



Universidade Federal da Bahia  
Instituto de Matemática e Estatística  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Dissertação de Mestrado



## O Teorema de Slice

Gabriella Conceição e Silva

**Salvador- Bahia**

8 de janeiro de 2024

# O Teorema de Slice

Gabriella Conceição e Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Benigno Oliveira Alves.

**Salvador-Bahia**

8 de janeiro de 2024

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária de  
Ciências e Tecnologias Prof. Omar Catunda, SIBI – UFBA.

S586 Silva, Gabriella Conceição e  
Teorema de Slice / Gabriella Conceição e Silva. – Salvador,  
2020

54f.

Orientadora: Prof. Dr. Benigno Oliveira Alves.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Bahia.  
Instituto de Matemática, Salvador, 2020.

1. Matemática. 2. Lie. Teorema. I. Alves, Benigno Oliveira.  
II. Universidade Federal da Bahia. III. Título.

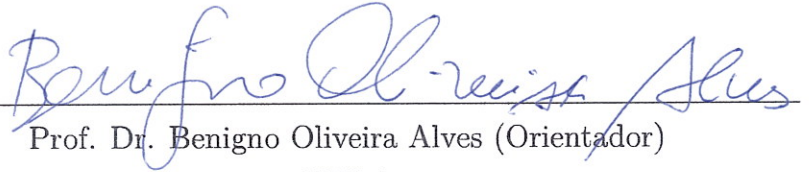
CDU 512.81

# O Teorema de Slice

Gabriella Conceição e Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

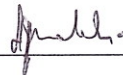
## Banca examinadora:



---

Prof. Dr. Benigno Oliveira Alves (Orientador)

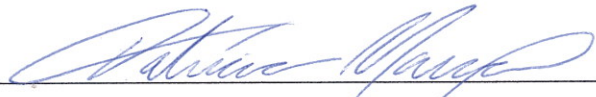
UFBA



---

Prof. Dr. André Luís Godinho Mandolesi

UFBA



---

Prof. Dra. Patrícia Marçal

USP

# Agradecimentos

Agradeço a Deus, por ter permitido por meio de sua graça ultrapassar todos os obstáculos encontrados para elaboração deste trabalho. A minha querida mãe, que me incentivou a fazer a seleção em um momento onde eu só me preocupava com a sua saúde. Sempre esteve ao meu lado, me ajudando, torcendo e cobrando para ter o foco para concluir. Obrigada pelas palavras de carinho, obrigada por sempre lembrar da minha identidade e de que sou filha de um Deus que tudo pode. Ao meu pai, meu irmão. Principalmente ao meu noivo, Thiago, que me incentivou, cobrou, pegou muito no meu pé para que mantivesse o foco, sempre dizendo que eu era capaz, garantindo que estaria na torcida por mim. Muito obrigada!

A família Nobre Dantas, por acreditar em meu potencial, incentivando e até mesmo sonhando os meus sonhos. Cleuza, João, Luíza e Alice. Amo vocês. Não esquecendo de João Paulo e Isaac, amigos queridos.

A minha avó, tias, tios, primas e primos que sempre estão na arquibancada torcendo por mim. Em especial, ao pequeno Pedro, mesmo sendo tão pequeno, quando o mestrado se tornava pesado, era no seu sorriso e abraço que encontrava o cuidado de Deus. Meu companheiro, durante esses árduos anos de estudo. Isis, que ao me apresentar o pedal, me ajudou a controlar muitas das minhas crises de ansiedades que nesse período de mestrado e pandemia se tornaram intensas.

As amigas que ganhei de Deus, Rayanna e Tayná, sou imensamente grata por tê-las em minha vida. E também a todos amigos que me ajudaram nessa caminhada, Isabel, Jair, Gabriele, Mireli, Rafael.

Ao meu orientador Benigno Alves, muito obrigada pela paciência e palavras de incentivo. Por ouvir minhas dúvidas com carinho e não hesitar a explicar desde aquelas mais bobas.

A CAPES pelo apoio financeiro durante o curso.

"Porque sou eu que conheço os planos que tenho para vocês, diz o Senhor, planos de fazê-los prosperar e não de causar dano, planos de dar a vocês esperança e um futuro."

(Jeremias 29:11)

# Resumo

Nosso objetivo neste trabalho é estudar o clássico e célebre Teorema de Slice. Provado inicialmente por Koszul, o Teorema de Slice diz que dada uma ação própria de um grupo de Lie em variedade existe um slice passando por cada ponto em  $M$ , ou seja, uma subvariedade transversal à órbita passando pelo ponto dado com algumas propriedades especiais. Esse teorema é uma ferramenta fundamental na Teoria dos grupos de transformações. Tal resultado permite reduzir o estudo de uma ação de grupo de Lie próximo a uma órbita ao estudo da geometria transversal à órbita.

**Palavras-chaves:** Grupo de Lie, ação própria e Slice.

# Abstract

Our goal in this work is to study the classic and celebrated Slice Theorem. Initially proven by Koszul, the Slice Theorem states that given a proper action of a Lie group on a manifold, there exists a slice passing through each point in  $M$ , i.e., a submanifold transversal to the orbit passing through the given point with some special properties. This theorem is a fundamental tool in the Theory of Transformation Groups. This result allows us to reduce the study of a Lie group action near an orbit to the study of the geometry transversal to the orbit.

**Keywords:** Lie Group, proper action and Slice.



# Sumário

<b>Sumário</b> .....	<b>6</b>
<b>Introdução</b> .....	<b>1</b>
<b>1 Conceitos Preliminares</b> .....	<b>2</b>
<b>1 Variedades Diferenciáveis</b> .....	<b>2</b>
1.1 Definição e Exemplos .....	2
1.2 Espaço tangente .....	4
1.3 Diferencial de Função, Teoremas da Função Inversa, da Imersão e Submersão .....	6
1.4 Subvariedades .....	8
1.5 Fibrado Tangente .....	9
1.6 Campos de vetores, Fluxo e colchete de Lie .....	10
1.7 Fibrado cotangente .....	13
1.8 Orientação .....	15
1.9 Formas diferenciais .....	16
1.10 Integração de formas diferenciais .....	19
<b>2 Geometria Riemanniana</b> .....	<b>21</b>
1 Métricas Riemannianas .....	21
2 Conexões Riemannianas .....	23
3 Geodésicas .....	25
<b>3 Grupos de Lie</b> .....	<b>29</b>
1 Definição e Exemplos .....	29
1.1 Métricas Bi-invariantes .....	30
1.2 Homomorfismos de Grupos de Lie .....	31
1.3 Subgrupos de Lie .....	32
1.4 Álgebras de Lie .....	33
<b>4 Ações de Grupos de Lie</b> .....	<b>35</b>
1 Ações de Grupos de Lie: Definições e Exemplos .....	35
2 Teorema de Slice .....	40
<b>Referências</b> .....	<b>46</b>

# Introdução

O objetivo da presente dissertação é estudar o clássico e célebre teorema de Slice. Provado inicialmente por Koszul, o teorema de Slice é uma ferramenta fundamental na teoria dos grupos de transformações. Tal resultado permite reduzir o estudo local de uma ação de grupo de Lie ao estudo da geometria transversal à órbita. Uma consequência importante é a existência de vizinhança tubular de uma órbita.

Grupo de Lie é, a grosso modo, um grupo que possui uma estrutura suave de variedade tal que as operações do grupo são aplicações suaves, vide definição [3.1](#). Tal conceito foi introduzido por Sophus Lie em 1870 para estudar propriedades de equações diferenciais. As aplicações são inúmeras, por exemplo, é usado no estudo de grupos de simetria e na invariância das Leis de movimento de Newton em referenciais inerciais.

Uma ação de um grupo de Lie  $G$  em uma variedade  $M$  é, a grosso modo, uma aplicação suave  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  que de certa forma preserva a operação do grupo, vide definição [4.1](#). Por exemplo, a aplicação que associa a cada matriz ortogonal de ordem 2 a rotação induzida em  $\mathbb{R}^2$ . A órbita da ação passando por  $p \in M$  é o conjunto  $G(p)$  de pontos que são aplicados a  $p$  por meio de um difeomorfismo  $\alpha_g$  com  $g \in G$ . No exemplo anterior, a órbita passando por  $p$  coincide com o círculo centrado na origem e raio  $\|p\|$ .

O slice de uma ação  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  em  $x_0 \in M$  é uma subvariedade mergulhada transversal à órbita  $G(x_0)$  com propriedades que capturam informações do comportamento das órbitas próximas de  $G(x_0)$ . Mais precisamente, se  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  é uma ação, um slice em  $x_0$  é uma subvariedade mergulhada  $S_{x_0}$  contendo  $x_0$  satisfazendo as seguintes propriedades:

1.  $T_{x_0}M = T_{x_0}G(x_0) \oplus T_{x_0}S_{x_0}$  e  $T_xM = T_xG(x) + T_xS_{x_0}$ ,  $\forall x \in S_{x_0}$ .
2.  $S_{x_0}$  é invariante por  $G_{x_0}$ , i.e, se  $x \in S_{x_0}$  e  $g \in G_{x_0}$ , então  $\alpha(g, x) \in S_{x_0}$ .
3. Se  $g \in G$  deixa  $S_{x_0}$  invariante (ou seja,  $\alpha(g, x) \in S_{x_0}, \forall x \in S_{x_0}$ ), então  $g \in G_{x_0}$ .

O teorema de Slice garante a existência de Slice para qualquer ação própria, Teorema [4.2](#)

Esta dissertação está organizada em quatro capítulos. No capítulo 1 e 2, estudaremos conceitos indispensáveis para o desenvolvimento dos demais capítulos. Apresentaremos tópicos de variedades diferenciáveis e geometria Rimaniana. No capítulo 3 introduziremos os grupos de Lie. E finalmente tendo definido os grupos de Lie, podemos falar a respeito das ações de grupos de Lie, definir ações próprias, para então enunciarmos teorema de Slice e demonstrá-lo, objetivo principal desse trabalho.

# 1 Conceitos Preliminares

Neste capítulo apresentaremos os tópicos de Variedades e Geometria Rimanniana. Ressaltamos que os tópicos a seguir tem por intuito realizar uma breve introdução e desenvolver ferramentas necessárias para compreensão dos conceitos básicos da teoria de Grupos de Lie e do Teorema de Slice.

## 1 Variedades Diferenciáveis

Intuitivamente uma variedade diferenciável é uma união de conjuntos deformados do  $\mathbb{R}^n$ . As variedades diferenciáveis permitem expandir conceitos do cálculo para estruturas mais gerais que o  $\mathbb{R}^n$ , por exemplo, noção de diferenciabilidade de funções, campos vetoriais, Teorema da Função Inversa. As referências aqui utilizadas serão [2] e [4].

### 1.1 Definição e Exemplos

**Definição 1.1** *Um espaço topológico  $M$  é uma variedade diferenciável de classe  $C^k$  e dimensão  $n$  se for Hausdorff com base enumerável e admitir uma estrutura diferenciável de classe  $C^k$ , ou seja, uma família  $\{U_i, \varphi_i\}$ , denominada atlas, onde  $\{U_i\}$  é uma cobertura por abertos de  $M$  e  $\varphi_i : V_i \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U_i \subset M$  é um homeomorfismo satisfazendo a seguinte condição: se  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , então*

$$\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$$

*é uma aplicação diferenciável de classe  $C^k$ , denominada função de transição.*

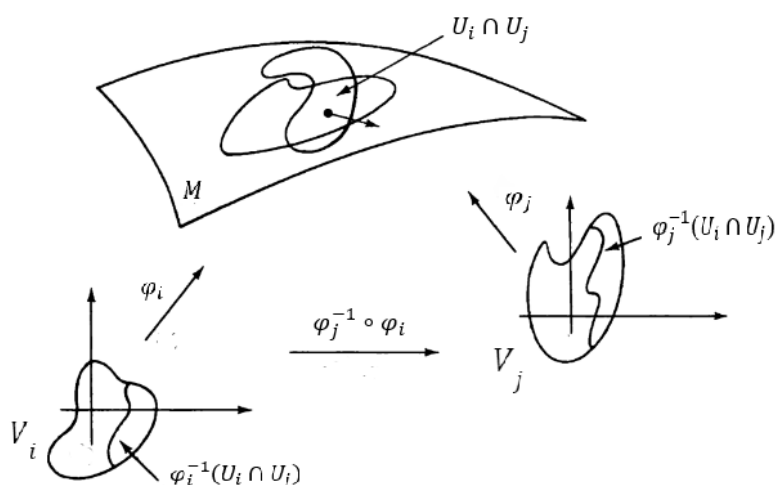


Figura 1 – Fonte: [2].

As aplicações  $\varphi_i$  e  $\varphi_j^{-1}$  são referidas como parametrização e carta local respectivamente.

**Exemplo 1.1** O espaço  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$  é trivialmente uma variedade suave de dimensão  $n$  que possui um atlas com apenas a identidade como parametrização.

**Exemplo 1.2** Superfícies parametrizadas do  $\mathbb{R}^3$  são variedades de dimensão 2, mais precisamente, a imagem de uma imersão  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  (ou seja,  $d\varphi_p$  é injetor para qualquer  $p \in U$ , sendo  $U$  aberto de  $\mathbb{R}^2$ ).

**Exemplo 1.3 (Gráfico de Função)** Dada função suave  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  seu gráfico  $G(f) := \{(p, f(p)); p \in U\}$  é uma variedade  $n - 1$  dimensional, que possui uma parametrização global  $\varphi^{-1} : U \rightarrow G(f)$ ,  $\varphi^{-1}(p) = (p, f(p))$ .

**Exemplo 1.4 (Esfera)** A esfera de raio  $r > 0$  é definida como o conjunto

$$S^n(r) = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2\}.$$

Uma estrutura diferenciável para  $S^n(r)$  dada pelas aplicações  $\varphi_k : \{(x_1, \dots, x_n); \sum_{i=1}^n x_i^2 < r\} \rightarrow S^n(r)$ ,

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{k-1}, \sqrt{r - \sum_{i=1}^k x_i^2}, x_k, \dots, x_n)$$

para  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

**Exemplo 1.5 (Superfície de revolução)** Dada curva suave e regular  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  com  $\gamma(t) = (r(t), 0, h(t))$  e  $r(t) > 0$  defina a aplicação  $\varphi : [a, b] \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$  por

$$\varphi(t, \theta) = (r(t)\cos(\theta), r(t)\sen(\theta), h(t)).$$

A imagem  $S = \text{Im}\varphi$  é uma variedade bidimensional (superfície) denominada superfície de revolução. Em particular, se  $\gamma(t) = (a + r\cos(t), 0, r\sen(t))$  para  $0 < r < a$ , então  $S$  é o toro de revolução.

**Exemplo 1.6 (Toro)** A imagem da aplicação  $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$  dada por

$$\varphi(x_1, x_2) = (e^{ix_1}, e^{ix_2})$$

é uma variedade suave de dimensão dois, cuja a estrutura diferenciável pode ser tomada como algumas restrições da aplicação  $\varphi$ . Essa variedade é difeomorfa ao toro de revolução e denotada por  $T^2$ .

**Exemplo 1.7 (Espaço Hiperbólico)** Em  $\mathbb{R}^{n+1}$  defina a aplicação bilinear simétrica não-degenerada

$$\langle x, y \rangle_1 = \sum_{i=1}^q x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1},$$

denominada métrica de Lorentz. O par  $\mathbb{L}^{n+1} = (\mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$  é um espaço de Lorentz, que é o espaço modelo da teoria da relatividade.

Agora defina o conjunto

$$\mathbb{H}^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, x \rangle_1 = -r^2 \text{ e } x_n > 0\}.$$

Verifica-se que  $\mathbb{H}^n$  é uma variedade suave. Considere  $B_1^n = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle \tilde{x}, x \rangle_1 < 1 \text{ e } x_n = 0\}$  e a aplicação

$$\varphi : B_1^n \rightarrow \mathbb{H}^n$$

que associa a cada ponto  $\tilde{x} \in B_1^n$  o único ponto na interseção de  $\mathbb{H}^n$  com a reta que liga  $-e_{n+1} = (0, \dots, 0, -1)$  a  $\tilde{x}$ . Mostre que  $\varphi$  é uma bijeção e que é um homeomorfismo se considerarmos em  $\mathbb{H}^n$  a topologia induzida de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Em particular,  $\varphi$  induz uma estrutura de variedade suave em  $\mathbb{H}^n$ .

Outra maneira de induzir uma estrutura de variedade diferenciável é definir a aplicação  $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  dada por  $\theta(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, \sqrt{r^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2})$  e notar que  $\mathbb{H}^n$  coincide com o gráfico de  $\theta$ .

## 1.2 Espaço tangente

Seja  $M$  uma variedade diferenciável  $n$ -dimensional. Um *vetor tangente* a  $M$  em  $p$  é uma derivação sobre  $\mathcal{D}_p(M)$  a álgebra das funções de  $M$  diferenciáveis em  $p$ , ou seja, é uma aplicação  $\mathbb{R}$ -linear

$$v : \mathcal{D}_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

que satisfaz a regra de Leibniz:

$$v(f \cdot g) = g(p)v(f) + f(p)v(g)$$

para  $f, g \in \mathcal{D}_p(M)$ . O conjunto dos vetores tangentes a  $M$  em  $p$  denotado por  $T_p M$  é denominado espaço tangente de  $M$  em  $p$ .

**Exemplo 1.8** Se  $M = \mathbb{R}^n$ , então os vetores tangentes  $v \in T_p M$  são da forma  $v = (p, v) = v_p$  com  $v \in \mathbb{R}^n$ . E nesse caso a derivação é a conhecida derivada direcional de funções diferenciáveis em  $\mathbb{R}^n$

$$v(f) = df_p(v) = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}.$$

Dados  $r \in \mathbb{R}$  e  $u, v \in T_p M$  definimos em  $T_p M$  naturalmente uma soma e uma multiplicação por escalar da seguinte forma:

1.  $(u + v)(f) := u(f) + v(f)$
2.  $(rv)(f) := r(v(f))$

para qualquer  $f \in \mathcal{D}_p(M)$ . Com essas operações  $T_pM$  é um espaço vetorial.

Dada uma carta  $\varphi : U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ , obtemos um isomorfismo de álgebras

$$\varphi^* : \mathcal{D}_p(M) \rightarrow \mathcal{D}_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^n)$$

definido por

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi^{-1},$$

ou seja,  $\varphi^*$  é um isomorfismo linear tal que  $\varphi^*(f \cdot g) = \varphi^*(f)\varphi^*(g)$ .

Agora considere a aplicação

$$\varphi_* : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$$

que associa a cada vetor tangente  $v \in T_pM$  o vetor tangente  $\varphi_*(v)$  definido por

$$\varphi_*(v)(\tilde{f}) = v(\tilde{f} \circ \varphi)$$

onde  $\tilde{f} \in \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ .

A aplicação  $\varphi_*$  é um isomorfismo linear cuja inversa associa a cada  $y \in T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$  o vetor  $\varphi_*^{-1}(y) \in T_pM$  definido por  $\varphi_*^{-1}(y)(f) = y(f \circ \varphi^{-1})$  para  $f \in \mathcal{D}_p(M)$ .

Como consequência da discussão acima, concluímos que  $T_pM$  é um espaço vetorial  $n$ -dimensional e  $\{\varphi_*^{-1}(e_1), \dots, \varphi_*^{-1}(e_n)\}$  é uma base, onde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é a base canônica de  $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ . Explicitamente, dada função  $f \in \mathcal{D}_p(M)$

$$(\varphi_*^{-1}(e_i))(f) = e_i(f \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$$

coincide com a  $i$ -ésima derivada parcial da função  $f \circ \varphi^{-1}$  em  $\varphi(p)$ . Por essa razão usaremos a notação

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p) := \varphi_*^{-1}(e_i).$$

Portanto dado  $v \in T_pM$  existem únicos escalares  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$  tais que

$$v = \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p).$$

Ou seja,  $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\}$  é uma base de  $T_pM$  canonicamente associada à carta local  $\varphi$ .

Existe uma interpretação física ou cinética muito útil do conceito de vetor tangente. Dada curva suave  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  o *vetor velocidade* de  $\gamma$  em  $t_0$  (ou *vetor tangente* a  $\gamma$  em  $t_0$ ) é a derivação

$$\begin{aligned} \gamma'(t_0) : \mathcal{D}_{\gamma(t_0)}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (f \circ \gamma). \end{aligned}$$

Pela Regra da Cadeia temos que

$$\begin{aligned}\gamma'(t_0)(f) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \gamma) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma) \\ &= d(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(\gamma(0))}((\varphi \circ \gamma)'(0)) = (\varphi \circ \gamma)'(0)(f \circ \varphi^{-1}) = v(f)\end{aligned}$$

onde  $v = \varphi_*^{-1}((\varphi \circ \gamma)'(0))$ . Consequentemente,  $\gamma'(t_0) \in T_{\gamma(t_0)}M$ . Reciprocamente, se  $v \in T_pM$ , existe uma curva  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  suave tal que  $\gamma(0) = p$  e  $v = \gamma'(0)$ . De fato, se  $y = \varphi_*(v) \in T_{\varphi(p)}M$  e  $\alpha(t) = \varphi(p) + yt$ , verifica-se que  $\gamma(t) = \varphi^{-1} \circ \alpha(t)$  satisfaz  $v = \gamma'(0)$ :

$$\gamma'(0)(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \varphi^{-1} \circ \alpha) = \alpha'(0)(f \circ \varphi^{-1}) = \varphi_*(v)(f \circ \varphi^{-1}) = v(f).$$

Em particular,  $v = \gamma'(0) = \varphi_*^{-1}(\alpha'(0))$ .

Agora suponha que  $\gamma : I \rightarrow M$  é uma curva diferenciável e

$$\alpha(t) = \varphi \circ \gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) = \sum_{i=1}^n x_i(t)e_i.$$

Então

$$\gamma'(0) = \varphi_*^{-1}(\alpha'(0)) = \sum_{i=1}^n x'_i(0)\varphi_*^{-1}(e_i) = \sum_{i=1}^n x'_i(0)\frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(0)).$$

**Exemplo 1.9** Para qualquer  $p \in \mathbb{R}^n$  segue que  $T_p\mathbb{R}^n = p \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Comumente identificamos  $T_p\mathbb{R}^n$  com  $\mathbb{R}^n$ , como nos cursos de cálculo.

**Exemplo 1.10** O espaço tangente a uma variedade produto  $M \times N$  em  $(p, q)$  é isomorfo a soma direta  $T_pM \oplus T_qN$ .

**Exemplo 1.11** O espaço tangente a esfera  $S^n(r)$  em  $p$  coincide (a menos de uma translação) com o subespaço ortogonal ao vetor posição  $p$  com respeito ao produto interno canônico de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

### 1.3 Diferencial de Função, Teoremas da Função Inversa, da Imersão e Submersão

Dada aplicação  $f : M^m \rightarrow N^n$  entre variedades de classe  $C^k$  e  $p \in M$  definimos a *aplicação diferencial* de  $f$  em  $p$  como a aplicação linear  $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$  que associa a cada  $v \in T_pM$  o vetor

$$df_p(v) = (f \circ \alpha)'(0),$$

onde  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  é curva tal que  $\alpha'(0) = v$ . Ou equivalentemente,

$$(df_p(v))g = v(g \circ f),$$

para qualquer  $g \in C^\infty(N)$ .

**Lema 1.1 (Regra da Cadeia)** *Se  $f : M \rightarrow N$  e  $g : N \rightarrow P$  são funções diferenciáveis em  $p$  e  $f(p)$  respectivamente, então  $g \circ f : M \rightarrow P$  é diferenciável em  $p$  e seu diferencial é dado por  $d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$ .*

Sejam  $(U, \varphi)$  e  $(V, \rho)$  sistemas de coordenadas respectivamente de  $M$  em torno de  $p$  e de  $N$  em torno de  $f(p)$ . Sejam  $\{\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\}$  e  $\{\frac{\partial}{\partial y_j}(f(p))\}$  bases de  $T_pM$  e  $T_{f(p)}N$  respectivamente dadas por seus sistemas de coordenadas. Considere a  $\tilde{f}(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \rho(V)$  e  $v = \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$  a representação local de  $f$  e  $v$  nessas coordenadas, com  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t)) \in \varphi(U)$  representação local de  $\alpha$ . Logo a representação local do vetor  $df_p(v)$  é

$$df_p(v) = \sum_{j=1}^n v(f_j) \frac{\partial}{\partial y_j}(f(x)) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \right) \frac{\partial}{\partial y_j}(f(p)) = \sum_{i=1}^m \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \frac{\partial(f(p))}{\partial y_j} \right] v_i.$$

A representação matricial de  $df_p$ , denominada matriz Jacobiana, com respeito às bases citadas acima é a matriz  $Jf(p) = [a_{ij}(p)] \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$  com entradas  $a_{ij}(p) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\varphi(p))$ .

Uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  é um *difeomorfismo* de classe  $C^k$  se for uma aplicação de classe  $C^k$  que possui uma aplicação inversa também de classe  $C^k$ . Dizemos que  $f$  é um *difeomorfismo local* se para todo  $p \in M$  existe vizinhança aberta  $U \subset M$  de  $p$  tal que  $f|_U : U \rightarrow f(U)$  é um difeomorfismo.

A função  $f(x) = x^2$  é diferenciável, mas não é bijetora. Já a função  $f(x) = x^3$  é uma bijeção diferenciável, porém sua inversa é a aplicação  $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ , que não é diferenciável em  $x = 0$ .

Existe alguma condição para que uma aplicação seja um difeomorfismo local? Se uma aplicação é um difeomorfismo local, pela regra da Cadeia, em cada ponto seu diferencial é um isomorfismo linear. A recíproca é um importante e fundamental resultado conhecido como Teorema da Função Inversa.

**Teorema 1.1 (da Função Inversa)** *Seja  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação de classe  $C^k$ . Se em  $p \in M$  o diferencial  $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$  é um isomorfismo linear, então existem  $U \subset M$  e  $V \subset N$  vizinhanças abertas de  $p$  e  $f(p)$  tais que  $f|_U : U \rightarrow V$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$ .*

Uma aplicação  $f : M^m \rightarrow N^n$  diferenciável é uma *imersão* em  $p \in M$  quando  $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$  é uma aplicação injetora, em particular  $m \leq n$ . Dizemos que  $f$  é uma *imersão* quando  $f$  é uma imersão em qualquer  $p \in M$ .

Por exemplo, a inclusão  $i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$  que associa a cada  $x \in \mathbb{R}^n$  o ponto  $(x, 0) \in \mathbb{R}^{n+k}$  é trivialmente uma imersão. O resultado abaixo é consequência do teorema da Função Inversa e afirma que localmente qualquer imersão é difeomorfa a uma inclusão.



**Teorema 1.2 (Forma Local das Imersões)** *Sejam  $f : M^m \rightarrow N^n$  aplicação de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) e  $x_0 \in U$  tal que  $df_{x_0}$  é uma aplicação linear injetora. Então existem sistemas de coordenadas de  $M$  e  $N$  em torno de  $p$  e  $f(p)$  tais que a representação local de  $f$  é da forma*

$$\tilde{f}(x) = (x, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n.$$

Uma aplicação  $f : M^m \rightarrow N^n$  diferenciável é uma *submersão* em  $p$  quando  $df_p : T_p M \rightarrow T_p N$  é uma aplicação sobrejetora, em particular  $m \geq n$ . Dizemos que  $f$  é uma *submersão* quando for uma submersão para qualquer  $p \in U$ .

Por exemplo, a projeção canônica  $\pi : \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  dada por  $\pi(x, y) = y$  é trivialmente uma submersão. O resultado abaixo também é um corolário do teorema da Função Inversa e afirma que localmente qualquer submersão é difeomorfa a uma projeção canônica.

**Teorema 1.3 (Forma Local das Submersões)** *Seja  $f : M^m \rightarrow N^n$  uma aplicação de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ). Se  $f$  é uma submersão em  $p_0$ , então existem sistemas de coordenadas em torno de  $p$  e  $f(p)$  tais que a representação local de  $f$  é da forma*

$$\tilde{f}(x, w) = w$$

com  $(x, w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ .

Os Teoremas Forma Local das Imersões e Submersões são teorema de posto máximo e podem ser sintetizados pelo Teorema do Posto.

## 1.4 Subvariedades

Seja  $f : M \rightarrow N$  uma função de classe  $C^k$ . Um valor  $q \in N$  é um valor regular se  $f$  é uma submersão em  $p \in f^{-1}(q)$ .

**Corolário 1.1** *Seja  $f : M^m \rightarrow N^n$  aplicação de classe  $C^k$ . Se  $q$  é valor regular, então  $f^{-1}(q)$  é uma subvariedade mergulhada de  $M$  de classe  $C^k$  e dimensão  $m - n$ . Além disso,  $T_p f^{-1}(q) = \text{Ker } df_p$  para qualquer  $p \in f^{-1}(q)$ .*

**Exemplo 1.12** *Superfícies de  $\mathbb{R}^3$  são subvariedades de codimensão 1 de  $\mathbb{R}^3$ .*

**Exemplo 1.13 (Esfera)** *A esfera  $S^n(r)$  de raio  $r > 0$  pode ser visto como pré-imagem do valor regular  $r^2$  da função  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \langle x, x \rangle$ . Logo*

$$T_p S(r) = p^\perp = \{v \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle v, p \rangle = 0\}$$

para qualquer  $p \in S^n(r)$ .

**Exemplo 1.14 (Espaço Hiperbólico)** *Analogamente à esfera, verificamos que  $-1$  é valor regular de  $f(x) = \langle x, x \rangle_1$  e  $\mathbb{H}^n = f^{-1}(-1)$  é variedade de dimensão  $n$  tal que*

$$T_p\mathbb{H}^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle v, p \rangle_1 = 0\}$$

para qualquer  $p \in \mathbb{H}^n$ .

## 1.5 Fibrado Tangente

Defina o conjunto  $TM$  como a união disjunta de todos os espaços tangentes a  $M$ :  $TM = \cup_{p \in M} T_pM$ . E também a projeção canônica  $\pi : TM \rightarrow M$  que associa a cada  $v \in T_pM$  o elemento  $p \in M$ .

**Proposição 1.1** *Se  $M$  é uma variedade diferenciável  $C^k$ , então  $TM$  admite uma estrutura de variedade diferenciável  $C^k$  de dimensão  $2n = 2\dim M$  tal que  $\pi : TM \rightarrow M$  é uma submersão  $C^k$  cuja fibra  $\pi^{-1}(p)$  coincide com  $T_pM$ .*

**Demonstração:** Seja  $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$  um atlas diferenciável de  $M$ . Para qualquer  $\alpha$ , considere a seguinte aplicação  $\tilde{\varphi}_\alpha : TU_\alpha \rightarrow V_\alpha \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$  dada por

$$\tilde{\varphi}_\alpha(v_p) = \tilde{\varphi}_\alpha(p, v) := (\varphi_\alpha(x), (\varphi_\alpha)_*(v)) = (\varphi_\alpha)_*(v_p).$$

Tal aplicação é uma bijeção, pois possui uma inversa dada por  $\tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(y_x) = (\varphi_\alpha)_*^{-1}(y_x)$ .

Provaremos que  $\{(\varphi_\alpha)_* : TU_\alpha \rightarrow V_\alpha \times \mathbb{R}^n\}$  é um atlas diferenciável. É imediato verificar que  $TM = \cup_\alpha TU_\alpha$ . Suponha que  $TU_\alpha \cap TU_\beta \neq \emptyset$ . Dado  $g \in \mathcal{D}_{\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x)}(\mathbb{R}^{2n})$  temos

$$\begin{aligned} (\tilde{\varphi}_\alpha \circ \tilde{\varphi}_\beta^{-1})(x, y)(g) &= \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(y_x)(g \circ \varphi_\alpha) = y_x(g \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \\ &= d(g \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})_x(y) = dg_{\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x)} d(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})_x y \\ &= (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x), d(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})_x y)(g). \end{aligned}$$

Logo

$$(\tilde{\varphi}_\alpha \circ \tilde{\varphi}_\beta^{-1})(x, y) = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x), d(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})_x y)$$

e portanto  $\tilde{\varphi}_\alpha \circ \tilde{\varphi}_\beta^{-1}$  é suave.

Dado  $v \in TM$  tal que  $\pi(v) = p$ , seja  $\varphi : U \rightarrow V$  tal que  $p \in U$ . Considere  $\tilde{\varphi} : TU \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$  carta de  $TM$  associada a  $\varphi$ . Logo a representação local da projeção canônica com respeito a essas cartas é

$$\varphi \circ \pi \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x, y) = \varphi \circ \pi(\varphi^{-1}(x), d\varphi_x^{-1}(y)) = \varphi \circ \varphi^{-1}(x) = x \quad (1.1)$$

e portanto  $\pi$  é uma submersão. □

**Definição 1.2** *A tripla  $(TM, M, \pi)$  é o fibrado tangente, que referenciaremos por  $\pi : TM \rightarrow M$  ou apenas por  $TM$ .*

**Exemplo 1.15** *O fibrado tangente de  $\mathbb{R}^n$  é identificado com  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .*

## 1.6 Campos de vetores, Fluxo e colchete de Lie

Uma seção do fibrado tangente é uma aplicação  $X : M \rightarrow TM$  tal que

$$\pi \circ X(p) = p,$$

para qualquer  $p \in M$ . Um *campo de vetores* de classe  $C^k$  é uma seção de classe  $C^k$  do fibrado tangente, ou equivalentemente, para qualquer função de classe  $C^k$  em  $M$ ,  $X(f)$  é uma função de classe  $C^k$  em  $M$ .

Uma família de campos suaves  $\{X_1, \dots, X_n\}$  definidos em um aberto  $U$  de  $M$  é denominada *referencial local* se  $\{X_1(p), \dots, X_n(p)\}$  é uma base de  $T_pM$  para qualquer  $p \in U$ .

Dado sistema de coordenadas  $(U, \varphi = (x_i))$  temos que para qualquer  $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(p) &:= d\varphi_{\varphi(p)}^{-1}e_i \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i), \quad p \in U \end{aligned}$$

define um campo de vetores suave em  $TU$ , onde  $\{e_i\}$  é o referencial canônico de  $\mathbb{R}^n$ . O conjunto  $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$  é um referencial local denominado *referencial local associado ao sistema de coordenadas*. Assim, dado  $X \in \Gamma^k(TU)$ , existem funções  $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$  tais que

$$X(p) = \sum_{i=1}^n x_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$$

para qualquer  $p \in U$ . Note que

$$x_i(p) = dx_i(X(p)) = X(p)(x_i)$$

onde  $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  é a submersão dada por  $x_i \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = x_i$ . As funções  $\{x_i\}$  são denominadas funções coordenadas de  $X$  com respeito a carta  $\varphi$ . Com isso,  $X$  é um campo de vetores de classe  $C^k$  se, e somente se, as funções coordenadas de  $X$  com respeito a qualquer carta são funções de classe  $C^k$ .

O conjunto dos campos de vetores suaves em  $M$  será denotado por  $\Gamma(TM)$ . Outra notação comumente utilizada é  $\mathfrak{X}(M)$ .

Naturalmente definimos soma de vetores e uma multiplicação por escalares:  $(X + Y)(p) = X(p) + Y(p)$  e  $(\lambda X)(p) = \lambda X(p)$  para quaisquer  $X, Y \in \Gamma(TM)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Verifica-se que  $(\Gamma(TM), +, \cdot)$  é um espaço vetorial infinito dimensional, cujo elemento neutro da adição é a seção nula, denotada por "0".

**Exemplo 1.16** *Existe uma relação biunívoca entre  $\Gamma^k(T\mathbb{R}^n)$  e  $C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Basta notar que campos em  $\mathbb{R}^n$  são da forma  $X(x) = (x, f(x)) \in T_x\mathbb{R}^n$  para alguma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .*

**Exemplo 1.17** Em  $\mathbb{R}^n$  os campos canônicos são

$$e_1(x) = (x, (1, 0, \dots, 0)), \dots, e_n(x) = (x, (0, \dots, 0, 1)),$$

que formam um referencial ortonormal globalmente definido.

**Exemplo 1.18** Seja  $M$  o gráfico da função  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . As aplicações

$$X_1(p) = (p, (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x_1}(x))) = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)) \text{ e } X_2(p) = (p, (0, 1, \frac{\partial f}{\partial x_2}(x))) = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial x_2}(x))$$

com  $p = (x, f(x))$  definem campos vetoriais ao longo de  $M$  que constituem um referencial globalmente definido.

**Exemplo 1.19** A aplicação  $X(x, y, z) = (-y, x, 0)$  define um campo vetorial suave em  $S^2$ .

Seja  $X$  um campo vetorial de classe  $C^k$  em uma variedade diferenciável  $M$ . Dado  $p \in M$  existe uma única curva  $\gamma_p : I_p \rightarrow M$  de classe  $C^{k+1}$  tal que  $\gamma_p(0) = p$  e

$$\gamma_p'(t) = X(\gamma_p(t))$$

para qualquer  $t \in I_p$ . Ademais existe um aberto  $D \subset M \times \mathbb{R}$   $((p, t) \in D$  se, e somente se,  $t \in I_p$ ) e uma aplicação  $\varphi^X : D \rightarrow M$  de classe  $C^k$  tal que

$$\varphi^X(p, t) = \varphi_t^X(p) = \gamma_p(t).$$

Essa aplicação é o *fluxo* de  $X$ .

**Exemplo 1.20** Em  $S^2$  considere o campo  $X(p) = \epsilon(-p_2, p_1, 0)$  para  $\epsilon \in \mathbb{R}$ . Seu fluxo é

$$\begin{aligned} \varphi_t^X(p) &= (\cos(\epsilon t)p_1 - \text{sen}(\epsilon t)p_2, \text{sen}(\epsilon t)p_1 + \cos(\epsilon t)p_2, p_3) \\ &= (r \cos(\frac{\epsilon}{r}t + t_0), r \text{sen}(\frac{\epsilon}{r}t + t_0), p_3), \end{aligned}$$

onde  $p = (p_i) = (r \cos(t_0), r \text{sen}(t_0), p_3)$ . De fato,  $\varphi_0^X(p) = p$  e

$$\frac{d}{dt} \varphi_t^X(p) = (-\text{sen}(t)p_1 + \cos(t)p_2, \cos(t)p_1 - \text{sen}(t)p_2, 0) = X(\varphi_t^X(p)).$$

**Proposição 1.2** Seja  $\varphi^X : D \rightarrow M$  o fluxo de um campo vetorial  $X$ . Então

$$\varphi_{t+s}^X(p) = \varphi_t^X \circ \varphi_s^X(p)$$

sempre que  $(p, s), (p, t + s), (\varphi_s^X(p), t) \in D$ . Ademais fixado  $t \in I_p$  existe uma vizinhança aberta  $U \subset M$  de  $p$  tal que  $\varphi_t^X : U \rightarrow M$  é um difeomorfismo na imagem.

**Proposição 1.3** *O espaço dos campos vetoriais em uma variedade diferenciável  $M$  coincide com o espaço das derivações da álgebra  $C^\infty(M)$ , ou seja, o espaço das aplicações lineares  $D : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  tal que*

$$D(fg) = D(f)g + fD(g).$$

Em geral, a aplicação  $XY : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  dada por  $f \mapsto X(Y(f))$  não necessariamente satisfaz a regra de Leibniz e conseqüentemente não é um campo de vetores. Porém  $XY - YX$  é uma derivação. De fato, dado referencial holonômico  $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ , escrevendo  $X = \sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  e  $Y = \sum y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  temos para qualquer função  $f \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} XY(f) &= \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_j y_j \frac{\partial}{\partial x_j} (f) \right) = \sum_{i,j} x_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} (y_j) \frac{\partial}{\partial x_j} (f) + y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \\ &= \sum_{i,j} \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_i} (y_j) \frac{\partial}{\partial x_j} (f) + x_i y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right), \\ YX(f) &= \sum_j y_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} (f) \right) = \sum_{i,j} y_j \left( \frac{\partial}{\partial x_j} (x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} (f) + x_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i,j} \left( y_j \frac{\partial}{\partial x_j} (x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} (f) + y_j x_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right). \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema de Schwartz

$$(XY - YX)(f) = \sum_{i,j} \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_i} (y_j) - y_j \frac{\partial}{\partial x_j} (x_i) \right) \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Chamamos colchete de campos ou colchete de Lie a aplicação

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\longmapsto [X, Y] := XY - YX. \end{aligned}$$

Por construção, o colchete de Lie mede a não comutatividade dos campos.

**Proposição 1.4** *O colchetes de campos é uma aplicação  $\mathbb{R}$ -bilinear e satisfaz*

1.  $[X, Y] = -[Y, X]$ , ou equivalentemente,  $[X, X] = 0$  (anticomutatividade);
2.  $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$  (linearidade);
3.  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$  (identidade de Jacobi);
4.  $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$ ;

com  $X, Y, Z$  campos vetoriais em  $M$ ,  $a, b$  são números reais e  $f, g$  são funções diferenciáveis. Em particular,  $(\Gamma(TM), +, \cdot, [\cdot, \cdot])$  é uma álgebra de Lie.

Dois campos  $X, Y \in \Gamma(TM)$  são comutativo ou comutam quando  $[X, Y] = 0$ . Por exemplo, se  $(U, \varphi)$  é um sistema de coordenadas, então os campos referenciais são comutativos.

**Lema 1.2** *Sejam  $\{X_1, \dots, X_n\}$  definidos em  $U$  aberto de  $M$ . Então tais campos comutam dois a dois se, e somente se,  $\{X_1, \dots, X_n\}$  é referencial local para algum sistema de coordenadas.*

Sejam  $f : M \rightarrow N$  é uma aplicação diferenciável,  $X \in \Gamma(TM)$  e  $Y \in \Gamma(TN)$  campos suaves. Dizemos que  $X$  e  $Y$  são  $f$ -relacionados se  $df(X) = Y \circ f$ .

**Lema 1.3** *Se  $f : M \rightarrow N$  é um difeomorfismo, então  $[X, Y]$  é  $f$ -relacionado a  $[df(X), df(Y)]$ .*

**Lema 1.4** *Dado dois campos vetoriais  $X, Y$ , temos*

$$[X, Y]_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d\varphi_{-t}^X(Y_{\varphi_t^X(p)}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\varphi_{-t}^X(Y_{\varphi_t^X(p)}) - Y_p}{t},$$

onde  $\varphi^X$  é o fluxo de  $X$ .

## 1.7 Fibrado cotangente

Seja  $M$  uma variedade  $n$ -dimensional. Dado  $p \in M$ , o espaço dual a  $T_pM$  é o conjunto dos funcionais lineares em  $T_pM$ , denotado por  $(T_pM)^*$ . Defina  $TM^*$  como a união disjunta dos espaços duais a todos os espaços tangentes a  $M$ :

$$TM^* = \cup_{p \in M} (T_pM)^*.$$

Podemos definir canonicamente uma aplicação  $\pi^* : TM^* \rightarrow M$  que associa a cada  $\alpha \in TM^*$  o único  $p \in M$  tal que  $\alpha \in (T_pM)^*$ . Tal aplicação também é denominada projeção canônica.

**Proposição 1.5** *Se  $M$  é uma variedade diferenciável  $C^k$ , então  $TM^*$  admite uma estrutura de variedade diferenciável  $C^k$  de dimensão  $2n = 2\dim M$  tal que  $\pi^* : TM^* \rightarrow M$  é uma submersão  $C^k$  cuja fibra  $\pi^{-1}(p)$  coincide com  $(T_pM)^*$ .*

A tripla  $(TM^*, M, \pi^*)$  é o fibrado cotangente. Uma seção de classe  $C^k$  é uma 1-forma de classe  $C^k$ , ou seja, uma aplicação  $\alpha : M \rightarrow TM^*$  de classe  $C^k$  tal que  $\pi^* \circ \alpha = Id_M$ .

Um correferencial local de  $M$  definido em um aberto  $U$  é uma família de 1-formas  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  tal que  $\{(\beta_1)_p, \dots, (\beta_n)_p\}$  é uma base de  $(T_pM)^*$  para qualquer  $p \in U$ . Como consequência uma aplicação  $\beta : U \rightarrow (TU)^*$  é uma 1-forma em  $U$  se, e somente se, existirem funções  $b_1, \dots, b_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $\beta = \sum b_i \beta_i$ . Essas funções são unicamente determinadas.

Em  $\mathbb{R}^n$  o correferencial  $\{dx_1, \dots, dx_n\}$  definido por

$$dx_i(e_j) = \delta_{ij}$$

é denominado correferencial canônico. Considerando o produto interno canônico de  $\mathbb{R}^n$ , verifica-se que

$$dx_i(v) = \langle e_i, v \rangle.$$

Dada 1-forma  $\alpha$  em  $\mathbb{R}^n$  existem únicas funções  $a_1, \dots, a_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$\alpha = \sum_i a_i dx_i.$$

Note que  $a_i(x) = \alpha(e_i)$ . Por exemplo, se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável, então  $df \in (T\mathbb{R}^n)^*$  e

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

onde  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  é a derivada parcial.

Dado um referencial local  $\{X_1, \dots, X_n\}$  definido em uma aberto  $U$ , definimos o correferencial associado  $\{X_1^*, \dots, X_n^*\}$  por

$$X_j^*(X_i) = \delta_{ij}.$$

Por exemplo, o correferencial canônico  $\{dx_i\}$  de  $\mathbb{R}^n$  é o correferencial associado ao referencial canônico  $\{e_i\}$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Dado  $\alpha \in (TU)^*$  existem únicas funções  $a_1, \dots, a_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $\alpha = \sum a_i X_i^*$ . Verifica-se que  $a_i(p) = \alpha_p(X_i)$ . Por fim note que podemos interpretar  $X_i^* : TM \rightarrow \mathbb{R}$  como a projeção na  $i$ -ésima coordenada, pois se  $v = \sum_j v_j X_j$ , então

$$X_i^*(v) = v_i,$$

por linearidade e por definição.

Suponha que  $\{X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\}$  é um referencial associado a uma carta  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  (referencial holonômico). Note que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^* = dx_i \circ d\varphi = \varphi^*(dx_i)$$

onde  $\{dx_i\}$  é o correferencial canônico de  $\mathbb{R}^n$ . Por essa razão também denotaremos  $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^*$  por  $dx_i$  e denominaremos o  $\{dx_1, \dots, dx_n\}$  correferencial associado a  $\varphi$  correferencial holonômico).

Sejam  $\varphi, \phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  duas carta locais de  $M$  e  $\{dz_i\}$  e  $\{dy_j\}$  respectivos correferencial associados. Então

$$dy_i = dx_i \circ d\phi = dx_i \circ d\varphi \circ d\varphi^{-1} \circ d\phi = dz_i \circ d(\varphi^{-1} \circ \phi) = (\varphi^{-1} \circ \phi)^* dz_i,$$

onde  $\{dx_i\}$  é o correferencial canônico de  $\mathbb{R}^n$ .

Logo e como  $\frac{\partial}{\partial y_i} = d(\varphi^{-1} \circ \phi) \frac{\partial}{\partial y_i}$

**Exemplo 1.21** Se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^k$  então  $df : TM \rightarrow \mathbb{R}$  é uma 1-forma de classe  $C^{k-1}$ . Então dado um referencial local  $\varphi$  temos que

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i,$$

onde  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  também denota a  $i$ -ésima derivada parcial de  $f \circ \varphi$  representação local de  $f$ .

**Exemplo 1.22** Seja  $M$  uma superfície de  $\mathbb{R}^3$  munida com a primeira forma fundamental  $g$ . Então a aplicação  $l : TM \rightarrow TM^*$  dada por

$$v \mapsto l_v(w) = g(v, w)$$

é um difeomorfismo tal que  $\pi^* \circ l = \pi$  e  $\|l_v\|^* = \|v\|$ , onde  $\|\cdot\|^*$  é a norma dual a norma  $\|\cdot\| = \sqrt{g}$ . Consequentemente essa aplicação explícita uma relação biunívoca entre campos de vetores e 1-formas diferenciais.

## 1.8 Orientação

Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita. Dizemos que duas bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  de  $V$  são coerentes ao operador mudança de base se possui determinante positivo. Verifica-se que esta definição estabelece uma relação de equivalência que possui apenas duas classes de equivalência. A escolha de uma dessas classes é uma orientação de  $V$ . Dizemos que uma base  $\mathcal{C}$  é positivamente orientada se estiver na classe de equivalência da orientação escolhida.

Dizemos que uma variedade  $M$  é orientável se existir um atlas  $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$  tal que

$$\det(d(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})) > 0$$

sempre que  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ . Nesse caso,  $\{\frac{\partial \varphi_\alpha^{-1}}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial \varphi_\alpha^{-1}}{\partial x_n}(p)\}$  e  $\{\frac{\partial \varphi_\beta^{-1}}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial \varphi_\beta^{-1}}{\partial x_n}(p)\}$  são bases coerentes de  $T_p M$  uma vez que  $d(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)$  é o operador linear que aplica uma base na outra. Uma orientação em  $M$  é a escolha de um atlas com a propriedade acima. Note que a escolha de uma orientação em  $M$  implica naturalmente uma orientação em cada espaço tangente.

**Teorema 1.4** Seja  $M$  uma hipersuperfície em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Então  $M$  é orientável se, e somente se, existe  $N$  campo normal unitário ao longo de  $N$ .

**Lema 1.5** Sejam  $M, N$  variedades com  $M$  conexa e  $f : M \rightarrow N$  um difeomorfismo local sobrejetor. Se  $M$  é orientável, então  $N$  é orientável.

**Lema 1.6** O fibrado tangente de uma variedade é orientável.



**Exemplo 1.23** O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  é trivialmente orientável, pois qualquer variedade com uma única carta é orientável. E conseqüentemente o espaço hiperbólico é orientável, pois é difeomorfo a um espaço euclidiano. E a esfera é orientável pois trivialmente existe um campo normal unitário globalmente definido.

## 1.9 Formas diferenciais

Seja  $M$  uma variedade diferenciável  $n$ -dimensional. Uma  $k$ -forma diferencial de classe  $C^s$  é uma aplicação  $\omega$  de classe  $C^s$  que associa a cada  $p \in M$  uma aplicação  $k$ -linear

$$\omega_p : T_p M \times \dots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

que satisfaz

$$\omega_p(v_1, \dots, v_i, v_{v_{i+1}}, \dots, v_k) = -\omega_p(v_1, \dots, v_{v_{i+1}}, v_i, \dots, v_k), \quad (1.2)$$

para qualquer  $p \in M$ . A condição de diferenciabilidade significa que dados campos vetoriais de classe  $C^s$ ,  $\{X_1, \dots, X_k\}$ , definidos em um aberto  $U$  de  $M$ , a função

$$p \in U \mapsto \omega_p(X_1(p), \dots, X_k(p)) \in \mathbb{R}$$

é de classe  $C^s$ .

Uma  $k$ -forma diferencial suave será referida apenas por  $k$ -forma. O espaço das  $k$ -formas em  $M$  será denotado por  $\Lambda^k(M)$ . Convencionamos que uma 0-forma é uma função suave. Assim  $\Lambda^0 = C^\infty(M)$ .

**Exemplo 1.24** Em  $\mathbb{R}^2$  a aplicação

$$\omega(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

define uma 2-forma.

Note que  $\Lambda^k(M)$  tem uma estrutura de módulo sobre o anel das funções suaves. Mais precisamente, definido as operações  $+$  :  $\Lambda^k(M) \times \Lambda^k(M) \rightarrow \Lambda^k(M)$  e  $\cdot$  :  $C^\infty(M) \times \Lambda^k(M) \rightarrow \Lambda^k(M)$  respectivamente por

$$(\omega_1 + \omega_2)_p(u_1, \dots, u_k) := \omega_1(u_1, \dots, u_k) + \omega_2(u_1, \dots, u_k)$$

e

$$(f\omega)_p(u_1, \dots, u_k) := f(p)\omega_p(u_1, \dots, u_k)$$

a tripla  $(\Lambda^k, +, \cdot)$  satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $(\Lambda^k(M), +)$  é um grupo comutativo, onde naturalmente o elemento neutro é a  $k$ -forma identicamente nula e o oposto de  $\omega$  é  $-\omega$ ;

2. se  $Id_M$  é a identidade, então  $Id_M\omega = \omega$ ;
3.  $(fg)\omega = f(g\omega)$ ;
4.  $f(\omega_1 + \omega_2) = f\omega_1 + f\omega_2$ ;
5.  $(f + g)\omega = f\omega + g\omega$ .

onde  $f, g \in C^\infty(M)$  e  $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Lambda^k(M)$ .

Denotando por  $\Lambda_p^k(M)$  a restrição de  $\Lambda^k(M)$  a  $T_pM$ , ou seja, o espaço das aplicações  $k$ -lineares em  $T_pM$  satisfazendo a Equação 1.2, podemos concluir que  $(\Lambda_p^k(M), +, \cdot)$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ .

O produto wedge ( $\wedge$ ) de 1-formas  $\beta_1, \dots, \beta_k$  é a  $k$ -forma definida por

$$(\wedge_{i=1}^k \beta_i)_p(u_1, \dots, u_k) := (\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_k)_p(u_1, \dots, u_k) := \det(\beta_i(u_j))$$

onde  $p \in M$  e  $u_1, \dots, u_k \in T_pM$ .

Considere uma carta local  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Para facilitar a notação considere o conjunto  $\Delta := \{I = (i_1, \dots, i_k); 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n\}$  e defina

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

para  $I = \{i_1 < \dots < i_k\} \in \Delta$ , onde  $\{dx_i\}$  é o coreferencial associado a  $\varphi$ . Por vezes convém denotar  $\frac{\partial}{\partial x_I} = (\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_k}})$ .

**Lema 1.7** *Seja  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma carta de  $M$ . A família  $\{(dx_I)_p; I \in \Delta\}$  é uma base de  $\Lambda^k(T_pM)$  (espaço das aplicações  $k$ -lineares alternadas em  $T_pM$ ) para qualquer  $p \in U$ . Em particular,  $\dim \Lambda^k(T_pM) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ . Ademais dado  $\omega \in \Lambda^k(U)$  existem únicas funções suaves  $\{f_I; I \in \Delta\}$  tais que*

$$\omega = \sum_{I \in \Delta} f_I dx_I. \quad (1.3)$$

O produto wedge de uma  $k$ -forma  $\omega = \sum_I f_I dx_I$  com uma  $s$ -forma  $\eta = \sum_J g_J dx_J$  é a  $(k+s)$ -forma

$$\omega \wedge \eta = \sum f_I g_J (dx_I \wedge dx_J)$$

onde  $dx_I \wedge dx_J = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s}$ .

**Proposição 1.6** *Se  $\omega \in \Lambda^k(M)$ ,  $\varphi \in \Lambda^s(M)$  e  $\theta \in \Lambda^r(M)$ , então*

1.  $(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \omega \wedge (\varphi \wedge \theta)$
2.  $\omega \wedge \varphi = (-1)^{ks}(\varphi \wedge \omega)$
3.  $\omega \wedge (\varphi + \theta) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \theta$ , se  $r = s$ .

Seja  $f : M^n \rightarrow S^l$  aplicação suave entre variedades. Dada  $k$ -forma  $\omega$  em  $S$  definimos a  $k$ -forma  $f^*\omega$  em  $M$ , denominada pull-back de  $\omega$  por  $f$ , por

$$(f^*\omega)_p(u_1, \dots, u_k) := \omega_{f(p)}(df_p(u_1), \dots, df_p(u_k)).$$

Em particular  $f^*(dg) = d(g \circ f)$  para qualquer  $g \in C^\infty(S)$ .

**Proposição 1.7** *Se  $f : M \rightarrow S$  é aplicação suave,  $\omega, \varphi \in \Lambda^k(S)$  e  $g \in \Lambda^0(M)$ , então*

1.  $f^*(\omega + \varphi) = f^*\omega + f^*\varphi$

2.  $f^*(g) = g \circ f$

3.  $f^*(g\omega) = f^*(g)f^*\omega$

4. *Se  $h : S \rightarrow N$  é uma aplicação suave, então*

$$(h \circ f)^*\omega = f^*(h^*\omega)$$

5. *Se  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \Lambda^1(M)$ ,*

$$f^*(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k) = f^*\varphi_1 \wedge \dots \wedge f^*\varphi_k.$$

Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação diferenciável. Considere  $\{b_1, \dots, b_n\}$  outra base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  e  $\{dy_1, \dots, dy_n\}$  base dual associada. Então

$$f^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n) = \det(df)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Se  $\varphi : U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  é uma carta, então verifica-se que

$$(\varphi^{-1})^*dx_i = e_i^*,$$

onde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^n$ . Note que  $e_i^*$  em geral também é denotado por  $dx_i$ . Logo a representação local de  $\omega = \sum f_I dx_I$  pode ser vista com o  $(\varphi^{-1})^*\omega = \sum f_I e_I^*$ .

**Definição 1.3** *Uma forma volume em uma variedade diferenciável  $M$   $n$ -dimensional é uma  $n$ -forma diferencial  $\omega$  tal que para qualquer  $p \in M$  a aplicação  $n$ -linear  $\omega_p : (T_p M)^n \rightarrow \mathbb{R}$  não é identicamente nula.*

**Exemplo 1.25** *Em  $\mathbb{R}^n$ ,  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  é uma forma volume. Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave tal que  $f(p) \neq 0$  para qualquer  $p \in \mathbb{R}^n$ , então  $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  é uma forma volume.*

**Exemplo 1.26** *Seja  $S$  uma superfície parametrizada por uma aplicação  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Se  $E, G$  e  $F$  são os coeficientes da primeira forma fundamental, então*

$$\omega = \sqrt{EG - F^2} dx_1 \wedge dx_2,$$

onde  $\{dx_1, dx_2\}$  é o coreferencial associado à parametrização  $\varphi$ .

Como a dimensão de  $\Lambda_p^n(M^n)$  é 1, se  $\omega$  é uma forma volume, então dada uma  $n$ -forma  $\eta$  qualquer existe uma função suave  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\eta = f\omega$ .

**Teorema 1.5** *Uma variedade  $M$  com dimensão  $n$  é orientável se, e somente se, existir uma forma volume.*

### 1.10 Integração de formas diferenciais

Através da condição de cociclo transportamos o cálculo diferencial do  $\mathbb{R}^n$  para a variedade diferenciável  $M$ . Assim por meio do pullback das cartas  $\varphi_i$  temos uma definição de forma diferencial em  $M$  que cumpre todas as propriedades das formas diferenciais no espaço Euclidiano. Agora vamos definir uma noção de integração de formas em variedades diferenciáveis, que generaliza a integral múltipla do  $\mathbb{R}^n$ , para isso é necessário uma condição, a orientabilidade.

Seja  $\omega$  uma  $n$ -forma diferencial em  $M$  tal que seu suporte está contido em uma vizinhança coordenada  $\varphi_i(V_i) = U_i$ . Neste caso defina a integral de  $\omega$  por

$$\int_M \omega := \int_{V_i} \varphi_i^* \omega, \quad (1.4)$$

onde a integral a direita é a integral múltipla em  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 1.6** *Se  $M$  é variedade diferenciável  $n$ -dimensional orientável,  $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ ,  $\varphi_j : U_j \rightarrow V_j$  são cartas coerentes com a orientação e  $\omega$  é uma  $n$ -forma em  $M$ , então*

$$\int_{V_i \cap V_j} \varphi_i^* \omega = \int_{V_i \cap V_j} \varphi_j^* \omega. \quad (1.5)$$

**Demonstração:** Pelas propriedades de pull-back

$$\int_{\varphi_i(U)} (\varphi_i^{-1})^* \omega = \int_{\varphi_i(U)} (\varphi_j^{-1} \circ (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}))^* \omega = \int_{\varphi_i(U)} (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})^* (\varphi_j^{-1})^* \omega.$$

Suponha sem perda de generalidade que  $(\varphi_j^{-1})^* \omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  e denote  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$  por  $g$ . Logo

$$\begin{aligned} g^*(f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) &= (f \circ g) \det(Jg) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= (f \circ g) |\det(Jg)| dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \end{aligned}$$

pois  $\det(Jg) > 0$ . Portanto pelo Teorema de Mudança de Variáveis de  $\mathbb{R}^n$

$$\int_{\varphi_i(U)} (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})^* (\varphi_j^{-1})^* \omega = \int_{\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(\varphi_i(U))} (\varphi_j^{-1})^* \omega = \int_{\varphi_j(U)} (\varphi_j^{-1})^* \omega,$$

terminando a prova. □

Para definir integração de uma forma diferencial precisamos de um importante objeto: *partição da unidade*. Seja  $\{U_i\}$  cobertura de uma variedade diferenciável  $M$ . Uma família

de aplicações  $\Theta = \{\rho_i : M \rightarrow \mathbb{R}\}$  é uma *partição da unidade subordinada* a  $\{U_i\}$  quando para cada  $i$  o suporte  $\rho_i$  está contido em  $U_i$  e para qualquer  $x \in M$  existe apenas um número finito de funções em  $\Theta$  tais que  $x$  pertence ao suporte e além disso

$$\sum \rho_i(x) = 1.$$

**Teorema 1.7** *Qualquer cobertura por abertos de uma variedade diferenciável admite uma partição da unidade subordinada.*

Dada  $\omega$  uma  $n$ -forma diferenciável em  $M$  variedade diferenciável  $n$ -dimensional orientável definimos sua integral por

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{U_i} \rho_i \omega = \sum_i \int_{V_i} \varphi_i^*(\rho_i \omega) = \sum_i \int_{V_i} (\rho_i \circ \varphi_i) \varphi_i^* \omega,$$

onde  $\Theta = \{\rho_i\}$  é uma partição da unidade subordinada a um atlas  $\{\varphi_i, U_i\}$  orientável. É possível verificar que essa definição independe do atlas e da partição da unidade escolhidos. Com efeito, se  $\{\tilde{\varphi}_i : \tilde{U}_i \rightarrow \tilde{V}_i\}$  é outro atlas coerente com a orientação e  $\tilde{\Theta}$  uma partição da unidade subordinada  $\tilde{\Theta} = \{\tilde{\rho}_i\}$ , então segue das propriedades que definem a partição da unidade a seguinte equação

$$\sum_i \int_{U_i} \rho_i \omega = \sum_i \int_M \rho_i \omega = \sum_i \int_M (\sum_j \tilde{\rho}_j) \rho_i \omega = \sum_i \sum_j \int_M \tilde{\rho}_j \rho_i \omega,$$

implicando na convergência da segunda série e portanto

$$\sum_i \sum_j \int_M \tilde{\rho}_j \rho_i \omega = \sum_j \int_M \tilde{\rho}_j \omega = \sum_j \int_{U_j} \tilde{\rho}_j \omega.$$

As duas últimas equações implicam a afirmação.

**Teorema 1.8 (Teorema de Mudança de Variável)** *Se  $f : M \rightarrow N$  é um difeomorfismo entre variedades diferenciáveis  $n$ -dimensionais, então*

$$\int_{f(U)} \omega = \int_U f^* \omega,$$

para qualquer aberto  $U$  de  $M$ .

## 2 Geometria Riemanniana

Geometria Riemanniana é o estudo de variedades dotadas de métricas Riemannianas, que são, a grosso modo, regras para medir comprimentos de vetores tangentes e ângulos entre eles. Foram assim nomeadas em homenagem ao grande matemático alemão Bernhard Riemann (1826–1866). As referências aqui utilizadas serão [3] e [2].

### 1 Métricas Riemannianas

Seja  $M$  uma variedade  $n$ -dimensional. Uma *métrica Riemanniana* é uma aplicação  $g$  suave que associa a cada  $p \in M$  um produto interno  $g_p$  (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) em  $T_pM$ . A suavidade significa que para quaisquer campos de vetores  $X, Y \in \Gamma(TM)$  a função  $p \mapsto g_p(X(p), Y(p))$  é suave. O par  $(M, g)$  é denominada *variedade Riemanniana*.

Se  $(U, \varphi)$  é um sistema de coordenadas e  $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$  referencial associado então a representação local de  $g$  é

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

onde  $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$  são as funções em  $U$ . Se  $x = \sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  e  $y = \sum y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  são representações locais de vetores de  $T_pM$ , então

$$g_p(x, y) = [y_1 \dots y_n] [g_{ij}(p)] [x_1 \dots x_n]^T = \sum_{i,j} g_{ij}(p) x_i y_j,$$

onde  $[g_{ij}(p)]$  é uma matriz quadrada simétrica de ordem  $n$ . A condição de suavidade descrita acima equivale dizer que as funções  $g_{ij}$  são suaves.

**Exemplo 2.1** *O exemplo mais elementar é o  $\mathbb{R}^n$  munido com um produto interno, por exemplo, o produto interno canônico*

$$\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$$

para  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . Observe que nesse caso identificamos canonicamente  $T_p\mathbb{R}^n$  com  $\mathbb{R}^n$  para qualquer  $p \in \mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 2.2** *Considere uma função suave  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(p) > 0$ . A aplicação*

$$g_p(u, v) = f(p) \langle u, v \rangle$$

para quaisquer  $p \in \mathbb{R}^n$  e  $u, v \in T_p\mathbb{R}^n$  define uma métrica Riemanniana em  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 2.3 (Métrica Pull-Back)** Se  $f : M \rightarrow N$  é um difeomorfismo e  $h$  uma métrica Riemanniana em  $N$ , podemos definir uma métrica Riemanniana em  $M$  por

$$g := f^*h,$$

denominada métrica pull-back.

**Exemplo 2.4** Se  $S$  é uma superfície de  $\mathbb{R}^3$ , trivialmente a primeira forma fundamental é uma métrica Riemanniana.

**Exemplo 2.5 (Espaço Hiperbólico)** Considere o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n(r)$ . Para cada  $p \in \mathbb{H}^n(r)$  a aplicação

$$g_p(u, v) = \langle u, v \rangle_1$$

para quaisquer  $u, v \in T_p\mathbb{H}^n$  define uma métrica Riemanniana em  $\mathbb{H}^n(r)$ .

**Teorema 2.1** Toda variedade admite pelo menos uma métrica Riemanniana.

**Demonstração:** Seja  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  um atlas de  $M$ . Para cada carta  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  defina  $g_\alpha$  em  $U_\alpha$  a métrica pull-back da métrica canônica de  $\mathbb{R}^n$  via  $\varphi$ . Por fim considere uma partição da unidade  $\{\rho_\alpha\}$  subordinada à cobertura  $\{U_\alpha\}$  e defina a seguinte métrica Riemanniana  $g = \sum_\alpha \rho_\alpha g_\alpha$ .  $\square$

Seja  $(M, g)$  variedade Riemanniana. Definimos em  $C$ , espaço das curvas suaves por partes em  $M$ , dois funcionais, a saber: o *funcional comprimento*  $L : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  e o *funcional energia* que associam a cada  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  em  $C$  os valores reais não negativos

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \quad e \quad E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b g(\gamma'(t), \gamma'(t)) dt,$$

onde  $\|v\| = \sqrt{g(v, v)}$  é o módulo associado à métrica  $g$ .

Os funcionais comprimento e energia são invariantes por reparametrizações, ou seja, se  $\lambda : [c, d] \rightarrow [a, b]$  é uma aplicação suave então  $L(\gamma \circ \lambda) = L(\gamma)$  e  $E(\gamma \circ \lambda) = E(\gamma)$ . Além disso, se  $\gamma$  é a concatenação das curvas  $\alpha$  e  $\beta$ , então  $L(\gamma) = L(\alpha) + L(\beta)$  e  $E(\gamma) = E(\alpha) + E(\beta)$ .

**Definição 2.1** Sejam  $(M_1, g^1)$  e  $(M_2, g^2)$  variedades Riemannianas. Um difeomorfismo  $f : (M_1, g^1) \rightarrow (M_2, g^2)$  é uma isometria se

$$g_{f(p)}^2(df_p(u), df_p(v)) = g_p^1(u, v)$$

para quaisquer  $p \in M_1$  e  $u, v \in T_pM_1$ .

**Lema 2.1** Se  $f : (M_1, g^1) \rightarrow (M_2, g^2)$  é uma isometria entre variedades Riemannianas e  $\gamma : [a, b] \rightarrow M_1$  é uma curva diferenciável por partes, então  $\beta := f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow M_2$  é uma curva diferenciável por partes que possui o mesmo comprimento e energia que  $\gamma$ .

**Definição 2.2** Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional. A forma volume canônica (ou Riemanniana) associada a métrica Riemanniana  $g$  é definida por

$$\omega^g(v_1, \dots, v_n) := \sqrt{\det(g_p(v_i, v_j))}$$

para quaisquer  $p \in M$  e  $v_1, \dots, v_n \in T_p M$ .

**Exemplo 2.6** Para o espaço euclidiano  $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$ , então

$$\omega^g = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Se  $M$  é uma superfície parametrizada por  $\varphi$  de  $\mathbb{R}^3$  com a primeira forma fundamental  $g = I$ , então

$$\omega^g = \sqrt{EG - F^2} dx_1 \wedge dx_2,$$

onde  $E, G$  e  $F$  são os coeficientes da primeira forma fundamental.

**Lema 2.2** Se  $f : (M_1, g^1) \rightarrow (M_2, g^2)$  é uma isometria, então  $f^* \omega^{g^2} = \omega^{g^1}$ .

**Demonstração:** Segue direto das definições. □

## 2 Conexões Riemannianas

A escolha de uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável  $M$  determina uma conexão afim que permite-nos derivar campos de vetores em  $M$ .

**Definição 2.3** Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $(M, g)$  é uma aplicação

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\mapsto \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow \nabla_X Y \end{aligned}$$

satisfazendo as propriedades:

1.  $\nabla_X Y$  é  $C^\infty$ -linear em  $X$ , isto é,  $\forall f, g \in C^\infty(M)$

$$\nabla_{fX_1 + gX_2} Y = f \nabla_{X_1} Y + g \nabla_{X_2} Y.$$

2.  $\nabla_X Y$  é  $\mathbb{R}$ -linear em  $Y$ , ou seja,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a \nabla_X Y_1 + b \nabla_X Y_2.$$

3.  $\nabla$  satisfaz Leibniz,  $\forall f \in C^\infty(M)$ ,

$$\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + (Xf)Y.$$



Dizemos que  $\nabla$  é simétrica quando

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

para quaisquer  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . E dada métrica  $g$  a conexão afim  $\nabla$  é compatível com métrica quando

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .

Quando  $\nabla$  for simétrica e compatível com métrica  $g$ , dizemos que  $\nabla$  é uma *Conexão Riemanniana* de  $(M, g)$ .

Exigir que uma conexão seja compatível com a métrica não determina uma única conexão em  $(M, g)$ . Para tanto, definiremos agora a conexão de Levi-Civita.

**Teorema 2.2** (*Levi-Civita*) *Em uma variedade Riemanniana  $(M, g)$  existe única conexão afim  $\nabla$  compatível com a métrica  $g$  e simétrica.*

**Demonstração:** Suponha a existência de tal conexão. Então, seguindo do fato que a conexão é compatível com métrica, temos:

1.  $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$
2.  $Yg(Z, X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X)$
3.  $Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$

Somando 1 com 2, subtraindo 3, obtemos, usando a simetria de  $\nabla$ ,

$$\begin{aligned} & Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) \end{aligned}$$

Adicionando  $g(Z, \nabla_Y X) + g(Z, \nabla_Y X)$ . obtemos

$$g([X, Y], Z) + g([X, Z], Y) + g([Y, Z], X) + 2g(Z, \nabla_Y X)$$

Donde segue que,

$$g(Z, \nabla_Y X) = \frac{1}{2} \left\{ Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) \right\}$$

A equação acima, mostra que  $\nabla$  está determinada pela métrica  $g$ . Portanto, caso exista será única.

Por fim, note que a expressão acima define uma conexão. □

**Proposição 2.1** *Seja  $M$  variedade com conexão afim  $\nabla$  e  $\gamma : I \rightarrow M$  curva suave. Seja  $\gamma^*\Gamma(TM)$  o conjunto dos campos vetoriais suaves ao longo de  $\gamma$ . Existe única correspondência que, para cada  $X \in \Gamma(\gamma^*TM)$ , associa um outro campo  $\frac{D}{dt}X \in \Gamma(\gamma^*TM)$  denominado derivada covariante de  $X$  ao longo de  $\gamma$ , satisfazendo*

1. *Linearidade, isto é:  $\forall X, Y \in \Gamma(\gamma^*TM)$*

$$\frac{D}{dt}(X + Y) = \frac{D}{dt}X + \frac{D}{dt}Y$$

2. *Leibniz :  $\forall X \in \Gamma(\gamma^*TM)$  e  $f \in C^\infty(I)$*

$$\frac{D}{dt}(fX) = \frac{df}{dt}X + f\frac{D}{dt}(X)$$

3. *Se  $X$  for induzido por um campo vetorial  $\bar{X} \in X(M)$ , ou seja,  $X(t) = \bar{X}(\gamma(t))$  então*

$$\frac{D}{dt}X = \nabla_{\gamma'}\bar{X}$$

A proposição acima garante para cada conexão a existência de derivada covariante para campos ao longo de  $\gamma$ . Se considerada conexão de Levi-Civita, definimos a derivada covariante de forma única.

**Exemplo 2.7** *Se  $L$  é uma subvariedade de uma variedade Riemanniana  $(M, g)$ , então  $h_p(u, v) := g_p(u, v)$  para  $p \in L$  e  $u, v \in T_pL$  define uma métrica Riemanniana em  $L$ . Então a conexão Riemanniana de  $h$  é*

$$\nabla_X^h Y := (\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y})^\top$$

para quaisquer campos vetoriais  $X, Y$  em  $L$ , onde  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$  são campos vetoriais em  $M$  que estendem respectivamente  $X$  e  $Y$  e  $^\top$  denota a projeção ortogonal de  $T_pM$  em  $T_pL$  com respeito a métrica  $g$ .

### 3 Geodésicas

A geodésica é um conceito fundamental da Geometria Riemanniana, serão elas as curvas que possuem aceleração nula, conforme veremos a seguir.

**Definição 2.4** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana. Uma curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow M$  é uma geodésica em  $t_0$  se  $\nabla_{\gamma'(t_0)}\gamma' = \frac{D}{dt}\gamma'(t_0) = 0$  em  $t_0$ ; se  $\gamma$  é geodésica em  $t$ , para todo  $t \in I$ , dizemos que  $\gamma$  é uma geodésica.*

**Exemplo 2.8** *Geodésicas em  $\mathbb{R}^n$  são retas, ou seja, são curvas da forma  $\gamma(t) = p + tv$  com  $p, v \in \mathbb{R}$ . De fato,  $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  é geodésica se, somente se,  $x_i''(t) = 0$*

**Teorema 2.3** Dado  $v \in T_p M$  existe única geodésica maximal  $\gamma_v : I \rightarrow S$  tal que  $\gamma_v(0) = p$  e  $\gamma'_v(0) = v$ .

**Proposição 2.2** Seja  $f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$  isometria. Se  $\gamma_1$  é uma geodésica de  $(M_1, g_1)$ , então  $f \circ \gamma_1$  é geodésica de  $(M_2, g_2)$ .

**Lema 2.3** Seja  $\gamma : I \rightarrow M$  uma geodésica, então o comprimento do vetor tangente  $\gamma'$  é constante.

**Demonstração:** Sendo  $\gamma : I \rightarrow M$  uma geodésica, temos que

$$\frac{d}{dt} \langle \gamma', \gamma' \rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \gamma', \gamma' \right\rangle = 0$$

ou seja, o comprimento do vetor tangente  $\gamma'$  é constante.  $\square$

Suponhamos sem perda de generalidade que  $\|\gamma'\| = c \neq 0$ , excluindo assim os casos em que as geodésicas se reduziram a pontos. O comprimento de arco  $s$  de  $\gamma$  é dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'\| dt = c(t - t_0).$$

Assim, o parâmetro de uma geodésica é proporcional ao comprimento de arco. Para o caso em que  $c = 1$ , dizemos que a geodésica  $\gamma$  está normalizada.

**Exemplo 2.9** Considere a parametrização do cilindro  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ , onde  $U = \{(u, v) : 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}$ . Vamos determinar as geodésicas do cilindro, mais precisamente, veremos que as curvas  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$  da forma  $\gamma(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$  são geodésicas. Primeiro considere os seguintes campos vetoriais:

$$\begin{aligned} X_u &= (-\sin u, \cos u, 0) \\ X_v &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Assim  $X_u \times X_v = (\cos u, \sin u, 0)$  e  $\|X_u \times X_v\| = \sqrt{\cos^2 u + \sin^2 u} = 1$ . Logo

$$N(u, v) = (\cos u, \sin u, 0)$$

é um campo normal unitário. Por outro lado,  $\gamma'' = (-a \sin(t), a \cos(t), b)$  e  $\gamma''' = (-a \cos(t), -a \sin(t), 0)$ ,

$$\begin{aligned} \gamma' &= (-a \sin(t), a \cos(t), b) \\ \gamma'' &= (-a \cos(t), -a \sin(t), 0) \\ &= -a(\cos(t), \sin(t), 0) = -aN \end{aligned}$$

Portanto  $\frac{D}{dt} \Big|_{t=t_0} \gamma' = (\gamma'')^\top = 0$ , como desejávamos.

**Proposição 2.3** Dado  $p \in M$ , existem vizinhança aberta  $V$  de  $p$  em  $M$  e  $\epsilon, \delta > 0$  tais que está bem definida a aplicação suave

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times \{v \in TM, \|v\| < \epsilon\}$$

onde  $\gamma_v$  é a única geodésica com  $\gamma_v(0) = p$  e  $\gamma_v'(0) = v$ .

Essa proposição garante que dado  $\|v\| < \epsilon$ , então existe  $\gamma_v$  geodésica em um intervalo e é única. O Lema a seguir permite aumentarmos a velocidade de uma geodésica reduzindo seu intervalo, ou vice-versa.

**Lema 2.4 (Homogeneidade)** Sejam  $\gamma_v : (-\delta, \delta) \rightarrow M$  geodésica e  $a \in \mathbb{R}$ . Então a geodésica  $\gamma_{av}$  está definida em  $\left(\frac{-\delta}{|a|}, \frac{\delta}{|a|}\right)$  e  $\gamma_{av}(t) = \gamma_v(at)$ .

**Demonstração:** Considere a curva  $h : \left(\frac{-\delta}{|a|}, \frac{\delta}{|a|}\right) \rightarrow M$  dada por  $h(t) = \gamma_v(at)$ . Então  $h'(t) = a\gamma_v'(t)$ . Logo  $h'(0) = av$  e

$$\frac{D}{dt}h'(t) = \frac{D}{dt}a\gamma_v'(t) = a\frac{D}{dt}\gamma_v'(t) = 0.$$

Assim,  $h$  é uma geodésica. Por unicidade de geodésicas concluímos que  $h(t) = \gamma_{av}(t)$   $\square$

Segue do Lema anterior e Proposição [2.3](#) resultado a seguir:

**Proposição 2.4** Dado  $p \in M$ , existem vizinhança  $V$  de  $p$  em  $M$  e  $\epsilon > 0$  tais que a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma : (-2, 2) \times \{v \in TM, \|v\| < \epsilon\} &\longrightarrow M \\ (v, t) &\longmapsto \gamma_v(t) \end{aligned}$$

está bem definida e é suave.

**Demonstração:** Segue da teoria padrão das Equações Diferenciais Ordinárias.  $\square$

**Definição 2.5** Dado  $p \in M$ , pela homogeneidade, existe aberto  $U_p$  vizinhança aberta de  $0 = 0_p$  em  $TM$  tal que para qualquer  $v \in U_p$  a geodésica  $\gamma_v$  está definida em  $[0, 1]$ . Então a aplicação  $\exp : U_p \rightarrow M$  é definida por

$$\exp(v) = \gamma_v(1).$$

A aplicação exponencial é diferenciável pela Proposição [2.4](#). Utilizaremos a restrição de  $\exp$  a um aberto do espaço tangente  $T_qM$ , isto é,  $\exp_q : B_\epsilon(0) \subset T_qM \rightarrow M$  definindo  $\exp_q(v) = \exp(q, v)$ . Onde  $B_\epsilon(0)$  uma bola aberta de centro na origem  $0$  de  $T_qM$  e de raio  $\epsilon$ .

**Proposição 2.5** Dado  $q \in M$ , existe um  $\epsilon > 0$  tal que  $\exp_q : B_\epsilon(0) \subset T_qM \rightarrow M$  é difeomorfismo de  $B_\epsilon(0)$  sobre aberto de  $M$ .

**Demonstração:** Calculemos  $d(\exp_q)_0$ :

$$d(\exp_q)_0(v) = \frac{d}{dt}(\exp_q(tv)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma_{vt}(1)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\gamma_v(t) \Big|_0 = \gamma'_v(0) = v$$

Logo, para qualquer  $p \in M$  temos que  $d(\exp_q)_0 = I$  sendo  $I$  identidade de  $T_qM$ . Assim, pelo teorema função inversa,  $\exp_q$  é difeomorfismo local numa vizinhança de 0.  $\square$

Se  $\exp_p : U_p \subset T_pM \rightarrow M$  é um difeomorfismo sobre a imagem  $U = \text{Im } \exp|_{U_p}$ , dizemos que  $U$  é uma vizinhança normal de  $p$ . Se  $U_p = B_\epsilon(0)$ , então  $B_\epsilon(p) = \exp_p B_\epsilon(0)$  é denominada bola normal de centro  $p$  e raio  $\epsilon$ .

Observe que por definição para qualquer  $q \in B_\epsilon(p)$  existe um único vetor  $v \in B_\epsilon(0) \subset T_pM$  tal que  $\gamma_v(1) = q$ . Note que  $L(\gamma_v|_{[0,1]}) = \|v\| < \epsilon$ . E mais, usando o Lema de Gauss  $\square$ , podemos concluir que  $d(p, q) = L(\gamma_v|_{[0,1]})$ .

## 3 Grupos de Lie

Um grupo de Lie é um grupo que possui uma estrutura de variedade tal que as operações do grupo são suaves. Em uma série de artigos da década de 1874 à 1884, o matemático norueguês Shophus Lie iniciou o estudo dos grupos de Lie e sua álgebra de Lie (identificada com o espaço tangente à identidade). A motivação original de Lie foi o estudo do grupo das transformações de um espaço como um análogo contínuo do grupo das permutações de um conjunto finito. A relação entre teoria de grupos, topologia e álgebra linear tornou os grupos de Lie e álgebras de Lie ramos da matemática particularmente ricos e vibrantes.

Nesse capítulo introduziremos brevemente os conceitos e resultados iniciais da teoria dos grupos de Lie com o intuito de desenvolver o tema principal da presente dissertação: o Teorema de Slice. As referências aqui usadas foram [5] e [1].

### 1 Definição e Exemplos

**Definição 3.1** *Uma variedade suave  $G$  é considerada um grupo de Lie se  $G$  é um grupo e as aplicações*

$$\begin{aligned} (g, h) \in G \times G &\longmapsto gh \in G \\ g \in G &\longmapsto g^{-1} \in G \end{aligned}$$

são suaves.

**Observação 3.1** *Denotaremos o elemento neutro de um Grupo de Lie pelo símbolo  $e$ , a não ser para grupos mais comuns, como a identidade do grupo das matrizes  $I_n$ , ou 0 elemento neutro da adição do  $\mathbb{R}^n$ .*

**Proposição 3.1** *Se  $G$  é uma variedade suave com estrutura de grupo tal que  $(g, h) \in G \times G \longmapsto gh^{-1}$  suave, então  $G$  é grupo de Lie.*

**Demonstração:** Denote  $m(g, h) = gh^{-1}$  e defina por  $i$  a aplicação inversão, então

$$i(h) = h^{-1} = eh^{-1} = m(e, h).$$

Como  $m$  suave, concluímos que a inversa  $i(h) = h^{-1}$  é suave. Semelhantemente defina  $n(g, h) = gh$ , daí

$$gh = n(g, h) = m(g, i(h))$$

uma vez que  $m, i$  são suaves, temos que aplicação  $n$  também é suave.  $\square$

**Exemplo 3.1** *O conjunto  $GL(n, \mathbb{R})$  das matrizes invertíveis  $n \times n$  com entradas reais munido com a multiplicação de matrizes é um grupo de Lie. Note que como determinante*

é contínuo e  $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\} = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ , segue que  $GL(n, \mathbb{R})$  subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^{n^2}$  e portanto variedade. É conhecido que  $GL(n, \mathbb{R})$  é grupo. Como produto de matrizes é aplicação suave, temos que  $GL(n, \mathbb{R})$  é grupo de Lie.

**Exemplo 3.2** Seja  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  o círculo unitário. Definindo a aplicação  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ , observe que  $f_x = 2x$  e  $f_y = 2y$  onde  $p = (x, y)$ . Logo,  $f_x = f_y = 0$  se, e somente se  $p = (0, 0)$ . Logo  $(0, 0)$  é único ponto crítico. Em particular 0 é valor regular de  $f$ , pois  $(0, 0) \notin f^{-1}(0)$ . Assim, concluímos que  $S^1$  é variedade. Qualquer elemento  $\rho \in S^1$ , pode ser escrito como  $\rho = e^{i\theta} = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  onde  $\theta \in \mathbb{R}$ . Assim, podemos definir em  $S^1$  a seguinte multiplicação

$$e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} := e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Verifica-se que  $(S^1, \cdot)$  é um grupo de Lie cuja identidade é  $e^0 = (1, 0)$  e a inversa de  $e^{i\theta}$  é  $e^{-i\theta}$ .

**Exemplo 3.3** O  $n$ -Toro  $\mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1$  munido com a seguinte multiplicação

$$(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})(e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_n}) = (e^{i(\theta_1 + \varphi_1)}, \dots, e^{i(\theta_n + \varphi_n)})$$

é grupo de Lie.

## 1.1 Métricas Bi-invariantes

**Definição 3.2** Seja  $G$  um grupo de Lie. Dado um elemento  $g \in G$  definimos as translações a esquerda e a direita  $L_g, R_g : G \rightarrow G$  respectivamente por:

$$L_g(h) = gh \text{ e } R_g(h) = hg.$$

A aplicação  $L_g$  pode ser expressa como composição de aplicações suaves

$$m \circ i_g : G \rightarrow G$$

onde  $i_g(h) = (g, h)$  e  $m$  aplicação produto. Segue que  $L_g$  é suave para qualquer  $g \in G$ . Analogamente  $R_g$  também é suave. Ademais  $L_g$  e  $R_g$  são difeomorfismos de  $G$ , pois  $L_{g^{-1}}$  e  $R_{g^{-1}}$  são respectivamente suas inversas.

**Definição 3.3** Uma métrica Riemanniana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  em um grupo de Lie  $G$  é invariante à esquerda se  $L_g$  é uma isometria para todo  $g \in G$ , isto é, se para todo  $g, h \in G$  e  $X, Y \in T_h G$ ,

$$\langle d(L_g)_h X, d(L_g)_h Y \rangle_{gh} = \langle X, Y \rangle_h.$$

Similarmente, uma métrica invariante a direita são aquelas para as quais a translação a direita  $R_g$  é isometria. Note que dado um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$  em  $T_e G$ , é possível definir uma métrica invariante a esquerda, para todo  $g \in G$  e  $X, Y \in T_e G$ , por

$$\langle X, Y \rangle_g := \langle d(L_{g^{-1}})_g X, d(L_{g^{-1}})_g Y \rangle_e,$$

caso invariante à direita é análogo.

**Definição 3.4** A métrica bi-invariante  $Q$  em um grupo de Lie é uma métrica Rimaniana que é simultaneamente invariante a esquerda e a direita.

A extensão natural desses conceitos para  $k$ -formas é que uma  $k$ -forma  $\omega \in \Omega^k(G)$  é invariante a esquerda se coincidir com seu pullback por translações à esquerda, ou seja,  $L_g^*\omega = \omega$  para todo  $g \in G$ . Formas invariantes a direita e bi-invariantes são definidas analogamente. Mais uma vez, dada qualquer  $\omega_e \in \Lambda^k(T_eG)$ , é possível definir uma  $k$ -forma invariante a esquerda  $\omega \in \Omega(G)$ , para todo  $g \in G$  e  $X_i \in T_gG$ ,

$$\omega_g(X_1, \dots, X_n) := \omega_e(d(L_{g^{-1}})_g X_1, \dots, d(L_{g^{-1}})_g X_n).$$

O caso invariante à direita é análogo.

**Proposição 3.2** Todo grupo de Lie compacto admite uma métrica bi-invariante  $Q$ .

**Demonstração:** Seja  $\omega$  uma forma volume invariante a direita em  $G$  e  $\langle, \rangle$  métrica invariante à direita. Defina para todo  $X, Y \in T_xG$

$$Q(X, Y)_x := \int_G \langle dL_g X, dL_g Y \rangle_{gx} \omega$$

Primeiro afirmamos que  $Q$  é invariante. Fixe  $X, Y \in T_xG$  e considere a função  $f : g \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(g) := \langle dL_g X, dL_g Y \rangle_{gx}$ . Então,

$$\begin{aligned} Q(dL_h X, dL_h Y)_{hx} &= \int_G \langle dL_g(dL_h X), dL_g(dL_h Y) \rangle_{g(hx)} \omega \\ &= \int_G \langle dL_{gh} X, dL_{gh} Y \rangle_{(gh)x} \omega \\ &= \int_G f(gh) \omega = \int_G R_h^*(f \omega) = \int_G f \omega \\ &= \int_G \langle dL_g X, dL_g Y \rangle_{gx} \omega = Q(X, Y)_x, \end{aligned}$$

isso prova que  $Q$  é métrica invariante esquerda à esquerda. Temos também

$$\begin{aligned} Q(dR_h X, dR_h Y)_{hx} &= \int_G \langle dL_g(dR_h X), dL_g(dR_h Y) \rangle_{g(hx)} \omega \\ &= \int_G \langle dR_g dL_h X, dR_g dL_h Y \rangle_{(gh)x} \omega \\ &= \int_G \langle dL_g X, dL_g Y \rangle_{gx} \omega = Q(X, Y)_x, \end{aligned}$$

o que prova que  $Q$  é invariante à direita, concluindo a prova.  $\square$

## 1.2 Homomorfismos de Grupos de Lie

Sejam  $G$  e  $H$  grupos de Lie. Chamaremos homomorfismo de grupo de Lie de  $G$  em  $H$  uma aplicação  $F : G \rightarrow H$  suave que é também um homomorfismo de grupos. E chamamos isomorfismo de grupo de Lie se adicionalmente a aplicação  $F$  for difeomorfismo, ou seja, tem inversa que é também homomorfismo de grupos de Lie.



**Exemplo 3.4** Considere  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^*$  grupos de Lie com operação de adição e multiplicação respectivamente. A aplicação

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ t &\longmapsto e^t \end{aligned}$$

é homomorfismo de grupo de Lie.

**Teorema 3.1** Todo homomorfismo de grupos de Lie tem posto constante.

**Demonstração:** Seja  $F : G \longrightarrow H$  um homomorfismo de grupo de Lie, denotemos  $e$  e  $\tilde{e}$  identidades de  $G$  e  $H$  respectivamente.

Suponha  $g_0 \in G$  arbitrário. Mostraremos que  $dF_{g_0}$  tem mesmo posto que  $dF_e$ . Como  $F$  homomorfismo, temos que  $\forall g \in G$

$$F(L_{g_0})(g) = F(g_0 \circ g) = F(g_0)F(g) = L_{F(g_0)}(F(g))$$

Em outras palavras  $(F(L_{g_0}))_e = (L_{F(g_0)}(F))_e$ . Calculando diferencial em ambos os lados

$$dF_{g_0} \circ d(L_{g_0})_e = d(L_{F(g_0)})_{\tilde{e}} \circ dF_e$$

Como  $d(L_{g_0})_e$  e  $d(L_{F(g_0)})_{\tilde{e}}$  são difeomorfismos e composição com difeomorfismo não altera posto de aplicação linear, segue que  $(dF_{g_0})_e$  tem posto constante. □

**Corolário 3.1** Um homomorfismo de grupo de Lie é isomorfismo de grupo de Lie se, e somente se, for bijetivo

**Demonstração:** Segue teorema do posto, pois garante que um homomorfismo bijetivo é um difeomorfismo. □

### 1.3 Subgrupos de Lie

**Definição 3.5** Um subgrupo de Lie de um grupo  $G$  é um subgrupo dotado com uma topologia e estrutura suave, tornando-o uma subvariedade imersa de  $G$ .

**Proposição 3.3** Seja  $G$  um grupo de Lie, suponha  $H \subseteq G$  um subgrupo que é também uma subvariedade mergulhada. Então,  $H$  é subgrupo de Lie.

**Lema 3.1** Suponha  $G$  um grupo de Lie e  $H \subseteq G$  um subgrupo aberto. Então,  $H$  é um subgrupo de Lie mergulhado. Além disso,  $H$  é fechado, por isso é uma união de componentes conexas de  $G$ .

**Proposição 3.4** Seja  $F : G \longrightarrow H$  homomorfismo de grupo de Lie. O  $\ker$  de  $F$  é um subgrupo de Lie, cuja a codimensão é igual ao posto de  $F$ .

**Exemplo 3.5**  $GL^+(n, \mathbb{R}) \subseteq GL(n, \mathbb{R})$  descrito no Exemplo 3.1 é subgrupo aberto, logo um subgrupo de Lie mergulhado.

**Exemplo 3.6** O conjunto  $SL(n, \mathbb{R})$  de  $n \times n$  de matrizes com determinante igual a 1, é chamado grupo especial linear.

## 1.4 Álgebras de Lie

Introduziremos agora, de forma breve, a definição de álgebra de Lie, alguns exemplos e definiremos a álgebra de Lie associada a um grupo de Lie.

**Definição 3.6** Uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é um espaço vetorial dotado por uma aplicação bilinear  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , chamado colchete de Lie, satisfazendo para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ ,

$$(i) [X, Y] = -[Y, X] \text{ (anti-simetria)}$$

$$(ii) [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \text{ (identidade de Jacobi)}$$

**Exemplo 3.7** Seja  $\mathfrak{g}$  um espaço vetorial e definamos o colchete como  $[X, Y] = 0$  para quaisquer  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . Note que, dados  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$  a propriedade anti-simétrica é satisfeita pois  $[X, Y] = 0 = -[Y, X]$ , da mesma forma, não é difícil verificar a identidade de Jacobi nesse exemplo.

**Exemplo 3.8** Uma álgebra associativa arbitrária  $A$  com colchete de Lie definido por

$$[x, y] = xy - yx,$$

para quaisquer  $x, y \in A$ , é uma álgebra de Lie. De fato, vale bilinearidade pois tomando  $a, b \in A$  e um escalar arbitrário  $\alpha$ , então para todo  $x \in A$  fixado, temos

$$\begin{aligned} [\alpha(a+b), x] &= \alpha(a+b)y - y\alpha(a+b) = \alpha ay + \alpha by - y\alpha a - y\alpha b \\ &= \alpha ay - y\alpha a + \alpha by - y\alpha b = \alpha ay - \alpha ya + \alpha by - \alpha yb \\ &= \alpha(ay - ya + by - yb) = \alpha([a, y] + [b, y]) \end{aligned}$$

Além disso, dados  $a, b \in A$ , temos

$$-[b, a] = -(ba - ab) = -ba + ab = [a, b],$$

verificando a anti-simetria. Por fim, verifiquemos a identidade de Jacobi. Dados  $a, b, c \in A$ ,

$$\begin{aligned} [[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] &= [ab - ba, c] + [bc - cb, a] + [ca - ac, b] \\ &= (ab - ba)c - c(ab - ba) + (bc - cb)a - a(bc - cb) + (ca - ac)b - b(ca - ac) \\ &= abc - bac - cab + cba + bca - cba - abc + acb + cab - acb - bca + bac = 0. \end{aligned}$$

**Exemplo 3.9** O conjunto dos campo de vetores de uma variedade suave munido com o colchetes de campos é uma álgebra de Lie de dimensão infinita.

Dado um grupo de Lie  $G$  considere  $\mathfrak{g}$  o conjunto dos campos de vetores invariantes à esquerda. Se  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , então  $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ , pois  $[dL_g X, dL_g Y] = dL_g[X, Y]$  para qualquer  $g \in G$ . E conseqüentemente,  $\mathfrak{g}$  é uma álgebra de Lie quando munida com o colchete de campos. Tal álgebra de Lie é a álgebra de Lie associada ao grupo de Lie  $G$ .

Considere a aplicação  $F : \mathfrak{g} \rightarrow T_e G$  dada por  $F(X) = X(e)$ . Verifica-se que  $F$  é um isomorfismo linear, cuja inversa associa a cada  $v \in T_e G$  o campo invariante a esquerda dado por

$$X_v(g) := d(L_g)_e(v),$$

para qualquer  $g \in G$ . Assim a álgebra de Lie de um grupo de Lie coincidem o espaço tangente à identidade munido do colchete  $[u, v] := [X_u, X_v]$ .

## 4 Ações de Grupos de Lie

Neste capítulo falaremos a respeito das ações de grupos de Lie e alguns resultados relacionados a elas, com intuito de realizarmos a demonstração do Teorema de Slice. Ações em grupos de Lie são aplicações diferenciáveis entre um grupo e uma variedade diferenciável dada por  $\alpha : G \times M \rightarrow M$ , satisfazendo algumas propriedades. A grosso modo, a ação de um grupo de Lie  $G$  sobre uma variedade  $M$  é uma aplicação suave que associa a cada elemento do grupo um difeomorfismo de  $M$  tal que a composição de tais difeomorfismos dialoga bem com a operação do grupo. A referência [1] serviu inspiração para escrita deste capítulo.

### 1 Ações de Grupos de Lie: Definições e Exemplos

**Definição 4.1** *Seja  $G$  um grupo de Lie e  $M$  uma variedade diferenciável. A aplicação diferenciável  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  é chamada ação a esquerda de  $G$  em  $M$ , se:*

$$(i) \quad \alpha(e, x) = e \cdot x = x, \forall x \in M.$$

$$(ii) \quad \alpha(g_1, \alpha(g_2, x)) = \alpha(g_1 \cdot g_2, x) \forall g_1, g_2 \in G \text{ e } \forall x \in M.$$

De forma análoga, chamamos de ação a direita de  $G$  sobre  $M$  a aplicação diferenciável  $\alpha : M \times G \rightarrow M$  que satisfaz as condições do enunciado.

**Observação 4.1** *Frequentemente denotamos  $\alpha(g, p) = g \cdot p$ .*

**Exemplo 4.1** *Considere  $G = GL(n, \mathbb{R})$ ,  $M = \mathbb{R}^n$  e a aplicação  $\alpha(A, x) = Ax$ . Observe que  $\alpha$  é uma aplicação suave, uma vez que é produto de matrizes. Temos ainda que a aplicação  $\alpha$  satisfaz*

$$1. \quad \alpha(I_n, x) = I_n \cdot x = x, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$2. \quad \alpha(A, \alpha(B, x)) = \alpha(A, Bx) = A(Bx) = (AB)x = \alpha(AB, x), \forall A, B \in G \text{ e } \forall x \in M,$$

*provando que aplicação  $\alpha$  é uma ação de grupo de Lie.*

Um fato importante a respeito das ações de Lie é que sempre podemos converter uma ação à direita em uma ação à esquerda através do truque de definir  $g \cdot p$  por  $p \cdot g^{-1}$ , o mesmo vale para convertermos uma ação à esquerda a uma ação à direita. Diante disso, não há perda de generalidade em focarmos nas ações a esquerda.

**Proposição 4.1** *Considere a ação suave  $\alpha : G \times M \rightarrow M$ .*

(i) Cada  $X \in \mathfrak{g}$  induz um campo vetorial suave em  $M$ , chamado ação campo, por

$$X^*(p) := \left. \frac{d}{dt} \alpha(\exp(tX), p) \right|_{t=0}.$$

Em particular,  $X^*$  é tangente as órbitas.

(ii) O fluxo de  $X^*$  é dado por  $\varphi_t^{X^*} = \alpha^{\exp(tX)}$ .

**Demonstração:** Dada função suave  $f$  em  $M$ ,  $f \circ \alpha(\exp(tX), p)$  é uma função suave de  $\mathbb{R} \times M$  e portanto

$$X^*(f) = \frac{d}{dt} (f \circ \alpha(\exp(tX), p))$$

é suave.

Dado  $p \in M$  defina  $\gamma_p(t) = \alpha^{\exp(tX)}(p) = \alpha(\exp(tX), p)$ . Note que  $\gamma(0) = \alpha(e, p) = p$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \gamma_p'(t_0) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_p(t + t_0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha(\exp((t + t_0)X), p) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha(\exp(tX), \alpha(\exp(t_0X), p)) \\ &= X^*(\alpha(\exp(t_0X), p)) = X^*(\gamma_p(t_0)) \end{aligned}$$

logo  $\gamma_p$  é curva integral de  $X^*$  passando por  $p$  e isso implica o item (ii).  $\square$

**Definição 4.2** Seja  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  uma ação à esquerda e  $x \in M$ . O subgrupo

$$G_x := \{g \in G : \alpha(g, x) = x\} \subset G$$

é chamado grupo de isotropia ou estabilizador de  $x \in M$ . E o conjunto

$$G(x) := \{\alpha(g, x) : g \in G\} \subset M$$

é chamado de órbita de  $\alpha$  passando por  $x \in M$ . Se  $G(x) = \{x\}$  chamamos  $x$  de ponto fixo em uma ação.

**Observação 4.2** Qualquer grupo de isotropia de uma ação  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  é um subgrupo fechado de  $G$ .

O subgrupo  $\bigcap_{x \in M} G_x$  é chamado núcleo ineficaz da ação. No caso em que esse subgrupo é trivial  $\{e\}$ , a ação é eficaz. Além disso, se  $G_x = \{e\}$ , para todo  $x \in M$ , chamamos de ação livre. E ainda, se para todo  $x, y \in M$ , existe  $g \in G$  com  $\alpha(g, x) = y$ , a ação é dita transitiva. Observe que o grupo de isotropia  $G_x$  de um ponto fixo é todo grupo  $G$ , e uma ação com pontos fixos não pode ser livre.

Fixados  $g \in G$  e  $x \in M$  definimos as seguintes aplicações suaves auxiliares:

$$\begin{aligned} \alpha^g : M &\longrightarrow M & \alpha_x : G &\longrightarrow M \\ y &\longmapsto \alpha(g, y) & h &\longmapsto \alpha(h, x). \end{aligned}$$

Verifica-se que  $\alpha^g$  é um difeomorfismo, pois  $\alpha^{g^{-1}}$  é sua inversa, que é suave. Além disso, verifica-se que a órbita  $G(x)$  coincide com imagem da aplicação  $\alpha_x$ .

**Exemplo 4.2** *Seja  $G = SO_2$ . Vamos determinar as órbitas e os subgrupos de isotropia da ação*

$$\begin{aligned} \alpha : G \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (A, x) &\longmapsto Ax. \end{aligned}$$

Uma vez que matrizes ortogonais determinam rotações em  $\mathbb{R}^2$ , a órbita dessa ação passando por  $x \in \mathbb{R}^2$  é  $G(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = \|y\|\}$ , que é o círculo em  $\mathbb{R}^2$  centrado na origem de raio  $r = \|x\|$ .

Se  $x$  é não nulo, o grupo de isotropia  $G_x$  coincide com o unitário da unidade  $\{I\}$ . Verifiquemos essa afirmação. Considere uma base ortonormal  $\beta = \{x, y\}$  e  $A \in G_x$ . Note que  $Ax = x$  e

$$Ay = \langle Ay, x \rangle x + \langle Ay, y \rangle y = \langle Ay, Ax \rangle x + \langle Ay, y \rangle y = \langle y, x \rangle x + \langle Ay, y \rangle y = \langle Ay, y \rangle y$$

Essa equação implica em particular, que

$$\langle Ay, y \rangle^2 = \langle Ay, Ay \rangle = \langle y, y \rangle = 1.$$

Logo  $\langle Ay, y \rangle = \pm 1$ . E como  $\langle Ax, y \rangle = \langle Ay, x \rangle = 0$ . Temos

$$[A]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } [A]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado,  $\det A > 0$ , pois  $A \in SO_2$ , e portanto  $[A]_\beta = I$ . Para o caso em que  $x = 0$ ,  $x$  é ponto fixo da ação, ou seja,  $\alpha(A, x) = x$  para qualquer  $A \in G$ . Logo  $G(0) = 0$  e  $G_0 = \{A \in SO_2 : \alpha(A, 0) = 0\} = SO_2$ .

**Exemplo 4.3** *Consideremos agora a ação de  $G = SO_3$  em  $M = \mathbb{R}^3$  dada por  $\alpha(A, p) = Ap$ . Com raciocínio semelhante ao exemplo 4.2 temos que a órbita de  $\alpha$  passando por  $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  será  $G(p) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = \|p\|^2\}$  que é a esfera de raio  $\|p\|$  centrada na origem. Em particular, se  $p = 0$ , então a órbita é a origem. Por outro lado, se  $p \neq 0$ , então o grupo de isotropia  $G_p$  é isomorfo a  $SO_2$ . De fato, considere  $W = p^\perp$ . Inicialmente verifiquemos que  $W$  é  $A$ -invariante: dado  $v \in W$*

$$\langle Av, p \rangle = \langle Av, Ap \rangle = \langle v, p \rangle = 0$$

e portanto  $Av \in W$ , como desejávamos.

Consideremos agora  $\beta = \{\bar{p} = \frac{p}{\|p\|}, u_1, u_2\}$  base ortonormal positivamente orientada com  $u_1, u_2 \in W$ . Considere a matriz que representa  $A$  na base  $\beta$

$$[A]_\beta = \begin{pmatrix} \langle A\bar{p}, \bar{p} \rangle & \langle Au_1, \bar{p} \rangle & \langle Au_2, \bar{p} \rangle \\ \langle A\bar{p}, u_1 \rangle & \langle Au_1, u_1 \rangle & \langle Au_2, u_1 \rangle \\ \langle A\bar{p}, u_2 \rangle & \langle Au_1, u_2 \rangle & \langle Au_2, u_2 \rangle \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \bar{A} \end{array} \right)$$

onde  $\bar{A} := A|_W \in \mathbb{M}_{2 \times 2} \in (\mathbb{R})$ . E assim,  $\det \bar{A} = \det A > 0$  e

$$\langle \bar{A}u, \bar{A}v \rangle = \langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle,$$

para qualquer  $u, v \in \mathbb{R}^2$ . Note que no segundo termo, identificamos  $u = (u_1, u_2)$  com  $(0, u_1, u_2)$  e o mesmo para  $v$ . Portanto,  $\bar{A} \in SO_2$ . Defina as aplicações suaves  $\phi : G_p \rightarrow SO_2$  e  $\bar{\phi} : SO_2 \rightarrow G_p$  respectivamente por  $\phi(A) = A|_W$  e

$$\bar{\phi}(A) = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right).$$

Observe que  $\phi^{-1} = \bar{\phi}$ , e em particular,  $\bar{\phi}$  é um difeomorfismo. Por fim note que  $\bar{\phi}(A.B) = \bar{\phi}(A).\bar{\phi}(B)$ . E portanto  $\bar{\phi}$  é um isomorfismo de grupos de Lie.

**Exemplo 4.4** Sejam  $G = SO_2 \times \mathbb{R}$  e  $\alpha(A, (x_1, x_2, x_3)) = (A(x_1, x_2), x_3 + b)$  A órbita de  $\alpha$  de  $p = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  será um cilindro de raio  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  se  $(x_1, x_2) \neq 0$ , e será o eixo  $x_3$  caso contrário. O grupo de isotropia  $G_x$  de  $x = (x_1, x_2, x_3)$  é isomorfo a  $SO_2$  se  $(x_1, x_2) \neq 0$ . E caso contrário  $G_x = \{I\}$ . De fato, por itens anteriores temos que  $A(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \iff A = I$  e  $x_3 + b = x_3 \iff b = 0$ , que formam o elemento neutro  $(I, 0)$  do grupo  $G$ .

**Exemplo 4.5** Considere a ação  $\alpha$  de  $G = SO_2$  em  $M = \mathbb{R}^3$  dada por  $\alpha(A, (x_1, x_2, x_3)) = (A(x_1, x_2), x_3)$ . Se  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , então a órbita  $G(x)$  coincidirá como o círculo de raio  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  e centro  $(0, 0, x_3)$ . Em particular, se  $(x_1, x_2) = 0$ ,  $G(x) = x$ . Utilizando argumentos análogos aos casos anteriores, concluímos que o grupo de isotropia  $G_x = I$ .

**Definição 4.3** Considere  $\alpha_1 : G \times M_1 \rightarrow M_1$  e  $\alpha_2 : G \times M_2 \rightarrow M_2$  ações à esquerda. Uma aplicação  $f : M_1 \rightarrow M_2$  é chamada equivariante se  $\alpha_2(g, f(x)) = f(\alpha_1(g, x))$ , para quaisquer  $x \in M_1$  e  $g \in G$ .

**Exemplo 4.6** Seja  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  uma ação. Verifiquemos que  $\bar{\alpha} : G \times TM \rightarrow TM$  definida por  $\bar{\alpha}(g, (p, v)) := (\alpha(g, p), d(\alpha^g)_p v)$  é uma ação de  $G$  em  $TM$ , e que a projeção canônica  $\pi : TM \rightarrow M$ , dada por  $\pi(p, v) = p$  é uma aplicação  $G$ -equivariante. De fato,  $\bar{\alpha}$  é uma ação, pois

$$(i) \bar{\alpha}(I, (p, v)) = (\alpha(I, p), d(\alpha^I)_p v) = (p, v)$$

$$(ii) \bar{\alpha}(g_1, \bar{\alpha}(g_2, (p, v))) = \bar{\alpha}(g_1, (\alpha(g_2, p), d(\alpha^{g_2})_p v)) = (\alpha(g_1, \alpha(g_2, p)), (d\alpha^{g_1})_{\alpha(g_2, p)}(d\alpha^{g_2})_p v) = (\alpha(g_1 g_2, p), d(\alpha^{g_1 \circ g_2})_p v) = \bar{\alpha}(g_1 g_2, (p, v)).$$

Como a aplicação  $\pi$  satisfaz a condição da definição [4.3](#),

$$\pi(\bar{\alpha}(g, (p, v))) = \pi((\alpha(g, p), d(\alpha^g)_p v)) = \alpha(g, p) = \alpha(g, \pi(p, v)),$$

concluímos que  $\pi$  é  $G$ -equivariante.

**Exemplo 4.7** Seja  $\alpha : G \times M \longrightarrow M$  ação à esquerda. Observe que o grupo de isotropia  $G_x$  muda por conjugação conforme  $x$  se move ao longo de sua órbita  $G(x)$ . Mais precisamente,  $G_{\alpha(g,x)} = gG_xg^{-1}$ . De fato, fixemos  $h \in G_{\alpha(g,x)}$ , segue por definição que  $\alpha(h, \alpha(g,x)) = \alpha(g,x) \Leftrightarrow hgx = gx \Leftrightarrow g^{-1}hgx = g^{-1}g \Leftrightarrow g^{-1}hgx = x \Leftrightarrow h \in g^{-1}G_xg$

**Proposição 4.2** Se  $\alpha$  é uma ação à esquerda em uma variedade  $M$ , então

$$\ker d(\alpha_x)_{g_0} = T_{g_0}(g_0G_x).$$

Se  $\alpha$  ação a direita, então  $\ker d(\alpha_x)_{g_0} = T_{g_0}(G_xg_0)$ .

**Demonstração:** Dado  $v \in T_{g_0}(g_0G_x)$  tome  $\gamma = g_0\gamma_0$  curva suave em  $G$  onde  $\gamma_0$  é uma curva suave em  $G_x$  tais que  $\gamma(0) = g_0$  e  $\gamma'(0) = v$ . Logo

$$\begin{aligned} d\alpha_x(v) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha(\gamma(t), x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha(g_0\gamma_0(t), x) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha(g_0, \alpha(\gamma_0(t), x)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha(g_0, x) = 0 \end{aligned}$$

e portanto  $v \in \ker d(\alpha_x)_{g_0}$ .

Por outro lado,  $\dim d(\alpha_x)_{g_0} = \dim G - \dim \text{Im } d(\alpha_x)_{g_0}$  e

$$\dim \text{Im } d(\alpha_x)_{g_0} = \dim G(x) = \dim G - \dim G_x.$$

Logo  $\dim d(\alpha_x)_{g_0} = \dim T_{g_0}(g_0G_x)$ , pois  $\dim G_x = \dim T_{g_0}(g_0G_x)$ . □

**Definição 4.4** Uma ação  $\alpha : G \times M \longrightarrow M$  é própria se a aplicação

$$G \times M \ni (g, x) \longmapsto (\alpha(g, x), x) \in M \times M \tag{4.1}$$

é própria, isto é, se a pré-imagem de qualquer subconjunto compacto de  $M \times M$  sobre [4.1](#) é subconjunto compacto de  $G \times M$ .

Como a pré-imagem de  $(x, x) \in M \times M$  sob a aplicação acima é  $G_x \times \{x\}$ , o grupo de isotropia é um fechado de  $G$ , e quando a ação  $\alpha$  for própria,  $G_x$  é compacto.

**Proposição 4.3** Uma ação  $\alpha : G \times M \longrightarrow M$  é própria se, e somente se, para qualquer sequência  $\{g_n\} \in G$  e qualquer sequência convergente  $\{x_n\} \in M$  tal que  $\{\alpha(g_n, x_n)\}$  é convergente, então  $\{g_n\}$  admite subsequência convergente.

**Teorema 4.1** Seja  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  uma ação a esquerda e defina  $\tilde{\alpha} : G/H \rightarrow M$  por

$$\tilde{\alpha}_p \circ \rho = \alpha_p,$$

onde  $H = G_p$  é o grupo de isotropia de  $p \in M$  e  $\rho : G \rightarrow G/H$  é a aplicação quociente. Então  $\tilde{\alpha}_p$  é uma imersão injetora  $G$ -equivariante cuja imagem coincide com a órbita  $G(p)$ . Em particular, uma órbita  $G(p)$  é uma subvariedade imersa tal que

$$T_pG(p) = d\tilde{\alpha}_p(\mathfrak{g}).$$

Se adicionalmente  $\alpha$  for uma ação própria, então  $G(p)$  é subvariedade mergulhada.



**Demonstração:** Vide [1]. □

**Definição 4.5** *Seja  $(M, \langle, \rangle)$  uma variedade Riemanniana. Uma ação  $\alpha : G \times (M, \langle, \rangle) \rightarrow (M, \langle, \rangle)$  é uma ação isométrica se para qualquer  $g \in G$  a aplicação  $\alpha_g$  é uma isometria de  $(M, \langle, \rangle)$ .*

**Exemplo 4.8** *A ação canônica de qualquer subgrupo de  $O(n)$  no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$  é uma ação isométrica.*

**Observação 4.3** *Seja  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  uma ação a esquerda. As órbitas*

$$\mathcal{F}_G = \{G(p); p \in M\}$$

*formam uma partição de  $M$  por subvariedades imersas, pelo Teorema 4.1. A Proposição 4.1, a partição  $\mathcal{F}_G$  constitui uma folheação singular. Em particular, se  $G_p = \text{Id}$  para qualquer  $p \in M$ , então  $\mathcal{F}_G$  é uma folheação regular, que é dada localmente como pré-imagem de submersão.*

*Se  $(M, \langle, \rangle)$  é uma variedade Riemanniana e  $\alpha$  é uma ação isométrica em  $(M, \langle, \rangle)$ , então a folheação  $\mathcal{F}_G$  é uma folheação Riemanniana singular, ou seja, é uma folheação singular tal que qualquer geodésica que é ortogonal a uma órbita, segue ortogonal a qualquer órbita que encontrar. Quando  $\mathcal{F}_G$  é uma folheação regular, localmente é dada por uma submersão Riemanniana.*

## 2 Teorema de Slice

Nesta seção falaremos a respeito do Teorema de Slice. Esse teorema foi provado inicialmente por Koszul e tem sido ferramenta fundamental na Teoria dos grupos de transformações. Tal resultado permite reduzir o estudo de uma ação de grupo de Lie próximo a uma órbita ao estudo da geometria transversal à órbita. E outra consequência importante é a existência de vizinhança tubular de uma órbita. A referência aqui usada será [1].

**Definição 4.6** *Seja  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  uma ação. Um slice em  $x_0$  é uma subvariedade mergulhada  $S_{x_0}$  contendo  $x_0$  e satisfazendo as seguintes propriedades.*

1.  $T_{x_0}M = T_{x_0}G(x_0) \oplus T_{x_0}S_{x_0}$  e  $T_xM = T_xG(x) + T_xS_{x_0}$ ,  $\forall x \in S_{x_0}$ .
2.  $S_{x_0}$  é invariante por  $G_{x_0}$ , i.e., se  $x \in S_{x_0}$  e  $g \in G_{x_0}$ , então  $\alpha(g, x) \in S_{x_0}$ .
3. Se  $g \in G$  deixa  $S_{x_0}$  invariante (ou seja,  $\alpha(g, x) \in S_{x_0}, \forall x \in S_{x_0}$ ), então  $g \in G_{x_0}$ .

**Exemplo 4.9** *Considere a ação*

$$\begin{aligned} \alpha : (SO_2 \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ ((A, r), x) &\longmapsto (A(x_1, x_2), x_3 + r) \end{aligned}$$

Vamos construir um slice passando por  $x$  para essa ação. Suponha inicialmente o ponto  $x = (0, 0, x_3)$ . Considere uma curva suave  $\gamma = (v, 0, g(v))$  com  $v \in (-\epsilon, \epsilon)$  tal que  $\gamma(0) = x$  e  $g(-v) = v$ . Agora defina a superfície de revolução gerada pela curva  $\gamma$  em torno do eixo  $x_3$ :

$$\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, g(v)). \quad (4.2)$$

Verifica-se que tal superfície é um slice passando por  $x$ .

**Lema 4.1** *Seja  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  ação à esquerda. Dado  $x_0 \in M$ , existem  $U$  vizinhança aberta de  $x_0$  e  $\Lambda = \{X_1, \dots, X_k\}$  campos em  $U$  tais que*

1.  $\Lambda$  é linearmente independente;
2.  $\Lambda(p) = \{X_1(p), \dots, X_k(p)\} \subset T_p G(p), \forall p \in U$ ;
3.  $\Lambda(x_0)$  é base para  $T_{x_0} G(x_0)$ .

**Demonstração:** Segue da Proposição 4.1 e por continuidade.  $\square$

**Teorema 4.2** *Seja  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  uma ação própria e  $x_0 \in M$ . Então existe um slice  $S_{x_0}$  no ponto  $x_0$ .*

**Demonstração:** Sejam  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  uma ação própria,  $H$  subgrupo de isotropia em  $x_0$  e  $\omega$  uma forma volume invariante à direita em  $H$ . Considere a métrica Riemanniana definida por:

$$\langle X, Y \rangle_p := \int_H \ll d\alpha_g X, d\alpha_g Y \gg_{\alpha(g,p)} \omega$$

onde  $\ll, \gg$  é uma métrica Riemanniana arbitrária em  $M$ . Afirimo que a subação do grupo de isotropia  $H = G_{x_0}$  é uma ação isométrica. De fato, se  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$f(g_0) = \ll d\alpha_{g_0}(X), d\alpha_{g_0}(Y) \gg_{\alpha(g_0,p)} \quad (4.3)$$

para qualquer  $(g_0, p) \in H \times M$  e  $X, Y \in T_p M$  fixados, então pelo Teorema Mudança de Variável 1.8

$$\begin{aligned} \langle d\alpha_{g_0}(X), d\alpha_{g_0}(Y) \rangle_{\alpha(g_0,p)} &:= \int_H \ll d\alpha_g(d\alpha_{g_0}X), d\alpha_g(d\alpha_{g_0}Y) \gg_{\alpha(g,\alpha(g_0,p))} \omega \\ &= \int_H \ll d(\alpha_g \circ \alpha_{g_0})(X), d(\alpha_g \circ \alpha_{g_0})(Y) \gg_{\alpha(g_0,p)} \omega \\ &= \int_H \ll d(\alpha_{g \cdot g_0})(X), d(\alpha_{g \cdot g_0})(Y) \gg_{\alpha(g_0,p)} \omega \\ &= \int_H \ll d(\alpha_{R_{g_0}(g)})(X), d(\alpha_{R_{g_0}(g)})(Y) \gg_{\alpha(g_0,p)} R_{g_0}^* \omega \\ &= \int_H f(R_{g_0}(g)) R_{g_0}^* \omega \\ &= \int_H R_{g_0}^*(f\omega) \\ &= \int_{R_{g_0}(H)} (f\omega) \\ &= \int_H f\omega \\ &= \int_H \ll d\alpha_g(X), d\alpha_g(Y) \gg_{\alpha(g,p)} \omega \\ &= \langle X, Y \rangle_p. \end{aligned}$$

Temos ainda que dado  $g \in H$ , o operador linear  $d(\alpha_g)_{x_0} : T_{x_0}M \rightarrow T_{x_0}M$  deixa o espaço tangente  $T_{x_0}G(x_0)$  invariante. De fato, dado  $v \in T_{x_0}G(x_0)$ , existe  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G(x_0)$  tal que  $\gamma(0) = x_0$  e  $\gamma'(0) = v$ . Logo

$$d\alpha_g(v) = d\alpha_g(\gamma'(0)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha_g(\gamma(t)).$$

Observe que  $\alpha_g(x_0) = x_0$  e  $\alpha_g(\gamma(t)) \in G(x_0)$ , portanto

$$d\alpha_g(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha_g(\gamma(t)) \in T_{x_0}G(x_0).$$

Ademais  $d\alpha_g(T_{x_0}G(x_0)) = T_{x_0}G(x_0)$ , pois  $\alpha_g$  é difeomorfismo e pelo Teorema do Núcleo e Imagem,  $\dim d\alpha_g(T_{x_0}G(x_0)) = \dim T_{x_0}G(x_0)$ .

Portanto, como  $H$  age por isometrias, concluímos que o diferencial  $d\alpha_g$  em  $x_0$  deixa invariante o complemento ortogonal a  $T_{x_0}G(x_0)$  com respeito à métrica  $\langle\langle, \rangle\rangle$ .

Vamos agora definir um candidato a *slice* em  $x_0$  por

$$S_{x_0} := \exp_{x_0}(\bar{B}) \tag{4.4}$$

com  $B = B_\epsilon(0) \cap (T_{x_0}G(x_0))^\perp$  onde  $B_\epsilon(0) \subset T_{x_0}M$  é uma bola normal.

Verificaremos nesse parágrafo a condição 1 da definição 4.6. Dado  $x \in S_{x_0}$  seja  $v = \exp_{x_0}^{-1}(x) \in B$ . Logo, por construção,

$$\begin{aligned} T_x S_{x_0} &= d(\exp_{x_0})_v(T_v B) \\ &= d(\exp_{x_0})_v(T_{x_0}G(x_0))^\perp. \end{aligned}$$

Em particular, para  $x = x_0$  temos que  $d(\exp_{x_0})_0 = I$ . E portanto  $T_{x_0}S_{x_0} = (T_{x_0}G(x_0))^\perp$  e

$$T_{x_0}G(x_0) \oplus T_{x_0}S_{x_0} = T_{x_0}M.$$

Para concluirmos a prova do item 1 da definição 4.6, precisamos verificar que temos uma soma para qualquer  $x \in S_{x_0}$ :  $T_x M = T_x G(x_0) + T_x S_{x_0}$ . Seja  $\{Y_{k+1}, \dots, Y_{k+s}\}$  referencial local de  $S_{x_0}$  em torno de  $x_0$ , ou seja, existe  $\tilde{V}$  vizinhança aberta de  $x_0$  em  $S_{x_0}$  tal que  $\{Y_{k+1}(x), \dots, Y_{k+s}(x)\}$  é base  $T_x S_{x_0}$ , para todo  $x$  em  $\tilde{V}$ . Sejam  $X_1, \dots, X_k$  campos definidos no Lema 4.1. Agora considere  $\left\{ \frac{\partial}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial X_n} \right\}$  referencial local de  $M$  em torno de  $x_0$ . Defina

$$\begin{aligned} f : \tilde{V} \cap U &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \det(a_{ij}), \end{aligned}$$

onde  $a_{ij} : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções suaves tais que  $X_i = \sum_j a_{ij} \frac{\partial}{\partial X_j}$  para  $i = 1, \dots, k$  e  $Y_i = \sum_j a_{ij} \frac{\partial}{\partial X_j}$  para  $i = k+1, \dots, n$ . Note que  $f(x_0) \neq 0$ , pois por construção

$$\{X_1(x_0), \dots, X_k(x_0), Y_{k+1}(x_0), \dots, Y_{k+s}(x_0)\}$$

é base para  $T_{x_0}M$ . Por continuidade, existe  $V$  vizinhança aberta de  $x_0$  em  $S_{x_0}$  tal que  $f(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in \tilde{V}$ . Logo  $\{X_1(x), \dots, X_k(x), Y_{k+1}(x), \dots, Y_{k+s}(x)\}$  é linearmente independente e como  $\dim M = k + s$  concluímos que também é base para  $T_xM$ , para todo  $x \in V \subset S_{x_0}$ . Como por construção  $\{X_1(x), \dots, X_k(x)\} \subset T_xG(x)$  e  $\{Y_{k+1}(x), \dots, Y_{k+s}(x)\}$  é base de  $T_xS_{x_0}$ , concluímos que  $T_xM = T_xG(x) + T_xS_{x_0}$ .

Verifiquemos agora a condição 2, isto é,  $S_{x_0}$  é invariante por  $H$ . Dado  $x \in S_{x_0}$  existe  $v \in B$  tal que  $x = \beta_v(1)$ , onde  $\beta_v(t) = \exp(tv)$  é a geodésica com  $\beta'_v(0) = v$  e  $\beta_v(0) = x_0$ . Dado  $g \in H$  defina a curva

$$\tilde{\beta}(t) = \alpha_g(\beta_v(t)).$$

Note que  $\tilde{\beta}(0) = \alpha_g(x_0) = x_0$ . Além disso, como  $\alpha_g$  é isometria e  $d(\alpha_g)_{x_0}$  deixa  $B$  invariante, temos que  $\tilde{\beta}$  é a geodésica tal que

$$\tilde{\beta}'(0) = d\alpha_g(\beta'_v(0)) = d\alpha_g(v) \in B.$$

Consequentemente  $\tilde{\beta}$  está contida em  $S_{x_0}$  por definição. Portanto

$$\alpha_g(x) = \alpha_g(\beta_v(1)) = \tilde{\beta}(1) = \exp_{x_0} \tilde{\beta}'(0) \in S_{x_0},$$

pois  $\tilde{\beta}'(0) \in B$ . Assim concluímos que  $\alpha_g(x) \in S_{x_0}$ .

Suponhamos que o item 3 não é válido para todo  $\epsilon > 0$ , em particular para  $\epsilon = \frac{1}{n}$ . Logo existem seqüências  $\{x_n\} \in S_{x_0}$  e  $\{g_n\}$  em  $G$  tais que  $\alpha(g_n, x_n) \in S_{x_0}$  e  $g_n \notin H$ . Como consequência

$$x_n \longmapsto x_0 \quad \text{e} \quad \alpha(g_n, x_n) \longmapsto x_0. \tag{4.5}$$

Uma vez que  $\alpha$  é ação própria, segue da Proposição 4.3, que existe subsequência convergente de  $\{g_n\}$ , digamos

$$g_n \longmapsto g \in G.$$

Por continuidade e pela equação 4.5 temos que

$$x_0 = \lim \alpha(g_n, x_n) = \alpha(\lim g_n, x_0) = \alpha(g, x_0).$$

Logo  $g \in H$ . Defina a seqüência  $\{\tilde{g}_n\} := \{g^{-1}g_n\}$ . Então,

$$\alpha(\tilde{g}_n, x_n) = \alpha(g^{-1}g_n, x_n) = \alpha(g^{-1}, \alpha(g_n, x_n))$$

como  $g^{-1} \in H$  e  $\alpha(g_n, x_n) \in S_{x_0}$  concluímos pelo item 2 da definição que  $\alpha(\tilde{g}_n, x_n) \in S_{x_0}$ .

Nosso intuito agora é utilizar o Teorema da Função Inversa para mostrarmos que  $\alpha(\tilde{g}_n, x_n) \notin S_{x_0}$ , que é contradição. Observe que por construção  $\tilde{g}_n \notin H$ ,  $\lim \tilde{g}_n = e$  e  $\lim(\tilde{g}_n, x_n) = x_0$ .

Sejam  $W$  subespaço de  $T_eG$  de modo que  $T_eG = W \oplus T_eH$  e  $C = \exp U$  é subvariedade de  $G$  contendo  $e$  para alguma subvariedade aberta  $U \subset W$  com  $0 \in U$ .

**Afirmção 4.1** Para todo  $\tilde{g}_n$  próximo da identidade, existem  $c_n \in C$  e  $h_n \in H$  tais que  $\tilde{g}_n = c_n h_n$ .

**Demonstração:** Considere a função  $f : C \times H \rightarrow G$  dada por  $f(c, h) = c.h$ . Note que  $df_e$  é um isomorfismo linear. Logo pelo Teorema da Função Inversa, existem vizinhanças abertas  $U_0$  de  $p$  em  $T_e G$  e  $V_0$  de  $e$  em  $G$  tais que  $f|_{(U_0)} : U_0 \rightarrow V_0$  é um difeomorfismo. Isso nos permite concluir a afirmação.  $\square$

Além disso, considere aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : C \times S_{x_0} &\longrightarrow M \\ (g, x) &\longmapsto \alpha(g, x). \end{aligned}$$

**Afirmção 4.2** A aplicação  $d\varphi_{(e, x_0)} : T_{(e, x_0)}(C \times S_{x_0}) \longrightarrow T_{x_0} M$  é isomorfismo linear.

**Demonstração:** Seja  $d\varphi_{(e, x_0)} : T_{(e, x_0)}(C \times S_{x_0}) \longrightarrow T_{x_0} M$ , onde  $T_{(e, x_0)}(C \times S_{x_0}) = (T_e C \times \{0\}) + (\{0\} \times T_{x_0} S_{x_0})$ . Calculemos  $d\varphi_{(e, x_0)}(X)$  com  $X = (x_1, x_2)$ . Para isso, consideremos uma curva  $\gamma(t) = (g(t), x(t)) \subset (C \times S_{x_0})$  tal que  $\gamma(0) = (e, x_0)$  e  $\gamma'(0) = X$ .

Caso 1: Suponha que  $x_2 = 0$ . Nesse caso, podemos tomar  $\gamma(t) = (g(t), x_0)$ , assim  $\gamma'(t) = (g'(t), 0)$  e para  $t = 0$  concluímos  $g'(0) = x_1$ . Logo

$$d\varphi_{(e, x_0)}(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha(g(t), x_0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha_{x_0}(g(t)) = d(\alpha_{x_0})_e(x_1).$$

Portanto,

$$d\varphi_{(e, x_0)}(T_e C \times \{0\}) = d(\alpha_{x_0})_e(T_e C) \quad (4.6)$$

Caso 2: Suponha que  $x_1 = 0$  e tome  $\gamma(t) = (e, x(t))$  com  $x(0) = x_0$  e  $x'(0) = x_2$ . Logo

$$d\varphi_{(e, x_0)}(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha(e, x(t)) = x'(0) = x_2.$$

Portanto,

$$d\varphi_{(e, x_0)}(\{0\} \times T_{x_0} S_{x_0}) = I. \quad (4.7)$$

Note que,

$$\begin{aligned} d\varphi_{(e, x_0)}(T_{(e, x_0)}(C \times S_{x_0})) &= d\varphi_{(e, x_0)}(T_e C \times \{0\}) \oplus d\varphi_{(e, x_0)}(\{0\} \times T_{x_0} S_{x_0}) \\ &= d(\alpha_{x_0})_e(T_e C) \oplus T_{x_0} S_{x_0} \end{aligned}$$

Por outro lado, segue da Proposição 4.2 que  $\ker(d\alpha_{x_0}) = T_e H$ . Assim,

$$\begin{aligned} d(\alpha_{x_0})_e(T_e C) &= d(\alpha_{x_0})_e(T_e H + T_e C) \\ &= d(\alpha_{x_0})_e(T_e G) \end{aligned}$$

Segue do item (1) da definição que

$$\begin{aligned} d\varphi_{(e, x_0)}(T_{(e, x_0)}(C \times S_{x_0})) &= d(\alpha_{x_0})_e(T_e G) \oplus T_{x_0} S_{x_0} \\ &= T_{x_0} M \end{aligned}$$

Logo,  $d\varphi_{(e,x_0)}$  é sobrejetora. Provemos agora que  $d\varphi_{(e,x_0)}$  é injetora. De fato, seja

$$0 = d\varphi_{(e,x_0)}(x_1, x_2) = d\alpha_{x_0}(x_1) + x_2$$

Logo  $d\alpha_{x_0}(x_1) = -x_2 \in T_{x_0}S_{x_0}$ , porém  $d\alpha_{x_0}(x_1) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha(g(t), x_0) \in T_{x_0}G(x_0)$  e como  $T_{x_0}S_{x_0} \cap T_{x_0}G(x_0) = \{0\}$  segue que

$$0 = x_2 = d(\alpha_{x_0})_e(x_1)$$

Logo  $x_1 \in \ker(d\alpha_{x_0})_e \cap T_eC = \{0\}$ . Pois  $\ker(d\alpha_{x_0}) = T_eH$  e  $T_eG = T_eH \oplus T_eC$ . Portanto,  $x = (x_1, x_2) = (0, 0)$ .  $\square$

Segue do Teorema da Função Inversa que existe  $\tilde{U} = U \times V$  vizinhança aberta de  $(e, x_0)$  em  $C \times S_{x_0}$  tal que

$$\varphi|_{\tilde{U}} : U \times V \longrightarrow \varphi(U \times V)$$

é difeomorfismo local. Assim, sendo  $c_n \neq e$ , pois  $\tilde{g}_n \notin H$  e  $h_n \in H$  e  $\lim \varphi(c_n, \alpha(h_n, x_n)) = x_0$ , temos que

$$\begin{aligned} \alpha(\tilde{g}_n, x_n) &= \alpha(c_n h_n, x_n) = \alpha(c_n, \alpha(h_n, x_n)) \\ &= \varphi(c_n, \alpha(h_n, x_n)) \notin S_{x_0} \end{aligned}$$

que é contradição. Finalizando assim nossa prova.  $\square$

# Referências

- 1 ALEXANDRINO, Marcos M.; BETTIOL, Renato G. Lie groups and geometric aspects of isometric actions. Cham: Springer, 2015.
- 2 CARMO, Manfredo Perdigão do. Geometria Rimaniana, 5.ed. - Rio de Janeiro: IMPA,2015.
- 3 LEE, John M. Introduction to Riemannian manifolds. Cham: Springer, 2018.
- 4 LEE, John M.; LEE, John M. Smooth manifolds. Springer New York, 2012.
- 5 TU, Loring W. Manifolds. In: An Introduction to Manifolds. New York, NY: Springer New York, 2011. p. 47-83.