



Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática e Estatística

Programa de Pós-Graduação em Matemática

**CONTROLE ESTATÍSTICO DE PROCESSOS
MULTIVARIADOS BASEADO EM FUNÇÕES
CÓPULA**

Ana Claudia da Silva Batista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Salvador
Maio de 2019

ANA CLAUDIA DA SILVA BATISTA

**CONTROLE ESTATÍSTICO DE PROCESSOS MULTIVARIADOS
BASEADO EM FUNÇÕES CÓPULA**

Esta Dissertação de Mestrado foi apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática com concentração em Estatística.

Orientador: Paulo Henrique Ferreira da Silva

Salvador
Maio de 2019

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Universitário de Bibliotecas (SIBI/UFBA),
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Batista, Ana Claudia da Silva
CONTROLE ESTATÍSTICO DE PROCESSOS MULTIVARIADOS
BASEADO EM FUNÇÕES CÓPULA / Ana Claudia da Silva
Batista. -- Salvador, 2019.
87 f. : il

Orientador: Paulo Henrique Ferreira da Silva.
Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática com
concentração em estatística) -- Universidade Federal da
Bahia, Instituto de Matemática e Estatística, 2019.

1. CEP Multivariado. 2. Comprimento Médio da
Sequência. 3. Conjunto de Níveis de Densidade. 4.
Cópula. 5. Região de Tolerância. I. Silva, Paulo
Henrique Ferreira da. II. Título.

TERMO DE APROVAÇÃO

ANA CLAUDIA DA SILVA BATISTA

CONTROLE ESTATÍSTICO DE PROCESSOS MULTIVARIADOS BASEADO EM FUNÇÕES CÓPULA

Esta Dissertação de Mestrado foi julgada adequada à obtenção do título de Mestre em Matemática com concentração em Estatística e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia.

Salvador, 23 de Maio de 2019

Prof. Dr. Paulo Henrique Ferreira da Silva
UFBA

Profa. Dra. Giovana Oliveira da Silva
UFBA

Prof. Dr. Roberto da Costa Quinino
UFMG

Dedico este trabalho ao meu avô Orisvaldo Correia (in memoriam) por seu excêntrico estímulo e, ao meu filho Arthur pelo gás necessário para concluí-lo!

AGRADECIMENTOS

Essa dissertação é o fruto da junção de muito trabalho, esforço e superação física e mental. Agradeço a Deus por permitir-me concluí-la quando duvidei de mim e pensei que já não era capaz.

Inicialmente, gostaria de agradecer à minha grande família por me dar todo o suporte necessário para que eu pudesse retomar a jornada de estudante, mãe, esposa, filha e amiga, dentre tantas outras tarefas ao longo desses últimos dois anos. Ao meu filho Arthur por ceder-me sem ter escolha, ao meu companheiro Haron por apoiar-me literalmente e, indistintamente, à minha mãe Osvalda e ao meu pai Roberto por deixarem as portas e braços abertos por todas as vezes que precisei retornar, ao meu irmão Everton por continuar me aturando. E quando eu digo “grande família”, tenho propriedade. Não posso esquecer minha avó, tias, tios, primas, primos, sogra, sogro, cunhadas, cunhados, sobrinhos e amigos, pois só nós sabemos o valor da nossa união e de cada incentivo individualmente.

Agradeço imensamente aos meus colegas de jornada: Mary, Caio, Mara e Alex. Cada dica, sugestão, conselho, apoio, choro, esporro, piada, imitação, churros, saídas, acarajés e risos foram extremamente importantes para chegarmos até aqui, juntos e vencedores!

Sou grata também ao meu orientador Paulo Henrique por depositar tamanha confiança em mim e no meu trabalho, por ceder generosamente seus esforços e conhecimentos para meu aprendizado. Por sua competente e impecável orientação, que vai de conselhos acadêmicos do jovem e tão promissor pesquisador a dicas de desenvolvimento profissional, passando pela troca de informações relacionadas à sua recente paternidade. Humildade e generosidade lhe definem!

Agradeço esta oportunidade ao Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-MAT) do Instituto de Matemática e Estatística (IME) - UFBA, a todos os professores do Departamento de Estatística (DEst) pela contribuição direta e indireta, em especial à Profa. Dra. Rosemeire Leovigildo Fiaccone pelas dicas e conselhos, e à Profa. Dra. Giovana Oliveira Silva por participar da minha banca, também por todas suas sugestões e suporte acadêmico e pessoal. Ao Prof. Dr. Roberto da Costa Quinino por ter sido tão gentil e disposto ao aceitar participar da minha banca, além das valiosas dicas e contribuições.

Ao apoio financeiro subsidiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia (FAPESB), para que eu pudesse me dedicar integralmente para o desenvolvimento deste grandioso projeto.

*" Todo conhecimento é, na análise final, História.
Todas as ciências são, no abstrato, Matemática.
Todas as decisões são, em sua racionalidade, Estatística."*

—RADHAKRISHNA RAO

RESUMO

O Controle Estatístico de Processos (CEP) é um poderoso conjunto de ferramentas utilizadas na resolução de problemas, a fim de reduzir a variabilidade e obter a estabilidade de produtos, serviços ou processos (Montgomery, 2016). O Gráfico de Controle é uma técnica de monitoramento amplamente utilizada, cujo principal objetivo é detectar a ocorrência de causas especiais que levam à mudança do processo quão breve ela ocorra. Um grande desafio no controle estatístico de qualidade é o monitoramento e identificação de mudanças em características da qualidade avaliadas simultaneamente. O gráfico de controle de processos multivariados baseado na estatística T^2 de Hotelling é o mais popular no que diz respeito ao monitoramento do vetor de médias. Porém, ele parte do pressuposto de que os dados seguem uma distribuição normal multivariada (o que, na prática, raramente ocorre) e são não-correlacionados. Baíllo e Cuevas (2006) propuseram o uso de regiões de tolerância, obtidas a partir de uma estimativa de conjunto de níveis de densidade, como ferramenta de detecção de mudanças. Verdier (2013), por sua vez, sugeriu que tal estimativa fosse realizada com base numa modelagem via Cópulas, que são ferramentas simples e versáteis para modelagem multivariada. Neste trabalho de dissertação de mestrado, apresentamos uma extensão da abordagem não-normal baseada em funções cópula, introduzida por Verdier (2013), para o caso trivariado. Em ambos os casos explorados (bivariado e trivariado), consideramos também as abordagens paramétrica e semi-paramétrica com uso de marginais Kernel (tal como em Verdier, 2013), e ainda apresentamos o caso totalmente não-paramétrico. Assim, inicialmente comparamos a região de tolerância bivariada derivada da modelagem via cópula com a usual baseada na estatística T^2 de Hotelling, ambas construídas sob a abordagem de estimação de conjunto de níveis de densidade. Especialmente para o caso multivariado ($d > 2$), apresentamos uma proposta inédita de gráfico de controle para detecção visual de mudanças no vetor de médias, intitulado Gráfico de Controle c_n , que é análogo à tradicional região de tolerância. As simulações aqui realizadas permitiram a variação: (i) da distribuição original dos dados, em que consideramos os casos paramétrico (cópula e marginais paramétricas), semi-paramétrico (cópula paramétrica e marginais Kernel) e não-paramétrico (cópula não-paramétrica); (ii) do grau de associação entre as variáveis (fraca, moderada e forte); (iii) e da magnitude das mudanças ocorridas no vetor de médias. Por fim, aplicamos a metodologia proposta a um conjunto de dados bivariados sobre qualidade da água medida através do potencial hidrogeniônico (pH) e quantidade de nitrato, bem como a um conjunto de dados trivariados relacionados às medições da deflexão, curvatura e resistividade de termostatos bimetálicos em latão e aço. Ambos os conjuntos de dados estão disponíveis no pacote *MSQC* (Santos-Fernández, 2012) do programa estatístico R.

Palavras-chave: CEP Multivariado. Comprimento Médio da Sequência. Conjunto de Níveis de Densidade. Cópula. Região de Tolerância.

ABSTRACT

The Statistical Process Control (SPC) is a powerful set of quality tools used to reduce variability and obtain stability of products, services or processes (Montgomery, 2016). The Control Chart is a widely used process monitoring technique, whose main goal is to detect the occurrence of special causes that lead to the change of process as soon as it occurs. A major challenge in statistical quality control is the monitoring and detection of changes in quality characteristics evaluated simultaneously. The multivariate process control chart based on the Hotelling's T^2 statistic is the most popular for monitoring the mean vector. However, it assumes that the data follow a multivariate normal distribution (which in practice rarely occurs) and are uncorrelated. Baíllo and Cuevas (2006) proposed the use of tolerance regions obtained from density level set estimates as a detection tool. Recently, Verdier (2013) suggested the use of copula-based models, which are simple and flexible tools for multivariate modeling, for obtaining such estimates. In this work, we present an extension of the non-normal approach based on copula functions introduced by Verdier (2013), that is, we explore the trivariate copulas case in addition to the bivariate one. For both situations, we consider the parametric and semi-parametric approaches (the latter one, with the use of Kernel margins, as in Verdier, 2013), and we also present a totally non-parametric approach. Thus, we first compared the bivariate tolerance region derived from the copula modeling with the usual one based on the Hotelling's T^2 statistic, both constructed under the approach of density level set estimation. Particularly for the multivariate case ($d > 2$), we propose a new control chart for visual detection of changes in the process mean vector, called c_n -chart, which is analogous to the traditional tolerance region. The simulations performed here allowed the variation of: (i) the original data distribution, where we considered the parametric (parametric copula and marginal distributions), semi-parametric (parametric copula and Kernel margins) and non-parametric (non-parametric copula) cases; (ii) the degree of association between the variables (weak, moderate and strong); (iii) and the magnitude of changes in the mean vector. Finally, we applied the proposed methodology to a bivariate data set related to water quality measured by potential of hydrogen (pH) and phosphates, as well as to a trivariate data set on measurements of the deflection, curvature and resistivity from brass and steel bimetal thermostats. Both data sets are available in the *MSQC* package (Santos-Fernández, 2012) of the R software.

Keywords: Multivariate SPC. Average Run Length. Density Level Set. Copula. Tolerance Region.

SUMÁRIO

Lista de Figuras	xix
Lista de Tabelas	xxiv
1—Introdução	1
1.1 Objetivos	4
1.2 Organização do Trabalho	5
2—Metodologia	7
2.1 Gráfico de Controle T^2 de Hotelling	7
2.2 Avaliação da Performance de Gráficos de Controle	9
2.3 Região de Tolerância	10
2.3.1 Conjunto de Níveis de Densidade	11
2.3.2 Gráfico de Controle c_n	11
2.4 Teoria de Cópulas	12
2.4.1 Função Densidade de Cópula	13
2.4.2 Medidas de Associação	13
2.4.3 Famílias Paramétricas de Cópulas	14
2.4.3.1 Cópulas Arquimedianas	14
2.4.3.2 Cópulas Elípticas	15
2.4.4 Cópula Não-Paramétrica	17
2.4.5 Estimação dos Parâmetros	19
2.4.5.1 Caso Paramétrico	19
2.4.5.2 Caso Semi-Paramétrico	21
2.4.5.3 Caso Não-Paramétrico	22
3—Estudos de Simulação	23
3.1 Especificações Gerais	23
3.2 Resultados e Discussão	25
3.2.1 Recuperação de Parâmetros	25
3.2.2 Região de Tolerância	28
3.2.3 Avaliação da Performance	36
3.3 Considerações Finais	56

4—Estudos de Caso	59
4.1 Aplicação Bivariada	59
4.2 Aplicação Trivariada	62
5—Considerações Finais	69
5.1 Conclusões	69
5.2 Propostas Futuras	70
Apêndice A	79

LISTA DE FIGURAS

1.1	Exemplo de um gráfico de controle padrão.	3
2.1	Ilustração do método da transformação: (a) amostra da cópula; (b) amostra transformada; (c) estimativa Kernel da densidade para a amostra transformada; (d) estimativa Kernel da densidade de cópula. Fonte: Nagler (2018).	18
3.1	Viés e EQM das estimativas do parâmetro θ da cópula de Clayton bivariada, de acordo com o grau de dependência (Caso 1).	27
3.2	Viés e EQM das estimativas do parâmetro θ da cópula de Clayton bivariada, de acordo com o tipo de função Kernel das marginais (Caso 5 - dependência fraca).	29
3.3	Viés e EQM das estimativas do parâmetro θ da cópula de Clayton bivariada, de acordo com o tipo de função Kernel das marginais (Caso 5 - dependência moderada).	29
3.4	Viés e EQM das estimativas do parâmetro θ da cópula de Clayton bivariada, de acordo com o tipo de função Kernel das marginais (Caso 5 - dependência forte).	30
3.5	Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (Caso 1 - dependência fraca).	30
3.6	Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (Caso 1 - dependência moderada).	31
3.7	Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (Caso 1 - dependência forte).	31
3.8	Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (Caso 2 - dependência fraca).	32
3.9	Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (Caso 2 - dependência moderada).	32
3.10	Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (Caso 2 - dependência forte).	33
3.11	Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (Caso 3 - dependência fraca).	33
3.12	Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (Caso 3 - dependência moderada).	34
3.13	Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (Caso 3 - dependência forte).	34

3.14	Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (Caso 4 - dependência fraca).	35
3.15	Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (Caso 4 - dependência moderada).	35
3.16	Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (Caso 4 - dependência forte).	36
3.17	Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (Caso 5 - dependência fraca).	36
3.18	Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (Caso 5 - dependência moderada).	37
3.19	Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (Caso 5 - dependência forte).	37
3.20	Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (Caso 6 - dependência fraca).	38
3.21	Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (Caso 6 - dependência moderada).	38
3.22	Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (Caso 6 - dependência forte).	39
4.1	Histograma, gráfico de densidade Kernel, gráfico de probabilidade normal e <i>boxplot</i> das variáveis X (painéis superiores) e Y (painéis inferiores). . .	60
4.2	Gráfico de dispersão entre X (1/pH) e Y (fosfato).	61
4.3	Região de tolerância estimada pela cópula de Clayton com distribuições marginais normal e logística, considerando os dados bivariados do teste de qualidade de água.	62
4.4	Gráfico de controle da densidade com identificação do nível c_n (linha horizontal contínua), bem como das fases I e II (linha vertical tracejada), considerando os dados bivariados de teste de qualidade de água.	63
4.5	Histograma, gráfico de densidade Kernel, gráfico de probabilidade normal e <i>boxplot</i> das variáveis: (a) deflexão; (b) curvatura; (c) resistividade de termostatos bimetálicos em latão e aço.	64
4.6	Matriz de dispersão entre as variáveis deflexão, curvatura e resistividade de termostatos bimetálicos em latão e aço.	65
4.7	(a) Gráfico de controle T^2 de Hotelling, e (b) Gráfico de controle c_n para os dados de deflexão, curvatura e resistividade de termostatos bimetálicos em latão e aço (fases I e II).	66
1	Viés e EQM das estimativas do Caso 2 , de acordo com o grau de dependência.	81
2	Viés e EQM das estimativas do Caso 3 , de acordo com o grau de dependência.	81
3	Viés e EQM das estimativas do Caso 4 , de acordo com o grau de dependência.	82

4	Viés e EQM das estimativas do Caso 7 , de acordo com o grau de dependência.	85
5	Viés e EQM das estimativas do Caso 8 , de acordo com o grau de dependência.	85
6	Viés e EQM das estimativas do Caso 9 , de acordo com o grau de dependência.	86
7	Viés e EQM das estimativas do Caso 10 , para dependência fraca.	86
8	Viés e EQM das estimativas do Caso 10 , para dependência moderada.	87
9	Viés e EQM das estimativas do Caso 10 , para dependência forte.	87

LISTA DE TABELAS

3.1	Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_2 = 0,25$ (Caso 1).	26
3.2	Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_2 = 0,50$ (Caso 1).	26
3.3	Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_2 = 0,75$ (Caso 1).	26
3.4	Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_2 = 0,25$ (Caso 5).	27
3.5	Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_2 = 0,50$ (Caso 5).	28
3.6	Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_2 = 0,75$ (Caso 5).	28
3.7	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 1 - dependência fraca).	40
3.8	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 1 - dependência moderada).	40
3.9	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 1 - dependência forte).	41
3.10	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 2 - dependência fraca).	41
3.11	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 2 - dependência moderada).	42
3.12	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 2 - dependência forte).	42
3.13	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 3 - dependência fraca).	43
3.14	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 3 - dependência moderada).	43

3.15	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 3 - dependência forte).	44
3.16	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 4 - dependência fraca).	44
3.17	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 4 - dependência moderada).	45
3.18	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 4 - dependência forte).	45
3.19	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções Kernel e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 5 - dependência fraca).	46
3.20	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções Kernel e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 5 - dependência moderada).	46
3.21	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções Kernel e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 5 - dependência forte).	47
3.22	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes transformações de Kernel e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 6 - dependência fraca).	48
3.23	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes transformações de Kernel e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 6 - dependência moderada).	48
3.24	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes transformações de Kernel e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 6 - dependência forte).	49
3.25	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 7 - dependência fraca).	50
3.26	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 7 - dependência moderada).	50
3.27	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 7 - dependência forte).	51
3.28	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 8 - dependência fraca).	51

3.29	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 8 - dependência moderada).	52
3.30	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 8 - dependência forte).	53
3.31	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 9 - dependência fraca).	53
3.32	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 9 - dependência moderada).	54
3.33	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 9 - dependência forte).	54
3.34	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções Kernel e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 10 - dependência fraca).	56
3.35	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções Kernel e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 10 - dependência moderada).	56
3.36	Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções Kernel e diferentes <i>shifts</i> nas médias das variáveis (Caso 10 - dependência forte).	57
4.1	Medidas-resumo do conjunto de dados <i>water1</i> ($n = 29$). D.P. = Desvio-Padrão.	59
4.2	Resultados dos testes de normalidade univariada e bivariada.	60
4.3	Medidas-resumo do conjunto de dados <i>bimetal1</i> ($n = 28$).	63
4.4	Resultados dos testes de normalidade univariada e trivariada.	63
4.5	Crítério AIC para as diferentes famílias de cópulas candidatas.	67
1	Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_2 = 0, 25$ (Caso 2).	79
2	Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_2 = 0, 50$ (Caso 2).	79
3	Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_2 = 0, 75$ (Caso 2).	79
4	Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_2 = 0, 25$ (Caso 3).	80
5	Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_2 = 0, 50$ (Caso 3).	80
6	Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_2 = 0, 75$ (Caso 3).	80

7	Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para dependência fraca (Caso 4).	80
8	Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para dependência moderada (Caso 4).	80
9	Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para dependência forte (Caso 4).	81
10	Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_3 = 0,25$ (Caso 7).	82
11	Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_3 = 0,50$ (Caso 7).	82
12	Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_3 = 0,75$ (Caso 7).	82
13	Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_3 = 0,25$ (Caso 8).	83
14	Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_3 = 0,50$ (Caso 8).	83
15	Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_3 = 0,75$ (Caso 8).	83
16	Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para dependência fraca (Caso 9).	83
17	Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para dependência moderada (Caso 9).	83
18	Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para dependência forte (Caso 9).	84
19	Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_3 = 0,25$ (Caso 10).	84
20	Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_3 = 0,50$ (Caso 10).	84
21	Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_3 = 0,75$ (Caso 10).	84

1

INTRODUÇÃO

Na hora de selecionar produtos, os consumidores têm se tornado cada vez mais exigentes. A qualidade do produto, seja ele um bem ou serviço, é um dos fatores mais importantes para a tomada de decisões. Logo, atender às necessidades e expectativas dos clientes, bem como lidar com o mercado cada vez mais competitivo, é um grande desafio para as empresas que querem se destacar entre as demais.

Segundo Montgomery (2016), a definição tradicional de qualidade diz que produtos e serviços devem adequar-se às especificações exigidas por seus usuários. Louzada *et al.* (2013) complementa que “a qualidade é um conceito de suma importância para qualquer empresa, pois é mediante a sua consideração, seu aprimoramento e sua aplicação contínua que se pode atingir o nível de excelência em quaisquer dos objetivos fixados e atividades executadas”.

Todo produto ou serviço possui um conjunto de elementos que descrevem o que o consumidor ou usuário classifica como qualidade. Em geral, esses parâmetros são chamados de características da qualidade. Estas, quando medidas contínuas (peso, diâmetro, espessura, etc.), são classificadas como variáveis, ou se medidas em geral sob forma de contagem (número ou proporção de itens conformes ou não-conformes, em bom estado ou defeituoso, etc.), são classificadas como atributos. Ainda hoje, é uma missão difícil e onerosa para as organizações fornecer produtos que apresentem as mesmas características de qualidade de uma unidade para outra. A variabilidade é a responsável por isso.

Existe variabilidade em todo produto. Se esta for pequena, provavelmente não causará impacto para o cliente, mas sendo grande, o cliente poderá perceber e classificar a unidade como inaceitável. As fontes de variabilidade podem ser muitas: diferenças na matéria-prima utilizada, no desempenho dos equipamentos e até mesmo na maneira como diferentes operadores realizam a mesma tarefa. É papel exclusivo da Estatística descrever a variabilidade. Portanto, metodologias estatísticas, tais como: Controle Estatístico de Processos, Planejamento de Experimentos e Amostragem de Aceitação, são fundamentais para a melhoria e manutenção da qualidade. O Controle Estatístico de Processos ou CEP, como é conhecido, é um poderoso conjunto de ferramentas utilizadas na resolução de problemas, a fim de diminuir a variabilidade e obter a estabilidade do processo produtivo ou serviço prestado (Montgomery, 2016). Todo e qualquer processo

de produção, mesmo que planejado de forma correta e cuidadosamente, apresentará certa variabilidade inerente ou natural que, em suma, é o efeito de diversas causas pequenas e inevitáveis, ou seja, causas aleatórias (ou comuns). Se um processo opera apenas na presença dessas causas de variação, dizemos que ele está sob controle estatístico, enquanto que um processo que opera sob causas atribuíveis (ou especiais) de variação, ou seja, oriundas de fontes de variabilidade que não pertencem ao conjunto de causas aleatórias, é dito estar fora de controle.

Uma das principais ferramentas do CEP, também considerada a mais sofisticada, é o Gráfico de Controle. Desenvolvido na década de 1920 por Walter A. Shewhart, um físico dos laboratórios da *Bell Telephones*, o gráfico de controle é uma técnica de monitoramento do processo amplamente utilizada, que tem como objetivo principal detectar a ocorrência de causas especiais que levam à mudança do processo o quanto breve ela ocorra. Com o processo sob controle, esperamos que os dados variem em torno de uma média fixa de uma maneira aleatória, em outras palavras, os dados são não-correlacionados. Assumimos ainda, com frequência, que a distribuição da característica da qualidade é normal (ou Gaussiana). Ao lidar com uma característica de qualidade numérica, usualmente é de interesse monitorar tanto seu valor médio como sua variabilidade por meio dos gráficos de controle. A Figura 1 mostra um exemplo de gráfico de controle padrão, extraído de Montgomery (2016). Ele contém uma linha central (LC) representando o valor médio da característica da qualidade e outras duas linhas chamadas limite inferior de controle (LIC) e limite superior de controle (LSC) escolhidos de modo que, se o processo está sob controle, espera-se que todos os pontos amostrais estejam entre eles. Os gráficos de controle podem ser empregados nas fases I e II do processo. A fase I consiste na análise retrospectiva, em que definem-se os limites de controle “confiáveis” (isto é, quando o processo está sob controle estatístico) para serem utilizados na fase seguinte. A fase II consiste no monitoramento do processo, comparando as estimativas obtidas em amostras coletadas periodicamente com esses limites de controle.

O CEP, juntamente com outros procedimentos estatísticos, formam uma base técnica para o controle e a melhoria da qualidade. Esses métodos precisam ser implementados como parte de um gerenciamento orientado e eficaz, que tem como objetivo principal direcionar a filosofia da melhoria da qualidade e garantir a implementação da mesma em todos os setores do negócio. Desenvolvido pela Motorola na década de 1980, o programa Seis Sigma foca na redução da variabilidade para o nível em que falhas e defeitos têm baixíssimas probabilidades de ocorrência. Em outras palavras, de modo que os limites de especificação estejam a, pelo menos, seis desvios-padrão da média. Diversas empresas atuam no nível de qualidade Três Sigma. Numa característica de qualidade com distribuição de probabilidade normal com limites de especificação três sigmas ($\mu \pm 3\sigma$), a probabilidade de produzir um produto dentro das especificações é de 0,9973, ou 27.000 partes por milhão (ppm) de itens defeituosos. O programa Seis Sigma emprega uma abordagem composta por cinco passos para a solução do problema: Definir, Medir, Analisar, Melhorar e Controlar (DMAMC, ou ainda, DMAIC, do inglês *Define, Measure, Analyze, Improve and Control*). O método DMAMC utiliza, além de ferramentas básicas, os gráficos de controle, planejamento de experimento e análise de capacidade dos sistemas (Montgomery, 2016).

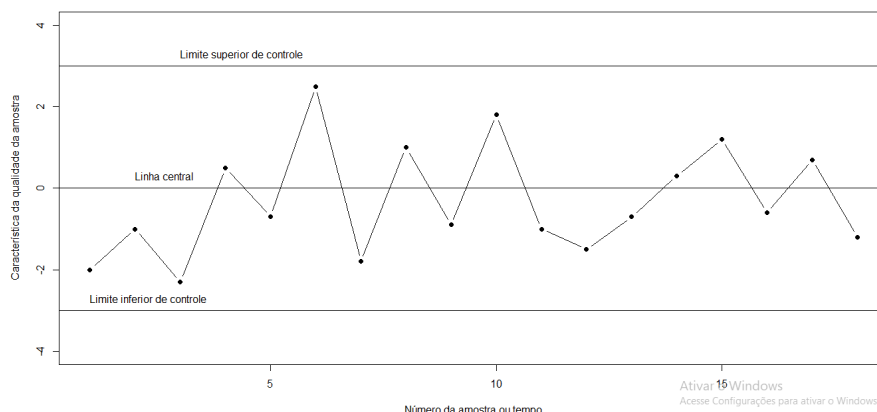


Figura 1.1 Exemplo de um gráfico de controle padrão.

Rotineiramente, o monitoramento e controle do processo são feitos em apenas uma característica de qualidade numérica por vez. Porém, na prática, o controle e monitoramento do processo envolvem diversas variáveis relacionadas. Nestes casos, a aplicação de gráficos de controle univariados a cada variável individualmente, apesar de possível, não é a solução mais eficaz, logo são necessários métodos multivariados que considerem as variáveis conjuntamente. O famoso gráfico T^2 de Hotelling (Hotelling, 1947), bastante empregado no monitoramento do vetor de médias do processo, é uma extensão do gráfico \bar{X} (Shewhart, 1931). Similar ao gráfico univariado, o T^2 de Hotelling parte do pressuposto de que as variáveis seguem uma distribuição normal multivariada e os dados são não-correlacionados. Como proposta para contornar o problema da autocorrelação entre os dados, Boone (2010) propôs o uso do gráfico Z , que, apesar de apresentar alguns bons resultados, superou o tradicional T^2 de Hotelling apenas quando houve mudanças simultâneas no vetor de médias. Já para solucionar o problema da não-normalidade multivariada dos dados, o autor sugeriu o uso de quatro gráficos de controle não-paramétricos ou livres de distribuição, que demonstraram melhores resultados do que o T^2 de Hotelling quando não havia certeza da distribuição.

A fim de resolver problemas de detecção de mudança na distribuição de vetores aleatórios independentes observados sequencialmente, Baíllo e Cuevas (2006) propuseram o uso de regiões de tolerância, definidas em termos de conjuntos de níveis de densidade estimados de maneira *plug-in*. Seu estudo tomou como base um modelo de mistura normal e comparou, por meio de estudos de simulação, o desempenho do modelo de mistura paramétrico com um modelo não-paramétrico (Kernel), mediante o uso da medida *Average Run Length* (ARL), também conhecida em português como Comprimento Médio da Corrida (CMC), Comprimento Médio da Sequência (CMS), ou ainda, Número Médio de Amostras (NMA). Mais recentemente, inspirado na abordagem da estimação de conjuntos de níveis de densidade, Verdier (2013) propôs o uso de cópulas (Nelsen, 2006) para modelar a distribuição multivariada, afirmando que tal proposta apresenta vantagens, como maior flexibilidade do que a modelagem de mistura Gaussiana, além de evitar o

problema da dimensionalidade encontrado nas abordagens não-paramétricas. Em seu trabalho, a estimação dos parâmetros dos modelos de cópula empregados, foi feita através do método clássico da máxima pseudo-verossimilhança, também conhecido por método da estimação em dois estágios no contexto de sobrevivência e confiabilidade, isto é, para dados com censura (Shih e Louis, 1995), ou ainda, método da inferência para as marginais (ou IFM, do inglês *Inference Function for Margins*) (Joe e Xu, 1996). Em suma, tal método estima, via máxima verossimilhança, os parâmetros das distribuições marginais paramétricas, ou então, via abordagem de Kernel, por exemplo, no caso de distribuições marginais não-paramétricas. Em seguida, considera uma pseudo-verossimilhança para estimar o parâmetro (ou parâmetros) da cópula em questão.

Ainda com base no gráfico T^2 de Hotelling bivariado, Sukparungsee *et al.* (2016) propuseram o uso de cópulas para modelar a dependência entre duas distribuições marginais exponenciais com média igual a 1, quando o processo está sob controle, a fim de detectar grandes mudanças no vetor de médias. Já Sukparungsee *et al.* (2017) apresentaram uma proposta para detecção de mudanças mais sutis no vetor de médias do processo, baseada no gráfico de controle multivariado de Somas Acumuladas (ou MCUSUM, do inglês *Multivariate Cumulative Sum*) (Crosier, 1988). Os autores assumiram novamente marginais exponenciais de parâmetro 1, com dependência modelada por meio de cópulas, mas com extensão de sua proposta original para o caso trivariado. Uma comparação entre o desempenho do gráfico MCUSUM e o do gráfico de controle multivariado de Médias Móveis Exponencialmente Ponderadas (ou MEWMA, do inglês *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average*) (Lowry *et al.*, 1992), ambos bivariados com também distribuições marginais exponenciais de média 1 e dependência modelada através de cópulas, foi feita em Kuvattana *et al.* (2015).

Por fim, Busababodhin e Amphanthong (2016) realizaram uma revisão de literatura sobre a modelagem via cópula para o CEP Multivariado, em que apresentaram os principais artigos aqui citados e compararam os resultados obtidos para os gráficos T^2 de Hotelling, MCUSUM e MEWMA bivariados, com marginais exponencialmente distribuídas de parâmetro 1 e dependência modelada através de funções cópula.

1.1 OBJETIVOS

A maioria dos procedimentos de CEP Multivariado baseia-se na suposição de normalidade multivariada das variáveis do processo, como é o caso dos gráficos de controle T^2 de Hotelling, MCUSUM e MEWMA. Entretanto, quando a distribuição do vetor aleatório é não-normal multivariada, esses procedimentos não se adaptam, a exemplo da regra T^2 de Hotelling (Boone, 2010). Uma das alternativas apresentadas na literatura sobre CEP para o problema da não-normalidade consiste na transformação das variáveis a fim de normalizá-las. Para casos univariados, existem as transformações clássicas de Box-Cox (Box e Cox, 1964) e Johnson (1949a). Posteriormente, Johnson (1949b) propôs a aplicação dessas transformações marginalmente a fim de obter uma distribuição normal bivariada e multivariada (Johnson e Ramberg, 1978). Waterhouse *et al.* (2010) verificaram que as transformações inversa e logaritmo natural nas marginais foram suficientes para tornar seus dados normais e obter normalidade multivariada. Porém, uma vez realizada a

transformação, a variável perde sua interpretabilidade, isto é, sua identidade absoluta.

Baíllo e Cuevas (2006) propuseram, para o caso multivariado não-normal, o uso de regiões de tolerância sob modelagens paramétrica (mistura Gaussiana) e não-paramétrica (Kernel), estimadas segundo a abordagem de conjunto de níveis de densidade, tal que, para um processo sob controle, a probabilidade pré-fixada de que uma observação caia fora da região de tolerância seja α . Verdier (2013) complementou o trabalho de Baíllo e Cuevas (2006), propondo o uso de cópulas para modelar a distribuição multivariada paramétrica, com a vantagem, segundo ele, desta ser uma abordagem mais flexível do que a modelagem de mistura Gaussiana, e também sem o problema da dimensionalidade encontrado nas abordagens não-paramétricas.

O presente trabalho de dissertação de mestrado se propõe a refazer o estudo bivariado da abordagem não-normal baseada em funções cópula de Verdier (2013), indo mais além ao considerar o caso totalmente não-paramétrico. E ainda, explorar em profundidade o caso trivariado, o que ainda não foi feito na literatura, segundo o nosso conhecimento. Para ambas as situações, consideramos as abordagens paramétrica e semi-paramétrica com uso de marginais Kernel, e apresentamos o caso totalmente não-paramétrico. Assim, inicialmente comparamos a região de tolerância derivada da modelagem via cópulas com a usual baseada na regra T^2 de Hotelling, ambas construídas sob a abordagem de estimação de conjunto de níveis de densidade. Em adição, apresentamos um gráfico de controle inédito, aqui intitulado **Gráfico de Controle c_n** , o qual permite a detecção visual de mudanças no vetor de médias do processo em contextos multivariados (ou d -variados, com $d \geq 2$), especialmente quando $d > 2$, pois a tradicional região de tolerância só contempla o caso bivariado. Os estudos de simulação aqui realizados permitiram a variação: (i) da distribuição original dos dados, em que consideramos os casos paramétrico (cópula e marginais paramétricas), semi-paramétrico (cópula paramétrica e marginais Kernel) e não-paramétrico (cópula não-paramétrica); (ii) do grau de associação entre as variáveis (fraca, moderada e forte); (iii) e da magnitude das mudanças ocorridas no vetor de médias do processo.

A metodologia proposta foi ilustrada com aplicação a dois conjuntos de dados reais: um bivariado, referente à qualidade da água medida através do potencial hidrogeniônico (pH) e quantidade de fósforo encontrados; e outro trivariado, relacionado a medições da deflexão, curvatura e resistividade de termostatos bimetálicos de latão e aço. Ambos os conjuntos de dados estão armazenados e disponíveis no pacote *MSQC* (Santos-Fernández, 2012) do *software* estatístico R.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. No Capítulo 2, é realizada uma breve revisão metodológica sobre: o gráfico de controle multivariado T^2 de Hotelling e as medidas de avaliação da performance desse tipo de gráfico; a região de tolerância e o gráfico de controle c_n (que, no melhor do nosso conhecimento, é inédito na literatura), ambos gerados sob a abordagem de conjunto de níveis de densidade; a teoria de cópulas, que abrange a função densidade de cópula, as medidas de dependência para as famílias paramétricas mais usuais, a cópula não-paramétrica (que ainda está sendo difun-

dida), e os métodos de estimação. Estudos de simulação são apresentados no Capítulo 3, considerando-se as abordagens paramétrica, semi-paramétrica e não-paramétrica, para os casos bivariado e trivariado. Neste capítulo, iniciamos com um estudo de recuperação de parâmetros, depois com as regiões de tolerância para detecção de mudanças no vetor de médias do processo, estimadas com base em funções cópula, finalizando com a análise da performance das ferramentas CEP implementadas. O Capítulo 4 trata das aplicações das técnicas apresentadas na dissertação a dois conjuntos de dados: um não-normal bivariado e outro com normalidade trivariada. No Capítulo 5, os principais resultados do trabalho são explicitados e propostas para trabalhos futuros são sugeridas.

2

METODOLOGIA

Neste capítulo são apresentados os principais detalhes acerca das diferentes metodologias empregadas neste trabalho, a saber: o gráfico de controle multivariado mais popular e suas características (Seção 2.1); as medidas mais comumente usadas para a avaliação da performance de gráficos de controle (Seção 2.2); a abordagem baseada em conjuntos de níveis de densidade para a construção de regiões de tolerância, bem como o novo gráfico de controle c_n (Seção 2.3); os conceitos fundamentais da teoria de cópulas, incluindo as famílias paramétricas mais conhecidas e a cópula não-paramétrica utilizada, além do método clássico de estimação paramétrica IFM (Seção 2.4).

2.1 GRÁFICO DE CONTROLE T^2 DE HOTELLING

Rotineiramente, supõe-se que exista apenas uma característica da qualidade de interesse dentro do processo; nestas condições, chamamos o processo de univariado. Porém, a maioria dos cenários de controle do processo possui diversas variáveis relacionadas entre si. A aplicação de gráficos de controle univariados a cada variável individualmente, apesar de possível, não é a solução mais eficaz, uma vez que o uso de gráficos independentes distorce o monitoramento simultâneo das variáveis, levando a uma probabilidade de erro tipo I e a uma probabilidade de um ponto ser plotado corretamente sob controle que não sejam iguais aos seus níveis anunciados para os gráficos de controle individuais (Montgomery, 2016). Frisen (2011) faz um alerta: “As avaliações de gráficos de controle multivariados são consideravelmente mais complexas do que os univariados. No entanto, o esforço para especificar o problema é recompensador. Medidas simples podem ser enganosas.”.

Por essa razão, faz-se necessário o uso de métodos multivariados que considerem as variáveis do processo conjuntamente. O procedimento mais famoso para o monitoramento e controle de processos multivariados, mais especificamente, do vetor de médias do processo, é o gráfico T^2 de Hotelling. Trata-se de uma extensão direta do gráfico \bar{X} de Shewhart (1931), desenvolvida por Hotelling (1947). Similar ao gráfico univariado, o T^2 de Hotelling parte do pressuposto de que as variáveis seguem uma distribuição normal multivariada e os dados são não-correlacionados. Vale lembrar que, para evitar o problema da não-normalidade, considerar subgrupos ou amostras de tamanho $n > 3$ já é suficiente para garantir robustez em relação à hipótese de normalidade do gráfico \bar{X} , uma

vez que o Teorema Central do Limite será devidamente aplicado (Korzenowski e Werner, 2012). Sendo assim, nos concentraremos exclusivamente em subgrupos de tamanho unitário (isto é, $n = 1$), como segue.

Considere m amostras de tamanho $n = 1$ para d características de qualidade, em que a distribuição de probabilidade conjunta dessas características é normal d -variada. Sejam ainda $\boldsymbol{\mu}$ e Σ , o vetor de médias das características de qualidade sob controle e a matriz de covariâncias, respectivamente. Na prática, é muitas vezes necessário estimar tais parâmetros por meio de $\bar{\mathbf{X}}$ e S , admitindo que o processo em questão esteja sob controle.

Nestas circunstâncias, a estatística de teste do gráfico T^2 de Hotelling é dada por (Montgomery, 2016):

$$T^2 = (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})'S^{-1}(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}).$$

O LSC na fase I é dado por:

$$\text{LSC} = \frac{(m-1)^2}{m} \beta_{\alpha; \frac{d}{2}, \frac{m-d-1}{2}},$$

em que $\beta_{\alpha; d/2, (m-d-1)/2}$ é o α -ésimo quantil da distribuição Beta com parâmetros $d/2$ e $(m-d-1)/2$.

Na fase II, o LSC é calculado como:

$$\text{LSC} = \frac{d(m+1)(m-1)}{m^2 - md} F_{\alpha; d, m-d},$$

sendo $F_{\alpha; d, m-d}$ o α -ésimo quantil da distribuição F de Snedecor com d graus de liberdade no numerador e $m-d$ graus de liberdade no denominador.

Por sua vez, o LIC, em ambos os casos, será sempre igual a zero.

Segundo Montgomery (2016), o vetor de médias do processo pode ser estimado através de:

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{1i} \\ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{2i} \\ \vdots \\ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{di} \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

em que X_{ki} corresponde à i -ésima observação da k -ésima variável, com $k = 1, 2, \dots, d$. Os autores destacam ainda a necessidade do uso de estimadores mais sofisticados para a matriz de covariâncias no caso de observações individuais. Um possível estimador pode ser obtido pela combinação das observações disponíveis:

$$S_1 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})'. \quad (2.2)$$

Holmes e Mergen (1993) também apresentam outro estimador, o qual considera a diferença entre pares consecutivos, ou seja, $\mathbf{v}_i = \mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i$, para $i = 1, 2, \dots, m-1$.

Essas diferenças são organizadas em uma matriz:

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{v}'_1 \\ \mathbf{v}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}'_{m-1} \end{bmatrix}.$$

Por fim,

$$S_2 = \frac{1}{2} \frac{V'V}{(m-1)}. \quad (2.3)$$

O gráfico T^2 de Hotelling é um gráfico do tipo Shewhart, logo, usa informação exclusivamente da amostra corrente e, portanto, é relativamente insensível a pequenas e moderadas mudanças no vetor de médias do processo (Montgomery, 2016). Como alternativas, são indicados os gráficos MCUSUM (Crosier, 1988) e MEWMA (Lowry *et al.*, 1992). Conhecidos como gráficos de controle ponderados pelo tempo (ou ainda, gráficos de controle “com memória”), eles são mais eficazes do que o gráfico T^2 de Hotelling para detectar pequenas mudanças no vetor de médias. Existem ainda algumas abordagens mais recentes, como os gráficos de controle Bayesianos propostos por Wang (2012), os gráficos de controle baseados em redes neurais apresentados por Psarakis (2011), e os gráficos de controle não-paramétricos introduzidos por Boone (2010).

2.2 AVALIAÇÃO DA PERFORMANCE DE GRÁFICOS DE CONTROLE

Nos processos de produção, o desempenho do gráfico de controle é geralmente medido em termos do número de amostras até que um sinal seja observado (Lee Ho *et al.*, 2018). Em outras palavras, é o número esperado de observações provenientes da nova distribuição (pós-mudança), e registradas antes que a alteração seja detectada (Baíllo e Cuevas, 2006).

A métrica mais utilizada para essa análise é a *Average Run Length* (ARL), também conhecida em português como Comprimento Médio da Sequência (CMS), ou ainda, Número Médio de Amostras (NMA), dentre outras denominações. De acordo com suas características, podemos dizer que o comprimento da sequência (ou corrida) segue uma distribuição geométrica e, se as observações do processo forem independentes, o ARL pode ser calculado como:

$$ARL = \frac{1}{p},$$

em que p é a probabilidade de que qualquer ponto ultrapasse os limites de controle (Montgomery, 2016). Quando o processo está sob controle, dizemos que p será a probabilidade de ocorrência do erro tipo I, isto é, a probabilidade de que qualquer ponto ultrapasse os limites quando o processo está sob controle ($p = \alpha$). Por exemplo, para o gráfico \bar{X} com limites três sigmas, $p = \alpha = 0,0027$, e o ARL será igual a $1/0,0027 \approx 370$. Neste trabalho (mais precisamente, no Capítulo 3), adotamos $\alpha = 0,05$, logo o ARL₀ nominal (sob controle) será ARL₀ = 20. Ou seja, mesmo que o processo esteja sob controle, um alarme falso será dado, em média, a cada 20 amostras. Caso o processo esteja fora de controle, $p = 1 - \beta$ (em que β é a probabilidade de não se detectar um deslocamento no vetor de

médias do processo na primeira amostra subsequente) e denotaremos ARL_1 , interpretado como o número esperado de amostras necessárias para se detectar um deslocamento real na distribuição.

Montgomery (2016) chama a atenção para o uso do ARL para descrever o desempenho dos gráficos de controle, visto que a distribuição do comprimento da sequência é geométrica, o que faz com que seu desvio-padrão seja muito grande, além de ser uma distribuição bastante assimétrica. A fim de minimizar esses impactos, Lee Ho *et al.* (2018) sugeriram o uso também do Desvio-Padrão do Comprimento da Sequência (SDRL, do inglês *Standard Deviation of the Run Length*):

$$SDRL = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}},$$

bem como do Comprimento Mediano da Sequência (MRL, do inglês *Median Run Length*): $MRL = \log(0,5)/\log(1-p)$.

Quando o processo está sob controle, é esperado que o ARL_0 esteja próximo do seu valor nominal. E quando o processo está fora de controle, valores pequenos do ARL_1 são preferíveis (Lee Ho *et al.*, 2018).

2.3 REGIÃO DE TOLERÂNCIA

De acordo com Baíllo e Cuevas (2006), detectar uma mudança na distribuição de vetores aleatórios independentes observados sequencialmente, é um grande desafio do CEP, especialmente quando a distribuição multivariada do vetor, antes da mudança, é não-normal. A fim de contornar este problema, os autores utilizaram regiões de tolerância como ferramenta de detecção, as quais são definidas em termos de conjuntos de níveis de densidade, que, por sua vez, são estimados de forma *plug-in*. Tal abordagem foi empregada anteriormente para o caso Gaussiano em Fuchs e Kenett (1998), e não-paramétrico em Baíllo *et al.* (2001). Já Polansky (2001) usou essa ideia para avaliar a capacidade de um processo de manufatura.

Baíllo e Cuevas (2006) compararam, por meio de um estudo de simulação, baseados na abordagem proposta, um estimador de densidade paramétrica (mistura Gaussiana) e um estimador não-paramétrico (Kernel). Cadre *et al.* (2013) revelaram a importância dessa abordagem: “conjuntos de níveis de densidade são usados em diversas áreas científicas, incluindo estatística e aprendizado de máquina, imagens médicas, visão computacional ou sensoriamento remoto, e com aplicações para classificação/agrupamento não-supervisionado, reconhecimento de padrões, anomalias ou detecção de novidades, por exemplo”. Verdier (2013) construiu uma região de tolerância obtida a partir de uma estimativa do nível de densidade, baseada na abordagem *plug-in*, em que a densidade é estimada usando modelagem de cópulas, alegando que a mesma tem a vantagem de ser mais flexível do que uma modelagem de mistura Gaussiana, e evita o problema de dimensionalidade encontrado com abordagens não-paramétricas.

Seja $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)'$ um vetor aleatório de \mathbb{R}^d com funções de distribuição acumulada (fda) contínuas $F_j(\cdot)$, $j = 1, 2, \dots, d$. Seja ainda h a densidade de \mathbf{X} . Nosso objetivo é decidir se uma nova observação, \mathbf{X}_{n+k} , $k \geq 1$, foi gerada de h . Essa decisão

será baseada numa amostra aleatória preliminar de h , ou seja, a partir de um conjunto de observações $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ independentes e identicamente distribuídas (iid) extraídas de h em um período de monitoramento sob controle. Em seguida, a região de tolerância é definida. Se \mathbf{X}_{n+k} ficar fora da região de tolerância, então o processo é declarado como fora de controle.

2.3.1 Conjunto de Níveis de Densidade

Consideremos um método baseado na estimativa de conjunto de níveis, com probabilidade $1 - \alpha$ pré-especificada, da densidade h . Na região de tolerância $\{h \geq c\}$, usualmente necessitamos estimar h , o que pode ser feito a partir do estimador *plug-in* h_n . Logo, um alarme “fora de controle” será disparado sempre que $\mathbf{X}_{n+k} \notin \{h_n \geq c_n\}$, ou seja, um alarme falso ocorrerá com probabilidade α , em que c_n é dado por (Verdier, 2013):

$$\int_{\{h_n \geq c_n\}} h_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1 - \alpha,$$

ou seja, c_n é o α -ésimo quantil de h_n . Na prática, Baíllo e Cuevas (2006) sugeriram que o nível c_n seja estimado via procedimento de Monte Carlo, tal como geramos uma amostra auxiliar $\mathbf{X}_1^*, \dots, \mathbf{X}_n^*$ de h_n ; assim, c_n será dado pelo α -ésimo percentil de $h_n(\mathbf{X}_1^*), \dots, h_n(\mathbf{X}_n^*)$. Os autores provaram ainda que, sob certas condições, a probabilidade de alarme falso com este procedimento converge para α à medida que n tende ao infinito. Para maiores detalhes, ver Baíllo e Cuevas (2006), Cadre *et al.* (2013) e Verdier (2013).

Neste trabalho, utilizamos funções cópula para estimar h_n nos casos paramétricos e semi-paramétrico, e estimadores Kernel para o caso não-paramétrico.

2.3.2 Gráfico de Controle c_n

Para finalizar esta seção, propomos um novo gráfico de controle com o objetivo de detectar, de maneira visual, mudanças ocorridas no vetor de médias do processo para casos multivariados ($d \geq 2$), especialmente em grandes dimensões (quando $d > 2$), uma vez que a região de tolerância aqui apresentada só contempla o caso bivariado.

O gráfico proposto é obtido sob a ótica de conjunto de níveis de densidade, em que, na fase I, estima-se o valor de c_n adotando determinado nível de significância α , conforme apresentado na Seção 2.3.1. O gráfico ou carta de controle é então construído apenas com um limite inferior (LIC = c_n), e o valor da densidade (calculada com base no modelo de cópula estimado) $h_i = f_i(x_i, y_i)$ de cada observação (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, é plotada. Na fase II, as densidades das novas observações são monitoradas com base no c_n encontrado na fase I. Caso $h_k < c_n$, para algum $k = n + 1, \dots$, um alarme é gerado e sua causa deve ser investigada. A performance do gráfico proposto será discutida brevemente nas Seções 4.1 e 4.2, com base nas aplicações bivariada e trivariada, respectivamente.

2.4 TEORIA DE CÓPULAS

Usualmente, é de interesse conhecer a função de distribuição conjunta de duas ou mais variáveis aleatórias. Naturalmente, é mais fácil de se obter as funções de distribuição marginais das variáveis em questão. Como alternativa, abordaremos o uso de funções cópula para modelar a função de distribuição conjunta de variáveis aleatórias.

Segundo Nelsen (2006), as cópulas são funções que unem funções de distribuição multivariadas a suas funções de distribuição marginais unidimensionais. Ou alternativamente, são funções de distribuição multivariadas cujas marginais unidimensionais são uniformes padrão, isto é, Uniforme(0,1). Além disso, Fisher (1997) diz que as cópulas interessam aos estatísticos por serem uma forma de estudo de medidas de dependência livres de escala, e também por servirem como ponto de partida para a construção de famílias de distribuições multivariadas.

Uma cópula C é uma função de distribuição d -dimensional $C: [0,1]^d \rightarrow [0,1]$, de modo que suas marginais univariadas tenham distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$, i.e. $U_j \sim \text{Uniforme}(0, 1)$, para $j = 1, 2, \dots, d$.

Assim, uma cópula bivariada é uma função de distribuição bivariada C , como segue:

$$C(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2).$$

Enquanto que, num contexto trivariado ($d = 3$), podemos escrever uma cópula como sendo:

$$C(u_1, u_2, u_3) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, U_3 \leq u_3).$$

Neste caso, as variáveis $U_1, U_2, U_3 \sim \text{Uniforme}(0, 1)$ são originadas por uma transformação especial, chamada de transformação integral de probabilidade, segundo a qual $U_j = F_j(Y_j)$, em que F_j representa a fda da variável aleatória Y_j , $j = 1, 2, 3$.

O Teorema de Sklar (1959) complementa: seja $H(x_1, x_2, \dots, x_d)$ uma função de distribuição multivariada com distribuições marginais $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)$. Se estas forem todas contínuas, então existe uma única cópula $C: [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$, tal que:

$$H(x_1, x_2, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)),$$

para todo $(x_1, x_2, \dots, x_d)' \in (-\infty, \infty)^d$. Tomando $F_j(x_j) = u_j$, com $u_j \in [0, 1]$, obtemos $x_j = F_j^{-1}(u_j)$, $j = 1, 2, \dots, d$. E, os substituindo em (2.4), obtemos a cópula:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d) = H(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_d^{-1}(u_d)),$$

para todo $(u_1, u_2, \dots, u_d)' \in [0, 1]^d$.

2.4.1 Função Densidade de Cópula

Podemos calcular a densidade de uma cópula $c(u_1, u_2, \dots, u_d)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} c(u_1, u_2, \dots, u_d) &= \frac{\delta^d}{\delta u_1 \delta u_2 \dots \delta u_d} C(u_1, u_2, \dots, u_d) \\ &= \frac{\delta^d}{\delta u_1 \delta u_2 \dots \delta u_d} H(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_d^{-1}(u_d)) \\ &= \frac{h(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_d^{-1}(u_d))}{\prod_{j=1}^d f_j(F_j^{-1}(u_j))}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Caso a densidade da cópula c e as densidades marginais $f_j(\cdot)$ sejam conhecidas, então podemos calcular $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)$. Assim,

$$h(x_1, x_2, \dots, x_d) = c(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)) \prod_{j=1}^d f_j(x_j).$$

2.4.2 Medidas de Associação

Quando se deseja estudar o grau de associação entre variáveis aleatórias, é comum utilizar o coeficiente de correlação de Pearson. Este, também é o parâmetro que mede o grau de dependência entre as distribuições marginais quando usamos as cópulas elípticas Gaussiana (ou normal) e t-Student. Em contrapartida, Trivedi e Zimmer (2005) lembram que o coeficiente de correlação de Pearson não pode ser utilizado para mensurar dependência de funções não-lineares.

As medidas de associação entre variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_d , denominadas τ de Kendall e ρ de Spearman, podem ser representadas por meio de cópulas e, além disso, dependem apenas da cópula de X_1, X_2, \dots, X_d . Ou seja, são medidas invariantes em escala, logo, seus valores não se alteram sob transformações estritamente crescentes de X_1, X_2, \dots, X_d . Portanto, elas são preferíveis em relação ao coeficiente de correlação de Pearson. Neste trabalho, adotaremos o τ de Kendall como medida de dependência entre as variáveis do processo.

O τ de Kendall pode ser calculado a partir da função de distribuição da cópula como segue:

$$\tau_d = \frac{1}{2^{d-1} - 1} \left(2^d \int \dots \int_{[0,1]^d} C(u_1, u_2, \dots, u_d) dC(u_1, u_2, \dots, u_d) - 1 \right),$$

com $u_1, u_2, \dots, u_d \in [0, 1]$.

Assim, na versão bivariada, o τ de Kendal pode ser resumido em:

$$\tau_2 = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) c(u_1, u_2) du_1 du_2 - 1.$$

E na versão trivariada:

$$\tau_3 = \frac{8}{3} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2, u_3) c(u_1, u_2, u_3) du_1 du_2 du_3 - \frac{1}{3}. \quad (2.5)$$

2.4.3 Famílias Paramétricas de Cópulas

É de suma importância selecionar uma cópula adequada para modelar a estrutura de dependência entre as variáveis do processo, sendo que as famílias paramétricas de cópulas mais comumente utilizadas na literatura são as Arquimedianas e as elípticas.

2.4.3.1 Cópulas Arquimedianas

Seja φ uma função denominada função geradora da cópula C . Dizemos que C pertence à família Arquimediana se:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d) = \varphi \left(\varphi^{-1}(u_1) + \varphi^{-1}(u_2) + \dots + \varphi^{-1}(u_d) \right),$$

para $(u_1, u_2, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$, e a classe de funções contínuas, positivas e convexas $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$, tais que $\varphi(0) = 1$.

As cópulas Arquimedianas mais empregadas são:

- **Cópula de Clayton** (Joe, 2014):

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d; \theta) = [u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} + \dots + u_d^{-\theta} - (d-1)]^{-\frac{1}{\theta}}, \quad (2.6)$$

com função geradora $\varphi(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$, em que $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$.

O τ de Kendall da cópula de Clayton (2.6) é dado por (Genest et al. 2011):

$$\tau_d = \frac{1}{2^{d-1} - 1} \left[-1 + 2^d \prod_{w=0}^{d-1} \left(\frac{1 + w\theta}{2 + w\theta} \right) \right].$$

- **Caso Bivariado:**

$$C(u_1, u_2; \theta) = [u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1]^{-\frac{1}{\theta}}, \quad (2.7)$$

com relação entre o τ de Kendall e seu parâmetro θ dada por: $\theta = \frac{2\tau_2}{1-\tau_2}$.

- **Caso Trivariado:**

$$C(u_1, u_2, u_3; \theta) = [u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} + u_3^{-\theta} - 2]^{-\frac{1}{\theta}}. \quad (2.8)$$

Após alguns cálculos, Ferreira e Louzada (2019) encontraram que a relação entre o τ de Kendall e o parâmetro θ , para o caso trivariado, é similar ao caso bivariado, isto é, $\theta = \frac{2\tau_3}{1-\tau_3}$.

- **Cópula de Frank** (Joe, 2014):

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d; \theta) = -\frac{1}{\theta} \log \left(1 - \frac{\prod_{j=1}^d (1 - e^{-\theta u_j})}{(1 - e^{-\theta})^{d-1}} \right),$$

cuja função geradora é $\varphi(t) = -\log \left(\frac{\exp\{-\theta t\} - 1}{\exp\{-\theta\} - 1} \right)$, com $\theta \in (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$.

– **Caso Bivariado:**

$$C(u_1, u_2; \theta) = -\frac{1}{\theta} \log \left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right),$$

com relação entre o τ de Kendall e o parâmetro θ dada por: $\frac{D_1(\theta)-1}{\theta} = \frac{1-\tau_2}{4}$, em que $D_1(\theta) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \frac{t}{\exp\{t\}-1} dt$ é a função Debye do 1º tipo.

– **Caso Trivariado:**

$$C(u_1, u_2, u_3; \theta) = -\frac{1}{\theta} \log \left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)(e^{-\theta u_3} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)^2} \right).$$

O τ de Kendall não possui forma fechada e seu cálculo numérico (aproximado) pode ser feito mediante o uso da expressão geral de τ_3 (2.5) e a aplicação da função *adaptIntegrate(.)* do pacote *cubature* do R.

• **Cópula de Gumbel** (Joe, 2014):

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d; \theta) = \exp \left\{ - \left[\sum_{j=1}^d (-\log u_j)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\},$$

com função geradora dada por $\varphi(t) = \exp\{-t^{\frac{1}{\theta}}\}$, com $\theta \in [1, \infty)$.

– **Caso Bivariado:**

$$C(u_1, u_2; \theta) = \exp \left\{ - \left[(-\log u_1)^\theta + (-\log u_2)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\},$$

sendo a relação entre o τ de Kendall e o parâmetro θ dessa cópula, dada por $\theta = \frac{1}{1-\tau_2}$.

– **Caso Trivariado:**

$$C(u_1, u_2, u_3; \theta) = \exp \left\{ - \left[(-\log u_1)^\theta + (-\log u_2)^\theta + (-\log u_3)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\}.$$

Novamente, o τ de Kendall não possui forma fechada e seu cálculo numérico pode ser feito usando a expressão geral de τ_3 e a função *adaptIntegrate(.)* do pacote *cubature* do *software* R.

2.4.3.2 Cópulas Elípticas

Originárias de distribuições elípticas multivariadas, as cópulas elípticas mais famosas são a Gaussiana (ou normal) e a t-Student (ou simplesmente, cópula t).

Uma cópula elíptica é obtida através da expressão:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d; \Sigma) = H_d \left(H^{-1}(u_1), H^{-1}(u_2), \dots, H^{-1}(u_d); \Sigma \right), \quad (2.9)$$

em que: $H^{-1}(\cdot)$ representa a função quantil da distribuição univariada subjacente; $H_d(\cdot; \Sigma)$ é a fda conjunta da distribuição multivariada subjacente, a qual geralmente possui vetor de parâmetros de locação $\mathbf{0}_{1:d}$ e matriz de correlação $\Sigma_{d:d}$.

Para os casos trivariados que iremos estudar, utilizaremos as estruturas de dispersão (isto é, matrizes de correlação Σ) mais conhecidas, a saber: permutável (ex), autoregressiva de ordem 1 (ar1), Toeplitz (Toep) e não-estruturada (un), que apresentam as respectivas estruturas:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1^2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_1^2 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_3 \\ \rho_2 & \rho_3 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

com $\rho_j \in [-1, 1]$, $j = 1, 2, 3$.

- **Cópula Gaussiana:**

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d; \Sigma) = \Phi_d(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_d); \Sigma),$$

em que $\Phi^{-1}(\cdot)$ é a função quantil da distribuição Normal(0, 1) e $\Phi_d(\cdot; \Sigma)$ representa a fda conjunta da distribuição normal d -variada com vetor de médias $\mathbf{0}$ e matriz de correlação (ou de covariâncias) Σ . De acordo com Genest *et al.* (2011), a fórmula para o cálculo do τ de Kendall é dada por:

$$\tau_d = \frac{1}{2^{d-1} - 1} \left[-1 + 2^d P(\Sigma^{\frac{1}{2}} \mathbf{U} \geq 0) \right],$$

sendo \mathbf{U} um vetor aleatório d -variado distribuído uniformemente.

- **Caso Bivariado:**

$$C(u_1, u_2; \rho) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \phi_{2,\rho}(t_1, t_2) dt_1 dt_2,$$

em que $\phi_{2,\rho}(\cdot)$ é a densidade da distribuição normal bivariada com vetor de médias $(0, 0)'$ e matriz de correlação $\begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$, com $\rho \in [-1, 1]$.

A relação entre o τ de Kendall e o coeficiente de correlação ρ é dada por: $\rho = \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau_2\right)$.

- **Caso Trivariado:**

$$C(u_1, u_2, u_3; \Sigma) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_3)} \phi_{3,\Sigma}(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3,$$

em que $\phi_{3,\Sigma}(\cdot)$ denota a densidade da distribuição normal trivariada com vetor de médias $(0, 0, 0)'$ e matriz de correlação Σ tal como as apresentadas em (2.10).

A relação entre o tau de Kendall (τ) e os coeficientes de correlação $\boldsymbol{\rho} = (\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23})'$, com $\rho_{ij} = \text{Corr}(X_i, X_j)$, segundo Genest *et al.* (2011), pode ser dada da seguinte maneira: $\tau_3 = \frac{2}{3\pi} [\arcsin(\rho_{12}) + \arcsin(\rho_{13}) + \arcsin(\rho_{23})]$.

- **Cópula t:**

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d; \Sigma, \nu) = T_{d,\nu}(T_{1,\nu}^{-1}(u_1), T_{1,\nu}^{-1}(u_2), \dots, T_{1,\nu}^{-1}(u_d); \Sigma),$$

em que $T_{1,\nu}^{-1}(\cdot)$ e $T_{d,\nu}(\cdot)$ são, respectivamente, a função quantil da distribuição t-Student com graus de liberdade $\nu > 0$, e a fda d -variada da distribuição t-Student com graus de liberdade $\nu > 0$ e matriz de covariâncias Σ tal como as apresentadas em (2.10).

Segundo Genest *et al.* (2011), o cálculo do τ de Kendall para a cópula t é feito de maneira análoga ao da cópula Gaussiana.

- **Caso Bivariado:**

$$C(u_1, u_2; \rho, \nu) = T_{2,\nu}(T_{1,\nu}^{-1}(u_1), T_{1,\nu}^{-1}(u_2); \rho).$$

Observe que ν controla o peso nas caudas, isto é, quanto menor ν mais pesadas são as caudas. Uma cópula Gaussiana bivariada com coeficiente de correlação ρ pode então ser considerada como o caso limite de uma cópula t bivariada com o mesmo parâmetro ρ , quando $\nu \rightarrow \infty$. Ademais, $\tau_2 = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$, que é o mesmo resultado observado para a cópula Gaussiana bivariada.

- **Caso Trivariado:**

$$C(u_1, u_2, u_3; \Sigma, \nu) = T_{3,\nu}(T_{1,\nu}^{-1}(u_1), T_{1,\nu}^{-1}(u_2), T_{1,\nu}^{-1}(u_3); \Sigma),$$

cujos τ de Kendall é idêntico ao da cópula Gaussiana trivariada.

2.4.4 Cópula Não-Paramétrica

Apesar da grande variedade de famílias de cópulas paramétricas, Nagler (2018) afirma que elas não têm flexibilidade e ainda correm o risco da má especificação. Para tanto, ele sugere o uso dos estimadores de densidade bivariada Kernel, que são populares na análise exploratória de dados e largamente utilizados em diversas áreas.

Seja uma cópula bivariada C . Então, sua respectiva densidade bivariada, baseada no estimador de Kernel usual, será dada por:

$$\hat{c}_n(u_1, u_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{b_{1n}}(u_1 - U_{1i}) K_{b_{2n}}(u_2 - U_{2i}), \quad (2.11)$$

com $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$ e $K_b(\cdot) = K(\cdot/b)/b$. A função do Kernel $K(\cdot)$ é tipicamente assumida como uma fdp simétrica e limitada em \mathbb{R}^2 . O parâmetro b_{jn} é conhecido como parâmetro de suavização ou largura de banda (em inglês, *bandwidth*), tal que $b_{jn} > 0$, $j = 1, 2$.

Nagler (2018) alerta para o problema trazido pelo estimador Kernel em questão: uma considerável massa de probabilidade fora do quadrado unitário, fazendo com que \hat{c}_n não seja uma fdp em $[0, 1]^2$. Três abordagens foram então propostas a fim de solucionar o problema acima descrito: o método de reflexão de espelho, proposto por Gijbels e

Mielniczuk (1990); o método beta kernel e o método da transformação, ambos propostos por Charpentier *et al.* (2006). Este último sugere transformar os dados para que tenham suporte em todo o \mathbb{R}^2 (ao invés do quadrado unitário). Essa transformação resulta em uma função densidade de cópula tal como a apresentada em (2.4). Após o domínio ter sido transformado, aplicam-se as técnicas padrões do Kernel para estimar a densidade, depois realiza-se uma transformação reversa adequada para produzir uma estimativa da densidade da cópula. Considerando o estimador Kernel para as funções de distribuição marginais, a densidade da cópula não-paramétrica bivariada será dada por:

$$\hat{c}_n(u_1, u_2) = \frac{1}{nf_1(F_1^{-1}(u_1))f_2(F_2^{-1}(u_2))} \sum_{i=1}^n K_{b_{1n}}(F_1^{-1}(u_1) - F_1^{-1}(U_{1i})) K_{b_{2n}}(F_2^{-1}(u_2) - F_2^{-1}(U_{2i})).$$

Segundo Charpentier *et al.* (2006), essa abordagem pode ser estendida considerando-se diferentes transformações F_1 e F_2 , diferentes kernels K_1 e K_2 , ou diferentes larguras de banda b_{1n} e b_{2n} , para as duas variáveis aleatórias em questão.

É comum usar para a transformação, o inverso da fda normal padrão, uma vez que estimadores Kernel tendem a apresentar bons resultados para variáveis aleatórias Gaussianas (Nagler, 2018). Sob esta ótica, a função densidade bivariada da cópula não-paramétrica é dada por:

$$\hat{c}_n^{(T)}(u_1, u_2) = \frac{\hat{f}_n(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2))}{\phi(\Phi^{-1}(u_1))\phi(\Phi^{-1}(u_2))}, \quad (2.12)$$

em que $\phi(\cdot)$ é a fdp da distribuição normal padrão. Este procedimento é ilustrado na Figura 2.1, extraída de Nagler (2018), em que o painel esquerdo mostra os dados originais da densidade de cópula; ao lado dele, vemos os dados transformados depois que a inversa da fda da normal padrão foi aplicada; o terceiro gráfico mostra uma estimativa Kernel da densidade para os dados transformados; e finalmente, o quarto e último gráfico exibe a correspondente estimativa Kernel da densidade de cópula.

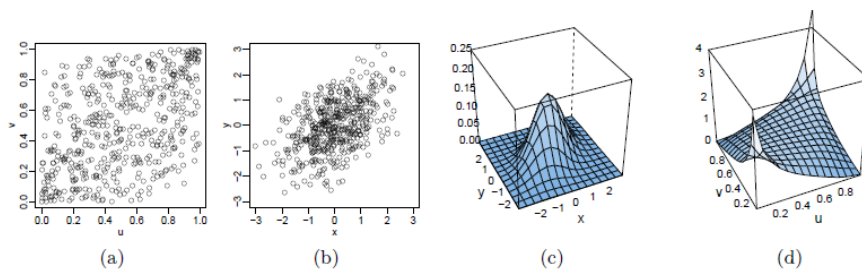


Figura 2.1 Ilustração do método da transformação: (a) amostra da cópula; (b) amostra transformada; (c) estimativa Kernel da densidade para a amostra transformada; (d) estimativa Kernel da densidade de cópula. Fonte: Nagler (2018).

Para a obtenção de \hat{f}_n , podemos usar as seguintes transformações disponíveis no pacote *kdecopula* (Nagler, 2018) do *software* R:

- **Transformação Clássica:** proposta por Charpentier *et al.* (2006), e já apresentada/discutida anteriormente;
- **Transformação de Verossimilhança Local (TLL, do inglês *Transformation Local Likelihood*):** proposta por Geenens *et al.* (2017), ela apresenta algumas possíveis variações para a aproximação logarítmica da densidade, como:
 - Linear;
 - Polinomial quadrática;
 - Linear com larguras de banda mais próximas em vez de fixas;
 - Polinomial quadrática com larguras de banda mais próximas em vez de fixas.

Tais métodos usam uma matriz de larguras de banda proporcional à raiz quadrada da matriz de covariâncias empírica, justificando a escolha dessas transformações com base em uma afirmação de Nagler (2018), que diz que, geralmente, essa é uma boa escolha porque “estica” os Kernels de maneira semelhante à forma dos dados. Para maiores detalhes acerca de tais procedimentos, recomendamos a leitura dos artigos originais citados anteriormente.

2.4.5 Estimação dos Parâmetros

Existem algumas situações em que a estimação dos parâmetros é feita de forma simples e direta, visto que seus estimadores são funções da medida de dependência. No nosso caso, o τ de Kendall. Entretanto, para algumas cópulas mais complexas, multivariadas, são necessários outros métodos de estimação paramétrica.

2.4.5.1 Caso Paramétrico

É comum utilizar o método de máxima verossimilhança (MV) para estimar o vetor de parâmetros das distribuições marginais e da cópula em estudo. Seja $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{id})'$, $i = 1, \dots, n$, observações independentes de uma distribuição d -variada. Suponha que as marginais tenham fda F_j e fdp f_j , $j = 1, \dots, d$, e a cópula de densidade c seja empregada para modelar a estrutura de dependência delas. Seja $\boldsymbol{\beta}_j$ o vetor de parâmetros da marginal j , $j = 1, \dots, d$, e $\boldsymbol{\alpha}$ o vetor de parâmetros da cópula. Então, o vetor a ser estimado será $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}'_1, \dots, \boldsymbol{\beta}'_d, \boldsymbol{\alpha}')'$. A função de verossimilhança, segundo Yan (2007), é dada por:

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n c(F_1(X_{i1}; \boldsymbol{\beta}_1), \dots, F_d(X_{id}; \boldsymbol{\beta}_d); \boldsymbol{\alpha}) \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^d f_j(X_{ij}; \boldsymbol{\beta}_j). \quad (2.13)$$

Aplicando o logaritmo na função de verossimilhança, obtemos:

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \log(L(\boldsymbol{\theta})) = \sum_{i=1}^n \log c(F_1(X_{i1}; \boldsymbol{\beta}_1), \dots, F_d(X_{id}; \boldsymbol{\beta}_d); \boldsymbol{\alpha}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d \log f_j(X_{ij}; \boldsymbol{\beta}_j). \quad (2.14)$$

O estimador de MV de $\boldsymbol{\theta}$ é então dado por:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MV}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta^d} \ell(\boldsymbol{\theta}),$$

em que Θ^d é o espaço paramétrico de dimensão d . A estimação via método de MV consiste em obter os valores do vetor $\boldsymbol{\theta}$ que maximizam a função de verossimilhança (2.13). Para tanto, basta tomar o logaritmo da função de verossimilhança, ou simplesmente, log-verossimilhança, dada em (2.14), derivá-la em relação a cada um dos parâmetros e, por fim, igualar o resultado a zero. Em geral, esses estimadores de MV não possuem expressões com forma fechada, o que requer o uso de métodos numéricos para a obtenção de suas estimativas. No *software* R, é possível estimar os parâmetros sob o método de MV mediante o uso das funções *fitCopula(.)* e *fitMvdc(.)* do pacote *copula* criado por Yan (2007). Ambas as funções estão conectadas à função *optim(.)*. Contudo, este procedimento resulta na estimação de todos os parâmetros simultaneamente, exigindo, portanto, um alto esforço computacional.

Um novo método de estimação de modelos baseados em cópulas, denominado método da inferência para as marginais (IFM, do inglês *Inference Function for Margins*), foi proposto por Joe e Xu (1996). Nele, a estimação dos parâmetros é feita em duas etapas: na primeira etapa, estima-se os parâmetros das distribuições marginais (por exemplo, via método da MV para os casos totalmente paramétricos; e via abordagem de Kernel para os casos semi-paramétricos); e, na segunda etapa, estima-se o vetor de parâmetros da cópula por meio de uma pseudo-verossimilhança. Tal método também é conhecido como método da estimação em dois estágios, no contexto de sobrevivência e confiabilidade, isto é, para dados com censura (Shih e Louis, 1995). Yan (2007) nos alerta que, à medida que a dimensão d fica maior, o número de parâmetros aumenta por consequência e o problema de otimização fica mais difícil, evidenciando então o ganho computacional com o uso do método IFM, pois cada tarefa de maximização envolve um número pequeno de parâmetros por vez. Anjos *et al.* (2004) diz ainda que o método IFM é mais eficiente quando comparado com o de MV exata.

Quando cada distribuição marginal tem seus próprios parâmetros, a primeira etapa consiste na estimação via MV para cada uma delas:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_j = \arg \max_{\boldsymbol{\beta}_j} \sum_{i=1}^n \log f_j(X_{ij}; \boldsymbol{\beta}_j), \quad j = 1, \dots, d.$$

Em seguida, dados $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{\beta}}_d$, estima-se o parâmetro de associação $\boldsymbol{\alpha}$ da cópula, por meio da pseudo-log-verossimilhança:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \arg \max_{\boldsymbol{\alpha}} \sum_{i=1}^n \log c \left(F_1(X_{i1}; \hat{\boldsymbol{\beta}}_1), \dots, F_d(X_{id}; \hat{\boldsymbol{\beta}}_d); \boldsymbol{\alpha} \right).$$

O emprego do termo *pseudo*, neste caso, decorre do uso de $\hat{\boldsymbol{\beta}}_j$, ao invés do verdadeiro $\boldsymbol{\beta}_j$, $j = 1, \dots, d$. Neste trabalho, para a estimação dos parâmetros, aplicamos o método IFM para os modelos paramétricos. Empregamos a função *optim(.)* na obtenção de

estimativas via método de MV das distribuições marginais paramétricas (com uso do método de otimização numérica de quasi-Newton “L-BFGS-B”), e a função $fitCopula(.)$ para estimar o parâmetro (ou parâmetros) da cópula.

2.4.5.2 Caso Semi-Paramétrico

Muitos procedimentos semi-paramétricos podem ser encontrados na literatura, como por exemplo, nos trabalhos de Clayton (1978), Clayton e Cuzick (1985), Genest *et al.* (1995) e Oakes (1994), dentre outros. Joe (2014) explica que a inferência semi-paramétrica para modelos baseados em cópulas, pode ser feita usando marginais não-paramétricas de maneira que:

$$\hat{\alpha} = \arg \max_{\alpha} \sum_{i=1}^n \log c \left(\hat{F}_1(X_{i1}), \dots, \hat{F}_d(X_{id}); \alpha \right), \quad (2.15)$$

em que ele sugere o uso de funções de distribuição empíricas $\hat{F}_j(x) = n^{-1}[\sum_{i=1}^n I(X_{ij} \leq x) - \frac{1}{2}]$, $j = 1, \dots, d$. Em suma, tais procedimentos se resumem em estimar as funções de distribuição marginais usando alguma técnica não-paramétrica e, posteriormente, considerar uma família de cópula paramétrica e estimar seus parâmetros conforme sugerido em (2.15). No presente trabalho, optamos pelo uso de suavizadores tipo Kernel para estimar as fdp's das distribuições marginais \hat{f}_j e, então, calcular $\hat{F}_j = \int \hat{f}_j(x_j) dx_j$. Seguindo Verdier (2013), o estimador Kernel não-paramétrico de \hat{f}_j será:

$$\hat{f}_j(x) = \frac{1}{nb} \sum_{i=1}^n K \left(\frac{x - X_{ij}}{b} \right), \quad j = 1, \dots, d, \quad (2.16)$$

em que $K(.)$ é uma função Kernel e b é a largura de banda ou constante de suavização (*bandwidth*). Para o cálculo da densidade, acumulada, quantis e geração de números pseudo-aleatórios com base na distribuição de Kernel univariada, empregamos, respectivamente, as funções $dkernel(.)$, $pkernel(.)$, $qkernel(.)$ e $rkernel(.)$ do pacote *spatstat*, criado por Baddeley e Turner (2005), e que tem como base a função $density(.)$. Esses autores definem o Kernel padronizado quando $b = 1$ e, portanto, a largura de banda b será o desvio-padrão do Kernel. Neste trabalho, adotamos o Kernel padronizado com média $\mu = 0$ e desvio-padrão $\sigma = b = 1$, e variamos as seguintes funções Kernel (Zucchini, 2003):

- **Retangular ou Uniforme:** $K(u) = \frac{1}{2}$, para $|u| < 1$;
- **Triangular:** $K(u) = 1 - |u|$, para $|u| < 1$;
- **Normal ou Gaussiano:** $K(u) = \frac{1}{2\pi} e^{-u^2/2}$;
- **Biweight ou Quadrático:** $K(u) = \frac{15}{16}(1 - u^2)^2$, para $|u| < 1$;
- **Epanechnikov ou Parabólico:** $K(u) = \frac{3}{4} \frac{(1 - \frac{1}{5}u^2)}{\sqrt{5}}$, para $|u| < \sqrt{5}$.

2.4.5.3 Caso Não-Paramétrico

A função $kdecop(.)$ do pacote *kdecopula*, criado por Nagler (2018), apresenta os resultados da estimação para os métodos de transformação descritos na Seção 2.4.4. O método pode ser especificado por meio do argumento *method*, a exemplo: $kdecop(\dots, method="T")$. A seleção da largura de banda b é feita de forma automática (apesar da possibilidade do usuário definir a largura de banda manualmente por meio do argumento *bw*, que Nagler (2018) não recomenda), conforme o método de transformação utilizado, conforme mostramos a seguir.

- **Transformação Clássica** ($method="T"$): permite uma matriz de larguras de banda, definida pela regra de referência normal no domínio transformado (Nagler, 2014), tal que:

$$B = n^{1/6} \hat{\Sigma}_{\mathbf{Z}}^{1/2},$$

em que $\hat{\Sigma}_{\mathbf{Z}}$ é a matriz de covariâncias empírica de $\Phi^{-1}(U_{1i})$ e $\Phi^{-1}(U_{2i})$, $i = 1, \dots, n$.

- **Transformação de Verossimilhança Linear Local** ($method="TLL1"$);
- **Transformação de Verossimilhança Polinomial Quadrática Local** ($method="TLL2"$): para ambos os casos **TLL1** e **TLL2**, em que a matriz de larguras de banda é fixa, esta será definida pela regra geral:

$$B = 3n^{1/(4q^*+2)} \hat{\Sigma}_{\mathbf{Z}}^{1/2} q^* = 1 + \lfloor q/2 \rfloor,$$

em que q é o grau do polinômio, $\lfloor \cdot \rfloor$ denota a função piso (ou *floor*), e $\hat{\Sigma}_{\mathbf{Z}}$ é a matriz de covariâncias empírica de $\Phi^{-1}(U_{1i})$ e $\Phi^{-1}(U_{2i})$, $i = 1, \dots, n$. Tal regra garante que a matriz de larguras de banda desapareça na taxa ideal de quadrado médio.

- **Transformação de Verossimilhança Linear Local com larguras de bandas mais próximas em vez de fixas** ($method="TLL1nn"$, em que *nn* vem do inglês *nearest-neighbor*);
- **Transformação de Verossimilhança Polinomial Quadrática Local com larguras de bandas mais próximas em vez de fixas** ($method="TLL2nn"$): para ambos os casos **TLL1nn** e **TLL2nn**, que empregam métodos de vizinhos mais próximos, os parâmetros de suavização são selecionados com base na validação cruzada de mínimos quadrados univariados no primeiro componente principal no domínio transformado (Nagler, 2018).

O ajuste pelos métodos de verossimilhança local pode ser feito mediante o uso do pacote *locfit*, criado por Loader (2013).

3

ESTUDOS DE SIMULAÇÃO

Neste capítulo, são apresentados e discutidos os principais resultados dos estudos de simulação realizados com o objetivo de avaliar o desempenho da metodologia descrita no Capítulo 2.

3.1 ESPECIFICAÇÕES GERAIS

As simulações realizadas foram divididas entre os casos bivariado e trivariado, e subdivididas ainda entre os casos paramétrico, semi-paramétrico e não-paramétrico, conforme mostrado a seguir (para todos os casos adotamos tamanho amostral $n = 250$).

- **Contexto Bivariado Paramétrico:** Para os casos paramétricos a seguir, consideramos a cópula de Clayton bivariada (2.7) com parâmetro $\theta = 2/3, 2$ e 6 (que correspondem a medidas τ de Kendall iguais a $0,25; 0,50$ e $0,75$, respectivamente, isto é, a graus de dependência fraca, moderada e forte entre as marginais), e distribuições marginais variadas.

Caso 1: Amostra artificial gerada da cópula de Clayton bivariada com distribuições marginais simétricas (normal e logística) especificadas a seguir.

- *Distribuição Marginal 1:* $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$, com média $\mu = 0$ e variância $\sigma^2 = 1$, e fdp dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (3.1)$$

- *Distribuição Marginal 2:* $Y \sim \text{Logística}(\mu, s)$, com parâmetro de locação $\mu = 1$ e parâmetro de escala $s = 2$, e fdp definida como:

$$f(y) = \frac{1}{s} \exp \left\{ \left[\left(\frac{y-\mu}{s} \right) \left(1 + \exp \left\{ \frac{y-\mu}{s} \right\} \right) \right]^{-2} \right\}, \quad -\infty < y < \infty. \quad (3.2)$$

Neste caso, $E[Y] = \mu = 1$ e $\text{Var}[Y] = \frac{\pi^2}{3s^2} = 0,822$.

Caso 2: Amostra artificial gerada da cópula de Clayton bivariada com as distribuições marginais especificadas a seguir.

- *Distribuição Marginal 1:* $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$, com média $\mu = 0$ e variância $\sigma^2 = 1$, e fdp dada em (3.1).
- *Distribuição Marginal 2:* $Y \sim \text{Weibull}(a, b)$, com parâmetro de forma $a = 1$ e parâmetro de escala $b = 1$, e fdp definida como:

$$f(y) = \frac{a}{b} \left(\frac{y}{b}\right)^{a-1} \exp\left\{-\left(\frac{y}{b}\right)^a\right\}, \quad y > 0. \quad (3.3)$$

Neste caso, $E[Y] = b\Gamma(1+1/a) = 1$ e $\text{Var}[Y] = b^2[\Gamma(1+2/a) - (\Gamma(1+1/a))^2] = 1$, em que $\Gamma(t) = \int_0^\infty w^{t-1}e^{-w}dw$ representa a função gama.

Caso 3: Amostra artificial gerada da cópula de Clayton bivariada com ambas as distribuições marginais assimétricas Weibull(a, b), de parâmetros $a = 1$ e $b = 1$, e fdp dada em (3.3).

Caso 4: Amostra artificial originada da distribuição normal bivariada com vetor de médias $\boldsymbol{\mu} = (0, 0)'$ e matriz de covariâncias $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$, com $\rho = 0, 25; 0, 50$ e $0, 75$ (associação fraca, moderada e forte, respectivamente), e fdp conjunta dada por:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{j/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\}, \quad (3.4)$$

em que $j = 2$.

- **Contexto Bivariado Semi-Paramétrico:** Para o caso semi-paramétrico, utilizamos a cópula de Clayton bivariada ($\theta = 2/3, 2$ e 6 , representando os graus de dependência fraca, moderada e forte, respectivamente), com distribuições marginais conforme especificadas a seguir.

Caso 5: Distribuições marginais normal padrão, com fdp definida em (3.1), e estimamos a cópula Clayton variando os tipos de função kernel (presentes da Seção 2.4.5.2) empregada nas marginais.

- **Contexto Bivariado Não-Paramétrico:** Para o caso não-paramétrico, utilizamos a cópula de Clayton bivariada ($\theta = 2/3, 2$ e 6), com distribuições marginais como especificado a seguir.

Caso 6: Distribuições marginais Kernel Gaussiano padronizado. Variamos o método de transformação kernel (ver Seção 2.4.5.3) para verificar a adequabilidade do modelo de cópula não-paramétrica aos dados originais.

- **Contexto Trivariado Paramétrico:** Para os casos paramétricos a seguir, consideramos a cópula de Clayton trivariada (2.8) com parâmetro $\theta = 2/3, 2$ e 6 (graus de dependência fraca, moderada e forte, respectivamente), e distribuições marginais variadas.

Caso 7: Amostra artificial gerada da cópula de Clayton trivariada com as seguintes distribuições marginais:

- *Distribuição Marginal 1:* $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$, com $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$, e fdp dada por (3.1).
- *Distribuição Marginal 2:* $Y \sim \text{Logística}(\mu, s)$, com $\mu = 1$ e $s = 2$, e fdp dada por (3.2).
- *Distribuição Marginal 3:* $W \sim \text{Weibull}(a, b)$, com $a = 1$ e $b = 1$, e fdp dada por (3.3).

Caso 8: Amostra artificial originada da cópula de Clayton trivariada, com as três distribuições marginais assimétricas Weibull(a, b), de parâmetros $a = 1$ e $b = 1$, e fdp dada por (3.3).

Caso 9: Amostra artificial originada da distribuição normal trivariada, com fdp dada por (3.4) em que $j = 3$, e cujos parâmetros são $\boldsymbol{\mu} = (0, 0, 0)'$ e Σ com estrutura de correlação permutável (ex), representada pela primeira matriz do conjunto (2.10), para a qual consideramos $\rho_1 = 0,25$ (associação fraca), $0,50$ (associação moderada) e $0,75$ (associação forte).

- **Contexto Trivariado Semi-Paramétrico:** Para o caso semi-paramétrico trivariado, empregamos a cópula de Clayton trivariada ($\theta = 2/3, 2$ e 6), com as distribuições marginais conforme especificado a seguir.

Caso 10: Distribuições marginais normal padrão, com fdp definida em (3.1), e estimamos a cópula Clayton variando os tipos de função kernel (presentes da Seção 2.4.5.2) empregada nas marginais.

3.2 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção apresentamos os resultados e discussões referentes às simulações que abordaram estudos de recuperação de parâmetros (Seção 3.2.1), região de tolerância estimada (Seção 3.2.2) e qualidade do ajuste (Seção 3.2.3).

3.2.1 Recuperação de Parâmetros

Inicialmente, foi realizado um estudo de recuperação dos parâmetros para as distribuições marginais, estimados pelo método de MV. Em seguida, tais estimativas foram usadas para estimar o parâmetro da cópula por meio da máxima pseudo-verossimilhança, com o apoio das funções *optim(.)* e *fitCopula(.)* do pacote *copula* (Yan, 2007).

Neste estudo de simulação, feito com o auxílio do *software* R (R Core Team, 2016), fixamos a semente 100 e geramos $M = 1.000$ amostras (réplicas) de tamanhos $n = 50, 100, 250, 500$ e 1.000 , do modelo de cópula bivariado no contexto paramétrico e semi-paramétrico, variando também o grau de dependência entre as distribuições marginais em fraca ($\tau_2 = 0,25$), moderada ($\tau_2 = 0,50$) e forte ($\tau_2 = 0,75$).

Tabela 3.1 Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_2 = 0, 25$ (**Caso 1**).

	Parâmetro	Tamanho amostral				
		$n = 50$	$n = 100$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$
Clayton	$\theta = 2/3$	0.6047(0.2284)	0.6473(0.1632)	0.6557(0.1022)	0.6627(0.0776)	0.6639(0.0542)
Normal	$\mu = 0$	0.0048(0.1428)	-0.0010(0.0995)	-0.0005(0.0606)	-0.0018(0.0449)	-0.0001(0.0298)
	$\sigma^2 = 1$	0.9817(0.0983)	0.9906(0.0677)	0.9946(0.0445)	0.9986(0.0319)	0.9997(0.0218)
Logística	$\mu = 1$	1.0153(0.4845)	1.0128(0.3359)	0.9959(0.2122)	0.9952(0.1552)	1.0022(0.1081)
	$s = 2$	1.9622(0.2420)	1.9884(0.1688)	1.9948(0.1063)	2.0005(0.0739)	1.9987(0.0547)

Tabela 3.2 Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_2 = 0, 50$ (**Caso 1**).

	Parâmetro	Tamanho amostral				
		$n = 50$	$n = 100$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$
Clayton	$\theta = 2$	1.8570(0.3668)	1.9373(0.2699)	1.9633(0.1811)	1.9902(0.1195)	1.9865(0.0890)
Normal	$\mu = 0$	-0.0054(0.1401)	-0.0006(0.1006)	0.0004(0.0626)	-0.0016(0.0429)	-0.0003(0.0318)
	$\sigma^2 = 1$	0.9855(0.1011)	0.9952(0.0699)	0.9949(0.0459)	0.9978(0.0315)	0.9991(0.0218)
Logística	$\mu = 1$	0.9888(0.4915)	1.0038(0.3493)	1.0090(0.2282)	1.0035(0.1510)	0.9976(0.1116)
	$s = 2$	1.9862(0.2293)	1.9855(0.1615)	1.9966(0.1058)	2.0014(0.0745)	1.9973(0.0526)

As Tabelas 3.1, 3.2 e 3.3 mostram o valor médio e desvio-padrão calculados com base nas 1.000 estimativas dos parâmetros, obtidas através do método IFM para o **Caso 1**, segundo os graus de dependência fraca, moderada e forte, respectivamente. É possível notar que, à medida que o tamanho amostral cresce, as estimativas médias tendem a se aproximar do parâmetro populacional, bem como o erro-padrão tende a diminuir. Os resultados são muito próximos para os diferentes graus de associação entre as distribuições marginais.

A Figura 3.1 mostra o Viés (painel esquerdo) e o Erro Quadrático Médio (EQM) (painel direito), calculados com base nas 1.000 estimativas para o parâmetro θ da cópula de Clayton bivariada, considerando os diferentes tamanhos amostrais. Através dessa figura, podemos notar que ambas as medidas tendem a se aproximar de zero à medida que n aumenta, mas essa convergência é mais lenta quanto maior for o grau de associação entre as variáveis. Assintoticamente, podemos ver que o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro θ é não-viesado e tem EQM consistente. Resultados similares foram observados para os **Casos 2, 3 e 4** (ver Apêndice).

Tabela 3.3 Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_2 = 0, 75$ (**Caso 1**).

	Parâmetro	Tamanho amostral				
		$n = 50$	$n = 100$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$
Clayton	$\theta = 6$	5.3807(0.7591)	5.6257(0.5571)	5.8555(0.3762)	5.9330(0.2665)	5.9470(0.1967)
Normal	$\mu = 0$	0.0010(0.1358)	0.0025(0.1003)	-0.0014(0.0618)	-0.0014(0.0446)	0.0023(0.0327)
	$\sigma^2 = 1$	0.9869(0.0941)	0.9972(0.0705)	0.9984(0.0458)	0.9989(0.0315)	0.9994(0.0219)
Logística	$\mu = 1$	1.0020(0.4616)	1.0119(0.3519)	0.9888(0.2133)	0.9953(0.1526)	1.0058(0.1140)
	$s = 2$	1.9809(0.2384)	1.9973(0.1667)	1.9962(0.1035)	1.9985(0.0760)	1.9973(0.0511)

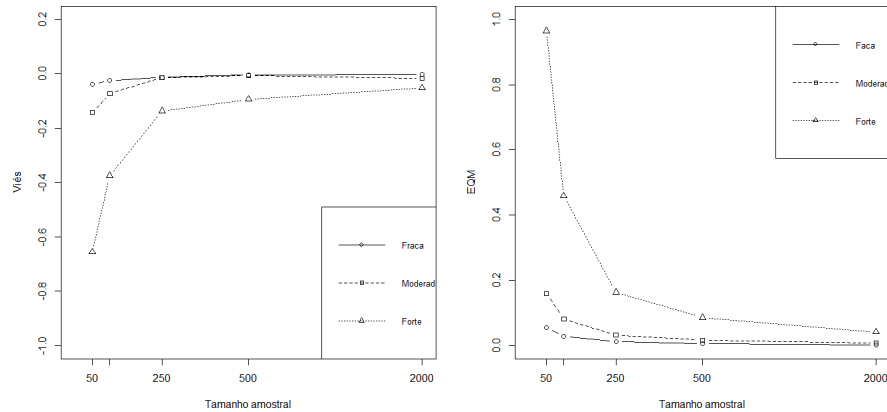


Figura 3.1 Viés e EQM das estimativas do parâmetro θ da cópula de Clayton bivariada, de acordo com o grau de dependência (**Caso 1**).

Tabela 3.4 Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_2 = 0, 25$ (**Caso 5**).

Kernel(0,1)	Parâmetro	Tamanho amostral				
		$n = 50$	$n = 100$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$
Gaussiano	$\theta = 2/3$	0.6891(0.2616)	0.6808(0.1833)	0.6740(0.1103)	0.6687(0.0764)	0.6688(0.0521)
Retangular	$\theta = 2/3$	0.7015(0.2577)	0.6806(0.1790)	0.6756(0.1062)	0.6700(0.0734)	0.6676(0.0530)
Triangular	$\theta = 2/3$	0.6976(0.2502)	0.6846(0.1716)	0.6754(0.1074)	0.6729(0.0759)	0.6707(0.0536)
Epanechnikov	$\theta = 2/3$	0.6797(0.2448)	0.6848(0.1785)	0.6791(0.1086)	0.6744(0.0778)	0.6713(0.0533)
<i>Biweight</i>	$\theta = 2/3$	0.6907(0.2446)	0.6745(0.1774)	0.6667(0.1134)	0.6693(0.0786)	0.6698(0.0552)

Para o **Caso 5** (semi-paramétrico), fizemos um estudo de recuperação apenas do parâmetro da cópula de Clayton bivariada, por meio da máxima pseudo-verossimilhança (segundo estágio do método IFM), mediante o uso da função $fitCopula(.)$ do pacote *copula*. Variamos o tipo da função Kernel marginal utilizada, mas mantivemos seus parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma = b = 1$ fixos. É possível notar, através da Tabela 3.4, que o parâmetro recuperado de acordo com a função Kernel empregada nas marginais, se aproxima do verdadeiro valor de $\theta = 2/3$ conforme aumenta o tamanho da amostra. Comportamento similar é notado na recuperação do parâmetro $\theta = 2$ (ver Tabela 3.5) e do parâmetro $\theta = 6$ (ver Tabela 3.6).

Os gráficos contendo o Viés e o EQM, para o estudo de recuperação do parâmetro θ da cópula de Clayton bivariada com marginais Kernel, são apresentados de acordo com o grau de dependência entre essas marginais: fraca (Figura 3.2), moderada (Figura 3.3) e forte (Figura 3.4). Neles, percebemos, em suma, que o viés da estimação diminui quando o tamanho amostral aumenta, exceto quando as marginais apresentam funções Kernel Epanechnikov e *Biweight*, visto que, nestes dois casos, o Viés se mostra instável para os tamanhos amostrais menores que $n = 500$. Já o EQM diminui com o aumento do tamanho da amostra, de maneira muito similar entre as diversas funções Kernel empregadas, nos

Tabela 3.5 Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_2 = 0, 50$ (**Caso 5**).

Kernel(0,1)	Parâmetro	Tamanho amostral				
		$n = 50$	$n = 100$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$
Gaussiano	$\theta = 2$	2.0568(0.4129)	2.0400(0.2740)	2.0164(0.1828)	2.0051(0.1252)	2.0024(0.0884)
Retangular	$\theta = 2$	2.0438(0.3860)	2.0269(0.2745)	2.0143(0.1734)	2.0052(0.1222)	2.0048(0.0870)
Triangular	$\theta = 2$	2.0239(0.3857)	2.0340(0.2786)	2.0112(0.1779)	2.0049(0.1206)	2.0045(0.0905)
Epanechnikov	$\theta = 2$	2.0315(0.4001)	2.0115(0.2675)	1.9968(0.1714)	2.0040(0.1234)	2.0021(0.0845)
<i>Biweight</i>	$\theta = 2$	2.0429(0.4176)	2.0334(0.2891)	2.0001(0.1745)	2.0180(0.1237)	2.0045(0.0892)

Tabela 3.6 Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_2 = 0, 75$ (**Caso 5**).

Kernel(0,1)	Parâmetro	Tamanho amostral				
		$n = 50$	$n = 100$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$
Gaussiano	$\theta = 6$	6.1043(0.8936)	6.0483(0.5916)	5.9984(0.3695)	6.0128(0.2775)	6.0020(0.1899)
Retangular	$\theta = 6$	6.1266(0.8812)	6.0753(0.6246)	6.0076(0.3721)	6.0107(0.2741)	6.0118(0.1951)
Triangular	$\theta = 6$	6.0636(0.8682)	6.0602(0.5837)	6.0106(0.3803)	6.0198(0.2793)	6.0129(0.1972)
Epanechnikov	$\theta = 6$	6.1146(0.9351)	6.0358(0.6190)	6.0227(0.3736)	6.0094(0.2712)	5.9988(0.1868)
<i>Biweight</i>	$\theta = 6$	6.1483(0.8894)	6.0670(0.6411)	6.0266(0.3891)	5.9963(0.2723)	6.0056(0.1924)

diferentes graus de dependência entre as variáveis.

O estudo de recuperação dos parâmetros para os casos trivariados (**Casos 7, 8, 9 e 10**) foi feito de maneira análoga aos casos de amostras bivariadas tanto paramétricos quanto semi-paramétricos. Seus resultados estão apresentados no Apêndice.

3.2.2 Região de Tolerância

Nesta seção, são comparadas as regiões de tolerância bivariadas obtidas da modelagem via cópulas paramétricas, semi-paramétricas e não-paramétrica, às construídas com base no tradicional gráfico de controle multivariado T^2 de Hotelling (descrito na Seção 2.1). A escolha da família de cópulas geradora foi feita de maneira arbitrária, isto é, adotamos a cópula de Clayton, variando o seu parâmetro θ em $2/3$, 2 e 6 , que correspondem, respectivamente, aos graus de dependência fraca ($\tau_2 = 0, 25$), moderada ($\tau_2 = 0, 50$) e forte ($\tau_2 = 0, 75$) entre as marginais.

Para a construção das regiões de tolerância teóricas e estimadas sob a abordagem de conjunto de níveis de densidade, foram utilizadas $N = 2.000$ réplicas de Monte Carlo para cada distribuição em estudo. Assumimos $\alpha = 0, 05$ em todos os casos.

- **Contexto Paramétrico:** O tamanho da amostra artificial de aprendizagem da cópula de Clayton foi de $n = 250$, com distribuições marginais variando conforme os **Casos 1, 2, 3 e 4** apresentados no início deste capítulo. Foram estimadas as regiões de tolerância baseadas na abordagem de conjunto de níveis de densidade (descrita na Seção 2.3.1), considerando as cópulas de Clayton, Frank, Gumbel, Gaussiana e t (adotamos o parâmetro graus de liberdade fixo igual a 4), além da regra T^2 de Hotelling (distribuição normal bivariada).

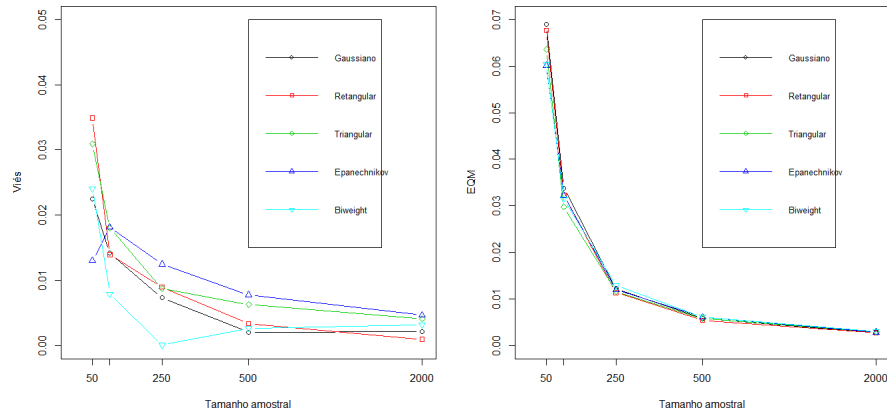


Figura 3.2 Viés e EQM das estimativas do parâmetro θ da cópula de Clayton bivariada, de acordo com o tipo de função Kernel das marginais (**Caso 5** - dependência fraca).

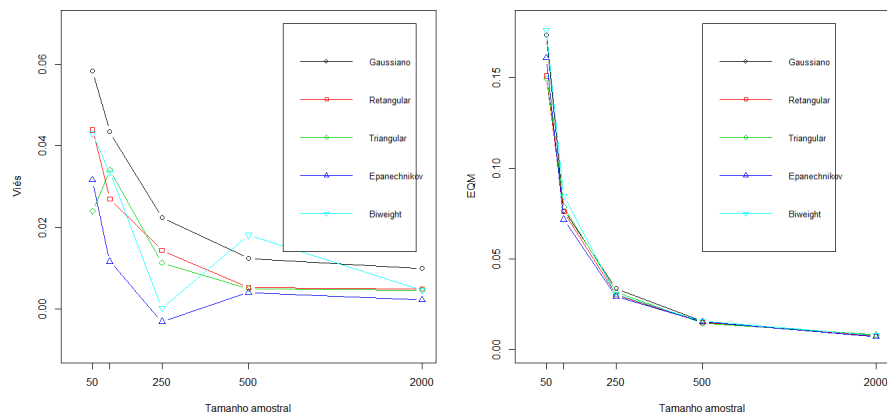


Figura 3.3 Viés e EQM das estimativas do parâmetro θ da cópula de Clayton bivariada, de acordo com o tipo de função Kernel das marginais (**Caso 5** - dependência moderada).

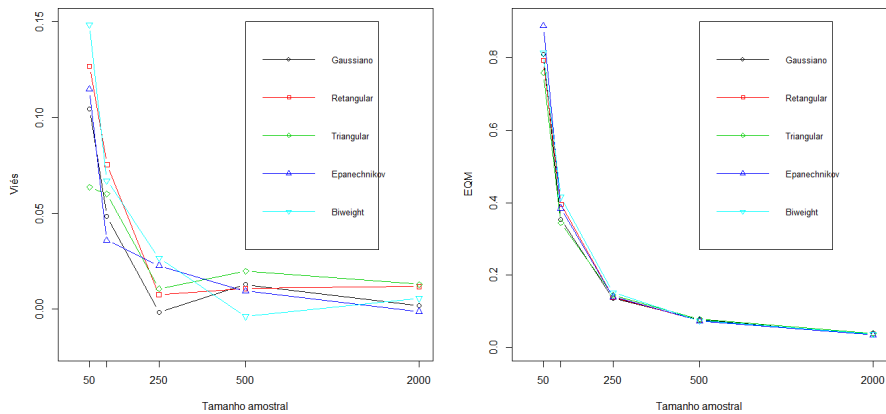


Figura 3.4 Viés e EQM das estimativas do parâmetro θ da cópula de Clayton bivariada, de acordo com o tipo de função Kernel das marginais (**Caso 5** - dependência forte).

As regiões de tolerância para o **Caso 1**, em que temos duas marginais simétricas, quando a dependência é fraca, são apresentadas na Figura 3.5. Nela, é possível perceber que a região estimada pela cópula de Clayton é muito similar à região teórica. A tradicional regra T^2 de Hotelling também apresentou região similar à teórica, bem como as demais famílias de cópulas testadas. Quando o nível de dependência entre as marginais aumenta ($\tau_2 = 0, 50$), as cópulas de Frank, Gumbel e t começam a se distanciar da região esperada (Figura 3.6). Para o grau de dependência forte, a Figura 3.7 mostra que a região de tolerância estimada pela cópula de Clayton é ainda mais próxima da esperada.

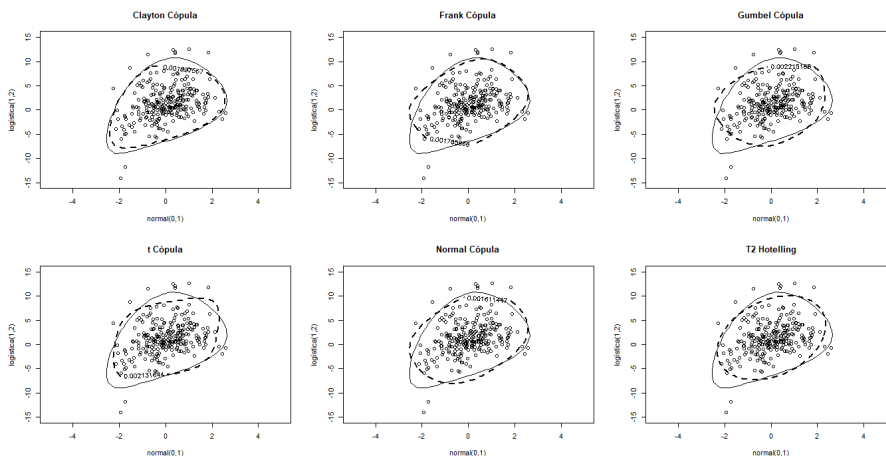


Figura 3.5 Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (**Caso 1** - dependência fraca).

Quando analisamos a região teórica gerada pelo **Caso 2**, em que temos uma marginal

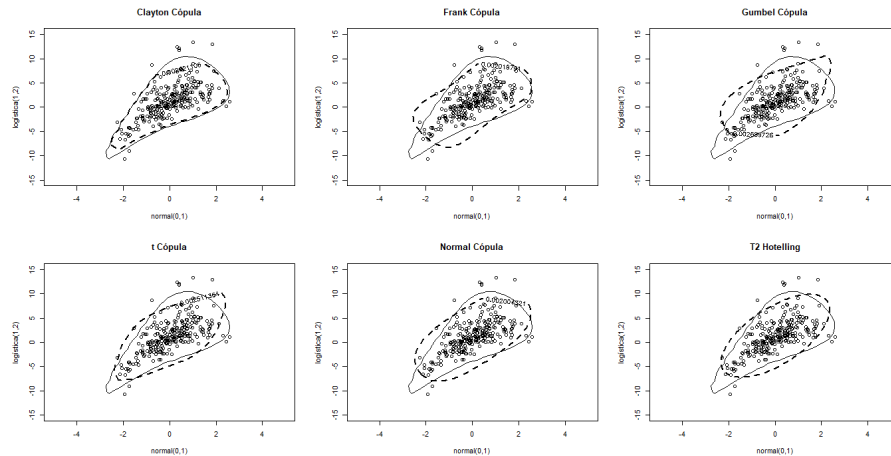


Figura 3.6 Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (**Caso 1** - dependência moderada).

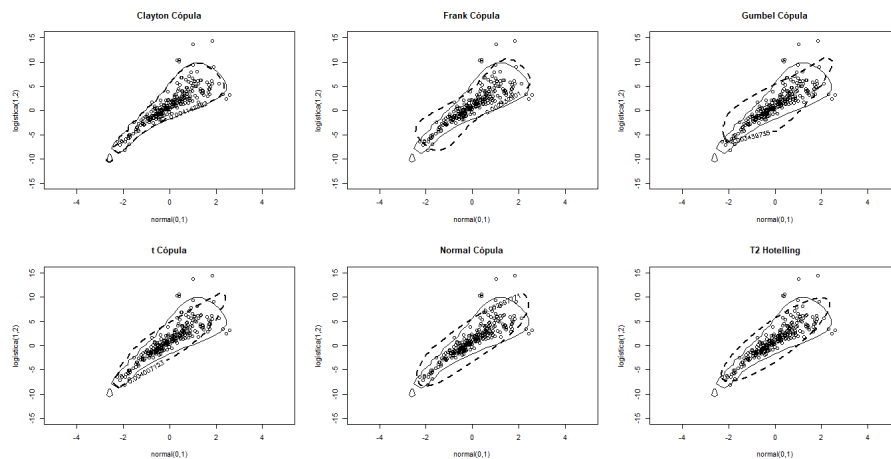


Figura 3.7 Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (**Caso 1** - dependência forte).

simétrica e outra assimétrica, vemos que as regiões estimadas através de todas as famílias de cópulas se adequam bem à mesma, enquanto a região gerada pela regra T^2 de Hotelling já se distancia da teórica mesmo quando o grau de associação entre as distribuições marginais é fraca (Figura 3.8). Para o grau de associação moderada (Figura 3.9), além da cópula de Clayton, as cópulas de Frank e Gaussiana permanecem se ajustando bem. Por fim, para o grau de associação forte (Figura 3.10), vemos que as cópulas de Clayton e Frank continuam apresentando região de tolerância estimada bem próxima da teórica.

As regiões de tolerância teóricas e estimadas para o **Caso 3**, em que as duas distribuições marginais são assimétricas, são apresentadas nas Figuras 3.11, 3.12 e 3.13, para os graus de associação $\tau_2 = 0,25$; $0,50$ e $0,75$, respectivamente. Levando em consideração

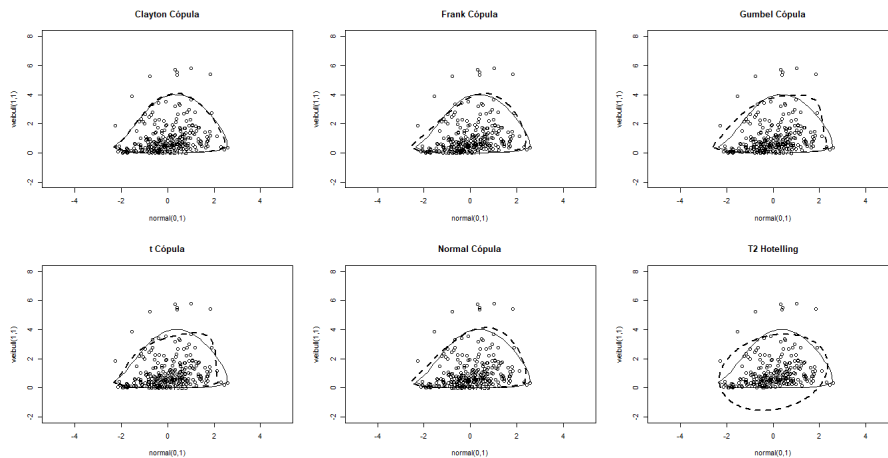


Figura 3.8 Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (Caso 2 - dependência fraca).

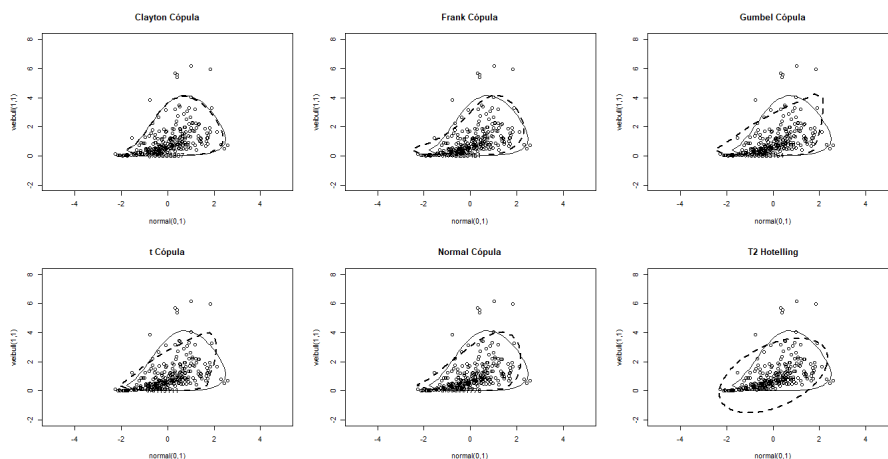


Figura 3.9 Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (Caso 2 - dependência moderada).

o nível de dependência, inicialmente apenas a cópula t e a regra T^2 de Hotelling não apresentaram regiões próximas à teórica. Posteriormente, a região estimada pela cópula de Gumbel se distanciou. Por fim, apenas a cópula de Clayton apresentou região estimada similar à esperada.

O **Caso 4** retrata a tradicional situação em que a regra T^2 de Hotelling é indicada (distribuição normal bivariada das duas características estudadas). Além da região teórica gerada por esta regra (elipse), temos também a região estimada pela mesma e pelas famílias de cópulas. Na Figura 3.14 (associação fraca), todas as regiões estimadas são muito similares. Para dependência moderada, as famílias de cópulas passam a apresentar regiões de tolerância mais distantes da tradicional, com exceção da cópula Gaussiana (Fi-

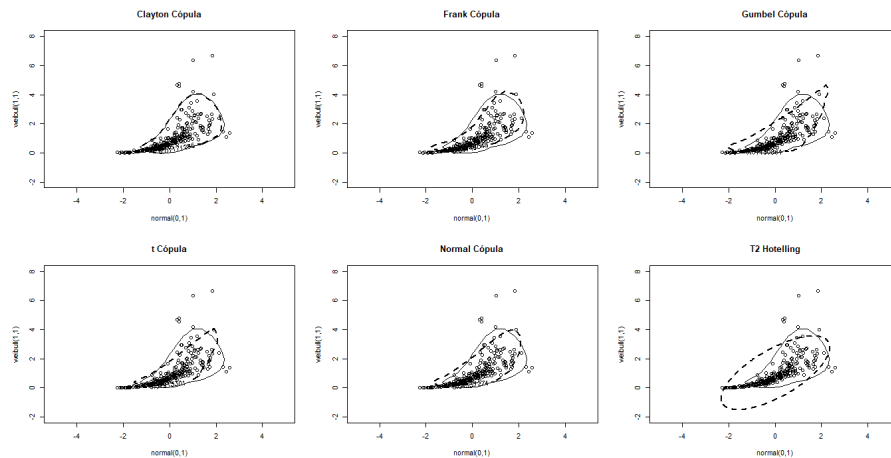


Figura 3.10 Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (**Caso 2** - dependência forte).

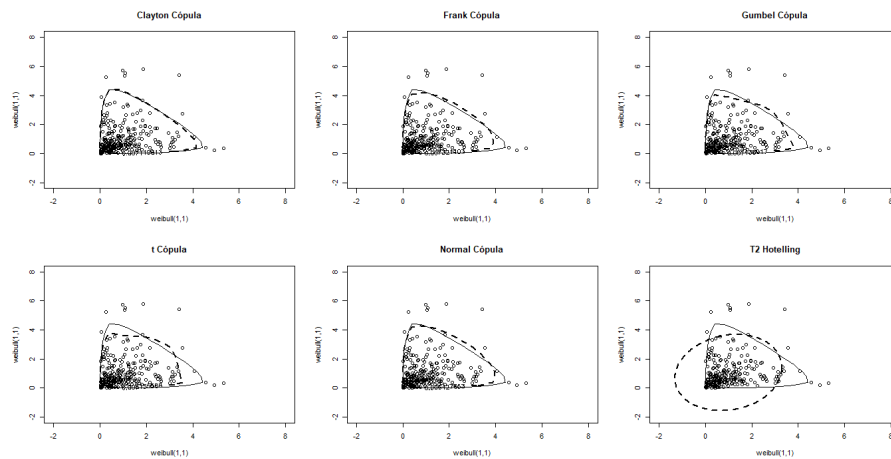


Figura 3.11 Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (**Caso 3** - dependência fraca).

gura 3.15), que mantém o comportamento muito semelhante ao da regra T^2 de Hotelling mesmo quando o grau de dependência entre as distribuições marginais é forte (Figura 3.16).

- **Contexto Semi-Paramétrico:** O tamanho da amostra artificial da cópula de Clayton foi de $n = 250$ com marginais Kernel padronizado, e tipo de função Kernel variando conforme apresentado na Seção 2.4.5.2. Foram estimadas regiões de tolerância baseadas na cópula de Clayton com marginais Kernel Gaussiano, Retangular, Triangular, Epanechnikov e *Biweight*, além da regra T^2 de Hotelling.

Para verificar a adequabilidade da proposta semi-paramétrica (**Caso 5**), a região de

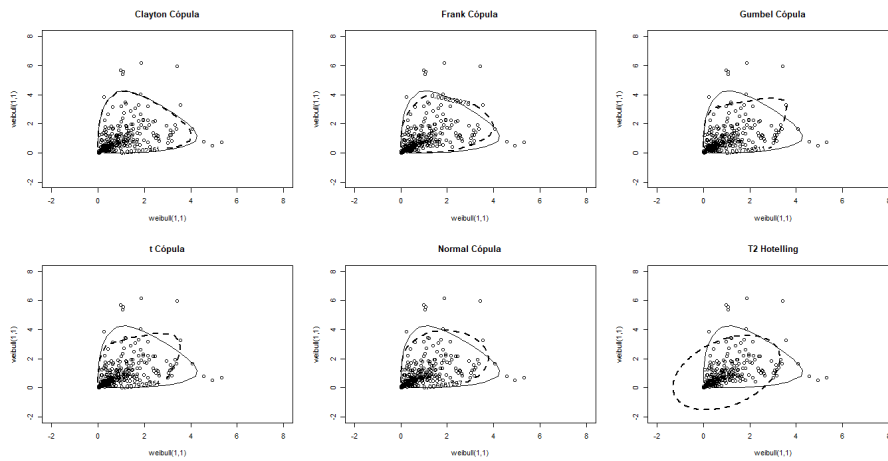


Figura 3.12 Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (Caso 3 - dependência moderada).

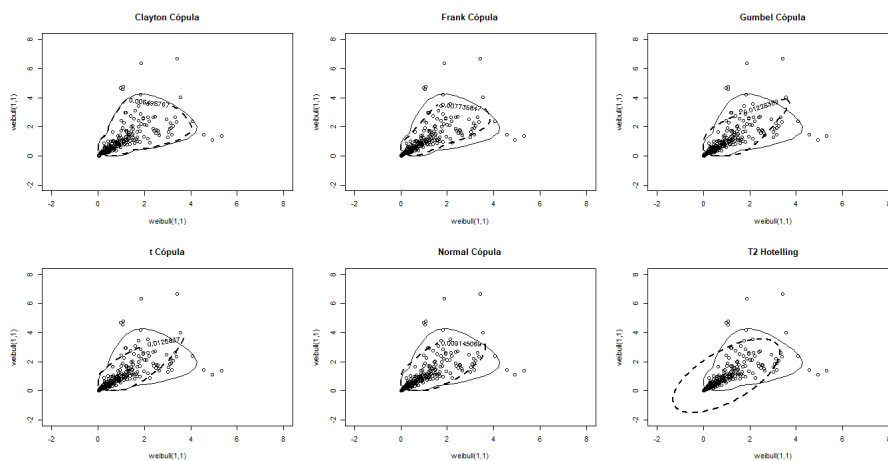


Figura 3.13 Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (Caso 3 - dependência forte).

tolerância teórica (paramétrica) foi comparada com as regiões estimadas pelos diferentes Kernels, e também com a estimada via regra T^2 de Hotelling. A Figura 3.17 revela que o Kernel Retangular deve ser desconsiderado mesmo quando o grau de associação é fraco. Quando este é moderado, a regra T^2 de Hotelling apresenta região mais distante da teórica do que as demais regiões estimadas via Kernel (Figura 3.18). O Kernel Gaussiano apresentou região de tolerância estimada mais próxima da teórica, seguido do Kernel Triangular, do Kernel *Biweight* e do Kernel Epanechnikov, quando a associação entre as marginais é forte (Figura 3.19).

- **Contexto Não-Paramétrico:** Foram estimadas regiões de tolerância baseadas na cópula não-paramétrica com transformação T, TLL1, TLL2, TLL1-nn e TLL2-nn

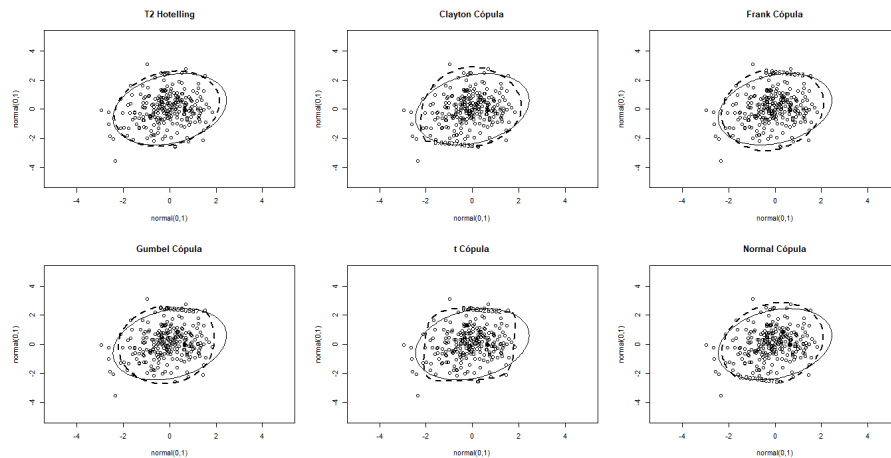


Figura 3.14 Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (**Caso 4** - dependência fraca).

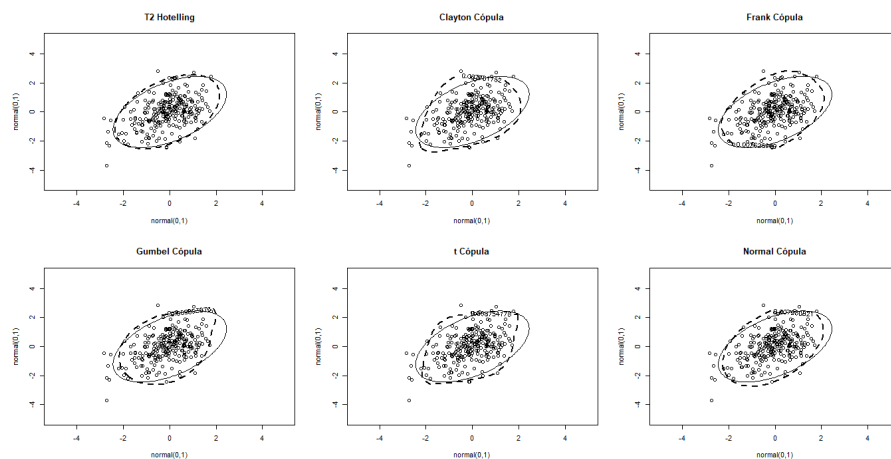


Figura 3.15 Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (**Caso 4** - dependência moderada).

(ver Seção 2.4.5.3), além da regra T^2 de Hotelling.

As Figuras 3.20, 3.21 e 3.22 comparam a região de tolerância teórica gerada a partir da cópula de Clayton (com parâmetro $\theta = 2/3, 2$ e 6 , respectivamente) e distribuições marginais Kernel Gaussiano padrão (**Caso 6**), com as regiões estimadas através da cópula não-paramétrica variando o método de transformação, e também com a região estimada pela regra T^2 de Hotelling. Quando $\tau_2 = 0,25$, todas as regiões estimadas apresentam resultados satisfatórios. Para $\tau_2 = 0,50$, a transformação *Log Linear Local nn* deixa de ser adequada. Considerando $\tau_2 = 0,75$, todos os métodos de transformação propostos para a cópula não-paramétrica, exceto o comentado anteriormente, têm regiões de tolerância

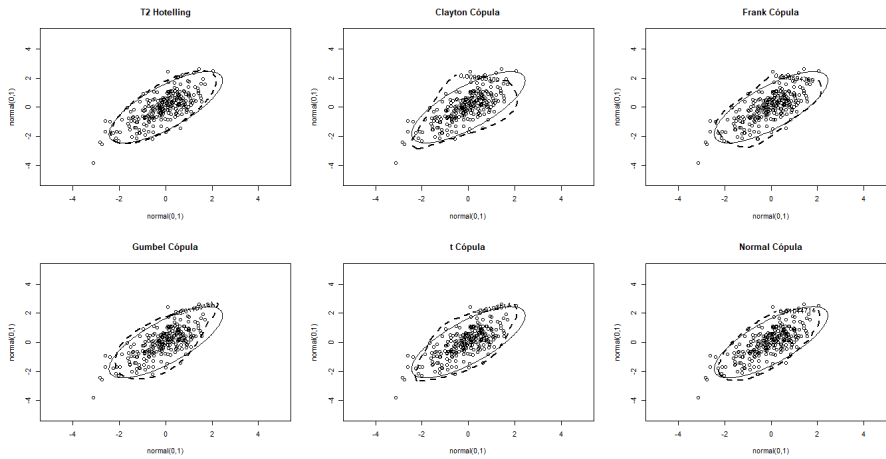


Figura 3.16 Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (Caso 4 - dependência forte).

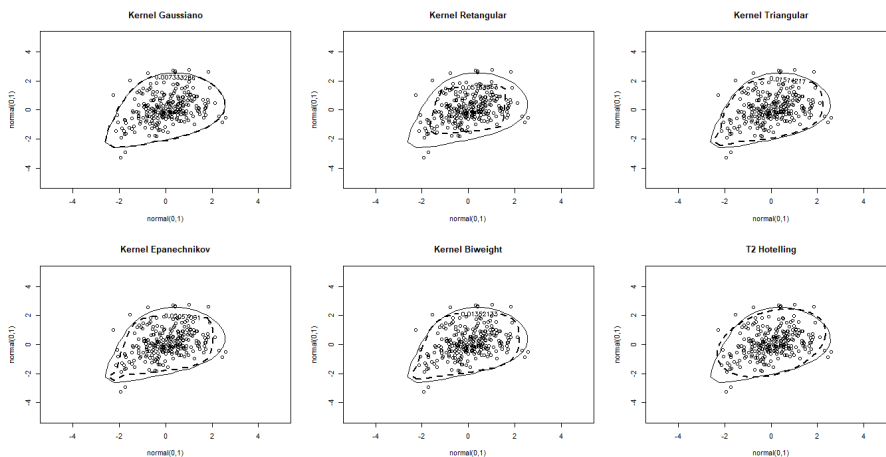


Figura 3.17 Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (Caso 5 - dependência fraca).

estimadas mais bem ajustadas à teórica do que a estimada pela tradicional regra T^2 de Hotelling.

3.2.3 Avaliação da Performance

Para avaliar o desempenho das ferramentas CEP utilizadas no controle e monitoramento de processos (tal como os gráficos de controle), é comum empregar a medida CMS, ou como é também conhecida, ARL (descrita na Seção 2.2). Quando o processo está sob controle, o ARL é o número esperado de amostras retiradas necessário para se detectar um deslocamento no vetor de médias do processo.

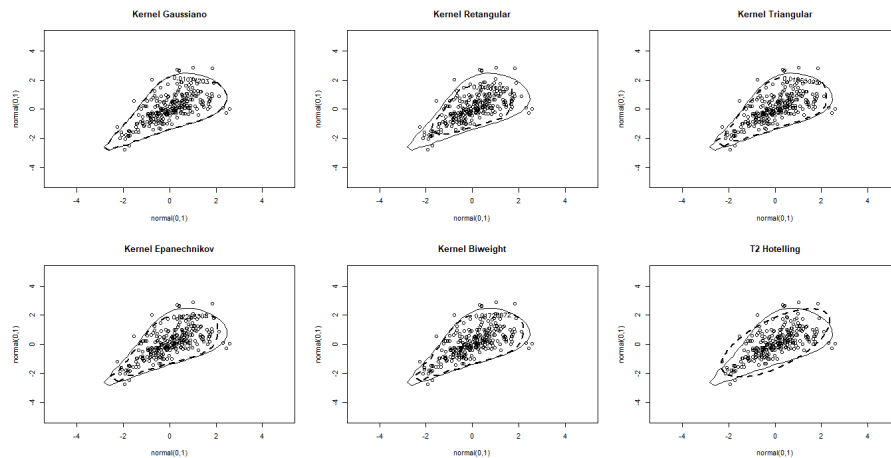


Figura 3.18 Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (**Caso 5** - dependência moderada).

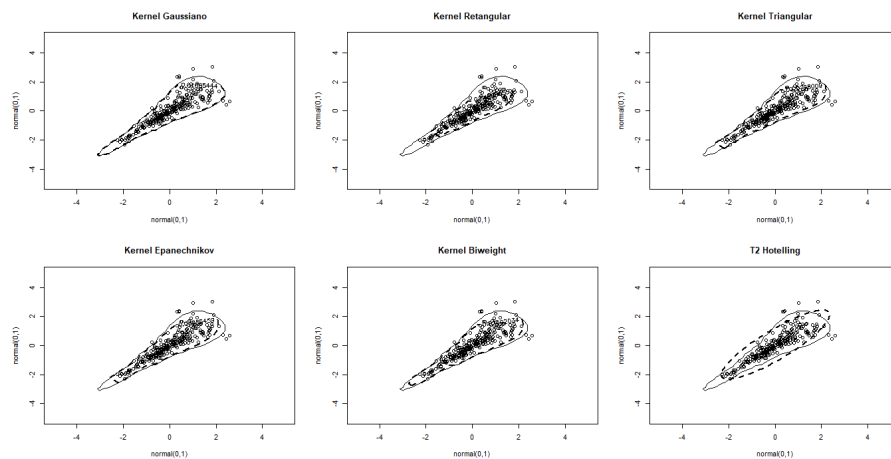


Figura 3.19 Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (**Caso 5** - dependência forte).

Análogo a Verdier (2013), na fase I de implementação, as regiões de tolerância foram construídas com base numa amostra artificial de aprendizagem de tamanho $n = 250$ da cópula de Clayton (ver Seção 2.3). Na fase II, $n = 500$ observações foram geradas do processo sob controle e $n = 500$ observações foram geradas do processo fora de controle (foram considerados aqui os seguintes acréscimos na média de cada uma das distribuições marginais individual e concomitantemente: 0,25; 0,50; 0,75; 1,00; 2,00; 3,00 e 4,00). Repetimos as fases I e II descritas acima $M = 1.000$ vezes via Monte Carlo, o que nos permitiu obter as estimativas médias do ARL_0 , ARL_1 e $SDRL$'s. Admitindo $\alpha = 0,05$, o valor nominal dessas medidas, quando o processo está sob controle, será $ARL_0 = 20$ e $SDRL \approx 19,49$.

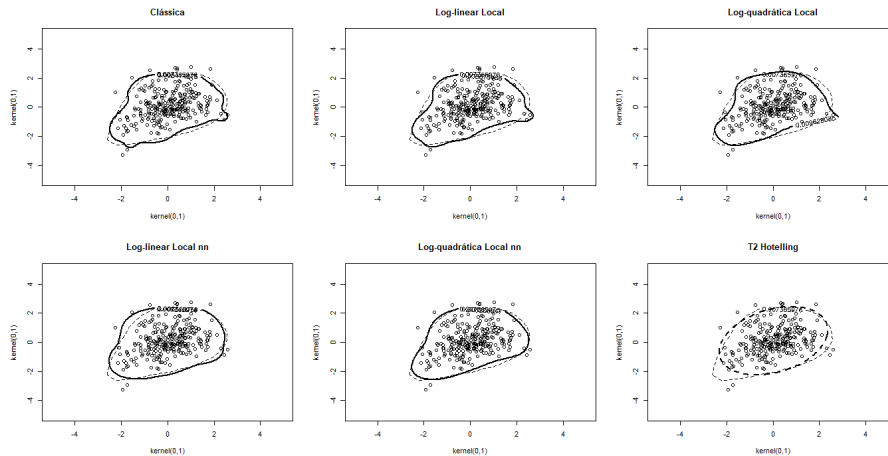


Figura 3.20 Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (Caso 6 - dependência fraca).

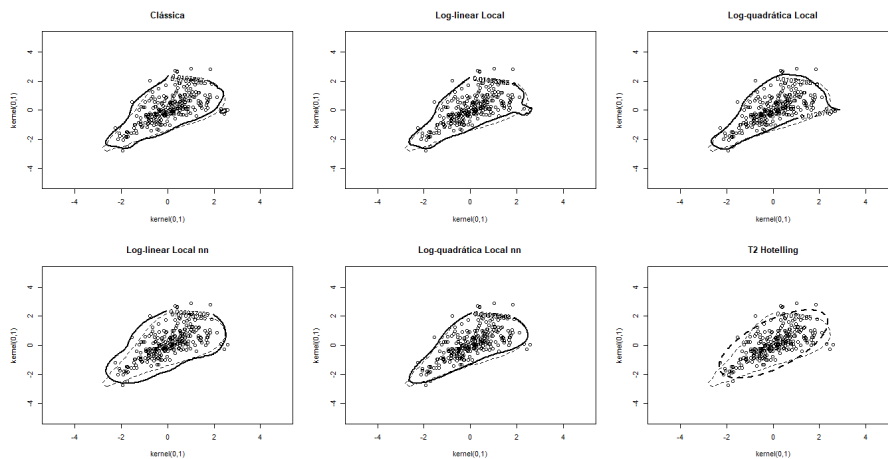


Figura 3.21 Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (Caso 6 - dependência moderada).

- Contexto Paramétrico Bivariado:** Foram estimados o ARL e seu respectivo desvio-padrão (SDRL), com o processo sob controle e fora de controle, para os casos paramétricos (Casos 1, 2, 3 e 4), em que variamos as funções cópula usadas na estimação: Clayton, Frank, Gumbel, Gaussiana e t (adotamos o parâmetro graus de liberdade fixo igual a 4), e comparamos com as estimativas geradas pela tradicional regra T^2 de Hotelling.

As Tabelas 3.7, 3.8 e 3.9 trazem os resultados das simulações do ARL_0 , ARL_1 e SDRL, considerando graus de dependência fraca, moderada e forte, respectivamente, para o Caso 1, em que as distribuições marginais são simétricas. O CMS quando o processo está sob controle (ARL_0), quando estimado com base na cópula de Clayton, ficou em torno de

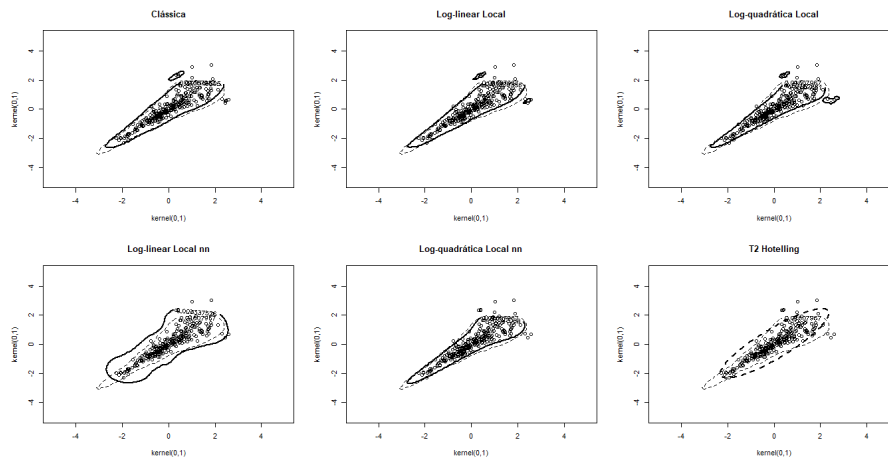


Figura 3.22 Região de tolerância teórica (linha contínua) e estimada (linha tracejada) (**Caso 6** - dependência forte).

18, portanto, próximo do valor nominal ($ARL_0 = 20$), independentemente do grau de associação entre as variáveis. Bem como mostrou uma maior rapidez na identificação da falta de controle, isto é, uma redução significativa no ARL_1 , quando o grau de dependência aumenta. Além disso, as estimativas do ARL_0 obtidas da cópula Gaussiana quando $\tau_2 = 0,25$ (19,5358) e $\tau_2 = 0,50$ (18,6247), também ficaram parecidas com o valor esperado. Porém, tal medida caiu para 16,9417 quando $\tau_2 = 0,75$. A regra T^2 de Hotelling apresentou estimativas do ARL_0 bem inferiores ao valor nominal. Quando ocorrem mudanças sutis (*shift* menor ou igual a um) na média da variável com distribuição normal, a cópula de Clayton identifica isso, reduzindo o ARL_1 gradativamente. Já quando ocorrem maiores mudanças (*shift* de dois a quatro), a cópula de Clayton apresenta grande redução no ARL_1 , que fica em torno de 1, ou seja, basta de uma a duas amostras para que seja identificada uma real mudança no processo quando o *shift* for de 2, 3 ou 4 unidades na média da variável com distribuição normal. O mesmo é observado quando ocorrem mudanças simultâneas e de mesma magnitude no vetor de médias. A identificação passa a ser mais lenta quando a mudança é efetuada na variável com distribuição logística (tais achados foram similares entre os três níveis de dependência estudados).

Analisando os resultados obtidos para o **Caso 2** (uma distribuição marginal simétrica e outra assimétrica), vemos na Tabela 3.10 que as cópulas de Clayton (21,2730), Frank (20,3178) e t (20,4140) apresentaram bons resultados para o ARL_0 quando o grau de associação é fraco, e ARL_1 decrescente à medida que a magnitude da mudança aumenta, de maneira muito similar entre elas. Novamente, o decréscimo do ARL_1 é mais sutil quando a mudança ocorre na outra variável que não a normalmente distribuída. Quando o grau de associação é moderado, o ARL_0 das cópulas de Frank (16,8112) e t (15,2966) diminuem e se distanciam do valor nominal, podendo gerar muitas paradas desnecessárias devido a alarmes falsos, enquanto a cópula de Clayton apresenta um leve aumento (22,6501) (Tabela 3.11). Aumentando ainda mais o grau de associação entre as variáveis, apesar de apresentar outro pequeno aumento, a cópula de Clayton (24,1324) ainda parece ser a

Tabela 3.7 Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes *shifts* nas médias das variáveis (**Caso 1** - dependência fraca).

Normal	Logística	Cópula					
		Clayton	Frank	Gumbel	t	Gaussiana	T^2 Hotelling
(0,1)	(1,2)	18.4047(17.8977)	17.6224(17.1151)	13.6429(13.1334)	14.8974(14.3887)	19.5358(19.0293)	14.4676(13.9586)
(0.25,1)	(1,2)	16.5546(16.0469)	16.4614(15.9536)	13.2855(12.7757)	13.4836(12.974)	18.3197(17.8127)	13.3245(12.8147)
(0.50,1)	(1,2)	13.101(12.5911)	14.0442(13.5349)	11.1175(10.6058)	10.8571(10.345)	15.0011(14.4924)	10.7721(10.2600)
(0.75,1)	(1,2)	9.691(9.1774)	10.6733(10.161)	8.6147(8.0993)	8.1526(7.6363)	11.1759(10.6642)	8.0955(7.5790)
(1,1)	(1,2)	7.0197(6.5005)	7.6961(7.1787)	6.3864(5.8652)	5.9209(5.3978)	8.0418(7.5252)	5.9121(5.3890)
(2,1)	(1,2)	2.3047(1.7341)	2.3647(1.7964)	2.1179(1.5387)	2.0179(1.4332)	2.4053(1.8385)	1.9866(1.4000)
(3,1)	(1,2)	1.2282(0.5294)	1.2225(0.5216)	1.1738(0.4517)	1.1596(0.4303)	1.2274(0.5283)	1.1447(0.4070)
(4,1)	(1,2)	1.0184(0.1367)	1.0166(0.1298)	1.0107(0.1038)	1.0092(0.0964)	1.0169(0.1311)	1.0079(0.0893)
(0,1)	(1.25,2)	18.4481(17.9412)	17.6747(17.1674)	14.0865(13.5773)	14.8148(14.3061)	19.6186(19.1121)	14.6049(14.0961)
(0,1)	(1.50,2)	18.0434(17.5362)	17.8795(17.3723)	13.9078(13.3985)	14.6572(14.1483)	19.784(19.2775)	14.6203(14.1115)
(0,1)	(1.75,2)	17.6267(17.1194)	17.5009(16.9935)	13.7065(13.197)	14.241(13.7319)	19.163(18.6563)	14.5281(14.0192)
(0,1)	(2,2)	17.3865(16.8791)	17.1574(16.6499)	13.6192(13.1096)	13.9311(13.4218)	18.7765(18.2697)	14.269(13.7599)
(0,1)	(3,2)	13.9063(13.3969)	14.4856(13.9767)	11.5532(11.0419)	11.4114(10.8999)	15.7883(15.2801)	12.1086(11.5978)
(0,1)	(4,2)	10.1090(9.5960)	10.9333(10.4213)	8.7986(8.2836)	8.4605(7.9448)	11.7115(11.2004)	9.2423(8.7280)
(0,1)	(5,2)	7.1766(6.6578)	7.7375(7.2203)	6.3413(5.8199)	5.9463(5.4233)	8.2616(7.7455)	6.6508(6.1304)
(0.25,1)	(1.25,2)	16.8902(16.3826)	17.1274(16.6199)	13.3088(12.7991)	13.6672(13.1577)	18.7455(18.2387)	13.5685(13.0590)
(0.50,1)	(1.50,2)	13.5722(13.0626)	14.4392(13.9302)	11.4184(10.9069)	11.1699(10.6582)	15.6784(15.1702)	11.2661(10.7545)
(0.75,1)	(1.75,2)	10.0626(9.5495)	11.0207(10.5089)	8.8303(8.3153)	8.5313(8.0157)	12.0071(11.4962)	8.6283(8.1129)
(1,1)	(2,2)	7.3197(6.8013)	8.1248(7.6084)	6.6224(6.102)	6.3964(5.8752)	8.7437(8.2285)	6.4154(5.8942)
(2,1)	(3,2)	2.4225(1.8564)	2.5711(2.0098)	2.2641(1.6917)	2.2035(1.6285)	2.6563(2.0976)	2.2078(1.6329)
(3,1)	(4,2)	1.3074(0.6339)	1.3268(0.6585)	1.2474(0.5555)	1.2361(0.5403)	1.3399(0.6749)	1.2350(0.5387)
(4,1)	(5,2)	1.0426(0.2108)	1.0426(0.2107)	1.0277(0.1688)	1.0247(0.1592)	1.0442(0.2149)	1.0242(0.1574)

Tabela 3.8 Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes *shifts* nas médias das variáveis (**Caso 1** - dependência moderada).

Normal	Logística	Cópula					
		Clayton	Frank	Gumbel	t	Gaussiana	T^2 Hotelling
(0,1)	(1,2)	18.4176(17.9106)	16.9119(16.4043)	12.0624(11.5516)	14.9943(14.4857)	18.6247(18.1179)	13.9373(13.428)
(0.25,1)	(1,2)	14.6735(14.1647)	16.2006(15.6927)	11.1049(10.5931)	12.9072(12.3971)	16.8554(16.3478)	12.1678(11.6571)
(0.50,1)	(1,2)	9.8965(9.3832)	13.0212(12.5112)	9.107(8.5924)	9.5852(9.0714)	12.9806(12.4706)	9.306(8.7918)
(0.75,1)	(1,2)	6.681(6.1608)	9.4116(8.8975)	6.8844(6.3648)	6.7688(6.2489)	9.1652(8.6508)	6.6654(6.1451)
(1,1)	(1,2)	4.6339(4.1035)	6.4344(5.9133)	4.935(4.4067)	4.7080(4.1782)	6.1963(5.6743)	4.6607(4.1306)
(2,1)	(1,2)	1.6063(0.9869)	1.5749(0.9515)	1.5166(0.8852)	1.4415(0.7977)	1.5741(0.9506)	1.3870(0.7327)
(3,1)	(1,2)	1.0385(0.2000)	1.0276(0.1683)	1.0112(0.1064)	1.0107(0.1038)	1.0198(0.1420)	1.0088(0.0944)
(4,1)	(1,2)	1.0003(0.0163)	1.0002(0.0156)	1.0000(0.0053)	1.0000(0.0063)	1.0001(0.0119)	1.0000(0.0060)
(0,1)	(1.25,2)	18.7892(18.2824)	16.8930(16.3854)	12.1127(11.6019)	14.9939(14.4852)	18.7850(18.2781)	14.0750(13.5658)
(0,1)	(1.50,2)	18.3857(17.8787)	17.1786(16.6711)	11.9872(11.4764)	14.5045(13.9956)	18.6220(18.1151)	14.0375(13.5282)
(0,1)	(1.75,2)	17.4789(16.9715)	16.9394(16.4318)	11.8217(11.3107)	14.0371(13.5278)	18.0187(17.5115)	13.8217(13.3123)
(0,1)	(2,2)	16.5267(16.0189)	16.3548(15.8469)	11.3996(10.8882)	13.5329(13.0233)	17.5494(17.0421)	13.4622(12.9526)
(0,1)	(3,2)	11.3271(10.8155)	13.1068(12.5969)	9.3357(8.8215)	10.1943(9.6814)	13.7707(13.2613)	10.8689(10.3568)
(0,1)	(4,2)	7.3107(6.7923)	9.2745(8.7603)	6.8534(6.3336)	7.0004(6.4811)	9.5240(9.0101)	7.7346(7.2173)
(0,1)	(5,2)	4.8266(4.2976)	6.0067(5.4840)	4.7293(4.1997)	4.6202(4.0898)	6.1926(5.6706)	5.1366(4.6095)
(0.25,1)	(1.25,2)	15.6245(15.1162)	16.9716(16.4640)	11.3675(10.8560)	13.1154(12.6055)	17.4715(16.9642)	12.5316(12.0212)
(0.50,1)	(1.50,2)	11.5586(11.0472)	14.3225(13.8135)	9.5729(9.0591)	10.4550(9.9424)	14.2150(13.7059)	10.1595(9.6466)
(0.75,1)	(1.75,2)	8.3472(7.8313)	11.1349(10.6231)	7.4747(6.9568)	7.7635(7.2463)	10.7520(10.2398)	7.7038(7.1864)
(1,1)	(2,2)	6.0314(5.5088)	8.1334(7.6170)	5.6957(5.1716)	5.7378(5.2138)	7.8164(7.2993)	5.7128(5.1888)
(2,1)	(3,2)	2.1754(1.5991)	2.4242(1.8581)	1.9625(1.3744)	1.9385(1.3488)	2.3177(1.7476)	1.9147(1.3234)
(3,1)	(4,2)	1.2077(0.5008)	1.174(0.4519)	1.0867(0.3069)	1.0814(0.2966)	1.1383(0.3967)	1.0704(0.2744)
(4,1)	(5,2)	1.0062(0.0788)	1.0039(0.0629)	1.0005(0.0232)	1.0005(0.0234)	1.0019(0.0437)	1.0005(0.0232)

mais indicada em relação às demais famílias de cópulas, que apresentaram ARL_0 's muito pequenos (Tabela 3.12). Nas três tabelas apresentadas, é possível perceber que a regra T^2 de Hotelling apresentou ARL_0 em torno de 5, demonstrando sua inadequabilidade para o **Caso 2**, independente do nível de associação.

Estudando o caso em que ambas as distribuições marginais são assimétricas (**Caso 3**), observamos que, além da Clayton (21, 8579), as cópulas de Frank (21, 2585), Gumbel (18, 8829) e Gaussiana (22, 6193) apresentaram boas estimativas do ARL_0 para $\theta = 2/3$ (Tabela 3.13). Para $\theta = 2$, apenas as cópulas de Clayton (20, 4307) e Frank (19, 1939) demonstraram bons resultados, como pode ser visto na Tabela 3.14. Já na Tabela 3.15, são exibidos os resultados para $\theta = 6$, em que vemos que apenas a cópula de Clayton (21, 7647) apresentou ARL_0 próximo de 20. Assim como no **Caso 2**, a regra T^2 de Hotel-

Tabela 3.9 Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes *shifts* nas médias das variáveis (**Caso 1** - dependência forte).

Normal	Logística	Cópula					
		Clayton	Frank	Gumbel	t	Gaussiana	T^2 Hotelling
(0,1)	(1,2)	18.4980(17.9910)	14.3225(13.8135)	11.5972(11.0859)	11.9096(11.3986)	16.9417(16.4341)	14.9370(14.4283)
(0.25,1)	(1,2)	10.0122(9.4991)	12.5713(12.0610)	10.239(9.7261)	9.6208(9.1070)	14.3041(13.7950)	12.0444(11.5336)
(0.50,1)	(1,2)	4.2931(3.7600)	7.9885(7.4718)	7.6127(7.0951)	6.2017(5.6797)	9.9323(9.4190)	8.3130(7.7970)
(0.75,1)	(1,2)	2.5651(2.0036)	4.0302(3.4947)	5.0808(4.5534)	3.5302(2.9886)	5.9695(5.4466)	5.2199(4.6933)
(1,1)	(1,2)	1.8571(1.2616)	1.9556(1.3671)	3.2382(2.6922)	1.9636(1.3756)	3.18(2.6329)	3.0462(2.4966)
(2,1)	(1,2)	1.0364(0.1943)	1.0206(0.1450)	1.0066(0.0815)	1.0038(0.0618)	1.0110(0.1053)	1.0077(0.0883)
(3,1)	(1,2)	1.0000(0.0065)	1.0000(0.0062)	1.0000(0.0020)	1.0000(0.0035)	1.0000(0.0032)	1.0000(0.0032)
(4,1)	(1,2)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)
(0,1)	(1.25,2)	17.7387(17.2314)	14.6934(14.1845)	11.5527(11.0414)	11.7827(11.2716)	16.8163(16.3087)	15.1067(14.5981)
(0,1)	(1.50,2)	15.3459(14.8375)	14.4751(13.9662)	11.3737(10.8622)	11.3117(10.8001)	16.5552(16.0474)	15.0227(14.5141)
(0,1)	(1.75,2)	12.6528(12.1425)	13.8240(13.3146)	10.9876(10.4756)	10.6270(10.1146)	15.9964(15.4883)	14.7519(14.2431)
(0,1)	(2,2)	10.0430(9.5299)	12.8304(12.3202)	10.5110(9.9986)	9.9114(9.3981)	15.1217(14.6132)	14.1957(13.6865)
(0,1)	(3,2)	4.0570(3.5217)	7.3951(6.8770)	7.8741(7.3572)	6.3236(5.8021)	10.5760(10.0636)	10.5666(10.0542)
(0,1)	(4,2)	2.3091(1.7386)	3.0981(2.5496)	4.9166(4.3882)	3.1827(2.6357)	5.8202(5.2967)	6.2047(5.6828)
(0,1)	(5,2)	1.6748(1.0631)	1.6261(1.0091)	2.7297(2.1729)	1.5386(0.9103)	2.4976(1.9340)	2.7819(2.2265)
(0.25,1)	(1.25,2)	12.7969(12.2867)	14.1451(13.6359)	10.4795(9.9670)	10.0863(9.5733)	15.0975(14.5890)	12.7204(12.2101)
(0.50,1)	(1.50,2)	6.8313(6.3116)	11.0040(10.4921)	8.4109(7.8950)	7.4245(6.9064)	11.6735(11.1623)	9.7082(9.1946)
(0.75,1)	(1.75,2)	4.3210(3.7881)	7.5905(7.0728)	6.1743(5.6522)	5.1491(4.6221)	8.1880(7.6717)	6.9237(6.4042)
(1,1)	(2,2)	3.1324(2.5845)	4.6401(4.1098)	4.3752(3.8428)	3.4460(2.9033)	5.5015(4.9765)	4.7643(4.2349)
(2,1)	(3,2)	1.3510(0.6886)	1.1518(0.4182)	1.1819(0.4636)	1.0406(0.2055)	1.1440(0.4059)	1.1191(0.3651)
(3,1)	(4,2)	1.0023(0.0477)	1.0008(0.0284)	1.0000(0.0066)	1.0000(0.0055)	1.0001(0.0118)	1.0001(0.0077)
(4,1)	(5,2)	1.0000(0.0014)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)

Tabela 3.10 Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes *shifts* nas médias das variáveis (**Caso 2** - dependência fraca).

Normal	Weibull	Cópula					
		Clayton	Frank	Gumbel	t	Gaussiana	T^2 Hotelling
(0,1)	(1,1)	21.273(20.7670)	20.3178(19.8115)	24.4511(23.9459)	20.414(19.9077)	23.5671(23.0617)	5.3215(4.7955)
(0.25,1)	(1,1)	19.7887(19.2822)	19.2123(18.7056)	22.1259(21.6201)	18.8182(18.3114)	21.8369(21.3311)	5.1321(4.605)
(0.50,1)	(1,1)	16.7347(16.2270)	16.4842(15.9764)	18.1534(17.6464)	15.5797(15.0714)	18.2996(17.7926)	4.6894(4.1594)
(0.75,1)	(1,1)	13.1957(12.6859)	13.0859(12.576)	13.8681(13.3587)	11.9852(11.4743)	14.2373(13.7282)	4.1055(3.5707)
(1,1)	(1,1)	10.0555(9.5424)	9.9008(9.3875)	10.4210(9.9084)	8.9998(8.4850)	10.6610(10.1487)	3.4788(2.9365)
(2,1)	(1,1)	3.5285(2.9869)	3.3637(2.8197)	3.3016(2.7567)	2.9861(2.4353)	3.3831(2.8394)	1.7111(1.1030)
(3,1)	(1,1)	1.7200(1.1129)	1.6467(1.0320)	1.6141(0.9956)	1.5471(0.9200)	1.6060(0.9866)	1.1193(0.3654)
(4,1)	(1,1)	1.1928(0.4796)	1.1713(0.4480)	1.1643(0.4374)	1.1653(0.4390)	1.1388(0.3976)	1.0073(0.0858)
(0,1)	(1,1.25)	16.0870(15.5790)	15.1851(14.6766)	18.1587(17.6516)	15.5212(15.0129)	17.4271(16.9197)	3.6521(3.1122)
(0,1)	(1,1.50)	12.8614(12.3513)	12.3289(11.8184)	14.4513(13.9423)	12.4378(11.9273)	13.9249(13.4155)	2.8427(2.2887)
(0,1)	(1,1.75)	10.6658(10.1535)	10.1827(9.6698)	11.8977(11.3867)	10.4831(9.9705)	11.4411(10.9297)	2.3876(1.8202)
(0,1)	(1,2)	9.2270(8.7126)	8.8499(8.3349)	10.1922(9.6793)	9.0886(8.5740)	9.8672(9.3538)	2.1040(1.5241)
(0,1)	(1,3)	6.2546(5.7328)	6.0141(5.4914)	6.7577(6.2377)	6.1450(5.6228)	6.6039(6.0834)	1.5910(0.9696)
(0,1)	(1,4)	4.9075(4.3790)	4.7338(4.2042)	5.2356(4.7091)	4.8411(4.3122)	5.1284(4.6013)	1.3974(0.7452)
(0,1)	(1,5)	4.1781(3.6439)	4.0141(3.4783)	4.4265(3.8945)	4.0970(3.5620)	4.3468(3.8142)	1.2984(0.6224)
(0.25,1)	(1,1.25)	15.1971(14.6886)	14.6864(14.1776)	16.7937(16.2861)	14.6821(14.1733)	16.7386(16.2309)	3.5519(3.0107)
(0.50,1)	(1,1.50)	10.8502(10.3381)	10.7931(10.2809)	12.0954(11.5846)	10.5635(10.0510)	11.7503(11.2392)	2.6509(2.0920)
(0.75,1)	(1,1.75)	7.9352(7.4184)	7.9935(7.4768)	8.6960(8.1807)	7.8323(7.3153)	8.6760(8.1607)	2.1272(1.5485)
(1,1)	(1,2)	5.9712(5.4483)	6.0189(5.4962)	6.4890(5.9680)	5.8480(5.3245)	6.4794(5.9584)	1.7944(1.1940)
(2,1)	(1,3)	2.4921(1.9283)	2.4600(1.8951)	2.4803(1.9161)	2.3255(1.7556)	2.5211(1.9583)	1.2003(0.4903)
(3,1)	(1,4)	1.4820(0.8452)	1.4462(0.8033)	1.4299(0.7840)	1.3801(0.7243)	1.4434(0.8000)	1.0316(0.1804)
(4,1)	(1,5)	1.1405(0.4002)	1.1253(0.3755)	1.1186(0.3642)	1.1099(0.3492)	1.1095(0.3485)	1.0016(0.0404)

ling resultou em estimativas inferiores ao esperado para todos os valores de θ . O estudo de Verdier (2013), em que a amostra de aprendizagem foi gerada da cópula de Frank com distribuições marginais assimétricas positivas Fisher(10,15), também revelou a falha no desempenho do T^2 de Hotelling para dados com essas características, pois apresentou alta taxa de alarmes falsos, e apontou para o bom desempenho da abordagem via cópulas. Sukparungsee *et al.* (2016) simulou o ARL_0 e o ARL_1 baseados na regra T^2 de Hotelling, para as cópulas Gaussiana, Clayton, Frank, Gumbel e Joe (Joe, 2014), com marginais assimétricas Exponencial($\lambda = 1$), grau de dependência moderada ($\tau_2 = 0, 50/\tau_2 = -0, 50$) e forte ($\tau_2 = 0, 80/\tau_2 = -0, 80$) (para os casos de dependência negativa, as cópulas foram limitadas à Gaussiana, Clayton e Frank). Os autores frisaram que a escolha da cópula que melhor se adequa a esse tipo de dados está intimamente ligada ao tipo de dependência.

Tabela 3.11 Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes *shifts* nas médias das variáveis (**Caso 2** - dependência moderada).

Normal	Weibull	Cópula						
		Clayton	Frank	Gumbel	t	Gaussiana	T^2 Hotelling	
(0,1)	(1,1)	22.6501(22.1444)	16.8112(16.3036)	17.2729(16.7655)	15.2966(14.7882)	18.4054(17.8984)	5.488(4.9629)	
(0.25,1)	(1,1)	20.9477(20.4416)	16.129(15.621)	15.0693(14.5607)	13.6627(13.1532)	16.2718(15.7639)	5.2697(4.7434)	
(0.50,1)	(1,1)	16.6956(16.1879)	13.5866(13.077)	11.9056(11.3946)	11.0059(10.494)	13.0395(12.5295)	4.7738(4.2445)	
(0.75,1)	(1,1)	12.7782(12.2681)	10.3629(9.8502)	8.8648(8.3498)	8.4252(7.9094)	9.7063(9.1927)	4.0974(3.5625)	
(1,1)	(1,1)	9.5721(9.0583)	7.7097(7.1924)	6.4556(5.9346)	6.152(5.6299)	7.0326(6.5135)	3.3763(2.8325)	
(2,1)	(1,1)	3.2975(2.7524)	2.5444(1.9823)	2.2147(1.6401)	2.2201(1.6458)	2.2502(1.6773)	1.4461(0.8032)	
(3,1)	(1,1)	1.5672(0.9428)	1.3175(0.6468)	1.2907(0.6125)	1.3409(0.6762)	1.1850(0.4682)	1.0196(0.1415)	
(4,1)	(1,1)	1.0348(0.1897)	1.0653(0.2638)	1.0661(0.2654)	1.1173(0.3602)	1.0098(0.0995)	1.0001(0.0101)	
(0,1)	(1,1.25)	16.9492(16.4416)	12.9698(12.4598)	13.3248(12.8151)	12.0334(11.5226)	14.0548(13.5456)	3.6722(3.1325)	
(0,1)	(1,1.50)	13.3593(12.8496)	10.487(9.9745)	11.1143(10.6025)	9.992(9.4788)	11.6158(11.1045)	2.8186(2.2640)	
(0,1)	(1,1.75)	11.2221(10.7104)	8.9295(8.4147)	9.4079(8.8938)	8.5083(7.9927)	9.8493(9.3359)	2.3448(1.7757)	
(0,1)	(1,2)	9.6393(9.1256)	7.8332(7.3161)	8.2367(7.7205)	7.5477(7.0300)	8.5324(8.0168)	2.5058(1.4732)	
(0,1)	(1,3)	6.4447(5.9236)	5.3139(4.7879)	5.6717(5.1475)	5.2599(4.7336)	5.8358(5.3123)	1.5509(0.9243)	
(0,1)	(1,4)	5.0172(4.4894)	4.229(3.6953)	4.4926(3.9611)	4.1995(3.6655)	4.5673(4.0364)	1.3673(0.7086)	
(0,1)	(1,5)	4.2205(3.6868)	3.5905(3.0543)	3.8242(3.2864)	3.5800(3.0391)	3.8784(3.3412)	1.2744(0.5913)	
(0.25,1)	(1,1.25)	15.8791(15.3709)	12.7982(12.2880)	12.3253(11.8147)	11.2329(10.7213)	13.2450(12.7352)	3.5458(3.0045)	
(0.50,1)	(1,1.50)	11.163(10.6512)	9.5209(9.0070)	9.1438(8.6293)	8.4201(7.9043)	9.7354(9.2218)	2.5806(2.0196)	
(0.75,1)	(1,1.75)	8.0982(7.5817)	7.2707(6.7522)	6.8498(6.3301)	6.3758(5.8545)	7.2754(6.7569)	2.0425(1.4592)	
(1,1)	(1,2)	6.1143(5.592)	5.5686(5.0439)	5.1902(4.6634)	4.8967(4.3682)	5.4490(4.9237)	1.7103(1.1022)	
(2,1)	(1,3)	2.589(2.0283)	2.3086(1.7381)	2.068(1.4862)	2.0294(1.4454)	2.1693(1.5926)	1.1418(0.4024)	
(3,1)	(1,4)	1.5075(0.8747)	1.3125(0.6404)	1.2548(0.5654)	1.2665(0.5809)	1.2235(0.5229)	1.0088(0.0943)	
(4,1)	(1,5)	1.0773(0.2885)	1.0523(0.2345)	1.0541(0.2387)	1.0797(0.2933)	1.0131(0.1152)	1.0001(0.0071)	

Tabela 3.12 Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes *shifts* nas médias das variáveis (**Caso 2** - dependência forte).

Normal	Weibull	Cópula						
		Clayton	Frank	Gumbel	t	Gaussiana	T^2 Hotelling	
(0,1)	(1,1)	24.1324(23.6271)	9.8354(9.3220)	11.7096(11.1984)	10.2927(9.7800)	14.4793(13.9704)	5.6838(5.1596)	
(0.25,1)	(1,1)	21.0962(20.5901)	6.3623(5.8409)	9.9331(9.4198)	8.8065(8.2915)	12.1990(11.6883)	5.4528(4.9275)	
(0.50,1)	(1,1)	16.0169(15.5089)	3.8376(3.3000)	7.386(6.8678)	6.5996(6.0791)	8.9431(8.4283)	4.8858(4.3572)	
(0.75,1)	(1,1)	10.9868(10.4749)	2.2363(1.6627)	5.2198(4.6932)	4.6404(4.1101)	6.1415(5.6192)	4.0850(3.5500)	
(1,1)	(1,1)	5.7221(5.1981)	1.4802(0.8430)	3.6415(3.1014)	3.2379(2.6919)	4.0587(3.5234)	3.1769(2.6298)	
(2,1)	(1,1)	1.2195(0.5174)	1.0946(0.3217)	1.3803(0.7245)	1.3215(0.6518)	1.1096(0.3488)	1.0690(0.2717)	
(3,1)	(1,1)	1.0003(0.0186)	1.0117(0.1088)	1.0618(0.2561)	1.0850(0.3037)	1.0002(0.0126)	1.0000(0.0000)	
(4,1)	(1,1)	1.0000(0.0000)	1.0019(0.0442)	1.0084(0.0922)	1.0307(0.1779)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	
(0,1)	(1,1.25)	18.0226(17.5154)	9.6937(9.1801)	10.0880(9.5749)	8.8185(8.3035)	12.0496(11.5388)	3.6572(3.1173)	
(0,1)	(1,1.50)	14.4881(13.9792)	9.1495(8.6350)	8.6032(8.0877)	7.5713(7.0536)	10.2847(9.7719)	2.7525(2.1963)	
(0,1)	(1,1.75)	11.9594(11.4485)	8.6646(8.1493)	7.5021(6.9842)	6.6916(6.1714)	8.7941(8.2791)	2.2703(1.6983)	
(0,1)	(1,2)	10.2028(9.6899)	8.0626(7.546)	6.6699(6.1496)	5.9292(5.4062)	7.7063(7.1889)	1.9825(1.3957)	
(0,1)	(1,3)	6.4163(5.8951)	6.1692(5.6471)	4.6323(4.1020)	4.1219(3.5872)	5.1587(4.6318)	1.4933(0.8583)	
(0,1)	(1,4)	4.7445(4.2149)	4.9565(4.4284)	3.6439(3.1039)	3.2158(2.6693)	3.9556(3.4192)	1.3238(0.6547)	
(0,1)	(1,5)	3.7448(3.2061)	4.2074(3.6735)	3.0412(2.4915)	2.6978(2.1402)	3.2636(2.7180)	1.2390(0.5442)	
(0.25,1)	(1,1.25)	16.8845(16.3768)	6.81100(6.2911)	9.0770(8.5625)	8.1563(7.6400)	11.0936(10.5818)	3.5359(2.9944)	
(0.50,1)	(1,1.50)	11.8206(11.3096)	4.7034(4.1735)	6.9824(6.4631)	6.3480(5.8266)	8.2477(7.7315)	2.5126(1.9495)	
(0.75,1)	(1,1.75)	8.5580(8.0425)	3.1269(2.5789)	5.3240(4.7980)	4.8286(4.2997)	6.2047(5.6828)	1.9616(1.3734)	
(1,1)	(1,2)	6.1569(5.6347)	2.0280(1.4439)	3.9511(3.4147)	3.6121(3.0717)	4.5581(4.0272)	1.6305(1.0139)	
(2,1)	(1,3)	1.7377(1.1323)	1.1884(0.4731)	1.4229(0.7757)	1.3373(0.6716)	1.3079(0.6345)	1.0747(0.2834)	
(3,1)	(1,4)	1.0066(0.0814)	1.0100(0.1003)	1.0575(0.2466)	1.0629(0.2586)	1.0003(0.0179)	1.0001(0.0106)	
(4,1)	(1,5)	1.0000(0.0000)	1.0013(0.0359)	1.0069(0.0835)	1.0189(0.1389)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	

Já Kuvattana *et al.* (2015) utilizou essas mesmas distribuições marginais e comparou a eficiência, também por meio do ARL, dos gráficos de controle MCUSUM e MEWMA, usando as cópulas de Frank e Clayton para especificar a forte dependência. Observou-se que o gráfico MCUSUM teve melhor performance que o gráfico MEWMA quando ocorreu mudança no parâmetro de uma das marginais, porém, o desempenho entre as cópulas de Frank e Clayton não foi bastante variado.

O **Caso 4** representa uma situação típica em que a regra T^2 de Hotelling é recomendada (normalidade bivariada). Assim sendo, encontramos ARL_0 's iguais a 19, 7691, 19, 5358 e 19, 8122, quando as dependências são, nesta sequência, fraca, moderada e forte (Tabelas 3.16, 3.17 e 3.18, respectivamente). Nessas condições, as cópulas Gaussiana (17, 7601), Clayton (17, 9115) e Frank (18, 3103) tiveram valores de ARL_0 vizinhos ao

Tabela 3.13 Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes *shifts* nas médias das variáveis (**Caso 3** - dependência fraca).

		Cópula						
Weibull	Weibull	Clayton	Frank	Gumbel	t	Gaussiana	T^2 Hotelling	
(1,1)	(1,1)	21.8579(21.3521)	21.2585(20.7525)	18.8829(18.3761)	16.7723(16.2646)	22.6193(22.1137)	14.1335(13.6243)	
(1,1.25)	(1,1)	13.6444(13.1349)	13.3422(12.8325)	12.0575(11.5467)	10.9714(10.4595)	14.0560(13.5468)	9.3770(8.8629)	
(1,1.50)	(1,1)	9.5129(8.9991)	9.2611(8.7469)	8.5093(7.9937)	7.8578(7.3408)	9.6813(9.1677)	6.8201(6.3003)	
(1,1.75)	(1,1)	7.1672(6.6485)	6.9922(6.4729)	6.5015(5.9807)	6.0692(5.5467)	7.2524(6.7338)	5.3318(4.8059)	
(1,2)	(1,1)	5.7423(5.2184)	5.6024(5.0778)	5.2592(4.7328)	4.9439(4.4157)	5.7709(5.2471)	4.3894(3.8572)	
(1,3)	(1,1)	3.3189(2.7742)	3.2384(2.6924)	3.1161(2.5678)	2.9927(2.4420)	3.3015(2.7565)	2.7341(2.1774)	
(1,4)	(1,1)	2.4959(1.9323)	2.4423(1.8768)	2.3786(1.8108)	2.3072(1.7367)	2.4766(1.9123)	2.1398(1.5617)	
(1,5)	(1,1)	2.0918(1.5112)	2.0519(1.4692)	2.0111(1.4260)	1.9642(1.3761)	2.0737(1.4921)	1.8413(1.2446)	
(1,1)	(1,1.25)	14.2719(13.7628)	14.0434(13.5341)	12.6473(12.137)	11.4684(10.957)	14.8205(14.3118)	10.0882(9.5751)	
(1,1)	(1,1.50)	10.1102(9.5972)	9.926(9.4127)	9.0613(8.5466)	8.3378(7.8218)	10.3991(9.8865)	7.5182(7.0004)	
(1,1)	(1,1.75)	7.6619(7.1444)	7.5011(6.9832)	6.9413(6.4218)	6.4661(5.9451)	7.8114(7.2943)	5.923(5.3999)	
(1,1)	(1,2)	6.1344(5.6122)	6.0123(5.4896)	5.6097(5.0852)	5.2621(4.7357)	6.2201(5.6982)	4.8718(4.3431)	
(1,1)	(1,3)	3.5144(2.9726)	3.4452(2.9024)	3.2989(2.7539)	3.1596(2.6122)	3.5172(2.9755)	2.9872(2.4364)	
(1,1)	(1,4)	2.6157(2.0558)	2.5635(2.0020)	2.4839(1.9198)	2.4048(1.838)	2.6039(2.0436)	2.2930(1.7218)	
(1,1)	(1,5)	2.1749(1.5985)	2.1366(1.5583)	2.0894(1.5087)	2.0362(1.4526)	2.1613(1.5843)	1.9534(1.3647)	
(1,1.25)	(1,1.25)	10.1024(9.5894)	10.0343(9.5212)	9.1356(8.6211)	8.4384(7.9226)	10.5308(10.0183)	7.5045(6.9866)	
(1,1.50)	(1,1.50)	6.2092(5.6872)	6.1888(5.6668)	5.7424(5.2185)	5.4119(4.8864)	6.4495(5.9285)	4.9745(4.4465)	
(1,1.75)	(1,1.75)	4.4374(3.9055)	4.4459(3.9141)	4.1852(3.6511)	3.9897(3.4537)	4.5992(4.0686)	3.742(3.2032)	
(1,2)	(1,2)	3.4916(2.9495)	3.5035(2.9616)	3.3264(2.7818)	3.1984(2.6517)	3.6049(3.0643)	3.0388(2.4891)	
(1,3)	(1,3)	2.0872(1.5063)	2.0948(1.5144)	2.0348(1.4511)	1.9929(1.4067)	2.1313(1.5528)	1.9408(1.3513)	
(1,4)	(1,4)	1.6652(1.0525)	1.6689(1.0565)	1.6361(1.0202)	1.6141(0.9956)	1.6881(1.0777)	1.5856(0.9636)	
(1,5)	(1,5)	1.4710(0.8324)	1.4740(0.8359)	1.4524(0.8106)	1.4377(0.7933)	1.4864(0.8503)	1.4190(0.7711)	

Tabela 3.14 Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes *shifts* nas médias das variáveis (**Caso 3** - dependência moderada).

		Cópula						
Weibull	Weibull	Clayton	Frank	Gumbel	t	Gaussiana	T^2 Hotelling	
(1,1)	(1,1)	20.4307(19.9244)	19.1939(18.6872)	14.2507(13.7416)	13.9295(13.4202)	17.5778(17.0705)	13.3786(12.8689)	
(1,1.25)	(1,1)	13.1756(12.6657)	12.6752(12.165)	9.7964(9.283)	9.5932(9.0795)	11.703(11.1919)	9.1186(8.6041)	
(1,1.50)	(1,1)	9.2587(8.7445)	8.8764(8.3615)	7.185(6.6663)	7.0545(6.5354)	8.3292(7.8132)	6.6988(6.1786)	
(1,1.75)	(1,1)	7.0054(6.4861)	6.6995(6.1793)	5.5892(5.0645)	5.5061(4.9811)	6.3232(5.8017)	5.2609(4.7346)	
(1,2)	(1,1)	5.6121(5.0876)	5.342(4.8161)	4.5703(4.0395)	4.5022(3.9709)	5.0908(4.5635)	4.3301(3.7974)	
(1,3)	(1,1)	3.2213(2.6749)	3.0309(2.4811)	2.7752(2.2195)	2.7425(2.186)	2.9514(2.3999)	2.6868(2.1288)	
(1,4)	(1,1)	2.3952(1.8281)	2.2575(1.6848)	2.1421(1.5641)	2.1188(1.5396)	2.2208(1.6465)	2.092(1.5115)	
(1,5)	(1,1)	1.986(1.3994)	1.8815(1.2879)	1.8273(1.2295)	1.8113(1.2122)	1.8631(1.268)	1.796(1.1956)	
(1,1)	(1,1.25)	13.6679(13.1584)	13.3422(12.8325)	10.2659(9.7531)	10.0422(9.5291)	12.3147(11.8041)	9.7392(9.2256)	
(1,1)	(1,1.50)	9.771(9.2575)	9.5334(9.0196)	7.5843(7.0666)	7.4542(6.9362)	8.8697(8.3547)	7.3133(6.7949)	
(1,1)	(1,1.75)	7.4266(6.9085)	7.2127(6.6941)	5.9332(5.4102)	5.8439(5.3204)	6.7899(6.27)	5.7792(5.2555)	
(1,1)	(1,2)	5.9596(5.4367)	5.7569(5.2331)	4.8707(4.342)	4.8013(4.2721)	5.4589(4.9337)	4.7729(4.2435)	
(1,1)	(1,3)	3.4067(2.8634)	3.2329(2.6867)	2.9177(2.3654)	2.8847(2.3317)	3.1313(2.5833)	2.9068(2.3542)	
(1,1)	(1,4)	2.5096(1.9464)	2.371(1.8029)	2.2236(1.6495)	2.2021(1.627)	2.3245(1.7546)	2.2259(1.6519)	
(1,1)	(1,5)	2.0699(1.4882)	1.9603(1.372)	1.8867(1.2935)	1.8709(1.2765)	1.936(1.3461)	1.8908(1.2978)	
(1,1.25)	(1,1.25)	10.0685(9.5554)	10.1906(9.6777)	8.0275(7.5109)	7.8927(7.3757)	9.4463(8.9323)	7.484(6.9661)	
(1,1.50)	(1,1.50)	6.3998(5.8785)	6.6272(6.1067)	5.4901(4.965)	5.4239(4.8984)	6.2308(5.709)	5.1289(4.6019)	
(1,1.75)	(1,1.75)	4.6834(4.1534)	4.8841(4.3555)	4.2025(3.6686)	4.1561(3.6218)	4.6483(4.1181)	3.943(3.4065)	
(1,2)	(1,2)	3.7458(3.207)	3.9111(3.3743)	3.4589(2.9164)	3.4271(2.884)	3.7551(3.2164)	3.2592(2.7135)	
(1,3)	(1,3)	2.3069(1.7363)	2.3882(1.8208)	2.2299(1.6561)	2.2174(1.643)	2.3324(1.7628)	2.1396(1.5614)	
(1,4)	(1,4)	1.8469(1.2506)	1.8985(1.3061)	1.8126(1.2136)	1.805(1.2054)	1.8694(1.2749)	1.7546(1.1506)	
(1,5)	(1,5)	1.6272(1.0102)	1.6641(1.0513)	1.607(0.9876)	1.6017(0.9818)	1.6439(1.0289)	1.5658(0.9413)	

gerado pela tradicional regra sob fraca dependência. O mesmo se deu sob dependência moderada para as cópulas Gaussiana (17, 3076) e Frank (17, 8565). Já considerando um grau forte de dependência, ainda assim as cópulas Gaussiana e Frank tiveram ARL_0 's próximos ao gerado pela T^2 (17, 2759 e 19, 7161, respectivamente). É sabido que a regra T^2 de Hotelling não é sensível a pequenas mudanças, sendo possível notar nos resultados do ARL_1 que as reduções são significativas, independente do nível de associação, quando a magnitude da mudança é superior a um. Em contrapartida, as estimativas para o ARL_1 obtidas pela cópula Gaussiana foram muito próximas às encontradas no T^2 em todas as situações de mudanças apresentadas e, quando estas eram pequenas, as estimativas foram em sua maioria menores do que as apresentadas pela regra clássica. Esses resultados corroboram com os achados de Verdier (2013), ou seja, apesar da regra T^2 ser a mais

Tabela 3.15 Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes *shifts* nas médias das variáveis (**Caso 3** - dependência forte).

		Cópula						
Weibull	Weibull	Clayton	Frank	Gumbel	t	Gaussiana	T^2 Hotelling	
(1,1)	(1,1)	21.7467(21.2408)	13.5516(13.0420)	10.535(10.0225)	9.6800(9.1664)	13.8689(13.3595)	13.5044(12.9948)	
(1,1.25)	(1,1)	14.0556(13.5464)	9.4109(8.8968)	7.6625(7.1450)	7.1142(6.5953)	9.6514(9.1377)	9.3032(8.7890)	
(1,1.50)	(1,1)	9.4611(8.9471)	6.4299(5.9088)	5.6274(5.1030)	5.2214(4.6949)	6.8354(6.3156)	6.7355(6.2154)	
(1,1.75)	(1,1)	6.8067(6.2869)	4.6262(4.0958)	4.3251(3.7923)	4.0022(3.4664)	5.0882(4.5609)	5.1834(4.6566)	
(1,2)	(1,1)	5.1342(4.6071)	3.5188(2.9772)	3.492(2.9499)	3.2242(2.6779)	3.9915(3.4555)	4.1763(3.6422)	
(1,3)	(1,1)	2.241(1.6677)	1.8046(1.2050)	2.0957(1.5154)	1.9186(1.3275)	2.1751(1.5987)	2.4631(1.8984)	
(1,4)	(1,1)	1.3881(0.7340)	1.3834(0.7282)	1.6505(1.0361)	1.5162(0.8846)	1.6189(1.0009)	1.8883(1.2951)	
(1,5)	(1,1)	1.13(0.3832)	1.2371(0.5416)	1.4514(0.8095)	1.3417(0.6771)	1.3853(0.7306)	1.6243(1.0070)	
(1,1)	(1,1.25)	14.8796(14.3709)	10.2497(9.7369)	8.1237(7.6073)	7.5532(7.0355)	10.3323(9.8196)	10.0482(9.5351)	
(1,1)	(1,1.50)	10.2676(9.7548)	7.2028(6.6842)	6.1134(5.5911)	5.6989(5.1748)	7.4894(6.9715)	7.5066(6.9887)	
(1,1)	(1,1.75)	7.4881(6.9701)	5.2147(4.6882)	4.7243(4.1946)	4.3874(3.8551)	5.6245(5.1000)	5.8270(5.3034)	
(1,1)	(1,2)	5.6690(5.1448)	3.9525(3.4161)	3.8085(3.2705)	3.5188(2.9772)	4.4047(3.8726)	4.7104(4.1806)	
(1,1)	(1,3)	2.4611(1.8963)	1.9341(1.3441)	2.2054(1.6305)	2.0220(1.4375)	2.3279(1.7582)	2.6885(2.1306)	
(1,1)	(1,4)	1.4669(0.8275)	1.4295(0.7836)	1.7056(1.0970)	1.5622(0.9371)	1.6904(1.0803)	2.0057(1.4203)	
(1,1)	(1,5)	1.1578(0.4275)	1.2575(0.5690)	1.4833(0.8467)	1.3666(0.7078)	1.4235(0.7765)	1.6965(1.0870)	
(1,1.25)	(1,1.25)	11.6179(11.1067)	8.9965(8.4818)	7.0183(6.4991)	6.6504(6.1301)	8.6978(8.1825)	8.0578(7.5412)	
(1,1.50)	(1,1.50)	7.6146(7.0970)	6.5568(6.0361)	5.2885(4.7623)	5.0882(4.5609)	6.2767(5.7550)	5.7512(5.2273)	
(1,1.75)	(1,1.75)	5.6642(5.1400)	5.1583(4.6313)	4.3016(3.7686)	4.1737(3.6395)	4.9351(4.4068)	4.5221(3.9909)	
(1,2)	(1,2)	4.5556(4.0246)	4.2823(3.7491)	3.6751(3.1355)	3.5858(3.0451)	4.1170(3.5822)	3.7838(3.2455)	
(1,3)	(1,3)	2.7767(2.2211)	2.7374(2.1808)	2.4949(1.9312)	2.4621(1.8974)	2.6671(2.1086)	2.4912(1.9274)	
(1,4)	(1,4)	2.1694(1.5928)	2.1645(1.5876)	2.0324(1.4485)	2.0129(1.4279)	2.1270(1.5483)	2.0070(1.4216)	
(1,5)	(1,5)	1.8643(1.2694)	1.8688(1.2742)	1.7831(1.1817)	1.7694(1.1668)	1.8446(1.2481)	1.7573(1.1536)	

eficiente, a modelagem de cópulas se ajusta muito bem ao caso em estudo.

Tabela 3.16 Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes *shifts* nas médias das variáveis (**Caso 4** - dependência fraca).

		Cópula					
Normal	Normal	T^2 Hotelling	Gaussiana	t	Clayton	Frank	Gumbel
(0,1)	(0,1)	19.7691(19.2626)	17.7601(17.2529)	13.8106(13.3012)	17.9115(17.4043)	18.3103(17.8033)	14.5726(14.0637)
(0.25,1)	(0,1)	16.0359(15.5279)	14.5113(14.0023)	11.4054(10.8939)	14.7102(14.2014)	14.9638(14.4551)	12.0337(11.5229)
(0.50,1)	(0,1)	11.8201(11.309)	10.4115(9.8988)	8.3895(7.8737)	10.6783(10.166)	10.7557(10.2435)	8.831(8.3159)
(0.75,1)	(0,1)	8.152(7.6356)	7.2229(6.7043)	5.9605(5.4376)	7.4356(6.9176)	7.4555(6.9375)	6.2548(5.7331)
(1,1)	(0,1)	5.7343(5.2104)	5.071(4.5436)	4.2764(3.7432)	5.2485(4.7221)	5.2248(4.6982)	4.4678(3.9362)
(2,1)	(0,1)	1.9456(1.3564)	1.805(1.2054)	1.6563(1.0426)	1.8626(1.2675)	1.8386(1.2418)	1.6968(1.0873)
(3,1)	(0,1)	1.1768(0.4561)	1.144(0.406)	1.1128(0.3542)	1.1597(0.4303)	1.1521(0.4186)	1.1212(0.3686)
(4,1)	(0,1)	1.0212(0.147)	1.0156(0.1258)	1.011(0.1053)	1.0182(0.136)	1.0168(0.1306)	1.0121(0.1106)
(0,1)	(0.25,1)	18.6804(18.1735)	17.2141(16.7066)	13.4945(12.9849)	16.7398(16.2321)	17.691(17.1837)	14.2841(13.775)
(0,1)	(0.50,1)	15.6922(15.184)	15.0875(14.5789)	12.1083(11.5975)	14.3649(13.8559)	15.4512(14.9428)	12.733(12.2228)
(0,1)	(0.75,1)	11.9677(11.4568)	12.1616(11.6509)	10.1086(9.5955)	11.6036(11.0924)	12.481(11.9705)	10.4809(9.9683)
(0,1)	(1,1)	8.7904(8.2753)	9.4019(8.8878)	8.0252(7.5085)	9.0271(8.5124)	9.6248(9.1111)	8.1995(7.6833)
(0,1)	(2,1)	2.7287(2.1719)	3.0803(2.5314)	2.7516(2.1954)	3.1208(2.5726)	3.1523(2.6048)	2.7818(2.2263)
(0,1)	(3,1)	1.3653(0.7062)	1.4646(0.8248)	1.3696(0.7115)	1.4956(0.8609)	1.4861(0.85)	1.3849(0.7301)
(0,1)	(4,1)	1.0574(0.2463)	1.0792(0.2923)	1.057(0.2453)	1.0885(0.3103)	1.0843(0.3024)	1.0612(0.2549)
(0.25,1)	(0.25,1)	15.8927(15.3846)	14.367(13.858)	11.3823(10.8708)	14.0893(13.5801)	14.6473(14.1385)	11.9295(11.4185)
(0.50,1)	(0.50,1)	10.8227(10.3106)	9.8887(9.3753)	8.1542(7.6379)	9.4783(8.9644)	9.9612(9.4479)	8.3702(7.8543)
(0.75,1)	(0.75,1)	7.0469(6.5278)	6.5324(6.0116)	5.6242(5.0998)	6.1816(5.6596)	6.5184(5.9976)	5.6723(5.1481)
(1,1)	(1,1)	4.6581(4.1279)	4.4095(3.8774)	3.9456(3.4092)	4.1453(3.6108)	4.3683(3.8359)	3.9074(3.3705)
(2,1)	(2,1)	1.532(0.9028)	1.5101(0.8777)	1.49(0.8545)	1.4536(0.812)	1.4961(0.8615)	1.4497(0.8074)
(3,1)	(3,1)	1.0556(0.2424)	1.0542(0.2391)	1.0566(0.2446)	1.0452(0.2175)	1.0515(0.2328)	1.0475(0.2231)
(4,1)	(4,1)	1.0021(0.0454)	1.0021(0.0462)	1.0025(0.0499)	1.0016(0.04)	1.002(0.0444)	1.0018(0.043)

- **Contexto Semi-Paramétrico Bivariado:** O **Caso 5** expõe o contexto semi-paramétrico, uma vez que consideramos os dados gerados de uma cópula de Clayton com distribuições marginais normal padrão e estimamos o ARL também da cópula de Clayton, porém variando os tipos de função Kernel para as marginais. Continuamos a comparação com a regra T^2 de Hotelling. Vale ressaltar que esta proposta pode ser considerada quando não é possível definir as distribuições marginais paramétricas, ou quando não se tem certeza das mesmas.

Considerando fraca associação entre as variáveis, a Tabela 3.19 mostra que nenhuma das funções Kernel utilizadas apresenta ARL_0 próximo de 20 (valor nominal). A regra T^2

Tabela 3.17 Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes *shifts* nas médias das variáveis (**Caso 4** - dependência moderada).

		Cópula						
Normal	Normal	T^2 Hotelling	Gaussiana	t	Clayton	Frank	Gumbel	
(0,1)	(0,1)	19.5358(19.0293)	17.3076(16.8002)	14.1407(13.6315)	16.3143(15.8064)	17.8565(17.3493)	13.1641(12.6543)	
(0.25,1)	(0,1)	15.5977(15.0894)	13.8389(13.3295)	11.4419(10.9305)	13.7155(13.2061)	14.4504(13.9415)	10.4341(9.9215)	
(0.50,1)	(0,1)	11.0079(10.496)	9.613(9.0993)	8.1537(7.6373)	10.1077(9.5947)	10.1692(9.6563)	7.4173(6.8992)	
(0.75,1)	(0,1)	7.3212(6.8028)	6.4519(5.9308)	5.6298(5.1054)	7.1035(6.5845)	6.8821(6.3625)	5.1321(4.605)	
(1,1)	(0,1)	5.0058(4.4779)	4.4411(3.9092)	3.9669(3.4307)	5.0352(4.5075)	4.741(4.2115)	3.635(3.0948)	
(2,1)	(0,1)	1.6728(1.0609)	1.5799(0.9572)	1.5224(0.8918)	1.7701(1.1675)	1.6428(1.0276)	1.45(0.8077)	
(3,1)	(0,1)	1.0943(0.3213)	1.0773(0.2885)	1.0715(0.2769)	1.1213(0.3689)	1.0889(0.3112)	1.0567(0.2448)	
(4,1)	(0,1)	1.0063(0.0797)	1.0046(0.0683)	1.0045(0.0669)	1.0097(0.099)	1.0057(0.0755)	1.0031(0.0555)	
(0,1)	(0.25,1)	18.6289(18.122)	16.8107(16.303)	13.8202(13.3108)	14.748(14.2392)	17.1898(16.6823)	13.2521(12.7422)	
(0,1)	(0.50,1)	15.1598(14.6513)	14.4171(13.9081)	12.1797(11.669)	12.3521(11.8415)	14.6847(14.1759)	11.7922(11.2811)	
(0,1)	(0.75,1)	11.0368(10.5249)	11.1957(10.684)	9.8348(9.3214)	9.9139(9.4007)	11.4584(10.947)	9.4233(8.9093)	
(0,1)	(1,1)	7.7869(7.2698)	8.2996(7.7835)	7.4819(6.964)	7.6943(7.1769)	8.5524(8.0369)	7.0435(6.5244)	
(0,1)	(2,1)	2.247(1.6739)	2.4878(1.9239)	2.3408(1.7716)	2.7484(2.1921)	2.6028(2.0425)	2.1632(1.5863)	
(0,1)	(3,1)	1.2063(0.4989)	1.2631(0.5764)	1.228(0.5291)	1.3647(0.7055)	1.2963(0.6198)	1.1863(0.4701)	
(0,1)	(4,1)	1.0201(0.1431)	1.0285(0.1713)	1.0228(0.1526)	1.0493(0.2274)	1.0346(0.1891)	1.0167(0.1303)	
(0.25,1)	(0.25,1)	16.3351(15.8272)	14.3633(13.8543)	11.8382(11.3272)	12.9182(12.4082)	14.6977(14.1889)	11.0407(10.5288)	
(0.50,1)	(0.50,1)	11.6626(11.1514)	10.3169(9.8042)	8.7146(8.1994)	8.8737(8.3588)	10.2912(9.7785)	8.2056(7.6894)	
(0.75,1)	(0.75,1)	7.8853(7.3684)	7.0564(6.5373)	6.1531(5.6309)	5.9515(5.4286)	6.9345(6.4151)	5.8752(5.3519)	
(1,1)	(1,1)	5.3467(4.8209)	4.897(4.3684)	4.3791(3.8467)	4.0917(3.5667)	4.7541(4.2246)	4.2481(3.7146)	
(2,1)	(2,1)	1.748(1.1435)	1.6841(1.0734)	1.6451(1.0302)	1.5065(0.8735)	1.6356(1.0196)	1.6531(1.0391)	
(3,1)	(3,1)	1.1082(0.3462)	1.0985(0.329)	1.0994(0.3305)	1.0637(0.2604)	1.087(0.3076)	1.1061(0.3426)	
(4,1)	(4,1)	1.0075(0.0871)	1.007(0.0838)	1.0076(0.0874)	1.0035(0.0593)	1.0056(0.0751)	1.0087(0.0937)	

Tabela 3.18 Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes *shifts* nas médias das variáveis (**Caso 4** - dependência forte).

		Cópula						
Normal	Normal	T^2 Hotelling	Gaussiana	t	Clayton	Frank	Gumbel	
(0,1)	(0,1)	19.8122(19.3057)	17.2759(16.7685)	15.9495(15.4414)	15.3851(14.8767)	19.7161(19.2096)	13.4956(12.986)	
(0.25,1)	(0,1)	14.2499(13.7408)	12.7707(12.2605)	11.9798(11.4689)	13.4655(12.9558)	15.2179(14.7094)	9.6506(9.137)	
(0.50,1)	(0,1)	8.836(8.3209)	7.9188(7.4019)	7.6619(7.1444)	9.9802(9.467)	9.7888(9.2753)	6.1903(5.6683)	
(0.75,1)	(0,1)	5.3124(4.7863)	4.863(4.3343)	4.8436(4.3147)	6.9476(6.4282)	6.0274(5.5047)	3.9957(3.4598)	
(1,1)	(0,1)	3.4119(2.8687)	3.1718(2.6246)	3.2232(2.677)	4.841(4.3121)	3.8543(3.3169)	2.7412(2.1847)	
(2,1)	(0,1)	1.2263(0.5268)	1.2067(0.4994)	1.2448(0.552)	1.5756(0.9524)	1.281(0.5999)	1.1811(0.4625)	
(3,1)	(0,1)	1.0091(0.0958)	1.0078(0.0886)	1.0121(0.1106)	1.0483(0.225)	1.0125(0.1125)	1.0073(0.086)	
(4,1)	(0,1)	1.0001(0.0073)	1.0000(0.0063)	1.0001(0.0092)	1.0009(0.0304)	1.0001(0.0086)	1.0000(0.0066)	
(0,1)	(0.25,1)	18.0109(17.5037)	16.4144(15.9066)	15.3374(14.829)	13.1334(12.6235)	18.5487(18.0418)	13.6923(13.1828)	
(0,1)	(0.50,1)	12.8251(12.315)	12.6021(12.0917)	12.3713(11.8608)	10.5108(9.9983)	14.3291(13.8201)	11.1939(10.6823)	
(0,1)	(0.75,1)	8.0907(7.5743)	8.5865(8.071)	8.7675(8.2523)	8.1769(7.6606)	9.8789(9.3655)	7.7155(7.1981)	
(0,1)	(1,1)	5.1036(4.5764)	5.5952(5.0706)	5.8336(5.3101)	6.2839(5.7622)	6.5334(6.0126)	5.0041(4.4763)	
(0,1)	(2,1)	1.4301(0.7843)	1.525(0.8947)	1.5726(0.9489)	2.1887(1.613)	1.7164(1.1089)	1.4142(0.7653)	
(0,1)	(3,1)	1.0246(0.1588)	1.0342(0.1881)	1.0396(0.2029)	1.1557(0.4242)	1.0611(0.2546)	1.0228(0.1528)	
(0,1)	(4,1)	1.0003(0.016)	1.0005(0.0228)	1.0007(0.0262)	1.0068(0.083)	1.0014(0.0379)	1.0003(0.016)	
(0.25,1)	(0.25,1)	16.6761(16.1684)	14.5798(14.0709)	13.4474(12.9377)	12.3503(11.8397)	16.3924(15.8845)	11.1749(10.6632)	
(0.50,1)	(0.50,1)	12.325(11.8144)	10.7719(10.2597)	9.9804(9.4672)	8.6928(8.1775)	11.706(11.1949)	8.3884(7.8726)	
(0.75,1)	(0.75,1)	8.5917(8.0762)	7.5833(7.0657)	7.0936(6.5746)	5.9827(5.4598)	7.9438(7.427)	6.1353(5.6131)	
(1,1)	(1,1)	5.9703(5.4474)	5.3712(4.8455)	5.0777(4.5504)	4.192(3.6579)	5.4596(4.9343)	4.5282(3.9971)	
(2,1)	(2,1)	1.9723(1.3848)	1.8666(1.2719)	1.8532(1.2575)	1.5805(0.9579)	1.8196(1.2212)	1.8117(1.2127)	
(3,1)	(3,1)	1.1736(0.4513)	1.1534(0.4207)	1.1599(0.4307)	1.0873(0.3081)	1.136(0.3931)	1.165(0.4384)	
(4,1)	(4,1)	1.0185(0.1374)	1.016(0.1273)	1.0182(0.1362)	1.0069(0.0834)	1.0129(0.1143)	1.0208(0.1457)	

tem o melhor desempenho (17,0184). Na Tabela 3.20, com grau moderado de associação, o Kernel Gaussiano passa a apresentar um desempenho superior às demais propostas (22,3784), que permanece quando há alta dependência (20,2790) (Tabela 3.21). Aqui, são observados também melhores resultados para o ARL_1 a partir da menor mudança considerada de 0,25 na média de apenas uma das marginais ou de ambas. Verdier (2013) também abordou a proposta semi-paramétrica com marginais Kernel Gaussiano e largura de banda estimada via método *plug-in*. Quando ele considerou amostra de aprendizagem oriunda da distribuição normal bivariada, a taxa de alarmes falsos gerada pela proposta foi um pouco inferior à nominal quando os dados estavam sob controle, e muito próxima à da regra clássica quando fora de controle. Quando a amostra de aprendizagem foi gerada da cópula de Frank com distribuições marginais Fisher (10,15), a abordagem semi-

paramétrica teve desempenho inferior à proposta de cópulas paramétricas e superior à T^2 , mas chama a atenção para a escolha do parâmetro de suavização e sugere que ela pode ser feita levando em conta uma transformação log-linear. Vale lembrar que, no nosso estudo, mantivemos os parâmetros fixos e variamos apenas a função Kernel.

Tabela 3.19 Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções Kernel e diferentes *shifts* nas médias das variáveis (**Caso 5** - dependência fraca).

		Kernel						T^2 Hotelling
Normal	Normal	Gaussiano	Retangular	Triangular	Epanechnikov	Biweight		
(0,1)	(0,1)	25.0225(24.5174)	5.9581(5.4352)	15.2527(14.7443)	11.0244(10.5125)	15.1754(14.6669)	17.0184(16.5108)	
(0.25,1)	(0,1)	22.1661(21.6603)	5.6259(5.1015)	13.7257(13.2163)	10.1088(9.5958)	13.5766(13.0671)	15.6981(15.1899)	
(0.50,1)	(0,1)	16.5366(16.0288)	4.7929(4.2637)	10.6879(10.1756)	8.1090(7.5925)	10.5854(10.0730)	12.4835(11.9730)	
(0.75,1)	(0,1)	11.5818(11.0706)	3.8627(3.3254)	7.8394(7.3224)	6.1332(5.6110)	7.7540(7.2367)	9.1394(8.6250)	
(1,1)	(0,1)	8.0422(7.5256)	3.0619(2.5126)	5.6809(5.1567)	4.5807(4.0499)	5.6323(5.1079)	6.5316(6.0108)	
(2,1)	(0,1)	2.4042(1.8374)	1.4505(0.8083)	1.9663(1.3784)	1.7567(1.1530)	1.9599(1.3717)	2.0725(1.4909)	
(3,1)	(0,1)	1.2433(0.5500)	1.0590(0.2499)	1.1511(0.4171)	1.1123(0.3535)	1.1521(0.4187)	1.1586(0.4286)	
(4,1)	(0,1)	1.0199(0.1425)	1.0022(0.0465)	1.0091(0.0956)	1.0054(0.0739)	1.0091(0.0956)	1.0092(0.0962)	
(0,1)	(0.25,1)	22.1219(21.6162)	5.6109(5.0864)	13.7283(13.2189)	10.0735(9.5605)	13.5955(13.0859)	16.733(16.2253)	
(0,1)	(0.50,1)	16.5180(16.0102)	4.7638(4.2344)	10.7027(10.1905)	8.0968(7.5803)	10.5937(10.0813)	13.8939(13.3846)	
(0,1)	(0.75,1)	11.5869(11.0757)	3.8427(3.3051)	7.8347(7.3176)	6.1173(5.5950)	7.7582(7.2410)	10.3961(9.8835)	
(0,1)	(1,1)	8.0566(7.5400)	3.0557(2.5063)	5.6741(5.1499)	4.5745(4.0437)	5.6205(5.0960)	7.4761(6.9581)	
(0,1)	(2,1)	2.4018(1.8349)	1.4469(0.8041)	1.9589(1.3705)	1.7544(1.1504)	1.9561(1.3676)	2.2620(1.6896)	
(0,1)	(3,1)	1.2411(0.5470)	1.0579(0.2476)	1.1500(0.4153)	1.1108(0.3509)	1.1506(0.4163)	1.1961(0.4842)	
(0,1)	(4,1)	1.0195(0.1409)	1.0023(0.0479)	1.0093(0.0968)	1.0058(0.0761)	1.0093(0.0967)	1.013(0.1149)	
(0.25,1)	(0.25,1)	20.9424(20.4363)	5.4856(4.9605)	13.1316(12.6217)	9.7407(9.2272)	12.9289(12.4189)	16.1504(15.6424)	
(0.50,1)	(0.50,1)	13.8228(13.3135)	4.3802(3.8478)	9.2906(8.7763)	7.2063(6.6876)	9.1061(8.5916)	12.1145(11.6037)	
(0.75,1)	(0.75,1)	8.4539(7.9382)	3.3199(2.7752)	6.1494(5.6272)	5.0018(4.4739)	6.0226(5.4999)	8.1478(7.6315)	
(1,1)	(1,1)	5.3133(4.7872)	2.5370(1.9747)	4.1435(3.6090)	3.5278(2.9862)	4.0798(3.5447)	5.3834(4.8577)	
(2,1)	(2,1)	1.6101(0.9911)	1.2858(0.6062)	1.4989(0.8647)	1.4289(0.7829)	1.4920(0.8568)	1.6727(1.0608)	
(3,1)	(3,1)	1.0955(0.3235)	1.0450(0.2168)	1.0804(0.2946)	1.0695(0.2726)	1.0793(0.2925)	1.1101(0.3497)	
(4,1)	(4,1)	1.0100(0.1004)	1.0041(0.0642)	1.0084(0.0919)	1.0071(0.0843)	1.0083(0.0913)	1.0124(0.1119)	

Tabela 3.20 Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções Kernel e diferentes *shifts* nas médias das variáveis (**Caso 5** - dependência moderada).

		Kernel						T^2 Hotelling
Normal	Normal	Gaussiano	Retangular	Triangular	Epanechnikov	Biweight		
(0,1)	(0,1)	22.3784(21.8727)	6.1846(5.6626)	14.5163(14.0074)	11.1912(10.6795)	14.7093(14.2005)	16.4577(15.9498)	
(0.25,1)	(0,1)	17.9817(17.4746)	5.6479(5.1236)	12.4242(11.9137)	9.7857(9.2722)	12.3186(11.8080)	14.398(13.8890)	
(0.50,1)	(0,1)	11.6556(11.1443)	4.4811(3.9496)	8.6997(8.1845)	7.1116(6.5926)	8.5803(8.0648)	10.8073(10.2952)	
(0.75,1)	(0,1)	7.4764(6.9585)	3.4136(2.8704)	5.9375(5.4145)	5.0517(4.5242)	5.8878(5.3645)	7.4977(6.9798)	
(1,1)	(0,1)	4.9958(4.4679)	2.5921(2.0315)	4.1315(3.5970)	3.6284(3.0882)	4.1338(3.5993)	5.0862(4.5589)	
(2,1)	(0,1)	1.5913(0.9701)	1.1969(0.4854)	1.4229(0.7757)	1.3512(0.6889)	1.4388(0.7945)	1.3958(0.7433)	
(3,1)	(0,1)	1.0338(0.1868)	1.0044(0.0662)	1.0183(0.1363)	1.0109(0.1048)	1.0166(0.1298)	1.0106(0.1036)	
(4,1)	(0,1)	1.0002(0.0148)	1.0000(0.0035)	1.0001(0.0094)	1.0000(0.0065)	1.0001(0.0086)	1.0001(0.0073)	
(0,1)	(0.25,1)	17.9070(17.3998)	5.6256(5.1012)	12.4097(11.8992)	9.7466(9.2331)	12.3381(11.8275)	15.4088(14.9004)	
(0,1)	(0.50,1)	11.6282(11.1169)	4.4686(3.9370)	8.6712(8.1559)	7.1235(6.6046)	8.5757(8.0602)	12.0980(11.5873)	
(0,1)	(0.75,1)	7.4411(6.9231)	3.4030(2.8596)	5.9217(5.3986)	5.0328(4.5051)	5.8705(5.3472)	8.5483(8.0328)	
(0,1)	(1,1)	4.9842(4.4562)	2.5898(2.0291)	4.1225(3.5878)	3.6209(3.0806)	4.1261(3.5915)	5.8293(5.3058)	
(0,1)	(2,1)	1.5882(0.9665)	1.1961(0.4843)	1.4194(0.7716)	1.3480(0.6849)	1.4355(0.7906)	1.5096(0.8771)	
(0,1)	(3,1)	1.0340(0.1875)	1.0045(0.0673)	1.0185(0.1374)	1.0109(0.1050)	1.0167(0.1305)	1.0151(0.1238)	
(0,1)	(4,1)	1.0002(0.0148)	1.0000(0.0020)	1.0001(0.0084)	1.0000(0.0049)	1.0001(0.0073)	1.0001(0.0075)	
(0.25,1)	(0.25,1)	18.9072(18.4004)	5.7882(5.2646)	13.4163(12.9067)	10.4452(9.9326)	13.1099(12.6000)	15.0943(14.5858)	
(0.50,1)	(0.50,1)	12.6994(12.1891)	4.6863(4.1563)	9.8883(9.3749)	7.9859(7.4692)	9.5140(9.0001)	11.8161(11.3051)	
(0.75,1)	(0.75,1)	7.9656(7.4488)	3.6006(3.0600)	6.7243(6.2042)	5.6571(5.1328)	6.4612(5.9402)	8.4950(7.9794)	
(1,1)	(1,1)	5.1945(4.6678)	2.7853(2.2299)	4.6140(4.0835)	4.0406(3.5051)	4.4584(3.9267)	5.9611(5.4382)	
(2,1)	(2,1)	1.7370(1.1314)	1.4083(0.7583)	1.7021(1.0932)	1.6291(1.0124)	1.6750(1.0633)	1.9982(1.4123)	
(3,1)	(3,1)	1.1435(0.4050)	1.0787(0.2914)	1.1429(0.4041)	1.1287(0.3812)	1.1356(0.3924)	1.2162(0.5127)	
(4,1)	(4,1)	1.0172(0.1324)	1.0081(0.0904)	1.0177(0.1342)	1.0156(0.126)	1.0164(0.1292)	1.0315(0.1804)	

- **Contexto Não-Paramétrico Bivariado:** Para compor o caso não-paramétrico, geramos dados da cópula de Clayton com distribuições marginais Kernel Gaussiano(0,1). Posteriormente, sem mexer nas marginais, estimamos a cópula não-paramétrica considerando diferentes tipos de transformação de Kernel. Ainda comparamos os resultados obtidos com os da regra T^2 de Hotelling. Vale ressaltar que

Tabela 3.21 Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções Kernel e diferentes *shifts* nas médias das variáveis (**Caso 5** - dependência forte).

Normal	Normal	Kernel					T^2 Hotelling
		Gaussiano	Retangular	Triangular	Epanechnikov	<i>Bweight</i>	
(0,1)	(0,1)	20.279(19.7727)	6.049(5.5264)	13.0596(12.5496)	10.7094(10.1971)	13.2398(12.7300)	15.1566(14.6480)
(0.25,1)	(0,1)	10.4188(9.9062)	4.5568(4.0259)	7.7871(7.2699)	6.8519(6.3322)	7.7236(7.2062)	12.4589(11.9484)
(0.50,1)	(0,1)	4.3554(3.8229)	2.7222(2.1652)	3.6984(3.1591)	3.5855(3.0447)	3.8043(3.2663)	8.2912(7.7751)
(0.75,1)	(0,1)	2.5309(1.9684)	1.7420(1.1369)	2.1801(1.6039)	2.1765(1.6002)	2.2821(1.7106)	4.8015(4.2723)
(1,1)	(0,1)	1.8066(1.2071)	1.3066(0.6329)	1.5918(0.9706)	1.5507(0.9241)	1.6229(1.0055)	2.4778(1.9136)
(2,1)	(0,1)	1.0313(0.1797)	1.0020(0.0444)	1.0148(0.1224)	1.0087(0.0937)	1.0128(0.1139)	1.0069(0.0831)
(3,1)	(0,1)	1.0000(0.0051)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0028)	1.0000(0.0014)	1.0000(0.0024)	1.0000(0.0024)
(4,1)	(0,1)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)
(0,1)	(0.25,1)	10.3681(9.8554)	4.5592(4.0283)	7.7534(7.2361)	6.8517(6.3320)	7.7147(7.1974)	13.4243(12.9146)
(0,1)	(0.50,1)	4.3469(3.8143)	2.7179(2.1608)	3.6955(3.1562)	3.5891(3.0483)	3.8049(3.2668)	9.4183(8.9043)
(0,1)	(0.75,1)	2.5275(1.9649)	1.7388(1.1334)	2.1751(1.5987)	2.1722(1.5957)	2.2778(1.7061)	5.6282(5.1037)
(0,1)	(1,1)	1.8028(1.2030)	1.3057(0.6317)	1.5900(0.9686)	1.5480(0.9211)	1.6203(1.0026)	2.9348(2.3829)
(0,1)	(2,1)	1.0314(0.1799)	1.0020(0.0447)	1.0146(0.1218)	1.0087(0.0939)	1.0128(0.1137)	1.0107(0.1039)
(0,1)	(3,1)	1.0000(0.0065)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0028)	1.0000(0.0014)	1.0000(0.0028)	1.0000(0.0028)
(0,1)	(4,1)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)
(0.25,1)	(0.25,1)	17.8508(17.3436)	6.0258(5.5032)	13.1825(12.6727)	10.8169(10.3048)	12.9222(12.4122)	13.6556(13.1461)
(0.50,1)	(0.50,1)	12.3956(11.8851)	5.1710(4.6442)	10.5088(9.9963)	8.8599(8.3449)	10.1033(9.5902)	11.1423(10.6306)
(0.75,1)	(0.75,1)	8.1995(7.6833)	4.1179(3.5832)	7.5489(7.0311)	6.5812(6.0606)	7.2253(6.7067)	8.5631(8.0476)
(1,1)	(1,1)	5.5834(5.0588)	3.2369(2.6908)	5.3919(4.8663)	4.8328(4.3038)	5.1659(4.639)	6.4509(5.9298)
(2,1)	(2,1)	1.9319(1.3418)	1.5404(0.9123)	1.9705(1.3829)	1.8804(1.2867)	1.9131(1.3217)	2.3987(1.8317)
(3,1)	(3,1)	1.1839(0.4666)	1.1011(0.3336)	1.1983(0.4875)	1.1794(0.4601)	1.1836(0.4662)	1.3175(0.6467)
(4,1)	(4,1)	1.0227(0.1522)	1.0103(0.1019)	1.0255(0.1616)	1.0223(0.1511)	1.0228(0.1527)	1.0491(0.2270)

tal proposta pode ser considerada quando, além da dificuldade de identificar as distribuições marginais, temos problemas na escolha da família de cópulas ideal.

Os resultados apresentados na Tabela 3.22 (dependência fraca) revelam bons ajustes da proposta não-paramétrica (**Caso 6**) sob as transformações Clássica (21, 9819) e Log-Linear Local (20, 1491). Quando a dependência é moderada, a transformação Log-Linear Local continua com bom desempenho (21, 2513), seguida da Log-Quadrática Local (19, 8863), da Log-Quadrática Local nn (22, 4770) e da Clássica (24, 2931) (Tabela 3.23). Ao considerar forte dependência, observamos na Tabela 3.24 que apenas a transformação Clássica apresenta bons resultados ($ARL_0 = 21, 0155$), sendo que essa proposta ainda se mostrou sensível às mudanças ocorridas no vetor de médias. A regra T^2 de Hotelling não apresentou resultados satisfatórios sob esta ótica, mostrando então que, quando não se tem boa especificação da família de cópulas, a proposta não-paramétrica sob transformação Clássica tem desempenho superior à T^2 de Hotelling. Vale ressaltar que, aqui, apesar das marginais serem Kernel, elas apresentam simetria.

- **Contexto Paramétrico Trivariado:** A partir deste momento, serão apresentados os resultados da avaliação de desempenho para o caso trivariado. Sob o contexto paramétrico, iremos variar a família de cópulas, que pode ser a Clayton, Frank, Gumbel, Gaussiana e t (nestas duas últimas, iremos variar ainda a estrutura de correlação) e compará-las com a regra T^2 de Hotelling. Os **Casos 7** e **8** consideram amostras oriundas da cópula de Clayton, enquanto que, no **Caso 9**, as amostras são geradas da distribuição normal padrão trivariada.

Para analisar o **Caso 7**, em que aparecem três distribuições marginais distintas, temos as Tabelas 3.25, 3.26 e 3.27, em que $\tau_3 = 0, 25; 0, 50$ e $0, 75$, respectivamente. Na primeira condição acima, as cópulas de Clayton (24, 1278), Gumbel (19, 7234) e a regra T^2 (20, 2355) tiveram ARL_0 mais perto de 20. Na segunda, a cópula de Frank (22, 4406)

Tabela 3.22 Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes transformações de Kernel e diferentes *shifts* nas médias das variáveis (**Caso 6** - dependência fraca).

		Transformação Kernel					T^2 Hotelling
Kernel	Kernel	Clássica	Log-linear L	Log-quadrática L	Log-linear L-nn	Log-quadrática L-nn	
(0,1)	(0,1)	21.9819(21.4761)	20.1491(19.6427)	18.0434(17.5362)	29.1988(28.6944)	23.6172(23.1118)	16.8839(16.3763)
(0.25,1)	(0,1)	19.2020(18.6953)	17.2885(16.7810)	15.8650(15.3568)	25.6608(25.1558)	20.0682(19.5618)	15.7198(15.2116)
(0.50,1)	(0,1)	14.4928(13.9838)	13.3426(12.8328)	11.9821(11.4712)	18.8900(18.3832)	14.9303(14.4216)	12.4583(11.9478)
(0.75,1)	(0,1)	10.3827(9.8701)	9.5182(9.0043)	8.6115(8.0961)	13.2013(12.6915)	10.4741(9.9615)	9.1498(8.6353)
(1,1)	(0,1)	7.1780(6.6593)	6.6968(6.1766)	6.217(5.6951)	9.0537(8.5391)	7.3897(6.8715)	6.5024(5.9815)
(2,1)	(0,1)	7.2170(6.6984)	6.7557(6.2356)	6.235(5.7132)	9.0486(8.534)	7.3560(6.8377)	6.5380(6.0173)
(3,1)	(0,1)	1.2459(0.5535)	1.2573(0.5688)	1.2475(0.5556)	1.2893(0.6107)	1.2416(0.5477)	1.1583(0.4281)
(4,1)	(0,1)	1.0265(0.1649)	1.0327(0.1837)	1.0343(0.1884)	1.0274(0.1679)	1.0224(0.1512)	1.0093(0.0967)
(0,1)	(0.25,1)	20.0739(19.5675)	17.9205(17.4133)	16.5865(16.0787)	25.8786(25.3737)	21.6319(21.1260)	16.7107(16.2030)
(0,1)	(0.50,1)	15.1391(14.6306)	13.8804(13.3711)	12.9631(12.4531)	19.7083(19.2018)	16.6434(16.1356)	13.8393(13.3299)
(0,1)	(0.75,1)	10.8679(10.3558)	9.9723(9.4591)	9.4672(8.9532)	13.6348(13.1252)	11.8754(11.3644)	10.4143(9.9017)
(0,1)	(1,1)	7.8288(7.1754)	7.1275(6.6086)	6.8365(6.3167)	9.4857(8.9718)	8.3675(7.8516)	7.4635(6.9455)
(0,1)	(2,1)	2.3931(1.8259)	2.3179(1.7478)	2.2677(1.6956)	2.6609(2.1023)	2.4713(1.9068)	2.2643(1.6920)
(0,1)	(3,1)	1.2559(0.5669)	1.2393(0.5446)	1.2329(0.5358)	1.3100(0.6372)	1.2607(0.5733)	1.1978(0.4868)
(0,1)	(4,1)	1.0212(0.1471)	1.0197(0.1419)	1.0187(0.1379)	1.0285(0.1712)	1.0218(0.1494)	1.0133(0.1160)
(0.25,1)	(0.25,1)	18.1706(17.6635)	16.4447(15.9368)	15.3624(14.8540)	23.1707(22.6652)	19.5672(19.0606)	16.1645(15.6565)
(0.50,1)	(0.50,1)	11.7319(11.2207)	10.9448(10.4328)	10.2178(9.7050)	14.3583(13.8493)	12.9022(12.3921)	12.0624(11.5516)
(0.75,1)	(0.75,1)	7.2485(6.7299)	6.7902(6.2703)	6.4249(5.9038)	8.5553(8.0398)	7.9106(7.3938)	8.1177(7.6012)
(1,1)	(1,1)	4.6007(4.0701)	4.4105(3.8784)	4.2032(3.6693)	5.3033(4.7772)	4.9542(4.4260)	5.3581(4.8323)
(2,1)	(2,1)	2.1682(1.5915)	2.1194(1.5403)	2.0835(1.5025)	2.3270(1.7573)	2.2486(1.6756)	2.3449(1.7759)
(3,1)	(3,1)	1.0776(0.2892)	1.0730(0.2798)	1.0713(0.2763)	1.0867(0.3256)	1.0865(0.3065)	1.1095(0.3486)
(4,1)	(4,1)	1.0076(0.0875)	1.0071(0.0843)	1.0068(0.0830)	1.0105(0.1030)	1.0088(0.0942)	1.0123(0.1115)

Tabela 3.23 Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes transformações de Kernel e diferentes *shifts* nas médias das variáveis (**Caso 6** - dependência moderada).

		Transformação Kernel					T^2 Hotelling
Kernel	Kernel	Clássica	Log-linear L	Log-quadrática L	Log-linear L-nn	Log-quadrática L-nn	
(0,1)	(0,1)	24.2931(23.7878)	21.2513(20.7453)	19.8863(19.3798)	36.8487(36.3453)	22.4770(21.9713)	15.2625(14.7540)
(0.25,1)	(0,1)	18.7913(18.2845)	16.3940(15.8861)	15.2877(14.7793)	30.6523(30.1481)	17.4404(16.9331)	13.3433(12.8336)
(0.50,1)	(0,1)	12.6014(12.0911)	10.9397(10.4277)	10.0347(9.5216)	22.7118(22.2062)	11.5043(10.9929)	10.1262(9.6132)
(0.75,1)	(0,1)	8.0989(7.5824)	7.0477(6.5286)	6.3003(5.7787)	15.0507(14.5421)	7.2710(6.7525)	7.0441(6.5250)
(1,1)	(0,1)	5.1852(4.6584)	4.5233(3.9921)	4.1196(3.5849)	10.1387(9.6257)	4.6347(4.1044)	4.8433(4.3144)
(2,1)	(0,1)	5.1802(4.6534)	4.5287(3.9976)	4.1100(3.5752)	10.1075(9.5945)	4.6260(4.0956)	4.8004(4.2712)
(3,1)	(0,1)	1.0483(0.2250)	1.0706(0.2750)	1.0945(0.3216)	1.1204(0.3672)	1.0356(0.1921)	1.0094(0.0974)
(4,1)	(0,1)	1.0008(0.0278)	1.0013(0.0358)	1.0035(0.0588)	1.0013(0.0366)	1.0003(0.0166)	1.000(0.0057)
(0,1)	(0.25,1)	22.1749(21.6691)	19.5771(19.0706)	18.1871(17.6800)	32.0225(31.5186)	20.7641(20.2580)	14.3848(13.8758)
(0,1)	(0.50,1)	15.8043(15.2961)	13.8692(13.3599)	12.8942(12.3842)	23.7102(23.2048)	14.9678(14.4592)	11.2936(10.7820)
(0,1)	(0.75,1)	10.2743(9.7615)	9.0512(8.5366)	8.4309(7.9151)	16.4042(15.8963)	9.6178(9.1041)	8.0702(7.5537)
(0,1)	(1,1)	6.7485(6.2285)	5.9504(5.4274)	5.6135(5.0890)	10.8554(10.3433)	6.1963(5.6743)	5.5391(5.0143)
(0,1)	(2,1)	1.8633(1.2683)	1.7557(1.1519)	1.7280(1.1216)	2.5816(2.0207)	1.6706(1.0585)	1.4721(0.8337)
(0,1)	(3,1)	1.0534(0.2371)	1.0463(0.2201)	1.0428(0.2112)	1.1312(0.3853)	1.0370(0.1958)	1.0133(0.1161)
(0,1)	(4,1)	1.0006(0.0237)	1.0004(0.0193)	1.0003(0.0186)	1.001(0.0320)	1.0003(0.0162)	1.0001(0.0075)
(0.25,1)	(0.25,1)	19.8776(19.3711)	17.5052(16.9978)	16.5826(16.0749)	27.0739(26.5692)	19.4727(18.9661)	14.0040(13.4948)
(0.50,1)	(0.50,1)	12.7864(12.2762)	11.6379(11.1267)	11.0271(10.5152)	16.4685(15.9607)	13.1320(12.6221)	10.9599(10.4479)
(0.75,1)	(0.75,1)	8.0186(7.5020)	7.3319(6.8136)	7.0425(6.5233)	9.5863(9.0725)	8.2133(7.6971)	7.9618(7.4450)
(1,1)	(1,1)	5.2368(4.7103)	4.7920(4.2628)	4.6500(4.1198)	5.9358(5.4128)	5.3166(4.7906)	5.6379(5.1135)
(2,1)	(2,1)	2.4029(1.8360)	2.3066(1.7360)	2.2970(1.7261)	2.6334(2.0740)	2.4250(1.8589)	2.3706(1.8026)
(3,1)	(3,1)	1.1421(0.4028)	1.1281(0.3802)	1.1212(0.3687)	1.1633(0.4358)	1.1448(0.4071)	1.2032(0.4945)
(4,1)	(4,1)	1.0171(0.1317)	1.0146(0.1216)	1.0135(0.1171)	1.0207(0.1455)	1.0176(0.1339)	1.0296(0.1744)

e a Gaussiana com estrutura de correlação ar1 (20, 2881) ficaram com o posto de melhores. Na última condição, apenas a Clayton (25, 9578) teve ARL_0 próximo ao nominal, ainda que superior. Considerando o **Caso 8**, com cópula de Clayton e três distribuições marginais assimétricas Weibull, observamos nas Tabelas 3.28, 3.29 e 3.30 o desempenho das abordagens via modelagem de cópulas e regra T^2 de Hotelling para os respectivos graus de dependência: fraco, moderado e forte. Fica evidente que, independente do nível de associação, a regra T^2 de Hotelling não apresentou bons resultados. Na Tabela 3.28, as cópulas de Clayton (24, 3013), Gumbel (21, 5072), t (23, 5882) e Gaussiana (23, 0744), ambas com estrutura de correlação ar1, tiveram ARL_0 próximo do ideal. Na Tabela 3.29, nenhuma das propostas apresentou resultados satisfatórios, nem mesmo a cópula de Clayton (32, 3687) que, com $\tau_3 = 0, 75$, teve melhor valor de $ARL_0 = 27, 0358$.

Tabela 3.24 Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes transformações de Kernel e diferentes *shifts* nas médias das variáveis (**Caso 6** - dependência forte).

Kernel	Kernel	Transformação Kernel					T^2 Hotelling
		Clássica	Log-linear L	Log-quadrática L	Log-linear L-nn	Log-quadrática L-nn	
(0,1)	(0,1)	21.0155(20.5094)	17.5279(17.0205)	14.9321(14.4234)	42.2476(41.7446)	17.4813(16.9739)	15.9079(15.3997)
(0.25,1)	(0,1)	14.2345(13.7254)	10.8970(10.3850)	8.3619(7.8460)	35.2933(34.7897)	10.6421(10.1298)	13.0310(12.5210)
(0.50,1)	(0,1)	6.4532(5.9322)	4.5361(4.0050)	3.3002(2.7552)	24.6767(24.1716)	4.0388(3.5033)	8.5291(8.0135)
(0.75,1)	(0,1)	2.8259(2.2716)	2.1739(1.5974)	1.8812(1.2876)	15.1423(14.6338)	2.0718(1.4901)	5.0073(4.4794)
(1,1)	(0,1)	1.684(1.0732)	1.5011(0.8673)	1.4412(0.7974)	7.9183(7.4014)	1.5301(0.9006)	2.5801(2.0191)
(2,1)	(0,1)	1.6875(1.0771)	1.5004(0.8665)	1.4409(0.7971)	7.9133(7.3964)	1.5324(0.9033)	2.5787(2.0176)
(3,1)	(0,1)	1.0003(0.0180)	1.0006(0.0247)	1.0017(0.0411)	1.0011(0.0335)	1.0000(0.0051)	1.0000(0.0002)
(4,1)	(0,1)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)
(0,1)	(0.25,1)	17.7639(17.2566)	15.0119(14.5032)	11.7184(11.2072)	35.3607(34.8571)	13.113(12.6031)	13.8282(13.3188)
(0,1)	(0.50,1)	9.0724(8.5578)	7.1696(6.6508)	5.0220(4.4943)	26.3089(25.8040)	5.3465(4.8206)	9.7792(9.2657)
(0,1)	(0.75,1)	4.1808(3.6467)	3.2752(2.7298)	2.5183(1.9554)	17.0666(16.5590)	2.4242(1.8581)	5.8846(5.3613)
(0,1)	(1,1)	2.2573(1.6847)	1.9108(1.3192)	1.6577(1.0441)	10.1601(9.6472)	1.6389(1.0232)	3.0701(2.521)
(0,1)	(2,1)	1.1096(0.3487)	1.0715(0.2767)	1.0583(0.2484)	1.3458(0.6822)	1.0258(0.1627)	1.0118(0.1092)
(0,1)	(3,1)	1.0011(0.0325)	1.0006(0.0238)	1.0004(0.0201)	1.0016(0.0403)	1.0000(0.0042)	1.0000(0.0051)
(0,1)	(4,1)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)
(0.25,1)	(0.25,1)	17.1609(16.6534)	15.0589(14.5503)	13.3174(12.8076)	31.4347(30.9306)	15.9266(15.4185)	14.1175(13.6083)
(0.50,1)	(0.50,1)	12.2139(11.7032)	11.0249(10.513)	9.7180(9.2044)	18.4352(17.9282)	11.414(10.9025)	11.5492(11.0379)
(0.75,1)	(0.75,1)	8.2656(7.7494)	7.6168(7.0993)	6.6962(6.1760)	11.0448(10.533)	7.8054(7.2883)	8.9405(8.4257)
(1,1)	(1,1)	5.7108(5.1868)	5.3295(4.8035)	4.7314(4.2018)	7.0270(6.5078)	5.3869(4.8612)	6.6516(6.1312)
(2,1)	(2,1)	2.0447(1.4615)	1.8407(1.2440)	1.6522(1.0380)	3.0390(2.4893)	1.7285(1.1222)	1.9535(1.3648)
(3,1)	(3,1)	1.1911(0.4771)	1.1815(0.4631)	1.1470(0.4107)	1.2319(0.5345)	1.1801(0.4611)	1.3335(0.6669)
(4,1)	(4,1)	1.0244(0.1581)	1.0227(0.1522)	1.0167(0.1302)	1.0310(0.1787)	1.0223(0.1510)	1.0518(0.2333)

Tabela 3.29 Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes *shifts* nas médias das variáveis (**Caso 8** - dependência moderada).

		Cópula										7 ² Hotelling	
Weibull	Weibull	Clayton	Frank	Gumbel	t (top)	t (ar1)	t (ex)	t (un)	Gauss (top)	Gauss (ar1)	Gauss (ex)	Gauss (un)	
(1,1)	(1,1)	32.3687(31.8648)	18.0852(18.1765)	10.8587(10.3466)	16.9298(16.4192)	15.9434(15.4383)	16.9342(16.4266)	16.9405(16.4329)	16.6134(16.1035)	15.5807(15.0724)	16.5975(16.0897)	16.5311(16.0233)	12.0195(11.5087)
(1,1)	(1,1)	8.1222(7.6057)	11.8799(11.3689)	11.5332(11.0219)	11.9087(11.3978)	11.5891(11.0780)	11.8971(11.3861)	11.8971(11.3861)	11.6711(11.1599)	11.3533(10.8238)	11.7039(11.1938)	11.6312(11.1199)	8.7707(8.2536)
(1,1)	(1,1)	4.9466(4.6101)	6.6186(6.3283)	6.6186(6.3283)	6.6186(6.3283)	6.6186(6.3283)	6.6186(6.3283)	6.6186(6.3283)	6.4815(6.1924)	6.1631(5.8740)	6.5077(6.0999)	6.4815(6.1924)	5.2639(4.7246)
(1,1)	(1,1)	10.3640(9.8516)	7.4602(7.0415)	5.6379(5.0666)	6.6186(6.1081)	6.6186(6.1081)	6.6186(6.1081)	6.6186(6.1081)	6.5214(6.0123)	6.4031(5.8940)	6.5214(6.0123)	6.4815(6.1924)	4.3669(3.8344)
(1,2)	(1,1)	8.0881(7.5716)	5.7609(5.2371)	4.2223(3.6855)	5.3401(4.8232)	5.4429(4.9166)	5.8003(5.2837)	5.8003(5.2837)	5.2194(4.6929)	5.3011(4.8055)	5.2673(4.741)	5.2272(4.7007)	4.3669(3.8344)
(1,3)	(1,1)	4.3159(3.789)	3.3196(2.7749)	2.6979(2.1403)	3.1288(2.5808)	3.2246(2.6783)	3.1416(2.5939)	3.1502(2.6026)	3.0245(2.4744)	3.0377(2.6577)	3.0377(2.6577)	3.0377(2.6577)	2.1171(2.16)
(1,4)	(1,1)	3.074(2.525)	2.4822(1.9181)	2.1294(1.5508)	2.3601(1.7917)	2.4404(1.8749)	2.3699(1.8018)	2.3773(1.8095)	2.2652(1.6929)	2.4181(1.8517)	2.3879(1.7165)	2.2764(1.7046)	2.1171(2.16)
(1,5)	(1,1)	2.4864(1.9225)	2.072(1.4903)	1.8416(1.245)	1.9911(1.4048)	2.0594(1.4771)	1.9985(1.4126)	2.0055(1.4201)	1.8947(1.302)	2.0292(1.4451)	1.9135(1.3221)	1.9047(1.3127)	1.8028(1.203)
(1,1)	(1,1.25)	21.3867(20.8807)	13.5186(13.009)	8.3791(7.8633)	12.4067(11.8955)	11.7617(11.2506)	12.3827(11.8722)	12.3756(11.8651)	12.2399(11.7292)	11.6241(11.1129)	12.1711(11.6604)	12.166(11.6553)	9.1506(8.6369)
(1,1)	(1,1.50)	14.8082(14.2995)	9.8812(9.3679)	6.5148(5.994)	9.2108(8.6965)	8.6825(8.1672)	9.1548(8.6404)	9.1741(8.6597)	9.0978(8.5825)	8.5962(8.0808)	9.0046(8.4899)	9.0416(8.5269)	5.6747(5.1505)
(1,1)	(1,1.75)	10.9199(10.4079)	7.5593(7.0415)	5.2619(4.7356)	7.1099(6.591)	6.6611(6.1407)	7.0613(6.5423)	7.0828(6.5637)	7.0654(6.5263)	6.5394(6.0735)	6.9376(6.4105)	7.0146(6.4904)	4.6747(4.1505)
(1,1)	(1,2)	8.1222(7.6057)	6.6186(6.1081)	5.6379(5.0666)	6.6186(6.1081)	6.6186(6.1081)	6.6186(6.1081)	6.6186(6.1081)	6.5214(6.0123)	6.4031(5.8940)	6.5214(6.0123)	6.4815(6.1924)	3.5262(3.0015)
(1,1)	(1,3)	4.3159(3.789)	3.3196(2.7749)	2.6979(2.1403)	3.1288(2.5808)	3.2246(2.6783)	3.1416(2.5939)	3.1502(2.6026)	3.0245(2.4744)	3.0377(2.6577)	3.0377(2.6577)	3.0377(2.6577)	2.922(2.3690)
(1,1)	(1,4)	3.074(2.525)	2.4822(1.9181)	2.1294(1.5508)	2.3601(1.7917)	2.4404(1.8749)	2.3699(1.8018)	2.3773(1.8095)	2.2652(1.6929)	2.4181(1.8517)	2.3879(1.7165)	2.2764(1.7046)	2.2457(1.8566)
(1,1)	(1,5)	2.4864(1.9225)	2.072(1.4903)	1.8416(1.245)	1.9911(1.4048)	2.0594(1.4771)	1.9985(1.4126)	2.0055(1.4201)	1.8947(1.302)	2.0292(1.4451)	1.9135(1.3221)	1.9047(1.3127)	1.9065(1.3141)
(1,1)	(1,1.25)	23.1011(22.5956)	14.5002(13.9973)	8.8816(8.3667)	13.3665(12.8568)	12.6221(12.1118)	13.3808(12.8711)	13.3586(12.8489)	13.2338(12.724)	12.2085(11.6978)	13.1728(12.6629)	13.1582(12.6484)	9.8491(9.3357)
(1,1)	(1,1.50)	16.7196(16.2119)	10.9902(10.4783)	7.1256(6.6067)	10.4008(9.8882)	9.8578(9.3447)	10.4132(9.9006)	10.3719(9.8593)	10.1939(9.681)	9.5064(8.9925)	10.1653(9.6523)	10.1321(9.6191)	7.9143(7.3974)
(1,1)	(1,1.75)	12.5888(12.0784)	8.5299(8.0144)	5.8291(5.3056)	8.1617(7.6453)	7.8635(7.3465)	8.1666(7.6503)	8.1085(7.592)	7.9579(7.4411)	7.5999(7.0823)	7.9622(7.4454)	7.9094(7.3925)	6.4352(5.9141)
(1,1)	(1,2)	9.8388(9.3254)	6.8712(6.3516)	4.9009(4.3724)	6.6075(6.087)	6.4518(5.9307)	6.233(5.7029)	6.552(6.0345)	6.4031(5.9098)	6.2389(5.7171)	6.446(5.9249)	6.3806(5.8593)	5.3443(4.8184)
(1,1)	(1,3)	5.1399(4.6128)	3.863(3.3257)	3.0687(2.5196)	3.721(3.1829)	3.7506(3.2119)	3.732(3.1943)	3.6905(3.1511)	3.6053(3.0648)	3.6815(3.1419)	3.6211(3.0889)	3.5753(3.0344)	3.2334(2.6873)
(1,1)	(1,4)	3.5262(3.0015)	2.9272(2.402)	2.4098(1.879)	2.9272(2.402)	2.9272(2.402)	2.9272(2.402)	2.9272(2.402)	2.8281(2.303)	2.9272(2.402)	2.8281(2.303)	2.8281(2.303)	2.4922(2.0673)
(1,1)	(1,5)	2.8281(2.303)	2.2972(1.772)	2.0098(1.472)	2.2972(1.772)	2.2972(1.772)	2.2972(1.772)	2.2972(1.772)	2.1909(1.648)	2.2405(1.6672)	2.1909(1.648)	2.1909(1.648)	2.0252(1.4403)
(1,1.25)	(1,1.25)	12.9169(12.4068)	9.4329(8.9189)	6.247(5.7252)	8.7497(8.2345)	8.4478(7.9321)	8.7579(8.2428)	8.7415(8.2249)	8.7028(8.1863)	8.2412(7.725)	8.6702(8.1549)	8.6612(8.1458)	6.6606(6.1403)
(1,1.50)	(1,1.50)	7.3528(6.8346)	5.9941(5.4713)	4.3848(3.8525)	5.7407(5.2168)	5.6999(5.1686)	5.7425(5.2186)	5.7399(5.216)	5.6708(5.1466)	5.3773(4.8516)	5.6506(5.1263)	5.6456(5.1242)	4.5687(4.0378)
(1,1.75)	(1,1.75)	5.0757(4.5483)	4.3797(3.8473)	3.4327(2.8988)	4.2758(3.7425)	4.1693(3.6351)	4.2774(3.7441)	4.2723(3.739)	4.2031(3.6601)	4.0162(3.4804)	4.1876(3.6536)	4.1904(3.6564)	3.5189(2.9772)
(1,2)	(1,2)	3.9036(3.3666)	3.5026(2.9799)	2.8829(2.3299)	3.4521(2.9094)	3.379(2.8552)	3.453(2.9107)	3.45(2.9073)	3.3907(2.8471)	3.2604(2.7147)	3.3811(2.8374)	3.3811(2.8374)	2.9239(2.3717)
(1,3)	(1,3)	2.2961(1.7251)	2.1833(1.6073)	1.9677(1.3799)	2.1831(2.0071)	2.1528(1.9754)	2.1831(2.0071)	2.1818(2.0058)	2.1497(1.9721)	2.0941(1.9137)	2.1451(1.9673)	2.1459(1.9681)	1.9724(1.3849)
(1,4)	(1,4)	1.8262(1.2283)	1.7712(1.1687)	1.6508(1.0365)	1.7756(1.1735)	1.7581(1.1544)	1.7754(1.1733)	1.7748(1.1727)	1.7531(1.149)	1.7221(1.1151)	1.7505(1.1462)	1.7511(1.1468)	1.6504(1.0361)
(1,5)	(1,5)	1.6084(0.9892)	1.5729(0.9493)	1.4233(0.8571)	1.5775(0.9545)	1.5649(0.9402)	1.5779(0.9549)	1.5772(0.9541)	1.5617(0.9366)	1.5385(0.9102)	1.5598(0.9344)	1.5605(0.9353)	1.4911(0.8557)

Tabela 3.32 Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes $shifts$ nas médias das variáveis (Caso 9 - dependência moderada).

Table with 14 columns: Normal (0.25, 0.5, 1, 2, 3, 4), Normal (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), T^2 Hotelling, Glaxton, Frank, Gumbel, t (Icop), t (IIcop), t (ex), t (sx), Gaus (ar1), Gaus (ar1), Gaus (cx), Gaus (cx), Gaus (ar1), Gaus (ar1).

Tabela 3.33 Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções cópula e diferentes $shifts$ nas médias das variáveis (Caso 9 - dependência forte).

Table with 14 columns: Normal (0.25, 0.5, 1, 2, 3, 4), Normal (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), T^2 Hotelling, Glaxton, Frank, Gumbel, t (Icop), t (IIcop), t (ex), t (sx), Gaus (ar1), Gaus (ar1), Gaus (cx), Gaus (cx), Gaus (ar1), Gaus (ar1).

O **Caso 9** representa a extensão trivariada do **Caso 4**. Nele, os dados originais são oriundos da distribuição normal trivariada com vetor de médias nulo e matriz de covariâncias permutável (ex). Com associação fraca (Tabela 3.31), a regra T^2 já apresentou resultados satisfatórios ($ARL_0 = 22,8697$), bem como todas as famílias de cópulas consideradas. O mesmo ocorre quando o nível de associação é moderado (ver Tabela 3.32). Ao considerar forte dependência, a regra T^2 de Hotelling mantém seu bom desempenho (23, 1214). De maneira similar, os bons ajustes se deram com a cópula de Frank (22, 0692) e a cópula Gaussiana, considerando todas as estruturas de covariâncias estudadas. Em particular, considerando a estrutura original dos dados (permutável), a cópula Gaussiana apresentou $ARL_0 = 23,5549$. Portanto, tais famílias de cópulas, notadamente, a Frank e a Gaussiana (esta última, independente da estrutura da matriz de covariâncias) se ajustam tão bem quanto o gráfico T^2 de Hotelling, quando os dados seguem distribuição normal trivariada.

- **Contexto Semi-Paramétrico Trivariado:** Esta é a última situação a ser explorada, em que uma amostra gerada da cópula de Clayton com distribuições marginais normal padrão foi utilizada e o ARL foi estimado via abordagem semi-paramétrica, em que fixamos a cópula de Clayton e variamos as funções Kernel nas marginais.

A Tabela 3.34 mostra os resultados do estudo de avaliação da performance para o **Caso 10**, quando o grau de dependência é fraco. A regra T^2 de Hotelling teve melhor desempenho ($ARL_0 = 20,3990$), sendo que, dos Kernel considerados, o Gaussiano foi o que obteve melhor resultado (26, 2812). Os resultados com grau de dependência moderado estão na Tabela 3.35, onde vemos que o desempenho do Kernel Gaussiano melhorou (23, 7914), enquanto o do T^2 piorou, aumentando, assim, o número de ocorrências de alarmes falsos (15, 2341). Na Tabela 3.36 (dependência forte), observamos que o Kernel Gaussiano continuou apresentando bons resultados para o ARL quando o processo está sob controle (19, 6680), assim como se mostrou sensível para detectar mudanças, de magnitude variando de 0,25 a 4 unidades, no vetor de médias do processo. Tais resultados foram similares ao do **Caso 5** (semi-paramétrico bivariado).

Não foi possível simular a proposta não-paramétrica trivariada por limitações computacionais do pacote *kdecopula* utilizado, o qual contempla apenas a abordagem bivariada. Nagler (2018) informa que essa limitação se deve ao fato de que o pacote usa interpolação para avaliar e renormalizar os estimadores. Assim, para mais de duas dimensões, o número de pontos de grade explode rapidamente e torna a abordagem de interpolação inviável. Como sugestão, ele indica o pacote *kdevine* (Nagler, 2017), que implementa um estimador Kernel para densidades multivariadas baseadas em cópulas *vine* (Nagler e Czado, 2016).

Tabela 3.34 Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções Kernel e diferentes *shifts* nas médias das variáveis (**Caso 10** - dependência fraca).

Normal	Normal	Normal	Kernel					T^2 Hotelling
			Gaussiano	Retangular	Triangular	Epanechnikov	<i>Biweight</i>	
(0,1)	(0,1)	(0,1)	26.2812(25.7764)	4.5118(3.9805)	12.938(12.4279)	9.1558(8.6414)	12.7587(12.2485)	20.399(19.8927)
(0.25,1)	(0,1)	(0,1)	23.3187(22.8132)	4.2737(3.7404)	11.8433(11.3323)	8.4785(7.9628)	11.6309(11.1196)	19.8934(19.3869)
(0.5,1)	(0,1)	(0,1)	17.9122(17.405)	3.773(3.2346)	9.615(9.1013)	7.1076(6.5887)	9.4334(8.9194)	16.7802(16.2725)
(0.75,1)	(0,1)	(0,1)	12.9286(12.4185)	3.1914(2.6446)	7.411(6.8929)	5.6501(5.1258)	7.2502(6.7316)	12.8301(12.3199)
(1,1)	(0,1)	(0,1)	9.2203(8.706)	2.6636(2.105)	5.5713(5.0466)	4.3819(3.8496)	5.4526(4.9273)	9.2863(8.772)
(2,1)	(0,1)	(0,1)	2.7459(2.1896)	1.4096(0.7598)	2.0172(1.4324)	1.7796(1.1778)	1.996(1.41)	2.6475(2.0885)
(3,1)	(0,1)	(0,1)	1.3165(0.6455)	1.0528(0.2357)	1.1565(0.4254)	1.1126(0.354)	1.1542(0.4219)	1.255(0.5657)
(4,1)	(0,1)	(0,1)	1.0238(0.1562)	1.0014(0.0376)	1.0066(0.0815)	1.0037(0.061)	1.0064(0.0803)	1.0135(0.1169)
(0,1)	(0.25,1)	(0,1)	23.3995(22.894)	4.2684(3.7351)	11.8523(11.3413)	8.4874(7.9717)	11.6825(11.1713)	19.91(19.4036)
(0,1)	(0.5,1)	(0,1)	17.8584(17.3512)	3.7651(3.2266)	9.6434(9.1297)	7.1009(6.5819)	9.4573(8.9434)	16.645(16.1373)
(0,1)	(0.75,1)	(0,1)	12.9156(12.4055)	3.1861(2.6392)	7.4005(6.8824)	5.6235(5.099)	7.2289(6.7103)	12.5543(12.0439)
(1,1)	(1,1)	(0,1)	9.192(8.6776)	2.659(2.1003)	5.5794(5.0547)	4.3686(3.8362)	5.4571(4.9318)	9.0223(8.5077)
(0,1)	(2,1)	(0,1)	2.748(2.1917)	1.4085(0.7585)	2.017(1.4322)	1.7771(1.1752)	1.9958(1.4098)	2.5762(2.0151)
(0,1)	(3,1)	(0,1)	1.3153(0.644)	1.0528(0.2357)	1.157(0.4261)	1.113(0.3547)	1.1544(0.4222)	1.2363(0.5406)
(0,1)	(4,1)	(0,1)	1.0238(0.1561)	1.0014(0.0376)	1.0067(0.082)	1.0038(0.0617)	1.0065(0.0808)	1.0117(0.1089)
(0,1)	(0,1)	(0.25,1)	23.2623(22.7568)	4.2748(3.7415)	11.8366(11.3255)	8.491(7.9753)	11.633(11.1218)	19.3806(18.874)
(0,1)	(0,1)	(0.5,1)	17.9643(17.4571)	3.7691(3.2307)	9.6334(9.1197)	7.0967(6.5778)	9.4356(8.9216)	16.2946(15.7867)
(0,1)	(0,1)	(0.75,1)	12.8816(12.3715)	3.1951(2.6483)	7.4136(6.8955)	5.6347(5.1103)	7.2548(6.7363)	12.458(11.9475)
(0,1)	(0,1)	(1,1)	9.2013(8.6869)	2.6654(2.1069)	5.5754(5.0508)	4.373(3.8406)	5.4473(4.9219)	9.1353(8.6208)
(0,1)	(0,1)	(2,1)	2.7429(2.1865)	1.4076(0.7575)	2.0145(1.4296)	1.7787(1.1768)	1.9941(1.408)	2.6729(2.1146)
(0,1)	(0,1)	(3,1)	1.3152(0.6439)	1.0529(0.236)	1.1565(0.4255)	1.113(0.3546)	1.1539(0.4214)	1.261(0.5737)
(0,1)	(0,1)	(4,1)	1.0237(0.1559)	1.0014(0.0373)	1.0066(0.0816)	1.0037(0.0612)	1.0064(0.0803)	1.015(0.1234)
(0.25,1)	(0.25,1)	(0.25,1)	20.8646(20.3585)	4.0365(3.501)	10.9531(10.4412)	7.9179(7.401)	10.6799(10.1676)	20.3277(19.8214)
(0.5,1)	(0.5,1)	(0.5,1)	12.7314(12.2212)	3.2251(2.6788)	7.592(7.0743)	5.7999(5.2763)	7.3704(6.8522)	15.9617(15.4536)
(0.75,1)	(0.75,1)	(0.75,1)	7.3651(6.8468)	2.5034(1.94)	4.9956(4.4677)	4.036(3.5005)	4.8518(4.323)	10.622(10.1097)
(1,1)	(1,1)	(1,1)	4.4909(3.9595)	1.9853(1.3987)	3.3857(2.842)	2.8811(2.328)	3.3042(2.7592)	6.7391(6.219)
(2,1)	(2,1)	(2,1)	1.4391(0.7949)	1.1724(0.4495)	1.3523(0.6902)	1.3009(0.6256)	1.3426(0.6782)	1.7543(1.1503)
(3,1)	(3,1)	(3,1)	1.0629(0.2585)	1.0258(0.1628)	1.0531(0.2365)	1.0463(0.2202)	1.0515(0.2328)	1.1169(0.3614)
(4,1)	(4,1)	(4,1)	1.0065(0.0809)	1.0025(0.0505)	1.0057(0.0754)	1.0049(0.0704)	1.0054(0.074)	1.0147(0.1219)

Tabela 3.35 Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções Kernel e diferentes *shifts* nas médias das variáveis (**Caso 10** - dependência moderada).

Normal	Normal	Normal	Kernel					T^2 Hotelling
			Gaussiano	Retangular	Triangular	Epanechnikov	<i>Biweight</i>	
(0,1)	(0,1)	(0,1)	23.7914(23.286)	5.4757(4.9505)	17.4131(16.9057)	12.1262(11.6155)	17.7091(17.2019)	15.2341(14.7257)
(0.25,1)	(0,1)	(0,1)	19.152(18.6452)	5.0003(4.4724)	14.8929(14.3842)	10.6085(10.0961)	14.8355(14.3268)	14.1515(13.6423)
(0.5,1)	(0,1)	(0,1)	13.1093(12.5993)	4.2201(3.6863)	11.2271(10.7155)	8.2688(7.7527)	10.9912(10.4793)	11.2862(10.7746)
(0.75,1)	(0,1)	(0,1)	8.7639(8.2488)	3.4725(2.9301)	8.1372(7.6208)	6.2339(5.7121)	7.9115(7.3946)	8.1897(7.6735)
(1,1)	(0,1)	(0,1)	5.9294(5.4064)	2.8156(2.261)	5.8272(5.3036)	4.6347(4.1044)	5.658(5.1337)	5.6998(5.1757)
(2,1)	(0,1)	(0,1)	1.7858(1.1846)	1.3563(0.6952)	1.8009(1.201)	1.6546(1.0407)	1.8107(1.2116)	1.4735(0.8353)
(3,1)	(0,1)	(0,1)	1.0395(0.2025)	1.0093(0.0967)	1.0305(0.1771)	1.0198(0.1421)	1.0304(0.177)	1.0054(0.0738)
(4,1)	(0,1)	(0,1)	1.0000(0.0062)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0020)	1.0000(0.0014)	1.0000(0.0024)	1.0000(0.0014)
(0,1)	(0.25,1)	(0,1)	19.2589(18.7523)	5.0079(4.48)	14.8276(14.3188)	10.5666(10.0542)	14.7271(14.2183)	14.0885(13.5793)
(0,1)	(0.5,1)	(0,1)	13.1358(12.6259)	4.2319(3.6983)	11.1949(10.6833)	8.2602(7.7441)	10.9647(10.4527)	11.1575(10.6457)
(0,1)	(0.75,1)	(0,1)	8.7195(8.2042)	3.4712(2.9289)	8.1077(7.5912)	6.2296(5.7077)	7.8733(7.3563)	8.041(7.5244)
(0,1)	(1,1)	(0,1)	5.9222(5.3991)	2.8206(2.2661)	5.8232(5.2996)	4.6414(4.1112)	5.6571(5.1328)	5.557(5.0323)
(0,1)	(2,1)	(0,1)	1.7841(1.1827)	1.3564(0.6953)	1.7991(1.1991)	1.651(1.0367)	1.8075(1.2081)	1.4395(0.7953)
(0,1)	(3,1)	(0,1)	1.0395(0.2026)	1.0092(0.0965)	1.0307(0.1778)	1.02(0.1427)	1.0306(0.1776)	1.0042(0.0646)
(0,1)	(4,1)	(0,1)	1.0000(0.0055)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0028)	1.0000(0.0014)	1.0000(0.0014)	1.0000(0.0000)
(0,1)	(0,1)	(0.25,1)	19.2411(18.7345)	5.0016(4.4737)	14.8131(14.3043)	10.5548(10.0423)	14.7619(14.2531)	14.8641(14.3554)
(0,1)	(0,1)	(0.5,1)	13.1306(12.6207)	4.2311(3.6975)	11.1797(10.668)	8.2397(7.7235)	10.9479(10.4359)	12.5606(12.0502)
(0,1)	(0,1)	(0.75,1)	8.7365(8.2213)	3.474(2.9316)	8.1302(7.6138)	6.222(5.7001)	7.901(7.3841)	9.5918(9.078)
(0,1)	(0,1)	(1,1)	5.925(5.4019)	2.8217(2.2672)	5.8193(5.2957)	4.6426(4.1123)	5.6547(5.1304)	6.85(6.3303)
(0,1)	(0,1)	(2,1)	1.7858(1.1846)	1.3551(0.6937)	1.801(1.201)	1.653(1.039)	1.8105(1.2114)	1.7118(1.1039)
(0,1)	(0,1)	(3,1)	1.0393(0.202)	1.0091(0.0958)	1.0303(0.1767)	1.0199(0.1423)	1.0303(0.1766)	1.015(0.1235)
(0,1)	(0,1)	(4,1)	1.0000(0.0053)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0035)	1.0000(0.0014)	1.0000(0.0035)	1.0000(0.0032)
(0.25,1)	(0.25,1)	(0.25,1)	18.2989(17.7919)	4.715(4.1852)	13.6986(13.1892)	9.8971(9.3838)	13.4336(12.924)	15.0702(14.5616)
(0.5,1)	(0.5,1)	(0.5,1)	11.4519(10.9404)	3.6951(3.1557)	9.0527(8.5381)	6.9686(6.4493)	8.7843(8.2692)	12.639(12.1287)
(0.75,1)	(0.75,1)	(0.75,1)	6.9899(6.4706)	2.8691(2.3157)	5.8998(5.3766)	4.8066(4.2775)	5.7087(5.1846)	9.4701(8.9561)
(1,1)	(1,1)	(1,1)	4.5301(3.9989)	2.292(1.7209)	4.032(3.4965)	3.4565(2.9139)	3.9235(3.3868)	6.7081(6.1879)
(2,1)	(2,1)	(2,1)	1.6275(1.0106)	1.3154(0.6441)	1.6087(0.9895)	1.5355(0.9068)	1.5866(0.9647)	2.1396(1.5615)
(3,1)	(3,1)	(3,1)	1.1235(0.3724)	1.063(0.2589)	1.1295(0.3824)	1.1156(0.3592)	1.1222(0.3703)	1.2651(0.5791)
(4,1)	(4,1)	(4,1)	1.0147(0.1223)	1.0067(0.0823)	1.0168(0.1305)	1.0147(0.1222)	1.0152(0.1243)	1.0455(0.2182)

3.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Aqui, retomamos e discutimos um pouco mais os principais resultados do estudo de recuperação de parâmetros, regiões de tolerância estimadas e qualidade dos ajustes da abordagem via cópulas proposta. Com tamanho amostral assumindo os seguintes valores

Tabela 3.36 Comparação dos valores de ARL_0 e ARL_1 , com SDRL entre parênteses, considerando diferentes funções Kernel e diferentes *shifts* nas médias das variáveis (**Caso 10** - dependência forte).

			Kernel					
Normal	Normal	Normal	Gaussiano	Retangular	Triangular	Epanechnikov	<i>Biweight</i>	T^2 Hotelling
(0,1)	(0,1)	(0,1)	19.668(19.1615)	5.7111(5.187)	13.3955(12.8858)	9.6583(9.1446)	13.4261(12.9164)	13.2661(12.7563)
(0.25,1)	(0,1)	(0,1)	12.2745(11.7638)	4.7386(4.209)	9.2644(8.7501)	7.0132(6.494)	9.0087(8.494)	11.8649(11.3539)
(0.5,1)	(0,1)	(0,1)	5.4888(4.9637)	3.453(2.9104)	5.0973(4.57)	4.2482(3.7147)	5.0012(4.4733)	8.723(8.2077)
(0.75,1)	(0,1)	(0,1)	2.9894(2.4387)	2.3683(1.8001)	2.8724(2.3191)	2.6101(2.0501)	2.9572(2.4058)	5.4937(4.9686)
(1,1)	(0,1)	(0,1)	2.0184(1.4337)	1.6327(1.0163)	1.8739(1.2797)	1.7534(1.1494)	1.961(1.3728)	2.9549(2.4034)
(2,1)	(0,1)	(0,1)	1.036(0.193)	1.0006(0.0249)	1.0149(0.1231)	1.0029(0.0537)	1.0094(0.0976)	1.0019(0.0435)
(3,1)	(0,1)	(0,1)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)
(4,1)	(0,1)	(0,1)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)
(0,1)	(0.25,1)	(0,1)	12.2983(11.7877)	4.7431(4.2136)	9.2543(8.74)	6.9959(6.4767)	8.9752(8.4604)	12.1812(11.6705)
(0,1)	(0.5,1)	(0,1)	5.4852(4.96)	3.4575(2.9149)	5.0906(4.5633)	4.2515(3.7181)	5.0048(4.4769)	9.2739(8.7596)
(0,1)	(0.75,1)	(0,1)	2.988(2.4373)	2.3703(1.8022)	2.8731(2.3198)	2.6089(2.0488)	2.9568(2.4054)	6.0428(5.5202)
(0,1)	(1,1)	(0,1)	2.0197(1.4351)	1.6305(1.0139)	1.8738(1.2795)	1.7531(1.1491)	1.9607(1.3725)	3.371(2.8271)
(0,1)	(2,1)	(0,1)	1.0361(0.1933)	1.0007(0.0255)	1.0151(0.1239)	1.0028(0.0528)	1.0097(0.0989)	1.0033(0.0578)
(0,1)	(3,1)	(0,1)	1.0000(0.0014)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)
(0,1)	(4,1)	(0,1)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)
(0,1)	(0,1)	(0.25,1)	12.282(11.7714)	4.743(4.2135)	9.2863(8.772)	7.0235(6.5043)	9.0015(8.4868)	10.8871(10.375)
(0,1)	(0,1)	(0.5,1)	5.4955(4.9704)	3.4572(2.9146)	5.0925(4.5652)	4.24(3.7064)	5.0063(4.4784)	7.3878(6.8696)
(0,1)	(0,1)	(0.75,1)	2.9819(2.431)	2.3694(1.8012)	2.8674(2.314)	2.6075(2.0474)	2.95(2.3984)	4.3503(3.8177)
(0,1)	(0,1)	(1,1)	2.0174(1.4327)	1.6321(1.0157)	1.8734(1.2792)	1.7516(1.1474)	1.9585(1.3701)	2.2017(1.6266)
(0,1)	(0,1)	(2,1)	1.0353(0.1913)	1.0006(0.0238)	1.0148(0.1224)	1.0027(0.0522)	1.0093(0.0968)	1.0006(0.0238)
(0,1)	(0,1)	(3,1)	1.0000(0.0020)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)
(0,1)	(0,1)	(4,1)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)	1.0000(0.0000)
(0.25,1)	(0.25,1)	(0.25,1)	16.792(16.2844)	5.3134(4.7874)	12.8823(12.3722)	9.4277(8.9137)	12.543(12.0326)	11.9589(11.4479)
(0.5,1)	(0.5,1)	(0.5,1)	11.5231(11.0118)	4.4208(3.8888)	9.8532(9.3398)	7.5769(7.0592)	9.5138(9.0000)	10.1383(9.6253)
(0.75,1)	(0.75,1)	(0.75,1)	7.6066(7.089)	3.5491(3.0079)	7.023(6.5038)	5.6818(5.1576)	6.778(6.2581)	8.2718(7.7557)
(1,1)	(1,1)	(1,1)	5.2537(4.7273)	2.8578(2.3042)	5.082(4.5547)	4.3043(3.7713)	4.9174(4.389)	6.5884(6.0678)
(2,1)	(2,1)	(2,1)	1.9246(1.334)	1.4894(0.8537)	2.0059(1.4204)	1.858(1.2626)	1.9468(1.3576)	2.7558(2.1997)
(3,1)	(3,1)	(3,1)	1.1856(0.4692)	1.0933(0.3193)	1.2181(0.5154)	1.1833(0.4658)	1.1984(0.4876)	1.4752(0.8373)
(4,1)	(4,1)	(4,1)	1.0229(0.1531)	1.0097(0.0987)	1.0297(0.1748)	1.0235(0.1552)	1.0257(0.1625)	1.0876(0.3086)

$n = 50, 100, 250, 500$ e 1000 , estimamos os parâmetros das distribuições marginais por meio do método da MV, depois carregamos esses valores para estimar o parâmetro da cópula de Clayton, que variou entre $\theta = 2/3, 2$ e 6 (conforme grau de dependência), através do método da máxima pseudo-verossimilhança. Na situação semi-paramétrica, fixamos os parâmetros e variamos o tipo de função Kernel das marginais para estimar apenas o parâmetro da cópula de Clayton. À medida em que o tamanho amostral aumenta, a média das estimativas tende a se aproximar do verdadeiro valor do parâmetro, tanto das marginais quanto da cópula, assim como o viés e o EQM tendem a se aproximar de zero. Porém, essa convergência é mais lenta quando o grau de associação entre as variáveis aumenta. No **Caso 5** (semi-paramétrico), podemos concluir que, independente da função Kernel considerada nas marginais, o parâmetro estimado da cópula adotada terá boas propriedades. Esses resultados compreendem os casos bivariados e trivariados.

Para os casos de não-normalidade multivariada, ditos **Casos 1, 2 e 3**, as regiões estimadas via modelagem de cópulas apresentaram-se mais próximas das regiões teóricas (essa evidência se torna mais nítida conforme aumentamos o grau de dependência entre as distribuições marginais) do que a tradicional abordagem do T^2 de Hotelling. Em alguns casos, esse resultado foi possível até para outras cópulas que não a de origem dos dados. Verdier (2013) revelou achado similar quando comparou regiões de tolerância da amostra de aprendizagem, de tamanho $n = 500$, gerada da cópula de Frank com $\theta = 5$ (o que resulta num $\tau_2 \approx 0,50$, ou seja, grau de dependência moderada) com marginais Fisher(10,15). A região estimada com base na modelagem de cópulas mostrou-se mais adequada do que a gerada pelo T^2 de Hotelling. Verdier (2013) também comparou a proposta semi-paramétrica com marginais Kernel Gaussiano e largura de banda obtida através de método *plug-in*, mas não encontrou resultados satisfatórios. O mesmo acredita

que isto se deve à escolha do parâmetro de suavização. Contrariamente, nossa proposta semi-paramétrica do **Caso 5**, também apresentou regiões de tolerância estimadas melhores do que as oriundas do T^2 de Hotelling. Aqui, variamos o tipo da função Kernel e fixamos os parâmetros das marginais, média $\mu = 0$ e desvio-padrão igual à largura de banda $\sigma = b = 1$. Marginais Kernel Gaussiano permitiram a construção de regiões estimadas mais próximas das teóricas. Para finalizar, trazemos a proposta da construção de regiões de tolerância estimadas através da cópula não-paramétrica com marginais Kernel Gaussiano(0,1) (**Caso 6**), variando os métodos de transformação do Kernel e fazendo ainda uma comparação com a região estimada via T^2 de Hotelling. Com exceção da *Transformação Log Linear nn*, todas as transformações Kernel utilizadas na cópula não-paramétrica geraram regiões de tolerância melhores ajustadas à teórica do que a tradicional baseada na abordagem do T^2 de Hotelling.

Comparamos ainda com o desempenho da tradicional regra T^2 de Hotelling através do Comprimento Médio de Corrida (ARL). Nos **Casos 1, 2 e 3**, paramétricos bivariados, a modelagem via cópulas apresentou bons desempenhos, uma vez que ocorra a correta especificação das distribuições marginais e da família de cópulas a serem estimadas. Além disso, observamos a performance deficiente da regra T^2 quando os dados não seguem distribuição normal bivariada, igualmente aos achados de Verdier (2013). Os **Casos 4 e 9** validam os pressupostos necessários para o uso do T^2 , a normalidade bivariada e trivariada, respectivamente. E como esperado, a regra T^2 tem seu ARL_0 muito perto do valor nominal (20). A proposta de modelagem via cópulas através da família Gaussiana, teve resultado semelhante à clássica sob controle e se mostrou mais sensível que a mesma na detecção de mudanças em diversas magnitudes. O último caso bivariado (**6**) mostrou que, quando não se é possível definir as distribuições marginais paramétricas, a estimação via Kernel Clássico tem desempenho superior à T^2 . Considerando as amostras trivariadas, os **Casos 7 e 8** estão no contexto paramétrico. Sob esta ótica, vimos que, mesmo sob correta especificação da família de Clayton, quando a dependência entre as marginais é moderada, ocorre um aumento no ARL_0 inesperado. Mas, seu desempenho é ressaltado quando está sob forte associação. Nas propostas semi-paramétricas bivariada e trivariada, vimos que, quando a dependência é fraca, o T^2 apresentou valores próximos ao nominal, porém, com o aumento da dependência, marginais Kernel Gaussiano se sobressaíram em relação às demais propostas.

4

ESTUDOS DE CASO

Neste capítulo, mostramos duas situações práticas em que aplicamos a metodologia CEP apresentada/discutida na dissertação. Na Seção 4.1, consideramos um conjunto de dados bivariados relacionados aos níveis de pH e fosfato medidos num teste de qualidade de água. Já na Seção 4.2, utilizamos um conjunto de dados trivariados sobre medidas de deflexão, curvatura e resistividade de termostatos bimetálicos em latão e aço. Ambos os conjuntos de dados estão disponíveis no pacote *MSQC* (Santos-Fernández, 2012) do *software* R.

4.1 APLICAÇÃO BIVARIADA

O conjunto de dados intitulado *water1*, armazenado no pacote *MSQC* do R, possui 30 observações referentes aos níveis de pH, fosfato (mg/L), nitrato (mg/L), oxigênio dissolvido e sólidos totais (mg/L) medidos em um teste de qualidade de água. Para fins de ilustração, utilizamos apenas a variável transformada $X = 1/\text{pH}$ e a variável $Y = 1/\sqrt{\text{fosfato}}$. Excluímos ainda a observação 12, restando $n = 29$ observações no conjunto de dados (tais transformações foram necessárias para manter a relação positiva entre as variáveis, apresentar uma proposta não-normal dos dados e mante-los mais homogêneos). A Tabela 4.1 apresenta as principais medidas-resumo das variáveis em estudo. Observe que X variou de 0,1160 a 0,1855, com mediana e média muito próximas (0,1456 e 0,1462, respectivamente) e desvio-padrão igual a 0,0174. A variável Y apresentou valor mínimo de 1,9610 e máximo de 5,000. Ademais, metade das observações de Y se encontram abaixo de 2,8870 e seu valor médio é de 2,9200, indicando uma leve assimetria positiva.

Tabela 4.1 Medidas-resumo do conjunto de dados *water1* ($n = 29$). D.P. = Desvio-Padrão.

Variável	Mínimo	1° Quartil	Mediana	Média	3° Quartil	Máximo	D.P.
X	0.1160	0.1346	0.1456	0.1462	0.1575	0.1855	0.0174
Y	1.9610	2.6730	2.8870	2.9200	3.1620	5.0000	0.5688

Na Figura 4.1 são apresentados o histograma, o gráfico de densidade Kernel, o gráfico de probabilidade normal e o *boxplot* para cada variável estudada. Esses gráficos dão

indícios de que a variável X segue uma distribuição normal de probabilidades, ao contrário da variável Y cuja distribuição apresenta leve assimetria à direita (devido à presença de um *outlier* superior). A fim de comprovar tais suspeitas, aplicamos o teste de normalidade univariada de Shapiro-Wilk (SW) (Shapiro e Wilk, 1965), mediante o uso da função *shapiro.test(.)*. Aplicamos ainda uma generalização do teste de SW (González-Estrada e Villaseñor-Alva, 2009) para normalidade multivariada, por meio do uso da função *mvShapiro.Test(.)* do pacote *mvShapiroTest*. Os resultados obtidos estão apresentados na Tabela 4.2, em que W denota a estatística do teste de SW e MVW representa a estatística do teste generalizado de SW. Observe que não temos evidências suficientes, ao nível de significância de 5%, para rejeitar a hipótese de normalidade da variável transformada X ($W = 0,9808$, com p-valor = 0,8581). Entretanto, ao nível de significância de 5%, rejeitamos a hipótese de normalidade da variável transformada Y ($W = 0,8731$, com p-valor = 0,0024). Rejeitamos também a hipótese de normalidade bivariada de (X,Y) ($MVW = 0,9013$, com p-valor = 0,0013).

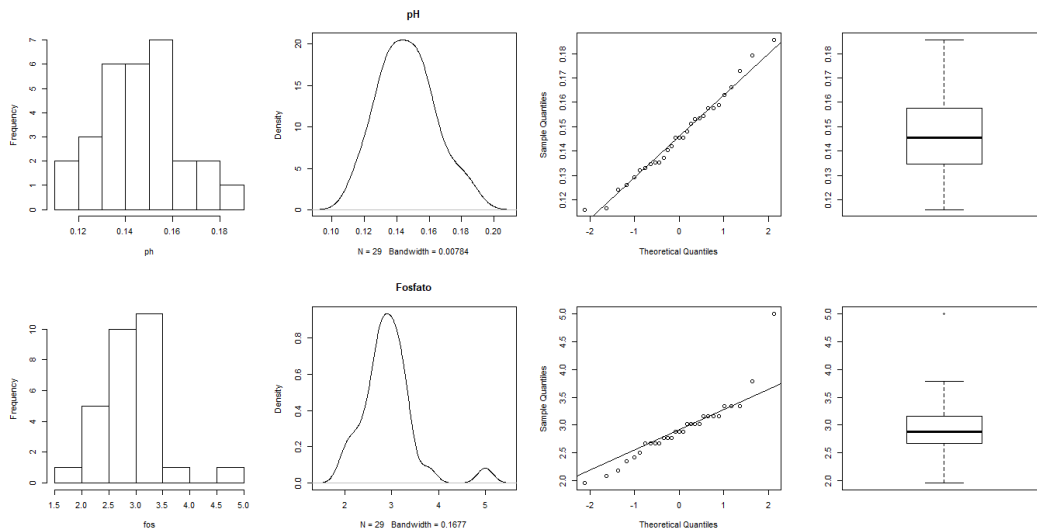


Figura 4.1 Histograma, gráfico de densidade Kernel, gráfico de probabilidade normal e *boxplot* das variáveis X (painéis superiores) e Y (painéis inferiores).

Tabela 4.2 Resultados dos testes de normalidade univariada e bivariada.

Variável	Estatística do Teste	p-valor
X	$W = 0.9808$	0.8581
Y	$W = 0.8731$	0.0024
(X, Y)	$MVW = 0.9013$	0.0013

Para analisar como essas duas variáveis se relacionam, construímos o gráfico de dispersão mostrado na Figura 4.2. Observa-se a existência de uma associação positiva

de grau moderado entre elas, com coeficiente de correlação tau de Kendall dado por $\tau_n = 0,5783$.

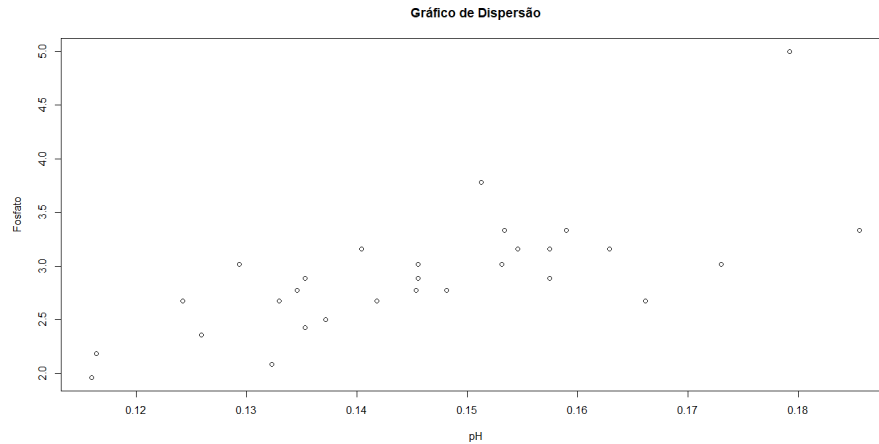


Figura 4.2 Gráfico de dispersão entre X ($1/\text{pH}$) e Y (fosfato).

Confirmada a relação de dependência positiva e moderada entre X e Y , iremos aplicar a abordagem paramétrica de CEP bivariado percorrida nesta dissertação. Inicialmente, selecionamos a distribuição univariada que melhor se adequa à variável Y (adotamos a distribuição normal para a variável X devido aos resultados apresentados na Figura 4.1 e Tabela 4.2), com base no critério de Akaike (AIC, do inglês *Akaike information criterion*) (Akaike, 1977). Entre as distribuições candidatas: normal (AIC = 52,5596), gama (AIC = 48,8620), Weibull (AIC = 58,9891) e logística (AIC = 47,2012), esta última foi a que obteve o melhor ajuste segundo o AIC (isto é, possui o menor valor de AIC dentre todos os modelos testados). O teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov confirma a boa adequabilidade da distribuição logística em representar os dados dessa variável ($D = 0,1501$, com p-valor = 0,5537). Em seguida, estimamos, via método IFM, os parâmetros das distribuições marginais e os usamos para estimar o(s) parâmetro(s) das cópulas candidatas. As famílias de cópulas candidatas foram as mesmas usadas nos estudos de simulação (para a cópula t , estimamos também o parâmetro graus de liberdade ν): Clayton (AIC = -125,2316), Frank (AIC = -122,3888), Gumbel (AIC = -109,5409), Gaussiana (AIC = -122,3888) e t (AIC = -120,0088). Novamente, usamos o critério AIC para selecionar a família de cópulas mais adequada aos dados, assim a Clayton ($\hat{\theta} = 2,1567$, $\hat{\tau}_2 = 0,5188$) foi a selecionada. Realizamos o teste de bondade do ajuste da cópula estimada por meio da função *gofCopula(.)* (Genest *et al*, 2009), assim não rejeitamos a hipótese de que os dados são oriundos da família de Clayton ($S_n = 0,0321$, com p-valor = 0,3931).

Na Figura 4.3 é exibida a região de tolerância construída sob a ótica de conjunto de níveis de densidade baseada em funções cópula, com nível de significância de 5%. Além de plotar os pares de observações $(x_1, y_1), \dots, (x_{29}, y_{29})$ utilizados na estimação dessa região (fase I), também plotamos uma sequência de 25 novas observações do mesmo processo

(fase II), disponíveis no conjunto de dados *water2* do pacote *MSQC*. Nota-se que a região de tolerância estimada a partir da cópula de Clayton com distribuições marginais normal e logística, se adequou bem ao comportamento dos dados. Dois alarmes “falsos” foram identificados, as observações 2 e 5 (quantidade aceitável e, até mesmo esperada, mediante o nível de significância adotado). Bem como, quatro novas observações foram identificadas como fora de controle (observações 15, 18, 21 e 24).

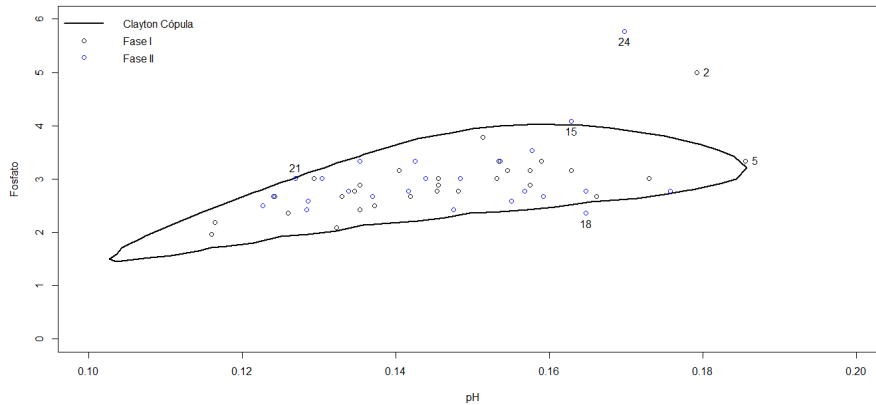


Figura 4.3 Região de tolerância estimada pela cópula de Clayton com distribuições marginais normal e logística, considerando os dados bivariados do teste de qualidade de água.

Para finalizar, geramos o gráfico c_n (apresentado na Seção 2.3.2) para o conjunto de dados bivariados considerado (ver Figura 4.4). Repare que tal gráfico conseguiu identificar exatamente os mesmos pontos fora de controle e os alarmes “falsos” encontrados por meio da região de tolerância estimada (ver Figura 4.3).

4.2 APLICAÇÃO TRIVARIADA

Para explorar a proposta trivariada, escolhemos as variáveis $X =$ deflexão (10^{-6} 1/K), $Y =$ curvatura (10^{-6} 1/K) e $Z =$ resistividade (10^{-1} $\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$) de termostatos bi-metálicos em latão e aço do conjunto de dados *bimetal1* (fase I) do pacote *MSQC*. Demos seqüência ao monitoramento com os dados presentes no conjunto *bimetal2* (fase II). Em ambos os conjuntos de dados, tem-se $n = 28$ observações.

Algumas medidas-resumo dos dados dessas variáveis na fase I estão presentes na Tabela 4.3. A amplitude da deflexão dos termostatos foi de 1,35, com média (21,02) e mediana (21,07) aproximadamente iguais. A curvatura média é de 40,02 e, além disso, 50% dos termostatos apresentam curvatura inferior a 40,03 e resistividade inferior a 15,22. As três variáveis aparentam simetria na distribuição dos dados, além de terem baixa variabilidade.

Os histogramas, os gráficos de densidade Kernel, os gráficos de probabilidade normal e os *boxplots* exibidos na Figura 4.5 mostram que as três variáveis em estudo parecem ser normalmente distribuídas. Além disso, temos evidências suficientes para não rejeitar a

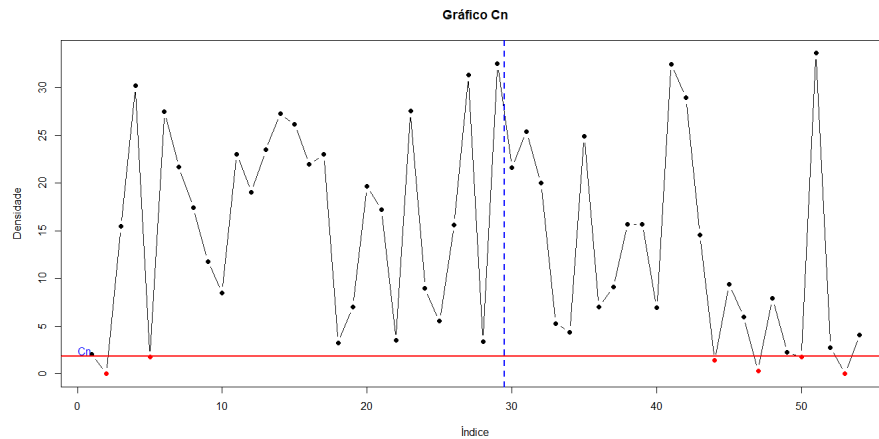


Figura 4.4 Gráfico de controle da densidade com identificação do nível c_n (linha horizontal contínua), bem como das fases I e II (linha vertical tracejada), considerando os dados bivariados de teste de qualidade de água.

Tabela 4.3 Medidas-resumo do conjunto de dados *bimetal1* ($n = 28$).

Variável	Mínimo	1º Quartil	Mediana	Média	3º Quartil	Máximo	D.P.
X	20.4200	20.8100	21.0700	21.0200	21.2200	21.7700	0.3031
Y	39.7300	39.9400	40.0300	40.0200	40.1100	40.3100	0.1362
Z	14.3500	14.9800	15.2200	15.1900	15.4100	15.7100	0.3260

hipótese de normalidade univariada, ao nível de 5% de significância, das variáveis deflexão ($W = 0,9803$, com p-valor = 0,8588), curvatura ($W = 0,9819$, com p-valor = 0,8927) e resistividade ($W = 0,9650$, com p-valor = 0,4562), bem como não rejeitamos a hipótese de normalidade trivariada dessas variáveis ($MVW = 0,9670$, com p-valor = 0,6062) (ver Tabela 4.4).

Tabela 4.4 Resultados dos testes de normalidade univariada e trivariada.

Variável	Estatística do Teste	p-valor
X	$W = 0.9803$	0.8588
Y	$W = 0.9819$	0.8927
Z	$W = 0.9650$	0.4562
(X, Y, Z)	$MVW = 0.9670$	0.6062

A Figura 4.6 mostra os gráficos de dispersão dessas três variáveis tomadas duas-a-duas. Note que existe uma aparente relação positiva de grau variando de fraco a moderado entre as combinações das variáveis, o que pode ser confirmado através dos coeficientes de correlação tau de Kendall a seguir: $\tau_n^{12} = \tau_n(X, Y) = 0,4400$, $\tau_n^{13} = \tau_n(X, Z) = 0,2005$, $\tau_n^{23} = \tau_n(Y, Z) = 0,4249$.

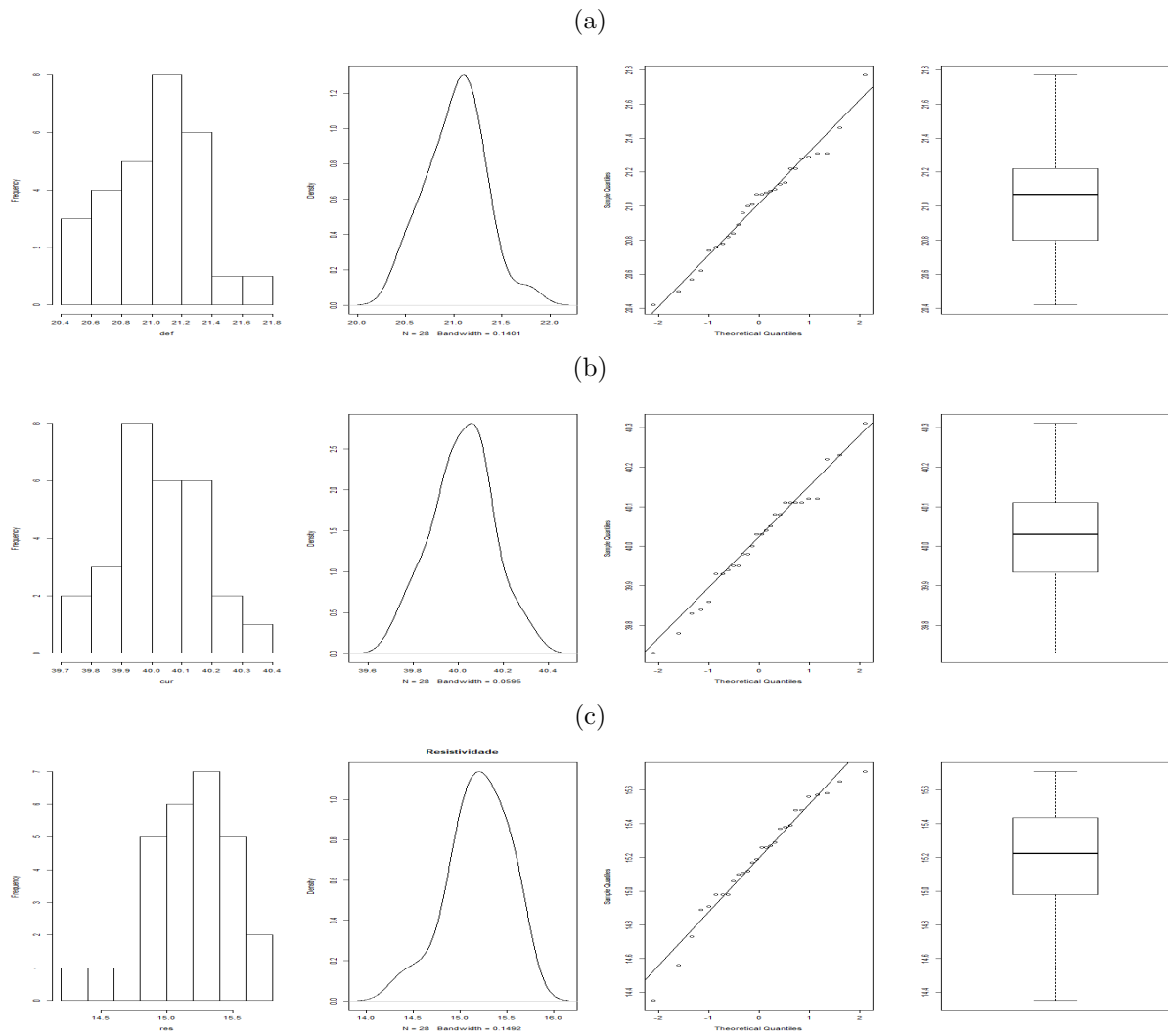


Figura 4.5 Histograma, gráfico de densidade Kernel, gráfico de probabilidade normal e *boxplot* das variáveis: (a) deflexão; (b) curvatura; (c) resistividade de termostatos bimetálicos em latão e aço.

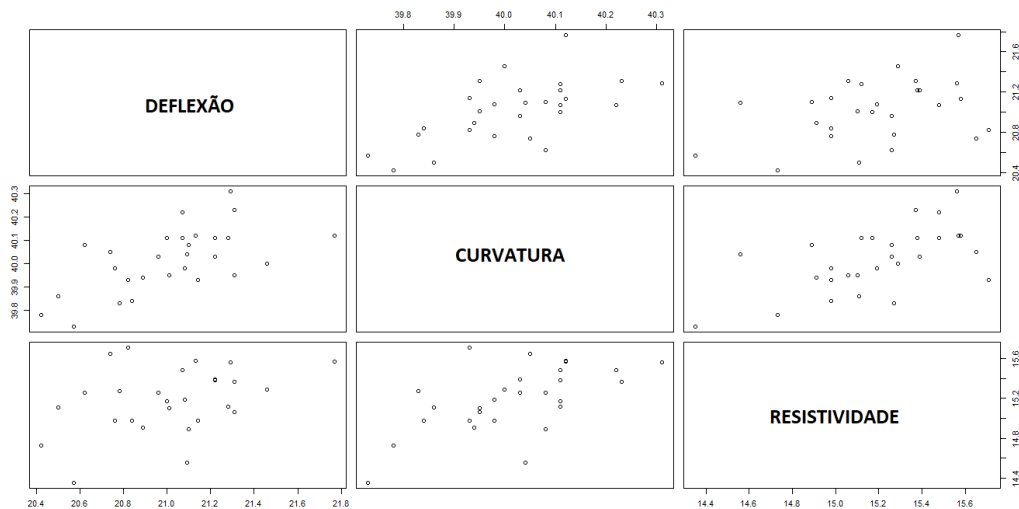
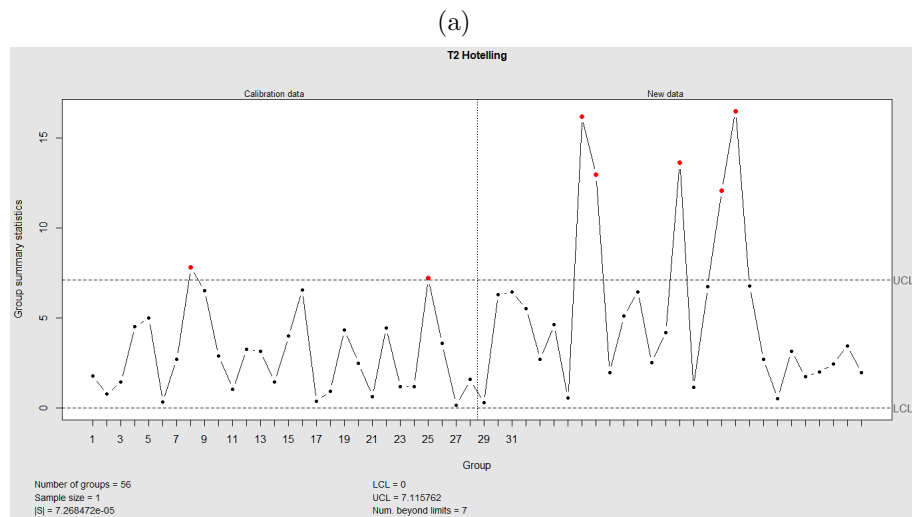


Figura 4.6 Matriz de dispersão entre as variáveis deflexão, curvatura e resistividade de termostatos bimetálicos em latão e aço.

Sob tais condições, o uso do gráfico de controle tradicional T^2 de Hotelling é altamente recomendado como ferramenta de detecção de mudanças no vetor de médias do processo. Logo, o apresentamos, com $\alpha = 0,05$, na Figura 4.7(a). Na fase I, esse gráfico identificou os pontos 8 e 25 como fora de controle. Durante o monitoramento na fase II, cinco alertas foram dados (observações 8, 9, 15, 18 e 19).

Seguindo a proposta aqui apresentada, estimamos os parâmetros das distribuições marginais normais univariadas via método da MV e, em seguida, usamos suas estimativas para estimar o(s) parâmetro(s) das cópulas candidatas (método IFM), cujos resultados estão disponíveis na Tabela 4.5 (para a cópula t , estimamos também o parâmetro graus de liberdade ν). Portanto, a cópula Gaussiana ($\hat{\rho}_1 = 0,6049$) sob estrutura de covariâncias autoregressiva de ordem 1 (ar1), foi a que apresentou melhor ajuste aos dados (AIC = $-17,4483$). Realizamos o teste de bondade do ajuste da cópula estimada, baseado na estatística de Cramér-von Mises (Genest *et al*, 2009), mediante o uso da função *gofCopula(.)* do pacote *copula* (Yan, 2007), em que não rejeitamos a hipótese de que os dados são oriundos da família Gaussiana com estrutura de dispersão ar1 ($S_n = 0,0182$, com p-valor = $0,9036$). Usamos então a abordagem via conjunto de níveis de densidade para obter o c_n baseado na família de cópula selecionada. O gráfico de controle c_n foi gerado de maneira análoga à apresentada na Seção 4.1. Seu desempenho usando a cópula Gaussiana para estimar o comportamento de dados que apresentam normalidade trivariada, foi muito semelhante ao do gráfico de controle T^2 de Hotelling (ver Figura 4.7(b)). Observamos também que o gráfico c_n aqui proposto identificou os mesmos pontos fora de controle que a abordagem clássica, em ambas as fases I e II.



(b)

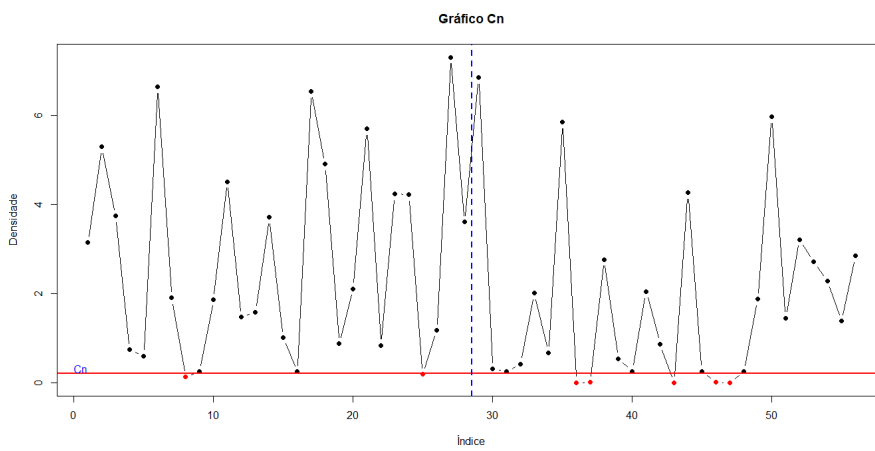


Figura 4.7 (a) Gráfico de controle T^2 de Hotelling, e (b) Gráfico de controle c_n para os dados de deflexão, curvatura e resistividade de termostatos bimetálicos em latão e aço (fases I e II).

Tabela 4.5 Critério AIC para as diferentes famílias de cópulas candidatas.

Cópula	AIC
Clayton	-12.7471
Frank	-11.6743
Gumbel	-9.9990
t (Toep)	-13.3292
t (ar1)	-15.2619
t (ex)	-12.0055
t (un)	-11.3818
Gaussiana (Toep)	-15.4702
Gaussiana (ar1)	-17.4483
Gaussiana (ex)	-14.0881
Gaussiana (un)	-13.4958

5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para finalizar o trabalho, neste capítulo apresentamos as principais considerações a respeito dos estudos de simulação e de caso realizados, e também sugestões para trabalhos futuros.

5.1 CONCLUSÕES

Grande parte dos procedimentos de CEP Multivariado baseia-se na suposição de normalidade multivariada das variáveis do processo, como é o caso, por exemplo, do tradicional gráfico de controle T^2 de Hotelling. Entretanto, quando a distribuição do vetor aleatório é não-normal multivariada, é expresso na literatura que esse procedimento não se adapta/aplica. O presente trabalho propõe o uso de regiões de tolerância estimadas sob a abordagem de conjunto de níveis de densidade como ferramenta de detecção de mudanças no vetor de médias do processo, quando os dados são originados de distribuições não-normais multivariadas. Para tanto, sugerimos o uso de funções cópula para modelar a dependência entre as distribuições marginais, variando o grau de associação entre as variáveis, a magnitude das mudanças ocorridas no vetor de médias e famílias de cópulas paramétricas e não-paramétricas.

Inicialmente, realizamos um estudo de simulação (recuperação de parâmetros) usando o método clássico da inferência para as marginais (ou método IFM), em que, primeiramente, são estimados os parâmetros das distribuições marginais através da MV e, posteriormente, carrega-se esses resultados obtidos para estimar o(s) parâmetro(s) da cópula por meio da máxima pseudo-verossimilhança. Estimativas de médias, desvios-padrão (ou erros-padrão), bem como o Viés e o EQM foram usados para analisar o comportamento dos EMVs obtidos pelo método IFM. Em seguida, regiões de tolerância foram estimadas com base na modelagem de cópulas para situações completamente paramétricas, semi-paramétricas e não-paramétricas, e também comparadas com a regra T^2 de Hotelling. À medida em que as distribuições marginais se distanciavam da distribuição normal, a regra T^2 revelou-se falha/limitada como ferramenta de detecção de mudança. Isso ficou mais evidente conforme o grau de associação entre as variáveis aumentava. Regiões de tolerância contruídas a partir de cópulas com marginais Kernel Gaussiano, bem como estimadas através da cópula não-paramétrica sob transformação Kernel Clássica, também se

mostraram melhor ajustadas à região teórica do que a região construída sob a abordagem T^2 de Hotelling para dados não-normais multivariados.

Outro estudo de simulação realizado teve o intuito de mensurar e comparar a qualidade dos ajustes feitos através das funções cópula com o tradicional gráfico T^2 de Hotelling. Para tanto, utilizamos estimativas do ARL e SDRL quando o processo estava sob controle, e quando ocorreram mudanças nas médias de cada variável separada e simultaneamente. As mudanças estudadas foram de 0,25; 0,50; 0,75; 1,00; 2,00; 3,00 e 4,00 unidades. Os resultados obtidos corroboraram aqueles encontrados pelo estudo gráfico da região de tolerância. Nos casos paramétricos bivariados com distribuições marginais não-normais, a família de cópulas de Clayton (que deu origem aos dados) obteve os melhores desempenhos, especialmente quando havia forte dependência entre as variáveis. No caso da normalidade bivariada, a cópula Gaussiana apresentou valores de ARL_0 bem próximos dos obtidos pelo T^2 , que se adequa muito bem independente do grau de associação. Ademais, a cópula detectou mudanças sutis mais rapidamente, caso em que o T^2 não é indicado. Nos contextos semi-paramétricos e paramétricos, a supremacia das funções cópula só ficam evidentes quando o grau de dependência é moderado ou forte, o que também ocorre para o caso trivariado semi-paramétrico.

Por fim, a aplicação da metodologia proposta ao conjunto de dados bivariados referentes ao pH e níveis de fosfato medidos em um teste de qualidade de água, em que uma das distribuições marginais era assimétrica, permitiu a construção da região de tolerância baseada na cópula de Clayton, a qual se ajustou bem aos dados. Apresentamos também uma proposta de Gráfico de Controle c_n , que identificou mudanças no processo de maneira análoga à região de tolerância. O caso trivariado foi explorado num conjunto de dados relacionados à medidas de deflexão, curvatura e resistividade de termostatos bi-metálicos em latão e aço com distribuição normal multivariada. Aplicamos a tradicional regra T^2 de Hotelling e comparamos com o gráfico c_n , sendo que ambos indentificaram as mesmas mudanças ocorridas no vetor de médias do processo. Ressaltamos, no entanto, que a proposta de gráfico de controle apresentada nesta dissertação produziu resultados satisfatórios em situações com ou sem normalidade multivariada dos dados.

5.2 PROPOSTAS FUTURAS

Com base nos achados deste trabalho, uma série de estudos podem ser propostos para complemento e aprimoramento da abordagem apresentada. Por exemplo:

- Inserir as técnicas aqui propostas no *software* **CEP Online** (Louzada *et al*, 2019), para uso dinâmico e disseminação da abordagem via cópulas;
- Aplicar a metodologia proposta a mais processos de produção reais, de preferência cujos dados tenham sido coletados recentemente;
- Estender as simulações, considerando outras famílias de cópulas com características distintas;
- Explorar também os casos de dependência negativa entre as variáveis;

- Quando na situação semi-paramétrica, uma extensão da metodologia pode considerar a seleção apropriada dos parâmetros do Kernel empregado, bem como gerar combinação entre a função Kernel empregada e os tipos de transformações possíveis;
- Para as propostas multivariadas ($d > 2$), estudar o desempenho do gráfico de controle c_n para detecção visual de mudanças no vetor de médias;
- Estender a proposta não-paramétrica para o caso trivariado, considerando o procedimento sugerido por Nagler (2018);
- Por fim, desenvolver medidas para avaliação da capacidade de processos multivariados baseada em funções cópula.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Akaike, H. (1977). On entropy maximization principle. In *Applications of Statistics*, P.R. Krishnaiah (ed.), North-Holland, Amsterdam, 27-41.
- Anjos, U.U.; Ferreira, F.H.; Kolev, N.V.; Mendes, B.V.M. (2004). Modelando Dependência via Cópulas. Minicurso do 16º SINAPE, Caxambu, MG.
- Baddeley, A.; Turner, R. (2005). spatstat: An R Package for Analyzing Spatial Point Patterns. *Journal of Statistical Software* 12(6):1-42.
- Baíllo, A.; Cuesta-Albertos, J.A.; Cuevas, A. (2001). Convergence rates in nonparametric estimation of level sets. *Statistics and Probability Letters* 53(1):27-35.
- Baíllo, A.; Cuevas, A. (2006). Parametric versus nonparametric tolerance regions in detection problems. *Computational Statistics* 21(3-4):523-536.
- Boone, J.M. (2010). Contributions to multivariate control charting: studies of the Z chart and four nonparametric charts. Dissertation (Doctorate degree of Philosophy), Department of Information Systems, Statistics, and Management Science in the Graduate School of The University of Alabama. Tuscaloosa, Alabama.
- Box, G.; Cox, D. (1964). An Analysis of Transformations. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, 26(2):211-252.
- Busababodhin, P.; Amphanthong, P. (2016). Copula modelling for multivariate statistical process control: a review. *Communications for Statistical Applications and Methods* 23:497-515.
- Cadre, B.; Pelletier, B.; Pudlo, P. (2013). Estimation of density level sets with a given probability content. *Journal of Nonparametric Statistics* 25(1):261-272.
- Charpentier, A.; Fermanian, J.D.; Scaillet, O. (2006). The Estimation of Copulas: Theory and Practice In Rank, J. (ed.), *Copulas: From Theory to Application in Finance*. Risk Books.
- Clayton, D.G.; Cuzick, J. (1985). Multivariate generalizations of the proportional hazards model (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society, Series A* 148(2):82-117.

Clayton, D.G. (1978). A model for association in bivariate life-tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence. *Biometrika* 65(1):141–151.

Crosier, R.B. (1988). Multivariate generalizations of cumulative sum quality-control schemes. *Technometrics* 30(3):291-303.

Ferreira, P.H.; Louzada, F. (2019). Extending the inference function for augmented margins method to implement trivariate Clayton copula-based SUR Tobit models. *Communications in Statistics - Theory and Methods* 1-27.

Fisher, N.I. (1997). Copulas. In S. Kotz, C. B. Read, and D. L. Banks, eds. *Encyclopedia of Statistical Sciences*, John Wiley & Sons.

Frisén, M. (2011). On multivariate control charts. *Produção* 21(2):235-241.

Fuchs, C.; Kenett, R.S. (1998). *Multivariate quality control. Theory and Applications*. Marcel Dekker, New York.

Geenens, G.; Charpentier, A.; Paindaveine, D. (2017). Probit Transformation for Non-parametric Kernel Estimation of the Copula Density. *Bernoulli* 23(3):1848–1873.

Genest, C.; Ghoudi, K.; Rivest, L.-P. (1995). A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions. *Biometrika* 82(3):543-552.

Genest, C.; Neslehová, J.; Ghorbal, N.B. (2011). Estimators based on Kendall's tau in multivariate copula models. *Australian and New Zealand Journal of Statistics* 53(2):157-177.

Genest, C.; Rémillard, B.; Beaudoin, D. (2009). Goodness-of-fit tests for copulas: A review and a power study. *Insurance: Mathematics and Economics* 44(2):199–214.

Gijbels, I.; Mielniczuk, J. (1990). Estimating the Density of a Copula Function. *Communications in Statistics – Theory and Methods* 19(2):445–464.

Gonzalez-Estrada, E.; Villasenor-Alva, J.A. (2009). A generalization of Shapiro-Wilk's test for multivariate normality. *Communications in Statistics: Theory and Methods* 38(11):1870-1883.

Ho, L.L.; Fernandes, F.H.; Bourguignon, M. (2018). Control charts to monitor rates and proportions. *Quality and Reliability Engineering International* 35(1):74–83.

Holmes, D.S.; Mergen, A.E. (1993). Improving the Performance of the T^2 Control Chart.

Quality Engineering 5(4):619-625.

Hotelling, H. (1947). Multivariate quality control. In Eisenhart, C.; Hastay, M.W.; Wallis, W.A. (Ed.). *Techniques of Statistical Analysis*. New York: McGraw-Hill.

Joe, H. (2014). *Dependence Modeling with Copulas*. Boca Raton: Chapman & Hall.

Joe, H.; Xu, J. (1996). The estimation method of inference functions for margins formula multivariate models. Technical Report 166, Department of Statistics, University of British Columbia.

Johnson, M.E.; Ramberg, J.S. (1978). Transformations of the multivariate normal distribution with applications to simulation. United States: N. p., Web.

Johnson, N.L. (1949). Bivariate Distributions Based on Simple Translation Systems. *Biometrika* 36(3/4):297-304.

Johnson, N.L. (1949). Systems of Frequency Curves Generated by Methods of Translation. *Biometrika* 36(1/2):149-176.

Korzenowski, A.L.; Werner, L. (2012). Probabilidade do erro do tipo I nas cartas \bar{X} e S de Shewhart sob não normalidade. *Produção* 22(4):807-816.

Kuvattana, S.; Sukparungsee, S.; Busababodhin, P.; Areepong, Y. (2015). Performance Comparison of Bivariate Copulas on the CUSUM and EWMA Control Charts. Conference: WCECS 2015, At San Francisco, USA, Volume: Vol II.

Louzada, F.; Diniz, C.; Ferreira, P.; Ferreira, E. (2013). *Controle Estatístico de Processos: Uma Abordagem Prática para Cursos de Engenharia e Administração*. LTC: Rio de Janeiro.

Louzada, F.; Ferreira, P.; Ara, A.; Godoy, C. (2019). CEP ONLINE: A WEB-ORIENTED EXPERT SYSTEM FOR STATISTICAL PROCESS CONTROL. *PESQUISA OPERACIONAL (ONLINE)* 39(1):177-204.

Lowry, C.A.; Woodall, W.H.; Champ, C.W.; Rigdon, S.E. (1992). A multivariate exponentially weighted moving average control chart. *Technometrics* 34(1):46-53.

Millar, R.M.G. In foreword to J. Cullen J. Hollingham (1987). *Implementing total quality*. Bedford: IFS Publications.

Montgomery, D.C. (2016). *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade*. 7 ed. LTC: Rio de Janeiro.

- Nagler, T. (2018). kdecopula: An R Package for the Kernel Estimation of Bivariate Copula Densities. *Journal of Statistical Software* 84(7):1-22.
- Nelsen, R.B. (2006). *An Introduction to Copulas*. 2 ed. Nova York: Springer.
- Oakes, D. (1994). Multivariate survival distribution. *Journal of Nonparametric Statistics* 3(3-4):343-354.
- Polansky, A.M. (2001). A smooth nonparametric approach to multivariate process capability. *Technometrics* 43(2):199-211.
- Psarakis, S. (2011). The use of Neural Networks in Statistical Process Control Charts. *Quality and Reliability Engineering International* 27(5):641-650.
- R Core Team (2016). R: A language and environment for statistical computing (version 3.3.2). R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. (<https://www.R-project.org/>).
- Santos-Fernández, E. (2012). *Multivariate Statistical Quality Control Using R*. Springer Science & Business Media.
- Shapiro, S.S.; Wilk, M.B. (1965). An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples). *Biometrika* 52(3/4):591-611.
- Shewhart, W.A. (1931). *Economic control of quality of manufactured product*. Bell System Technical Journal, New York: Van Nostrand.
- Shih J.H.; Louis T.A. (1995). Inferences on the association parameter in copula models for bivariate survival data. *Biometrics* 51(4):1384-1399.
- Sklar, A. (1973). Random variables, joint distributions, and copulas. *Kybernetika* 9(3):449-460.
- Sukparungsee, S.; Kuvattana, S.; Busababodhin, P.; Areepong, Y. (2016). Bivariate copulas on the Hotelling's T² control chart. *Communications in Statistics - Simulation and Computation* 47(2):413-419.
- Sukparungsee, S.; Kuvattana, S.; Busababodhin, P.; Areepong, Y. (2017). Multivariate copulas on the MCUSUM control chart. *Cogent Mathematics*.
- Trivedi, P.K.; Zimmer, D.M. (2005). Copula modelling: an introduction for practitioners. *Foundations and Trends in Econometrics* 1(1):1-111.
- Verdier, G. (2013). Application of copulas to multivariate control charts. *Journal of*

Statistical Planning and Inference 143(12):2151-2159.

Wang, W. (2012). A simulation-based multivariate Bayesian control chart for real time condition-based maintenance of complex systems. *European Journal of Operational Research* 218(3):726-734.

Waterhouse, M.; Smith, I.; Assareh, H.; Mengersen, K. (2010). Implementation of multivariate control charts in a clinical setting. *International Journal for Quality in Health Care* 22(5):408-414.

Yan, J. (2007). Enjoy the joy of copulas: with a package copula. *Journal of Statistical Software* 21(4):1-21.

Zucchini, W. (2003). *Applied smoothing techniques, Part 1 Kernel Density Estimation*.

APÊNDICE

Tabela 1 Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_2 = 0,25$ (Caso 2).

	Parâmetro	Tamanho amostral				
		$n = 50$	$n = 100$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$
Clayton	$\theta = 2/3$	0.6968(0.2809)	0.6698(0.1943)	0.6707(0.1259)	0.6673(0.0849)	0.6685(0.0612)
Normal	$\mu = 0$	-0.0076(0.1393)	0.0018(0.1026)	-0.0043(0.0631)	-0.0016(0.0446)	0.0012(0.0309)
	$\sigma^2 = 1$	0.9880(0.1005)	0.9906(0.0717)	0.9972(0.0447)	0.9963(0.0311)	0.9985(0.0219)
Weibull	$a = 1$	1.0305(0.1194)	1.0134(0.0818)	1.0054(0.0505)	1.0023(0.0364)	1.0018(0.0251)
	$b = 1$	1.0090(0.1535)	0.9978(0.1030)	1.0009(0.0697)	0.9998(0.0451)	0.9996(0.0345)

Tabela 2 Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_2 = 0,50$ (Caso 2).

	Parâmetro	Tamanho amostral				
		$n = 50$	$n = 100$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$
Clayton	$\theta = 2$	1.9969(0.5350)	1.9957(0.3652)	1.9966(0.2272)	2.0000(0.1606)	2.0024(0.1160)
Normal	$\mu = 0$	-0.0052(0.1425)	0.0024(0.1007)	-0.0001(0.0613)	-0.0009(0.0450)	-0.0001(0.0319)
	$\sigma^2 = 1$	0.9830(0.1031)	0.9940(0.0683)	0.9962(0.0442)	0.9971(0.0317)	0.9983(0.0223)
Weibull	$a = 1$	1.0293(0.1168)	1.0146(0.0818)	1.0073(0.0506)	1.0029(0.0340)	1.0017(0.0247)
	$b = 1$	0.9967(0.1520)	1.0081(0.1091)	1.0039(0.0658)	1.0005(0.0473)	1.0005(0.0334)

Tabela 3 Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_2 = 0,75$ (Caso 2).

	Parâmetro	Tamanho amostral				
		$n = 50$	$n = 100$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$
Clayton	$\theta = 6$	5.7604(1.2805)	5.8182(0.8622)	5.9249(0.5495)	5.9785(0.3978)	5.9921(0.2767)
Normal	$\mu = 0$	-0.0047(0.1413)	0.0001(0.1025)	0.0021(0.0664)	-0.0028(0.0446)	-0.0015(0.0315)
	$\sigma^2 = 1$	0.9847(0.0990)	0.9956(0.0726)	0.9988(0.0427)	0.9987(0.0316)	1.0000(0.0219)
Weibull	$a = 1$	1.0279(0.1209)	1.0111(0.0815)	1.0053(0.0488)	1.0015(0.0338)	0.9997(0.0240)
	$b = 1$	0.9979(0.1493)	1.0030(0.1068)	1.0018(0.0692)	0.9979(0.0475)	0.9983(0.0343)

Tabela 4 Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_2 = 0,25$ (**Caso 3**).

	Parâmetro	Tamanho amostral				
		$n = 50$	$n = 100$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$
Clayton	$\theta = 2/3$	0.6339(0.2347)	0.6475(0.1676)	0.6539(0.1045)	0.6618(0.0750)	0.6624(0.0556)
Weibull	$a = 1$	1.0242(0.1148)	1.0101(0.0802)	1.0065(0.0525)	1.0040(0.0353)	1.0014(0.0256)
	$b = 1$	1.0153(0.1522)	1.0018(0.1023)	1.0040(0.0665)	1.0010(0.0471)	1.0009(0.0326)
Weibull	$a = 1$	1.0268(0.1158)	1.0147(0.0795)	1.0057(0.0497)	1.0030(0.0359)	1.0023(0.0251)
	$b = 1$	1.0083(0.1488)	1.0013(0.1050)	1.0010(0.0678)	1.0019(0.0472)	1.0006(0.0343)

Tabela 5 Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_2 = 0,50$ (**Caso 3**).

	Parâmetro	Tamanho amostral				
		$n = 50$	$n = 100$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$
Clayton	$\theta = 2$	1.8999(0.3759)	1.9331(0.2706)	1.9647(0.1817)	1.9911(0.1260)	1.9908(0.0851)
Weibull	$a = 1$	1.0301(0.1126)	1.0134(0.0821)	1.0060(0.0503)	1.0025(0.0349)	1.0017(0.0248)
	$b = 1$	1.0075(0.1521)	1.0009(0.1094)	1.0009(0.0674)	1.0016(0.0447)	1.0001(0.0328)
Weibull	$a = 1$	1.0321(0.1201)	1.0131(0.0829)	1.0055(0.0488)	1.0015(0.0345)	1.0026(0.0248)
	$b = 1$	1.0038(0.1557)	1.0017(0.1125)	1.0034(0.0690)	1.0030(0.0462)	1.0002(0.0336)

Tabela 6 Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_2 = 0,75$ (**Caso 3**).

	Parâmetro	Tamanho amostral				
		$n = 50$	$n = 100$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$
Clayton	$\theta = 6$	5.4737(0.7420)	5.6808(0.5727)	5.8307(0.3736)	5.9461(0.2725)	5.9736(0.1908)
Weibull	$a = 1$	1.0251(0.1174)	1.0153(0.0818)	1.0081(0.0501)	1.0015(0.0341)	1.0009(0.0247)
	$b = 1$	1.0058(0.1487)	1.0080(0.1068)	0.9995(0.0685)	1.0012(0.0463)	0.9985(0.0314)
Weibull	$a = 0.5$	1.0258(0.1157)	1.0172(0.0806)	1.0055(0.0504)	1.0014(0.0347)	1.0009(0.0239)
	$b = 1$	1.0048(0.1477)	1.0046(0.1064)	1.0028(0.0684)	1.0008(0.0455)	0.9985(0.0328)

Tabela 7 Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para dependência fraca (**Caso 4**).

	Parâmetro	Tamanho amostral				
		$n = 50$	$n = 100$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$
Normal	$\rho = 0.25$	0.2476(0.1441)	0.2474(0.1036)	0.2487(0.0657)	0.2493(0.0467)	0.2485(0.0323)
	$\mu = 0$	0.0018(0.1388)	0.0016(0.1003)	0.0019(0.0641)	0.0021(0.0451)	0.0018(0.0311)
	$\sigma^2 = 1$	0.9779(0.1990)	0.9882(0.1457)	0.9974(0.0941)	0.9990(0.0653)	0.9986(0.0453)
Normal	$\mu = 0$	-0.0030(0.1380)	0.0016(0.0963)	-0.0003(0.0613)	-0.0002(0.0446)	-0.0006(0.0305)
	$\sigma^2 = 1$	0.9890(0.1981)	0.9948(0.1396)	0.9976(0.0895)	0.9973(0.0633)	0.9975(0.0434)

Tabela 8 Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para dependência moderada (**Caso 4**).

	Parâmetro	Tamanho amostral				
		$n = 50$	$n = 100$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$
Normal	$\rho = 0.50$	0.4933(0.1571)	0.4953(0.1128)	0.4981(0.0718)	0.4989(0.0507)	0.4981(0.0351)
	$\mu = 0$	0.0013(0.1388)	0.0018(0.0998)	0.0018(0.0639)	0.0020(0.0452)	0.0017(0.0310)
	$\sigma^2 = 1$	0.9790(0.1984)	0.9884(0.1455)	0.9973(0.0943)	0.9989(0.0658)	0.9983(0.0451)
Normal	$\mu = 0$	-0.0026(0.1377)	0.0017(0.0962)	-0.0000(0.0614)	0.0001(0.0448)	-0.0003(0.0305)
	$\sigma^2 = 1$	0.9889(0.1996)	0.9943(0.1403)	0.9974(0.0894)	0.9973(0.0629)	0.9973(0.0437)

Tabela 9 Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para dependência forte (**Caso 4**).

Parâmetro	Tamanho amostral				
	$n = 50$	$n = 100$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$
Normal $\rho = 0.75$	0.7391(0.1764)	0.7432(0.1265)	0.7476(0.0808)	0.7484(0.0568)	0.7477(0.0393)
Normal $\mu = 0$	0.0007(0.1383)	0.0019(0.0991)	0.0016(0.0636)	0.0018(0.0454)	0.0014(0.0309)
Normal $\sigma^2 = 1$	0.9806(0.1983)	0.9890(0.1450)	0.9971(0.0941)	0.9986(0.0659)	0.9979(0.0449)
Normal $\mu = 0$	-0.0021(0.1375)	0.0019(0.0963)	0.0003(0.0616)	0.0005(0.0451)	0.0000(0.0305)
Normal $\sigma^2 = 1$	0.9882(0.2008)	0.9935(0.1413)	0.9972(0.0897)	0.9974(0.0628)	0.9971(0.0440)

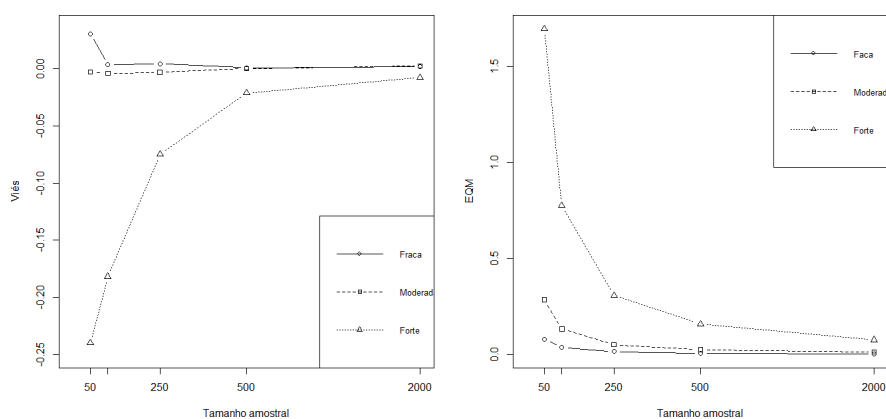


Figura 1 Viés e EQM das estimativas do **Caso 2**, de acordo com o grau de dependência.

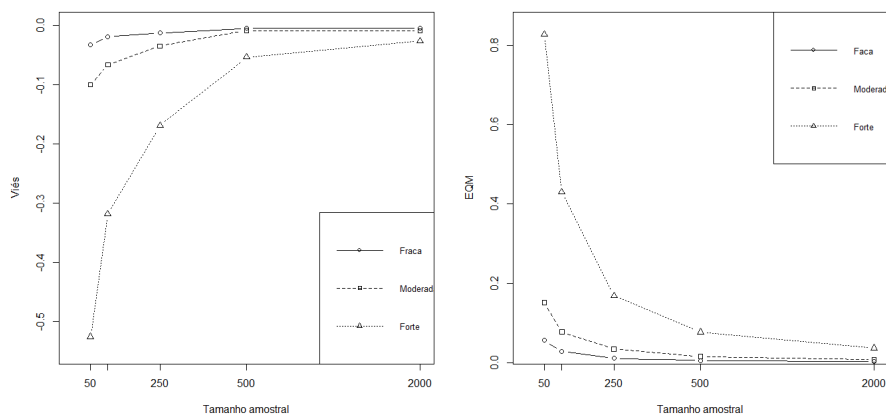


Figura 2 Viés e EQM das estimativas do **Caso 3**, de acordo com o grau de dependência.

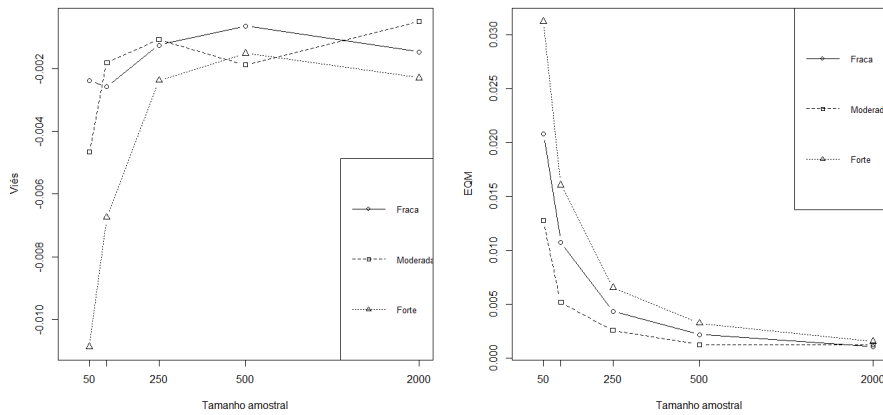


Figura 3 Viés e EQM das estimativas do Caso 4, de acordo com o grau de dependência.

Tabela 10 Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_3 = 0, 25$ (Caso 7).

Parâmetro	Tamanho amostral					
	$n = 50$	$n = 100$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$	
Clayton $\theta = 2/3$	0.6095(0.1429)	0.6486(0.1106)	0.6541(0.0705)	0.6587(0.0508)	0.6628(0.0365)	
Normal	$\mu = 0$	-0.0034(0.1447)	-0.0041(0.0968)	0.0033(0.0620)	0.0026(0.0449)	-0.0006(0.0312)
	$\sigma^2 = 1$	0.9950(0.1018)	0.9984(0.0674)	0.9986(0.0461)	0.9984(0.0315)	0.9974(0.0211)
Logística	$\mu = 1$	0.9843(0.5104)	0.9976(0.3417)	1.0038(0.2168)	0.9894(0.1548)	0.9979(0.1141)
	$s = 2$	1.9838(0.2452)	2.0022(0.1660)	1.9933(0.1045)	1.9977(0.0733)	1.9958(0.0537)
Weibull	$a = 1$	1.0269(0.1178)	1.0128(0.0820)	1.0067(0.0500)	1.0021(0.0351)	1.0002(0.0231)
	$b = 1$	0.9985(0.1438)	1.0019(0.1050)	0.9992(0.0647)	0.9987(0.0472)	1.0000(0.0337)

Tabela 11 Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_3 = 0, 50$ (Caso 7).

Parâmetro	Tamanho amostral					
	$n = 50$	$n = 100$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$	
Clayton $\theta = 2$	1.8295(0.2321)	1.9036(0.1721)	1.9648(0.1156)	1.9765(0.0869)	1.9869(0.0590)	
Normal	$\mu = 0$	-0.0090(0.1386)	0.0003(0.1016)	-0.0018(0.0636)	0.0002(0.0443)	0.0010(0.0318)
	$\sigma^2 = 1$	0.9950(0.1025)	0.9943(0.0686)	0.9969(0.0451)	0.9987(0.0310)	1.0005(0.0229)
Logística	$\mu = 1$	0.9966(0.4997)	0.9927(0.3376)	0.9989(0.2247)	0.9931(0.1535)	1.0012(0.1080)
	$s = 2$	1.9639(0.2345)	1.9825(0.1643)	1.9943(0.1041)	1.9987(0.0743)	1.9985(0.0552)
Weibull	$a = 1$	1.0271(0.1165)	1.0149(0.0823)	1.0057(0.0515)	1.0018(0.0363)	1.0010(0.0249)
	$b = 1$	0.9972(0.1437)	0.9996(0.1089)	1.0016(0.0671)	1.0003(0.0462)	1.0001(0.0329)

Tabela 12 Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_3 = 0, 75$ (Caso 7).

Parâmetro	Tamanho amostral					
	$n = 50$	$n = 100$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$	
Clayton $\theta = 6$	5.2216(0.5226)	5.6009(0.4056)	5.8254(0.2586)	5.9014(0.1939)	5.9556(0.1370)	
Normal	$\mu = 0$	0.0041(0.1372)	-0.0033(0.1024)	0.0010(0.0641)	0.0003(0.0445)	0.0007(0.0319)
	$\sigma^2 = 1$	0.9977(0.1025)	0.9973(0.0700)	0.9997(0.0457)	0.9983(0.0309)	0.9986(0.0223)
Logística	$\mu = 1$	1.0195(0.4839)	0.9899(0.3603)	0.9991(0.2176)	1.0010(0.1519)	1.0026(0.1080)
	$s = 2$	1.9883(0.2404)	1.9935(0.1667)	1.9987(0.1045)	1.9953(0.0740)	1.9972(0.0515)
Weibull	$a = 1$	1.0262(0.1213)	1.0105(0.0828)	1.0048(0.0511)	1.0032(0.0355)	1.0016(0.0247)
	$b = 1$	1.0085(0.1465)	0.9994(0.1034)	1.0007(0.0664)	1.0011(0.0473)	1.0008(0.0334)

Tabela 13 Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_3 = 0, 25$ (Caso 8).

	Parâmetro	Tamanho amostral				
		$n = 50$	$n = 100$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$
Clayton	$\theta = 2/3$	0.6266(0.1540)	0.6422(0.1139)	0.6527(0.0706)	0.6642(0.0524)	0.6633(0.0365)
Weibull	$a = 1$	1.0371(0.1216)	1.0149(0.0839)	1.0059(0.0484)	1.0030(0.0335)	1.0021(0.0251)
	$b = 1$	1.0061(0.1524)	1.0066(0.1090)	1.0008(0.0682)	0.9982(0.0461)	0.9991(0.0338)
Weibull	$a = 1$	1.0291(0.1174)	1.0118(0.0817)	1.0091(0.0491)	1.0032(0.0336)	1.0026(0.0243)
	$b = 1$	1.0066(0.1498)	1.0056(0.1059)	1.0021(0.0672)	0.9986(0.0459)	1.0011(0.0339)
Weibull	$a = 1$	1.0297(0.1163)	1.0154(0.0795)	1.0082(0.0517)	1.0024(0.0359)	1.0014(0.0255)
	$b = 1$	1.0088(0.1480)	1.0015(0.1064)	1.0025(0.0666)	1.0003(0.0471)	1.0001(0.0337)

Tabela 14 Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_3 = 0, 50$ (Caso 8).

	Parâmetro	Tamanho amostral				
		$n = 50$	$n = 100$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$
Clayton	$\theta = 2$	1.8442(0.2489)	1.9149(0.1735)	1.9706(0.1221)	1.9849(0.0827)	1.9932(0.0602)
Weibull	$a = 1$	1.0275(0.1139)	1.0112(0.0794)	1.0034(0.0504)	1.0019(0.0359)	1.0007(0.0248)
	$b = 1$	1.0023(0.1511)	0.9968(0.1039)	0.9997(0.0648)	1.0022(0.0486)	0.9997(0.0335)
Weibull	$a = 1$	1.0265(0.1133)	1.0123(0.0784)	1.0036(0.0489)	1.0024(0.0345)	1.0006(0.0255)
	$b = 1$	1.0095(0.1509)	0.9972(0.1058)	1.0007(0.0640)	1.0023(0.0482)	0.9995(0.0341)
Weibull	$a = 1$	1.0307(0.1195)	1.0141(0.0818)	1.0044(0.0489)	1.0013(0.0353)	1.0010(0.0248)
	$b = 1$	1.0006(0.1441)	0.9954(0.1032)	1.0005(0.0676)	1.0027(0.0486)	0.9993(0.0345)

Tabela 15 Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_3 = 0, 75$ (Caso 8).

	Parâmetro	Tamanho amostral				
		$n = 50$	$n = 100$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$
Clayton	$\theta = 6$	5.3410(0.5260)	5.6720(0.3865)	5.8167(0.2668)	5.9017(0.1818)	5.9486(0.1349)
Weibull	$a = 1$	1.0238(0.1184)	1.0093(0.0766)	1.0081(0.0503)	1.0033(0.0342)	1.0016(0.0245)
	$b = 1$	1.0014(0.1525)	1.0016(0.1027)	1.0044(0.0675)	1.0006(0.0481)	1.0005(0.0339)
Weibull	$a = 1$	1.0241(0.1223)	1.0120(0.0800)	1.0070(0.0512)	1.0026(0.0349)	1.0021(0.0246)
	$b = 1$	1.0007(0.1509)	1.0015(0.1031)	1.0061(0.0693)	1.0017(0.0471)	0.9997(0.0333)
Weibull	$a = 1$	1.0232(0.1193)	1.0082(0.0770)	1.0072(0.0509)	1.0036(0.0351)	1.0017(0.0246)
	$b = 1$	1.0017(0.1561)	1.0027(0.1054)	1.0057(0.0681)	1.0005(0.0477)	1.0000(0.0333)

Tabela 16 Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para dependência fraca (Caso 9).

	Parâmetro	Tamanho amostral				
		$n = 50$	$n = 100$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$
Normal	$\rho_{12} = 0.25$	0.2395(0.1449)	0.2464(0.1021)	0.2473(0.0637)	0.2497(0.0462)	0.2499(0.0337)
	$\rho_{13} = 0.25$	0.2439(0.1449)	0.2484(0.1033)	0.2501(0.0656)	0.2482(0.0470)	0.2484(0.0340)
	$\rho_{23} = 0.25$	0.2424(0.1440)	0.2453(0.1068)	0.2473(0.0671)	0.2487(0.0464)	0.2494(0.0308)
Normal	$\mu = 0$	-0.0037(0.1424)	-0.0008(0.1020)	0.0013(0.0646)	0.0018(0.0455)	-0.0006(0.0324)
	$\sigma^2 = 1$	0.9841(0.1927)	0.9922(0.1353)	0.9975(0.0892)	0.9955(0.0634)	0.9983(0.0441)
Normal	$\mu = 0$	-0.0051(0.1379)	-0.0003(0.1011)	-0.0004(0.0604)	-0.0018(0.0445)	0.0011(0.0313)
	$\sigma^2 = 1$	0.9717(0.2006)	0.9831(0.1337)	0.9995(0.0931)	0.9961(0.0637)	0.9982(0.0450)
Normal	$\mu = 0$	-0.0001(0.1428)	0.0016(0.1012)	0.0000(0.0631)	-0.0000(0.0451)	0.0023(0.0303)
	$\sigma^2 = 1$	0.9640(0.1904)	0.9843(0.1348)	0.9984(0.0920)	0.9970(0.0632)	1.0005(0.0450)

Tabela 17 Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para dependência moderada (Caso 9).

	Parâmetro	Tamanho amostral				
		$n = 50$	$n = 100$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$
Normal	$\rho_{12} = 0.50$	0.4892(0.1568)	0.4959(0.1089)	0.4957(0.0720)	0.5005(0.0500)	0.5005(0.0347)
	$\rho_{13} = 0.50$	0.4857(0.1590)	0.4984(0.1101)	0.4947(0.0701)	0.4991(0.0491)	0.5002(0.0346)
	$\rho_{23} = 0.50$	0.4851(0.1564)	0.4961(0.1090)	0.4979(0.0713)	0.4996(0.0493)	0.4995(0.0344)
Normal	$\mu = 0$	0.0099(0.1444)	0.0039(0.1024)	-0.0031(0.0628)	-0.0004(0.0441)	0.0010(0.0312)
	$\sigma^2 = 1$	0.9872(0.1993)	0.9885(0.1382)	0.9976(0.0900)	0.9923(0.0603)	0.9986(0.0435)
Normal	$\mu = 0$	0.0046(0.1382)	0.0041(0.1003)	-0.0017(0.0617)	-0.0011(0.0451)	0.0008(0.0309)
	$\sigma^2 = 1$	0.9817(0.1948)	0.9879(0.1440)	0.9969(0.0881)	0.9941(0.0617)	0.9998(0.0460)
Normal	$\mu = 0$	0.0063(0.1421)	-0.0015(0.0978)	-0.0002(0.0629)	-0.0005(0.0452)	0.0011(0.0301)
	$\sigma^2 = 1$	0.9840(0.1999)	0.9797(0.1413)	0.9971(0.0877)	0.9967(0.0616)	0.9999(0.0427)

Tabela 18 Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para dependência forte (**Caso 9**).

Parâmetro	Tamanho amostral					
	$n = 50$	$n = 100$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$	
$\rho_{12} = 0.75$	0.7345(0.1727)	0.7423(0.1252)	0.7436(0.0767)	0.7509(0.0550)	0.7496(0.0400)	
$\rho_{13} = 0.75$	0.7364(0.1746)	0.7444(0.1267)	0.7418(0.0783)	0.7512(0.0545)	0.7503(0.0401)	
$\rho_{23} = 0.75$	0.7330(0.1762)	0.7383(0.1261)	0.7437(0.0780)	0.7513(0.0554)	0.7502(0.0400)	
Normal	$\mu = 0$	0.0009(0.1463)	0.0044(0.1003)	0.0004(0.0632)	0.0002(0.0452)	0.0002(0.0306)
	$\sigma^2 = 1$	0.9887(0.1972)	0.9925(0.1436)	0.9981(0.0906)	0.9968(0.0635)	0.9979(0.0458)
Normal	$\mu = 0$	-0.0030(0.1480)	0.0013(0.1030)	0.0007(0.0630)	0.0000(0.0459)	0.0016(0.0316)
	$\sigma^2 = 1$	0.9822(0.1951)	0.9893(0.1376)	0.9970(0.0890)	0.9980(0.0615)	0.9997(0.0453)
Normal	$\mu = 0$	0.0012(0.1410)	0.0007(0.1008)	0.0029(0.0638)	0.0001(0.0462)	0.0005(0.0321)
	$\sigma^2 = 1$	0.9738(0.1944)	0.9898(0.1406)	1.0027(0.0877)	0.9957(0.0632)	0.9969(0.0452)

Tabela 19 Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_3 = 0, 25$ (**Caso 10**).

Kernel	Parâmetro	Tamanho amostral				
		$n = 50$	$n = 100$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$
Gaussiano	$\theta = 2/3$	0.6790(0.1634)	0.6759(0.1145)	0.6756(0.0698)	0.6689(0.0500)	0.6662(0.0363)
Retangular	$\theta = 2/3$	0.6752(0.1657)	0.6800(0.1186)	0.6712(0.0688)	0.6677(0.0468)	0.6670(0.0351)
Triangular	$\theta = 2/3$	0.6768(0.1622)	0.6762(0.1132)	0.6695(0.0708)	0.6694(0.0508)	0.6654(0.0345)
Epanechnikov	$\theta = 2/3$	0.6785(0.1679)	0.6698(0.1100)	0.6725(0.0716)	0.6653(0.0494)	0.6661(0.0354)
<i>Biweight</i>	$\theta = 2/3$	0.6729(0.1630)	0.6702(0.1094)	0.6700(0.0724)	0.6687(0.0512)	0.6689(0.0361)

Tabela 20 Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_3 = 0, 50$ (**Caso 10**).

Kernel	Parâmetro	Tamanho amostral				
		$n = 50$	$n = 100$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$
Gaussiano	$\theta = 2$	2.0447(0.2770)	2.0128(0.1818)	2.0084(0.1198)	2.0067(0.0864)	1.9999(0.0582)
Retangular	$\theta = 2$	2.0332(0.2597)	2.0061(0.1854)	2.0044(0.1154)	2.0079(0.0857)	2.0027(0.0592)
Triangular	$\theta = 2$	2.0267(0.2783)	2.0088(0.1889)	2.0052(0.1171)	2.0016(0.0814)	1.9997(0.0595)
Epanechnikov	$\theta = 2$	2.0168(0.2729)	2.0125(0.1943)	2.0046(0.1213)	2.0016(0.0828)	1.9965(0.0602)
<i>Biweight</i>	$\theta = 2$	2.0279(0.2696)	2.0117(0.1886)	1.9977(0.1216)	2.0015(0.0855)	1.9981(0.0598)

Tabela 21 Média e desvio-padrão (entre parênteses) das $M = 1.000$ estimativas, para $\tau_3 = 0, 75$ (**Caso 10**).

Kernel	Parâmetro	Tamanho amostral				
		$n = 50$	$n = 100$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$
Gaussiano	$\theta = 6$	6.0497(0.6025)	6.0217(0.4301)	6.0102(0.2718)	6.0092(0.1885)	6.0004(0.1305)
Retangular	$\theta = 6$	6.0702(0.5742)	6.0402(0.4273)	6.0064(0.2599)	6.0204(0.1861)	6.0079(0.1357)
Triangular	$\theta = 6$	6.0768(0.6076)	6.0272(0.4314)	5.9982(0.2648)	6.0035(0.1904)	6.0081(0.1354)
Epanechnikov	$\theta = 6$	6.0593(0.5898)	6.0522(0.4154)	6.0099(0.2672)	6.0050(0.1826)	5.9981(0.1308)
<i>Biweight</i>	$\theta = 6$	6.0298(0.6005)	6.0240(0.4303)	6.0105(0.2653)	6.0063(0.1898)	6.0165(0.1338)

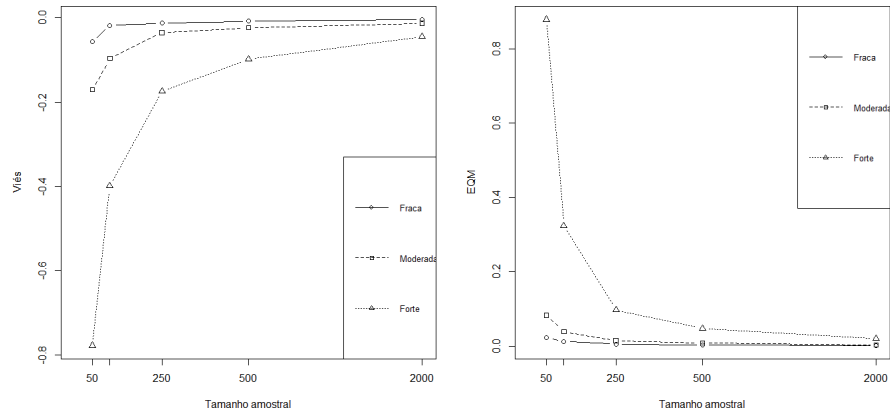


Figura 4 Viés e EQM das estimativas do **Caso 7**, de acordo com o grau de dependência.

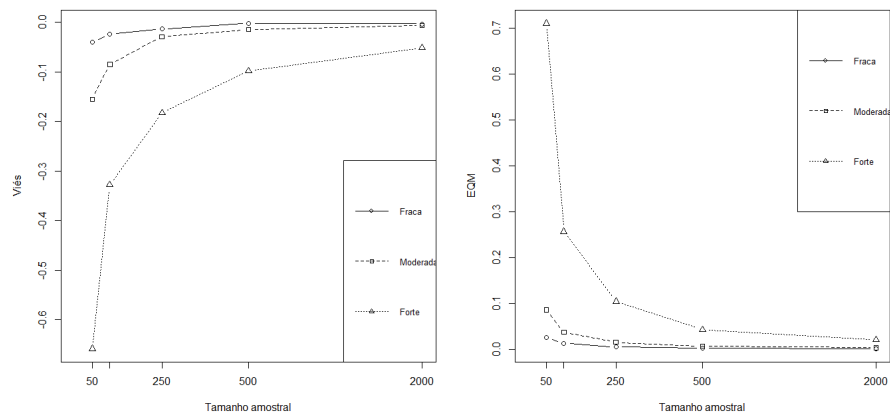


Figura 5 Viés e EQM das estimativas do **Caso 8**, de acordo com o grau de dependência.

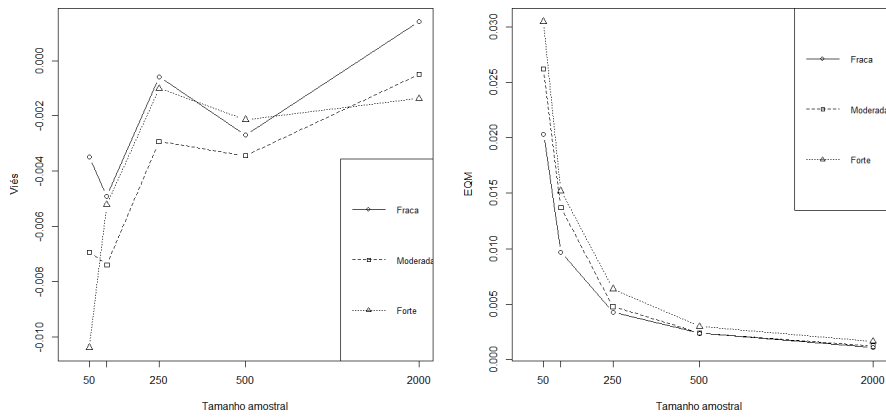


Figura 6 Viés e EQM das estimativas do **Caso 9**, de acordo com o grau de dependência.

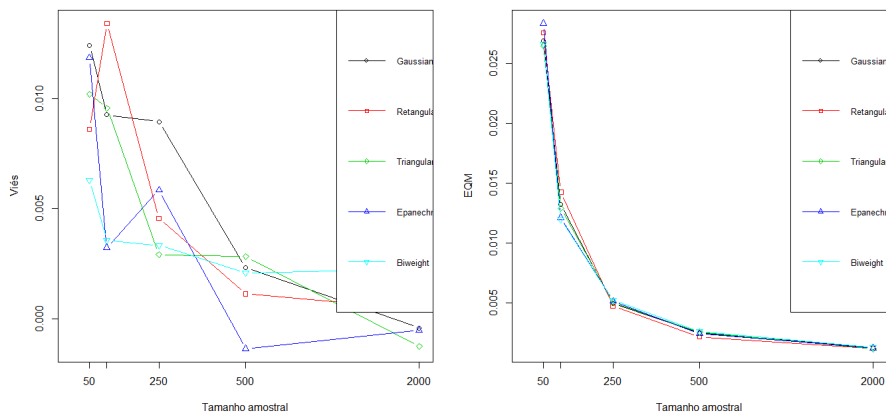


Figura 7 Viés e EQM das estimativas do **Caso 10**, para dependência fraca.

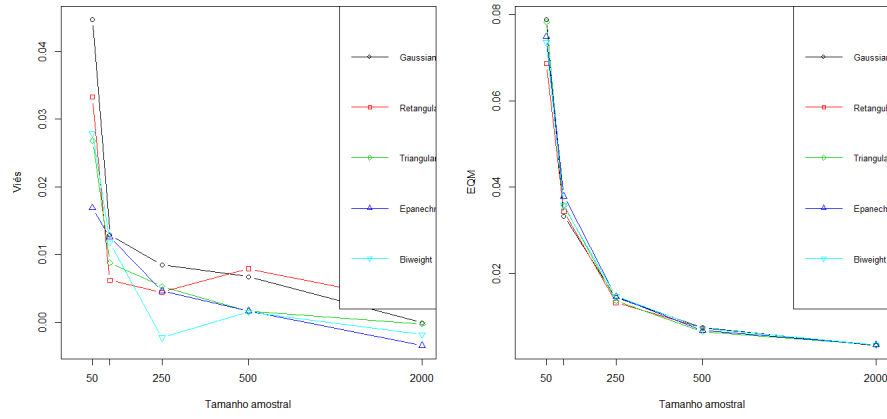


Figura 8 Viés e EQM das estimativas do **Caso 10**, para dependência moderada.

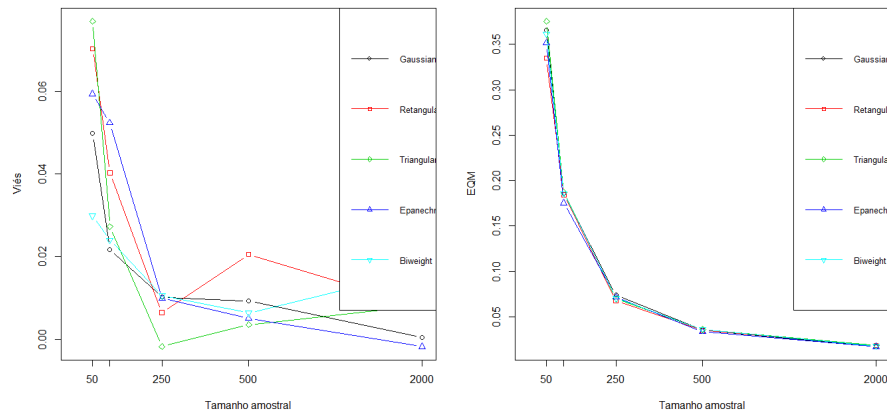


Figura 9 Viés e EQM das estimativas do **Caso 10**, para dependência forte.