



Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado



Contribuição na Teoria dos Difeomorfismos
Robustamente Transitivos

ELIVAN NERI LIMA

Orientadora: Dra. CRISTINA LIZANA ARANEDA

Salvador- Bahia
8 de Março de 2022

Contribuição na Teoria dos Difeomorfismos Robustamente Transitivos

Elivan Neri Lima

Dissertação apresentada ao Colegiado do Curso de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora



Prof^a. Dr^a. Cristina Lizana Araneda
(UFBA)



Prof. Dr. Vilton Pinheiro
(UFBA)



Prof. Dr. Pablo Carrasco
(UFMG)

Agradecimentos

Primeiramente agradeço aos meus pais, Eleneuza Cardoso Neri e Edvaldo Batista Lima, pelo suporte em todos os momentos, por serem o porto seguro em minha vida, e pelo amor que nunca faltou.

Agradeço a todos os meu amigos e amigas que me ajudaram nessa caminhada, e em especial a Sávio Santana, Janara Ramos e Joedson de Jesus, por me darem suporte e um teto pra ficar quando precisei, me possibilitando chegar até aqui.

Agradeço a professora Dra. Cristina Lizana Araneda por ter aceitado a missão de me orientar. Mostrando sempre disposição e paciência para ajudar nas dificuldades desta caminhada sem medir esforços.

Agradeço a todos os professores e colegas que de algumas forma me ajudaram na conclusão desse trabalho.

Agradeço a banca avaliadora formada pelo professor Dr. Vilton Pinheiro e Dr.Pablo Carrasco, por terem aceito o convite para avaliação e pelas contribuições feitas.

Agradeço a Universidade Federal da Bahia e o seu corpo docente que demonstrou estar comprometido com a qualidade e excelência do ensino.

Agradeço a agência financiadora FAPESB pelo apoio financeiro ao longo de todo o mestrado.

Resumo

Apresentamos um exemplo de um difeomorfismo C^1 -robustamente transitivo introduzido por P. Berger e P. Carrasco em 2014. Tal exemplo é um skew-product parcialmente hiperbólico com ação não trivial não hiperbólica na homologia, dinamicamente coerente e as fibras na direção central não admitem uma decomposição dominada em dois subfibrados.

Palavras chaves: Parcialmente Hiperbólico, dinamicamente coerente, robustamente transitivo.

Abstract

We present an example of a C^1 -robustly transitive diffeomorphism introduced by P. Berger and P. Carrasco in 2014. The example is a partially hyperbolic skew-product with non-trivial, non-hyperbolic action on homology, dynamically coherent and its fiber directions cannot be decomposed into two dominated expanded/contracted bundles.

Keywords: Partially hyperbolic, dynamically coherent, robustly transitive.

Title: Contribution to the Theory of Robustly Transitive Diffeomorphisms

Sumário

Introdução	v
1 Preliminares	1
1.1 Conceitos gerais de Dinâmica	1
1.2 Variedade Riemanniana	5
1.3 Espaço Tangente	7
1.4 Subvariedades	10
1.5 Toro n -dimensional	12
1.6 Transversalidade	14
2 Hiperbolicidade e Hiperbolicidade Parcial	18
2.1 Hiperbolicidade	18
2.2 Hiperbolicidade Parcial	39
3 Exemplo Berger-Carrasco	44
4 f_N é Robustamente Transitivo	50
4.1 Prova do Teorema Principal	58
Referências Bibliográficas	60

Introdução

Uma das principais motivações em Matemática é tentar descrever fenômenos que aparecem de forma natural em diversas áreas, como na física, química, biologia e outras mais. O presente trabalho é na área de Sistemas Dinâmicos, um ramo da Matemática originada pela pesquisa do comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais. Em particular, estamos interessados em estudar fenômenos que possam gerar comportamentos dinâmicos interessantes. Claramente, interessante é uma questão relativa. Em nosso caso, buscamos propriedades nos sistemas que persistem mediante perturbações, isto é, propriedades *robustas*.

Antes de continuar, fixemos o contexto no qual iremos trabalhar. Sejam M uma variedade Riemanniana compacta sem bordo e $Diff(M)$ o espaço dos C^1 -difeomorfismos em M , munido da topologia C^1 . Dado um difeomorfismo $f \in Diff(M)$ buscamos entender como se comportam as órbitas geradas por este sistema dinâmico, estudar as propriedades topológicas (dinâmicas) de f e se as mesmas persistem para difeomorfismos suficientemente próximos a f . Uma das propriedades mais estudadas, e que será o principal foco de nosso estudo, é a *transitividade*. Concretamente, f é transitivo se existe $x \in M$ tal que $\mathcal{O}_f^+(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ é denso em M .

Vamos comentar brevemente sobre o estado atual da arte da teoria dos Sistemas Dinâmicos. Pode-se dizer que o comportamento das órbitas é muito bem entendida para os chamados sistemas *uniformemente hiperbólicos*. Um conjunto compacto f -invariante $\Lambda \subset M$ é *hiperbólico* se para todo $p \in \Lambda$, o espaço tangente em p admite uma única decomposição, $T_p M = E_p^s \oplus E_p^u$, como soma de espaços Df -invariantes, onde a menos de adaptação da norma, a derivada contrai uniformemente em E_p^s e expande uniformemente em E_p^u . A teoria da hiperbolicidade foi introduzida por S. Smale, D. Anosov e Y. Sinai, ver, por exemplo, [1, 2] para detalhes. Em particular, os difeomorfismos cujo o conjunto hiperbólico é toda a variedade são conhecidos como *Difeomorfismos de Anosov*.

Uma propriedade importante para classificar difeomorfismos uniformemente hiper-

bólicos é o conceito de *estabilidade estrutural*. A noção de estabilidade estrutural foi inicialmente apresentada por Andronov e Pontryagin em 1937, e posteriormente foi generalizada. Falando a grosso modo, estruturalmente estável implica que as propriedades topológicas de um sistema dinâmico são robustas. Um resultado clássico da dinâmica hiperbólica é a equivalência entre estruturalmente estável e as propriedades *Axioma A* mais *transversalidade forte*. Ver definições 2.9, 2.10, 2.11.

Os Difeomorfismos de Anosov tem a propriedade de minimalidade, isto é, as folheações estáveis e instáveis são densas no espaço ambiente. Além disso, as suas variedades estáveis e instáveis se intersectam transversalmente (transversalidade forte). Esses sistemas são estruturalmente estáveis e, portanto, são *robustamente transitivos*. Sugerimos ao leitor ver detalhes no Capítulo 2.

As propriedades da teoria de hiperbolicidade não eram tão universais quanto se foi pensado. No intuito de abordar mais modelos com comportamento dinâmico que não poderiam ser descritos como hiperbólicos, mas que ainda mantinham essa propriedade em parte do seu comportamento, por volta dos anos 70, foi formulado uma noção mais fraca de comportamento hiperbólico. A teoria de difeomorfismos *parcialmente hiperbólicos* originou-se no trabalho de M. Brin e Y. Pesin, ver [4]. Uma noção relativamente parecida, *normally hyperbolic*, foi introduzida antes por M. Hirsch, C. Pugh e M. Shub em [7].

Existem diversos exemplos de difeomorfismos robustamente transitivos parcialmente hiperbólicos (não hiperbólicos). Alguns desses exemplos tem a propriedade de minimalidade das folheações instável e estável. O primeiro exemplo foi introduzido por M. Shub em \mathbb{T}^4 em 1971, ver [14]. Este exemplo é parcialmente hiperbólico e homotópico a um difeomorfismo de Anosov. Em particular, possui ação não hiperbólica na homologia, sendo ele o primeiro exemplo de difeomorfismo parcialmente hiperbólico robustamente transitivo. Outro exemplo clássico é devido ao R. Mañé, conhecido como o *Derivado de Anosov*, em \mathbb{T}^3 , ver [10]. Neste trabalho não iremos apresentar esses exemplos, no entanto sugerimos ao leitor que gostaria estudá-los ver [12].

P. Berger e P. Carrasco introduziram recentemente um exemplo de difeomorfismos robustamente transitivos parcialmente hiperbólicos em \mathbb{T}^4 , ver [3]. Concretamente, definiram o seguinte difeomorfismo

$$f_N : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$$

$$(x, y, z, w) \mapsto (s_N(x, y) + P_x \circ A^{[N]}(z, w), A^{[2N]}(z, w)),$$

onde s_N é o *Standard map* dado por

$$s_r : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$$

$$(x, y) \mapsto (2r \sin x + 2x - y, x),$$

$A \in SL(2, \mathbb{Z})$ é uma matriz hiperbólica, $P_x(x, y) = (x, 0)$, e $[N]$ é a parte inteira de N .

Este exemplo é um *skew-product* de classe C^1 parcialmente hiperbólico, com ação não trivial não hiperbólica na homologia. Uma propriedade importante é que suas fibras não admitem uma *decomposição dominada*, isto é, a direção central (bidimensional) não admite uma decomposição como soma direta de dois sub espaços invariantes. Ver Definição 2.16 e Observação 3.1 para detalhes.

Foi provado em [3] que, para N suficientemente grande, f_N é *não uniformemente hiperbólico*, isto é, seus expoentes de Lyapunov são Lesbesgue quase todo ponto não nulos. Em [11], D. Obata provou que esses mapas são *ergódicos* com relação a medida de Lesbegue. Em [6], P. Carrasco e D. Obata provaram que estes difeomorfismos são robustamente transitivos.

Nosso objetivo principal é estudar as propriedades deste exemplo. Mais precisamente, vamos provar que esses difeomorfismos são parcialmente hiperbólicos, dinamicamente coerentes e robustamente transitivos. Concretamente, provaremos o seguinte resultado.

Teorema Principal (Carrasco-Obata'2021). *Para N suficientemente grande, f_N é robustamente topologicamente transitiva. Ainda mais, f_N é robustamente topologicamente mixing.*

Para provar o teorema é feita uma abordagem diferente a realizada na prova da transitividade dos difeomorfismos de Anosov no toro, a qual é baseada na propriedade de minimalidade das folheações estáveis e instáveis. De fato, neste exemplo não é sabido se as folheações estáveis e instáveis são densas, apesar de termos um comportamento de tipo hiperbólico em grande parte da variedade.

A dissertação foi dividida em quatro capítulos, tentando que seja autocontido. O leitor que já tiver uma base em dinâmica hiperbólica e parcialmente hiperbólica, pode pular diretamente ao Capítulo 3. A organização do texto ficou da seguinte forma. O Capítulo 1 é dedicado a preliminares, onde introduziremos as noções e resultados básicos necessários envolvidos. No Capítulo 2, introduzimos as noções de hiperbolicidade e parcialmente hiperbólico, e apresentamos os Difeomorfismo de Anosov e provamos que esses sistemas são

robustamente transitivos. No Capítulo 3, introduzimos o exemplo construído por Berger-Carrasco e apresentamos algumas propriedades relevantes deste exemplo. Finalmente, o Capítulo 4 é dedicado a prova do Teorema Principal, isto é, provamos que o exemplo Berger-Carrasco é robustamente transitivo.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduziremos noções e resultados que precisaremos ao longo deste trabalho. Estudaremos exemplos de difeomorfismos de classe C^1 , $f : M \rightarrow M$, onde M é uma variedade diferenciável e f detém algumas propriedades que são preservadas em uma vizinhança que a contém. Mais precisamente, seja $Diff(M)$ o espaço dos C^1 -difeomorfismos $f : M \rightarrow M$ munido da topologia C^1 . Diremos que $f \in Diff(M)$ tem uma propriedade C^r -robusta se existe uma C^r -vizinhança de f de modo que todo elemento desta vizinhança satisfaz tal propriedade. Daqui em diante, fixaremos M como variedade Riemanniana e $f : M \rightarrow M$ como difeomorfismo de classe C^1 .

1.1 Conceitos gerais de Dinâmica

Nesta seção vamos definir conceitos gerais de dinâmica.

Definição 1.1 (Conjunto Invariante). *Seja M um espaço topológico, $f : M \rightarrow M$ e $U \subset M$. Dizemos que U é f -invariante para o futuro se*

$$f(U) \subset U,$$

e invariante para o passado se

$$f^{-1}(U) \subset U.$$

Se f é invertível, diremos que U é f -invariante se o for para o futuro e passado.

Definição 1.2 (Órbita). *A órbita positiva de x em relação a f é o conjunto*

$$\mathcal{O}_f^+(x) = \{f^n(x); n \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Se f é invertível, definimos a órbita negativa de x em relação a f como o conjunto

$$\mathcal{O}_f^-(x) = \{f^{-n}(x); n \in \mathbb{Z}^+\},$$

e chamamos de órbita completa de x com relação a f o conjunto

$$\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x); n \in \mathbb{Z}\}.$$

Definição 1.3 (Ponto fixo e periódico). *Seja M um espaço topológico e $f : M \rightarrow M$ uma aplicação. Dizemos que $x \in M$ é um ponto fixo de f se $f(x) = x$, e é um ponto periódico de período n se n é o menor inteiro positivo tal que $f^n(x) = x$. Denotamos por $Per(f)$ o conjunto dos pontos periódicos de f .*

Definição 1.4 (ω -limite e α -limite). *Seja $f : M \rightarrow M$ invertível. O conjunto ω -limite e α -limite de x em M são definidos da seguinte maneira, respectivamente,*

$$\begin{aligned}\omega(x, f) &= \{y \in M; \exists n_k \rightarrow \infty, f^{n_k}(x) \rightarrow y\}, \\ \alpha(x, f) &= \{y \in M; \exists n_k \rightarrow \infty, f^{-n_k}(x) \rightarrow y\}.\end{aligned}$$

Definição 1.5 (Conjunto limite). *Seja $f : M \rightarrow M$ invertível. O conjunto limite de f $\mathcal{L}(f)$ é definido da seguinte maneira*

$$\mathcal{L}(f) = \overline{\bigcup_{x \in M} \omega(x, f) \cup \alpha(x, f)}.$$

Definição 1.6 (Ponto não-errante). *Um ponto $x \in M$ é dito não errante, em relação a $f : M \rightarrow M$, se para toda vizinhança aberta U de x , existe $n \in \mathbb{N}$, tal que*

$$f^n(U) \cap U \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos não errantes de f é denotado por $\Omega(f)$.

Proposição 1.1. *Se $f : M \rightarrow M$ é um homeomorfismo, então*

$$Per(f) \subset \mathcal{L}(f) \subset \Omega(f).$$

Demonstração. Seja $x \in Per(f)$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$. Tomando $n_k = nk$ temos que $n_k \rightarrow \infty$ e $f^{n_k}(x) \rightarrow x$. Logo, $x \in \mathcal{L}(f)$.

Seja $x \in \mathcal{L}(f)$ e U um aberto contendo x . Temos que existe $p \in M$ tal que

$$U \cap \omega(p, f) \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad U \cap \alpha(p, f) \neq \emptyset.$$

Sem perda de generalidade, suponha que $U \cap \omega(p, f) \neq \emptyset$. Daí existe $n_k \rightarrow \infty$ tal que $f^{n_k}(p) \rightarrow x$, disso decorre que existe k_0 , tal que $n_k > n_{k_0}$ implica que $f^{n_k}(p) \in U$. Assim temos que $f^{n_k}(U) \cap U \neq \emptyset$ para todo $k > k_0$ o que conclui a prova. \square

Definição 1.7 (Transitividade). f é topologicamente transitivo se existe $x \in M$ tal que a órbita positiva $\mathcal{O}_f^+(x)$ é densa em M .

A proposição seguinte caracteriza transitividade em espaços métricos completos e sem pontos isolados.

Proposição 1.2. *Seja M um espaço métrico completo sem pontos isolados e $f : M \rightarrow M$ um homeomorfismo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. f é topologicamente transitivo.
2. Dados dois conjuntos abertos $U, V \subset M$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(U) \cap V \neq \emptyset$.
3. Existe um conjunto residual $R_1 \subset M$ tal que $\omega(x, f) = M$, para todo $x \in R_1$.
 $R \subset M$ é residual se $R = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, onde A_n é aberto e denso, para todo n .
4. Existe um conjunto residual $R_2 \subset M$ tal que $\alpha(x, f) = M$, para todo $x \in R_2$.

Demonstração.

(1) \Rightarrow (2) Seja $x \in M$ tal que $\mathcal{O}_f^+(x) = M$. Pela densidade da órbita dado dois abertos $U, V \subset M$ existem n, m tal que $f^n(x) \in U$ e $f^m(x) \in V$. Suponha por absurdo que para n fixo satisfazendo $f^n(x) \in U$, tem-se que $m < n$, sempre que $f^m(x) \in V$. Teríamos então uma quantidade finita de elementos na interseção $\mathcal{O}_f^+(x) \cap V$. Como M é Hausdorff podemos separar os elementos da interseção por uma coleção finita de abertos dois a dois disjuntos contidos em V , porém como $\mathcal{O}_f^+(x)$ é denso em M conseguimos um outro conjunto aberto em V , disjunto dos abertos da coleção, e que intersecta $\mathcal{O}_f^+(x)$, o que é um absurdo. Com isso basta tomar $k = n - m \geq 0$. Logo $f^m(x) \in U$ e $f^k(f^m(x)) \in V$, portanto $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

(2) \Rightarrow (3) Seja $\mathcal{B} = \{B_n : n \geq 1\}$ uma base enumerável da topologia de M . Defina

$$A_n = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} f^m(B_n).$$

Para cada $m \in \mathbb{Z}$, $f^m(B_n)$ é aberto, pois f é homeomorfismo. Por outro lado, $f(A_n) = A_n$. Daí dado U aberto em M , por (2) existe k tal que

$$f^k(A_n) \cap U \neq \emptyset.$$

Como $A_n = f^k(A_n)$, temos que $A_n \cap U \neq \emptyset$. Portanto, A_n é denso em M .

Considere $R_1 = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} A_n$. Se $x \in R_1$, então $\omega(x, f) = M$. De fato, como A_n é invariante por f segue de (2) que $A_n \cap A_m \neq \emptyset$, para todo $n, m \in \mathbb{Z}$, o que implica que $R_1 \neq \emptyset$. Seja $z \in M$, tomemos $B_{1/j}(z)$ as bolas abertas de raio $\frac{1}{j}$ com centro em z , e $B_j \subset B_{1/j}(z)$ um aberto da base contendo z . Como $x \in A_n$ para todo n , existe $n_j \in \mathbb{Z}$ para cada j tal que $f^{n_j}(x) \in B_j$.

Pela densidade de A_n podemos considerar $n_{j+1} > n_j$. Logo $f^{n_j}(x) \rightarrow z$, quando $n \rightarrow \infty$, isto é, $z \in \omega(x, f)$.

(3) \Leftrightarrow (4) Segue diretamente do fato de f ser homeomorfismo em M .

(3) \Rightarrow (1) Dado $x \in R_1$, temos $\omega(x, f) = M$. Portanto para $U \subset M$ aberto, existe n_k tal que $f^{n_k}(x) \in U$, logo a órbita $\mathcal{O}_f^+(x)$ é densa em M . \square

Definição 1.8 (Topologicamente mixing). *Uma aplicação $f : M \rightarrow M$ é topologicamente mixing se dado dois conjuntos aberto $U, V \subset M$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, para todo $n \geq n_0$.*

Vimos anteriormente características topológicas de um sistema dinâmico, as quais podem ser herdadas por outros sistemas dinâmicos. Introduziremos uma nova noção que vai nos permitir estabelecer quando dois sistemas têm as mesmas propriedades topológicas.

Definição 1.9 (Conjugação topológica). *Sejam (M, τ_1) e (N, τ_2) espaços topológicos. Sejam $f : M \rightarrow M$ e $g : N \rightarrow N$. Diremos que f e g são topologicamente conjugadas, se existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow N$ tal que*

$$g \circ h = h \circ f.$$

Observação 1.1. *Sejam $f : M \rightarrow M$ e $g : N \rightarrow N$, então por indução, temos que $g^n \circ h = g^{n-1} \circ h \circ f = \dots = h \circ f^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

A proposição a seguir mostra que se f e g são topologicamente conjugadas, podemos transmitir algumas informações topológicas de uma para outra.

Proposição 1.3. *Sejam M e N espaços métricos completos e sem pontos isolados. Sejam $f : M \rightarrow M$ e $g : N \rightarrow N$ topologicamente conjugadas. Então verifica-se:*

1. *p é ponto periódico de f de período n , se e somente se, $h(p)$ é ponto periódico de g de período n .*
2. *$h(\omega(x, f)) = \omega(h(x), g)$ para todo $x \in M$.*

$$3. h(\Omega(f)) = \Omega(g).$$

$$4. f \text{ transitivo} \iff g \text{ transitivo}.$$

$$5. f \text{ topologicamente mixing} \iff g \text{ topologicamente mixing}.$$

Demonstração. A prova do item (1) decorre da observação 1.1. Vamos provar apenas o item 4. A prova do item 5 seguirá de maneira análoga ao (4).

(4) Seja g topologicamente transitivo. Sejam U e V abertos de M , existem U' e V' abertos em N tal que $h(U) = U'$ e $h(V) = V'$, como g é topologicamente transitivo, existe n_0 tal que $g^{n_0}(U') \cap V' \neq \emptyset$. Disso decorre que

$$\begin{aligned} g^{n_0} \circ h(U) \cap h(V) &\neq \emptyset \iff \\ \emptyset &\neq h^{-1}(g^{n_0} \circ h(U) \cap h(V)) = h^{-1}(h \circ f^{n_0}(U) \cap h(V)) = f^{n_0}(U) \cap (V). \end{aligned}$$

O que prova que f é topologicamente transitivo. A outra implicação é análoga. \square

1.2 Variedade Riemanniana

Nesta seção o objetivo é construir o toro \mathbb{T}^2 como espaço quociente, daremos a ele uma estrutura diferenciável, para isso vamos definir as noções envolvidas.

Definição 1.10 (Atlas). *Seja M um espaço topológico Hausdorff, com base enumerável. M é uma variedade diferenciável de classe C^k e dimensão n se existe uma coleção de difeomorfismos C^k tal que $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : V_\alpha \rightarrow U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, a qual chamamos de atlas de M , tal que*

1. $V_\alpha \subset M$, $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ e $\phi_\alpha(V_\alpha) = U_\alpha$.
2. $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$ é uma cobertura aberta de M .
3. Para $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ e $\phi_\beta : U_\beta \rightarrow V_\beta$ com $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, tem-se que as composições

$$\begin{aligned} \phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta &: \phi_\beta^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta) \rightarrow \phi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta), \\ \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} &: \phi_\alpha(U_\beta \cap U_\alpha) \rightarrow \phi_\beta(U_\beta \cap U_\alpha), \end{aligned}$$

são C^k -difeomorfismo entre abertos do \mathbb{R}^n .

Chamamos o aberto V_α de vizinhança coordenada, e o par (ϕ_α, V_α) de carta coordenada ou apenas carta. Diremos que uma carta (ϕ_α, V_α) contém $p \in M$, ou parametriza p , se $p \in V_\alpha$.

As composições do item 3 acima são chamadas de mudanças de coordenadas, e dizemos que duas cartas são C^k -compatíveis se as mudanças de coordenadas são C^k .

Exemplo 1.1. \mathbb{R}^n é uma variedade diferenciável de classe C^∞ . Visto que é Hausdorff, com base enumerável e para cada $p \in \mathbb{R}^n$, basta tomar qualquer aberto U contendo p e a carta $id : U \rightarrow U$.

Exemplo 1.2. $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$ é uma variedade diferenciável de dimensão n , com a topologia induzida de \mathbb{R}^n .

Exemplo 1.3. Se M e N são variedades diferenciáveis, então $M \times N$ também é uma variedade diferenciável. As cartas são da forma

$$\begin{aligned} \phi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times U_\beta &\rightarrow V_\alpha \times V_\beta \\ (p_1, p_2) &\mapsto (\phi_\alpha(p_1), \psi_\beta(p_2)), \end{aligned}$$

onde (ϕ_α, U_α) é uma carta de M e (ψ_β, U_β) é uma carta de N .

Note que $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ é uma variedade. Mais geral, $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ o produto cartesiano de n círculos \mathbb{S}^1 é uma variedade diferenciável.

Definição 1.11 (Aplicação Diferenciável). *Sejam M e N C^k -variedades diferenciáveis de dimensão m e n , respectivamente. Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação contínua. Diremos que f é uma aplicação de classe C^k ou C^k -aplicação em $p \in M$, se para cada carta (ϕ_α, V_α) e (ϕ_β, V_β) com V_α e V_β contendo p e $f(p)$ respectivamente, tem-se que $\phi_\beta^{-1} \circ f \circ \phi_\alpha$ é de classe C^k em $\phi_\alpha^{-1}(p)$. Diremos que f é uma C^k -aplicação se for de classe C^k para todo $p \in M$.*

Se uma C^k -aplicação $f : M \rightarrow N$ é invertível e sua inversa f^{-1} é de classe C^k , então f é um difeomorfismo de classe C^k , ou C^k -difeomorfismo. Denotamos por $C^k(M, N)$ o conjunto de todas as C^k -aplicações de M em N , e $Dif f^k(M)$ o conjunto de todos os C^k -difeomorfismos em M .

O lema a seguir nos dá condições suficientes para que um espaço topológico munido da topologia quociente seja uma variedade diferenciável.

Lema 1.1. *Sejam M uma superfície de dimensão m e classe C^k , \sim uma relação de equivalência sobre M e $\pi : M \rightarrow M/\sim$ a aplicação quociente. Se para todo $x \in M/\sim$,*

existe uma vizinhança U contendo x tal que $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, onde $A_n \subset M$ são abertos disjuntos, $\pi|_{A_n}$ é injetivo e $(\pi|_{A_n})^{-1} \circ \pi|_{A_n}$ é de classe C^k , então M/\sim é uma variedade de dimensão n e classe C^k .

Demonstração. Seja $\mathcal{U} = \{U \subset M/\sim; \text{ satisfaz hipótese do Lema}\}$, então \mathcal{U} é uma cobertura de M/\sim , e $\{\pi^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ é uma cobertura de M . Como M tem base enumerável e é localmente compacto, podemos extrair uma subcobertura enumerável U_1, \dots, U_n, \dots em $\{\pi^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$. Como M tem base enumerável, existe um atlas $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ de classe C^k tal que $\#\mathcal{A}' \leq \#\mathbb{N}$. Por hipótese, para cada U_n , temos que $\pi^{-1}(U_n) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_{n,m}$. Assim, defina

$$B = \left\{ \pi \circ \phi|_{\phi^{-1}(Im(\phi) \cap A_{n,m})} : \phi \in \mathcal{A}' \text{ e } Im(\phi) \cap A_{n,m} \neq \emptyset \right\}.$$

Note que todos os elementos de B são homeomorfismos e $\bigcup_{\Phi \in B} Im(\Phi) = M/\sim$. Por hipótese temos injetividade local. Logo M/\sim é Hausdorff. Por outro lado, como $\#B \leq \#\mathbb{N}$ e M tem base enumerável segue que M/\sim tem base enumerável. $(\pi|_{A_{n,m}})^{-1} \circ \pi|_{A_{n,m}}$ C^k implica que B é atlas C^k , isso mostra que M/\sim é uma variedade diferenciável de dimensão n e classe C^k . \square

Definição 1.12 (Métrica Riemanniana). *Seja M uma variedade diferenciável. Uma métrica riemanniana é uma correspondência C^k que a cada ponto $p \in M$ associa $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, onde g_p é uma aplicação bilinear, positiva definida e simétrica.*

Definição 1.13 (Variedade Riemanniana). *Uma variedade Riemanniana é uma variedade diferenciável munida de uma métrica Riemanniana.*

1.3 Espaço Tangente

Na construção que fizemos de variedade não necessariamente teremos uma estrutura de espaço vetorial. Como queremos estender o conceito de aplicação diferenciável para qualquer variedade, a qual em \mathbb{R}^n é uma transformação linear, precisamos associar um espaço vetorial a variedade. Chamaremos esses espaços de Espaço tangente a variedade.

Mais concretamente, seja $p \in \mathbb{R}^n$. Um vetor tangente em p é um par (p, v) , onde $v \in \mathbb{R}^n$. Denotamos o par por (v_p) . O conjunto de todos os vetores tangentes em p é chamado de Espaço Tangente em p , o qual é denotado por $T_p \mathbb{R}^n$. O Espaço Tangente em p é um espaço vetorial onde a operação de soma é dado por $(p, v) + (p, w) = (p, v + w)$.

O fibrado tangente de \mathbb{R}^n ou espaço tangente de \mathbb{R}^n , o qual denotamos por $T\mathbb{R}^n$, é união disjunta de todos os espaços tangentes nos pontos de \mathbb{R}^n . Isto é,

$$T\mathbb{R}^n = \{(p, v) : p \in \mathbb{R}^n \text{ e } v \in T_p\mathbb{R}^n\} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

Vamos estender esse conceito para variedades diferenciáveis. Definiremos o que é vetor tangente de uma maneira diferente do caso em \mathbb{R}^n , usando curvas.

Seja M uma variedade diferenciável e $p \in M$. Defina

$$C_p = \{\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M; \gamma \in C^1((-\epsilon, \epsilon), M) \text{ e } \gamma(0) = p\}.$$

Podemos definir uma relação de equivalência \sim_p sobre C_p dada por, $\gamma \sim_p \psi$ se e somente se existe uma carta (ϕ, V) tal que $p \in \phi(U) = V$ e $(\phi^{-1} \circ \gamma)'(0) = (\phi^{-1} \circ \psi)'(0)$, onde $p^\alpha = \phi_\alpha^{-1}(p)$.

Definimos o espaço tangente em $p \in M$ por $T_pM = \{[\gamma]_p; \gamma \in C_p\}$.

Muniremos T_pM com uma estrutura de espaço vetorial. Tome (ϕ, U) uma carta contendo p . Defina

$$\begin{aligned} \bar{\phi} : T_pM &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ [\alpha]_p &\mapsto (\phi^{-1} \circ \alpha)'(0) \end{aligned}$$

Claramente $\bar{\phi}$ está bem definida. Observe também que $\bar{\phi}$ é uma bijeção. De fato,

$$(\phi^{-1} \circ \gamma)'(0) = (\phi^{-1} \circ \psi)'(0) \iff \alpha \sim_p \beta \iff [\alpha]_p = [\beta]_p$$

Logo, $\bar{\phi}$ é injetiva.

Verifiquemos que $\bar{\phi}$ é sobrejetiva. Dado $v \in \mathbb{R}^n$, sejam

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \phi^{-1}(p) + tv, \\ \alpha(t) &= \phi \circ \gamma(t). \end{aligned}$$

Disso temos que $\bar{\phi}([\alpha]_p) = (\phi^{-1} \circ \alpha)'(0) = v$. Portanto, $\bar{\phi}$ é sobrejetiva.

Note que dada (ψ, U') outra carta contendo p temos que

$$\begin{aligned} (\psi^{-1} \circ \phi)'(\phi^{-1}(p)) \cdot \bar{\phi}([\alpha]_p) &= (\psi^{-1} \circ \phi)'(\phi^{-1}(p))(\phi^{-1} \circ \alpha)'(0) = \\ &= (\psi^{-1} \circ \alpha)'(0) = \bar{\psi}([\alpha]_p). \end{aligned}$$

Com as seguintes operações

$$\begin{aligned} [\alpha]_p + [\beta]_p &= \phi^{-1} [\bar{\phi}([\alpha]_p) + \bar{\phi}([\beta]_p)] \\ c[\alpha]_p &= \phi^{-1} [c\bar{\phi}([\alpha]_p)] \end{aligned}$$

T_pM tem estrutura de espaço vetorial. Essas operações não dependem da carta que parametriza p . Com essa construção do espaço tangente alguns objetos ganham as seguintes propriedades

1. $\bar{\phi} : T_pM \rightarrow \mathbb{R}^n$ se torna isomorfismo linear.
2. T_pM se torna um espaço vetorial de dimensão n .
3. $\left\{ \frac{\partial \phi(p)}{\partial x_i}(p); 1 \leq i \leq n \right\} = \left\{ \bar{\phi}^{-1}(e_i); 1 \leq i \leq n \right\}$ é uma base para T_pM .

Seja M uma variedade de dimensão n e classe C^k . Definimos o fibrado tangente de M , denotado por TM , como

$$TM = \{(p, v); p \in M \text{ e } v \in T_pM\}.$$

O fibrado tangente de M tem uma estrutura de variedade condicionada por M . Mais precisamente, a coleção de cartas $\{\Phi_\phi; \phi \text{ é carta de } M\}$, tal que $\Phi : \text{Dom}(\phi) \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM$ é dado por $\Phi(x, u) = (\phi(x), \phi'(x) \cdot u)$ fornece uma estrutura de variedade diferenciável para TM de dimensão $2\dim(M)$.

Agora que temos um ambiente com estrutura de espaço vetorial podemos definir a diferencial de uma aplicação diferenciável numa variedade.

Sejam M e N variedades diferenciáveis e $f : M \rightarrow N$ diferenciável em $p \in M$. A derivada de f em p é a transformação linear

$$\begin{aligned} f'(p) : T_pM &\rightarrow T_{f(p)}M \\ [\alpha]_p &\mapsto [f \circ \alpha]_{f(p)}. \end{aligned}$$

$f'(p)$ está bem definido. De fato, seja $\alpha \sim_p \beta$ e ψ outra carta contendo p , então

$$\begin{aligned} (\psi^{-1} \circ f \circ \alpha)'(0) &= (\psi^{-1} \circ f \circ \phi \circ \phi^{-1} \circ \alpha)'(0) = (\psi^{-1} \circ f \circ \alpha)'(\phi^{-1}(p))(\phi^{-1} \circ \alpha)'(0) \\ &= (\psi^{-1} \circ f \circ \alpha)'(\phi^{-1}(p))(\phi^{-1} \circ \beta)'(0) = (\psi^{-1} \circ f \circ \beta)'(0). \end{aligned}$$

Portanto $f \circ \alpha \sim_{f(p)} f \circ \beta$. Também denotamos $f'(p)$ por $Df(p)$.

O teorema a seguir mostra a diferencial de uma composição de funções, cuja a igualdade é análogo ao caso no \mathbb{R}^n .

Teorema 1 (Regra da Cadeia). *Sejam M , N , e P variedades diferenciáveis, $f : M \rightarrow N$ diferenciável em p e $g : N \rightarrow P$ diferenciável em $f(p)$. Então $g \circ f : M \rightarrow P$ é diferenciável em p e $(g \circ f)'(p) = g'(f(p))f'(p)$.*

Os Teoremas da Função Inversa, Função Implícita, Formas Locais da Submersão e Imersão, e Teorema do Posto possuem versão análoga para variedades.

1.4 Subvariedades

A seguir veremos quando um subconjunto de uma variedade com estrutura proveniente dela também é uma variedade, e exibiremos também em quais condições a imagem de um função diferenciável é uma subvariedade.

Seja M uma variedade de dimensão m e de classe C^k . $N \subset M$ é dita subvariedade de M de dimensão $n \leq m$ e de classe C^k , se para todo $p \in N$ existe uma carta (ϕ, V) de M contendo p , tal que

$$\phi((\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cap V) = N \cap \phi(V).$$

Seja $i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, onde $i(x) = (x, 0)$ e \mathcal{A} um atlas C^k de M . Então a coleção

$$\left\{ \phi \circ i \mid i^{-1}(\text{Dom}(\phi) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})) \cap \phi \in \mathcal{A} \right\},$$

é atlas C^k da subvariedade N .

Proposição 1.4. *Sejam M e N variedades C^k com $N \subset M$. Então N é subvariedade de M se, e somente se $inc : N \rightarrow M$, onde $inc(x) = x$, é de classe C^k e $(inc)'(x)$ é injetiva, para todo $x \in N$.*

Demonstração. Dado $p \in N$, seja (ϕ, V) carta de M contendo p , tal que $(\phi^* = \phi \circ i, V^*)$ é uma carta de N contendo p . Então

$$\phi^{-1} \circ inc \circ \phi^*(x) = \phi^{-1} \circ \phi(x, 0) = (x, 0).$$

Portanto $\phi^{-1} \circ inc \circ \phi^* = i$ é de classe C^k e $(inc)'(x)$ é injetiva para todo $x \in N$.

Reciprocamente, suponha que $inc : N \rightarrow M$ C^k e $(inc)'(x)$ é injetiva, para todo $x \in N$. Então, existe $\beta : V_1 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U_1 \subset N$ e $\alpha : U_2 \subset M \rightarrow V_2 \subset \mathbb{R}^m$ C^k -difeomorfismos tais que $p \in \text{Im}(\beta)$, $inc(p) = p \in U_2$ e $\alpha \circ inc \circ \beta = i$. Logo, $\beta = \alpha^{-1} \circ i$. Note que α é carta de M e β é carta de N . Portanto, N é subvariedade. \square

Uma maneira de construir uma subvariedade é através de mergulhos, que veremos mais precisamente a seguir.

Definição 1.14 (Imersão, Submersão e Mergulho). *Seja $f : M \rightarrow N$ um aplicação de classe C^k , então f é*

- *Imersão se $f'(x)$ é injetiva para todo $x \in M$.*
- *Submersão se $f'(x)$ é sobrejetiva para todo $x \in M$.*

- Mergulho se $f'(x)$ é injetiva para todo $x \in M$ (imersão) e é homeomorfismo sobre a imagem.

Teorema 2. *Sejam M e N variedades C^k e $f : M \rightarrow N$ mergulho C^k . Então $f(M)$ é subvariedade de N de dimensão $\dim(M)$ e classe C^k .*

Demonstração. Seja $f : M \rightarrow N$ um mergulho, então para cada $p \in M$, existe uma vizinhança V contendo p , domínio de uma carta (ϕ, V) , tal que $f|_V$ é mergulho. Portanto, $f(V) = U$ é aberto em $f(M)$. Daí, as aplicações $\phi^* = \phi \circ (f|_V)^{-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ formam um atlas para $f(M)$, e portanto, $f(M)$ é uma subvariedade. \square

Observação 1.2. *De maneira natural podemos incluir $T_p N \subset T_p M$ ($i'(p)T_p N \subset T_p M$).*

Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^k . Um ponto $c \in N$ diz-se valor regular de f se, para cada $p \in f^{-1}(c)$ a derivada $f'(p) : T_p M \rightarrow T_c N$ é sobrejetiva. Em particular, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.5. *Seja $c \in N$ um valor regular de uma aplicação $f : M \rightarrow N$ de classe C^k . Então ou bem $f^{-1}(c)$ é vazio ou $f^{-1}(c)$ é uma subvariedade $(m-n)$ -dimensional de M , de classe C^k . O espaço tangente a $f^{-1}(c)$ em cada ponto p é o núcleo de $f'(p) : T_p M \rightarrow T_c M$.*

Demonstração. Omitiremos a prova que pode ser encontrada em [9]. \square

A seguir definiremos uma partição de uma variedade M em subconjuntos, os quais são variedades imersa em M .

Definição 1.15 (Folheação). *Seja M uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n . Diremos que uma partição W de M é uma folheação de M com folhas suaves, ou apenas folheação de M , se existe $\delta > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ ($k < n$) tal que para $x \in M$:*

1. a folha $W_x \in W$ que contém x é uma subvariedade imersa suave de dimensão k ;
2. existe um mapa contínuo $\phi_x : B_\delta(x) \rightarrow C^1(B_1, M)$, onde B_1 é uma bola unitária, tal que para qualquer $y \in W_x \cap B_\delta(x)$, a variedade V_y é a imagem de $\phi_x(y) : B_1 \rightarrow M$.

Observação 1.3. 1. W_x é chamado de folha global da folheação.

2. A componente conexa de $W_x \cap B_\delta(x)$ que contém x é chamado de folha local em x , a qual é denotada por V_x .
3. A função $\phi_x(y, z) = \phi_x(y)(z)$ é chamada de carta coordenada da folheação.

4. A função $\phi_x(y, z)$ é contínua e possui derivada contínua com relação a z .

Um subfibrado E em TM é integrável se existe uma folheação W de M tal que $E_x = T_x W_x$ para todo $x \in M$. Ainda mais, dizemos que é unicamente integrável se existe uma folheação W em M com folhas suaves de dimensão k tal que para qualquer curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$ de classe C^1 satisfazendo $\alpha'(t) \in E_{\alpha(t)}$, para todo t , α está contida em $W_{\alpha(0)}$. Em particular, temos que $T_x W_x = E_x$, para todo $x \in M$.

1.5 Toro n -dimensional

Nesta seção vamos construir o toro n -dimensional particionando o \mathbb{R}^n em classes de equivalência. A topologia quociente dada pela projeção de \mathbb{R}^n nas classes de equivalência nos fornecerá uma estrutura de variedade diferenciável difeomorfa ao toro visto com superfície euclidiana. Considere a relação em \mathbb{R}^n dada por $x \sim y \iff x_i - y_i \in \mathbb{Z}$ para $1 \leq i \leq n$, onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$.

A relação acima é uma classe de equivalência. De fato, vale que

(Reflexiva) $x_i - x_i = 0 \in \mathbb{Z}$, para todo i .

(Simétrica) $x_i - y_i \in \mathbb{Z}$, então $y_i - x_i = (-1)(x_i - y_i) \in \mathbb{Z}$, para todo i .

(Transitiva) \sim é transitiva pois se $x_i - y_i \in \mathbb{Z}$ e $y_i - w_i \in \mathbb{Z}$, então $x_i - w_i = (x_i - y_i) + (y_i - w_i) \in \mathbb{Z}$, para todo i .

Seja $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ dada por $\pi(x) = [x]$, a projeção canônica de \mathbb{R}^2 em \mathbb{T}^2 . Munido \mathbb{T}^2 com a topologia quociente temos que π é uma aplicação contínua. Geometricamente, a relação está levando o espaço \mathbb{R}^2 em um quadrado de lado 1, onde seus lados opostos estão identificados pela relação de equivalência.

Proposição 1.6. *Seja $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, e \mathbb{T}^2 munida pela topologia quociente τ_c . Então:*

1. \mathbb{T}^2 é compacto.
2. τ_c é metrizável e a métrica é dada por $d([x], [y]) = \min \{\|x - y\| : x \in \pi^{-1}([x]), y \in \pi^{-1}([y])\}$.
3. Dado $x \in \mathbb{R}^2$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\pi(B_\epsilon(x)) = B_\epsilon([x])$.
4. Para todo $[x] \in \mathbb{T}^2$, existe U contendo $[x]$ tal que $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$, onde V_i são abertos em \mathbb{R}^2 dois a dois disjuntos, para todo $i \in I$. Ainda mais, $\pi|_{V_i}$ é um homeomorfismo.

5. O conjunto $[\mathbb{Q}^2] = \pi(\mathbb{Q}^2)$ é denso em \mathbb{T}^2 .

6. \mathbb{T}^2 é enumerável.

Demonstração.

1. Sabemos que τ_c é a topologia mais fina tal que π é contínua. Como a imagem de um compacto por função contínua é compacto, segue que $\pi(C) = \mathbb{T}^2$ é compacto, onde $C = [0, 1]^2$.

2. Seja $U \in \tau_c$ e $[x] \in U$. Então $\pi^{-1}(U) = V$ é aberto em \mathbb{R}^2 e existe $x \in V$ tal que $\pi(x) = [x]$. Assim, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset V$. Podemos assumir ϵ suficientemente pequeno de modo que $B(x, \epsilon)$ esteja contido em um quadrado de lado com tamanho 1. Neste caso, temos que $W = \pi(B) = B([x], \epsilon) \subset U$.

Reciprocamente, tome $\epsilon > 0$ e $[x] \in \mathbb{T}^2$. Defina $W = B([x], \epsilon)$, queremos que $\pi^{-1}(W)$ seja um aberto em \mathbb{R}^2 . Para isso, vamos dividir a prova em três casos. Sejam $x \in \pi^{-1}([x])$ e C é um quadrado centrado em x . Suponha que $\epsilon > \sqrt{2}/2$, então $\pi^{-1}(W) = \mathbb{R}^2$. Se $\frac{1}{2} \leq \epsilon \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, então $\pi^{-1}(W)$ é a união de conjuntos da forma $H = B(x, \epsilon) \cap C$. Pela escolha de C temos que $\pi^{-1}(W) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^2} (k + H)$ o qual é aberto. Se $\epsilon < \frac{1}{2}$, então a prova se resume ao item 3.

3. Dado $x \in \mathbb{R}^2$, tome C um quadrado de lado 1 centrado em x . Tome $\epsilon > 0$ e $B = B(x, \epsilon) \subset C$, de modo que B não intersecta os lados de C . Seja $[z] \in \pi(B)$, então existe um único $y \in \pi^{-1}([z]) \cap C$ tal que $\|y - x\| < \epsilon$. Logo, $d([x], [y]) < \epsilon$. Portanto $\pi(B_\epsilon(x)) \subset B_\epsilon([x])$. Reciprocamente, seja $[z] \in B_\epsilon([x])$, então existe um único y tal que $y \in \pi^{-1}([z]) \cap C$ com $\|y - x\| < \epsilon$. Logo, $B_\epsilon([x]) \subset \pi(B_\epsilon(x))$.

4. Sejam $[x] \in \mathbb{T}^2$ e $z \in \pi^{-1}([x])$. Pelo item anterior temos $B_\epsilon([x]) = \pi(B_\epsilon(x))$ para algum $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Daí tomando $U = B_\epsilon([x])$, temos que $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^2} (k + B_\epsilon(x))$. Note que pelo item anterior $\pi : (k + B_\epsilon(x) \rightarrow B_\epsilon([x]))$ é sobrejetiva e pela construção claramente é injetiva. A continuidade da inversa decorre do fato da topologia ser relativa a \mathbb{R}^2 e pelo item anterior.

5. Sejam $\epsilon > 0$, $[x] \in \mathbb{T}^2$ e $y \in \pi^{-1}([x])$. Como \mathbb{Q}^2 é denso em \mathbb{R}^2 , existe $y_0 \in \mathbb{Q}^2$ tal que

$\|y - y_0\| \leq \epsilon$. Logo, $d([x], [y_0]) \leq \epsilon$. Disso decorre que $[\mathbb{Q}^2]$ é denso em \mathbb{T}^2 .

6. Como $[\mathbb{Q}^2]$ é denso em \mathbb{T}^2 . Temos que o conjunto de bolas abertas centradas nos pontos de $[\mathbb{Q}^2]$ com raio racional é uma base enumerável. \square

Proposição 1.7. \mathbb{T}^2 é uma variedade diferenciável de dimensão 2.

Demonstração. Para esta prova vamos utilizar o Lema 1.1. Com efeito, \mathbb{R}^2 é uma superfície C^∞ de dimensão 2. Pela Proposição 1.6-item 4, para todo $[x] \in \mathbb{T}^2$, existe U contendo $[x]$ tal que $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$, onde V_i são abertos em \mathbb{R}^2 dois a dois disjuntos, para todo $i \in \mathbb{N}$ e $\pi|_{V_i}$ é um homeomorfismo. $(\pi|_{V_m})^{-1} \circ \pi|_{V_n}$ é uma translação, portanto é C^k . Disso decorre que \mathbb{T}^2 é uma variedade C^∞ de dimensão 2. \square

Podemos fazer uma construção análoga para mostrar que $\mathbb{S}^1 = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ é uma variedade diferenciável. Como o produto cartesiano finito de variedades diferenciáveis é uma variedade diferenciável, temos que $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \cdots \times \mathbb{S}^1$ é uma variedade diferenciável.

Seja $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$, então existe um levantamento $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\pi \circ F = f \circ \pi,$$

onde $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ é a projeção canônica dada pela relação de equivalência e $F(x + j) = F(x) + j$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $j \in \mathbb{Z}^n$. Dados $f, g : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ duas aplicações de classe C^r , a distância entre f e g é definida por

$$d_r(f, g) = \left\{ d(f \circ \pi(x), g \circ \pi(x)), \|D^i F_x - D^i G_x\| : x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, 0 \leq x_j \leq 1 \text{ e } 1 \leq i \leq r \right\},$$

onde d é a distância entre pontos de \mathbb{T}^n . A distância definida acima determina uma topologia em $C^r(\mathbb{T}^n)$, chamada de topologia C^r .

1.6 Transversalidade

Nesta seção veremos condições suficientes para que a intersecção de duas subvariedades seja uma variedade.

Definição 1.16 (Transversal). *Dados E_1 e E_2 subespaços vetoriais de E . Diremos que E_1 é transversal a E_2 , o qual denotaremos por $E_1 \pitchfork E_2$, se $E_1 \oplus E_2 = E$.*

Podemos estender essa definição para um contexto de subvariedades.

Definição 1.17 (Variedade Transversal). *Sejam M e N subvariedades da variedade L . Diremos que M e N são transversais em $p \in L$, que denotamos por $M \pitchfork_p N$, se $p \notin M \cap N$ ou se $p \in M \cap N$ e $T_p M \oplus T_p N = T_p L$. Se para todo $p \in L$, $M \pitchfork_p N$, então dizemos que M e N são transversais e denotamos por $M \pitchfork N$.*

Sejam M e N variedades C^r , $r \geq 1$ e $S \subset N$ uma subvariedade C^r . Se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação C^k , $k \geq 1$, então dizemos que f é transversal a S em $p \in M$, que denotaremos por $f \pitchfork_p S$, se $p \notin S$ ou se

$$\text{Im} Df(p) \oplus T_{f(p)} S = T_{f(p)} N.$$

Dizemos que f é transversal a S se, para todo $p \in f^{-1}(S)$, f é transversal a S em p .

Exemplo 1.4. 1. *Seja $S = \{c\}$, então f é transversal a c se e somente se c é valor regular de f .*

2. *Se f é uma submersão, então f é transversal a S , para qualquer subvariedade $S \subset N$, pois $f'(p)T_p M = T_{f(p)} N$.*

Observação 1.4. *Se $f(M) \cap S \neq \emptyset$ e f é transversal a S , então $\dim(M) + \dim(N) \geq \dim(S)$.*

Por definição, se S é subvariedade de N de classe C^k , então para cada $q \in S$, existe um difeomorfismo de classe C^k , $\phi : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s} \rightarrow V$ onde V é um aberto de S contendo q e $\phi^{-1}(V \cap S) \subset \mathbb{R}^s \times \{0\}$. Seja M uma variedade diferenciável e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação transversal a S . Seja $U \subset M$ tal que $f(U) \subset V$ e considere a projeção na segunda coordenada $\pi_2 : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s} \rightarrow \mathbb{R}^{n-s}$. Nessas condições vale o seguinte lema.

Lema 1.1. *A aplicação $f : M \rightarrow N$ é transversal a S nos pontos de $U \cap f^{-1}(S)$ se e somente se, $0 \in \mathbb{R}^{n-s}$ é valor regular de $\pi_2 \circ \phi^{-1} \circ (f|_U) : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-s}$.*

Demonstração. Sejam $p \in U \cap f^{-1}(S) = [\pi_2 \circ \phi^{-1} \circ (f|_U)]^{-1}(0)$ e $q = f(p)$. Então pela regra da cadeia temos que

$$\begin{aligned} (\phi^{-1} \circ f)'(p)T_p M &= [\phi^{-1}]'(q)f'(p)T_p M = E, \\ [\phi^{-1}]'(q)T_q S &= \mathbb{R}^s \times \{0\}. \end{aligned}$$

Como $[\phi^{-1}]'(q) : T_q N \rightarrow \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$ é isomorfismo segue que as seguintes afirmações são equivalentes

1. $f'(p)T_pM + T_qS = T_qN$
2. $E + \mathbb{R}^s \times \{0\} = \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$
3. $\pi_2(E) = \mathbb{R}^{n-s}$
4. $[\pi_2 \circ \phi^{-1} \circ (f|_U)]'(p)T_pM = \mathbb{R}^{n-s}$.

O que conclui a demonstração. □

Proposição 1.8. *Sejam M e N variedades de classe C^k e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação transversal a uma subvariedade $S \subset N$ de classe C^k . Então*

- $f^{-1}(S) = \emptyset$ ou $f^{-1}(S)$ é uma subvariedade de classe C^k de M , cuja codimensão em M é igual a codimensão de S em N .
- Neste caso, $T_p(f^{-1}(S)) = f'(p)^{-1}(T_{f(p)}S)$, para todo $p \in f^{-1}(S)$.

Demonstração. Seja $p \in f^{-1}(S)$ e $q = f(p) \in V$. Considere $\phi^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$ de classe C^k como no Lema anterior. Tome U um aberto em M contendo p tal que $f(U) \subset V$. Então segue da hipótese de transversalidade, do Lema 1.1 e da Proposição 1.5 que $f^{-1} \cap V = [\pi_2 \circ \phi^{-1} \circ (f|_U)]^{-1}(0)$ é uma subvariedade de M , de dimensão $m - (n - s)$ e classe C^k . O espaço tangente a $f^{-1}(S) \cap U$ em p é o núcleo de $[\pi_2 \circ \phi^{-1} \circ f]'(p)$, o qual é a imagem inversa de $[f'(p)]^{-1}T_qS$, o que conclui a prova. □

Corolário 1. *Sejam N e S subvariedades de M de classe C^k . Se N e S são transversais, então $N \cap S$ é uma subvariedade de M cuja dimensão é $n + s - m$.*

Demonstração. Se N é transversal a S , então a inclusão $i : N \rightarrow M$ é transversal a S . Portanto, pela proposição anterior $i^{-1}(S) = S \cap N$ é uma variedade de classe C^k cuja dimensão é $\dim N + \dim S - \dim M$. □

Proposição 1.9. *Sejam M uma variedade diferenciável compacta e N uma variedade diferenciável. Dado $S \subset N$ uma subvariedade fechada. Se $f \in C^k(M, N)$, $k \geq 1$, é transversal a S , então toda $g \in C^k(M, N)$ suficientemente próxima de f também é transversal a S .*

Demonstração. Seja $f \in C^k(M, N)$ transversal a S . Para $q \in S$ tome uma vizinhança V_q . Como S é subvariedade podemos tomar um difeomorfismo $\phi : V_q \rightarrow \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$ tal que $\phi(V_q \cap S) = \mathbb{R}^s \times \{0\}$. Para cada $p \in f^{-1}(q)$, tome uma vizinhança U_p de modo

que $f(\overline{U_p}) \subset V_p$ e a derivada de $\pi_2 \circ \phi_q \circ f$ é sobrejetiva para todo ponto em $\overline{U_p}$. Como sobrejetividade é uma propriedade aberta para aplicações lineares, temos que existe uma vizinhança de f , $B(f) \subset C^k(M, N)$, tal que para todo $g \in B_p(f)$ a derivada de $\pi_2 \circ \phi_q \circ g$ é sobrejetiva em $\overline{U_p}$. Note que

$$\bigcup_{p \in f^{-1}(S)} U_p,$$

forma uma cobertura de $f^{-1}(S)$. Como S é fechado, tem-se que $f^{-1}(S)$ é fechado em M . Logo, é compacto. Portanto, podemos extrair uma subcobertura finita U_{p_1}, \dots, U_{p_l} . Tome $U^* = \bigcup_{i=1}^l U_{p_i}$ e $V^*(f) = \bigcap_{i=1}^l B(f)_{p_i}$. Disso decorre que se $g \in V^*(f)$, então g é transversal a S em pontos de U^* . Como $(M - U)$ é compacto e $f(M - U) \cap S = \emptyset$ temos que, diminuindo $V^*(f)$ se necessário, $g(M - U) \cap S = \emptyset$, para todo $g \in V^*(f)$. Logo, todo $g \in V^*(f)$ é transversal a S como queríamos demonstrar. \square

Observe que, mesmo que $S \subset N$ não seja fechada, a proposição continua valendo para suas partes fechadas. Mais precisamente, se $S' \subset S$ é um subconjunto fechado em N , então o conjunto das aplicações $f : M \rightarrow N$ transversais a S em $f^{-1}(S')$ é aberto em $C^k(M, N)$.

Capítulo 2

Hiperbolicidade e Hiperbolicidade Parcial

Neste capítulo estudaremos difeomorfismos definidos numa variedade Riemanniana M , a qual possui um subconjunto compacto Λ , invariante pelo difeomorfismo, de modo que o fibrado tangente do conjunto pode ser decomposto em soma de sub-fibrados invariantes pela derivada do difeomorfismo. Quando obtemos a decomposição $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$, onde a derivada é contração uniforme em E^s e expansão uniforme em E^u , diremos que esse conjunto é hiperbólico. No caso em que o fibrado sobre Λ admite uma decomposição em três subespaços, isto é, $E^s \oplus E^c \oplus E^u = T_\Lambda M$, onde a derivada do difeomorfismo é contração uniforme em E^s , expansão uniforme em E^u , e a taxa de contração e expansão da derivada em E^c controlado pelas taxas em E^u e E^s , diremos que Λ é parcialmente hiperbólico. Veremos alguns exemplos e propriedades destes difeomorfismos.

2.1 Hiperbolicidade

Nesta seção veremos a noção de difeomorfismo hiperbólico. Apresentaremos algumas propriedades, exemplos e nos aprofundaremos no caso de difeomorfismo Anosov no Toro.

Considere M uma variedade Riemanniana e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo.

Definição 2.1 (Conjunto Hiperbólico). *Seja $\Lambda \subset M$ um subconjunto invariante e compacto. Diremos que Λ é hiperbólico com relação a f se para cada $p \in \Lambda$, o espaço tangente de p em M , é a soma direta de dois espaços $T_p M = E_p^u \oplus E_p^s$, invariantes pela derivada, isto é,*

$$Df(p)(E_p^u) = E_{f(p)}^u, Df(p)(E_p^s) = E_{f(p)}^s,$$

e existem $0 < \lambda < 1$ e $C \geq 1$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|Df^n(p)(v^s)\| &\leq C\lambda^n\|v^s\|, \quad \forall v^s \in E_p^s, \\ \|Df^{-n}(p)(v^u)\| &\leq C\lambda^n\|v^u\|, \quad \forall v^u \in E_p^u. \end{aligned}$$

Em particular, $Df^m(p)|_{E_p^s}$ é uma contração e $Df^m(p)|_{E_p^u}$ é expansora para algum p . Note que a constante C determina o número de iterados de f que são necessários para que os vetores sejam contraídos (respectivamente, expandido) no subconjunto E_p^s , (respectivamente, E_p^u). Um conjunto invariante que satisfaça as condições acima é dito ter uma estrutura uniformemente hiperbólica se as constantes, λ e C , e assim o número de iterada p , são independentes do ponto p .

Definição 2.2 (Ponto fixo hiperbólico). *Seja $p \in M$ um ponto fixo de $f : M \rightarrow M$. Então p é um ponto fixo hiperbólico se $Df(p)$ não possui autovalores com valor absoluto 1. Um ponto periódico p de período k é hiperbólico se for um ponto fixo hiperbólico para f^k .*

Exemplo 2.1 (Matriz hiperbólica). *Seja $A \in GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R}); \det(M) \neq 0\}$. Dizemos que A é uma matriz hiperbólica se seus autovalores $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tem valor absoluto diferente de 1.*

Se $A \in GL_n(\mathbb{R})$ é uma matriz hiperbólica, então podemos escrever $\mathbb{R}^n = E_A^s \oplus E_A^u$, onde E_A^s é a soma direta dos autoespaços gerados pelos autovalores λ_i com $|\lambda_i| < 1$, e E_A^u é a soma direta dos autoespaços gerados pelos autovalores λ_i com $|\lambda_i| > 1$. E_A^u e E_A^s são invariantes por A , e $A|_{E_A^s}$ é uma contração e $A|_{E_A^u}$ é expansora.

Proposição 2.1. *Seja Λ um conjunto hiperbólico com relação ao difeomorfismo $f : M \rightarrow M$. Os espaços E_p^s e E_p^u variam continuamente com relação a p e a dimensão é localmente constante.*

Demonstração. A prova pode ser encontrada em [5]. □

Proposição 2.2. *Seja Λ um conjunto hiperbólico com relação ao difeomorfismo $f : M \rightarrow M$. Se f é transitiva em Λ , então os espaços E_p^s e E_p^u tem dimensão constante em Λ .*

Demonstração. Sejam $p, q \in \Lambda$. Por hipótese, existe $z \in M$, tal que $\mathcal{O}_f^+(z) = \Lambda$. Por outro lado, existem U_p e U_q vizinhanças de p e q , respectivamente, tais que

$$\begin{aligned} \dim(E_{p'}^s) &= \dim(E_p^s), \quad \forall p' \in U_p, \\ \dim(E_{q'}^s) &= \dim(E_q^s), \quad \forall q' \in U_q, \end{aligned}$$

logo, existem $n < m$, tal que $f^n(z) \in U_p \cap \Lambda$ e $f^m(z) \in U_q \cap \Lambda$. Portanto

$$\dim(E_{f^n(z)}^s) = \dim(E_p^s),$$

$$\dim(E_{f^m(z)}^s) = \dim(E_q^s).$$

Como Df é isomorfismo segue que

$$\dim(E_{f^n(z)}^s) = \dim(E_{f^{n+1}(z)}^s).$$

Isto implica que

$$\dim(E_{f^n(z)}^s) = \dim(E_{f^m(z)}^s).$$

Assim, $\dim(E_p^s) = \dim(E_q^s)$. O resultado segue de maneira análoga para o espaço instável. \square

Um método utilizado para encontrar a decomposição hiperbólica para um difeomorfismo é utilizando o conceito de cones que veremos a seguir, através de métodos mostraremos que os difeomorfismos de Anosov formam um conjunto aberto. Para isso, apresentaremos algumas noções envolvidas primeiro.

Definição 2.3 (Forma bilinear). *Seja $\Lambda \subset M$*

1. *Uma forma bilinear B definida em Λ é uma aplicação que associa a cada $x \in \Lambda$ uma aplicação bilinear $B_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$.*
2. *Dizemos que B é não-degenerado se $B_x(u, T_x M) = B_x(T_x M, u) = \mathbb{R}$, para todo $u \in T_x M$ e todo $x \in \Lambda$.*
3. *B é simétrica se $B_x(u, v) = B_x(v, u)$, para todo $u \in T_x M$ e todo $x \in \Lambda$.*
4. *Uma forma quadrática Q definida em $\Lambda \subset M$ é uma aplicação $Q : T_\Lambda M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $Q_x(v) = B_x(v, v)$, para todo $x \in \Lambda$ e para todo $v \in T_x M$, onde B é uma forma bilinear simétrica definida em Λ .*
5. *Q é não degenerada se B for não degenerada.*
6. *Uma forma quadrática Q em Λ é chamada definida positiva se $Q_x(v) > 0$ para todo $x \in \Lambda$ e para todo $v \in T_x M - \{0\}$.*

Definição 2.4 (Cones). *Um cone C em T_xM é um subconjunto para o qual existe uma forma quadrática Q_c não degenerada tal que*

$$C = \{v \in T_xM : Q_c \geq 0\}.$$

Em particular, se $\Lambda \subset M$ é um conjunto f -invariante tal que se tem a decomposição de $T_xM = E \oplus F$. Defina-se o campo de cones associado a decomposição da seguinte maneira

$$C_x = C(x, F, \alpha) = \{v \in T_xM : \alpha \|v_F\| \geq \|v_E\|\};$$

e o cone complementar

$$C_x^* = C(x, E, \alpha) = \{v \in T_xM : \alpha \|v_E\| \geq \|v_F\|\}.$$

A dimensão do cone é a maior dimensão entre o subespaço contidos no cone, a qual denotamos por \dim_{cone}

Definição 2.5 (Campos de Cones). *Um campo de cones definido em $\Lambda \subset M$ é uma aplicação que associa a cada $x \in \Lambda$ um cone $C_x \subset T_xM$.*

A proposição a seguir nos proporciona condições necessárias e suficientes para determinar quando um conjunto é hiperbólico.

Teorema 3 (Equivalência Hiperbólica). *Sejam $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo e $\Lambda \subset M$ um conjunto compacto, f -invariante. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Λ é um conjunto hiperbólico.*
2. *Existe uma forma quadrática Q contínua não degenerada definida em Λ tal que*
 - a. *$\dim_{cone}(C_{Q_{x,+}}) = \dim_{cone}(C_{Q_{f(x),+})}$ para todo $x \in \Lambda$;*
 - b. *a forma quadrática $f^*Q - Q$ é positiva definida.*
3. *Existem campo de cones C^s e C^u em Λ tais que:*
 - a. *$\dim(C_x^s) + \dim(C_x^u) = \dim(M)$, para todo $x \in \Lambda$;*
 - b. *a dimensão dos cones é constante ao longo da órbita, isto é, para todo $x \in \Lambda$.*

$$\dim_{cone}(C_x^s) = \dim_{cone}(C_{f(x)}^s),$$

$$\dim_{cone}(C_x^u) = \dim_{cone}(C_{f(x)}^u);$$

c. $Df(x)(C_x^u) \subset C_f^u(x)$ e $Df(x)^{-1}(C_x^u) \subset C_{f^{-1}(x)}^u$,

d. existe $\lambda > 1$ e $m > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|(Df^m|_{C_x^u})^{-1}\|^{-1} &\geq \lambda, \\ \|(Df^{-m}|_{C_x^s})^{-1}\|^{-1} &\geq \lambda. \end{aligned}$$

Demonstração.

(1 \Rightarrow 2) Como Λ é hiperbólico, existe a decomposição $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$. Pela compacidade de Λ e continuidade da decomposição, existe $c > 0$ tal que para todo $x \in \Lambda$, $v \in T_x M$ temos $\|v\|_{\max} \geq \frac{\|v\|}{c}$, onde $\|v\|_{\max} = \max\{\|v^s\|, \|v^u\|\}$ e $v = v^s + v^u \in E^s \oplus E^u$.

Seja $\lambda > 1$ tal que $\lambda - \frac{1}{\lambda} > C\sqrt{2}$. Trocando f por f^n se necessário for, temos

$$\|(Df|_{E^u})^{-1}\|^{-1} > \lambda > 1 > \frac{1}{\lambda} > \|Df|_{E^s}\|.$$

Seja $Q_x(v) = \|v\|^2 - \|Df^{-1}(x)v\|^2$, note que se

$$\begin{aligned} v \in E_x^u - \{0\} &\Rightarrow Q_x(v) > 0 \\ v \in E_x^s - \{0\} &\Rightarrow Q_x(v) < 0 \end{aligned}$$

Assim temos que Q_x é uma forma quadrática contínua não degenerada e $\dim_{\text{cone}} = (C_{Q_x,+}) = \dim(E_x^u)$. Portanto $\dim_{\text{cone}}(C_{Q_x,+})$ é constante ao longo da órbita de x . Mostremos agora que a forma quadrática $q = f^*Q - Q$ é definida positiva. De fato, se $\|v\|_{\max} = \|v^u\|$ então

$$\begin{aligned} \|Df(x)v\| &\geq \|Df(x)v^u\| - \|Df(x)v^s\| \\ &\geq \lambda\|v^u\| - \frac{1}{\lambda}\|v^s\| \\ &\geq \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\|v^u\| = \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\|v\|_{\max} \\ &\geq \frac{1}{c}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\|v\|. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
 (f^*Q - Q)_x(v) &= Q_{f(x)}(Df(x)v) - Q_x(v) \\
 &= (\|Df(x)v\|^2 - \|v\|^2) - (\|v\|^2 - \|Df^{-1}(x)v\|^2) \\
 &\geq \|Df(x)v\|^2 - 2\|v\|^2 \\
 &= (\|Df(x)v\| - \sqrt{2}\|v\|)(\|Df(x)v\| + \sqrt{2}\|v\|) \\
 &\geq \left(\frac{1}{c}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) - \sqrt{2}\right)\|v\|(\|Df(x)v\| + \sqrt{2}\|v\|) > 0
 \end{aligned}$$

Por outro lado, se $\|v\|_{\max} = \|v^s\|$ então

$$\begin{aligned}
 \|Df^{-1}(x)v\| &\geq \lambda\|v^s\| - \frac{1}{\lambda}\|v^u\| \\
 &\geq \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\|v^s\| \geq \frac{1}{c}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\|v\|
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 (f^*Q - Q)_x(v) &\geq \|Df^{-1}(x)v\|^2 - 2\|v\|^2 \\
 &= (\|Df^{-1}(x)v\| - \sqrt{2}\|v\|)(\|Df^{-1}(x)v\| + \sqrt{2}\|v\|) \\
 &\geq \left(\frac{1}{c}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) - \sqrt{2}\right)\|v\|(\|Df^{-1}(x)v\| + \sqrt{2}\|v\|) > 0.
 \end{aligned}$$

No caso de trocar f por f^m , podemos tomar $Q = \sum_{j=0}^{m-1} (f^j)^*Q$.

De modo análogo $(f^{-1})^*Q - Q$ é definida negativa para todo $x \in \Lambda$.

(2 \Rightarrow 3) Seja $q = f^*Q - Q$ e considere

$$\delta = \min_{x \in \Lambda} \{q_x(v) : \|v\| = 1, v \in T_x M\} > 0. \quad (2.1)$$

Como $q_x(v) = \|v\|^2 q_x\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$, temos que para todo $v \in T_x M$, e todo $x \in \Lambda$

$$q_x(v) \geq \delta \|v\|^2,$$

tomando $\|Q\| = \max_{x \in \Lambda} \{Q(v) : \|v\| = 1, v \in T_x M\}$ temos que

$$Q_x(v) = \|v\|^2 Q_x\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \leq \|Q\| \|v\|^2, \quad \forall x \in \Lambda, \forall v \in T_x M,$$

portanto

$$\|v\|^2 \geq \frac{Q_x(v)}{\|Q\|}, \quad \forall v \in T_x M, x \in \Lambda. \quad (2.2)$$

Note que

$$((f^n)^*Q)_x(v) = Q_x(v) + \sum_{j=0}^{n-1} ((f^j)^*q)_x(v)$$

Afirmamos que se $Q_x(v) > 0$, então $\|Df^n(x)v\|^2 \geq \frac{\delta}{\|Q\|} \|v\|^2$ para todo $n \geq 0$. De fato, se $Q_x(v) > 0$ então

$$((f^n)^*Q)_x(v) \geq Q_x(v) + q_x(v) \geq q_x(v) \geq \delta \|v\|^2$$

Disso decorre que

$$\begin{aligned} \|Df^n(x)v\|^2 &\geq Q_{f^n(x)} \frac{(Df^n(x)v)}{\|Q\|} \\ &\frac{(f^{n*}Q)_x(v)}{\|Q\|} \geq \frac{\delta}{\|Q\|} \|v\|^2. \end{aligned}$$

Mostremos que $Df(x)C_{Q_x,+} \subset C_{Q_{f(x),+}$ e $Df^{-1}(x)C_{Q_x,-} \subset C_{Q_{f^{-1}(x),-}$. Por hipótese Q é não degenerada, os cones têm dimensões complementares e a dimensão é constante ao longo da órbita.

Como $q = f^*Q - Q$ é definida positiva, segue

$$v \in C_x^u = C_{Q_x,+} \Rightarrow Q_{f(x)}(Df(x)v) \geq Q_x(v) \geq 0 \Rightarrow Df(x)C_x^u \subset C_{f(x)}^u. \quad (2.3)$$

Analogamente,

$$v \in C_x^s = C_{Q_x,-} \Rightarrow 0 \geq Q_x(v) \geq Q_{f^{-1}(x)}(Df^{-1}(x)v) \Rightarrow Df^{-1}(x)C_x^s \subset C_{f^{-1}(x)}^s. \quad (2.4)$$

Afirmamos que

1. se $Q_x(v) > 0$, então $\|Df^n(x)v\| \geq \frac{\delta}{\|Q\|} \|v\| \sqrt{n} \rightarrow \infty$,
2. se $Q_x(v) < 0$, então $\|Df^{-n}(x)v\| \geq \frac{\delta}{\|Q\|} \|v\| \sqrt{n} \rightarrow \infty$.

De fato, se $Q_x(v) > 0$

$$\begin{aligned} \|Df^n(x)v\|^2 &\geq \frac{1}{\|Q\|} Q_{f^n(x)}(Df^n(x)v) \\ &= \frac{1}{\|Q\|} (f^{n*}Q)_x(v) \\ &= \frac{1}{\|Q\|} \left(Q_x(v) + \sum_{j=0}^{n-1} (f^{j*}q)_x(v) \right) \\ &\geq \frac{1}{\|Q\|} \sum_{j=0}^{n-1} \delta \|Df^j(x)v\|^2 \\ &\geq \frac{1}{\|Q\|} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\delta^2}{\|Q\|} \|v\|^2 = n \left(\frac{\delta \|v\|}{\|Q\|} \right)^2. \end{aligned}$$

Tomando $\bar{q} = -(f^{-1*}Q - Q)$ e $\delta^1 = \min_{x \in \Lambda} \{\bar{q}_x(v) : \|v\| = 1, v \in T_x M\}$, segue de maneira análogo para o caso em que $Q_x(v) < 0$.

(3 \Rightarrow 1) Podemos assumir que $\|(Df|_{C_x^u})^{-1}\|^{-1} \geq \lambda > 1 > \frac{1}{\lambda} \geq \|Df|_{C_x^s}\|$

Definamos

$$\begin{aligned} E^u(x) &= \cap_{n \geq 0} Df^n(f^{-n}(x))C_{f^{-n}(x)}^u, \\ E^s(x) &= \cap_{n \geq 0} Df^{-n}(f^n(x))C_{f^n(x)}^s \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} Df(x)E^s(x) &= Df(x) \cap_{n \geq 0} Df^{-n}(f^n(x))C_{f^n(x)}^s \\ &= \cap_{n \geq 1} Df^{-(n-1)}(f^{n-1}(x))C_{f^{n-1}(f(x))}^s \\ &= \cap_{n \geq 0} Df^{-n}(f^n(x))C_{f^n(f(x))}^s = E^s(f(x)). \end{aligned}$$

Analogamente, temos que $Df(x)E^u(x) = E^u(f(x))$.

Agora suponha que $v \in E^s(x) \cap E^u(x)$, então $v_n = \frac{Df^n(x)v}{\|Df^n(x)v\|} \in E^s(f^n(x))$, o que implica que $\|Df^{-n}(f^n(x))v_n\| \geq \lambda^n$. Como $v \in E^u(x)$, segue que $\|Df^n(x)v\| \geq \lambda^n$. Levando em consideração que $v = Df^{-n}(f^n(x))Df^n(x)v$ temos que

$$\begin{aligned} \|v\| &= \|Df^{-n}(f^n(x)) \frac{Df^n(x)v}{\|Df^n(x)v\|}\| \|Df^n(x)v\| \\ &= \|Df^{-n}(f^n(x)) \frac{Df^n(x)v}{\|Df^n(x)v\|}\| \geq \lambda^{2n} \|v\|, \end{aligned}$$

portanto $\|v\| = 0$, logo $E^s(x) \cap E^u(x) = \{0\}$.

Por último mostremos a unicidade da decomposição. Seja $x \in \Lambda$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ escolha um subespaço $E_n(x) \subset C_{f^n(x)}^s$ de dimensão máxima, e tome

$$S_n(x) = Df^{-n}(f^n(x))E_n(x).$$

De modo análogo, considere $F_n(x) \subset C_{f^{-n}(x)}^u$ subespaço de dimensão máxima, e

$$U_n(x) = Df^n(f^{-n}(x))F_n(x).$$

Sejam S_x e U_x subespaços limites de $S_n(x)$ e $U_n(x)$, respectivamente. Então $S_x \subset E^s(x)$ e $U_x \subset E^u(x)$. De fato, seja $\{v_n\}_n$ uma sequência convergente, onde $v_n \in S_n(x)$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v \in S_x$$

Suponha por absurdo que $v \notin E^s(x)$. Então existe $l \geq 0$ tal que $v \notin Df^{-l}(f^l(x))C_{f^l(x)}^s$. Como $Df^{-l}(f^l(x))C_{f^l(x)}^s$ é fechado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$v_n \notin Df^{-l}(f^l(x))C_{f^l(x)}^s, \forall n \geq n_0.$$

Porém

$$S_n(x) \subset Df^{-n}(f^n(x))C_{f^n(x)}^s \subset Df^{-l}(f^l(x))C_{f^l(x)}^s, \forall n \geq l$$

O que é contradição. O outro caso é análogo.

Note que S_x e U_x tem dimensões complementares e a intersecção é o vetor nulo.

Afirmamos que $S_x = E^s(x)$ e $U_x = E^u(x)$. De fato, suponha por absurdo que $v \in E^s(x) - S_x$. Seja $v = v^s + v^u$, com $v^s \in S_x$, $v^u \in C_x^u$. Veja que se $v^s \in S_x$ então existe $\{v_n^s\}$ tal que $v_n^s \in S_n(x)$ e $v_n^s \rightarrow v^s$. Escrevendo

$$v_n^s = Df^{-n}(f^n(x))\alpha_n, \alpha_n \in E_n(x)$$

Temos que para n suficientemente grande

$$\|v^s\| \geq \frac{1}{2} \|Df^{-n}(f^n(x))\alpha_n\| \geq \frac{1}{2} \lambda^n \|\alpha_n\|$$

Portanto $\alpha_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Logo $Df^n(x)v^s \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Assim,

$$\|Df^n(x)v\| \geq \|Df^n(x)v^u\| - \|Df^n(x)v^s\| \rightarrow \infty,$$

quando $n \rightarrow \infty$. O que é contradição. Logo $S_x = E^s(x)$ e de modo análogo $E^u(x) = U_x$. \square

Lema 2.1. *Sejam $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo e $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico, tal que $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$. Então existem campos de cones contínuos estáveis $\Lambda \ni x \mapsto C_x^s$ e instáveis $\Lambda \ni x \mapsto C_x^u$ bem adaptados a Λ . Isto é,*

1. $E^\alpha(x) \subset C_x^\alpha$, para todo $x \in \Lambda$ e $\alpha = s, u$;
2. $\dim(E^\alpha(x)) = \dim(C_x^\alpha)$, para todo $x \in \Lambda$ e $\alpha = s, u$;
3. $Df(x)(C_x^u) \subset C_f^u(x)$ e $Df(x)^{-1}(C_x^u) \subset C_{f^{-1}(x)}^u$;

4. Existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\text{dist}(S_x \cap Df(x)C_x^u, S_x \cap \delta C_{f(x)}^u) \geq \epsilon,$$

e

$$\text{dist}(S_x \cap Df^{-1}(x)C_x^s, S_x \cap \delta C_{f^{-1}(x)}^s) \geq \epsilon,$$

para todo $x \in \Lambda$, onde $S_x = \{v \in T_x M : \|v\| = 1\}$;

5. Existe $\lambda > 1$ e $m > 0$ tal que

$$\|(Df^m|_{C_x^u})^{-1}\|^{-1} \geq \lambda,$$

$$\|(Df^{-m}|_{C_x^s})^{-1}\|^{-1} \geq \lambda.$$

Demonstração. Pelo teorema 3 existem campos de cones contínuos

$$x \mapsto C_{Q_x,+},$$

$$x \mapsto C_{Q_x,-},$$

Os quais, $C_x^u = C_{Q_x,+}$, $C_x^s = C_{Q_x,-}$ satisfazem os itens 1, 2, 3, 5. Provemos o item (4).

Usando a construção feita na prova da implicação (2) \Rightarrow (3) do Teorema 3, temos que

$$(f^*Q_x - Q_x)(v) = q_x(v) \geq \delta, \quad \forall v \in C_{Q_x,+} \cap S_x,$$

onde $\delta = \min_{x \in \Lambda} \{q_x(v) : \|v\| = 1, v \in T_x M\}$. Assim, para todo $v \in C_x^u \cap S_x$ temos

$$Q_{f(x)} \left(\frac{Df(x)v}{\|Df(x)v\|} \right) \geq q_x \left(\frac{v}{\|Df(x)v\|} \right) \geq \frac{\delta}{\|Df(x)v\|^2} > 0.$$

Segue da continuidade de Q_x que

$$\epsilon = \inf \left\{ \text{dist}(Df(x)v, S_{f(x)} \cap \delta C_{f(x)}^u) : v \in S_x \cap C_x^u, x \in \Lambda \right\}.$$

O que conclui a prova para C_x^u . De maneira análoga vale para C_x^s . \square

Teorema 4. *Sejam $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo e $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico, tal que $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$. Então existem vizinhança V de Λ , e uma vizinhança de f $U \subset \text{Diff}^r(M)$, e campos de cones contínuos estáveis $V \ni x \mapsto C_x^s$ e instáveis $V \ni x \mapsto C_x^u$ tais que*

1. $E^\alpha(x) \subset C_x^\alpha$, para todo $x \in \Lambda$ e $\alpha = s, u$;

2. $\dim(E^\alpha(x)) = \dim(C_x^\alpha)$, para todo $x \in \Lambda$ e $\alpha = s, u$;

3. $Dg(x)(C_x^u) \subset C_{g(x)}^u$ e $Dg(x)^{-1}(C_x^u) \subset C_{g^{-1}(x)}^u$ para todo $g \in U$ e todo $x \in V$;
4. Existe $\epsilon > 0$ tal que $\text{dist}(S_x \cap Dg(x)C_x^u, S_x \cap \delta C_{g(x)}^u) \geq \epsilon$ e $\text{dist}(S_x \cap Dg^{-1}(x)C_x^s, S_x \cap \delta C_{g^{-1}(x)}^s) \geq \epsilon$, para todo $x \in V$ e para todo $g \in U$, onde $S_x = \{v \in T_x M : \|v\| = 1\}$;
5. Existe $\lambda > 1$ e $m > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|(Dg^m|_{C_x^u})^{-1}\|^{-1} &\geq \lambda, \\ \|(Dg^{-m}|_{C_x^s})^{-1}\|^{-1} &\geq \lambda. \end{aligned}$$

para todo $x \in V$ e para todo $g \in U$.

Demonstração. Sejam $\Lambda \ni x \mapsto C_x^u$ e $\Lambda \ni x \mapsto C_x^s$ campos de cones contínuos bem adaptados ao conjunto f -hiperbólico Λ , como no Lema 2.1. Seja $\epsilon_0 > 0$ dado pelo Lema 2.1 e $\lambda_0 > 1$, $m \geq 1$ tal que

$$\begin{aligned} \|(Df^m|_{C_x^u})^{-1}\|^{-1} &\geq \lambda_0, \\ \|(Df^{-m}|_{C_x^s})^{-1}\|^{-1} &\geq \lambda_0, \end{aligned}$$

para todo $x \in \Lambda$, dado pelo item (5) do Lema 2.1. Trocando a métrica ou f por f^m , podemos supor que

$$\begin{aligned} \|(Df|_{C_x^u})^{-1}\|^{-1} &\geq \lambda_0, \\ \|(Df^{-1}|_{C_x^s})^{-1}\|^{-1} &\geq \lambda_0, \end{aligned}$$

para todo $x \in \Lambda$.

Seja $\delta_0 > 0$. Para cada $x \in \Lambda$, considere uma carta local isométrica de M

$$\phi_x : B_{\delta_0}(0) \subset \mathbb{R}^k \rightarrow B_{\delta_0}(x) \subset M,$$

com $k = \dim(M)$, e $\phi_x(0) = x$.

Seja $0 < \epsilon_1 < \epsilon_0$ tal que $\sqrt{\lambda_0} - \frac{\epsilon_1}{6} > 1$. Sejam $0 < \delta_1 < \delta_0$ e U uma vizinhança de f em $\text{Diff}^r(M)$, tal que para todo $p \in \Lambda$,

$$\|D(\phi_{f(p)}^{-1} \circ g \circ \phi_p)(a) - D(\phi_{f(p)}^{-1} \circ g \circ \phi_p)(b)\| < \frac{\epsilon_1}{6}, \quad (2.5)$$

e

$$\|(Dg|_{C_p^u})^{-1}\|^{-1} \geq \sqrt{\lambda_0}, \quad (2.6)$$

$$\|(Dg^{-1}|_{C_p^s})^{-1}\|^{-1} \geq \sqrt{\lambda_0}, \quad (2.7)$$

para todo $a, b \in B_{\delta_1}(0) \subset \mathbb{R}^k$, para toda $g, h \in U$. A existência de δ_0, δ_1 decorre do fato de Λ ser compacto, da continuidade de Df e por U ser vizinhança suficientemente pequena de f na topologia C^r .

Considere $0 < \delta < \delta_1$ tal que

$$g(B_\delta(x)) \subset B_{\frac{\delta_1}{3}}(g(x)).$$

para todo $x \in B_{\delta_1}(\Lambda)$ e para toda $g \in U$.

Sejam $p_1, \dots, p_s \in \Lambda$, tal que

$$\Lambda \subset U = \bigcup_{j=1}^s B_\delta(p_j).$$

Seja $\psi : U \rightarrow \{1, \dots, s\}$ dada por

$$\psi(x) = \min \{j : x \in B_\delta(p_j)\}.$$

Dado $x \in U$, defina

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_x^s &= D\phi_{p_\psi(x)}(\phi_{p_\psi(x)}^{-1}(x))D\phi_{p_\psi(x)}^{-1}(p_\psi(x))C_{p_\psi(x)}^s, \\ \mathbb{C}_x^u &= D\phi_{p_\psi(x)}(\phi_{p_\psi(x)}^{-1}(x))D\phi_{p_\psi(x)}^{-1}(p_\psi(x))C_{p_\psi(x)}^u. \end{aligned}$$

Seja $x \in U$, $v \in \mathbb{C}_x^u$ com $\|v\| = 1$. Seja $v_0 \in C_{p_\psi(x)}^u$ tal que

$$v = D\phi_{p_\psi(x)}(\phi_{p_\psi(x)}^{-1}(x))D\phi_{p_\psi(x)}^{-1}(p_\psi(x))v_0.$$

Como as cartas são isométricas, temos que $\|v\| = \|v_0\| = 1$. Dado $g \in U$, $p \in \Lambda$, seja G_p a aplicação g escrita nas cartas locais ϕ_p e $\phi_{f(p)}$, isto é,

$$G_p = \phi^{-1} \circ g \circ \phi_p.$$

Na carta local $\phi_{p_\psi(g(x))}$, $Dg(x)v$ se escreve

$$\begin{aligned} D\phi_{p_\psi(g(x))}^{-1}(p_\psi(g(x)))Dg(x)v &= DG_{p_\psi(x)}(\phi_{p_\psi(x)}^{-1}(x))D\phi_{p_\psi(x)}^{-1}(p_x)v \\ &= DG_{p_\psi(x)}(\phi_{p_\psi(x)}^{-1}(x))D\phi_{p_\psi(x)}^{-1}(p_\psi(x))v_0 = w_0, \end{aligned}$$

e $Dg(p_\psi(x))v_0$ se escreve como

$$DG_{p_\psi(x)}(\phi_{p_\psi(x)}^{-1}(p_\psi(x)))D\phi_{p_\psi(x)}^{-1}(p_\psi(x))v_0 = w_1.$$

Assim,

$$\|w_0 - w_1\| < \frac{\epsilon_0}{3} \|D\phi_{p_\psi(x)}^{-1}(p_\psi(x))v_0\| = \frac{\epsilon_1}{6}. \quad (2.8)$$

Como $w_1 \in S_{p_\phi(x)} \cap Dg(p_\phi(x))C_{p_\phi(x)}^u$ escrita na carta local, temos que

$$\text{dist}\left(w_1, S_0 - (S_0 \cap D\phi_{g(p_\psi(x))}^{-1})(g(p_\psi(x)))C_{g(p_\psi(x))}^u\right) \geq \epsilon_1. \quad (2.9)$$

Note que

$$\text{dist}(x, p_\psi(x)) < \delta \Rightarrow \text{dist}(g(x), g(p_\psi(x))) < \frac{\delta_1}{3}. \quad (2.10)$$

Por 2.5 temos que

$$\text{dist}\left(S_0 - (S_0 \cap D\phi_{g(p_\psi(x))}^{-1})(g(p_\psi(x)))C_{g(p_\psi(x))}^u, S_0 - (S_0 \cap D\phi_{p_\psi(g(x))}^{-1})(p_\psi(g(x)))C_{p_\psi(g(x))}^u\right) < \frac{\epsilon_1}{3}. \quad (2.11)$$

De 2.9 e 2.11 segue que

$$\text{dist}\left(w_1, S_0 - (S_0 \cap D\phi_{p_\psi(g(x))}^{-1})(p_\psi(g(x)))C_{p_\psi(g(x))}^u\right) \geq \frac{2}{3}\epsilon_1. \quad (2.12)$$

Logo, por 2.8 e 2.12

$$\begin{aligned} \text{dist}(Dg(x)v, S_{g(x)} - (S_{g(x)} \cap C_{g(x)}^u)) &= \text{dist}\left(w_0, S_0 - (S_0 \cap D\phi_{p_\psi(g(x))}^{-1})(p_\psi(g(x)))C_{p_\psi(g(x))}^u\right) \\ &\geq \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)\epsilon_1 = \frac{1}{2}\epsilon_1. \end{aligned}$$

Defina $\epsilon = \frac{\epsilon_1}{2}$, então seguem os itens (1), (2), (3) e (4). Tomando $\lambda = \sqrt{\lambda_0} - \frac{\epsilon_1}{6} > 1$, o item 5 segue das equações 2.5, 2.6, e da construção de C^u e C^s . \square

Corolário 2. *Sejam $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo e $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico, tal que $T_\Lambda M = E_f^s \oplus E_f^u$. Então existem vizinhança V de Λ compacta, uma vizinhança de $f U \subset \text{Diff}^r(M)$, e uma forma quadrática contínua não-degenerada Q em U e $b > 0$ tal que, se $g \in U$ então*

$$(g^*Q - Q)_x v \geq b\|v\|^2$$

para todo $x \in g^{-1}(U) \cap U$. Em particular, o conjunto maximal invariante

$$\Lambda_g = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n(U),$$

de g em U é hiperbólico.

Demonstração. Seja Q forma contínua não degenerada dada pelo Teorema 3. Q pode ser estendida a toda M de forma contínua. Note que existe uma vizinhança compacta V_1 de Λ tal que Q é não-degenerada em V_1 . Como $f^*Q - Q$ é definida positiva em Λ , podemos supor que também pe definida positiva em V_1 . Em particular existe $a > 0$ tal que

$$(f^*Q - Q)_x v \geq a\|v\|^2$$

para todo $x \in U_1$.

Por outro lado, existe uma vizinhança U_1 de Id tal que se $h \in U_1$ então

$$(h^*Q - Q)_x v \geq \frac{a}{4} \|v\|^2 \quad \|Dh(x)v\| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \|v\|.$$

Seja $U = f \circ U_1$. Podemos supor para U , que existe $V \subset V_1$ vizinhança compacta de Λ , tal que se $g \in U$, então $g(V) \subset V_1$.

Se $x \in U$, tem-se que $g = f \circ h \in U$, então

$$\begin{aligned} (g^*Q - Q)_x v &= (f^*Q - Q)_{h(x)}(Dh(x)v) + (h^*Q - Q)_x v \\ &\geq a \|Dh(x)v\|^2 + \frac{a}{4} \|v\|^2 \\ &\geq \frac{a}{2} \|v\|^2 + \frac{a}{4} \|v\|^2 \geq \frac{a}{2} \|v\|^2. \end{aligned}$$

Escolhendo $b = \frac{a}{2}$ segue o resultado. \square

No caso de um difeomorfismo de Anosov $f : M \rightarrow M$, temos que $\Lambda = M$. Para todo g numa vizinhança U de f suficientemente pequena, e para toda vizinhança compacta V contendo M (nesse caso $V = M$), segue que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n(V) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n(M) = M.$$

Logo, os difeomorfismo de Anosov formam um conjunto aberto em $Diff(M)$.

Definição 2.6 (Conjunto Estável e Instável). *Seja $\Lambda \subset M$ hiperbólico em relação ao difeomorfismo $f : M \rightarrow M$. Dado $p \in \Lambda$, chamamos de conjunto estável e instável de p , respectivamente, os seguintes conjuntos*

$$\begin{aligned} W_f^s(p) &= \{y \in M; d(f^n(p), f^n(y)) \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}, \\ W_f^u(p) &= \{y \in M; d(f^{-n}(p), f^{-n}(y)) \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}. \end{aligned}$$

Definição 2.7 (Conjunto Estável e Instável Local). *Seja $\Lambda \subset M$ hiperbólico em relação ao difeomorfismo $f : M \rightarrow M$. Dado $p \in \Lambda$, chamamos de disco estável e instável de p de raio $\epsilon > 0$, respectivamente, os seguintes conjuntos*

$$\begin{aligned} W_f^s(p, \epsilon) &= \{q \in M; d(f^n(p), f^n(q)) \leq \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}\}, \\ W_f^u(p, \epsilon) &= \{q \in M; d(f^{-n}(p), f^{-n}(q)) \leq \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Teorema 5 (Teorema da Variedade Estável). *Seja $f \in Diff(M)$ e $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico. Então existe $\epsilon > 0$ tal que*

1. $W_f^s(p, \epsilon)$ é uma variedade mergulhada de classe C^k que varia continuamente com p .
2. $T_x(W_f^s(p, \epsilon)) = E_p^s$.
3. Para todo $q \in W_f^s(p, \epsilon)$ tem-se $d(f^n(q), f^n(p)) \leq \lambda^n d(q, p)$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [15]. □

Definição 2.8 (Difeomorfismo de Anosov). *Seja M uma variedade Riemanniana compacta. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo de Anosov se M é hiperbólico com relação a f .*

Proposição 2.3. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de Anosov, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\Omega(f) = M$;
2. $W_f^s(p)$ é denso em M , para todo $p \in M$;
3. $W_f^u(p)$ é denso em M , para todo $p \in M$;
4. f é topologicamente transitivo;
5. f é topologicamente mixing.

Demonstração. Omitiremos a prova que pode ser encontrada em [8]. □

Proposição 2.4. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de Anosov, então a decomposição $TM = E^u \oplus E^s$ é unicamente integrável.*

Demonstração. Como f é um difeomorfismo de Anosov, então M é um conjunto hiperbólico. Segue do Teorema 5, que para todo $p \in M$, $T_p W_f^s(p) = E_p^s$ e $T_p W_f^u(p) = E_p^u$, as quais formam uma folheação estável com as folhas sendo as variedades estáveis em cada ponto e uma folheação instável sendo as folhas as variedades instáveis em cada ponto. □

Dada uma matriz hiperbólica que preserva volume podemos induzir uma aplicação no toro \mathbb{T}^n , a qual tem estrutura hiperbólica em toda a variedade, e possui infinitos pontos periódicos.

O exemplo a seguir é um caso de difeomorfismo Anosov no toro \mathbb{T}^2 , induzido por uma matriz hiperbólica.

Exemplo 2.2. Considere a matriz quadrada

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e a transformação linear associada a matriz L dada por

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (2x + y, x + y). \end{aligned}$$

Veja que os autovalores de L são $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$ e $\lambda_1^{-1} = \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$. Note que L é simétrica, portanto os autovetores são ortogonais. Como $\det L = 1$, segue que L é invertível, e temos que

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, como L é invertível e seus autovalores são diferentes de 1, L é hiperbólica.

Podemos escrever os autoespaços associados como

$$\begin{aligned} E_L^s &= \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : L(v) = \lambda_1 v \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}x \right\}; \\ E_L^u &= \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : L(v) = \lambda_2 v \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x \right\}. \end{aligned}$$

Observe que se $v \in E_L^s \cap E_L^u$ então

$$L(v) = \lambda_1 v = \frac{\lambda_1 L(v)}{\lambda_2} \iff (\lambda_2 - \lambda_1)L(v) = 0 \iff L(v) = 0 \iff v = 0.$$

Como L é uma transformação linear, temos que a matriz jacobiana de L em v é

$$DL(v) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = L.$$

Lembremos que os autoespaços associados aos autovetores são invariantes por L , portanto E_L^s e E_L^u são invariantes por $DL(v)$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

Projetando a transformação linear L no toro podemos definir a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} F_L : \mathbb{T}^2 &\rightarrow \mathbb{T}^2 \\ (x, y) &\mapsto (2x + y, x + y) \pmod{1}. \end{aligned}$$

Como L é invertível, F_L também é, e sua inversa é a aplicação $F_{L^{-1}}$ associada a L^{-1} , a qual tem entradas inteiras.

Proposição 2.5. *Os pontos periódicos de F_L são densos. Ainda mais, seus únicos pontos periódicos são os pontos com entrada racional.*

Demonstração. Mostraremos que um ponto com entradas racionais é ponto periódico de F_L . Seja $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ tal que $x = \frac{p}{q}$ e $y = \frac{t}{q}$ onde $p, q, t \in \mathbb{Z}$. Então

$$F_L(x, y) = \left(\frac{2p+t}{q}, \frac{p+t}{q} \right),$$

o qual é um ponto racional tal que suas coordenadas tem denominador q . Observe que existem no máximo q^2 pontos tal que as entradas são racionais com denominador q , e a órbita $\mathcal{O}_{F_L}(x, y)$ está contida no conjunto destes pontos. Logo, existem n, m tal que

$$F_L^m(p) = F_L^n(p).$$

Como F_L é invertível segue que $F_L^{n-m}(x, y) = (x, y)$. O que conclui a prova.

Agora vamos provar que os pontos com coordenada racional são os únicos periódicos. Seja $F_L^N(x, y) = (x, y)$. Observe que $F_L^N(x, y) = (ax+by, cx+dy) \pmod{1}$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$ax + by = x + k,$$

$$cx + dy = y + l,$$

onde $l, k \in \mathbb{Z}$. Como 1 não é autovalor para L^n podemos determinar (x, y) unicamente por a, b, c, d, k, l . Mais precisamente,

$$x = \frac{(d-1)k - bl}{(a-1)(d-1) - cb},$$

$$y = \frac{(a-1)l - ck}{(a-1)(d-1) - cb},$$

portanto x, y são pontos com entradas racionais. □

Proposição 2.6. *F_L é topologicamente transitiva.*

Demonstração. Sejam c', c constantes. Considere as famílias de retas

$$y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x + c,$$

$$y = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}x + c'.$$

Sejam U e V abertos de \mathbb{T}^2 . Como os pontos periódicos são densos em \mathbb{T}^2 , tome $p \in U$ e $q \in V$ pontos periódicos e n seu período em comum, isto é, $F_L^n(p) = p$ e $F_L^n(q) = q$. A reta

da primeira família passando por p é invariante por F_L^n , a qual a expande por uma taxa de $\lambda_1^n > 1$. Similarmente, a reta da segunda família passando por q é F_L^n é invariante e contrai. Seja r um ponto da intersecção dessas duas retas, então $F_L^{kn}(r) \rightarrow q$ quando $k \rightarrow \infty$ e $F_L^{kn}(r) \rightarrow p$ quando $k \rightarrow -\infty$. Daí para k suficiente grande e positivo $F_L^{-kn}(r) \in U$ e $F_L^{kn}(r) \in V$, disso decorre que $F_L^{2kn}(U) \cap V \neq \emptyset$, como queríamos demonstrar.

□

Agora de maneira mais geral, considere uma matriz hiperbólica

$$A \in SL(n, \mathbb{Z}) = \{M \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{Z}); \det(M) = 1\}.$$

Seja $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação linear associada a matriz A . Como as entradas de A são inteiras temos que $L_A(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$. Note também que, como $\det A = 1$, A^{-1} só tem entradas inteiras e $L_{A^{-1}} = L_A^{-1}$. Considere a projeção canônica $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$, L_A induz uma aplicação em \mathbb{T}^n dada por

$$\begin{aligned} f_A \circ \pi : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{T}^n \\ p &\mapsto \pi \circ L_A(p), \end{aligned}$$

f_A está bem definida. De fato, dado $x, x' \in \mathbb{R}^n$ tal que $\pi(x) = \pi(x')$ então $x = x' + l$ onde $l \in \mathbb{Z}^n$. Daí $L_A(x) = L_A(x' + l) = L_A(x') + L_A(l)$, onde $L_A(l) \in \mathbb{Z}^n$. Aplicando a projeção temos que $\pi(L_A(l)) = 0$. Logo $\pi \circ L_A(x) = \pi \circ L_A(x')$, o que prova a afirmação. Observe que f_A é um difeomorfismo onde $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$. Tais aplicações são conhecidas como automorfismos hiperbólicos no toro.

Teorema 6. *Seja f_A um automorfismo hiperbólico no toro. Então valem as seguintes afirmações*

- Os pontos periódicos de f_A são densos no toro.*
- f_A tem estrutura hiperbólica em todo o toro, onde E^s, E^u são os auto-espços generalizados estável e instável de A .*
- E_p^s e E_p^u são translações de E^s e E^u em $T_p\mathbb{T}^n$, respectivamente.*
- Se $\pi(\bar{p}) = p$, então $W_{f_A}^s(p) = \pi(\bar{p} + \mathbb{E}^s)$ e $W_{f_A}^u(p) = \pi(\bar{p} + \mathbb{E}^u)$.*

Demonstração. (a) Fixe k inteiro e considere $Rac(k)$ como o conjunto dos pontos em \mathbb{T}^n cujo as coordenadas são racionais com denominador k , isto é

$$Rac(k) = \pi \left\{ \left(\frac{p_1}{k}, \dots, \frac{p_n}{k} \right) \in \mathbb{T}^n : p_j \in \mathbb{Z}, \forall 1 \leq j \leq n \right\}$$

Lembremos que $L_A(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$. Assim, para $p \in \left\{ \left(\frac{p_1}{k}, \dots, \frac{p_n}{k} \right) \in \mathbb{T}^n : p_j \in \mathbb{Z}, \forall 1 \leq j \leq n \right\}$, temos que

$$L_A(p) = \frac{1}{k} L_A(\bar{p}),$$

onde $\bar{p} \in \mathbb{Z}$ e $\frac{1}{k}\bar{p} = p$. Disso decorre que

$$L_A(\bar{p}) \in \mathbb{Z}^n,$$

e

$$\frac{1}{k} L_A(\bar{p}) \in \left\{ \left(\frac{p_1}{k}, \dots, \frac{p_n}{k} \right) \in \mathbb{T}^n : p_j \in \mathbb{Z}, \forall 1 \leq j \leq n \right\},$$

portanto

$$L_A \left(\left\{ \left(\frac{p_1}{k}, \dots, \frac{p_n}{k} \right) \in \mathbb{T}^n : p_j \in \mathbb{Z}, \forall 1 \leq j \leq n \right\} \right) \subset \left\{ \left(\frac{p_1}{k}, \dots, \frac{p_n}{k} \right) \in \mathbb{T}^n : p_j \in \mathbb{Z}, \forall 1 \leq j \leq n \right\}.$$

Logo, $f_A(\text{Rac}(k)) \subset (\text{Rac}(k))$. Como $\text{Rac}(k)$ tem no máximo k^n pontos distintos, segue que para todo $x \in \text{Rac}(k)$, existe algum $m \in \mathbb{Z}$, tal que $f_A^m(x) = x$. Por outro lado, $[\mathbb{Q}^n] = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \text{Rac}(i)$ é um conjunto denso, o que implica que os pontos periódicos são densos.

(b) Lembremos que a projeção canônica é sobrejetiva. Dado $U \subset \mathbb{T}^n$ aberto e $\phi_1, \phi_2 : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ duas cartas em U , cuja inversa é π , então $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} = \bar{x} + l$, onde $l \in \mathbb{Z}$. Logo, para $p \in \mathbb{T}^n$ o espaço tangente pode ser representado como $T_p \mathbb{T}^n = \{p\} \times \mathbb{R}^n$.

Note que as coordenadas locais f_A é dado por L_A , e como L_A é linear temos que

$$DL_A(p) = A,$$

portanto, $Df_A(p) = A$, a qual é uma aplicação de $T_p \mathbb{T}^n = \{p\} \times \mathbb{R}^n$ em $T_{f_A(p)} \mathbb{T}^n = \{f_A(p)\} \times \mathbb{R}^n$.

Observe que se $n = 2$, então os autoespaços gerados pelos autovetores de A formam a direção instável e estável para A . Para $n > 2$, considere os subespaços estável e instável E^s, E^u dados em 2.1 formados pelos autovetores de A , cujo os autovalores associados tem valor absoluto menor que 1 para o estável e maior que 1 para o instável. Assim, existe $C > 1$, $0 < \mu < 1$ e $0 < \lambda < 1$ tal que

$$\|A^k|_{E^s}\| \leq C\mu^k, \quad \forall k \geq 1;$$

$$\|A^{-k}|_{E^u}\| \leq C\lambda^{-k}, \quad \forall k \geq 1.$$

Para todo $p \in \mathbb{T}^n$, defina os subespaços em p como a translação dos espaços estável e instável E^s e E^u de A , $\mathbb{E}_p^s = \{p\} \times E^s$ e $\mathbb{E}_p^u = \{p\} \times E^u$. Daí, para $p \in \mathbb{T}^n$, $v \in \mathbb{E}_p^s$ e

$\bar{v} \in \mathbb{E}_p^u$ tem-se

$$\begin{aligned}\|Df_A^k(p)v\| &= \|A^k v\| \leq C\mu^k \|v\|, \\ \|Df_A^{-k}(p)v\| &= \|A^{-k} v\| \leq C\lambda^{-k} \|v\|,\end{aligned}$$

portanto temos contração em \mathbb{E}_p^s e expansão em \mathbb{E}_p^u . O que prova que f_A tem estrutura hiperbólica em \mathbb{T}^n . Logo, f_A é Anosov.

(d) Sejam $p = \pi(\bar{p})$ e $q = \pi(\bar{q})$. Para $\epsilon > 0$, considere $B(\bar{q}, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n$ e $U(q, \epsilon) = \pi B(\bar{q}, \epsilon) \subset \mathbb{T}^n$. Note que para ϵ suficientemente pequeno, $f_A^{-1}(U(f_A(q), \epsilon))$ não intersecta os bordo do toro. Assim, temos que

$$f_A^{-1}(U(f_A(q), \epsilon)) \cap U(q, \epsilon) = \pi[L_A^{-1}(B(L_A(\bar{q}), \epsilon)) \cap B(\bar{q}, \epsilon)].$$

Portanto, a variedade estável local de p é dado por

$$\begin{aligned}W_{f_A}^s(p, \epsilon) &= \bigcap_{n \geq 0} f_A^{-n}(U(f_A^n(p), \epsilon)) \\ &= \pi\left[\bigcap_{n \geq 0} L_A^{-n}(B(L_A^n(\bar{p}), \epsilon))\right] \\ &= \pi\left[\bar{p} + \bigcap_{n \geq 0} A^{-n}(B(L_A^n(0), \epsilon))\right].\end{aligned}$$

Por linearidade segue que

$$\pi[\bar{p} + E^s(C^{-1}\epsilon)] \subset W_{f_A}^s(p, \epsilon) \subset \pi[\bar{p} + E^s(\epsilon)],$$

logo a variedade estável em p é dada por

$$\begin{aligned}W_{f_A}^s(p) &= \bigcup_{n \geq 0} f_A^{-n}(W_{f_A}^s(f_A^n(p), \epsilon)). \\ &= \pi[\bar{p} + E^s].\end{aligned}$$

A prova para a variedade instável é análogo. □

Corolário 3. *Para todo $p \in \mathbb{T}^n$, $W_{f_A}^s(p)$ e $W_{f_A}^u(p)$ são densas em \mathbb{T}^n e se intersectam transversalmente, e os pontos da intersecção são homoclínicos.*

Demonstração. Para $n = 2$, como a inclinação das retas $E^s, E^u \subset \mathbb{R}^2$ são irracionais tem-se que

$$\begin{aligned}W_{f_A}^s(p) &= \pi(\bar{p} + E^s), \\ W_{f_A}^u(p) &= \pi(\bar{p} + E^u),\end{aligned}$$

são densas em \mathbb{T}^2 e a intersecção é transversal.

Para $n > 2$, considere os subespaços instável e estável. Então as variedades estável e instável de L_A em \bar{q} são dadas por

$$W_{L_A}^s(\bar{q}, \cdot) = \bar{q} + E^s,$$

$$W_{L_A}^u(\bar{q}) = \bar{q} + E^u,$$

respectivamente. Tome q um ponto periódico de período p com levantamento \bar{q} . Então $W_{L_A}^u(0)$ intersecta $W_{L_A}^s(\bar{q})$ em um ponto \bar{z} . Seja $z = \pi(\bar{z})$, tal que $z \in W_{f_A}^u(\pi(0)) \cap W_{f_A}^s(q)$ e $\text{dist}(f_A^n(z), f_A^n(q))$ tende a 0, quando n tende ao infinito. Então, $W_{f_A}^u(\pi(0))$ se acumula em q nos pontos $f_A^{mn}(z)$.

O conjunto dos pontos periódicos é denso em \mathbb{T}^n , portanto $W_{f_A}^u(\pi(0))$ é denso em \mathbb{T}^n . Como $W_{f_A}^u(\pi(0))$ e $W_{f_A}^s(\pi(0))$ são projeções de espaços complementares arbitrariamente próximo a q , tem-se que eles se intersectam transversalmente. Disso decorre que os pontos homoclínicos são densos em \mathbb{T}^n . Para qualquer $p \in \mathbb{T}^n$, $W_{f_A}^s(p)$ e $W_{f_A}^u(p)$ são translações da variedade de 0, logo são densos em \mathbb{T}^n e as intersecções homoclínicas para p são densas em \mathbb{T}^n . □

O seguinte resultado generaliza a Proposição 2.6.

Teorema 7. f_A é topologicamente transitivo.

Demonstração. Sejam $U, V \in \mathbb{T}^n$ abertos. Como a variedade estável $W_{f_A}^s(\pi(0))$ é densa em \mathbb{T}^n , ela intersecta U em um ponto q . Tome $J = \pi(\bar{q} + E^u(r))$, onde $r > 0$ é suficientemente pequeno, de modo que $J \subset U$. Seja λ a cota inferior dos autovalores instáveis, então a k -ésima iterada do disco $f_A^k(J)$ contém um disco de raio no mínimo $C^{-1}\lambda^k r$ em $W_{f_A}^u(f_A^k(q))$. Quando k cresce, o raio de $f_A^k(J)$ se torna suficientemente grande, então $f_A^k(J)$ se acumula em pedaços compactos de $W_{f_A}^u(\pi(0))$. Portanto $f_A^k(J)$ intersecta V para algum iterado k . Para este iterado k ,

$$\emptyset \neq f_A^k(J) \cap V \subset f_A^k(U) \cap V.$$

Isto implica que $\mathcal{O}_{f_A}^+(U) \cap V \neq \emptyset$. Similarmente $\mathcal{O}_{f_A}^-(U) \cap V \neq \emptyset$. Assim, f_A é topologicamente transitivo. □

Na verdade temos um resultado ainda mais forte. Concretamente,

Teorema 8. f_A é C^1 -robustamente transitivo.

Para provar o teorema acima precisamos definir algumas noções.

Definição 2.9 (Estabilidade Estrutural). *Diremos que $f \in \text{Diff}(M)$ é C^1 -estruturalmente estável se existe uma vizinhança U de f na topologia C^1 tal que se $g \in U$ então g é topologicamente conjugado a f .*

Definição 2.10 (Axioma A). *Diremos que f é Axioma A se*

a. $\overline{\text{Per}(f)} = \Omega(f)$

b. $\Omega(f)$ é hiperbólico.

Definição 2.11 (Transversalidade Forte). *$f \in \text{Diff}(M)$ satisfaz a condição de transversalidade forte se para todo $p \in M$ as variedades estável e instável de p são transversais em p .*

Proposição 2.7. *Se f é Axioma A e satisfaz a condição de transversalidade forte, então f é C^1 -estruturalmente estável.*

Demonstração. Para o caso de difeomorfismo de Anosov foi provado em [1], para o caso geral foi provado em [13]. □

Prova do Teorema 2.9. O difeomorfismo de Anosov f_A é C^1 -estruturalmente estável, visto que é Axioma A e possui a propriedade de transversalidade forte. Pela proposição 1.3 temos que a conjugação preserva a propriedade de transitividade. Como f_A é estruturalmente estável, existe uma vizinhança U de f_A onde $g \in U$ é conjugado a f_A . Logo, f_A é robustamente transitivo. □

2.2 Hiperbolicidade Parcial

Nesta seção daremos uma definição precisa de difeomorfismo parcialmente hiperbólico, e veremos algumas propriedades.

Definição 2.12 (Hiperbolicidade Parcial). *Um difeomorfismo $f \in \text{Diff}(M)$ é parcialmente hiperbólico se existe uma decomposição do espaço tangente $TM = E_f^{ss} \oplus E_f^c \oplus E_f^{uu}$,*

em subespaços Df -invariante e uma métrica Riemanniana em M tal que, para qualquer $p \in M$

$$\begin{aligned} \|Df(p)|_{E_f^{ss}(p)}\| &< 1 < \|(Df(p)|_{E_f^{uu}(p)})^{-1}\|^{-1}; \\ \|Df(p)|_{E_f^{ss}(p)}\| &< \|(Df(p)|_{E_f^c(p)})^{-1}\|^{-1} \leq \|Df(p)|_{E_f^c(p)}\| < \|(Df(p)|_{E_f^{uu}(p)})^{-1}\|^{-1}. \end{aligned}$$

Denotamos por $PH(M)$ o subconjunto dos difeomorfismos parcialmente hiperbólicos de $\text{Diff}(M)$.

No caso hiperbólico, pelo Teorema da Variedade Estável os subespaços da decomposição são sempre integráveis. Para o caso parcialmente hiperbólico nem sempre é verdade. Mas o teorema seguinte nos garante que a direção estável forte e instável forte são integráveis.

Teorema 9. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico tal que $TM = E_f^{ss} \oplus E_f^c \oplus E_f^{uu}$. Então E_f^{ss} e E_f^{uu} são unicamente integráveis.*

Demonstração. A prova pode ser encontrada em [7]. □

Observação 2.1.

1. Denotamos as folheações de E_f^{ss} e E_f^{uu} por \mathcal{F}_f^{ss} e \mathcal{F}_f^{uu} , respectivamente. Para $p \in M$ denotamos por $W_f^{ss}(p)$ a C^1 -folha de \mathcal{F}_f^{ss} contendo p , e a chamamos de variedade estável forte de p . Analogamente, denotamos por $W_f^{uu}(p)$ a C^1 -folha de \mathcal{F}_f^{uu} contendo p , a qual chamamos de variedade instável forte de p .
2. Denotamos por $E_f^{cs} = E_f^c \oplus E_f^{ss}$ a direção centro estável, e $E_f^{cu} = E_f^c \oplus E_f^{uu}$ a direção centro instável.
3. Quando a direção central é unicamente integrável, denotamos por \mathcal{F}_f^c a folheação central associada a E_f^c e $W_f^c(p)$ as folhas de \mathcal{F}_f^c contendo p .
4. Para $r > 0$ denotamos por $W^*(p; r)$ o disco de tamanho r centrado em p , medido pela métrica intrínseca em $W_f^*(p)$, para $*$ = ss, uu, c .

Seja $T : V \rightarrow W$ um operador linear limitado entre espaços vetoriais normados. Denotamos por $m(T)$ a conorma dada por

$$m(T) = \min \left\{ \frac{\|T(v)\|}{\|v\|}; v \neq 0 \right\}.$$

Proposição 2.8. *Seja $f \in \text{Diff}(M)$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico. Então existe um aberto U contendo f na topologia C^r e constantes $0 < \lambda < \lambda_1 < \mu < \mu_1 < 1$, funções contínuas $E^{ss} : U \rightarrow C(M, TM)$, $E^c : U \rightarrow C(M, TM)$ e $E^{uu} : U \rightarrow C(M, TM)$ tal que para cada $g \in U$ e $p \in M$,*

1. *existe uma decomposição em subespaços não triviais*

$$T_p M = E_g^{ss}(p) \oplus E_g^c(p) \oplus E_g^{uu}(p),$$

onde cada subespaço é invariante por Dg ;

2. $\|Dg(p)|_{E_g^{ss}(p)}\| < \lambda_1$ e $\|Dg(p)^{-1}|_{E_g^{uu}(p)}\| < \lambda_1$;
3. $\mu_1 < m(Dg(p)|_{E_g^c(p)})$ e $\|Dg(p)|_{E_g^c(p)}\| < \lambda_1$.

Essa proposição nos mostra que o conjunto $PH(M)$ é aberto, e numa vizinhança de um difeomorfismo parcialmente hiperbólico as cotas de expansão e contração são as mesmas.

Definição 2.13 (Difeomorfismo Dinamicamente Coerente). *Seja $f \in PH(M)$. Dizemos que f é dinamicamente coerente se existem duas folheações invariantes \mathcal{F}_f^{cs} e \mathcal{F}_f^{cu} , com C^1 -folhas, tangentes a E_f^{cs} e E_f^{cu} respectivamente. Dessas folheações obtemos outra folheação invariante $\mathcal{F}_f^{cu} \cap \mathcal{F}_f^{cs} = \mathcal{F}_f^c$, com C^1 -folhas, a qual é tangente a E_f^c . Chamamos essas folheações de centro estável, centro instável, e central, respectivamente.*

Definição 2.14 (Leaf Conjugated). *Sejam $f, g \in PH(M)$ dinamicamente coerente. Dizemos que f e g são leaf conjugated ou conjugado por folha se existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ que leva folhas de \mathcal{F}_f^c em folhas de \mathcal{F}_g^c e para qualquer $L \in \mathcal{F}_f^c$ tem-se que*

$$h(f(L)) = g(h(L)).$$

Teorema 10. *Suponha que $f \in PH(M)$ possui uma folheação central diferenciável. Então existe um aberto $U_f \subset \text{Diff}(M)$ contendo f tal que qualquer $g \in U_f$ é parcialmente hiperbólico, dinamicamente coerente, e leaf conjugated a f . A conjugação depende continuamente de g .*

Demonstração. A prova pode ser encontrada em [7]. □

Observação 2.2. *Da prova do Teorema 10 temos para $R > 0$ fixo, que se f satisfaz as hipóteses do Teorema 10, então para g suficientemente C^r -próxima a f , para algum*

$p \in M$, $W_f^c(p, R)$ é C^r -próximo a $W_g^c(p, R)$. Em particular, se a folheação central é uniformemente compacta, então para todo g suficientemente C^r -próxima a f , para todo $m \in M$, tem-se que $W_f^c(p)$ é C^r -próximo a $W_g^c(p)$.

Sejam V e M variedades compactas. Diremos que $f \in PH(V \times M)$ é um skew-product parcialmente hiperbólico se

$$f(p, q) = (F_q(p), A(q)), \quad (p, q) \in V \times M,$$

tal que $A : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo hiperbólico, para cada $q \in M$ tem-se que $F_q : V \rightarrow V$ é um C^1 -difeomorfismo o qual depende continuamente de q e

$$\|A|_{E_q^{ss}}\| < \|(DF_q(p))^{-1}\|^{-1} \leq \|DF_q(p)\| < \|(A|_{E^{uu}(q)})^{-1}\|^{-1}, \quad \forall (p, q) \in V \times M.$$

Se $f \in PH(V \times M)$ é um skew-product parcialmente hiperbólico, então f é dinamicamente coerente com folheação central dada por $\mathcal{F}_f^c = \{V \times \{z\} : z \in M\}$.

Definição 2.15 (Normalmente Hiperbólico). *Seja $f \in PH(M)$. A folheação central é r -normalmente hiperbólica se para todo $p \in M$, existem constantes $\lambda_-^*(p)$ e $\lambda_+^*(p)$, onde $*$ = ss, uu, c , tal que*

$$\lambda_-^*(p) \leq m(Df(p)|_{E_p^*}) \leq \|Df(p)|_{E_p^*}\| \leq \lambda_+^*(p),$$

e

$$\lambda_+^s(p) < (\lambda_-^c(p))^r,$$

$$(\lambda_-^c(p))^r < \lambda_-^u(p).$$

Alguns exemplos clássicos de difeomorfismo parcialmente hiperbólico robustamente transitivo são o exemplo do Shub em \mathbb{T}^4 , introduzido no artigo [15], e um exemplo em \mathbb{T}^3 introduzido por R.Mañé em [10].

Mostraremos um exemplo de difeomorfismo parcialmente hiperbólico no próximo capítulo que satisfaz as definições mencionadas anteriormente.

Uma propriedade interessante sobre a decomposição do fibrado tangente é se ela admite uma decomposição em conjuntos invariantes, onde os elementos se comportam de maneira dominada pelas outras fibras. Essa noção é mais geral do que a de parcialmente hiperbólico. Veremos uma definição mais concreta a seguir.

Definição 2.16 (Decomposição Dominada). *Seja $f : M \rightarrow M$ e $K \subset M$ um conjunto compacto f -invariante. Uma decomposição $T_K M = E_1 \oplus \cdots \oplus E_l$ é uma decomposição dominada se,*

1. *para cada $p \in K$ e $1 \leq i \leq l$ tem-se $Df(p)(E_i(p)) = E_i(f(p))$;*
2. *existem constantes $C > 0$ e $\lambda \in (0, 1)$ tal que dado $p \in K$, $1 \leq i \leq l - 1$, para todo $u \in E_i(p) - \{0\}$ e $v \in E_{i+1}(p) - \{0\}$, tem-se para todo $n \geq 1$*

$$\frac{\|Df^n(p)(u)\|}{\|u\|} \leq C\lambda^n \frac{\|Df^n(p)(v)\|}{\|v\|}.$$

Capítulo 3

Exemplo Berger-Carrasco

Neste capítulo apresentamos um exemplo introduzido por Pierre Berger e Pablo D. Carrasco, no artigo [3]. Este exemplo construído em \mathbb{T}^4 é um C^1 -*skew product* robustamente transitivo, parcialmente hiperbólico em \mathbb{T}^4 , com ação não hiperbólica na homologia. Ainda mais, nos artigos [3] e [11], foi provado que este *skew product* é conservativo, ergódico, não uniformemente hiperbólico e suas fibras centrais não admitem decomposição dominada em duas fibras.

Considere a família de difeomorfismos em \mathbb{T}^2 dada por

$$\begin{aligned} s_r : \mathbb{T}^2 &\rightarrow \mathbb{T}^2 \\ (x, y) &\mapsto (2r \sin x + 2x - y, x), \end{aligned}$$

a qual é uma família de mapas conservativos conhecido como *Chirikov-Taylor maps* ou *Standards maps*. A órbita (x_n, x_{n-1}) de s_k corresponde a solução da equação em diferença

$$\Delta^2 x_n = x_{n-1} - 2x_n + x_{n-1} = k \sin(2\pi x(t)),$$

a qual é a versão discreta da equação do pêndulo $x''(t) = K \sin(2\pi x(t))$. Apenas para valores de r suficientemente pequeno esta dinâmica se aproxima do fluxo de fase do pêndulo, visto que o pêndulo é sempre integrável para todo r e o *standard map* é integrável apenas para $k = 0$.

Seja $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ uma matriz hiperbólica. Para cada $N > 0$, definamos o difeomorfismo

$$\begin{aligned} f_N : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 &\rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \\ (x, y, z, w) &\mapsto (s_N(x, y) + P_x \circ A^{[N]}(z, w), A^{[2N]}(z, w)), \end{aligned}$$

onde $P_x(x, y) = (x, 0)$ e $[2N]$ é a parte inteira de $2N$.

Para N suficientemente grande, f_N é um skew-product parcialmente hiperbólico.

Pierre Berger e Pablo D. Carrasco introduziram este exemplo no artigo [3], onde provaram que f_N é *não uniformemente hiperbólico*. Isto é, $f_N : \mathbb{T}^4 \rightarrow \mathbb{T}^4$ é não uniformemente hiperbólico com respeito a medida de Lebesgue μ se para μ -quase todo ponto $p \in M$ vale, para todo $v \in T_p \mathbb{T}^4$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|df^n(v)\| \neq 0.$$

Nosso trabalho é baseado no artigo [6], onde mostram que f_N é robustamente topologicamente transitivo. Uma propriedade importante deste exemplo é que ele não possui decomposição dominada nas fibras centrais. A seguir apresentamos o resultado principal.

Teorema Principal. *Para N suficientemente grande, f_N é robustamente topologicamente transitiva. Ainda mais, f_N é robustamente topologicamente mixing.*

A prova do teorema será feito no Capítulo 4, seção 4.1. A seguir mostraremos algumas propriedades de f_N , entre elas provaremos que é parcialmente hiperbólico para N suficiente grande.

Considere $\{e^s, e^u\}$ a base ortonormal formada pelo autovetores correspondente aos autovalores $\lambda < 1 < \frac{1}{\lambda}$ do Anosov A .

Proposição 3.1. *Para N suficientemente grande, f_N é parcialmente hiperbólico, com a direção central $E^c = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, e subespaços unidimensionais que vão gerar as direções estável e instável E^s e E^u , respectivamente. Ainda mais, existe uma campo vetorial diferenciável*

$$M \ni p \mapsto (\alpha_p, e^u) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,$$

tal que:

- Para todo $p \in M$, $Df_N(\alpha_p, e^u) = \mu^{2N}(\alpha_{f(p)}, e^u)$ e (α_p, e^u) é tangente a E^u .
- $\|\alpha_p - \lambda^N P_x(e^u)\| \leq \lambda^{2N}$.

Um resultado similar vale para a direção estável E^s .

Demonstração. Calculando a derivada de f_N em $p = (x, y, z, w) \in \mathbb{T}^4$ obtemos

$$Df_N(p) = \begin{bmatrix} Ds_N(x, y) & P_x \circ A \\ 0 & A^{2N} \end{bmatrix},$$

onde

$$Ds_N(p) = \begin{bmatrix} 2N \cos x + 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, para $v = (v_c, 0, 0) \in E_{f_N}^c(p)$ segue que $Df_N(p)v = (Ds_N(x, y)v_c, 0, 0)$. Como s_N é invertível, temos que $\frac{1}{2N} \leq \|Ds_N\| \leq 2N$. Portanto,

$$\frac{1}{2N} \leq \|Ds_N^{-1}\|^{-1} = \|Df_N|_{E_{f_N}^c}\|^{-1} \leq \|Df_N|_{E_{f_N}^c}\| = \|Ds_N\| \leq 2N.$$

Por outro lado, para $p \in M$ considere

$$\alpha_p = \lambda^N \sum_{k=-\infty}^0 \lambda^{2Nk} D_{(x_{-1}, y_{-1})} s_N \cdots D_{(x_{-k}, y_{-k})} s_N (P_x(e^u)),$$

onde $(x_j, y_j, z_j, w_j) = f_N^j(p)$. Observamos que

$$E^u(p) = \mathbb{R}(\alpha_p, e^u),$$

é uma campo de linha diferenciável em M , visto que $\|\lambda^2 N Ds_N\| < \frac{\lambda^N}{2} < 1$, e similarmente para as derivadas. Note também que

$$\|\alpha_p - \lambda^N P_x(e^u)\| \leq \lambda^{2N},$$

e

$$D_p f_N(\alpha_p, e^u) = (D_{(x_0, y_0)} s_N \alpha_p + \mu^N P_x(e^u), \mu^{2N} e^u) = \mu.$$

De fato

$$\frac{D_{(x_0, y_0)} s_N \alpha_p + \mu^N P_x(e^u)}{\mu^{2N}} = \lambda^{2N} (D_{(x_0, y_0)} s_N \alpha_p + \mu^N P_x(e^u))$$

é equivalente a

$$\begin{aligned} & \lambda^N P_x(e^u) + \lambda^{2N} D_{(x_0, y_0)} s_N (\lambda^N \sum_{k=-\infty}^0 \lambda^{2Nk} D_{(x_{-1}, y_{-1})} s_N \cdots D_{(x_{-k}, y_{-k})} s_N P_x(e^u)) \\ &= \lambda^N P_x(e^u) + \lambda^N \sum_{k=-\infty}^0 \lambda^{2N(k+1)} D_{(x_0, y_0)} s_N \cdots D_{(x_{-k}, y_{-k})} s_N P_x(e^u) = \alpha_{f_N(p)}. \end{aligned}$$

Concluindo o resultado. □

Observação 3.1. *Note que a ação na homologia*

$$(s_N)_* = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : H_1(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}) \rightarrow H_1(\mathbb{T}^2; \mathbb{R})$$

de s_N é unipotente, e portanto a ação na homologia de f_N não é hiperbólica. Logo f_N não é hiperbólica. Note que as fibras horizontais não admitem decomposição dominada, visto que $Df_N|_{\mathbb{T}^2 \times \{0\}} = Ds_N$, e ação na homologia de Ds_N se comporta como um mapa do tipo twist e por isso não pode ter nenhum subfibrado invariante de dimensão 1 na central.

Sabemos que um difeomorfismo parcialmente hiperbólico nem sempre tem o espaço central integrável. Porém a direção central de f_N é integrável, como mostrado a seguir.

Proposição 3.2. f_N é dinamicamente coerente.

Demonstração. Tomando $W_{f_N}^c(p) = \{\mathbb{T}^2 \times \{p\}\}$, temos que

$$T_p W_{f_N}^c(p) = T_p \mathbb{T}^2 \times \{0\} = E^c(p).$$

Logo f_N é dinamicamente coerente e sua folheação central é

$$\mathcal{F}_f^c = \{\mathbb{T}^2 \times \{z\} : z \in \mathbb{T}^2\}.$$

□

Observação 3.2. f_N é 2-normalmente hiperbólico, para N suficientemente grande. Visto que $\lambda^{2N} < (2N)^{-4}$, para N suficientemente grande.

Proposição 3.3 (Conjugado por folhas). *Dado $\epsilon > 0$ pequeno, para N suficientemente grande, existe uma C^2 -vizinhança U_N contendo f_N tal que se $g \in U_N$, então g é dinamicamente coerente, suas folhas centrais são C^2 -subvariedades, g é conjugado por folhas para f_N , e para todo $p \in \mathbb{T}^4$, a C^2 -distância entre $W_g^c(p)$ e $W_{f_N}^c(p)$ é menor que ϵ .*

Demonstração. Como vimos na observação 3.2, para N suficientemente grande, f_N é 2-normalmente hiperbólico, daí por [7], temos que f_N é *plaque expansive*. Assim, segue do Teorema 10 que existe uma C^2 -vizinhança U_N de f_N , tal que se $g \in U_N$, então g é dinamicamente coerente, conjugado por folhas a f_N e suas folhas centrais são C^2 -subvariedades. Como as folhas centrais de f_N são uniformemente compactas, temos, pela observação 2.2, que se U_N é suficientemente pequeno, então para todo $g \in U_N$ e $p \in \mathbb{T}^4$ as folhas centrais $W_g^c(p)$ e $W_{f_N}^c(p)$ são ϵ -próximas na topologia C^2 . □

Considere a involução $\mathcal{I}(x, y, z, w) = (y, x, z, w)$ para $(x, y, z, w) \in \mathbb{T}^4$. Uma característica importante do mapa f_N é dada pelo seguinte lema.

Lema 3.1. *O mapa f_N^{-1} é conjugado ao mapa*

$$(x, y, w, z) \mapsto (s_N(x, y) + P_x \circ A^{-[N]}(z, w); A^{-[2N]}(z, w)),$$

pela involução \mathcal{I} .

Demonstração. Considere as involuções

$$\begin{aligned} R(x, y) &= (y, x), \\ J(x, y) &= (x, 2x - y + N \sin x). \end{aligned}$$

Podemos reescrever s_N da seguinte maneira,

$$R \circ J(x, y) = R(x, 2x - y + N \sin x) = (2x - y + N \sin x, x) = s_N(x, y).$$

Portanto $s_N^{-1} = J \circ R$. De fato,

$$J \circ R(x, y) = J(y, x) = (y, 2y - x - N \sin y) \quad (3.1)$$

Aplicando $R \circ J$ temos

$$R \circ J(y, 2y - x + N \sin y) = R(y, 2y - (2y - x + N \sin y) + N \sin y) = R(y, x) = (x, y).$$

Considere

$$(a, b, c, d) = (s_N(x, y) + P_x \circ A^{-[N]}(z, w); A^{[2N]}(z, w)).$$

Note que $(z, w) = A^{-2N}(c, d)$. Disso decorre que

$$\begin{aligned} (x, y) &= s_N^{-1}((a, b) - P_x \circ A^N(z, w)) = s_N^{-1}((a, b) - P_x \circ A^{-N}(c, d)) \\ &= J(R(a, b) - P_y \circ R \circ A^{-N}(c, d)). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} J((i, j) - (0, k)) &= (i, 2i - j + k + N \sin i) = (i, 2i - j + N \sin i) + (0, k) \\ &= J(i, j) + (0, k) \end{aligned}$$

Segue que

$$J(R(a, b) - P_y \circ R \circ A^{-N}(c, d)) = J \circ R(a, b) + P_y \circ R \circ A^{-N}(c, d).$$

Com isso temos que

$$f_N^{-1}(a, b, c, d) = (J \circ R(a, b) + P_y \circ R \circ A^{-N}(c, d), A^{-2N}(c, d)).$$

Tomando a involução $R^*(a, b, c, d) = (R(a, b), c, d)$ segue que

$$R^* \circ f_N^{-1} \circ R^*(a, b, c, d) = (s_N(a, b) + P_x \circ R \circ A^{-N}(c, d), A^{-2N}(c, d)).$$

□

Com este lema poderemos extrair propriedades para f_N e f_N^{-1} , uma vez que a involução \mathcal{I} nos diz que f_N e f_N^{-1} se comportam da mesma maneira, apenas mudando as coordenadas x e y .

Lema 3.2. *Para N suficientemente grande, existe uma C^1 -vizinhança U_N de f_N tal que para qualquer $g \in U_N$, para qualquer ponto $p \in \mathbb{T}^4$ e para qualquer vetor unitário $v = (v_x, v_y, v_z, v_w) \in E_g^{uu}(p)$ temos*

$$\lambda^N(\|P_x(e^u)\| - 3\lambda^N) \leq |v_x| \leq \lambda^N(\|P_x(e^u)\| + 3\lambda^N).$$

Demonstração. A prova se encontra em [3]. Pelo Lema 3.1 e considerando $P_y(x, y) = (0, y)$, obtemos um resultado análogo para a direção forte estável. \square

Capítulo 4

f_N é Robustamente Transitivo

Neste capítulo vamos mostrar que o difeomorfismo f_N introduzido no Capítulo 3 é robustamente transitivo, mais ainda é robustamente topologicamente mixing. Esta propriedade para f_N foi provado por Pablo D. Carrasco e D. Obata em [6].

Para $p \in \mathbb{T}^4$, identificaremos $T_p\mathbb{T}^4 = \mathbb{R}^4$. Uma vez que a fibra central E^c de f_N é tangente as fibras horizontais, por um abuso de notação, escrevemos

$$E^c = \mathbb{R}^2 \times \{0\} = \mathbb{R}^2.$$

Definimos $\pi_h : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ e $proj_h : \mathbb{R}^4 \rightarrow E^c$ como as projeções correspondentes. Da mesma forma, uma vez que as direções hiperbólicas E_A^s e E_A^u de A em \mathbb{T}^2 são constantes, por abuso de notação, escreveremos $E_A^* \subset \mathbb{R}^4, * = s, u$, para as direções que determinam em \mathbb{R}^4 . Se $v \in \mathbb{R}^4$, escrevemos $v = (v_c, v_s, v_u)$ usando a decomposição

$$\mathbb{R}^4 = E^c \oplus E_A^s \oplus E_A^u.$$

Para $\alpha > 0$, defina o cone estável de tamanho α sobre p por

$$\mathcal{C}_\alpha^s(p) = \{v \in T_p\mathbb{T}^4 : v = (v_c, v_s, v_u) : \|v_c + v_u\| \leq \alpha\|v_s\|\}.$$

Note que $\mathcal{C}_\alpha^s = \{\mathcal{C}_\alpha^s(p)\}_{p \in \mathbb{T}^4}$ é um campo de cones contínuo sobre p . Analogamente definimos o campo de cones instável \mathcal{C}_α^u de tamanho α ,

$$\mathcal{C}_\alpha^u(p) = \{v \in T_p\mathbb{T}^4 : v = (v_c, v_s, v_u) : \|v_c + v_s\| \leq \alpha\|v_u\|\}.$$

Lema 4.1. *Fixe $\alpha > 0$. Se N for suficientemente grande, existe uma vizinhança aberta U_N de f_N em $Diff(M)$ tal que para cada $g \in U_N$, a direção estável forte E_g^{ss} de g está contida em \mathcal{C}_α^s . Da mesma forma, a direção forte instável E_g^{uu} de g está contida em \mathcal{C}_α^u .*

Demonstração. Note que

$$\frac{1}{2N} \leq m(D_{s_N}) \leq \|D_{s_N}\| \leq 2N,$$

$$\lambda^N \leq m(P_x \circ A^N) \leq \|P_x \circ A^N\| \leq \lambda^{-N}.$$

Por outro lado a taxa de expansão e contração de A^{2N} é λ^{-2N} e λ^{2N} , respectivamente. A qual é exponencialmente maior que a estimativa anterior. Por um simples cálculo obtemos o desejado para f_N . Como as cotas valem para uma C^1 -vizinhança de f_N , o resultado segue. \square

Considere $I(N) = (-2N^{-\frac{3}{10}}, 2N^{-\frac{3}{10}})$ e $C = \{\frac{\pi}{2} + I(N)\} \cup \{\frac{3\pi}{2} + I(N)\}$. Definimos

$$Crit^u = C \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{T}^2,$$

$$Crit^s = \mathbb{S}^1 \times C \times \mathbb{T}^2.$$

Chamaremos de região boa os conjuntos $G^* = (Crit^*)^c$, onde $* = s, u$.

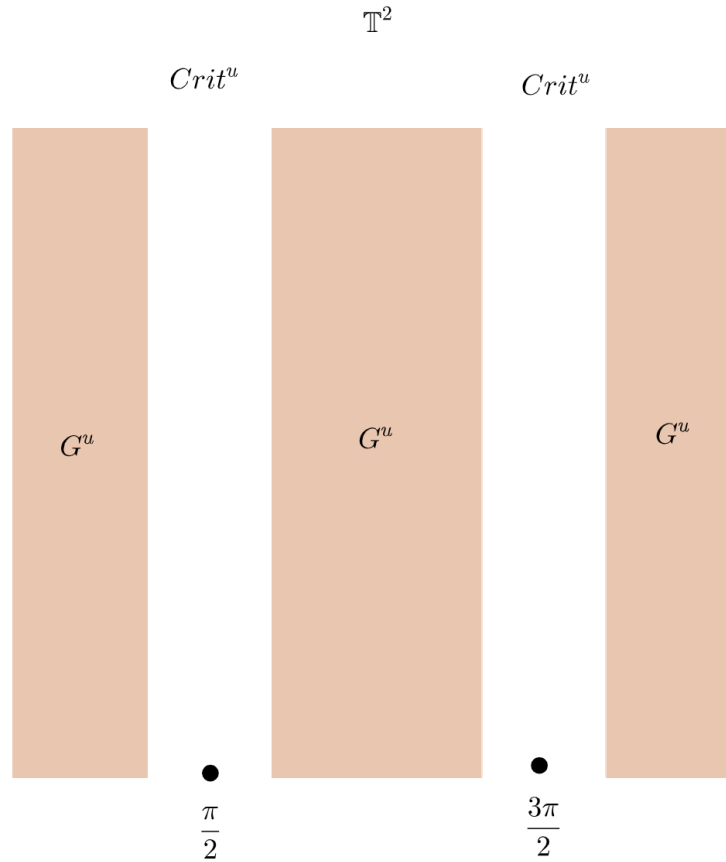


Figura 4.0.1: Região Boa Instável

Observação 4.1. Se $p = (x, y, z, w) \in G^u$, então $|\cos x| \geq N^{-\frac{3}{10}}$.

Definição 4.1. Para $\theta > 0$, definimos os cones horizontal e vertical de tamanho θ como

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\theta^{hor} &= \{v = (v_x, v_y) \in E^c : \|v_y\| < \theta\|v_x\|\}, \\ \mathcal{C}_\theta^{ver} &= \{v = (v_x, v_y) \in E^c : \|v_x\| < \theta\|v_y\|\}.\end{aligned}$$

A partir daqui fixe $\theta = N^{-\frac{3}{5}}$.

Lema 4.2. Para N suficientemente grande, existe uma C^1 -vizinhança U_N de f_N tal que se $g \in U_N$ e $p \in G^u$, então

$$v \in \mathcal{C}_\theta^{hor} \Rightarrow \text{proj}_h(Dg(p)v) \in \mathcal{C}_\theta^{hor} \text{ e } \|Dg(p)v\| > N^{\frac{1}{2}}\|v\|.$$

Ainda mais, se γ é uma C^1 -curva contida numa folha central satisfazendo

1. $\text{proj}_h\left(\frac{d\gamma(t)}{dt}\right) \in \mathcal{C}_\theta^{hor}$ para todo t ;
2. o comprimento de γ é maior que $N^{-\frac{3}{10}}$.

Então a curva $g \circ \gamma$ tem comprimento maior que 4π e sua projeção horizontal é tangente a \mathcal{C}_θ^{hor} .

Demonstração. Seja $p \in G^u$ e $v = (u, v) \in \mathcal{C}_\theta^{hor}$, temos que

$$\begin{aligned}\theta(|N\cos x + 2||u| - |v|) &= \theta|u| \left(|N\cos x + 2| - \frac{|v|}{|u|} \right) \geq \theta|u| \left(|N\cos x + 2| - N^{\frac{3}{5}} \right) \\ &\geq \theta|u| \left(N|\cos x| - 2 - 4N^{\frac{3}{5}} \right) \geq \theta|u| \left(N \cdot \frac{N^{-\frac{3}{10}}}{2} - 2 - 4N^{\frac{3}{5}} \right) \\ &\geq \theta|u| \left(\frac{N^{-\frac{7}{10}}}{2} - 2 - 4N^{\frac{3}{5}} \right) = |u| \left(\frac{N^{-\frac{7}{10}}}{2} - 2N^{\frac{3}{5}} - 4 \right) > |u|.\end{aligned}$$

Agora, seja $v = (u, v) \in \mathcal{C}_\theta^{hor}$ unitário, temos

$$\begin{aligned}\|Df(p)(u, v)\| &\geq (|N\cos x + 2||u| - |v|) \geq |u| (|N\cos x + 2| - \theta) \\ &\geq \frac{\|(u, v)\|}{1 + \theta} (|N\cos x + 2| - \theta) \geq \frac{1}{2} (|N\cos x + 2| - \theta) \\ &\geq \frac{N^{-\frac{7}{10}}}{2} - 1 - \frac{N^{-\frac{3}{5}}}{2} > N^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Com isso se γ é uma curva satisfazendo a hipótese então $l(f_N(\gamma)) > N^{\frac{1}{2}}N^{-\frac{3}{10}} = N^{\frac{2}{10}} > 4\pi$. \square

Lema 4.3. *Para N suficientemente grande, existe uma C^1 -vizinhança U_N de f_N tal que se $g \in U_N$ vale que:*

1. *Se $\gamma^u \subset \mathcal{F}_g^{uu}$ é uma curva não trivial, então existe um ponto $p \in \gamma^u$ e um número $n_u \geq 0$ tal que $g^n(p) \in G^u$, para todo $n \geq n_u$.*
2. *Se $\gamma^s \subset \mathcal{F}_g^{ss}$ é uma curva não trivial, então existe um ponto $p \in \gamma^s$ e um número $n_s \geq 0$ tal que $g^{-n}(p) \in G^s$, para todo $n \geq n_s$.*

Demonstração. Seja N suficientemente grande e U_N um conjunto aberto contendo f_N satisfazendo o Lema 3.2. Tome $g \in U_N$ e γ^u uma curva não trivial contida na variedade instável de g . Note que quanto maior é N menor é $\lambda^{-N}(\|P_x(e^u)\| + 3\lambda^N)^{-1}$, com isso tome $n_u \geq 0$ o menor inteiro tal que $g^{n_u}(\gamma^u)$ tem comprimento maior que $\lambda^{-N}(\|P_x(e^u)\| + 3\lambda^N)^{-1}$. Pelo Lema 3.2 temos que

$$\frac{l(\gamma_{n_u}^u \cap G^u)}{l(\gamma_{n_u}^u)} > 1 - 10N^{-\frac{3}{10}}.$$

Podemos então tomar uma curva $\gamma_{n_u+1}^u \subset \gamma_{n_u}^u$ conexa, compacta, contida em G^u , com comprimento maior que $\frac{1}{2}$. Veja também que para N suficientemente grande e qualquer curva γ contida numa variedade instável forte com comprimento maior que $\frac{1}{2}$ tem-se que

$$l(g(\gamma)) > \lambda^{-N}(\|P_x(e^u)\| + 3\lambda^N)^{-1},$$

disso decorre que $l(\gamma_{n_u+1}^u) > \lambda^{-N}(\|P_x(e^u)\| + 3\lambda^N)^{-1}$. Assim, obtemos uma sequência decrescente de curvas compactas:

$$\dots \gamma_{n_u+3}^u \subset \gamma_{n_u+2}^u \subset \gamma_{n_u+1}^u,$$

tais que $g^j(\gamma_{n_u+n}^u) \subset G^u$, para $j = 1 \dots n - 1$. Tome

$$p^u \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \gamma_{n_u+n}^u,$$

por construção, basta tomar $p = g^{-n_u}(p^u)$ para concluir o lema. \square

Lema 4.4. *Existe uma constante $R > 0$ com as seguintes propriedades: Para N suficientemente grande, existe uma C^1 -vizinhança U_N de f_N tal que para $g \in U_N$ e quaisquer dois pontos $p, q \in \mathbb{T}^4$, temos que para todo $z_p \in W_g^c(p)$, existe $z_q \in W_g^c(q)$ tal que*

$$W_g^{uu}(z_p; R) \cap W_g^{ss}(z_q; R) \neq \emptyset.$$

Demonstração. Vamos provar o resultado primeiro para f_N com N suficientemente grande, e depois usaremos o fato da transversalidade ser uma propriedade robusta para concluir que vale para uma vizinhança U_N de f_N .

Considere $\pi_v : \mathbb{T}^4 \rightarrow \mathbb{T}^2$ a projeção no segundo toro. Como $A^{2N} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ é Anosov, temos que existe $R_1 > 0$, tal que para qualquer $p, q \in \mathbb{T}^2$ as variedades $W_A^s(p; R_1)$ e $W_A^u(q; R_1)$ se intersectam transversalmente. Pelo Lema 4.1 existe $R_2 > R_1$ tal que para $p \in \mathbb{T}^4$,

$$W_A^s(\pi_v(p); R_1) \subset \pi_v(W_{f_N}^{ss}(p; R_2)).$$

Para todo $p \in \mathbb{T}^4$, considere as seguintes C^{-1} -subvariedades

$$\begin{aligned} W_{f_N}^{cs}(p; R_2) &= \bigcup_{q \in W_{f_N}^c(p)} W_{f_N}^{ss}(q; R_2), \\ W_{f_N}^{cu}(p; R_2) &= \bigcup_{q \in W_{f_N}^c(p)} W_{f_N}^{uu}(q; R_2), \end{aligned}$$

pela escolha de R_1, R_2 , para todo $p_1, p_2 \in \mathbb{T}^4$, as variedades $W_{f_N}^{cs}(p_1; R_2)$ e $W_{f_N}^{cu}(p_2; R_2)$ se intersectam transversalmente. Logo pelo Corolário 1 esta intersecção é uma subvariedade. Ainda mais é uma folha central, o que conclui a prova para f_N .

Como $W_g^{cs}(\cdot; R_2)$ e $W_g^{cu}(\cdot; R_2)$ variam continuamente com relação a g , existe uma vizinhança U_N tal que se $g \in U_N$, então a intersecção das variedades

$$\begin{aligned} W_g^{cs}(p; R_2) &= \bigcup_{q \in W_g^c(p)} W_g^{ss}(q; R_2), \\ W_g^{cu}(p; R_2) &= \bigcup_{q \in W_g^c(p)} W_g^{uu}(q; R_2). \end{aligned}$$

é transversal, o que conclui a prova. □

Proposição 4.1. *Para N suficientemente grande, existe uma C^1 -vizinhança U_N de f_N tal que para todo $g \in U_N$ e todo aberto $U \subset \mathbb{T}^4$, existe um número $n'_u \geq 0$ com as seguintes propriedades: para todo $n \geq n'_u$, existe uma C^1 -curva $\gamma_n^+ \subset g^n(U)$ satisfazendo:*

1. γ_n^+ está contida numa folha central;
2. $\pi_h(\gamma_n^+)$ é tangente ao \mathcal{C}_θ^{hor} ;
3. γ_n^+ tem comprimento maior que 4π ;
4. $\bigcup_{q \in \gamma_n^+} W_g^{uu}(q; R) \subset g^n(U)$.

Analogamente, existe um número $n'_s \geq 0$ tal que para todo $n \geq n'_s$, existe uma curva C^1 $\gamma_n^- \subset g^{-n}(U)$ satisfazendo:

1. γ_n^- está contida numa folha central;
2. $\pi_h(\gamma_n^-)$ é tangente ao \mathcal{C}_θ^{ver} ;
3. γ_n^- tem comprimento maior que 4π ;
4. $\bigcup_{q \in \gamma_n^-} W_g^{ss}(q; R) \subset g^{-n}(U)$.

Demonstração. Tome N e U_N que satisfaçam os Lemas 4.3 e 4.4. Seja $g \in U_N$. Dados U e V abertos em \mathbb{T}^4 escolha uma curva instável $\gamma^u \subset U$. Pelo Lema 4.3 existem $n_u \geq 0$ e z_u tal que $g^n(z_u) \in G^u$, para todo $n \geq n_u$. Defina $z^+ := g^{n_u}(z_u)$. Como $g^{n_u}(U)$ é aberto e $z^+ \in g^{n_u}(U)$, podemos escolher uma curva $\gamma^+ \subset g^{n_u}(U) \cap G^u \cap W_g^c(z^+)$ centrada em z^+ , tal que sua projeção horizontal $\pi_h(\gamma^+)$ é um segmento horizontal no toro \mathbb{T}^2 . Segue do Lema 4.2 que $\pi_h(g(\gamma^+))$ é tangente a \mathcal{C}_θ^{hor} e $l(g(\gamma^+)) > N^{\frac{1}{2}}l(\gamma^+)$.

Defina $W_k^+(z^+) = g^k(\gamma^+)$. Para todo $p \in W_k^+(z^+)$, se $p \in G^u$ e $T_p W_k^+(z^+) \subset \mathcal{C}_\theta^{hor}$ então $T_{g(p)} W_{k+1}^+(z^+) \subset \mathcal{C}_\theta^{hor}$, visto que o cone horizontal de tamanho θ é invariante pela derivada de g nos pontos de G^u . Lembremos que a distância entre os bordos de G^u é $N^{-\frac{3}{10}}$.

Observe que $W_0^+(z^+) = \gamma^+$ está contido em G^u e $proj_h(\frac{d\gamma^+}{dt}(t)) \in \mathcal{C}_\theta^{hor}$, $\forall t$. Pelo item 2 do Lema 4.2, segue que $TW_1^+(z^+) \subset \mathcal{C}_\theta^{hor}$. Assim, se $p \in G^u$ e $(u, v) \in \mathcal{C}_\theta^{hor}$ vetor unitário, então

$$\|Dg(p)(u, v)\| > N^{\frac{1}{2}}.$$

Seja $k \in \mathbb{N}$ o maior número tal que $g^j(\gamma^+) \subset G^u$, para todo $1 \leq j \leq k$. Como a derivada nos pontos de G^u expandem os vetores em \mathcal{C}_θ^{hor} por no mínimo $N^{\frac{1}{2}}$ e preserva o cone \mathcal{C}_θ^{hor} , tem-se que $g^j(\gamma^+)$ satisfaz as condições do item 2 do lema 4.2, para todo $1 \leq j \leq k$.

Suponha que k_0 é o menor inteiro tal que $\partial G^u \cap W_{k_0}^+(z^+) \neq \emptyset$. Defina $\gamma_{k_0}^+$ como a componente conexa de $W_{k_0}^+ \cap G^u$ contendo $g^{k_0}(z^+)$, tal que a componente intersecta dois bordos de G^u .

Observe que $\gamma_{k_0}^+$ tem comprimento de no mínimo $N^{-\frac{3}{10}}$, está contida em G^u e $T\gamma_{k_0}^+ \subset \mathcal{C}_\theta^{hor}$. Logo, pelo lema 4.2

$$l(\gamma_{k_0}^+) > 4\pi,$$

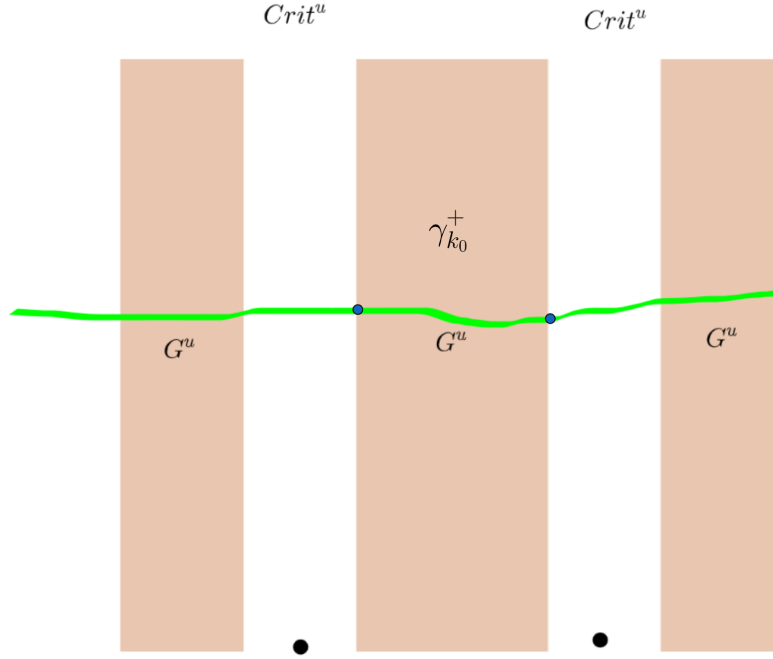


Figura 4.0.2

$$\text{Tg}(\gamma_{k_0}^+) \subset \mathcal{C}_\theta^{\text{hor}},$$

$$g(\gamma_{k_0}^+) \subset W_{k_0+1}^+.$$

Lembremos que

$$G^u = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{T}^4 : 2N^{-\frac{3}{10}} \leq |x - \frac{\pi}{2}| \leq 2N^{-\frac{3}{10}} \quad \text{ou} \quad 2N^{-\frac{3}{10}} |x - \frac{3\pi}{2}| \leq 2N^{-\frac{3}{10}} \right\}.$$

Note que cada componente conexa de G^u tem dois bordos. Como a região crítica só depende da coordenada x , tem-se que a derivada $Dg(p)$ expande qualquer vetor em $\mathcal{C}_{\theta_2}^{\text{hor}}$ por $N^{\frac{1}{2}}$, para todo $p \in G^u$.

Vamos construir as curvas $\gamma_n^+ \subset g(\gamma_{n-1}^+)$ para $n > k_0 + 1$. Primeiramente faremos para $n = k_0 + 2$. Veja que $P_x(\pi_1(\gamma_{k_0+1}^+)) = \mathbb{S}^1$. Considere $\bar{\gamma}_{k_0+1}^+$ a componente conexa da intersecção $G^u \cap \gamma_{k_0+1}^+(z^+)$, a qual intersecta os dois bordos de uma componente conexa de G^u . Defina $\gamma_{k_0+2}^+(z^+) = g(\bar{\gamma}_{k_0+1}^+)$, por construção

$$l(\gamma_{k_0+2}^+(z^+)) > 4\pi \quad e \quad \text{Tg}(\gamma_{k_0+2}^+(z^+)) \subset \mathcal{C}_\theta^{\text{hor}},$$

seguindo esta construção indutivamente, obtemos as curvas $\gamma_n^+(z^+)$ satisfazendo o desejado. De maneira análoga constrói-se as curvas $\gamma_n^-(z^+)$.

Considere $n_1 > 0$ tal que para $n \geq n_1$, existe uma C^1 -curva $\gamma_n^+ \subset g^n(\gamma^+)$ com

comprimento maior que 4π e $\pi_h(\gamma^+)$ é tangente a \mathcal{C}_θ^{hor} . Tome $r > 0$ tal que

$$\bigcup_{q \in \gamma_n^+} W_g^{uu}(q; r) \subset g^{n_u}(U).$$

Fixe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que para $p \in \gamma^+$ e $n \geq n_2$, temos $W_g^{uu}(g^n(q); R) \subset g^n(W_g^{uu}(q; r))$. Tomando $n'_u = \max\{n_1, n_2\}$. Então para $n \geq n'_u$ temos

$$\bigcup_{q \in \gamma_n^+} W_g^{uu}(q; R) \subset g^n(U),$$

o que conclui a prova para a curva γ_n^+ . Para o segundo caso basta tomar g^{-1} . \square

Seja $\mathcal{F}_{ver} = \{\{z\} \times \mathbb{T}^2 : z \in \mathbb{T}^2\}$ a folheação vertical. Para cada p , a interseção de $W_{f_N}^c(p)$ e $\{z\} \times \mathbb{T}^2$ é um único ponto. Portanto, para g C^1 -próximo a f_N temos que $W_g^c(p)$ intersecta cada folha $\{z\} \times \mathbb{T}^2$ em um único ponto, para todo $p \in \mathbb{T}^4$. Daí para $p_1, p_2 \in \mathbb{T}^4$, podemos definir o seguinte mapa

$$\begin{aligned} h_{p_1, p_2}^g : W_g^c(p_1) &\rightarrow W_g^c(p_2) \\ p &\mapsto W_g^c(p_2) \cap \mathcal{F}_{ver}(p). \end{aligned}$$

Veja que $h_{p_1, p_2}^{f_N}$ é o mapa identidade, independente de p_1, p_2 .

Para $p, q \in M$ com $q \in W_{f_N}^{ss}(p)$ defina a *holonomia estável* entre p e q por

$$\begin{aligned} H_{p, q}^{s, f_N} : W_{f_N}^c(p) &\rightarrow W_{f_N}^c(q) \\ w &\mapsto W_{f_N}^{ss}(w) \cap W_{f_N}^c(q). \end{aligned}$$

Definimos a holonomia com relação a g de maneira similar. Assim como definimos similarmente a holonomia instável considerando a variedade forte instável.

Sejam X e Y dois subconjuntos não vazios de um espaço métrico (M, d) . Lembremos que a distância Hausdorff $d_H(X, Y)$ é dada por

$$d_H(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x, y) \right\}.$$

Lema 4.5. *Para todo $\epsilon > 0$, existe $N_0 := N_0(\epsilon)$ com as seguintes propriedades: Para $N \geq N_0$ existe uma C^1 -vizinhança U_N de f_N tal que se $g \in U_N$, $p \in \mathbb{T}^4$ e $q \in W_g^{ss}(p; R)$, então $d_{C^0}(h_{p, q}^g, H_{p, q}^{s, g}) < \epsilon$.*

Demonstração. Fixe $\epsilon > 0$. Provemos primeiramente para f_N , com N suficientemente grande. Considere as direções

$$\mathbb{R}^4 = E^c \oplus E_A^s \oplus E_A^u.$$

Defina $X^s = \{0\} \times e^s$ como o campo vetorial, tal que e^s é o vetor unitário que gera a direção estável do Anosov Linear A . Seja $\{X_t^s\}_t$ o fluxo gerado por X^s . Como f_N é um skew-product temos que

$$\pi_2(W_{f_N}^{ss}(p)) = W_A^s(\pi_2(p)).$$

Em particular, para $p \in \mathbb{T}^4$ e $q \in W_{f_N}^{ss}(p; R)$, existe um único $T(q) \in \mathbb{R}$ tal que $X_{T(q)}^s(\cdot)$ é um difeomorfismo entre $W_{f_N}^c(p)$ e $W_{f_N}^c(q)$. Note que por construção $h_{p,q}^{f_N}(p) = X_{T(q)}^s$ para $m \in W_{f_N}^c(p)$.

Segue do Lema 4.1, tomando $\alpha < \frac{\epsilon}{R}$, para N suficientemente grande, $E_{f_N}^{ss}$ está contido no cone C_α^s de tamanho α em volta da direção $\{0\} \times E_A^s$. Logo, para cada $p \in \mathbb{T}^4$, a distância de Hausdorff entre a variedade estável $W_{f_N}^{ss}(p, R)$ e o pedaço de órbita $X_{[-R,R]}(p)$ é menor que ϵ . Pela definição de $H_{p,q}^{s,f_N}$ concluímos que $d_{C^0}(h_{p,q}^{f_N}, H_{p,q}^{s,f_N}) < \epsilon$. \square

4.1 Prova do Teorema Principal

Nesta seção provaremos o Teorema Principal. Lembrando que provaremos que para N suficientemente grande, f_N é robustamente topologicamente transitiva. A ideia da prova é utilizar as curvas obtidas na Proposição 4.1 para obter duas sequências de curvas que se intersectam a partir de um certo iterado. Lembremos também que os resultados obtidos anteriormente valem para uma vizinhança de f_N , isto é, as propriedades são robustas.

Demonstração do Teorema Principal. Tome $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e N suficientemente grande satisfazendo os Lemas 4.4, 4.5 e a Proposição 4.1. Sejam $g \in U_N$ e $U, V \subset \mathbb{T}^4$ abertos quaisquer.

Aplicando a Proposição 4.1 a U para o futuro e a V para o passado obtemos $n'_u, n'_s \geq 0$ e $p_u, q_n \in \mathbb{T}^4$, tal que existe uma curva $\gamma_{n'_u}^+ \subset W_g^c(p_u) \cap g^{n'_u}(U)$ quase horizontal e uma curva $\gamma_n^- \subset W_g^c(q_n) \cap g^{-n}(V)$ quase vertical, para cada $n \geq n'_s$.

Pelo Lema 4.4, existe $z_n \in \mathbb{T}^4$ tal que

$$W_g^{cu}(p_u; R) \cap W_g^{cs}(q_n; R) = W_g^c(z_n; R).$$

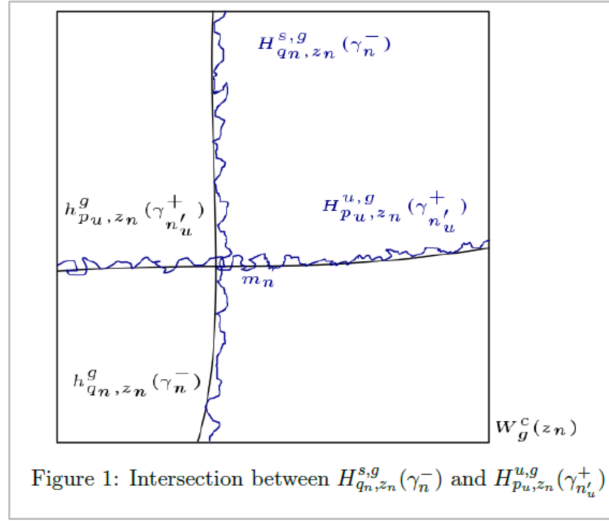


Figura 4.1.1: [Carrasco-Obata'2021]

Note que a imagem $h_{q_n, z_n}^g(\gamma_n^-)$ é C^0 -próxima a uma curva vertical de comprimento 4π . Portanto, pelo Lema 4.5, $H_{q_n, z_n}^{s,g}(\gamma_n^-)$ é também uma curva C^0 -próxima a uma curva vertical. De modo análogo, $H_{p_u, z_n}^{u,g}(\gamma_n^-)$ é uma curva C^0 -próxima a uma curva horizontal. Como ambas as curvas estão contidas na folha central $W_{f_N}^c(z_n, R)$, tem-se $H_{q_n, z_n}^{s,g}(\gamma_n^-)$ intersecta $H_{p_u, z_n}^{u,g}(\gamma_n^-)$ em um ponto m_n .

Pela Proposição 4.1, temos que $m_n \in g^{n'_u}(U) \cap g^{-n}(V)$, disso decorre que

$$g^{n+n'_u}(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Assim, concluímos que, se $n \geq n'_s + n'_u$, então

$$g^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Portanto, g é topologicamente mixing, para todo $g \in U_N$. Assim, f_N é topologicamente mixing. Em particular, f_N é robustamente mixing.

□

Referências Bibliográficas

- [1] ANOSOV, D. Geodesic flows on closed riemannian manifolds with negative curvature. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 90 (1969), 1–235.
- [2] ANOSOV, D., AND SINAI, Y. Certain smooth ergodic systems. *Russian Math. Surveys*, 22 (1967), 103–167.
- [3] BERGER, P., AND CARRASCO, P. Non uniformly hyperbolic diffeomorphisms derived from the standard map. *Commun. Math. Phys.* 329 (2014), 239–262.
- [4] BRIN, M., AND PESIN, Y. Partially hyperbolic dynamical systems. *Math. USSR-Izv.*, 8 (1974), 177–218.
- [5] BRIN, M., AND STUCK, G. *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [6] CARRASCO, P., AND OBATA, D. A new example of robustly transitive diffeomorphism. *Mathematical Research Letters*, 28 (3) (2021), 665–679.
- [7] HIRSCH, M., PUGH, C., AND SHUB, M. *Invariant Manifolds*. Springer-Verlag, 1977.
- [8] KATOK, A., AND HASSELBLATT, B. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1997.
- [9] LIMA, E. *Variiedades Diferenciáveis*. IMPA, 2007.
- [10] MAÑÉ, R. Contributions to the stability conjectures. *Topology* (1987), 17(4):383–396.
- [11] OBATA, D. On the stable ergodicity of Berger-Carrasco’s example. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 40, 4 (2020), 1008–1056.
- [12] PARRA, L. *Contribución para el estudio de difeomorfismos robustamente transitivos*. Dissertação de Mestrado. Universidad de Los Andes - Venezuela, 2018.

- [13] ROBINSON, C. Structural stability of C^1 diffeomorphisms. *Journal of Differential Equations* (1976), 22(1):28–73.
- [14] SHUB, M. Topological transitive diffeomorphism on \mathbb{T}^4 . *Lecture notes in Mathematics 206*. Springer (1971).
- [15] SHUB, M. *Global Stability of Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 1986.