Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Formalismo Termodinâmico para aplicações do intervalo.

RAFAEL MOREIRA PAULO

Orientador: Dr. VILTON JEOVAN VIANA PINHEIRO.

Salvador-Bahia

Formalismo Termodinâmico para aplicações do intervalo

Rafael Moreira Paulo.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro.

Salvador-Bahia

Julho 2023

Sistema de Bibliotecas da UFBA

Rafael Moreira Paulo.

Formalismo Termodinâmico para aplicações do intervalo /Rafael Moreira Paulo. – 2023.

101 f. : il

Orientador:Vilton Jeovan Viana Pinheiro .

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Salvador, 2023.

1.

CDD - 519.72

CDU - 519.72

Titulo da dissertação

Nome do discente

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em de julho de 2023.

Banca examinadora:

Prof Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro
Orientador-UFBA

Prof. Dr. Paulo César Rodrigues Pinto Varandas
UFBA

Prof. Dr. Yuri Lima
UFC

Aos meus pais

Agradecimentos

Agradeço, inicialmente, aos meus pais, Rosana Moreira Silva Paulo e Antônio Paulo Júnior, por todo o apoio dado ao longo da minha vida, por terem me educado, ensinado valores que levarei para sempre comigo e por terem me mostrado a importância da educação e estudo. Agradeço à minha avó Maria Antônia, ao meu avô Francisco Silva, à minha madrinha Rosiane Moreira e ao meu padrinho Wellington Paulo.

Agradeço à minha namorada Diná Santos por toda ajuda e afeto que ela me deu desde que nos conhecemos.

Agradeço a todos os meus amigos que me ajudaram na vida acadêmica, em especial Mariana, Josafat e Ana.

Agradeço a todos os colegas de Matemática que me ajudaram no mestrado.

Agradeço ao professor Dr. Vilton Pinheiro por toda a paciência, por tirar minhas dúvidas ao longo orientação e por me ajudar a ter um melhor entendimento sobre Sistemas Dinâmicos.

Agradeço ao professores Dr. Yuri Lima e Dr. Paulo Varandas por aceitarem o convite para a avaliação da minha dissertação e por toda a contribuição feita para a melhora dela.

Agradeço ainda aos professores Benigno Alves, Carlos Siqueira e Nicola Sambonet pelas matérias lecionadas.

Agradeço à agência financiadora CAPES pelo apoio financeiro ao longo do mestrado.

Agradeço à UFBA e o Instituto de Matemática pela estrutura fornecida e ensino de qualidade, gratuito, que deve ser defendido especialmente em tempos negacionistas. .

"*shine on you crazy Diamond*"

(Roger Waters)

Resumo

O objetivo do presente trabalho é o estudo da existência e unicidade dos estados de equilíbrio para potenciais Hölder em dinâmicas definidas no intervalo que sejam C^{1+}, transitivas, e possuam conjunto crítico não-*flat*. Para esse estudo não utilizaremos a abordagem mais clássica, através de Torres de Hofbauer-Keller. Para tanto, usamos as medidas *zooming* (generalização das medidas expansoras) e as aplicações de Markov induzidas por retornos *zooming*. Com isso, obtivemos informações sobre os estados de equilíbrio entre as medidas expansoras e conseguimos obter a existência e unicidade de estados de equilíbrio para potenciais Hölder que privilegiam as medidas expansoras.

Palavras-chave: Formalismo termodinâmico; Estados de equilíbrio; Medidas *Zooming*; Medidas expansoras.

Abstract

This work aims to study known results about the existence and uniqueness of equilibrium states for Holder potentials in transitive C^{1+} interval dynamics without using the classical approach of Hofbauer-Keller Towers. For this, we used zooming measures (a generalization of expanding measures) and Markov maps induced by zooming returns. With this we were able to study the the equilibrium states among the expanding measures, and get the existênce and uniquiness of equilibrium states for Hölder potentials that favor the expansive measures.

Keywords: Thermodynamic formalism; Equilibrium states; Zooming measures expanding measures.

Sumário

Introdução

Originalmente, a teoria do Formalismo Termodinâmico, desenvolvida por [25] e [7], para o estudo de deslocamentos de Markov, com um número finito de estados, dentre seus objetivos construir o único estado de equilíbrio de um potencial Hölder. A existência desse estado de equilíbrio, nesse caso, foi provada em [24]. Esses resultados permitiram que a teoria do Formalismo termodinâmico se expandisse para o estudo de estados de equilíbrios de potenciais Hölder para difeomorfismos uniformemente hiperbólicos. E, de fato, a existência e unicidade desses estados de equilíbrio foram provados. A extensão da teoria para o estudo dos estados de equilíbrio de sistemas não-hiperbólicos é mais complicada, pois, a depender da geometria do conjunto crítico/singular, esses estados podem não existir, vide exemplo [9].

Apesar de não necessariamente existirem estados de equilíbrio para sistemas não-hiperbólicos, existem classes de sistemas não-hiperbólicos que possuem tais estados, como sistemas parcialmente hiperbólicos, aplicações expansoras por partes e deslocamentos de Markov. Nesse contexto, [21] consegue mostrar que difeomorfismos locais C^{1+}, fortemente transitivos, com um conjunto crítico não-degenerado, possuem, no máximo, um estado de equilíbrio expansor para todo potencial Hölder. Além disso, se o potencial Hölder possui uma oscilação definida como

$$\operatorname{osc}(\varphi) := \sup(\varphi) - \inf(\varphi),$$

suficientemente pequena, então [21] garante a existência e unicidade dos estados de equilíbrio de φ.

Com o objetivo de mostrar esses resultado em contextos mais gerais, [21] usou a definição de medidas *Zooming*, presente em [18], a fim de apresentar uma generalização de medidas expansoras para o caso em que f é um homeomorfismo local bi-Lipchitz, fortemente transitivo, definido em um espaço métrico separável. Essa generalização é apresentada na definição 3.5 e, a partir disso, constrói uma partição de Markov dentro do sistema, conseguindo, assim, encontrar as condições necessárias para a existência e unicidade de estados de equilíbrio e medidas de entropia máxima.

O objetivo do presente trabalho é apresentar os resultados obtidos por [21], que provou a existência e unicidade de estados de equilíbrio de um difeomorfismo local transitivo, C^{1+}, definido em $[0,1]$ com conjunto crítico compacto, de interior vazio não-*flat*. Para tanto, o texto está organizado da seguinte forma:

- **Apêndice A**: Exibiremos alguns resultados importantes para o desenvolvimento da teoria com as devidas referências. No entanto, sem apresentar as devidas provas, para evitar que o texto fuja do assunto principal.

- **Capítulo 1:** Apresentaremos resultados e conceitos importantes para o bom entendimento desse trabalho, que poderão ser ignorados pelo leitor que já possui domínio desses conceitos. A única exceção é a seção 1.7, que apresenta uma generalização de intervalos *nice* e suas respectivas construções.

- **Capítulo 2:** Nesse capítulo, exibiremos alguns resultados de medidas levantáveis, bem como o conceito de medidas *Zooming* e a construção de aplicações *zooming* de retorno.

- **Capítulo 3:** Nessa parte, apresentaremos generalizações de medidas expansoras presentes em [21], tal como a construção de aplicações *zooming* de retorno para uma aplicação fortemente transitiva e salientaremos a importância que medidas gordas induzidas (Vide Definição 3.9) possuem para a análise dos estados de equilíbrio e medidas de entropia máxima.

- **Capítulo 4:** Esse capítulo tem como objetivo principal a obtenção de uma probabilidade F-invariante possuindo entropia normalizada máxima.

- **Capítulo 5:** Nesse fragmento, apresentaremos os resultados principais obtidos por [21], mais especificamente os resultados que atestam a existência e unicidade de estados de equilíbrio de determinados difeomorfismos locais C^{1+} em variedades riemannianas.

- **Capítulo 6:** Esse é o capítulo principal da presente dissertação. Nele, apresentaremos algumas propriedades especiais de difeomorfismos locais C^{1+} transitivos no intervalo e, a partir dessas propriedades, mostraremos o resultado principal.

Capítulo 1

Preliminares.

Nessa seção, forneceremos alguns conceitos que, embora sejam essenciais para o entendimento e desenvolvimento do Formalismo termodinâmico, não são assuntos centrais para os tópicos discutidos nessa dissertação.

1.1 Sequências subaditivas

Uma sequência $\{a_n\}_n \in [-\infty, \infty)$ é dita subaditiva, se para todo $m, n \in \mathbb{N}$ vale $a_{m+n} \leq a_m + a_n$.

O resultado a seguir é bem conhecido e se mostra útil em diversas áreas da Teoria Ergódica. Ele pode ser utilizado na definição de Entropia e Pressão, vide seções 1.3 e 1.5. Além disso, pode ser utilizado na prova do Teorema subaditivo de Kingman, que por sua vez é uma versão mais forte do teorema ergódico de Birkhoff. A prova do teorema de Kingman, bem como mais detalhes sobre as propriedades de sequências subaditivas podem ser vistas em [16].

Teorema 1.1. *Seja $\{a_n\}_n$ uma sequência subaditiva, então, vale que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_n \frac{a_n}{n} \tag{1.1}$$

Demonstração. Suponha que existe m tal que $a_m = -\infty$. Então fixe $n > m$ e defina $k := n - m$ observe que como a sequência $\{a_n\}_n$ é subaditiva e $a_k \in [-\infty, \infty)$ então $a_n \leq a_m + a_k = -\infty$. E portanto, $a_n = -\infty$ e $\lim_{n\to\infty} a_n/n = -\infty = \inf_n \frac{a_n}{n}$.

Suponha agora que $a_n \in \mathbb{R}$ para todo n natural, seja $L = \inf_n a_n/n$. Note que $L \in [-\infty, \infty)$. Seja G um número real maior L, pela definição de L existe m natural tal que:

$$\frac{a_m}{m} < G.$$

Se $n > m$ escreva $n = km + r$, com $1 \leq k$ e $i \leq r < m$. Defina $a = \max\{a_i; 1 \leq i < m\}$ e, pela subaditividade, temos que

$$a_n \leq a_{km} + a_r \leq ka_m + a_r \leq ka_m + a,$$

assim,

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{km}{n}\frac{a_k}{k} + \frac{a}{n}$$

Notando que $pk/n \to 1$ e $a/n \to 0$ quando $n \to \infty$ temos que, como $a_k/k < B$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, então

$$L \leq \frac{a_n}{n} < G$$

Note que G é um número arbitrário maior que L. Fazendo G tender a L, obtemos o resultado. □

1.2 Potenciais Hölder

Seja $\mathbb{X}$ um espaço métrico com distância dist, dizemos que $\varphi : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ é potencial de Hölder, se existem constantes $\alpha \in (0, 1]$ e $C_0 > 0$, tais que:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = C_0 \text{dist}(x, y)^\alpha \ , \ \forall x, y \in \mathbb{X}$$

Seja M Uma variedade riemanniana com distância geodésica dist, uma transformação $f : M \circlearrowleft$ é dita C^{1+} se f for C^1 e Df for Hölder. Isto é, se existem constantes $\alpha \in (0, 1]$ e $C_0 > 0$, tais que:

$$|Df(x) - Df(y)| = C_0 \text{dist}(x, y)^\alpha \ , \ \forall x, y \in \mathbb{X}$$

1.3 Entropia

Seja $(\mathbb{X}, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade, ao longo desta seção, $\mathcal{P}$ será uma partição, se for uma família enumerável de subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{X}$ tal que se $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, então, $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ e a união de todos os elementos de $\mathcal{P}$ possui medida total. Seja $f : \mathbb{X} \circlearrowleft$ uma transformação mensurável tal que μ é f-invariante.

$\mathcal{P}(x)$ será o elemento da partição $\mathcal{P}$ que contém x. A soma de duas partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ denotado como $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ é a partição formada pelas interseções dos elementos de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, ou seja $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} = \{P \cap Q; P \in \mathcal{P} \text{ e } q \in \mathcal{Q}\}$. Uma generalização imediata é a soma de uma família enumerável de partições

$$\bigvee \mathcal{P}_n = \left\{ \bigcap_n P_n; P_n \in \mathcal{P}_n \right\}$$

Defina a função de informação associada a uma partição $\mathcal{P}$, $\mathcal{I}_{\mathcal{P}} : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, definida como:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{P}} = -\log(\mu(\mathcal{P}(x)))$$

Note que $\mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ é mensurável. Assim, defina a entropia da partição como:

$$H_\mu(\mathcal{P}) = \int \mathcal{I}_{\mathcal{P}} d\mu = \sum_{P \in \mathcal{P}} -\mu(P)\log(\mu(P))$$

Note que, como μ é uma probabilidade $\mu(P) \leq 1$ para todo $P \in \mathcal{P}$, portanto $-\log(\mu(P)) \geq 0$ e como:

$$1 = \mu\left(\bigcup_{P \in \mathcal{P}} P\right) = \sum_{P \in \mathcal{P}} \mu(P)$$

Temos que $H_\mu(\mathcal{P}) > 0$. Na definição da entropia de uma partição, adotamos a convenção que $0 \log 0 = 0$. Uma importante observação é de que a entropia de uma partição pode ser infinita. No entanto, ao longo dessa seção trabalharemos com partições de entropia finita.

A entropia condicional de uma partição $\mathcal{P}$ com relação a uma partição $\mathcal{Q}$ é dada por:

$$H_\mu(\mathcal{P}/\mathcal{Q}) = \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{Q \in \mathcal{Q}} -\mu(P \cap Q) \log\left(\frac{\mu(P \cap Q)}{\mu(Q)}\right)$$

Dizemos que $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$ (ler-se $\mathcal{P}$ menos fina que $\mathcal{Q}$) se para todo $Q \in \mathcal{Q}$ existe $Q_0 \subset Q$ e $P \in \mathcal{P}$ tal que $\mu(Q_0) = \mu(Q)$ e $Q_0 \subset P$. A partir do lema A.1 item 1, temos que tomando $\mathcal{S}$ como a partição trivial, isto é $\mathcal{S} = \{\mathbb{X}\}$, então

$$H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{P}) + H_\mu(\mathcal{Q}/\mathcal{V}) \leq H_\mu(\mathcal{P}) + H_\mu(\mathcal{Q}) \tag{1.2}$$

Seja $(\mathbb{Y}, \mathcal{B})$ um espaço mensurável e $g : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ uma transformação mensurável, então $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}, g_*\mu)$ é um espaço de probabilidade. Assim, se $\mathcal{P}$ é uma partição de $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}, g_*\mu)$ então $g^{-1}(\mathcal{P}) = \{g^{-1}(P); P \in \mathcal{P}\}$ é uma partição. Além disso, temos que $H_\mu(g^{-1}(\mathcal{P})) = H_{f_*\mu}(\mathcal{P})$.

Seja f transformação mensurável e considere μ probabilidade f-invariante, denote:

$$\mathcal{P}^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{P}) \tag{1.3}$$

Note que $\mathcal{P}^n \prec \mathcal{P}^{n-1}$, portanto temos que $H_\mu(\mathcal{P}^n) \leq H_\mu(\mathcal{P}^{n+1})$ (vide lema A.1 quando $\mathcal{S}$ é a partição trivial).

Lema 1.2 ([16]). *A sequência dada por $a_n = H_\mu(\mathcal{P}^n)$ é subaditiva*

Demonstração. Inicialmente, note que $\mathcal{P}^{m+n} = \vee_{i=0}^{m+n-1} f^{-i}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^m \vee f^{-m}(\mathcal{P}^n)$, de (1.2) temos que

$$H_\mu(\mathcal{P}^{n+m}) \leq H_\mu(\mathcal{P}^m) + H_\mu(f^{-m}(\mathcal{P}^n)) \tag{1.4}$$

como μ é f-invariante temos que $H_\mu(f^{-m}(\mathcal{P}^n)) = H_\mu(\mathcal{P}^n)$ para todo m e n. Segue o resultado: □

Defina

$$h_\mu(f,\mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n) \tag{1.5}$$

A partir do teorema 1.1 e do lema 1.2, temos que o limite do lado direito da Equação (1.5) existe. Por fim, defina a entropia do sistema (f,μ) como

$$h_\mu(f) = \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f,\mathcal{P}) \tag{1.6}$$

onde o supremo é tomado sobre as partições de entropia finita.

Exemplo 1. *Seja μ uma medida invariante por f, seja $\{x_k\}_{k=0}^{n-1}$ uma sequência finita de $\mathbb{X}$, tal que $f(x_k) = x_{k+1}$ se $0 \leq k < n-1$ e $f(x_{n-1}) = x_1$. Ou seja, x_1 é ponto periódico de período n. Seja $\mathcal{A}$ a σ-álgebra de Borel:*

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{x_k}$$

observe que μ é uma probabilidade invariante para f. Seja $\mathcal{P}$ uma partição de $\mathcal{X}$, com $j = \#\{P \in \mathcal{P}; \mu(P) > 0\}$. Como os elementos te $\mathcal{P}$ são disjuntos dois a dois, então $j \leq n$. Assim, seja $\{P \in \mathcal{P}; \mu(P) > 0\} = \{P_1, P_2 \ldots P_j\}$ e $k_i := \#\{x_k; x_k \in P_i\}$. Observe que $\sum_{i=1}^{j} k_i = n$. Daí,

$$H_\mu(\mathcal{P}) = -\sum_{i=1}^{j} \mu(P_i)\log(\mu(P_i)),$$

Observe:

$$\mu(P_i) = \frac{k_i}{n}$$

Daí, como $k_i \geq 1$:

$$H_\mu(\mathcal{P}) = -\sum_{i=1}^{j} \frac{k_i}{n}\log\left(\frac{k_i}{n}\right) \leq \frac{\log(n)}{n}\sum_{i=1}^{j} k_i = \log(n).$$

Ou seja, para toda partição $\mathcal{P}$ teremos que $H_\mu(\mathcal{P}) \leq \log(n)$. Portanto, para todo m teremos que

$$0 \leq \frac{H_\mu(\mathcal{P}^m)}{m} \leq \frac{\log(n)}{m},$$

donde, para toda partição $\mathcal{P}$:

$$h_\mu(f,\mathcal{P}) = 0$$

e, portanto, $h_\mu(f) = 0$.

Definição 1.3 (Partição geradora)**.** *Uma partição $\mathcal{P}$ será chamada de Partição geradora para f e μ, possuindo entropia finita, se gerar a σ-álgebra dos conjuntos mensuráveis, a menos de medida nula.*

Como consequência imediata do teorema de Kolmogorov-sinai e do fato de $h_\mu(f, \mathcal{P}^k) = h_\mu(f, \mathcal{P}^k)$ para toda partição de entropia finita $\mathcal{P}$ e $k \geq 1$, temos que se $\mathcal{P}$ é uma partição geradora. Então, $h_\mu(f) = h_\mu(f, \mathcal{P})$.

1.4 Entropia topológica

Nessa seção será definida a entropia topológica segundo [1] e, ao longo desta $\mathbb{X}$ será um espaço topológico compacto e $f : \mathbb{X} \circlearrowleft$ será uma transformação contínua.

Seja α uma cobertura aberta de $\mathbb{X}$. Como $\mathbb{X}$ é compacto, toda cobertura aberta de $\mathbb{X}$ admite subcobertura finita. Daí, a entropia da cobertura α é definida assim:

$$H(\alpha) = \log N(\alpha)$$

onde $N(\alpha)$ é o menor numero tal que α admite uma subcobertura com esse número ([16]).

Dizemos que $\alpha \prec \beta$ se para todo $B \in \beta$ existe $A \in \alpha$ tal que $B \subset A$. É claro que $\alpha \prec \beta$ implica em $H(\alpha) \leq H(\beta)$, pois suponha que β admita pelo menos uma subcobertura de n elementos, seja $\{B_1, \ldots, B_n\}$ uma destas subcoberturas. Seja A_n elementos de α tal que $A_j \supset B_j$, seja $\{A_{n_1}, \ldots, A_{n_i}\}$ a coleção de elementos distintos de $\{A_1, \ldots, A_n\}$, e, portanto, α admite uma subcobertura com i elementos, como $i \leq n$ segue o resultado.

Seja $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ coberturas abertas de $\mathbb{X}$ denote

$$\bigvee_{j=1}^{n} \alpha_j = \left\{ \bigcap_{j=1}^{n} A_j ; A_j \in \alpha_j \right\}$$

Note que se α é cobertura aberta de $\mathbb{X}$ então $f^{-i}(\alpha) = \{f^{-i}(A); A \in \alpha\}$, denote

$$\alpha^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha) \tag{1.7}$$

Lema 1.4. *a sequência dada por $a_n = H(\alpha^n)$ é subaditiva*

Demonstração. Note que $\alpha^{m+n} = \alpha^m \vee f^{-m}(\alpha^n)$ para todo n e m. Assim, pelo lema A.2, temos

$$H(\alpha^{n+m}) \leq H(\alpha^m) + H(f^{-n}(\alpha^n)) \leq H(\alpha^m) + H(\alpha^n)$$

□

Defina a entropia de f com relação a cobertura α como

$$h(f, \alpha) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H(\alpha^n) \tag{1.8}$$

O teorema 1.1 e o lema 1.4 garantem que o limite da equação (1.8) existe.

Por fim, a entropia topológica de f como ([16]):

$$h_{\text{top}} = \sup\{h(f, \alpha); \alpha \text{ é subcobertura aberta de } \mathbb{X}\} \tag{1.9}$$

1.5 Pressão

Nessa seção, será apresentada a definição de pressão via coberturas abertas.

Seja $\mathbb{X}$ um espaço métrico compacto com distância dist, e $f : \mathbb{X} \circlearrowleft$, seja φ potencial definido em $\mathbb{X}$, defina $\varphi_n : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ como: $\varphi_n \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f^j$. Seja α cobertura aberta de $\mathbb{X}$, então definimos:

$$P_n(f, \varphi, \alpha) = \inf \left\{ \sum_{U \in \beta} \sup_{x \in U} e^{\varphi_n(x)}; \beta \text{ é subcobertura finita de } \alpha^n \right\} \tag{1.10}$$

Definindo:

$$P(f, \varphi, \alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_n(f, \varphi, \alpha) \tag{1.11}$$

Pelo teorema 1.1 e pelo lema A.3, temos que o limite da equação 1.11 existe. Por fim, defina:

$$P(f, \varphi) = \lim_{n\to\infty} P(f, \varphi, \alpha_n) \tag{1.12}$$

onde $\{\alpha_n\}$ é uma sequência de coberturas abertas com $\operatorname{diam}(\alpha_n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

Proposição 1.5 ([16]). *O Limite*

$$\lim_{k\to\infty} P(f, \varphi, \alpha_k)$$

existe e independe da sequência $\{\alpha_n\}_n$ *com diam*$(\alpha_n) \to 0$

Demonstração. Seja α_{kn} e β_{kn} duas sequências de coberturas abertas com diâmetro convergindo para zero, dado $\epsilon > 0$ fixe $\delta > 0$ tal que $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \epsilon$ se $\operatorname{dist}(x, y) \leq \delta$, seja n_0 tal que $\operatorname{diam}(\alpha_n) < \delta$ se $n > n_0$, fixe $n > n_0$, seja $\rho > 0$ um número de Lebesgue para α_n. seja m_0 suficientemente grande, tal que $\operatorname{diam}(\beta_m)$ se $m > m_0$, fixe $m > m_0$, pela definição de número de Lebesgue, todo $B \in \beta_m$ está contido em $A \in \alpha_n$. Note que

$$\sup_{x\in A} \varphi_j(x) \leq n\epsilon + \sup_{y \in B} \varphi_n(y)$$

para todo $j \geq 1$, como $\operatorname{diam}(\alpha_n) < \delta$. Daí,

$$P_l(f, \varphi, \alpha_n) \leq e^{l\epsilon} P_l(f, \varphi, \beta_m) \quad l \leq m$$

daí $P(f, \varphi, \alpha_n) \leq \epsilon + P(f, \varphi, \beta_m)$, daí, fazendo $n \to \infty$ e depois $m \to \infty$, obtemos

$$\limsup_{n\to\infty} P(f, \varphi, \alpha_n) \leq \epsilon + \liminf_{m\to\infty} P(f, \varphi, \beta_m)$$

pela arbitrariedade de ϵ temos que

$$\limsup_{n\to\infty} P(f, \varphi, \alpha_n) \leq \liminf_{m\to\infty} P(f, \varphi, \beta_m)$$

trocando o papel das duas sequências de cobertura, obtemos que $\lim_{n\to\infty} P(f, \varphi, \alpha_n) = \lim_{m\to\infty} P(f, \varphi, \beta_m)$ □

chamamos $P(f, \varphi)$ de pressão de φ relativamente a f. Uma importante consequência da definição da pressão é que se φ for o potencial nulo. Isto é, $\varphi \equiv 0$, então $P_n(f, \varphi, \alpha) = N(\alpha)$ para todo $n \geq 1$, e portanto $P(f, \varphi, \alpha) = h(f, \alpha)$ para toda cobertura aberta α segue da proposição A.4 que $P(f, \varphi) = h_{\text{top}}(f)$.

Pelo princípio variacional (teorema A.5), temos que se f é uma dinâmica contínua e $\mathbb{X}$ um espaço métrico compacto. Então, a pressão pode ser calculada como

$$P(f, \varphi) = \sup \left\{ h_\nu(f) + \int \varphi d\nu; \nu \in \mathcal{M}^1(f) \right\} \tag{1.13}$$

aplicando o princípio variacional ao potencial nulo temos que

$$h_{\text{top}}(f) = \sup \left\{ h_\nu(f); \nu \in \mathcal{M}^1(f) \right\} \tag{1.14}$$

1.6 Conjuntos não-flat e medidas expansoras

Nessa seção, M será uma variedade riemanniana compacta e $\mathcal{C} \subset M$ um conjunto fechado de interior vazio, $f : M \setminus \mathcal{C} \to M$ um difeomorfismo C^{1+}, com extensão contínua $\bar{f}$, tal que $\#\bar{f}^{-1}(x) < \infty$ o conjunto $\mathcal{C}$ é o conjunto crítico da função f.

Seja $\text{dist}(x, y)$ a distância geodésica em M, $\text{dist}(x, \mathcal{C}) := \inf\{dist(x, y); y \in \mathcal{C}\}$, e $T_x^1 M$ o espaço vetorial unitário em x.

Definição 1.6. *O conjunto $\mathcal{C}$ é não degenerado se existem constantes $0 < B$ e $0 < \beta$ tais que*

1. $|\log |Df(x)v|\,| \leq B + \beta |\log dist(x, \mathcal{C})|$ *para todo $v \in T_x^1 M$ e $x \in M \setminus \mathcal{C}$;*

2. $|\log ||Df(x)^{-1}|| - \log ||Df(y)^{-1}||| \leq \frac{B\, dist(x,y)}{dist(x,\mathcal{C})^\beta}$ *para todo $x, y \in M \setminus \mathcal{C}$ com $dist(x, y) < \frac{1}{2} dist(x, \mathcal{C})$.*

Definição 1.7. *O conjunto $\mathcal{C}$ é não flat se existem constantes $A < B$ e $0 < \alpha < \beta, \beta$ tais que*

1. $A + \alpha |\log dist(x, \mathcal{C})| \leq |\log |Df(x)v|\,| \leq B + \beta |\log dist(x, \mathcal{C})|$ *para todo $v \in T_x^1 M$ e $x \in M \setminus \mathcal{C}$;*

2. $|\log ||Df(x)^{-1}|| - \log ||Df(y)^{-1}||| \leq \frac{B\, dist(x,y)}{dist(x,\mathcal{C})^\beta}$ *para todo $x, y \in M \setminus \mathcal{C}$ com $dist(x, y) < \frac{1}{2} dist(x, \mathcal{C})$.*

A definição 1.7 pode ser entendida como: a menos de uma mudança de coordenadas $\mathcal{C}$ se comporta como raízes de polinômios.

Dado $\delta > 0$ defina $\text{dist}_\delta(x, y) = \min\{\text{dist}(x, y), \delta\}$.

Definição 1.8. *Seja μ uma probabilidade f-invariante, μ é dita expansora, se*

1. *(Recorrência lenta para o conjunto crítico)*
$$\int_{x\in M} \log dist_1(x, \mathcal{C}) d\mu > -\infty \tag{1.15}$$

2. *Para μ-quase todo $x \in M$ e todo $v \in T_x^1 M$ vale*
$$0 < \lim_n \frac{1}{n} \log |Df^n(x)v| < +\infty \tag{1.16}$$
Ou seja, todos os expoentes de Liapunov de μ são positivos.

O conjunto das medidas expansoras f-invariantes será denotado por $\mathcal{E}(f)$.

Observação 1. *A condição 1 da Definição 1.7 implica que se $\mathcal{C}$ é não-flat então, toda probabilidade μ com expoentes de Lyapunov finitos satisfaz a recorrência lenta ao conjunto crítico. Em particular, $\mathcal{E}(f)$ é o conjunto de todas as probabilidades, possuindo apenas expoentes de Lyapunov positivos.*

Dado um potencial $\varphi : M \to \mathbb{R}$, dizemos que a probabilidade $\mu \in \mathcal{M}^1(f)$ é um estado de equilíbrio para φ se
$$h_\mu(f) + \int \varphi d\mu = P(\varphi, f) = \sup\{h_\nu(f) + \int \varphi d\nu : \nu \in \mathcal{M}^1(f)\}$$
Ou seja, μ realiza o supremo no princípio variacional. Se $\mu \in \mathcal{M}^1(f)$ é um estado de equilíbrio para o potencial nulo, dizemos que μ é medida de máxima entropia.

Dizemos que a probabilidade $\mu \in \mathcal{M}^1(f)$ é um estado de equilíbrio expansor para φ se μ é uma medida expansora e
$$h_\mu(f) + \int \varphi d\mu = P_{\mathcal{E}(f)}(\varphi) := \sup\left\{h_\nu(f) + \int \varphi d\nu : \nu \in \mathcal{E}(f)\right\}$$

1.7 Conjuntos encaixados

Nessa seção, será apresentado o conceito de conjuntos encaixados, que representa uma generalização do conceito de invervalos *nice*, introduzido por [14]. Essa construção se encontra em [18], seção 2.

Nessa seção, $\mathbb{X}$ será um espaço métrico separável e $f : \mathbb{X} \circlearrowleft$ será uma transformação. Ao longo desta seção, fixaremos uma coleção $\mathcal{E}_0$ de abertos conexos de $\mathbb{X}$.

Fixe $J \subset \mathbb{X}$, um conjunto $Q \subset \mathbb{X}$ é uma pré-imagem regular de ordem n de J se f^n leva Q homeomorficamente em J. Denotaremos a ordem de Q como $\mathrm{ord}(Q)$.

Para todo n natural e $V \in \mathcal{E}_0$, considere $\mathcal{E}_n(V)$ como uma coleção de pré-imagens de ordem n de V. Defina $\mathcal{E}_n = \{\mathcal{E}_n(V)\}_{V \in \mathcal{E}_0}$. Note que não foi pedido que $\mathcal{E}_n(V)$ contenha todas as pré-imagens regulares de V. Uma sequência $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_n\}_n$ é dita uma família dinamicamente fechada de pré-imagens regulares se $f^l(E) \in \mathcal{E}_{n-l}$ para todo $E \in \mathcal{E}_n$ e $0 \leq l \leq n$. Dado $P \in \mathcal{E}_n$ denote $f^n|_P$ por f^P e o $\mathcal{E}$- ramo inverso por f^{-P}.

Seja $\mathcal{E} = \mathcal{E}_n$ uma família dinamicamente fechada de pré-imagens regulares, um conjunto Q é uma $\mathcal{E}$-pré-imagem de um conjunto $W \subset \mathbb{X}$, se existe n natural e $P \in \mathcal{E}_n$ tal que $\bar{W} \subset f^n(P)$ e $f^{-P}(W) = Q$.

Lema 1.9. *Sejam $\mathcal{X}_1$ e $\mathcal{X}_2$ duas $\mathcal{E}$-pré-imagens diferentes de algum conjunto $\mathcal{X} \subset \mathbb{X}$, com ord$(\mathcal{X}_1)$ = ord$(\mathcal{X}_2)$. Então, $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = \emptyset$.*

Demonstração. Seja n a ordem das duas pré imagens seja $P_i \in \mathcal{E}_n$ tal que $\mathcal{X}_i = f^{-P_i}(\mathcal{X})$, $i \in \{1, 2\}$, seja agora $Q_j = f^{-P_j}(f^n(P_1) \cap f^n(P_2))$. Pela definição de $\mathcal{E}$-pŕe-imagens temos que $f^n(P_i) \supset \mathcal{X}$ e portanto $\mathcal{X}_j \subset Q_j$, daí $Q_1 \cap Q_2 \supset \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 \neq \emptyset$, note que $Q_1 \neq Q_2$, de fato se $Q_1 = Q_2$ então $\mathcal{X}_1 = f^{-P_1}(\mathcal{X}) = (f^n\big|_{Q_1})^{-1}(\mathcal{X}) = (f^n\big|_{Q_2})^{-1}(\mathcal{X}) = f^{-P_2}(\mathcal{X}) = \mathcal{X}_2$, como $Q_1 \neq Q_2$ e $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$ temos que $Q_1 \cap \partial Q_2 \neq \emptyset$ ou $Q_2 \cap \partial Q_1 \neq \emptyset$, sem perda de generalidade assuma que $Q_1 \cap \partial Q_2 \neq \emptyset$, temos que $\emptyset \neq f^n(Q_1 \cap \partial Q_2) \subset f^n(Q_1) \cap \partial f^n(Q_2) = (f^n(P_1) \cap f^n(P_2)) \cap \partial(f^n(P_1) \cap f(P_2)) = \emptyset$ o que é um absurdo. $\square$

Definição 1.10 (Conjuntos Ligados)**.** *Dois conjuntos abertos U_1 e U_2 são ligados se $U_1 \setminus U_2$ e $U_2 \setminus U_1$ são ambos diferentes de vazio.*

Uma consequência direta das definições conjuntos ligados e conjuntos conexos é que se U_1 e U_2 são ambos conexos e diferentes do vazio então U_1 e U_2 são ligados, se e somente se $\partial U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ e $U_1 \cap \partial U_2 \neq \emptyset$.

Definição 1.11 (Conjuntos $\mathcal{E}$-encaixados)**.** *U é um conjunto $\mathcal{E}$-encaixado, se é aberto e U não é ligado a nenhuma das suas $\mathcal{E}$-pré-imagens.*

Uma extensão natural da Definição 1.11 é:

Definição 1.12 (Coleção de conjuntos $\mathcal{E}$-encaixados)**.** *Uma coleção $\mathcal{Z}$ de conjuntos abertos é uma coleção de conjuntos $\mathcal{E}$-encaixados se todo $A \in \mathcal{Z}$ não é ligada a nenhuma $\mathcal{E}$-pré imagem de algum elemento de $\mathcal{Z}$ de ordem maior que zero. Ou seja, se $A_1 \in \mathcal{Z}$ e Q é $\mathcal{E}$ pré-imagem de algum elemento de $A_2 \in \mathcal{Z}$, então A_1 não está ligado a P ou $P = A_2$*

Note que toda sub-coleção de uma coleção de conjuntos $\mathcal{E}$-encaixados é por sua vez uma coleção de conjuntos $\mathcal{E}$-encaixados, em particular todo elemento de uma coleção $\mathcal{E}$-encaixada é um conjunto $\mathcal{E}$-encaixado.

Uma importante propriedade de uma coleção $\mathcal{E}$-encaixada é enunciada no lema A.6. E, como corolário desse lema, obtemos uma importante propriedade de conjuntos encaixados:

Corolário 1.13. *Se U é um conjunto $\mathcal{E}$-encaixado conexo, P_1 e P_2 são $\mathcal{E}$-pré-imagens de U, com $P_1 \neq P_2$, então P_1 e P_2 não são ligados. Além disso,*

1. *Se $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$ então $Ord(P_1) = Ord(P_2)$*

2. *Se $P_1 \subsetneqq P_2$, com $Ord(P_1) < Ord(P_2)$, então U está contida em uma $\mathcal{E}$-pré-imagem de sí mesmo, com ordem maior que zero e*

$$f^{Ord(P_2)-Ord(P_1)}(U) \subset U$$

Demonstração. definindo $l_j = \mathrm{Ord}(P_j)$, Pelo lema 1.9 temos que $l_1 \neq l_2$. Portanto, podemos assumir $l_1 < l_2$. Daí, pelo lema A.6, segue que P_1 e P_2 não são ligados.

Suponha $P_1 \subsetneqq P_2$, então $U = f^{l_1}(P_1) \subset f_1^{l}(P_2)$, note que $f^{l_1}(P_2)$ é uma $\mathcal{E}$-pré-imagem de V e isso implica que $f^{l_2-l_1}(V) \subset f^{l_2}(P_2)(V) = V$. □

A partir daqui até o fim da seção, $\mathcal{Z}$ será uma coleção de abertos, conexos de $\mathbb{X}$, tais que todos os elementos de $\mathcal{Z}$ não estão contidas em nenhuma $\mathcal{E}$-pré-imagem de ordem maior que zero de um elemento de $\mathcal{Z}$.

Uma sequência finita $\mathcal{K} = \{P_0, \dots P_n\}$ de $\mathcal{E}$-pré-imagens de elementos de $\mathcal{Z}$ é uma cadeia de $\mathcal{E}$-pré-imagens de $\mathcal{Z}$ começando em $A \in \mathcal{Z}$, se

1. $0 < \mathrm{Ord}(P_0) \leq \dots \leq P_n$

2. P_0 e A são ligados

3. Para todo $1 \leq i \leq n$ temos que P_j e P_{j-1} são ligados

4. $P_i \neq P_j$ se $i \neq j$

vide figura 1.1 para um exemplo visual de uma cadeia de $\mathcal{E}$-pré-imagens.

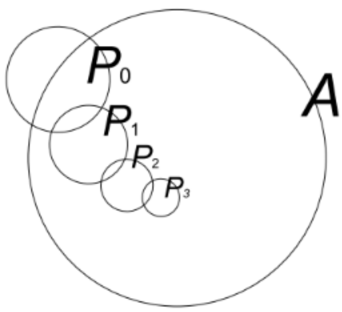

Figura 1.1: Exemplo de uma cadeia de $\mathcal{E}$-pré-imagens de $\mathcal{Z}$ começando em A. Fonte:[18].

Denote $ch_{\mathcal{E}}(A)$ como a coleção de todas as cadeias de $\mathcal{E}$-pré-imagens de $\mathcal{A}$, começando em $A \in \mathcal{Z}$. Como todos os elementos de $\mathcal{Z}$ são abertos e conexos, temos que se $A \in \mathcal{Z}$ e $\{P_0, \dots, P_n\} \in \mathrm{ch}_{\mathcal{E}}(A)$ então $\bigcup_{i=0}^{n_1} P_j$ é aberto e conexo para todo $0 \leq n_1 \leq n$.

Para todo $A \in \mathcal{Z}$ defina o aberto:

$$A^* = A \setminus \overline{\bigcup_{\{P_j\}_{j} \in \mathrm{ch}_{\mathcal{E}}(A)} \bigcup_{j} P_j} \tag{1.17}$$

uma representação visual do A^* pode ser vista na Figura 1.2. Com o conceito apresentado na Equação (1.17), é possível construir uma coleção encaixada ([18]).

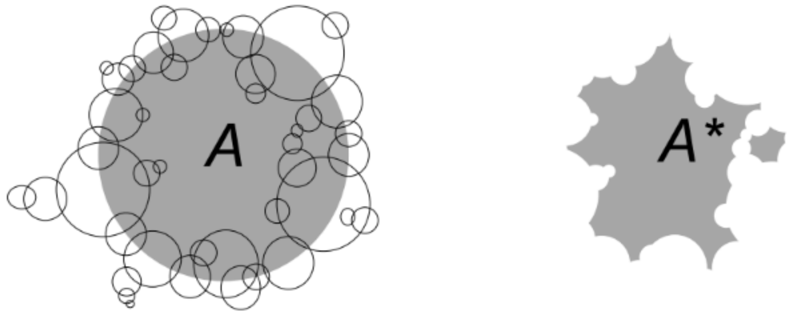

Figura 1.2: Exemplo de uma cadeia de $\mathcal{E}$-pré-imagens de $\mathcal{A}$ começando em A. Fonte:[18].

Proposição 1.14. *Para todo $A \in \mathcal{Z}$, tal que $A^* \neq \emptyset$, escolha um componente conexo A' de A^*. Assim, se $\mathcal{Z}' = \{A'; A \in \mathcal{Z}$ e $A^* \neq \emptyset\}$ é uma coleção não vazia, então A' é uma coleção de conjuntos $\mathcal{E}$-encaixados.*

Demonstração. Assuma, por contradição, a existência de $A_1, A_2 \in \mathcal{Z}$ e uma $\mathcal{E}$-pré imagem de A_2' com ordem positiva (denotada por Q), tal que A_1' e Q são ligadas, pela conexidade de A_1' e Q temos que existe $q \in Q \cap \partial A_1'$, seja $k = \mathrm{Ord}(P)$ e $E \in \mathcal{E}_k$ tal que $Q = f^E(A_2')$, definindo $P = f^E(A_2)$, temos $Q \subset P$.

Afirmação 2. $P \subset A_1$

Demonstração. Note que $P \cap A_1 \supset P \cap A_1' \supset Q \cap A_1' \neq \emptyset$. Por outro lado A_1 e P não são ligados, senão à sequência $\{P\} \in \mathrm{ch}(A_1)$ e como $P \cap A_1^* \supset P \cap A_1' \neq \emptyset$, daí $P \cap \partial A_1 = \emptyset$. Portanto, como $P \cap A_1 \neq \emptyset$ pela conexidade de P e A_1 temos que $P \subset A_1$ ou $P \supset A_1$, como, por hipótese, os elementos de $\mathcal{Z}$ não estão contidos em nenhuma $\mathcal{E}-$pré-imagem de ordem maior que zero de um elemento de $\mathcal{Z}$. Portanto, $P \subset A_1$ □

Como $q \in \partial A_1'$. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe uma cadeia $\{P_0, \ldots, P_1\} \in \mathrm{ch}_{\mathcal{E}}(A_1)$ tal que $\mathrm{dist}\big(q, \bigcup_{i=0}^n P_i\big) < \epsilon$, como P e Q são abertos e $q \in Q \subset P$, pegue ϵ suficientemente pequeno, tal que $Q \subset \bigcap_{i=1}^n P_i \neq \emptyset$, portanto existe $1 \leq m \leq n$, tal que:

$$P_m \cap P \supset P_m \cap Q \neq \emptyset \tag{1.18}$$

Como $\bigcup_{i=0}^n P_i$ é conexo e P_0é ligado com A_1, temos que $P_0 \cap (\mathbb{X} \setminus P) \supset P_0 \cap (\mathbb{X} \setminus A_1) \neq \emptyset$. Assim, existe $0 \leq i \leq m$ tal que $P_i \partial P \neq \emptyset$. Dessa forma, defina $l = \min\{0 \leq i \leq$

$m; P_i \cap \partial P \neq \emptyset\}$. Temos, então, que P_l e P são ligados, pois, se $Q_l \supset P$, teríamos que $A_1^* \cap \left(\bigcup_{i=0}^n P_i\right) \supset A_1' \cap \left(\bigcup_{i=0}^n P_i\right) \neq \emptyset$, o que seria um absurdo.

Temos dois casos: (i) $\mathrm{Ord}(P_l) \leq \mathrm{Ord}(P)$ ou (ii) $\mathrm{Ord}(P_l) \geq \mathrm{Ord}(P)$. Supondo o primeiro caso, temos que pela minimalidade de l temos que $P_j \neq P$ para todo $0 \leq j \leq l$. Portanto, $\{P_0, \ldots P_l, P\} \in \mathrm{ch}_{\mathcal{E}}(A_1)$ e $P \cap A_1^* \supset P \cap A_1' \neq \emptyset$, o que é uma contradição da definição de A^*. Supondo o segundo caso, considere a sequência $\mathcal{K} = \{f^k(P_l), \ldots, f^k(P_m)\}$, temos que $\mathcal{K} \in \mathrm{ch}_{\mathcal{E}}(A_2)$, pois $f^k\big|_P$ é homeomorfismo e $f^k(P) = A_2$. Assim, $f^k(P_l) \cap \partial A_2 = f^k(P_l \cap \partial P) \neq \emptyset$ e, por definição, de $\mathcal{Z}$ A_2 não está contido em $f^k(P_l)$. Mas, como $f^k(Q) = A_2' \subset A_2^*$, da Equação (1.17), temos que $f^k(P_m) \cap A_2^* \supset f^k(P_m \cap Q) \neq \emptyset$ contradizendo a definição de A_2^*. □

Corolário 1.15. *Seja $\epsilon \in (0, 1/2)$, e $A = B_r(p)$ uma bola aberta conexa de raio r, centrada em $p \in \mathbb{X}$ tal que $f^n(A) \not\subset A$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se toda cadeia de $\mathcal{E}$-pré-imagem de A possui um diâmetro menor que $2\epsilon r$, então o conjunto A^* contém a bola $B_{r(1-2\epsilon)}(p)$. Além disso, a componente conexa A' de A^* que contém p é um conjunto $\mathcal{E}$-encaixado contendo $B_{r(1-2\epsilon)}(p)$.*

Demonstração. Defina $\mathcal{Z} = \{A\}$. Como $f^n(A) \not\subset A$, então, A não está contida em nenhuma $\mathcal{E}$-pré-imagem de ordem maior que zero de sí mesmo. Defina Γ como a coleção de todas as cadeias de $\mathcal{E}$-pré imagens de A. Assim, se $\{P_j\}_j \in \Gamma$, então $\bigcup_j P_j$ é um aberto conexo intersectando ∂A e de diâmetro menor que $2\epsilon r$. Portanto, $\bigcup_j P_j \subset B_{2\epsilon r}(\partial A)$. $\forall \{P_j\}_j \in \Gamma$. Portanto, $A^* = A \setminus \overline{\bigcup_{\{P_j\}_j \in \Gamma} \bigcup_j P_j} \supset A \setminus B_{2\epsilon r}(\partial A) \supset B_{r(1-2\epsilon)}(p)$. Donde $A \neq \emptyset$. Assim, tomando A' como o componente conexo de A^* contendo p (e portanto $B_{r(1-2\epsilon)}(p)$), da Proposição 1.14, segue que A' é um conjunto $\mathcal{E}$-encaixado. □

1.8 Coleções Assintoticamente invariantes.

Nessa seção, $\mathbb{X}$ será um espaço métrico compacto e $f : \mathbb{X} \circlearrowleft$ será uma transformação mensurável, seja $U \subset \mathbb{X}$ um conjunto positivamente invariante, considere para todo $x \in U$ um subconjunto da $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{O}^+(x)$ da órbita positiva de x.

Definição 1.16. *Uma coleção $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(x)\}_{x \in U}$ é dita assintoticamente invariante se para todo $x \in U$,*

1. $\#\{j \in \mathbb{N}; f^j(x) \in \mathcal{U}(x)\} = \infty$

2. $\mathcal{U}(x) \cap \mathcal{O}^+(f^n(x)) = \mathcal{U}(f(x)) \cap \mathcal{O}^+(f^n(x))$ *para todo $n \in \mathbb{N}$ grande*

Definição 1.17 ($\omega_{f,\mathcal{U}}$). *Dada uma coleção assintoticamente invariante $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(x)\}_{x \in U}$, defina para todo $x \in U$ o conjunto limite omega-$\mathcal{U}$ denotado por $\omega_{f,\mathcal{U}}$, que representa o* *conjunto dos pontos de acumulação de $\mathcal{U}(x)$. Ou seja, os pontos $p \in \mathcal{X}$, tal que existe sequência $n_j \to \infty$, satisfazendo $\mathcal{U}(x) \ni f^{n_j}(x) \to p$*

Uma importante propriedade do conjunto $\omega_{f,\mathcal{U}}(x)$ é que esse conjunto é não vazio, compacto e não é necessariamente invariante, vide [18] seção 3. Dizemos que uma coleção assintoticamente invariante $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(x)\}_{x \in U}$ possui frequência positiva se para todo $x \in U$ temos:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{1 \leq j \leq n; f^j(x) \in \mathcal{U}(x)\} > 0$$

Definição 1.18 ($\omega_{+,f,\mathcal{U}}$). *Se $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{x \in U}$ é uma coleção assintoticamente invariante com frequência positiva, defina $\omega_{+,f,\mathcal{U}}(x)$ como os pontos $\mathcal{U}$-frequentemente visitados da orbita de x, ou seja, os pontos $p \in \mathbb{X}$, tais que para toda vizinhança V de p temos*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{1 \leq j \leq n; f^j(x) \in \mathcal{U}(x) \cap V\} > 0$$

Uma importante propriedade das coleções assintoticamente invariantes é obtida no lema A.8.

1.9 Homeomorfismos locais bi-Lipschitz

Seja $\mathbb{X}$ um espaço métrico separável de Baire localmente conexo, uma transformação $f : \mathbb{X} \setminus \mathcal{C} \to \mathbb{X}$ é um homeomorfismo local bi-Lipschitz se satisfizer, as seguintes condições:

1. O conjunto crítico/singular $\mathcal{C}$ de f é fechado e possui interior vazio
2. Para todo $p \in \mathbb{X} \setminus \mathcal{C}$ existem $r > 0$ e $K = K(p)$, tais que $B_r(p)$ é conexo, $f(B_r(p))$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{X}$ e:

$$K^{-1}\text{dist}(x, y) \leq \text{dist}(f(x), f(y)) \leq K\text{dist}(x, y) \quad \forall x, y \in B_r(p)$$

3. $\#f^{-1}(x) < \infty$ para todo $x \in \mathbb{X}$

1.10 Transformações induzidas e medidas levantáveis

Uma transformação induzida de $f : \mathbb{X} \circlearrowleft$ é uma transformação mensurável $F : A \to B$, em que $A, B \subset \mathbb{X}$, e $F(x) = f^{R(x)}(x)$ para alguma transformação mensurável $R : A \to \mathbb{N}$. A transformação R é chamada de tempo induzido de F. Conforme discutido em [21] os conjuntos, A e B não possuem requisitos especiais. No entanto, nas construções mais famosas de transformações induzidas, é comum que $A \subset B$.

Conforme discutido em [21], um importante requisito para o desenvolvimento do formalismo termodinâmico é a definição de potenciais induzidos. Dado uma transformação induzida $F : A \to B$, com tempo induzido R, para todo potencial $\mathbb{X} \to \mathbb{R}$, podemos associar o ptencial $\bar{\varphi} : A \to \mathbb{R}$, dado por $\bar{\varphi}(x) = \sum_{j=0}^{R(x)-1} \varphi \circ f^j(x)$. F-levantamento deφ.

Observação 2. *Seja $F : A \to B$ uma aplicação induzida por f, de tempo induzido R. para todo $x \in \bigcap_{j\geq 0} F^{-j}(A)$ e $j \geq 1$ temos que $f^{\sum_{k=0}^{j-1} R\circ F^k(x)}(x) = F^j(x)$. De fato, se $j = 1$ temos que $\sum_{k=0}^{j-1} R \circ F^k(x) = R(x)$. E portanto $f^{\sum_{k=0}^{j-1} R\circ F^k(x)}(x) = f^{R(x)} = F(x)$. suponha válido para $j-1$, então $f^{\sum_{k=0}^{j-1} R\circ F^k(x)}(x) = f^{R\circ F^{j-1}(x)}\big(f^{\sum_{k=0}^{j-2} R\circ F^k(x)}(x)\big) = f^{R\circ F^{j-1}(x)}(F^{j-1}(x)) = F(F^{j-1}(x)) = F^j(x)$.*

Definição 1.19 (Medidas absolutamente contínuas)**.** *Sejam μ e ν duas medidas em um mesmo espaço mensurável $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$, dizemos que ν é absolutamente contínua em relação a μ, se todo mensurável C que satisfaz $\mu(C) = 0$ satisfaz $\nu(C) = 0$. Essa relação é denotada como $\nu \ll \mu$.*

Uma probabilidade f-invariante μ é F-levantável se existe uma probabilidade F-invariante $\nu \ll \mu$ tal que $\int R d\nu < \infty$. ν é chamada de F-levantamento de μ. Temos ainda que se ν é F-levantamento de μ, então

$$\mu = \frac{1}{\int R d\nu} \sum_{n\geq 1} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j\Big(\nu\big|_{\{R=n\}}\Big) = \frac{1}{\int R d\nu} \sum_{j\geq 0} f_*^j\Big(\nu\big|_{\{R>j\}}\Big) \tag{1.19}$$

Definição 1.20. *Dizemos que uma aplicação induzida $F : A \to B$ é órbita-coerente se:*

$$\mathcal{O}_f^+(x) \cap \mathcal{O}_f^+(y) \neq \emptyset \iff \mathcal{O}_F^+(x) \cap \mathcal{O}_F^+(y) \neq \emptyset$$

para todo $x, y \in \bigcap_{j\geq 0} F^{-j}(A)$

Capítulo 2

Obtenção de uma aplicação de Markov localmente induzida.

Essa seção possui como principal objetivo a definição de conjuntos e medidas *zooming* e, como principal resultado do capítulo, será possível obter uma medida invariante ν que é absolutamente contínua com respeito a uma medida zooming μ dada. A fim de obter esse resultado, será utilizada a teoria de *aplicações de Markov*, bem como resultados obtidos por [19], referente ao levantamento de medidas.

2.1 Aplicações de Markov

Seja $f : B \to B$ uma função definida em um conjunto de Borel B, de um espaço métrico compacto $\mathbb{X}$, uma coleção $\mathcal{P} = \{P_1, P_2 \dots\}$ é chamada de *partição de Markov* do conjunto de Borel B, se satisfaz as seguintes condições:

1. $\operatorname{int}(P_i) \cap \operatorname{int}(P_j) = \emptyset$ se $i \neq j$
2. se $f(P_i) \cap \operatorname{int}(P_j) \neq \emptyset$ então $f(P_i) \supset \operatorname{int}(P_j)$
3. $\#\{f(P_i); i \in \mathbb{N}\} < \infty$
4. $f\big|_{P_i}$ é um homeomorfismo e pode ser estendida para um homeomorfismo levando $\overline{P_i}$ em $\overline{f(P_i)}$
5. $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(\mathcal{P}_n(x)) = 0$ para todo $x \in \bigcap_{n\geq 0} f^{-n}\Big(\bigcup_i P_i\Big)$

onde $\mathcal{P}_n(x) = \{y; \mathcal{P}(f^j(y)) = \mathcal{P}(f^j(x)), \forall 0 \leq j \leq n\}$.

Definição 2.1 (Partição de Markov induzida.)**.** *Uma coleção enumerável* $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots\}$ *de subconjuntos de Borel é chamada partição de Markov induzida, se satisfaz todas as* *condições de uma partição de Markov, com exceção da condição 2, que é substituída pela seguinte condição:*

Para todo $P_i \in \mathcal{P}$ existe $R_i \geq 1$, tal que:

- *se $l \leq R_i$ e $int(f^l(P_i)) \cap int(P_j) \neq \emptyset$, então $int(f^l(P_i)) \subset int(P_j)$ ou $int(f^l(P_i)) \supset int(P_j)$*
- *se $int(f^{R_i}(P_i)) \cap int(P_j) \neq \emptyset$, então $int(f^{R_i}(P_i)) \supset int(P_j)$*

Definição 2.2 (Aplicação de Markov.)**.** *Seja $\mathcal{P}$ uma partição de Markov para $f : B \circlearrowleft$, o par $(f, \mathcal{P})$ é chamado de transformação de Markov definido em B; se $f(P_j) = B$ para todo $P_j \in \mathcal{P}$, então $(f, \mathcal{P})$ é chamado de aplicação de Markov completa.*

Observação 3. *Se $(f, \mathcal{P})$ é uma aplicação de Markov completa definida em um aberto B então os elementos de $\mathcal{P}$ são abertos, pois, para todo $P_j \in \mathcal{P}$, temos que $f(P_j) = B$ e, como $f\big|_{P_j}$ é homeomorfismo, segue que P_j é aberto.*

Na definição a seguir $f : \mathbb{X} \circlearrowleft$ será uma aplicação mensurável em um espaço métrico.

Definição 2.3 (Aplicação de Markov induzida.)**.** *Uma transformação de Markov $(F, \mathcal{P})$ definida em B é uma aplicação de Markov induzida por f em B, se existe uma função mensurável $R : B \to \mathbb{N}$, tal que $\{R \geq 1\} = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P$, $R\big|_P$ é constante para todo $P \in \mathcal{P}$ e $F(x) = f^{R(x)}(x)$ para todo $x \in B$. Se uma aplicação de Markov induzida $(F, \mathcal{P})$ é uma aplicação de Markov completa, dizemos que $(F, \mathcal{P})$ é uma aplicação de Markov induzida completa.*

Observação 4. *Seja $(F, \mathcal{P})$ uma aplicação de Markov induzida por f em B completa. Se $\#\mathcal{P} \geq 2$, então $Per(f) = \infty$, pois seja $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, como $F(P_j) = B$, $j = 1, 2$ e $\lim_{n\to\infty} diam(\mathcal{P}_n(x)) = 0$ para todo $x \in \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}\Big(\bigcup_i P_i\Big)$. Temos que para todo $n \in \mathbb{N}$ $\#\mathbb{D}_n = 2^n$, em que*

$$\mathbb{D}_n = \{x \in (P_1 \cup P_2) \cap Per(F); x \text{ tem período } n \text{ e } F^k(x) \in P_1 \cup P_2 \, \forall k \leq n\}.$$

Assim, se $\mathbb{D} = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{D}_n$ então $\#\mathbb{D} = \infty$, e, como $\mathbb{D} \subseteq Per(F) \subseteq Per(f)$, temos que $\#Per(f) = \infty$.

Definição 2.4 (Aplicação de markov compativel com uma medida)**.** *Dizemos que uma aplicação de Markov $(F, \mathcal{P})$ definida em um aberto $A \subset \mathbb{X}$ é compatível com uma medida μ, se*

1. *$\mu(A) > 0$;*
2. *μ é F-não singular;*
3. *$\mu(\bigcup_{P \in \mathcal{P}} P) = \mu(A)$ (como todo $P \in \mathcal{P}$ é um conjunto aberto temos que $\mu(\partial P) = 0$ $\forall P \in \mathcal{P}$).*

2.2 Tempos induzidos coerentes.

Essa seção discutirá o conceito de tempos induzidos coerentes e de como esse conceito se relaciona com orbita-Coerência. Os resultados dessa seção foram obtidos por [19].

Ao longo dessa seção, $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ será um espaço mensurável e $f : \mathbb{X} \circlearrowleft$ será uma aplicação mensurável. $F : A \to \mathbb{X}$ será uma aplicação induzida por f de tempo induzido R. e $A_0 := \bigcap_{j \geq 0} F^{-j}(\mathbb{X})$.

Definição 2.5 (Tempos coerentes)**.** *Dizemos que o tempo induzido R é coerente se $R(x) \geq R \circ f^j(x) + j$ sempre que $x, f^j(x) \in A$ e $0 \leq j < R(x)$.*

Lema 2.6. *Suponha que R é um tempo induzido coerente, seja $x \in A_0$. Se $0 \leq k < R(x)$ e $f^k(x) \in A_0$, então existe $1 \leq m \leq \#\{k \leq j < R(x); f^j(x) \in A_0\}$, tal que*

$$R(x) = k + \sum_{j=0}^{m-1} R(F^j(f^k(x))).$$

Em particular, $F(x) = F^m(f^k(x))$.

Demonstração. Como $f^k \in A_0$, da coerência de R, segue que $k < k + R(f^k(x)) \leq R(x)$. Se $k + R(f^k(x)) = R(x)$, então o resultado está provado. Se não, então $f^{k+R(f^k(x)} = F(f^k(x)) \in A_0$. Pela coerência de R, temos que $k + R(f^k(x)) + R(F(f^k(x))) \leq R(x)$. Novamente, se $k+R(f^k(x))+R(F(f^k(x))) = R(x)$, o resultado está provado; se não, temos que $f^{k+R(f^k(x))+R(F(f^k(x)))} = F^2(f^k(x)) \in A_0$. Como $\sum_{j=0}^{n-1} R(F^j(f^k(x))) \geq n$ e$R(x) < \infty$ esse processo irá parar. Donde existe $m \geq 0$, tal que $R(x) = k + \sum_{j=0}^{m-1} R(F^j(f^k(x)))$. Como $f^{k+\sum_{j=0}^{n-1} R(F^j(f^k(x)))}(x) \in A_0$ para todo $0 \leq n \leq m$, temos que $m \leq \#\{k \leq j < R(x); f^j(x) \in A_0\}$. A ultima parte do lema segue da Observação 2. $\square$

Lema 2.7. *Se R é tempo induzido coerente, então F é orbita-Coerente.*

Demonstração. Definindo $R_n(p) = \sum_{j=0}^{n-1} R(F^j(p))$ para todo $p \in A_0$ e $n \geq 0$. Pela Observação 2, temos que $f^{R_n(p)} = F^n(p)$. Seja $n_x, n_y \in \mathbb{N}$, tais que $w = f^{n_x}(x) = f^{n_y}(y)$ e $i_x, i_y \in \mathbb{N}$, tais que $R_{i_x}(x) \leq n_x < R_{i_x+1}(x)$ e $R_{i_y}(y) \leq n_y < R_{i_y+1}(y)$. Defina $z := F^{n_x}(x) = f^{R_{n_x}(x)}(x)$ e $k = R_{n_x}(x) - n_x$, do lema 2.6, temos que existe $1 \leq m$, tal que $F^{n_x+1}(x) = F(z) = F^m(f^k(z)) = F^m(w)$. Definindo $q := F^{n_y}(y) = f^{R_{n_y}(y)}(x)$ e $k' = R_{n_y}(y) - n_x$, similarmente existe $m' \geq 1$ tal que $F^{n_y+1}(y) = F(q) = F^{m'}(f^{k'}(q)) = F^{m'}(w)$, donde $\mathcal{O}_F^+(x) \cap \mathcal{O}_F^+(y) \neq \emptyset$. $\square$

2.3 Resultados sobre medidas Levantáveis.

Nessa seção serão apresentados os resultados obtidos por [19] que apresenta condições equivalentes para uma medida μ ser F-levantável.

Ao longo dessa seção, a menos que se diga o contrário, $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ será um espaço mensurável e $f : \mathbb{X} \circlearrowleft$ será uma aplicação mensurável. $F : A \to \mathbb{X}$ será uma aplicação induzida por f de tempo induzido R e $A_0 := \bigcap_{j\geq 0} F^{-j}(A)$.

A *densidade natural superior* de $U \in \mathbb{N}$ é definida como

$$\mathbb{D}^+_{\mathbb{N}}(U) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\#(\{1,\dots,n\}\cap U)$$

Defina para todo $x \in A_0$:

$$\theta_F(x) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\#\{0 \leq j < n; f^j(x) \in \mathcal{O}^+_F(x)\}$$

e

$$i_x(n) = \#\{0 \leq j < n; f^j(x) \in \mathcal{O}^+_F(x)\}$$

Lema 2.8. *Se* $i_x(n) > 0$*, então* $\frac{1}{i_x(n)}\sum_{j=0}^{i_x(n)-1} R\circ F^j(x) < \frac{n}{i_x(n)}$*, para todo* $x \in A_0$*, em particular* $\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} R\circ F^j(x) \leq \frac{1}{\theta_F(x)}$ *para todo* $x \in A_0$ *tal que* $\theta_F(x) > 0$*. Além disso, se* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} R\circ F^j(x)$ *existir, então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\#\{0 \leq j < n; f^j(x) \in \mathcal{O}^+_F(x)\} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} R\circ F^j(x)}$$

Demonstração. Seja $x \in A_0$ tal que $\theta_F(x) > 0$, defina:

$$E_x(n) := \left\{ \sum_{k=0}^{j-1} R\circ F^k(x); j > 0 \text{ e } \sum_{k=0}^{j-1} R\circ F^k(x) < n \right\}$$

Note que $E_x(n) = \{0 \leq j < n; f^j(x) \in \mathcal{O}^+_F(x)\}$ (Vide Observação 2). Além disso, $\#E_x(n) = \#\{j \geq 0; \sum_{k=0}^{j-1} R\circ F^k(x) < n\} = \max\{j \geq 0; \sum_{k=0}^{j-1} R\circ F^k(x) < n\}$. Assim,

$$i_x(n) = \#\{0 \leq j < n; f^j(x) \in \mathcal{O}^+_F(x)\} = \max\left\{ j \geq 0; \sum_{k=0}^{j-1} R\circ F^k(x) < n \right\}$$

Portanto, para todo $x \in A_0$ e $n \in \mathbb{N}$, temos que $\sum_{k=0}^{i_x(n)-1} R\circ F^k(x) < n \leq \sum_{k=0}^{i_x(n)} R\circ F^k(x)$. Definindo $\alpha_x(n) := (i_x(n)+1)/i_x(n)$, obtemos

$$\frac{1}{i_x(n)}\sum_{k=0}^{i_x(n)-1} R\circ F^k(x) < \frac{n}{i_x(n)} = \left(\frac{1}{n}\#\{0 \leq j < n; f^j(x) \in \mathcal{O}^+_F(x)\} \right)^{-1} \leq$$

$$\frac{i_x(n)+1}{i_x(n)}\left(\frac{1}{i_x(n)+1}\sum_{k=0}^{i_x(n)} R\circ F^k(x) \right) = \alpha_x(n)\left(\frac{1}{i_x(n)+1}\sum_{k=0}^{i_x(n)} R\circ F^k(x) \right)$$

para todo $n > R(x)$. (pois, se $n > R(x)$ temos que $i_x(n) \geq 1$). Assim, se $x \in A_0$ e $n > R(x)$,

$$\frac{1}{i_x(n)}\sum_{k=0}^{i_x(n)-1} R\circ F^k(x) < \frac{1}{\frac{1}{n}\#\{0 \leq j < n; f^j(x) \in \mathcal{O}^+_F(x)\}} \leq \frac{\alpha_x(n)}{i_x(n)+1}\sum_{k=0}^{i_x(n)} R\circ F^k(x) \quad (2.1)$$

note que $\lim_{n\to\infty} \alpha_x(n) = 1$ e tomando o limite inferior na primeira desigualdade da Equação (2.1):

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} R \circ F^k(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{i_x(n)} \sum_{k=0}^{i_x(n)-1} R \circ F^k(x) \leq$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}\#\{0 \leq j < n; f^j(x) \in \mathcal{O}_F^+(x)\}} = \frac{1}{\theta_F(x)}$$

Em particular, se $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} R \circ F^k(x)$ existir, por (2.1) temos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} R \circ F^k(x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}\#\{0 \leq j < n; f^j(x) \in \mathcal{O}_F^+(x)\}} = \frac{1}{\theta_F(x)}$$

□

Defina $\mathbb{X}^\infty$ o conjunto de todas as aplicações $\bar{x} : \{0, 1, 2 \dots\} \to \mathbb{X}$. Seja $\pi_n : \mathbb{X}^\infty \to \mathbb{X}$, $n \geq 0$ a projeção $\pi_n(\bar{x}) = \bar{x}(n)$.

O conjunto $\mathbb{X}_f \subset \mathbb{X}$, chamado de *domínio da extensão natural de* f será definido como

$$\mathbb{X}_f = \{\bar{x} \in \mathbb{X}^\infty; f(\bar{x}(j+1)) = \bar{x}(j), \forall j \geq 0\}$$

por fim a *projeção natural* $\pi : \mathbb{X}_f \to \mathbb{X}$ é definida por $\pi = \pi_0\big|_{\mathbb{X}_f}$.

Pela definição de $\mathbb{X}_f$, se $A \subset \mathbb{X}_f$, então

$$f^j(\pi_{n+j}(A)) = \pi_n(A) \forall n, j \geq 0,$$

e

$$\pi_{n+j}(A) \subset f^{-j}(\pi_n(A)) \forall n, j \geq 0.$$

Defina o cilindro de $\mathbb{X}_f$ gerado pelos mensuráveis $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ como o conjunto:

$$[A_0, \dots, A_n] := \{x \in \mathbb{X}_f; (\bar{x}(0), \dots, \bar{x}(n)) \in A_0 \times \dots \times A_n\}$$

Denote o conjunto de todos os cilindros de $\mathbb{X}_f$ por $\mathrm{Cyl}(\mathbb{X}_f)$. Seja $\bar{\mathcal{A}}$ a σ-álgebra dos sub-conjuntos de $\mathbb{X}_f$ gerada por $\mathrm{Cyl}(\mathbb{X}_f)$. Assim, o par $(\mathbb{X}_f, \bar{\mathcal{A}})$ é um espaço mensurável. Note que

$$\pi_{n+j}([A_0, \dots, A_n]) = f^{-j}(A_n), \forall j \geq 0$$

e

$$[A_0, A_1, \dots, A_n] = \left[A_0, f^{-1}(A_0) \cap A_1, f^{-2}(A_0) \cap f^{-1}(A_1) \cap A_2, \dots, \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-(n-i)}(A_i)\right]$$

por fim a *Extensão natural* de f é a aplicação $\bar{f} : \mathbb{X}_f \circlearrowleft$ dada por

$$\bar{f}((\bar{x}(0), \bar{x}(1), \dots)) = (f(\bar{x}(0)), f(\bar{x}(1)), \dots)$$

note que $\bar{f}$ é injetiva e $f \circ \pi = \pi \circ \bar{f}$. Além disso, se f é $\mathcal{A}$-mensurável então $\bar{f}$ é $\bar{\mathcal{A}}$-mensurável e π é $(\mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}})$-mensurável. Além disso, se f é bimensurável com respeito a $\mathcal{A}$ então $\bar{f}$ é bimensurável com respeito a $\bar{\mathcal{A}}$.

O resultado a seguir é um dos principais obtido por [19].

Teorema 2.9. *Seja $f : \mathbb{X} \circlearrowleft$ uma aplicação bimensurável e $F : A \to \mathbb{X}$ uma aplicação induzida mensurável, de tempo induzido $R : A \to \mathbb{N}$. Se μ é uma probabilidade ergódica f-invariante, então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *μ é F-levantável;*
2. *$\mu(\{x \in A_0; \mathbb{D}^+_{\mathbb{N}}((\{j \geq 0; f^j \in \mathcal{O}^+_F\})) > 0\}) > 0$;*
3. *$\mu(\{x \in A_0; \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} R \circ F^j(x) < \infty\}) > 0$;*
4. *Existe probabilidade F-invariante ν e $1 \leq C < \infty$, tal que $\nu \leq C\mu$ e $\int R d\mu < \infty$.*

Além disso, se F é órbita-coerente, então μ admite apenas um F-levantamento. E esse F-levantamento é ergódico.

Demonstração. (1) $\implies$ (2) Suponha que ν é F-levantamento de μ. Nesse caso, ν é F-invariante e $\int R d\nu < \infty$. Pelo teorema de Birkhoff, temos que para ν quase todo $x \in A_0$ o limite $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} R \circ F^j(x)$ existe e pertence a $[1, \infty)$. Assim, pelo lema 2.8, temos que $\theta_F(x) = \big(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} R \circ F^j(x)\big)^{-1} > 0$ ν-quase todo ponto. Como $\nu \ll \mu$, temos (2).

(2) $\implies$ (3) Imediato do lema 2.8.

(3) $\implies$ (4) Como $\mu(\{x \in A_0; \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} R \circ F^j(x)\}) > 0$ existe $1 \leq \gamma < \infty$, tal que $\mu(A(\gamma)) > 0$, onde

$$A(\gamma) = \big\{x \in A_0; ; \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} R \circ F^j(x) \leq \gamma\big\}$$

seja $f : \mathbb{X}_f \circlearrowleft$ a extensão natural de f. Defina $\bar{R} : \mathbb{X}_f \to \mathbb{N}$ como $\bar{R}(\bar{x}) = R(\pi(\bar{x}))$ e $\bar{F}(\bar{x}) = \bar{f}^{\bar{R}(\bar{x})}(\bar{x})$. Pela Proposição A.11, existe probabilidade $\bar{f}$-invariante $\bar{mu}$, tal que $\pi_*\bar{\mu} = \mu$. Pela bimensurabilidade de f temos que $\bar{f}$ é bimensurável e injetiva,

notando que $\overline{A_0} := \bigcap_{j\geq 0} \bar{F}^{-j}(\mathbb{X}_f) = \pi^{-1}(A_0)$ e

$$\bar{A}(\gamma) := \big\{\bar{x} \in \bar{A}_0; ; \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \bar{R} \circ \bar{F}^j(\bar{x}) \leq \gamma\big\} = \pi^{-1}(A(\gamma)).$$

Para todo $\bar{x} \in \bar{A}(\gamma)$, seja $\mathbb{N}(\bar{x}) = \{n \geq 0; \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \bar{R} \circ \bar{F}^j(\bar{x}) \leq 2\gamma\}$ e $s_{\bar{x}}(n) = \sum_{j=1}^{n-1} \bar{R} \circ \bar{F}^j(\bar{x})$. Portanto, se $n \in \mathbb{N}(\bar{x})$ e $V \subset \mathbb{X}_f$, temos

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{\bar{F}^j(\bar{x})}\right) = \frac{s_{\bar{x}}(n)}{n}\frac{\#\{0 \leq j < n; \bar{F}^j(\bar{x}) \in V\}}{s_{\bar{x}}(n)} \leq 2\gamma \frac{\#\{0 \leq j < n; \bar{F}^j(\bar{x}) \in V\}}{s_{\bar{x}}(n)} \leq$$

$$\leq 2\gamma\frac{\#\{0\leq j<s_{\bar{x}}(n);\bar{f}^j(\bar{x})\in\mathcal{O}_{\bar{F}}(\bar{x})\cap V\}}{s_{\bar{x}}(n)}\leq 2\gamma\frac{\#\{0\leq j<s_{\bar{x}}(n);\bar{f}^j(\bar{x})\in V\}}{s_{\bar{x}}(n)}=$$

$$=2\gamma\left(\frac{1}{s_{\bar{x}}(n)}\sum_{j=0}^{s_{\bar{x}}(n)-1}\delta_{\bar{f}^j(\bar{x})}\right)(V)$$

Como $\bar{F}(\bar{A}(\gamma))\subset A\bar{(}\gamma)$, temos que para todo $l\geq 0$:

$$\lim_{j\to\infty}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{\bar{F}^i(\bar{x})}\right)(\bar{F}^l(\bar{A}(\gamma)))=1$$

Portanto, pelo teorema de Birkhoff, temos que para todo $l\geq 0$ e $m\bar{u}$ quase todo $\bar{x}\in\bar{A}(\gamma)$:

$$\bar{\mu}(\bar{F}^l(\bar{A}(\gamma)))>\frac{1}{2\gamma}\tag{2.2}$$

Portanto, definindo $\mathcal{Z}_{\bar{F}}=\bigcap_{n\geq 0}\bar{F}(\bar{\mathcal{A}}_0)$ e $\mathcal{Z}^*:=\bigcap_{n\geq 0}\bar{F}(\bar{A}(\gamma))$, pelo lema A.12,temos

$$\mu(\mathcal{Z}_{\bar{F}})\geq\mu(\mathcal{Z}^*)\geq\frac{1}{2\gamma}>0$$

Portanto, do teorema A.9 $\bar{\nu}_0:=\frac{1}{\mu(\mathcal{Z}_{\bar{F}})}\mu\big|_{\mathcal{Z}_{\bar{F}}}$ é uma probabilidade F-invariante.

Como $\bar{F}(\mathcal{Z}^*)\subset\mathcal{Z}^*$, temos que

$$\bar{\nu}=\frac{1}{\bar{\nu}_0(\mathcal{Z}^*)}\bar{\nu}_0\big|_{\mathcal{Z}^*}=\frac{1}{\bar{\mu}(\mathcal{Z}^*)}\bar{\mu}\big|_{\mathcal{Z}^*}$$

é uma probabilidade F-invariante, com $\bar{\nu}\leq C\bar{\mu}$, onde $C=1/\bar{\mu}(\mathcal{Z}^*)$. Assim, por Birkhoff $\int\bar{R}d\bar{\nu}\leq C\gamma<\infty$, portanto $\bar{\nu}$ é um $\bar{F}$-Levantamento de $\bar{\mu}$, daí $\nu:=\pi_*\bar{\nu}=\bar{\nu}\circ\pi^{-1}$ é um F levantamento de μ com $\nu\leq C\mu$. Além disso, se F é órbita coerente então $\bar{F}$ é órbita coerente. E, assim, pelo corolário A.10, $\bar{\nu}$ é $\bar{F}$-ergódica e o único $\bar{F}$-levantamento de $\bar{\mu}$, portanto ν é o único F-levantamento de μ, e é F-ergódico. □

Corolário 2.10. *Seja $\mathbb{X}$ um espaço métrico compacto, f uma aplicação contínua, $(F,\mathcal{P})$ uma aplicação de Markov completa induzida por f definida em um aberto $A\subset\mathbb{X}$. Seja R o tempo induzido de F e μ uma probabilidade F-invariante e ergódica definida nos conjuntos de Borel, tal que $\mu(\{R=0\})=0$. Se F for órbita coerente e existir $\Theta>0$, tal que*

$$\limsup_{n\to\infty}\#\{0\leq j<n;f^j(x)\in\mathcal{O}_F^+(x)\}\geq\Theta$$

para μ quase todo $x\in A$. Então, existe uma medida F-invariante, tal que $\nu(Y)\leq\mu(Y)$ para todo Borel mensurável $Y\subset B$. E $\int Rd\nu\leq\Theta^{-1}$.

O corolário 2.10 foi originalmente obtido por [18], que construiu a medida ν utilizando o método de construção de medidas métricas a partir de pré-medidas. Apresentado por [23], esse corolário é de fundamental importância para a construção de aplicações de Markov localmente induzidas, que é o resultado principal do presente capítulo.

Lema 2.11. *Seja $\{G_j\}_j$ uma coleção de subconjuntos de $\mathbb{X}$, tais que $f^j(x) \in G_{n-j}$ para todo $x \in G_n$. Seja $B \subset \mathbb{X}$, e $x \in B$ um ponto tal que $\#\{j \geq 0; x \in G_j e f^j(x) \in B\} = +\infty$. Seja $T : \mathcal{O}^+(x) \cap B \to \mathcal{O}^+(x) \cap B$ uma aplicação dada por $T(y) = f^{g(y)}(y)$, com $1 \leq g(y) \leq \min\{j \in \mathbb{N}; y \in G_j \text{ e } f^j(y) \in B\}$. Então*

$$\#\{1 \leq j \leq n; x \in G_j \text{ e } f^j(x) \in B\} \leq \#\Big\{j \geq 0; \sum_{k=0}^{j} g(T^k(x)) \leq n\Big\}$$

Além disso, se $\limsup_{n\to\infty}(1/n)\#\{1 \leq j \leq n; x \in G_j \text{ e } f^j(x) \in B\} > \Theta > 0$, *então*

$$\liminf \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} g \circ T^j(x) \leq \Theta^{-1}$$

Demonstração. Dado $n \in \mathbb{N}$, defina $\Gamma_n = \{1 \leq j \leq n; x \in G_j \text{ e } f^j(x) \in B\}$ e $\Sigma_n = \{j \geq 0; \sum_{k=0}^{j} g(T^k(x)) \leq n\}$. Como $\Gamma_0 = \emptyset = \Sigma_0$ temos que $\#\Gamma_0 \leq \#\Sigma_0$. Por indução, assuma que para todo $0 \leq j < n$ $\#\Gamma_j \leq \#\Sigma_j$, assuma que $n \in \Gamma_n$, do contrário $\#\Gamma_n = \#\Gamma_{n-1} \leq \Sigma_{n-1} \leq \#\Sigma_n$, e seja $l = \max\{j; j \in \Sigma_{n-1}\}$ e $r = \sum_{k=0}^{l} g(T^k(x))$. Como $r \leq n-1$ e $x \in G_n$, temos que $T^{l+1}(x) \in G_{n-r}$. Além disso, $f^s(x) \in B$, $f^{n-r}(f^r(x)) = f^n(x) \in B$, e, portanto, $g(f^r(x)) \leq n - r$, donde $\sum_{k=0}^{l+1} g(T^k(x)) = \sum_{k=0}^{l} g(T^k(x)) + g(T^{l+1}(x)) \leq r + (n-r) = n$, e portanto $l+1 \in \Sigma_n \setminus \Sigma_{n-1}$, e $\#\Gamma_n = \#\Gamma_{n-1} + 1 \leq \Sigma_{n-1} + 1 \leq \#\Sigma_n$. Completando a indução.

Supondo agora que $\limsup_{n\to\infty}(1/n)\#\{1 \leq j \leq n; x \in G_j \text{ e } f^j(x) \in B\} > \Theta > 0$, se $\liminf \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} g \circ T^j(x) > \Theta^{-1}$, então existe n_0, tal que $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} g \circ T^j(x) > \Theta^{-1}$ para todo $n > n_0$. Daí seja $n_0 \leq \Theta n \leq k \leq n$, então $\sum_{j=0}^{k} g \circ T^j(x) > \Theta^{-}1k = \Theta^{-1}\frac{k}{n}n \geq n$, e, portanto, $\#\Sigma_n(x) \leq \Theta n$, para n suficientemente grande. E, como $\#\Gamma_n \leq \#\Sigma_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, então

$$\limsup_{n\to\infty}(1/n)\#\{1 \leq j \leq n; x \in G_j \text{ e } f^j(x) \in B\} \leq \Theta$$

O que é uma contradição. □

2.4 Conjuntos e medidas Zooming

Seja $\mathbb{X}$ espaço métrico compacto e $f : \mathbb{X} \circlearrowleft$ uma aplicação mensurável.

Definição 2.12 (Contração *zooming*)**.** *Uma sequência de funções $\alpha = \{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $\alpha_n : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ é uma **Contração zooming**, se satisfaz as seguintes condições:*

1. *$\alpha_n(r) < r$, para todo $r > 0$ e $n \geq 1$*

2. *$\alpha_n(r) \leq \alpha_n(r_1)$ para todo $0 \leq r \leq r_1$ e $n \geq 1$*

3. *$\alpha_n \circ \alpha_m(r) \leq \alpha_{n+m}(r)$ pra todo $r > 0$ e para todo $m, n \geq 1$*

4. $\sup_{0\le r\le 1}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(r)\right)<\infty$

Uma contração zooming $\alpha=\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é dita *exponencial* se $\alpha_n(r)=e^{-\lambda n}r$ para algum $\lambda>0$ e é chamada *Lipschitz* se $\alpha_n(r)=a_nr$, para alguma sequência de reais $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Note que, em particular, toda contração zooming exponencial é Lipschitz.

Definição 2.13 (Tempos *zooming*)**.** *Dizemos que $n\ge 1$ é um tempo (α,δ,l)-zooming para um ponto $p\in\mathbb{X}$ (com respeito a f) se existe uma vizinhança aberta $V_n(\alpha,\delta,l)(p)$ de p tal que:*

1. *$f^{ln}:V_n(\alpha,\delta,l)(p)\to B_\delta(f^{ln}(p))$ é um homeomorfismo que se estende continuamente para a fronteira;*

2. *$dist(f^{lj}(x),f^{lj}(y))\le\alpha_{n-j}(dist(f^{ln}(x),f^{ln}(y)))$ para todo $x,y\in V_n(\alpha,\delta,l)(p)$ e $0\le j\le n-1$.*

A vizinhança $V_n(\alpha,\delta,l)(p)$ é chamada de *pré bola* (α,δ,l)*-Zooming* de ordem n e centro p. $B_\delta(f^{ln}(p))$ é a *bola* (α,δ,l)*-zooming.* $\mathcal{Z}_n(\alpha,\delta,l)$ será definido como o conjunto de pontos tendo n como tempo (α,δ,l)-zooming.

Dada uma sequência de conjuntos qualquer $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, denotaremos $\limsup_{n\to\infty}U_n$ como o conjunto de pontos que pertence a infinitos elementos desta sequência. Ou seja,

$$\limsup_{n\to\infty}U_n=\bigcap_{n\ge1}\bigcup_{j\ge n}U_j.$$

Definição 2.14 (Medidas Zooming.)**.** *Uma medida f-invariante e σ-finita, definida nos conjuntos de Borel é dita medida (α,δ,l)-fracamente zooming se:*

$$\mu(\mathbb{X}\setminus\limsup_{n\to\infty}\mathcal{Z}_n(\alpha,\delta,l))=0$$

se, adicionalmente para μ quase todo $x\in\mathbb{X}$:

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\#\{1\le j\le n; x\in\mathcal{Z}_j(\alpha,\delta,l)\}>0 \tag{2.3}$$

dizemos que μ é uma medida (α,δ,l)-zooming.

O conjunto de todas as probabilidases (α,δ,l)-zooming será denotada como $\mathcal{M}^1_{\mathcal{Z}}(\alpha,\delta,l)$.

Definição 2.15 (Conjuntos zooming)**.** *Um conjunto positivamente invariante $\Lambda\subset\mathbb{X}$ é conjunto (α,δ,l)-zooming se para todo $x\in\Lambda$ A Equação (2.3) vale.*

No restante do capítulo, a fim de apresentar os resultados obtidos por [18], nos focaremos em tempos $(\alpha,\delta,1)$-zooming.

Definição 2.16 (Distorção limitada). *Dizemos que uma medida $(\alpha,\delta,1)$-fracamente zooming possui distorção limitada se existe $\rho>0$ tal que para todo $n\in\mathbb{N}$ e quase todo $p\in\mathcal{Z}_n(\alpha,\delta,1)$, o Jacobiano de f^n com respeito a μ, $J_\mu f^n$ está bem definida em $V_n(\alpha,\delta,1)(p)$ e:*

$$\left|\log\left(\frac{J_\mu f^n(x)}{J_\mu f^n(y)}\right)\right| \leq \rho dist(f^n(x),f^n(y))$$

Lema 2.17. *Os tempos Zooming seguem as seguintes propriedades:*

(a). Se $p\in\mathcal{Z}_n(\alpha,\delta,1)$ então $f^j(p)\in\mathcal{Z}_{n-j}(\alpha,\delta,1)$ para todo $0\leq j<n$;

(b). Se $p\in\mathcal{Z}_n(\alpha,\delta,1)$ e $f^n(p)\in\mathcal{Z}_j(\alpha,\delta,1)$ então $p\in\mathcal{Z}_{n+j}(\alpha,\delta,1)$;

(c). Se $p\in\mathcal{Z}_{nl}(\{\alpha_j\}_j,\delta,1)$ então $p\in\mathcal{Z}_n(\{\alpha_{jl}\}_j,\delta,l)$

Demonstração. (a). Para provar o Item (a) do lema basta mostrar que $f^{n-j}\big|_{f^j(\overline{V_n(\alpha,\delta,1)(p)})}$ satisfaz as condições 1 e 2 da Definição 2.13.

1. Note que $f^{n-j}\left(f^j\left(\overline{V_n(\alpha,\delta,1)(p)}\right)\right)=f^n\left(\overline{V_n(\alpha,\delta,1)(p)}\right)$, portanto, como f^n leva $\overline{V_n(\alpha,\delta,1)(p)}$ homeomorficamente em $\overline{B_\delta(f^n(p))}$ então f^{n-j} leva $f^j\left(\overline{V_n(\alpha,\delta,1)(p)}\right)$ homeomorficamente em $\overline{B_\delta(f^n(p))}$. Defina: $g=:f^{n-j}\big|_{f^j(\overline{V_n(\alpha,\delta,1)(p)})}$, note que $f^j\big|_{\overline{V_n(\alpha,\delta,1)(p)}}=g^{-1}\circ f^n\big|_{\overline{V_n(\alpha,\delta,1)(p)}}$, portanto $f^j\big|_{\overline{V_n(\alpha,\delta,1)(p)}}$ é um homeomorfismo. Donde:
$$\overline{f^j(V_n(\alpha,\delta,1)(p))}=f^j\left(\overline{V_n(\alpha,\delta,1)(p)}\right)$$
Assim, f^{n-j} leva $f^j(V_n(\alpha,\delta,1)(p))$ homeomorficamente em $B_\delta(f^n(p))$, se estendendo continuamente para a fronteira.
2. Seja $x,y\in f^j(V_n(\alpha,\delta,1)(p))$, seja $x_0,y_0\in V_n(\alpha,\delta,1)(p)$ tais que $f^j(x_0)=x$ e $f^j(y_0)=y$. Note que se $0\leq i<n-j$, então $\text{dist}(f^i(x),f^i(y))=\text{dist}(f^{i+j}(x_0),f^{i+j}(y_0))\leq\alpha_{n-j-i}(\text{dist}(f^n(x_0),f^n(y_0)))=\alpha_{n-j-i}(\text{dist}(f^{n-j}(x),f^{n-j}(y)))$.

(b). Inicialmente note que se $x\in V_j(\alpha,\delta,1)(f^n(p))$, então $\text{dist}(x,f^n(p))\leq\alpha_j(\text{dist}(f^j(x),f^{n+j}(p)))<\text{dist}(f^j(x),f^{n+j}(p))<\delta$, daí $\overline{V_j(\alpha,\delta,1)(f^n(p))}\subseteq\overline{B_\delta(f^n(p))}$. Defina:

$$U=f^{-n}\big|_{\overline{V_n(\alpha,\delta,1)(p)}}\left(\overline{V_j(\alpha,\delta,1)(f^n(p))}\right)$$

e

$$V=f^{-n}\big|_{\overline{V_n(\alpha,\delta,1)(p)}}\left(V_j(\alpha,\delta,1)(f^n(p))\right)$$

Como $f^{-n}\big|_{\overline{V_n(\alpha,\delta,1)(p)}}$ é um homeomorfismo $\overline{V}=U$.

1. Por definição $f^n|_U$ leva U homeomorficamente em $\overline{V_j(\alpha,\delta,1)(f^n(p))}$, e como f^j leva $\overline{V_j(\alpha,\delta,1)(f^n(p))}$ homeomorficamente em $\overline{B_\delta(f^n(p))}$, teremos que, $f^{n+j}\big|_U$ leva U homeomorficamente em $B_\delta(f^{n+j}(p))$.

2. Se $x \in V$, seja $0 \leq i < n + j$. Então temos dois casos:

   - $i < n$.

     Nesse caso,

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(f^i(x), f^i(y)) \leq \alpha_{n-i}(\operatorname{dist}(f^n(x), f^n(y))) \leq \\ \alpha_{n-i} \circ \alpha_j(\operatorname{dist}(f^{n+j}(x), f^{n+j}(y))) \\ \leq \alpha_{n+j-i}(\operatorname{dist}(f^{n+j}(x), f^{n+j}(y))).\end{aligned}$$

   - Se $i \geq n$.

     Nesse caso,

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(f^i(x), f^i(y)) = \operatorname{dist}(f^{i-n}(f^n(x)), f^{i-n}(f^n(y)))) \\ \leq \alpha_{j+n-i}(\operatorname{dist}(f^{n+j}(x), f^{n+j}(y))).\end{aligned}$$

(c). Nesse item iremos definir $V_n(\{\alpha_{jl}\}, \delta, l)(p) := V_{nl}(\{\alpha_j\}, \delta, 1)(p)$

1. Por definição f^{nl} leva $\overline{V_{nl}(\{\alpha_j\}, \delta, 1)(p)}$ homeomorficamente em $\overline{B_\delta(f^{nl}(p))}$, portanto leva $\overline{V_n(\{\alpha_{jl}\}, \delta, l)(p)}$ homeomorficamente em $\overline{B_\delta(f^{nl}(p))}$.
2. Seja $0 \leq i < n$. então $0 \leq il < nl$, e portanto para todo $x, y \in V_n(\{\alpha_{jl}\}, \delta, l)(p) = V_{nl}(\{\alpha_j\}, \delta, 1)(p)$ temos que

$$\operatorname{dist}(f^{li}(x), f^{il}(x)) < \alpha_{ln-li}(\operatorname{dist}(f^{ln}(x), f^{ln}(y))).$$

$\square$

Definição 2.18. *Denotaremos $\mathcal{Z}$ como o conjunto dos pontos de X que possuem frequência positiva dos tempos $(\alpha, \delta, 1)$-Zooming. Ou seja, o conjunto de pontos tais que a Equação 2.3 vale.*

Definição 2.19. *Denotando $\mathcal{E}_{\mathcal{Z},n} = \{V_n(\alpha, \delta, 1)(x); x \in Z_n(\alpha, \delta, 1)\}$, ou seja, o conjunto de todas as pré bolas $(\alpha, \delta, 1)$-Zooming de ordem n. E $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}} = \{\mathcal{E}_{\mathcal{Z},n}\}_n$, ou seja, a coleção de todas as pré bolas $(\alpha, \delta, 1)$-Zooming.*

Note que pelo Lema 2.17 (a) que $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}$ é uma família dinamicamente fechada de pré imagens regulares. Seja $0 < r < \delta$, $x \in \mathbb{X}$ e $(B_r(x))^*$, como definido pela Equação 1.17, associada á sequência $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}$, então, da Proposição 1.14 temos que tomando $\mathcal{A} = \{B_r(x)\}$, então o componente conexo de $(B_r(x))^*$ que contém x é um conjunto $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}$-encaixado.

Definição 2.20 (Bolas Zooming encaixadas)**.** *Se $x \in (B_r(x))^*$. Defina a Pré bola $(\alpha, \delta, 1)$-Zooming, de raio r e centro x, denotada de $B_r^*(x)$, como o componente conexo de $(B_r(x))^*$ que contém x.*

Observe que devido a contração para o passado nos tempos *Zooming*, então $B_r(x)$ não pode estar contida em nenhuma pré imagem de si mesma (Veja propriedade 2 da Definição 2.13). Daí, $\mathcal{A} = \{B_r(x)\}$ é uma coleção de abertos com as propriedades da seção 1.7. Além disso, pelo lema 1.9, temos que duas $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}$-Pré imagens diferentes de mesma ordem não podem se intersectar. Além disso, se $\{P_0, \dots, P_n\}$ é uma cadeia de $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}$-Pré imagens de $B_r(x)$, então $0 < \mathrm{Ord}(P_0) < \cdots < \mathrm{Ord}(P_n)$.

Definição 2.21 (Aplicação inversamente separada.). *Uma aplicação f é inversamente separada se para todo $x \in \mathbb{X}$ temos*

$$dist\left(x, \bigcup_{j=1}^{n} f^{-j}(x) \setminus \{x\}\right) > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Na Proposição 1.14 foi realizada a construção abstrata de um conjunto encaixado. A única hipótese que a coleção $\mathcal{A}$ precisava cumprir para esta construção é de que $\mathcal{A}' \neq \emptyset$. O resultado a seguir fornecerá uma condição suficiente para a existência de bolas *Zooming* encaixadas.

Lema 2.22. *Se existe $0 < r < \delta/2$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(2r) < r/2$, então para todo $x \in \mathbb{X}$ a bola Zooming encaixada $B_r^*(x)$ está bem definida e $B_r^*(x) \supset B_{r/2}(x)$. Além disso, se f for uma aplicação inversamente separada e $\sup_{r>0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(r)/r \right\} < +\infty$ então para todo $x \in \mathbb{X}$ existe $< r_0 < \delta/2$ tal que $B_r^*(x)$ está bem definido, e para todo $0 < r \le r_0$ e, $0 < \gamma < 1$ dado, existe $0 < r_\gamma < r_0$, tal que para todo $0 < r \le r_\gamma$ temos $B_r^*(x) \supset B_{\gamma r}(x)$.*

Demonstração. Como a ordem dos elementos da cadeia de $\mathcal{A} = \{B_r(x)\}$ é estritamente crescente o diâmetro de qualquer cadeia é menor que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\mathrm{diam}(B_r(x))) < r/2$ Assim pelo corolário 1.15. teremos que $B_r^*(x) \supset B_{r/2}(x)$.

Supondo f inversamente separável e $\sup_{r>0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(r)/r \right\} < +\infty$. Dado $0 < \gamma < 1$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n>n_0}^{\infty} \alpha_n(r)/r < (1-\gamma)r/2$. Como $\mathbb{X}$ é espaço métrico compacto existe $\epsilon > 0$ tal que $\inf_{x\in\mathbb{X}} \mathrm{dist}\left(x, \bigcup_{j=1}^{n} f^{-j}(x) \setminus \{x\}\right) > \epsilon$. Defina $r_\gamma = (1/3)\min\{\epsilon, \delta\}$, e $0 < r \le r_\gamma$. Se $j < n_0$, então para toda $\mathcal{E}_{\mathcal{Z},j}$-pré imagem P, temos que $B_r(x) \cap (P) = \emptyset$. Pois $P \cap \left(\bigcap_{j=1}^{n_0} f^{-j}(x) \setminus \{x\}\right) \neq \emptyset$. E $\mathrm{diam}(P) < r < \epsilon/2$. Daí toda corrente de $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}$-pré imagens de $B_r(x)$ se inicia coma a pré imagem d ordem maior que n_0. Daí pela crescência estrita da rodem das correntes de $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}$-pré imagens de $B_r(x)$ temos que $\sum_{n>n_0}^{\infty} \alpha_n(\mathrm{diam} B_r(x))/r < (1-\gamma)r$. Além disso como a corrente de pré imagens intersectam a borda de $B_r(x)$, então não podem intersectar $B_{\gamma r}(x)$, donde $(B_r(x))^*$ e $B_r^*(x)$ contém $B_{\gamma r}(x)$. $\square$

Definição 2.23 (Conjuntos de imagens *Zooming*.). *Seja $\mathfrak{z}(x) = \{f^m(x); m \in \mathbb{N}$ e $x \in Z_m(\alpha, \delta, 1)\}$ o conjunto de imagens zooming de x por f. Defina a coleção de imagens Zooming de f como $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}(x))_{x \in \limsup Z_m(\alpha,\delta,1)}$.*

Observação 5. *Pelo lema 2.17 é fácil provar que $\mathfrak{z}$ é uma coleção assintoticamente invariante. De fato para todo $x \in \limsup Z_m(\alpha,\delta,1)$ é claro que $\#\{j \in \mathbb{N}; f^j(x) \in \mathfrak{z}(x)\} = \infty$. Além disso, se $x \in \limsup Z_n(\alpha,\delta,1)$, observe que Pelos itens (a) e (b) do Lema 2.17 temos que $\{f^m(x); m \geq 2 \text{ e } x \in Z_m(\alpha,\delta,1)\} = \{f^k(f(x)); k \geq 1 \text{ e } f(x) \in Z_k(\alpha,\delta,1)\}$, ou seja $\mathfrak{z}(x) \cap \mathcal{O}_f^+(f^m(x)) = \mathfrak{z}(f(x)) \cap \mathcal{O}_f^+(f^m(x))$ para todo $m \geq 2$.*

2.5 Construção de uma aplicação Zooming de retorno.

Nessa seção apresentaremos a definição de aplicação Zooming de retorno, bem como o resultado principal do presente capítulo. Originalmente obtida por [18], o resultado consegue construir uma aplicação Zooming de retorno a partir de uma aplicação de Markov localmente induzida.

Nessa seção $\mathbb{X}, f, \alpha, \delta$ e $\mathfrak{z}$ serão tomados como na seção 2.4. Δ será um conjunto aberto e $(\alpha,\delta,1)$-encaixado. Suponha ainda que $\text{diam}(\Delta) < \delta/2$. Vide o lema 2.22 para um exemplo de conjunto que satisfaça esta propriedade.

Dado $x \in \Delta$ defina $\Omega(x)$ como a coleção de $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}$ pré-imagens V de Δ tais que $x \in V$. Observe que se $V \in \Omega(x)$ então $f^{\text{Ord}(V)}(x) \in \Delta$.

Observação 6. *Se $x \in \Delta$ possui um $\mathfrak{z}$-retorno a Δ então $\Omega(x) \neq \emptyset$. Pois se $x \in \Delta$, e $f^n(x) \in \Delta \cap \mathfrak{z}$, então $B_\delta(f^n(x)) = f^n(V_n(\alpha,\delta,1)(x)) \supset \Delta$. Pois diam$(\Delta) < \delta/2$. Portanto, para todo tempo de $\mathfrak{z}$-retorno de um ponto $x \in \Delta$ podemos associar uma $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}$-pré-imagem $P = \left(f^n\big|_{V_n(x)}\right)^{-1}(\Delta)$, e $x \in P$.*

Definição 2.24. *O tempo induzido em Δ associado ao primeiro tempo de $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}$-retorno a Δ é a função $R : \Delta \to \mathbb{N}$ dada por:*

$$R(x) = \begin{cases} \min\{ord(V); V \in \Omega(x)\} & Se\ \Omega(x) \neq \emptyset \\ 0 & \Omega(x) = \emptyset \end{cases} \tag{2.5}$$

Note que $R(x) \leq \min\{n \in \mathbb{N}; f^n(x) \in \Delta \cap \mathfrak{z}\}$. Pois se existe $y \in \mathbb{X}$ tal que $k < \min\{n \in \mathbb{N}; f^n(x) \in \Delta \cap \mathfrak{z}\}$ é um $\mathfrak{z}$-retorno de y a Δ, e $x \in V_k(\alpha,\delta,1)(y)$ então $R(x) = k < \min\{n \in \mathbb{N}; f^n(x) \in \Delta \cap \mathfrak{z}\}$.

Definição 2.25. *A aplicação induzida F em Δ associada ao primeiro tempo de $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}$-retorno a Δ é a aplicação $F : \Delta \to \Delta$, dada por:*

$$F(x) = f^{R(x)}(x),\ \forall x \in \Delta \tag{2.6}$$

Como a coleção de conjuntos $\Omega(x)$ é totalmente ordenada por inclusão, segue do Corolário 1.13 que existe um único $I(x) \in \Omega(x)$ tal que $\text{Ord}(I(x)) = R(x)$, sempre que $\Omega(x) \neq \emptyset$.

Lema 2.26. *Se $\Omega(x) \neq \emptyset \neq \Omega(y)$ então $I(x) \cap I(y) = \emptyset$ ou $I(x) = I(y)$.*

Demonstração. Note que se $\Omega(x) \neq \emptyset$ então para todo $V \in \Omega(x)$ temos que $I(x) \supset V$, pois, suponha que $I(x) \subsetneq V$, como a ordem de duas $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}$ pré imagens de Δ não possuem a mesma ordem e $\mathrm{Ord}(I(x)) = \min\{\mathrm{ord}(V); V \in \Omega(x)\}$, segue que $\mathrm{Ord}(I(x)) < \mathrm{Ord}(V)$. Donde, pelo corolário 1.13 Δ está contida em uma $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}$ pré-imagem de sí mesmo com ordem maior que zero, o que é um absurdo, pois temos contração nos tempos *Zooming*, e portanto as $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}$ pré-imagens de Δ possuem um Diâmetro menor que o diâmetro de Δ.

Seja $x, y \in \Delta$, com $\Omega(x) \neq \emptyset \neq \Omega(y)$, suponha que $I(x) \cap I(y) \neq \emptyset$, então como $I(x)$ e $I(y)$ são $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}$ pré-imagem de Δ, e Δ é encaixado então $I(x) \subset I(y)$ ou $I(x) \supset I(y)$, donde $I(x) \in \Omega(y)$, ou $I(y) \in \Omega(x)$. No entanto, pela unicidade do elemento de ordem mínima, temos que $I(x) = I(y)$. □

Lema 2.27. *Se F é uma aplicação induzida associada ao primeiro tempo de $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}$-retorno a Δ. Então F é orbita Coerente.*

Demonstração. Note que se $0 \leq j < R(x)$ é tal que $f^j(x) \in \Delta$, então, como $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}$ é uma família dinamicamente fechada temos que $f^j(I(x))$ é uma $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}$- pré imagem de Δ contendo $f^j(x)$. Portanto $f^j(I(x)) \in \Omega(f^j(x))$, além disso $\mathrm{Ord}(f^j(I(x))) = \mathrm{Ord}(I(x)) - j = R(x) - j$. Daí $R(f^j(x)) = \min\{\mathrm{ord}(V); V \in \Omega(x)\} \leq R(x) - j$, donde $R(x) \geq R(f^j(x)) + j$. Assim, R é tempo induzido coerente, conforme a Definição 2.5. Portanto pelo lema 2.7 F é Órbita-coerente. □

Definição 2.28. *A partição de Markov associada ao primeiro tempo de $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}$-retorno a Δ é a coleção $\mathcal{P}$ de conjuntos abertos, dados por*

$$\mathcal{P} = \{I(x); x \in \Delta \text{ e } \Omega(x) \neq \emptyset\} \tag{2.7}$$

Resta provar que a Definição 2.28 de fato é uma partição de Markov de conjuntos abertos.

Corolário 2.29. *Seja R dada pela Equação 2.5, F dada por 2.6 e $\mathcal{P}$ dada pela Equação 2.7. Se $\mathcal{P} \neq \emptyset$, então $(F, \mathcal{P})$ é uma aplicação de Markov induzida completa para f em Δ.*

Demonstração. Por construção os elementos de $\mathcal{P}$ são abertos, pelo lema 2.26 temos que $\mathcal{P}$ satisfaz a primeira condição de uma partição de Markov. Como para todo $P, Q \in \mathcal{P}$ temos que $F(P) = \Delta \supset Q$, então as condições 2 e 3 de uma partição de Markov são satisfeitas. Seja P uma $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}$ pré-imagem de Δ com ordem n, então existe uma pré-bola *Zooming* $V_n(\alpha, \delta, 1)(x)$, com $x \in Z_n(\alpha, \delta, 1)$, tal que $V_n(\alpha, \delta, 1) \supset P$. como $F\big|_P = f^n\big|_P$ e $f^n\big|_{\overline{V_n(\alpha,\delta,1)(x)}}$ é homeomorfismo entre $\overline{P}$ e $\overline{\Delta} = \overline{f(P)}$, portanto $\mathcal{P}$ satisfaz a quarta condição de uma partição de Markov para F. Seja $x \in \bigcap_{n\geq 0} F^{-n}\big(\bigcup_{P\in\mathcal{P}} P\big)$. Denotando $P_j = \mathcal{P}(F^j(x))$. Note que $\mathrm{diam}(\mathcal{P}_n(x)) = \mathrm{diam}(F\big|_{P_1}^{-1} \circ F\big|_{P_2}^{-1} \circ \cdots \circ F\big|_{P_n}^{-1}) <$

$\prod_{j=1}^{n}\alpha_{\mathrm{Ord}(P_j)}(\mathrm{diam}(\Delta)) \leq \alpha_{\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Ord}(P_j)}(\mathrm{diam}(\Delta))$, e $\alpha_{\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Ord}(P_j)}(\mathrm{diam}(\Delta)) \to 0$ quando $n \to \infty$. Assim $\mathcal{P}$ satisfaz a quinta condição de uma partição de Markov. Sendo assim $(F, \mathcal{P})$ é uma aplicação de Markov para F em Δ. Para mostrar que esta aplicação de Markov é de fato induzida completa, note que, como $\{R \geq 1\} = \bigcup_{P\in\mathcal{P}} P$ e para todo $P \in \mathcal{P}$ temos que $F(P) = \Delta$. □

No lema a seguir μ será uma medida fracamente $(\alpha, \delta, 1)$-*Zooming* e U uma componente μ-ergódica. E seja A o atrator de associado a U e $A_{\mathfrak{z}} \subset A$ o compacto dado pelo lema A.8 tal que $\omega_{f,\mathfrak{z}}(x) = A_{\mathfrak{z}}$. μ-quase sempre em U.

Lema 2.30. *Seja $(F, \mathcal{P})$ como no corolário 2.29, supondo $\Delta \cap A_{\mathfrak{z}} \neq \emptyset$. Então $(F, \mathcal{P})$ é uma aplicação de Markov completamente induzida definida em Δ e compatível com $\mu\big|_U$ (Conforme a definição 2.4).*

Demonstração. Note que se $p \in \Delta \cap A_{\mathfrak{z}}$. Como $p \in \omega_{f,\mathfrak{z}}(x)$ μ-quase todo $x \in U$, temos que $\mu|_U(U \setminus \bigcup_{j\geq 0} f^{-j}(\Delta)) = 0$, como $\mu\big|_U \circ f^{-1} << \mu|_U$, então $\mu|_U(\Delta) > 0$.

Assim, pelo corolário 2.29 só precisamos provar que $\mu|_U(\Delta \setminus \bigcup_{P\in\mathcal{P}} P) = 0$. Como $p \in \omega_{f,\mathfrak{z}}(x)$ μ-quase todo $p \in U$, segue que $\Omega(x) \neq \emptyset$ μ- quase sempre em Δ. E portanto $\mu\big|_U(\Delta \setminus \bigcup_{P\in\mathcal{P}} P) = \mu\big|_U(\{R = 0\}) = 0$. □

Agora apresentaremos o resultado principal deste capítulo, obtido originalmente por [18].

Teorema 2.31. *Suponha que para algum $0 < r_0 < \delta/2$ e todo x a bola $B^*_{r_0}(x)$ está bem definida e contém $B_{r_0/2}(x)$. Seja μ uma probabilidade f-invariante, ergódica e Zooming. Seja $\mathfrak{z}$, como na Definição 2.23, $A_{+,\mathfrak{z}}$ um conjunto compacto tal que $\omega_{+,f,\mathfrak{z}}(x) = A_{+,\mathfrak{z}}$ μ-quase sempre em $\mathbb{X}$. (O compacto dado pelo lema A.8 aplicado em $\mathcal{U} = \mathfrak{z}$). Seja Δ um conjunto aberto encaixado $(\alpha, \delta, 1)$-Zooming com diâmetro menor que $r_0/2$, e tal que $\Delta \cap A_{\mathfrak{z}} \neq \emptyset$.*

Se R é o primeiro tempo de $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}$-retorno a Δ e $(F, \mathcal{P})$ é a aplicação de Markov associada a R, obtida no corolário 2.29, então $(F, \mathcal{P})$ é uma aplicação induzida de Markov compatível com μ e, além disso, existe uma medida finita F-invariante, $\nu << \mu$ (de fato $\nu(Y) \leq \mu(Y)$, para todo conjunto de Borel $Y \subset \Delta$) tal que $\int R d\nu < \infty$ e

$$\mu = \frac{1}{\gamma}\sum_{j=0}^{\infty} f_*^j(\nu\big|_{\{R>j\}})$$

onde $\gamma = \sum_{j=0}^{\infty} f_*^j(\nu\big|_{\{R>j\}})(\mathbb{X})$

Demonstração. Seja $A_{\mathfrak{z}}$ o conjunto compacto dado pelo lema A.8, tal que $\omega_{f,\mathfrak{z}}(x) = A_{\mathfrak{z}}$ μ-quase sempre. Note que $A_{\mathfrak{z}} \cap \Delta \neq \emptyset$, pois $A_{+,\mathfrak{z}} \subset \mathfrak{z}$ e $A_{+,\mathfrak{z}} \cap \Delta \neq \emptyset$. Daí, pelo lema 2.30 temos que $(F, \mathcal{P})$ é uma aplicação induzida de Markov completa definida em Δ e compatível com μ.

Defina agora $\mathcal{S} = \left\{x \in \Delta; F^j(x) \in \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P\right\}$. Pela f-invariância de μ temos que $\Delta = \mathcal{S}$ (mod μ). Definindo $G_j = \{x \in \limsup_{n\to\infty} \mathcal{Z}_n(\alpha, \delta, l); j$ é tempo $\mathfrak{z}$ para $x\}$ Pela f-ergodicidade de μ e como $\Delta \cap A_{+,\mathfrak{z}} \neq \emptyset$, temos que existe $\Theta > 0$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{1 \leq j \leq n; x \in G_j \text{ e } f^j(x) \in \Delta\} \geq \Theta$$

Para μ-quase todo $x \in \Delta$. Tomando $B = \Delta$ e $g = R$, e aplicando a primeira parte do lema 2.11 obtemos que para μ quase todo ponto em Δ

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\left\{j \geq 0; \sum_{k=0}^{j} g(F^k(x)) \leq n\right\} \geq \Theta$$

Além disso, como

$$\left\{j \geq 0; \sum_{k=0}^{j} g(F^k(x)) \leq n\right\} = \{0 \leq j \leq n; f^j \in \mathcal{O}^+(x)\}$$

obtemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{0 \leq j \leq n; f^j \in \mathcal{O}^+(x)\} \geq \Theta$$

Aplicando o corolário 2.10 em $(F, \mathcal{P})$ e μ, existe uma medida F-invariante e não trivial tal que $\nu(Y) \leq \mu(Y)$ para todo conjunto de Borel $Y \subset \Delta$ (em particular $\nu << \mu$). Temos ainda que $\int R d\nu < \infty$, portanto $\eta = \sum_{j=0}^{\infty} f_*^j \big(\nu|_{\{R>j\}}\big)$ é uma medida finita e f-invariante. Note que se existe um conjunto de Borel $Y \subset \mathbb{X}$ tal que $\eta(Y) > 0$, então existe $j \geq 0$ tal que $\nu(f^{-j}(Y)) > 0$, e como $\nu << \mu$, então $\mu(Y) = \mu(f^{-j}(Y)) > 0$. E portanto $\eta << \mu$. Como μ é f-ergódica:

$$\mu = \frac{1}{\eta(X)} \nu = \frac{1}{\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} f_*^j \big(\nu|_{\{R>j\}}\big).$$

□

Capítulo 3

Medidas Zooming em espaços fortemente transitivos

Ao longo deste capítulo $(\mathbb{X}, \mathrm{dist})$ será um espaço métrico de Baire separável, e para todo $x \in \mathbb{X}$ existe $\gamma_x > 0$ tal que

$$\overline{B_{\gamma_x}(x)} \text{ é compacto e } B_\epsilon(x) \text{ é conexo } \forall 0 < \epsilon \leq \gamma_x. \tag{3.1}$$

A hipótese dada por 3.1 é será tomada para a construção de bolas *Zooming* encaixada (Definição 2.20), que por sua vez é utilizada para a construção de Aplicações de primeiro retorno *Zooming* (Definições 2.5 e 2.6). f será um Homeomorfismos local bi-Lipschitz (seção 1.9), $\mathcal{M}(\mathbb{X})$ será o conjunto de todas as medidas σ-finitas definidas no conjunto de Borel de $\mathbb{X}$, $\mathcal{M}^1(\mathbb{X})$ será o conjunto de todas as probabilidades de $\mathbb{X}$ definidas no conjunto de Borel, o conjunto de todas as probabilidades f-invariantes de Borel será denotado por $\mathcal{M}^1(f)$, e o subconjunto de $\mathcal{M}^1(f)$ contendo todos os elementos ergódicos será denotado por $\mathcal{M}^1_{\mathrm{erg}}(f)$.

Notação 1. *Seja* $2^{\mathbb{X}}$ *o conjunto formado por todos os subconjuntos de* $\mathbb{X}$. *Defina:*$f^* : 2^{\mathbb{X}} \to 2^{\mathbb{X}}$ *por*

$$f^*(U) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } U \subset \mathcal{C} \\ f(U \setminus \mathcal{C}) & \text{se } U \not\subset \mathcal{C} \end{cases}$$

Definição 3.1 (Conjunto α-limite)**.**

$$\alpha_f(x) = \bigcap_{n \geq 0} \overline{\bigcup_{j \geq 0} f^{-j}(f^{-n}(x))}$$

.

Definição 3.2 (Aplicações transitivas e fortemente transitivas.)**.** *Uma aplicação* f*, com região crítica/singular é dita transitiva, se para um conjunto denso de pontos* $x \in \mathbb{X} \setminus \mathcal{C}$ $\alpha_f(x) = M$*, por sua vez,* f *é fortemente transitiva se para todo* $x \in \mathbb{X} \setminus \mathcal{C}$ $\alpha_f(x) = \mathbb{X}$.

Notação 2. *Ao longo desta seção $(F, B, \mathcal{P})$ denotará uma aplicação de Markov completamente induzida $(F, \mathcal{P})$, conforme a definição 2.3, Com $F : A \subset B \to B$.*

Definição 3.3 (Distribuição de massa)**.** *Seja $\mathcal{P}$ uma coleção enumerável de abertos disjuntos, uma distribuição de massa em $\mathcal{P}$ é uma aplicação $m : \mathcal{P} \to \mathcal{R}$ tal que $\sum_{P \in \mathcal{P}} m(P) = 1$.*

Definição 3.4 (Probabilidade F-invariante de Bernouli)**.** *Seja $(F, B\mathcal{P})$ uma aplicação de Markov induzida completa, a probabilidade F-invariante de Bernouli gerada pela distribuição de massa m é definida por:*

$$\mu(P_1 \cap F^{-1}(P_2) \cap \cdots \cap F^{n-1}(P_n)) = \prod_{k=1}^{n} m(P_k)$$

Para todo $P_1 \cap F^{-1}(P_2) \cap \ldots F^{-1}(P_n) \in \bigvee_{k=0}^{n-1} .F^{-j}(\mathcal{P})$

Definição 3.5. *Para todo $l \in \mathbb{N}$ denote $\mathcal{E}(f, l)$ como o conjunto de todas as probabilidades em $\mathcal{M}^1(f)$ que são (α, δ, l)-Zooming para alguma contração Zooming exponencial e $\delta > 0$. Uma medida Zooming com uma contração zooming exponencial será chamada de Medida expansora. O conjunto de todas as medidas expansoras será denotado por*

$$\mathcal{E}(f) = \bigcup_{l \geq 1} \mathcal{E}(f, l) \tag{3.2}$$

Ao longo de todo o trabalho assumiremos que

$$h(\mathcal{E}(f)) := \sup\{h_\mu(f); \mu \in \mathcal{E}(f)\} < \infty$$

Lema 3.6. *Suponha que f é fortemente transitiva e f^l é transitiva para algum $l \geq 1$, então f^l é fortemente transitiva.*

Demonstração. Para todo $x \in \mathbb{X}$ podemos escrever

$$\mathcal{O}_f(x) = \bigcup_{j=0}^{l-1} \bigcup_{y \in f^{-j}(x)} \mathcal{O}_{f^l}(y)$$

e portanto:

$$\alpha_f(x) = \bigcup_{j=0}^{l-1} \bigcup_{y \in f^{-j}(x)} \alpha_{f^l}(y)$$

como $\alpha(x) = \mathbb{X}$ para todo $x \in \mathbb{X} \setminus \mathcal{C}$, então seja $x \in \mathbb{X} \setminus \mathcal{C}$, existe $0 \leq k < l$ e $y \in f^{-k}(x)$ tal que interior$(\alpha_{f^l}(y)) \neq \emptyset$, como f é homeomorfismo local:

$$\emptyset \neq (f^*)^k(\text{interior}(\alpha_{f^l}(y))) \subset \text{interior}(\alpha_{f^l}(f^k(y))) = \text{interior}(\alpha_{f^l}(x))$$

Além disso , como $\emptyset \neq (f^*)^l(\alpha_{f^l}(x)) \subset \alpha_{f^l}(x)$, temos que $(f^*)^l(\text{interior}(\alpha_{f^l}(x))) \subset \text{interior}(\alpha_{f^l}(x))$. Pela transitividade de f^l temos que $\alpha_{f^l}(x) = \overline{\text{interior}(\alpha_{f^l}(x))} = \mathbb{X}$, como isto é válido para todo $x \in \mathbb{X} \setminus \mathcal{C}$ temos que f^l é fortemente transitiva. $\square$

Observação 7. *No lema 3.6 f não precisa ser uma aplicação bi-Lipschitz, para a validade das contas é necessário apenas que f seja um Homeomorfismo local.*

3.1 Conjuntos Zooming e aplicações induzidas

Nessa seção apresentaremos algumas propriedades de conjuntos *Zooming*, e do conjunto $\limsup Z_n(\alpha, \delta, 1)$, estes resultados foram originalmente obtidos por [21].

Lema 3.7. *Fixado $l \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ e uma contração Zooming Lipscchitz $\alpha = \{\alpha_n\}_n$, onde $\alpha_n(r) = a_n r$, $\forall r \in [0, \infty)$, com $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n} < \infty$. Se $p \in \limsup Z_n(\alpha, \delta, 1)$, então existe $q \in \{p, f(p), \ldots, f^{l-1}(p)\}$ tal que $\mathcal{O}^-_{f^l}(q) \subset \limsup Z_n(\tilde{\alpha}, \delta, l)$, onde $\tilde{\alpha} = \{\tilde{\alpha}_n\}_n$, com $\tilde{\alpha}_n = \sqrt{a_{nl}} r$ $\forall r \in [0, \infty)$. Além disso, se $p \in \limsup Z_n(\tilde{\alpha}, \delta, l)$ então $\mathcal{O}^-_{f^l}(q) \subset \limsup Z_n(\tilde{\alpha}, \delta, l)$.*

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{X}$ e $k \in \mathbb{N}$, defina $\mathcal{Z}(x, k) = \{n \in \mathbb{N}; x \in Z_n(\alpha, \delta, k)\}$. assim seja $p \in \limsup Z_n(\alpha, \delta, 1)$, temos que $\#\mathcal{Z}(p, 1) = \infty$, daí dado $n \in \mathcal{Z}(p, 1)$ com $n > l$, então existem $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tais que $n = al + b$ com $0 \leq b < l$, temos que, como $p \in Z_n(\alpha, \delta, 1) = Z_{al+b}(\alpha, \delta, 1)$ pelo lema 2.17 (a) $f^b(p) \in Z_{al}(\alpha, \delta, 1)$, como $\mathcal{Z}_a(\{\alpha_{nl}\}, \delta, l) \supset Z_{al}(\alpha, \delta, 1)$, daí, pela propriedade 2, $\#\mathcal{Z}(p, 1) = \infty$, e pelo Princípio da casa dos pombos existe $q \in \{p, f(p), \ldots, f^{l-1}(p)\}$ tal que $\#\mathcal{Z}(q, l) = \infty$.

Definindo $g := f^l$, dado $y \in \mathcal{O}^-_g(q)$. Seja k tal que $g^k(y) = q$. Como f é bi- Lipschitz (e portanto seus iterados são bi- Lipschitz), temos que seja $j < lk$ para $y \in \mathbb{X} \setminus \mathcal{C}$ existem $K_j = K_j(y) \geq 1$ e $\gamma_{y,j}$ tais que

$$K_j^{-1} \operatorname{dist}(x, w) \leq \operatorname{dist}(f^j(x), f^j(w)) \leq K_j \operatorname{dist}(x, w) \quad \forall x, w \in B_{\gamma_{y,j}}(y)$$

existem ainda $K_{kl} = K_{kl}(y) \geq 1$ e $\gamma_{y,kl}$ tais que

$$K_{kl}^{-1} \operatorname{dist}(x, w) \leq \operatorname{dist}(g^k(x), g^k(w)) \leq K_{kl} \operatorname{dist}(x, w) \quad \forall x, w \in B_{\gamma_{y,kl}}(y)$$

selecionando $K = \max\{K_j, K_{kl}\}$ e $\gamma_y = \min\{\gamma_{y,kl}, \gamma_{y,j}\}$ temos que, para todo $x, w \in B_{\gamma_{y,kl}}(y)$ temos que:

$$\operatorname{dist}(x, w) \leq K \operatorname{dist}(g^k(x), g^k(w))$$

e

$$K^{-2} \operatorname{dist}(x, w) \leq K^{-1} \operatorname{dist}(x, w) \leq \operatorname{dist}(f^j(x), f^j(w)) \leq K \operatorname{dist}(x, w)$$

donde para todo $x, w \in B_{\gamma_{y,kl}}(y)$:

$$K^{-2} \operatorname{dist}(x, w) \leq \operatorname{dist}(f^j(x), f^j(w)) \leq K^2 \operatorname{dist}(g^k(x), g^k(w)) \tag{3.3}$$

Assim, $B_{\gamma_y/K^2}(q) \subset g^k(B_{\gamma_y}(y))$, tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K^2 \sqrt{a_{nl}} < \gamma_y$, então para todo $n \geq n_0$ tal que $n \in \mathcal{Z}(q, j)$ temos que $\overline{V_n(\alpha, \delta, l)}(q) \subset \overline{B_{\gamma_y/K^2}(q)} \subset \overline{g^k(B_{\gamma_y}(y))}$.

Definindo $V'_{n+l}(y) := \left(g^k\big|_{B_{\gamma_y}(y)}\right)^{-1}(V(\alpha, \delta, l)(q))$, usando as propriedades de contrações Zooming, a escolha $K^2 \sqrt{a_{nl}} < \gamma_y$, para todo $n > n_0$ e a Equação 3.3 obtemos que fixado $n_0 < n \in \mathcal{Z}(q, j)$, para todo $x, w \in V'_{n+l}(y)$ e $0 \leq j < n + k$ obtemos:

$$\operatorname{dist}(g^j(x), g^j(w)) \leq \sqrt{a_{(n+k-j)l}} \operatorname{dist}(g^{n+k}(x), g^{n+k}(w))$$

Em particular $V'_{n+l}(y) = V(\tilde{\alpha}, \delta, l)(y)$, e portanto:

$$\forall n_0 < n \in \mathcal{Z}(q,l) \implies n+k \in \tilde{\mathcal{Z}}(y,l) := \{j \in \mathbb{N}; y \in \mathcal{Z}(\tilde{\alpha}, \delta, l)\}$$

Portanto para todo $y \in \mathcal{O}^-_g(q) = \mathcal{O}^-_{f^l}(q)$ $\#\tilde{\mathcal{Z}}(y,l) = \infty$, assim

$$\mathcal{O}^-_{f^l}(q) \subset \limsup_{n\to\infty} Z_n(\tilde{\alpha}, \delta, l),$$

o que prova a primeira parte do lema.

A segunda parte do lema segue diretamente do argumento feito a primeira parte. Pois se $p \in \limsup_{n\to\infty} \mathcal{Z}_n(\alpha, \delta, l)$ então fazendo $p = q$ a prova acima conclui que $\mathcal{O}^-_{f^l}(p) \subset \limsup_{n\to\infty} Z_n(\tilde{\alpha}, \delta, l)$. □

Diretamente dos lemas 3.6 e 3.7 obtemos o seguinte corolário:

Corolário 3.8. *Seja $V \subset \mathbb{X}$ é um aberto, positivamente invariante e fracamente topologicamente mixing tal que para todo $x \in V$, $V \subset \alpha_f(x)$. Seja $\delta > 0$, e considere a contração Zooming Lipschitz $\alpha = \{\alpha_n\}_n$, com $\alpha_n(r) = a_n(r)$ para todo $r \in [0,\infty)$, com $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n} < \infty$. Então, se $\limsup_{n\to\infty} Z_n(\alpha, \delta, l) \neq \emptyset$ teremos que para todo $l \in \mathbb{N}$, $U \subset \overline{\limsup_{n\to\infty} Z_n(\tilde{\alpha}, \delta, l)}$, Onde $\tilde{\alpha} = \{\tilde{\alpha}_n\}_n$, com $\tilde{\alpha}_n(r) = \sqrt{a_{nl}}(r)$ para todo $r \in [0,\infty)$.*

3.2 Probabilidades induzidas gordas.

Definição 3.9. *Uma probabilidade $\mu \in \mathcal{M}^1_{erg}(f)$ é (α, δ, l)-Zooming induzida gorda se existe uma aplicação de retorno (α, δ, l)-zooming $(F, B, \mathcal{P})$ e um F-levantamento ν de μ tal que supp$\nu = \overline{B}$.*

Podemos entender as probabilidades induzidas gordas como aquelas que são levantadas para uma probabilidade completamente suportada em uma aplicação de retorno *Zooming* em um disco.

Dado $l \in \mathbb{N}$ defina $\mathcal{E}^*(f,l)$ como o conjunto de todas as probabilidades (α, δ, l)-*Zooming* induzidas gordas associadas a alguma contração *Zooming* exponencial. Além disso denote o conjunto de todas as probabilidades expansoras induzidas gordas por

$$\mathcal{E}^*(f) = \bigcup_{l\geq 1} \mathcal{E}^*(f,l) \tag{3.4}$$

3.3 Levantabilidade das medidas Zooming

Nessa seção provaremos que assumindo algumas propriedades topológicas conseguimos obter que toda medida *Zooming*, com contração *Zooming* Lipschitz é levantável para alguma aplicação de retorno *Zooming* orbita coerente. Os resultados desta seção foram originalmente obtidos por [21]

Teorema 3.10. *Seja $\mu \in \mathcal{M}^1_{erg}(f)$ uma medida (α, δ, l)-Zooming para algum l natural e uma contração Zooming Lipschitz $\alpha = \{\alpha_n\}_n$, com $\alpha_n(r) = a_n r$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n} < \infty$. Se f^l é fortemente transitiva, definindo $\tilde{\alpha} = \{\tilde{\alpha}_n\}_n$, com $\tilde{\alpha}_n(r) = \sqrt{a_{nl}}r$, então obtemos que, para todo $0 < \epsilon < \delta_2$ suficientemente pequeno existe uma aplicação de retorno $(\tilde{\alpha}, \delta, l)$-Zooming $(F, B, \mathcal{P})$ tal que*

1. *F é orbita coerente;*
2. *$F : A \to B$, onde $A = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P$ e B é um aberto conexo, com $B_{\epsilon/2}(p) \subset B \subset B_\epsilon(p)$, para algum $p \in B$;*
3. *seja R como na Definição 2.5, então para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\#\{P \in \mathcal{P}; R(P) = n\} < \infty$;*
4. *A é um conjunto aberto e denso de B.*
5. *μ possui um único F-levantamento ν*
6. *ν é F-ergódica, $\nu << \mu\big|_B$, e a derivada de Radon-Nikodym $\frac{d\nu}{d\mu}$ é limitada.*

Demonstração. Definindo $g := f^l$. Pela f-ergodicidade e f-invariância de μ, temos que existe $1 < k \le l$, tal que $l/k \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{X}$ pode ser decomposta em k componentes μ-ergódicas com respeito a g, além disso se $\{U_1, \dots U_k\}$ são esses componentes, então $U_i \cap U_j = \emptyset$ se $i \neq j$, $\mu(U_j) > 0$, $\forall 1 \le j \le k$, e $\mathbb{X} = \bigcup_{j=1}^k U_j \pmod{\mu}$ (Vide teorema 3.13 de [18]). Seja U uma destas componentes μ ergodicas com respeito a g, defina $\mu' = \frac{1}{\mu(U)}\mu\big|_U$. Assim μ' é uma probabilidade $(\alpha, \delta, 1)$-*Zooming* para g. Dado $x \in \mathbb{X}$ e $V \subset \mathbb{X}$, defina:

$$\tau_{x,\alpha,\delta}(V) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{1 \le j \le n; x \in \mathcal{Z}_j(\alpha, \delta, l) \text{ e } g^j(x) \in V\} \tag{3.5}$$

E

$$\omega_{\alpha,\delta,l}(x) := \{y \in \mathbb{X}; \tau_{x,\alpha,\delta}(B_\epsilon(y)) \forall \epsilon > 0\} \tag{3.6}$$

Note que o conjunto $\mathfrak{z}_l = (\mathfrak{z}_l(x))_{x \in \limsup Z_n(\alpha,\delta,l)}$, onde $\mathfrak{z}_l(x) = \{f^m(x); m \in \mathbb{N} \text{ e } x \in Z_m(\alpha, \delta, l)\}$ possui frequência positiva μ'-quase todo $x \in \mathbb{X}$, pois μ' é medida *Zooming*. E portanto, pelo lema A.8 existe um compacto $A_+ \subset \operatorname{supp}\mu'$ tal que $\omega_{\alpha,\delta,l}(x) = A_+$ para μ'-quase todo $x \in \mathbb{X}$, escolha um ponto $p \in A_+$

Como g é uma aplicação bi-Lipschitz temos que para todo $x \in \mathbb{X}$ vale que $\#g^{-1}(x) < \infty$, portanto, g é inversamente separável (vide definição 2.21). Daí, pelo lema 2.22 para todo $0 < \epsilon < \delta/2$ suficientemente pequeno a bola $(\tilde{\alpha}, \delta, l)$-*Zooming* encaixada $B^*_\epsilon(p)$ (vide Definição 2.20) é um aberto, conexo bem definido contendo $B_{\epsilon/2}(p)$. Por construção para μ'-quase todo $x \in \mathbb{X}$ temos que $p \in \omega_{\alpha,\delta,l}(x) \subset \omega_g(x)$. Como $\mu'(B_{\epsilon/2}(p)) > 0$ (pois $p \in A_+ \subset \operatorname{supp}\mu'$) podemos escolher $q \in B_{\epsilon/2}(p)$ tal que $p \in \omega_{\alpha,\delta,l}(q)$.

Como f^l é fortemente transitiva temos que $U \subset \overline{\mathcal{O}^-(q)}$, além disso o lema 3.7 Garante que $\mathcal{O}^-(q) \subset \limsup_{n\to\infty} Z_n(\tilde{\alpha},\delta,l)$, como

$$Z_n(\alpha,\delta,l) \subset Z_n(\tilde{\alpha},\delta,l) \forall n \in \mathbb{N}$$

$B_{\epsilon/2}(p) \subset \overline{\mathcal{O}^-(q)}$ e $p \in \omega_{\tilde{\alpha},\delta,l}(y)$ para todo $y \in \mathcal{O}^-(q)$, então o conjunto

$$\Lambda := \{x \in B_{\epsilon/2}(p); p \in \omega_{\tilde{\alpha},\delta,l}(x)\}$$

é denso em $B_{\epsilon/2}(p)$, como $\omega_{\tilde{\alpha},\delta,l}(x) = A_+$ μ'-quase todo ponto, temos que $\mu'(\Lambda) = \mu'(B_{\epsilon/2}) > 0$.

Defina: $B := B^*_\epsilon(r)$

$$A :=$$

$$\big\{x \in B; x \in V_n(\tilde{\alpha},\delta,l)(y),\ \text{Para algum } n \in \mathbb{N} \text{ e } y \in \mathcal{Z}_n(\tilde{\alpha},\delta,l) \text{ com } g^n(V_n(\tilde{\alpha},\delta,l)(y)) \supset B \ni f^n(x)\big\}$$

e $\mathcal{P}$ como a coleção dos componentes conexos de A. Então pelo teorema 2.31 a aplicação de Markov $F : A \to B$ associada ao primeiro tempo de retorno $(\tilde{\alpha},\delta,l)$-*Zooming* para B com respeito a g é uma aplicação de retorno $(\tilde{\alpha},\delta,l)$-Zooming. Provando o item 2.

Note que $A \supset \{x \in B; \omega_{\tilde{\alpha},\delta,l}(x) \cap B \neq \emptyset\}$, daí $\overline{A} = \overline{B}$ provando 4. Além disso o teorema 2.31 garante a existência de uma medida F-invariante $\nu_0 \leq \mu' << \mu$, com $\nu_0(\mathbb{X}) > 0$ e $\int R d\nu < \infty$, portanto μ é levantável para uma probabilidade $\nu := \frac{1}{\nu_0(\mathbb{X})}\nu_0 \leq \frac{1}{\nu_0(\mathbb{X})}\mu\big|_B$. provando o item 6.

Pelo Lema 2.27 temos que F é Orbita coerente provando o item 1, como para todo $x \in \mathbb{X}$ temos $f^{-1}(x) \leq \infty$ e f é função mensurável, então por um resultado em [22] f é bimensurável, portanto toda imagem direta de um conjunto mensurável é um conjunto mensurável, do teorema 2.9 ν é F-ergódica, e é o único F-levantamento de μ, provado o item 5. Por fim, o item 3 segue do fato de $\#g^{-1}(x) < \infty$ para todo $x \in \mathbb{X}$. □

Observação 8. *Na aplicação de Markov induzida obtida no teorema 3.10* $\#\mathcal{P} \geq 2$. *Do contrário* $\mathcal{P} = \{P\}$ *e* $A = P$. *Assim, pelo Item 4 do teorema 3.10* P *seria um aberto denso de* B. *Donde* $diam(P) = diam(B)$. *Mas* $diam(P) = \sqrt{a_n} diam(B)$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$. *Mas* $a_k < 1\ \forall k \in \mathbb{N}$, *donde,* $diam(P) < diam(B)$. *Assim, obtemos um absurdo.*

Corolário 3.11. *Se* $\mathcal{E}(f) \neq \emptyset$ *então* $Per(f) = \infty$.

Demonstração. Imediato do fato de toda contração *Zooming* exponencial ser Lipschitz, Do teorema 3.10 e das Observações 8 e 4. □

Lema 3.12. *Suponha que* f *é transitiva, e* $(F, B, \mathcal{P})$ *é uma aplicação de primeiro retorno* $(\alpha,\delta,1)$-*Zooming tal que* $B \subset B_\epsilon(p)$, *para algum* $p \in \mathbb{X}$ *e* $0 < \epsilon < \delta/2$. *Se* $\nu \in \mathcal{M}^1_{erg}(F)$

com $\int R d\nu < \infty$*, seja* $\mu := \frac{1}{\int R d\nu} \sum_{n\geq 1} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j\Big(\nu\big|_{\{R=n\}}\Big)$*, então* $\mu \in \mathcal{M}^1_{erg}(f)$ *e* μ *é probabilidade* $(\alpha, \delta/2, 1)$*-Zooming. Além disso, se interior(supp(*ν*))* $\neq \emptyset$*, então supp(*μ*)* $=$ $\mathbb{X}$*.*

Demonstração. Como ν é probabilidade F-invariante e ergódica, tal que $\int R d\mu < \infty$ temos que $\mu = \frac{1}{\int R d\nu} \sum_{n\geq 1} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j\Big(\nu\big|_{\{R=n\}}\Big)$ é probabilidade invariante f-ergódica (vide seção 1.10). Pela transitividade de f está claro que se interior(supp(ν)) $\neq \emptyset$, então supp(μ) $= \mathbb{X}$. Falta provar que μ é medida *Zooming*.

Dado $x \in \bigcap_{j\geq 0} F^{-j}(B)$ e $n \geq 1$, então existem $x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{X}$ tais que, para todo $0 \leq j \leq n-1$:

$$x_j \in \mathcal{Z}_{R\circ F^j(x)}(\alpha, \delta, 1) \quad \text{e} \quad F^j(x) \in V_{R\circ F^j(x)}(\alpha, \delta, 1)$$

Portanto, como $F^n(x) \in B \subset B_\epsilon(p) \subset B_{\delta/2}(p)$, se $r_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} R \circ F^k(x)$, definindo

$$\begin{aligned} V'_{r_n(x)}(x) &:= \left(f^{R(x)}\big|_{V_{R(x)}(\alpha,\delta,1)(x_0)}\right)^{-1} \circ \cdots \circ \left(f^{R(F^{n-1}(x))}\big|_{V_{R(F^{n-1}(x))}(\alpha,\delta,1)(x_{n-1})}\right)^{-1} \left(B_{\delta/2}(F^n(x))\right) \\ &= \left(f^{R(x)}\big|_{V_{R(x)}(\alpha,\delta,1)(x_0)}\right)^{-1} \circ \cdots \circ \left(f^{R(F^{n-1}(x))}\big|_{V_{R(F^{n-1}(x))}(\alpha,\delta,1)(x_{n-1})}\right)^{-1} \left(B_{\delta/2}(f^{r_n(x)}(x))\right) \end{aligned}$$

temos que $V'_{r_n(x)}(x) = V_{r_n(x)}(\alpha, \delta/2, 1)(x)$. Ou seja $V'_{r_n(x)}(x)$ é a pré-bola $(\alpha, \delta/2, 1)$-*Zooming* de ordem $r_n(x)$ centrada em x. Definindo $J(x) = \{r_n(x); n \in \mathbb{N}\}$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{1 \leq j \leq n; j \in J(x)\} = \frac{\nu(B)}{\int R d\nu} = \frac{1}{\int R d\nu} > 0$$

Observando que $x \in \mathcal{Z}_n(\alpha, \delta/2, 1)$ sempre que $n \in J(x)$, então ν-quase todo $x \in B$ possui frequência positiva de tempos $(\alpha, \delta/2, 1)$-*Zooming*. Como $\nu << \mu$, temos que $\mu(B) > 0$, e da ergodicidade de μ que μ-quase todo ponto possui frequência positiva de tempos $\alpha, \delta/2, 1)$-*Zooming*, e portanto μ é uma medida $(\alpha, \delta/2, 1)$-*Zooming*. □

3.4 Um prelúdio para o formalismo termodinâmico

A Proposição 3.14, originalmente provada por [21], garante que a entropia e as médias espaciais de qualquer medida expansora pode ser aproximada pela entropia e medidas espaciais de medidas *Zooming* induzidas gordas. No entanto, antes precisamos provar o seguinte lema:

Lema 3.13. *Seja* $F : A \to B$ *uma aplicação induzida de tempo induzido* R*. Suponha que uma probabilidade* μ f*-ergódica e* f*-invariante possui um* F*-levantamento* ν *que é* F*-ergódico. Se* ψ *é o* F*-levantamento de uma aplicação mensurável e integrável* $\varphi : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$*, então*

$$\int \varphi d\mu = \frac{\int \psi d\nu}{\int R d\nu}$$

Demonstração. Defina $A_0 := \cap_{n\geq 0} F^{-n}(\mathbb{X})$, note que $\nu(A_0) = 1$. Como a probabilidade ν é absolutamente continua com relação a μ, do teorema de Birkhoff existe $U \subset A_0$, com $\nu(U) = 1$ tal que $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f^j(x) = \int \varphi d\mu$, e $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ F^j(x) = \int \psi d\nu$, para todo $x \in U$. Assim, fixando $x \in U$, defina $r_n(x) := \sum_{j=0}^{n-1} R \circ F^j(x)$, de Birkhoff, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} R \circ F^j(x) = \int R d\nu$$

Como

$$\sum_{j=0}^{r_n(x)-1} \varphi \circ f^j(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{R(F^j(x))-1} \varphi \circ f^k(F^j(x)) = \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ F^j(x)$$

Temos que, para μ-quase todo $x \in \mathbb{X}$,

$$\int \varphi d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r_n(x)} \sum_{j=0}^{r_n(x)-1} \varphi \circ f^j(x) = \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ F^j}{\frac{1}{n} r_n(x)} = \frac{\int \psi d\nu}{\int R d\nu}$$

□

Seja $\mathcal{L} = \{\psi_1, \psi_2, \dots\} \subset C(\mathbb{X}, [0,1])$ um conjunto enumerável de funções Lipschitz, tais que

$$d(\nu, \eta) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \int \psi_n d\nu - \int \psi_n d\eta \right| \tag{3.7}$$

Defina uma métrica em $\mathcal{M}^1(\mathbb{X})$ compatível com a topologia fraca* (Vide Capítulo 2 de [16]). Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $C_n > 0$ tal que $|\psi_n(x) - \psi_n(y)| \leq C_n \mathrm{dist}(x, y)$.

Proposição 3.14. *Suponha que $l \in \mathbb{N}$ é tal que f^l é fortemente transitiva e seja $\varphi : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ um potencial Hölder continuo. Se $\mu \in \mathcal{E}(f, l) \cap \mathcal{M}^1_{erg}(\mathbb{X})$, então dado $\epsilon > 0$ existe $\overline{\mu} \in \mathcal{E}^*(f, l)$, tal que*

1. *$|\int \varphi d\overline{\mu}| < \epsilon$ se $\int \varphi d\mu = 0$;*
2. *$\left|\frac{\int \varphi d\overline{\mu}}{\int \varphi d\mu} - 1\right| < \epsilon$ se$\int \varphi d\mu \neq 0$;*
3. *$h_{\overline{\mu}}(f) > (1-\epsilon) h_\mu(f)$;*
4. *$d(\mu, \overline{\mu}) < 2\epsilon$*

Demonstração. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} < \epsilon$. Suponha que μ é uma probabilidade (α, δ, l)-*Zooming* para algum $\delta > 0$ e contração *Zooming* exponencial $\alpha = \{\alpha_n\}_n$ com $\alpha_n(r) = e^{-\lambda n} r$ para todo $r \in [0, +\infty)$, com $\lambda > 0$. Seja $C > 0$ e $a \in (0, 1]$, tais que $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C \mathrm{dist}(x, y)^a$, para todo $x, y \in \mathbb{X}$. Defina:

$$M = \frac{1}{1 + \left|\int \varphi d\mu\right|} \quad e \quad C_0 = \max\{C, C_1, \dots, C_{n_0}\} \tag{3.8}$$

Escolha $0 < \tau < \delta/2$, tal que

$$\frac{C_0}{1-e^{\lambda a/2}}\tau^a < \frac{\epsilon M}{8} \tag{3.9}$$

Seja $(F, B, \mathcal{P})$ a aplicação de retorno $(\tilde{\alpha}, \delta, l)$-*Zooming*, dado pelo teorema 3.10, com $diam(B) < \tau$ e ν o F-levantamento de μ. Note que ν está associada a uma contração *Zooming* exponencial.

Seja $A = \bigcup_{P\in\mathcal{P}} P$ e $\overline{\varphi}(x) = \sum_{j=0}^{(R(x)/l)-1} \varphi \circ f^{jl}(x)$. Para todo $P \in \mathcal{P}$ e $x, y \in P$, temos

$$|\overline{\varphi}(x) - \overline{\varphi}(y)| = \Big| \sum_{j=0}^{(R(P)/l)-1} (\varphi \circ f^{jl}(x) - \varphi \circ f^{jl}(y)) \Big| \leq \sum_{j=0}^{(R(P)/l)-1} |\varphi \circ f^{jl}(x) - \varphi \circ f^{jl}(y)| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{(R(P)/l)-1} C\text{dist}(f^{lj}(x), f^{lj}(y))^a \leq C \sum_{j=0}^{(R(P)/l)-1} [\alpha_{(R(P)-j)}(\text{dist}(F(x), F(y)))]^a \leq$$

$$\leq \frac{C}{1-e^{\lambda a/2}}\text{dist}(F(x), (F(y)))^a \leq \frac{C_0}{1-e^{\lambda a/2}}\text{dist}(F(x), (F(y)))^a$$

Para todo $1 \leq n \leq n_0$ defina $\overline{\psi}_n(x) := \sum_{j=0}^{(R(x)/l)-1} \psi_n \circ f^{jl}(x)$, analogamente obtemos

$$|\overline{\psi}_n(x) - \overline{\psi}_n(y)| \leq \frac{C_n}{1-e^{\lambda a/2}}\text{dist}(F(x), (F(y))) \leq \frac{C_0}{1-e^{\lambda a/2}}\text{dist}(F(x), (F(y)))^a$$

Portanto, como $\text{diam}(B) < \tau$, a Equação 3.9 implica que para todo $P \in \mathcal{P}$ e $x, y \in P$:

$$|\overline{\varphi}(x) - \overline{\varphi}(y)| < \frac{\epsilon M}{8} \tag{3.10}$$

e para todo $n \in \mathbb{N}$

$$|\overline{\psi}_n(x) - \overline{\psi}_n(y)| < \frac{\epsilon M}{8} \tag{3.11}$$

Para a aproximação de μ com relação a média de φ e a entropia utilizaremos distribuições de massa (Vide Definição 3.3). Escreva $\{n_1, n_2, \dots\} = \{n \in \mathbb{N}; \{R = n\} \neq \emptyset\}$, com $1 \leq n_1 \leq n_2 \dots$. Defina as distribuições de massa m_0 por

$$m_0(P) = \begin{cases} 0 & \text{se } R(P) \notin \{n_1, n_2, \dots\} \\ \frac{2^{-n_j}}{W\#\{Q\in\mathcal{P}; R(Q)=n_j\}} & \forall R(P) = n_j \end{cases}$$

onde $W = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{-n_j}}{\#\{Q\in\mathcal{P}; R(Q)=n_j\}} \in (0, 1]$. Escolha $0 < \gamma < \gamma_\varphi$, onde

$$\gamma_\varphi = \left(\frac{\epsilon M}{4}\right)\left(\frac{1}{1 + \sum_{P\in\mathcal{P}}[|\overline{\varphi}(x_P)|(\nu(P) + m_0(P))]}\right)\left(\frac{W}{\sum_{j=1}^{\infty} n_j 2^{-n_j}}\right) \tag{3.12}$$

para algum $x_P \in P$. Defina a distribuição de massa m_γ:

$$m_\gamma(P) = (1-\gamma)\nu(P) + \gamma m_0(P), \; \forall P \in \mathcal{P}.$$

Seja $\overline{\nu}_\gamma$ a probabilidade F-invariante, ergódica gerada por m_γ, note que

$$\int R d\overline{\nu}_\gamma = (1-\gamma)\int R d\nu + \gamma W \sum_{j=1}^{\infty} n_j 2^{-n_j} < (1-\gamma)\int R d\nu + 2\gamma < \infty$$

Assim:

$$\left|\int R d\nu - \int R d\overline{\nu}_\gamma\right| = \left|\gamma \int R d\nu - \gamma \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n_j 2^{-n_j}}{W\#\{Q \in \mathcal{P}; R(Q) = n_j\}}\right|$$

$$\leq \gamma\left(\frac{\sum_{j=1}^{\infty} n_j 2^{-n_j}}{W} + \int R d\nu\right) \leq \frac{\epsilon M}{4} + \frac{\epsilon M}{4}\int R d\nu \leq \frac{\epsilon M}{2}\int R d\nu.$$

Como supp$\overline{\nu}_\gamma = \overline{B}$, segue que a probabilidade ergódica f-invariante dada por

$$\overline{\mu} = \frac{1}{\int R d\overline{\nu}} \sum_{j=0}^{\infty} f_*^j(\overline{\nu}|_{\{R>j\}})$$

é uma probabilidade $(\tilde{\alpha}, \delta, l)$-*Zooming* gorda induzida e pelo lema 3.12 $\mu \in \mathcal{E}^*(f, l)$. Pela equação 3.10 temos que:

$$\max\left\{\left|\int \overline{\varphi} d\nu - \sum_{P\in\mathcal{P}} \overline{\varphi}(x_P)\nu(P)\right|, \left|\int \overline{\varphi} d\overline{\nu}_\gamma - \sum_{P\in\mathcal{P}} \overline{\varphi}(x_P)\overline{\nu}_\gamma(P)\right|\right\} < \frac{\epsilon M}{8}$$

Portanto, pela desigualdade triangular

$$\left|\int \overline{\varphi} d\nu - \int \overline{\varphi} d\overline{\nu}_\gamma\right| \leq \left|\int \overline{\varphi} d\nu - \sum_{P\in\mathcal{P}} \overline{\varphi}(x_P)\nu(P)\right| + \left|\sum_{P\in\mathcal{P}} \overline{\varphi}(x_P)\overline{\nu}_\gamma(P) - \sum_{P\in\mathcal{P}} \overline{\varphi}(x_P)\nu(P)\right|$$

$$+\left|\sum_{P\in\mathcal{P}} \overline{\varphi}(x_P)\overline{\nu}_\gamma(P) - \int \overline{\varphi} d\overline{\nu}_\gamma\right| \leq \frac{\epsilon M}{4} + \left|\sum_{P\in\mathcal{P}} \overline{\varphi}(x_P)\overline{\nu}_\gamma(P) - \sum_{P\in\mathcal{P}} \overline{\varphi}(x_P)\nu(P)\right| \leq$$

$$\leq \frac{\epsilon M}{4} + \sum_{P\in\mathcal{P}} |\overline{\varphi}(x_P)||\nu(P) - m_\gamma(P)| = \frac{\epsilon M}{4} + \gamma \sum_{P\in\mathcal{P}} |\overline{\varphi}(x_P)||\nu(P) - m_0(P)| \leq \frac{\epsilon M}{2}$$

Como F é orbita-coerente, do teorema 2.9, temos que ν é F-ergódica, portanto,pelo lema 3.13,

$$\left|\int \overline{\varphi} d\mu - \int \overline{\varphi} d\overline{\mu}_\gamma\right| = \left|\frac{\int \overline{\varphi} d\nu}{\int R d\nu} - \frac{\int \overline{\varphi} d\overline{\nu}_\gamma}{\int R d\overline{\nu}_\gamma}\right| \leq \left|\frac{\int \overline{\varphi} d\nu}{\int R d\nu} - \frac{\int \overline{\varphi} d\nu}{\int R d\overline{\nu}_\gamma}\right| + \left|\frac{\int \overline{\varphi} d\nu}{\int R d\overline{\nu}_\gamma} - \frac{\int \overline{\varphi} d\overline{\nu}_\gamma}{\int R d\overline{\nu}_\gamma}\right| <$$

$$< \left|\frac{\int \overline{\varphi} d\nu}{\int R d\overline{\nu}_\gamma}\right|\left|\frac{\int R d\nu - \int R d\overline{\nu}_\gamma}{\int R d\overline{\nu}_\gamma}\right| + \frac{\epsilon M}{2\int R d\overline{\nu}_\gamma} < \frac{\epsilon M}{2}\left(\left|\int \varphi d\mu\right| + 1\right) = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

provando os itens 1 e 2.

Com a Equação 3.11, definindo γ_{ψ_i}, $i = \{1, \ldots, n_0\}$, similarmente à Equação 3.12 e tomando $0 < \gamma < \min\{\gamma_\varphi, \gamma_{\psi_1}, \ldots, \gamma_{\psi_{n_0}}\}$:

$$\left| \int \overline{\psi}_n d\mu - \int \overline{\psi}_n d\overline{\mu} \right| < \epsilon.$$

Portanto, $d(\mu, \overline{\mu}) < \epsilon \sum_{n=1}^{n_0} 2^{-n} + \epsilon < 2\epsilon$, provando, assim, o item 4.

Como $\mathcal{P}$ é uma partição geradora para F e $\overline{\nu}$ é uma medida de Bernoulli, definindo $H(x) = x \ln x$:

$$h_\nu(F) = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{P \in \mathcal{P}^{(n)}} H(\nu(P)) \leq \sum_{P \in \mathcal{P}} H(\nu(P))$$

E:

$$h_{\overline{\nu}}(F) = \sum_{P \in \mathcal{P}} H(m(P))$$

Pela concavidade da função H:

$$h_{\overline{\nu}}(F) \geq (1-\gamma)\Big(\sum_{P \in \mathcal{P}} H(\nu(P)) \Big) + \gamma \sum_{P \in \mathcal{P}} H(m_0(P)) > (1-\gamma) h_\nu(F).$$

Donde

$$h_{\overline{\mu}}(f) = \frac{h_{\overline{\nu}(F)}}{\int Rd\overline{\nu}} > (1-\gamma) \frac{\int Rd\nu}{\int Rd\overline{\nu}} \frac{h_\nu(F)}{\int Rd\nu} > (1-\gamma)\big(1 - \frac{\epsilon M}{2}\big) \frac{h_\nu(F)}{\int Rd\nu}$$

$$> \big(1 - \frac{\epsilon}{2}\big)^2 h_\mu(f) > (1-\epsilon) h_\mu(f),$$

provando o item 3. □

A proposição 3.14 possui o seguinte corolário:

Corolário 3.15. *Se f é fortemente transitiva, então para todo potencial Hölder φ:*

$$P_{\mathcal{E}(f)}(\varphi) = \sup \left\{ h_\mu(f) + \int \varphi d\mu; \mu \in \mathcal{E}^*(f) \right\}$$

Demonstração. Se $\mathcal{E}(f) = \emptyset$, nada temos a provar; se $\mathcal{E}(f) \neq \emptyset$, então, pelo Corolário 3.11 teremos que $\mathrm{Per}(f) \neq \emptyset$. Seja $l = \min\{j \geq 1; \mathrm{Fix}(f^j) \neq \emptyset\}$ V aberto, tal que $(f^*)(V) \subset V$ (que existe pela proposição A.13) e $g := f^l\big|_V$. Pela proposição A.13, temos que para todo $j \geq 1$ g^j é fortemente transitiva. Observe que pelos Teoremas de Jacobs e da decomposição Ergódica teremos que:

$$P_{\mathcal{E}(g)}(\varphi) = \sup \left\{ h_\mu(g) + \int \varphi_l d\mu; \mu \in \mathcal{E}(g) \cap \mathcal{M}^1_{\mathrm{erg}}(f) \right\},$$

onde $\varphi_l = \sum_{j=0}^{l} \varphi \circ f^j$, assim, pela Proposição 3.14 poderemos pegar uma sequência de probabilidades expansoras e ergódicas $\{\mu_n\}_n$ tais que $h_{\mu_n}(f) + \int \varphi_l \to P_{\mathcal{E}(g)}(\varphi)$. No entanto, como g^n é fortemente trasitiva para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\mu_n \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{erg}}(f)$ podemos pegar uma sequência de probabilidades $\{\bar{\mu}_n\}_n \in \mathcal{E}^*(g)$ tais que $|h_{\mu_n}(g) - h_{\bar{\mu}_n}(g)| < 1/n$ e $|\int \varphi_l d\mu_n - \int \varphi_l d\bar{\mu}_n| < 1/n$, portanto

$$P_{\mathcal{E}(g)}(\varphi) = \sup\left\{h_\mu(g) + \int \varphi_l.d\mu; \mu \in \mathcal{E}^*(g)\right\}, \tag{3.13}$$

pela proposição A.13 $V \cup f^*(V) \cup \cdots \cup (f^*)^{l-1}(V) \supset \mathbb{X} \setminus \mathcal{C}$, e como se $\mu \in \mathcal{E}(f)$ então $\mu(\mathcal{C}) = 0$, temos que:

$$\mathcal{E}(g) \ni \mu \mapsto \frac{1}{l}\sum_{k=0}^{l-1} \mu \circ f^{-k} \in \mathcal{E}(f) \tag{3.14}$$

é uma sobrejeção, pois se $\mu \in \mathcal{E}(f)$, então $\mu \in \mathcal{E}(g)$. Além disso,

$$\mu = \frac{1}{l}\sum_{k=0}^{l-1} \mu \circ f^{-k}.$$

O resultado vem do fato de se

$$\nu = \frac{1}{l}\sum_{k=0}^{l-1} \mu \circ f^{-k}.$$

então

$$h_\nu(f) + \int \varphi d\nu = \frac{1}{l}\Big(h_\mu(g) + \int \varphi_l d\mu\Big),$$

□

3.5 Aplicações Zooming induzidas especiais

Essa seção tem como objetivo apresentar uma aplicação induzida especial, que pode ser utilizada para comparar todas as medidas *Zooming* induzidas gordas.

Definição 3.16. *A derivada conforme de f em $p \in \mathbb{X} \setminus \mathcal{C}$ é definida como:*

$$\mathbb{D}f(p) = \limsup_{x,y \to p} \frac{dist(f(x), f(y))}{dist(x, y)}$$

Como estamos trabalhando com aplicações bi-Lipschitz, temos que, para todo $p \in \mathbb{X} \setminus \mathcal{C}$, $0 < \mathbb{D}f(p) < \infty$.

Teorema 3.17. *Seja $\mu_0 \in \mathcal{E}(f, 1)$ uma medida Ergódica expansora e $\lambda, \delta > 0$, tais que μ_0 é uma medida $(\varrho, \delta, 1)$-zooming, e $\varrho = \{\varrho_n\}_n$, com $\varrho_n(r) = e^{-2\lambda n} r$. Seja $\beta = \{\beta_n\}_n$ uma contração zooming Lipschitz dada por $\beta_n = e^{-\lambda\sqrt{n}} r$.*

Se para todo $n \geq 1$ f^n é fortemente transitiva, então toda probabilidade $\mu \in \mathcal{E}^*(f, 1)$ é $(\beta, \delta/2, 1)$-zooming. Além disso, existe $\epsilon_0 > 0$ e $p \in \mathbb{X}$ tal que, $\forall\, 0 < \epsilon < \epsilon_0$ existe uma aplicação de retorno $(\beta, \delta/2, 1)$-zooming $(F, B, \mathcal{P})$, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. *F é Orbita-coerente;*
2. *$F : A \to B$, onde $A = \bigcup_{P\in\mathcal{P}} P$, e B é aberto conexo com $B_{\epsilon(p)/2} \subset B \subset B_\epsilon$;*
3. *$\#\{P \in \mathcal{P}; R(P) = n\} < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. E R é como na Definição 2.5;*
4. *A é um subconjunto aberto e denso de B;*
5. *μ_0 é F-levantável;*
6. *Toda probabilidade $\mu \in \mathcal{E}^*(f, 1)$ possui um único F-levantamento $\overline{\mu}$. Além disso,*
   - *$\overline{\mu}$ é F-ergódica;*
   - *existe constante $C \geq 1$ tal que $\overline{\mu} \leq C\mu\big|_B$;*
7. *Se $\sup_{x\in\mathbb{X}\setminus\mathcal{C}} \mathbb{D}f(x) < \infty$, então toda probabilidade $\mu \in \mathcal{E}^*(f)$ é $(\beta, \delta/2, 1)$-Zooming. Além disso toda probabilidade $\mu \in \mathcal{E}^*(f)$ possui um único F-levantamento $\overline{\mu}$, satisfazendo:*
   - *$\overline{\mu}$ é F-ergódica;*
   - *existe constante $C \geq 1$ tal que $\overline{\mu} \leq C\mu\big|_B$.*

Demonstração. Seja $\tau_{x,\varrho,\delta}(V)$ e $\omega_{\varrho,\delta,l}(x)$ como definido nas equações 3.5 e 3.6, conforme discutido No teorema 3.10, do lema A.8 existe compacto $\mathcal{A} \subset \operatorname{supp}\mu_0$ tal que $\omega_{\varrho,\delta,l}(x) = \mathcal{A}$ μ_0-quase todo $x \in \mathbb{X}$.

Escolhendo $p \in \mathcal{A}$, seja p_0 um ponto μ_0 genérico (em particular $p \in \omega_{\varrho,\delta,l}(p_0)$), do lema 3.7 temos que se $\alpha = \{\alpha_n\}_n$, com $\alpha_n(r) = \sqrt{\varrho_n}(r) = e^{-\lambda n}r$, então

$$\mathcal{O}_f^-(p_0) \subset \limsup \mathcal{Z}_n(\alpha, \delta, 1) \subset \limsup \mathcal{Z}_n(\beta, \delta/2, 1)$$

Como f é bi-Lipschitz, temos que $\#f^{-1}(x) < \infty$ e portanto f é inversamente separada conforme a definição 2.21, assim, pelo lema 2.22 existe $0 < \epsilon_1 < \delta/2$ tal que, para todo $0 < \epsilon < \epsilon_1$, a pré-bola encaixada $(\beta, \delta/2, 1)$-*Zooming* $B^*_\epsilon(p) \subset B_\epsilon(p)$ (vide definição 2.20) está bem definida e contém $B_{\epsilon/2}(p)$. Daí, pelo teorema 2.31, podemos escolher $0 < \epsilon < \epsilon_0 = \min\{\epsilon_1, \delta/4\}$ e, tal que $(F, B, \mathcal{P})$ é uma aplicação $(\beta, \delta/2, 1)$-*Zooming* de retorno, onde $B := B^*_\epsilon(p)$ e

$$A :=$$

$$\big\{x \in B; x \in V_n(\beta, \delta, 1)(y),\ \text{Para algum } n \in \mathbb{N} \text{ e } y \in \mathcal{Z}_n(\beta, \delta, 1) \text{ com } f^n(V_n(\beta, \delta, 1)(y)) \supset B \ni f^n(x)\big\}$$

E seja $\mathcal{P}$ a coleção de subconjuntos conexos de A, e $F : A \subset B \to B$ a aplicação de Markov associada ao primeiro tempo de retorno $(\beta, \delta/2, 1)$-*Zooming* a B. Note que F

satisfaz as condições 1 e 2 do teorema. Além disso, como $\mathcal{O}_f^-(p_0)$ é denso em $\mathbb{X}$, e $p \in \omega_{\alpha,\delta,1}(p_0) = \omega_{\alpha,\delta,1}(y) \subset \omega_{\beta,\delta/2,1}(y)$, para todo $y \in \mathcal{O}_f^-(p_0)$, obtemos que $A \supset \mathcal{O}_f^-(p_0) \cap (B)$, e isso garante que A é um aberto denso de B, provando o item 4 do teorema. O fato de $\#\{P \in \mathcal{P}; R(P) = n\}$, para todo n natural vem da propriedade $\#f^{-1}(x) < \infty$, para todo $x \in \mathbb{X}$, e portanto o item 3 é satisfeito. Como $p \in \omega_{\varrho,\delta,1}(x) \subset \omega_{\alpha,\delta,1}(x)$, para quase todo $x \in \mathbb{X}$, então, do teorema 2.31, temos que μ_0 é F-levantável, provando o item 5.

Seja $\mu \in \mathcal{E}^*(f,l), l \geq 1$. Por definição, existe $\sigma, t > 0$ e uma aplicação de retorno (η, t, l)-*Zooming* $(F_0, B_0, \mathcal{P}_0)$, e μ possui um F_0-Levantamento ν tal que $\text{supp}\nu = \overline{B_0}$, onde $\eta = \{\eta_n\}$ e $\eta_n(r) = e^{\sigma n} r$.

Seja $K_1 = 1$ e $K_l := 2\sup_{x \in \mathbb{X} \setminus \mathcal{C}} \mathbb{D}f(x) < \infty$, se $l \geq 2$. Note que, como μ é probabilidade expansora, seja $x_0 \in \limsup \mathcal{Z}_n(\eta,t,l)$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 \in \mathcal{Z}_N(\eta,t,l)$. Então, para todo $w \in V_N(\eta,t,l)(x_0) \setminus \{x_0\}$, temos que

$$0 < \text{dist}(f^{l(N-1)}(x_0), f^{l(N-1)}(w)) \leq e^{-\sigma} \text{dist}(f^{lN}(x_0), f^{lN}(w))$$

Donde

$$1 < e^{\sigma} \leq \frac{\text{dist}(f^{lN}(x_0), f^{lN}(w))}{\text{dist}(f^{l(N-1)}(x_0), f^{l(N-1)}(w))} \leq (K_l)^l$$

Assim, $K_l \geq 1$ para todo $l \in \mathbb{N}$. Seja $n_0 = \max\left\{\left(\frac{(l-1)\log(K_l e^{\sigma})}{\lambda}\right)^2, \left(\frac{2\lambda}{\min\{\lambda,\sigma\}}\right)^2\right\}$. Observe que, se $n > n_0$ então escrevendo $a = (l-1)\log(K_l e^{\sigma})$ e $b = \min\{\lambda, \sigma\}$ temos que para todo $m \geq 0$ $n + m \geq (a/\lambda)^2$, e, portanto, $a + \lambda\sqrt{n+m} \leq 2\lambda\sqrt{n+m}$. Observe ainda que para todo $m \geq 0$ $n + m \geq (2\lambda/b)^2$ e, portanto, $2\lambda \leq b\sqrt{n+m}$. Portanto, $2\lambda\sqrt{n+m} \leq b(n+m)$. Assim, $a + \lambda\sqrt{n+m} \leq 2\lambda\sqrt{n+m} \leq b(n+m) \leq \lambda n + \sigma m$. Como $a + \lambda\sqrt{n+m} \leq \lambda n + \sigma m \iff (K_l e^{\sigma})^{l-1} e^{-\lambda n - \sigma m} \leq e^{-\lambda\sqrt{n+m}}$ obtemos que para todo $n \geq n_0$ e $m \geq 0$:

$$e^{-\lambda n - \sigma m} \leq (K_l e^{\sigma})^{l-1} e^{-\lambda n - \sigma m} \leq e^{-\lambda\sqrt{n+m}} \tag{3.15}$$

Seja R_0 o tempo induzido de F_0, e escolha $p_\mu \in B_0 \cap \mathcal{O}^-(p_0)$ Como $p \in \omega_{\alpha,\delta,1}(y)$, para todo $y \in \mathcal{O}_f^-(p_0)$, escolha $n_1 > n_0$ tal que $p_\mu \in \mathcal{Z}_{n_1}(\alpha,\delta,1)$, $V_{n_1}(\alpha,\delta,1)(p_\mu) \subset B_0$, e $f^{n_1}(p_\mu) \in B$. Seja

$$V = (f^{n_1}|_{V_{n_1}(\alpha,\delta,1)(p_\mu)})^{-1}(B) \subset (f^{n_1}|_{V_{n_1}(\alpha,\delta,1)(p_\mu)})^{-1}(B_\delta(f^{n_1}(p_\mu))).$$

Seja $\mathbb{N}_x = \{n \in \mathbb{N}; F_0^n(x) \in V\}$. Pela F_0-ergodicidade de ν, e como $\text{supp}\nu = \overline{B_0}$, existe $U \subset B_0$, com $U = B_0(\mod \nu)$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{1, \ldots, n \cap \mathbb{N}_x\} = \nu(V) > 0 \,\forall\, x \in U.$$

Fixado $x \in U$ e $n \in \mathbb{N}$ seja $\mathcal{P}_{0,n} = \bigvee_{j=0}^{n-1} F_0^{-j}(\mathcal{P}_0)$, e $\mathcal{P}_{0,n}(x)$ denotará o elemento da partição $\mathcal{P}_{0,n}$ que contém x. Tomando $r_n = \frac{1}{l}\sum_{k=0}^{n-1} R_0 \circ F_0^j(x)$, e $g := f^l$. Note que, por construção, existe $x_n \in \mathcal{Z}_{r_n}(\eta,t,l)$, tal que $\mathcal{P}_{0,n}(x) = (g^{r_n}|_{V_{r_n}(\eta,t,l)(x_n)})^{-1}(B_0)$. Como para todo $n \in \mathbb{N}_x$ temos que $f^{n_1}(F^n(x)) \in B_{\delta/2}(f^{n_1}(p_\mu))$ e $B_{\delta/2}(f^{n_1}(F(x))) \subset B_\delta(f^{n_1}(p_\mu))$. Portanto, se $n \in \mathbb{N}_x$ tome:

$$V_{lr_n+n_1}(x) = \left(F^n|_{\mathcal{P}_{0,n}(x)}\right)^{-1} \circ \left(f^{n_1}|_{V_{n_1}(\alpha\delta,l)(p_\mu)}\right)^{-1}(B_{\delta/2}(f^{n_1} \circ F^n(x))).$$

Note que $f^{lr_n+n_1}$ leva $V_{lr_n+n_1}(x)$ homeomorficamente para $B_{\delta/2}(f^{lr_n+n_1}(x))$. Além disso, como $f^{lr_n}(V_{lr_n+n_1}(\alpha,\delta,1)(p_\mu)) \subset V_{n_1(\alpha,\delta,l(p_\mu))}$, temos que para todo $lr_n \leq j < lr_n + n_1$ e $y, w \in V_{lr_n+n_1}(x)$:

$$\begin{aligned} \text{dist}(f^j(w), f^j(y)) \leq e^{-\lambda(lr_n+n_1-j)}\text{dist}(f^{lr_n+n_1}(w), f^{lr_n+n_1}(w)) \leq \\ e^{-\lambda\sqrt{lr_n+n_1-j}}\text{dist}(f^{lr_n+n_1}(w), f^{lr_n+n_1}(w)). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Portanto, para todo $lr_n \leq j < lr_n + n_1$ e $y, w \in V_{lr_n+n_1}(x)$:

$$\text{dist}(f^j(w), f^j(y)) \leq \beta_{lr_n+n_1-j}\big(\text{dist}(f^{lr_n+n_1}(w), f^{lr_n+n_1}(w))\big) \tag{3.17}$$

Para provar que o mesmo vale se $0 < j \leq lr_n$, consideraremos separadamente os casos $l = 1$ e $l \geq 2$. Assim, suponha $l = 1$. Nesse caso, usando que existe $x_n \in B_0$ tal que $V_{r_n+n_1}(x) \subset V_{r_n}(\eta,t,1)(x_n)$ e a Equação (3.15), e a primeira desigualdade da Equação (3.16) temos que para todo $w, y \in V_{r_n+n_1}(x)$ e $0 \leq j < lr_n$:

$$\text{dist}(f^j(w), f^j(y)) \leq e^{\sigma(r_n-j)}\text{dist}(f^{r_n}(w), f^{r_n}(y))$$

$$\leq e^{\sigma(r_n-j)}e^{-\lambda(r_n+n_1-r_n)}\text{dist}(f^{r_n+n_1}(w), f^{r_n+n_1}(w))$$

$$= e^{-\lambda n_1-\sigma(r_n-j)}\text{dist}(f^{r_n+n_1}(w), f^{r_n+n_1}(w)) \leq e^{-\lambda\sqrt{r_n+n_1-j}}\text{dist}(f^{r_n+n_1}(w), f^{r_n+n_1}(w))$$

Ou seja, para todo $lr_n \leq j < r_n + n_1$ e $y, w \in V_{r_n+n_1}(x)$:

$$\text{dist}(f^j(w), f^j(y)) \leq \beta_{r_n+n_1-j}\big(\text{dist}(f^{r_n+n_1}(w), f^{r_n+n_1}(w))\big). \tag{3.18}$$

Assim, pelas equações (3.17) e (3.18), temos que sempre que $n \in \mathbb{N}_x$ $r_n + 1$ é um tempo $(\beta, \delta/2, 1)$-*zooming* para x, e $V_{r_n+n_1}(x) = V_{r_n+n_1}(\beta, \delta/2, 1)(x)$.

Consideraremos agora o caso $l \geq 2$. Dado $0 \leq j < lr_n$, escreva $j = ml + k$, com $0 \leq k < l$ e $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, como $V_{lr_n+n_1}(x) \subset V_{r_n}(\eta,t,1)(x_n)$:

$$\text{dist}(f^j(w), f^j(y)) = \text{dist}(f^{ml+k}(w), f^{ml+k}(y)) = \text{dist}(f^k(f^{ml}(w)), f^k(f^{ml}(y)))$$

$$\leq (K_l)^k\text{dist}(f^{ml}(w), f^{(m+1)l}(y)) \leq (K_l)^k e^{-\sigma l(r_n-m)}\text{dist}(f^{lr_n}(w), f^{lr_n}(y))$$

$$= (K_l e^\sigma)^k e^{-\sigma(lr_n-j)}\text{dist}(f^{lr_n}(w), f^{lr_n}(y)) \leq (K_l e^\sigma)^k e^{-\sigma(lr_n-j)}e^{-\lambda n_1}\text{dist}(f^{lr_n+n_1}(w), f^{lr_n+n_1}(y))$$

$$\leq e^{-\lambda\sqrt{lr_n+n_1-j}}\text{dist}(f^{lr_n+n_1}(w), f^{lr_n+n_1}(w))$$

Para todo $0 \leq j < lr_n$ e $y, w \in V_{r_n+n_1}(x)$. Ou seja,

$$\operatorname{dist}(f^j(w), f^j(y)) \leq \beta_{lr_n+n_1-j}\big(\operatorname{dist}(f^{lr_n+n_1}(w), f^{lr_n+n_1}(w))\big). \tag{3.19}$$

daí, pelas equações 3.17 e 3.19, temos que sempre que $n \in \mathbb{N}_x$ $lr_n + 1$ é um tempo $(\beta, \delta/2, l)$-*zooming* para x, e $V_{lr_n+n_1}(x) = V_{lr_n+n_1}(\beta, \delta/2, l)(x)$.

seja $\mathbb{L}_x = \{lr_n + n_1; n \in \mathbb{N}_x\}$, note que:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\#\{1 \leq j \leq m; j \in \mathbb{L}_x\} = \frac{1}{\int R_0 d\nu} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\#\{1 \leq j \leq m; j \in \mathbb{N}_x\} = \frac{\nu(V)}{\int R_0 d\nu} > 0$$

Como para todo $n \in \mathbb{L}_x$ e $x \in U$ $f^n(x) \in B$, isso significa que $x \in U$ possui frequência positiva de tempos de visita $(\beta, \delta/2, 1)$-*Zooming* a B. Além disso, como $\mu \in \mathcal{M}^1_{\text{erg}}(f)$, temos que μ quase todo $x \in \mathbb{X}$ possui frequência positiva de tempos de visita $(\beta, \delta/2, 1)$-*Zooming* a B. Portanto, μ é medida $(\beta, \delta/2, 1)$-*Zooming* se:

$$\begin{cases} \mu \in \mathcal{E}^*(f, 1) \\ \mu \in \mathcal{E}^*(f, l) \text{ para } l \geq 2 \text{ e } sup_{x\in\mathbb{X}\setminus\mathcal{C}}\mathbb{D}f(x) < \infty. \end{cases}$$

Como F é orbita-coerente pelo teorema 2.9 temos que μ é F-levantável para alguma probabilidade $\overline{\mu} \leq C\mu\big|_B$, para alguma constate $C \geq 1$. E, além disso, $\overline{\mu}$ é probabilidade F-ergódica é o único F-levantamento de μ, provando os itens 6 e 7. □

Definição 3.18. *Aplicações injetivas por partes. Diremos que a aplicação $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ é injetiva por partes se existe uma cobertura finita $\{X_1, \ldots, X_k\}$ de $\mathbb{X}$ tal que $f\big|_{X_i}$ é injetiva para todo $1 \leq i \leq k$*

Antes de provarmos o corolário do teorema 3.17 necessitamos do seguinte lema:

Lema 3.19 (Semi-continuidade superior para as entropias das medidas Zooming)**.** *Seja $f : \mathbb{X} \circlearrowleft$ uma aplicação tal que $f\big|_{\mathbb{X}\setminus\mathcal{C}}$ é monótona por partes, α uma contração Zooming, $l \in \mathbb{N}$ e $\delta > 0$. Se $\{\mu_n\} \in \mathcal{M}^1(f)$ é uma sequência de medidas (α, δ, l)-Zooming convergindo para algum $\mu_0 \in \mathcal{M}^1(f)$, com $\mu_0(\mathcal{C}) = 0$ então $h_{\mu_0}(f) \geq \limsup_{n\to\infty} h_{\mu_n}(f)$.*

Demonstração. Tomando uma subsequência se necessário, podemos assumir que

$$\lim_{n\to\infty} h_{\mu_n}(f) = a_0 \geq 0,$$

seja $\{X_1, \ldots X_k\}$ a cobertura finita de $\mathbb{X} \setminus \mathcal{C}$ tal que $f\big|_{X_i}$ é injetiva pelo Lema 9.7 de [21] temos que existem abertos $\mathcal{Y} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$ tais que $\mathcal{X} \setminus \mathcal{C} = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_k$, $Y_j \subseteq X_j$ e $\mu_0(\partial Y_j) = 0$ para todo $1 \leq j \leq k$. Portanto $f\big|_{Y_j}$ é injetiva.

Seja $x \in \mathbb{X} \setminus \mathcal{C}$ defina $\mathcal{V}(x) := \{Y \in \mathcal{Y}; x \in Y\}$, $\mathcal{Y}(x) := \bigcap_{Y\in\mathcal{V}(x)} Y$, e por fim definiremos a partição $\mathcal{Q}$ gerada por Y como: $\mathcal{Q} := \{\mathcal{Y}(x); x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{C}\}$.

Afirmação 3. *Se p possui infinitos tempos (α, δ, l)-zooming e $\mathcal{P}$é partição de $\mathbb{X} \setminus \mathcal{C}$ com diam$(\mathcal{P}) < \delta$ e $\mathcal{Q} \preceq \mathcal{P}$ então:*

$$\lim_{n\to\infty} diam(\mathcal{P}_n(p)) = 0.$$

Demonstração. Seja $\mathbb{N}(p) = \{j \in \mathbb{N}; p \in \mathcal{Z}_j(\alpha, \delta, l)\}$, se $n \in \mathbb{N}(p)$, então existe uma pré bola *zooming* $V_n(\alpha, \delta, l)(p)$, tal que $f^{nl}|_{V_n(\alpha,\delta,l)(p)}$ é homeomorfismo entre $V_n(\alpha, \delta, l)(p)$ e $B_\delta(f^{ln}(p))$, além disso, $\left(f^{nl}|_{V_n(\alpha,\delta,l)(p)}\right)^{-1}$ é uma α_n-contração. Como $f^{ln}|_{\mathcal{P}_n(p)}$ é injetiva, $f^{ln}(\mathcal{P}_{in}(p)) \subset \mathcal{P}(f^{ln}(p)) \subset B_\delta(f^{ln}(p)) = f^{ln}(V_i(p))$,assim, $\mathcal{P}_{ln}(p) \subset V_i(p)$. E como $\text{diam}(V_n(p)) \leq \alpha_n(2\delta)$. Teremos que $\lim_{n\to\infty} \text{diam}(\mathcal{P}_{ln}(p)) \leq \lim_{n\to\infty} \alpha_n(2\delta) = 0$, como $\text{diam}(\mathcal{P}_{n+1}(p)) \leq \text{diam}(\mathcal{P}_n(p))$, temos que $\lim_{n\to\infty} \text{diam}(\mathcal{P}_n(p)) = 0$. □

Afirmação 4. *Se $\mathcal{P}$ é partição de $\mathbb{X} \setminus \mathcal{C}$ com $\mathcal{Q} \preceq \mathcal{P}$ e diam$\mathcal{P} < \delta$, então $\mathcal{P}$ é partição geradora para toda probabilidade fracamente (α, δ, l)-Zoomingg.*

Demonstração. Dados um Borel mensurável A, uma medida fracamente (α, δ, l)-*Zoomingg* μ e $\epsilon > 0$, seja $K \subset A \cap \limsup_{j\to\infty} \mathcal{Z}_j(\alpha, \delta, l)$ um conjunto fechado tal que $\mu(A \setminus K) < \epsilon/2$, e seja U conjunto aberto, tal que $U \supset A$ e $\mu(U \setminus A) < \epsilon/2$.

Dado $x \in K$, da afirmação 3 temos que $k(x) = \min\{j \in \mathbb{N}; \mathcal{P}_j(x) \subset U\}$ está bem definido. Portanto, definindo $A_\epsilon = \bigcup_{x\in K} \mathcal{P}_{k(x)}(x)$, note que $A_\epsilon \subset \bigcup_j \mathcal{P}_j(x)$ é aberto, portanto mensurável. Assim, $\mu(A\Delta A_\epsilon) = \mu(A \setminus A_\epsilon) + \mu(A_\epsilon \setminus A) \leq \mu(A \setminus K) + \mu(U \setminus A) < \epsilon$, portanto $\mathcal{P}$ é partição geradora para μ. □

Definindo $\mathbb{P}$ como o conjunto de todas as partições mensuráveis finitas de $\mathbb{X} \setminus \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{Q} \preceq \mathcal{P}$, $\text{diam}(\mathcal{P}) < \delta$ e $\mu_0(P) = 0 \ \forall P \in \mathcal{P}$, $h_{\mu_0}(f, \mathcal{P}) > h_{\mu_0}(f) - \epsilon$. Observe que como $\mathcal{Q} \in \mathbb{P}$, e $P \vee \mathcal{Q} \in \mathbb{P}$ para todo $\mathcal{P}$ com $\text{diam}(\mathcal{P}) < \delta$ teremos que $h_{\mu_0}(f) = \sup\{h_{\mu_0}(f, \mathcal{P}), p \in \mathbb{P}\}$. Além disso, Pela Afirmação 4 temos que $h_{\mu_n}(f) = h_{\mu_n}(f, \mathcal{P})$ para todo $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$.

Dado $\epsilon > 0$ escolha $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$ tal que $h_{\mu_0}(f) - \epsilon < h_{\mu_0}(f, \mathbb{P})$. Como $\mu_0(\partial P) = 0$ para todo $P \in \mathcal{P}$ temos que $\mathcal{M}^1(f) \ni \nu \mapsto h_\nu(f, \mathcal{P})$ é semicontínua superior em μ_0. Daí $h_{\mu_0}(f) > h_{\mu_0}(f, \mathcal{P}) - \epsilon \geq \lim_{n\to\infty} h_{\mu_n}(f, \mathcal{P}) - \epsilon = a_0 - \epsilon$. □

Corolário 3.20. *Suponha que f é fortemente transitiva, e $sup_{x\in\mathbb{X}\setminus\mathcal{C}}\mathbb{D}f(x) < \infty$. Se $\{\mu_n\}_n \in \mathcal{E}(f)$ é uma sequência convergindo para algum $\mu_0 \in \mathcal{M}^1(f)$, então $h_{\mu_0}(f) \geq \limsup_{n\to\infty} h_{\mu_n}(f)$.*

Demonstração. Utilizando o mesmo argumento do corolário 3.15 e o lema A.13, trocando f por f^l, se necessário, podemos assumir que f^n é fortemente transitiva para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, se $\mu_1 \in \mathcal{E}(f, k)$, trocando f por f^k, podemos assumir que $\mu_1 \in \mathcal{E}(f, 1)$. Ou seja, ao longo da prova deste corolário assumiremos que $\mu_1 \in \mathcal{E}(f, 1)$ e f^n é fortemente transitiva para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $\lambda, \delta > 0$ tais que μ_1 é uma medida $(\varrho, \delta, 1)$-*zooming*, com $\varrho = \{\varrho_n\}_n$, e $\varrho_n(r) = e^{2\lambda n} r$. Do teorema 3.17, temos que toda probabilidade $\nu \in \mathcal{E}^*(f)$ é $(\beta, \delta/2, 1)$-*zooming*, onde $\beta = \{\beta_n\}_n$, e $\beta_n(r) = e^{-\lambda\sqrt{n}}$.

Pela proposição 3.14 podemos escolher uma sequência $\{\mu_n^*\}_n \in \mathcal{E}^*(f)$, tal que $\mu_n^* \to \mu_n$ e $\lim_{n\to\infty} |h_{\mu_n}(f) - h_{\mu_n^*}(f)| = 0$. Como a sequência $\{\mu_n^*\}_n$ é $(\beta, \delta/2, 1)$-*zooming*, do lema 3.19 temos que $h_{\mu_0}(f) \geq \limsup_{n\to\infty} h_{\mu_n^*} = \limsup_{n\to\infty} h_{\mu_n}$. $\square$

Capítulo 4

Medidas de máxima entropia para uma aplicação de Markov induzida completa.

4.1 Pressão para o shift Σ_∞^+.

Nessa seção discutiremos algumas estimativas feitas por [21] sobre o limite superior do log de sequências positivas.

Lema 4.1. *Seja $\{b_n\}_n$ sequência de reais positivos. Se $\{a_n\}_n \in [0,1]$ é tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ e $\limsup_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n b_n < \infty$ então*

$$\limsup_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n \log b_n < \log \left(\limsup_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n b_n \right)$$

ou existe $\beta > 0$ tal que $a_n b_n = a_n \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \log b_n = \log \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \log \beta$.

Demonstração. Pela concavidade da função log, para todo $a_1, a_2 \in (0,1)$ e $b_1 b_2 \in (0,\infty)$, com $a_1 + a_2 = 1$ e $\beta_1 \neq b_2$ temos que

$$a_1 \log b_1 + a_2 \log b_2 < \log(a_1 b_1 + a_2 b_2) \tag{4.1}$$

claro que se $b_1 = b_2 = \beta$ então $\log(a_1 b_1 + a_2 b_2) = \log \beta$.

Afirmação 5. *Se $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \in (0,1)$ e $\sum_{n=1}^{k} \alpha_n = 1$, então para todo $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\} \in (0,\infty)$ temos*

$$\sum_{n=1}^{k} \alpha_n \log \beta_n \leq \log \sum_{n=1}^{k} \alpha_n \beta_n.$$

Demonstração. Pela Equação 4.1, a afirmação é verdadeira se $k = 2$ e $b_1 \neq b_2$. E a afirmação é trivial para o caso $b_1 = b_2 = \beta$.

Seja $k \geq 3$, Por hipótese de indução, assuma que a afirmação é verdadeira para $2 \leq j < k$. Seja $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \in (0,1)$ tal que $\sum_{n=1}^{k} \alpha_n = 1$ e $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\} \in (0, \infty)$. Tomando $\gamma = \sum_{n=2}^{k} \alpha_n = \sum_{n=1}^{k-1} \alpha_{n+1}$, da hipótese de indução temos que:

$$\sum_{n=1}^{k-1} \frac{\alpha_{n+1}}{\gamma} \log \beta_{n+1} \leq \log \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\alpha_{n+1}}{\gamma} \beta_n$$

note que $\gamma + \alpha_1 = 1$, daí, como o resultado foi estabelecido para o caso $k = 2$, se $\rho_1 = \beta_1$ e $\rho_2 = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\alpha_{n+1}}{\gamma} \beta_n$ temos que

$$\alpha_1 \log \rho_1 + \gamma \log \rho_2 \leq \log(\alpha_1 \rho_1 + \gamma \rho_2).$$

Donde

$$\alpha_1 \log \beta_1 + \gamma \log \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\alpha_{n+1}}{\gamma} \beta_n \leq \log \left(\alpha_1 \beta_1 + \gamma \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\alpha_{n+1}}{\gamma} \beta_n \right).$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{k} \alpha_n \log \beta_n = \alpha_1 \log \beta_1 + \gamma \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\alpha_{n+1}}{\gamma} \log \beta_{n+1} \leq \alpha_1 \log \beta_1 + \gamma \log \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\alpha_{n+1}}{\gamma} \beta_n$$

$$\leq \log \left(\alpha_1 \beta_1 + \gamma \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\alpha_{n+1}}{\gamma} \beta_n \right) = \log \sum_{n=1}^{k} \alpha_n \beta_n$$

Segue a afirmação: □

Agora será provado uma versão mais fraca do lema.

Afirmação 6. *Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ para uma sequência $\{a_n\}_n \in [0,1]$, então para toda sequência $\{b_n\}_n$ de reais positivos, temos*

$$\limsup_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} a_n \log b_n \leq \log \left(\limsup_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} a_n b_n \right)$$

Demonstração. Tomando $\alpha_k := \sum_{n=1}^{k} a_n$, da afirmação 5 temos

$$\sum_{n=1}^{k} a_n \log b_n = \gamma_k \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{\gamma_k} \log b_n \leq \gamma_k \log \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{\gamma_k} b_n = \gamma_k \log \frac{1}{\gamma_k} + \gamma_k \log \sum_{n=1}^{k} a_n b_n$$

Como $\lim_{k \to \infty} \gamma_k = 1$, temos que $\lim_{k \to \infty} \gamma_k \log(1/\gamma_k) = 0$, portanto,

$$\limsup_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} a_n \log b_n \leq \limsup_{k \to \infty} \log \sum_{n=1}^{k} a_n b_n = \log \left(\limsup_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} a_n b_n \right).$$

Segue a afirmação: □

Se $a_n b_n = a_n\beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então trivialmente $\sum_{n=1}^\infty a_n \log b_n = \log \sum_{n=1}^\infty a_n b_n = \log\beta$. Portanto, podemos assumir que dado $\beta \in \mathbb{R}$ existem naturais $n_1 < n_2$, tais que $a_{n_1}b_{n_1} \neq a_{n_1}\beta$ e $a_{n_2}b_{n_2} \neq a_{n_2}\beta$, donde $a_{n_1} \neq 0 \neq a_{n_2}$ e $b_{n_1} \neq b_{n_2}$. Se $a_{n_1} + a_{n_2} = 1$ da equação (4.1) segue o resultado. Portanto, podemos assumir que $\gamma := \sum_{n=1}^\infty a_n - (a_{n_1} + a_{n_2}) > 0$. Daí, da afirmação 6, temos que

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty}\sum_{n=1}^k a_n\log b_n &= a_{n_1}\log b_{n_1} + a_{n_2}\log b_{n_2} + \gamma\limsup_{k\to\infty}\sum_{n\in\{1,\dots k\}\setminus\{n_1,n_2\}}\frac{a_n}{\gamma}\log b_n\\ &\le a_{n_1}\log b_{n_1} + a_{n_2}\log b_{n_1} + \gamma\log\left(\limsup_{k\to\infty}\sum_{n\in\{1,\dots k\}\setminus\{n_1,n_2\}}\frac{a_n}{\gamma}b_n\right)\end{aligned}$$

Tomando $\alpha = a_{n_1} + a_{n_2}$, da Equação (4.1), temos que

$$a_{n_1}\log b_{n_1} + a_{n_2}\log b_{n_2} = \alpha\left(\frac{a_{n_1}}{\alpha}\log b_1 + \frac{a_{n_2}}{\alpha}\log b_2\right) < \alpha\log\left(\frac{a_{n_1}}{\alpha}b_1 + \frac{a_{n_2}}{\alpha}b_2\right)$$

Portanto,

$$\limsup_{k\to\infty}\sum_{n=1}^k a_n\log b_n < \underbrace{\alpha\log\left(\frac{a_{n_1}}{\alpha}b_1 + \frac{a_{n_2}}{\alpha}b_2\right) + \gamma\log\left(\limsup_{k\to\infty}\sum_{n\in\{1,\dots k\}\setminus\{n_1,n_2\}}\frac{a_n}{\gamma}b_n\right)}_{\star}$$

pela afirmação 5, temos que

$$\star \le \log\left(\alpha\left(\frac{a_{n_1}}{\alpha}b_1+\frac{a_{n_2}}{\alpha}b_2\right)+\gamma\left(\limsup_{k\to\infty}\sum_{n\in\{1,\dots k\}\setminus\{n_1,n_2\}}\frac{a_n}{\gamma}b_n\right)\right) = \log\left(\limsup_{k\to\infty}\sum_{n=1}^k a_n b_n\right)$$

Portanto, $\limsup_{k\to\infty}\sum_{n=1}^k a_n\log b_n < \log(\limsup_{k\to\infty}\sum_{n=1}^k a_n b_n)$. □

Proposição 4.2. *Seja $\mathbb{L} \subset \mathbb{N}$ e $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{L}}$ uma sequência de reais positivos tal que $\sum_{n\in\mathbb{L}}\beta_n < \infty$, definindo $\mathbb{L}(k) = \mathbb{L}\cap\{1,\dots k\}$. Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{L}} \in [0,1]$ é tal que $\sum_{n\in\mathbb{L}} a_n = 1$, então*

$$\limsup_{k\to\infty}\sum_{n\in\mathbb{L}(k),a_n\neq 0} a_n\log(\beta_n/a_n) \le \log\sum_{n\in\mathbb{L}}\beta_n.$$

Além disso,

$$\sum_{n\in\mathbb{L}} a_n\log(\beta_n/a_n) = \log\sum_{n\in\mathbb{L}}\beta_n \iff a_n = \frac{\beta_n}{\sum_{m\in\mathbb{L}}\beta_m} > 0\,\forall n\in\mathbb{L}.$$

Demonstração. Trocando as sequências $\{a_n\}_{n\in\mathbb{L}}$ e $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{L}}$ por $\{a'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\beta'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se necessário, podemos assumir que $\mathbb{L} = \mathbb{N}$. Onde

$$a'_n = \begin{cases} a_n & \text{se } n\in\mathbb{L}\\ 0 & \text{se } n\notin\mathbb{L}\end{cases}$$

e

$$\beta'_n = \begin{cases} \beta_n & \text{se } n \in \mathbb{L} \\ 0 & \text{se } n \notin \mathbb{L} \end{cases}$$

Essa proposição é uma aplicação do lema 4.1 à sequência $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{\beta_n}{a_n} & \text{se } a_n \neq 0 \\ 1 & \text{se } a_n = 0 \end{cases}$$

Suponha que existe $n_1 \neq n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_1} \neq 0 \neq a_{n_2}$ e $b_{n_1} \neq b_{n_2}$. Nesse caso, do lema 4.1:

$$\limsup_{k\to\infty} \sum_{1\leq n\leq k, a_n\neq 0} a_n \log(\beta_n/a_n) = \limsup_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n \log b_n < \log\left(\limsup_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n b_n\right)$$

$$= \log \sum_{n\in\mathbb{N}, a_n\neq 0} \beta_n \leq \log \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

Suponha agora que existe $\beta > 0$ tal que $a_n b_n = a_n \beta$, e todo $\in \mathbb{N}$. Nesse caso, $\beta_n = a_n\beta$ sempre que $a_n \neq 0$. Daí,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}, a_n\neq 0} \beta_n = \sum_{n\in\mathbb{N}, a_n\neq 0} a_n\beta = \beta$$

E

$$\sum_{n\in\mathbb{N}, a_n\neq 0} a_n \log(\beta_n/a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \log(\beta) = \log\beta = \log \sum_{n\in\mathbb{N}, a_n\neq 0} \beta_n.$$

Donde se $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \log(\beta_n/a_n) = \log \sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n$$

E

$$a_n = \frac{\beta_n}{\sum_{m\in\mathbb{N}} \beta_m} > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se $a_n = 0$ para algum n natural, tal que $\beta_n > 0$

$$\limsup_{k\to\infty} \sum_{1\leq n\leq k, a_n\neq 0} a_n \log(\beta_n/a_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}, a_n\neq 0} a_n \log(\beta_n/a_n) = \log \sum_{n\in\mathbb{N}, a_n\neq 0} \beta_n < \log \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

provando a proposição. □

4.2 Entropia de aplicações de Markov induzidas completas.

O objetivo dessa seção é a obtenção de uma probabilidade F-invariante ν_0 que possui entropia normalizada máxima. Os cálculos dessa seção foram originalmente obtidos por [21].

Para todo $r \geq 1$ defina:

$$\mathbb{A}_r = \left\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}; a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq 1 \leq r \leq \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \right\}$$

Além disso, seja $H[0,1] \to [0,1]$ dado por

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x \log(1/x) & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Lema 4.3.

$$\lim_{r\to\infty} \left(\sup \left\{ \lim_{m\to\infty} \left(\frac{\sum_{n=1}^{m} H(a_n)}{\sum_{n=1}^{m} n a_n} \right); \{a_n\} \in \mathbb{A}_r \right\} \right) = 0. \tag{4.2}$$

Demonstração. Para todo $n \in \mathbb{N}$ defina $\mathcal{U}_n = \{j \in \mathbb{N}; j^{-(n-1)} > a_j > j^{-n}\}$, e $\mathbb{N}_0 = \{j \in \mathbb{N}; \mathcal{U}_j \neq \emptyset\}$. Note que $\{\mathcal{U}_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ é uma partição de $\mathbb{N}$. ou seja $\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{U}_n$ e $\mathcal{U}_m \cap \mathcal{U}_n = \emptyset$ sempre que $n \neq m$. Para todo $n \in \mathbb{N}_0$, defina $u_n = \min \mathcal{U}_n$. Ou seja, u_n é o menor natural j tal que $a_j \in (\frac{1}{j^n}, \frac{1}{j^{(n-1)}})$. Escreva $\mathbb{N}_0 = \{n_1 < n_2 < \dots\}$, com $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Note que $u_{n_j} \geq j$.

Vamos achar uma cota superior para o numerador da equação (4.2). Se $n_k \leq 3$ e $j \in \mathcal{U}_{n_k}$ temos que como $a_j > j^{-n_k}$, temos que $H(a_j) = a_j \log(1/a_j) \leq n_k a_j \log(j) \leq 3 a_j \log(j)$. Definindo $\Gamma_3 := \{k \in \mathbb{N}; n_k \leq 3\}$, temos que $\#\Gamma_3 \leq 3$, portanto

$$\sum_{k\in\Gamma_3} \left(\sum_{j\in\mathcal{U}_{n_k}\cap\{1,\dots,m\}} H(a_j) \right) \leq 9 \sum_{j=1}^{m} a_j \log(j). \tag{4.3}$$

Suponha agora $n_k \geq 4$. Nesse caso, para todo $j \in \mathcal{U}_{n_k}$, como $a_j < j^{-(n_k-1)}$ e $a_j > j^{-n_k}$ temos que $H(a_j) = a_j \log(1/a_j) \leq n_k \log(j) j^{-(n_k-1)} \leq n_k j^{-(n_k-2)}$. Donde

$$\sum_{j\in\mathcal{U}_{n_k}} H(a_j) \leq \sum_{j\in\mathcal{U}_{n_k}} \frac{n_j}{j^{n_k-2}} \leq \sum_{j\geq u_{n_k}} \frac{n_j}{j^{n_k-2}} \leq n_k \left(\frac{1}{(u_{n_k}+1)^{n_k}} + \int_{u_{n_k}}^{\infty} \frac{1}{x^{n_k-2}} dx \right)$$

$$= n_k \left(\frac{1}{(u_{n_k}+1)^{n_k}} + \frac{1}{(n_k-3) u_{n_k}^{n_k-3}} \right) \leq 2 \frac{n_k}{n_k-3} \left(\frac{1}{u_{n_k}} \right)^{n_k-3} \leq 8 \left(\frac{1}{u_{n_k}} \right)^{n_k-3}$$

como $u_{n_k} > k$ temos que $8(\frac{1}{u_{n_k}})^{n_k-3} \leq (\frac{1}{k})^{n_k-3} \leq (\frac{1}{k})^{k-3}$. Daí,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0\setminus\Gamma_3} \left(\sum_{j\in\mathcal{U}_k} H(a_n) \right) \leq 8 \sum_{k\in\mathbb{N}_0\setminus\Gamma_3} \left(\frac{1}{k} \right)^{k-3} \leq 8 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \right)^{k-3} \leq 8 \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{k-3} \right) = 40$$

Portanto,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0\setminus\Gamma_3}\left(\sum_{j\in\mathcal{U}_k} H(a_n)\right)\leq 40 \tag{4.4}$$

Das equações (4.3) e 4.4 temos que

$$\frac{\sum_{n=1}^m H(a_n)}{\sum_{n=1}^m na_n}=\frac{\sum_{n\in\Gamma_3\cap\{1,\dots,m\}} H(a_n)}{\sum_{n=1}^m na_n}+\frac{\sum_{n\in\{1,\dots,m\}\setminus\Gamma_3} H(a_n)}{\sum_{n=1}^m na_n}$$

$$\leq 9\frac{\sum_{n=1}^m a_n\log(n)}{\sum_{n=1}^m na_n}+\frac{40}{\sum_{n=1}^m na_n}\leq 9\frac{\sum_{n=1}^m a_n\log(n)}{\sum_{n=1}^m na_n}+\frac{40}{r}$$

Portanto,

$$0\leq \sup\left\{\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\sum_{n=1}^m H(a_n)}{\sum_{n=1}^m na_n}\right);\{a_n\}\in\mathbb{A}_r\right\}\leq\frac{40}{r}+9\sup\left\{\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\sum_{n=1}^m a_n\log(n)}{\sum_{n=1}^m na_n}\right);\{a_n\}\in\mathbb{A}_r\right\}$$

Assim, para terminar a prova do lema, precisamos apenas mostrar que

$$\lim_{r\to\infty}\left(\sup\left\{\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\sum_{n=1}^m a_n\log(n)}{\sum_{n=1}^m na_n}\right);\{a_n\}\in\mathbb{A}_r\right\}\right)=0$$

Note que para todo $1<m_0<m$ e $\{a_n\}_n\in\mathbb{A}_r$, temos que

$$\sum_{n=1}^m a_n\log(n)\leq\log(m_0)\underbrace{\left(\sum_{n=1}^{m_0-1}a_n\right)}_{\leq 1}+\sum_{n=m_0}^m a_n\log(n)$$

$$\leq\log(m_0)+\sum_{n=m_0}^m na_n\frac{\log(n)}{n}\leq\log(m_0)+\frac{\log(m_0)}{m_0}\sum_{n=1}^m na_n.$$

Donde

$$\frac{\sum_{n=1}^m a_n\log(n)}{\sum_{n=1}^m na_n}\leq\frac{\log(m_0)}{\sum_{n=1}^m na_n}+\frac{\log(m_0)}{m_0}\leq\frac{\log(m_0)}{r}+\frac{\log(m_0)}{m_0}$$

Assim, dado $\epsilon>0$ seja m_0 tal que $\frac{\log(m_0)}{m_0}<\epsilon$. Donde, para todo $m>m_0$, temos que

$$\frac{\sum_{n=1}^m a_n\log(n)}{\sum_{n=1}^m na_n}\leq\frac{\log(m_0)}{r}+\epsilon$$

Portanto,

$$0\leq\lim_{r\to\infty}\left(\sup\left\{\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\sum_{n=1}^m a_n\log(n)}{\sum_{n=1}^m na_n}\right);\{a_n\}\in\mathbb{A}_r\right\}\right)\leq\epsilon\;\forall\epsilon>0$$

concluindo a demonstração do lema. □

Seja $(F,B,\mathcal{P})$ uma aplicação de Markov induzida completa para uma aplicação f e tempo induzido R. Dado $l\in\mathbb{N}$ seja $\mathcal{P}_l$ o cilindro de ordem l de $\mathcal{C}$. Ou seja,

$$\mathcal{P}_l=\bigvee_{j=1}^{l-1}F^j(\mathcal{P}).$$

Observe que $(F^l, B, \mathcal{P}_l)$ é uma aplicação de Markov induzida completa para uma aplicação f, pela observação 2, F^l possui tempo induzido dado por

$$R_l(x) = \sum_{n=0}^{l-1} R \circ F^n(x).$$

Seja $\nu \in \mathcal{M}^1(F)$ e $\mathcal{U}$ uma partição e $r : \mathcal{U} \to \mathbb{N}$ tal que para todo n natural temos que $\#\{P \in \mathcal{U}; r(P) \leq n\} < \infty$. Defina:

$$H_\nu(\mathcal{U}, r) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{P\in\mathcal{U}, r(P)\leq n} H(\nu(P))}{\sum_{P\in\mathcal{U}, r(P)\leq n} r(P)\nu(P)} \tag{4.5}$$

Note que, se $\sum_{P\in\mathcal{U}} H(\nu(P)) < \infty$, então

$$H_\nu(\mathcal{U}, r) = \frac{\sum_{P\in\mathcal{U}} H(\nu(P))}{\sum_{P\in\mathcal{U}} r(P)\nu(P)} \in \mathbb{R}$$

mesmo se $\sum_{P\in\mathcal{U}} r(p)\nu(P) = \infty$ (Nesse caso $H_\nu(\mathcal{U}, r) = 0$). Denotaremos $H_\nu(\mathcal{P}) = \sum_{P\in\mathcal{U}} H(\nu(P))$.

Definição 4.4 (Entropia normalizada)**.** *A entropia normalizada de $\mu \in \mathcal{M}^1(F)$ é definida como*

$$h_\nu(F, R) := \inf\{H_\nu(\mathcal{P}_l, R_l); l \in \mathbb{N}\}$$

Definição 4.5.

$$\mathcal{M}^1_*(F) := \{\nu \in \mathcal{M}^1(F); H_\nu(\mathcal{P}) < \infty\}$$

.

Para todo $\mu \in \mathcal{M}^1_*(F)$ temos que

$$H_\nu(\mathcal{P}_l, R_l) = \frac{H_\nu(\mathcal{P}_l)}{\int R_l d\nu} = \frac{\frac{1}{l} H_\nu(\mathcal{P}_l)}{\int R d\nu} \tag{4.6}$$

Como $\mathcal{P}$ é uma partição geradora para F, a sequência $\varrho_l = H_\nu(\mathcal{P}_l)$ é subaditiva e pela equação (4.6), temos que

$$h_\nu(F, R) = \frac{\inf_l \frac{1}{l} H_\nu(\mathcal{P}_l)}{\int R d\nu} = \frac{h_\nu(F)}{\int R d\nu}, \ \forall \nu \in \mathcal{M}^1_\nu(F) \tag{4.7}$$

Dado $\nu \in \mathcal{M}^1(F)$, temos que $\{H_\nu(\mathcal{P}_l, R_l); l \in \mathbb{N}\} \supset \{H_\nu(\mathcal{P}_{nl}, R_{nl}); l \in \mathbb{N}\}$, e portanto para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\nu \in \mathcal{M}^1(F)$ temos que

$$h_\nu(F, R) \leq h_\nu(F^n, R_n). \tag{4.8}$$

Seja $\mathcal{M}^1(f, F)$ o conjunto de todas as probabilidades de Borel f-invariantes e F-levantáveis. Defina:

$$h(f, F) = \sup\{h_\mu(f); \mu \in \mathcal{M}^1(f, F)\}$$

Lema 4.6. $h_\nu(F,R) \leq H_\nu(\mathcal{P},R) \leq h(f,F)\ \forall \nu \in \mathcal{M}^1(F)$

Demonstração. Dado $\nu \in \mathcal{M}^1(F)$, seja ν_n a probabilidade de Bernoulli gerada pela distribuição de massa $m_n : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ dada por

$$m_n(P) = \frac{\nu(P \cap \{R \leq n\})}{\nu(\{R \leq n\})}.$$

observe que, como $\sum_{P\in\mathcal{P},R(P)\leq n} m_n(P) = \sum_{P\in\mathcal{P},R(P)\leq n} \frac{\nu(P\cap\{R\leq n\})}{\nu(\{R\leq n\})} = 1$, temos que

$$H_{\nu_n}(\mathcal{P}) = \sum_{P\in\mathcal{P}} H(\nu_n(P)) = \sum_{P\in\mathcal{P},R(P)\leq n} H(\nu_n(P))$$

$$= \sum_{P\in\mathcal{P},R(P)\leq n} \frac{\nu(P)}{\nu(\{R\leq n\})}\left(\log\left(\frac{1}{\nu(P)}\right) - \log\left(\frac{1}{\nu(\{R\leq n\})}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\nu(\{R\leq n\})}\sum_{P\in\mathcal{P},R(P)\leq n} H(\nu(P))\right) - \log\left(\frac{1}{\nu(\{R\leq n\})}\right).$$

Além disso,

$$\int R d\nu_n = \frac{1}{\nu(\{R\leq n\})}\int_{R\leq n} R d\nu.$$

Donde

$$\frac{H_{\nu_n}(\mathcal{P})}{\int R d\nu_n} = \frac{\sum_{P\in\mathcal{P},R(P)\leq n} H(\nu(P))}{\int_{\{R\leq n\}} R d\nu} - \frac{H(\nu(\{R\leq n\}))}{\int_{\{R\leq n\}} R d\nu} \tag{4.9}$$

Como

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{H(\nu(\{R\leq n\}))}{\int_{\{R\leq n\}} R d\nu} \leq \lim_{n\to\infty} H(\nu(\{R\leq n\})) = 0$$

tirando o $\limsup$ na Equação (4.9) obtemos

$$H_\nu(\mathcal{P},R) = \limsup_{n\to\infty} \frac{H_{\nu_n}(\mathcal{P})}{\int R d\nu_n}$$

Como $\int R d\nu_n \leq n < \infty$, ν_n é o F-levantamento de uma probabilidade f-invariante

$$\mu_n := \frac{1}{\int R d\nu_n}\sum_{j=0}^{\infty} f_*^j\left(\nu_n\big|_{R>j}\right) \in \mathcal{M}^1(f,F).$$

Portanto, pela formula de Abramov generalizada (provada no teorema 5.1 de [28]), temos que $h_{\nu_n}(F) = h_{\mu_n}(f)\int R d\nu_n < \infty$. Como ν_n é probabilidade F-invariante de Bernouli gerada pela partição $\mathcal{P}$, temos que $h_{\nu_n}(F) = H_{\nu_n}(\mathcal{P})$ e, portanto,

$$\frac{H_{\nu_n}(\mathcal{P})}{\int R d\nu_n} = \frac{h_{\nu_n}(F)}{\int R d\nu_n} = h_{\mu_n}(f) \leq h(f,F), \forall n \in \mathbb{N}$$

daí, $h_\nu(F,R) = \inf_l H_\nu(F^l,R_l) \leq H_\nu(\mathcal{P},R) \leq h(f,F)$ □

Corolário 4.7. $h(f,F) = \sup\{h_\nu(F,R); \nu \in \mathcal{M}^1(F)\}$

Demonstração. Dado $\mu \in \mathcal{M}^1(f,F)$ existe $\bar{\mu} \in \mathcal{M}^1(F)$ tal que $\int R d\bar{\mu} < \infty$ e $\mu = \frac{1}{\int R d\bar{\mu}} \sum_{j=0}^{\infty} f_*^j(\bar{\mu}|_{R>j})$. Pela formula generalizada de Abramov (provada no teorema 5.1 de [28]), temos que $h_{\bar{\mu}}(F) = h_\mu(f) \int R d\bar{\mu} < \infty$. Donde $\bar{\mu} \in \mathcal{M}_*^1(F)$. Portanto, usando a equação 4.7 e o lema 4.6 temos que

$$h(f,F) = \sup\{h_\mu(f); \mathcal{M}^1(f,F)\} = \sup\left\{\frac{h_{\bar{\mu}}(F)}{\int R d\bar{\mu}}; \mu \in \mathcal{M}(f,F)\right\}$$

$$= \sup\{h_{\bar{\mu}}(F,R); \mu \in \mathcal{M}^1(f,F)\} \leq \sup\{h_\nu(F,R); \nu \in \mathcal{M}^1(F)\} \leq h(f,F)$$

donde

$$h(f,F) = \sup\{h_\nu(F,R); \nu \in \mathcal{M}^1(F)\}$$

provando o corolário. $\square$

Teorema 4.8. *Se $(F,B,\mathcal{P})$ é uma aplicação de Markov induzida completa, com tempo induzido R então $\sum_{n=1}^{\infty} \#\{R = n\} e^{-h(f,F)n} = 1$ e existe uma única probabilidade F-invariante ν_0, tal que*

$$h_{\nu_0}(F,R) = h(f,F) \tag{4.10}$$

Além disso,

1. *ν_0 é a probabilidade de Bernoulli dada por $\nu_0(P) = e^{-h(f,F)R(P)}$, para todo $P \in \mathcal{P}$, em particular $supp\nu_0 = \overline{\bigcup_{P\in\mathcal{P}} P}$;*

2. *se $\int R d\nu_0 < \infty$, então*

   (a). $\mu_0 = \frac{1}{\int R d\nu_0} \sum_{j=0}^{\infty} f_*^j \left(\nu_0|_{R>j}\right)$ é uma probabilidade f-invariante

   (b). $\delta(F) := \frac{1}{\int R d\nu_0} \sum_{n=1}^{\infty} H(\nu_0(\{R = n\})) \in (0, h(f,F))$

   (c). Para todo $t > h(f,F) - \delta(F)$ existe C_t tal que $\int R d\bar{\mu} \leq C_t$ onde $\bar{\mu}$ é o F-levantamento de uma probabilidade $\mu \in \mathcal{M}^1(f,F)$ com $h_\mu(f) \geq t$

3. *se $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \#\{R = n\} < h(f,F)$, então $\int R d\nu_0 < \infty$ e a medida μ_0 dada pelo item 2(a). possui decaimento exponencial de correlações.*

Demonstração. Defina $\mathbb{N}(k) = \{1 \leq n \leq k+1; \{R = n\} \neq \emptyset\}$. Seja ν probabilidade F-invariante, das definições de $H_\nu(\mathcal{P},R)$ e $h_\nu(F,R)$, temos que

$$h_\nu(F,R) \leq H_\nu(P,R) = \limsup_{k\to\infty} \underbrace{\frac{\sum_{n\in\mathbb{N}(k)} \sum_{R(P)=n, P\in\mathcal{P}} H(\nu(P))}{\sum_{n\in\mathbb{N}(k)} n\nu(\{R = n\})}}_{\star} \tag{4.11}$$

Agora, vamos encontrar estimativas para a razão dada por $(\star)$. De fato, a expressão dada por $(\star)$ é limitada pela soma das equações

$$\frac{\sum_{n\in\mathbb{N}(k)} H(\nu(\{R=n\}))}{\sum_{n\in\mathbb{N}(k)} n\nu(\{R=n\})} \tag{4.12}$$

e

$$\frac{\sum_{n\in\mathbb{N}(k)} \Big(\nu(\{R=n\}) \sum_{R(P)=n, P\in\mathcal{P}} H(\frac{\nu(P)}{\nu\{R=n\}})\Big)}{\sum_{n\in\mathbb{N}(k)} n\nu(\{R=n\})} \tag{4.13}$$

As equações (4.12) e (4.13) refletem a comparação entre a complexidade do conjunto $\{R=n\}$ e a distribuições dos níveis. Pela concavidade estrita da função log, temos que a equação 4.13 é limitada por

$$\frac{\sum_{n\in\mathbb{N}(k)} \nu(\{R=n\}) \log \#\{R=n\}}{\sum_{n\in\mathbb{N}(k)} n\nu(\{R=n\})} \tag{4.14}$$

e a igualdade vale se e somente se

$$\nu(P) = \frac{\nu(\{R=n\})}{\#\{R=n\}},\ \forall P\in\mathcal{P} \text{ com } R(P)=n. \tag{4.15}$$

Portanto,

$$(4.12) + (4.13) \leq \frac{\sum_{n\in\mathbb{N}(k)} \nu(\{R=n\}) \Big(\log \#\{R=n\} - \log(\{R=n\})\Big)}{\sum_{n\in\mathbb{N}} n\nu(\{R=n\})} \tag{4.16}$$

E a igualdade ocorre se e somente se ν for dada pela equação (4.15).

Para $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, defina:

$$A(k) := \Big\{\{a_n\}_n; a_n\in[0,1]\ \forall n\in\mathbb{N}, a_n=0 \forall n\notin\mathbb{N}(k),\ \text{e} \sum_{n\in\mathbb{N}(k)} a_n = 1\Big\}.$$

Para todo $A=\{a_n\}_n\in\mathbb{A}(\infty)$, seja ν_A a probabilidade de Bernoulli F-invariante gerada pela distribuição de massa $m(P) = \frac{a_n}{\#\{R=n\}}$, para todo $P\in\mathcal{P}$ com $R(P)=n$ e $n\in\mathbb{N}(\infty)$ daí, definindo

$$c := \sup\left\{\limsup_{k\to\infty} \frac{\sum_{n\in\mathbb{N}(k)} a_n(\log\#\{R=n\} - \log a_n)}{\sum_{n\in\mathbb{N}} na_n}; \{a_n\}_n\in\mathbb{A}(\infty)\right\},$$

das equações (4.11) e (4.16), O lema 4.6 e corolário 4.7, temos que

$$c = \sup\{H_{\nu_A}(\mathcal{P},R); A\in\mathbb{A}(\infty)\} = \sup\{H_\nu(\mathcal{P},R); \nu\in\mathcal{M}^1(F)\} = h(f,F). \tag{4.17}$$

Além disso,

$$\sup\left\{\limsup_{k\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}(k)} a_n(\log\#\{R=n\} - nc - \log a_n); \{a_n\}_n\in\mathbb{A}(\infty)\right\} = 0 \tag{4.18}$$

Dado $k \in \mathbb{N}$, defina $t_k = \sum_{n=1}^{k} e^{-cn}\#\{R = n\} < \infty$, e defina $\{\gamma_n\}_n \in \mathbb{A}(\infty)$ como

$$\gamma_n = \begin{cases} \frac{e^{-cn}\#\{R=n\}}{t_k} & \text{se } n \in \mathbb{A}(k) \\ 0 & \text{se } n \notin \mathbb{A}(k) \end{cases}$$

Da equação (4.18), temos que

$$0 \geq \sum_{n \in \mathbb{N}(k)} \gamma_n(\log \#\{R = n\} - nc - \log \gamma_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}(k)} \gamma_n \log t_k = \log t_k,$$

donde $t_k \leq 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$. portanto $t := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-cn}\#\{R = n\} \leq 1$. Assim, pela proposição 4.2, para $\mathbb{L}(k) = \mathbb{N}(k)$ e $\beta_n = \#\{R = n\}e^{-cn}$. Temos que, se $a_n \in \mathbb{A}(\infty)$, então

$$\limsup_{k\to\infty} \sum_{n \in \mathbb{N}(k)} a_n(\log \#\{R = n\} - nc - \log a_n) = \limsup_{k\to\infty} \sum_{n \in \mathbb{N}(k), a_n \neq 0} a_n \log\left(\frac{e^{-cn}\#\{R = n\}}{a_n}\right)$$

$$\leq \log\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-cn}\#\{R = n\}\right) = \log t,$$

e

$$\limsup_{k\to\infty} \sum_{n \in \mathbb{N}(k)} a_n(\log \#\{R = n\} - nc - \log a_n) = \log t \iff a_n = \frac{\#\{R = n\}e^{-cn}}{t}.$$

Em particular, usando a equação (4.18):

$$\log t = \sup\left\{\limsup_{k\to\infty} \sum_{n \in \mathbb{N}(k)} a_n(\log \#\{R = n\} - nc - \log a_n); \{a_n\}_n \in \mathbb{A}(\infty)\right\} = 0,$$

donde

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-cn}\#\{R = n\} = 1,$$

portanto, se $a_n \in \mathbb{A}(\infty)$:

$$\limsup_{k\to\infty} \sum_{n \in \mathbb{N}(k)} a_n(\log \#\{R = n\} - nc - \log a_n) = 0 \iff a_n = e^{-cn}\#\{R = n\}. \tag{4.19}$$

Das equações (4.15), (4.16), (4.19) e (4.17) temos que, se $\nu \in \mathcal{M}^1(F)$, então

$$H_\nu(\mathcal{P}, R) = h(f, F) \iff \nu(P) = e^{-h(f,F)R(P)}\ \forall P \in \mathcal{P}. \tag{4.20}$$

Em particular, se nu_0 é a probabilidade de Bernoulli F-invariante, definida pela distribuição de massa $m(P) = e^{-h(f,F)R(P)}$, $\forall P \in \mathcal{P}$, da equação (4.20), temos que ν_0 é a única probabilidade de Bernouli F-invariante, satisfazendo 4.10. Portanto, foi provada a seguinte afirmação:

Afirmação 7. *Dada uma aplicação de Markov induzida completa* $(\tilde{F}, \tilde{B}, \tilde{\mathcal{P}})$*, de tempo induzido* $\tilde{R}$*, a probabilidade de Bernoulli* F*-invariante* ν *dada por* $\nu(P) = e^{-h(\tilde{f},\tilde{F})\tilde{R}(\tilde{P})}$, $\forall \tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}$ *é a única probabilidade* F*-invariante de Bernoulli, satisfazendo* $H(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{R}) = h(\tilde{f}, \tilde{F})$.

Seja $\nu \in \mathcal{M}^1(F)$ que satisfaz (4.10), com $\nu \neq \nu_0$, então, existe $l \geq 1$ e um elemento de $P \in \mathcal{P}_l$ tal que $\nu(P) \neq \nu_0(P)$, seja $\bar{\nu}$ probabilidade de Bernoulli, F^l-invariante, obtida pela distribuição de massa $m(P) = \nu(P)$ nos cilindros $P \in \mathcal{P}_l$. Observe que ν_0 é probabilidade de Bernoulli F^l-invariante. Da equação (4.8) temos que $h_\nu(F,R) \leq h_\nu(F^l, R_l)$ e $h_{\nu_0}(F,R) \leq h_{\nu_0}(F^l, R_l)$. Da definição de $\bar{\nu}$ temos que $H_\nu(\mathcal{P}_l, R_l) = H_{\bar{\nu}}(\mathcal{P}_l, R_l)$. Usando o lema 4.6 e o corolário 4.7, obtemos que $h(f,F) = h(f, F^l)$, donde

$$h(f,F^l) = h(f,F) = h_\nu(F,R) \leq h_\nu(F^l, R_l) \leq H_\nu(\mathcal{P}_l, R_l) = H_{\bar{\nu}}(\mathcal{P}_l, R_l) \leq h(f, F^l),$$

similarmente;

$$h(f,F^l) = h(f,F) = h_{\nu_0}(F,R) \leq h_{\nu_0}(F^l, R_l) \leq H_{\nu_0}(\mathcal{P}_l, R_l) \leq h(f, F^l),$$

portanto,

$$H_{\nu_0}(\mathcal{P}_l, R_l) = h(f,F^l) = H_{\bar{\nu}}(\mathcal{P}_l, R_l). \tag{4.21}$$

Assim, como $\bar{\nu}$,ν_0 são probabilidades F^l-invariantes de Bernoulli distintas, a equação 4.21 contradiz a Afirmação 7. Portanto, ν_0 é a única probabilidade em $\mathcal{M}^1(F)$ satisfazendo $H_\nu(\mathcal{P}, R) = h(f,F)$, provando o Item 1.

Suponha, agora, $\int R d\nu_0 < \infty$. O item (a) é um resultado conhecido (vide seção 1.10); o item (b) vem do fato de $\delta(F) \leq \frac{h_{\nu_0}(F)}{\int R d\nu_0} = H_{\nu_0}(\mathcal{P}, R) = h(f,F)$. Seja $t \in (h(f,F) - \delta(F), h(f,F))$, considere a sequência $\{\mu_l\}_l \in \mathcal{M}(f,F)$, tal que $h_{\mu_l}(f) \geq t$. Seja $\bar{\mu}_l \in \mathcal{M}^1(F)$ o F-levantamento de μ_l. Suponha que $\lim_{l\to\infty} \int R d\bar{\mu}_l = \infty$, pelo lema 4.3,

$$\lim_{l\to\infty} \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\sum_{n\in\mathbb{N}(k)} H(\bar{\mu}_l(\{R=n\}))}{\sum_{n=1}^m n\bar{\mu}_l(\{R=n\})} \right) = 0.$$

E, pelas equações (4.11), (4.12) e (4.14), e a definição de ν_0, temos que

$$t \leq \lim_{l\to\infty} \frac{h_{\bar{\mu}_l(F)}}{\int R d\bar{\mu}_l} = 0 + \lim_{l\to\infty} \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{n\in\mathbb{N}(k)} \bar{\mu}_l(\{R=n\}) \log \#\{R=n\}}{\sum_{n\in\mathbb{N}(k)} n\bar{\mu}_l(\{R=n\})}$$

$$\leq \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{n\in\mathbb{N}(k)} \nu_0(\{R=n\}) \log \#\{R=n\}}{\sum_{n\in\mathbb{N}(k)} n\nu_0(\{R=n\})} = \frac{h_{\nu_0}}{\int R d\nu_l} - \delta(f) = h(f,F) - \delta(F)$$

Absurdo, provando, assim, o Item 2.

Como $\sum_{n=1}^\infty e^{-h(f,F)n} \#\{R=n\} = 1$, temos que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \#\{R=n\} \leq h(f,F)$$

Além disso, como $\nu_0(\{R=n\}) = e^{-h(f,F)n}\#\{R=n\}$:

$$\int R d\nu_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-h(f,F)n}\#\{R=n\}$$

daí, definindo $r := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\#\{R=n\} \leq h(f,F)$, e tomando $\epsilon > 0$, tal que $r < h(f,F) - \epsilon$, existe $n_0 \geq 1$, tal que

$$\nu_0(\{R>n\}) = \sum_{k>n} k e^{-h(f,F)k}\#\{R=k\} \leq \sum_{k>n} k e^{-h(f,F)k} e^{nr} \leq$$

$$\sum_{k>n} k e^{-\epsilon k} \leq \sum_{k>n} e^{-\epsilon k/2} = \frac{e^{\frac{\epsilon}{2}n}}{1-e^{-\epsilon/2}},\ \forall n \geq n_0 \tag{4.22}$$

donde $\int R d\nu_0 < \infty$, e o decaimento exponencial das correlações está associado a Equação (4.22).

$\square$

Capítulo 5

Unicidade dos estados de equilíbrio expansores

O objetivo desse capítulo é apresentar os resultados sobre estados de equilíbrio expansores de aplicações C^{1+} fortemente transitivas, obtidos por [21]. Nessa seção será demonstrado que se M é uma variedade riemaninana, $f : M \to M$ é uma aplicação C^{1+}, não-*flat* e fortemente transitiva, então f possui no máximo um estado de equilíbrio expansor. Além disso, será demonstrado que as definições de medidas expansoras 1.8 e 3.5 são equivalentes para uma aplicação C^{1+}, não-*flat*, fortemente transitiva, definida em uma variedade riemanniana.

Definição 5.1 (n-variação)**.** *Seja $(F, B, \mathcal{P})$ uma aplicação de Markov induzida completa, dada uma função $\Phi : \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P \to \mathbb{R}$, defina a n-variação de Φ por*

$$V_n(\Phi) = \sup\{|\Phi(x) - \Phi(y)|; x, y \in Q \text{ e } Q \in \mathcal{P}_n\}.$$

Definição 5.2. *Um potencial Φ possui variação somável se $\sum_{n \in \mathbb{N}} V_n(\Phi) < \infty$.*

5.1 Shift topológico de Markov e Pressão Gurevich.

Nessa seção, mostraremos a definição da pressão de Gurevich de um potencial definido em um *shift* topológico de Markov, que será instrumental para a prova da proposição 5.9. Nessa seção seguiremos [26] na definição de pressão de Gurevich.

Ao longo dessa seção S será um conjunto enumerável e $\mathbf{A} = (t_{ab})_{S \times S}$ será uma matriz, tal que $t_{ab} \in \{0, 1\}$ além disso $\mathbf{A}$ não possui nenhuma coluna ou linha preenchida apenas com zeros.

Definição 5.3 (*Shifts* topológicos de Markov.)**.** *O shifts topológicos de Markov (STM) com um conjunto de estados S e uma matrix de transição $\mathbf{A} = (t_{ab})_{S \times S}$ é o conjunto*

$$\Sigma_{\mathbf{A}}^{+} = \{x \in S^{\mathbb{N} \cup \{0\}}; t_{x_i x_{i+1}} = 1, \forall i \geq 0\}.$$

equipada com a topologia gerada pela coleção de cilindros

$$[a_0, a_1, \ldots a_{n-1}] := \{x \in \Sigma_{\mathbf{A}}^+; x_i = a_i, 0 \geq i \geq n-1\} \ , n \in \mathbb{N} \ e \ a_0, a_1, \ldots a_{n-1} \in S$$

e possuindo uma aplicação de deslocamento a esquerda $\sigma : (x_0, x_1, \ldots) \to (x_1, x_2, \ldots)$. *Se a matriz* $\mathbf{A} = (t_{ab})_{S\times S}$ *não possuir entradas nulas então a STM será chamada de shift completo.*

Definição 5.4 (Palavras)**.** *Uma palavra de comprimento* $n \in \mathbb{N}$ *em um alfabeto* S *é um elemento* $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in S^n$. *A palavra é dita admissível com relação a uma matriz de transição* $\mathbf{A}$ *se o cilindro que a palavra define é não vazio ou, equivalentemente,* $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ *é admissível se e somente se* $\prod_{j=1}^{n-1} t_{a_{j-1}a_j} = 1$.

Notação 3. *Seja* $a, b \in S$, *escreveremos* $a \xrightarrow{n} b$ *se existir uma palavra admissível de comprimento* $n+1$ *que começa em* a *e termina em* b.

Lembre-se que uma aplicação contínua $h : \mathbb{Y} \circlearrowleft$, definida em um espaço topológico $\mathbb{Y}$ é topologicamente *mixing*, se para todo o par de abertos $U, V \subseteq \mathbb{Y}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ dependendo apenas de U e V, tal que, se $N \geq n_0$, então $U \cap T^{-n}(V) \neq \emptyset$. Diremos que o STM $\Sigma_{\mathbf{A}}^+$ será topologicamente *mixing*, se o deslocamento a esquerda $\sigma : \Sigma_{\mathbf{A}}^+ \circlearrowleft$ for topologicamente *mixing*. Pela proposição 1.1 de [26] se $\Sigma_{\mathbf{A}}^+$ é um STM com um conjunto de estados S e matriz de transição $\mathbf{A} = (t_{ab})_{S\times S}$, então $\Sigma_{\mathbf{A}}^+$ é topologicamente *mixing* se e somente para todo $a, b \in S$ existe $n_{a,b}$, tal que, se $n \geq n_{a,b}$ então $a \xrightarrow{n} b$. Em particular, todo *shift* completo é topologicamente *mixing*.

Exemplo 2 (Aplicação de Markov induzida completa.)**.** *Seja* $(F, B, \mathcal{P})$ *uma aplicação de Markov induzida completa, de tempo induzido* R, *seja* $B_0 = \bigcap_{j=0}^{\infty} F^{-j}(B)$ *e* $\{P_1, P_2, \ldots\}$ *uma enumeração de* $\mathcal{P}$. *Defina a função* $h : B_0 \times \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$*:*

$$h(x, n) = j - 1 \ se \ F^n(x) \in P_j$$

como $\lim_{l\to\infty} diam(\mathcal{P}_l(x)) = 0$. *então* $h(x, n) = h(y, n)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se e somente se* $x = y$, *e como* $F(P_j) = B \supset P_{k+1}$, *para todo* $j, k \in \mathbb{N}$, *então, dados* $j, k \in \mathbb{N}$ *existe* $x \in B_0 \cap P_j$ *tal que* $h(x, j) = k$. *Defina agora* $\Sigma = \{(h(x, 0), h(x, 1), h(x, 2), \ldots; x \in B_0)\}$. *Observe que* Σ *é um shift completo com conjunto de estados* $\mathbb{N}$ *possuindo um deslocamento á esquerda dado por*

$$\sigma : (h(x, 0), h(x, 1), h(x, 2), \ldots) \mapsto (h(F(x), 0), h(F(x), 1), h(F(x), 2), \ldots)$$

. *Em particular, como* Σ *é um shift completo, então é topologicamente mixing. Temos ainda que* $\sigma^n((h(x, 0), h(x, 1), h(x, 2) \ldots)) = (h(x, 0), h(x, 1), h(x, 2) \ldots)$ *se e somente se* $F^n(x) = x$.

Definiremos a n-variação de uma função $\Sigma_{\mathbb{A}}^{+} \to \mathbb{R}$ como

$$V_n(\Phi) := \sup\{|\Phi(x) - \Phi(y)|; x, y \in \Sigma_{\mathbb{A}}^{+}, x_i = y_i, \forall 0 \leq i \leq n-1\}.$$

E Φ será Somável se $\sum_{n \in \mathbb{N}} V_n(\Phi) < \infty$. Observe que essas definições são análogas às definições 5.1 e 5.2. Definiremos ainda a soma n-ergódica da função $\Phi : \Sigma_{\mathbb{A}}^{+} \to \mathbb{R}$ como

$$\Phi_n(x) := \sum_{j=1}^{n-1} \Phi_n \circ \sigma(x)$$

Definição 5.5 (Condição de Walters.)**.** *Uma função Φ definida em uma STM $\Sigma_{\mathbf{A}}^{+}$ satisfaz a condição de Walters ,se para todo $k \geq 1$ $\sup_{n \geq 1}\{V_{(n+k)}(\Phi_n)\} < \infty$ E $\sup_{n \geq 1}\{V_{n+k}(\Phi)\} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$.*

Pelo lema 1.1 de [26] temos que toda função somável é Walters.

Definição 5.6. *Dada uma função $\Phi : \Sigma_{\mathbb{A}}^{+} \to \mathbb{R}$ e um $a \in S$, a função n-partição é definida por*

$$Z_n(\Phi, [a]) = \sum_{\sigma^n(x) = x} e^{\Phi_n(x)} \mathbb{1}_{[a]}.$$

Observação 9. *Se $V_n = \{x \in \Sigma_{\mathbb{A}}^{+}; \sigma^n(x) \neq x\}$ e*

$$\Psi(x) = \begin{cases} \Phi(x) & se\ x \notin V_n \\ 0 & se\ x \in V_n \end{cases}$$

, então $Z_n(\Phi, [a]) = Z_n(\Psi, [a])$.

Pelo teorema 1 de [27] temos que se $\Sigma_{\mathbf{A}}^{+}$ é uma STM topologicamente *mixing* e $\Phi : \Sigma_{\mathbf{A}}^{+} \to \mathbb{R}$ é uma função Hölder, então o limite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log Z_n(\Phi, [a])$$

existe e independe de a.

Por fim, estamos em posição de definir a pressão de Gurevich.

Definição 5.7 (Pressão de Gurevich.)**.** *Seja $\Sigma_{\mathbf{A}}^{+}$ é uma STM topologicamente mixing e $\Phi : \Sigma_{\mathbf{A}}^{+} \to \mathbb{R}$ é uma função Hölder, defina a Pressão de Gurevich de Φ como:*

$$P_G(\Phi) := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log Z_n(\Phi, [a]).$$

Observação 10. *Definindo V_n como na Observação 9, $V = \bigcap_{n \geq 1} V_n$ e*

$$\Psi(x) = \begin{cases} \Phi(x) & se\ x \notin V \\ 0 & se\ x \in V \end{cases},$$

então $P_G(\Phi) = P_G(\Psi)$. Assim, se $x \in V$, então x não contribui para a pressão de Guverich.

Observação 11. *Como mostrado no exemplo 2, uma aplicação de Markov induzida completa $(F, B, \mathcal{P})$ em $B_0 = \bigcap_{j=0} F^{-j}(B)$ pode ser interpretado como um shift topológico de Markov, então dado um potencial Hölder Φ definido em B_0 defina a pressão de Gurevich de Φ como*

$$P_G(\Phi) := P_G(\Psi)$$

onde $\Psi : (h(x,0), h(x,1), h(x,2), \dots) \mapsto \Phi(x)$.

Observando ainda que se $x \in B \setminus B_0$ então $x \notin Per(F)$. Temos que x não contribui para a pressão de Gurevich. Assim, dado um potencial Hölder Φ definido em B definiremos a pressão de Gurevich de Φ como

$$P_G(\Phi) := P_G(\Phi|_{B_0}).$$

5.2 Pressão induzida e estados de equilíbrio de potenciais Holder.

Definição 5.8 (Pressão induzida)**.** *Dado um potencial contínuo $\varphi : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ e uma aplicação de Markov induzida completa, defina a pressão F-induzida de φ por*

$$P(\varphi, f, F) := \sup\left\{h_\mu(f) + \int \varphi d\mu; \mu \in \mathcal{M}^1(f, F)\right\}.$$

Proposição 5.9. *Seja $(F, B, \mathcal{P})$ uma aplicação de Markov induzida completa, de tempo induzido R. Se $\varphi : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ é um potencial contínuo com $P(\varphi, f, F) < \infty$ e $\bar{\varphi}$ é somável, onde $\bar{\varphi}$ é o F-levantamento de φ, então existe no máximo um $\mu \in \mathcal{M}^1(f, F)$, tal que*

$$h_\mu(f) + \int \varphi d\mu = P(\varphi, f, F) \tag{5.1}$$

Além disso, se $\mu \in \mathcal{M}^1(f, F)$ satisfaz a Equação então μ possui um único F-levantamento ν, ν é F-ergódica e supp$\nu = \overline{\bigcup_{P \in \mathcal{P}} P}$.

Demonstração. Se $\nexists \mu \in \mathcal{M}^1(f, F)$ satisfazendo a Equação (5.1), nada temos a provar. Assim, assumindo a existência de $\mu \in \mathcal{M}^1(f, F)$ satisfazendo (5.1). Defina $\varphi_0 {=} \varphi - P(\varphi, f, F)$, note que

$$P(\varphi_0, f, F) = \sup\left\{h_\mu(f) + \int \varphi_0 d\mu; \mu \in \mathcal{M}^1(f, F)\right\} = 0$$

Seja $\Phi(x) = \sum_{j=0}^{R(x)-1} \varphi_0 \circ f^j(x)$ Pelos teoremas A.14 e A.15 a pressão de Gurevich de Φ é dada por

$$\begin{aligned} P_G(\Phi) &= \sup\left\{h_\eta(F) + \int \Phi d\eta; \eta \in \mathcal{M}^1(F) \text{ E } \eta\{R \leq n\} = 1, \text{ para algum } n \in \mathbb{N} < \infty\right\} \\ &= \sup\left\{h_\eta(F) + \int \Phi d\eta; \eta \in \mathcal{M}^1(F) \text{ e } \int \Phi d\eta < \infty\right\}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Afirmação 8. $P_G(\Phi) = 0$

Demonstração. Seja ν o F-levantamento de μ. Como $\int R d\nu < \infty$ temos que

$$h_\nu(F) + \int \Phi d\nu = \int R d\nu \left(h_\mu(f) + \int \varphi_0 d\mu \right) = 0.$$

Como $\int \Phi d\nu = (\int R d\nu) \int (\varphi_0 d\mu) = (\int R d\nu)(\varphi d\mu - P(\varphi, f, F)) < \infty$. Da segunda igualdade da Equação (5.2) temos que $P_G(\Phi) \geq 0$.

Seja $l = \min\{j \in \mathbb{N}; \{R \leq j\} \neq \emptyset\}$, temos que $\{R \leq n\}$ é um *shift* completo e compacto para todo $n \geq l$, daí $F\big|_{\{R\leq n\}}$ possui um único estado de equilíbrio $\nu_n \in \mathcal{M}^1(F\big|_{\{R\leq n\}})$ para Φ, $\forall n \geq l$. Da primeira igualdade da equação (5.2) temos que $h_{\nu_n}(F) + \int \Phi d\nu_n \to P_G(\Phi) > 0$ quando $n \to \infty$. Suponha que $P_G(\Phi) > 0$, então existe $n_0 \geq l$ tal que $h_{\nu_n}(F) + \int \Phi d\nu_n$, $\forall n \geq n_0$. Como $\int R d\nu_n \leq n < \infty$, temos que

$$\mu_n = \frac{1}{\int R d\nu_n} \sum_{j\geq 0} f_*^j \left(\nu_n\big|_{\{R>j\}} \right) \in \mathcal{M}^1(f, F)$$

E

$$0 < h_{\nu_n}(F) + \int \Phi d\nu_n = \underbrace{\int R d\nu}_{>0} \Bigg(\underbrace{h_{\mu_n}(f) + \int \varphi_0 d\mu}_{\leq 0} \Bigg) \leq 0$$

o que é um absurdo, daí $P_G(\Phi) = 0$. $\square$

Afirmação 9. $\sup \Phi < \infty$

Demonstração. Como $P_G(\Phi) = 0 < \infty$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} V_n(\Phi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} V_n(\bar{\varphi}) < \infty$, temos que $V_1(\Phi) < \infty$ e Φ é Walters. Do teorema A.16 Φ admite uma probabilidade Gibbs F-invariante η. Como $P_G(\Phi) = 0$, existe $K \geq 1$ tal que

$$\frac{1}{K} \leq \frac{\eta(P)}{e^{\Phi(x)}} \leq K; \forall x \in P \text{ E } P \in \mathcal{P}.$$

donde

$$\Phi(x) \leq \log(K\eta(P)) \leq \log(K) < \infty$$

para todo $x \in \bigcup_{P\in\mathcal{P}} P$. $\square$

Como $\sup \Phi < \infty$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} V_n(\Phi) < \infty$ e $P_G < \infty$, do teorema A.17 temos que existe um único $\nu \in \mathcal{M}^1(F)$ tal que $h_\nu(F) + \int \Phi d\nu$ está bem definido e é maximal. Ou seja,

$$h_\nu(F) + \int \Phi d\nu = \sup \left\{ h_\eta(F) + \int \Phi d\eta; \eta \in \mathcal{M}^1(F) \text{ e } h_\eta(F) + \int \Phi d\eta \text{ está bem definido} \right\}.$$

Além disso,

$$h_\nu(F) + \int \Phi d\nu = P_G(\Phi) = 0,$$

pelo teorema A.18

$$\text{supp}\nu = \overline{\bigcup_{P\in\mathcal{P}} P}$$

donde $\bar{\mu} = \nu$ para todo F-levantamento de uma medida μ satisfazendo (5.1). Portanto,

$$\mu = \frac{1}{\int R d\nu} \sum_{j\geq 0} f_*^j\Big(\nu|_{\{R>j\}}\Big) \in \mathcal{M}^1(f, F)$$

é a única medida satisfazendo (5.1). □

Lema 5.10. *Seja φ um potencial (C,a)-Hölder e $(F,B,\mathcal{P})$ uma aplicação de retorno $(\alpha,\delta,1)$-Zooming, onde $\alpha = \{\alpha_n\}_n$ é uma contração Zooming Lipschitz $\alpha_n(t) = a_n t$ e $a_n \leq a_1$ para todo $n \geq 1$. Seja $r = \sum_{n=1}^\infty C(a_n)^a < \infty$. Se $\bar{\varphi}$ é o F-levantamento de φ, então*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} V_n(\bar{\varphi}) \leq \frac{r}{1-(a_1)^a}(diam(B))^a < \infty.$$

Demonstração. dado $P \in \mathcal{P}$ e $x, y \in P$, temos que

$$|\bar{\varphi}(x) - \bar{\varphi}(y)| = \left|\sum_{j=0}^{R(P)-1} \varphi\circ f^j(x) - \sum_{j=0}^{R(P)-1} \varphi\circ f^j(y)\right| \leq \sum_{j=0}^{R(P)-1} C\text{dist}(f^j(x), f^j(y))^a$$

$$\leq C\left(\text{dist}(F(x),F(y))^a + \sum_{j=0}^{R(P)-2} (a_{R(P)-j-1}\text{dist}(F(x),F(y)))^a\right) \leq$$

$$C\left(1 + \sum_{j=0}^{R(P)-1} (a_n)^a\right)\text{dist}(F(x),F(y))^a \leq r(\text{dist}(F(x),F(y)))^a$$

suponha agora que $n \geq 2$ e para todo $0 \leq k \leq n-1$ vale que

$$|\bar{\varphi}(x) - \bar{\varphi}(y)| \leq r(a_1)^{ak}(\text{dist}(F^k(x), F^k(y)))^a$$

para todo $x, y \in P$ e $P \in \mathcal{P}_k$.

Seja $x, y \in P$ e $P \in \mathcal{P}_n$, com $P = P_1 \cap F^{-1}(P_2) \cap \cdots \cap F^{-(n-1)}(P_n)$ e $P_i \in \mathcal{P}\, \forall 1 \leq i \leq n-1$. Como $x, y \in P$, em particular $x, y \in Q$, onde $Q = P_1 \cap F^{-1}(P_2) \cap \cdots \cap F^{-(n-2)}(P_{n-1})$. Daí:

$$|\bar{\varphi}(x) - \bar{\varphi}(y)| \leq r(a_1)^{a(n-1)}(\text{dist}(F^{n-1}(x), F^{n-1}(y)))^a$$

como $x, y \in F^{n-1}(P_n)$ temos que

$$\text{dist}(F^{n-1}(x), F^{n-1}(y)) \leq a_{R(P_n)}\text{dist}(f^{R(P_n)+\sum_{j=0}^{n-2} R\circ F^j(x)}(x), f^{R(P_n)+\sum_{j=0}^{n-2} R\circ F^j(y)}(y))$$

note agora que, como $F^{n-1}(x), F^{n-1}(y) \in P_n$ então $R \circ F^{n-1}(x) = R(P_n) = R \circ F^{n-1}(y)$, donde

$$\mathrm{dist}(F^{n-1}(x), F^{n-1}(y)) \leq a_{R(P_n)}\mathrm{dist}(f^{\sum_{j=0}^{n-1} R\circ F^j(x)}(x), f^{\sum_{j=0}^{n-1} R\circ F^j(y)}(y)) = a_{R(P_n)}\mathrm{dist}(F^n(x), F^n(y))$$

,portanto, como $a_n \leq a_1$, $\forall n \geq 1$:

$$|\bar{\varphi}(x) - \bar{\varphi}(y)| \leq r(a_1)^{a(n-1)}(a_{R(P_n)}\mathrm{dist}(F^n(x), F^n(y)))^a \leq r(a_1)^{an}(\mathrm{dist}(F^n(x), F^n(y)))^a$$

note, no entanto, que, para todo $n \in \mathbb{N}$ $\mathrm{dist}(F^n(x), F^n(y)) \leq \mathrm{diam}(B)$, daí $\forall n \in \mathbb{N}$ se $x, y \in P$, e $P \in \mathcal{P}_n$, temos que

$$|\bar{\varphi}(x) - \bar{\varphi}(y)| \leq r(a_1)^{an}(\mathrm{diam}(B))^a,$$

donde

$$V_n(\bar{\varphi}) \leq r(a_1)^{an}(\mathrm{diam}(B))^a,$$

e, portanto

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} V_n(\bar{\varphi}) \leq \frac{r}{1-(a_1)^a}(\mathrm{diam}(B))^a < \infty.$$

□

Lema 5.11. *Suponha que f é uma aplicação fortemente transitiva e $\varphi : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ é um potencial Hölder. Se $\mu \in \mathcal{E}(f,l)$ é um estado de equilíbrio expansor ergódico para φ, $l \geq 1$, então $\mu \in \mathcal{E}^*(f,l)$.*

Demonstração. Como $\mu \in \mathcal{E}(f,l)$, então μ é uma probabilidade (α, δ, l)-*zooming*, para alguma contração *zooming* exponencial $\alpha = \{\alpha_n\}_n$ e algum $\delta > 0$. Seja λ tal que $\alpha_n(r) = e^{\lambda n}r$, note que $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-\lambda})^{n/2} \leq \infty$, portanto, pelo teorema 3.10, existe uma aplicação $(F, B, \mathcal{P})$ de retorno $(\tilde{\alpha}, \delta, l)$-*zooming*, com $\tilde{\alpha}_n(r) = e^{\lambda n/2}r$, tal que $\overline{\bigcup_{P\in\mathcal{P}} P} = \overline{B}$, e μ possui um único F-levantamento ν.

Pelo lema 3.12, temos que toda medida F-levantável é $(\tilde{\alpha}, \delta/2, l)$-*zooming*. Como $\tilde{\alpha}$ é contração *zooming* exponencial, segue que

$$\mathcal{M}^1(f, F) \subset \mathcal{E}(f). \tag{5.3}$$

Como $e^{-\lambda} \leq e^{-\lambda n}$ $\forall n$, pelo lema 5.10 temos que $\sum_{n\in\mathbb{N}} V_n(\bar{\varphi}) < \infty$. Onde $\bar{\varphi}$ é o F-levantamento de φ. Da proposição 5.9 e da Equação (5.3) temos que $\nu = \nu_0$, com ν_0 sendo a probabilidade satisfazendo a equação (5.1). Donde $\mathrm{supp}\nu = \mathrm{supp}\nu_0 = \overline{\bigcup_{P\in\mathcal{P}} P} = \overline{B}$. Portanto, $\mu \in \mathcal{E}^*(f,l)$. □

5.3 Unicidade de estados de equilíbrio para aplicações fortemente transitivas.

Nessa seção, mostraremos os resultados obtidos por [21] acerca da unicidade dos estados de equilíbrio de um potencial Hölder. Além disso, estes resultados dão condições suficientes para a existência dos estados de equilíbrio.

Ao longo dessa seção, $\mathbb{X}$ será um espaço métrico compacto e denotaremos $\mathcal{LZ}(f)$ como o conjunto de todas as medidas Lipschitz *Zooming*.

Observação 12. *Se μ é um estado de equilíbrio expansor, pelos teoremas da decomposição ergódica e de Jacobs temos que*

$$P_f(\varphi) = h_\mu(f) + \int \varphi d\mu = \int_{x\in\mathbb{X}} \Big[h_{\eta_x}(f) + \Big(\int \varphi d\eta_x\Big)\Big] d\mu$$

onde η_x são probabilidades invariantes ergódicas e expansoras μ-quase todo $x \in \mathbb{X}$. Observe que se A é conjunto Boreliano, tal que

$$h_{\eta_x}(f) + \int \varphi d\eta_x < P_f(\varphi),$$

então $\mu(A) = 0$. Assim, se μ é um estado de equilíbrio expansor, podemos assumir a existência de ao menos um estado de equilíbrio expansor ergódico. Similarmente, se μ e μ_0 são dois estados de equilíbrio expansores distintos, podemos assumir a existência de pelo menos dois estados de equilíbrio expansores ergódicos distintos.

Teorema 5.12. *Suponha que $\mathcal{LZ}(f) = \mathcal{E}(f)$. Se f é fortemente transitiva e φ é um potencial Hölder, então f possui, no máximo, um estado de equilíbrio expansor para φ.*

Demonstração. Usando a proposição A.13 e usando o mesmo argumento do corolário 3.15 trocando f por f^l, se necessário, podemos assumir que f^n é fortemente transitiva para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja μ_0 e $\mu \in \mathcal{E}(f)$ dois estados de equilíbrio expansores para φ, pela observação 12 podemos assumir que $\mu, \mu_0 \in \mathcal{M}^1_{\text{erg}}(f)$, suponha que $\mu_0 \in \mathcal{E}(f, k_1)$ e $\mu \in \mathcal{E}(f, k_2)$. Seja $k = \text{mmc}(k_1, k_2)$ temos que $\mu \in \mathcal{E}(f, k)$. Como $(f^k)^n$ é fortemente transitiva para todo $n \in \mathbb{N}$, mudando f por f^k se necessário, μ_0 e μ pelas componentes f^k-ergódicas normalizadas de μ_0 e μ, respectivamente, podemos assumir que $\mu_0, \mu \in \mathcal{E}$ são probabilidades ergódicas.

Considere agora λ, δ e a aplicação de retorno $(\beta, \lambda, 1)$-*zooming* $(F, B\mathcal{P})$ dada pelo teorema 3.17, onde $\beta = \{\beta_n\}_n$ e $\beta_n(r) = e^{-\lambda\sqrt{n}}r$ e μ_0 seja F-levantável. Seja $\bar{\mu}_0$ o F-levantamento de μ_0. Como $\mathcal{LZ}(f) = \mathcal{E}(f)$, pelo lema 3.12, toda medida F-levantável é Lipschitz-*zooming*, temos que $\mathcal{M}^1(f, F) \subset \mathcal{E}(f)$.

Pelo lema 5.10, temos que $\sum_{n\in\mathbb{N}} V_n(\overline{\varphi}) \leq \infty$, portanto, pela proposição 5.9 e do fato de $\mathcal{M}(f, F) \subset \mathcal{E}(f)$, μ_0 é o único estado de equilíbrio para φ que é F-levantável. No entanto, do lema 5.11 $\mu \in \mathcal{E}^*(f, 1)$, portanto μ é F-levantável, provando que $\mu = \mu_0$. □

Corolário 5.13. *suponha que $\mathcal{LZ}(f) = \mathcal{E}(f)$. Se f é aplicação fortemente transitiva, $\sup_{x\in\mathbb{X}\setminus\mathcal{C}} \mathbb{D}f(x) < \infty$ e φ é um potencial Hölder satisfazendo $h_\nu(f) + \int \varphi d\nu < P_{\mathcal{E}(f)}(\varphi)$ $\forall \nu \in \mathcal{M}^1(f) \setminus \mathcal{E}(f)$, então f possui apenas um estado de equilíbrio para φ.*

Demonstração. seja $\mu_n \in \mathcal{E}(f)$. tal que $h_{\mu_n}(f) + \int \varphi d\mu_n \to P_{\mathcal{E}(f)}(\varphi)$. Tomando uma subsequência, se necessário, podemos assumir que $\mu_n \to \mu$ para algum $\mu \in \mathcal{M}^1(f)$. Como $\mathcal{M}^1(f) \ni \nu \to \int \varphi d\nu$ é uma aplicação continua, do corolário 3.20, temos que $h_\mu(f) + \int \phi d\mu = P_{\mathcal{E}(f)}$. Pela hipótese do corolário $\mu \in \mathcal{E}(f)$. Provando a existência do estado de equilíbrio expansor para φ. A unicidade desse estado vem do teorema 5.12. □

Teorema 5.14. *Suponha que $\mathcal{LZ}(f) = \mathcal{E}(f)$. Se f é fortemente transitiva, $\sup_{x\in\mathbb{X}\setminus\mathcal{C}} \mathbb{D}f(x) < \infty$ e f possui uma medida expansora de entropia máxima μ_0. Então, existe $\delta_0 > 0$, tal que f possui apenas um estado de equilíbrio μ_ϕ para todo potencial Hölder ϕ com oscilação menor que δ_0.*

Demonstração. Como na prova do teorema 5.12, podemos assumir que f^n é fortemente transitiva para todo $n \in \mathbb{N}$. Mudando f por f^l se necessário podemos assumir que $\mu_0 \in \mathcal{E}(f, 1)$. Seja $(F, B, \mathcal{P})$ a aplicação de primeiro retorno $(\beta, \delta, 1)$-*zooming* dada pelo teorema 3.17. Com $\delta > 0$ e$\beta = \{\beta_n\}_n$, $\beta_n(r) = e^{-\lambda\sqrt{n}}r$ para algum $\lambda > 0$ e μ_0 seja F-levantável.

Pelo teorema 4.8, o F-levantamento de μ_0 é ν_0. Em particular, $\int R d\nu_0 < \infty$. Seja $\delta(F)$ conforme definido no teorema 4.8, tome

$$\gamma = \frac{1}{2}\delta(F)$$

Se um potencial Hölder φ possui um estado de equilíbrio expansor, pelo teorema 5.12 ele precisa ser único. Então,assuma que que existe uma sequência de funções Holder $\{\psi_k\}_k$ tais que $\mathrm{osc}(\psi_k) \to 0$ e ψ_k não possui um estado de equilíbrio para todo $k \in \mathbb{N}$. Pelo lema 5.10, temos que para todo k natural $\sum_{k\in\mathbb{N}} V_n(\psi_k) \leq \infty$. Tomando $a_k = \inf_{x\in\mathbb{X}} \psi_k(x)$ defina as funções de Hölder $\varphi_k = \psi_k - a_n \geq 0$, como $\mathrm{osc}(\psi_k) \to 0$ temos que $||\varphi_k||_{\sup} \to 0$. Além disso, $\sum_{n\in\mathbb{N}} V_n(\varphi_k) \leq \infty$ e φ_k não possui estados de equilíbrio para todo k natural.

Como $\mathcal{LZ}(f) = \mathcal{E}(f)$ e β é uma contração Lipschitz *zooming*, do lema 3.12, que $\mathcal{M}^1(f, F) \subset \mathcal{E}(f)$. Portanto, como φ_k não possui um estado de equilíbrio, podemos escolher $\{\mu_n\}_n \in \mathcal{M}^1(f, F)$, tal que $h_{\mu_n}(f) + \int \varphi_k d\mu_n > P(\varphi_k, f, F) - 1/n \to h(\mathcal{E}(f))$ se $n, k \to \infty$, e

$$\int R d\bar{\mu}_n \geq n \tag{5.4}$$

onde $\bar{\mu}_n$ é o F-levantamento de μ_n. Como $\int \varphi_k d\bar{\mu}_n \to 0$ quando $k \to \infty$, temos que $h_{\mu_n}(f) \to h(\mathcal{E}(f))$. Donde existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $h_{\mu_n}(f) \geq t := h(\mathcal{E}(f)) - \gamma$ para todo

$k \geq k_0$. Pelo teorema 4.8, temos que $\int R d\bar{\mu}_n \leq C_t$ para algum $C_t > 0$ e todo $n \geq n_0$. contradizendo a equação (5.4). □

Corolário 5.15. *Suponha que $\mathcal{LZ}(f) = \mathcal{E}(f)$. Se f é fortemente transitiva, $\sup_{x \in \mathbb{X} \setminus \mathcal{C}} \mathbb{D}f(x) < \infty$ e $h_\eta(f) \leq h(\mathcal{E}(f))$ para todo $\eta \in \mathcal{M}^1(f) \setminus \mathcal{E}$, então existe $\delta_0 > 0$, tal que se φ é um potencial Hölder de oscilação menor que δ_0, então f possui apenas um estado de equilíbrio μ_φ para φ.*

Demonstração. Seja $\{\mu_n\}_n \in \mathcal{E}(f)$ tal que $\lim_n h_{\mu_n}(f) = h(\mathcal{E}(f))$. Tomando uma subsequência se necessário podemos assumir que $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu \in \mathcal{M}(f)$. Pelo corolário3.20 temos que $h_\mu(f) \geq \lim_{n\to\infty} h_{\mu_n}(f) = h(\mathcal{E}(f))$. Como estamos assumindo que $h(\mathcal{E}(f))$ para todo $\eta \in \mathcal{M}^1(f) \setminus \mathcal{E}$, temos que $\mu \in \mathcal{E}(f)$ e $h_\mu(f) = h(\mathcal{E}(f))$ é medida de máxima entropia, daí aplicando o teorema 5.14 obtemos o resultado do corolário. □

5.4 Unicidade de estados de equilíbrio em variedades riemannianas.

Ao longo dessa seção, M será uma variedade riemaninana, $f : M \setminus \mathcal{C} \to M$ será um difeomorfismo local C^{1+}, com extensão contínua $\bar{f} : M \circlearrowleft$, tal que $\#\bar{f}^{-1}(x) < \infty, \forall x \in M$, $\mathcal{C}$ será o conjunto crítico/singular não degenerado de f (vide definição 1.6). É imediato que f satisfaz todas as condições de um homeomorfismo local bi-Lipschitz.

Nessa seção mostraremos os resultados originalmente obtidos por [21] acerca da existência e unicidade dos estados de equilíbrio de um potencial Hölder em uma variedade riemanniana. Para tanto, [21] provou casos particulares dos teoremas 5.12 e 5.14 e corolários 5.13 e 5.15. Inicialmente é necessário mostrar que os expoentes de Liapnov positivos implicam em medidas não uniformemente expansoras (NUE). Depois, [21] provou que medidas que possuem apenas expoentes de Lyapunov positivos, são medidas *Zooming* associadas a uma contração *zooming* exponencial. Por fim, é necessário mostrar que $\mathcal{LZ}(f) = \mathcal{E}(f)$.

Lema 5.16 (Oliveira)**.** *Seja M uma variedade riemanniana compacta, $f : M \setminus \mathcal{C} \to M$ um difeomorfismo local C^{1+}, e $\mathcal{C}$ o conjunto crítico/singular não degenerado de f. Se $\mu \in \mathcal{M}^1(f)$ é uma medida expansora (segundo a Definição 1.8), com todos os expoentes de Lyapunov maiores que algum $\lambda > 0$ então existe $l \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log ||(Df^{jl}(x))^{-1}||^{-1} \geq \frac{\lambda}{4} \tag{5.5}$$

para μ-quase todo $x \in M$.

Demonstração. Inicialmente suponha $\mu \in \mathcal{M}^1_{\text{erg}}(f)$, pela condição 1 da Definição 1.6 temos que

$$|\log ||(Df(x))^{-1}||\,| \leq \log B + \beta|\log \operatorname{dist}(x, \mathcal{C})|,$$

defina $M' := \{x \in M; \operatorname{dist}(x, \mathcal{C}) > 1\}$, daí,

$$\int_M |\log ||(Df(x))^{-1}||\,| d\mu \leq \log B + \beta \int_M |\log \operatorname{dist}(x, \mathcal{C})| d\mu$$

$$= \log B + \beta\left(\int_{M'} |\log \operatorname{dist}(x, \mathcal{C})| d\mu + \int_{M \setminus M'} |\log \operatorname{dist}(x, \mathcal{C})| d\mu \right)$$

note que se $x \in M'$, então $0 < \log \operatorname{dist}(x, \mathcal{C}) < \log \operatorname{diam}(M)$ e se $\mathbb{1}_{M \setminus M'}$ é a função característica de $M \setminus M'$, então $[\log \operatorname{dist}(x, \mathcal{C})]\mathbb{1}_{M \setminus M'} = \operatorname{dist}_1(x, \mathcal{C}) \leq 0$, daí, pela recorrência lenta ao conjunto crítico (vide definição 1.8):

$$\int_M |\log ||(Df(x))^{-1}||\,| d\mu \leq \log B + \beta\left(\operatorname{diam} M - \int_M \log \operatorname{dist}_1(x, \mathcal{C}) d\mu \right) < \infty.$$

Portanto, $\log ||(Df(x))^{-1}||$ é μ-integrável. Agora, prosseguiremos como o lema 3.5 de [15]. Como todos os expoentes de Lyapunov de μ são maiores que $\lambda > 0$, então para μ-quase todo x existe $n_0(x)$, tal que, se $n \geq n_0(x)$, então $|Df^n(x)v| \geq e^{(\lambda/2)n}|v|$, para todo $v \in T_xM$. Defina $A_k = \{x \in M; n_0(x) \leq k\}$ e $A_k^c = M \setminus A_k$. É claro que $\mu(A_k^c) \to 0$ quando $k \to \infty$. Observe ainda que

$$\int_M \frac{1}{k} \log ||Df^k(x)^{-1}|| d\mu = \int_{A_k} \frac{1}{k} \log ||Df^k(x)^{-1}|| d\mu + \int_{A_k^c} \frac{1}{k} \log ||Df^k(x)^{-1}|| d\mu$$

$$\leq -\frac{\lambda}{2}\mu(A_k) + \int_{A_k^c} \frac{1}{k} \log ||Df^k(x)^{-1}|| d\mu \leq -\frac{\lambda}{2} + \int_{A_k^c} \frac{1}{k} \log ||Df^k(x)^{-1}|| d\mu \tag{5.6}$$

Como $\mu(A_k^c) \to 0$ quando $k \to \infty$ e $\log ||(Df^k(x))^{-1}||$ é μ-integrável então existe l_0, tal que, se $l \geq l_0$, então

$$\left| \int_{A_k^c} \frac{1}{k} \log ||Df^k(x)^{-1}|| d\mu \right| \leq \frac{\lambda}{4},$$

portanto, pela equação 5.6

$$\int_M \frac{1}{l} \log ||Df^l(x)^{-1}|| d\mu \leq -\frac{\lambda}{4}. \tag{5.7}$$

Usando o teorema ergódico de Birkhoff e a Equação 5.7, obtemos o resultado.

Supondo agora que $\mu \in \mathcal{M}^1(f) \setminus \mathcal{M}^1_{\text{erg}}(f)$. temos que, pelo teorema da decomposição Ergódica, μ pode ser escrito como

$$\mu = \int_{y \in M} \eta_y d\mu$$

onde η_y são probabilidades invariantes ergódicas e expansoras μ-quase todo $y \in M$.

Afirmação 10. *Se A é um conjunto Borel-mensurável então $\mu(A) = 0$ se e somente se $\eta_y(A) = 0$ para μ-quase todo $y \in M$.*

Demonstração. Ao longo da prova $B = \{y \in M; \eta_y(A) > 0\}$, e $B^c = M \setminus B$. Observe que, pelo teorema da decomposição ergódica, B é mensurável.

($\Longrightarrow$) Se $\mu(A) = 0$, então

$$0 = \mu(A) = \int_{y \in M} \eta_y(A) d\mu \geq \int_{y \in B} \eta_y(A) d\mu \geq 0.$$

Como $\eta_y(A) > 0$ para todo $y \in B$, então $\mu(B) = 0$.

($\Longleftarrow$) Se para μ-quase todo $y \in M$ $\eta_y(A) = 0$, então como $\mu(B) = 0$ temos que

$$\mu(A) = \int_{y \in M} \eta_y(A) d\mu = \int_{y \in B^c} \eta_y(A) d\mu = 0$$

$\square$

Pela afirmação 10 que η_y possuirá todos os expoentes de Lyapunov maiores que $\lambda > 0$ para μ-quase todo $y \in M$. Pois, por hipótese,

$$\mu\Big(\Big\{x \in M; \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log |Df^n(x)v| < \lambda\Big\}\Big) = 0,$$

, portanto, pela primeira parte da prova para μ-quase todo $y \in M$:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log ||(Df^{jl}(x))^{-1}||^{-1} \geq \frac{\lambda}{4}.$$

η_y- quase todo $x \in M$. Donde

$$\eta_y\Big(\Big\{x \in M \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log ||(Df^{jl}(x))^{-1}||^{-1} < \frac{\lambda}{4}\Big\}\Big) = 0$$

para μ quase todo $y \in M$. Assim,usando novamente a afirmação 10, obtemos o resultado.

$\square$

Corolário 5.17. *Seja M uma variedade riemanniana, $f : M \setminus \mathcal{C} \to M$ um difeomorfismo local C^{1+}, e $\mathcal{C}$ o conjunto crítico/singular não degenerado de f. Se $\mu \in \mathcal{M}^1(f)$ é uma medida expansora (segundo a Definição 1.8), então μ é uma medida zooming com uma contração zooming exponencial.*

Demonstração. Do lema 5.16, temos que vale a equação (5.5) para μ-quase todo $x \in M$. Assim, seja $x \in M$, tal que a Equação (5.5) é válida, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n_0 > N$, então

$$\sum_{j=0}^{n_0-1} \log ||(Df^{jl}(x))^{-1}||^{-1} \geq \frac{\lambda}{8} n_0$$

daí, seja $A = \sup\{\log ||(Df^{jl}(x))^{-1}||^{-1}; 1 \le j \le n_0\}$ $c_1 = \frac{\lambda}{16}$ e $c_2 = \frac{\lambda}{8}$, pelo lema de Pliss (A.19), temos que, se $\theta_0 = \frac{c_1 - c_2}{A - c_1}$, então existem $k > \theta_0 n_0$ e $1 < n_1 \ldots, n_l < n_0$, tais que:

$$\sum_{j=n}^{n_i - 1} \log ||(Df^{jl}(x))^{-1}||^{-1} \ge \frac{\lambda}{16}(n_i - n) \ \forall 0 \le n < n_i \text{ e } 1 \le i \le l.$$

portanto,

$$-\log \left(\prod_{j=0}^{n_i} |(Df^{jl}(x))^{-1}|| \right) \ge \frac{\lambda}{16}(n_i)$$

$$\prod_{j=0}^{n_i} ||(Df^{jl}(x))^{-1}|| \le e^{-(\lambda/16)n_i}.$$

Assim, prosseguindo como na prova dos itens (1) e (2) da proposição 1.2 de [17], obtemos o resultado. □

Corolário 5.18. *Seja M uma variedade riemanniana, $f : M \setminus \mathcal{C} \to M$ um difeomorfismo local C^{1+} e $\mathcal{C}$ o conjunto crítico/singular não-flat de f. Então, toda medida invariante possuindo apenas expoentes de Lyapunov positivos é uma medida Zooming com contração zooming exponencial.*

Demonstração. Vide observação 1 □

Lema 5.19. *Seja M uma variedade riemanniana, $\Lambda \subset M$ um conjunto magro, e $g : M \setminus \Lambda \to M$ um difeomorfismo local C^1. Se $\mu \in \mathcal{M}^1(g)$ é uma medida zooming associada a uma contração zooming Lipschitz, então todos os expoentes de Lyapunov de μ são positivos.*

Demonstração. Suponha que μ é uma medida (α, δ, l)-*zooming* para alguma contração Lipschitz *zooming*, $\delta > 0$ e $l \in \mathbb{N}$. além disso, pelo teorema de Jacobs vamos assumir que $\mu \in \mathcal{M}^1_{\text{erg}}(g)$ Seja $0 < a_n < 1$, tal que $\alpha_n(r) = a_n r$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Do teorema 2.31 temos que existe uma aplicação induzida de retorno (α, δ, l)-*zooming* $(G, B, \mathcal{P})$, de tempo induzido R, tal que μ é G-levantável para algum $\nu \in \mathcal{M}^1(G)$.

Como $a_n \to 0$, existe n_0 tal que $a_n \le a_1$ $\forall n > n_0$, seja $a_{n_1} = \max\{a_1, \ldots, a_{n_0}\}$, note que $(G\big|_P)^{-1}$ é uma, a_{n_1}-contração para todo $P \in \mathcal{P}$. Portanto, dado $x \in B_0 := \bigcap_{n \ge 0} G^{-n}(B)$ e $v \in T_x M$, definindo $s_n = \sum_{j=0}^{n-1} R \circ G^j(x)$:

$$\frac{1}{s_n(x)} \log |Dg^{s_n(x)}(x)v| = \frac{n}{s_n} \frac{1}{n} \log |DG^n(x)v| \ge \frac{n}{s_n} \frac{1}{a_{n_1}}.$$

Como $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{s_n} = \frac{1}{\int R d\nu} > 0$ para ν-quase todo $x \in B_0$ e μ-quase todo $x \in B_0$. Como $\mu(B_0) > 0$, existe um conjunto de medida μ-positiva tal que $\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log |Dg^n(x)v| \ge \lambda := \frac{1}{a_{n_1} \int R d\nu} > 0$ para todo $v \in T_x M$. Portanto, pela g-ergodicidade e g-invariância de μ, temos que todos os expoentes de Lyapunov são positivos. □

Dos lemas 5.16, 5.19 e do corolários 5.17 é possível obter resultados análogos para o teorema 5.12, corolário 5.13, teorema 5.14 e corolário 5.15, respectivamente.

Teorema 5.20 ([21]). *Se $f : M \setminus \mathcal{C} \to M$ é um difeomorfismo local C^{1+}, fortemente transitivo com região crítica/singular não degenerada $\mathcal{C}$, então f possui no máximo um estado de equilíbrio expansor μ_φ para todo potencial Hölder φ.*

Corolário 5.21 ([21]). *Se $f : M \setminus \mathcal{C} \to M$ é um difeomorfismo local C^{1+}, fortemente transitivo com região crítica/singular não degenerada $\mathcal{C}$, e $\sup_{x \in M \setminus \mathcal{C}} ||Df(x)|| < \infty$, então f possui um único estado de equilíbrio μ_φ para todo potencial φ Hölder e expansor (ou seja, $h_\nu(f) + \int \varphi d\nu < P_{\mathcal{E}(f)}(\varphi)$ $\forall \nu \in \mathcal{M}^1(f) \setminus \mathcal{E}(f)$).*

Teorema 5.22 ([21]). *Se $f : M \setminus \mathcal{C} \to M$ é um difeomorfismo local C^{1+}, fortemente transitivo com região crítica/singular não degenerada $\mathcal{C}$, e $\sup_{x \in M \setminus \mathcal{C}} ||Df(x)|| < \infty$. Se f admite uma medida de entropia expansora máxima, existe $\delta_0 > 0$ tal que f possui um único estado de equilíbrio expansor μ_φ para todo potencial φ Hölder com oscilação menor que δ_0.*

Corolário 5.23 ([21]). *Se $f : M \setminus \mathcal{C} \to M$ é um difeomorfismo local C^{1+}, fortemente transitivo com região crítica/singular não degenerada $\mathcal{C}$, e $\sup_{x \in M \setminus \mathcal{C}} ||Df(x)|| < \infty$. Se $h_\mu(f) < h(\mathcal{E}(f))$ para todo $\mu \in \mathcal{M}^1(f) \setminus \mathcal{E}(f)$, então existe $\delta_0 > 0$ tal que f possui um único estado de equilíbrio μ_φ para qualquer potencial Hölder φ com oscilação menor que δ_0.*

Os teoremas 5.20 e 5.22 são os teoremas A e C de [21], respectivamente, e os corolários 5.21 e 5.23 são os corolários B e D de [21], respectivamente.

5.5 Suporte de uma medida ergódica expansora

Nessa seção seguiremos [21], seção 7.3 na decomposição do suporte de uma probabilidade ergódica em dois subconjuntos disjuntos. O primeiro será um conjunto aberto e denso, chamado de "pontos livres"e um conjunto compacto e magro, chamado de "pontos confinados". Na componente livre, segundo [21], o Formalismo termodinâmico é bem entendido. Já na componente confinada, não se pode obter, no geral, muitas propriedades relevantes, no entanto existem alguns casos especiais (como aplicações definidas no intervalo) em que podemos obter algumas informações sobre a componente confinada.

Ao longo dessa seção M será uma variedade riemanniana e Λ será um conjunto fechado tal que $\Lambda = \overline{\text{interior}(\Lambda)}$ e $f : \Lambda \to \Lambda$ será um difeomorfismo local C^{1+} em $\Lambda \setminus \mathcal{C}$, com $\mathcal{C}$ sendo a região crítica/singular, não-*flat* de f.

Dado $x \in \Lambda$, defina a região não crítica do conjunto α-limite do ponto $x \in \Lambda$, denotado por $\alpha_f^0(x)$, como todos os pontos $y \in \Lambda$ tal que existe sequencia dos naturais $n_j \to \infty$ e $x_j \in f^{-n_j}(x)$, tal que $\{x_j, f(x_j), \dots, f^{n_j-1}(x_j)\} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ e $\lim_{j\to\infty} x_j = y$. Ou seja, definindo $f_0 := f\big|_{\Lambda\setminus\mathcal{C}}$, então $\alpha_f^0(x) = \alpha_{f_0}(x)$ (vide definição 3.1).

Definição 5.24 (Pontos livres e confinados.)**.** *Um ponto $x \in \Lambda$ é f-confinado se $\alpha_f^0(x) \neq \Lambda$, do contrário x é chamado de ponto f-livre. O conjunto de todos os pontos f-livres será denotado por $\mathcal{F}(f)$.*

Lema 5.25. *Se f é transitiva e interior$\mathcal{F}(f) \neq \emptyset$, então $\mathcal{F}(f)$ é um subconjunto aberto e denso de Λ, tal que $f(\mathcal{F}(f) \setminus \mathcal{C}) = \mathcal{F}(f)$. Em particular, $f\big|_{\mathcal{F}\setminus\mathcal{C}}$ é fortemente transitiva. Além disso,*

1. *$\partial(\mathcal{F}(f))$ é o conjunto de todos os pontos f-confinados;*
2. *$\alpha_f^0(x) \subset \partial(\mathcal{F}(f))$ para todo $x \in \partial(\mathcal{F}(f))$;*
3. *$\partial\Lambda \subset \partial(\mathcal{F}(f))$;*
4. *se f é fortemente transitiva, então $\partial\Lambda \subset \partial(\mathcal{F}(f)) \subset \mathcal{O}_f^+(\mathcal{C})$.*

Demonstração. Inicialmente provemos a seguinte afirmação:

Afirmação 11. *Dado $x \in \mathcal{F}(f)$ existe aberto $V \subset \mathcal{F}(f)$, com $V \cap \mathcal{C} = \emptyset$ tal que $f(V)$ é vizinhança de aberta de x.*

Demonstração. Como $x \in \mathcal{F}(f)$, então $\alpha_f^0(x) = \Lambda$, daí, dado $p \in \text{interior}(\mathcal{F}(f))$, temos que existe sequência $x_j \in f^{n_j}(x)$, tal que $x_j \to p$. Assim, existe j_0, tal que, se $j \geq j_0$, então $x_j \in \text{interior}(\mathcal{F}(f))$. Defina $q := x_{j_0}$. Assim, $f^{j_0}(q) = x$ e $q \in \text{interior}(\mathcal{F}(f))$. Fixe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que $B_\epsilon(q) \subset \text{interior}(\mathcal{F}(f))$ e $f^{j_0}\big|_{B_\epsilon(q)}$ é um homeomorfismo. Definindo $W := f^{j_0}(B_\epsilon(q))$, temos que W é um conjunto aberto contendo x. Além disso, como $f^{j_0}\big|_{B_\epsilon(q)}$ é um homeomorfismo, obtemos que para todo $y \in B_\epsilon(q)$ $\alpha_f^0(f^{j_0}(y)) \supset \alpha_f^0(y) \supset \Lambda$ donde $W \subset \mathcal{F}(f)$. Similarmente, $V = f^{j_0-1}(B_\epsilon(q))$ é um aberto contido em $\mathcal{F}(f)$, tal que $V \cap \mathcal{C} = \emptyset$ e $f(V) = W \ni x$. $\square$

Segue imediatamente da afirmação 11 que $\mathcal{F}(f)$ é aberto e $f(\mathcal{F}(f) \setminus \mathcal{C}) = \mathcal{F}(f)$. Pela transitividade de f e, como $\mathcal{F}(f)$ é um conjunto positivamente invariante e aberto, então $\mathcal{F}(f)$ é denso em Λ. Como para todo $y \in \mathcal{F}(f)\setminus\mathcal{C}$ temos que $\alpha^0_{f|_{\mathcal{F}(f)\setminus\mathcal{C}}}(y) = \alpha_f^0(y) = \Lambda \supset \mathcal{F}(f)$, donde $f\big|_{\mathcal{F}(f)\setminus\mathcal{C}}$ é uma aplicação fortemente transitiva. Como $\mathcal{F}(f)$ é um conjunto aberto e denso, por definição $\partial(\mathcal{F}(f)) = \Lambda \setminus \mathcal{F}(f)$, daí, $\partial(\mathcal{F}(f))$ é o conjunto de pontos confinados.

Seja $x \in \Lambda$, tal que $\alpha_f^0(x) \cap \mathcal{F}(f) \neq \emptyset$, então existe $p \in \mathcal{F}(f)$ e $n \in \mathbb{N}$, tal que $f^n(p) = x$. Assim, usando o mesmo argumento da prova da afirmação 11, podemos concluir que $x \in \mathcal{F}(f)$. Daí, $\alpha_f^0(x) \subset \partial(\mathcal{F}(f))$ para todo $x \in \partial(\mathcal{F}(f))$.

Da afirmação 11 e da definição de $\partial\Lambda$, temos que $\partial\Lambda \cap \mathcal{F}(f) = \emptyset$, donde $\partial\Lambda \subset \partial(\mathcal{F}(f))$.

Por fim, suponha que f é uma aplicação fortemente transitiva, seja $x \in \partial(\mathcal{F}(f))$, como $\alpha_f(x) = \Lambda$ e $x \notin \mathcal{F}(f)$, então $\mathcal{O}_f^-(p) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$, donde $p \in \mathcal{O}_f^+(\mathcal{C})$. □

Lema 5.26. *Seja α contração Zooming, $\delta > 0$. Se $\mu \in \mathcal{M}^1_{erg}(f)$ é uma medida fracamente $(\alpha, \delta, 1)$-zooming com interior$(supp\mu) \neq \emptyset$, então, definindo*

$$U := \{x \in supp\mu; \alpha_f(x) \supset supp\mu\}$$

contém um conjunto aberto e denso de suppμ, com $\mu(U) = 1$ e $f^*(U) = U$. Em particular, $f\big|_U$ é fortemente transitivo.

Demonstração. Deninindo $V = \text{interior}(\text{supp}\mu)$. como $f^*(\text{supp}\mu) \subset \text{supp}\mu$ e f^* é aplicação aberta, temos que $f^*(V) \subset V$, daí, pela f-invariância e f-ergodicidade de μ, temos que $\mu(V) = 1$.

Defina

$$\omega_{\mathcal{Z}}(x) = \Big\{y \in M; y = \lim_{j\to\infty} f^{n_j}(x) \text{ com } n_j \to \infty \text{ e } x \in \mathcal{Z}_{n_j}(\alpha, \delta, 1)\Big\}.$$

Ou seja, $\omega_{\mathcal{Z}}$ é o conjunto formado pelos pontos de acumulação dos iterados de x nos tempos $(\alpha, \delta, 1)$-*zooming*. Da observação 5 e do lema A.8 obtemos a existencia de um compacto $\mathcal{A}_{\mathcal{Z}}$ tal que $\omega_{\mathcal{Z}(x)} = \mathcal{A}_{\mathcal{Z}}$ μ-quase sempre. Como V é aberto, μ é fracamente *zooming* e pela contração no passado nos tempos *Zooming* temos que para μ-quase todo $x \in V$, existe n tal que $V_n(\alpha, \delta, 1) \subset V$. Assim, pela invariância de V, e pelo fato de todo ponto $\mathcal{A}_{\mathcal{Z}}$ ser acumulado pelo centro das bolas *zooming* de raio δ, garantem que

$$B_\delta(\mathcal{A}_{\mathcal{Z}}) := \{x \in M; \text{dist}(x, \mathcal{A}_{\mathcal{Z}})\} \subset V.$$

Daí, podemos construir uma aplicação de primeiro retorno $(\alpha, \delta, 1)$-*zooming* $(F, B, \mathcal{P})$, onde $B = B_r^*(p)$ para um ponto $p \in \mathcal{A}_{\mathcal{Z}}$ e $r \in (0, \delta/2)$ suficientemente pequeno. Note que $B \subset B_R(p) \subset B_r(p) \subset B_\delta(\mathcal{A}_{\mathcal{Z}})$ são subconjuntos abertos de suppμ. Daí, $\alpha_f(x) \supset \alpha_F(x) = \overline{B}$, para todo $x \in \overline{B}$. Da invariância e ergodicidade de μ, temos que $\mu\big(\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(B)\big) = 1$. Como $\alpha_f(x) \supset \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(B)$ para todo $x \in B$, temos que $\alpha_f(x) \supset \text{supp}\mu$ para todo $x \in B$. Daí $U \supset B$.

Afirmação 12. *Dado $x \in U$, existe conjunto aberto $W \subset U$ com $W \cap \mathcal{C} = \emptyset$ tal que $f(W)$ é vizinhança aberta de x.*

Demonstração. Dado $x \in U$, como $\alpha_f(x) \supset \text{supp}\mu$, temos que existe $j_k \geq 0$ e $q \in B$ tal que $x = f^{j_k}(q)$, daí, prosseguindo como na afirmação 11 obtemos a prova da presente afirmação. □

Assim, da afirmação 12 que U é aberto e $f^*(U) = U$. Como μ é ergódica, f-invariante e $\mu(U) > 0$ temos que $\mu(U) = 1$. Portanto, U é denso em suppμ. □

Definição 5.27. *Uma função contínua $\phi : \Lambda \to \mathbb{R}$ é um potencial livremente expansor, se*

$$h_\mu(f) + \int \varphi d\mu < P_{\mathcal{E}(f|_{\mathcal{F}(f)})}(\varphi), \ \forall \mu \in \mathcal{M}(f) \setminus \mathcal{E}\Big(f\big|_{\mathcal{F}(f)}\Big).$$

Teorema 5.28. *Seja M uma variedade riemanniana, $f : M \to M$ uma aplicação C^{1+} com um conjunto crítico não-flat $\mathcal{C}$. Seja μ uma probabilidade ergódica invariante e expansora com suporte gordo. Escrevendo $g = f\big|_{supp\mu}$, temos que $\mathcal{F}(g)$ é um conjunto aberto e denso de suppμ, com $\mu(\mathcal{F}(g)) = 1$ e tal que $g(\mathcal{F}(g) \setminus \mathcal{C}) = \mathcal{F}(g)$. Em particular, $g\big|_{\mathcal{F}(g)\setminus\mathcal{C}}$ é fortemente transitiva. Além disso,*

1. *$\partial(\mathcal{F}(g))$ é o conjunto de todos os pontos g-confinados;*
2. *$\alpha_g^0(x) \subset \partial(\mathcal{F}(g))$ para todo $x \in \partial(\mathcal{F}(g))$;*
3. *$\partial supp\mu \subset \partial(\mathcal{F}(g))$;*
4. *Se g é fortemente transitiva então $\partial supp\mu \subset \partial(\mathcal{F}(g)) \subset \mathcal{O}_g^+(\mathcal{C})$;*
5. *Se φ é potencial Hölder então g possui no máximo um estado de equilíbrio expansor μ_φ com $supp\mu_\varphi = supp\mu$. Além disso, se ν é um estado de equilíbrio expansor ergódico para φ, com $supp\nu \subsetneq supp\mu$, então $supp\nu \subset \partial(\mathcal{F}(g))$;*
6. *Suponha que g possui uma medida de máxima entropia com suporte gordo. Se φ é um potencial Hölder com oscilação suficientemente pequena , então existe apenas um estado de equilíbrio expansor μ_φ, tal que $supp\mu_\varphi = supp\mu$. Além disso, se ν é um estado de equilíbrio expansor ergódico para φ, com $supp\nu \subsetneq supp\mu$, então $supp\nu \subset \partial(\mathcal{F}(g))$;*
7. *Dado um potencial Hölder φ existe $\mu_0 \in \mathcal{M}^1(g)$, tal que $h_{\mu_0}(g) + \int \varphi d\mu_0 \geq P_{\mathcal{E}(g|_{\mathcal{F}(g)})}(\varphi)$.*
8. *Se φ é potencial Hölder livremente expansor para g, então g possui apenas um estado de equilíbrio μ_φ para φ. Além disso, $\mu_\varphi \in \mathcal{E}(g)$ e $supp\mu_\varphi = supp\mu$.*

Demonstração. Tome $g_0 = g\big|_{\text{supp}\mu\setminus C}$, temos que μ é uma probabilidade g_0-invariante, g_0-ergódica e expansora. a Além disso interior(suppμ) $\neq \emptyset$. Como $\alpha_g^0(x) = \alpha_{g_0}(x)$, do lema 5.26, temos que $\mathcal{F}(g)$ é um subconjunto aberto e denso de suppμ (portanto g é transitiva) com $\mu(\mathcal{F}(g)) = 1$ e $g(\mathcal{F}(g) \setminus \mathcal{C}) = \mathcal{F}(g)$.

Prova dos itens 1 até 6: Como interior$(\mathcal{F}(f)) \neq \emptyset$ e g é transitiva em suppμ temos que os itens 1 ao 4 seguem diretamente do lema 5.25, como $g_1 := g\big|_{\mathcal{F}(g)\setminus\mathcal{C}}$ é uma aplicação fortemente transitiva, temos pelo teorema 5.20 que g_1 possui no máximo um único estado de equilíbrio expansor μ_φ para um potencial Hölder φ dado. Note agora que se $\nu \in \mathcal{M}^1_{erg}(g) \setminus \mathcal{M}^1(g_1)$ então $\nu(\mathcal{F}(g)) = 0$ ou $\nu(\mathcal{C}) = 1$, daí, se $\nu \in \mathcal{E}(g) \cap (\mathcal{M}^1_{erg}(g) \setminus \mathcal{M}^1(g_1))$ então $\nu(\mathcal{F}(g)) = 0$, pelo lema 5.11 todo estado de Equilíbrio expansor e ergódico de g_1 pertence a $\mathcal{E}^*(g_1)$, daí supp$\mu_0 \supset \mathcal{F}(g)$, e como $\mathcal{F}(g)$ é denso em supp(μ) temos que supp$(\mu_0) =$ supp(μ), e, assim, obtemos o item 5. Pelo mesmo argumento e teorema 5.22, obtemos o item 6.

Prova dos item 7: Dado um potencial Hölder φ, seja a sequência de medidas $\mu_n \in \mathcal{E}(g)$, tal que $\mu_n(\mathcal{F}(g)) = 1$ e tal que $h_{\mu_n}(g) + \int \varphi d\mu_n \to P_{\mathcal{E}(g|_{\mathcal{F}(g)})}(\varphi)$. Tomando uma subsequência, se necessário, podemos assumir que $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu_0$ para algum $\mu_0 \in \mathcal{M}^1(g)$. Como $\mathcal{E}(g_1) \neq \emptyset$,Per$(g_1) \neq \emptyset$, pela proposição A.13 substituindo g_1 por $h := g_1^l\big|_V$, onde $l = \min\{j \geq 1; \text{Fix}(g_1^j) \neq \emptyset\}$ e V é aberto, tal que $(g_1^*)^l \subset V$, temos que h^n é fortemente transitiva para todo $n \geq 1$, e $\frac{1}{\mu(V)}\mu\big|_V \in \mathcal{E}(h,1)$, Além disso,

$$\mathcal{M}^1(g_1) \ni \nu \mapsto \frac{1}{\nu(V)}\nu\big|_V \in \mathcal{M}^1(h)$$

é bijeção mandando $\mathcal{E}(g_1)$ em $\mathcal{E}(h)$.

Escrevendo $\nu_n = \frac{1}{\mu_n(V)}\mu_n\big|_V$ e $\overline{\varphi} = \sum_{j=0}^{l-1} \varphi \circ g_j$, da proposição 3.14, temos que existe uma sequência $\overline{\nu}_n \in \mathcal{E}^*(h)$, tal que $d(\nu_n, \overline{\nu}_n) \to 0$, $\left|\int \overline{\varphi} d\nu_n - \int \overline{\varphi} d\overline{\nu}_n\right| \to 0$ e $\liminf_{n\to\infty} h_{\overline{\nu}_n}(h) \geq \liminf_{n\to\infty} h_{\nu_n}(h)$. Como $\sup|Dh| \leq \max|Dg^l| < \infty$, pelo item 7 do teorema 3.17, temos que existe contração *zooming* Lipschitz β e $\delta > 0$, tal que $\overline{\nu}_n$ é uma probabilidade $(\beta, \delta, 1)$-*zooming* para h. Portanto, $\overline{\mu}_n := \frac{1}{l}\sum_{j=0}^{l-1} \overline{\nu}_n \circ g^{-j} \in \mathcal{M}^1(g)$ é uma sequência de probabilidade $(\beta, \delta, 1)$-*zooming* para g, tal que $d(\mu_n, \overline{\mu}_n) \to 0$, $\left|\int \varphi d\mu_n - \int \varphi d\overline{\mu}_n\right| \to 0$ e $\liminf_{n\to\infty} h_{\overline{\mu}_n}(h) \geq \liminf_{n\to\infty} h_{\mu_n}$. Como $\overline{\mu}_n \to \mu_0 \in \mathcal{M}^1(g)$, do lema 3.19, temos que $h_{\mu_0} \geq \liminf_{n\to\infty} h_{\overline{\mu}_n}(h) \geq \liminf_{n\to\infty} h_{\mu_n}$, pela continuidade da aplicação $\eta \mapsto \int \varphi d\eta$ em $\mathcal{M}^1(g)$, temos que $h_{\mu_0}(g) + \int \varphi d\mu_0 \geq P_{\mathcal{E}(g|_{\mathcal{F}(g)})}(\varphi)$.

Prova do Item 8: A existência do estado de equilíbrio vem do fato da definição 5.27 e o item 7 implicarem que existe $\mu_\varphi \in \mathcal{M}^1(g)$, tal que $h_{\mu_\varphi} + \int \varphi d\mu_\varphi = P_{\mathcal{E}(g|_{\mathcal{F}(g)})}(\varphi)$, a unicidade vem do fato de que se $\eta \in \mathcal{M}^1(g)$ é estado de equilíbrio, então $\eta \in \mathcal{E}(g)$ e $\eta(\mathcal{F}(g)) = 1$, donde supp$\eta \not\subset \partial(\mathcal{F}(g))$, assim, supp$\eta =$ suppμ e pelo Item 5 segue que $\eta = \mu_\varphi$. $\square$

Capítulo 6

Aplicações no intervalo.

O Item 8 do teorema 5.28, provado originalmente por [21], mostra a existência e unicidade dos estados de equilíbrio de uma dinâmica C^{1+} restrita ao suporte de uma probabilidade ergódica para um potencial livremente expansor φ dado (vide definição 5.27). Assim, esse resultado fornece um bom entendimento do Formalismo termodinâmico na região livre de f restrito ao suporte de uma probabilidade ergódica (vide definição 5.24), no entanto não podemos dizer muito sobre o comportamento do Formalismo termodinâmico na região confinada de f.

O objetivo desse capítulo é a obtenção da existência e unicidade de estados de equilíbrio para um dado potencial Hölder φ satisfazendo algumas propriedades. Assim, focaremos em aplicações transitivas, C^{1+} definidas em $[0,1]$, pois, nesse caso, é possível obter propriedades geométricas sobre a região confinada de f que permitiu [21] generalizar o resultado obtido no Item 8 do teorema 5.28. No contexto de dinâmicas C^1 na reta, faremos a seguinte definição:

Definição 6.1 (Pontos periódicos expansores)**.** *Um ponto periódico p, de período n, será expansor se $|(f^n)'(p)| > 1$.*

Observação 13. *Se $f : [0,1] \circlearrowleft$ é uma aplicação C^{1+} fortemente transitiva de conjunto crítico não-flat, tal que $\mathcal{E}(f) \neq \emptyset$ usando o teorema 3.10, conforme discutido na observação 8, podemos encontrar infinitos pontos periódicos em um determinado elemento da partição $P \in \mathcal{P}$, tal que $F^n(p) = p$, assim, definindo $k = \sum_{j=1}^{n-1} R \circ F^j(P)$, temos que $|p - x| \leq e^{-n\lambda/2}|f^k(x) - f^k(p)|$, com $\lambda > 0$, para todo $x \in P$. Assim, se $\delta > 0$ é tal que $(p-\delta, p+\delta) \subseteq P$, então para todo $x \in (p-\delta, p+\delta) \setminus \{p\}$ teremos que*

$$\frac{|f^k(x) - f^k(p)|}{|x-p|} \geq e^{k\lambda/2}$$

portanto, $|(f^k)'(p)| \geq e^{k\lambda/2} > 1$. Se o j é o período de p, então $k = j \mod (0)$. Assim, pela regra da cadeia teremos que $|f^j(p)| > 1$.

6.1 Aplicações transitivas monótona por partes no intervalo.

O objetivo dessa seção é exibir a prova de que toda aplicação transitiva no intervalo é fortemente transitiva. Usaremos a demonstração presente em [20], no entanto, antes, é necessário a apresentação de algumas propriedades de funções transitivas no intervalo.

Definição 6.2 (Funções monótonas por partes). *Diremos que $f : I \circlearrowleft$ é monótona por partes, se existir um conjunto finito de intervalos distintos $\{I_1, \ldots, I_k\}$, tais que $I_n \not\subset I_j$ se $n \neq j$, $\bigcup_{j=1}^{k} I_j = I$ e se $x, y \in I_k$, com $x < y$, então $f(x) \leq f(y)$ ou $f(x) \geq f(y)$.*

Lema 6.3. *se f é uma função contínua, transitiva e monótona por partes, com intervalos de monotonicidade $\{I_1, \ldots, I_k\}$, então $\#\{x \in [0,1]; f(x) = x\} \leq k$.*

Demonstração. É necessário provar apenas que $\{x \in I_j; f(x) = x\} \leq 1$, para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$. Fixe I_j, o caso em que $f\big|_{I_j}$ é monótona não crescente é imediato, e, de fato, não necessita da transitividade de f, pois, se $p, q \in I_j$, com $p < q$, tais que $f(p) = p$ e $f(q) = q$. Nesse caso, teríamos que $p < q = f(q) \leq f(p) = p$, o que é um absurdo.

Supondo agora que $f\big|_{I_j}$ é monótona não decrescente, sejam $p, q \in I_j$, com $p < q$, tais que $f(p) = p$ e $f(q) = q$, Nesse caso, se $x \in [p, q]$, então $p < f(p) \leq f(x) \leq f(q) = q$. Ou seja, $f([p, q]) \subset [p, q]$, contradizendo a transitividade de f. $\square$

Definição 6.4. *Um Ciclo de intervalos é uma união disjunta de intervalos fechados $J = J_1 \cup \cdots \cup J_n$, com $int(J_k) \neq \emptyset$, tal que J é positivamente invariante e $f\big|_J$ é transitiva.*

Observe que se $f : [0,1] \circlearrowleft$ é uma função transitiva, então $[0,1]$ é um ciclo de intervalos. No lema 6.5, iremos supor que $m \geq 2$. O caso $m = 1$ é equivalente a provar que se $f : \mathbb{X} \circlearrowleft$ é uma aplicação transitiva, então $f(\mathbb{X}) = \mathbb{X}$. Esse resultado pode ser visto no lema 3.12, de [4].

Lema 6.5. *Se $f : [0,1] \circlearrowleft$ é uma função contínua e $J = J_1 \cup \cdots \cup J_m$ é um ciclo de intervalos para f, então para todo $x \in J_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, temos que m é o tempo de primeiro retorno de x para J_i. Além disso, para todo $k, i \in \{1, \ldots, m\}$, com $k \neq i$, existe apenas um $1 \leq n_{i,k} < m$, tal que $f^{n_{i,k}}(J_i) = J_k$.*

Demonstração. Pelo fato de $f(J) \subset J$, temos que, para todo $x \in J$ e $n \in \mathbb{N}$, existe $1 \leq k \leq m$, tal que $f^n(x) \subset J_k$, pela continuidade de f e pelo fato dos intervalos $J_1, \ldots, J_m$ serem disjuntos, temos que se $x \in J_i$, $n \in \mathbb{N}$ são tais que $f^n(x) \in J_k$, então $f^n(y) \in J_k$ para todo $y \in J_i$. Observe que pela transitividade de $f\big|_J$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$ existe $m_i \leq m$, tal que $f^{m_i}(J_i) \subseteq J_i$, pois seja $x \in J_i$, tal que $\{f(x), f^2(x) \ldots, f^m(x)\} \cap J_i = \emptyset$, então existem $k, n_1, n_2 \in \{1, \dots, m\}$, com $k \neq i$ e $n_1 < n_2$, tais que $f^{n_1}(x), f^{n_2}(x) \in J_k$. Assim, $f^{n_2-n_1}(f^{n_1}(x)) \in J_k$, portanto $f^{n_2-n_1}(J_k) \subseteq J_k$. Além disso, para todo $1 \leq n \leq n_2 - n_1$ temos que $f^n(J_k) \cap J_i = \emptyset$, do contrário existiria $1 \leq n_1 < n_3 < n_2 \leq m$, tal que $f^{n_3}(x) \in (J_i)$. Assim, como $f^{n_2-n_1}(J_k) \subseteq J_k$:

$$\left(\bigcup_{j\geq 0} f^j(\text{int}(J_k))\right) \cap \text{int}J_i = \emptyset,$$

contradizendo a transitividade de $f\big|_J$. Agora basta provar que não existe $m_i < m$, tal que $f^{m_i}(J_i) \subseteq J_i$. Suponha que exista tal m_i, então existe $1 \leq k \leq m$, tal que $\{f^1(J_1), \dots, f^{m_i}(J_i)\} \cap J_k = \emptyset$. Como $f^{m_i}(J_i) \subseteq J_i$

$$\left(\bigcup_{j\geq 0} f^j(\text{int}(J_i))\right) \cap \text{int}J_k = \emptyset,$$

contradizendo mais uma vez a transitividade de $f\big|_J$. Provando, assim, a primeira parte do lema.

Suponha que existem i, k que não possuem tal $n_{i,k} < m$, então existiriam $n_1, n_2 \in \{1, \dots, m-1\}$, com $n_1 < n_2$ e $k_1 \in \{1, \dots, m\}$, com $k_1 \neq k$ e $k_1 \neq i$, tais que $f^{n_1}(J_i), f^{n_2}(J_i) \in J_{k_1}$ e, portanto, $f^{n_2-n_1}(J_{k_1}) \subseteq J_{k_1}$, como $n_2 - n_1 < m$ obteríamos uma contradição com a primeira parte do lema. Suponha agora que esse $n_{i,k} < m$ não é único. Então, existiriam $n'_{i,k} < n_{i,k} < m$, tais que $f^{n'_{i,k}}(J_i), f^{n_{i,k}}(J_i) \subset J_k$ e, portanto, $f^{n_{i,k}-n'_{i,k}}(J_k) \subseteq J_k$. Contradizendo, mais uma vez, a primeira parte do lema.

Observe que $f^n(J_i) \subset J_k$, se e somente se $n = n_{k,i} + jm$. Assim, pela transitividade de $f\big|_J$, temos que

$$\overline{\bigcup_{j\geq 0} f^{n_{k,i}+jm}(J_i)} = J_k$$

assim, para todo aberto $V \subset J_k$, existe j, tal que $f^{n_{k,i}+jm}(J_i) \cap V \neq \emptyset$, mas $f^{n_{k,i}+jm}(J_i) \subseteq f^{n_{k,i}}(J_i)$, e, portanto, $f^{n_{k,i}}(J_i) \cap V \neq \emptyset$. Assim, $f^{n_{k,i}}(J_i)$ é denso em J_k. Como J_i é compacto e f é contínua, então $f^{n_{k,i}}(J_i)$ é compacto, e portanto, $f^{n_{k,i}}(J_i) = J_k$. □

Como consequência do lema 6.5, se $f : [0,1] \circlearrowleft$ é uma função contínua e $J = J_1 \cup \dots \cup J_m$ é um ciclo de intervalos para f, a menos de renumerar os intervalos $\{J_1, \dots, J_m\}$, podemos assumir que $f(J_i) = J_{i+1}$ se $1 \leq i \leq m-1$ e $f(J_m) = J_1$. No lema 6.6,podemos assumir que $m \geq 1$.

Lema 6.6. *Se $f : [0,1] \circlearrowleft$ é uma função contínua e $J = J_1 \cup \dots \cup J_m$ é um ciclo de intervalos para f, se $U \subset J$ é um aberto então para todo $n \in \mathbb{N}$ int($f^n(U)) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Provaremos o lema por indução em n, suponha por absurdo que $U \subset J$ é aberto tal que $\text{int}(f(U)) = \emptyset$, seja $U' \subset U \cap J_i$ aberto, conexo e não vazio, se $\text{int}(f(U')) = \emptyset$

pelo lema 6.5, podemos assumir que $f(J_i) = J_k$, onde

$$k = \begin{cases} i+1 & \text{se } i < m \\ 1 & \text{se } i = m \end{cases}$$

então, pela continuidade de f, existe $x \in J_k$, tal que $f(U') = x$, óbvio que, se $m = 1$ U' não pode ser denso em J, do contrário $F(J) = \{x\}$, contradizendo a transitividade de $f\big|_J$. Como

$$\overline{\bigcup_{j \geq 0} f^j(U')} = J,$$

temos que $\mathcal{O}_f^+(x)$ é denso em $J \setminus U'$. Seja $V \subset J \setminus U'$ aberto, pela transitividade de $f\big|_J$ existe $i \in \mathbb{N}$, tal que $f^i(V) \cap U' \neq \emptyset$. Assim, seja $y \in V$, tal que $f^i(y) \in U'$, como U' e V são abertos e f é contínua, existe $\epsilon > 0$, tal que $(y-\epsilon, y+\epsilon) \in V$ e $f^i((y-\epsilon, y+\epsilon)) \subseteq U'$. Como e $\mathcal{O}_f^+(x)$ é denso em $J \setminus U'$, existe $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tal que $f^j(x) \in (y-\epsilon, y+\epsilon)$, donde $f^{j+i+1}(x) = x$ e $x \in \operatorname{Per}(f)$ e, portanto, $\#\mathcal{O}_f^+(x) < \infty$, o que é um absurdo. Portanto, $\operatorname{int}(f(U)) \supseteq \operatorname{int}(f(U')) \neq \emptyset$.

Suponha que o resultado é válido para $n-1$. Então, seja $V \subset J$ aberto dado por $V := \operatorname{int}(f^{n-1}(U)) \neq \emptyset$. Como $\operatorname{int}(f(V)) \neq \emptyset$, temos que $\operatorname{int}(f^n(U)) \supseteq \operatorname{int}(f(V)) \neq \emptyset$. Completando a indução. $\square$

Proposição 6.7. *Se $f : [0,1] \circlearrowleft$ é uma função contínua, monótona por partes e $J = J_1 \cup \cdots \cup J_m$ é um ciclo de intervalos para f, então $f\big|_J$ é fortemente transitiva.*

Demonstração. Pelo lema 6.5, podemos definir a função de primeiro retorno $F : J_1 \circlearrowleft$, com $F = f^m$. Observe que F é transitiva, pois sejam $W', W \subset J_1$ abertos, temos que existe n, tal que $f^n(W') \cap W \neq \emptyset$, no entanto, como $f^n(W') \subset J_1$, se e somente se $n = jm$, para algum $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então $F^j(W') = f^n(W')$ e $F^j(W') \cap W \neq \emptyset$, provando a transitividade de F. Além disso, pela segunda parte do lema 6.5, temos que $F(J_1) = J_1$. Seja $(a,b) \subset J_1$, se $U = \bigcup_{n \geq 0} F^n((a,b)) \neq J_1$, seja V a componente conexa de U contendo (a,b), como $F(U) \subset U$ temos que para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $F^n(V) \subset V$ ou $F^n(V) \cap V = \emptyset$. Pela transitividade de F, existe $l \in \mathbb{N}$, tal que $F^k(V) \cap V = \emptyset$ se $k < l$ e $F^l(V) \subset V$. Observe que $U = V \cup F(V) \cup \cdots \cup F^{l-1}(V)$.

Seja agora $\bar{F}$ a extensão contínua de F^l para $[\alpha, \beta] := \overline{V}$, ou seja, $\bar{F} : [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$ é dado por $\bar{F}(x) = F^l(x)$, observe que $\bar{F}(x)$ é uma função transitiva, e portanto sobrejetiva, note que ao menos um ponto de $\{\alpha, \beta\}$ não pertence a U. Do contrário, V seria compacto e como $U = V \cup F(V) \cup \cdots \cup F^{l-1}(V)$, então U seria um conjunto compacto, positivamente invariante contido propriamente em J_1, contradizendo a transitividade de F. Assim, $\{\alpha, \beta\} \setminus \bar{F}((\alpha, \beta)) \supset \{\alpha, \beta\} \setminus \bar{F}(V) \neq \emptyset$, assim, pela sobrejetividade de $\bar{F}$, temos que $\bar{F}^2(\alpha) = \alpha$ ou $\bar{F}^2(\beta) = \beta$ (e caso $\{\alpha, \beta\} \cap \bar{F}(V) = \emptyset$, então $\bar{F}^2(\alpha) = \alpha$ e $\bar{F}^2(\beta) = \beta$). Vamos supor que $\alpha \notin V$, pois os demais casos são análogos.

Observe que $\bar{F}^2$ é transitiva, pois $\bar{F}$ é transitiva em um domínio conexo e monótona por partes[]. Assim, pela transitividade de $\bar{F}^2$, temos que existe $\epsilon > 0$, tal que, se $x \in (\alpha, \alpha + \epsilon)$, então $\bar{F}^2(x) \geq x$. Do contrário, como $\bar{F}^2$ é monótona por partes e transitiva, pelo lema 6.3, temos que $\#\{x \in [\alpha, \beta]; \bar{F}^2(x) = x\} < \infty$, assim existiria $\epsilon > 0$, tal que $\alpha < \bar{F}^2(x) < x < \alpha + \epsilon$ para todo $x \in (\alpha, \alpha + \epsilon)$, contradizendo a transitividade de $\bar{F}^2$. Ou seja, α é um repulsor topológico de $\bar{F}^2$. Seja $\delta = \inf\{\bar{F}^2(x); x \in [\alpha + \epsilon, \beta]\}$, observe que $\delta > \alpha$, do contrário existiria sequência $p_k \in [\alpha + \epsilon, \beta]$, tal que $\lim_{k \to \infty} \bar{F}^2(p_k) = \alpha$, mudando para uma subsequência, se necessário, podemos assumir que $p_k \to p \in [\alpha + \epsilon, \beta]$,donde, pela continuidade de $\bar{F}^2$, teríamos que $\bar{F}^2(p) = \alpha$, o que seria uma contradição. Assim, seja $r = \min\{\delta - \alpha, \epsilon\}$. Temos que $\bar{F}^2([\delta, \beta]) \subseteq [\delta, \beta]$, pois, se $\epsilon = r$, então $[\delta, \beta] \subset [\alpha + \epsilon, \beta]$ e, portanto, $\bar{F}^2([\delta, \beta]) \subseteq [\delta, \beta]$. Se $\epsilon > r$, então, para todo $x \in [\delta, \alpha + \epsilon)$ temos que $\delta \leq x < \bar{F}^2(x) < \beta$ e, se $x \in x \in [\alpha + \epsilon, \beta]$, então $\delta \leq \bar{F}^2(x) < \beta$, assim $\bar{F}^2([\delta, \beta]) \subseteq [\delta, \beta]$ contradizendo, mais uma vez, a transitividade de $\bar{F}^2$. Para evitar essas contradições, $U = J_1$ e F é fortemente transitivas em J_1.

Resta provar que a transitividade forte de F implica na transitividade forte de $f\big|_J$. Seja W aberto de J_k, $k = 1, \ldots, m$, então, pelo lema 6.5, existe $0 \leq j_k \leq m$, tal que $f^{j_k}(W) \subset J_1$. Além disso, pelo lema 6.6 temos que $W' := \operatorname{int}(f^{j_k}(W)) \neq \emptyset$. Assim, pela transitividade forte de F:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{mn+j_k}(W) \supseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} F^n(W') = J_1,$$

usando novamente o lema 6.5, temos que $f^{i-1}(J_1) = J_i$, para $i = 1, \ldots m$ e, portanto,

$$J_i = f^{i-1}(J_1) = f^{i-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{mn+j_k}(W)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{mn+j_k+i-1}(W), \ \forall i = 1 \ldots m$$

ou seja,

$$J = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(W),$$

provando a proposição. □

Como corolário imediato da proposição 6.7:

Corolário 6.8. *Se $f : [0, 1] \to [0, 1]$ é contínua, monótona por partes e transitiva, então f é fortemente transitiva.*

6.2 Entropia topológica de aplicações transitivas.

O objetivo dessa seção é exibir a prova de que toda aplicação transitiva no intervalo possui entropia positiva. Para tanto, é necessário que toda aplicação transitiva no intervalo possua um n, tal que f^n possui uma 2-ferradura. Portanto, antes de exibirmos o resultado principal da presente seção, vamos mostrar algumas propriedades de s-ferraduras.

Ao longo dessa seção, $C^0([0,1])$ será o conjunto das funções contínuas que vão de $[0,1]$ em $[0,1]$. Inicialmente, apresentaremos a alguns resultados sobre s-ferraduras presentes em [6]. Observamos que, com poucas alterações nas definições abaixo, os resultados apresentados serão válidos para gráficos, conforme definido por [6].

Definição 6.9. *Seja I, J intervalos fechados contidos em $[0,1]$ e $f \in C^0([0,1])$, diremos que I f-cobre J, se existe um subintervalo fechado $L \subset I$, tal que $f(L) = J$.*

É claro que I f-cobre J se e somente se $f(I) \supset J$. De fato, se I f-cobre J, então existe subintervalo fechado $L \subset I$, tal que $f(L) = J$, donde $f(I) \supset f(L) = J$. Suponha agora que $f(I) \supset J$, onde $J = [a,b]$, com $a < b$, seja $c, d \in I$, tal que $f(c) = a$ e $f(d) = b$, considere $c < d$ (o caso $c > d$ é análogo), seja por $c_1 = \sup\{x \in [c,d]; f(x) = a\}$ e $d_1 = \inf\{x \in [c_1,d]; f(x) = b\}$, observe que pelo teorema do valor intermediário $f([c_1,d_1]) \supset J$, e, se existe $x \in [c_1,d_1]$, tal que $f(x) > b$ (respectivamente $f(x) < a$), então, pelo teorema do valor intermediário, existe $y \in (c_1,x)$, tal que $f(y) = b$ (respectivamente, $y \in (x,d_1)$ tal que $f(y) = a$), contrariando que d_1 é o menor elemento de $[c_1,d]$ tal que $f(d_1) = b$ (respectivamente, contrariando que c_1 é o maior elemento de $[c,d]$, tal que $c_1 = a$). Daí $f([c_1,d_1]) \subset J$ e, portanto, $f([c_1,d_1]) = J$.

Definição 6.10 (s-ferradura)**.** *Seja f em $C^0([0,1])$ e $s \geq 2$. Uma s-ferradura para f é um intervalo fechado $J \subset [0,1]$ e subintervalos fechados $J_1, J_2, \ldots, J_s$ de J, com $int(J_i) \cap int(J_k) = \emptyset$ se $i \neq k$ e $f(J_i) = J$ para todo $1 \leq i \leq s$.*

Notação 4. *Ao longo da presente seção, denotaremos $\mathcal{D} = \{J_1, \ldots, J_s\}$, e a s-ferradura apresentada definição 6.10 será denotada por $(J, \mathcal{D})$.*

Definição 6.11 (s-ferradura forte)**.** *Se a s-ferradura $(J, \mathcal{D})$ satisfaz $J_i \subset int(J)$, para todo $1 \leq i \leq s$ e $J_i \cap J_k = \emptyset$ se $i \neq k$, então $(J, \mathcal{D})$ será uma s-ferradura forte.*

Com essas definições em mãos, provemos alguns lemas auxiliares devido à [6].

Lema 6.12. *Seja $(J, \mathcal{D})$ uma s-ferradura para uma $f \in C^0([0,1])$. Então, para toda sequência finita $\mathcal{J} = \{j_k\}_{k=0}^{n-1}$ dos elementos de $\{1, \ldots, s\}$, existe um intervalo fechado $J_{\mathcal{J}}$, tal que $f^i(J_{\mathcal{J}}) \subset J_{j_i}$, para $0 \leq i \leq n-2$ e $f^{n-1}(J_{\mathcal{J}}) = J_{j_{n-1}}$.*

Demonstração. O lema será provado por indução em n, se $n = 1$ nada temos a provar.

Suponha que o resultado vale para toda sequência de comprimento $n-1$, tomando $\mathcal{J} = \{j_k\}_{k=0}^{n-1}$ e $\mathcal{J}' = \{j_k\}_{k=1}^{n-1}$ existe um intervalo fechado $J_{\mathcal{J}'}$, tal que $f^i(J_{\mathcal{J}'}) \subset J_{j_{i+1}}$, para $0 \leq i \leq n-2$ e $f^{n-1}(J_{\mathcal{J}'}) = J_{j_{n-1}}$. Como $f(J_{j_0}) = J \supset J_1 \supset J_{\mathcal{J}'}$, temos que J_{j_0} f-cobre

$J_{\mathcal{J}'}$, daí, existe um intervalo fechado $L \subset J_{j_0}$, tal que $f(L) = J_{\mathcal{J}'}$. tomando $L = J_{\mathcal{J}}$, obtemos o resultado. $\square$

Lema 6.13. *Se $f \in C^0([0,1])$ possui uma s-ferradura, então, para todo $n \in \mathbb{N}$, f^n, possui uma s^n-ferradura.*

Demonstração. assuma que f possui a s-ferradura $(J, \mathcal{D})$, fixe $n \in \mathbb{N}$ seja $\mathcal{J}$ sequência finita de $\{1, \ldots, s\}$ de comprimento n e $J_{\mathcal{J}}$ satisfazendo as propriedades obtidas no lema 6.12. Observe que $J_{\mathcal{J}}$ é um subintervalo de J, tal que $f^n(J_{\mathcal{J}}) = J$. Seja $J'_{\mathcal{J}}$ o subintervalo fechado minimal (com respeito à inclusão) de $J_{\mathcal{J}}$, satisfazendo estas propriedades. Defina

$$\mathcal{D}_n = \{J'_{\mathcal{J}}; \mathcal{J} \text{ é sequência de } \{1, \ldots, s\} \text{ de comprimento n}\}$$

. Agora, basta mostrar que $(J, \mathcal{D}_n)$ é ferradura, para tanto sejam $J'_{\mathcal{J}}, J'_{\mathcal{J}'} \in \mathcal{D}_n$, com $J'_{\mathcal{J}} \neq J'_{\mathcal{J}'}$, suponha que $\text{int}(J'_{\mathcal{J}}) \cap \text{int}(J'_{\mathcal{J}'}) \neq \emptyset$ (observe que com isso $\text{int}(J) \neq \emptyset$). Como $\mathcal{J} \neq \mathcal{J}'$ existe $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, tal que $f^i(J'_{\mathcal{J}}) \subset J_k$ e $f^i(J'_{\mathcal{J}'}) \subset J_m$, com $k \neq m$. Daí, $f^i(\text{int}(J'_{\mathcal{J}}) \cap \text{int}(J'_{\mathcal{J}'})) \subset J_k \cap J_m$. Mas $\#(J_k \cap J_m) \leq 1$. Contradizendo a minimalidade de $J'_{\mathcal{J}}$ e $J'_{\mathcal{J}'}$. $\square$

Lema 6.14. *Se f possui uma s-ferradura e $s \geq 4$, então f possui uma $(s-2)$-ferradura forte.*

Demonstração. Seja $(J, \mathcal{D})$ uma s ferradura para f, assuma, sem perda de generalidade, que cada $J_i \in \mathcal{D}$ não possui subintervalo fechado, tal que $f(J_i) = J$. Portanto, os pontos extremos de J_i são levados por f nos pontos extremos de J. Seja $J_i = [a_i, b_i]$ e $J = [a, b]$, sem perda de generalidade, podemos assumir que $b_1 < a_i < b_i < a_s$, para todo $1 \leq i \leq s$. Escolha $c \in \text{int}(J_1)$ e $d \in \text{int}(J_s)$. Assim, $J_2, \ldots, J_{s-1} \subset (c, d)$. Observe que, como para todo $i \in \{2, \ldots s-1\}$ $f(J_i) = J = [a, b]$, existem subintervalos J'_i de J_i tais que $f(J'_i) = [c, d]$. Se $i, k \in 2, \ldots s-1$, com $i \neq k$, note que $J'_i \cap J'_k \subset J_i \cap J_k \subset \{a_i, b_i, a_k, b_k\}$, mas $f(\{a_i, b_i, a_k, b_k\}) = \{a, b\}$ e $f(J'_i) = f(J'_k) = (c, d)$, como $(c, d) \cap \{a, b\} = \emptyset$, então $J'_i \cap J'_k = \emptyset$. Assim, se $\mathcal{D}' = \{J'_2, \ldots, J'_{s-1}\}$, então $([c, d], \mathcal{D}')$ é uma $s-2$-ferradura forte para f. $\square$

Lema 6.15. *Se $f \in C^0([0,1])$ possui uma s-ferradura forte, então $h_{top}(f) \geq \log s$.*

Demonstração. Assuma que $(J, \mathcal{D})$ é uma s-ferradura forte para f. Defina $A_j = ([0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{s} J_i) \cup J_j$ e $\mathbb{A} = \{A_1, \ldots, A_s\}$. Observe que $\mathbb{A}$ é cobertura aberta de $[0,1]$. Assim, defina $\mathbb{A}^n$ conforme a equação 1.7. Seja $\mathcal{J} = \{j_k\}_{k=0}^{n-1}$ uma sequência finita, de comprimento n dos elementos de $\{1, \ldots, s\}$, escolha um intervalo $J_{\mathcal{J}}$ satisfazendo as propriedades do lema 6.12. Seja $x \in J_{\mathcal{J}}$. Como para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ $f^i(x) \in J_i$ e como $(J, \mathcal{D})$

é uma s-ferradura forte, então J_i é o único elemento de $\mathcal{D}$ contendo $f^i(x)$. Assim, o único elemento de $\mathbb{A}^n$ contendo x é $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_{j_i})$. Como existem s^n sequências finitas de comprimento n dos elementos de $\{1, \ldots, s\}$, temos que $N(\mathbb{A}^n) = s^n$. Donde

$$h(f, A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s^n = \log s.$$

e, portanto, $h_{\text{top}}(f) \geq \log(s)$. □

Por fim, estamos em posição de provar o seguinte teorema:

Teorema 6.16. *Se $f \in C^0([0,1])$ possui uma s-ferradura então $h_{top}(f) \geq \log s$.*

Demonstração. Suponha que $(J, \mathcal{D})$ é uma s-ferradura para f. Como $s \geq 2$ então $s^n \geq 4$, para todo $n \geq 2$. Assim, pelo lema 6.13, temos que f^n possui uma s^n-ferradura, $\forall n \in \mathbb{N}$, pelo lema 6.14, se $n \geq 2$, então f^n possui uma $s-2$-ferradura forte. Assim, pelo lema 6.15 $h(f^n) \geq \log(s^n - 2)$. Como $h(f) = (1/n)h(f^n)$:

$$h(f) \geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(s^n - 2) = \log(s).$$

□

[5] provou que se $f \in C^0([0,1])$ é transitiva, então f^2 possui uma 2-ferradura e o teorema 6.16 implica que $h_{\text{top}}(f) > 0$. No entanto, mostraremos a prova de um resultado levemente diferente devido à [2] (que implica em $h_{\text{top}}(f) > 0$ para toda função $f \in C^0([0,1])$ transitiva).

Notação 5. *Seja $P \subset [0,1]$ defina $\langle P \rangle$ como o menor conjunto conexo fechado que contém P. Para fins de notação ao invés de escrever $\langle \{x, y\} \rangle$, escreveremos $\langle x, y \rangle$. Observe que para todo $P \subset [0,1]$ $\langle P \rangle$ é um intervalo.*

Teorema 6.17. *Seja $f \in C^0([0,1])$. Assuma que existe um conjunto finito $P \subset [0,1]$, tal que o conjunto $\bigcup_{n\geq 0} f^n(P)$ seja denso em $[0,1]$. Então, $h_{top}(f) > 0$.*

Demonstração. Suponha que $h_{\text{top}}(f) = 0$. Para todo $x \in [0,1]$ defina

$$K(x) = \Big(\liminf_{n\to\infty} f^n(x), \limsup_{n\to\infty} f^n(x)\Big),$$

e $L(x) = \bigcup_{n\geq 0} f^n(K(x))$. Observe que se $K(x) \neq \emptyset$, então $\omega_f(x) \subseteq \overline{K(x)}$. Como

$$\liminf_{n\to\infty} f^n(x), \limsup_{n\to\infty} f^n(x) \in \omega_f(x),$$

existem $y_1, y_2 \in \omega_f(x)$, tais que $f(y_1) = \liminf_{n\to\infty} f^n(x)$ e $f(y_2) = \limsup_{n\to\infty} f^n(x)$. Assim, pela continuidade de f. $K(x) \subset f(\langle y_1, y_2 \rangle) \subset f(K(x))$, suponha agora que $f^{n-1}(K(x)) \subset f^n(K(x))$, então se $w_1 \in f^n(K(x))$ existe $w_2 \in f^{n-1}(K(x)) \subset f^n(K(x))$, tal que $f(w_2) = w_1$. Assim, $w_1 = f(w_2) \in f^{n+1}(K(x))$, donde $f^n(K(x)) \subset f^{n+1}(K(x))$. Portanto, $\{f^n(K(x))\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência não decrescente de intervalos. Assim, $f(L(x)) = \bigcup_{n\geq 1} f^n(K(x)) = L(x)$. Observe ainda que $L(x)$ é um intervalo não necessariamente fechado com $\text{int}L(x) \neq \emptyset$.

Observe que, como $\#P < \infty$ e $\bigcup_{n\geq 0} f^n(P)$ é denso em $[0,1]$, existe ao menos um $w \in P \setminus \{x \in P; K(x) = \emptyset\}$. Além disso, $\bigcup_{n\geq 0} f^n(P \setminus \{x \in P; K(x) = \emptyset\})$ continua sendo denso em $[0,1]$. Portanto, trocando P por $P \setminus \{x \in P; K(x) = \emptyset\}$, se necessário, podemos assumir que $K(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in P$. Seja $J' \subset [0,1]$ um intervalo positivamente invariante. Observe que $\bigcup_{n\geq 0} f^n(P) \cap J' \neq \emptyset$, pois $\bigcup_{n\geq 0} f^n(P)$ é conjunto denso. Assim, seja $x \in \bigcup_{n\geq 0} f^n(P) \cap J'$. Pela invariância positiva de J', temos que $L(x) \subseteq J'$. Como P é um conjunto finito existe $w \in P$, tal que $L(w) \not\supset L(x)$, para todo $x \in P$, defina $J := L(w)$. Como $w \in P$, então $\text{int}(J) \neq \emptyset$. Além disso, como $f(L(w)) = L(w)$, então J é intervalo próprio, assim, se $x \in \bigcup_{n\geq 0} f^n(P) \cap J$, então $L(x) \subseteq J$ como $L(f^n(y)) = L(y)$ para todo $y \in [0,1]$ e para todo $x \in \bigcup_{n\geq 0} f^n(P)$ existe $y \in P$ e $n \in \mathbb{N}$, tal que $f^n(y) = x$ e portanto $L(y) = L(x)$, já que $L(y) \not\subset L(w) = J$, temos que $L(x) = J$ para todo $x \in \bigcup_{n\geq 0} f^n(P) \cap J$. Suponha que $\overline{J} = [a,b]$.

Observe que f tem que ter um ponto fixo z no interior de J. Do contrário, todo o gráfico de $f\big|_{\text{int}(J)}$ estaria de um lado da diagonal, suponha acima da diagonal (o caso abaixo da diagonal é análogo), então teríamos que $f(y) > y$ para todo $y \in \text{int}(J)$, e, portanto, para todo $y \in \text{int}(J)$ a sequência $\{f^n(y)\}_n$ é monótona, não crescente e limitada pelos pontos extremos de J. Daí, existe o limite

$$\lim_{n\to\infty} f^n(y),$$

pela continuidade de f, se $q = \lim_{n\to\infty} f^n(y)$, então

$$f(q) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(y) = q,$$

assim, $q = b$. Assim, seja $Q = \{x \in P; \mathcal{O}_f^+(x) \cap \text{int}(J) \neq \emptyset\}$, como $\#P < \infty$ e $\bigcup_{n\geq 0} f^n(P)$ é denso em $[0,1]$, então $0 < \#Q < \infty$, defina também $k_x = \min\{k \in \mathbb{N}; f^k(x) \in \text{int}(J)$ com $x \in Q\}$. Seja $q' = \min\{f^{k_x}(x); x \in Q\}$. Como Q é um conjunto finito $a < q$. E $\bigcup_{n\geq 0} f^n(P) \cap (a, q') = \emptyset$. Pois, se $x \in P \setminus Q$, então $f^n(x) \notin \text{int}J$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, se $x \in Q$, então $f^n(x) \leq a$ se $n < k_x$ e $f^n(x) \geq q'$ se $n \geq k_x$. Mas isso é impossível pois $\bigcup_{n\geq 0} f^n(P)$ é denso em $[0,1]$.

Suponha que $y \in \text{int}(J)$ é tal que $y \neq z$ mas $f(y) = z$. Então, o intervalo aberto $\text{int}(\langle z, y\rangle)$ contém $x \in \bigcup_{n\geq 0} f^n(P)$. Defina $N = \bigcup_{n\geq 1}(f^n(\langle x, z\rangle) \cap f^n(\langle x, y\rangle))$. Note que $K(x) \subset N$. Observe que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^n(\langle x, y\rangle) \cap f^n(\langle x, z\rangle) \supset \{z\} \neq \emptyset$, daí, como f é continua e N é a união de intervalos não vazios com interseções não vazia, daí, N é um intervalo. Note ainda que $J = L(x) \subset N$. Assim, existe n, tal que $\{y, z\} \in$

$f^n(\langle x,z\rangle)\cap f^n(\langle x,y\rangle)$. Portanto, pela continuidade de f, $f^n(\langle x,z\rangle)\cap f^n(\langle x,y\rangle)\supset\langle z,y\rangle$, assim, os intervalos $\{\langle x,y\rangle\,\langle x,z\rangle\}$ f^n-cobrem $\langle z,y\rangle$. Ou seja, f^n possui uma 2-ferradura e, portanto, $h_{\text{top}}(f)\geq(1/n)\log 2>0$.

Como não existe $y\in\text{int}(J)$, tal que $y\neq z$, mas $f(y)=z$, então, se $J_1=\{t\in J; t\leq z\}$ e $J_2=\{t\in J;t\geq z\}$, então, existe uma aplicação $\varphi\{1,2\}\to\{1,2\}$ tal que $f(J_i)=J_{\varphi(i)}$, com $i\in\{1,2\}$, pois, se existe $c,d\in J_1\backslash\{z\}$ (respectivamente $c,d\in J_2\backslash\{z\}$), tais que $f(c)\in J_1$ (respectivamente $f(c)\in J_2$) e $f(d)\in J_2$ (respectivamente $f(d)\in J_1$), então existe. $c'\in\langle c,d\rangle$, tal que $f(c')=z$. Ou seja, existe $\varphi\{1,2\}\to\{1,2\}$, tal que $f(J_i)\subseteq J_{\varphi(i)}$. Além disso, como $f(J)=f(L(w))=L(w)=J$ temos que para todo $y\in J_1$ (respectivamente $y\in J_2$), existe $y'\in J$, tal que $f(y')=y$. Ou seja, φ é sobrejetiva em $\{1,2\}$ e $f(J_i)\supseteq J_{\varphi(i)}$.

Suponha $\varphi(i)=i$, com $i=1,2$. Seja $x\in P$ tal que $\mathcal{O}_f^+(x)\cap J_1\neq\emptyset$ e k tal que $f^k(x)\in J_1$ então, como $f(J_1)=J_1$ temos que se $n>k$ então $f^n(x)\in J_1$, assim $K(x)\subseteq J_1$, portanto, para todo $n\in\mathbb{N}$ $f^n(K(x))\subseteq J_1$, donde $L(x)\subseteq J_1\subset J=L(w)$, o que é um absurdo, portanto, $\varphi(1)=2$ e $\varphi(2)=1$.

Defina o intervalo $J'=\bigcup_{n\geq 0}f^{2n}(\text{int}(J_1))$. Observe que $\overline{J'}=J_1$ e $f^2(J')=J'$. Além disso, o conjunto $\bigcup_{n\geq 0}f^{2n}(P')$ é denso em J'. Onde $P'=P\cup f(P)$. Definindo $L'(x)=\bigcup_{n\geq 0}f^{2n}(K(x))$, então para todo $x\in\bigcup_{n\geq 0}f^{2n}(P')\cap J'$ temos que $L'(x)=J'$. Pois, como J' é um intervalo positivamente f^2-invariante e $x\in J'$ então $L'(x)\subseteq J'$, e, se $L'(x)\subset J'$ então existe $y\in P$ tal que $L(y)=L'(x)\cup\bigcup_{n\geq 0}f^{2n+1}((K(x)))\subset J_1\cup J_2=J$. O que seria um absurdo. Pois não existe $y\in P$ tal que $L(y)\subset J$. Como estamos assumindo que $h_{\text{top}}(f)=0$, então $h_{\text{top}}(f^2)=0$. Aplicando o argumento anterior para f^2 e J' ao invés de f e J podemos encontrar um ponto fixo de f^2, z_1, tal que f^2 leva $\{t\in J;t\leq z_1\}$ em $\{t\in J;t\geq z_1\}$ e vice-versa. No entanto, $z\in\overline{\{t\in J;t\geq z\}}$ mas $f^2(z)=z\notin\overline{\{t\in J;t\leq z\}}$. O que é um absurdo, completando a prova. $\square$

Segue como corolário imediato do teorema 6.17:

Corolário 6.18. *Se $f\in C^0([0,1])$ é uma função transitiva, então $h_{top}(f)>0$.*

6.3 Conjuntos confinados de aplicações no intervalo.

O objetivo dessa seção é obter informações sobre a região confinada de f a partir das propriedades de uma aplicação C^{1+} transitiva com um conjunto crítico não-flat $\mathcal{C}$. Em primeiro lugar, é importante notar que todo difeomorfismo local C^1 com conjunto crítico não-flat é monótono por partes. pois, definindo $x_0=0$, $x_{n+1}=1$ e $\mathcal{C}=\{x_1,\dots,x_n\}$, teremos que se $I_j=[x_{j-1},x_j]$, com $j=1,2,\dots,n+1$ então $f\big|_{I_j}$ é estritamente crescente ou decrescente, assim, pela proposição 6.7, temos que f é fortemente transitiva. Como f é em particular C^1, temos pela desigualdade de Margulis-Ruelle que, se ν é medida ergódica, f-invariante com entropia positiva, então possui todos os expoentes de Lyapunov positivos. Como $\mathcal{C}$ é não-*flat* da observação 1 temos que

$$\nu \in \mathcal{M}^1_{\text{erg}}(f) \text{ e } h_\nu > 0 \implies \nu \in \mathcal{E}(f). \tag{6.1}$$

Pelo corolário 6.18 temos que $h_{\text{top}}(f) > 0$. Em particular, pelos teoremas A.5 e de Jacobs existe uma medida ergódica f-invariante de entropia positiva. Assim, pela equação (6.1), temos que $\mathcal{E}(f) \neq \emptyset$. Portanto, pela observação 13, temos que f possui infinitas órbitas periódicas expansoras. Como $\mathcal{C}$ é não-flat e f está definida em $[0,1]$, então $\#\mathcal{C} < \infty$. Observe que se $q \in \mathcal{C}$, então $\mathcal{O}^+_f(q)$ contém, no máximo, uma orbita periódica expansora e, como $\#\mathcal{C} < \infty$, temos que existe ponto periódico expansor p tal que $p \notin \mathcal{O}^+_f(\mathcal{C})$. Assim, pela proposição 6.7 e teorema A.20, temos que existe probabilidade $\mu_f \in \mathcal{M}^1_{\text{erg}}(f)$ tal que supp$\mu_f = [0,1]$. Assim, usando o teorema 5.28 temos que $\mathcal{F}(f)$ é um aberto denso de $[0,1]$.

Lema 6.19. *Definindo* $\mathcal{S} := \mathcal{M}^1_{erg}(f\big|_{\mathcal{O}^+_f(\mathcal{C})}) = \{\nu \in \mathcal{M}^1_{erg}(f); \nu(\mathcal{O}^+_f(\mathcal{C})) > 0\}$, *então*

$$\nu \in \mathcal{S} \iff \nu = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(q)}, \tag{6.2}$$

para algum $q \in \mathcal{O}^+_f(\mathcal{C})$ *e* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^n(q) = q$. *Em particular,* $\#\mathcal{S} \leq \#\mathcal{C}$ *e* $h_\nu(f) = 0$, *para todo* $\nu \in \mathcal{S}$. *Além disso,*

$$\mu \in \mathcal{M}^1_{erg}(f) \text{ então } \mu(\mathcal{F}(f)) = 1 \text{ ou } \mu \in \mathcal{S}. \tag{6.3}$$

Demonstração. Suponha $\nu \in \mathcal{S}$, então, como $\mathcal{O}^+_f(\mathcal{C})$ é enumerável existe $q \in \mathcal{O}^+_f(\mathcal{C})$ tal que $\nu(q) > 0$. Daí, pela invariância de ν, para todo $n \in \mathbb{N}$ teríamos que $\nu(f^n(q)) \geq \nu(q) > 0$, e, assim, se todos os $f^n(p)$ forem distintos, teríamos que $1 = \nu([0,1]) \geq \nu(\mathcal{O}^+_f(q)) = \infty$. O que é um absurdo. Assim, $\#\mathcal{O}^+_f(q) < \infty$. E, consequentemente, existe $q' \in \mathcal{O}(q)$ tal que $f^n(q') = q'$, sejam $0 \leq j < k \leq n$, observe que $f^{k-j}(f^j(q')) = f^k(q')$, donde $\nu(f^j(q')) \leq \nu(f^k(q'))$, e $f^{j+n-k}(f^k(q')) = f^j(q')$, donde $\nu(f^j(q')) \geq \nu(f^k(q'))$. Portanto $\nu(f^j(q')) = \nu(f^k(q'))$. Observe ainda que, se $l \in \mathbb{N}$, $q_1 \in \{q', f(q')\ldots, f^{n-1}(q')\}$, então para todo boreliano $A \subset f^{-l}(q_1) \setminus \{q', f(q')\ldots, f^{n-1}(q')\}$, teremos que $\mu(A) = 0$, pois, seja $0 \leq k \leq n$ tal que $f^l(f^k(q_1)) = q_1$, então, pela invariância de ν e pelo fato de $\nu(f^k(q_1)) = \nu(q_1)$, teremos que

$$\nu(f^k(q_1)) = \nu(q_1) = \nu(f^{-l}(q_1)) \geq \nu(A) + \nu(f^k(q_1)) \implies \mu(A) = 0.$$

Em particular, como $q' \in \mathcal{O}^+_f(q)$ e $\nu(q) > 0$ obtemos que $q \in \{q', \ldots, f^{n-1}(q')\}$. E como $\mathcal{O}^+_f(q)$ é um conjunto invariante, a menos de medida nula teremos pela ergodicidade de ν e do fato de $\nu(\mathcal{O}_f^+(q)) > 0$ que $\nu(\mathcal{O}_f^+(q)) = 1$. Além disso, como $\nu(q) = \nu(f^j(q))$ para todo $0 \leq j$. Assim, se $\nu \in \mathcal{S}$ temos que ν obedece a equação 6.2. Como para todo $q \in \mathcal{C}$, temos que $\mathcal{O}_f^+(q)$ contém no máximo uma orbita periódica, então é imediato que $\#\mathcal{S} \leq \#\mathcal{C}$. O fato de $h_\nu(f) = 0$ para todo $\nu \in \mathcal{S}$ segue imediatamente da equação (6.2), isto é mostrado no exemplo 1. Se $\mu \in \mathcal{M}^1_{\text{erg}}(f)$ é tal que $\mu(\mathcal{F}(f)) \neq 1$, então teremos que existe um conjunto boreliano A, com $\mu(A) > 0$, tal que $\alpha_f^0(x) \neq [0,1]$ para todo $x \in A$. No entanto, como f é fortemente transitiva, temos que $\alpha_f(x) = [0,1]$, portanto $x \in \mathcal{O}_f^+(\mathcal{C})$, donde $A \subseteq \mathcal{O}_f^+(\mathcal{C})$ e, portanto, $\mu \in \mathcal{S}$. □

6.4 Resultado Principal

O resultado principal consegue uma prova unificada para potenciais, satisfazendo a condição 1 ou 2. E, de fato, existem resultados similares ao teorema 6.20 na literatura, provando o resultado, apenas para uma das condições ou trabalhando com o potencial nulo. A exemplo de [13], que demonstrou o resultado supondo que φ é hiperbólica para f (como definido em [13]), ou mais geralmente se $\sup_x \varphi < P(f, \varphi)$, note que qualquer uma das condições implica que $\sup\{\int \varphi d\mu; \mu \in \mathcal{M}^1(f)\} < P(f, \varphi)$, daí, a condição 2 é mais fraca que a as condições trabalhadas em [13].

Um outro resultado similar ao 6.20, foi obtido por [8]. Seja $\mathcal{P}^n$ como definido na Equação (1.8) e $V_n(\varphi)$ conforme a Definição 5.1, se f é uma função topologicamente *mixing* (como definido em [8]), φ satisfaz a condição 1 do teorema 6.20 e $V_n(\varphi) \to 0$, então existe um único estado de equilíbrio μ_φ.

Note que o potencial nulo satisfaz as condições do teorema 6.20, assim, se φ é o potencial nulo, conforme explicado na subseção 1.5 , $P(f, \varphi) = h_{\text{top}}(f)$ e, assim, o teorema 6.20 apresenta uma prova alternativa para o resultado obtido por [11], para o caso que f é C^{1+} e não-flat, onde o autor estudou o conjunto de medidas $\mu \in \mathcal{M}^1(f)$ que satisfaz $h_\mu(f) = h_{\text{top}}(f)$.

Teorema 6.20. *Seja $f : [0,1] \circlearrowleft$ uma aplicação transitiva com um conjunto crítico não-flat $\mathcal{C}$, se φ é um potencial Hölder, tal que pelo menos uma das condições é satisfeita:*

1. $\sup \varphi - \inf \varphi < h_{top}(f)$;
2. $\int \varphi d\mu < P(f, \varphi)$ *para todo* $\mu \in \mathcal{M}(f)$.

Então, f possui apenas um estado de equilíbrio μ_φ para φ. Além disso, $h_{\mu_\varphi}(f) > 0$ e $supp\mu_\varphi = [0,1]$.

Demonstração. Inicialmente, assuma que φ satisfaz a condição 2. Observe que

$$\gamma := \sup\left\{\int \varphi d\mu; \mu \in \mathcal{M}^1(f)\right\} < P(f, \varphi), \tag{6.4}$$

do contrário, existiria uma sequência $\{\mu_n\}_n \in \mathcal{M}^1(f)$ tal que $\lim_{n\to\infty}\int \varphi d\mu_n \to P(f,\varphi)$ e, portanto, existiria $\mu \in \mathcal{M}^1(f)$ tal que $\mu = \lim_{k\to\infty}\mu_{k_n}$ e $\int \varphi = \lim_{k\to\infty}\int \varphi d\mu = P(f,\varphi)$, contradizendo a condição 2.

Note que pelas equações (6.1), (6.2) e (6.3), temos que $h_\mu(f) = 0$ para todo $\mu \in \mathcal{M}^1_{\text{erg}}(f) \setminus \mathcal{E}(f|_{\mathcal{F}(f)})$. Portanto, $P_{\mathcal{E}(f|_{\mathcal{F}(f)})}(\varphi) = P(f,\varphi)$. Daí,

$$h_\mu(f) + \int \varphi d\mu < P_{\mathcal{E}(f|_{\mathcal{F}(f)})}(\varphi)\; \forall \mu \in \mathcal{M}^1(f) \setminus \mathcal{E}(f|_{\mathcal{F}(f)}),$$

ou seja, φ é um potencial livremente expansor. Usando o item 8 do teorema 5.28, obtemos que φ possui apenas um estado de equilíbrio μ_φ. Além disso, $\mu_\varphi \in \mathcal{E}(f)$ e $\operatorname{supp}\mu_\varphi = \operatorname{supp}\mu_f = [0,1]$.

Assuma agora que φ satisfaz a condição 1. Nesse caso, considere ψ dado por $\psi(x) = \varphi(x) - \inf \varphi$. Observe que ψ é potencial Hölder

$$0 \le \psi(x) < h_{\text{top}}(f)\; \forall x \in [0,1].$$

Note que o potencial nulo satisfaz a condição 2 e portanto, f possui apenas um $\mu_0 \in \mathcal{M}^1(f)$ possuindo entropia máxima. Temos ainda que $\mu_0 \in \mathcal{E}(f)$ e $\mu_0(\mathcal{F}(f)) = 1$. Portanto, se $h_\mu = 0$, então $0 \le h_\mu(f) + \int \psi d\mu = \int \psi d\mu < h_{\text{top}}(f) = h_{\mu_0}(f) \le h_{\mu_0}(f) + \int \psi d\mu_0 \le P_{\mathcal{E}(f|_{\mathcal{F}(f)})}(\varphi)$. Ou seja,

$$\mu \in \mathcal{M}^1(f) \text{ e } h_\mu(f) = 0 \implies h_\mu(f) + \int \psi d\mu < P_{\mathcal{E}(f|_{\mathcal{F}(f)})}(\varphi).$$

Portanto,pelas equações (6.1), (6.2) e (6.3), obtemos que:

$$h_\mu(f) + \int \varphi d\mu < P_{\mathcal{E}(f|_{\mathcal{F}(f)})}(\varphi)\; \forall \mu \in \mathcal{M}^1(f) \setminus \mathcal{E}(f|_{\mathcal{F}(f)}),$$

Assim, ψ é potencial livremente expansor. Utilizando novamente o item 8 do teorema 5.28 obtemos que ψ possui apenas um estado de equilíbrio μ_ψ. Além disso, $\mu_\psi \in \mathcal{E}(f)$ e $\operatorname{supp}\mu_\psi = \operatorname{supp}\mu_f = [0,1]$. Observando que $\mu \in \mathcal{M}^1(f)$ é um estado equilíbrio para ψ se e somente se é um estado de equilíbrio para φ concluirmos a prova do teorema. $\square$

Apêndice A

Resultados Importantes

Nessa seção apresentaremos alguns resultados auxiliares para o desenvolvimento dos tópicos discutidos nessa dissertação. As demonstrações desses resultados não serão apresentadas.

Lema A.1 ([16] pg.235-237)**.** *Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{S}$ partições de entropia finita. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. $H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}/\mathcal{S}) = H_\mu(\mathcal{P}/\mathcal{S}) + H_\mu(\mathcal{Q}/\mathcal{P} \vee \mathcal{S})$;

2. *Se* $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$ *então* $H_\mu(\mathcal{P}/\mathcal{S}) \leq H_\mu(\mathcal{Q}/\mathcal{S})$ *e* $H_\mu(\mathcal{S}/\mathcal{P}) \geq H_\mu(\mathcal{S}/\mathcal{P})$;

3. $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$ *se e somente se* $H_\mu(\mathcal{P}/\mathcal{Q}) = 0$.

Lema A.2 ([16])**.** *Seja $\mathbb{X}$ um espaço métrico compacto e f uma transformação contínua, se α e β são duas coberturas abertas de $\mathbb{X}$, então $H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$ e $H(f^{-1}(\alpha)) \leq H(\alpha)$. Além disso, se f é sobrejetiva então $H(f^{-1}(\alpha)) = H(\alpha)$*

Lema A.3 ([16],pg 318)**.** *A sequência $a_n = \log P_n(f, \varphi, \alpha)$ é subaditiva*

Proposição A.4. *Seja $\mathbb{X}$ um espaço métrico compacto e $\{\alpha_n\}_n$ uma sequência de coberturas abertas de $\mathbb{X}$ com diam$\alpha_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Então,*

$$h_{top}(f) = \sup_n h(f, \alpha_n) \lim_{n\to\infty} h(f, \alpha_n)$$

Teorema A.5 (Princípio variacional,[16] pg 320-326)**.** *Seja $f : \mathbb{X} \circlearrowleft$ uma transformação contínua em um espaço métrico compacto, para todo potencial $\varphi : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$,*

$$P(f, \varphi) = \sup \left\{ h_\nu(f) + \int \varphi d\nu; \nu \in \mathcal{M}^1(f) \right\}$$

Lema A.6. *Se $\mathcal{Z}$ é uma coleção $\mathcal{E}$-encaixada de abertos e conexos e seja P_1 e P_2 $\mathcal{E}$-pré-imagem de dois elementos de $\mathcal{Z}$, com Ord$(P_1) \neq$ Ord(P_2) então P_1 e P_2 não são ligados*

Nos lemas A.7 e A.8, fixaremos a medida μ finita e definida nos conjuntos de Borel.

Lema A.7 (Atratores ergódicos,[18]). *Dada uma componente ergódica $U \subset \mathbb{X}$, existe um único atrator $A \subset \mathcal{X}$ que atrai quase todos os pontos de U. Além disso, $\omega(x) = A$ para quase todo ponto de U.*

Lema A.8 ([18]). *Seja $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(x)\}_{x\in U}$ uma coleção assintoticamente invariante definida em uma componente ergódica U, seja $A \subset \mathbb{X}$ o atrator dado pelo lema A.7. Existe um conjunto compacto $A_{\mathcal{U}} \subset A$ tal que $\omega_{f,\mathcal{U}} = A_{\mathcal{U}}$ para quase todo $x \in U$. Além disso, se $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(x)\}_{x\in U}$ tem frequência positiva, então existe um compacto $A_{+,\mathcal{U}} \subset A_{\mathcal{U}}$ tal que $\omega_{+,f,\mathcal{U}} = A_{+,\mathcal{U}}$, para μ-quase todo ponto $x \in U$.*

Teorema A.9 ([19]). *Seja $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ uma aplicação injetiva e bimensurável e $F : A \to \mathbb{X}$ uma aplicação f-induzida, com tempo induzido R.*

Se μ é probabilidade f-invariante, então $\mathcal{Z}_F := \bigcap_{n\geq 0} F^n\big(F^{-j}(\mathbb{X})\big)$ são conjuntos mensuráveis tais que $F(\mathcal{Z}_F) \subset \mathcal{Z}_F$ e $\mu(\mathcal{Z}_F \setminus F(\mathcal{Z}_{\mathcal{F}})) = 0$. Além disso, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. *$\mu(\mathcal{Z}_f) > 0$.*
2. *$\mu(\mathcal{Z}_F) > 0$ e $\nu := \frac{1}{\mu(\mathcal{Z}_F)}\mu\big|_{\mathcal{Z}_F}$ é probabilidade F-invariante.*
3. *Existe probabilidade invariante $\nu \ll \mu$.*

Corolário A.10 ([19]). *Seja f um automorfismo que preserva a medida em um espaço de probabilidade $(\mathbb{X}, \mathcal{A}, \mu)$ e $F : A \to \mathbb{X}$ uma aplicação f-induzida, de tempo induzido R e $A \in \mathcal{A}$ supondo f bimensurável e injetiva, μ f-ergódica e F-levantável. Se F é órbita coerente, seja $\mathcal{Z}_F := \bigcap_{n\geq 0} F^n\big(F^{-j}(\mathbb{X})\big)$, então temos que $\mu(\mathcal{Z}_f) > 0$ e $\nu := \frac{1}{\mu(\mathcal{Z}_F)}\mu\big|_{\mathcal{Z}_F}$ é F-ergódica e é o único F-levantamento de μ.*

Proposição A.11 (Rokhlin,[19]). *Se μ é probabilidade f-invariante, então a probabilidade $\bar{\mu}$ definida em $\mathbb{X}_f$ dada por $\bar{\mu}(U) = \lim_{n\to\infty} \mu(\pi_n(U))$, para todo $U \subset X$ mensurável, é a única probabilidade $\bar{f}$-invariante tal que $\mu = \pi_*\mu$.*

Lema A.12 (Continuidade do conjunto vazio,[19]). *Seja $(\mathbb{X}, \mathcal{A}, \mu))$ um espaço de probabilidade. Se $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ é uma sequência de conjuntos mensuráveis, então $\mu\big(\bigcap_{n\geq 1} A_n\big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.*

Proposição A.13 ([21], Proposição 8.4). *Se f é fortemente transitiva e $Per(f) \neq \emptyset$, seja $l = \min\{n \in \mathbb{N}; Fix(f^n) \neq \emptyset\}$, então existe um conjunto aberto tal que*

1. *$V \cup f^*(V) \cup \dots \cup (f^*)^{l-1}(V) \supset \mathbb{X} \setminus C$;*

2. $(f^*)^l(V) \subset V$;

3. $f^{lj}|_v$ *é fortemente transitivo* $\forall j \geq 1$.

Teorema A.14 ([27],teorema 2). *Seja* (Σ, F) *um deslocamento de Markov enumerável, e* Φ *um potencial Hölder. Então,*

$$P_G(\Phi) =$$

$$\sup\{P(\Phi|_Y, F); (Y, F) \subseteq \Sigma \text{ é um deslocamento de Markov finito e topologicamente mixing}\}$$

Teorema A.15 ([12],teorema 2.10). *Seja* (Σ, F) *um deslocamento de Markov enumerável* Φ *um potencial de variação somável. Então,*

$$P_G(\Phi) = \sup\left\{h_\mu(F) + \int \Phi d\mu; \mu \in \mathcal{M}^1(F) \ E \int \min\{\Phi, 0\} d\mu < \infty\right\}.$$

Teorema A.16 ([26],teorema 4.9). *Seja* (σ, F) *um deslocamento de Markov enumerável, com o conjunto de estados* S *e matriz de transição* $(t_{ij})_{S\times S}$. *Um potencial Walters* Φ *admite uma medida Gibbs se e somente se*

1. $\exists b_1, \ldots, b_{n_0} \in S$ *tal que* $\forall a \in S$ *existem* $i, j \in (1, n_0) \cap \mathbb{N}$ *tal que* $t_{b_j a} t_{a b_i} = 1$;

2. $P_G(\Phi) < \infty$ *e* $V_1(\Phi) < \infty$.

Teorema A.17 ([10],teorema 1.1). *Seja* (Σ, F) *um deslocamento de Markov topologicamente transitivo e enumerável. Suponha que* $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}$ *satisfaz* $\sup \Phi < \infty$, $P_G(\Sigma) < \infty$ *e satisfaz* $\sum_{n\geq 2} V_n(\bar{\varphi}) < \infty$. *Existe, no máximo, uma probabilidade* F*-invariante* μ *tal que* $h_\mu(F) + \int \Phi d\mu$ *está bem definido e é maximal.*

Teorema A.18 ([10],teorema 1.2). *Seja* (Σ, F) *e* Φ *como no teorema A.17, se existe* μ *tal que* $h_\mu(F) + \int \Phi d\mu$ *é maximal. Então existe uma função contínua positiva* h *e uma medida de Borel finita* ν *em casa* $[a]$, $a \in S$, *totalmente suportada tal que para algum* $\lambda > 0$ $L_\Phi h = \lambda h$, $L^*_\Phi \nu = \nu$ *e* $\int h d\nu = 1$. *Além disso,* $d\mu = h d\nu$

O lema a seguir possui significativa importância para a obtenção de resultados das dinâmicas hiperbólicas. Uma das provas para esse lema pode ser encontrada no lema 3.1 de [3].

Lema A.19 (lema de Pliss). *Dado* $A \geq c_2 > c_1 > 0$, *seja* $\theta_0 = \frac{c_2 - c_1}{A - c_1}$. *Então, dado qualquer sequência finita real* $a_1, \ldots, a_{n_0}$ *tal que*

$$\sum_{j=1}^{n_0} a_j \geq c_2 N \text{ e } a_j \leq A \, \forall 1 \leq j \leq n_0,$$

então existe $k \geq \theta_0 n_0$ *e* $1 < n_1 < \cdots < n_k \leq n_0$ *tal que*

$$\sum_{j=n+1}^{n_i} a_j \geq c_1(n_i - n) \ \forall 0 \leq n < n_i \text{ e } 1 \leq i \leq l.$$

Teorema A.20. *([18] teorema 5). Seja M uma variedade riemanniana $f : M \to M$ uma aplicação C^{1+} com região crítica $\mathcal{C}$, se f é fortemente transitiva e existe ponto periódico repulsor $p \in M \setminus \mathcal{O}_f^+(\mathcal{C})$, então algum iterado de f admite um conjunto não enumerável de probabilidades expansoras, não invariantes e ergódicas cujo seu suporte é toda a variedade.*

Referências

[1] ADLER, Roy L.; KONHEIM, Alan G.; MCANDREW, M. Harry. *Topological entropy.* Transactions of the American Mathematical Society, v. 114, n. 2, p. 309-319, 1965.

[2] ALSEDA, Luis; LLIBRE, Jaume; MISIUREWICZ, Michal. *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one*. World Scientific Publishing Company, 2000.

[3] ALVES, José F.; BONATTI, Christian; VIANA, Marcelo. *SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding*. Inventiones mathematicae, v. 140, n. 2, p. 351-398, 2000.

[4] BARWELL, Andrew David. *Omega-limit sets of discrete dynamical systems*. 2011. Tese de Doutorado. University of Birmingham.

[5] BLOCK, Louis; COVEN, Ethan M. *Topological conjugacy and transitivity for a class of piecewise monotone maps of the interval*. Transactions of the American Mathematical Society, v. 300, n. 1, p. 297-306, 1987.

[6] BLOKH, LLIBRE, Jaume; MISIUREWICZ, Michał. *Horseshoes, entropy and periods for graph maps*. Topology, v. 32, n. 3, p. 649-664, 1993.

[7] BOWEN, Rufus. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*. Lect. Notes Math, v. 470, p. 487-508, 1975.

[8] BRUIN, Henk; TODD, Mike. *Equilibrium States for Interval Maps: Potentials with* $\sup\varphi - \inf\varphi < h_{\text{top}}(f)$. Communications in mathematical physics, v. 283, p. 579-611, 2008.

[9] BUZZI, Jrme. *No or Infinitely Many ACIP for Piecewise Expanding Cr Mapsin Higher Dimensions*. Communications in Mathematical Physics, v. 3, n. 222, p. 495-501, 2001.

[10] BUZZI, Jérôme; SARIG, Omri. *Uniqueness of equilibrium measures for countable Markov shifts and multidimensional piecewise expanding maps*. Ergodic Theory and Dynamical Systems, v. 23, n. 5, p. 1383-1400, 2003.

[11] HOFBAUER, Franz. *On intrinsic ergodicity of piecewise monotonic transformations with positive entropy*. Israel Journal of Mathematics, v. 34, p. 213-237, 1979.

[12] IOMMI, Godofredo; JORDAN, Thomas; TODD, Mike. *Recurrence and transience for suspension flows*. Israel Journal of Mathematics, v. 209, n. 2, p. 547-592, 2015.

[13] LI, Huaibin; RIVERA-LETELIER, Juan. *Equilibrium states of interval maps for hyperbolic potentials*. Nonlinearity, v. 27, n. 8, p. 1779, 2014.

[14] MARTENS, Marco. *Distortion results and invariant Cantor sets of unimodal maps*. Ergodic Theory and Dynamical Systems, v. 14, n. 2, p. 331-349, 1994.

[15] OLIVEIRA, Krerley. *Every expanding measure has the nonuniform specification property*. Proceedings of the American Mathematical Society, v. 140, n. 4, p. 1309-1320, 2012.

[16] OLIVEIRA, Krerley; VIANA, Marcelo. *Fundamentos da teoria ergodica*. IMPA, Brazil, 2014.

[17] PINHEIRO, MARIANA. *Medidas SRB para aplicações com alguma expansão*. Orientador:Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro ,Dissertação (Mestrado)-Matemática, UFBA, Salvador, 2007.

[18] PINHEIRO, Vilton. *Expanding measures*. In: Annales de l'IHP Analyse non linéaire. 2011. p. 889-939.

[19] PINHEIRO, Vilton. *Lift and synchronization*. arXiv preprint arXiv:1808.03375, 2018.

[20] PINHEIRO, Vilton. *Topological and statistical attractors for interval maps*. arXiv preprint arXiv:2109.04579, 2021.

[21] PINHEIRO, Vilton; VARANDAS, Paulo. *Thermodynamic formalism for expanding measures*. arXiv preprint arXiv:2202.05019, 2022.

[22] PURVES, Roger. *Bimeasurable functions*. Fundamenta Mathematicae, v. 58, n. 2, p. 149-157, 1966.

[23] ROGERS, Claude Ambrose. Hausdorff measures. Cambridge University Press, 1998.

[24] RUELLE, David. *Statistical mechanics of a one-dimensional lattice gas*. Communications in Mathematical Physics, v. 9, p. 267-278, 1968.

[25] RUELLE, David. *Thermodynamic formalism* (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 5). Addisan-Wesley Publicating Company, 1978.

[26] SARIG, Omri M. *Lecture notes on thermodynamic formalism for topological Markov shifts*. Penn State, 2009.

[27] SARIG, Omri M. *Thermodynamic formalism for countable Markov shifts*. Ergodic Theory and Dynamical Systems, v. 19, n. 6, p. 1565-1593, 1999.

[28] ZWEIMÜLLER, Roland. *Invariant measures for general (ized) induced transformations*. Proceedings of the American Mathematical Society, v. 133, n. 8, p. 2283-2295, 2005.

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Programa de pós-graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA
CEP: 40170 - 110
<http://www.pgmat.ufba.br>