



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



HIPERBOLICIDADE NÃO-UNIFORME E MEDIDA DE ENTROPIA MÁXIMA EM DINÂMICA COMPLEXA

CARLOS ENRIQUE GERBASI GOMEZ

Salvador-Bahia

HIPERBOLICIDADE NÃO-UNIFORME E MEDIDA DE ENTROPIA MÁXIMA EM DINÂMICA COMPLEXA

CARLOS ENRIQUE GERBASI GOMEZ

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Carlos Alberto Siqueira Lima

Salvador-Bahia

Sistema de Bibliotecas da UFBA

Carlos Enrique Gerbasi Gomez.

Hiperbolicidade Não-uniforme e Medida de Entropia Máxima em Dinâmica Complexa / Carlos Enrique Gerbasi Gomez. – 2023.

62 f. : il

Orientador: Carlos Alberto Siqueira Lima .

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística , Salvador, 2023.

1. Hiperbolicidade. 2. Semi-hiperbolicidade. 3. Condição Topológica de Collect-Eckmann. 4. Medida de Entropia Máxima. 5. Medidas duplicadoras. 6. Jacobiano.

HIPERBOLICIDADE NÃO-UNIFORME E MEDIDA DE ENTROPIA MÁXIMA EM DINÂMICA COMPLEXA

CARLOS ENRIQUE GERBASI GOMEZ

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática,

Banca examinadora:

Prof. Dr. Gerardo Honorato
Universidad de Valparaíso - Chile

Prof. Dr. Kleyber Mota da Cunha
UFBA

Prof. Dr. Carlos Alberto Siqueira Lima
UFBA

PARECER SOBRE A DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Hiperbolicidade Não-uniforme e Medida de Entropia Máxima em Dinâmica Complexa

Carlos Enrique Gerbasi Gomez

Em seu trabalho, o candidato Carlos Enrique Gerbasi Gomez demonstrou segurança e competência na apresentação da sua dissertação de mestrado. Conseguiu alinhar objetividade e clareza em sua exposição. Diante do exposto, considero o candidato aprovado.

Salvador, 02 de outubro de 2023.



Prof. Dr. Carlos Alberto Siqueira Lima (orientador – UFBA)

PARECER SOBRE A DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Hiperbolicidade Não-uniforme e Medida de Entropia Máxima em Dinâmica Complexa

Carlos Enrique Gerbasi Gomez

Em seu trabalho o candidato Carlos Enrique Gerbasi Gomez demonstrou segurança e competência na apresentação da sua dissertação de mestrado. Conseguiu alinhar objetividade e clareza em sua exposição. Diante do exposto, considero o candidato aprovado.

Salvador, 02 de outubro de 2023.



Prof. Dr. Gerardo Andres Honorato Gutierrez

PARECER SOBRE A DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Hiperbolicidade Não-uniforme e Medida de Entropia Máxima em Dinâmica Complexa

Carlos Enrique Gerbasi Gomez

Em seu trabalho o candidato Carlos Enrique Gerbasi Gomez demonstrou segurança e competência na apresentação da sua dissertação de mestrado. Conseguiu alinhar objetividade e clareza em sua exposição. Diante do exposto, considero o candidato aprovado.

Salvador, 02 de outubro de 2023.


Prof. Dr. Kleyber Mota da Cunha (UFBA)

*“Life before death.
Strength before weakness.
Journey before destination.”
Brandon Sanderson.*

Agradecimentos

Expresso meu agradecimento às seguintes pessoas e instituições:

Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) pelo apoio financeiro;

Ao meu orientador Carlos Alberto Siqueira Lima, pelo aprendizado, paciência e incentivo. Obrigado por confiar no meu potencial

Aos meus amigos, agradeço imensamente por não me deixarem conhecer a solidão. Você, amigos da Venezuela, daqui do Brasil e de outros países, me mostraram que na verdadeira amizade não existe distância. Sempre os terei no meu coração.

Aos novos amigos que pude fazer aqui no Brasil, obrigado por me fazerem sentir em casa e por me proporcionarem a oportunidade de fazer parte de suas vidas.

Aos meus amigos Emily e Vincenzo, vocês são o exemplo vivo de que os amigos são a família que escolhemos. À Trina, por me ouvir durante uma hora por semana sem julgamentos, agradeço pelas ferramentas que me proporcionou para a vida cotidiana.

Aos meus amigos da ULA: Anthony, Dimary, Enmanuel e José Rafael. Obrigado pelo sentimento de pertencimento. Onde quer que estejamos, ainda somos “Os últimos moicanos”.

À família Lizana, por me apoiar nesta jornada, não há palavras suficientes para expressar o quanto lhes sou grato. Especialmente para o meu lembrado professor Marcos Lizana, finalmente consegui aprender o significado da palavra “enjundia”.

E uma menção especial aos meus amigos Drahcir e Leonardo. Eles foram o equivalente a Samwise Gamgee e Gandalf nesta aventura.

Aos meus pais, Lilian e Carlos, e minhas irmãs Iris e Iraida. Os principais responsáveis pelo meu sucesso;

Ao Brasil, este belo país que me acolheu e trouxe oportunidades para minha vida pessoal e profissional. Espero um dia retribuir.

Agradeço a Deus por me dar a força para perseverar mesmo quando já não tinha mais forças para seguir adiante.

“ Vocês não sabem que dentre todos os que correm no estádio, apenas um ganha o prêmio? Corram de tal modo que alcancem o prêmio. Todos os que competem nos jogos se submetem a um treinamento rigoroso, para obter uma coroa que logo perece; mas nós o fazemos para ganhar uma coroa que dura para sempre ”

(O apóstolo Paulo em 1 Coríntios
9:24-25)

Resumo

Nesta dissertação estudaremos duas formas de hiperbolicidade não uniforme: funções racionais semi-hiperbólicas e aquelas que atendem à condição topológica de Collet-Eckmann. Nosso objetivo é apresentar uma caracterização desses tipos de hiperbolicidade em relação à medida de máxima entropia. Este trabalho incluirá uma análise do conceito de hiperbolicidade e sua conexão com a semi-hiperbolicidade e a condição TCE (Collet-Eckmann). Todo o trabalho foi baseado num artigo de Rivera-Letelier [20].

Palavras-chave: Hiperbolicidade; Semi-hiperbolicidade; Condição Topologica de Collect-Eckmann; Medida de Entropia Máxima; Medidas duplicadoras; Jacobiano.

Abstract

In this dissertation, we will study two forms of non-uniform hyperbolicity: semi-hyperbolic rational functions and those that satisfy the Collet-Eckmann topological condition. The objective is to present a characterization of these types of hyperbolicity in relation to the measure of maximum entropy. This work will include an analysis of the concept of hyperbolicity and its connection with semi-hyperbolicity and the TCE (Collet-Eckmann) condition. All the work is based on an article written by Rivera-Letelier [20]

Keywords:Hyperbolicity; Semi-hyperbolicity; Collect-Eckmann Topological Condition; Maximum Entropy Measure; Doubling Measures; Jacobian

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Hiperbolicidade	2
1.1.1	Parâmetros Misiurewicz	3
1.1.2	Movimentos holomorfos	4
1.1.3	O conjunto de Mandelbrot	5
1.2	Semi-hiperbolicidade	6
1.3	Similaridade entre $J(f_c)$ e M em torno de um parâmetro Misiurewicz	7
1.4	A dimensão de Hausdorff de ∂M	7
1.5	Entropia métrica	9
1.6	Pressão	11
1.7	Medida de entropia máxima	11
1.8	Medidas duplicadoras	12
1.9	Teorema A	13
1.10	Condição topológica de Collet-Eckmann	13
1.11	Teorema B	14
2	Teoria da Medida	15
2.1	Medidas duplicadoras	16
2.2	Dimensão de Hausdorff	19
3	Geometria Conforme	23
3.1	Conjunto de Julia	26
3.2	Métrica esférica	28
3.3	Módulo de anéis	29
3.4	Distorção de anéis	31
4	Condição Topológica de Collect-Eckmann	39
4.1	Jacobiano	41
4.2	Demonstração do Teorema B	42

5	Semi-hiperbolicidade	47
5.1	Pares bons em torno dos pontos críticos	48
5.2	Demonstração do Teorema A	54

Capítulo 1

Introdução

Nesta dissertação, abordaremos dois tipos de hiperbolicidade não uniforme: funções racionais semi-hiperbólicas e aquelas que satisfazem a condição topológica de Collet-Eckmann (TCE), dando uma caracterização em termos da medida de entropia máxima. O objetivo principal é demonstrar o Teorema A, bem como o Teorema B, que serão apresentados nas seções 1.9 e 1.11, respectivamente. Antes de apresentarmos tais resultados, vamos dar um primeiro passo para abordar o conceito de hiperbolicidade e ver como ele se relaciona com o de semi-hiperbolicidade e a condição TCE. Também vamos explicar porque é importante estudar hiperbolicidade (e condições fracas de hiperbolicidade) em Dinâmica Complexa. Como ambos os Teoremas A e B dão uma caracterização de hiperbolicidade não uniforme em termos da medida de entropia máxima, também falaremos um pouco sobre entropia, pressão topológica e o Princípio Variacional, os quais estão intimamente relacionados com os resultados principais que apresentaremos nesta dissertação.

Sobre a organização do texto. Colocamos na introdução todos os resultados e motivações. A leitura dos demais capítulos aprofunda tais conceitos e oferece uma demonstração detalhada dos Teoremas A e B enunciados nesta introdução (seções 1.9 e 1.11).

1.1 Hiperbolicidade

Definição 1.1 (Hiperbolicidade). *Dada f uma função racional de grau maior ou igual a dois, diremos que f é uma função **hiperbólica** se existe uma métrica conforme*

$$\rho = \gamma(z)|dz|,$$

sendo $\gamma(z) > 0$ uma função C^∞ , tal que f expande ρ uniformemente sobre seu conjunto de Julia, ou seja, existe $\lambda > 1$ tal que

$$\|f'(z)\|_\rho > \lambda,$$

para todo $z \in J(f)$.

Conjunto pós-crítico. Definimos o conjunto pós-crítico de f como o fecho das órbitas futuras dos pontos críticos de f , isto é

$$P(f) = \overline{\bigcup_{c \in \text{Crit}(f), n > 0} f^n(c)}.$$

As funções hiperbólicas racionais podem ser caracterizadas conforme descrito no resultado a seguir.

Teorema 1.2 (Caracterização de funções hiperbólicas). *Seja $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ uma função racional com grau ≥ 2 . Então temos que as seguintes condições são equivalentes.*

1. O conjunto pós-crítico $P(f)$ é disjunto do seu conjunto de Julia $J(f)$.
2. O conjunto de Julia não contém ciclos parabólicos ou pontos críticos.
3. Se z é um ponto crítico de f , então $f^n(z)$ tende a um ciclo atrator quando $n \rightarrow \infty$.
4. Existe uma métrica conforme ρ definida em uma vizinhança de $J(f)$ tal que $\|f'(z)\|_\rho > \lambda > 1$ para todo $z \in J(f)$.

Demonstração. Ver [14, p. 45] □

Exemplo 1. Consideremos a função $f(z) = z^n$, onde $n > 1$. Vamos verificar que f é uma função hiperbólica. Primeiramente, observe que $z = 0$ é o único ponto crítico de f . Além disso, $z = 0$ também é um ponto fixo, com multiplicador $\lambda = |f'(0)| = 0$, o que significa que $z = 0$ é um ponto atrator. Portanto, se considerarmos a k -ésima iteração de f , temos que $f^k(z) = (z^n)^k$. É evidente que $f^k(0) = 0$ para qualquer valor de k , e assim a condição 3 do teorema é satisfeita. Concluimos que f é uma função hiperbólica.

1.1.1 Parâmetros Misiurewicz

Considerando-se a família quadrática $f_c(z) = z^2 + c$, dizemos que c é um parâmetro Misiurewicz se o ponto crítico 0 da função $f_c(z) = z^2 + c$ é estritamente pré-periódico, isto é,

$$f_c^m(f_c^n(0)) = f_c^n(0) \quad \text{e} \quad f_c^m(f_c^{n-1}(0)) \neq f_c^{n-1}(0).$$

Quando o parâmetro é Misiurewicz, fica claro que o omega-limite do ponto crítico é um órbita periódica α . Veremos mais adiante que α é repulsora. Observe também, que como consequência direta da definição, ambos 0 e c estão fora de α . De fato, como c possui uma única pré-imagem, o ponto crítico 0 também deveria pertencer a α caso tivéssemos $c \in \alpha$.

Uma propriedade clássica dos parâmetros Misiurewicz, encontrada em [5] e [11], é dada pelo seguinte resultado.

Teorema 1.3 (Douady-Hubbard, 1984). *Se c for um parâmetro Misiurewicz da família quadrática $f_c(z) = z^2 + c$, então existe um $n > 0$ tal que $f_c^n(c)$ pertence a uma órbita periódica repulsora de f_c . Além disso,*

$$J(f_c) = K(f_c) = \{z \in \mathbb{C} : \{f_c^n(z)\} \text{ é limitado}\},$$

de onde segue que o conjunto de Julia cheio possui interior vazio.

Demonstração. Ver o artigo de Douady e Hubbard [5] com a prova original. □

Exemplo 2 (Misiurewicz não é hiperbólico). Apresentaremos agora um exemplo de uma função que não é hiperbólica. Para isto, usaremos os parâmetros de Misiurewicz.

Seja $f_c = z^2 + c$, onde c é um parâmetro de Misiurewicz. Como $z = 0$ é pré-periódico e eventualmente levado numa órbita fechada repulsora, temos que $0 \in J(f_c)$. Assim, pelo item 1 do teorema 1.2, temos que f_c não é hiperbólica.

1.1.2 Movimentos holomorfos

Considere uma variedade complexa e conexa chamada X . Uma família holomorfa de funções racionais, parametrizadas por X , é uma função $f : X \times \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ tal que para cada ponto $x \in X$, a função $f_x(z) = f(x, z)$ é uma função racional holomorfa em $\hat{\mathbb{C}}$.

Seja $E \subset \hat{\mathbb{C}}$. Uma função

$$h : X \times E \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

será um movimento holomorfo de E , com ponto base $x_0 \in X$, se satisfizer as seguintes condições:

1. $h(x_0, z) = z$ para qualquer $z \in E$;
2. $h(x, \cdot)$ for injetiva para todo $x \in E$;
3. Para cada $z \in E$, a função $h(\cdot, z)$ é holomorfa sobre X .

Um fato fundamental dos movimentos holomorfos é:

Teorema 1.4 (λ -Lema). *Um movimento holomorfo $h : X \times E \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ tem uma única extensão contínua $H : X \times \bar{E} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Além disso, para cada $x \in X$ a função $H(x, \cdot)$ é um homeomorfismo de \bar{E} sobre sua imagem.*

Demonstração. Ver [22, p. 245] □

Seja $f : X \times \hat{\mathbb{C}}$ uma família holomorfa de funções racionais. Dado λ , denotamos por J_λ o conjunto de Julia correspondente a f_λ . Diremos que J_λ se move holomorficamente em $\lambda_0 \in X$ se existir um movimento holomorfo $h : U \times J_{\lambda_0} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ onde U é uma vizinhança de λ_0 tal que

$$h_\lambda(J_{\lambda_0}) = J_\lambda \quad \text{e} \quad h_\lambda \circ f_{\lambda_0}(z) = f_\lambda \circ h_\lambda,$$

sempre que $\lambda \in U$. Observemos que este movimento holomorfo h_λ , se existir, deverá ser único.

Teorema 1.5 (Hiperbolicidade implica estabilidade estrutural). *Os conjuntos de Julia de uma família holomorfa de funções racionais hiperbólicas f_λ , com $\lambda \in X$, se movem holomorficamente em cada ponto λ_0 de X .*

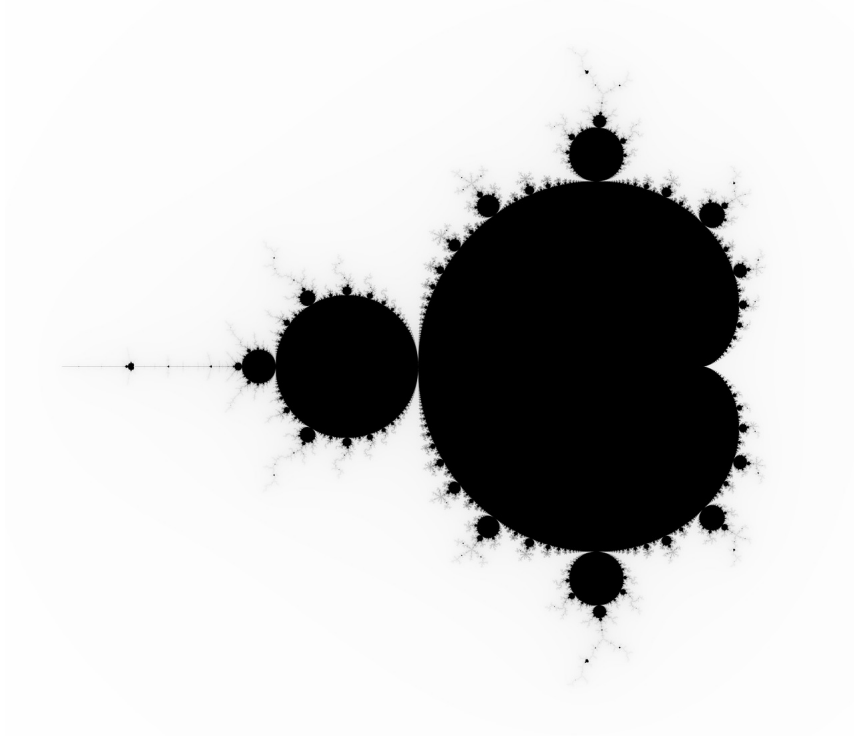


Figura 1.1: O Conjunto de Mandelbrot

1.1.3 O conjunto de Mandelbrot

Muitas pesquisas já foram realizadas sobre famílias de funções racionais, especialmente sobre os chamados polinômios quadráticos. Dado que qualquer polinômio quadrático, podemos sempre conjugá-lo a algum $f_c(z) = z^2 + c$, com $c \in \mathbb{C}$. Esta é, por definição, a família quadrática.

Chamaremos conjunto de Mandelbrot, ao conjunto definido por

$$M = \{c : f_c^n(0) \text{ não tende a } \infty \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Definição 1.6. *Uma componente U do interior do conjunto de Mandelbrot M é hiperbólica se, para algum $c_0 \in U$, f_{c_0} for hiperbólica.*

Segue da estabilidade estrutural de funções hiperbólicas (Teorema 1.5) que se U for uma componente hiperbólica, então f_c deve ser hiperbólica para qualquer $c \in U$. Em particular, de acordo com nosso primeiro exemplo, temos que se z pertencem à mesma componente conexa do ponto $z = 0$, então a função f_c será hiperbólica.

Observemos que, se c não pertence a M , então $f_c^n(0) \rightarrow \infty$, que é um ponto fixo superatrator, cumprindo assim com o item 3 do teorema 1.2, o que mostra que f_c é hiperbólica se c estiver no complementar de M .

À luz destes resultados, surgem algumas perguntas:

- Que tipo de comportamento a função f_c terá se $c \in \partial M$? Resposta: uma classificação parcial inclui em ∂M parâmetros **semi-hiperbólicos**, parabólicos (incluindo $1/4$), Collet-Eckmann, de Siegel, Cremer, Misiurewicz, renormalizáveis, finitamente renormalizáveis, infinitamente renormalizáveis (e.g. Feigenbaum e outros). Apesar disso, a maioria dos parâmetros em ∂M não está em nenhuma destas classes, embora a dimensão dos semi-hiperbólicos seja a mesma de $\dim_H(\partial M) = 2$! Isso mostra o quão complicada é a fronteira do Conjunto de Mandelbrot.

Nesta dissertação, falaremos apenas de dois tipos de f_c quando $c \in \partial M$: semi-hiperbolicidade e a condição topológica de Collet-Eckmann.

- Todas as componentes no interior do conjunto de Mandelbrot são hiperbólicas? Resposta: este é um dos principais problemas em aberto em Dinâmica Holomorfa.

Na seção a seguir, tentaremos dar uma resposta (pelo menos parcial) à primeira pergunta.

1.2 Semi-hiperbolicidade

Seja f uma função racional com grau maior ou igual a dois. Seja $r > 0$ pequeno e seja $x \in \hat{\mathbb{C}}$. Dado $m \geq 1$, vamos considerar o conjunto $B(f^m(x), r)$ e denotaremos por W à componente conexa de $f^{-m}(B(f^m(x), r))$ que contem a x . Assim, a função

$$f^m : W \rightarrow B(f^m(x), r) \quad (1.1)$$

é um recobrimento ramificado.

Definiremos o **grau semi-local** de f^m em x , com este r pré-fixado, como sendo o grau da função 1.1.

Definição 1.7. *Seja f uma função racional com grau maior ou igual a dois. Diremos que f é uma função **semi-hiperbólica** se existe um $r > 0$ suficientemente pequeno, e um $D \geq 1$ tal que para todo $m \geq 1$ e todo $x \in J(f)$ o grau semi-local de f^m em x é menor ou igual a D .*

O resultado a seguir, encontrado em [23], oferece uma boa caracterização das funções semi-hiperbólicas.

Teorema 1.8. *Seja f uma função racional com grau maior ou igual a dois. Então, f é semi-hiperbólica se, e somente se*

- f não possui pontos críticos recorrentes em seu conjunto de Julia, isto é, se z_0 é ponto crítico, então $z_0 \notin \omega(z_0)$.

- f não possui ciclos parabólicos em seu conjunto de Julia.

Exemplo 3 (Hiperbolicidade implica semi-hiperbolicidade). Pelo Teorema 1.2, especificamente no item 2, temos que toda as funções hiperbólicas não contem ciclos parabólicos ou pontos críticos em seu conjunto de Julia. Em particular, se f é hiperbolica, então f não contem ciclos parabólicos ou pontos críticos recorrentes em seu conjunto de Julia, portanto, pelo Teorema anterior, f é semi-hiperbólica.

Exemplo 4 (Semi-hiperbólico mas não hiperbólico). Como vimos no Exemplo 2, se c é um ponto de Misiurewicz a função $f_c(z) = z^2 + c$ não é hiperbólica. Agora, queremos ver que f_c é semi-hiperbólica.

De fato, como $z = 0$ é estritamente pré-periódico temos que $0 \notin \omega(0)$. Resta apenas mostrar que f_c não tem ciclos parabólicos.

Suponhamos, por contradição, que $\alpha = \{z_0, z_1, \dots, z_{m-1}\}$ é um ciclo parabólico de tamanho m .

Pelo Teorema 2.3 de [4] temos que a bacia de atração imediata associada ao ciclo de z_0 contém o ponto crítico $z = 0$. Mas c é Misiurewicz, logo $\omega(0) = \alpha$, de onde segue que α é repulsora, pelo Teorema 1.3. Logo α é um ciclo parabólico e repulsor ao mesmo tempo. Absurdo.

1.3 Similaridade entre $J(f_c)$ e M em torno de um parâmetro Misiurewicz

Em 1990, Tan Lei (ver [11]) mostrou que o conjunto de Mandelbrot é auto-similar em torno de todo parâmetro Misiurewicz c , bem como $J(f_c)$ é auto-similar em torno de $c \in J(f_c)$, quando c é Misiurewicz. Além disso, ambos $J(f_c)$ e M são similares entre si em torno de c .

Para exemplificar, tomemos o parâmetro de Misiurewicz $c = i$ para a família quadrática $f_c(z) = z^2 + c$. Se dermos um zoom apropriado em M numa vizinhança de $i \in \partial M$, então veremos uma cópia de M , a menos de rotação. Por outro lado, podemos ver nas figuras 1.2 e 1.3 que existe um zoom apropriado de M em torno de i que se parece bastante com o conjunto de Julia de $f_i(z) = z^2 + i$.

1.4 A dimensão de Hausdorff de ∂M

Em 1998 M. Shishikura (ver [21]) demonstrou um dos resultados mais importantes em Dinâmica Complexa.

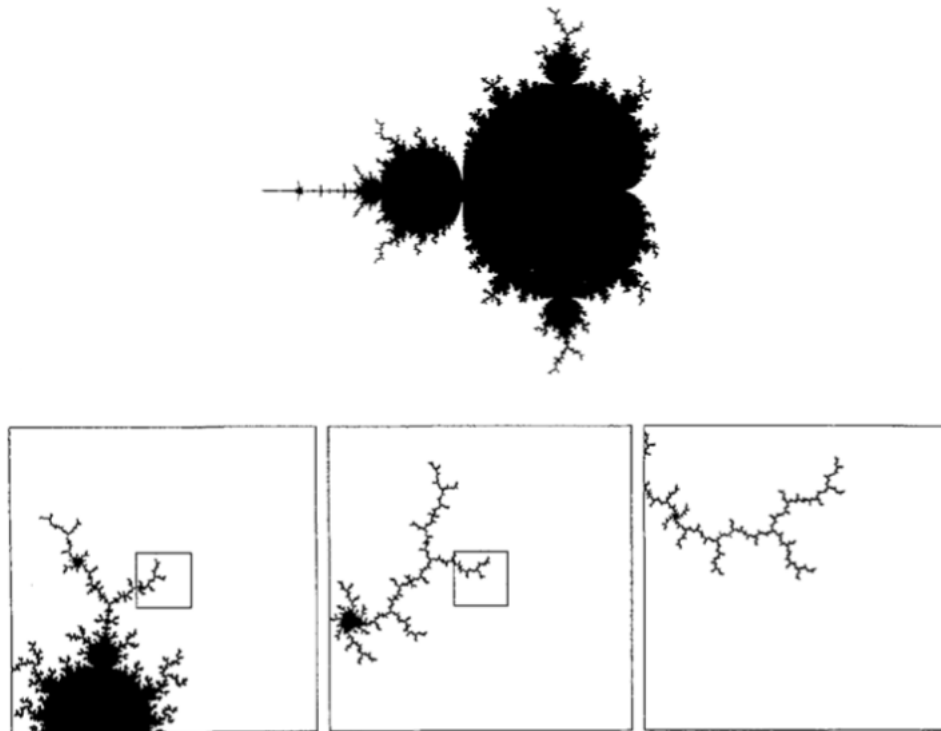


Figura 1.2: Zoom de M em torno do parâmetro de Misiurewicz $c = i$. A figura foi obtida de [11].

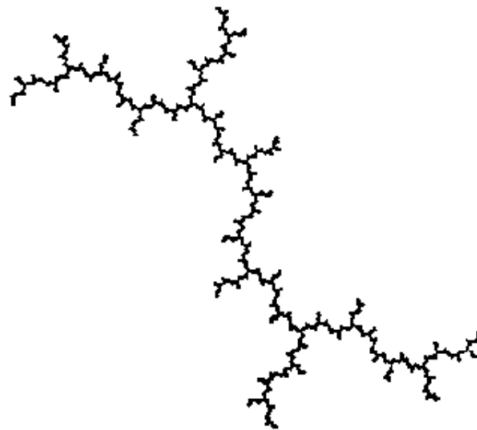


Figura 1.3: O conjunto de Julia de $f(z) = z^2 + i$. O parâmetro é Misiurewicz, logo i pertence à interseção $J(f_i) \cap \partial M$.

Teorema 1.9 (Shishikura, 1998). *A dimensão de Hausdorff da fronteira do conjunto de Mandelbrot é 2. Além disso, para qualquer aberto U interseccionando ∂M , temos*

$$\dim_H(\partial M \cap U) = 2.$$

A demonstração original de Shishikura se baseia na bifurcação de pontos parabólicos.

Recentemente, Kawahira e Kisara (ver [10]) deram uma demonstração alternativa, mostrando que semi-hiperbolicidade é abundante na família quadrática:

Teorema 1.10 (Kawahira and Kisara, 2021). *Seja \mathcal{S} o conjunto dos parâmetros semi-hiperbólicos da família quadrática $f_c(z) = z^2 + c$ que não são hiperbólicos, tampouco Misiurewicz. Então o fecho de \mathcal{S} é exatamente ∂M . Além disso,*

$$\dim_H \{c \in \partial M : f_c \text{ é semi-hiperbólica}\} = 2.$$

1.5 Entropia métrica

Nesta seção, exploraremos os conceitos de entropia (que nos dá informação sobre a complexidade de um sistema) e pressão, e como eles estão relacionados por meio do Princípio Variacional.

Nos concentraremos na definição de entropia métrica, seguindo a abordagem de Kolmogorov, ou seja, através da entropia de partições.

Seja (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de probabilidade. Uma partição do conjunto X é uma coleção \mathcal{A} de subconjuntos não vazios e disjuntos de X tais que a união de todos estes conjuntos é igual a X .

Definição 1.11. *Seja \mathcal{A} uma partição finita do conjunto X . A entropia da partição \mathcal{A} com respeito a μ é dada por*

$$h_\mu(\mathcal{A}) = - \sum_{A \in \mathcal{A}} \mu(A) \ln \mu(A),$$

onde \ln é o logaritmo natural, e por convenção $0 \ln 0 = 0$.

Dadas duas partições \mathcal{A} e \mathcal{B} , é possível definir uma nova partição $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ de X como segue:

$$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \{A \cap B; A \in \mathcal{A} \text{ e } B \in \mathcal{B}\}.$$

A entropia condicional de \mathcal{A} dado \mathcal{B} é dada por

$$h_\mu(\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}) = h_\mu(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) - h_\mu(\mathcal{B}).$$

Se desenvolvermos as duas entropias, teremos:

$$\begin{aligned}
h_\mu(\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}) &= - \sum_{A \cap B \in \mathcal{A} \vee \mathcal{B}} \mu(A \cap B) \ln \mu(A \cap B) + \sum_{B \in \mathcal{B}} \mu(B) \ln \mu(B) \\
&= - \sum_{A \cap B \in \mathcal{A} \vee \mathcal{B}} \mu(A \cap B) \ln \mu(A \cap B) + \sum_{B \in \mathcal{B}} \mu(X \cap B) \ln \mu(B) \\
&= - \sum_{A \cap B \in \mathcal{A} \vee \mathcal{B}} \mu(A \cap B) \ln \mu(A \cap B) + \sum_{B \in \mathcal{B}} \mu\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \cap B\right) \ln \mu(B) \\
&= - \sum_{A \cap B \in \mathcal{A} \vee \mathcal{B}} \mu(A \cap B) \ln \mu(A \cap B) + \sum_{B \in \mathcal{B}} \sum_{A \in \mathcal{A}} \mu(A \cap B) \ln \mu(B) \\
&= - \sum_{B \in \mathcal{B}} \mu(B) \sum_{A \in \mathcal{A}} \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)} \ln\left(\frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}\right).
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Como a função $\varphi(x) = x \ln x$, com $x > 0$ é convexa, temos que

$$\varphi\left(\sum a_i x_i\right) \leq \sum a_i \varphi(x_i).$$

Tomando $a_i = \mu(B_i)$ e $x_i = \frac{\mu(A \cap B)}{B_i}$ temos

$$h_\mu(\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}) \leq h_\mu(\mathcal{A}),$$

e em consequência $h_\mu(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \leq h_\mu(\mathcal{A}) + h_\mu(\mathcal{B})$.

Dada uma partição \mathcal{A} e $T : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável, denotaremos por \mathcal{A}^n a partição $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{A})$. Como $h_\mu(\mathcal{A}^n)$ é subaditiva temos que o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_\mu(\mathcal{A}^n)}{n}$$

existe.

Desta maneira, podemos definir a entropia da partição \mathcal{A} com respeito à transformação T e a probabilidade μ , T -invariante, como o seguinte número:

$$h_\mu(T, \mathcal{A}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_\mu(\mathcal{A}^n)}{n}.$$

Com base nessa entropia, é possível estabelecer uma definição de entropia que esteja exclusivamente ligada à medida e à dinâmica selecionadas.

Definição 1.12 (Entropia métrica). *A entropia métrica de $T : X \rightarrow X$ com respeito à medida de probabilidade μ , T -invariante, é:*

$$h_\mu(f) := \sup_{\mathcal{A}} h_\mu(T, \mathcal{A})$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições finitas de X .

1.6 Pressão

Seja T uma transformação contínua de um espaço métrico compacto X . Seja ϕ uma função contínua de X em \mathbb{R} , a qual chamaremos de potencial.

Seja \mathcal{U} uma cobertura aberta finita de X . Definiremos $W_m(\mathcal{U})$ como o conjunto de todos os produtos formais

$$\underline{U} = U_{i_0} U_{i_1} \cdots U_{i_{m-2}} U_{i_{m-1}},$$

onde $U_{i_j} \in \mathcal{U}$. O número m é chamado de tamanho do produto formal.

Definimos

$$X(\underline{U}) = \{x \in X : T^k(x) \in U_{i_k} \text{ para } k = 0, \dots, m-1\},$$

e denotamos

$$S_m \phi(\underline{U}) = \sup \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \phi(T^k(x)) : x \in X(\underline{U}) \right\}.$$

No caso de $X(\underline{U}) = \emptyset$, diremos que $S_m \phi(\underline{U}) = -\infty$. Um subconjunto $\mathcal{C} \subset W_m(\mathcal{U})$ é chamado de cobertura de X , se $X = \bigcup_{\underline{U} \in \mathcal{C}} X(\underline{U})$.

Dado $m \geq 1$, definimos

$$Z_m(\phi, \mathcal{U}) = \inf_{\mathcal{C}} \sum_{\underline{U}} \exp(S_m \phi(\underline{U})),$$

onde \mathcal{C} varia em todos os subconjuntos de $W_m(\mathcal{U})$ que são coberturas de X .

Teorema 1.13. *O limite*

$$P(\phi, \mathcal{U}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln Z_n(\phi, \mathcal{U})$$

existe e é finito.

Demonstração. Ver [3, p. 33] □

Definição 1.14 (Pressão topológica). *O limite de $P(\phi, \mathcal{U})$ quando $|\mathcal{U}| \rightarrow 0$ existe e é chamado de **pressão topológica do potencial** ϕ , ou simplesmente **pressão de ϕ** .*

1.7 Medida de entropia máxima

Um resultado significativo no contexto da Formalismo Termodinâmico relaciona a entropia métrica e a pressão: o Princípio Variacional.

Teorema 1.15 (Princípio variacional). *Seja $f : X \rightarrow X$ um endomorfismo de um espaço métrico compacto e seja $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então*

$$P_f(\phi) = \sup_{\mu} \left(h_{\mu}(f) + \int \phi d\mu \right)$$

onde o supremo é tomado sobre todas as medidas invariantes por f .

Demonstração. Ver [3, p. 40] □

Se $\phi = 0$, então definimos $P_f(\phi)$ como sendo a entropia topológica de f , que denotaremos por $h_{top}(f)$. Uma medida $\mu \in \mathcal{M}(f)$ tal que $h_{\mu}(f) = h_{top}(f)$ é chamada de **medida de entropia máxima**.

No trabalho realizado por Ricardo Mañe em [13], é mostrado que as funções racionais com grau maior que 2 têm uma medida única que maximiza a entropia métrica. Além disso, em [7] e [17], é demonstrado que essa medida satisfaz $h_{\mu}(f) = \ln(d)$.

Por outro lado, em [12], é demonstrado o seguinte resultado.

Teorema 1.16. *Se f é uma função racional com grau $d \geq 2$, então existe uma medida de probabilidade f -invariante μ_f tal que:*

1. *O suporte de μ_f é $J(f)$.*
2. *$\mu_f(f(A)) = d\mu_f(A)$, para todo conjunto de Borel $A \subset \hat{\mathbb{C}}$ tal que $f|_A$ é injetiva. Além disso, μ_f é a única medida f -invariante que satisfaz esta propriedade.*
3. *A entropia dessa medida é $h_{\mu_f}(f) = \ln(d)$.*

Como consequência de ambos os resultados, temos que toda função racional com grau maior ou igual a 2 tem uma única medida de entropia máxima, e ela tem suporte em $J(f)$.

1.8 Medidas duplicadoras

Definição 1.17 (Medida Duplicadora). *Uma medida de Borel ρ em um espaço métrico (X, d) diz-se duplicadora se existem constantes $C_* > 0$ e $r_* > 0$ tais que para cada $x \in X$ e $r \in (0, r_*)$ temos*

$$\rho(B(x, 2r)) \leq C_* \rho(B(x, r)).$$

Exemplo 5. *Seja μ a medida de Lebesgue do espaço \mathbb{R}^n . Uma propriedade que satisfaz esta medida é que dado um conjunto de Borel U , para todo $t > 0$ temos que*

$$\mu(tU) = t^n \mu(U).$$

Portanto, se $U = B(x, 2r)$ para algum x , então

$$\mu(B(x, 2r)) = 2^n \mu(B(x, r)).$$

Portanto a medida de Lebesgue μ de \mathbb{R}^n é duplicadora com constante $C_* = 2^n$.

1.9 Teorema A

O primeiro resultado que demonstraremos com detalhes neste trabalho é como caracterizar as funções semi-hiperbólicas em termos de sua medida de entropia máxima. Este resultado foi obtido por J. Rivera-Letelier em [20].

Teorema 1.18 (Teorema A de Rivera-Letelier, [20]). *Uma função racional complexa de grau pelo menos dois é semi-hiperbólica se, e somente se, sua medida de entropia máxima é duplicadora em seu conjunto de Julia.*

1.10 Condição topológica de Collet-Eckmann

Nesta seção definiremos a condição topológica de Collect-Eckmann. Um dos nossos principais objetivos nesta dissertação é transcrever a demonstração do Teorema 1.20 – originalmente apresentado no artigo de J. Rivera-Letelier como Teorema B –, que enunciaremos nesta seção, depois de algumas considerações preliminares a respeito da condição topológica de Collet-Eckmann (TCE).

Definição 1.19 (Condição Topológica Collect-Eckmann). *Uma função racional f satisfaz a condição TCE se existir um $r > 0$, e constantes $D \geq 1$ e $\theta \in (0, 1)$, tais que, para cada ponto $x \in J(f)$, o conjunto G_x de inteiros $m \geq 1$ para os quais o grau semi-local de f^m em x é menor ou igual a D , satisfaça:*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#(G_x \cap \{1, \dots, n\}) \geq \theta.$$

Exemplo 6. As funções semi-hiperbólicas satisfazem a condição TCE. De fato, se f é uma função semi-hiperbólica, por definição temos que existe um $r > 0$ e um $D \geq 1$ tal que para todo $m \geq 1$ e todo $x \in J(f)$ o grau semi-local de f^m em x é menor ou igual que uma constante D . Portanto temos que $G_x = \mathbb{N}$. Assim,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#(G_x \cap \{1, \dots, n\}) = 1 > \theta,$$

para qualquer $\theta \in (0, 1)$.

1.11 Teorema B

O segundo resultado que apresentaremos é uma nova caracterização das funções racionais que satisfazem a condição TCE.

Teorema 1.20 (Teorema B de Rivera-Letelier [20]). *Seja f uma função racional com grau maior ou igual a dois. Seja ρ_f sua medida de máxima entropia. Então f satisfaz a condição TCE se, e somente se, existem constantes $r_0 > 0$, $\alpha > 0$, e $C > 0$ tais que, para quaisquer $x \in J(f)$ e $r \in (0, r_0)$, é verdade que*

$$\rho_f(B(x, r)) \geq Cr^\alpha.$$

Capítulo 2

Teoria da Medida

2.1 Medidas duplicadoras

Recordemos que uma medida de Borel ρ em um espaço métrico (X, d) diz-se duplicadora se existem constantes $C_* > 0$ e $r_* > 0$ tais que para cada $x \in X$ e $r \in (0, r_*)$ temos

$$\rho(B(x, 2r)) \leq C_* \rho(B(x, r)).$$

Lema 2.1. *Seja (X, d) um espaço métrico compacto e seja ρ uma medida duplicadora sobre X . Então existem constantes $C > 0$, $\alpha > 0$ tal que para um $r > 0$ suficientemente pequeno e cada $x \in \text{supp}(X)$ temos que*

$$\rho(B(x, r)) \geq Cr^\alpha.$$

Demonstração. Sejam $r_* > 0$ e $C_* > 0$ as constantes associadas com a propriedade duplicadora de ρ . Para todo $x \in X$ vamos considerar $B(x, r_*/4)$. É claro que a união $\bigcup_{x \in X} B(x, r_*/4)$ é uma cobertura aberta de X , portanto existem n elementos de X tais que

$X \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r_*/4)$. Sejam x_j tais que $B(x_j, r_*/4) \cap \text{supp}(\rho) \neq \emptyset$ e que

$$\text{supp}(\rho) \subset \bigcup_{j=1}^k B(x_j, r_*/4).$$

Agora, seja $\varepsilon = \min\{\rho(B(x_j, r_*))\}$. Assim dado $x \in \text{supp}(\rho)$ tem que existir um x_j tal que $x \in B(x_j, r_*/4)$ e é claro que $B(x, r_*/2) \supset B(x_j, r_*/4)$, portanto $\rho(B(x, r_*/2)) \geq \varepsilon$, para tudo $x \in \text{supp}(\rho)$.

Dado $r \in (0, r_*)$, seja $n \geq 0$ o inteiro tal que $2^n r < r_* \leq 2^{n+1} r$. Aplicando a propriedade duplicadora, temos que

$$C_* \rho(B(x, r)) \geq \rho(B(x, 2r)).$$

Se $2r \in (0, r_*)$ aplicamos novamente

$$C_* \rho(B(x, 2r)) \geq \rho(B(x, 2^2 r)),$$

e temos

$$C_*^2 \rho(B(x, r)) \geq \rho(B(x, 2^2 r)).$$

Aplicando n -vezes temos $C_*^n \rho(B(x, r)) \geq \rho(B(x, 2^n r))$, ou seja, $\rho(B(x, r)) \geq \frac{\rho(B(x, 2^n r))}{C_*^n}$. Lembrando que se $A \subset B$ então $\rho(A) \leq \rho(B)$, temos que se x é tal que $\rho(B(x, r_*/2)) \geq \varepsilon$ e $2^n r < r_* \leq 2^{n+1} r$, então $\frac{r_*}{2} \leq 2^n r$ e portanto

$$\rho(B(x, 2^n r)) \geq \rho(B(x, \frac{r_*}{2})) > \varepsilon$$

e assim

$$\rho(B(x, r)) \geq C_*^{-n} \rho(B(x, 2^n r)) \geq C_*^{-n} \varepsilon.$$

Então tomando $\alpha = \log_2 C_*$ e $C = r_*^{-\alpha} \varepsilon$ o lema é cumprido.

Em efeito, $\varepsilon = \varepsilon \frac{r_*^\alpha}{r_*^\alpha} = Cr_*^\alpha$ e como

$$2^n r < r_*$$

$$(2^n r)^\alpha < (r_*)^\alpha$$

portanto

$$C_*^n r^\alpha < r_*^\alpha.$$

Assim,

$$\rho(B(x, r)) \geq C_*^{-n} \varepsilon > \frac{Cr_*^\alpha}{C_*^n} > C \frac{C_*^n}{C_*^n} r^\alpha = Cr^\alpha.$$

□

Definição 2.2. Conjuntos Uniformemente Perfeitos. Um subconjunto compacto K de $\hat{\mathbb{C}}$ é uniformemente perfeito se existem $\eta > 1$ e $\hat{r} > 0$ tal que para cada $x \in K$ e $x \in (0, \hat{r})$ o anel $B(x, \hat{\eta}r) \setminus B(x, r)$ intercepta K .

Obs 1. Por [9] temos que o conjunto de Julia de uma função racional são uniformemente perfeitos.

Lema 2.3. Seja J um subconjunto compacto perfeitamente uniforme de $\hat{\mathbb{C}}$ e ρ uma medida duplicadora com suporte em J . Então se cumpre

1. Existe um $\eta_0 > 1$, $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ e r_0 tal que para cada $r \in (0, r_0)$ e $x \in J$ temos

$$\rho(B(x, \eta_0 r) \setminus B(x, r)) \geq \varepsilon_0 \rho(B(x, r)).$$

2. Existe $\eta_1 > 0$ e $r_1 > 0$ tal que para cada $r \in (0, r_1)$ e $x \in J$ temos que

$$\rho(B(x, \eta_1 r)) \geq 2\rho(B(x, r)).$$

Demonstração. 1. Identificamos as constantes correspondentes

- $C_* > 0$ e $r_* > 0$ as constantes associadas a propriedade duplicadora de ρ .
- $\hat{\eta} > 1$ e $\hat{r} > 0$ as constantes associadas a propriedade uniformemente perfeita de J .
- Sejam $n \geq 1$ o suficientemente grande tal que $2^n \geq 2(\hat{\eta} + 1)$.
- Seja $x \in J$ e $r \in (0, \min\{\frac{r_*}{2^n}, \frac{\hat{r}}{2}\})$ e seja $x' \in B(x, 2\hat{\eta}r) \setminus B(x, 2r)$ tal que $x' \in J$.

Como ρ é duplicadora, por um lado temos que $\rho(B(x', 2^n r)) \leq C_*^n \rho(B(x', r))$, e por outro lado, como $2^n > 2(\hat{\eta} + 1)$ então $2^n r > 2(\hat{\eta} + 1)r$, e portanto,

$$B(x', 2^n r) \subset B(x', 2(\hat{\eta} + 1)r).$$

Assim $\rho(B(x', 2(\hat{\eta} + 1)r)) \leq \rho(B(x', 2^n r))$. Logo temos que

$$\rho(B(x', 2(\hat{\eta} + 1)r)) \leq \rho(B(x', 2^n r)) \leq C_*^n \rho(B(x', r)).$$

Como $B(x, r) \subset B(x', 2(\hat{\eta} + 1)r)$ se tem $\rho(B(x, r)) \leq \rho(B(x', 2(\hat{\eta} + 1)r))$, e portanto,

$$\rho(B(x, r)) \leq C_*^n \rho(B(x', r)).$$

Logo como $x' \in B(x, 2(\hat{\eta}r)) \setminus B(x, 2r)$, temos $B(x', r) \subset B(x, (2\hat{\eta} + 1)r) \setminus B(x, r)$, e portanto,

$$\rho(B(x, (2\hat{\eta} + 1)r) \setminus B(x, r)) \geq \rho(B(x', r)).$$

Finalmente

$$\rho(B(x, (2\hat{\eta} + 1)r) \setminus B(x, r)) \geq C_*^{-n} \rho(B(x, r)).$$

Tomando $\eta_0 = 2\hat{\eta} + 1$, $\varepsilon_0 = C_*^{-n}$ e $r_0 = \min\{\frac{r_*}{2^n}, \frac{\hat{r}}{2}\}$ se cumpre (1).

2. Sejam $\eta_0 > 1$, $\varepsilon \in (0, 1)$ e $r_0 > 0$ os dados na parte (1). Seja $n \geq 1$ o suficientemente grande tal que $(1 + \varepsilon_0)^n \geq 2$.

Pelas propriedades da medida, temos

$$\rho(B(x, \eta_0 r)) = \rho(B(x, r)) + \rho(B(x, \eta_0 r) \setminus B(x, r))$$

e pela parte (1)

$$\begin{aligned} \rho(B(x, \eta_0 r)) &\geq \rho(B(x, r)) + \varepsilon_0 \rho(B(x, r)) \\ &= (1 + \varepsilon_0) \rho(B(x, r)) \end{aligned}$$

para $r \in (0, r_0)$

Vamos a provar por indução que vale $\rho(B(x, \eta_0^n r)) \geq (1 + \varepsilon_0)^n \rho(B(x, r))$, com $r \in (0, \eta_0^{-n} r_0)$.

Pelo anterior é certo para $n = 1$. Vamos ver que se é certo para n , também é certo para $n + 1$.

$$\begin{aligned} \rho(B(x, \eta_0^{n+1} r)) &= \rho(B(x, \eta_0^n (\eta_0 r))) \\ &\geq (1 + \varepsilon_0)^n \rho(B(x, \eta_0 r)) \\ &\geq (1 + \varepsilon_0)^{n+1} \rho(B(x, r)). \end{aligned}$$

Finamente tomando a $n \geq 1$ tal que $(1 + \varepsilon_0)^n \geq 2$ temos

$$\rho(B(x, \eta_0^n r)) \geq (1 + \varepsilon_0)^n \rho(B(x, r)) \geq 2\rho(B(x, r))$$

para $r \in (0, \eta_0^{-n} r_0)$.

Tomando $\eta_1 = \eta_0^n$, $r_1 = \eta_0^n r_0$ se cumpre (2).

□

2.2 Dimensão de Hausdorff

O conceito matemático de Dimensão de Hausdorff foi inicialmente introduzido em 1918 pelo matemático Félix Hausdorff. Entre as várias abordagens existentes sobre as dimensões de fractais, a Dimensão de Hausdorff é amplamente utilizada [6].

Lembremos que o diâmetro de um conjunto U é definido como a maior distância entre quaisquer dois pontos pertencentes a U , ou seja:

$$\text{diam}(U) = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}.$$

Definição 2.4. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Uma coleção enumerável de subconjuntos $U_i \subset \mathbb{R}^n$ de X , é uma δ -cobertura de X se $X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ e para cada $i \in \mathbb{N}$ temos que $\text{diam}(U_i) \leq \delta$.*

Tomemos um X subconjunto de \mathbb{R}^n e s um numero positivo. Então para cada $\delta > 0$ podemos definir

$$\mathcal{H}_\delta^s(X) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s : \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } X. \right\}$$

Isso implica que consideramos todas as δ -coberturas de X e buscamos minimizar a soma das s -ésimas potências dos diâmetros. À medida que o valor de δ diminui, as δ -coberturas de X também se tornam mais refinadas. Conseqüentemente, o ínfimo aumenta à medida que δ se aproxima de zero. Dessa forma, estabelecemos a seguinte definição:

$$\mathcal{H}^s(X) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(X).$$

Este limite existe para qualquer conjunto X de \mathbb{R}^n , embora seu valor possa ser ∞ ou 0 .

Definição 2.5. *A s -medida de Hausdorff do conjunto X é o número $\mathcal{H}^s(X)$.*

A proposição a seguir mostra que uma medida de Hausdorff s - é de fato uma medida.

Proposição 2.6. *Seja $E, F \subset \mathbb{R}^n$ e $s > 0$ então*

1. $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$.
2. Se $E \subset F$ então $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$.
3. Se $\{E_i\}$ é uma coleção disjunta de conjuntos de Borel, então

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E_i).$$

Uma propriedade importante de las s -medidas é

Proposição 2.7. Se $F \subset \mathbb{R}^n$ y $\lambda > 0$ então

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F),$$

onde $\lambda F = \{\lambda x : x \in F\}$, isto é, o conjunto F multiplicado pelo fator λ .

Demonstração. Seja $\{U_i\}$ uma δ -cobertura de F então $\{\lambda U_i\}$ é uma $\lambda\delta$ -cobertura de λF . Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda F) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(\lambda U_i)^s : \{\lambda U_i\} \text{ é uma } \lambda\delta\text{-cobertura de } \lambda F \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda^s \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s : \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \right\} \\ &= \lambda^s \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s : \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \right\} \\ &= \lambda^s \mathcal{H}_{\delta}^s(F). \end{aligned}$$

Portanto, se $\delta \rightarrow 0$ temos que

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

□

É evidente que quando $X \subset \mathbb{R}^n$ e $\delta < 1$, a quantidade $\mathcal{H}_{\delta}^s(X)$ não aumenta à medida que s varia. Por outro lado, se $t > s$ e $\{U_i\}$ é uma δ -cobertura de X , então:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^t \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^{t-s} \text{diam}(U_i)^s \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s.$$

Portanto, temos que

$$\mathcal{H}_{\delta}^t \leq \delta^{s-t} \mathcal{H}_{\delta}^s.$$

Assim, podemos observar que quando $\delta \rightarrow 0$, temos que $\mathcal{H}^t = 0$ se $\mathcal{H}^s < \infty$. Por outro lado, se $\mathcal{H}^t > 0$ então obrigatoriamente $\mathcal{H}^s = \infty$. Desta forma, a função $s \rightarrow \mathcal{H}^s$ possui um único ponto de descontinuidade, s_0 . Se $s_0 > 0$, então este ponto corresponde ao valor donde a função “salta” de ∞ para 0. A este valor s_0 dá-se o nome de dimensão de Hausdorff de X .

Definição 2.8. A dimensão de Hausdorff do conjunto X é definida por

$$\dim_H(X) = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(X) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(X) = \infty\}.$$

onde,

$$\mathcal{H}^s(X) = \begin{cases} \infty, & \text{se } 0 \leq s < \dim_H(X) \\ 0, & \text{se } s > \dim_H(X) \end{cases}$$

Se $s = \dim_H(X)$ temos que $\mathcal{H}^s(X)$ pode tomar qualquer valor, incluindo 0 e ∞ .

Capítulo 3

Geometria Conforme

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados de Análise Complexa que serão usados ao longo desta exposição.

Definição 3.1. *Seja f uma função analítica e $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $f'(z_0) = 0$. Então dizemos que z_0 é um ponto crítico de f .*

Proposição 3.2. *Seja f uma função analítica. Então f é injetiva numa vizinhança de $z_0 \in \mathbb{C}$ se e somente se $f'(z_0) \neq 0$.*

Definição 3.3. *Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ um ponto fixo de uma função analítica f . Diremos que f tem k -pontos fixos em z_0 se z_0 é uma raiz de multiplicidade k para a função $f(z) - z$.*

Lema 3.4. *Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ um ponto fixo de uma função analítica f , e seja ϕ analítica, injetiva e com derivada não nula em uma vizinhança de z_0 . Então $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ tem o mesmo número de pontos fixos que f tem em z_0 .*

Demonstração. Ver [4, p. 28] □

Definição 3.5. *Uma função racional é uma função $R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ da forma*

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

onde P e Q são ambos polinômios, não sendo ambos o polinômio zero. Vamos assumir que eles não têm zeros em comum. Assim, R está determinado por P e Q únicos, salvo por produto por escalar, e o grau de R é

$$\text{grau}(R) = \max\{\text{grau}(P), \text{grau}(Q)\}.$$

Proposição 3.6. *A função $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ é analítica se, e somente se f é uma função racional.*

Demonstração. (\implies). Primeiro, provaremos que f tem uma quantidade finita de polos z_1, \dots, z_n em \mathbb{C} , onde d_1, \dots, d_n denotam suas respectivas multiplicidades. De fato, como f é limitada em \mathbb{C} quando $z \rightarrow \infty$, então existe um $r > 0$ tal que $w \mapsto f\left(\frac{1}{w}\right)$ não possui polos em $B(0, r)$. Em particular, f não tem polos em $|z| > 1/r, z \in \mathbb{C}$. Como $\overline{B(0, 1/r)}$ é compacto, f tem uma quantidade finita de polos neste conjunto.

Agora, definimos $g(z) := (z - z_1)^{d_1} \dots (z - z_n)^{d_n} f(z)$ e provaremos que g é um polinômio. Note que z_1, \dots, z_n são singularidades removíveis de g e g é analítica em qualquer outro ponto, portanto g é uma função inteira. Além disso, como f tem um polo em ∞ , então existe um $d \geq 0$ tal que $f\left(\frac{1}{w}\right) w^d$ é limitada em uma vizinhança próxima ao zero, ou seja, $f(z)z^{-d}$ é limitada perto de ∞ . Logo, $g(z)z^{-(d+d_1+\dots+d_n)}$ é limitada perto de ∞ ,

o que implica que g é uma função inteira, ou seja, g é um polinômio de grau no máximo $d + d_1 + \dots + d_n$.

Finalmente, temos que

$$f(z) = \frac{g(z)}{\prod_{j=1}^n (z - z_j)^{d_j}},$$

ou seja, f é uma função racional.

(\Leftarrow). Trivial, já que as funções racionais são analíticas. \square

Proposição 3.7. *Uma função racional $R(z)$ possui o mesmo número de polos e raízes em $\hat{\mathbb{C}}$, desde que eles sejam contados com multiplicidade. Este número é igual ao maior dos graus de P e Q .*

Demonstração. Seja $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, onde $\text{grau}(P(z)) = n$ e $\text{grau}(Q(z)) = m$, de modo que

$$R(z) = \frac{a_n z^n + \dots + a_0}{b_m z^m + \dots + b_0}.$$

Se $m = n$, então $R(\infty) \in \mathbb{C}$ e, portanto, todas as raízes e polos de R estão em \mathbb{C} . Assim, R tem exatamente n polos e raízes.

Se $n > m$, então R tem n raízes e m polos pertencentes a \mathbb{C} . Além disso, temos também o polo ∞ , cuja multiplicidade é por definição a multiplicidade do 0 em $1/R \left(\frac{1}{z} \right)$. Isso é:

$$\frac{Q(1/z)}{P(1/z)} = \frac{b_m z^{n-m} + \dots + b_0^n}{a_n + \dots + a_0 z^n}$$

e, portanto, o 0 tem multiplicidade $n - m$. Logo, temos que R tem $m + (n - m) = n$ pólos no total. O mesmo raciocínio se aplica ao caso em que $m > n$. \square

Proposição 3.8. *Se R é uma função racional de grau $d > 0$, então para qualquer $w \in \hat{\mathbb{C}}$, a equação $R(z) = w$ tem exatamente d soluções, contando multiplicidade.*

Demonstração. Se $w \neq \infty$, o número de soluções da equação $R(z) = w$ é igual ao número de raízes de $R(z) - w$, ou seja, o número de raízes de

$$R(z) - w = \frac{P(z) - wQ(z)}{Q(z)}.$$

Observe que, como P e Q não têm zeros em comum, então $P - wQ$ e Q tampouco têm zeros em comum. Assim, $R(z) - w$ e $R(z)$ têm o mesmo grau, e pela proposição anterior têm o mesmo número de raízes. Portanto, $R(z) = w$ tem d soluções.

No caso em que $w = \infty$, o número de soluções de $R(z) = w$ é igual ao número de polos de R , que, como dissemos, é d . \square

Proposição 3.9. *Se R, S são funções racionais, então*

$$\text{grau}(R \circ S) = \text{grau}(R) \cdot \text{grau}(S).$$

Demonstração. Seja $f = R \circ S$. É evidente que f é uma função racional por ser uma composição de funções racionais. Se $w \in \hat{\mathbb{C}}$, observe que se o grau de R for $\text{grau}(R) = d_1$, então $R(x) = w$ tem d_1 soluções, conforme a proposição 3.8.

Considerando x_1, x_2, \dots, x_{d_1} as soluções de $R(x) = w$, pela proposição anterior, temos que $S(z) = x_i$ possui $\text{grau}(S) = d_2$ soluções, contando a multiplicidade. Dessa forma, concluímos que $f(z) = R(S(z)) = w$ possui em um total de $\text{grau}(R) \cdot \text{grau}(S)$ soluções, considerando a multiplicidade. Portanto, $\text{grau}(R \circ S) = \text{grau}(R) \cdot \text{grau}(S)$. \square

Corolário 3.10. *Se R é uma função racional, então $\text{grau}(R^n) = (\text{grau}(R))^n$, onde $R^n = R \circ \dots \circ R$, n vezes.*

Definição 3.11. *Uma função racional da forma $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, onde $ac - db \neq 0$, é chamada transformação de Möbius. Nós diremos que duas funções racionais f e h são conjugadas se existe uma transformação de Möbius tal que $h = g \circ f \circ g^{-1}$.*

Proposição 3.12. *Sejam R e S duas funções racionais conjugadas e seja g uma transformação de Möbius tal que $R = g \circ S \circ g^{-1}$. Então:*

1. $\text{grau}(R) = \text{grau}(S)$.
2. S^n e R^n são conjugadas para qualquer número inteiro $n \geq 1$.
3. Se R tem n pontos fixos em z_0 , então S tem n pontos fixos em $g(z_0)$. Em outras palavras, R e S têm o mesmo número de pontos fixos contando multiplicidade.
4. R e S têm o mesmo número de pontos críticos.

Proposição 3.13. *Se R é uma função racional de grau d , então R tem no máximo $2d - 2$ pontos críticos.*

Demonstração. [4, Pag. 59] \square

3.1 Conjunto de Julia

Nesta seção, estaremos tratando todas as funções como funções analíticas representadas por $f : U \subset \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, onde U é um conjunto aberto. Além disso, introduziremos a notação f^k para representar a composição de f consigo mesma k vezes.

Definição 3.14. *Diremos que um ponto z é um **ponto fixo** se satisfizer a condição $f(z) = z$. Além disso, diremos que um ponto z é **periódico** com período k se for um ponto fixo de f^k , onde $k \geq 1$.*

Definição 3.15. Dada uma função f e um ponto $z \in U$, definimos a órbita futura de z da seguinte forma:

$$\mathcal{O}^+(z) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(\{z\}).$$

De forma semelhante, definimos a órbita passada como:

$$\mathcal{O}^-(z) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(\{z\}).$$

Denominaremos a órbita total de z como $\mathcal{O}(z) = \mathcal{O}^+(z) \cup \mathcal{O}^-(z)$.

Definição 3.16. Se z_0 for um ponto periódico de período $p \geq 1$, a órbita futura de z_0 , denotada por $\mathcal{O}^+(z_0) = \{z_1, z_2, \dots, z_{p-1}, z_0\}$, é chamada de ciclo periódico ou órbita periódica. Observa-se que se $w_1, w_2 \in \mathcal{O}^+(z_0)$ então $\mathcal{O}^+(w_1) = \mathcal{O}^+(w_2)$.

Definimos o **multiplicador** de um ciclo periódico de período p como $\lambda = (f^p)'(z)$, onde z é qualquer ponto pertencente ao ciclo. Se $p = 1$, temos que o ciclo consiste em um único ponto fixo, e, nesses casos, podemos substituir a palavra “ciclo” por “ponto fixo”.

Diremos que um ciclo é:

1. Repulsor se $|\lambda| > 1$;
2. Indiferente se $|\lambda| = 1$;
3. Atrator se $|\lambda| < 1$;
4. Superatrator se $|\lambda| = 0$.

Proposição 3.17. Seja z_0 um ponto fixo de f e λ seu multiplicador. Então, existe uma vizinhança U de z_0 tal que

1. $f^n(z) \rightarrow z_0$ se $|\lambda| < 1$.
2. Existe N tal que $f^N(z) \notin U$ se $z \neq z_0$ e $|\lambda| > 1$.

Demonstração. Ver [4, Pag. 28] □

Definição 3.18 (Julia e Fatou). Dado uma função holomorfa $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, nos chamaremos **Conjunto de Julia** de f o fecho do conjunto de pontos periódicos repulsores de f , denotado por $J(f)$. O **Conjunto de Fatou** de f é denotado por $F(f)$ e dado por $\hat{\mathbb{C}} \setminus J(f)$.

Definição 3.19. Seja z_0 um ponto fixo atrator de f , chamaremos **bacia de atração** de z_0 ao conjunto:

$$\mathcal{A}(z_0) = \{z \in U : f^k(z) \rightarrow z_0, k \rightarrow \infty\}.$$

É a **bacia de atração imediata** de z_0 , ao componente conexo de \mathcal{A} que contém z_0 . Se $\mathcal{O} = \{z_0, z_1, \dots, z_{p-1}\}$ é um ciclo periódico atrator de período p , então a bacia de atração da órbita \mathcal{O} , $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ é a união das bacias de atração de cada z_i como ponto fixo de f^p e, de maneira semelhante, sua bacia imediata de atração é a união das bacias de atração imediatas.

Alguns fatos importantes sobre os conjuntos de Julia e de Fatou são os seguintes:

Teorema 3.20. *O conjunto de Julia é um conjunto não vazio.*

Teorema 3.21. *O conjunto de Julia é completamente invariante, ou seja:*

$$f^{-1}(J(f)) = J(f).$$

Esta propriedade também se aplica ao conjunto de Fatou.

Teorema 3.22. *Para qualquer $n \geq 1$, temos que $J(f) = J(f^n)$.*

A demonstração destes três teoremas está disponível em [4]

3.2 Métrica esférica

Seja $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ o plano estendido. Definimos a métrica esférica como segue:

$$ds = \frac{2|dz|}{1 + |z|^2}.$$

Denotamos $\ell(\gamma)$ o comprimento de γ com relação à métrica esférica, logo

$$\ell(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_a^b \frac{2|\gamma'(t)|}{1 + |\gamma(t)|^2} dt.$$

A distância esférica, denotada por $\text{dist}(z_1, z_2)$ é definida como sendo o comprimento $\ell(\gamma)$ da geodésica minimizante que liga z_1 até z_2 .

Por outro lado podemos observar o plano estendido como uma superfície regular em \mathbb{R}^3 por meio da projeção estereográfica $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(z) = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

Onde $z = x + iy$. Desta forma também temos a distância d' na esfera herdada do espaço Euclidiano tridimensional, que é dada por

$$d'(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}}.$$

Vamos mostrar que ambas as distâncias são equivalentes na esfera de Riemann. Dados dois pontos z, w na esfera, podemos considerar o plano formado por esses pontos e a origem. Esse plano intercepta a esfera em um grande círculo C . Vale ressaltar que, na esfera, as geodésicas de menor distância são arcos de grandes círculos.

Seja Δ o triângulo formado pelos pontos z, w e o origem o . Seja θ o ângulo do triângulo que é oposto ao lado \overline{zw} . É evidente que os lados tem comprimento $|\overline{zo}| = |\overline{wo}| = 1$. Além disso, a distância entre a corda que une z e w é dada por $d'(z, w)$.

Por outro lado, por trigonometria básica temos que o comprimento do arco de uma circunferência é $d(z, w) = \theta * r$. Portanto, se traçarmos a bissetriz do ângulo θ é formado um triângulo retângulo, se pode deduzir o seguinte:

$$2 \sin(\theta/2) = d'(z, w),$$

Então temos que $2 \sin\left(\frac{d(z, w)}{2}\right) = d'(z, w)$. Como o $\sin(x)$ é acotado da seguinte forma

$$\frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x,$$

Temos,

$$\frac{2}{\pi} d(w, z) \leq d'(z, w) \leq d(z, w).$$

3.3 Módulo de anéis

Dizemos que duas superfícies X e Y são conformemente equivalentes se existir uma função biholomorfa $f : X \rightarrow Y$. O Teorema da Uniformização de Riemann [16, Teo 1.1] nos diz que todas as superfícies não triviais simplesmente conexas são conformemente equivalentes umas às outras. Isso não é verdade para superfícies duplamente conexas, e o exemplo mais simples de que isso não é verdade é dado pelo teorema a seguir:

Teorema 3.23. *Dado $R > r > 0$, definimos o anel $A(r, R)$ como*

$$A(r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}.$$

Sejam $A_1 = A(r_1, R_1)$ e $A_2 = A(r_2, R_2)$, existe uma equivalência conforme $f : A_1 \rightarrow A_2$ se e somente se, $R_1/r_1 = R_2/r_2$.

Demonstração. Ver [2, Teorema 2.7.1] □

Isso nos diz que não podemos usar o mesmo domínio uniformizado para todas as superfícies de Riemann com grupo fundamental igual a \mathbb{Z} . Para esses casos, a escolha conveniente é a família com todos os raios externos iguais a um.

Teorema 3.24. *Seja A uma superfície de Riemann duplamente conectada, ou seja, uma que satisfaça $\pi_1(A) \cong \mathbb{Z}$, então A é conformemente equivalente a um anel $A(1, R)$. A função que nos dá a equivalência conforme é única, exceto pela rotação ou inversão do anel.*

Demonstração. Ver [2, Teorema 2.7.3] □

Com base nesse teorema, podemos afirmar que cada superfície de Riemann duplamente conexa é conformalmente equivalente ao anel $A(R) = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < R\}$ para algum $1 < R \leq \infty$, onde o valor de R é unicamente determinado por A . Em todo caso, chamaremos A de anel. Definimos o **módulo** de A como

$$\text{mod}(A) = \ln(R).$$

O módulo de um anel é um invariante conforme, e os Teoremas 3.23 e 3.24 nos dizem que essa quantidade é bem definida e não dependem da escolha do anel.

Seja A um anel contido na esfera de Riemann. Note que o complementar de A constitui-se de duas componentes conexas, que denotaremos provisoriamente por C_1 e C_2 . Seja $B \subset A$ um outro anel. O complementar de B na esfera também determina duas componentes conexas, que podemos denotar por D_1 e D_2 . Existem casos em que D_1 continua contido em A . Em outros casos, isso não acontece: é quando dizemos que B está contido em A de forma não trivial. Neste caso, podemos reordenar os índices de forma que $D_1 \supset B_1$ e $D_2 \supset B_2$. No nível do grupo fundamental, isso significa que há uma injeção natural $\pi_1(B) \rightarrow \pi_1(A)$ e que B separa as componentes do bordo de A .

Recordemos que $O(1)$ denota uma quantidade indeterminada x tal que $|x| \leq C$, onde $C > 0$ é uma constante fixa que não depende de nenhuma variável em questão no enunciado de um resultado.

Teorema 3.25. *Para qualquer anel $A \subset \mathbb{C}$ com um módulo suficientemente grande existe um anel da forma $A(r, R)$ contido em A de forma não trivial com*

$$\text{mod}(A) = \text{mod } B + O(1).$$

Demonstração. Ver [4, pag 11] □

Sejam U e V regiões do plano da esfera de Riemann (abertos e conexos). Dizemos que $f : U \rightarrow V$ é própria quando a pré-imagem de qualquer compacto em V é um compacto em U .

Teorema 3.26. *Seja $f : U \rightarrow V$ uma aplicação própria de grau d cujos valores críticos encontram-se num compacto $K \subset V$ e seja $K' = f^{-1}(K)$. Se $A \subset V$ for um anel que está contido em $V \setminus K$ de forma não trivial, então $f^{-1}(A)$ também é um anel e*

$$\text{mod}(f^{-1}(A)) = \text{mod}(A)/d.$$

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [14], na página 67.

3.4 Distorção de anéis

Uma **região** no plano complexo é definida como qualquer subconjunto aberto, conexo e não vazio. Uma função analítica complexa f definida em uma região $U \subset \mathbb{C}$ é chamada de univalente se for injetiva. Recordemos que se $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ for univalente, então $V = f(U)$ é aberto e existe a inversa $f^{-1} : V \rightarrow U$, que também é uma aplicação univalente.

Chamaremos \mathcal{S} o espaço das funções univalentes cujo domínio é o disco unitário $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ e que satisfazem $f'(0) = 1$ e $f(0) = 0$.

Dizemos que uma região U é conformemente equivalente a um anel $A(r, R)$ se existir uma função univalente $f : A(r, R) \rightarrow U$ que seja sobrejetora.

Uma formulação clássica do Teorema da distorção de Koebe pode ser encontrada no livro *Complex Dynamics and Renormalization* do autor Curtis T. McMullen e diz o seguinte:

Teorema 3.27. *O espaço \mathcal{S} de funções univalentes é compacto na topologia de convergência uniforme em conjuntos compactos. Portanto, para todo $f \in \mathcal{S}$, $r < 1$ e $x, y \in \Delta(r)$ existe $C(r)$ (que depende exclusivamente de r) tal que*

$$\frac{1}{C(r)} \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq C(r)$$

e

$$\frac{1}{C(r)} \leq |f'(x)| \leq C(r)$$

com $C(r) \rightarrow 1$ quando $r \rightarrow 0$.

Demonstração. Ver [14, p. 15] e [1]. □

Teorema 3.28. *Seja \mathcal{F} a família de todas as funções univalentes $f : B_\rho(a) \rightarrow \mathbb{C}$ tais que, $\rho > 0$ e $a \in \mathbb{C}$. Para cada $r \in (0, 1)$ existe uma constante $C(r)$ tal que para qualquer $f : B_\rho(a) \rightarrow \mathbb{C}$, temos*

$$\frac{|f'(a)|}{C(r)} \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq C(r)|f'(a)|$$

onde $x, y \in B_{r\rho}(a)$. Além disso, se $x \in B_{r\rho}(a)$

$$\frac{1}{C(r)} \leq \left| \frac{f'(x)}{f'(a)} \right| \leq C(r)$$

com $C(r) \rightarrow 1$ se $r \rightarrow 0$. Como consequência,

$$\frac{|f'(x)|}{|f'(y)|} \leq C(r)^2$$

para quaisquer $x, y \in B_{r\rho}(a)$.

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{F}$ e seja $g : \Delta \rightarrow B_\rho(a)$ dada por $g(z) = \rho x + a$. Considere a função $\hat{f} : \Delta \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ dada por

$$\hat{f}(z) = \frac{f(g(x)) - f(a)}{(fg)'(0)} = \frac{f(\rho x + a) - f(a)}{\rho f'(a)}.$$

Esta função satisfaz as condições do Teorema 3.27, e por conseguinte, para $x, y \in \Delta(r)$ é certo que

$$\frac{1}{C(r)} \leq \frac{|\hat{f}(x) - \hat{f}(y)|}{|x - y|} \leq C(r)$$

e

$$\frac{1}{C(r)} \leq |\hat{f}'(x)| \leq C(r)$$

onde $C(r)$ não depende de $f \in \mathcal{F}$ e $C(r) \rightarrow 1$ quando $r \rightarrow 1$.

Logo,

$$\frac{1}{C(r)} \leq \frac{|f(\rho x + a) - f(a) - f(\rho y + a) + f(a)|}{\rho |f'(a)| |x - y|} \leq C(r).$$

Como g estabelece uma bijeção entre $\Delta(r)$ e $B_{r\rho}(a)$, então podemos tomar $z = \rho x + a$ e $w = \rho y + a$, temos que

$$|z - w| = |\rho x + a - \rho y - a| = \rho |x - y|,$$

portanto,

$$\frac{1}{C(r)} \leq \frac{|f(z) - f(w)|}{|f'(a)| |z - w|} \leq C(r),$$

isto é,

$$\frac{|f'(a)|}{C(r)} \leq \frac{|f(z) - f(w)|}{|z - w|} \leq |f'(a)| C(r)$$

para quaisquer $z, w \in B_{r\rho}(a)$.

Além disso, pelo mesmo Teorema 3.27, temos que

$$\frac{1}{C(r)} \leq |\hat{f}'(x)| \leq C(r)$$

sempre que $x \in \Delta(r)$. Portanto,

$$\frac{1}{C(r)} \leq \frac{|f'(\rho x + a)\rho|}{\rho |f'(a)|} \leq C(r).$$

Assim, se $z = \rho x + a$ temos

$$\frac{1}{C(r)} \leq \left| \frac{f'(z)}{f'(a)} \right| \leq C(r).$$

□

A seguir, a menos que seja especificado o contrário $\text{dist} = d_{\hat{\mathbb{C}}}$ é a métrica esférica e $\ell_{\hat{\mathbb{C}}}(\gamma)$ é o comprimento esférico da curva. Vale ressaltar que $\hat{\mathbb{C}}$ com esta distância é um espaço métrico e, portanto, faz sentido falar da distância entre um ponto e um conjunto, ou da distância entre dois conjuntos compactos.

Teorema 3.29. *Seja $\mathcal{A}_{\pi/4}$ o espaço de todas as funções univalentes $\varphi : A(1, 8) \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ que satisfaçam $\text{diam}_{\hat{\mathbb{C}}}(\varphi(A(1, 8))) < \pi/4$. Para $\varphi \in \mathcal{A}_{\pi/4}$, $s, t \in [1, 8]$, seja*

$$\underline{d}_{\varphi}(s, t) = \inf\{\text{dist}(x, y) : x \in \varphi(C_s) \text{ e } y \in \varphi(C_t)\}$$

$$\bar{d}_{\varphi}(s, t) = \sup\{\text{dist}(x, y) : x \in \varphi(C_s) \text{ e } y \in \varphi(C_t)\}.$$

1. *Para toda região $A \subset \hat{\mathbb{C}}$ conformemente equivalente a um anel, sejam $\partial_1 A$ e $\partial_2 A$ cada uma das componentes que formam a fronteira de A . Então, existe uma geodésica minimizante γ cuja imagem está contida em \bar{A} tal que $\gamma(0) \in \partial_1 A$ e $\gamma(1) \in \partial_2 A$ e*

$$d(\partial_1 A, \partial_2 A) := \inf\{\text{dist}(z, w) : z \in \partial_1 A \text{ e } w \in \partial_2 A\} = \ell_{\hat{\mathbb{C}}}(\gamma).$$

2. *Dado $\varepsilon \in (0, 1)$ existe $M_{\varepsilon} > 0$ tal que*

$$0 < \frac{\bar{d}_{\varphi}(s, t)}{\underline{d}_{\varphi}(\sigma, \tau)} < M_{\varepsilon}$$

para quaisquer $\varphi \in \mathcal{A}_{\pi/4}$ e $s < t, \sigma < \tau$ em $(1 + \varepsilon, 8 - \varepsilon)$, com $|s - t| > \varepsilon$ e $|\sigma - \tau| > \varepsilon$.

Demonstração. 1. Como $\partial_1 A$ e $\partial_2 A$ são fechados em $\hat{\mathbb{C}}$, ambos são compactos e, portanto, $\partial_1 A \times \partial_2 A$ também é compacto. Como dist é uma função contínua existem z_1 e z_2 de tal forma que

$$d(\partial_1 A, \partial_2 A) = \text{dist}(z_1, z_2).$$

Por outro lado, sabemos que a distância entre dois pontos na esfera de Riemann é igual a $\ell_{\hat{\mathbb{C}}}(\gamma)$, onde γ é uma geodésica minimizadora que conecta z_1 com z_2 .

Queremos ver que a imagem da função γ está contida em \bar{A} . Suponha que $\gamma([0, 1])$ não está contido em \bar{A} , então existem $a < b$ pertencentes a $(0, 1)$, tais que

$$\gamma((0, a)) \cap \bar{A} \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad \gamma((b, 1)) \cap \bar{A} \neq \emptyset.$$

Portanto, existe um $c \in (0, a) \cup (b, 1)$ tal que $\gamma(c) \in \partial_1 A \cup \partial_2 A$. Consequentemente, ou $\bar{\gamma} = \gamma|_{[0, a]}$ ou $\bar{\gamma} = \gamma|_{[b, 1]}$, é uma curva que conecta $\partial_1 A$ com $\partial_2 A$, onde $\ell_{\hat{\mathbb{C}}}(\bar{\gamma}) < \ell_{\hat{\mathbb{C}}}(\gamma)$, o que contradiz o fato de que $d(\partial_1 A, \partial_2 A) = \text{dist}(z_1, z_2)$. Por conseguinte $\gamma \subset \bar{A}$.

2. Como $\text{diam } \varphi(A(1, 8)) < \pi/4$, podemos considerar uma rotação na esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, de modo que $\varphi(A(1, 8))$ esta totalmente contida no hemisfério sul. Note que o hemisfério sul é um subconjunto compacto de $\hat{\mathbb{C}}$ e, portanto, temos que a métrica euclidiana e a métrica esférica são equivalentes no hemisfério sul de $\hat{\mathbb{C}}$. Seja K_0 a constante de equivalência, de modo que

$$K_0^{-1} \|v\|_{p, \mu_{\hat{\mathbb{C}}}} \leq |v| \leq K_0 \|v\|_{p, \mu_{\hat{\mathbb{C}}}}.$$

Sejam $\varepsilon \in (0, 1)$ e $s < t$, $\sigma < \tau$ em $(1 + \varepsilon, 8 - \varepsilon)$ que satisfaz $|s - t| > \varepsilon$ e $|\sigma - \tau| > \varepsilon$. Agora, para cada ponto $a \in A(1 + \varepsilon, 8 - \varepsilon)$ considere a bola $B(a, \varepsilon')$ com $\varepsilon' = \varepsilon/2$, é claro que a união de todas estas bolas é uma cobertura aberta de $\overline{A(1 + \varepsilon, 8 - \varepsilon)}$, portanto, existe uma quantidade finita de a_i tais que $\bigcup_{i=1}^n B(a_i, \varepsilon')$ é uma cobertura aberta de $\overline{A(1 + \varepsilon, 8 - \varepsilon)}$, pois este é compacto. Logo, pelo Teorema 3.28 existe uma constante $C = C(\varepsilon')$ tal que

$$\frac{1}{C} \leq \left| \frac{\varphi'(x)}{\varphi'(a_i)} \right| \leq C$$

para quaisquer $x \in B(a_i, \varepsilon')$ e $\varphi \in \mathcal{A}_{\pi/4}$.

Sejam $|\varphi'(a_{i_0})| = \max_{i=1}^n \{\varphi'(a_i)\}$ e $|\varphi'(a_{j_0})| = \min_{j=1}^n \{\varphi'(a_j)\}$, então temos que para todo $x \in \overline{A(1 + \varepsilon, 8 - \varepsilon)}$, é certo que

$$\frac{1}{C} |\varphi'(a_{j_0})| \leq |\varphi'(x)| \leq C |\varphi'(a_{i_0})|. \quad (3.1)$$

Como $A(1, 8)$ é conexo, para a_{i_0} e a_{j_0} existem $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{k-1}}$ tais que

$$B(a_{i_j}, \varepsilon') \cap B(a_{i_{j+1}}, \varepsilon') \neq \emptyset;$$

com $j \in \{0, \dots, k-1\}$, sendo $a_k = a_{j_0}$.

Tomando $x_j \in B(a_{i_j}, \varepsilon') \cap B(a_{i_{j+1}}, \varepsilon')$, pelo Teorema 3.28 temos que:

$$\left| \frac{\varphi'(a_{i_0})}{\varphi'(x_0)} \right| \leq C, \quad \left| \frac{\varphi'(x_0)}{\varphi'(x_1)} \right| \leq C^2, \dots, \left| \frac{\varphi'(x_{k-2})}{\varphi'(x_{k-1})} \right| \leq C^2, \quad \left| \frac{\varphi'(x_k)}{\varphi'(a_{j_0})} \right| \leq C$$

Multiplicando temos

$$\left| \frac{\varphi'(a_{i_0})}{\varphi'(a_{j_0})} \right| \leq (C^2)^k =: C_\varepsilon. \quad (3.2)$$

Observe que $k = k(\varepsilon) < n$ e depende solo de ε .

Finalmente, seja $x \in \varphi(C_s)$ e $y \in \varphi(C_t)$, então existem x_1 e y_1 tais que suas normas são iguais a s e t , respectivamente, e $x = \varphi(x_1)$ e $y = \varphi(y_1)$. Ambos os pontos estão conectados por uma curva $\gamma \subset A(1, 8)$ cujo comprimento euclidiano é no máximo de 8π .

Assim,

$$\begin{aligned}
\text{dist}(x, y) &\leq \ell_{\hat{\mathbb{C}}}(\varphi \circ \gamma) = \int_0^1 \|(\varphi \circ \gamma)'(\alpha)\|_{\mu_{\hat{\mathbb{C}}}} d\alpha \\
&= \int_0^1 \|\varphi'(\gamma(\alpha)) \cdot \gamma'(\alpha)\|_{\mu_{\hat{\mathbb{C}}}} d\alpha \\
&\leq \int_0^1 K_0 \|\varphi'(\gamma(\alpha)) \cdot \gamma'(\alpha)\|_{\mu_{\mathbb{C}}} d\alpha \\
&= \int_0^1 K_0 |\varphi'(\gamma(\alpha)) \cdot \gamma'(\alpha)| d\alpha \\
&= \int_0^1 K_0 |\varphi'(\gamma(\alpha))| \cdot |\gamma'(\alpha)| d\alpha \\
&\leq K_0 \int_0^1 C |\varphi'(a_{i_0})| \cdot |\gamma'(\alpha)| d\alpha \\
&= K_0 C |\varphi'(a_{i_0})| \int_0^1 |\gamma'(\alpha)| d\alpha \\
&= K_0 C |\varphi'(a_{i_0})| \ell_{\mathbb{C}}(\gamma) \\
&\leq K_0 C |\varphi'(a_{i_0})| \cdot 8\pi
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Por outro lado, $\underline{d}_\varphi(\sigma, \tau) = \text{dist}(\varphi(C_\sigma), \varphi(C_\tau))$, onde $\varphi(C_\sigma)$ e $\varphi(C_\tau)$ formam a fronteira do $\varphi(A(\sigma, \tau))$. Pela parte 1) existem uma curva $\gamma \subset \varphi(A(\sigma, \tau))$ tal que $\gamma(0) \in \varphi(C_\sigma)$ e $\gamma(1) \in \varphi(C_\tau)$. Observe que a curva $\rho = (\varphi^{-1} \circ \gamma) \subset A(\sigma, \tau)$ tem $\ell_{\mathbb{C}}(\rho) > |\sigma - \tau| > \varepsilon$. Assim,

$$\begin{aligned}
\underline{d}_\varphi(\sigma, \tau) &= \ell_{\hat{\mathbb{C}}}(\gamma) = \ell_{\hat{\mathbb{C}}}(\varphi \circ \rho) \\
&= \int_0^1 \|(\varphi \circ \rho)'(\alpha)\|_{\mu_{\hat{\mathbb{C}}}} d\alpha \\
&= \int_0^1 \|(\varphi'(\rho(\alpha))) \cdot \rho'(\alpha)\|_{\mu_{\hat{\mathbb{C}}}} d\alpha \\
&\geq \int_0^1 K_0^{-1} |\varphi'(\rho(\alpha))| \cdot |\rho'(\alpha)| d\alpha \\
&\geq \int_0^1 K_0^{-1} C^{-1} |\varphi'(a_{j_0})| \cdot |\rho'(\alpha)| d\alpha \\
&= K_0^{-1} C^{-1} |\varphi'(a_{j_0})| \int_0^1 |\rho'(\alpha)| d\alpha \\
&= K_0^{-1} C^{-1} |\varphi'(a_{j_0})| \ell_{\mathbb{C}}(\rho) \\
&\geq K_0^{-1} C^{-1} |\varphi'(a_{j_0})| \varepsilon.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}
\bar{d}_\varphi(s, t) &\leq K_0 C |\varphi'(a_{i_0})| 8\pi, \\
\underline{d}_\varphi(\sigma, \tau) &\geq K_0^{-1} C^{-1} |\varphi'(a_{j_0})| \varepsilon.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\bar{d}_\varphi(s, t)}{d_\varphi(\sigma, \tau)} \leq \frac{K_0 C |\varphi'(a_{i_0})| 8\pi}{K_0^{-1} C^{-1} |\varphi'(a_{j_0})| \varepsilon} \leq (K_0 C)^2 C_\varepsilon 8\pi / \varepsilon.$$

Fazendo $M = (K_0 C)^2 C_\varepsilon 8\pi / \varepsilon$ finalizamos a prova. □

Teorema 3.30 (Distorção). *Dados $R > r > 0$, seja*

$$A(r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}.$$

Existem constantes M e δ tais que, para cada função univalente

$$\varphi : A(1, 8) \rightarrow \hat{\mathbb{C}},$$

que satisfaz $\text{diam}(\varphi(A(1, 8))) < \delta$, e para cada x delimitado pela imagem de φ , temos que

$$\frac{\sup\{\text{dist}(x, y) : y \in \varphi(A(2, 4))\}}{\inf\{\text{dist}(x, y) : y \in \varphi(A(2, 4))\}} \leq M.$$

Demonstração. Claramente $A(1, 8)$ e $\varphi(A(1, 8))$ são conformemente equivalentes e, portanto, $\hat{\mathbb{C}} - \varphi(A(1, 8)) = E \cup F$, com $E \cap F = \emptyset$.

Sem perda de generalidade, seja E o conjunto tal que

$$\text{diam}(\varphi(A(1, 8))) = \text{diam}((\varphi(A(1, 8))) \cup E).$$

Diremos que $x \in \hat{\mathbb{C}}$ é delimitado por $\varphi(A(1, 8))$ se $x \in E$.

Para qualquer região $U \subset \hat{\mathbb{C}}$, conformemente equivalente a um anel com $\text{diam}(U) < \delta$, e x delimitado por U definimos:

$$\bar{d}(x, U) = \sup\{\text{dist}(x, y) : y \in U\}$$

e

$$\underline{d}(x, U) = \inf\{\text{dist}(x, y) : y \in U\}.$$

Seja x delimitado por $\varphi(A(1, 8))$, é evidente que também é delimitado por $\varphi(A(2, 4))$. Sem perda de generalidade, suponha que $\varphi(C_2)$ seja a fronteira delimitado por $\varphi(A(2, 4))$ e $\varphi(C_4)$ sua outra fronteira. Além disso, seja $\delta = \pi/4$ e $\varepsilon = 1/10$. Então temos que $\bar{d}(x, \varphi(A(2, 4))) = \bar{d}(x, \varphi(C_4))$ e $\underline{d}(x, \varphi(A(2, 4))) = \underline{d}(x, \varphi(C_2))$.

Observe que, dado que $\varphi(C_4)$ é um conjunto fechado, ele também é compacto em $\hat{\mathbb{C}}$. Portanto, podemos encontrar um ponto $x_4 \in C_4$ tal que $\bar{d}(x, \varphi(C_4)) = \text{dist}(x, \varphi(x_4))$. Vamos considerar a geodésica minimizante γ que conecta x com $\varphi(x_4)$. Esta trajetória intersecta $\varphi(C_{3/2})$ em $\varphi(x_{3/2})$ e intersecta $\varphi(C_2)$ em $\varphi(x_2)$, onde $x_{3/2} \in C_{3/2}$ e $x_2 \in C_2$. Consequentemente, temos:

$$\begin{aligned}\bar{d}(x, \varphi(2, 4)) = \ell_{\hat{C}}(\gamma) &= \text{dist}(x, \varphi(x_{3/2})) + \text{dist}(\varphi(x_{3/2}), \varphi(x_2)) + \text{dist}(\varphi(x_2), \varphi(x_4)) \\ &\leq \bar{d}(x, \varphi(C_{3/2})) + \bar{d}_{\varphi}(3/2, 2) + \bar{d}_{\varphi}(2, 4).\end{aligned}$$

De maneira semelhante, encontramos um ponto $y_2 \in C_2$ tal que $\underline{d}(x, \varphi(C_2)) = \text{dist}(x, \varphi(y_2))$. Portanto, há uma geodésica minimizante ρ que conecta x a $\varphi(y_2)$. Além disso, identificamos um ponto $y_{3/2} \in C_{3/2}$ no qual ρ intersecta $\varphi(C_{3/2})$ como $\varphi(y_{3/2})$. Assim,

$$\begin{aligned}\underline{d}(x, \varphi(A(2, 4))) = \text{dist}(x, \varphi(y_2)) &= \text{dist}(x, \varphi(y_{3/2})) + \text{dist}(\varphi(y_{3/2}), \varphi(y_2)) \\ &\geq \underline{d}(x, \varphi(C_{3/2})) + \underline{d}_{\varphi}(3/2, 2).\end{aligned}$$

Desta forma, temos que

$$\begin{aligned}\frac{\bar{d}(x, \varphi(A(2, 4)))}{\underline{d}(x, \varphi(A(2, 4)))} &\leq \frac{\bar{d}(x, \varphi(C_{3/2})) + \bar{d}_{\varphi}(3/2, 2) + \bar{d}_{\varphi}(2, 4)}{\underline{d}(x, \varphi(C_{3/2})) + \underline{d}_{\varphi}(3/2, 2)} \\ &\leq \frac{\bar{d}(x, \varphi(C_{3/2}))}{\underline{d}(x, \varphi(C_{3/2})) + \underline{d}_{\varphi}(3/2, 2)} + \frac{\bar{d}_{\varphi}(3/2, 2)}{\underline{d}(x, \varphi(C_{3/2})) + \underline{d}_{\varphi}(3/2, 2)} + \frac{\bar{d}_{\varphi}(2, 4)}{\underline{d}(x, \varphi(C_{3/2})) + \underline{d}_{\varphi}(3/2, 2)} \\ &\leq \frac{\bar{d}(x, \varphi(C_{3/2}))}{\underline{d}(x, \varphi(C_{3/2}))} + \frac{\bar{d}_{\varphi}(3/2, 2)}{\underline{d}_{\varphi}(3/2, 2)} + \frac{\bar{d}_{\varphi}(2, 4)}{\underline{d}_{\varphi}(3/2, 2)}.\end{aligned}$$

Assim, pelo item 2) do Teorema 3.28, temos que para $\varepsilon = 1/10$ existe um $M_{1/10}$ tal que

$$\frac{\bar{d}_{\varphi}(2, 4)}{\underline{d}_{\varphi}(3/2, 2)} \leq M_{1/10} \quad \text{e} \quad \frac{\bar{d}_{\varphi}(3/2, 2)}{\underline{d}_{\varphi}(3/2, 2)} \leq M_{1/10}.$$

Deixando-nos como resultado:

$$\frac{\bar{d}(x, \varphi(A(2, 4)))}{\underline{d}(x, \varphi(A(2, 4)))} \leq \frac{\bar{d}(x, \varphi(C_{3/2}))}{\underline{d}(x, \varphi(C_{3/2}))} + 2M_{1/10}.$$

Nosso objetivo agora é encontrar um limite superior de $\frac{\bar{d}(x, \varphi(C_{3/2}))}{\underline{d}(x, \varphi(C_{3/2}))}$. Considere a seguinte parametrização de $C_{3/2}$, seja $\gamma(t) = \frac{3}{2}(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), t \in [0, 1]$. Então, $\varphi(C_{3/2})$ é a imagem de $\varphi \circ \gamma$ e, portanto, $\ell_{\hat{C}}(\varphi(C_{3/2})) = \ell_{\hat{C}}(\varphi \circ \gamma)$.

Note que para cada $y \in \varphi(C_{3/2})$ existe um único grande círculo que passa por x e y , e o menor segmento do círculo que liga x com y é uma geodésica minimizante γ_1 e

$$\text{dist}(x, y) = \ell_{\hat{C}}(\gamma_1).$$

Este círculo deve se interceptar com $\varphi(C_{3/2})$ em outro ponto \tilde{y} ; logo

$$\text{dist}(x, y) \leq \text{dist}(y, \tilde{y}) < \ell_{\hat{\mathbb{C}}}(\varphi \circ \gamma).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \bar{d}(x, \varphi(C_{3/2})) \leq \ell_{\hat{\mathbb{C}}}(\varphi \circ \gamma) &= \int_0^1 \|(\varphi \circ \gamma)'(s)\| ds \\ &= \int_0^1 \|\varphi'(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s)\| ds \leq \int_0^1 K_0 |\varphi'(\gamma(s))| \cdot |\gamma'(s)| ds \end{aligned}$$

Lembrando a prova do teorema anterior, sabemos que para qualquer $z \in \overline{A(1 + \varepsilon, 8 - \varepsilon)}$ com $\varepsilon = 1/10$ existe $|\varphi'(a_{i_0})|$ e C tal que $|\varphi'(z)| \leq C|\varphi'(a_{i_0})|$. Portanto,

$$\begin{aligned} \bar{d}(x, \varphi(C_{3/2})) &\leq \int_0^1 K_0 |\varphi'(\gamma(s))| \cdot |\gamma'(s)| ds \\ &\leq K_0 C |\varphi'(a_{i_0})| \ell_{\mathbb{C}}(\gamma) = K_0 C |\varphi'(a_{i_0})| 2\pi \cdot \frac{3}{2} = 3\pi K_0 C |\varphi'(a_{i_0})|. \end{aligned}$$

Por outro lado, tomando $\sigma = 6/5$ e $\tau = 3/2$, temos que

$$\underline{d}(x, \varphi(C_{3/2})) \geq \underline{d}_{\varphi}(6/5, 3/2).$$

Como $|\sigma - \tau| > \varepsilon = 1/10$, pelos cálculos feitos em 3.4 temos que

$$\underline{d}_{\varphi}(6/5, 3/2) \geq K_0^{-1} C^{-1} |\varphi'(a_{j_0})| \varepsilon.$$

Recordemos que $|\varphi'(a_{j_0})|$ é tal que $C^{-1} |\varphi'(a_{j_0})| \leq |\varphi'(z)|$ para qualquer $z \in \overline{A(1 + \varepsilon, 8 - \varepsilon)}$.

Finalmente, pelo visto em (3.2), temos que

$$\left| \frac{\varphi'(a_{i_0})}{\varphi'(a_{j_0})} \right| \leq C_{\varepsilon}.$$

Assim,

$$\frac{\bar{d}(x, \varphi(C_{3/2}))}{\underline{d}(x, \varphi(C_{3/2}))} \leq \frac{3\pi K_0 C |\varphi'(a_{i_0})|}{K_0^{-1} C^{-1} |\varphi'(a_{j_0})| \varepsilon} \leq \frac{3\pi (K_0 C)^2 C_{\varepsilon}}{\varepsilon} = 30\pi (K_0 C)^2 C_{1/10}.$$

Tomando $M = 30\pi (K_0 C)^2 C_{1/10} + 2M_{1/10}$ temos

$$\frac{\bar{d}(x, \varphi(A(2, 4)))}{\underline{d}(x, \varphi(A(2, 4)))} \leq M,$$

para qualquer x delimitado por $\varphi(A(1, 8))$ e $\varphi \in \mathcal{A}_{\pi/4}$. □

Capítulo 4

Condição Topológica de Collect-Eckmann

A Definição 1.19, dada na introdução, apresenta a condição topológica de Collet-Eckmann para funções racionais. Além da condição TCE, temos as seguintes condições equivalentes (ver Teorema 4.3).

Definição 4.1 (Diminuição Exponencial de Componentes – DEC). *Seja f uma função racional de grau maior ou igual a dois. Dizemos que f possui diminuição exponencial de componentes se existem constantes $r_0 > 0$ e $\lambda > 1$ tais que, para cada $x \in J(f)$, $0 < r < r_0$, e cada inteiro $m \geq 1$, cada componente conexa W de $f^{-m}(B(x, r))$ satisfaz*

$$\text{diam}(W) \leq \lambda^{-m}.$$

Definição 4.2 (Hiperbolicidade Uniforme em Órbitas Periódicas – HUP). *Seja f uma função racional de grau maior ou igual a dois. Dizemos que f possui hiperbolicidade uniforme em órbitas periódicas se existe um $\lambda > 1$ tal que, para qualquer ponto periódico $p \in J(f)$ de período $n \geq 1$, temos*

$$|(f^n)'(p)| \geq \lambda^n.$$

Em particular, todos os ciclos periódicos dentro do conjunto de Julia são repulsores.

No trabalho realizado por F. Przytycki, J. Rivera-Letelier, e S. Smirnov em [19] podemos encontrar o teorema que relaciona as definições dadas nesta seção. Uma versão simplificada do teorema é apresentada a seguir:

Teorema 4.3 (Caracterização da condição topológica de Collet-Eckmann). *Se $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ for uma função racional de grau maior ou igual a dois, então as seguintes condições são equivalentes*

1. *Hiperbolicidade Uniforme em Órbitas Periódicas.*
2. *Diminuição Exponencial de Componentes.*
3. *Condição Topológica de Collect-Eckmann.*

Demonstração. Ver [19] □

No trabalho de Nicolae Mihalache [15], podemos encontrar um exemplo de uma função que satisfaz a condição de Diminuição Exponencial de Componentes que, pelo teorema acima deve satisfazer a condição TCE. Essa função tem um ponto crítico recorrente, portanto não é semi-hiperbólica. O que indica que nem todas as funções que satisfazem a condição TCE são semi-hiperbólicas.

Nosso objetivo é demonstrar o Teorema B já apresentado na introdução; por conveniência, iremos repetí-lo aqui:

Teorema B. *Seja f uma função racional com grau maior ou igual a dois. Seja ρ_f sua medida de máxima entropia. Então f satisfaz a condição TCE se, e somente se, existem constantes $r_0 > 0$, $\alpha > 0$, e $C > 0$ tais que, para quaisquer $x \in J(f)$ e $r \in (0, r_0)$, é verdade que*

$$\rho_f(B(x, r)) \geq Cr^\alpha.$$

A demonstração original está no artigo de J. Rivera-Letelier [20]. Daremos essencialmente a mesma demonstração, com a diferença de que nos aprofundaremos mais nos pré-requisitos e detalhes.

4.1 Jacobiano

Uma função mensurável $f : M \rightarrow M$ é dita localmente invertível se existir uma cobertura numerável $\{A_k : k > 1\}$ de M por conjuntos mensuráveis tais que f é invertível em cada A_k . Os subconjuntos mensuráveis destes conjuntos A_k serão chamados domínios de invertibilidade.

Definição 4.4 (Jacobiano). *Seja ρ uma medida probabilidade sobre M , não necessariamente invariante por f . Uma função mensurável $\xi : M \rightarrow [0, \infty)$ é um Jacobiano de f relativo a ρ se a restrição de ξ a qualquer domínio de invertibilidade A é integrável com relação a ρ e satisfaz*

$$\rho(f(A)) = \int_A \xi d\rho. \quad (4.1)$$

Dizemos que uma medida ρ é não singular em relação à transformação f se, para qualquer A que seja domínio de invertibilidade com medida nula, temos $\rho(f(A)) = 0$.

Teorema 4.5. *Seja $f : M \rightarrow M$ uma transformação localmente invertível e seja ρ uma medida boreliana de M , não singular com relação a f . Então, existe algum Jacobiano de f com relação a ρ e ele é essencialmente único: dois Jacobianos quaisquer coincidem exceto em um conjunto de medida nula por ρ .*

Agora nos restringiremos ao caso de uma função racional de grau maior ou igual a dois, ou seja, M é a esfera de Riemann. A partir de agora escreveremos $J_\rho(f)$ ou J_ρ para referir-se ao Jacobiano de f com respeito a ρ . Queremos mostrar que o Jacobiano de f com respeito a sua medida de máxima entropia ρ_f é constante igual a $d = \text{grau}(f)$. Sabemos pelos resultados apresentados em [12] que ρ_f satisfaz:

$$\rho_f(f(A)) = d \cdot \rho_f(A).$$

Por outro lado, seja A um domínio de invertibilidade e J_{ρ_f} o Jacobiano de f . Então, temos que:

$$\rho_f(f(A)) = \int_A J_{\rho_f} d\rho_f$$

e portanto,

$$\begin{aligned} d \cdot \rho_f(A) &= \rho_f(f(A)) = \int_A J_{\rho_f} d\rho_f \\ d \int_A d\rho_f &= \int_A J_{\rho_f} d\rho_f. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Como o Jacobiano é único, então temos que $J_{\rho_f} = d$ em cada domínio de invertibilidade A . Logo, usando uma partição conveniente de $\hat{\mathbb{C}}$ temos que

$$\int_{\hat{\mathbb{C}}} J_{\rho_f} d\rho_f = d.$$

Agora, considere V um conjunto aberto conexo de $\hat{\mathbb{C}}$ e seja $m \geq 1$ um inteiro. Seja W uma das componentes conexas de $f^{-m}(V)$. Considere a função $f^m : W \rightarrow V$ e definimos seu grau por D . Como o grau é D , podemos particionar W em W_1, \dots, W_D de forma que $f^m|_{W_i} : W_i \rightarrow V$ seja invertível e $\rho_f(W \setminus \bigcup_{i=1}^D W_i) = 0$.

Observe que $f^m : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ tem grau igual a $\text{grau}(f)^m$. Portanto,

$$\rho_f(V) = \text{grau}(f)^m \rho_f(W_i)$$

para todo W_i . Logo,

$$\sum_{i=1}^D \rho_f(V) = \sum_{i=1}^D \text{grau}(f)^m \rho_f(W_i)$$

$$D \rho_f(V) = \text{grau}(f)^m \sum_{i=1}^D \rho_f(W_i)$$

$$D \rho_f(V) = \text{grau}(f)^m \rho_f(W)$$

e portanto,

$$\rho_f(W) = \frac{D}{\text{grau}(f)^m} \rho_f(V). \tag{4.3}$$

Na próxima seção, apresentaremos a demonstração do Teorema B.

4.2 Demonstração do Teorema B

Demonstração. Suponha que f satisfaça a condição TCE, então f deve satisfazer a condição DEC, já que ambas são equivalentes. Sejam $r_0 > 0$ e $\lambda \geq 1$ as constantes dadas pela condição DEC. Já que ρ_f tem suporte em $J(f)$, temos que existe um $\varepsilon > 0$ tal que, para qualquer $x \in J(f)$ é satisfeito que $\rho_f(B(x, r_0)) > \varepsilon$.

Sejam $x \in J(f)$ e $\hat{r} \in (0, 1)$. Tomemos $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^n} \leq \hat{r} < \frac{1}{\lambda^{n-1}}$. Seja W a componente conexa de $f^{-n}(B(f^n(x), r_0))$ tal que x pertence a W . Considere a função $f^n : W \rightarrow B(f^n(x), r_0)$ e denote por $D \geq 1$ seu grau, então é verdade que

$$\rho_f(W) = D \text{grau}(f)^{-n} \rho_f(B(f^n(x), r_0)).$$

Logo,

$$\rho_f(W) \geq D \text{grau}(f)^{-n} \varepsilon \geq \varepsilon \text{grau}(f)^{-n}.$$

Como o $\text{diam}(W) \leq \lambda^{-n}$ (pela condição DEC), então é claro que $W \subset B(x, \hat{r})$. Finalmente, se definimos $\alpha := \frac{\ln(\text{grau}(f))}{\ln(\lambda)}$ e $C := \varepsilon \lambda^{-\alpha}$, temos que

$$\rho_f(B(x, \hat{r})) \geq \rho_f(W) \geq \varepsilon \text{grau}(f)^{-n} = \varepsilon ((\lambda)^\alpha)^{-n} = \varepsilon ((\lambda)^{-n})^\alpha$$

e como,

$$\frac{1}{\lambda^n} \leq \hat{r} < \frac{1}{\lambda^{n-1}}$$

então,

$$\frac{\hat{r}}{\lambda} < \frac{1}{\lambda^n}$$

e portanto,

$$\varepsilon ((\lambda)^{-n})^\alpha > \varepsilon (\hat{r} \lambda^{-1})^\alpha = \varepsilon (\lambda^{-\alpha}) \hat{r}^\alpha.$$

Assim,

$$\rho_f(B(x, \hat{r})) \geq C \hat{r}^\alpha.$$

Reciprocamente, suponha que f é uma função racional para a qual existem constantes $r_0 > 0$, $\alpha > 0$ e $C > 0$ tal que para quaisquer $x \in J(f)$ e $r \in (0, r_0)$ temos que

$$\rho_f(B(x, r)) > C r^\alpha.$$

Nosso objetivo é mostrar que f satisfaz a condição de HUP. Seja $n \geq 1$ natural e seja p um ponto periódico repulsor de f com período n . Então, como p é repulsor, temos $|(f^n)'(p)| > 1$ e pelo Teorema da função inversa, existe uma inversa local φ de f definido em uma vizinhança de p a qual fixa o ponto p . Além disso, se tomarmos r_1 suficientemente pequeno, temos que φ é bem definida em $B(p, r_1)$ e $\varphi'(p) = \frac{1}{(f^n)'(p)}$.

Considere a função $h : \Delta \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definida por

$$h(z) = \frac{\varphi(r_1 z + p) - p}{r_1 |\varphi'(p)|},$$

é claro que $h \in \mathcal{S}$. Pelo Teorema do quarto do Koebe temos que

$$B(0, 1/4) \subset h(\Delta).$$

Portanto,

$$B(p, \frac{r_1}{4}|\varphi'(p)|) \subset \varphi(B(p, r_1)),$$

fazendo $C_1 = r_1/4$ temos,

$$B(p, C_1|(f^n)'(p)|^{-1}) \subset \varphi(B(p, r_1)),$$

e de forma semelhante, para cada $k \geq 1$ temos

$$B(p, C_1|(f^n)'(p)|^{-k}) \subset \varphi^k(B(p, r_1)).$$

Finalmente, temos que

$$(\text{grau}(f)^{kn})\rho_f(\varphi^k(B(p, r_1))) = \rho_f(f^{kn}(\varphi^k(B(p, r_1)))) = \rho_f(B(p, r_1)),$$

então

$$(\text{grau}(f)^{-kn})\rho_f(B(p, r_1)) = \rho_f(\varphi^k(B(p, r_1))) \geq \rho_f\left(B\left(p, \frac{C_1}{|(f^n)'(p)|^k}\right)\right),$$

e segue-se que

$$\rho_f\left(B\left(p, \frac{C_1}{|(f^n)'(p)|^k}\right)\right) \geq C\left(\frac{C_1}{|(f^n)'(p)|^k}\right)^\alpha.$$

Como isto é verdade para todos os $k > 1$, segue-se que $|(f^n)'(p)| > \text{grau}(f)^{n/\alpha}$. Isto mostra que f é uniformemente hiperbólico em órbitas periódicas com $\lambda = \text{grau}(f)^{1/\alpha}$ \square

Para um função racional f que satisfaz a condição TCE, determinaremos agora a constante ótima α teorema do acima. Para cada inteiro $n \geq 1$ e cada ponto periódico p de período n , definimos

$$\chi(p) = \frac{1}{n} \ln|(f^n)'(p)|,$$

e

$$\chi_{per} := \{\chi(p) : p \text{ é ponto periódico de } f\}.$$

Em [19], é mostrado que a condição DEC é válida para cada $\lambda \in (1, \chi_{per})$.

Além disso, na prova do teorema mostra que, se α é uma constante para a qual a conclusão deste teorema é válida, então $|(f^n)'(p)| \geq \text{grau}(f)^{n/\alpha}$, logo

$$\begin{aligned} |(f^n)'(p)| &\geq \text{grau}(f)^{n/\alpha} \\ \ln(|(f^n)'(p)|) &\geq \frac{n \ln(\text{grau}(f))}{\alpha} \\ \alpha &\geq \frac{n \ln(\text{grau}(f))}{\ln|(f^n)'(p)|} \geq \frac{\ln(\text{grau}(f))}{\chi_{per}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, provamos que a conclusão do teorema é válida se $\alpha = \frac{\ln(\text{grau}(f))}{\ln(\lambda)}$ e como $\lambda < e^{\chi_{per}}$ segue-se que:

$$\begin{aligned}\lambda &< e^{\chi_{per}} \\ \ln(\lambda) &< \chi_{per} \\ \frac{1}{\chi_{per}} &< \frac{1}{\ln(\lambda)} \\ \frac{\ln(\text{grau}(f))}{\chi_{per}} &< \frac{\ln(\text{grau}(f))}{\ln(\lambda)} = \alpha,\end{aligned}$$

Portanto, basta escolher $\alpha > \frac{\ln(\text{grau}(f))}{\chi_{per}}$.

Capítulo 5

Semi-hiperbolicidade

Seja f uma função racional de grau maior ou igual a dois. O conceito de semi-hiperbolicidade foi introduzido na seção 1.2 da introdução. O objetivo principal deste capítulo é oferecer uma demonstração detalhada do seguinte resultado:

Teorema 5.1 (Teorema A de [20]). *Uma função racional complexa de grau pelo menos dois é semi-hiperbólica se, e somente se, sua medida de entropia máxima é duplicadora em seu conjunto de Julia.*

5.1 Pares bons em torno dos pontos críticos

Denotamos por $\text{Crit}(f)$ o conjunto dos pontos críticos de f e por $\text{Crit}'(f)$ o conjunto de pontos críticos de f que pertencem ao seu conjunto de Julia. Dizemos que f possui conexões críticas quando existir um ponto crítico c no conjunto de Julia que é levado por alguma f^n num outro ponto crítico no conjunto de Julia. Se c for um ponto crítico no conjunto de Julia e nenhum iterado $f^n(c)$ for um ponto crítico, então diremos que c é um ponto crítico exposto.

Denotamos por $\ell_{\max}(f)$ o grau local maximal de f em um ponto crítico de f que esteja no conjunto de Julia. A primeira observação é que o número de pontos críticos é finito, logo $\ell_{\max}(f)$ está sempre bem definido. A segunda observação é que existe uma diferença entre grau local e grau semi-local. Esta última definição foi dada na introdução e claramente depende de uma constante $r > 0$, usualmente bem pequena. Já o grau local de f em z_0 é sempre 1 se z_0 não for um ponto crítico, e quando $f'(z_0) = 0$, o grau local em z_0 é aquele natural m tal que

$$h(z) = f(z + z_0) - f(z_0)$$

é localmente conjugada à função $g(z) = z^m$ numa vizinhança de 0 suficientemente pequena. O grau semi-local deve coincidir com o grau local desde que $r > 0$ seja suficientemente pequeno. O problema é que, na definição de grau semi-local, o valor de $r > 0$ é fixado *a priori*, e isso faz toda a diferença.

Também definimos $\widehat{\ell}_{\max}(f)$ como sendo o supremo dos valores $\ell_{\max}(f^n)$, $n > 0$.

Como o número de pontos críticos de uma função racional é sempre no máximo $2d - 2$, onde d é o grau da função, temos

$$\widehat{\ell}_{\max}(f) \leq 2^{2d-2}.$$

Além disso, se f não possui conexões críticas, então $\widehat{\ell}_{\max}(f) = \ell_{\max}(f)$.

Pares bons. Suponha que f seja uma função racional de grau maior ou igual a dois. Seja V uma vizinhança de $\text{Crit}'(f)$ e suponha que V é disjunta das orbitas dos

pontos críticos que não pertencem a $J(f)$. Dizemos que V é um *conjunto bom de f* se as seguintes propriedades são satisfeitas: cada componente conexa de V é simplesmente conexa e contém exatamente um ponto de $\text{Crit}'(f)$; e para cada $n \geq 1$, o conjunto $f^n(\partial V)$ é disjunto de V .

Dados V e \hat{V} conjuntos bons de f tais que $\bar{V} \subset \hat{V}$, diremos que (V, \hat{V}) é um *par bom de f* se $f^n(\partial V) \cap \hat{V} = \emptyset$ para todo $n \geq 1$. Dizemos que uma função racional possui pares bons arbitrariamente pequenos se existe uma sequência (V_n, \hat{V}_n) de pares bons de f com

$$\hat{V}_n \subset \bigcup_{c \in \text{Crit}'(f)} B(c, r_n),$$

onde $r_n \rightarrow 0$.

As definições de conjunto bom de f e par bom de f podem ser dadas a vizinhanças de subconjuntos de $\text{Crit}'(f)$. Seja \mathcal{C} um subconjunto de $\text{Crit}'(f)$ e seja V uma vizinhança de \mathcal{C} tal que V é disjunta das orbitas dos pontos críticos que não pertencem a $J(f)$. Dizemos que V é um *conjunto bom de f relativo a \mathcal{C}* se as seguintes propriedades são satisfeitas: cada componente conexa de V é simplesmente conexa e contém exatamente um ponto de \mathcal{C} ; e para cada $n \geq 1$, temos $f^n(\partial V) \cap V = \emptyset$. É importante observar que todo conjunto bom de f é um conjunto bom de f relativo a \mathcal{C} .

Analogamente, se V e \hat{V} são conjuntos bons de f relativos a \mathcal{C} tais que $\bar{V} \subset \hat{V}$, diremos que (V, \hat{V}) é um *par bom de f relativo a \mathcal{C}* se $f^n(\partial V) \cap \hat{V} = \emptyset$.

Dados dois discos topológicos \hat{U}, U de \hat{C} tais que $\bar{U} \subset \hat{U}$ definimos

$$\text{mod}(\hat{U}; U) = \sup\{ \text{mod}(A); A \subset \hat{U} \text{ é um anel que separa } U \text{ de } \hat{C} \setminus \hat{U} \}.$$

Suponha que f é racional de grau maior ou igual a dois e (\hat{V}, V) é um par bom de f , então denotamos V^c (respectivamente \hat{V}^c) como a componente conexa de V (respectivamente \hat{V}) que contém c e definimos

$$\text{mod}(\hat{V}; V) := \min\{ \text{mod}(\hat{V}^c; V^c) : c \in \text{Crit}'(f) \}.$$

Uma propriedade importante das funções racionais que satisfazem a condição TCE é que elas têm pares bons arbitrariamente pequenos com módulo arbitrariamente grandes.

Lema 5.2. *Seja f uma função racional de grau maior ou igual a dois que tem pares bons arbitrariamente pequenos com módulos arbitrariamente grandes. Então para qualquer ponto crítico recorrente c_0 no conjunto $J(f)$, qualquer κ no intervalo $(0, 1)$, $\hat{r} > 0$ e qualquer inteiro $N \geq 2$ existe um ponto crítico $c \in \text{Crit}'(f)$, um $r \in (0, \hat{r})$ e um inteiro $m \geq 1$, tal que $f^m(c_0) \in B(c, r)$. Além disso, seja \hat{U} a componente conexa da pré-imagem de $B(c, r)$ que contém c_0 e U a componente conexa da pré-imagem de $B(c, \kappa r)$ que contém c_0 , então*

1. $\text{diam}(\hat{U}) < \hat{r}$.
2. O grau de f^m em \hat{U} e o grau de f^m em U são os mesmos.
3. O conjunto $A := \hat{U} \setminus U$ é um anel e

$$f^m : A \rightarrow B(c, r) \setminus \overline{B(c, \kappa r)}$$

é um recobrimento cujo grau é, no mínimo N e no máximo $\widehat{\ell}_{\max}(f)N$.

Demonstração. Seja c_0 um ponto crítico recorrente que pertence a $J(f)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que c_0 é um ponto exposto. Caso contrário, algum elemento de sua órbita futura deve ser um ponto exposto, e assim podemos substituir c_0 por esse elemento. De fato, considere a órbita futura

$$c_0 \rightarrow c_1 = f(c_0) \rightarrow c_2 = f(c_1) \rightarrow \dots$$

de c_0 e suponha, por absurdo, que nenhum ponto da órbita seja exposto. Então para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $c_n \in \text{Crit}'(f)$.

O conjunto $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ não possui pontos repetidos, caso contrário teríamos uma órbita fechada com pontos críticos dentro do conjunto de Julia, o que não é possível. Logo, temos um conjunto infinito $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ de pontos críticos, o que é um absurdo pois o número de pontos críticos em uma função racional é finito. Assim, algum iterado $c_n = f(c_0)$ deve ser exposto.

Seja \mathcal{C}_0 o conjunto dos pontos críticos pertencentes a $J(f)$ cuja órbita futura se acumula em c_0 . É claro que $\mathcal{C}_0 \neq \emptyset$, pois, por hipótese, c_0 é um ponto crítico recorrente e $c_0 \in J(f)$.

Recordemos que o ω -limite de um $z \in \hat{\mathbb{C}}$ é o conjunto de todos os $\omega \in \hat{\mathbb{C}}$ para os quais existe uma sequência de iterados $f^{n_k}(z) \rightarrow \omega$ quando $k \rightarrow \infty$. Este conjunto é denotado por $\omega(z)$. Note que todo conjunto ω -limite é fechado e invariante para frente, isto é, $f(\omega(z)) \subset \omega(z)$. Em particular, se $z_1 \in \omega(z)$ então $\omega(z_1) \subset \omega(z)$.

Por definição, $\mathcal{C}_0 \subset \text{Crit}'(f)$ é o conjunto dos pontos críticos c tais que $c_0 \in \omega(c)$. É claro que \mathcal{C}_0 é finito, \mathcal{C}_0 .

Afirmamos que, para todo $c \in \text{Crit}(f) \setminus \mathcal{C}_0$, o conjunto $\omega(c)$ é disjunto de \mathcal{C}_0 . De fato, no caso que $c \notin J(f)$, não há nada a provar uma vez que existe um conjunto bom para f (e por definição, as órbitas dos pontos críticos fora de $J(f)$ não se acumulam em nenhum ponto de $\text{Crit}'(f)$). Portanto, podemos assumir que $c \in \text{Crit}'(f) \setminus \mathcal{C}_0$. Como $c \notin \mathcal{C}_0$, então $c_0 \notin \omega(c)$. Se algum outro ponto de $\mathcal{C}_0 = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ pertencer à $\omega(c)$, digamos $c_1 \in \omega(c)$, então

$$c_0 \in \omega(c_1) \subset \omega(c),$$

logo $c_0 \in \omega(c)$. Concluimos que \mathcal{C}_0 é disjunto de $\omega(c)$, para todo $c \in \text{Crit}'(f) \setminus \mathcal{C}_0$.

Assim se tomamos $r_0 > 0$ o suficientemente pequeno e dado $c \in \text{Crit}(f)$ existe $n \geq 1$ tal que $f^n(c) \in B(\mathcal{C}_0, r_0)$, então $c \in \mathcal{C}_0$.

Fixemos uma órbita periódica \mathcal{O} de período maior ou igual a dois, que seja disjunta de $\text{Crit}'(f)$. Existe um m_0 tal que, se $W \subset \hat{\mathbb{C}}$ é um disco topológico disjunto de \mathcal{O} ; $K \subset W$ é um compacto e $W \setminus K$ é um anel com módulo maior que o igual que m_0 , então $\text{diam}(K) < r_*$ e para cada $x \in K$ existe um $r \in (0, r_*)$ tal que $K \subset B(x, \kappa r)$ e $B(x, r) \subset W$.

Seja n um número inteiro suficientemente grande para que $2^n > N$. Por hipótese, podemos escolher um par bom tão pequeno quanto quisermos com um módulo tão grande quanto desejamos. Seja (\hat{V}, V) um par bom tal que \hat{V} seja disjunto de \mathcal{O} , que $\hat{V} \subset B(\text{Crit}'(f), r_0)$ e com $\text{mod}(\hat{V}, V) \geq 3\widehat{\ell_{\max}(f)}^n m_0$.

Podemos observar que qualquer pull-back W de \hat{V} é disjunto de \mathcal{O} ; se não fosse este o caso, então existiria um $z \in W \cap \mathcal{O}$, logo $f(z)$ pertenceria a \mathcal{O} e \hat{V} , o que contradiz o facto de tais conjuntos serem disjuntos.

1. Seja \mathcal{C}'_0 o conjunto dos pontos expostos de \mathcal{C}_0 . Tomaremos $c_0 \in \mathcal{C}'_0$.

Vamos construir, por indução, uma sequência de pares bons $((\hat{V}_n, V_n))_{n \geq 0}$ de f que sejam relativos a \mathcal{C}'_0 da seguinte forma:

- Para cada $c \in \mathcal{C}'_0$ denotaremos por \hat{V}_0^c (respectivamente, V_0^c) a componente conexa de \hat{V} (respectivamente, V) que contém c e definimos

$$\hat{V}_0 := \bigcup_{c \in \mathcal{C}'_0} \hat{V}_0^c \quad \text{e} \quad V_0 := \bigcup_{c \in \mathcal{C}'_0} V_0^c.$$

Como \hat{V}_0 é subconjunto de \hat{V} e V_0 é subconjunto de V , é claro que (\hat{V}_0, V_0) é um par bom de f relativo a \mathcal{C}'_0 .

- Suponhamos que, para $n \geq 0$, o par bom (\hat{V}_n, V_n) está bem definido. Como a órbita de cada $c \in \mathcal{C}'_0$ se acumula em c_0 , existe um inteiro $m \geq 1$ tal que $f^m(c) \in \hat{V}_n$. Denotaremos $m_n(c)$ o primeiro inteiro que satisfaz $f^{m_n(c)}(c) \in \hat{V}_n$ e denotamos \hat{V}_{n+1}^c (resp V_{n+1}^c) ao pull-back de \hat{V}_n (resp V_n) por $f^{m_n(c)}$ que contém c .
- Podemos observar que

$$f^{m_n(c)}(\overline{V_{n+1}^c}) \subset \overline{f^{m_n(c)}(V_{n+1}^c)} \subset \overline{V_n} \subset \hat{V}_n,$$

implica que

$$\overline{V_{n+1}^c} \subset \hat{V}_{n+1}^c.$$

- É claro que $\hat{V}_{n+1}^c \cap V_n \neq \emptyset$, pois c pertence a ambos os conjuntos. Suponhamos que existe um $y \in \hat{V}_{n+1}^c \setminus V_n$. Como \hat{V}_{n+1}^c é conexo, existe um caminho que conecta y e com c , logo deve existir um $z \in \partial V_n$ tal que $z \in \hat{V}_{n+1}^c$. Assim, $f^{m_n(c)}(z) \in \hat{V}_n$, o que contradiz o facto de (\hat{V}_n, V_n) ser um par bom de f relativo a \mathcal{C}'_0 . Portanto, temos que $\hat{V}_{n+1}^c \subset V_n$.
- Finalmente, podemos definir

$$\hat{V}_{n+1} := \bigcup_{c \in \mathcal{C}'_0} \hat{V}_{n+1}^c \quad \text{e} \quad V_{n+1} := \bigcup_{c \in \mathcal{C}'_0} V_{n+1}^c,$$

o qual será um par bom para f relativo a \mathcal{C}'_0 .

2. Seja $n \geq 1$ dado e seja (\hat{V}_n, V_n) o par bom de f relativo a \mathcal{C}'_0 correspondente.

- Suponhamos que f não tem conexões críticas. Então temos que $f(c) \in f(\hat{V}_n^c)$ não é um ponto crítico. Portanto, podemos encontrar uma vizinhança U de $f(c)$ onde $f^{m_n(c)-1}$ é injetiva. Assim, temos que $f^{m_n(c)-1}$ é univalente em $f(\hat{V}_n^c)$.
- No caso de f ter conexões críticas, pode acontecer que $f^{m_n(c)-1}$ não seja univalente em $f(\hat{V}_n^c)$. Mas, neste caso, $f^{m_n(c)-1}$ seria uma função unicrítica, e este ponto está em \mathcal{C}'_0 .
- Em qualquer um dos casos acima referidos, teríamos que $f^{m_n(c)}$ não tem pontos críticos em $\hat{V}_{n+1}^c \setminus V_{n+1}^c$. Além disso, o grau de $f^{m_n(c)}$ em \hat{V}_n é o mesmo que o grau de $f^{m_n(c)}$ em V_n .

3. Seja $m_0 = 0$ e para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ seja $c_j \in \mathcal{C}'_0$ e m_j tal que $f^{m_j}(\hat{V}_n^{c_0}) = \hat{V}_{n-j}^{c_j}$.

Seja $d_0 = 1$ e para cada $j \in \{0, \dots, n-1\}$ denotamos por d_j o grau de $f^{m_n-m_j} : \hat{V}_{n-j}^{c_j} \rightarrow \hat{V}_0^{c_n}$. Assim, o grau de $f^{m_n-m_j} : V_{n-j}^{c_j} \rightarrow V_0^{c_n}$ é d_j e para cada $j \in \{0, \dots, n-1\}$ temos que

$$2d_j \leq d_{j+1} \leq \widehat{\ell_{\max}}(f)d_j.$$

Como cada d_j pode ser no mínimo 2 e no máximo $\widehat{\ell_{\max}}(f)$, temos que $2^n \leq d_n \leq \widehat{\ell_{\max}}(f)^n$. Além disso, existe um $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que

$$N \leq d_n/d_j \leq \widehat{\ell_{\max}}(f)N.$$

Como $f^{m_n-m_j} : \hat{V}_{n-j}^{c_j} \rightarrow \hat{V}_0^{c_n}$ tem grau $d_j \leq \widehat{\ell_{\max}}(f)^j$ e não possui pontos críticos em $\hat{V}_{n-j}^{c_j} \setminus \overline{V_{n-j}^{c_j}}$, temos que

$$\text{mod}(\hat{V}_{n-j}^{c_j}, V_{n-j}^{c_j}) = d_j^{-1} \quad \text{mod}(\hat{V}_0^{c_n}, V_0^{c_n}) \geq 3m_0 \widehat{\ell_{\max}}(f)^{n-j}.$$

Agora, seja \tilde{V} um disco topológico compacto contido em $\hat{V}_{n-j}^{c_j}$, tal que

$$\overline{V_{n-j}^{c_j}} \subset \tilde{V}, \quad \text{mod}(\hat{V}_{n-j}^{c_j}, \tilde{V}) \geq m_0 \widehat{\ell_{max}(f)^{n-j}} \quad \text{e} \quad \text{mod}(\tilde{V}, V_{n-j}^{c_j}).$$

Pela escolha de m_0 , temos que existe um $r \in (0, r_*)$ tal que $V_{n-j}^{c_j} \subset B(c_j, \kappa r)$ e $B(c_j, r) \subset \tilde{V} \subset \hat{V}_{n-j}^{c_j}$.

Seja \tilde{B} o pull-back de \tilde{V} por f^{m_j} que contém a c_0 . Analogamente, sejam \hat{U} e U os pull-backs de $B(c_j, \kappa r)$ e $B(c_j, r)$ por f^m que contém c_0 , respectivamente. Como o grau de $f^{m_j} : \hat{V}_n^{c_0} \rightarrow \hat{V}_{n-j}^{c_j}$ é menor ou igual a $\widehat{\ell_{max}(f)^{n-j}}$, então segue-se que $\text{mod}(\hat{V}_n^{c_0}; \tilde{B}) \geq m_0$.

Novamente, pela escolha de m_0 , temos que $\text{diam} \hat{U} \leq \text{diam}(\tilde{B}) \leq r_*$. Como $V_n^{c_0} \subset U \subset \hat{U} \subset \hat{V}_n^{c_0}$ e como o grau de $f^{m_j} : \hat{V}_n^{c_0} \rightarrow \hat{V}_{n-j}^{c_j}$ é igual a d_n/d_j e não tem pontos críticos em $\hat{V}_n^{c_0} \setminus \overline{V_n^{c_0}}$, a conclusão do lema é válido para esta escolha de r e para $c = c_j$ e $m = m_j$.

□

5.2 Demonstração do Teorema A

Estamos prontos para dar uma demonstração do Teorema 5.1 (Teorema A). Esta demonstração que apresentaremos é a mesma de [20], porém bem mais detalhada, demonstrando diversas passagens que foram apenas enunciadas (sem demonstração) na prova original.

Demonstração. A implicação de que a medida de entropia máxima de uma função semi-hiperbólica racional é uma medida duplicadora em seu conjunto de Julia foi provada por Haïssinsky e Pilgrim, como mencionado na referência “Coarse expanding conformal dynamics” (2009) de Haïssinsky e Pilgrim [8].

Portanto, resta-nos mostrar que, se f é uma função racional de grau maior ou igual a dois, cuja medida de entropia máxima é duplicadora em seu conjunto de Julia, então ela é semi-hiperbólica.

Seja f uma função racional de grau maior ou igual a dois. Seja ρ_f sua medida de entropia maximal, e sejam $r_* > 0$ e $C_* > 0$ as constantes associadas à sua propriedade duplicadora, ou seja,

$$\rho_f(B(x, 2r)) \geq C_* \rho_f(B(x, r)),$$

sempre que $x \in J(f)$ e $0 < r < r_*$.

Em [23] é provado que f é semi-hiperbólica se não tem pontos periódicos parabólicos nem pontos críticos recorrentes no conjunto de Julia.

Pelo Lema 2.1 e pelo fato de que ρ_f tem suporte em $J(f)$, existem constantes $C > 0$ e $\alpha > 0$ tal que, para um $r > 0$ suficientemente pequeno e cada $x \in J(f)$, temos que $\rho(B(x, r)) \geq Cr^\alpha$. Assim, a condição do Teorema 4 é satisfeita e, portanto, f cumpre com a condição TCE. Consequentemente, segue-se que f não possui pontos periódicos parabólicos, visto que, quando f é TCE, toda órbita fechada no conjunto de Julia é uniformemente repulsora. Resta provar apenas que f não possui pontos críticos recorrentes em seu conjunto de Julia.

Suponha, por contradição, que f tem um ponto crítico recorrente $c_0 \in J(f)$. Como foi mencionado anteriormente em (Obs 1), o conjunto $J(f)$ é uniformemente perfeito. Logo, sua medida de entropia máxima ρ_f satisfaz a hipótese do Lema 2.3. Sejam $\eta_1 > 1$ e $r_1 > 0$ as constantes dadas pelo Lema 2.3. Além disso, sejam $M > 0$ e $\delta > 0$ as constantes dadas pelo Teorema 3.30.

Afirmção 1: podemos reduzir $r_* > 0$, se necessário, e assumir que $r_* < \delta$, e que para quaisquer $r \in (0, r_*]$, $\epsilon \in (0, 1)$ e $x \in \hat{\mathbb{C}}$, temos

$$\left| \text{mod}(B(x, r) \setminus \overline{B(x, \epsilon r)}) + \ln(\epsilon) \right| < 1/10.$$

Com efeito, a métrica esférica

$$ds = \frac{2|dz|}{1 + |z|^2}$$

é localmente aproximada pelo produto da métrica euclidiana por uma constante local. Isso segue da continuidade da função

$$\gamma(z) = \frac{2}{1 + |z|^2}.$$

Para fixar as idéias, suponhamos r seja suficientemente pequeno de modo que $ds \approx C_0|dz|$ e $B(x, r)$ seja bem próximo do conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} : C_0|z - x| < r\}.$$

Então $B(x, r) \setminus \overline{B(x, \epsilon r)}$ é aproximadamente o conjunto

$$\begin{aligned} A_x &= \{z \in \mathbb{C} : |z - x| < r/C_0 \text{ e } |z - x| > \epsilon r/C_0\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} : \frac{\epsilon r}{C_0} < |z - x| < \frac{r}{C_0}\} \end{aligned} .$$

A função

$$\varphi(z) = \frac{C_0}{\epsilon r}(z - x)$$

é um automorfismo conforme de \mathbb{C} que leva o disco que consiste dos pontos z tais que $|z - x| < \frac{\epsilon r}{C_0}$ no disco unitário \mathbb{D} ; a imagem de A_x por φ é

$$A\left(\frac{1}{\epsilon}\right) = \left\{z : 1 < |z| < \frac{1}{\epsilon}\right\}.$$

Assim,

$$\text{mod}(A_x) = \text{mod}(A(1/\epsilon)) = \ln(1/\epsilon) = -\ln \epsilon.$$

Concluimos que o módulo de $B(x, r) \setminus \overline{B(x, \epsilon r)}$, sendo aproximado pelo módulo de A_x , deve ser

$$\text{mod}(B(x, r) \setminus \overline{B(x, \epsilon r)}) \approx -\ln(\epsilon).$$

Usando a compacidade da esfera de Riemann podemos escolher um $r_* > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\left| \text{mod}(B(x, r) \setminus \overline{B(x, \epsilon r)}) + \ln(\epsilon) \right| = \left| \text{mod}(B(x, r) \setminus \overline{B(x, \epsilon r)}) - (-\ln(\epsilon)) \right| < \frac{1}{10},$$

sempre que $0 < r < r_*$ e $\epsilon \in (0, 1)$.

Isso demonstra a Afirmação 1.

Agora sejam $k, \ell, N \geq 0$ inteiros tais que

- $2^k \geq M$.
- $2^\ell > C_*^k$.
- $2^{N/2} \leq \eta_1^\ell < 2^{N+1}/2$

Afirmção 2: Tomando η_1 suficientemente grande podemos assumir que $N \geq 2$.

De fato, recordemos a propriedade que define $\eta_1 > 1$ é a de ser uma constante para a qual

$$\rho_f(B(x, \eta_1 r)) \geq 2\rho_f(B(x, r))$$

sempre que $r \in (0, r_1)$ e $x \in J(f)$, onde ρ_f é a medida de entropia máxima de f . Fica claro que podemos sempre aumentar o valor de η_1 . Notemos que se $\eta_1 \rightarrow \infty$, então $\eta_1^\ell \rightarrow \infty$, e de $\eta_1^\ell < 2^{(N+1)/2}$ segue que N também tende para infinito. Em particular, podemos tomar η_1 suficientemente grande de modo que $N \geq 2$.

Como f satisfaz a condição TCE, temos que f tem pares bons de diâmetro arbitrariamente pequenos com módulo arbitrariamente grande [18, Prop 3.2]. Assim, f cumpre com a hipóteses do Lema 5.2. Portanto, para N e c_0 como acima, e tomando

$$r_* = \delta \quad \text{e} \quad \kappa = \eta_1^{-(1+10\widehat{\ell}_{\max}(f))\ell}$$

existem \hat{U}, U, A, m, r, c dados pelo Lema 5.2.

Seja $r_0 := \kappa r$. Pelo Lema 5.2, temos que $A = \hat{U} \setminus U$, onde \hat{U} é a componente conexa de $f^{-m}(B(c, r))$ que contém a c_0 , e U é a componente conexa de $f^{-m}(B(c, r_0))$ que contém a c_0 . Além disso, $\hat{U} \setminus U$ é um anel e a aplicação $f^m : A \rightarrow B(c, r) \setminus \overline{B(c, r_0)}$ é um recobrimento que possui o mesmo grau de $f^m : U \rightarrow B(c, r_0)$, sendo que todos os pontos críticos de $f^m : \hat{U} \rightarrow B(c, r)$ estão em U . Desta forma, considerando-se a restrição de f^m ao conjunto \hat{U} , vemos que a pré-imagem do anel $B(c, r) \setminus \overline{B(c, r_0)}$ é A , bem como a pré-imagem de $B(c, r_0)$ é U . Disso segue que se $\Omega \subset B(c, r)$ for qualquer região contendo $B(c, r_0)$, então qualquer componente conexa da pré-imagem de Ω por $f^m|_{\hat{U}}$ deve conter U , o que faz com que exista somente uma componente conexa da pré-imagem. Em particular, concluímos o seguinte: seja

$$r_1 = \eta_1^{(1+5\widehat{\ell}_{\max}(f))\ell} r_0 = \eta_1^{(-5\widehat{\ell}_{\max}(f))\ell} r > r_0.$$

Então $f^{-m}(B(c, r_1))$ possui uma única componente conexa em \hat{U} . De forma análoga, se tomamos $r_2 = \eta_1^{(5\widehat{\ell}_{\max}(f))\ell} r_0 = \eta_1^{-(1+5\widehat{\ell}_{\max}(f))\ell} r > r_0$, temos que $f^{-m}(B(c, r_2))$ possui uma única componente conexa em \hat{U} .

Vamos denotar tais componentes conexas como \hat{B} e B respectivamente. É claro que f^m tem o mesmo grau em U, \hat{U}, B, \hat{B} .

Por (4.3),

$$\rho_f(\hat{B}) = \frac{D}{\text{grau}(f)^m} \rho_f(f^m(\hat{B})) \quad \text{e} \quad \rho_f(B) = \frac{D}{\text{grau}(f)^m} \rho_f(f^m(B)).$$

Portanto,

$$\frac{\rho_f(\hat{B})}{\rho_f(B)} = \frac{\rho_f(f^m(\hat{B}))}{\rho_f(f^m(B))} \quad (5.1)$$

Agora, usando item 2 do Lema 2.3 indutivamente temos que

$$\begin{aligned} \rho_f(f^m(\hat{B})) &= \rho_f(B(c, r_1)) \\ &= \rho_f(B(c, \eta_1^{(1+5\ell_{\max}(f))\ell} r_0)) \\ &= \rho_f(B(c, \eta_1^\ell \eta_1^{(5\ell_{\max}(f))\ell} r_0)) \\ &\geq 2^\ell \rho_f(B(c, \eta_1^{(5\ell_{\max}(f))\ell} r_0)) \\ &= 2^\ell \rho_f(B(c, r_2)) \\ &= 2^\ell \rho_f(f^m(B)) > C_*^k \rho_f(f^m(B)). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Agora precisaremos usar alguns fatos sobre o grupo de isometrias da esfera.

Observação sobre o grupo $SO(3)$. Nem toda transformação de Möbius é uma isometria de $\hat{\mathbb{C}}$ com relação à métrica esférica

$$ds = \frac{2|dz|}{1 + |z|^2}.$$

De fato, o grupo de isometrias da esfera de Riemann pode ser identificado com o grupo $SO(3)$, o qual consiste de todas as rotações do espaço tridimensional em torno de uma reta que passa pela origem. Todos os elementos de $SO(3)$ são transformações de Möbius e a função $1/z$ pertence à $SO(3)$. O grupo $SO(3)$ é bem “menor” que o grupo das transformações de Möbius.

Um fato interessante que ocorre com isometrias é que se $f \in SO(3)$ e $f(a) = b$, então f leva qualquer família de círculos concêntricos em a (com respeito a métrica esférica ds) numa outra família de círculos concêntricos em b (com respeito à ds).

(Fim da observação).

Como a fronteira de \mathbb{D} na esfera é o equador e $0 \in \mathbb{D}$ corresponde ao pólo sul, existem uma isometria φ_0 e $\lambda > 0$, tais que a transformação de Möbius $\varphi_1(z) = \varphi_0(\lambda z)$ leva 0 em c e o disco \mathbb{D} em $B(c, r_2)$. Usando a projeção estereográfica, vemos que a família de círculos $|z| = R$ no plano corresponde à uma família de círculos na esfera, todos eles concêntricos no pólo sul, com relação à métrica esférica. Disso segue que φ_1 leva a família de círculos $|z| = R$ numa família de círculos com respeito à métrica esférica, todos eles centrados em c . Este fato, aparentemente supérfluo, é todavia fundamental no cálculo das próximas desigualdades utilizando módulo de anéis.

Afirmção 3. $B(c, r_1) \subset \varphi_1(\{z \in \mathbb{C} : |z| < \eta_1^\ell \exp(1/10)\}) \subset \varphi_1(\{z : |z| < 2^N\})$.

(Observe que a noção de bola não é a euclidiana, mas sim aquela que provém da métrica esférica.)

De fato, sabemos que φ_1 leva \mathbb{D} em $B(c, r_2)$. Consideremos o anel

$$A_1 = B(c, \eta_1^\ell r_2) \setminus \overline{B(c, r_2)}.$$

Pelo que vimos anteriormente,

$$|\text{mod}(A_1) - \ln(\eta_1^\ell)| < \frac{1}{10}.$$

Seja $B_1 = \varphi_1^{-1}(A_1)$. Logo $B_1 = \{z : 1 < |z| < R_1\}$ para algum R_1 . Como φ_1 é biholomorfa, segue que $\text{mod}(B_1) = \text{mod}(A_1)$, visto que mod é um invariante conforme. Assim,

$$|\ln(R_1) - \ln(\eta_1^\ell)| < \frac{1}{10}$$

de onde segue que

$$\ln(R_1) < \ln(\eta_1^\ell) + \frac{1}{10}$$

e

$$R_1 < \eta_1^\ell \exp(1/10).$$

Concluimos que

$$\varphi_1^{-1}(B(c, r_1)) \subset \{z : |z| < \eta_1^\ell \exp(1/10)\}.$$

Equivalentemente,

$$B(c, r_1) \subset \varphi_1(\{z : |z| < \eta_1^\ell \exp(1/10)\}).$$

Segue de $\eta_1^\ell \exp(1/10) \leq 2^{(N+1)/2} \exp(1/10) < 2^N$ que

$$B(c, r_1) \subset \varphi_1(\{z : |z| < \eta_1^\ell \exp(1/10)\}) \subset \varphi_1(\{z : |z| < 2^N\}).$$

Isso termina a demonstração da Afirmção 3.

Este argumento envolvendo módulo de anéis relacionados por φ_1 é repetido mais vezes (implicitamente) logo a seguir.

Usando as desigualdades $\eta_1^\ell \geq 2^{N/2}$ e $\widehat{\eta_1^{\ell \max(f)}} \geq e^{1/10}$, temos que

$$\begin{aligned} \widehat{\eta_1^{\ell \max(f)}} &\geq e^{1/10} \\ \widehat{\eta_1^{5\ell \max(f)}} &\geq \widehat{\eta_1^{4\ell \max(f)}} e^{1/10} \\ &\geq (\eta_1^{4\ell})^{\widehat{\ell \max(f)}} e^{1/10} \\ &\geq (2^{2N})^{\widehat{\ell \max(f)}} e^{1/10} \\ &\geq (2^N)^{\widehat{\ell \max(f)}} e^{1/10}. \end{aligned}$$

Logo $\eta_1^{-5\widehat{\ell}_{\max}(f)} e^{1/10} \leq (2^{-N})^{\widehat{\ell}_{\max}(f)}$, e daí

$$B(c, r_0) \subset \varphi_1(\{z : |z| < \eta_1^{-5\widehat{\ell}_{\max}(f)} e^{1/10}\}) \subset \varphi_1(\{z : |z| < 2^{-N\widehat{\ell}_{\max}(f)}\}).$$

Como $\eta_1^{1+5\widehat{\ell}_{\max}(f)} \geq 4^N \widehat{\ell}_{\max}(f) e^{1/10}$, temos que

$$B(c, r) \supset \varphi_1(\{z : |z| < \eta_1^{(1+5\widehat{\ell}_{\max}(f))\ell} e^{-1/10}\}) \supset \varphi_1(\{z : |z| < 4^N \widehat{\ell}_{\max}(f)\}).$$

Desta forma, provamos que

$$f^m(\hat{B} \setminus B) = f^m(\hat{B}) \setminus f^m(B) = B(c, r_1) \setminus B(c, r_2) \subset \varphi_1(\{z : |z| < 2^N\}) \setminus \varphi_1(\mathbb{D}) = \varphi_1(A(1, 2^N)).$$

Logo,

$$f^m(\hat{B} \setminus B) \subset \varphi_1(A(1, 2^N)).$$

Analogamente,

$$\varphi_1(A(2^{-N\widehat{\ell}_{\max}(f)}, 4^{N\widehat{\ell}_{\max}(f)})) \subset B(c, r) \setminus \overline{B(c, r_0)} = f^m(A).$$

Como o grau de $f^m : A \rightarrow B(c, r) \setminus \overline{B(c, r_0)}$ é pelo menos N e no máximo $\widehat{\ell}_{\max}(f)N$, segue do Teorema 3.26 que

$$\frac{\ln\left(\frac{4^{N\widehat{\ell}_{\max}(f)}}{2^{-N\widehat{\ell}_{\max}(f)}}\right)}{N\widehat{\ell}_{\max}(f)} \leq \text{mod}(A) \leq \frac{\ln\left(\frac{4^{N\widehat{\ell}_{\max}(f)}}{2^{-N\widehat{\ell}_{\max}(f)}}\right)}{N}.$$

Portanto,

$$\frac{3N\widehat{\ell}_{\max}(f)}{N\widehat{\ell}_{\max}(f)} \ln(2) \leq \text{mod}(A) \leq \frac{3N\widehat{\ell}_{\max}(f)}{N} \ln(2).$$

De onde segue que

$$3 \ln(2) \leq \text{mod}(A) \leq 3\widehat{\ell}_{\max}(f) \ln(2)$$

e

$$\ln(8) \leq \text{mod}(A) \leq \ln(2^{3\widehat{\ell}_{\max}(f)}).$$

Analogamente, mostra-se que

$$\text{mod}(\hat{B} \setminus B) \leq \ln(2).$$

Concluimos que existe uma aplicação univalente $\varphi : A(1, 8) \rightarrow A$ tal que $\hat{B} \setminus \overline{B} \subset \varphi(2, 4)$. (Isso segue da definição de módulo: se A possui módulo $\ln(R)$, então existe uma aplicação univalente $\varphi : A(1, R) \rightarrow A$).

Usando o Lema 3.30, temos que existe um $r' > 0$ tal que

$$B(c_0, r') \subset B \subset \hat{B} \subset B(c_0, Mr') \subset B(c_0, 2^k r').$$

Usando (5.2) e (5.1), temos que

$$\rho_f(B(c_0, r')) \leq \rho_f(B) < C_*^{-k} \rho_f(\hat{B}) \leq C_*^{-k} \rho_f(B(c_0, 2^k r')).$$

Isto contradiz a propriedade duplicadora de ρ_f em $J(f)$. Logo, f não pode ter pontos críticos recorrentes em $J(f)$ e mostramos que f é semi-hiperbólica.

A demonstração está completa. □

Referências Bibliográficas

- [1] L. V. Ahlfors. *Conformal invariants: topics in geometric function theory*, volume 371. American Mathematical Soc., 2010.
- [2] D. Beliaev. *Conformal maps and geometry*. World Scientific, 2020.
- [3] R. E. Bowen. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, volume 470. Springer Science & Business Media, 2008.
- [4] L. Carleson and T. W. Gamelin. *Complex dynamics*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [5] A. Douady, J. H. Hubbard, and P. Lavaurs. *Etude dynamique des polynômes complexes*. Université de Paris-Sud, Dép. de Mathématique Orsay, France, 1984.
- [6] K. Falconer. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons, 2004.
- [7] M. Gromov. On the entropy of holomorphic maps. *Enseign. Math*, 49(3-4):217–235, 2003.
- [8] P. Haïssinsky and K. M. Pilgrim. Coarse expanding conformal dynamics. 2009.
- [9] A. Hinkkanen. Julia sets of rational functions are uniformly perfect. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 113, pages 543–559. Cambridge University Press, 1993.
- [10] T. Kawahira and M. Kisaka. Julia sets appear quasiconformally in the Mandelbrot set. *arXiv preprint arXiv:1804.00176*, 2018.
- [11] T. Lei. Similarity between the Mandelbrot set and Julia sets. *Communications in mathematical physics*, 134:587–617, 1990.
- [12] A. F. A. Lopes and R. Mañé. An invariant measure for rational maps. *Bol. Soc. Bras. Math*, 14:45–62, 1983.

- [13] R. Mañé. On the uniqueness of the maximizing measure for rational maps. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society*, 14(1):27–43, 1983.
- [14] C. T. McMullen. *Complex dynamics and renormalization*. Number 135. Princeton University Press, 1994.
- [15] N. Mihalache. Two counterexamples in rational and interval dynamics. *arXiv preprint arXiv:0810.1474*, 2008.
- [16] J. Milnor. *Dynamics in One Complex Variable.(AM-160):(AM-160)-*, volume 160. Princeton University Press, 2011.
- [17] M. Misiurewicz and F. Przytycki. Topological entropy and degree of smooth mappings. 1977.
- [18] F. Przytycki and J. Rivera-Letelier. Statistical properties of topological collet-eckmann maps. In *Annales scientifiques de l’Ecole normale supérieure*, volume 40, pages 135–178. Elsevier, 2007.
- [19] F. Przytycki, J. Rivera-Letelier, and S. Smirnov. Equivalence and topological invariance of conditions for non-uniform hyperbolicity in the iteration of rational maps. *Inventiones mathematicae*, 151(1):29–63, 2003.
- [20] J. Rivera-Letelier. The maximal entropy measure detects non-uniform hyperbolicity. *Mathematical research letters*, 17:851–866, 2010.
- [21] M. Shishikura. Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets. *Annals of Mathematics*, 147(2):225–267, 1998.
- [22] D. P. Sullivan and W. P. Thurston. Extending holomorphic motions. 1986.
- [23] Y. Yin. *Julia sets of semi-hyperbolic rational maps*, volume 20(5). 1999.

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Programa de pós-graduação em Matemática

Av. Milton Santos, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA

CEP: 40170-110

<<http://www.pgmat.ufba.br>>