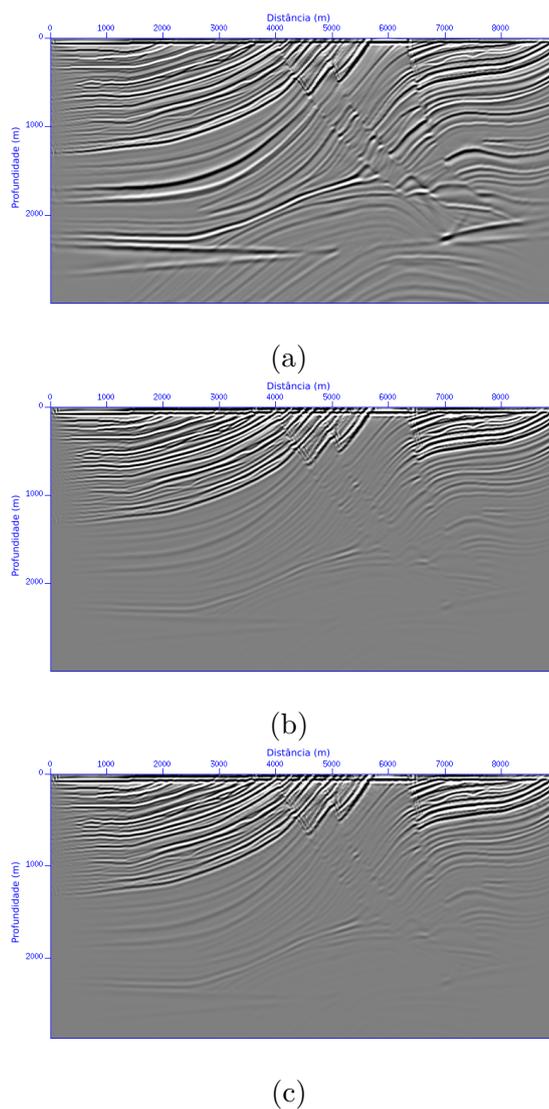


Figura 5.7: Controle de qualidade da estimativa do filtro  $\mathbf{F}$  para a migração no domínio do tempo - Modelo Marmousi; (a)  $\mathbf{m}_1$  - RTM em tempo, (b)  $\mathbf{m}_2$  e (c)  $\mathbf{m}_2^{calc}$

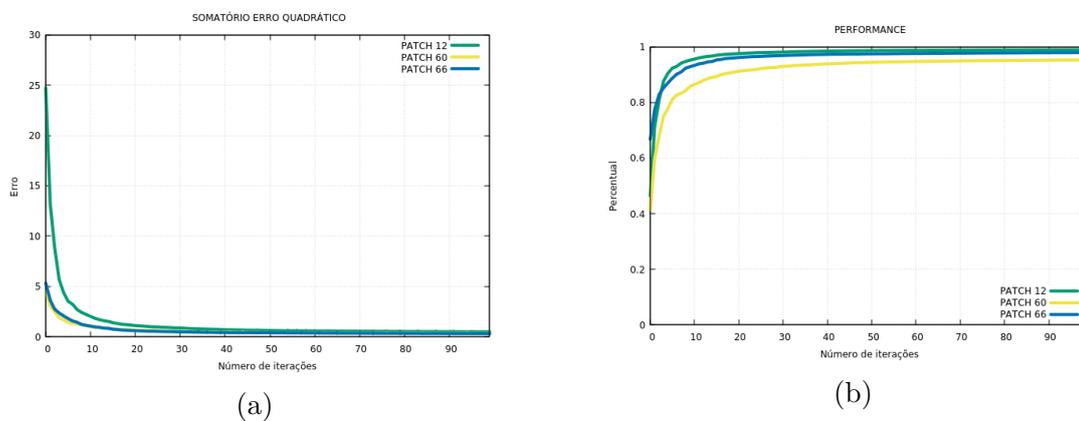


Figura 5.8: Erro e performance - Marmousi - RTM no domínio do tempo; (a) energia do erro e (b) performance.

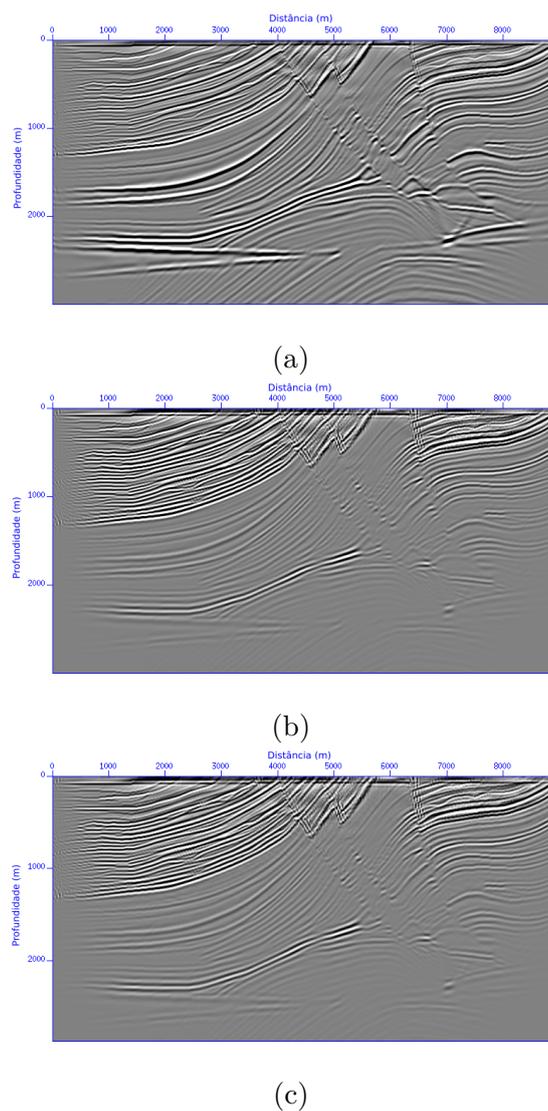


Figura 5.9: Controle de qualidade da estimativa do filtro  $\mathbf{F}$  para a migração no domínio da frequência - Modelo Marmousi; (a)  $\mathbf{m}_1$  - RTM na frequência, (b)  $\mathbf{m}_2$  e (c)  $\mathbf{m}_2^{calc}$

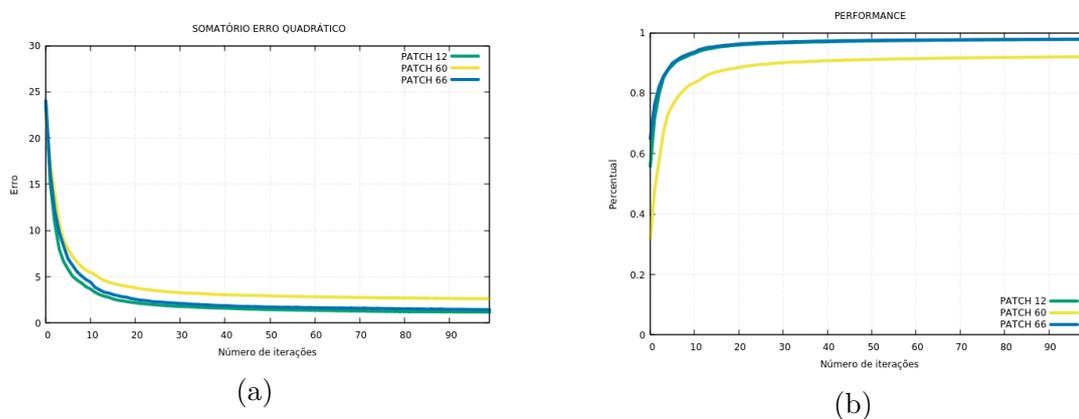


Figura 5.10: Erro e performance - Marmousi - RTM no domínio da frequência; (a) energia do erro e (b) performance.

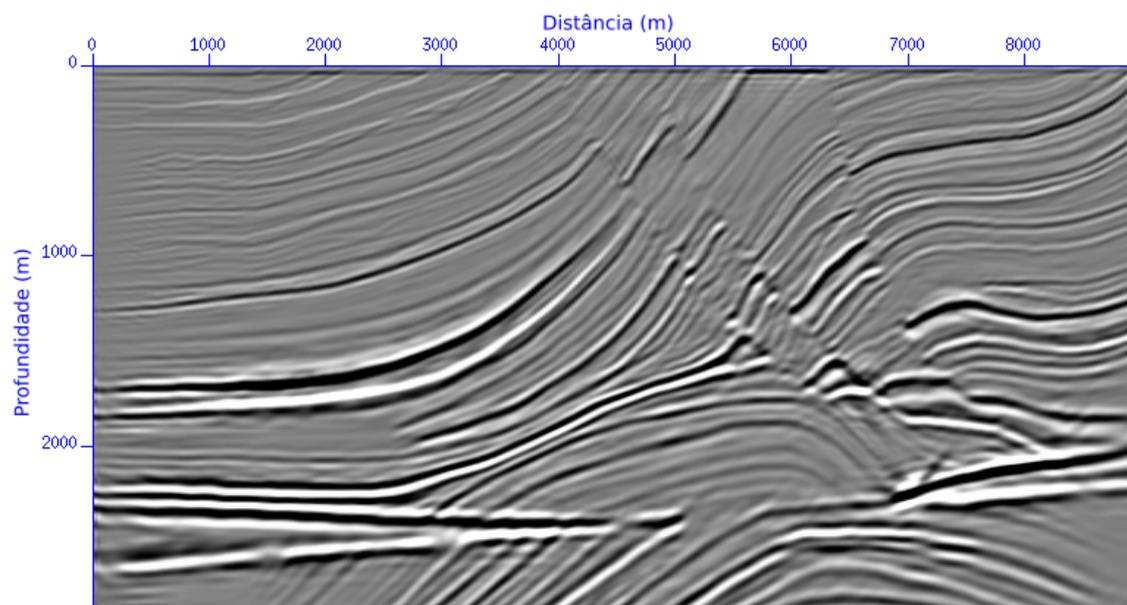


Figura 5.11: Migração RTM no domínio do tempo com filtro de forma em dois passos - 3 iterações - Modelo Marmousi.

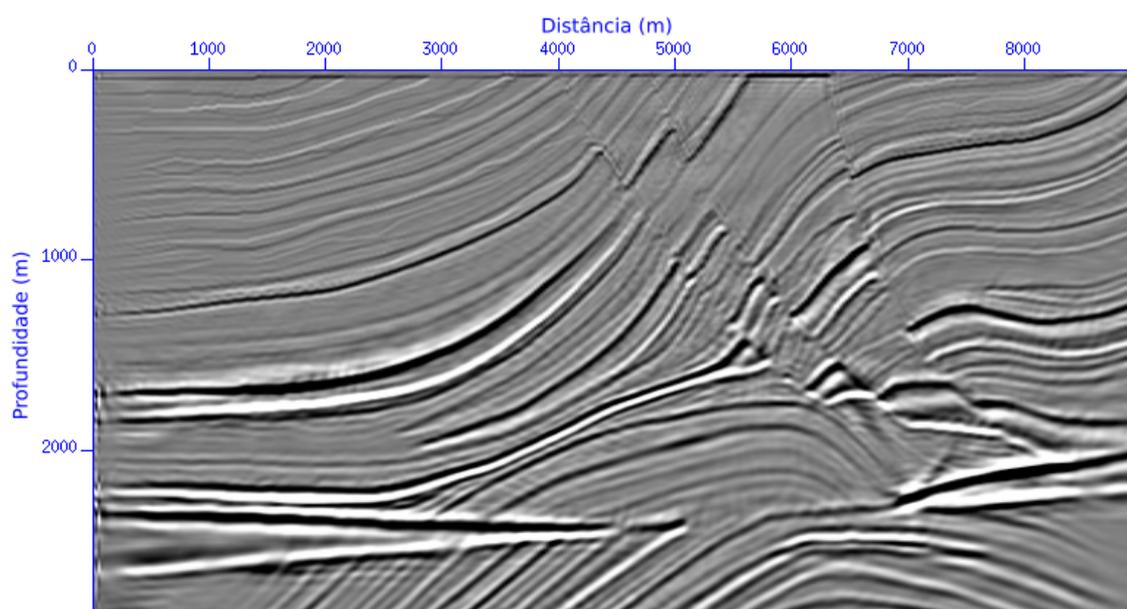


Figura 5.12: Migração RTM no domínio do tempo com filtro de forma em dois passos - 20 iterações - Modelo Marmousi.

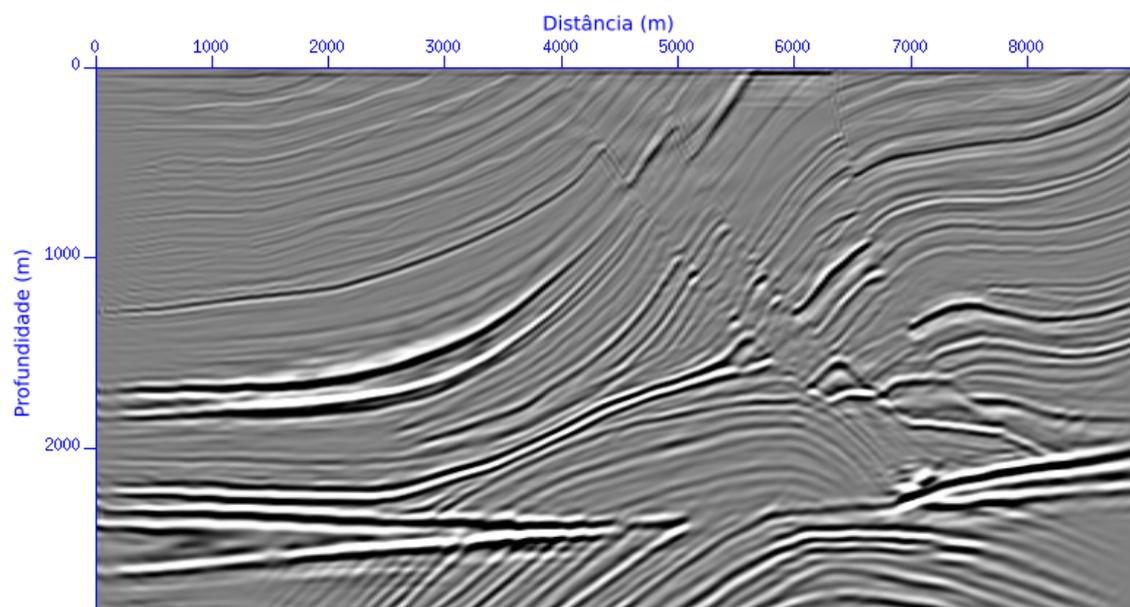


Figura 5.13: Migração RTM no domínio da frequência com filtro de forma em dois passos - 3 iterações - Modelo Marmousi.

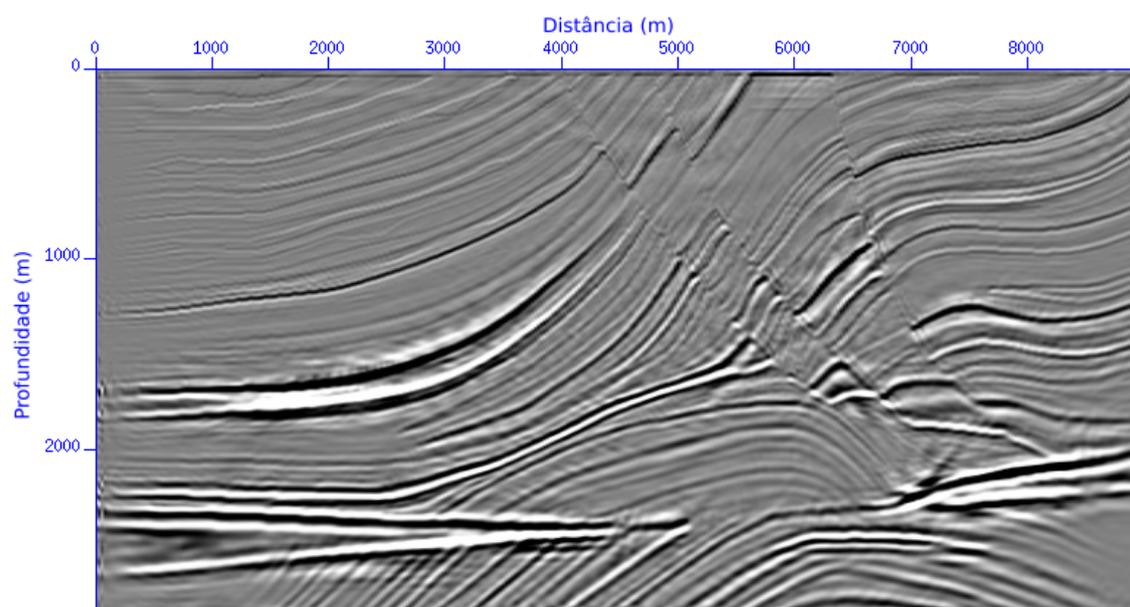


Figura 5.14: Migração RTM no domínio da frequência com filtro de forma em dois passos - 20 iterações - Modelo Marmousi.

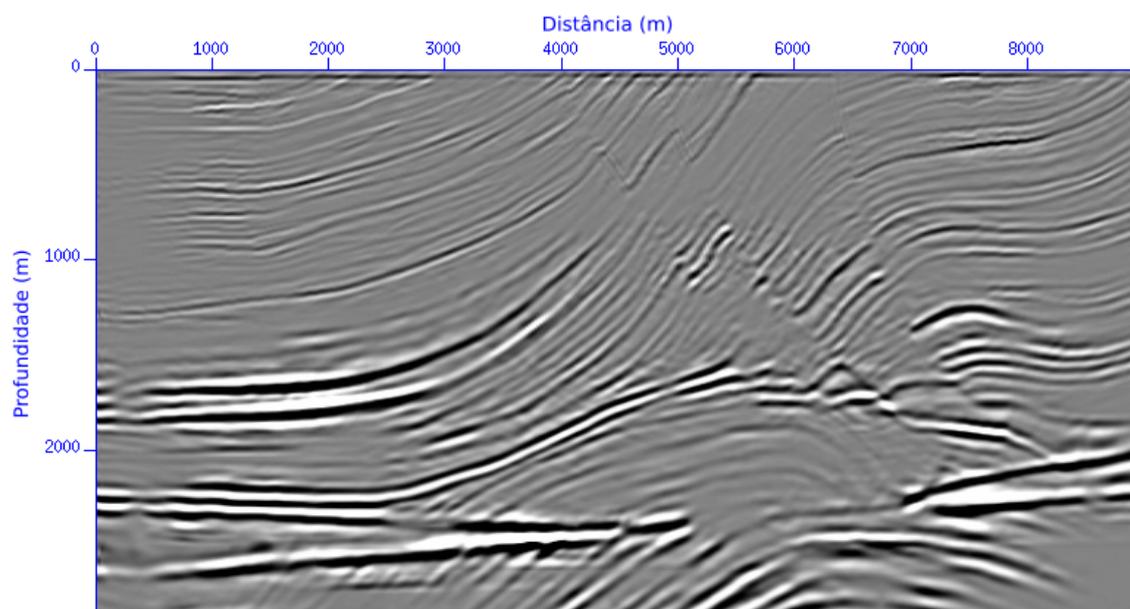


Figura 5.15: Migração RTM no domínio do tempo com filtro de forma em dois passos - FISTA - Modelo Marmousi.

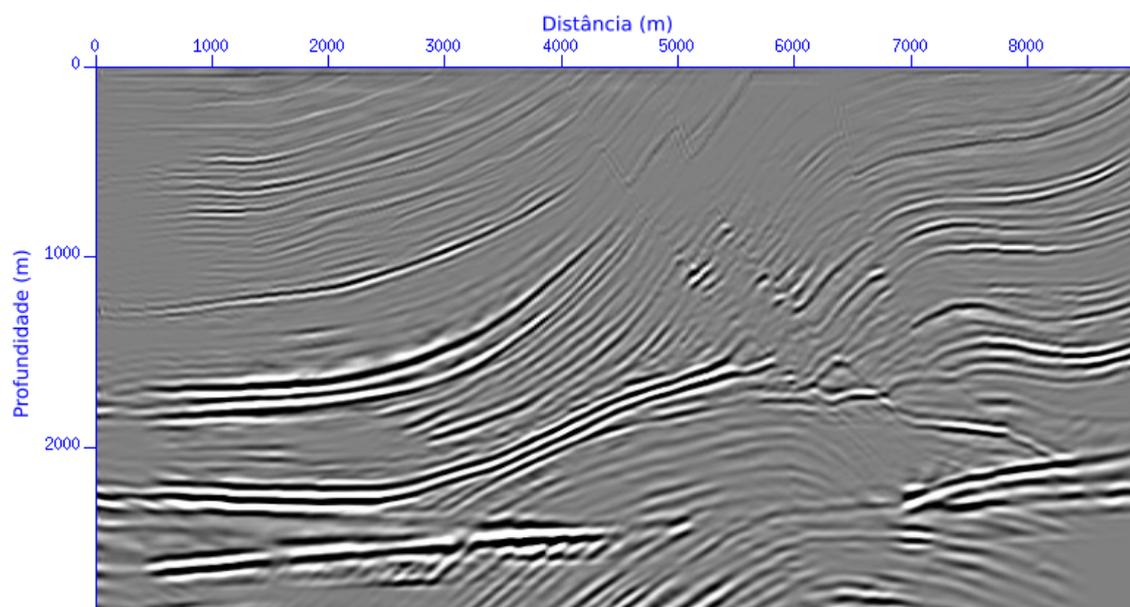


Figura 5.16: Migração RTM no domínio da frequência com filtro de forma em dois passos - FISTA - Modelo Marmousi.

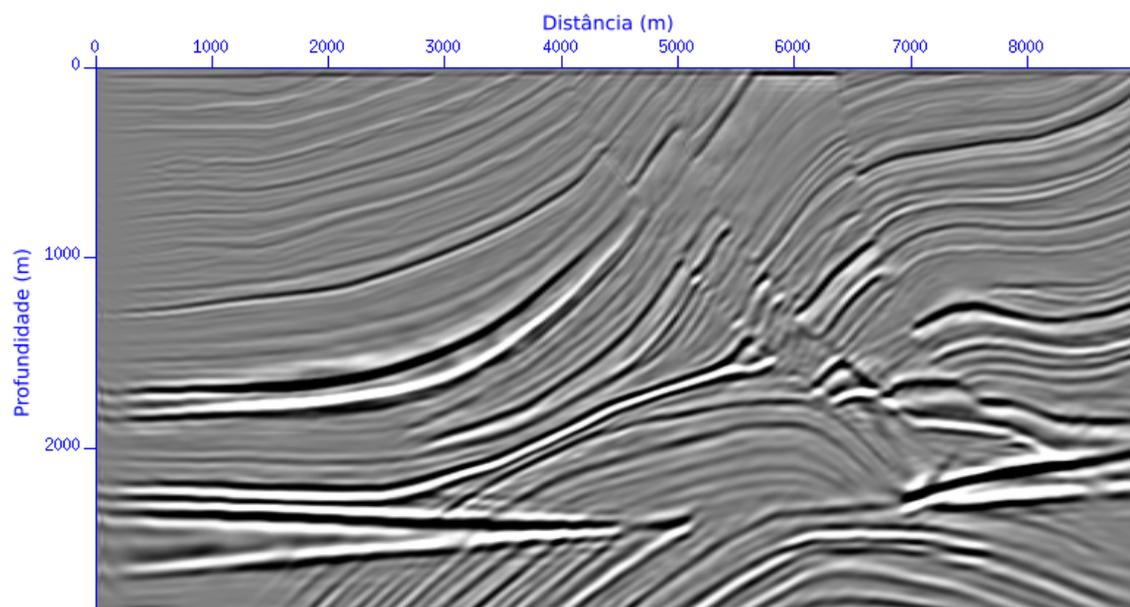


Figura 5.17: Migração RTM no domínio do tempo com filtro de forma em um passo - 20 iterações - Modelo Marmousi.

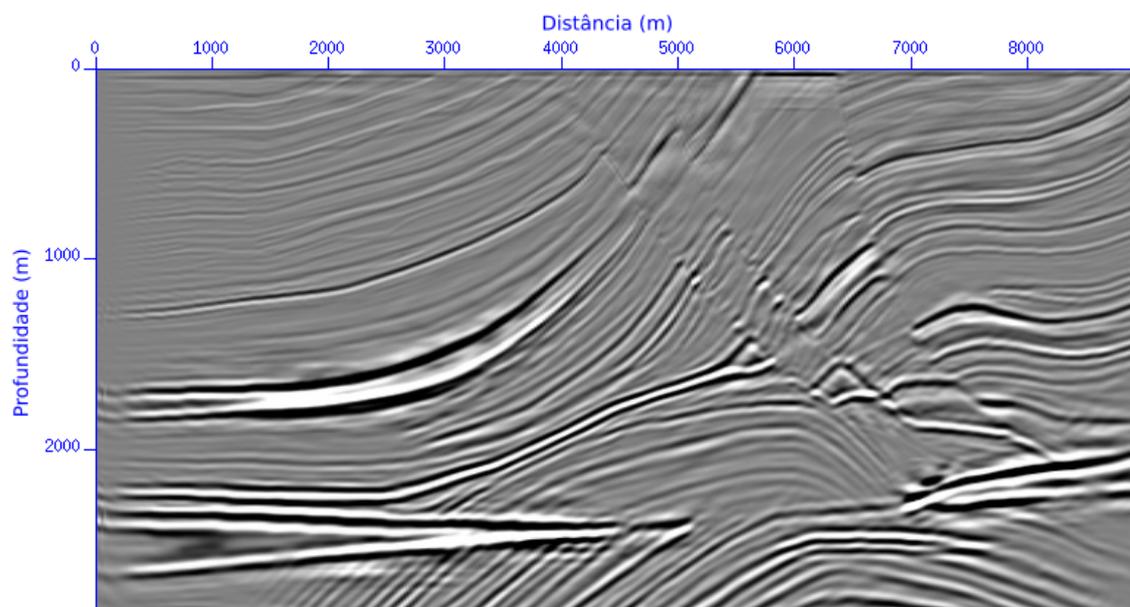


Figura 5.18: Migração RTM no domínio da frequência com filtro de forma em um passo - 20 iterações - Modelo Marmousi.

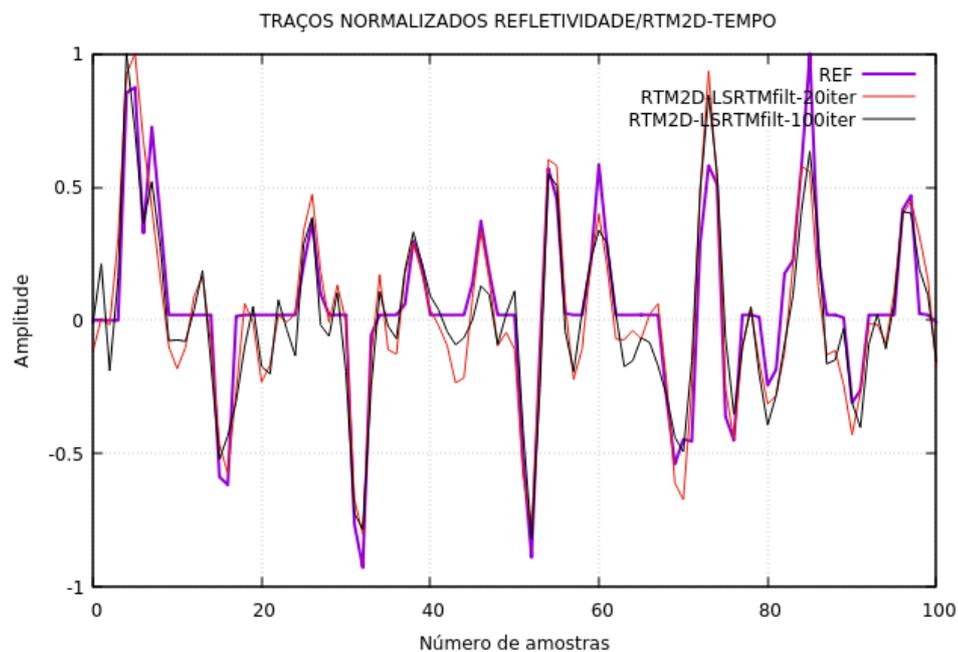


Figura 5.19: Perfil comparando refletividade verdadeira com os resultados da aplicação do algoritmo em dois passos.

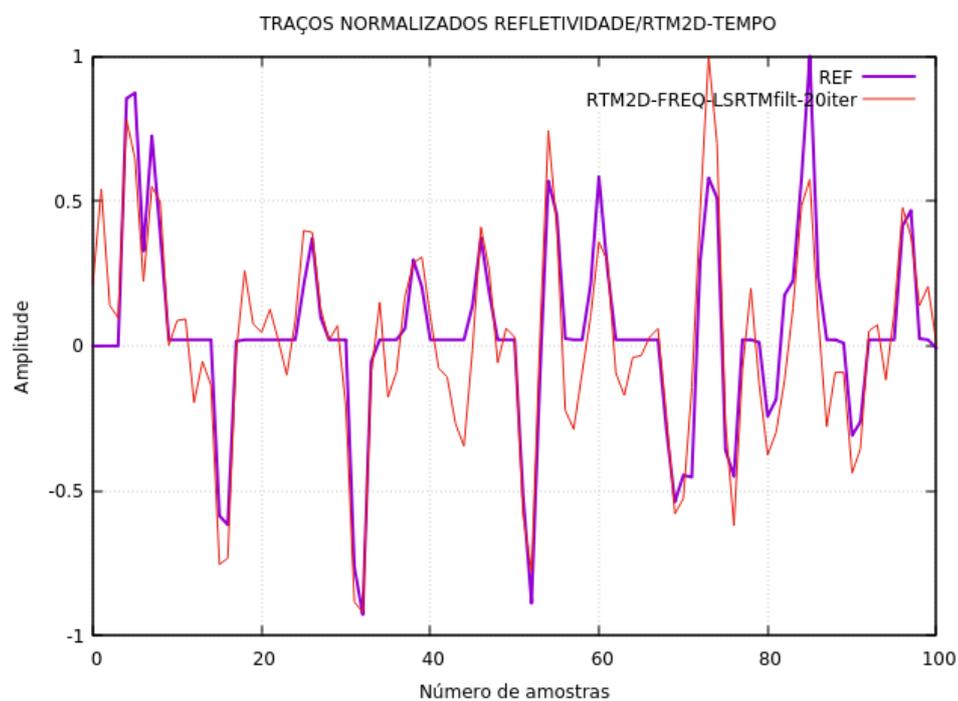


Figura 5.20: Perfil comparando refletividade verdadeira com o resultado de migração RTM na frequência e a aplicação do algoritmo em dois passos.

## 5.2 Modelo Pluto

O Pluto é também bem representativo de situações de geologia com grau de complexidade alta. O modelo possui muitas falhas de alto mergulho de extensões pequenas a médias, estando localizadas ao redor de intrusões de alta velocidade que simulam corpos salinos, por exemplo (Figura 5.21). Dados sísmicos gerados a partir deste modelo são, de modo semelhante ao caso anterior, muito úteis para testes de métodos de migração de dados sísmicos. O Pluto utilizado aqui possui 351 amostras na direção vertical espaçadas de  $10\text{ m}$  e 367 amostras na direção horizontal espaçadas de  $25\text{ m}$ , possuindo portanto  $3.5\text{ km}$  de profundidade e  $9.15\text{ km}$  de comprimento.

Os dados foram gerados com modelagem Born utilizando uma versão suavizada do modelo Pluto (Figura 5.22) e a refletividade (Figura 5.23). A geometria utilizada na modelagem foi variável: 367 tiros, sendo o primeiro posicionado na extrema-esquerda do modelo com 128 canais espalhados à direita da posição da fonte e com distanciamento entre si de  $25\text{ m}$ . A distância entre tiros também de  $25\text{ m}$  e com aumento do número de canais à medida que os tiros vão sendo gerados para posições em direção à direita do modelo. De forma que no meio do modelo a geometria de aquisição é do tipo *split-spread* com 256 canais e no final, no último tiro, terá novamente 128 canais posicionados à esquerda da posição da fonte, exatamente como foi feito para o modelo Marmousi conforme mostra a Figura 5.4. O tempo de registro é de  $2.5\text{ s}$  com intervalo de amostragem  $dt = 0.004\text{ s}$  e a fonte utilizada possui  $17.5\text{ Hz}$  de frequência de pico.

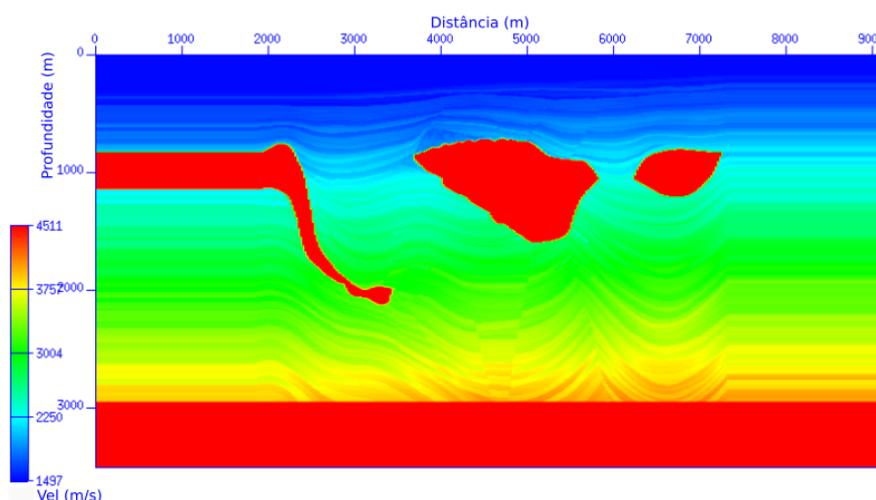


Figura 5.21: Campo de velocidades do modelo Pluto.

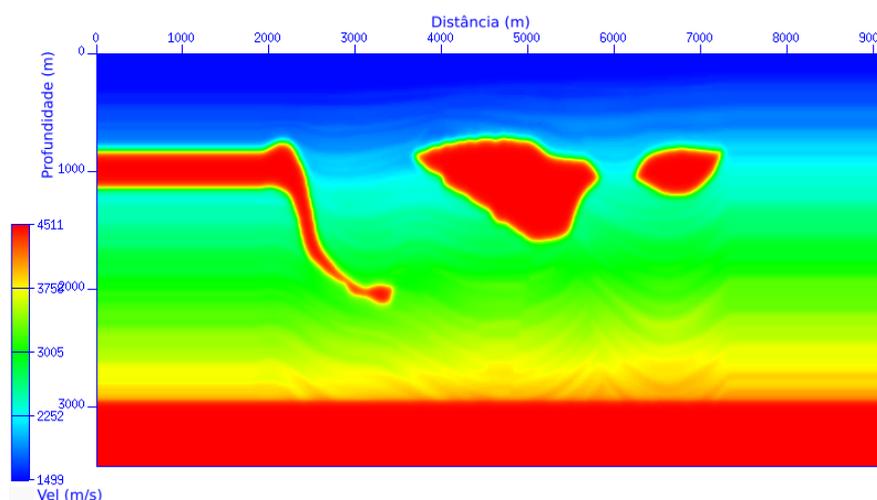


Figura 5.22: Campo de velocidades suave do modelo Pluto.

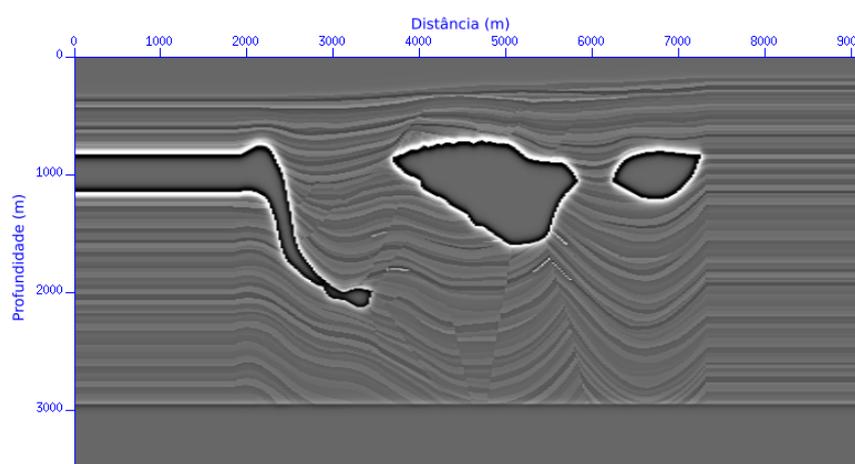


Figura 5.23: Refletividades do modelo Pluto.

Para a migração RTM no domínio do tempo (Figura 5.24) foram utilizados todos os tiros, gravando todos os instantâneos da fonte, sem utilizar a estratégia de *check points*, assim como foi feito para o modelo Marmousi. Para a migração RTM no domínio da frequência foram utilizadas 106 frequências, uma vez que o intervalo entre frequências utilizado é  $df = \frac{1}{nt \cdot dt}$  e a frequência máxima utilizada de  $f_{max} = 35.0 \text{ Hz}$ . A implicação disso é que cada instantâneo de dimensão  $nx \times nz$  gerará quatro cubos de dados com dimensões  $nx \times nz \times 106$ , conforme representação esquemática na Figura 2.2. Isso terá impacto no tempo de execução, analogamente ao que já foi dito antes para o caso do modelo Marmousi (algoritmo 1). O resultado da migração RTM no domínio da frequência é visto na Figura 5.25 e apresenta um melhor delineamento dos refletores e melhor distribuição de amplitudes ao longo da seção. Como no caso anterior, os resultados da migração RTM no domínio do tempo e da frequência são levados adiante para posterior comparação em termos de melhor estimativas dos filtros discutidos no capítulo 3, seção 3.3.

Mais uma vez, para aplicação da metodologia aqui apresentada é necessário que seja feita demigração dos resultados obtidos (Figuras 5.24 e 5.25) e posterior remigração e consequente construção do que aqui é denominado de  $\mathbf{m}_2$  (Figura 3.3). Feito isso, tem-se os elementos necessários para, conhecendo a relação expressa pela equação 3.43, resolver os problemas de minimização expressos pela equação 3.44 (algoritmo em 1 passo) e pelo par de equações 3.45 e 3.46 (algoritmo em 2 passos). Para a construção dos filtros e obtenção da imagem final foi utilizado o conjugado gradiente, feito janela a janela, de forma análoga ao que foi feito para o modelo Marmousi. Ressalta-se que utilizou-se o mesmo tamanho de janela:  $31 \times 31$  com salto de 15 amostras em ambas as direções. Ademais, o conceito de vetor abstrato apresentado por Claerbout e Fomel (2012) foi aplicado novamente.

Assim, começando com o algoritmo em dois passos, a primeira etapa é estimar um filtro numa abordagem mínimos quadrados que seja uma aproximação, em termos de efeito sobre o dado, da Hessiana propriamente e não de sua inversa, conforme expressa a equação 3.45. Estimados os filtros, para controle de qualidade, foram analisados os resultados da aplicação nas janelas mediante reconstrução das imagens calculadas (Figuras 5.26 e 5.28). Nota-se que o  $\mathbf{m}_2^{calc}$  se aproxima de forma satisfatória do  $\mathbf{m}_2$  verdadeiro também para o modelo Pluto.

Na segunda etapa do algoritmo em dois passos, da mesma forma que foi feito para o Marmousi, utiliza-se o filtro calculado no primeiro passo como entrada para o segundo problema de minimização (equação 3.46) e calcula-se uma estimativa da refletividade (Figuras 5.30 a 5.33). Aqui, mais uma vez, são apresentados os resultados tanto para o caso no qual a entrada para o processo é a migração RTM no domínio do tempo como a migração RTM no domínio da frequência (Figuras 5.24 e 5.25). Ressalta-se que, para o caso do modelo Pluto, foram feitos testes de utilização do algoritmo FISTA. Os resultados, contudo, não foram satisfatórios principalmente nas regiões de alta complexidade estrutural ao redor das intrusões e apontam para a necessidade de testes adicionais.

Mediante análise das imagens nota-se, mais uma vez, que os resultados da utilização do filtro convolutivo são muito próximas tanto quando é utilizada a migração RTM no domínio do tempo como entrada para o processo, quanto como quando utiliza-se a migração RTM no domínio da frequência (Figuras 5.31 e 5.33). Nota-se que aumentar o número de iterações trouxe ganho real ao resultado, como visto mediante comparação da Figura 5.30 com 5.31 e da Figura 5.32 com 5.33. Por fim, ressalta-se que o algoritmo em dois passos apresentou resultados mais interessantes em termos de qualidade dos resultados, com melhor delineamento dos refletores e maior preservação dos eventos, se comparado ao algoritmo em um passo (Figuras 5.31 e 5.34). Vale ressaltar, entretanto, que todos os resultados de aplicação do filtro convolutivo não-estacionário foram satisfatórios no que se refere à compensação

de iluminação se comparados com os resultados obtidos fazendo migração RTM, tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência.

Finalmente, pode-se também fazer análise de perfil comparando os traços migrados com a refletividade verdadeira para o modelo Pluto. Nesse tipo de análise, como visto anteriormente, é possível controlar a qualidade das imagens de forma mais quantitativa, comparando o traco migrado com a refletividade. Para o caso do modelo Pluto, escolheu-se uma região da imagem fora dos altos contrastes de velocidade. Observando os resultados, nota-se que a construção dos filtros convolutivos não-estacionários à partir do resultado da migração RTM no domínio do tempo apresenta bom resultado quando o traço migrado é comparado com a refletividade verdadeira. Como no Marmousi, o mesmo ocorre quando se utiliza como entrada a migração RTM no domínio da frequência. Como consequência, pode-se afirmar que ambos apresentam grande compatibilidade com a referida refletividade (Figuras 5.37 e 5.36). Tal fato demonstra que o processo de minimização no domínio da imagem, mediante a construção de filtros, alcança bons resultados garantida certa qualidade na imagem utilizada como entrada, fato importante ao considerar questões de custo. Ou seja, fica demonstrado que não vale a pena aumentar muito o custo para a obtenção de uma boa imagem inicial se o ganho não for tão substancial. Ressalta-se que as considerações de custo feita anteriormente para o modelo Marmousi são equivalentes às medidas feitas para o modelo Pluto.

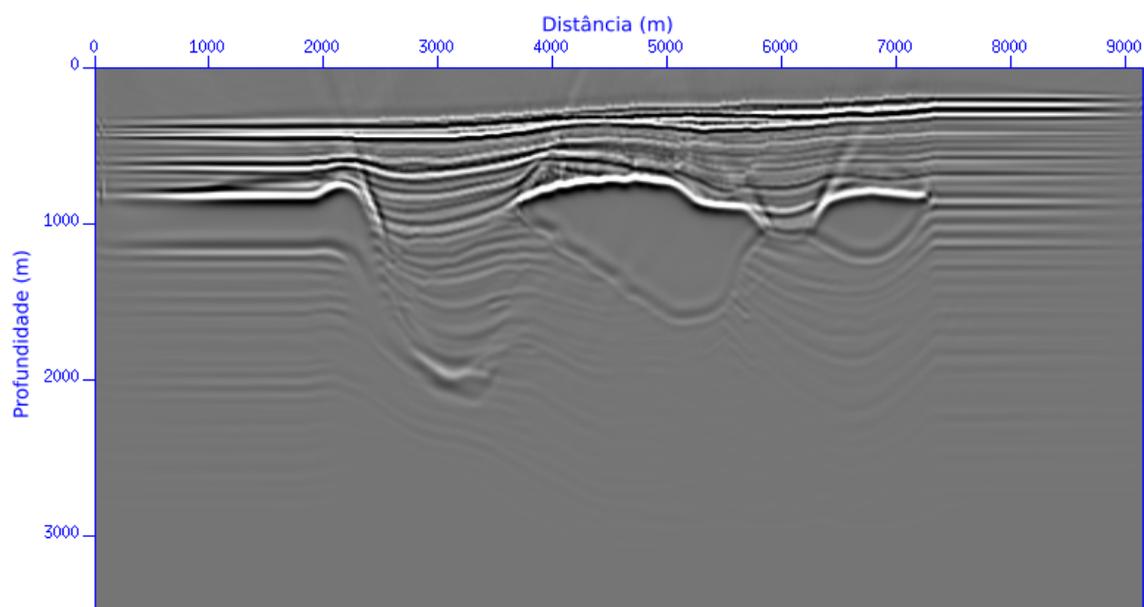


Figura 5.24: Migração RTM no domínio do tempo - Modelo Pluto.

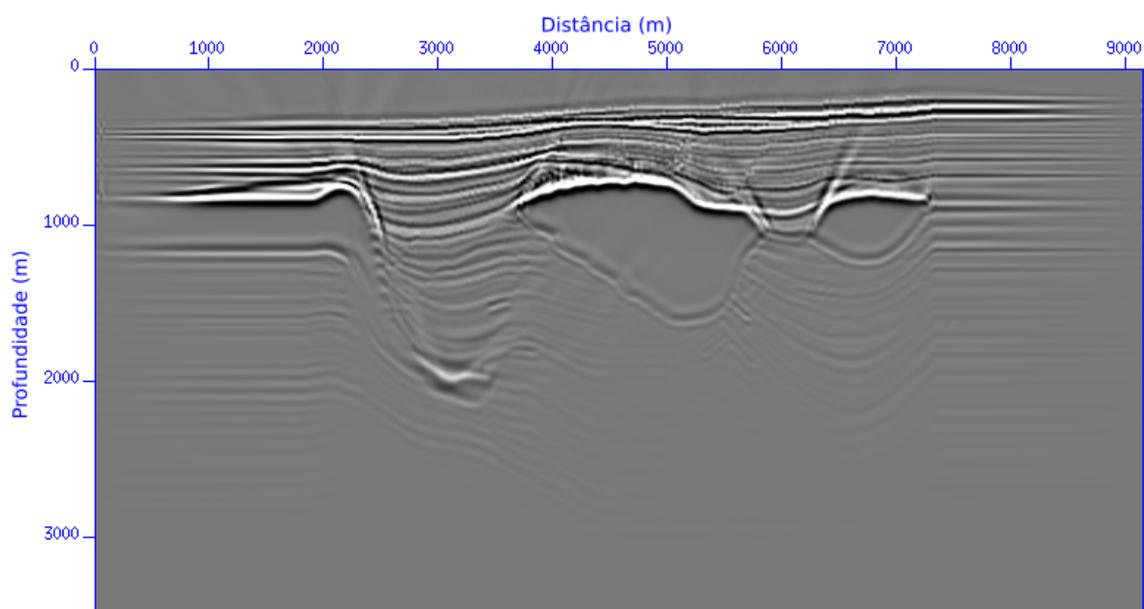


Figura 5.25: Migração RTM no domínio do frequência - Modelo Pluto.

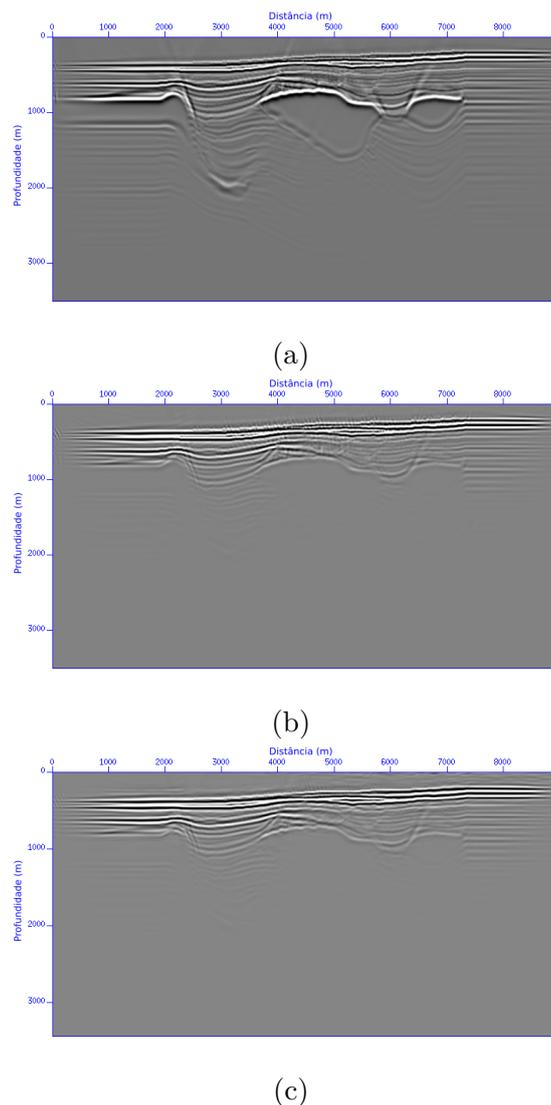


Figura 5.26: Controle de qualidade da estimativa do filtro  $\mathbf{F}$  para a migração no domínio do tempo - Modelo Pluto; (a)  $m_1$  - RTM em tempo, (b)  $m_2$  e (c)  $m_2^{calc}$

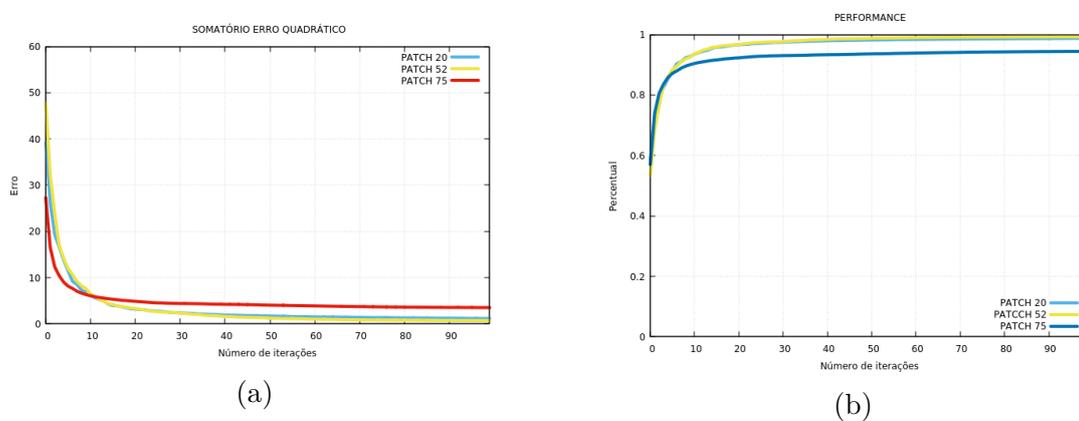


Figura 5.27: Erro e performance - Pluto - RTM no domínio do tempo; (a) energia do erro e (b) performance.

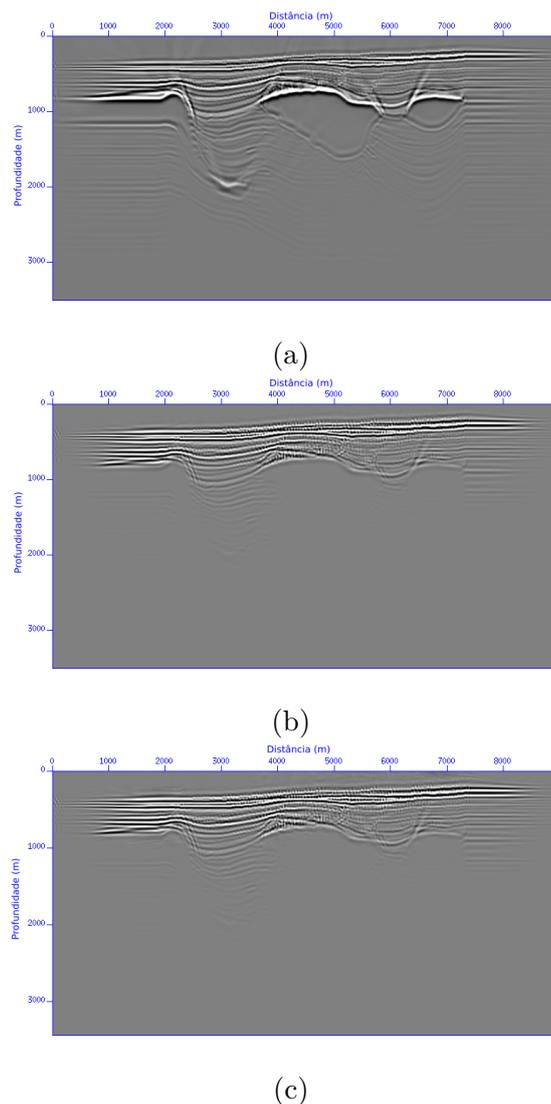


Figura 5.28: Controle de qualidade da estimativa do filtro  $\mathbf{F}$  para a migração no domínio da frequência - Modelo Pluto; (a)  $\mathbf{m}_1$  - RTM na frequência, (b)  $\mathbf{m}_2$  e (c)  $\mathbf{m}_2^{calc}$

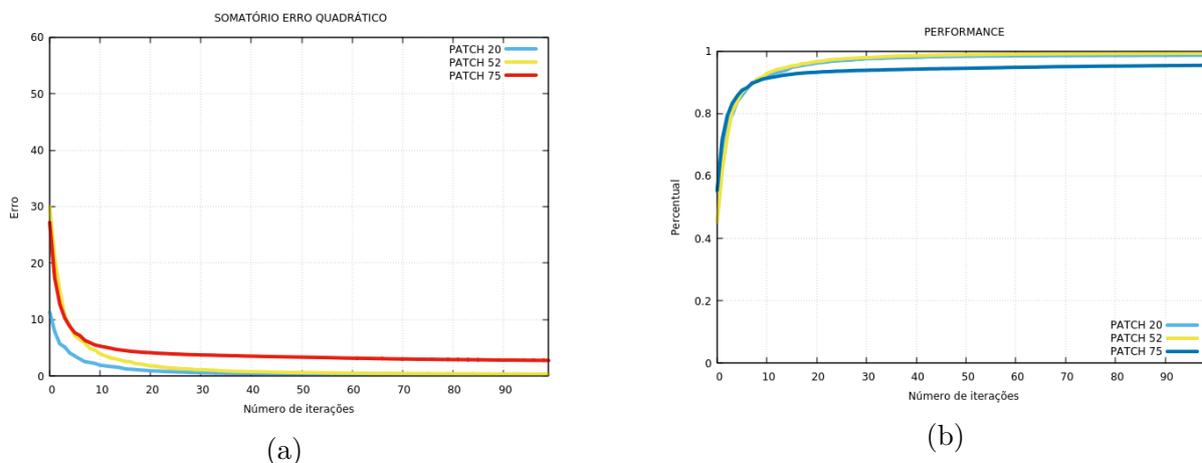


Figura 5.29: Erro e performance - Pluto - RTM no domínio da frequência; (a) energia do erro e (b) performance.

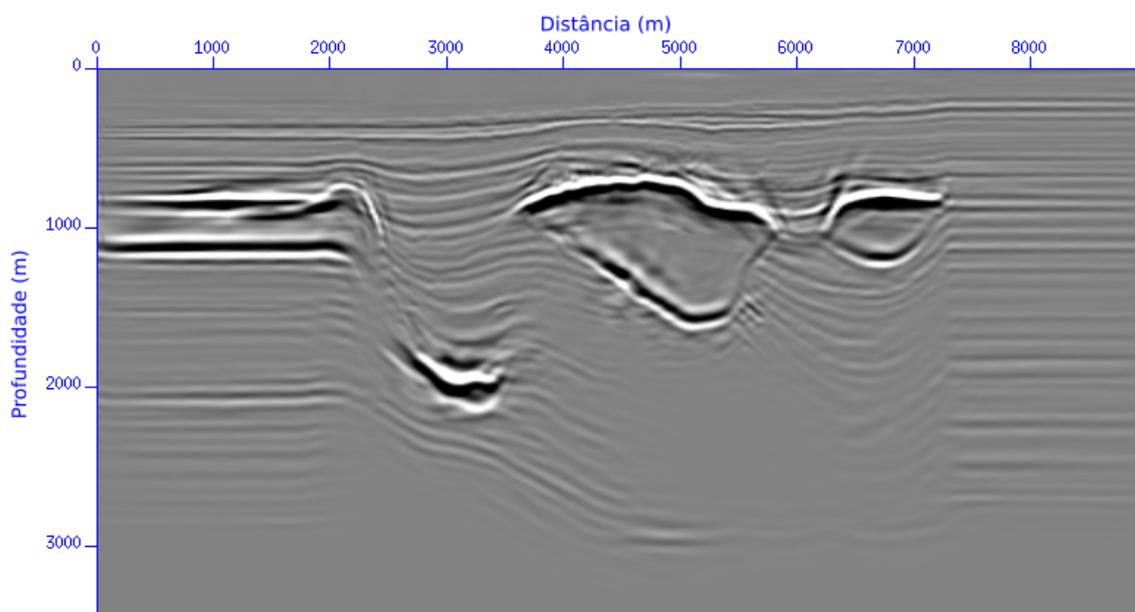


Figura 5.30: Migração RTM no domínio do tempo com filtro de forma em dois passos - 3 iterações - Modelo Pluto.

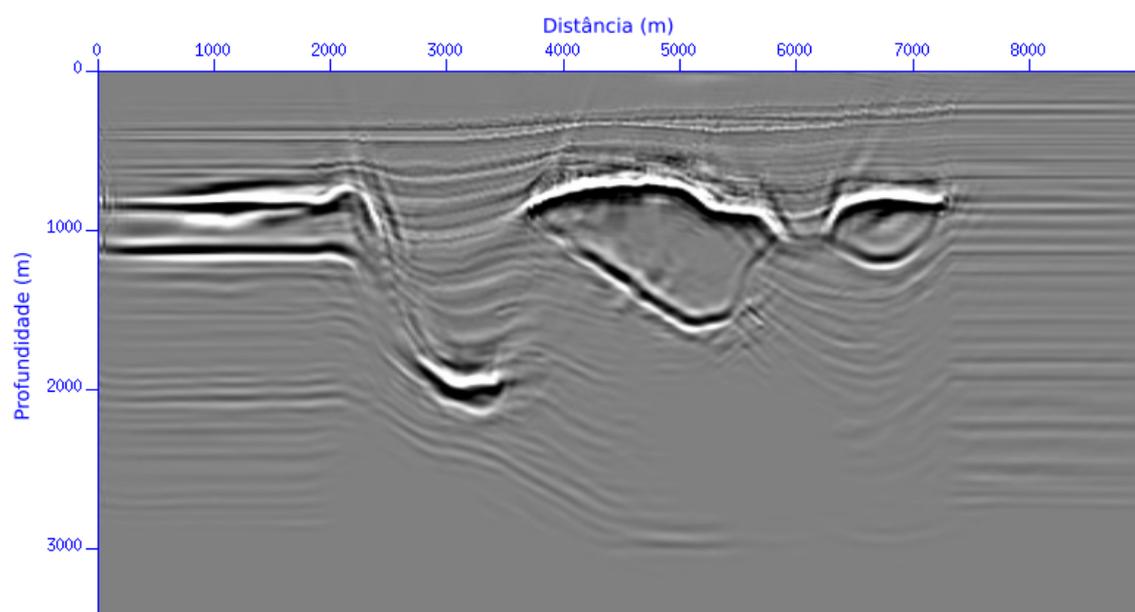


Figura 5.31: Migração RTM no domínio do tempo com filtro de forma em dois passos - 20 iterações - Modelo Pluto.

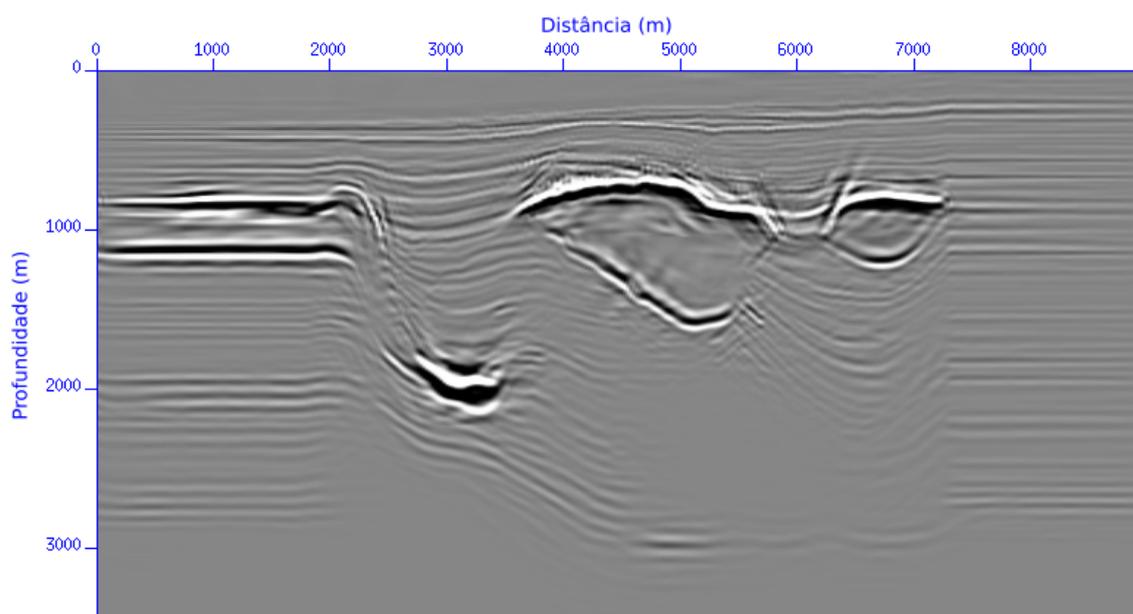


Figura 5.32: Migração RTM no domínio da frequência com filtro de forma em dois passos - 3 iterações - Modelo Pluto.

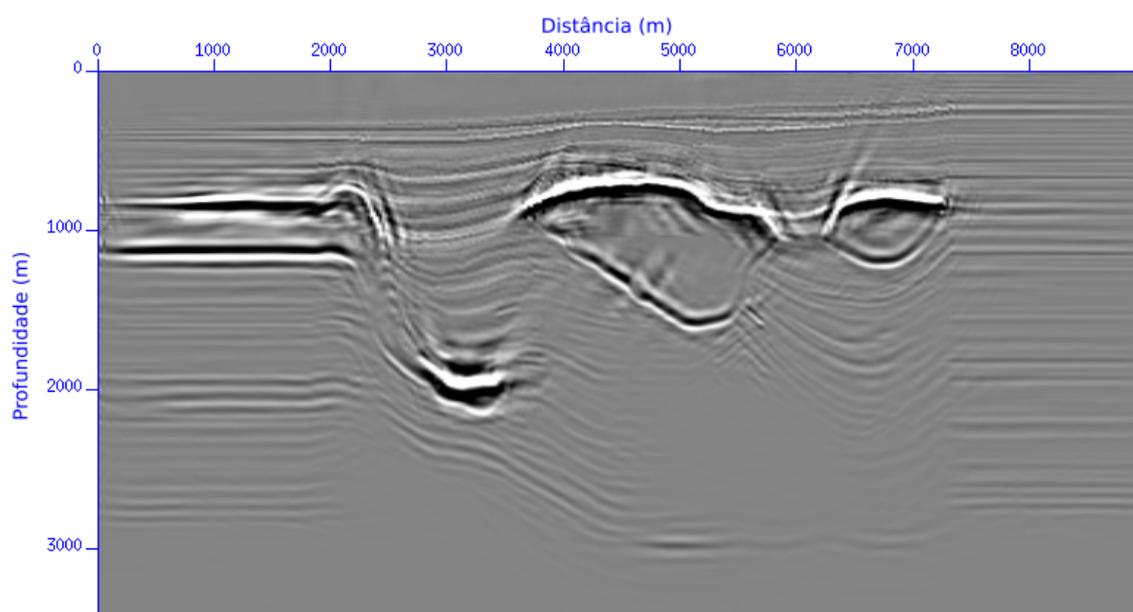


Figura 5.33: Migração RTM no domínio da frequência com filtro de forma em dois passos - 20 iterações - Modelo Pluto.

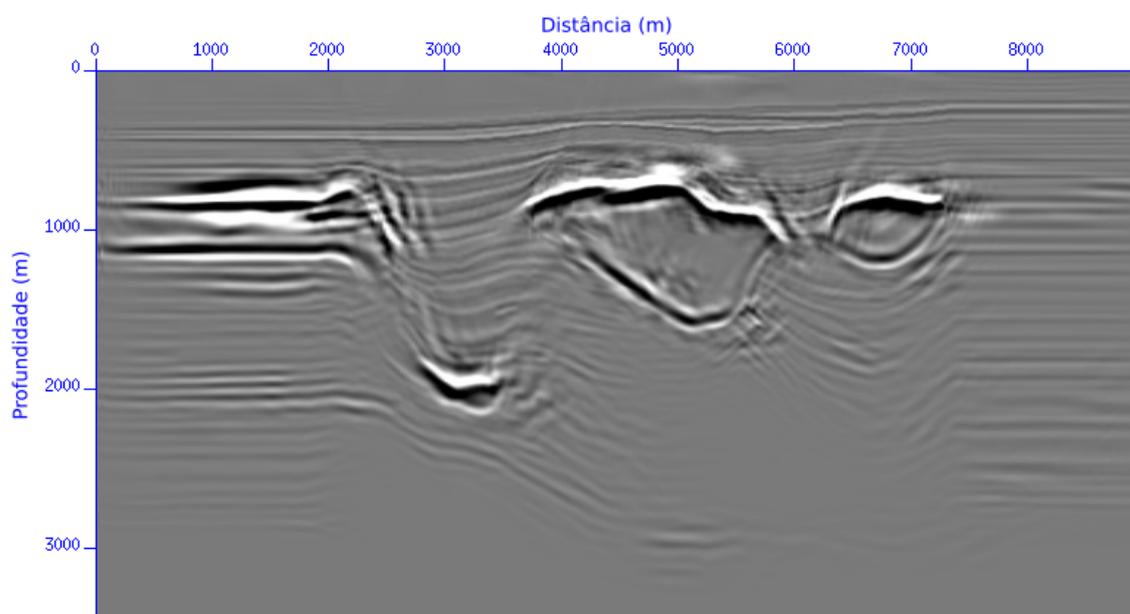


Figura 5.34: Migração RTM no domínio do tempo com filtro de forma em um passo - 20 iterações - Modelo Pluto.

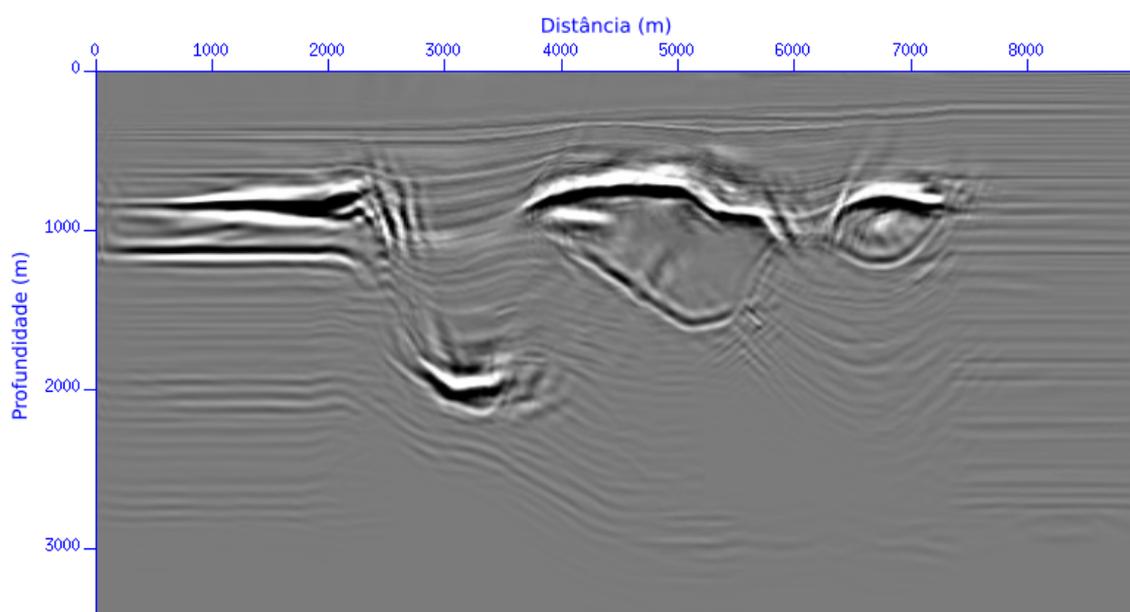


Figura 5.35: Migração RTM no domínio da frequência com filtro de forma em um passo - 20 iterações - Modelo Pluto.

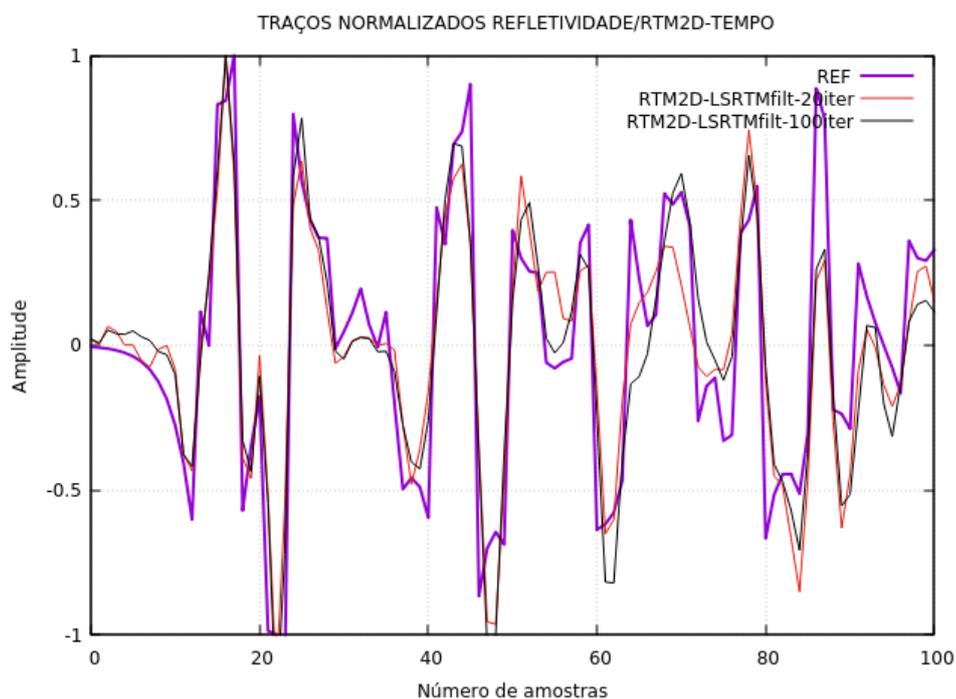


Figura 5.36: Perfil comparando refletividade verdadeira com os resultados de migração RTM no tempo e o resultado da aplicação do algoritmo em dois passos - Modelo Pluto.

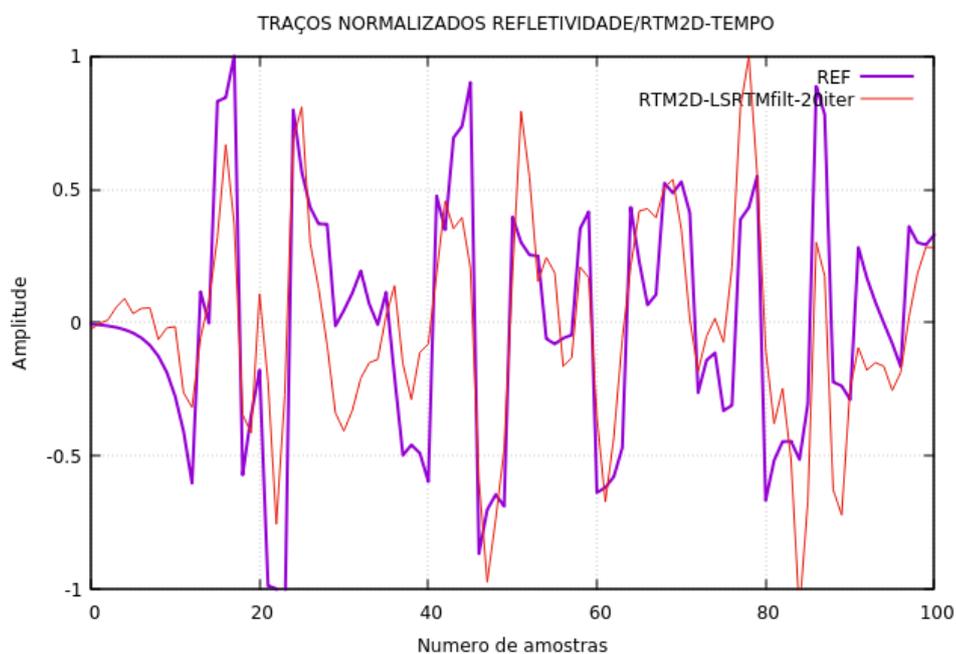


Figura 5.37: Perfil comparando refletividade verdadeira com os resultados de migração RTM na frequência e o resultado da aplicação do algoritmo em dois passos - modelo Pluto.

# 6

## Conclusões

No presente trabalho foram apresentados os resultados da utilização de filtros convolutivos não-estacionários numa abordagem mínimos quadrados, em um e dois passos, no domínio da imagem tendo como entrada para o processo os resultados de migrações convencionais nos domínios do tempo e da frequência. Tais filtros funcionaram bem, sendo que para o caso do modelo Marmousi os resultados se mostraram melhores em relação àqueles obtidos com o modelo Pluto.

Para o algoritmo em dois passos, uma primeira etapa de controle de qualidade foi feita analisando o que aqui é denominada de  $\mathbf{m}_2^{calc}$ , que nada mais é que resultado da convolução entre o filtro calculado na janela e o  $\mathbf{m}_1$  oriundo das migrações convencionais. Tanto para o modelo Marmousi como para o Pluto, a análise do  $\mathbf{m}_2^{calc}$  obtido garante grande confiabilidade para o filtro estimado, tendo em vista que tanto o resíduo tende a 0, como a performance tende a 1 à medida que se dão as iterações. Assim, partindo para etapa seguinte na qual, conhecido o filtro, a imagem que mais se aproxima da refletividade verdadeira pode ser obtida numa abordagem mínimos quadrados (ver par de equações 3.45 e 3.46), notou-se alguma distinção em termos de qualidade entre os resultados obtidos com o modelo Marmousi e o Pluto (Figuras 5.12, 5.12, 5.31 e 5.33).

Para o algoritmo em um passo, o controle de qualidade foi feito analisando o que aqui é denominada de  $\mathbf{m}_1^{calc}$ , que nada mais é que resultado da convolução entre o filtro calculado na janela e o  $\mathbf{m}_2$  oriundo das migrações convencionais. Tanto para o modelo Marmousi como para o Pluto, a análise do  $\mathbf{m}_1^{calc}$  obtido garante grande confiabilidade para o filtro estimado, tendo em vista que tanto o resíduo tende a 0, como a performance tende a 1 à medida que se dão as iterações. Assim, conhecido o filtro, a imagem que mais se aproxima da refletividade

verdadeira pode ser obtida numa abordagem mínimos quadrados em um passo (ver equação 3.44), também notou-se alguma distinção em termos de qualidade entre os resultados obtidos com o modelo Marmousi e o Pluto (Figuras 5.17, 5.18, 5.34 e 5.35).

Resalta-se que, nas regiões de baixa complexidade (na parte rasa das seções) os filtros funcionaram bem, fato demonstrado também pela análise de perfil. Nessas regiões nota-se que os resultados das migrações convencionais nos domínios do tempo e da frequência tendem para a refletividade quando da aplicação dos filtros (Figuras 5.19, 5.20, 5.36 e 5.36). Contudo, para ambos os modelos, nas regiões de alto contraste de velocidade, vistas na parte profunda do Marmousi e ao redor das intrusões de alta velocidade, que simulam corpos salinos no modelo Pluto, os resultados são dominados por uma baixa frequência que, em medidas diferenciadas para um e outro, distorcem os resultados obtidos.

Outra questão importante a ser mencionada é que, os testes utilizando entradas oriundas da migração RTM no domínio do tempo e da frequência demonstraram que, no caso do modelo Marmousi, utilizar um ou outro como entrada fez pouca diferença no resultado final. Tal fato permite concluir que, se o ganho em relação ao método de migração utilizado para gerar uma imagem inicial, como entrada para o processo aqui apresentado for pequeno em detrimento do custo computacional para obtê-lo, convém priorizar o custo menor. No que se refere ao modelo Pluto os resultados não foram os esperados. Neste modelo há intrusões de alta velocidade em profundidades baixas, o que faz com que grande parte da energia propagada seja refletida, dificultando assim o imageamento abaixo das referidas intrusões e, conseqüentemente, dificultando a atuação dos filtros de forma aqui discutidos. Ressalta-se, portanto, que há caminho para testes relacionados a fatores como frequência máxima presente nos dados, tamanho da janela e comprimento dos filtros.

Foram também feitos testes associados ao tamanho da janela sem grandes alterações em termos de qualidade do resultado final, para o modelo Marmousi, mas com grandes impactos em relação ao custo. Tal fato está relacionado à maneira como o código de conjugado gradiente aqui utilizado para resolver os problemas de minimização foi escrito. Ou seja, a existência dentro do código de produtos matriz-vetor e matriz-matriz fez com que o tempo de execução aumentasse muito com o aumento da janela. Assim, a depender de como se escreva o código, esta pode ser uma questão importante a se considerar, tendo em vista que nos experimentos aqui conduzidos essa diminuição na janela, de  $31 \times 31$  para  $21 \times 21$ , reduziu o tempo de execução para menos de um terço em relação ao tempo da janela maior.

Por fim, deve-se ressaltar que foi utilizada aqui regularização  $L_1$  como fator restritivo para a solução buscada nos processos de minimização apresentados. Esse tipo de abordagem apresentou resultados promissores no modelo Marmousi, como visto comparando a Figura 5.5 com 5.15 e a Figura 5.6 com 5.16. Contudo, no que se refere ao modelo Pluto, são necessários testes adicionais, sendo uma das possibilidades testar outros algoritmos de implementação do fator de esparsidade com norma  $L_1$ . Logo, os resultados aqui apresentados têm potencial de obter melhora substancial em termos de qualidade das imagens finais avançando nos testes desse tipo de abordagem. O que não anula a validade das conclusões aqui apresentadas.

# Agradecimentos

À Deus, Aquele a quem a todos dá vida, respiração e todas as coisas (Atos dos apóstolos 17:25b). Sem o suprimento abundante do Espírito de Jesus Cristo, mencionado pelo apóstolo Paulo ao escrever sua carta aos crentes filipenses (Filipenses 1:19), não é possível para mim caminhar e existir sobre a Terra. Ainda mais em um período atípico como foram esses dois anos no qual uma pandemia assolou a Terra. A Ele, portanto, minha gratidão e louvor por estar aqui escrevendo essas linhas!

À Carla que ao longo desses dois anos de labor me apoiou o tempo inteiro e de diversas formas, seja sendo a primeira a assitir minhas apresentações ou simplesmente me escutando nos momentos de dificuldade e desabafo. À Gabo, meu filho hoje com 8 anos, que teve que lidar com o fato de o Papa não poder brincar em momentos em que ele e eu gostaríamos muito. Esse período de desenvolvimento pessoal tem a contribuição decisiva de Carla e Gabo por essas razões, mas também pelo fato de sempre ter neles o descanso que vem do amor e afeto contidos nos beijos e abraços diários.

Aos meus pais, Rau e Vanda, e irmãos, Iria e Thiago. Sempre atentos e preocupados, querendo saber de mim e orando por mim. É realmente maravilhoso tê-los! Neste ponto tenho o dever moral de mencionar o apoio de Iria e Thiago no cuidado de meus pais no período da pandemia, um momento em que não pude estar tão perto.

Aos meus sogros, Ana e Carlos, e cunhados. Sempre orando por mim e comunicando-me este fato. Agradeço, portanto, pelo apoio na esfera das coisas invisíveis, mas reais.

Ao meu amigo e companheiro de luta Jorge Santana. Ao longo desses dois anos estivemos juntos nas dificuldades, nas conquistas, no apoio mútuo, na conversa distraída, no estudo das questões. Fecho esse ciclo tendo a convicção de que uma amizade para a vida foi edificada.

À Salvador Carvalho e Luiz Mercês, amigos que foram para mim muito presentes ao longo dessa jornada. Neles sempre tive apoio, conselho e afeto.

À Levi Mercês, amigo do peito. Para mim um irmão, alguém que sei sempre estar perto. Essa convicção, em si mesma, produz descanso.

À Reynam Pestana, meu orientador. Sou profundamente grato por todo o saber ministrado e disponibilidade irrestrita. Sempre tranquilizador e sereno, mostando-me o caminho e apoiando. Por isso meu coração é grato.

À banca examinadora por ter aceitado o convite.

À Petrobras pelo apoio financeiro.

À todos os que oraram por mim.

Aos amigos que fiz ao longo da jornada na pós-graduação, a vocês meu abraço.

# 7

## Referências Bibliográficas

- Alford, R., K. Kelly e D. Boore. 1974. “Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation”. *Geophysics* 39:834–842.
- Andrade, Protásio Nery. 2017. “Imageamento sísmico através do método de expansão rápida nos domínios do tempo e da frequência”. Tese de doutorado, Universidade Federal da Bahia.
- Andrade, Protásio Nery, Reynam Cruz Pestana e Daniel E. Revelo. 2017. “Reverse time migration in the frequency domain by the rapid expansion method”. *Revista Brasileira de Geofísica* 35, nº 4 (dezembro): 287. doi:[10.22564/rbgf.v35i4.916](https://doi.org/10.22564/rbgf.v35i4.916).
- Baysal, E., D. Kosloff e J. Sherwood. 1983. “Reverse time migration”. *Geophysics* 43:1324–1351.
- Beck, A., e M. Teboulle. 2009. “A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems”. *SIAM Journal of Imaging Sciences* 2:183–202.
- Claerbout, J., e S. Fomel. 2012. *Image estimation by example*. Stanford. <https://sepwww.stanford.edu/sep/prof/gee1-2012.pdf>.
- Claerbout, J. F. 1971. “Toward a unified theory of reflector mapping”. *Geophysics* 36 (4): 467–481.
- Claerbout, Jon F. 1992. *Earth soundings analysis: Processing versus inversion*. Vol. 6. Blackwell Scientific Publications London.
- Dai, Wei, Paul Fowler e Gerard T. Schuster. 2012. “Multi-source least-squares reverse time migration”. *Geophysical Prospecting* 60, nº 4 (junho): 681–695. doi:[10.1111/j.1365-2478.2012.01092.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.2012.01092.x).
- Dai, Wei, e Gerard T. Schuster. 2013. “Plane-wave least-squares reverse-time migration”. *Geophysics* 78, nº 4 (julho): S165–S177. doi:[10.1190/geo2012-0377.1](https://doi.org/10.1190/geo2012-0377.1).
- Dong, S., J. Cai, M. Guo, S. Suh, Z. Zhang, B. Wang e Z. Li. 2012. “Least-squares reverse time migration: Towards true amplitude imaging and improving the resolution”. *Expanded Abstracts*. doi:[10.1190/segam2012-1488.1](https://doi.org/10.1190/segam2012-1488.1).

- Gazdag, J. 1978. “Wave equation migration with the phase-shift method”. *Geophysics* 43:1324–1351.
- Guitton, A. 2004. “Amplitude and kinematic corrections of migrated images for nonunitary imaging operators”. *Geophysics*.
- . 2017. “Preconditioned 3D least-squares RTM with non-stationary matching filters”. *Expanded Abstracts*. doi:<https://doi.org/10.3997/2214-4609.201700802>.
- Guo, S., e H. Wang. 2019. “Image domain least-squares migration with a Hessian matrix estimated by non-stationary matching filters”. *Journal of Geophysics and Engineering* 0:1–12. doi:[10.1093/jge/gxz098](https://doi.org/10.1093/jge/gxz098).
- Guo, Song, e Huazhong Wang. 2019. “Image domain least-squares migration with a Hessian matrix estimated by non-stationary matching filters”. *Journal of Geophysics and Engineering* 17, n° 1 (novembro): 148–159. doi:[10.1093/jge/gxz098](https://doi.org/10.1093/jge/gxz098).
- Hestenes, M. R., e E. Stiefel. 1952. “Methods of conjugate gradients for solving linear systems”. *Journal of Research of the National Bureau of Standards* 49.
- Khalil, A., H. Hoerber, G. Roberts e F. Perrone. 2016. “An alternative to least-squares imaging using data-domain matching filters”. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*: 4188–4192. doi:[10.190/segam2016-13861302.1](https://doi.org/10.190/segam2016-13861302.1).
- Kosloff, D., A. Q. Filho, E. Tessmer e A. Behle. 1989. “Numerical solution of the acoustic and elastic wave equation by a new rapid expansion method”. *Geophysical Prospecting* 37:383–384.
- Kosloff, D., e D. Kessler. 1990. “Seismic numerical modeling”. Cap. 6 em *Seismic numerical modeling*. Elsevier Science Publishers.
- Lipari, V., F. Picetti, J. Panizzardi, N. Bienati e S. Tubaro. 2019. “Approximate Least Squares RTM via matching filters and regularized inversion”. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*. doi:[10.1190/segam2019-3215177.1](https://doi.org/10.1190/segam2019-3215177.1).
- Liu, Q., e D. Peter. 2018. “One-step data-domain least-squares reverse time migration”. *Geophysics*.
- Menke, W. 2018. *Geophysical data analysis: Discrete inverse theory*. Academic Press.
- Nemeth, Tamas, Chengjun Wu e Gerard T. Schuster. 1999. “Least-squares migration of incomplete reflection data”. *Geophysics* 64, n° 1 (janeiro): 208–221. doi:[10.1190/1.1444517](https://doi.org/10.1190/1.1444517).
- Oliveira, Antonio Edson Lima. 2014. “Migração reversa no tempo (RTM) com compensação de iluminação no domínio de ondas planas e por mínimos quadrados (LSM) no domínio do tiro”. Dissertação de mestrado, Universidade Federal da Bahia.
- Perez, D. O., D. R. Velis e M. D. Sacchi. 2012. “Inversion of prestack seismic data using FISTA”. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional XXXI*:3255–3263.
- Pestana, R., e P. Stoffa. 2010. “Time evolution of the wave equation using rapid expansion method”. *Geophysics* 75 (4): T121–T131. doi:[10.1190/1.3449091](https://doi.org/10.1190/1.3449091).

- Schneider, W. A. 1978. “Integral formulation for migration in two and three dimension”. *Geophysics* 43 (1): 49–76. doi:[doi.org/10.1190/1.1440828](https://doi.org/10.1190/1.1440828).
- Stolt, R. H. 1978. “Migration by Fourier transform”. *Geophysics* 43:23–48.
- Tal-Ezer, H., D. Kosloff e Z. Koren. 1987. “An accurate scheme for seismic forward modeling”. *Geophysical Prospecting* 35:479–490.
- Telford, W. M., L. P. Geldart, R. E. Sheriff e D. A. Keys. 1976. *Applied Geophysics*. Cambridge: Cambridge Un. Press.
- Wong, M., S. Ronen e B. Biondi. 2011. “Least-squares reverse-time migration/inversion for ocean bottom data: A case study”. *Expanded Abstracts*. doi:[10.1190/1.3627684](https://doi.org/10.1190/1.3627684).
- Yilmaz, O. 1987. Em *Seismic data processing*. Society of Exploration Geophysicists.