



Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática / Escola Politécnica

Programa de Pós-Graduação em Mecatrônica

**DESENVOLVIMENTO DE UMA CARTA DE
CONTROLE COMBINADA BETA-CUSUM
BINOMIAL PARA MONITORAMENTO DE
PRODUTOS NÃO-CONFORMES**

RAFAEL SILVA DE LIMA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Salvador
29 de novembro de 2019

RAFAEL SILVA DE LIMA

**DESENVOLVIMENTO DE UMA CARTA DE
CONTROLE COMBINADA BETA-CUSUM
BINOMIAL PARA MONITORAMENTO DE
PRODUTOS NÃO-CONFORMES**

Esta Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mecatrônica da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Mecatrônica.

Orientador: Carlos Arthur Mattos Teixeira Cavalcante
Co-orientador: Ângelo Márcio Oliveira Sant'Anna

Salvador
29 de novembro de 2019

Sistema de Bibliotecas - UFBA

LIMA, Rafael Silva.

Desenvolvimento de uma carta de controle combinada Beta-Cusum Binomial para monitoramento de produtos não-conformes. / Rafael Silva de Lima – Salvador, 2019. 71p.: il.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Arthur Teixeira Cavalcante

Co-orientador: Prof. Dr. Ângelo Márcio Oliveira Sant'Anna.

Dissertação (Mestrado – Pós-Graduação em Mecatrônica) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática / Escola Politécnica, 2019.

1. Controle Estatístico de Processos. 2. Gestão da qualidade. 3. Cusum Binomial. 4. Distribuição Beta. I. Cavalcante, Carlos Arthur Mattos Teixeira. II. Sant'Anna, Ângelo Márcio Oliveira. III. Universidade Federal da Bahia. Instituto de Matemática / Escola Politécnica. IV. Título.

CDD: 658.562

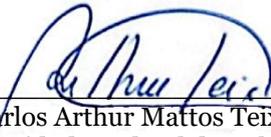
TERMO DE APROVAÇÃO

RAFAEL SILVA DE LIMA

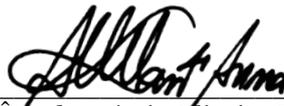
DESENVOLVIMENTO DE UMA CARTA DE CONTROLE COMBINADA BETA-CUSUM BINOMIAL PARA MONITORAMENTO DE PRODUTOS NÃO-CONFORMES

Esta Dissertação de Mestrado foi julgada adequada à obtenção do título de Mestre em Mecatrônica e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Mecatrônica da Universidade Federal da Bahia .

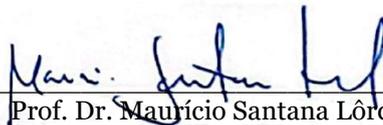
Salvador / BA, 29 de Novembro de 2019



Prof. Dr. Carlos Arthur Mattos Teixeira Cavalcante
Universidade Federal da Bahia (UFBA)
Orientador



Prof. Dr. Ângelo Márcio Oliveira Sant'Anna
Universidade Federal da Bahia (UFBA)
Coorientador



Prof. Dr. Maurício Santana Lôrdele
Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS)
Membro Externo



Prof. Dr. Danilo Marcondes Filho
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)
Membro Externo

AGRADECIMENTOS

A toda energia positiva existente nesse universo, que me deu forças quando tudo parecia impossível.

Aos meus pais, **Djanira** e **Francisco**, pelo amor e carinho passado durante a minha formação.

A **tia Alice** e meu primo **Gabriel**, que apesar de não ter um pingão de ligação sanguínea, foram parte essenciais na minha educação, sempre sendo uma referência profissional e de caráter na minha vida.

Ao meu irmão **Fábio** que sempre esteve comigo nos momentos de desestresse dessa longa jornada da pós-graduação.

Aos meus amigos, **Erika**, **Hugo**, **Jéssica**, **Jeaninne** e **Laís** por estarem ao meu lado nos momentos mais difíceis e obscuros, servindo como suporte e incentivo.

Aos meus orientadores, **Ângelo Márcio** e **Carlos Arthur** pelas orientações e sugestões, fundamentais para a conclusão deste trabalho.

Ao professor **Márcio Martins** por todos os puxões de orelhas e sugestões que contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus amigos do **balduino 35** que estiveram comigo durante essa jornada árdua, obrigado pelas dicas e contribuições para a finalização dessa etapa.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

A todos que participaram direta e indiretamente na concretização deste trabalho.

*“Levanta cabeça truta, onde estiver,
seja lá como for, tenha fé,
porque até no lixão nasce flor.”*

—RACIONAIS MC.

RESUMO

As cartas de controle estatístico de processo são ferramentas amplamente utilizadas no monitoramento da qualidade de produtos, processos e serviços. Propostas por Shewhart em 1924, são tradicionalmente aplicadas devido à sua facilidade de implementação e análise. Ao decorrer dos anos foram desenvolvidas diversas outras cartas de controle baseadas na carta do tipo Shewhart com a finalidade de aprimorar o desempenho das mesmas devido à automação dos processos e às exigências por alta qualidade dos produtos. Entretanto, essas cartas possuem a desvantagem de não detectar pequenas variações dentro de processos produtivos, onde é mais adequado a utilização das cartas por soma cumulativa (CUSUM) proposta por Page em 1954. Quando a magnitude de alteração dentro de um processo não é conhecida, uma das soluções é a aplicação das cartas combinando as características das cartas de Shewhart com as cartas CUSUM. O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de uma carta de controle combinando as características de uma carta de controle baseada na distribuição beta e na carta por soma acumulativa para atributos, baseada na distribuição binomial. São demonstrados os procedimentos do desenvolvimento da carta combinada Beta-CUSUM Binomial e a sua aplicação a dados discretos e a dados contínuos. Os resultados obtidos demonstram que a carta combinada proposta apresenta desempenho similar à carta Shewhart-CUSUM Binomial quando aplicada a dados discretos e um desempenho superior quando aplicada a dados contínuos. Assim, a carta proposta Beta-CUSUM Binomial é validada, sendo uma nova alternativa de carta combinada para o monitoramento de itens não-conformes.

Palavras-chave: Controle Estatístico de Processos (CEP), CUSUM, CUSUM Binomial, Distribuição beta, Carta Beta, Carta Combinada.

ABSTRACT

Statistical process control charts are tools widely used to monitor the quality of products, processes and services. Proposals for Shewhart in 1924 are traditionally applied because of their ease of implementation and analysis. Over the years, various control codes are allowed in the Shewhart type, with increased performance or performance due to process automation and high quality product use. However, these letters have a disadvantage of not detecting small changes within productive processes, where the use of cumulative sum letters (CUSUM) proposed by Page in 1954 is more appropriate. When a magnitude of change within a process is not known, one of the solutions is an application of combined cards as characteristics of Shewhart cards with CUSUM cards. The objective of this work is the development of a combined control chart as a control chart features, with beta distribution and accumulated total attributes chart, based on binomial distribution. Binomial Beta-CUSUM combined chart development procedures and their application to discrete and continuous data are demonstrated. The results show that a combined chart performs similarly to the Shewhart-CUSUM Binomial chart when applied to discrete data and performs better when applied to continuous data. Thus, a proposed Beta-CUSUM Binomial letter is valid and is a new combined letter alternative for monitoring nonconforming items.

Keywords: Statistical Process Control (SPC), CUSUM, Binomial CUSUM, Beta distribution, Beta chart, Combined chart.

SUMÁRIO

RESUMO	8
ABSTRACT	9
SUMÁRIO.....	10
LISTA DE FIGURAS	12
LISTA DE TABELAS	13
INTRODUÇÃO	14
1.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS	14
1.2. OBJETIVOS.....	16
1.2.1 Objetivos Específicos.....	17
1.3. JUSTIFICATIVA	17
1.4. PRODUÇÃO CIENTÍFICA RELACIONADA.....	18
1.5. CONTRIBUIÇÃO DA PESQUISA	18
1.6. METODOLOGIA DA PESQUISA	18
1.6.1 Métodos de trabalho.....	19
1.7. ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	19
REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	20
2.1 CONTROLE ESTATÍSTICO DE PROCESSOS	20
2.2 CARTAS DE CONTROLE ESTATÍSTICO DE PROCESSOS.....	23
2.3 CARTAS DE CONTROLE PARA ATRIBUTOS.....	25
2.3.1 Carta p e np	25
2.3.2 Carta de controle Beta	28
2.3.3 Medidas de desempenho para atributos	30
2.4 CARTAS DE CONTROLE POR SOMA CUMULATIVA (CUSUM)	32
2.4.1 Carta por soma Cumulativa para atributos	34
2.4.2. Medidas de desempenho para o CUSUM Binomial.....	36
2.5. CARTAS COMBINADAS SHEWHART- CUSUM PARA ATRIBUTOS	40
CARTA COMBINADA BETA-CUSUM BINOMIAL.....	43
3.1. CARTA COMBINADA BETA-CUSUM BINOMIAL.....	43
3.1.1 Definição da proporção sob controle (p_0) e fora de controle (p_1).....	45
3.1.2 Valor de referência K do CUSUM Binomial	45
3.2. MEDIDAS DE DESEMPENHO DAS CARTAS INDIVIDUAIS.....	46
3.3 MEDIDAS DE DESEMPENHO DA CARTA COMBINADA BETA- CUSUM BINOMIAL.....	48
3.4 VALIDAÇÃO DA APLICAÇÃO DA CARTA BETA-CUSUM BINOMIAL.....	50

ANÁLISE DOS RESULTADOS	51
4.1 ESTUDO 1: EMBALAGEM DE SUCOS DE LARANJA	51
4.2 ESTUDO 2: ANÁLISE DE COLIFORMES TOTAIS	54
4.3 ESTUDO 3: ANÁLISE DE OXIDAÇÃO POR ÁCIDO NÍTRICO	57
CONSIDERAÇÕES FINAIS	61
5.2 RECOMENDAÇÕES E TRABALHOS FUTUROS	62
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	63
Apêndice	69

LISTA DE FIGURAS

1.1 Tipos de cartas combinadas	15
2.1 Tipos de cartas de Controle Estatístico de Processos.....	21
2.2 Cartas de Controle Estatístico de Processos dados Discretos e Contínuos.	22
2.3 Carta de Controle Estatístico de Processos.	23
2.4 Probabilidade de observações com desvio 3σ	30
2.5 Carta CUSUM.....	32
3.1 Fluxograma do procedimento para construção da carta Beta-CUSUM Binomial...	43
3.2 Teste RIR no programa anygeth.....	45
3.3 Definição das medidas de desempenho CUSUM Binomial.....	46
4.1 Resultados obtidos aproximação CD Estudo 1.....	50
4.2 Cartas de controle obtidas do estudo 1.....	51
4.3 Resultados obtidos aproximação CD-Estudo 2.....	53
4.4 Cartas de controle obtidas do estudo 2.....	54
4.5 Resultados obtidos aproximação CD-Estudo 3.....	55
4.6 Cartas de controle obtidas do estudo 3.....	56
4.7 Carta combinada Beta-CUSUM binomial recalculada-Estudo 3.....	57

LISTA DE TABELAS

2.1 Cartas de controle combinadas e contribuições.	40
3.1 Valores de p_0 e p_1	44
4.1 Número de embalagens defeituosas por amostras	50
4.2 Número de coliformes totais por amostra	52
4.3 Número de ácido nítrico fora do padrão por amostra.	55

Capítulo

1

INTRODUÇÃO

1.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A qualidade é um dos fatores mais importante na gestão de processos produtos na atualidade. Em um mercado altamente competitivo, a qualidade é um dos principais critérios considerados por consumidores na decisão de produtos (bens e serviços) a serem utilizados. Devido a isso, as organizações têm focado cada vez mais no desenvolvimento de técnicas de monitoramento e controle da qualidade, visando a diminuição de desperdícios e o aumento da produtividade.

Desenvolvido por Shewhart na década de 20, o método de monitoramento de processos de produção por cartas de Controle Estatístico de Processos (CEP) tem sido amplamente utilizado para análise de características da qualidade de produtos devido, principalmente, à sua simplicidade de implementação e de análise. Essas cartas podem ser utilizadas tanto para o monitoramento de variáveis contínuas, mensuráveis, também conhecidas como cartas de controle para variáveis, como também podem ser utilizadas para o monitoramento de variáveis discretas, que não podem ser mensuradas a partir de grandezas físicas, também conhecidas como cartas de controle para atributos (MONTGOMERY, 2004).

As cartas para atributos são as mais amplamente utilizadas no meio industrial e a sua facilidade de implementação e análise decorre do fato de que esse tipo de carta considera apenas duas situações: se o item monitorado ou produto está conforme ou não-conforme às especificações. Também denominadas de Cartas p e np , as cartas para atributos propostas por Shewhart é um dos tipos de carta de controle mais empregadas até os dias atuais, entretanto com o desenvolvimento da automação em

processos, onde tornou-se cada vez mais necessário a detecção de pequenas alterações, houve a necessidade de desenvolvimento de novas cartas de controle para atributos.

Sant'Anna e Caten (2012) propuseram uma carta de controle baseada na distribuição de probabilidade Beta para o monitoramento da fração de produtos não-conformes, conhecida como Carta *beta*. Os autores demonstram que a aproximação da distribuição Binomial à distribuição Beta é mais adequada para valores de proporção entre [0, 1] utilizada na análise da fração de produtos não-conformes e apresenta maior eficiência no monitoramento e controle quando comparada com as tradicionais Cartas para atributos n e np propostas por Shewhart.

No entanto, tanto as cartas de controle Carta p e np quanto a Carta *beta* analisam apenas o último ponto observado, tornando essas cartas insensíveis a pequenas alterações dentro de processos com desvios padrão na ordem de $1,5\sigma$ ou menos (MONTEGOMERY, 2004).

A carta de soma cumulativa, do inglês *Cumulative Sum* (CUSUM), é uma das alternativas de solução do problema da insensibilidade a pequenas alterações em processos que são monitorados por características da qualidade que apresentam pequenas mudanças em torno da média ($desvios \leq 1,5\sigma$). Essas cartas têm como natureza, a análise de informações acumuladas em diversas amostras anteriores e não somente em um único ponto. Isto torna essas cartas mais eficazes na sinalização de eventuais descontroles no processo, assim como na identificação do tempo em que ocorre a mudança ou desvio dentro do processo analisado (HENNING et al, 2011).

A carta CUSUM é comumente utilizada no monitoramento de variáveis onde a estatística analisada é a média amostral ou o valor individual da variável em observação. Entretanto, a técnica empregada nesta carta de controle pode ser aplicada para o controle da característica de qualidade do tipo atributos, analisando as não-conformidades em dados de um processo, como por exemplo o CUSUM com distribuição binomial (ALVES, 2003).

A carta de controle CUSUM binomial examina cumulativamente o número de não-conformes em uma sequência de amostra de tamanho n (HENNING et al, 2010). Assim, essa carta possui uma maior sensibilidade na detecção de pequenas variações da proporção de produtos não-conformes do que as tradicionais Carta p e np , assim como também da Carta *beta*.

Quando as magnitudes de alterações no processo são desconhecidas, as Cartas p , np , *beta* e CUSUM binomial não são eficientes no monitoramento dos dados. Uma das

alternativas para este caso é a aplicação de cartas de controle combinadas. Westgard *et al.*, (1977) propuseram a combinação da carta Shewhart para variáveis com a carta CUSUM com distribuição normal para a média, a fim de aumentar a sensibilidade da carta CUSUM. Lucas (1982) deu sequência no estudo das cartas combinadas para variáveis, ao analisar a aplicação da carta combinada para dados pontuais ao invés da análise parabólica característica do CUSUM. O estudo para atributos foi expandido por Morais e Pacheco (2006) onde foi tratado a combinação da carta np de Shewhart e da carta CUSUM Binomial, por meio da adição dos limites de controle da carta np e da carta CUSUM Binomial, com o objetivo de abranger diversas magnitudes de alterações do número de produtos não-conformes analisadas, aumentando assim a sensibilidade dessa carta de controle. Henning *et al.*, (2015) aprimorou a carta combinada Shewhart-CUSUM Binomial para atributos, propondo uma nova metodologia para a definição do limite superior. A Figura 1.1 apresenta as cartas combinadas desenvolvidas para variáveis e atributos até o desenvolvimento do presente trabalho, demonstrando em que tipo de aplicações a carta proposta Beta-CUSUM Binomial pode ser aplicada.

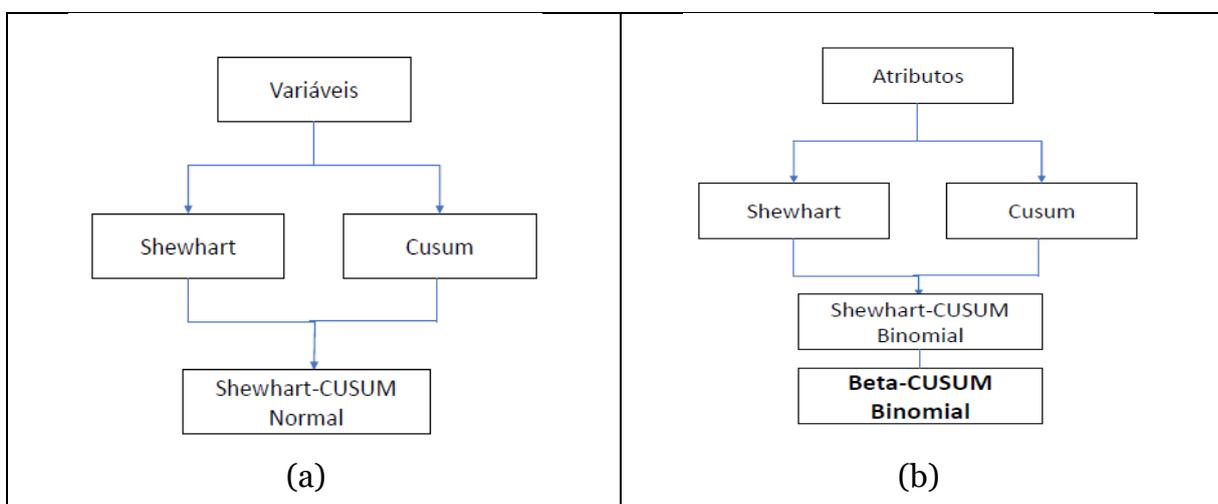


Figura 1.1. Tipos de cartas combinadas: (a) Carta combinada para variáveis. (b) Cartas combinadas para atributos.

Fonte: Próprio Autor

1.2. OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo geral o desenvolvimento de uma nova carta de controle combinada para atributos denominada carta Beta-CUSUM Binomial para monitoramento de produtos não-conformes, utilizando os limites de controle da carta beta e da carta CUSUM Binomial.

1.2.1 Objetivos Específicos

- a) Propor uma sequência de procedimento para o desenvolvimento da carta combinada Beta -CUSUM binomial;
- b) Avaliar se a adição do limite superior da carta Beta aumenta a sensibilidade da carta CUSUM binomial;
- c) Comparar a carta Beta-CUSUM binomial proposta com as cartas Shewhart, CUSUM Binomial e combinada Shewhart-CUSUM binomial.

1.3. JUSTIFICATIVA

As cartas combinadas possuem como característica principal o aumento da sensibilidade da carta CUSUM para alterações de diversas magnitudes. Para variáveis essas cartas já apresentam aplicações em diversas áreas, como por exemplo, na área ambiental, saúde e industrial. Entretanto, quando se trata de cartas combinadas aplicadas para atributos, Ottenstreuer (2019) cita que ainda existe poucos trabalhos, tendo apenas os trabalhos de Morais e Pacheco (2006) e Henning *et al* (2015).

Morais e Pacheco (2006) propuseram a combinação da carta np com a carta CUSUM binomial, comparando o desempenho da carta de controle com as cartas de controle individuais. Entretanto nesse estudo não foram realizadas análises da ARL (taxa de alarmes falsos) nas diversas etapas de desenvolvimento da carta combinada.

Henning *et al.*, (2015) desenvolveram a carta combinada Shewhart-CUSUM binomial, com o objetivo de minimizar o problema de assimetria da distribuição binomial apresentada nas cartas combinadas para atributos, propondo uma nova metodologia para aproximação do limite superior h da parte binomial.

Sant'Anna e Caten (2012) desenvolveram a carta de controle para fração não-conforme aplicada para dados contínuos e demonstraram que essa carta, quando aplicada para dados discretos, possuem desempenho similar às cartas Shewhart p e np .

Portanto, destaca-se a importância da contribuição desse trabalho em nível teórico e prático, no qual os diversos pontos a serem estudados para o desenvolvimento da carta combinada para atributos e para a aplicação do Controle Estatístico de Processos nas mais diversas áreas.

1.4. PRODUÇÃO CIENTÍFICA RELACIONADA

Durante o desenvolvimento desta pesquisa um artigo foi desenvolvido e publicado:

1. Lima, R. S., Santos, L. N., Sant'anna, Ângelo M. O., Cavalcante, C. A. M. T., 2019. Aplicação da carta CUSUM binomial no monitoramento de um processo de produção de couro acabado. Encontro de Engenharia de produção, 2019, Santos-SP.

1.5. CONTRIBUIÇÃO DA PESQUISA

As cartas de Controle Estatístico de Processos têm evoluído constantemente nos últimos anos, entretanto ainda são poucos os estudos desenvolvidos sobre as cartas combinadas para atributos desenvolvidas para o monitoramento de produtos não-conformes. Este estudo apresenta o desenvolvimento de uma nova carta de controle combinada para atributos, combinando os limites das cartas de controle Beta e CUSUM Binomial, sendo uma nova opção de aplicação para processo na qual a magnitude de variação do processo seja desconhecida e no qual o valor da proporção dos dados seja pequena.

1.6. METODOLOGIA DA PESQUISA

Esta dissertação tem como sua natureza de trabalho uma pesquisa aplicada, uma vez que o trabalho desenvolvido visa a aplicação prática da carta combinada Beta-CUSUM binomial para solucionar um problema específico, neste caso o monitoramento de produtos não-conformes. A abordagem deste trabalho é quantitativa, pois os dados monitorados na carta de controle são quantificáveis e classificados de acordo com a análise. Do ponto de vista dos objetivos, este trabalho se caracteriza como uma pesquisa exploratória, já que a partir de levantamento bibliográfico sobre cartas de Controle Estatístico de Processos, são demonstrados procedimentos do desenvolvimento da carta de controle a fim de atender os objetivos proposto no trabalho. Por fim de acordo com os procedimentos técnicos este trabalho se caracteriza como uma pesquisa experimental, uma vez que foram utilizados programas computacionais para realizar simulações dos dados aplicados na pesquisa, a fim de alcançar os objetivos específicos.

Para o desenvolvimento do trabalho foram utilizados recursos computacionais como o software R Studios (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2009) para a simulação

e obtenção de valores de *ARL* (*Average Run Length*) e limite superior de controle da carta CUSUM Binomial. O Microsoft Excel™ foi utilizado para o desenvolvimento das cartas de controle.

1.6.1 Métodos de trabalho

Para melhor entendimento do desenvolvimento do trabalho são listados os principais procedimentos metodológicos utilizados para alcançar o objetivo deste trabalho:

- a) Definição das proporções p_0 (proporção sob controle estatístico) e p_1 (proporção fora de controle estatístico);
- b) Determinar o ARL_0 mínimo tolerável (taxas de alarme falsos máxima) para a carta de controle combinada;
- c) Calcular o ARL para as cartas individuais Beta e Cusum Binomial;
- d) Determinar os parâmetros de construção da parte Beta e CUSUM binomial;
- e) Aproximar o limite de decisão h com o ARL_0 , referente a parcela CUSUM pela técnica de aproximação, denominada CD;
- f) Calcular o Limite superior da parte Beta;
- g) Realizar verificação de validação dos limites de controle para a construção da carta combinada Beta-Cusum binomial.

1.7. ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Este trabalho está organizado em quatro capítulos e as considerações finais. O presente capítulo apresenta as considerações iniciais sobre a área de Controle Estatístico de Processos e as cartas combinadas, objetivo deste estudo. O segundo Capítulo apresenta o referencial teórico e uma revisão de trabalhos relacionados a área de cartas de Controle Estatístico de Processos, importantes para o desenvolvimento deste trabalho como: as cartas de Shewhart para atributos, a Carta Beta, o CUSUM para variáveis, o CUSUM Binomial e as Cartas combinadas. O terceiro capítulo demonstra o procedimento de desenvolvimento da carta combinada Beta-CUSUM binomial. O quarto capítulo demonstra a análise dos resultados da carta combinada aplicados em dados com distribuição binomial (dados discretos) e distribuição beta (dados contínuos). O quinto capítulo apresenta as conclusões do trabalho, as contribuições da dissertação e sugestões para trabalhos futuros.

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo apresenta o referencial teórico sobre a teoria das cartas de Controle Estatístico de Processos e sua evolução, contextualizando novos conceitos fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

A seção 2.1 apresenta a revisão sobre qualidade e Controle Estatístico de Processos. Na seção 2.2 é apresentada uma visão de geral das cartas de Controle Estatístico de Processos. A seção 2.3 aborda as cartas de controle para atributos tradicionais, desenvolvida por Shewhart e a revisão do desenvolvimento da carta de controle para fração não-conforme, com os limites de controle baseado da distribuição Beta. A carta de controle por Soma Cumulativa e sua extensão para o caso Binomial é abordada na seção 2.4. Por fim na seção 2.5 é demonstrada uma revisão das cartas combinada e a sua aplicação para atributos.

2.1 CONTROLE ESTATÍSTICO DE PROCESSOS

A qualidade é uma característica constantemente buscada em organizações nos dias atuais. Entretanto a definição dessa característica ainda não é algo bem definido na literatura. Juran e Gryna (1992) definem a qualidade como adequação ao uso. Já Deming (2003) diz que a qualidade é definida conforme as exigências e necessidades dos clientes, e como as especificações dos clientes se alteram ao longo do tempo a característica da qualidade se altera das mesmas forma. Para a área de Controle Estatístico de Processos, Montgomery (2004) diz que a qualidade é inversamente proporcional a variabilidade dentro de um processo. Assim é possível dizer, que para manter a qualidade dentro de um processo produtivo é essencial a atividade de controle e monitoramento de produtos e/ou serviços.

A carta de Controle Estatístico de Processos (CEP) foi desenvolvida por Shewhart na década de 20 e é até hoje uma das principais técnicas empregadas para o monitoramento e controle da qualidade em meios produtivo. Inicialmente as cartas de controle eram utilizadas primordialmente para processos industriais, uma vez que nesses processos os equipamentos são de suma importância para a produtividade industrial (SALDANHA *et al.*, 2015). Para Shewhart, qualquer processo por melhor que seja projetado e controlado, possui uma variabilidade característica própria do processo. Segundo Samohyl (2009), quando um processo apresenta apenas a variabilidade natural, diz-se que está no estado sob controle estatístico. Isso ocorre porque além dos processos estarem sujeito as variações aleatórias, podem sofrer interferências de causa especiais e estruturais o que causa variações extras. Então assim Shewhart propôs as cartas de controle para monitorar e controlar as variações dentro de um processo industrial, dando o início dos estudos das cartas de controle estatísticos de processos.

Segundo Henning *et al* (2011), a ferramenta CEP tem a função de analisar e identificar as causas especiais e estruturais, a fim de posterior eliminação ou redução por meios compensatórios. A sua aplicação é considerada de fácil entendimento, pois o mesmo apresenta os resultados das análises de maneira visual, não precisando de um grande conhecimento em estatísticas para ter uma análise preliminar da carta.

Com o passar dos anos foi observado que não somente os processos industriais apresentavam características de variabilidade na análise de dados, assim as cartas de controle foi expandindo sua aplicação para diversos segmentos, como monitoramento de segurança (ROCHA *et al.*, 2017), agropecuária (TAKASHI *et al.*, 2011), saúde (HENNING *et al.*, 2012), (PINHEIRO *et al.*, 2010), (WESTGARD *et al.*, 1977) e educação (SAVIC, 2006), são alguns exemplos.

As cartas de controle propostas por Shewhart são amplamente aplicadas pela sua fácil análise e implementação. Segundo Montgomery (2004), as cartas de controle podem ser classificadas de duas formas principais: cartas de controle para variáveis e cartas de controle para atributos. As cartas do tipo variável são aplicadas no monitoramento de dados contínuos, mesuráveis, como por exemplo; comprimento, peso, volume, entre outros. As cartas do tipo atributos são utilizadas para dados discretos, onde é analisada a proporção ou itens defeituosos em um determinado número de amostras. A Figura 2.1 apresenta as principais cartas de controle empregadas de acordo com o seu tipo e com as características do processo a ser analisado.

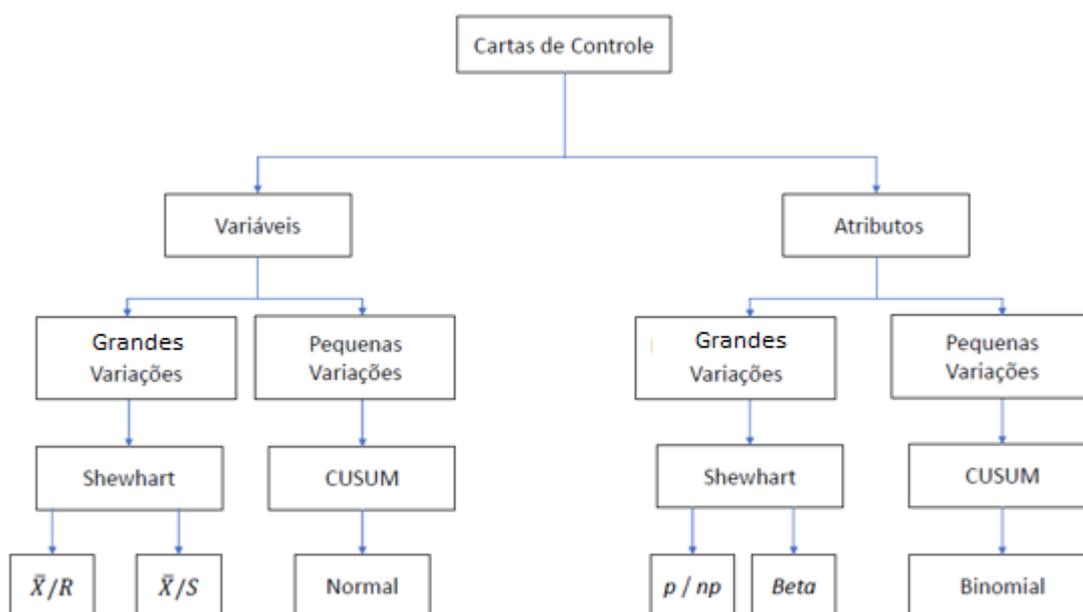


Figura 2.1. Tipos de cartas de Controle Estatístico de Processos.

Fonte: Próprio Autor

As cartas de controle propostas por Shewhart são aplicadas em diversos processos até os dias atuais. Contudo, com o decorrer dos anos foram observados que essas cartas de controle não atendiam processos com algumas características específicas, como por exemplo para processos onde é necessário a detecção de variações de pequenas magnitudes, as cartas de controle propostas por Shewhart, não apresentam bom desempenho (MONTGOMERY, 2004).

Ali *et al.*, (2016), apresentou os principais trabalhos desenvolvidos na área das cartas de Controle Estatístico de Processos. As cartas desenvolvidas durante esses anos têm como objetivo de melhorar e atender de forma mais adequada, a aplicação das cartas de controle de acordo com as características dos processos no qual está sendo aplicada. A Figura 2.2, demonstra os trabalhos e as principais cartas de controle desenvolvidas nos últimos anos, os anos serve como referencial para a quantidade de trabalhos desenvolvidos na área de CEP em cada tipo de distribuição.

Data type	Chart type	Distribution	year
Discrete	Shewhart	Geometric	1983, 1987, 2000, 2002, 2002, 2003, 2007, 2008, 2008, 2012, 2012, 2012, 2012, 2013, 2013, 2013, 2013, 2014.
		Binomial	2007, 2011, 2011.
		Negative Binomial	1997, 2001, 2001, 2001, 2003, 2005, 2009, 2010, 2010, 2011, 2012, 2013.
		Multinomial	2005, 2008, 2014.
		Poisson	2002, 2003, 2005, 2015.
	EWMA	GP, ZIP, GZIP, ZIB, truncated-ZIB	2006, 2007, 2008, 2008, 2010, 2010, 2012
		Nonparametric	2011, 2012, 2012.
	CUSUM	Geometric	2007, 2008, 2011, 2013.
		Binomial	2010.
		Negative Binomial	2005
Poisson		2012, 2013, 2014.	
Continuous	Shewhart	Geometric	1984, 1999, 2001.
		Binomial	1993, 2005, 2009, 2013, 2013, 2015.
		Beta	2012.
		Exponential	2000, 2002, 2004, 2006, 2009, 2009, 2009, 2011, 2011, 2013, 2014, 2014, 2014, 2015, 2015, 2015.
		Gamma	2007, 2012, 2014, 2014, 2015.
	EWMA	Gamma + Exponential	2002, 2013.
		Bivariate Gumbel	2011.
		Exponential + Poisson	2009, 2013.
	CUSUM	Logistic + normal	2004, 2009, 2013.
		Exponential	2007, 2010.
Gamma		2006.	
Bivariate Gumbel		2011.	
CUSUM	Exponential	2006, 2011, 2014.	
	Gamma	2004.	
	Normal + exponential	2013.	
	Poisson + exponential	2010, 2014.	
		Weibull, Lognormal	2003, 2015

Figura 2.2. Cartas de Controle Estatístico de Processos dados Discretos e Contínuos.
Fonte: Adaptado de Ali et al. (2016)

Pode-se notar que as cartas de controle propostas por Shewhart, tanto para dados discretos quanto para dados contínuos, apresentam maior concentração no desenvolvimento de estudos. No entanto, com a introdução da automação nos processos industriais onde a detecção de alterações de pequenas alterações dentro do processo tornou-se cada vez mais necessários, os estudos de outros tipos de cartas, como o CUSUM e EWMA.

2.2 CARTAS DE CONTROLE ESTATÍSTICO DE PROCESSOS

Montgomery (2004) diz que as cartas de Controle Estatístico de Processos é uma ferramenta visual, que tem como objetivo sinalizar variações especiais dentro de um processo. Com a aplicação do CEP é possível detectar possíveis causas especiais responsáveis por uma variação especial dentro de um processo. As cartas de controle são compostas por dois limites de controle, superior e inferior, e por um limite central, que representa o valor alvo do processo ou a média. Se algum ponto analisado ultrapassar os limites superior ou inferior, é dito que esse ponto está fora de controle estatístico e que é necessário a buscas de causas atribuíveis para esses problemas. A

Figura 2.3 apresenta um exemplo de carta de Controle Estatístico de Processos.

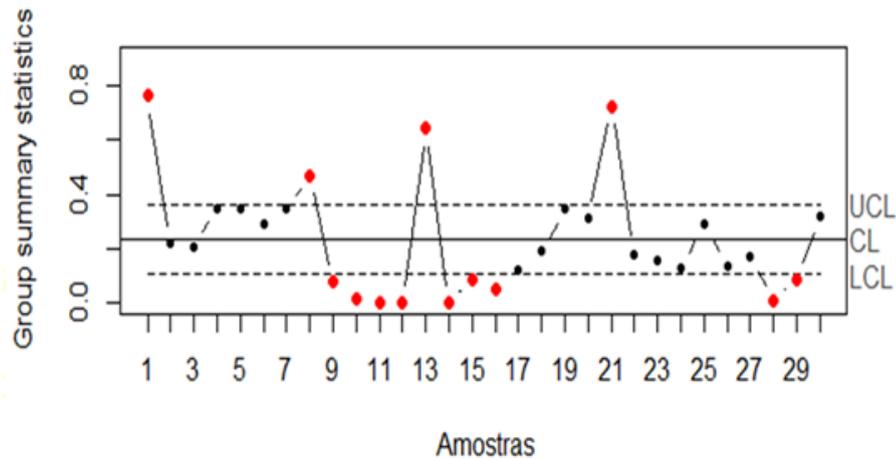


Figura 2.3. Carta de controle estatístico de processos.

Fonte: LIMA *et al.* (2019)

As cartas de controle podem ser classificadas como variáveis e atributos. Em ambos os tipos, geralmente passam por duas fases de construção, denominadas fase I e fase II (MONTGOMERY, 2004). A fase I é a de estimação dos parâmetros do processo, onde é analisado um histórico de dados e se o processo apresenta comportamento estável ou se é necessários ajustes para alcançar tal estabilidade. Nessa primeira fase é calculado os limites de controles para o monitoramento dos processos, também conhecido como limites de controles tentativos. A fase II é a etapa de monitoramento do processo a partir dos limites calculados na fase I. Nessa segunda fase é possível a atualização dos limites de controles calculados na primeira fase (COSTA *et al.*, 2004).

O desempenho de uma carta de controle é medido de acordo com a velocidade de detecção que a carta consegue identificar alterações no processo que está sendo monitorado. A medida de desempenho da carta é conhecida como *Average Run length (ARL)*, que é o parâmetro responsável por mostrar o número de médio de amostras necessários para detectar alterações dentro do processo. Assim, em possíveis comparações, uma carta de controle é considerada melhor, quando apresenta um valor de ARL menor. Contudo, quando o processo está sob controle é desejável que o valor de ARL seja o maior possível (OPRIME *et al.*, 2015).

Nas seções seguintes são demonstrados os gráficos para atributos e por soma cumulativa, os métodos de definição dos parâmetros dessas cartas de controle e as bases estatísticas das mesmas.

2.3 CARTAS DE CONTROLE PARA ATRIBUTOS

As cartas de controle para atributos é uma das primeiras cartas a serem implementadas em processos onde ainda não há o monitoramento e controle por CEP. Por analisar dados discretos, analisando itens defeituosos e não defeituosos, a implementação dessas cartas possui uma simplicidade de aplicação em relação as outras cartas de Controle Estatístico de Processo. (MONTGOMERY, 2004).

Para Woodall (1997), controlar variáveis mensuráveis é mais eficaz que controlar variáveis por atributos. Isso deve-se a precisão das informações obtidas dos dados analisados e a necessidade de um número de amostras menor quando comparados com as cartas para atributos. Contudo, as cartas para atributos possuem algumas vantagens, principalmente do ponto de vista econômico, uma vez que a avaliação por classificação é mais simples, os equipamentos utilizados são mais simples e o investimento necessário para a implementação da carta é menor (HENNING, 2010).

Wu *et al* (2013) citam que existem processos que a características da qualidade não podem ser medidas em escalas numéricas ou de forma quantitativa, assim, as cartas de controle para atributos tornam-se uma ferramenta importante para o monitoramento desses processos.

Ali *et al* (2016) demonstram em sua pesquisa, a quantidade de trabalhos que foram desenvolvidos durante os últimos anos, entre eles pode ser observado uma grande quantidade de trabalhos propostos em cartas para dados discretos, principalmente as cartas p .

2.3.1 Carta p e np

A carta de controle p é uma das principais cartas de Controle Estatístico de Processos utilizadas para o controle e monitoramento de atributos em processos (SAMOHYL, 2009). Deve-se isso a grande facilidade de monitoramento das características qualidades que a carta p apresenta (WEERARATNE ET AL., 2016). Devido a isso em muitos processos industriais é uma das primeiras ferramentas de CEP a serem utilizadas.

A carta de controle p é responsável pela análise de itens não-conforme. Henning *et al.*, (2010), afirmam que a fração de item não-conforme é definida como a razão entre o número de itens não conformes em uma população total de itens dessa população. Quando são analisados o número de não conformes dentro de um subgrupo de amostras a carta utilizado para o monitoramento e Controle Estatístico de Processos é denominada carta np .

Chukhrova e Johannssen (2019) citam que as cartas de controle p e np são geralmente baseadas no pressuposto da distribuição Binomial. Essa aproximação ocorre uma vez que essas cartas analisam os atributos dos dados e classifica-os como conforme ou não-conforme, defeituoso ou não defeituoso. Nessa carta de controle a probabilidade de um item ser classificado como defeituoso ou não-conforme é p , e os itens produzidos são variáveis aleatórias distribuídas de maneira igual (Henning et al., 2010).

Considerando que uma amostra aleatória de tamanho n é selecionada, e se D é o número de unidades do produto que são não conformes, então D segue a distribuição binomial com os parâmetros n e p , onde,

$$P(D = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, x = 0, 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

Como a fração não conforme é definida como a razão entre o número de unidades não conformes na amostra D e o tamanho da amostra n , a fração de produtos não conformes p_s , pode ser descrita,

$$p_s = \frac{D}{n}. \quad (2.2)$$

Para a determinação dos limites de controle é necessário conhecer o desvio padrão σ , que pode ser obtida da seguinte forma,

$$\sigma = \sqrt{\frac{p_s(1-p_s)}{n}} \quad (2.3)$$

Montgomery (2004), apresenta a forma geral que pode ser calculado os limites de controles para as Cartas de Controle Estatístico de Shewhart que pode ser visto nas equações :

$$LSC = \mu_w + q_w \sigma_w; \quad (2.4)$$

$$LC = \mu_w; \quad (2.5)$$

$$LIF = \mu_w - q_w \sigma_w. \quad (2.6)$$

onde: LSC é o limite superior de controle; LC é o limite central de controle; LIF é o

limite inferior de controle; w é a estatística que mede a característica da qualidade; μ_w é a média de w ; σ_w é o desvio padrão de w ; q_w é a distância dos limites de controle a linha central ou valor alvo.

Para as cartas de controle de Shewhart, o valor de q_w geralmente utilizado é de 3 (MONTGOMERY, 2004). Como a variável q_w é múltiplo do desvio padrão, é possível dizer que as cartas p apresentam um desvio de 3σ para mais ou para menos. Assim, em um processo onde o valor de fração não-conformes (p_s) é conhecido ou especificado, os limites de controle dessa carta podem ser definidos por:

$$LSC = p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; \quad (2.7)$$

$$LC = p; \quad (2.8)$$

$$LIF = p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}. \quad (2.9)$$

Os valores de p quando não conhecidos, podem ser obtidos através dos dados analisados. Dentro de um subgrupo de amostras m de tamanho n , onde o número de unidades não-conformes é D_i , a fração não conforme na amostra i é encontrada da seguinte forma:

$$\hat{p}_i = \frac{D_i}{n}, i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.10)$$

Para obter o valor do limite central de controle, ou valor alvo é necessário encontrar o valor médio da fração não-conforme, que pode ser obtida através da equação 2.11.

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^m D_i}{mn} = \frac{\sum_{i=1}^m \hat{p}_i}{m} \quad (2.11)$$

Contudo, existem situações em que é necessário analisar o número de itens defeituosos, ao invés de analisar a fração não conforme. Para isso é aplicado a carta np , que é uma ferramenta CEP, simplificada da carta p . Essas cartas são empregadas com mais frequências em processos que estão sendo implementados as cartas de Controle Estatístico, pois elas apresentam uma maior facilidade de interpretação, trazendo uma maior facilidade de análise para o pessoal de chão de fábrica (MONTGOMERY, 2004).

Os limites da carta np são recalculados, uma vez que esta carta considera o tamanho n da amostra, assim os limites podem ser calculados,

$$LSC = np + \sqrt{np(1-p)}; \quad (2.12)$$

$$LC = np; \quad (2.13)$$

$$LIF = np - \sqrt{np(1-p)}. \quad (2.14)$$

Schader e Chimid (1989) citam que os limites de controle tanto da carta p quanto da carta np , são uma aproximação da distribuição normal à binomial. Schader e Chimid (1989) ainda afirmam que a distribuição normal a binomial é satisfatória quando duas regras são atendidas: (1) $np > 5$, (2) $np(1-p) > 9$. Fleiss *et al* (2003) complementa dizendo que para que a distribuição binomial seja satisfatória os valores de p devem estar entre $0,3 \leq p \leq 0,7$ e para grandes valores de n , $n(1-p) \geq n$.

Tanto a carta p como a carta np dependem da probabilidade de erros classificados como erro do tipo I e erro do tipo II. O erro do tipo I corresponde a considerar o processo fora de controle quando na verdade o processo está sob controle. Já o erro do tipo II considera que o processo está sob controle, quando na verdade está fora de controle. Para que esses erros sejam evitados é necessário que as medidas desempenhos, que será abordado nas subseções seguintes, sejam bem definidas, além de ter conhecimento dos equipamentos e do processo que está sendo monitorado.

2.3.2 Carta de controle Beta

As cartas desenvolvidas por Shewhart para atributos apresentam uma ampla aplicação devido a sua simplicidade no desenvolvimento e na sua facilidade para análise e monitoramento do comportamento dos dados analisados. Contudo, quando o valor de p é considerado pequeno, exemplo $p = 0,001; 0,01; 0,05$, a aproximação da distribuição normal à distribuição binomial não é satisfatória (SANT'ANNA E CATEN, 2012).

Com o decorrer dos anos, algumas cartas de controle surgiram como alternativa para sobrepor as limitações da carta p . Quasenberry (1991) desenvolveu a carta Q-binomial para monitorar fração não-conforme usando uma transformação não linear para os limites de controle e demonstrou que o método se aproxima a distribuição normal mais próxima do binômio. Heiman (1996) realizou ajustes nos limites da carta de controle p para processos no qual o tamanho de n for grande, $n > 10000$, onde pode

observar que nesses casos os limites de controle são estreitos o que pode ocasionar no aumento de alarmes falsos. Chukhrova e Johannssen (2019) propuseram uma carta p , no qual os limites de controle se baseiam na distribuição hipergeométrica, onde foi considerado que os dados das frações seguem a distribuição hipergeométrica e calculados os seus limites a partir dessa distribuição, com a finalidade de obter uma análise da fração de forma mais dinâmica que a carta p tradicional.

Sant'Anna e Caten (2012) desenvolveram a carta de controle Beta para monitorar variáveis do tipo fração em processos industriais. Essa carta de controle assume que os dados da fração podem ser aproximados por uma distribuição beta e propõe novos limites de controle baseado nessa distribuição. Bayer *et al* (2018) cita que a carta de controle Beta apresenta bom desempenho no controle variáveis do tipo de fração ou proporção não conforme.

Os limites de controle da carta beta são definidos a partir do valor da função cumulativa da distribuição beta que pode ser vista na equação 2.15,

$$F(y) = P(Y \leq y) = \int_0^y f(y; \theta_1, \theta_2) dy, \quad (2.15)$$

assim os limites de controle da carta Beta podem ser definidos a partir de,

$$LSC = \bar{p} + w_2 \sqrt{s^2}(\bar{p}); \quad (2.16)$$

$$LC = \bar{p}; \quad (2.17)$$

$$LIF = \bar{p} - w_1 \sqrt{s^2}(\bar{p}), \quad (2.18)$$

onde \bar{p} representa a média da proporção ou fração não conforme, s^2 a variância da fração não conforme que por de ser obtida através da equação 2.19,

$$Var(Y) = \frac{\theta_1 \theta_2}{(\theta_1 + \theta_2)^2 \cdot (\theta_1 + \theta_2 + 1)} \quad (2.19)$$

Para a definição dos limites de controle, também é necessário que as constantes w_1 e w_2 , que são responsáveis pela largura dos limites de controle, sejam definidas. As constantes podem ser encontradas da seguinte forma:

$$w_1 = \frac{\bar{p} - \psi\left(\frac{\alpha}{2}; \theta_1; \theta_2\right)}{\sqrt{s^2}(\bar{p})} \quad (2.20)$$

$$W_2 = \frac{\psi\left(\left|1-\frac{\alpha}{2}\right|; \theta_1, \theta_2\right)^{-\bar{p}}}{\sqrt{s^2(\bar{p})}} \quad (2.21)$$

A maior parte das cartas de controles aplicadas em atributos, se baseiam na distribuição binomial para monitoramento e controle. Contudo, quando o valor da fração ou proporção for pequena, a aproximação normal à binomial pode ser inadequada (SANT'ANNA E CATEN, 2012). A carta Beta foi desenvolvida pensando em atender de forma mais eficiente dados de processos onde a proporção é pequena, no entanto é importante salientar que a carta tem restrições no valor de p na faixa de $[0, 1]$.

2.3.3 Medidas de desempenho para atributos

Segundo Aslam *et al* (2019) o *ARL* é uma variável significativa responsável por avaliar o desempenho de uma carta de Controle Estatístico de Processos. O *ARL* indica o valor do número de observações que devem ser plotados na carta de controle até que seja indicado um ponto fora de controle estatístico.

O *ARL* pode ser dividido em duas medidas que o caracteriza, ARL_0 e ARL_1 . Samohyl (2009) cita que o ARL_0 corresponde ao número médio de amostras que são esperados até a emissão de um alarme falso. O ARL_1 é o número médio de amostras esperados até a sinalização de uma mudança. Essa característica do *ARL* demonstra que essa variável está diretamente ligada aos erros de tipo I e tipo II para medir o desempenho da carta de controle aplicada para monitoramento, onde é considerado algumas hipóteses para a sua avaliação. A hipótese nula (H_0) considera que o processo está estável, sem variações dentro do monitoramento. Já a hipótese alternativa (H_1) considera que o processo é estável em sua aplicação. Samohyl (2009) afirma que o alarmes falsos em CEP são denominados ARL_0 em analogia a H_0 e verdadeiros de $ARL_1(H_1)$.

Montgomery (2004) demonstra que o *ARL*, em termos de alarme falso (erro do tipo I) para as cartas de controle de Shewhart, podem ser obtidos a partir de:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha_s}. \quad (2.22)$$

onde α_s é o número da probabilidade que cada ponto exceda os limites de controle, considerando que o processo esteja sob controle estatístico (ex: $\alpha_s = 0,0027$). A Figura 2.4 demonstra o gráfico de probabilidade de ocorrência de alarme falsos dentro de um processo com desvio de 3σ para exemplificar.

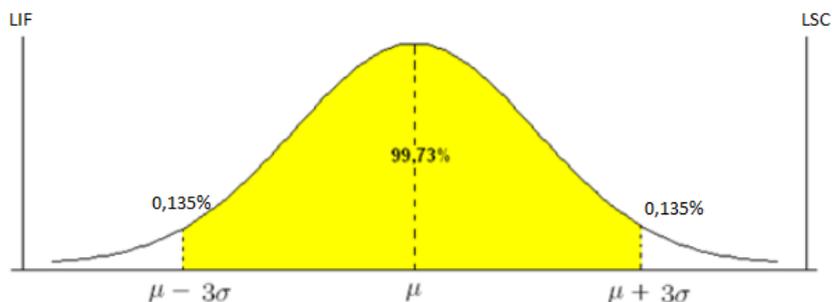


Figura 2.4. Probabilidade de observações com desvio 3σ .

Fonte: Sacramento 2019 (Acessado em 27/09/2019)

A frequência de alarme falsos, assim torna-se um padrão para a análise de desempenho das cartas de controle. Se os limites tentativos calculados, apresentarem uma alta taxa de alarme falso, os mesmos devem ser recalculados, modificando o valor de q_w , alargando os limites de controle da carta.

A modelagem do gráfico do *ARL*, comumente utilizado segue a distribuição geométrica, na qual a mesma possui algumas características de assimetria, o que pode ocasionar que o valor de *ARL* encontrado no gráfico não corresponda necessariamente ao valor real do *ARL* (MONTGOMERY, 2004). Segundo Henning et al., (2010) para contornar essa situação é usar os limites probabilísticos (exatos), no qual os mesmos são calculados a partir da distribuição binomial e aproximado para a distribuição normal.

Para a carta o procedimento de obtenção do *ARL*, os mesmos procedimentos utilizados para a definição das cartas de atributos do tipo Shewhart. O que diferencia a carta Beta das cartas de atributos Shewhart são as definições dos limites de controle utilizando a distribuição Beta para a sua definição.

2.4 CARTAS DE CONTROLE POR SOMA CUMULATIVA (CUSUM)

Proposto por Page (1954), as cartas de controle de soma cumulativa (CUSUM) são ferramentas indicadas quando há interesse na detecção em pequenas alterações. Rasmussen *et al* (2018) dizem que a carta CUSUM é uma ferramenta sequencial que pode ser aplicada em processos de diversas características. Samohyl (2009) cita ainda que, as cartas de controle por soma cumulativa são capazes de reconhecer pequenas mudanças no processo monitorado, com uma antecedência muito maior do que os alarmes das cartas de Shewhart.

Diferente das cartas tradicionais de Shewhart no qual são analisados os dados de maneira pontual, a carta CUSUM incorpora diretamente toda a informação de valores da amostra plotando as somas cumulativas dos desvios da amostra de um valor alvo (MONTGOMERY, 2004). A equação 2.23 demonstra a equação que formula a carta CUSUM, onde \bar{x}_i é a média i-ésima amostra e μ é o valor alvo para o processo que é composto com um conjunto de amostra i :

$$c_i = \sum_{j=1}^i (\bar{x}_j - \mu_0) = c_{i-1} + (\bar{x}_i - \mu_0), \quad (2.23)$$

sendo c_i a soma acumulada da i-ésima amostra que combina informação de diversas amostras. Supondo que o processo permanece sob controle para o valor μ_0 definidas na equação 2,23, a soma acumulada c_i descreve um comportamento aleatório com média zero ($\mu_0=0$). Entretanto, se a média altera o seu valor para um valor acima, ou seja, $\mu_1 > \mu_0$, a soma acumulada c_i terá uma tendência crescente. Assim como se a média altera o seu valor para um valor abaixo, $\mu_1 < \mu_0$, a soma acumulada terá uma tendência decrescente. Se a média apresentar tendência ascendente ou decrescente, deve ser observado que a média do processo sofreu alteração e uma busca de causas assinaláveis deve ser realizada.

A carta CUSUM enquanto sua forma pode ser apresentada de duas formas principais, a carta CUSUM unilateral e a carta CUSUM bilateral. Henning et al., (2010) afirmam que apesar da carta bilateral (superior e inferior) apresentar maior quantidade de informações, a carta unilateral, já apresenta desempenho suficiente para o monitoramento dos dados. Na figura 2.5 pode ser observado as cartas por soma cumulativa unilateral e bilateral.

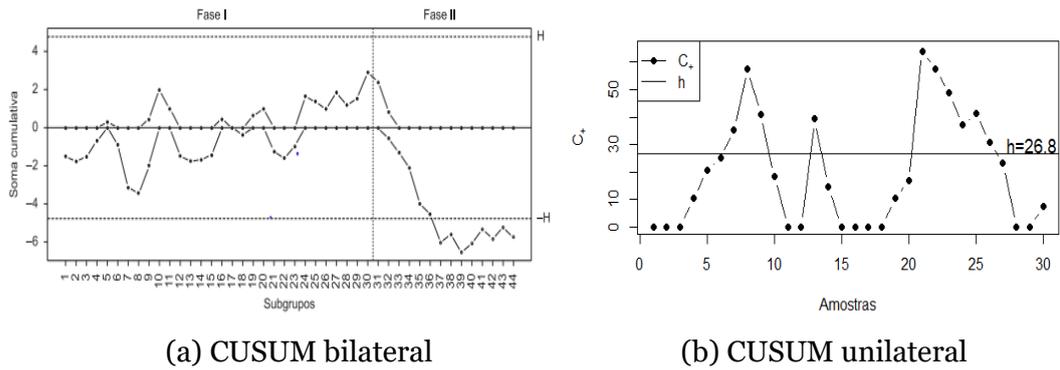


Figura 2.5. Carta CUSUM.

Fonte: (a) Walter *et al* (2013); (b) De Lima *et al* (2019).

Para o desenvolvimento da carta CUSUM é necessário sinalizar as estatísticas c_i^+ e c_i^- , denominadas CUSUM superior e CUSUM inferior e a sua formulação pode ser descrita como:

$$c_i^+ = \text{máx}[0, \bar{x}_i - (\mu_0 + K) + c_{i-1}^+], \quad (2.24)$$

$$c_i^- = \text{máx}[0, (\mu_0 - K) - \bar{x}_i + c_{i-1}^-], \quad (2.25)$$

onde K é o valor de referência para a carta CUSUM. Se a mudança de K for esperada em relação ao desvio padrão, então o valor de K é metade do valor do desvio:

$$K = \frac{\Delta}{2} = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2} = \frac{\delta}{2} \sigma \quad (2.26)$$

onde δ é o tamanho da mudança em unidades de desvio padrão e σ é o desvio padrão; c_i^+ acumula o desvio do valor de μ_0 que são maiores que K , tornando-se negativo. Se os valores acumulados excederem os limites de controle h , o processo é considerado fora de controle.

Toda a formulação do CUSUM demonstrada nesta seção é aplicada em dados contínuos, onde as cartas de controle por soma acumulativa apresentam uma grande aplicação, principalmente no monitoramento na média dos processos. No entanto, essa carta de controle também pode ser aplicada para o monitoramento de dados discretos.

2.4.1 Carta por soma Cumulativa para atributos

Segundo Vasconcelos et al., (2012), o gráfico de soma cumulativa para média de um processo, pode ser planejada para monitorar processos que mensuram características de qualidade do tipo não conformidades (defeitos) ou não conformes (defeituosos), as quais seguem as distribuições de probabilidade do Poisson e Binomial, respectivamente.

A carta de controle CUSUM Binomial tem como característica analisar o número de produtos não-conformes acumulados em um determinado grupo de amostras. Esta carta tem como objetivo a detecção de aumentos ou diminuições np_s , como é verificado na maioria das cartas por atributo (WOODALL, 1997).

Henning et al., (2010) afirmam que, a carta CUSUM Binomial unilateral superior é aplicado para detectar um aumento do valor esperado de itens não-conformes, do valor nominal np_o para np_1 , onde $p_1 = \phi p_o$, com ϕ representando o acréscimo (%) em p_o .

Assim, com uma série de amostras aleatórias Y_i , $i=1,2,\dots$, independentes, de tamanho n , a carta de controle CUSUM Binomial pode ser obtida a partir de:

$$c_i = \text{máx}(0, c_{i-1} + X_i - K), i = 1, 2 \dots \quad (2.27)$$

em relação a Y_i onde: c_i é a estatística CUSUM com $c_o = u$, $0 \leq u \leq h$; X_i é o número de itens não-conformes nas amostras Y_i ; K é a constante de referência CUSUM; h é o limite de controle do CUSUM.

A análise é realizada de maneira similar ao CUSUM para dados contínuos. Se o processo estiver sob controle, a soma descreve um percurso aleatório com média zero. Porém se houver tendências de mudança no valor da média para algum valor acima, então o valor acumulado c_i apresentará uma tendência ascendente. Se o valor de c_i ultrapassar o limite h é dito que este processo está fora de controle.

Nota-se assim que, a elaboração do CUSUM Binomial depende dos valores de K , h e por consequência do ARL_o (taxa máxima de alarme falso). Henning et al (2011), afirma que a construção do CUSUM Binomial pode ser dado de duas formas: (i) Dados K e h encontrar o valor de ARL . (ii) Dados o ARL e K , encontrar o valor de h .

Segundo Hawkins & Olwell (1998) existem duas maneiras para a escolha do valor de referência K : (i) a primeira, se o processo estiver fora de controle devido a característica do próprio processo ou produto, a partir de cálculos teóricos e experimentais pode-se determinar o valor de K e elaborar a carta CUSUM para

detectar alterações desses valores; (ii) a segunda forma, trata de escolher a mudança que se deseja detectar rapidamente. Assim, para a aplicação de um CUSUM Binomial é abordado a média da proporção sob controle np_0 e a média fora de controle estatístico np_1 (HENNING et al., 2011).

Para a determinação do valor de referência de K existem alguns procedimentos desenvolvidos ao decorrer dos anos. Uma primeira abordagem foi a aproximação dos parâmetros do CUSUM Binomial à distribuição Poisson. Os valores de K e h são encontrados através de tabelas auxiliares disponibilizados (BOUKER, 2001).

Lucas (1985) realizou o estudo do valor de referência K de uma carta CUSUM com a distribuição Poisson, analisando a aproximação do valor de referência do CUSUM com o K do teste *SPRT* (*Sequential Probability Ratio Test*). Gan (1991) fez o estudo do CUSUM para dados contínuos, onde através de estudo numérico ele comprovou que o K_{SPRT} é mesmo K ótimo para o CUSUM para detectar μ_1 . Assim Gan (1993) estendeu seu estudo para o caso binomial, onde comprovou em seu trabalho que o valor de referência K obtido a partir de uma sequência de testes SPRT quantifica o desempenho do CUSUM binomial em relação ao *ARL*. As equações 2.28, 2.29 e 2.30 demonstram o desenvolvimento da formulação do valor de referência, onde são considerados a hipótese $H_0: \theta$, onde $\theta_1 > \theta_0$, no qual o SPRT emprega a razão de verossimilhança.

$$\Lambda_i = \frac{\prod_{i=1}^n P(X = x_i; p_0)}{\prod_{i=1}^n P(X = x_i; p_1)}, \quad (2.28)$$

onde $\theta_0 = p_0$ e $\theta_1 = p_1$, de forma equivalente,

$$\ln(\Lambda_i) = \sum_{i=1}^n (X_i - K_{SPRT}) = \ln(\Lambda_{i-1}) + X_i - K_{SPRT}, \quad (2.29)$$

podendo assim encontrar a formulação final para o valor de referência K_{SPRT} :

$$k = \frac{n \ln\left(\frac{1-p_0}{1-p_1}\right)}{\ln\left(\frac{1-p_0}{1-p_1}\right) - \ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right)}. \quad (2.30)$$

A formulação do valor de referência K para o CUSUM Binomial a partir do SPRT,

não é a única forma de determinar este parâmetro para o CUSUM. Scheineider e O’Cinneide (1987) apresenta uma formulação para o valor K de referência com a aproximação binomial à normal, que pode ser vista na equação 2.31,

$$K = \frac{(np_0 + np_1)}{2} \quad (2.31)$$

Reynolds e Stoumbo (2000) sugerem que para simplificar os cálculos das medidas de desempenho da carta CUSUM Binomial, recomenda-se que o valor de K tenha o seu valor arredondado. Além disso os valores arredondados facilitam na tomada de decisão da carta CUSUM Binomial que varia de valores de 0 até um valor h determinado.

Neste presente trabalho, a equação 2.30, será utilizada para a determinação do valor de referência K , pois desde que Gan (1993) comprovou que o K_{SPRT} é o mesmo que o K de referência para o CUSUM Binomial, este tornou-se convencionalmente utilizados em trabalhos do CUSUM Binomial.

2.4.2. Medidas de desempenho para o CUSUM Binomial

O ARL é a métrica responsável por analisar o desempenho das cartas de controle. Hawkins e Owel (1998) citam que a dificuldade de implementação do CUSUM é devido ao desenvolvimento de procedimentos para obter as medidas de desempenho dessas cartas que são mais complexas quando comparadas com as cartas de controle de Shewhart.

O método convencionalmente aplicado para a determinação das medidas de desempenho da carta CUSUM Binomial é pelo método das Cadeias de Markov e simulações computacionais de forma a complementar o procedimento.

Broke e Evans (1972) propuseram o desenvolvimento do procedimento de determinação do ARL para o CUSUM para dados discretos a partir das Cadeias de Markov. Este método é um dos mais utilizados em trabalhos que aplicam o CUSUM Binomial até os dias atuais. Morais e Pacheco (2006) cita que isso deve-se a característica do CUSUM, no qual esta carta apresenta uma característica recursiva, estas podem ser vistas como uma constituição da Cadeia de Markov em tempo discreto e com espaço de estados discretos, quando aplicado em dados com dados discretos.

Lucas (1982) cita que a cadeia de Markov é baseada em uma matriz de transição P , que representa a probabilidade de passar de um estado i para um estado j , onde os

diferentes estados representam os diferentes estados do CUSUM. A matriz de transição P, pode ser descrita como,

$$P = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

onde R representa os vários estados sob controle com diferentes valores do CUSUM e p é o vetor que representa a probabilidade de alcançar um sinal fora de controle.

Os parâmetros do CUSUM Binomial, K e h está diretamente ligado a matriz R da cadeia de Markov (HENNING *et al*, 2011). Se tivermos uma carta CUSUM, onde os parâmetros são $K=3$ e $h=3$ a matriz R terá 3 linhas e 3 colunas. A matriz R é formulada conforme a equação 2.33:

$$R = \begin{bmatrix} F_{\theta}K & P_{\theta}(K+1) & P_{\theta}(K+2) & \dots & P_{\theta}(K+(h-1)) \\ F_{\theta}(K-1) & P_{\theta}K & P_{\theta}(K+1) & \dots & P_{\theta}(K+(h-2)) \\ F_{\theta}(K-2) & P_{\theta}(K-1) & P_{\theta}K & \dots & P_{\theta}(K+(h-3)) \\ F_{\theta}(K-3) & P_{\theta}(K-2) & P_{\theta}(K-1) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{\theta}(K+1-h) & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

onde $F_{\theta}(i) = F_{bin(n,p_0+\theta)}(i)$ e $P_{\theta}(i) = P_{bin(n,p_0+\theta)}(i)$ e representam a distribuição acumulada e de probabilidade de $Y_n(\theta) \forall i \in N$.

O vetor p representa a probabilidade de alcançar um sinal fora de controle e pode ser calculado através de $1 - F_{\theta}(i)$. A matriz P pode ser demonstrada através da equação 2.34:

$$P = \begin{bmatrix} F_{\theta}K & P_{\theta}(K+1) & P_{\theta}(K+2) & \dots & P_{\theta}(K+(h-1)) & 1 - F_{\theta}(K+(h-1)) \\ F_{\theta}(K-1) & P_{\theta}K & P_{\theta}(K+1) & \dots & P_{\theta}(K+(h-2)) & 1 - F_{\theta}(K+(h-2)) \\ F_{\theta}(K-2) & P_{\theta}(K-1) & P_{\theta}K & \dots & P_{\theta}(K+(h-3)) & 1 - F_{\theta}(K+(h-3)) \\ F_{\theta}(K-3) & P_{\theta}(K-2) & P_{\theta}(K-1) & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_{\theta}(K+1-h) & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 - F_{\theta}(K) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

O valor do ARL, pode assim ser obtido resolvendo $u = [I - R]^{-1}$, sendo R de qualquer tamanho. Henning *et al* (2011) afirmam que, o sucesso do resultado obtido através da cadeia de Markov dependem muito dos números de estados que compõe esse procedimento. Esses valores correspondem uma faixa entre $[0, h]$, assim o procedimento de arredondamento citado anteriormente acelera o processo de determinação do ARL por Cadeias de Markov.

Reynolds e Stoumbos (2000) afirmam que se o valor de p_0 for muito baixo, a matriz de transição da Cadeia de Markov pode ser muito grande, fazendo com que haja um grande esforço computacional. Assim, buscou-se novas metodologias para encontrar as medidas de desempenhos para a carta CUSUM para dados discretos.

Uma outra abordagem para a determinação do ARL da carta CUSUM Binomial é baseada na aproximação *Corrected Diffusion*, também conhecida como aproximação CD. Essa abordagem aproxima o limite do valor esperado do excesso da estatística SPRT sobre as linhas de aceitação e rejeição, corrigindo este excesso. Henning *et al* (2015) afirmam que, o princípio desta aproximação é substituir a condição de passeio aleatório da estatística de controle por um processo de movimento browniano contínuo. Entretanto, essa aproximação só é válida para distribuições fortemente não simétrica, assim a distribuição binomial não atenderia a aproximação (SIGMUND 1985).

Reynolds e Stoumbos (1999) então propuseram uma forma de contornar o problema da aproximação CD para distribuição binomial. Eles desenvolveram um procedimento no qual a variável Y_i foi padronizada, aproximando a um processo de movimento browniano e com argumento de ajustes de curva usando para calcular esses excessos. Assim foi possível determinar o limite superior de controle para o CUSUM Binomial e sua formulação pode ser vista na equação 2.35:

$$b = h + \frac{1}{3}(1 - 2p_0), \quad (2.35)$$

com o valor de h corrigido, o mesmo foi inserido na aproximação CD, podendo assim determinar as medidas de desempenho de uma carta CUSUM Binomial. As equações 2.36, 2.37, 2.28 e 2.39, apresentam a formulação do ARL , para os valores aproximados de h obtidos a partir da aproximação (REYBNOLDS E STOUMBOS, 1999):

$$ARL \approx \left(\frac{r_2}{n(r_2 p_0 - r_1)} \right) \left(b - \frac{n\gamma(e^{br_2} - 1)}{1 - e^{-n\gamma r_2}} \right), \quad (2.36)$$

$$r_1 = -\ln \left(\frac{1-p_1}{1-p_0} \right), \quad (2.37)$$

$$r_2 = -\ln \left(\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)} \right), \quad (2.38)$$

$$\gamma = \frac{r_1}{r_2}. \quad (2.39)$$

Assim sabendo o valor da proporção sob controle (p_0), a proporção que se deseja detectar rapidamente (p_1), o tamanho da amostra (n) e o limite superior (h) é possível calcular o *ARL* da carta CUSUM binomial.

A partir da equação 2.35, o valor do limite superior de controle h , pode ser obtido através de métodos numéricos iterativos. Apesar da evolução computacional contribuir para que esse trabalho nos dias atuais não seja difícil, a escolha de um valor inadequado no início do processo pode causar a não convergência dos valores para a obtenção de h . Henning *et al* (2015) propôs um método de aproximação de h no qual permite o cálculo direto desta variável. Essa aproximação foi realizada a partir da função LambertW e seu desenvolvimento em série. Chapeau-Blondeau e Mounir (2002) afirmam que para um dado argumento x , a função LambertW retorna valores $W(x)$, conforme a equação 2.40:

$$W(x)e^{W(x)} = x, \quad (2.40)$$

a função LambertW pode ser expandida, se o valor de x for negativo ou próximo a 0, conforme é demonstrando na equação 2.41:

$$LambertW\{-1, x\} = L_1 - L_2 + \frac{L_2}{L_1} + \frac{L_2(L_2-2)}{2L_1^2} + \frac{L_2(6-9L_2+2L_2^2)}{6L_1^3} + \dots, \quad (2.41)$$

onde, $L_1 = \ln(-x)$ e $L_2 = \ln(\ln(-x))$. Assim a função LambertW pode ser aplicado na equação 2.35, ficando da seguinte forma:

$$b \approx \frac{1}{r_2} \left(- \left(\frac{n\gamma r_2}{e^{-n\gamma r_2} - 1} \right) + nARL_0(p_0 r_2 - r_1) - LambertW[x] \right) \quad (2.41)$$

assim o limite de controle h pode ser obtido através das formulações:

$$h \approx \frac{1}{r_2} \left(- \left(\frac{n\gamma r_2}{e^{-n\gamma r_2} - 1} \right) + nARL_0(p_0 r_2 - r_1) - \left(L_1 - L_2 + \frac{L_2}{L_1} + \frac{L_2(L_2-2)}{2L_1^2} \right) \right) - \frac{(1-2p_0)}{3}, \quad (2.42)$$

onde:

$$L_1 = \ln \left(- \left(- \left(\frac{1}{e^{-n\gamma r_2} - 1} \right) \left(e^{n\gamma r_2 + n(r_1 - p_0 r_2)(-ARL_0 - (r_2/1 - e^{-n\gamma r_2})n\gamma r_2)} \right) \right) \right); \quad (2.43)$$

$$L_2 = \ln(-L_1), \quad (2.44)$$

Para o desenvolvimento deste trabalho, para a parcela do CUSUM Binomial, o ARL será obtido através da aproximação CD e o limite de controle h através da aproximação utilizando a função lambertW.

2.5. CARTAS COMBINADAS SHEWHART- CUSUM PARA ATRIBUTOS

O estudo das cartas combinadas Shewhart e CUSUM teve seu início na análise de dados contínuos. Wetsgard *et al* (1977) propuseram o desenvolvimento as inserções dos limites de Shewhart na carta CUSUM para aumentar a sensibilidade de detecção de alterações da carta de controle. Lucas (1982) estendeu o estudo da carta combinada Shewhart-CUSUM, onde os dados foram analisados de maneira pontual ao invés de analisar o comportamento parabólico do CUSUM. Woodall e Ncube (1984) apresentou em seu trabalho modificações nas cartas combinadas em seu trabalho proposta por Wetsgard, onde foi apresentado o esquema de *score quality*, onde utilizou na carta Shewhart-CUSUM a abordagem proposta por Munford (1980) de pontuação cumulativa nas cartas de controle. Sanusi et al., (2017) apresentou a carta combinada Shewhart-Cusum binomial com uma série de estimadores baseados no tipo regressão, tipo razão e Sigh e Tailor, com o objetivo de estimar os parâmetros de localização da carta combinada Shewhart-CUSUM Binomial.

O estudo das cartas combinadas para atributos teve seu início com Yashchin (1985) no qual em seu trabalho estudou a aplicação das Cadeias de Markov para a determinação das medidas de desempenho de carta de controle Shewahrt-CUSUM, onde iniciou o estudo da carta combinada para dados com a distribuição Poisson, sendo estendido nos anos seguintes por Abel (1990) e Hawkings e Owell (1998).

As cartas para atributos possuem um bom desempenho no monitoramento de dados em processos onde há alterações de média a grande magnitude. A carta CUSUM tem sua aplicação recomendada para aplicações onde a alteração dentro do processo é de pequena magnitude. Entretanto, quando a magnitude de alteração dentro do processo não é conhecida, nenhuma das duas cartas são indicadas para o monitoramento do processo. Moraes e Pacheco (2006) citam que combinar as cartas Shewhart e CUSUM para dados discretos é uma solução factível para processo onde a magnitude de alteração é desconhecida, uma vez os esquemas de Shewhart se comporta bem com grandes alterações e o CUSUM permite detectar pequenas alterações ao longo

do tempo.

A carta combinada Shewhart-CUSUM binomial teve o seu estudo iniciado por Morais (2002) e Morais e Pacheco (2006). Henning et al., (2015) estendeu seu estudo aplicando uma nova metodologia para determinar o limite superior da parcela do CUSUM binomial utilizando a função LambertW. Ottenstreuer et al.,(2019) apresentou a carta combinada Shewhart-CUSUM Binomial na análise de dados , onde foi implementado um modelo autoregressivo de primeira ordem de valor inteiro Poisson para implementar um novo limite de controle para atuar quando o limite de controle da parcela CUSUM Binomial estiver sob controle estatístico de forma a complementar o monitoramento dos dados.

É possível notar que o estudo para cartas combinadas para atributos ainda é uma área que possui muitas lacunas a serem preenchidas. A Tabela 2.1 demonstra a evolução do desenvolvimento das cartas de controle combinadas e suas principais contribuições ao decorrer dos anos até o desenvolvimento do presente trabalho.

Tabela 2.1 Cartas de controle combinadas e contribuições

Esquema	Autor (ano)	Contribuição
Carta Xbar-CUSUM Normal	Westgard et al (1977)	Combinação pela primeira vez dos limites das cartas Shewhart e CUSUM para média.
	Lucas (1982)	Análise do comportamento pontual da carta Combinada proposta por Westgard, ao invés da análise parabólica característica do CUSUM.
	Wodall e Ncube (1984)	Aplicação do Score Quality, para análise de pontuação cumulativa da carta Combinada
	Yashchin (1985)	Aplicação das Cadeias de Markov para a determinação das medidas de desempenho da Carta combinada.
Carta NP-CUSUM Binomial	Morais (2002)	Aplicação da carta combinada Shewhart-CUSUM Binomial para análise de dados Discretos
	Morais e Pacheco (2006)	Estudo das medidas de desempenho para as Cartas Combinadas para dados discretos a partir das Cadeias de Markov.
	Henning et al., (2015)	Aplicação da função Lambert w para o cálculo do limite superior de controle h da parcela CUSUM.
	Sanusi et al., (2017)	Utilização de estimadores para auxiliar nos parâmetros de localização da carta combinada.
	Ottenstreuer et al., (2019)	Implementação de um novo limite de controle baseado no modelo autoregressivo para análise de dados discretos.

CARTA COMBINADA BETA-CUSUM BINOMIAL

Este capítulo apresenta o procedimento de desenvolvimento da carta combinada Beta-CUSUM binomial. Os procedimentos apresentados demonstram como encontrar os parâmetros iniciais das parcelas Beta e CUSUM-Binomial para serem aplicados na carta combinada. A fundamentação teórica apresentada no capítulo 2 são a base para o desenvolvimento da carta.

3.1. CARTA COMBINADA BETA-CUSUM BINOMIAL

A carta Beta tem como principal característica o monitoramento de frações de itens não conformes, no qual no valor de p possui um valor pequeno, uma das características na qual a carta p e np apresentam limitações. A carta CUSUM Binomial tem como característica a detecção de alterações de pequenas magnitudes de forma cumulativa para dados discretos, sobrepondo a deficiência das cartas de Shewhart e Beta na detecção de alterações de pequenas magnitudes. Portanto, a carta combinada Beta-CUSUM Binomial apresenta-se como uma nova opção para a detecção de alterações em dados nos processos onde os descontroles são de magnitude desconhecida, além de apresentar um melhor desempenho no monitoramento de processos no qual o valor de p seja pequeno. No presente trabalho, a carta terá sua aplicação estudada para o monitoramento de itens não conformes, onde a parcela Beta substituirá a parcela np , convencionalmente aplicados nas cartas combinadas para atributos.

Para o desenvolvimento da carta Beta-CUSUM Binomial é necessário que seja respeitado uma sequência de procedimentos. Os procedimentos têm como objetivo encontrar os parâmetros necessários para a construção da carta combinada, na qual estima-se os parâmetros das cartas separadamente para em seguida determinar os

parâmetros da carta combinada. A figura 3.1, demonstra o fluxograma com a sequência de procedimentos para a construção da carta Beta-CUSUM Binomial.

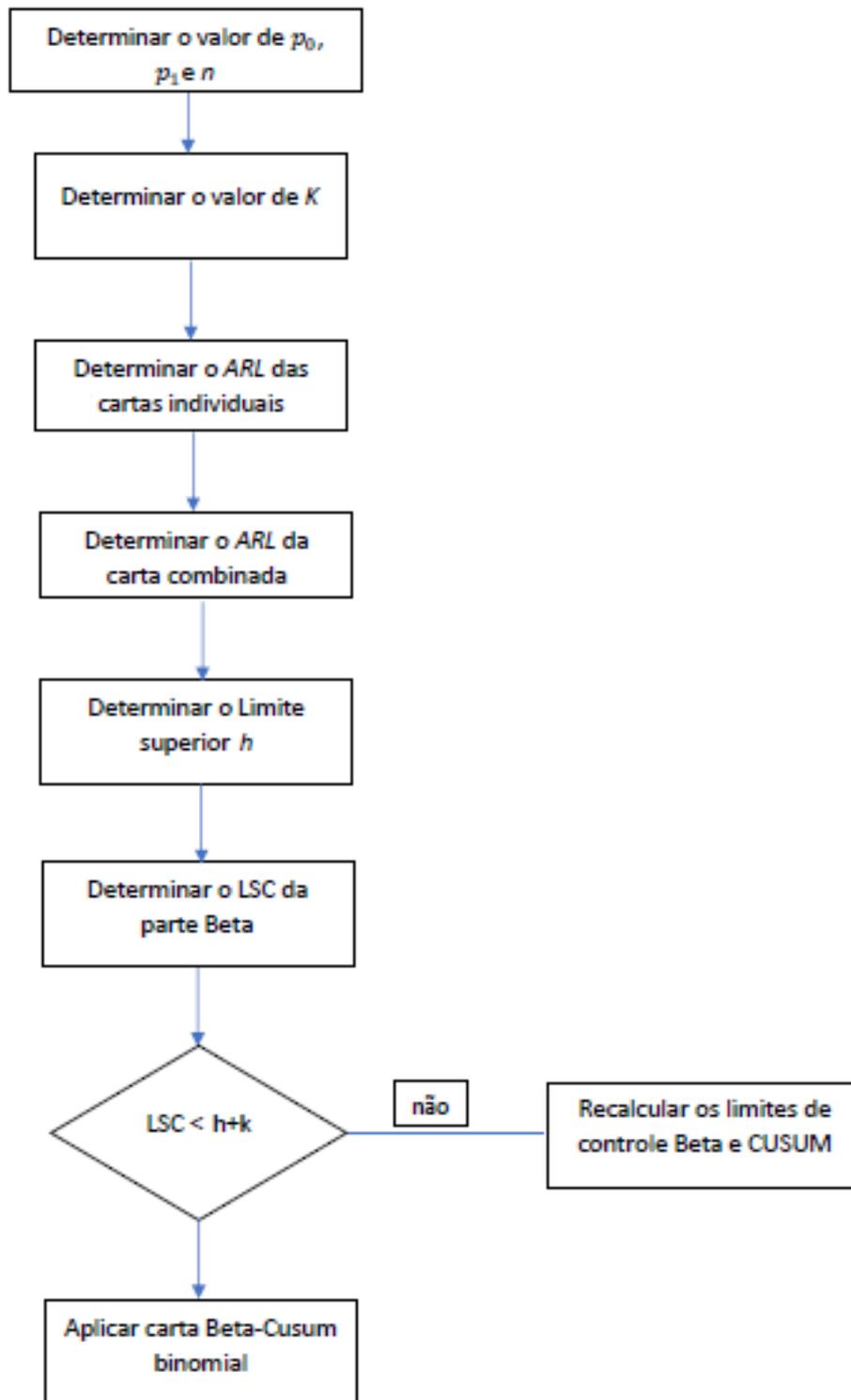


Figura 3.1. Fluxograma do procedimento para construção carta combinada Beta-CUSUM Binomial.

Fonte: Autoria própria.

3.1.1 Definição da proporção sob controle (p_o) e fora de controle (p_i)

Os valores da proporção sob controle estatístico (p_o) e a proporção fora de controle que se deseja detectar (p_i), são parâmetros essenciais para elaboração das cartas Beta e CUSUM Binomial. Esses parâmetros podem ser pré-especificados de acordo com as características dos processos que será monitorado, como também pode ser encontrado a partir dos dados que serão analisados, nestes casos as equações 2.10 e 2.11 são utilizadas para determinar as proporções.

Um exemplo de determinação dos valores de p , de maneira pré-especificada pode ser vista no trabalho desenvolvido por Henning *et al* (2014), onde o CUSUM binomial foi aplicado para o monitoramento de coliformes totais para verificar a qualidade de água potável. Este procedimento por norma diz que, a proporção fora de controle não pode ser maior que 5%, ou seja, $p_i=0,05$, assim em seu trabalho este valor foi aplicado na carta CUSUM Binomial. No entanto, a maioria dos processos os valores p devem ser obtido, o exemplo 3.1, exemplifica a obtenção das proporções p_o e p_i .

Exemplo 3.1. Sabendo que um determinado conjunto de dados tem uma quantidade de amostras $m=30$ e tamanho de $n=50$, aplicando as equações 2.10 e 2.11, foi possível determinar o valor da proporção sob controle estatístico, $p_o = 0,231$, portanto, a proporção p_i pode ser obtida através do acréscimo de $\phi(\%)$ em p_o . A porcentagem acrescentada representa o quanto deseja-se detectar a partir do valor alvo. Neste trabalho os valores adotados para ϕ foram de: 5%, 10%, 15% e 20%, porém os valores aplicados podem variar de acordo com o processo e a magnitude que deseja-se detectar. A tabela 3.1 ilustra os valores de p_i que podem ser obtidos:

Tabela 3.1 Valores de p_i , considerando $p_o= 0,231$.

ϕ	p_i
5%	0,243
10%	0,254
15%	0,265
20%	0,277

3.1.2 Valor de referência K do CUSUM Binomial

Com os valores da proporção sob controle estatístico (p_o) e a proporção fora de controle que se deseja detectar (p_i) definidos, é possível determinar o valor de referência do CUSUM Binomial K . A variável K é importante para a determinação das medidas de desempenho do CUSUM Binomial, além de ser uma parcela importante

para o cálculo do comportamento do acúmulo dos dados no processo monitorados. Para o desenvolvimento da carta Beta-CUSUM Binomial, o valor de K é obtido através da equação proposta por (GAN, 1993).

A equação 2.30 apresentada no trabalho de Gan (1993, onde o valor de K , pode ser calculado de forma automática quando os valores de p_0 e p_1 são substituídos.

3.2. MEDIDAS DE DESEMPENHO DAS CARTAS INDIVIDUAIS

Uma das maneiras de definir as medidas de desempenho da carta CUSUM binomial é o teste de Resposta Inicial Rápida (RIR) proposto por Lucas e Crosier (1982). Esse teste tem como objetivo aumentar a sensibilidade da carta CUSUM, onde a implementação desse procedimento permite reduzir o valor do ARL. Montgomery (2004) cita que se um processo iniciar fora de controle, o RIR permite que essa alteração seja detectada de maneira mais rápida. Entretanto, para a aplicação do RIR seja eficiente é necessário que haja um planejamento prévio do limite superior h , assim este teste é muitas vezes utilizado de forma a complementar estudos de análises de medidas de desempenhos já realizadas. No procedimento, é escolhido a distribuição de probabilidade aplicada na análise dos dados, no caso do presente trabalho aplicou-se a distribuição Binomial. Logo após a escolha da distribuição binomial, o software pede para inserir os valores de p_0 e p_1 e do tamanho de amostra n , e retorna o valor de referência K calculado a partir do RIR. Com o valor de referência K calculado o software pede para definirmos quantas casas significativas serão utilizadas para a variável K , para logo após calcular e retornar os valores de h e ARL calculados a partir dos dados inseridos no programa. A figura 3.2 demonstra a aplicação do teste RIR nos dados do exemplo 3.1.

```

C:\Users\rafae\OneDrive\Área de Trabalho\Mestrado\Dissertação\geth.exe
6   Inv Gaussian mean
   : 4
Enter the sample size and in-control probability : 50
0.237
and the out-of-control probability : 0.243
The exact theoretical reference value is      12.000
Enter the reference value you want to use : 12.000
What are the Winsorizing constants? (say -999 999 if you don't want
to winsorize or don't understand question): -999 999
Want zero-start (say Z), steady state (say S) or FIR (say F)? : z
Enter ARL : 150
n   23.0000 arls   101.7    81.4    88.8
n   26.0000 arls   131.3   103.5   115.5
n   27.0000 arls   142.4   114.5   125.6
x 12.0000 h 27.0000 ARL   142.36
   h 28.0000 ARL   153.97
DI 28.000, IC ARL  154.0, OOC ARL  77.3, FIR ARL  54.6, SS ARL  61.0
Would you like another run?:

```

Figura 3.2. Teste RIR no programa anygeth.
Fonte: Programa anygeth (HAWKING E OWELL, 1998).

Contudo o RIR é procedimento adequado para aumentar a sensibilidade de medidas de desempenho já calculadas e analisadas. No capítulo 2 foi demonstrado algumas maneiras para a determinação das medidas de desempenhos da carta CUSUM Binomial, como as cadeias de Markov e a aproximação CD. Como o objetivo da carta combinada Beta-CUSUM binomial é de monitorar dados com o valor de p pequeno, a cadeia de Markov apresentará um grande esforço computacional para a sua aplicação, assim a determinação das medidas de desempenho da parcela CUSUM da carta combinada será através da aproximação CD

Para o procedimento da medida de desempenho através da aproximação CD foi utilizado o *software* R, com o código hrs. 5, disponibilizado por (HENNING ET AL, 2011). O mesmo código hrs.5 é o responsável por retornar os valores dos limites de controle da carta CUSUM Binomial, onde é utilizado a aproximação do limite superior de controle utilizando a função LambertW, proposta por (HENNING, 2015). No código são aplicados os valores das proporções p_o e p_i e o tamanho de amostra n e um valor de ARL prévio, logo após o código ser executado são retornados os valores do limite superior de controle e do ARL recalculado pela aproximação CD. A figura 3.3 demonstra os resultados obtidos a partir dos dados do exemplo 3.1 aplicado no código.

```

Function: hrs.5 (.GlobalEnv) (Read-only)
1 function(p0,p1,n,ar10,tol=0.05,digits=1,digits.h=1){
2   r1<- -log((1-p1)/(1-p0))
3   r2<- log((p1*(1-p0))/(p0*(1-p1)))
4   g <- r1/r2
5   k <- round(n*g,digits)
6   l1<-log((exp(-((n*(r2*g + (-1 + exp(n* r2*g)) *(r1 -
7                                     p0* r2)* ar10)))/(-1 + exp(r
8
9   l2<-log(-log((exp(-((n *r2* g)/(-1 + exp(n* r2* g)))
10                  + n*(-r1 + p0* r2)* ar10)* n *r2 *g)/(-1 + exp(n* r2
11                  *g))))
12   l3<-l2/l1
13   l4<-(l2*(l2-2))/(2*l1^2)
14   b2 <- ((-n*r2*g)/(1-exp(-n*r2*g)))-(l1-l2+l3+l4)+n*ar10*(p0*r2-r1)/r2 # 4 term
15   h<- round(b2-(1/3)*(1-2*p0),digits.h)
16   ar1<-
17     ar1Cusum(k=k,h=h,n=n,theta=p0,digits=digits,distr=c("binomial"))$ARL
18   err.1<-abs(ar1-ar10)/ar10
19   if (err.1 < tol) {return(c(k=k,h=h,ARL=ar1))}
20
Console Terminal x Jobs x
~/
$h1
[1] 33.66499
$h2
[1] 33.60572
$h3
[1] 33.58714
> hrs.5(0.231,0.243,n=50,ar10=500,digits=2,tol=0.05)
      k      h      ARL
11.8500 35.6000 497.5851
> view(hrs.5)
> |

```

Figura 3.3. Definição das medidas de desempenho CUSUM Binomial.

Fonte: Programa hrs.5 (HENNING, 2011).

As medidas de desempenho da parcela da carta Beta são obtidas a partir das equações 2.16, 2.17, 2.18 e 2.22. Para o ARL nesse primeiro momento a análise da carta Beta será realizada o monitoramento dos dados com o ARL padrão de 370, utilizada convencionalmente em processos industriais e aplicado no desenvolvimento do trabalho proposto por Sant’anna e Caten (2012). No entanto, a sensibilidade da carta pode ser alterada, modificando os valores das variáveis w_1 e w_2 , de forma a alterar os limites de controle da carta Beta, que serão obtidos a partir da equação 2.16, 2.17 e 2.18.

3.3 MEDIDAS DE DESEMPENHO DA CARTA COMBINADA BETA-CUSUM BINOMIAL

Ao longo dos anos a abordagem Markoviana foi utilizada para o esquema Shewhart-CUSUM Binomial, tanto para aplicação de dados contínuos quanto para dados discretos (MORAIS E PACHECO, 2006). Rocha (2004) realizou um estudo de simulação, com a construção de tabelas com os valores de parâmetros das parcelas das

cartas combinadas para dados contínuos. Morais (2004) analisou a ordenação dos *ARLs* para o caso combinado para dados discretos sob o ponto de vista estocástico. Montgomery (2004), estudou a combinação das cartas de controle considerando a função de probabilidade de ocorrência de alarmes falsos.

Montgomery (2004) cita que em um conjunto de dados onde as r variáveis são estatisticamente independentes para um produto em particular, e se a carta de controle com probabilidade do erro tipo I é mantido para cada carta individual, então a verdadeira probabilidade para a carta combinada pode ser descrita da seguinte forma:

$$\alpha' = 1 - (1 - \alpha)^r, \quad (3.1)$$

onde $(1 - \alpha)^r$ é a probabilidade de que todas as variáveis sejam representadas na carta simultaneamente dentro de seus limites de controle.

Assim, seguindo o raciocínio exposto na equação 3.1, é possível dizer que quando duas cartas de controle diferentes monitoram a mesma variável, a taxa de alarmes falso da carta combinada α_{BC} , será a combinação das taxas individuais de cada uma, α_B e α_C , para a parcela Beta e CUSUM Binomial, respectivamente. Assim, adaptando a equação para o caso da combinação entre as cartas Beta e CUSUM binomial, a expressão pode ser descrita da seguinte forma:

$$\alpha_{BC} = \alpha_B + \alpha_C - \alpha_B \alpha_C \quad (3.2)$$

O exemplo 3.2 demonstra a aplicação para a obtenção da taxa de alarmes falsos para um esquema combinado.

Exemplo 3.2. Sabendo que duas cartas de controle com a taxa de alarme falso de 5% individualmente, o valor da taxa de alarme falso combinada pode ser:

$$\alpha_{BC} = \alpha_B + \alpha_C - \alpha_B \alpha_C = 0,05 + 0,05 - 0,05 * 0,05 = 0,0975.$$

Aplicando o resultado da taxa de alarme falso na equação 2.22, é possível obter o *ALR*, da carta combinada:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha_{BC}} = \frac{1}{0,0975} \cong 10$$

3.4 VALIDAÇÃO DA APLICAÇÃO DA CARTA BETA-CUSUM BINOMIAL

Lucas (1982) sugere que para a adição de um limite superior baseado em cartas tipo Shewhart, para o caso deste trabalho do tipo Beta, seja eficiente no monitoramento em conjunto com a carta CUSUM, a condição de que o limite superior de controle da carta Beta tem que ser menor que o limite superior de controle da carta CUSUM adicionado ao valor de referência K , ou seja $LSC \leq h + K$.

Henning et al (2015) citam que o valor de K referência limita apenas para o caso onde os dados analisados são do tipo contínuo, e que para o caso binomial os valores de K tendem a ser grandes, inclusive para mudanças de pequenas magnitudes. Para o presente trabalho a validação da carta combinada será a partir da análise de $LSC \leq h$, utilizada amplamente em trabalhos de cartas combinadas para dados discretos.

Quando o limite superior de controle da carta Beta for maior que o limite superior da carta CUSUM, os valores dos limites das cartas individuais devem ser recalculados de forma que a aplicação da carta combinada seja validada.

Capítulo

4

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Este capítulo apresenta a aplicação da carta combinada Beta-CUSUM Binomial para o monitoramento de dados discretos. A análise do desenvolvimento da carta é realizada a partir da aplicação da carta em 3 de estudos de aplicação, dois exemplos com dados discretos e um exemplo com os dados contínuos. A carta de controle Beta-CUSUM Binomial é comparada as cartas individuais de Shewhart, a carta CUSUM Binomial e a carta combinada Shewhart-CUSUM Binomial. Os resultados demonstram que, a carta Beta-CUSUM Binomial apresenta para todos os tipos de dados resultados próximos a carta combinada Shewhart-CUSUM Binomial e aumenta a sensibilidade de detecção em relação as cartas individuais.

4.1 ESTUDO 1: EMBALAGEM DE SUCOS DE LARANJA

Nesta seção, a carta combinada é aplicada em um problema proposto por Montgomery (2004). O conjunto de dados se compõe de uma amostra de $n = 50$ embalagens de suco de laranja, com o período de análise $m = 30$. Estes dados são discretos e são aplicados na fase I, quando são definidos os limites de controle das parcelas individuais e da carta combinada. A tabela 4.1 demonstra dos dados analisados e aplicados na carta de controle desenvolvida.

Tabela 4.1 Número de Embalagens defeituosas por amostra

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_i	12	15	8	10	4	7	16	9	14	10	5	6	17	12	22
m	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	8	10	5	13	11	20	18	24	15	9	12	7	13	9	6

O valor da proporção sob controle estatístico p_o é 0,231 e para p_i foi simulado CUSUM Binomial foi encontrado, assim como o limite superior de controle h a partir de simulações computacionais utilizando a aproximação CD para o ARL e aproximação com a função LambertW para o limite superior de controle h respectivamente, com os dados retornados. Os valores encontrados da simulação podem ser vistos na figura 4.1.

Aproximação CD - ARL e h									
ARL	h	k	p0	p1	ARL	h	k	p0	p1
99,261	19,200	11,840	0,231	0,243	99,418	19,200	12,120	0,231	0,254
150,372	23,000	11,840	0,231	0,243	149,810	17,700	12,120	0,231	0,254
199,293	25,800	11,840	0,231	0,243	200,003	19,600	12,120	0,231	0,254
249,987	28,200	11,840	0,231	0,243	250,598	21,100	12,120	0,231	0,254
299,984	30,200	11,840	0,231	0,243	298,104	22,300	12,120	0,231	0,254
349,366	31,900	11,840	0,231	0,243	348,398	23,400	12,120	0,231	0,254
400,781	33,500	11,840	0,231	0,243	401,398	24,400	12,120	0,231	0,254
446,528	34,800	11,840	0,231	0,243	448,548	25,200	12,120	0,231	0,254
ARL	h	k	p0	p1	ARL	h	k	p0	p1
98,806	12,600	12,390	0,231	0,265	96,080	10,600	12,680	0,231	0,277
150,125	14,500	12,390	0,231	0,265	148,491	12,200	12,680	0,231	0,277
199,526	15,900	12,390	0,231	0,265	208,038	13,300	12,680	0,231	0,277
248,102	17,000	12,390	0,231	0,265	248,091	14,100	12,680	0,231	0,277
298,036	17,900	12,390	0,231	0,265	294,617	14,800	12,680	0,231	0,277
347,529	18,700	12,390	0,231	0,265	347,986	15,400	12,680	0,231	0,277
399,679	19,400	12,390	0,231	0,265	395,875	15,900	12,680	0,231	0,277
449,788	20,000	12,390	0,231	0,265	448,075	16,400	12,680	0,231	0,277

Figura 4.1. Resultados obtidos aproximação CD Estudo 1.

Fonte: Autoria própria (2019).

Assim a carta de controle foi planejada para um valor de $p_o = 0,231$, $p_i = 0,254$, ($\phi = 10\%$). O valor de ARL para a parcela Beta da carta foi definida em 370 ($\alpha = 0,27\%$)

como $LSC = 21,630$. A parcela CUSUM Binomial teve seus parâmetros definidos com, $K = 12,120$, $h = 25,200$ e $ARL = 448,075$ ($\alpha = 0,22\%$). A carta combinada Beta-CUSUM Binomial então foi planejada para um $ARL = 204,329$ ($\alpha = 0,49\%$). Para efeito de comparação a carta combinada Beta-CUSUM Binomial é comparada com a carta individual do tipo Shewhart que apresenta $ARL = 370$ ($\alpha = 0,27\%$) e $LSC = 20,510$, com a carta CUSUM Binomial com os mesmos valores aplicadas na carta combinada e com a carta combinada Shewhart-CUSUM Binomial com $ARL = 204,329$ ($\alpha = 0,49\%$), $LSC = 22$ e o limite superior de controle $h = 25,2$. A Figura 4.2 (a) a carta np , a Figura 4.2 (b) a carta CUSUM Binomial, a Figura 4.2 (c) a carta Shewhart-CUSUM Binomial e a figura 4.2 (d) a carta combinada Beta-CUSUM Binomial.

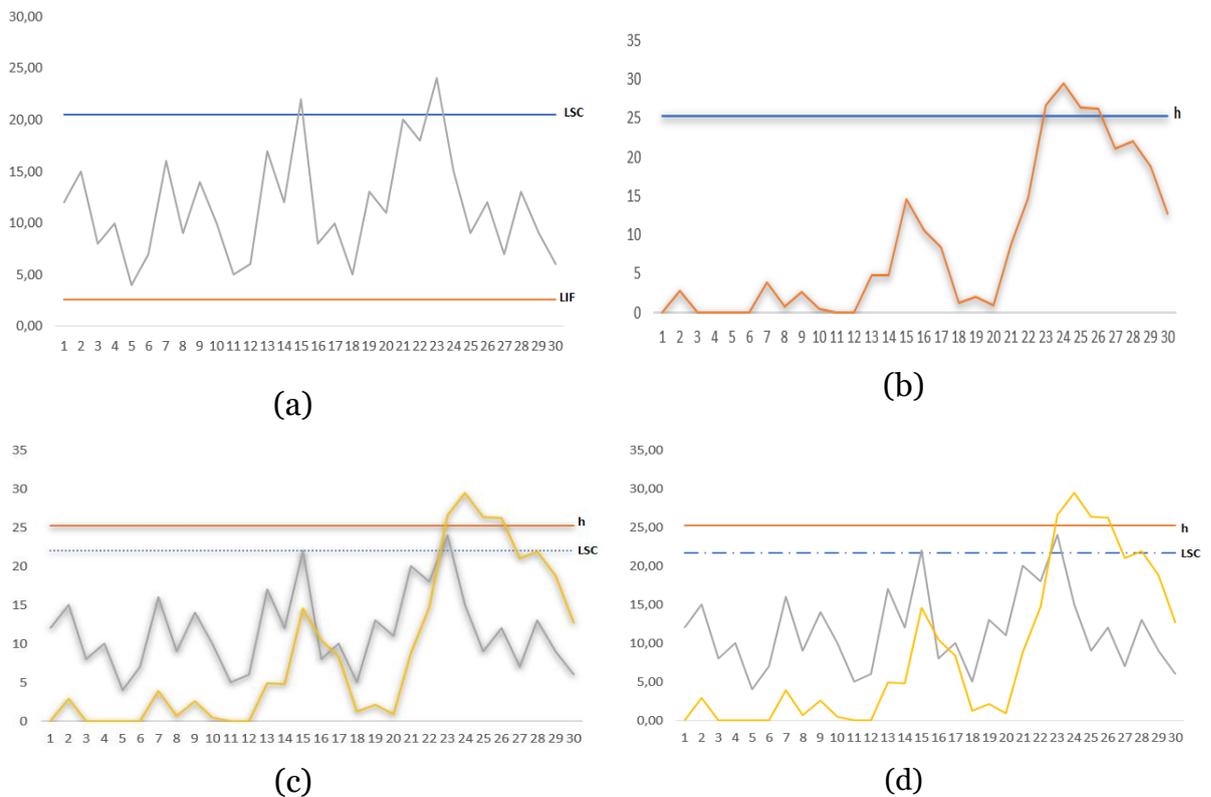


Figura 4.2. Cartas de controle obtidas do estudo 1: (a) Carta de controle np , (b) CUSUM Binomial, (c) Carta combinada Shewhart-CUSUM Binomial. (d) Carta combinada Beta-CUSUM Binomial.

Fonte: Autoria própria (2019).

Os resultados obtidos demonstram que a carta de controle np , figura 4.2 apresenta os pontos 15 e 23 fora de controle estatístico, os demais pontos analisados nessa carta de controle estão sob controle estatístico. No entanto, se observarmos a carta de controle CUSUM binomial, notamos que os pontos 23, 24, 25 e 26 estão acima do limite de controle h , porém desde o ponto 12 a carta de controle CUSUM binomial,

demonstra a tendência de variação dos dados analisados. Assim a carta Beta-CUSUM binomial demonstra a combinação dessas duas características onde é possível notar a tendência de alterações dos dados mesmo dentro do limite de controle h , como também a análise pontual da carta np . Com isso é notado que a carta combinada, para estes dados teve um desempenho em termos de sensibilidade maior do que as cartas individuais, uma vez que aumentou a sensibilidade de detecção de alterações tanto em casos pontuais, onde a carta CUSUM binomial não detectou, quanto para o caso dos dados acumulados, o que o caso np não consegue observar a tendência do processo.

Em relação a comparação com a carta combinada Shewhart-CUSUM Binomial, é possível notar para este caso que o rendimento das duas cartas são bastante similares, uma vez que os limites de controles da carta np e Beta possuem valores similares em seus limites de controle, 22 e 21,630 respectivamente. A carta de controle Beta-CUSUM Binomial para essa análise possui limites mais folgados que os limites de controle da carta combinada Shewhart-CUSUM binomial, entretanto a diferença de detecção para este caso é quase nula, com as duas tendo um bom desempenho na detecção de variações de diversas magnitudes dentro desse processo.

4.2 ESTUDO 2: ANÁLISE DE COLIFORMES TOTAIS

Nesta seção, a carta combinada é aplicada em um problema proposto por Henning et al (2014). Estes dados tem a característica de ter o valor da proporção sob controle estatístico $p_o = 0,025$, um valor baixo para p , na qual a carta Beta apresenta melhor eficiência no monitoramento dos dados do que a carta np . O conjunto de dados é composto de uma amostra de tamanho $n = 200$ reservatórios de água potável analisados, com o período de análise $m = 36$. Estes dados são discretos e são aplicados na fase I, onde foram definidos os limites de controles e os parâmetros das cartas individuais e combinada. A tabela 4.2 demonstra dos dados analisados e aplicados na carta de controle desenvolvida.

Tabela 4.2 Número de coliformes totais fora do padrão por amostra

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
x_i	8	4	8	2	2	2	0	4	6	4	7	4	6	4	5	5	5	3
m	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
x_i	5	1	3	4	9	5	3	5	8	12	7	7	19	6	8	8	6	7

Foi utilizado o software hrs.5 para determinar os parâmetros da parcela CUSUM binomial da carta combinada, *ARL* e *h*. A figura 4.3 demonstra os resultados obtidos a partir da simulação aplicando a aproximação CD.

A carta de controle combinada foi planejada para um valor de $p_0 = 0,025$, $p_1 = 0,030$, ($\phi = 20\%$). O valor de *ARL* para a parcela Beta da carta foi definida em 370 ($\alpha = 0,27\%$) como $LSC = 13,970$. A parcela CUSUM binomial teve seus parâmetros definidos com, $K = 5,450$, $h = 17,6$ e $ARL = 441,765$ ($\alpha = 0,23\%$). A carta combinada Beta-CUSUM Binomial então foi planejada para um $ARL = 204,249$ ($\alpha = 0,50\%$). Para efeito de comparação a carta combinada Beta-CUSUM Binomial é comparada com a carta individual Shewhart np que apresenta $ARL = 370$ ($\alpha = 0,27\%$) e $LSC = 12,61$, com a carta CUSUM Binomial com os mesmos valores aplicadas na carta binomial e com a carta combinada Shewhart-CUSUM Binomial com $ARL = 204,249$ ($\alpha = 0,50\%$), $LSC = 12,61$ e o limite superior de controle $h = 17,6$. A figura 4.4 (a) demonstra a carta np , a figura 4.4 (b) a carta CUSUM binomial, a figura 4.4 (c) a carta Shewhart-CUSUM Binomial e a figura 4.4 (d) a carta combinada Beta-CUSUM Binomial.

Aproximação CD - ARL e h									
ARL	h	k	p0	p1	ARL	h	k	p0	p1
99,261	16,700	5,100	0,025	0,026	98,055	13,100	5,210	0,025	0,028
150,862	20,500	5,100	0,025	0,026	146,323	15,400	5,210	0,025	0,028
196,460	23,200	5,100	0,025	0,026	193,272	17,200	5,210	0,025	0,028
250,428	25,900	5,100	0,025	0,026	239,909	18,600	5,210	0,025	0,028
303,738	28,200	5,100	0,025	0,026	286,705	19,800	5,210	0,025	0,028
356,134	30,200	5,100	0,025	0,026	335,343	20,900	5,210	0,025	0,028
405,458	31,900	5,100	0,025	0,026	381,498	21,800	5,210	0,025	0,028
456,189	33,500	5,100	0,025	0,026	432,158	22,700	5,210	0,025	0,028

ARL	h	k	p0	p1	ARL	h	k	p0	p1
98,154	11,800	5,330	0,025	0,029	101,162	10,800	5,450	0,025	0,030
147,398	13,800	5,330	0,025	0,029	144,743	12,500	5,450	0,025	0,030
192,661	15,200	5,330	0,025	0,029	202,416	13,800	5,450	0,025	0,030
241,236	16,400	5,330	0,025	0,029	251,943	14,800	5,450	0,025	0,030
294,718	17,500	5,330	0,025	0,029	291,501	15,600	5,450	0,025	0,030
338,370	18,300	5,330	0,025	0,029	349,710	16,400	5,450	0,025	0,030
389,242	19,100	5,330	0,025	0,029	390,284	17,000	5,450	0,025	0,030
440,644	19,800	5,330	0,025	0,029	441,765	17,600	5,450	0,025	0,030

Figura 4.3. Resultados obtidos aproximação CD-Estudo 2.

Fonte: Autoria própria (2019).

Neste estudo podemos notar uma diferença significativa em relação ao estudo da seção anterior. A análise dos dados com um valor de p pequeno, demonstra que o limite superior de controle da parcela Beta, $LSC= 13,970$, é maior do que o Limite da parte Shewhart, $LSC= 12,610$, para a aplicações em suas devidas cartas combinadas. Isso demonstra que para a aplicação neste caso onde, p possui um valor baixo, a carta combinada Beta-CUSUM binomial possui um monitoramento mais rigoroso do que as cartas de controle individuais np , para valores de ARL da carta combinada similares. Em comparação as cartas individuais, mais uma vez a carta combinada Beta-CUSUM Binomial possui um desempenho mais eficiente na detecção de alterações no processo monitorado, onde a carta individual do tipo Shewhart detecta somente o ponto 31 fora de controle estatístico, enquanto a carta combinada com os parâmetros da carta CUSUM binomial e Shewhart apresentam a tendência de variação desde o ponto 12 e demonstra ponto fora de controle estatístico 31, assim como a carta individual de Shewhart.

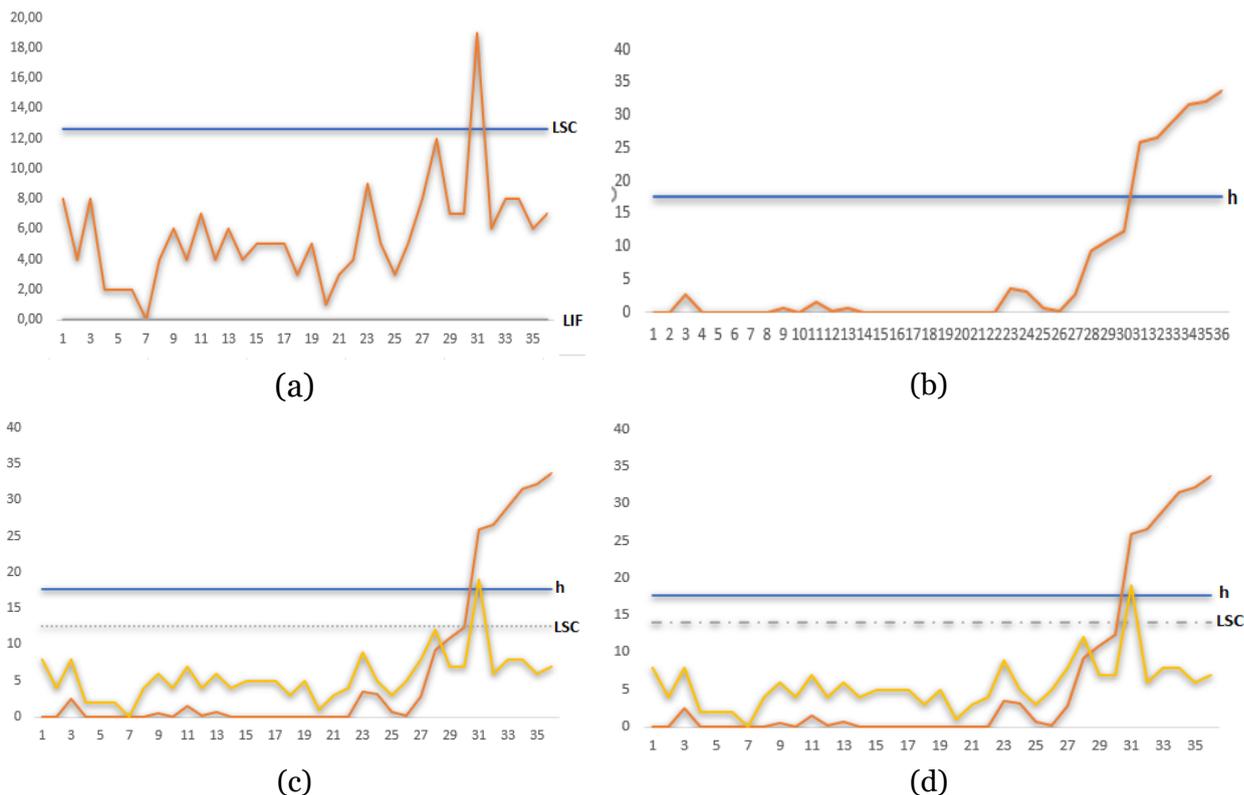


Figura 4.4. Cartas de controle obtidas do estudo 2: (a) Carta de controle np , (b) CUSUM Binomial, (c) Carta combinada Shewhart-CUSUM Binomial. (d) Carta combinada Beta-CUSUM Binomial.

Fonte: Autoria própria (2019).

4.3 ESTUDO 3: ANÁLISE DE OXIDAÇÃO POR ÁCIDO NÍTRICO

Nesta seção, a carta combinada é aplicada em um problema proposto por Brownlee (1965). O conjunto de dados se compõe de uma amostra de $n = 30$ de produtos de aço nítrico, com o período de análise $m = 21$ dias. Estes dados são contínuos, onde é utilizado o número de amostras médios para a definição do ARL da carta Beta. Os dados são aplicados na fase I, quando são definidos os limites de controle das parcelas individuais e da carta combinada. A tabela 4.3 demonstra dos dados analisados e aplicados na carta de controle desenvolvida.

Tabela 4.3 Número de ácido nítrico fora do padrão por amostra

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	1,26	0,42	1,11	0,36	0,54	0,15	0,96	0,60	0,15	1,11	0,18
m	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	-
x_i	0,48	0,33	0,84	0,24	0,21	0,81	0,45	0,18	0,45	0,45	-

Os parâmetros da carta combinada, assim pode ser obtida através dos dados do exemplo. O software hrs.5 foi utilizado mais uma vez para determinar os parâmetros da parcela CUSUM binomial da carta combinada, ARL e h . A figura 4.5 demonstra os resultados obtidos a partir da simulação aplicando a aproximação CD.

Aproximação CD - ARL e h									
ARL	h	k	p0	p1	ARL	h	k	p0	p1
100,075	6,200	0,550	0,018	0,019	99,491	5,700	0,570	0,018	0,020
150,275	7,700	0,550	0,018	0,019	143,785	6,800	0,570	0,018	0,020
202,981	9,000	0,550	0,018	0,019	207,436	8,100	0,570	0,018	0,020
239,956	9,800	0,550	0,018	0,019	253,425	8,900	0,570	0,018	0,020
291,142	10,800	0,550	0,018	0,019	299,447	9,600	0,570	0,018	0,020
342,120	11,700	0,550	0,018	0,019	352,288	10,300	0,570	0,018	0,020
397,906	12,600	0,550	0,018	0,019	401,806	10,900	0,570	0,018	0,020
444,727	13,300	0,550	0,018	0,019	448,442	11,400	0,570	0,018	0,020
ARL	h	k	p0	p1	ARL	h	k	p0	p1
103,911	5,600	0,580	0,018	0,021	99,835	5,200	0,600	0,018	0,022
157,009	6,800	0,580	0,018	0,021	148,437	6,200	0,600	0,018	0,022
200,061	7,600	0,580	0,018	0,021	198,178	7,000	0,600	0,018	0,022
258,465	8,500	0,580	0,018	0,021	243,029	7,600	0,600	0,018	0,022
311,774	9,200	0,580	0,018	0,021	295,271	8,200	0,600	0,018	0,022
353,776	9,700	0,580	0,018	0,021	355,929	8,800	0,600	0,018	0,022
410,371	10,300	0,580	0,018	0,021	401,598	9,200	0,600	0,018	0,022
451,194	10,700	0,580	0,018	0,021	451,881	9,600	0,600	0,018	0,022

Figura 4.5. Resultados obtidos aproximação CD-Estudo 3.

Fonte: Autoria própria (2019).

Neste estudo a carta de controle combinada foi planejada para um valor de $p_0 = 0,018$, $p_1 = 0,022$, ($\phi = 20\%$). O valor de ARL para a parcela Beta da carta foi definida em 370 ($\alpha = 0,27\%$) como $LSC = 5,020$. A parcela CUSUM Binomial teve seus parâmetros definidos com, $K = 0,600$, $h = 5,200$ e $ARL = 99,835$ ($\alpha = 1\%$). A carta combinada Beta-CUSUM Binomial então foi planejada para um $ARL = 78,908$ ($\alpha = 1,27\%$). Para efeito de comparação a carta combinada Beta-CUSUM binomial é comparada com a carta individual Shewhart np que apresenta $ARL = 370$ ($\alpha = 0,27\%$) e $LSC = 3,080$, com a carta CUSUM binomial com os mesmos valores aplicadas na carta binomial e com a carta combinada Shewhart-CUSUM Binomial com $ARL = 99,835$ ($\alpha = 1\%$), $LSC = 3,080$ e o limite superior de controle $h = 5,200$. A Figura 4.6 (a) demonstra a carta np , a Figura 4.6 (b) a carta CUSUM Binomial, a Figura 4.6 (c) a carta Shewhart-CUSUM Binomial e a figura 4.6 (d) a carta combinada Beta-CUSUM Binomial.

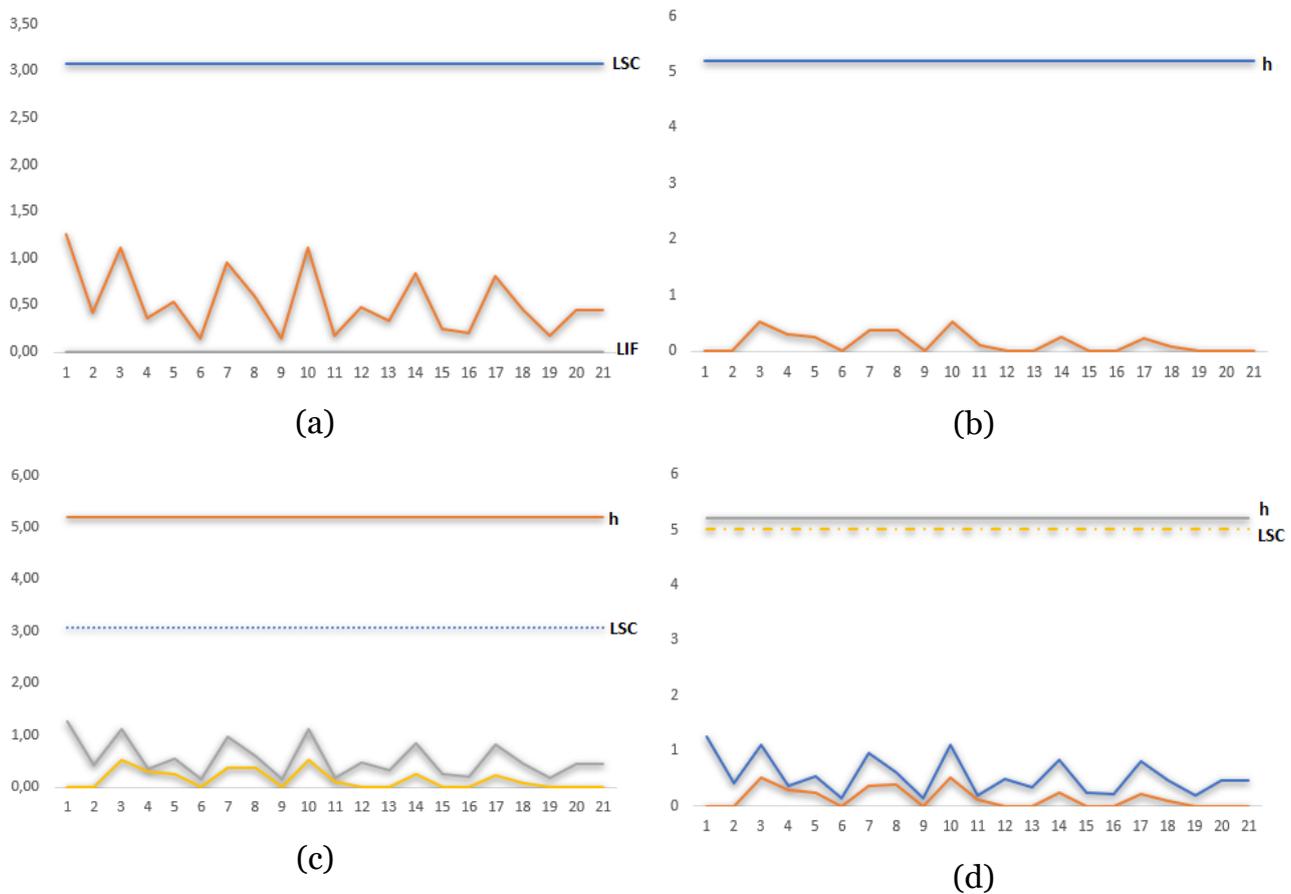


Figura 4.6. Cartas de controle obtidas do estudo 3: (a) Carta de controle np , (b) CUSUM Binomial, (c) Carta combinada Shewhart-CUSUM Binomial. (d) Carta combinada Beta-CUSUM Binomial.

Fonte: Autoria própria (2019).

Nota-se mais uma vez que a carta para valores de p pequeno a carta combinada Beta-CUSUM Binomial apresenta os limites de controle mais estreitos em relação a carta combinada Shewhart-CUSUM Binomial. No exemplo desta seção foi necessário a readequação da carta combinada, uma vez que esses limites de controles estavam com valores muito próximos e o que poderia ocasionar a ocorrência de alarmes falsos na carta de controle.

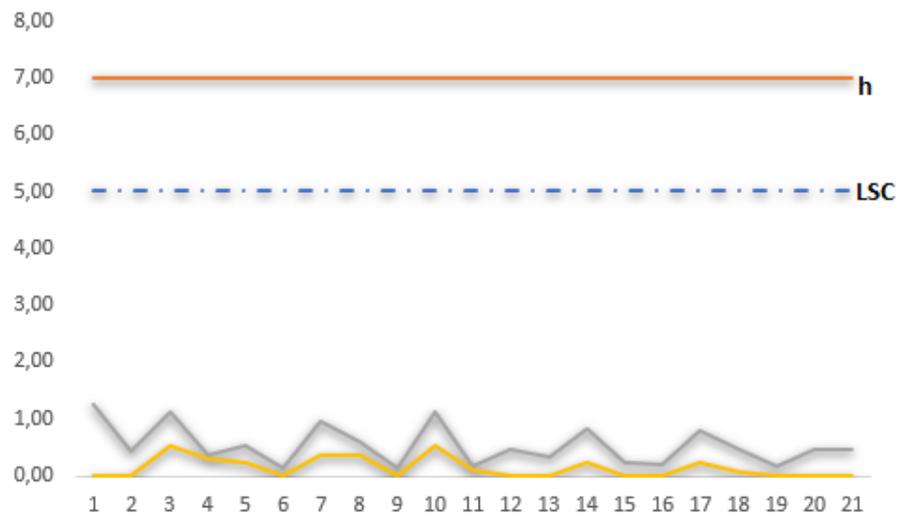


Figura 4.7. Carta combinada Beta-CUSUM binomial recalculada-Exemplo 3.
Fonte: Autoria própria (2019).

Capítulo



CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho demonstrou o desenvolvimento de uma carta de controle combinada Beta-CUSUM binomial para o monitoramento de características da qualidade de produtos não conforme à especificação. O objetivo principal era o desenvolvimento de uma nova carta de controle combinada para dados do tipo atributos, como uma nova opção de aplicação em processos com essas características.

Para a construção da carta de controle Beta-CUSUM Binomial, no presente trabalho foi demonstrado o procedimento de construção da carta, no qual pode ser observado os passos que devem ser respeitados para a determinação dos parâmetros da carta combinada.

A aplicação do limite superior de controle baseada na distribuição Beta demonstra que a carta combinada possui uma sensibilidade maior que as cartas individuais de Shewhart e CUSUM Binomial, uma vez que a análise dos dados é monitorado de forma pontual característica das cartas de Shewhart, como também observando o comportamento parabólico característica da carta CUSUM Binomial.

Em comparação com a carta combinada Shewhart-CUSUM Binomial, a carta Beta-CUSUM Binomial tem eficiência similar para dados discretos com valores de p médio (em torno de 0) e que para os valores de p pequenos a carta possui uma maior sensibilidade de detecção de dados fora de controle, uma vez que os limites de dessa carta de controle são mais estreitos que as cartas combinadas tradicionalmente utilizadas.

A carta de controle Beta-CUSUM Binomial apresentada neste trabalho é uma nova opção de aplicação para análise de itens não conformes, sendo recomendado sua aplicação em processo onde o valor da proporção dos dados tenha o seu valor pequeno.

5.2 RECOMENDAÇÕES E TRABALHOS FUTUROS

Algumas sugestões de trabalhos futuros a partir das informações apresentadas nesta pesquisa são:

- Desenvolvimento de pacotes computacional para software de Controle Estatístico de Processos para aplicação da carta combinada Beta-CUSUM Binomial;
- Desenvolvimento da carta CUSUM para dados contínuos com a distribuição de probabilidade Beta;
- Desenvolver cartas de controle CUSUM Multivariadas com distribuição Binomial (MCUSUM).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALI, S.; PIEVETALO, A; GOB, R. **An Overview of Control Charts for High-quality Processes.** Quality and Reliability Engineering International, v. 32, p. 2171-2189, 2016.

ABEL, V. **On one-sided combined Shewhart-CUSUM control schemes for Poisson Counts.** Computational Statistics Quarterly, v.6, p. 31- 39, 1990.

ALVES, C. C. **Gráficos de Controle CUSUM: um enfoque dinâmico para a análise estatística de processos.** 119 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

ASLAM, M.; GADDER, S. R.; AL-MARSHADI, A.; JUN, C. H. **A Nonparametric HEWMA-p Control Chart for Variance in Monitoring Processes.** Symmetry. 11. 356. 10.3390/sym11030356, 2019.

BAYER, F. M.; TONDOLO, C. M.; MULLER, F. M. **Beta regression control chart for monitoring fractions and proportions.** Computers & Industrial Engineering, v.119, pp.416-426, 2018.

BOURKE, P. D. **Sample size and the Binomial CUSUM Control Chart: the case of 100% inspection.** Metrika, v.53, p. 5-70, 2001.

BROWLEE, K. A. **Statistical theory and methodology in science and engineering.** New York: John Wiley & Sons, p. 590, 1965.

CHAPEAU-BLONDEAU, F.; MONIR, A. **Numerical evaluation of the Lambert W function and applications to generation of generalized Gaussian noise with exponent $\frac{1}{2}$.** IEEE Transactions Signal Processing, v. 50, p. 2160 – 2165, 2002.

CHUKHROVA, N.; JOHANNSEN, A. **Hypergeometric p-chart with dynamic probability control limits for monitoring processes with variable sample and population sizes.** Computers & Industrial Engineering, v. 136, pp. 681-701, 2019.

COSTA, A. F. B. EPPRECHT, E. K. CARPINETTI, L.C.R. **Controle Estatístico de Qualidade.** São Paulo: Editora Atlas S.A, 334 p, 2004.

DEMING, W. E. Saia da crise. São Paulo: Futura, 2003.

DRAPER, N. R.; SMITH, H. **Applied Regression Analysis.** New York: John Wiley & Sons. 706p, 1998.

FLEISS, J.; LEVIN, B.; PAIK, M. **In Statistical Methods for Rates and Proportions.** 203. 10.1002/0471445428, 2003.

GAN, F. F. **An optimal design of CUSUM quality control charts.** Journal of Quality Technology, v.23, p.279-286, 1991.

GAN, F. F. **An optimal design of CUSUM control charts for binomial counts.** Journal of Applied Statistics, v. 20, n. 4, p. 445-460, 1993.

HAWKINS, D. OLWELL, D. **Cumulative Sum Charts and Charting for Quality Improvement.** New York: Springer Verlag Inc., 247 p, 1998.

HEIMANN, P. A. **Attribute control charts with large sample sizes.** Journal of Quality Technology, Milwaukee, 28(4), 451-459, 1996.

HENNING, E.; SAMOBYL, R. W.; ALVES, C. C. **Aproximação do limite superior de um gráfico CUSUM binomial.** In: ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 30, São Carlos, Anais... São Carlos, 2010.

HENNING, E.; WALTER, O. F. C.; ALVES, C. C.; SAMOBYL, R. W. **Análise de uma aplicação do gráfico combinado SHEWHART-CUSUM BINOMIAL.** In: ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 2011, Belo Horizonte, Anais. Belo Horizonte, 2011.

HENNING, E.; KONRATH, A. C.; ALVES, C. C.; WALTER, O. M. F. C.; SAMOBYL, R. W. **Performance Of A Combined Shewhart-Cusum Control Chart With**

Binomial Data For Large Shifts In The Process Mean. Int. Journal of Engineering Research and Application, pp 235-243, vol 5, 2015.

HENNING, E.; WALTER, O. M. F.; ALVES, C. C.; SAMOHYL, R. W. **Aplicação de gráficos de Controle Estatístico de Processos para o monitoramento dos casos de meningite no município de Joinville.** Revista Produção em Foco, n 01, p. 01-26, 2012.

JURAN, J. M.; GRYNA, frank M. **Controle da qualidade.** São Paulo: Makron Books, 1992.

LUCAS, J. M. **Combined Shewhart-CUSUM Quality Control Schemes.** Journal of Quality Technology, v. 14, n. 2, p. 51-59, 1982.

LUCAS, J. M. **Counted Data CUSUM's.** Technometrics, v. 27, n. 2, p. 129-144, 1985.

LUCAS, J. M.; CROISIER, R. B. **Fast Initial Response for CUSUM Quality Control Schemes.** Technometrics, v. 24, n. 3, p. 199-205, 1982.

MONTGOMERY, D. C. **Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade.** 4.ed. Rio de Janeiro: LTC,. 513 p, 2004.

MORAIS, M. C.; PACHECO, A. **Combined CUSUM-Shewhart Schemes for Binomial Data.** Economic Quality Control. v. 21, n.1, p. 43-57, 2006.

MORAIS, M. C. **Ordenação estocástica na análise de desempenho de esquemas de controle de qualidade.** 2002. 194f. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, 2002.

MUNFORD, A. G. **A Control Chart based on Cumulative Scores.** Applied Statistics, v. 29, n.3, p. 252-258, 1980.

OTTENSTREUER, S.; WEIB, C.H.; KNOTH, S. **A combined Shewhart-CUSUM chart with switching limit.** Quality Engineering, vol 31, no.2, 255-268, 2019.

OPRIME, P. C.; TOLEDO, J. C.; GONZÁLEZ, M. O. A.; CHAKRABORTI, S. **Method for determining the control limits of nonparametric harts for monitoring location and scale.** Gest.prod, vol23, p146-164, 2015.

PAGE, E.S. **Continuous Inspection Scheme**”, Biometrics, vol.41, p.100-115, 1954.

PINHEIRO, E.; SANTOS, E. SOUZA, A. M.; ROSA, L. C. **Aplicação de ferramentas do controle estatístico de processos para monitorar a suspensão de cirurgias e suas principais causas num hospital universitário.** IN ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, , São Carlos, 2010.

QUASENBERRY, C. P. **SPC Q charts for a Binomial parameter p: short and long runs.** Journal of Quality Technology, Milwaukee, 23(3), 239–246, 1991.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R: A Language and Environment for Statistical Computing.** R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria: 2009. Disponível em: < <http://www.R-project.org> >.

RASMUSSEN, T. B.; ULRICHSEN, S. P.; NORGAARD, M. **Use of risk-adjusted CUSUM charts to monitor 30-day mortality in Danish hospitals.** Clinical Epidemiology, v. 10, p445-456, 2018.

REYNOLDS, M. R.; STOUMBOS, Z. G. **A general approach to modeling CUSUM charts for a proportion.** IIE Transactions. v. 32, p. 515-535, 2000.

REYNOLDS, M. R.; STOUMBOS, Z. G. **A CUSUM Chart for Monitoring a Proportion When Inspecting Continuously.** Journal of Quality Technology, v. 31, no.1, Pag 87-108, 1999.

ROCHA, H. S.; MARQUES, P. A. A.; CAMARGO, A. P.; REIS, D. L.; SILVA, E. A.; FRIZZONE, J. A. **Driprer Testing: Application of statistical quality control for measurement system analysis.** Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambienta, vol 21, pp. 587-593, 2017.

ROCHA, R. **Implementação de sistema gerencial, com avanços em controle estatístico, em laboratório de nutrição animal.** Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004.

SALDANHA, P.; ROTHE, C. K.; PACHECO D.A.J.; JUNG, C .F.; CATEN, C.S. **Contribuições do uso do controle estatístico de processos na análise do desempenho na indústria química.** Revista Ingeniería Industrial. V. 14, N1, p. 37-50.2015.

SAMOHYL, R.W. **Controle Estatístico de Qualidade**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2009. 275 p.

SANT' ANNA, A,M,O. CATEN. C,S, T. Beta control chart for monitoring fraction data. *Expert Systems with Applications* **39:10236–10243, 2012.**

SAVIC, M. **p-Charts in the quality control of the Grading Process in the High Education**. *PANOECONOMICUS*, vol53, pp.335-347, 2006.

SANUSI, R. A.; ABUJIYA, M. R.; RIAZ, M. ABBAS, N. **Combined Shewhart CUSUM charts using auxiliary variable**. *Computers & Industrial Engineering*, vol 115, pp. 329-337, 2017.

SCHADER, M.; SCHMID, F. **Two rules of thumb for the approximation of the binomial distribution by the normal distribution**. *The American Statistician*, v.43, n.1, p. 34- 24, 1989.

SCHNEIDER, H.; O'CONNOR, C. **Design of CUSUM Control Charts Using Narrow Limits Gauges**. *Journal of Quality Technology*. v. 19, n. 2, 1987.

SIEGMUND, D. **Sequential Analysis: Test and Confidence Intervals**, Springer Verlag, New-York, 272 p, 1985.

TAKASHI, F. H.; CASSOLI, L. D.; MACHADO, P. F. **Utilização do controle estatístico de processos (CEP) como indicador de violação em programas de pagamento do leite pela qualidade**. *Ciência Animal Brasileira*, vol.12. pp. 661-669, 2011.

VASCONCELOS, A. L. M.; WANDERLEY, M. N. D.; OLIVEIRA, J. B.; BARBOSA, E. A. **O uso de gráficos avançados CUSUM na verificação do comportamento de um processo a partir das não conformidades em uma indústria do segmento gráfico**. In: ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 2012, Bento Gonçalves, Anais. Bento Gonçalves 2012.

WEERARATNE, N. C. **The Effect of Average Sample Size Method on P Control Chart with a Variable Sample Size**. *Imperial Journal of interdisciplinary Research*, vol 2, p. 1340-1346, 2016.

WESTGARD, J; GROTH, T; ARONSSON, T & VERDIER, C. Combined Shewhart-

CUSUM Control Chart for Improved Quality Control In Clinical Chemistry. Clinical chemistry. 23. 1881-7, 1977.

WOODALL, W. H.; NCUBE, M. M. “**Multivariate CUSUM Quality-Control Procedures.**” Technometrics, vol. 27, no. 3, 1985, pp. 285–292. JSTOR, www.jstor.org/stable/1269710.

WOODALL, W.H. **Control Charts based in Attribute Data: Bibliography and Review.** Journal of Quality Technology, v.29, p.172-183, 1997.

WU, Z.; YU, F.J.; SHAMSUZZAMAN, M. **An optimisation design of the combined np-CUSUM scheme for attributes.** European J.industrial Engineering, vol 7, No 1, 2013.

YASHCHIN, E. **On the Analysis and Design of CUSUM-Shewhart Control Schemes.** IBM Journal of Research and Development. v. 29, n.4, p. 377-391, 1985.

Apêndice



Código Medidas de desempenho CUSUM binomial

O código visto nesta seção, foi disponibilizado por Henning (2015) e foi utilizado para o procedimento de obtenção dos parâmetros do CUSUM binomial, aplicado na carta individual e na carta combinada Beta-CUSUM binomial.

```
###função para calcular h com LambertW, cadeias de Markov e interpolação log
###função para aproximar h com LambertW na resolução para b (h+correção)###

hrs.1<-function(po,p1,n,arlo) {
  r1<- -log((1-p1)/(1-po))
  r2<- log((p1*(1-po))/(po*(1-p1)))
  g <- r1/r2
  k <- round(n*g,2)
  l1<-log((exp(-((n *(r2*g + (-1 + exp(n* r2*g)) *(r1 - po* r2)* arlo)))/(-1 + exp(n* r2 *g))))* n*
  r2 *g)/(-1+ exp(n* r2*g)))
  l2<-log(-log((exp(-((n *r2* g)/(-1 + exp(n* r2 * g)))+ n *(-r1 + po* r2)* arlo)* n *r2 *g)/(-1 +
  exp(n* r2*g)))
  l3<-l2/l1
  l4<-((l2*(l2-2))/(2*l1^2))
  l5<-((l2*(6-9*l2+2*l2^2))/(6*l1^3))
  b<-((-n*r2*g)/(1-exp(-n*r2*g))-(l1-l2)+n*arlo*(po*r2-r1))/r2 # 2 termos
  b1 <- ((-n*r2*g)/(1-exp(-n*r2*g))-(l1-l2+l3)+n*arlo*(po*r2-r1))/r2 # 3 termos
  b2 <- ((-n*r2*g)/(1-exp(-n*r2*g))-(l1-l2+l3+l4)+n*arlo*(po*r2-r1))/r2 # 4 termos
  b3 <- ((-n*r2*g)/(1-exp(-n*r2*g))-(l1- l2+l3+l4+l5)+n*arlo*(po*r2-r1))/r2 # 5 termos
  h<- b-(1/3)*(1-2*po)
  h1<- b1-(1/3)*(1-2*po)
  h2<- b2-(1/3)*(1-2*po)
  h3<- b3-(1/3)*(1-2*po)
  structure(list(k=k,h=h,h1=h1,h2=h2,h3=h3))}

###função para aproximar h resolu da Equ da por um m@todo
```

```
numÃ©rico hrs<-function(po,p1,n,arlo){
```

```
h.rs<-uniroot(function (h) arlo-((log((p1*(1-po))/(po*(1-p1))))/(n*((log((p1*(1-po))/(po*(1-p1))))*po-(-log((1-p1)/(1-po))))))*(h+(1/3)*(1-2*po))-n*((-log((1-p1)/(1-po)))/(log((p1*(1-po))/(po*(1-p1)))))*exp((h+(1/3)*(1-2*po))*log((p1*(1-po))/(po*(1-p1))))-1)/(1-exp(-n*((-log((1-p1)/(1-po)))/(log((p1*(1-po))/(po*(1-p1)))))*log((p1*(1-po))/(po*(1-p1)))))),c(0,120))return(h.rs)
}
```

```
library(surveillance)
```

```
hrs.5<-
```

```
function(po,p1,n,arlo,tol=0.05,digits=1,digits.h=1){
```

```
  r1<- -log((1-p1)/(1-po))
```

```
  r2<- log((p1*(1-po))/(po*(1-p1)))
```

```
  g <- r1/r2
```

```
  k <- round(n*g,digits)
```

```
  l1<-log((exp(-((n *(r2*g + (-1 + exp(n* r2*g)) *(r1 -po* r2)* arlo)))/(-1 + exp(n* r2 *g))))* n* r2 *g)/(-1+ exp(n* r2 *g))
```

```
  l2<-log(-log((exp(-((n *r2* g)/(-1 + exp(n* r2* g)))+ n *(-r1 + po* r2)* arlo)* n *r2 *g)/(-1 + exp(n* r2*g))))
```

```
  l3<-l2/l1
```

```
  l4<-((l2*(l2-2))/(2*l1^2))
```

```
  b2 <- ((-n*r2*g)/(1-exp(-n*r2*g)))-(l1-l2+l3+l4)+n*arlo*(po*r2-r1)/r2 # 4 termos
```

```
  h<- round(b2-(1/3)*(1-2*po),digits.h)
```

```
  arl<-
```

```
  arlCusum(k=k,h=h,n=n,theta=po,digits=digits,distr=c("binomial"))$ARL
```

```
  erp.1<-abs(arl-arlo)/arlo
```

```
  if (erp.1 < tol) {return(c(k=k,h=h,ARL=arl))}
```

```
  else {erp.2<-erp.1
```

```
  hi <- h
```

```
  while (erp.2 > tol){h1<- hi+1
```

```
  h2<- hi-1
```

```
  arl1<-
```

```
  arlCusum(k=k,h=h1,n=n,theta=po,digits=digits,distr=c("binomial"))$ARL
```

```
  arl2<-
```

```
  arlCusum(k=k,h=h2,n=n,theta=po,digits=digits,distr=c("binomial"))$ARL
```

```
  val<-function (f, xo, x1, fo, fi) {
```

```
  xo + ((x1 - xo) * (log(f) - log(fo)))/(log(fi) -log(fo))}
```

```
  h<-round(val(arlo,h1,h2,arl1,arl2),1)
```

```
  arli<-
```

```
  arlCusum(k=k,h=h,n=n,theta=po,digits=digits,distr=c("binomial"))$ARL
```

```
  erp.2<-abs(arli-arlo)/arlo
```

```
  hi <- h}
```

```
  return(c(k=k,h=hi,ARL=arli))}
```

```
###calculando os parametros do CUSUM
```

```
##h
```

```
##aproximacao CD (extraindo a raiz)
hrs.1( , ,n= ,)
hrs.5( , ,n=,ar10=,digits= ,tol= )
```