



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - IME  
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

JOSÉ JORGE FERREIRA DOS SANTOS

Salvador - Bahia  
DEZEMBRO DE 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária de  
Ciências e Tecnologias Prof. Omar Catunda, SIBI – UFBA.

S237 Santos, José Jorge Ferreira dos

Problemas de Apolônio: uma abordagem algébrica com o  
auxílio do computador/ José Jorge Ferreira dos Santos. –  
Salvador, 2023.

48 f.

Orientador: Prof. Dr. Vinícius Moreira Mello

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Bahia.  
Instituto de Matemática e Estatística - UFBA, 2023.

1. Álgebra. 2. Computador. 3. Matemática. I. Mello, Vinícius  
Moreira. II. Universidade Federal da Bahia. III. Título.

CDU 512

# PROBLEMAS DE APOLÔNIO: UMA ABORDAGEM ALGÉBRICA COM AUXÍLIO DO COMPUTADOR

JOSÉ JORGE FERREIRA DOS SANTOS

Dissertação de Mestrado apresentada  
à Comissão Acadêmica Institucional do  
PROFMAT-UFBA como requisito parcial para  
obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Vinícius Mello.

Salvador - Bahia

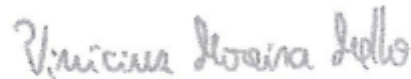
Dezembro de 2023

# PROBLEMAS DE APOLÔNIO: UMA ABORDAGEM ALGÉBRICA COM AUXÍLIO DO COMPUTADOR

JOSÉ JORGE FERREIRA DOS SANTOS

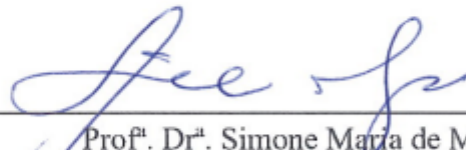
Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 01/12/2023.

## Banca Examinadora:



---

Prof. Dr. Vinicius Moreira Mello  
Instituto de Matemática e Estatística – UFBA

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Simone Maria de Moraes  
Instituto de Matemática e Estatística – UFBA



---

Prof. Dr. Moacyr Alvim Horta Barbosa da Silva  
Escola de Matemática Aplicada – FGV

*A Deus, pela esposa maravilhosa que me concedeu e pelos os filhos a nós confiados,  
motivo por tanto empenho e dedicação.*

# Agradecimentos

A Deus, por está sempre presente, orientando-me em tudo.

Aos meus pais, José Raimundo dos Santos (*in memoriam*) e Marlene Ferreira dos Santos, que sempre procuraram me mostrar que a educação é o único caminho para vencermos as dificuldades.

Aos meus filhos, Júlia Sandra Oliveira dos Santos, Jordan Jorge Oliveira dos Santos e Johan Jorge Oliveira dos Santos, o motivo por qual tenho me esforçado e dedicado grande parte do meu tempo, para obtermos um futuro melhor.

A minha esposa, Sandra Rocha de O. dos Santos, pelo amor, compreensão..., nos momentos difíceis dessa jornada.

Aos meus sogros, Renivaldo Leal de Oliveira e Célia Maria Rocha de Oliveira, que sempre nos ajudaram e incentivaram ao estudo.

Aos meus amigos, Antônio Bomfim de Souza Neves, Antônio Almeida dos Santos, Luciano Araújo Oliveira, Márcio José Araújo Macedo e José Ramos de Souza, pelo incentivo e apoio.

Aos meus colegas de trabalho que sempre incentivaram e apoiaram os meus projetos.

Ao Prof. Vinícius Mello, pela paciência e estímulo durante toda orientação.  
Meu muito obrigado.

*“A álgebra é generosa: frequentemente  
ela dá mais do que se lhe pediu”*

*D’Alambert[3]*

# Resumo

Problemas de tangência envolvendo pontos, retas e circunferências no plano, tais como o célebre *Problema de Apolônio*, podem ser formulados e resolvidos, de forma conceitualmente simples, usando-se nada mais do que álgebra do ensino médio. Entretanto, os cálculos necessários podem ser trabalhosos e sujeitos a erro, tornando a abordagem algébrica menos atraente. Neste trabalho, vamos investigar como a álgebra dos ciclos e um sistema de álgebra computacional (a Janela CAS do GeoGebra) podem ser usados para nos auxiliar na resolução desses problemas. Também veremos como as possibilidades de visualização do GeoGebra podem ser usadas para se entender melhor a relação entre álgebra e geometria.

**Palavras-chave:** Álgebra dos ciclos, problemas de tangência, GeoGebra, Problema de Apolônio, Teorema (dos Círculos Osculantes) de Descartes.



# Abstract

Tangency problems involving points, lines and circles in the plane, such as the famous *Problem of Apollonius*, can be formulated and solved, in a conceptually simple way, using nothing more than high school algebra. However, the necessary calculations can be laborious and prone to error, making the algebraic approach less attractive. In this work, we will investigate how the algebra of cycles and a computational algebra system (the GeoGebra CAS Window) can be used to help us solve these problems. We will also see how GeoGebra's visualization capabilities can be used to better understand the relationship between algebra and geometry.

**Keywords:** Algebra of cycles, Tangency problems, GeoGebra, Problem of Apollonius, Descartes' (Kissing Circles) Theorem.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Ciclos no Plano</b>	<b>2</b>
1.1 Ciclos . . . . .	2
1.2 Condição de Tangência de Círculos . . . . .	4
1.3 Apolônio e seu Problema . . . . .	7
1.4 O Problema de Apolônio: Primeira Tentativa . . . . .	9
1.5 Condição de Tangência entre Círculo e Reta . . . . .	10
1.6 Ciclos de Lie . . . . .	13
1.7 Problema de Apolônio: Segunda Tentativa. . . . .	16
1.8 Usando a Janela CAS do GeoGebra . . . . .	19
<b>2 Interpretação via Projeção Estereográfica</b>	<b>24</b>
2.1 Imagem de um Reta pela projeção estereográfica . . . . .	24
2.2 Círculos na Esfera . . . . .	27
2.3 Imagem de um Círculo via Projeção Estereográfica . . . . .	28
<b>3 Mais Aplicações</b>	<b>31</b>
3.1 O Teorema dos Círculos Osculantes de Descartes . . . . .	31
3.2 Problema de Apolônio no Espaço . . . . .	34
<b>4 Considerações finais</b>	<b>44</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>47</b>

# Introdução

Desde a antiguidade, o estudo da Geometria sempre foi uma área de grande interesse para diversos matemáticos. Com a evolução da matemática, novos campos foram surgindo e novas técnicas foram desenvolvidas, possibilitando a criação de novos métodos para a solução de problemas geométricos complexos.

O trabalho de anos com alunos do Ensino Médio fez-me perceber quão grande é a dificuldade dos estudantes em fazer generalizações, deduções e abstrações, recursos indispensáveis para o crescimento e desenvolvimento do raciocínio lógico matemático em geral e do estudo de Geometria em particular.

O ENEM traz em sua matriz de referência objetivos como “Enfrentar situações-problema (SP): selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representadas de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema” e “Construir argumentação (CA): relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente”. Em suas competências, recomenda “Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela”. Ainda, “ Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas”.

Pensando nisso, ao analisar alguns trabalhos apresentados no PROFMAT sobre o Problema de Apolônio, tema deste trabalho, tais como, [8], [4],[9],[1] e [12], os quais fazem uso da Geometria Inversiva e/ou da construção com régua e compasso para obtenção das soluções, verificamos que a complexidade das construções geométricas pode se tornar um obstáculo muito grande, pois esses métodos requerem muita precisão e demandam muito tempo. Percebemos ainda que [9] trouxe em seu trabalho uma solução algébrica para o problema de Apolônio, entretanto, embora tais problemas possam ser abordados utilizando-se apenas a álgebra do ensino médio, os cálculos necessários podem se tornar trabalhosos e propensos a erros, tornando a abordagem algébrica menos atraente.

Assim, neste trabalho, investigamos como resolver o Problema de Apolônio, formulado como um problema de Geometria Analítica, tanto algebricamente quanto visualmente (concretamente), com o auxílio do computador, através do aplicativo GeoGebra,

Entre as diversas áreas de estudo da geometria, a Geometria Analítica surge como uma importante ferramenta para a resolução de problemas. E dentro desta área, destaca-se o estudo dos ciclos, que apresenta uma importante contribuição para a compreensão de problemas de tangência.

Tendo a conceitualização, a manipulação e a aplicação como base principal para um bom ensino de Matemática, em particular de Geometria, desenvolvemos um trabalho que possibilite uma gama de atividades, partindo da Álgebra e transpassando pela conjectura chegando ao resultado final, analisando e sintetizando com o GeoGebra.

Este trabalho tem como objetivo específico investigar como a álgebra dos ciclos e um sistema de álgebra computacional, como a Janela CAS do GeoGebra, podem ser utilizados na resolução de problemas de tangência no plano, envolvendo pontos, retas e circunferências. Assim, exploraremos como a álgebra dos ciclos e o GeoGebra podem ser utilizados como ferramentas para auxiliar na resolução desses problemas, além de discutir como a visualização proporcionada pelo GeoGebra pode contribuir para um melhor entendimento da relação entre Álgebra e Geometria.

O emprego do *software* torna o ambiente favorável, devido a familiaridade dos nossos alunos com a tecnologia, pois praticamente todos possuem um celular com acesso a internet, o que possibilita o uso do aplicativo na sala de aula, sem a necessidade de usar o laboratório de informática, que na maioria das escolas não funcionam. Além disso, o ambiente de geometria dinâmica permite a manipulação de figuras geométricas de forma fácil e intuitiva, possibilitando a exploração de diferentes configurações e a experimentação com diferentes parâmetros. Também é possível realizar animações e criar sequências de operações, o que facilita a visualização de transformações geométricas e permite compreender melhor os conceitos envolvidos. Outra vantagem do ambiente de geometria dinâmica é a possibilidade de construir e explorar construções geométricas de forma mais precisa e rigorosa, facilitando a prova de teoremas e a demonstração de propriedades geométricas. Dessa forma, o GeoGebra pode ser usado como uma ferramenta de ensino, permitindo aos estudantes explorarem conceitos, realizarem experimentos e descobrirem propriedades por conta própria, o que favorece o aprendizado de forma autônoma e construtiva. Em suma, o ambiente de geometria dinâmica, GeoGebra, oferece diversas possibilidades de exploração e comunicação de conceitos geométricos, tornando o estudo da geometria mais interativo, visual e atraente, o que pode ser um diferencial, pois a construção com régua e compasso exige muito mais tempo e pode torna o trabalho menos preciso. Para tanto, serão apresentados conceitos fundamentais da geometria e da teoria dos ciclos, além de exemplos práticos que ilustram a aplicação desse método para a solução de problemas de tangência.

O primeiro capítulo deste trabalho será dedicado à apresentação dos ciclos no plano,

e principais conceitos que os permeiam. Inicialmente será apresentada a equação de uma circunferência, a qual posteriormente escreveremos de forma tal que dependerá de quatro ou cinco parâmetros. Verificaremos as condições de tangência entre circunferências e entre uma reta e uma circunferência. Trataremos de problemas de tangência a partir dos ciclos de Lie e mostraremos como utilizar a janela CAS do GeoGebra como uma ferramenta para auxiliar nos cálculos.

No segundo capítulo, faremos uma interpretação dos problemas de tangência via projeção estereográfica. Mostraremos que ciclos do plano são mapeados em círculos da esfera através da projeção estereográfica.

No terceiro capítulo trataremos de outras aplicações da álgebra dos ciclos, tais como o Teorema dos Círculos Osculantes de Descartes e a generalização do Problema de Apolônio para esferas.

Por fim, este trabalho pretende apresentar uma aplicação dos ciclos para a resolução de problemas de tangência em Geometria Analítica. Acredita-se que a compreensão desses conceitos é fundamental para o desenvolvimento de soluções em áreas como a engenharia, física e ciência da computação, além, é claro, da própria matemática, servindo de apoio para outras dissertações e como acessório de trabalho no engendramento de aulas de geometria.

# Capítulo 1

## Ciclos no Plano

### 1.1 Ciclos

Ciclos são curvas que podem ser descritas por uma única equação quadrática em duas variáveis dependendo apenas de alguns parâmetros. Os objetos mais básicos da geometria plana são o ponto, a reta e o círculo. Qualquer um desses objetos pode ser representado analiticamente por uma equação da forma

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0, \quad (1.1)$$

e vice-versa. Uma equação desse tipo sempre representa um ponto, uma reta ou um círculo (ou o conjunto vazio, que não deixa de ser um objeto básico da geometria). De fato, se  $a = 0$  e  $(b, c) \neq (0, 0)$ , (1.1) representa uma reta e qualquer reta pode ser colocada na forma

$$bx + cy + d = 0.$$

(Se  $a = b = c = 0$ , 1.1 não é uma equação nas variáveis  $x$  e  $y$ .) Por outro lado, se  $a \neq 0$ , usando a técnica de “completar quadrados”, podemos colocar (1.1) na forma

$$a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + a \left( y + \frac{c}{2a} \right)^2 = \frac{b^2}{4a} + \frac{c^2}{4a} - d. \quad (1.2)$$

Cancelando o  $a$  no primeiro membro e reorganizando o segundo, temos que

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left( y + \frac{c}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 + c^2 - 4ad}{4a^2}. \quad (1.3)$$

Se  $b^2 + c^2 - 4ad < 0$ , a equação (1.3) claramente não possui soluções reais e não representa nenhuma curva. Façamos, portanto,

$$r^2 := b^2 + c^2 - 4ad.$$

Se  $r = 0$ , apenas um ponto satisfaz (1.3), o ponto

$$(x_0, y_0) := \left( -\frac{b}{2a}, -\frac{c}{2a} \right). \quad (1.4)$$

Caso contrário, (1.3) representa um círculo de centro  $(x_0, y_0)$  e raio  $R$  com

$$R := \frac{r}{2a}. \quad (1.5)$$

Finalmente, é fácil ver que um ponto  $(x_0, y_0)$  qualquer é representado pela equação

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0,$$

que quando desenvolvida tem a forma da equação (1.1). O mesmo para um círculo de centro  $(x_0, y_0)$  e raio  $R$ , que tem equação

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Temos assim que pontos, retas e círculos (além do conjunto vazio) têm em comum o fato de poderem ser representados por equações da forma (1.1), de modo que podemos chamá-los coletivamente de *ciclos do plano*. Mais ainda, podemos representar um ciclo  $C$  por uma quádrupla  $(a, b, c, d)$  ao invés de uma equação, já que os coeficientes  $a, b, c$  e  $d$  são suficientes para identificar o tipo de ciclo e suas propriedades geométricas. Por exemplo, se  $b^2 + c^2 - 4ad < 0$  ou se  $a = b = c = d = 0$ , sabemos que  $C = (a, b, c, d)$  não representa uma curva. Caso contrário, fazendo  $r^2 := b^2 + c^2 - 4ad$ , temos que considerar alguns casos:

**Se  $a \neq 0$**

**Se  $r \neq 0$**   $C$  é o círculo com centro  $(x_0, y_0)$  dado por (1.4) e raio dado por (1.5).

**Se  $r = 0$**   $C$  é o ponto  $(x_0, y_0)$  dado por (1.4).

**Se  $a = 0$**

**Se  $r \neq 0$**  isso significa que  $b^2 + c^2 = r^2 \neq 0$  e portanto  $C$  é a reta  $bx + cy + d = 0$ .

**Se  $r = 0$**  Esse caso é satisfeito apenas por quádruplas da forma  $(0, 0, 0, d)$ . À primeira vista, essa quádrupla não corresponde a nenhuma curva, mas esse caso pode ser interpretado como um círculo de raio infinito. Por exemplo, a quádrupla  $(-\frac{1}{R^2}, 0, 0, 1)$  representa um círculo de centro na origem e raio  $R$ . Quando  $R \rightarrow \infty$ , a quádrupla se aproxima de  $(0, 0, 0, 1)$ .

Esses casos estão resumidos na seguinte tabela:

	$r \neq 0$	$r = 0$
$a \neq 0$	círculo	ponto
$a = 0$	reta	$\infty$

Mas cada ciclo pode ser representado por mais de uma quádrupla de pontos. Por exemplo, as quádruplas  $C_1 = (1, 0, 0, -25)$  e  $C_2 = (2, 0, 0, -50)$  representam as equações

$$x^2 + y^2 = 25$$

e

$$2x^2 + 2y^2 = 50$$

que são duas equações equivalentes que representam o mesmo círculo. Em geral,  $(a, b, c, d)$  e  $\alpha(a, b, c, d)$  representam o mesmo ciclo.

## 1.2 Condição de Tangência de Círculos

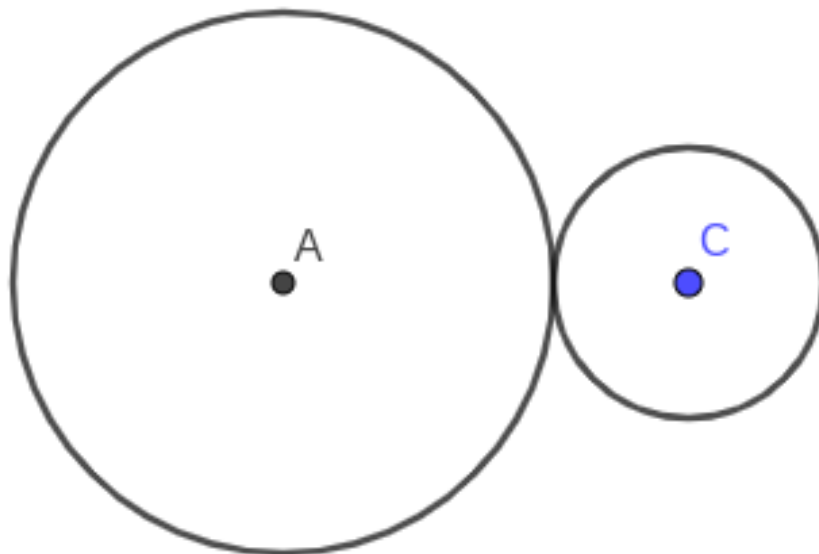


Figura 1.1: Círculos tangentes externamente.

Definimos tangência externa como o ponto de contato entre duas circunferências, em que a distância entre os centros é igual a soma dos raios. Nesse caso, o ponto de tangência é o único ponto comum entre as duas circunferências.

Dois círculos  $C_1$  e  $C_2$ , de centros  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  e raios  $R_1$  e  $R_2$  respectivamente, são tangentes externamente se,

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (R_1 + R_2)^2 \quad (1.6)$$



desenvolvendo os binômios, obtemos

$$x_1^2 + y_1^2 - R_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - R_2^2 = 2x_1x_2 + 2y_1y_2 + 2R_1R_2. \quad (1.7)$$

Substituindo  $x_i = \frac{-b_i}{2a_i}$  e  $y_i = \frac{-c_i}{2a_i}$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{b_1^2}{4a_1^2} + \frac{c_1^2}{4a_1^2} + \frac{b_2^2}{4a_2^2} + \frac{c_2^2}{4a_2^2} &= 2\frac{b_1b_2}{4a_1a_2} + 2\frac{c_1c_2}{4a_1a_2} + R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2 \\ \frac{b_1^2 + c_1^2}{4a_1^2} + \frac{b_2^2 + c_2^2}{4a_2^2} &= \frac{b_1b_2 + c_1c_2}{2a_1a_2} + R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2 \\ \left(\frac{b_1^2 + c_1^2 - 4a_1^2R_1^2}{4a_1^2}\right) + \left(\frac{b_2^2 + c_2^2 - 4a_2^2R_2^2}{4a_2^2}\right) - \frac{b_1b_2 + c_1c_2}{2a_1a_2} &= 2R_1R_2 \\ \frac{4a_1d_1}{4a_1^2} + \frac{4a_2d_2}{4a_2^2} - \frac{b_1b_2 + c_1c_2}{2a_1a_2} &= 2R_1R_2 \\ \frac{d_1}{a_1} + \frac{d_2}{a_2} - \frac{b_1b_2 + c_1c_2}{2a_1a_2} &= 2R_1R_2 \\ 2a_2d_1 + 2a_1d_2 - b_1b_2 - c_1c_2 &= 4a_1a_2R_1R_2. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Chegamos, portanto, a uma condição de tangência externa que depende apenas dos parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  dos ciclos.

Analogamente, definimos a tangência interna entre duas circunferências, quando uma está contida no interior de outra circunferência e suas bordas se tocam em um único ponto. Esse ponto comum é chamado de ponto de tangência. A linha que possui apenas um ponto em comum com o círculo é chamada de linha de tangência. É importante lembrar que a tangência interna só é possível quando o raio da circunferência menor é menor do que a diferença entre o raio da circunferência maior e a distância entre seus centros.

Dois círculos são tangentes internos quando  $R_1 - R_2 = d$  ou  $R_1 = d + R_2$ , assim, temos

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (R_1 - R_2)^2. \quad (1.9)$$

Desenvolvendo os binômios, obtemos

$$x_1^2 + y_1^2 - R_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - R_2^2 = 2x_1x_2 + 2y_1y_2 - 2R_1R_2, \quad (1.10)$$

e substituindo  $x_i = \frac{-b_i}{2a_i}$  e  $y_i = \frac{-c_i}{2a_i}$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{b_1^2}{4a_1^2} + \frac{c_1^2}{4a_1^2} + \frac{b_2^2}{4a_2^2} + \frac{c_2^2}{4a_2^2} &= 2\frac{b_1b_2}{4a_1a_2} + 2\frac{c_1c_2}{4a_1a_2} + R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2 \\ \frac{b_1^2 + c_1^2}{4a_1^2} + \frac{b_2^2 + c_2^2}{4a_2^2} &= \frac{b_1b_2 + c_1c_2}{2a_1a_2} + R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2 \end{aligned}$$

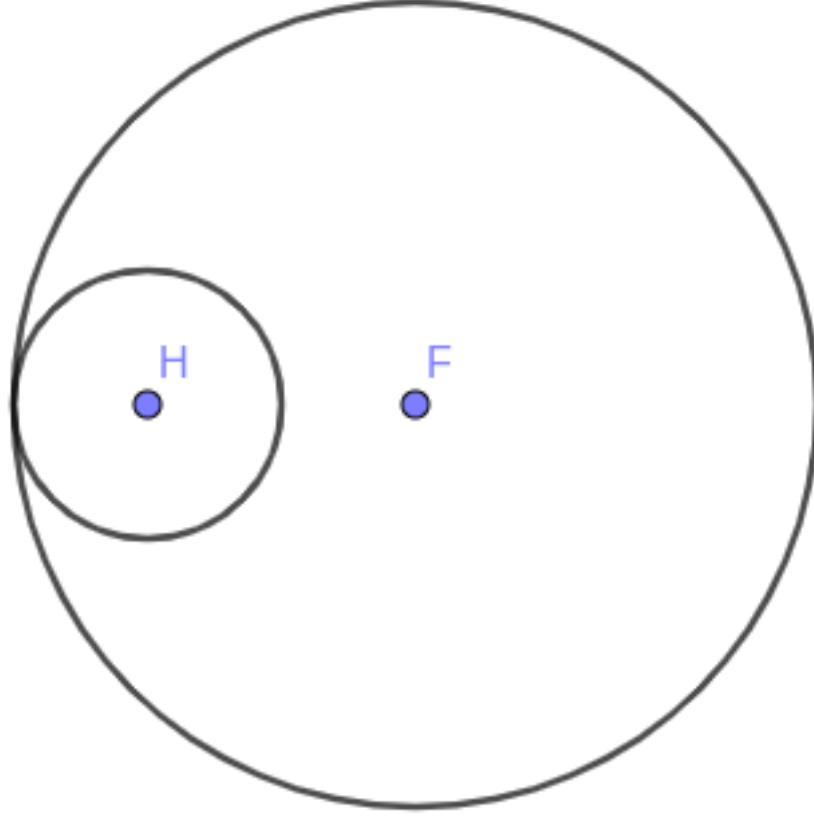


Figura 1.2: Círculos tangentes internamente

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{b_1^2 + c_1^2 - 4a_1^2 R_1^2}{4a_1^2} \right) + \left( \frac{b_2^2 + c_2^2 - 4a_2^2 R_2^2}{4a_2^2} \right) - \frac{b_1 b_2 + c_1 c_2}{2a_1 a_2} &= -2R_1 R_2 \\
 \frac{4a_1 d_1}{4a_1^2} + \frac{4a_2 d_2}{4a_2^2} - \frac{b_1 b_2 + c_1 c_2}{2a_1 a_2} &= -2R_1 R_2 \\
 \frac{d_1}{a_1} + \frac{d_2}{a_2} - \frac{b_1 b_2 + c_1 c_2}{2a_1 a_2} &= -2R_1 R_2 \\
 2a_2 d_1 + 2a_1 d_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 &= -4a_1 a_2 R_1 R_2. \tag{1.11}
 \end{aligned}$$

Podemos escrever as equações (1.8) e (1.11) de forma normalizada. Para tanto, dizemos que uma quádrupla  $(a, b, c, d)$  que representa um círculo está *normalizada* se

$$a = \frac{1}{2R}.$$

Neste caso, as condições de tangência externa ou interna entre círculos ficam mais simples,

$$-2a_1 d_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 - 2d_1 a_2 = -1, \tag{1.12}$$

para tangência externa e

$$-2a_1 d_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 - 2d_1 a_2 = 1, \tag{1.13}$$

para tangência interna.

Fazendo,

$$M(C_1, C_2) := M((a_1, b_1, c_1, d_1), (a_2, b_2, c_2, d_2)) = -2a_1d_2 + b_1b_2 + c_1c_2 - 2d_1a_2,$$

é fácil verificar que um ciclo  $C$  está normalizado se  $M(C, C) = 1$  e que dois círculos normalizados  $C_1$  e  $C_2$  são tangentes externamente ou internamente se, e somente se,

$$M(C_1, C_2) = -1$$

ou

$$M(C_1, C_2) = 1,$$

respectivamente. Em Álgebra Linear, essa função  $M$  é denominada uma *forma bilinear simétrica*. Formalmente, uma forma bilinear é uma função  $M : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $V$  é um espaço vetorial e  $\mathbb{R}$  é o conjunto dos números reais, tal que, para todo  $C_1, C_2, C_3$  em  $V$  e  $\alpha$  em  $\mathbb{R}$ ,

- $M(C_1 + C_2, C_3) = M(C_1, C_3) + M(C_2, C_3)$  e  $M(\alpha C_1, C_2) = \alpha M(C_1, C_2)$
- $M(C_1, C_2 + C_3) = M(C_1, C_2) + M(C_1, C_3)$  e  $M(C_1, \alpha C_2) = \alpha M(C_1, C_2)$ ,

ou seja, a forma bilinear é linear em cada argumento individualmente. Se, além disso,  $M(C_1, C_2) = M(C_2, C_1)$ , isto é, a ordem dos vetores não afeta o resultado da função, dizemos que  $M$  é uma forma bilinear simétrica.

### 1.3 Apolônio e seu Problema

Antes de atacar nosso problema principal, vamos conhecer um pouco mais sobre ele e sobre o matemático que lhe empresta o nome. De acordo com [3], Apolônio de Perga, matemático e astrônomo, chamado de “Grande Geômetra” pelos seus contemporâneos, nasceu em Perga na Panfilia (sul da Asia Menor), mas, muito provavelmente, foi educado em Alexandria, onde começou sua vida acadêmica. Segundo relatos, foi tesoureiro geral de Ptolomeu Filadelfo e estima-se ainda que era mais novo que Arquimedes, de vinte e cinco a quarenta anos, sugerindo assim que tenha vivido de 262 a 190 a.C.

Escrito em oito livros, Seções Cônicas foi um de seus trabalhos mais famosos, que solidificou a fama de Apolônio. Chegando a escrever várias outras obras, mas a maioria tendo-se conhecimento apenas dos seus títulos, que foram citados por outros matemáticos ou historiadores. Na Renascença, as obras originais desse gênio da Matemática, eram praticamente inexistentes no ocidente. Restavam então algumas cópias traduzidas do árabe. Com o grande empenho de muitos matemáticos da época em restaurar ou reconstruir

trabalhos perdidos, a partir de seus fragmentos, ou com base em relatos, fornecido por Pappus e outros, o conteúdo de algumas obras perdidas puderam ser resgatadas.

Muitos trabalhos já foram desenvolvidos para solucionar o problema de Apolônio original, podemos citar a solução publicada em 1596, por Adrian Van Roomem (1561-1615), amigo de Viète, que identificou os centros dos círculos da solução como intersecção de pontos de duas hipérbolas. O método de Van Roomem foi refinado em 1687 por Isaac Newton (1642-1727) e por John Casey (1820-1891) em 1881.

Com o auxílio da Geometria Analítica (1637), [8] novas ferramentas para solucionar o Problema de Apolônio foram empregadas. Descartes (1596-1650) apresentou duas soluções semelhantes, complicadas o suficiente para ainda mantê-lo interessado no problema. Princesa Elizabeth (1596-1662), esposa do rei da Bohemia, comunicou uma solução para Descartes, com quem mantinha contato por cartas, mas não obteve solução melhor que a do próprio Descartes. O insucesso de Descartes motivou outros estudos, logo, duas soluções foram apresentadas na Academia de São Petersburgo em 1788: uma por Leonard Euler (1707-1783) e outra por Nicolas Fuss (1755-1826). No último quarto do século dezoito viu-se o ressurgimento da Geometria pura, iniciada por Gaspard Monge (1746-1818), o fundador da Geometria Descritiva. A teoria sobre os círculos foi enriquecida por novas e renovadas ideias, como a potência de pontos, o eixo radical entre dois círculos, o círculo ortogonal a três círculos, entre outras. Cada uma destas ideias proporcionou uma tentativa de aplicá-las ao Problema de Apolônio, e na Geometria clássica grega em geral. A Geometria Projetiva, que teve como pai J. V. Poncelet (1788-1867), ofereceu novos métodos de resolução do Problema de Apolônio baseados nas novas teorias.

O Problema de Apolônio estimulou e estimula pesquisas de métodos da Geometria pura e proporcionou a utilização de processos analíticos para refinar suas ferramentas. A rivalidade entre os seguidores da Geometria Analítica e os da Geometria pura, até a metade do século dezenove, foi muito acirrada e nem sempre amigável, e o Problema de Apolônio serviu como teste nesta disputa, aumentando o interesse no problema. Renomados matemáticos solucionaram o Problema de Apolônio, como o poeta e matemático Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753-1823), resolvendo-o em partes, e que foi completada por C.F. Gauss (1777-1855) e Augustin Cauchy (1789-1857). Soluções diretas do Problema só foram alcançadas em 1816 por J.D. Gergonne (1771-1859), de forma Analítica, e, logo após, por Poncelet, baseado na concepção de Geometria pura, ambos admirados pela crítica. Um quarto de século depois, Maurice Fouché (1759-1820) resolveu-o de forma direta, usando círculos isogonais, abrangendo também casos especiais, nos quais os círculos são substituídos por pontos ou retas. A teoria da inversão, desenvolvida durante a primeira metade do século dezenove, foi utilizada por Julius Petersen (1839-1910) para produzir uma elegante solução do Problema original de Apolônio.

Nos tempos atuais o Problema de Apolônio continua estimulando pesquisas e novas técnicas de resolução estão sendo testadas, neste trabalho faremos a utilização da Álgebra e utilizaremos o GeoGebra para auxiliar a resolução do problema quanto para visualizar o resultado obtido.

## 1.4 O Problema de Apolônio: Primeira Tentativa

Entre essas obras destaca-se o Tratado Tangência, o qual enfatiza o celebre problema de Apolônio, para o qual iremos apresentar uma solução algébrica, com o auxílio do GeoGebra, o qual atualmente é enunciado de forma mais abrangente: “Dados três objetos, cada um dos quais pode ser um ponto, uma reta ou um círculo, traçar um círculo que seja tangente a cada uma dos três objetos”. Este problema pode ser dividido em dez casos, do mais simples (em que os três objetos são três pontos ou três retas) até o mais difícil (traçar um círculo tangente a três círculos). Apresentaremos uma solução algébrica e utilizaremos o GeoGebra para visualizar nossa construção do caso considerado mais complexo.

**Aplicação 1:** Dados três círculos,  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ , de centros,  $(-1,0)$ ,  $(0,-3)$  e  $(3,0)$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = 1$ , respectivamente, determinar um círculo que seja tangente externamente aos três círculos dados.

**Solução 1:** Como conhecemos os raios e os centros dos círculos dados, podemos determinar as equações,

$$C_1 : a_1(x^2 + y^2) + b_1x + c_1y + d_1 = 0,$$

$$C_2 : a_2(x^2 + y^2) + b_2x + c_2y + d_2 = 0$$

e

$$C_3 : a_3(x^2 + y^2) + b_3x + c_3y + d_3 = 0.$$

Precisamos determinar os  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  e  $d_i$  de cada equação. Sabemos que  $x_i = -\frac{b_i}{2a_i}$ ,  $y_i = -\frac{c_i}{2a_i}$ ,  $R_i = \frac{r_i}{2a_i}$  e  $r_i^2 := b_i^2 + c_i^2 - 4a_i d_i$ , assim  $x_1 = -\frac{b_1}{2a_1} \Rightarrow -1 = -\frac{b_1}{2a_1} \Rightarrow b_1 = 2a_1$ ,  $y_1 = -\frac{c_1}{2a_1} \Rightarrow 0 = -\frac{c_1}{2a_1} \Rightarrow c_1 = 0$ ,  $R_1 = \frac{r_1}{2a_1} \Rightarrow 1 = \frac{r_1}{2a_1} \Rightarrow r_1 = 2a_1$  e  $r_1^2 := b_1^2 + c_1^2 - 4a_1 d_1 \Rightarrow (2a_1)^2 := (2a_1)^2 - 4a_1 d_1 \Rightarrow 4a_1 d_1 = 0 \Rightarrow d_1 = 0$ , como já sabemos que um círculo está normalizado quando  $a = \frac{1}{2R}$ , temos,  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $b_1 = 1$ ,  $c_1 = 0$  e  $d_1 = 0$ , logo

$$C_1 : \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x = 0.$$

De forma análoga, determinamos as outras equações:

$$C_2 : \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + 3y + 4 = 0$$

e

$$C_3 : \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - 3x + 4 = 0.$$

Em resumo,  $C_1 = (\frac{1}{2}, 1, 0, 0)$ ,  $C_2 = (\frac{1}{2}, 0, 3, 4)$  e  $C_3 = (\frac{1}{2}, -3, 0, 4)$ . Precisamos encontrar  $C = (a, b, c, d)$  de forma que o círculo de equação  $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$  seja tangente externamente a  $C_1, C_2$  e  $C_3$ . Portanto, temos

$$\begin{cases} M(C, C_1) = -1 \\ M(C, C_2) = -1 \\ M(C, C_3) = -1 \\ M(C, C) = 1 \end{cases},$$

onde a última equação serve para garantir que  $C$  esteja normalizado. Chegamos ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} -d + b = -1 \\ -d + 3c - 8a = -1 \\ -d - 3b - 8a = -1 \\ b^2 + c^2 - 4ad = 1 \end{cases},$$

que possui soluções  $b = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}, a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{8}, c = -\frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$  e  $d = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{4}$ , o que nos fornece dois ciclos,  $C_4 = (\frac{-1 - \sqrt{5}}{8}, \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}, \frac{-3 + \sqrt{5}}{4})$  e  $C_5 = (\frac{-1 + \sqrt{5}}{8}, \frac{1 - \sqrt{5}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \frac{-3 - \sqrt{5}}{4})$ . Podemos visualizar e resolver mais facilmente com o auxílio do GeoGebra, como veremos posteriormente.

Note que no sistema acima, as três primeiras equações que estabelecem as condições de tangência são lineares, enquanto a última é quadrática. Podemos resolver as três primeiras para achar  $b, c$  e  $d$  em função de  $a$  e substituir esses valores na última, resultando em uma equação quadrática em  $a$ . Isso explica porque existem duas soluções, mas apenas uma delas corresponde a tangência externa.

## 1.5 Condição de Tangência entre Círculo e Reta

Nessa seção, mostraremos a condição de tangência entre uma reta e um círculo.

Precisamos salientar que uma reta não possui “interior” e “exterior”, assim não podemos definir tangência externa ou interna. Mas podemos definir a orientação, tanto do círculo quanto da reta, como mostra a figura (1.4).

Seja,  $C_1 = (0, b_1, c_1, d_1)$  a reta dada e,  $C_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$  um círculo de centro  $(x_2, y_2)$  e raio  $R_2$ , dizemos que uma reta e um círculo, cujas equações são dadas por:

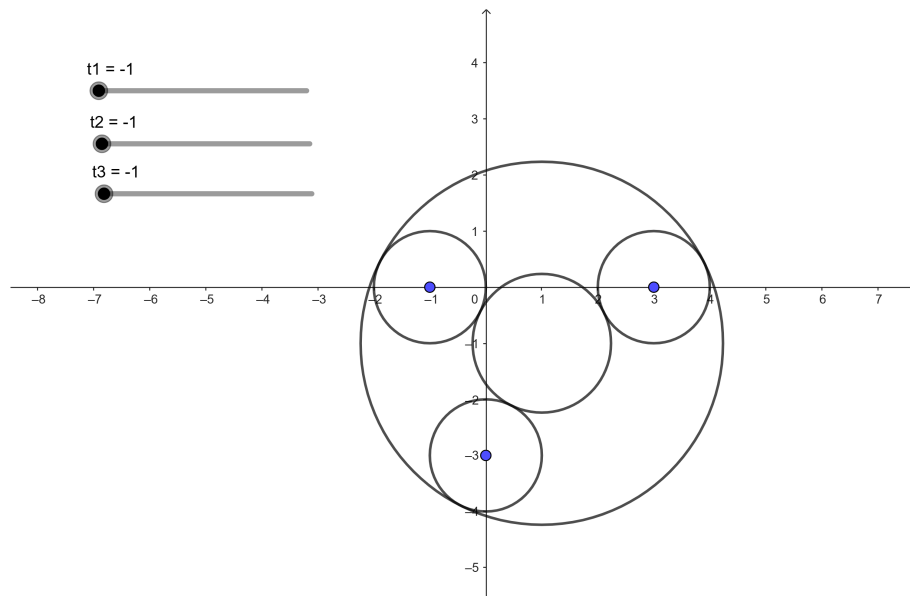


Figura 1.3: Círculos tangentes externamente e internamente a outros três círculos dados.  
<https://www.geogebra.org/classic/dvp5qks5>

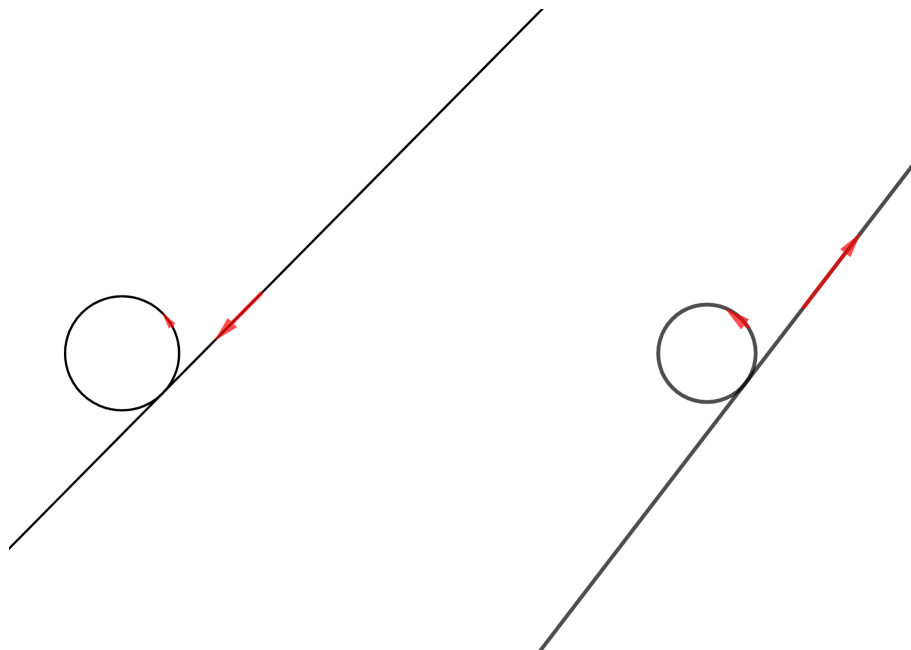


Figura 1.4: Reta tangente com mesma orientação e com orientação oposta ao círculo.

$C_1 : b_1x + c_1y + d_1 = 0$  e  $C_2 : a_2(x^2 + y^2) + b_2x + c_2y + d_2 = 0$ , são tangentes se

$$\frac{|b_1x_2 + c_1y_2 + d_1|}{\sqrt{b_1^2 + c_1^2}} = R_2 \quad (1.14)$$

$$|b_1x_2 + c_1y_2 + d_1| = R_2\sqrt{b_1^2 + c_1^2}, \quad (1.15)$$

ou seja, se a distância do centro do círculo à reta é igual ao raio do círculo.

Já sabemos que um círculo está normalizado quando  $R_2 = \frac{1}{2a_2}$ , que é equivalente a dizer que  $r_2^2 = 1$ . Diremos que uma reta está normalizada quando  $r_1^2 = 1$ , ou seja, quando  $b_1^2 + c_1^2 = 1$ , o que nos permite concluir que  $b_1^2 = 1 - c_1^2$ . Como o raio é um número positivo e  $b_1^2 + c_1^2$  também é positivo, pela definição de módulo temos

$$\begin{aligned} b_1x_2 + c_1y_2 + d_1 &= R_2\sqrt{b_1^2 + c_1^2} \\ -\frac{b_1b_2}{2a_2} - \frac{c_1c_2}{2a_2} + d_1 &= \frac{\sqrt{b_1^2 + c_1^2}}{2a_2} \\ b_1b_2 + c_1c_2 - 2d_1a_2 &= -\sqrt{b_1^2 + c_1^2} \\ b_1b_2 + c_1c_2 - 2d_1a_2 &= -1 \end{aligned} \quad (1.16)$$

ou

$$b_1x_2 + c_1y_2 + d_1 = -R_2\sqrt{b_1^2 + c_1^2}.$$

De forma análoga, obtemos

$$\begin{aligned} b_1b_2 + c_1c_2 - 2d_1a_2 &= \sqrt{b_1^2 + c_1^2} \\ b_1b_2 + c_1c_2 - 2d_1a_2 &= 1, \end{aligned} \quad (1.17)$$

o que nos leva a concluir que caso a reta e o círculo possuam a mesma orientação, obtemos como solução (1.16), caso contrário, ou seja, orientações opostas, obtemos (1.17).

Desta forma, utilizando, a forma bilinear  $M$ , temos que

$$M(C_1, C_2) = M((0, b_1, c_1, d_1), (a_2, b_2, c_2, d_2)) = b_1b_2 + c_1c_2 - 2d_1a_2,$$

o que permite concluir que uma reta  $C_1$  e um círculo  $C_2$  são tangentes com a mesma orientação ou com orientação oposta se, e somente se,

$$M(C_1, C_2) = -1$$

ou

$$M(C_1, C_2) = 1,$$

respectivamente.



**Aplicação 2:** Dados dois círculos,  $C_1$ ,  $C_2$  e uma reta  $C_3$ , com  $(-1, 0)$ ,  $(0, -3)$ ,  $R_1 = R_2 = 1$  os centros e os raios dos respectivos círculos e  $C_3 : x - y - 6 = 0$ , a equação da reta, determinar um círculo que seja tangente aos três ciclos dados.

**Solução 2:** Utilizamos o GeoGebra para obter a solução (ver seção 1.5).

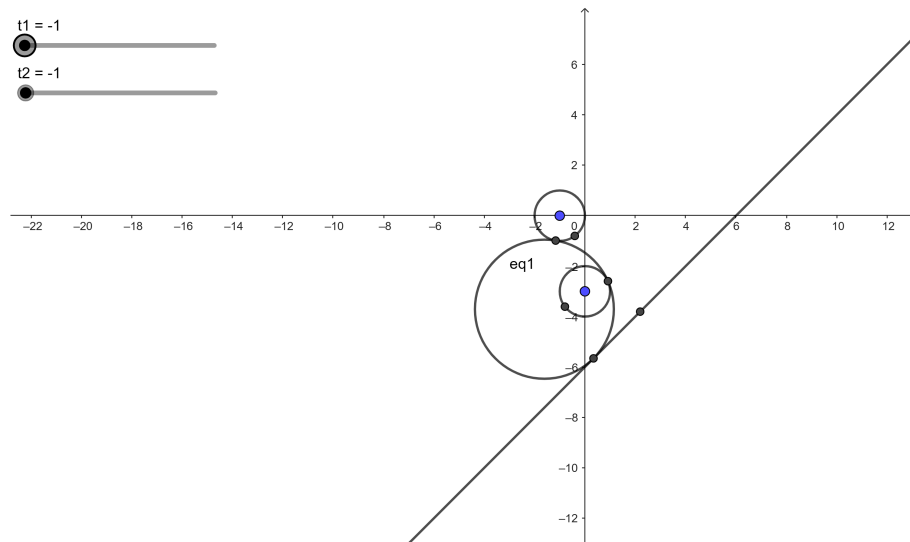


Figura 1.5: Círculo tangente a uma reta e a dois círculos. <https://www.geogebra.org/classic/evs6f75k>

## 1.6 Ciclos de Lie

**Breve Biografia de Sophus Lie** Sophus Lie (1842 – 1899) foi um matemático norueguês que fez importantes contribuições para a teoria dos grupos de Lie, um ramo da álgebra que é fundamental para a física teórica.

Lie nasceu em Nordfjordeid, na Noruega. Ele estudou matemática na Universidade de Christiania (hoje em dia Universidade de Oslo) e, em 1869, tornou-se professor de matemática na mesma universidade.

Em 1870, Lie publicou seu primeiro trabalho importante, “Sobre um teorema fundamental em teoria das variedades”, que tratava das funções de vários complexos, uma área de estudo que ele iria expandir ao longo de sua vida.

Posteriormente, começou a trabalhar na teoria dos grupos de Lie, que são grupos numéricos que preservam certas estruturas geométricas. Esses grupos são essenciais para entender a física teórica, em particular a teoria da relatividade e a mecânica quântica.

Ele fez uma grande contribuição para a teoria dos grupos de Lie, mostrando que um grupo de Lie pode ser representado por uma série de transformações com propriedades

especiais. Isso veio a ser conhecido como o “Teorema de Lie” e é um dos resultados fundamentais da teoria dos grupos de Lie.

Continuou seu trabalho na teoria dos grupos de Lie, tornando-se um dos principais matemáticos do seu tempo. Ele recebeu vários prêmios e honrarias, incluindo ser eleito para a Academia Norueguesa de Ciências e Letras em 1884.

Sophus Lie faleceu em 1899, aos 57 anos de idade, deixando uma grande contribuição para a matemática e a física teórica. Hoje em dia, seu nome é sinônimo de uma das áreas mais importantes da matemática moderna.



Figura 1.6: <http://scihi.org/sophus-lie-mathematics/>

**Ciclos de Lie** O Problema de Apolônio impulsionou pesquisas de métodos da Geometria pura e propiciou a utilização de processos analíticos para aperfeiçoar suas ferramentas. Lie, sendo muito perspicaz, observou que introduzir uma nova variável facilitaria a compreensão e a resolução dos problemas, pois, a forma bilinear  $M$  obtida em (1.2), pode ser escrita como uma nova forma bilinear  $L$ , com cinco variáveis, o que nos fornece equações homogêneas, facilitando os cálculos.

Se uma equação da forma

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0 \quad (1.18)$$

representa um ciclo, então, podemos defini-la em função da quintupla  $(a, b, c, d, r)$ , de forma que  $a, b, c, d$  e  $r$  são números reais tais que

$$-4ad + b^2 + c^2 - r^2 = 0,$$

a qual dependendo dos valores de  $a$  e  $r$  temos as seguintes situações:

	$r \neq 0$	$r = 0$
$a \neq 0$	círculo	ponto
$a = 0$	reta	$\infty$

Vamos ver que o caso  $a = 0$  e  $r = 0$ , que são os pontos da forma  $(0, 0, 0, d, 0)$ , podem ser interpretados como um círculo de raio infinito ou um ponto no infinito.

Vamos chamar o conjunto  $Q = \{(a, b, c, d, r) \in \mathbb{R}^5 \mid -4ad + b^2 + c^2 - r^2 = 0\}$  de *quádrlica de Lie*. Vimos que cada ponto de  $Q$  corresponde a um círculo, uma reta ou um ponto, que chamamos coletivamente de *ciclos*.

Mas cada ciclo corresponde a mais de um ponto em  $Q$ , por exemplo, se  $(a, b, c, d, r) \in Q$  e  $\alpha \neq 0$ , temos que,  $\alpha(a, b, c, d, r) \in Q$  e as equações são as mesmas. Além disso, se  $(a, b, c, d, r) \in Q$ , então,  $(a, b, c, d, -r) \in Q$ . Vamos distinguir estes dois ciclos dizendo que eles tem orientações distintas: no caso dos círculos da figura 1.7, o primeiro tem orientação anti-horária e o segundo, horária.

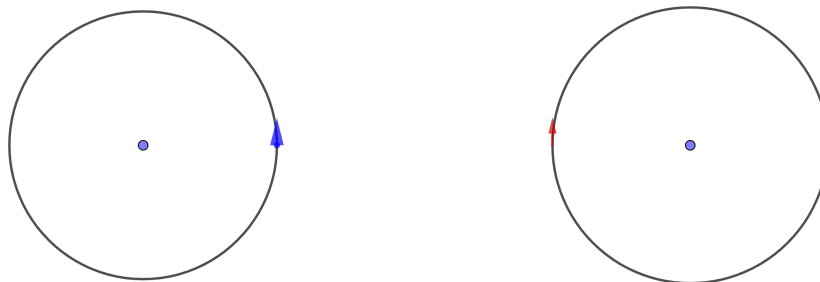


Figura 1.7: Círculos com orientações opostas.

## 1.7 Problema de Apolônio: Segunda Tentativa.

Nesta seção faremos o uso de mais um parâmetro, o  $r$ , então mostraremos as condições de tangência para equações de ciclos descritos pelos parâmetros  $(a, b, c, d, r)$ .

Para que  $C_1$  e  $C_2$ , dois círculos, sejam tangentes com mesma orientação na tangência, temos que

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (R_1 - R_2)^2,$$

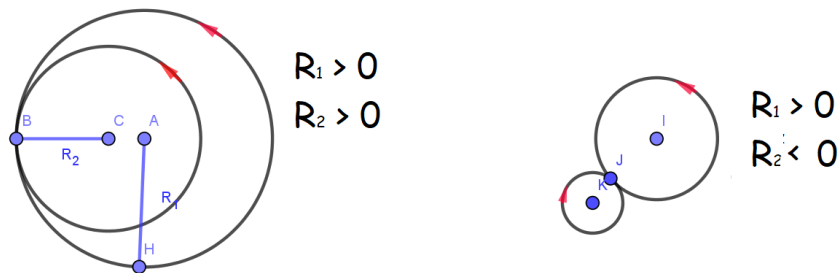


Figura 1.8: Círculos com mesma orientação tangentes internamente e círculos com orientação oposta tangentes externamente.

conforme figura 1.8. Assim,

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 = R_1^2 - 2R_1R_2 + R_2^2.$$

Substituindo as coordenadas, obteremos equações semelhantes as obtidas em 1.2.

Pela definição da quádrlica de Lie, sabemos que

$$b^2 + c^2 - 4ad = r^2. \quad (1.19)$$

Efetuando as mesmas contas que fizemos anteriormente para determinar as condições de tangência, concluímos que para  $C_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1, r_1)$  e  $C_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2, r_2)$  serem tangentes, com a mesma orientação de tangência é necessário que

$$L(C_1, C_2) = 0,$$

onde  $L(C_1, C_2)$  é a forma bilinear

$$L((a_1, b_1, c_1, d_1, r_1), (a_2, b_2, c_2, d_2, r_2)) := -2a_1d_2 + b_1b_2 + c_1c_2 - 2a_2d_1 - r_1r_2. \quad (1.20)$$

Além disso, claramente  $C$  está na quádrlica de Lie se  $L(C, C) = 0$ .

Neste capítulo resolveremos alguns dos problemas de Apolônio, fazendo uso dos Ciclos de Lie.

**Aplicação 3:** Dados três círculos de centros,  $C_1 = (0, 0)$ ,  $C_2 = (12, 0)$  e  $C_3 = (8, 7)$  e raios,  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 5$  e  $R_3 = 2$ , respectivamente. Determine um círculo tangente aos três círculos dados.

**Solução 3** Sabemos que podemos representar cada círculo dado como um vetor de 5 coordenadas,  $C_i = (a_i, b_i, c_i, d_i, r_i)$ , e o círculo que se busca como  $C = (a, b, c, d, r)$ . Precisamos determinar os valores de  $a, b, c, d$  e  $r$ , tais que,

$$\begin{cases} L(C, C_1) = 0 \\ L(C, C_2) = 0 \\ L(C, C_3) = 0 \\ L(C, C) = 0 \end{cases}$$

Como conhecemos os centros e os raios, determinamos,  $b_1 = 0$ ,  $c_1 = 0$ ,  $d_1 = -1$  e  $r_1 = 1$ ,  $b_2 = -24$ ,  $c_2 = 0$ ,  $d_2 = 119$  e  $r_2 = 5$ ,  $b_3 = -16$ ,  $c_3 = -14$ ,  $d_3 = 109$  e  $r_3 = 2$ .

$$\begin{cases} -2ad_1 + bb_1 + cc_1 - 2a_1d - rr_1 = 0 \\ -2ad_2 + bb_2 + cc_2 - 2a_2d - rr_2 = 0 \\ -2ad_3 + bb_3 + cc_3 - 2a_3d - rr_3 = 0 \\ -2ad + b^2 + c^2 - 2ad - r^2 = 0 \end{cases}$$

fazendo os  $a_i = 1$  e substituindo os valores, temos,

$$\begin{cases} -2 + 2d + 2r = 0 \\ 238 + 24b + 2d + 10r = 0 \\ 218 + 16b + 14c + 2d + 4r = 0 \\ b^2 + c^2 = 4ad + r^2 \end{cases} \sim \begin{cases} 218 + 16b + 14c + 2d + 4r = 0 \\ 238 + 24b + 2d + 10r = 0 \\ -2 + 2d + 2r = 0 \\ b^2 + c^2 = 4ad + r^2 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} b = \frac{-r-30}{3} \\ c = \frac{5r-90}{21} \\ d = 1 - r \\ b^2 + c^2 = 4ad + r^2 \end{cases}$$

Substituindo  $b$ ,  $d$  e  $c$  na última equação, obtemos

$$\left(\frac{-r-30}{3}\right)^2 + \left(\frac{5r-90}{21}\right)^2 = 4(1-r) + r^2,$$

donde

$$r = -\frac{2802}{367} \text{ ou } r = 18.$$

Para  $r = -\frac{2802}{367}$ , temos,  $b = -\frac{2736}{367}$ ,  $c = -\frac{2240}{367}$  e  $d = \frac{3169}{367}$ , onde obtemos a equação  $x^2 + y^2 - \frac{2736}{367}x - \frac{2240}{367}y + \frac{3169}{367} = 0$ .

Para  $r = 18$ , temos,  $b = -16$ ,  $c = 0$  e  $d = -17$ , onde obtemos a equação,  $x^2 + y^2 - 16x - 17 = 0$ , a qual podemos observar melhor com o auxílio do GeoGebra (figura 1.9).

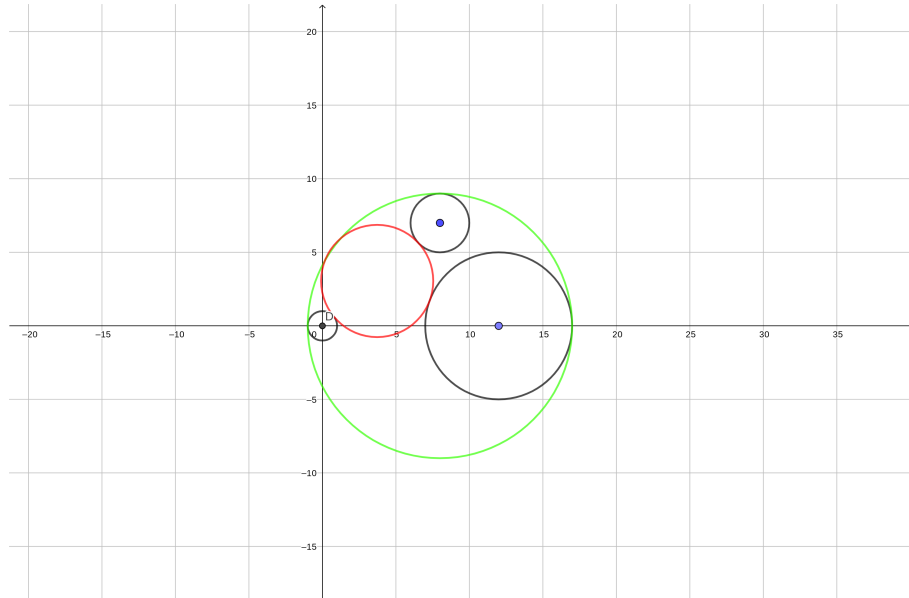


Figura 1.9: Círculo tangente externamente aos três círculos dados e círculo tangente internamente aos círculos dados. <https://www.geogebra.org/classic/e8tmsuha>

**Aplicação 4:** Dados dois círculos  $C_1 = (0, 0)$ ,  $C_2 = (8, 1)$  e a reta  $C_3 : 4x + 3y + 15 = 0$ , tais que,  $C_1, C_2$  estão do mesmo lado em relação à reta  $C_3$ , com raios  $R_1 = 2$ ,  $R_2 = 3$ , respectivamente. Determine um círculo tangente aos três elementos dados.

**Solução 4:** Dados os centros e os raios dos círculos, podemos determinar,  $a_1, b_1, c_1, d_1, r_1$ ,  $a_2, b_2, c_2, d_2, r_2$  e  $a_3, b_3, c_3, d_3, r_3$ . Seja  $C = (a, b, c, d, r)$  o círculo que desejamos encontrar. Assim, pelas condições de tangência,

$$\begin{cases} L(C, C_1) = 0 \\ L(C, C_2) = 0 \\ L(C, C_3) = 0 \\ L(C, C) = 0 \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2d + 4r - 8 = 0 \\ 16b + 2c + 2d + 6r + 112 = 0 \\ 4b + 3c - 5r - 30 = 0 \\ b^2 + c^2 - 4ad - r^2 = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} b = \frac{-2r}{5} - \frac{21}{2} \\ c = \frac{11r}{5} + 24 \\ d = 4 - 2r \\ b^2 + c^2 = 4ad + r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -\frac{1}{10}(-4(\sqrt{65} - 61)) - \frac{21}{2} \\ c = \frac{11}{20}(-4(\sqrt{65} - 61)) + 24 \\ d = 4 - \frac{1}{2}(-4(\sqrt{65} - 61)) \\ r = \frac{4(\sqrt{65}-61)}{4} \end{cases},$$

ou

$$\begin{cases} b = -\frac{1}{10}(4(\sqrt{65} - 61)) - \frac{21}{2} \\ c = \frac{11}{20}(4(\sqrt{65} - 61)) + 24 \\ d = 4 - \frac{1}{2}(4(\sqrt{65} - 61)) \\ r = \frac{-4(\sqrt{65}-61)}{4} \end{cases}.$$

Com o auxílio do GeoGebra obtemos mais facilmente a resolução e podemos visualizar melhor (figura 1.10).

Com a utilização da quádrlica de Lie, podemos observar que obtemos três equações lineares e uma equação quadrática, homogêneas, não importando quais os ciclos utilizados, e obtemos assim a solução desejada, caso exista.

## 1.8 Usando a Janela CAS do GeoGebra

A janela CAS do GeoGebra é um ambiente de cálculo computacional (CAS, na sigla em inglês, é a abreviação de *Computer Algebra System* que, em português, significa Sistema de Computação Algébrica) integrado ao software GeoGebra. Vide [2]. Ela permite a realização de cálculos simbólicos, como a simplificação de expressões matemáticas, a resolução de equações e a integração de funções, além de fornecer uma linguagem de programação para criar funções personalizadas.

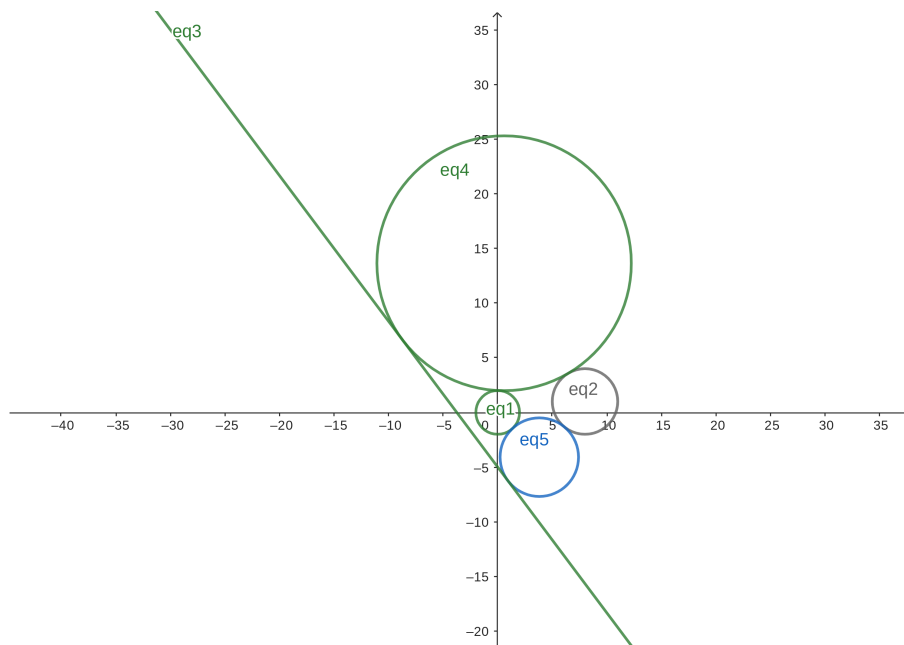


Figura 1.10: Círculo tangente a uma reta e dois círculos. <https://www.geogebra.org/classic/jzydu9as>

Para acessar a janela CAS no GeoGebra, basta clicar na aba “Visualização” na parte superior da interface e selecionar a opção “CAS” no menu suspenso. A janela CAS aparecerá na parte inferior da interface, permitindo que você comece a digitar expressões matemáticas e comandos na linguagem de programação.

Algumas das funcionalidades básicas da janela CAS incluem a capacidade de simplificar expressões algébricas utilizando o comando **Simplificar**, resolver equações usando o comando **Resolver** e integrar funções usando o comando **Integral** etc. Você também pode criar suas próprias funções definindo variáveis e expressões utilizando a linguagem de programação do GeoGebra.

Ela é particularmente útil para estudantes e pesquisadores avançados em matemática que precisam realizar cálculos simbólicos complicados ou criar funções personalizadas para análise de dados. Com sua interface intuitiva e fácil de usar, o GeoGebra é uma excelente ferramenta para explorar conceitos matemáticos complexos de maneira visual e interativa.

Nesta seção, mostraremos como utilizamos a janela CAS para resolver os sistemas de forma rápida e prática, o que possibilitou um resultado mais preciso.



Vamos utilizar a aplicação 2, como exemplo, cujo o sistema é:

$$\begin{cases} 2d + 4r - 8 = 0 \\ 16b + 2c + 2d + 6r + 112 = 0 \\ 4b + 3c - 5r - 30 = 0 \\ b^2 + c^2 - 4ad - r^2 = 0 \end{cases}$$

### Instruções

1. Escreva na barra de entrada a primeira equação, `eq1: 2d+4r-8=0`, em seguida pressione `<enter>`;
2. Repita o procedimento acima para as seguintes equações:
  - `eq2: 16b+2c+2d+6r+112=0`
  - `eq3: 4b+3c-5r-30=0`
  - `eq4: b^2+c^2-4a*d-r^2=0`

3. Para resolver o sistema de equações, escrevemos na barra de entrada o comando

$$\text{sol} := \text{Resolver}(\{\text{eq1}, \text{eq2}, \text{eq3}\}, \{b, c, d\})$$

e pressionamos `<enter>`, então obtemos  $(b, c, d)$  em função de  $r$ ;

4. Substituindo os valores de  $(b, c, d)$  na equação `eq4` com o comando

$$\text{eq5} := \text{Substituir}(\text{eq4}, \text{sol})$$

obtemos uma equação quadrática em  $r$ ;

5. Resolvemos a equação digitando `sol2 := Resolver(eq5,r)`, obtendo assim os valores de  $r$ ;
6. Finalmente, executando

$$\text{Substituir}(\text{sol}, \text{Elemento}(\text{sol2}, 2))$$

encontramos os valores de  $b, c$  e  $d$  para a segunda solução de  $r$  obtida no passo 5.

Assim obtemos duas circunferências que tangenciam os ciclos dados.

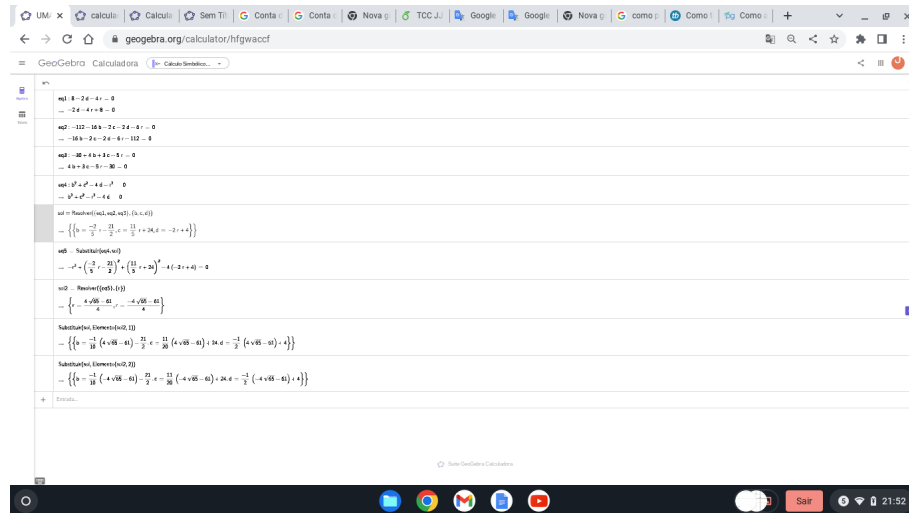


Figura 1.11: Resolução do sistema. <https://www.geogebra.org/calculator/hfgwaccf>, <https://www.geogebra.org/calculator/xxrrpac9>

**Aplicação 5:** Dados dois círculos  $C_1 = (0, 0)$ ,  $C_2 = (7, 0)$  e a reta  $C_3 : x - y - 3 = 0$ , tais que,  $C_1$ ,  $C_2$  estão em lados opostos em relação à reta  $C_3$ , com raios  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ , respectivamente. Determine um círculo tangente aos três elementos dados.

**Solução 5:** Dados os centros e os raios dos círculos, podemos determinar,  $a_1, b_1, c_1, d_1, r_1$ ,  $a_2, b_2, c_2, d_2, r_2$  e  $a_3, b_3, c_3, d_3, r_3$  seja,  $C$ :  $-4ad + b^2 + c^2 - r^2 = 0$  o círculo que desejamos encontrar, precisamos determinar os valores de  $a, b, c, d, r$ , tais que,

$$\begin{cases} L(C, C_1) = 0 \\ L(C, C_2) = 0 \\ L(C, C_3) = 0 \\ L(C, C) = 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2d + 2r - 2 = 0 \\ 14b + 2d - 4r + 90 = 0 \\ b - c - \sqrt{2}r + 6 = 0 \\ b^2 + c^2 - 4ad - r^2 = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} b = \frac{-r}{7} - \frac{46}{7} \\ c = \frac{(-7\sqrt{2}-1)r}{7} - \frac{4}{7} \\ d = -r + 1 \\ b^2 + c^2 = 4ad + r^2 \end{cases}$$

Substituindo os valores encontrados para  $b, c, d$  na última equação, obtemos a equação quadrática em  $r$

$$\frac{1}{49}(-42\sqrt{2} + 67)r^2 + \frac{1}{49}(56\sqrt{2} - 104)r + \frac{1936}{49} = 0,$$

cujo o discriminante é negativo, o que nos leva a concluir que a equação não possui solução real e que não existe um círculo tangente aos ciclos dados.

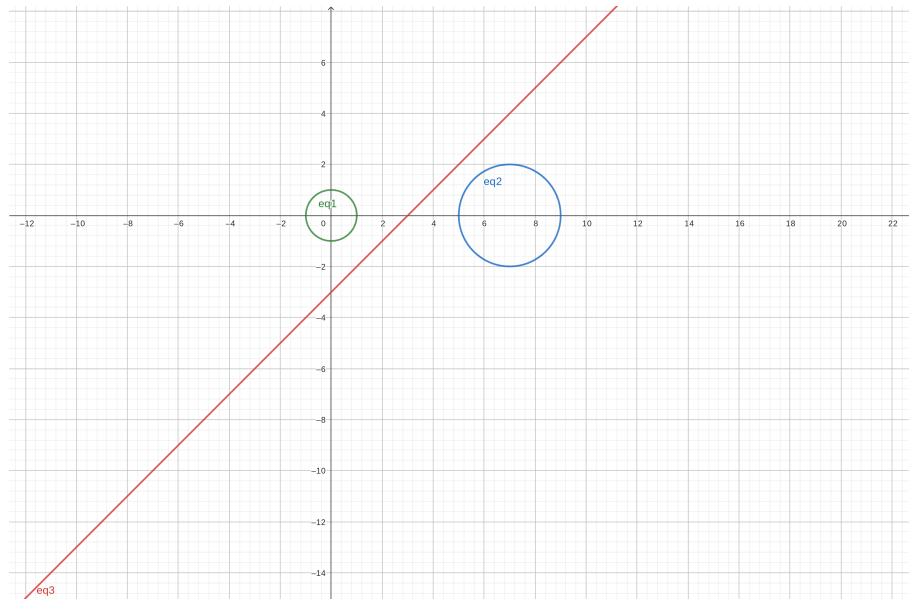


Figura 1.12: Círculos em lados opostos da reta.

Em resumo, após a resolução das aplicações, podemos concluir que utilizando os ciclos de Lie sempre obteremos um sistema com três equações lineares e uma equação quadrática, nos possibilitando a determinar sempre que possível uma solução.

# Capítulo 2

## Interpretação via Projeção Estereográfica

A projeção estereográfica é uma técnica que permite mapear uma superfície esférica em um plano bidimensional, ou vice-versa, pois a mesma é uma aplicação contínua e bijetiva, oferecendo a possibilidade de visualizar a esfera como uma extensão ampliada do espaço bidimensional  $\mathbb{R}^2$ . Nesse método, a esfera é projetada sobre um plano de forma que os pontos na esfera sejam correspondidos a pontos únicos no plano, possibilitando uma representação visual mais compreensível da geometria esférica [7].

Seja  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  a esfera unitária com centro na origem e  $N = (0, 0, 1)$  o *polo norte* da esfera. Para qualquer ponto  $P = (x, y, 0)$  do plano  $xy$  podemos formar a reta  $PN$ . A reta  $PN$  intersecta a esfera  $S^2$  exatamente em um ponto  $P'$  diferente de  $N$ . Este ponto  $P'$  é a projeção estereográfica de  $P$  sobre  $S^2$ . Mostraremos que se  $r$  é uma reta contida no plano  $xy$ , sua projeção estereográfica é um círculo sobre a esfera  $S^2$  passando por  $N$ .

Semelhantemente, um círculo  $\lambda$  no plano  $xy$  é levado em uma circunferência  $\gamma$  sobre  $S^2$ , a qual diz-se a projeção estereográfica de  $\lambda$  em relação ao ponto  $N$  sobre a esfera  $S^2$  (figura 2.1).

Podemos observar que ao projetar retas do plano sobre a esfera obtemos círculos que possuem o ponto  $N$  como ponto de tangência das circunferências. Se interpretarmos este ponto  $N$  como um “ponto no infinito”, podemos dar sentido a expressão “retas paralelas se encontram no infinito”.

### 2.1 Imagem de um Reta pela projeção estereográfica

Vamos então determinar algebricamente as equações da projeção estereográfica: Seja  $N = (0, 0, 1)$  um ponto de  $S^2$  cuja a equação é  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $P = (x, y, 0)$  um ponto da reta  $r$  que tem como equação  $bx + cy + d = 0$  e  $P' = (X, Y, Z)$  tal que

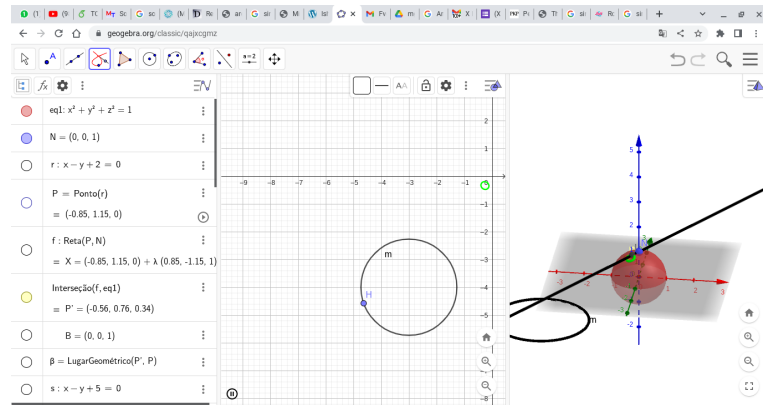


Figura 2.1: Projeção Estereográfica no GeoGebra. <https://www.geogebra.org/classic/qajxcgmz>

$$P' = PN \cap (S^2/N).$$

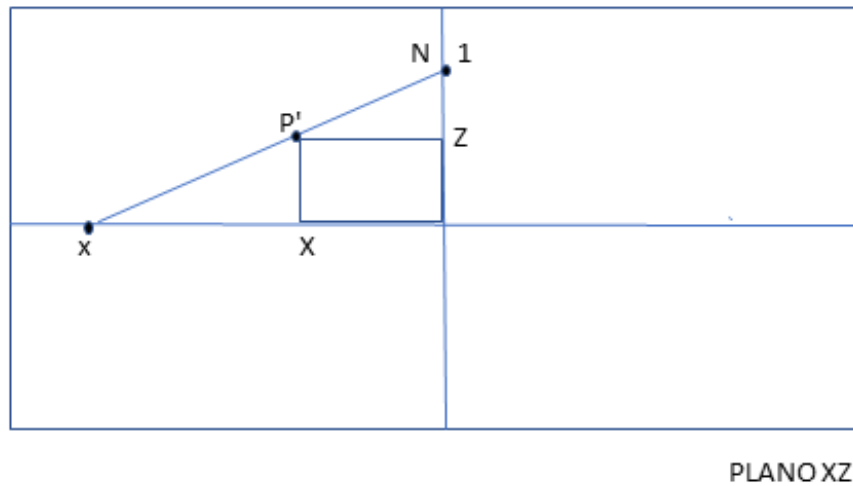


Figura 2.2: PLANO XZ

. Pela figura 2.2, vemos que

$$\frac{1}{x} = \frac{1 - Z}{X} \quad (2.1)$$

Isolando  $x$  obtemos

$$x = \frac{X}{1 - Z} \quad (2.2)$$

Analogamente, considerando o plano YZ, obteremos a equação

$$\frac{1}{y} = \frac{1 - Z}{Y} \quad (2.3)$$

Isolando  $y$ , temos que

$$y = \frac{Y}{1 - Z}. \quad (2.4)$$

Desta forma determinamos

$$\begin{cases} x = \frac{X}{1-Z} \\ y = \frac{Y}{1-Z} \end{cases}$$

que são as equações que descrevem a projeção da esfera para o plano.

Sendo assim, temos,

$$x^2 + y^2 = \frac{X^2}{(1-Z)^2} + \frac{Y^2}{(1-Z)^2} = \frac{X^2 + Y^2}{(1-Z)^2}, \quad (2.5)$$

substituindo  $P' = (X, Y, Z)$  em  $S^2$  obtemos,  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ , ou seja,  $X^2 + Y^2 = 1 - Z^2$ , dessa forma permutando  $X^2 + Y^2$  temos,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{1 - Z^2}{(1 - Z)^2} \\ &= \frac{(1 - Z)(1 + Z)}{(1 - Z)^2} \\ &= \frac{(1 + Z)}{(1 - Z)}, \end{aligned}$$

Desta maneira, obtemos que

$$\begin{aligned} (1 - Z)(x^2 + y^2) &= 1 + Z \\ x^2 + y^2 - Z(x^2 + y^2) &= 1 + Z \\ x^2 + y^2 - 1 &= Z + Z(x^2 + y^2) \\ x^2 + y^2 - 1 &= Z(x^2 + y^2 + 1) \end{aligned}$$

Isolando  $Z$  encontramos

$$\begin{aligned} Z &= \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \\ 1 - Z &= 1 - \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \\ 1 - Z &= \frac{1 + x^2 + y^2 - (x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2 + 1} \\ 1 - Z &= \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Como tínhamos obtido que  $X = x(1 - Z)$  e  $Y = y(1 - Z)$ , podemos concluir que

$$\begin{cases} X = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \\ Y = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \\ Z = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \end{cases} \quad (2.7)$$

são as equações que possibilitam converter pontos do plano para a esfera.

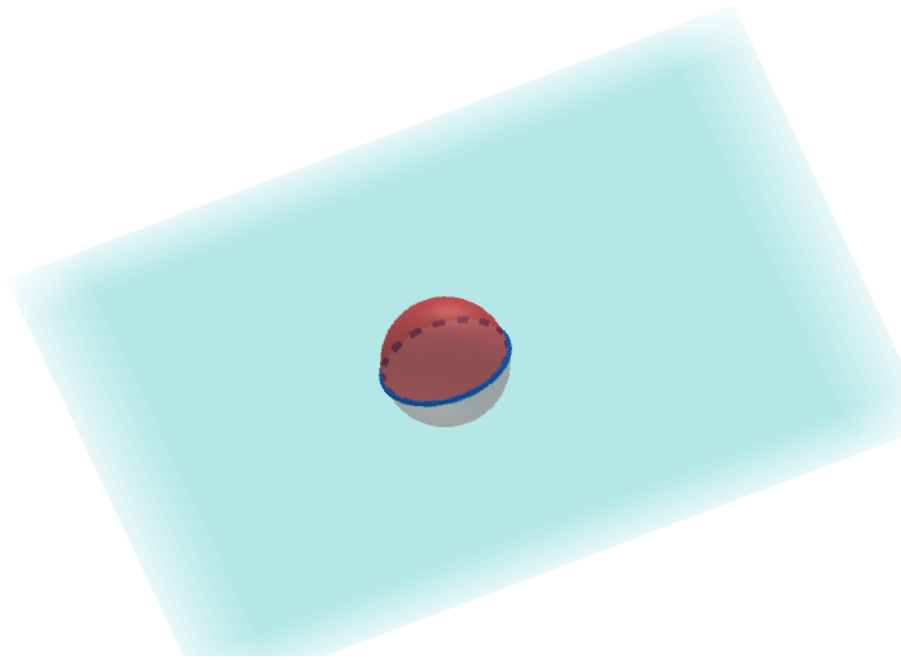


Figura 2.3: PLANO ESFERA

## 2.2 Círculos na Esfera

Qualquer círculo  $\beta$  sobre a esfera  $S^2$  é obtido a partir da intersecção de um plano  $\pi$  com a esfera. Seja  $\pi : v_x X + v_y Y + v_z Z = K$ , com  $v = (v_x, v_y, v_z)$  um vetor perpendicular ao plano  $\pi$  e partindo da origem dos eixos coordenados, tal que  $\|v\| = 1$  e,  $k$  igual à distância do plano à origem.

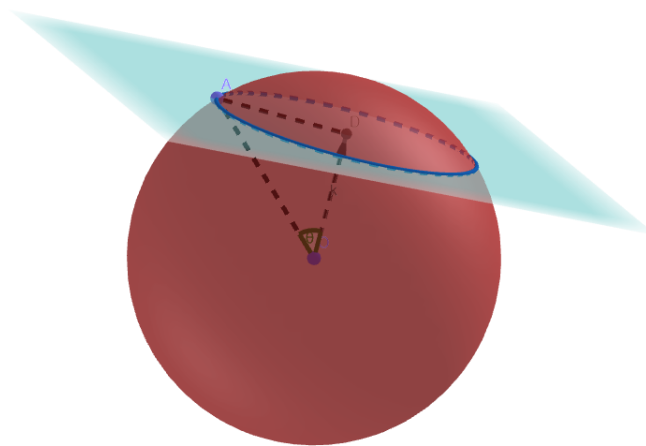


Figura 2.4: Círculo  $\kappa$  obtido a partir da intersecção de um plano  $\pi$  com a esfera.

Pela figura temos que  $k = \cos \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre o eixo  $v$  do círculo e um vetor que liga a origem a um ponto qualquer do círculo. Note ainda que  $\sin \theta$  mede o raio

do círculo.

Sendo assim, notamos que todo círculo  $\kappa$  pode ser descrito por dois parâmetros: um vetor unitário  $v$  e um ângulo de abertura  $\theta$ . Assim

$$\kappa = \begin{cases} v_x X + v_y Y + v_z Z = \cos \theta \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

## 2.3 Imagem de um Círculo via Projeção Estereográfica

Substituindo os valores de (2.7) em (2.8), temos

$$v_x \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} + v_y \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} + v_z \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} = \cos \theta.$$

Operando a equação, obtemos

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + 1) \cos \theta &= v_x 2x + v_y 2y + v_z (x^2 + y^2 - 1) \\ (x^2 + y^2 + 1) \cos \theta - v_z (x^2 + y^2 - 1) &= 2v_x x + 2v_y y \\ (x^2 + y^2) \cos \theta - v_z (x^2 + y^2) + \cos \theta + v_z &= 2v_x x + 2v_y y \\ (x^2 + y^2)(\cos \theta - v_z) + \cos \theta + v_z &= 2v_x x + 2v_y y \\ (x^2 + y^2)(\cos \theta - v_z) - 2v_x x - 2v_y y + (\cos \theta + v_z) &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Comparando a equação (2.9) com a equação (1.18) que representa um círculo, temos  $a = \cos \theta - v_z$ ,  $b = -2v_x$ ,  $c = -2v_y$ ,  $d = \cos \theta + v_z$ .

Assim, consumamos que a projeção estereográfica percorre um círculo em  $S^2$  a partir da reta  $bx + cy + d = 0$ , se  $a = 0$  ou do círculo  $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$  se  $a \neq 0$ .

Todavia, quando  $a = 0$ , temos que  $\cos \theta = v_z$ , ou seja,  $-1 \leq v_z \leq 1$  e  $-2 \leq d \leq 2$ , com  $d = 2v_z$ , por outro lado,  $v_z = k$ , logo, tem que o plano  $\pi$  é paralelo ao plano  $Oxy$ , ou seja, perpendicular ao eixo  $z$ , distando uma unidade da origem.

Inversamente, dada uma equação  $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$ , podemos encontrar o vetor  $v$  e  $\cos \theta$  da seguinte maneira: Vamos buscar um valor para um certo  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  tal que,

$$\begin{cases} a = \alpha(\cos \theta - v_z) \\ b = \alpha(-2v_x) \\ c = \alpha(-2v_y) \\ d = \alpha(\cos \theta + v_z), \end{cases} \quad (2.10)$$

isolando  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  e  $\cos \theta$  obtemos,



$$\begin{cases} v_x = -\frac{b}{2\alpha} \\ v_y = -\frac{c}{2\alpha} \\ v_z = \frac{d-a}{2\alpha} \\ \cos \theta = \frac{d+a}{2\alpha}, \end{cases} \quad (2.11)$$

como  $v$  deve ser unitário, temos,

$$1 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \frac{b^2}{4\alpha^2} + \frac{c^2}{4\alpha^2} + \frac{(d-a)^2}{4\alpha^2},$$

desmembrando a equação

$$4\alpha^2 = b^2 + c^2 + (d-a)^2,$$

o que nos leva a concluir

$$\alpha^2 = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 + (d-a)^2),$$

ou seja,

$$\alpha = \pm \frac{1}{2}(\sqrt{b^2 + c^2 + (d-a)^2}).$$

Sabemos ainda da relação fundamental da trigonometria que

$$\text{sen}^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{(d+a)^2}{4\alpha^2}$$

$$\text{sen}^2 \theta = \frac{4\alpha^2 - (d+a)^2}{4\alpha^2},$$

como já havíamos determinado que  $4\alpha^2 = b^2 + c^2 + (d-a)^2$ , substituindo, temos

$$\text{sen}^2 \theta = \frac{b^2 + c^2 + (d-a)^2 - (d+a)^2}{4\alpha^2}$$

$$\text{sen}^2 \theta = \frac{b^2 + c^2 - 4ad}{4\alpha^2},$$

pela equação (1.19), temos

$$\text{sen}^2 \theta = \frac{r^2}{4\alpha^2},$$

$$\text{sen} \theta = \frac{r}{2\alpha}.$$

Assim, podemos associar a cada quintupla  $(a, b, c, d, r)$  que descreve um ciclo no plano a uma quintupla  $(v_x, v_y, v_z, \cos(\theta), \text{sen}(\theta))$  que descreve um círculo na esfera, via

$$\begin{cases} v_x = -\frac{b}{2\alpha} \\ v_y = -\frac{c}{2\alpha} \\ v_z = \frac{d-a}{2\alpha} \\ \cos \theta = \frac{d+a}{2\alpha} \\ \text{sen} \theta = \frac{r}{2\alpha} \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} a = \cos(\theta) - v_z \\ b = -2\alpha v_x \\ c = -2\alpha v_y \\ d = (2\alpha - 1) \cos \theta + v_z \\ r = 2\alpha \sin \theta \end{cases},$$

com  $4\alpha^2 = b^2 + c^2 + (d - a)^2$ , ou seja,  $\alpha = \pm \frac{1}{2}(\sqrt{b^2 + c^2 + (d - a)^2})$ .

# Capítulo 3

## Mais Aplicações

Neste capítulo, trataremos do Teorema dos Círculos Osculantes de Descartes, também conhecido como Teorema da Curvatura de Descartes, é uma importante ferramenta matemática para determinar a interseção de circunferências. Ele estabelece uma relação entre as curvaturas de quatro circunferências tangentes entre si, permitindo calcular a curvatura da circunferência formada por sua interseção. Esse teorema foi desenvolvido pelo matemático francês René Descartes no século XVII e até hoje é amplamente utilizado em problemas geométricos para determinar se círculos se tocam ou se cruzam. Além disso, esse teorema pode ser aplicado em diversas áreas da ciência e engenharia, ajudando a resolver questões relacionadas a posicionamento, localização e otimização de sistemas circulares.

### 3.1 O Teorema dos Círculos Osculantes de Descartes

O Teorema de Descartes possui o seguinte enunciado [5]: Se quatro círculos  $C_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) em um plano, se tocam externamente, cada círculo tocando os outros três círculos, e  $\kappa_i = \frac{1}{R_i}$ , onde,  $R_i$  é o raio do círculo  $C_i$ , então,  $2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2) = (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4)^2$ .

Nossa demonstração é uma adaptação da que é encontrada em [10] e [11]. Sejam  $C_i = (a_i, b_i, c_i, d_i) \in \mathbb{R}^4$  com  $i = 1, 2, 3, 4$ , quatro círculos mutuamente tangentes entre si, onde supomos que os ciclos estejam normalizados.

No cap. 2, introduzimos uma variável  $r$  tal que  $R = \frac{r}{2a}$ . Como a curvatura  $\kappa$  de um círculo é tal que  $\kappa = \frac{1}{R}$ , supondo  $r = 1$ , temos que  $a_i = \frac{1}{2R_i} = \frac{\kappa_i}{2}$ .

Definindo também um círculo especial, ou seja, um círculo de raio infinito, o qual será representado da seguinte forma,  $C_\infty = (0, 0, 0, -1)$ , utilizando a forma bilinear  $M(C_1, C_2)$  já definida e fazendo  $C_1 \cdot C_2 := M(C_1, C_2)$ , obtemos

$$C_i \cdot C_i = 1$$

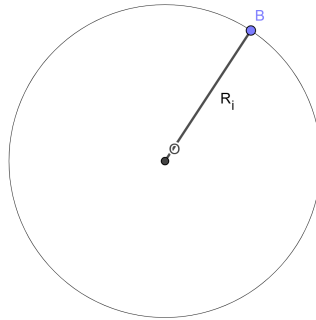


Figura 3.1: Círculo de centro  $O$  e raio  $R_i$

$$C_i \cdot C_j = -1$$

$$C_i \cdot C_\infty = \kappa_i$$

$$C_\infty \cdot C_\infty = 0$$

Sejam  $P$  e  $T$ , matrizes de ordem quatro, com a matriz  $P$  a matriz formada pelas coordenadas dos círculos

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

e, a matriz

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

obtida a partir da transformação bilinear, tal que,

$$M(C_1, C_2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot T \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix},$$

onde  $\det(T) = -4$  e, a matriz  $P^t$  a matriz transposta de  $P$ , temos

$$P \cdot T \cdot P^t = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} P \cdot T \cdot P^t &= \begin{pmatrix} C_1 \cdot C_1 & C_1 \cdot C_2 & C_1 \cdot C_3 & C_1 \cdot C_4 \\ C_2 \cdot C_1 & C_2 \cdot C_2 & C_2 \cdot C_3 & C_2 \cdot C_4 \\ C_3 \cdot C_1 & C_3 \cdot C_2 & C_3 \cdot C_3 & C_3 \cdot C_4 \\ C_4 \cdot C_1 & C_4 \cdot C_2 & C_4 \cdot C_3 & C_4 \cdot C_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

tal que,  $\det(P \cdot T \cdot P^t) = -16$ .

Pela propriedades das matrizes, sabemos que, se as matrizes têm ordens iguais, então, o determinante do produto é igual ao produto dos determinantes e o determinante de uma matriz é igual ao determinante da transposta. Logo

$$\begin{aligned} \det(P \cdot T \cdot P^t) &= \det(P) \cdot \det(T) \cdot \det(P^t) \\ -16 &= -4(\det(P))^2 \\ (\det(P))^2 &= 4 \\ \det(P) &= \pm 2 \neq 0, \end{aligned}$$

o que nos permite concluir que as linhas de  $P$  são LI, ou seja,  $C_\infty$  é uma combinação linear dos  $C_i$ :

$$t_1 C_1 + t_2 C_2 + t_3 C_3 + t_4 C_4 = C_\infty. \quad (3.2)$$

Usando a forma bilinear  $C_i \cdot C_j$ , obtemos

$$\begin{cases} t_1[C_1 \cdot C_1] + t_2[C_1 \cdot C_2] + t_3[C_1 \cdot C_3] + t_4[C_1 \cdot C_4] = [C_1 \cdot C_\infty] \\ t_1[C_1 \cdot C_2] + t_2[C_2 \cdot C_2] + t_3[C_2 \cdot C_3] + t_4[C_2 \cdot C_4] = [C_2 \cdot C_\infty] \\ t_1[C_1 \cdot C_3] + t_2[C_2 \cdot C_3] + t_3[C_3 \cdot C_3] + t_4[C_3 \cdot C_4] = [C_3 \cdot C_\infty] \\ t_1[C_1 \cdot C_4] + t_2[C_2 \cdot C_4] + t_3[C_3 \cdot C_4] + t_4[C_4 \cdot C_4] = [C_4 \cdot C_\infty] \\ t_1[C_1 \cdot C_\infty] + t_2[C_2 \cdot C_\infty] + t_3[C_3 \cdot C_\infty] + t_4[C_4 \cdot C_\infty] = [C_\infty \cdot C_\infty] \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} t_1 - t_2 - t_3 - t_4 = \kappa_1 \\ -t_1 + t_2 - t_3 - t_4 = \kappa_2 \\ -t_1 - t_2 + t_3 - t_4 = \kappa_3 \\ -t_1 - t_2 - t_3 + t_4 = \kappa_4 \\ t_1\kappa_1 + t_2\kappa_2 + t_3\kappa_3 + t_4\kappa_4 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos,  $4t_1 = \kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_3 - \kappa_4$ ,  $4t_2 = -\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3 - \kappa_4$ ,  $4t_3 = -\kappa_1 - \kappa_2 + \kappa_3 - \kappa_4$  e  $4t_4 = -\kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_3 + \kappa_4$ . Substituindo os valores de  $t_i$  em  $4t_1\kappa_1 + 4t_2\kappa_2 + 4t_3\kappa_3 + 4t_4\kappa_4 = 0$ , obtemos,

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2 = 2(\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_1\kappa_4 + \kappa_2\kappa_3 + \kappa_2\kappa_4 + \kappa_3\kappa_4) \quad (3.3)$$

ou seja,

$$\sum \kappa_i^2 = 2 \sum \kappa_i\kappa_j, i < j \quad (3.4)$$

Como

$$2(\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_1\kappa_4 + \kappa_2\kappa_3 + \kappa_2\kappa_4 + \kappa_3\kappa_4) = (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4)^2 - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2),$$

substituindo em 3.3, chegamos ao resultado desejado, que é

$$2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2) = (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4)^2, \quad (3.5)$$

como queríamos demonstrar.

Assim se conhecemos os raios  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  então, podemos determinar facilmente  $R_4$ , resolvendo a equação do segundo grau 3.5.

## 3.2 Problema de Apolônio no Espaço

Observamos que a partir da Quádrica de Lie determinamos o ponto de tangência entre três ciclos dados. Neste capítulo, vamos verificar a condição de tangência entre duas esferas no espaço. Sejam,  $S_1 : a_1(x^2 + y^2 + z^2) + b_1x + c_1y + d_1z + e_1 = 0$ , e  $S_2 : a_2(x^2 + y^2 + z^2) + b_2x + c_2y + d_2z + e_2 = 0$ , com centros e raios iguais a:  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $R_1$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$  e  $R_2$ , respectivamente.

Sejam  $(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, r_1)$  e  $(a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, r_2)$  dois pontos de  $Q$  com  $(a_1, r_1) \neq (0, 0)$  e  $(a_2, r_2) \neq (0, 0)$ , ou seja, que eles representam duas esferas, a esfera  $S_1$  de centro

$$(x_1, y_1, z_1) = \left( -\frac{b_1}{2a_1}, -\frac{c_1}{2a_1}, -\frac{d_1}{2a_1} \right)$$

e raio  $R_1 = \frac{r_1}{2a_1}$  e, uma esfera  $S_2$  de centro

$$(x_2, y_2, z_2) = \left( -\frac{b_2}{2a_2}, -\frac{c_2}{2a_2}, -\frac{d_2}{2a_2} \right)$$

e raio  $R_2 = \frac{r_2}{2a_2}$ .

Para que  $S_1$  e  $S_2$  sejam tangentes com mesma orientação na tangência, temos que,

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = (R_1 - R_2)^2,$$

Assim,

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 + z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2 = R_1^2 - 2R_1R_2 + R_2^2. \quad (3.6)$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2z_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 + z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2 = R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2 \quad (3.7)$$

Substituindo as coordenadas, temos que

$$\frac{b_1^2}{4a_1^2} + \frac{b_2^2}{4a_2^2} - \frac{2b_1b_2}{4a_1a_2} + \frac{c_1^2}{4a_1^2} + \frac{c_2^2}{4a_2^2} - \frac{2c_1c_2}{4a_1a_2} + \frac{d_1^2}{4a_1^2} + \frac{d_2^2}{4a_2^2} - \frac{2d_1d_2}{4a_1a_2} = \frac{r_1^2}{4a_1^2} + \frac{r_2^2}{4a_2^2} - \frac{2r_1r_2}{4a_1a_2} \quad (3.8)$$

Arrumando a equação, concluímos que

$$\frac{1}{4a_1^2}(b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 - r_1^2) + \frac{1}{4a_2^2}(b_2^2 + c_2^2 + d_2^2 - r_2^2) = \frac{b_1b_2}{2a_1a_2} + \frac{c_1c_2}{2a_1a_2} + \frac{d_1d_2}{2a_1a_2} - \frac{r_1r_2}{2a_1a_2} \quad (3.9)$$

Pela definição de quádrlica, sabemos que

$$b^2 + c^2 + d^2 - r^2 = 4ae, \quad (3.10)$$

logo

$$\frac{1}{4a_1^2}(4a_1e_1) + \frac{1}{4a_2^2}(4a_2e_2) = \frac{b_1b_2}{2a_1a_2} + \frac{c_1c_2}{2a_1a_2} + \frac{d_1d_2}{2a_1a_2} - \frac{r_1r_2}{2a_1a_2} \quad (3.11)$$

$$\frac{e_1}{a_1} + \frac{e_2}{a_2} = \frac{b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2 - r_1r_2}{2a_1a_2} \quad (3.12)$$

$$2a_2e_1 + 2a_1e_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + r_1r_2 = 0 \quad (3.13)$$

$$L((a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, r_1), (a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, r_2)) = 2a_2e_1 + 2a_1e_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + r_1r_2 \quad (3.14)$$

Em resumo, para que uma sêxtupla represente uma esfera de Lie, temos que

$$L(S, S) = 0.$$

**Aplicação 6:** Dado um tetraedro inscrito em uma esfera de raio unitário, determinar os círculos cujos centros são os vértices do tetraedro e suas planificações.

**Solução 6:** .

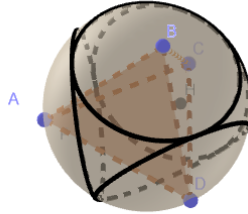


Figura 3.2: Tetraedro inscrito em uma esfera de raio unitário <https://www.geogebra.org/classic/djzahxyt>

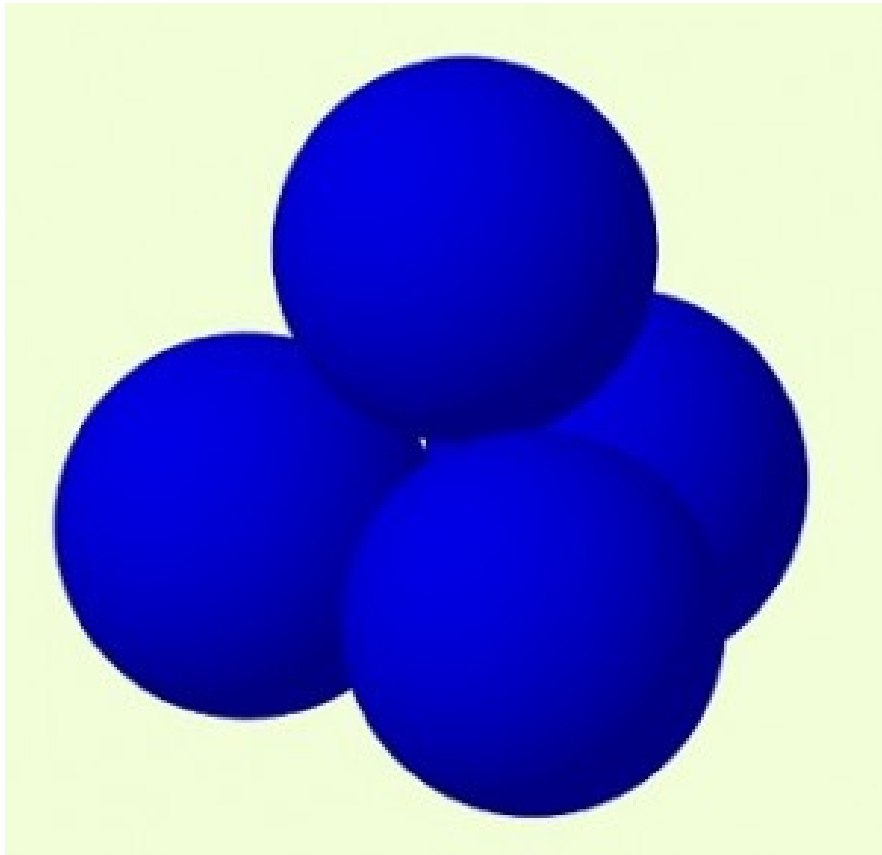


Figura 3.3: Esferas Tangentes <http://clubes.obmep.org.br/blog/wp-content/uploads/2015/06/quatro-esferas-300x290.jpg>



**Aplicação 7:** Considere quatro esferas de raio  $r = 1$ , tangentes entre si, duas a duas, como ilustra a figura. Determine uma quinta esfera tangente às quatro esferas dadas, simultaneamente.

**Solução 7:** Precisamos determinar uma esfera  $S$  tangente às quatro esferas dadas, cujo os centros dessas esferas são,  $(1, 0, 0)$ ,  $(3, 0, 0)$  e  $(2, \sqrt{3}, 0)$  e  $(2, \frac{\sqrt{3}}{3}, 2\frac{\sqrt{6}}{3})$ , onde,  $R = 1$  e  $R = \frac{r}{2a}$ , então, temos as seguintes equações das esferas:

$$\begin{cases} S_1 : (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ S_2 : (x - 3)^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ S_3 : (x - 2)^2 + (y - \sqrt{3})^2 + z^2 = 1 \\ S_4 : (x - 2)^2 + (y - \frac{\sqrt{3}}{3})^2 + (z - 2\frac{\sqrt{6}}{3})^2 = 1 \end{cases}$$

Pela definição da quádrlica de Lie, temos que,

$$\begin{cases} L(S, S_1) = 0 \\ L(S, S_2) = 0 \\ L(S, S_3) = 0 \\ L(S, S_4) = 0 \\ L(S, S_5) = 0 \end{cases} ,$$

o que nos fornece as seguintes equações

$$\begin{cases} 2b + 2e + 2r = 0 \\ 6b + 2e + 2r + 16 = 0 \\ 4b + 2\sqrt{3}c + 2e + 2r + 12 = 0 \\ 4b + 2\frac{\sqrt{3}}{3}c + 4\frac{\sqrt{6}d}{3} + 2e + 2r + 12 = 0 \\ b^2 + c^2 + d^2 - 4e - r^2 = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} b = -4 \\ c = -2\frac{\sqrt{3}}{3} \\ d = -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ e = -r + 4 \\ r^2 - 4r - 2 = 0 \end{cases} ,$$

donde resolvendo a equação do segundo grau em  $r$ , obtemos,  $r = -\sqrt{6} + 2$  ou  $r = \sqrt{6} + 2$ , o que nos fornece duas esferas,  $S_5 : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2\frac{\sqrt{3}}{3}y - \frac{\sqrt{6}}{3}z - \sqrt{6} + 2 = 0$  e  $S_6 : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2\frac{\sqrt{3}}{3}y - \frac{\sqrt{6}}{3}z + \sqrt{6} + 2 = 0$ , com  $R_5 = -\frac{\sqrt{6}}{2} + 1$  e  $R_6 = \frac{\sqrt{6}}{2} + 1$ .

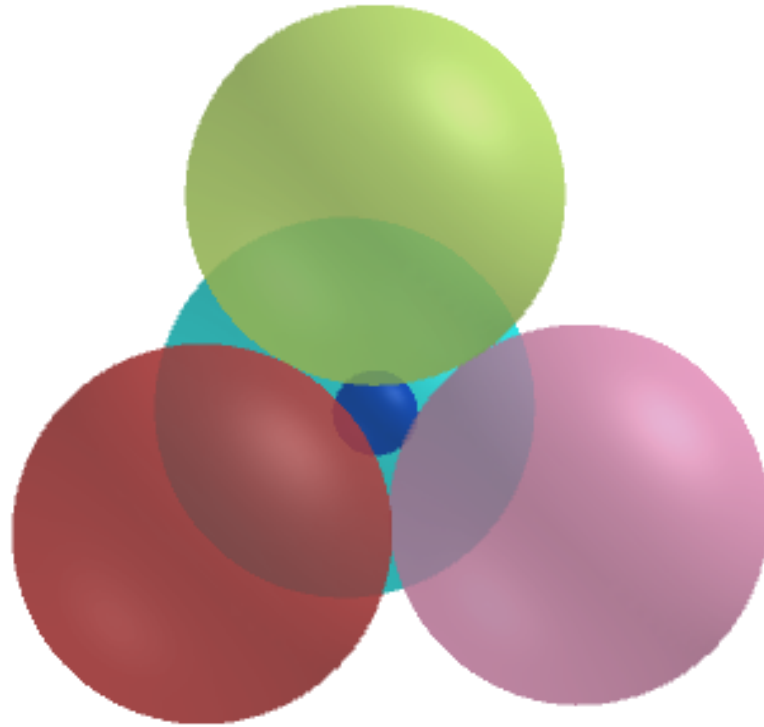


Figura 3.4: Esferas Tangentes

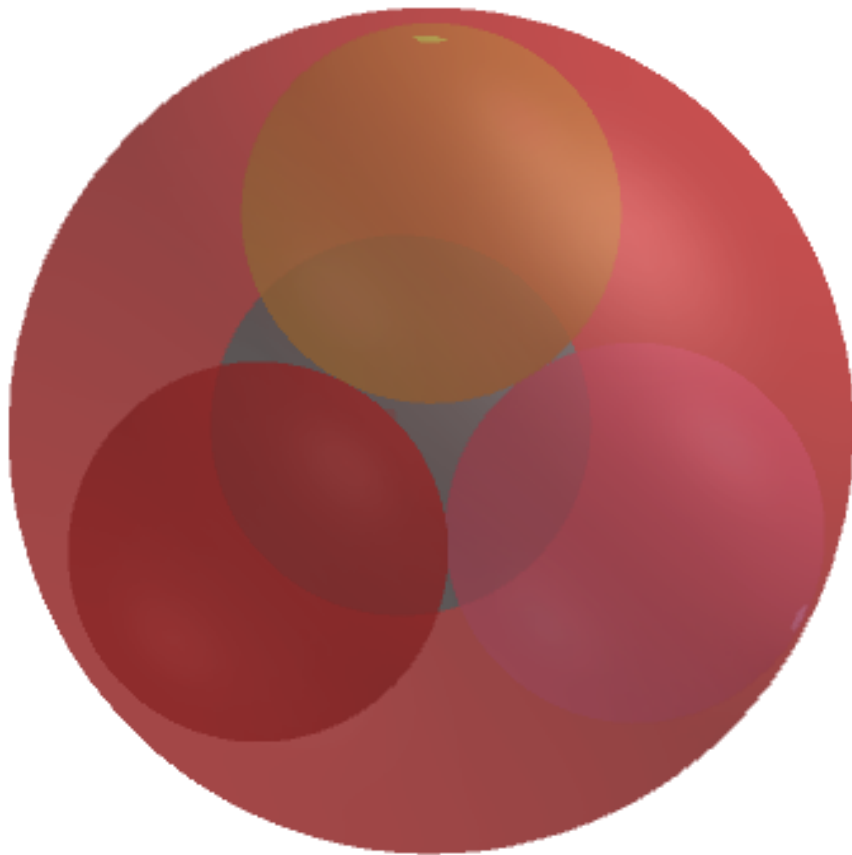


Figura 3.5: Esferas Tangentes Internas <https://www.geogebra.org/classic/evhfffzx>

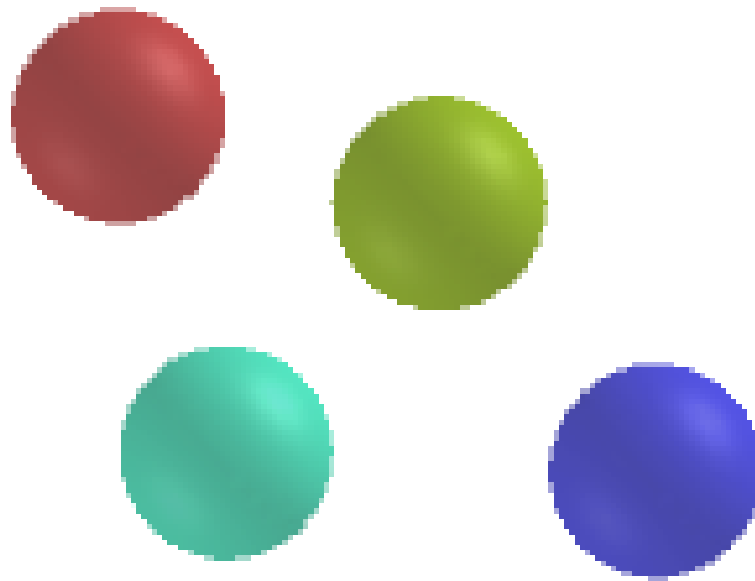


Figura 3.6: Esferas no espaço. <https://www.geogebra.org/classic/vsfy9aae>

**Aplicação 8:** Dado quatro esferas,  $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 13 = 0$ ,  $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z + 1 = 0$ ,  $S_3 : x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 8z + 20 = 0$  e  $S_4 : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z + 10 = 0$  determinar uma quinta esfera tangente simultaneamente às esferas dadas.

**Solução 8:** Conhecendo-se as equações das esferas, podemos determinar as sêxtuplas,

$$S_1 = (1, -2, -4, -6, 13, 2)$$

$$S_2 = (1, 2, 0, -2, 1, 2),$$

$$S_3 = (1, 4, -2, -8, 20, 2),$$

$$S_4 = (1, -6, 2, -2, 10, 2)$$

e precisamos determinar  $(1, b, c, d, e, r)$ .

Pela definição da quádrlica de Lie, temos que

$$\left\{ \begin{array}{l} L(S, S_1) = 0 \\ L(S, S_2) = 0 \\ L(S, S_3) = 0 \\ L(S, S_4) = 0 \\ L(S, S_5) = 0 \end{array} \right. ,$$

o que nos fornece as seguintes equações

$$\left\{ \begin{array}{l} b + 2c + 3d + e + r + 13 = 0 \\ b - d - e - r - 1 = 0 \\ 2b - c - 4d - e - r - 20 = 0 \\ 3b - c + d + e + r + 10 = 0 \\ b^2 + c^2 + d^2 - 4e - r^2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\sim \left\{ \begin{array}{l} b = -\frac{17}{12} \\ c = \frac{10}{3} \\ d = -\frac{95}{12} \\ e = -r + \frac{11}{2} \\ r^2 - 4r - \frac{1291}{24} = 0 \end{array} \right. ,$$

donde resolvendo a equação do segundo grau em  $r$ , obtemos  $r = \frac{-\sqrt{8322+24}}{12}$  ou  $r = \frac{\sqrt{8322+24}}{12}$ , o que nos fornece duas esferas,  $S_5 : x^2 + y^2 + z^2 - \frac{17}{12}x + \frac{10}{3}y - \frac{95}{12} + \frac{\sqrt{8322+24}}{12} + \frac{11}{2} = 0$  e  $S_6 : x^2 + y^2 + z^2 - \frac{17}{12}x + \frac{10}{3}y - \frac{95}{12} - \frac{\sqrt{8322+24}}{12} + \frac{11}{2} = 0$ .

·  
·

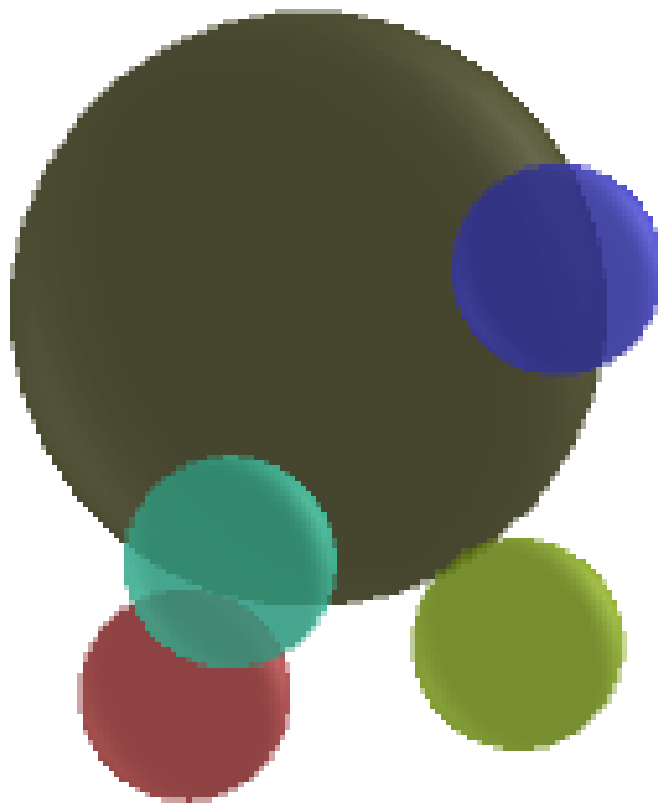


Figura 3.7: Esfera Tangente às quatro esferas dadas externamente.

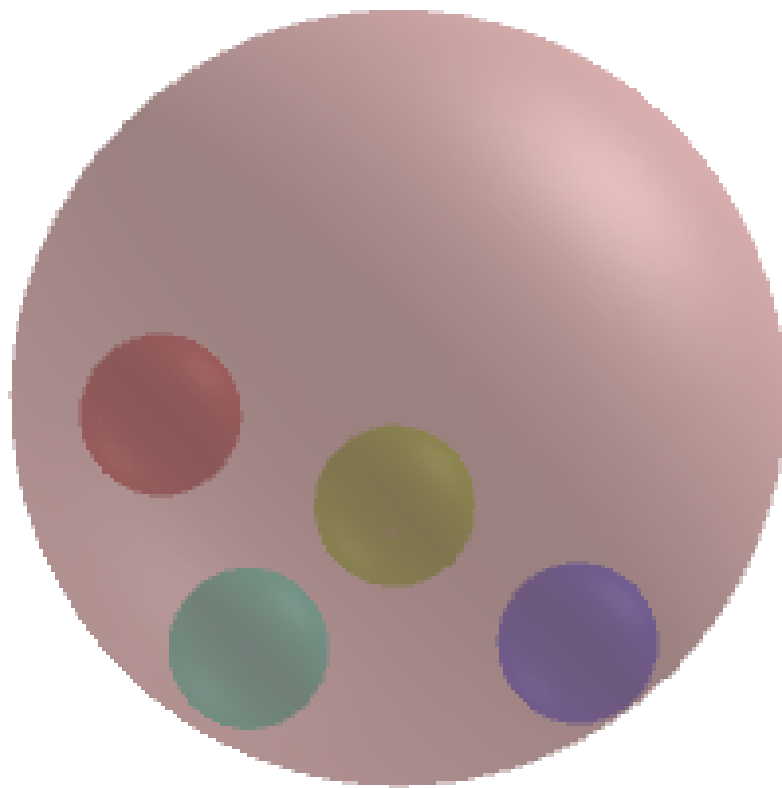


Figura 3.8: Esfera Tangente às quatro esferas dadas internamente.

# Capítulo 4

## Considerações finais

Neste trabalho, foi realizada uma investigação sobre a utilização da álgebra dos ciclos e um sistema de álgebra computacional, no caso a Janela CAS do GeoGebra, como auxílio na resolução de problemas de tangência envolvendo pontos, retas e circunferências no plano. Foi constatado que, embora a abordagem algébrica utilizando apenas álgebra do ensino médio seja conceitualmente simples, os cálculos necessários podem ser trabalhosos e propensos a erros. Porém, a adoção da álgebra dos ciclos e do sistema de álgebra computacional mostrou-se uma alternativa mais atraente, facilitando a resolução desses problemas. Além disso, a possibilidade de visualização proporcionada pelo GeoGebra permitiu uma melhor compreensão da relação entre álgebra e geometria, contribuindo para a solução desses problemas de forma mais eficiente e precisa. Com isso, evidencia-se a importância e utilidade da integração entre a álgebra, a geometria e a tecnologia na resolução de questões tangenciais, promovendo um aprimoramento no estudo desses problemas.



# Apêndice

## Sequência Didática: Tangência entre Ciclos

**Disciplina:** Matemática

**Público Alvo:** Alunos do 3º Ano do Ensino

Médio

**Duração:** 8 aulas (50 min. cada)

## Conteúdo Programático

**Aula 1 e 2:** Mostrar que os objetos básicos da geometria podem ser escritos por meio de uma única equação, da forma

$$C : a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0,$$

ou seja,

$$C = (a, b, c, d).$$

Ver o capítulo 1.

**Aula 3 e 4:** Mostrar a tangência entre círculos e, entre um círculo e uma reta, a partir das quádras, obtendo a forma bilinear

$$M(C_1, C_2).$$

Ver seção 1.2 e 1.5

**Aula 5 e 6:** Resolução de exercícios e apresentação do Problema de Apolônio.

Exemplo: Verificar se os círculos de centros  $C_1 = (-3, 1)$  e  $C_2 = (0, 1)$  e raios  $R_1 = 2$  e  $R_2 = 1$ , respectivamente, são tangentes.

**Aula 7 e 8:** Apresentar a solução do problema de Apolônio no GeoGebra.

<https://www.geogebra.org/classic/dvp5qks5>

<https://www.geogebra.org/classic/evs6f75k>

## Objetivos de Aprendizagem

- Introduzir a escrita de um Ciclo a partir da quádrupla  $C = (a, b, c, d)$ ;
- Reconhecer se dois ciclos são tangentes, a partir da forma bilinear  $M(C_1, C_2)$ ;
- Classificar se dois círculos são tangentes internamente ou externamente, a partir da forma bilinear  $M(C_1, C_2)$ ;..
- Introduzir a escrita de um Ciclo a partir da quádrupla  $C = (a, b, c, d, r)$ ;
- Reconhecer se dois ciclos são tangentes, a partir da forma bilinear  $L(C_1, C_2)$ ;
- Classificar se dois círculos são tangentes internamente ou externamente, a partir da forma bilinear  $L(C_1, C_2)$ ;..
- Comparar a forma bilinear  $M(C_1, C_2)$  com a forma bilinear  $L(C_1, C_2)$ .

## Habilidades e Competências (BNCC)

- COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3:  
 [6] Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente;
- (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais;
- (EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática;
- COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5:  
 Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

# Referências Bibliográficas

- [1] Marcela Melo AMORIM. OS DEZ PROBLEMAS DE APOLÔNIO: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO . *UNIRIO*, 2016.
- [2] H.J. Bortolossi, D.U. Pesco, and W.M. Rezende. Computação Simbólica no Ensino Médio com o Software Gratuito GeoGebra. *Universidade Federal Fluminense/Instituto GeoGebra do Rio de Janeiro – Brasil*, 2012.
- [3] Carl Boyer. *História da Matemática (tradução: Elza F. Gomide)*. 2ª edição, Edgard Blücher LTDA, São Paulo, 1996.
- [4] Alan George Ferreira da CRUZ. Os Interessantes Problemas de Apolônio: Resolução por Construções e por Inversão . *Universidade Federal da Paraíba*, 2014.
- [5] João Bosco Pitombeira de Carvalho. Descartes e a tangente a uma curva. *Cadernos do IME - Série Matemática*, 2021.
- [6] Ministério de Educação. Base Nacional Comum Curricular. *BRASIL, Ministério de Educação*, 2018.
- [7] J.M. dos Santos and A.M. d’Azevedo Breda. A Projeção Estereográfica no GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 2018.
- [8] Jaison GASPERI. O Problema de Apolônio. *Universidade Federal de Santa Catarina/Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática.*, 2015.
- [9] Alysson Espedito de MELO. Inversão Geométrica Aplicada à Resolução dos Problemas de Apolônio. *Universidade Federal da Paraíba*, 2014.
- [10] Dan Pedoe. *GEOMETRY, A Comprehensive Course*. Dover Publications,INC, New York, 1970.
- [11] Dan Pedoe. *Circles: A Mathematical View*. The Mathematical Association of America, Washington, 1995.

- [12] Cristiano Benevides de SOUZA. Soluções Geométrica e Algébrica do Problema de Apolônio. *Universidade Federal da Paraíba*, 2014.