UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA – IME
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – SBM
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MARIA HORTÊNCIA MACHADO CARNEIRO

Salvador

2024

MARIA HORTÊNCIA MACHADO CARNEIRO

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON E RAÍZES DE FUNÇÕES POLINOMIAIS UTILIZANDO TECNOLOGIAS EM UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação submetida ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal da Bahia para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Juan Andres Gonzalez Marin, Dr.

Salvador

2024

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária de Ciências e Tecnologias Prof. Omar Catunda, SIBI – UFBA.

C289 Carneiro, Maria Hortência Machado

Método de Newton-Raphson e raízes de funções polinomiais utilizando tecnologias em uma sequência didática /Maria Hortência Machado Carneiro. – Salvador, 2024.

82 f.

Orientador: Prof. Dr. Juan Andres Gonzalez Marin

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística, 2024.

1. Polinômios. 2. Matemática - Didática. 3. Tecnologia - Educação. I. Marin, Juan Andres Gonzalez. II. Universidade Federal da Bahia. III. Título.

CDU 512.62

Método de Newton-Raphson e Raízes de Funções Polinomiais utilizando Tecnologias em uma Sequência Didática no Ensino Médio

MARIA HORTÊNCIA MACHADO CARNEIRO

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovado em 27/03/2024.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Juan Andres Gonzalez Marin (orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UFBA

Profª. Dra. Profª. Dra. Mariana Cassol
Instituto de Matemática e Estatística - UFBA

Prof. Dr. Adriano Pedreira Cattai
Universidade Estadual da Bahia -UNEB

A Deus por esta grande oportunidade concedida.

A minha mãe, Maria de Fátima, pelo apoio e compreensão.

A meu filho, João Hélio, que me dá forças para persistir na caminhada da vida.

A meu pai, Raimundo Carlos (in memoriam), que se orgulharia grandiosamente deste título.

AGRADECIMENTOS

Aos professores do PROFMAT, mestres que se dedicaram com tamanho empenho no processo de ensino em meio a um momento tão árduo para a educação.

Aos colegas de turma, pelas trocas de conhecimento acadêmico e de vida.

Ao professor Dr. Juan Andrés pela orientação, acolhimento e ensinamentos ao longo de toda esta trajetória.

RESUMO

O estudo das funções polinomiais e de suas raízes é bastante presente e importante nos anos finais do Ensino Fundamental bem como no Ensino Médio. Porém, o estudo de seu comportamento, gráficos e raízes costuma ser bastante limitado às funções polinomiais de grau 1 e 2. O presente trabalho apresenta uma sequência didática elaborada e aplicada em uma turma de segundo ano do Ensino Médio de uma escola pública da Rede Estadual de Ensino da Bahia, e utiliza o Método de Newton-Raphson para obtenção da aproximação de raízes de funções polinomiais de diferentes graus. A sequência didática foi elaborada e aplicada com o objetivo de reapresentar os conhecimentos básicos de funções, destacando-se as polinomiais de graus 1 e 2, previamente conhecidas pelos estudantes. Além disso, expandir o campo de estudos para polinômios de grau superior, utilizando as ferramentas tecnológicas e os conhecimentos sobre o Método de Newton-Raphson. Como ferramentas de auxílio a esta empreitada, foram utilizadas algumas Tecnologias Digitais na Educação, por meio do software do Geogebra e de planilhas eletrônicas do Microsoft Excel, bem como seus respectivos aplicativos para construção de gráficos e planilhas (GEOGebra e Excel). O uso de aplicativos é altamente viável devido à maior acessibilidade dos estudantes a dispositivos móveis do que a computadores. Ao longo do desenvolvimento da sequência didática é possível perceber uma melhora significativa no engajamento dos alunos, bem como uma maior capacidade de resolver situações problema sem necessidade de intervenção frequente do professor. Com a inserção das ferramentas tecnológicas é perceptível o quanto o interesse dos estudantes aumenta, sobretudo com relação às possibilidades dentro do Excel e de seu aplicativo. Desta forma, pode-se perceber que o uso de Sequências Didáticas nas aulas de matemática, neste trabalho especificamente no estudo das raízes de funções polinomiais e do Método de Newton, é uma possibilidade de ensino enriquecedora e satisfatória. Percebe-se também que uso das tecnologias educacionais se faz um forte aliado na resolução de diversos problemas matemáticos, possibilitando estudos de conteúdos um pouco mais avançados do que os regularmente apresentados no Ensino Médio, como no presente trabalho.

Palavras-chave: Método de Newton. Funções polinomiais. Sequencia didática.

ABSTRACT

The study of polynomial functions and their roots is very present and important in the final years of Elementary School, as well as in High School. However, the study of their behavior, graphs, and roots is usually quite limited to polynomial functions of degree 1 and 2. The present work presents a didactic sequence elaborated and applied in a second year of high school class of a public school of the State Education Network of Bahia, and uses the Newton-Raphson Method to obtain the approximation of roots of polynomial functions of different degrees. The didactic sequence was elaborated and applied with the objective of re-presenting the basic knowledge of functions, highlighting the polynomials of grades 1 and 2, previously known by the students. In addition, expand the field of studies to higher degree polynomials, using the technological tools and knowledge about the Newton-Raphson Method. As tools to assist in this endeavor, some Digital Technologies in Education were used, through the Geogebra software and Microsoft Excel spreadsheets, as well as their respective applications for the construction of graphs and spreadsheets (GEOGebra and Excel). The use of apps is highly feasible due to students' greater accessibility to mobile devices than computers. Throughout the development of the didactic sequence, it is possible to perceive a significant improvement in student engagement, as well as a greater ability to solve problem situations without the need for frequent teacher intervention. With the insertion of technological tools, it is noticeable how much the interest of students increases, especially in relation to the possibilities within Excel and its application. Thus, it can be seen that the use of Didactic Sequences in mathematics classes, in this work specifically in the study of the roots of polynomial functions and Newton's Method, is an enriching and satisfying teaching possibility. It is also noticed that the use of educational technologies is a strong ally in the resolution of several mathematical problems, enabling studies of contents a little more advanced than those regularly presented in High School, as in the present work.

Keywords: Newton's method. Polynomial functions. Didactic sequence.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo de funções polinomiais, sobretudo de primeiro e segundo grau, é conteúdo de grande presença e importância nos anos finais do Ensino Fundamental (unidade temática Álgebra, habilidade EF09MA06) como também no Ensino Médio (habilidades EM13MAT101, EM13MAT302, EM13MAT401, EM13MAT402, EM13MAT503, EM13MAT507) conforme citado nas competências e habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018). Devido a sua aplicabilidade, capacidade de modelar situações reais e resolver problemas práticos e associados a fenômenos naturais, o estudo do comportamento de funções bem como a obtenção de suas raízes se faz de suma importância para a consolidação dos conhecimentos adquiridos no Ensino Médio. Desta forma, obter raízes de funções é um problema recorrente na rotina escolar dos estudantes do Ensino Médio. Para isso são utilizados diversos métodos, sendo o método de Bhaskara o mais utilizado para polinômios de grau 2. Porém, funções polinomiais de grau superior deixaram de ser trabalhadas no Ensino Médio depois da reforma, pois não são citadas entre as competências e habilidades presentes na BNCC (BNCC, 2018). Além disso, mesmo quando essas funções eram trabalhadas, os métodos para obtenção de raízes costumam ser apresentados apenas até polinômios do grau 3.

Este trabalho se propõe a apresentar o método Método de Newton-Raphson para obtenção da aproximação das raízes de polinômios de diferentes graus, método este já bastante utilizado nos cursos de cálculo de nível superior. Porém neste momento o método será abordado de maneira a ser voltada para o público de Ensino Médio. Para isso foi realizada uma abordagem introdutória do método, seguida da resolução de exercícios utilizando como ferramentas aplicativos como o Geogebra e o Microsoft Excel Spreadsheets.

O presente trabalho se apresenta com a seguinte estrutura, o primeiro capítulo introduz e situa o trabalho dentro do seu campo de pesquisa, dentro das perspectivas e buscas do Mestrado Profissional em Matemática. O segundo capítulo traz uma revisão de trabalhos anteriormente realizados neste campo de pesquisa, trazendo suas contribuições, aplicabilidade, pontos positivos e outras observações pertinentes. No terceiro capítulo são abordados os fundamentos matemáticos pertinentes ao tema, trazendo uma breve revisão de funções, sequências, noções básicas de cálculo (limites e derivadas) para consequentemente apresentar o método de Newton e alguns exemplos de aplicação do mesmo. No quarto capítulo são abordados os fundamentos educacionais aplicados neste trabalho, apresentando as Novas Tendências no Ensino da Matemática e enfatizando o uso das tecnologias como ferramentas de ensino-aprendizagem, uma vez que estas serão um instrumento facilitador na aplicação desta pesquisa. No quinto capítulo é apresentado o conceito de sequência didática na perspectiva de diferentes autores e como esta ferramenta se fez presente neste trabalho como um produto educacional capaz de ser aplicado com viabilidade em sala de aula. São também apresentados os aspectos relevantes e resultados obtidos em sua aplicação prática. No sexto capítulo são apresentadas as considerações finais sobre a aplicação da sequência didática, com base nos resultados obtidos em sala de aula e em uma autoavaliação realizada pelos estudantes que participaram da pesquisa.

2 CAMINHOS JÁ TRAÇADOS NESTE CAMPO DE PESQUISA

Esta dissertação trata de um tema já discutido no meio acadêmico em dissertações do PROFMAT, porém trazendo seus diferenciais na abordagem e aplicação. Tomando um breve levantamento de trabalhos semelhantes publicados neste âmbito, este capítulo se destina a trazer alguns dos pontos mais relevantes de alguns desses trabalhos, os quais estão listados no capítulo das Referências.

Oliveira (2014) discute a importância da abordagem do Cálculo Diferencial no Ensino Médio, enfatizando sua ausência nos livros didáticos. Busca introduzir o conceito de funções e derivadas para chegar a aplicação do Método de Newton-Raphson. Seu trabalho tem como objetivo construir um material de apoio para o desenvolvimento de atividades em sala de aula para aplicação do Método de Newton-Raphson para localização de raízes polinomiais. Este autor utiliza o Geogebra em sua abordagem, enfatizando no entanto que o mesmo pode ser dispensável. Este trabalho traz como principal ponto positivo a qualidade ilustrativa dos passos utilizados no Geogebra. Cabe pontuar que não existe um plano de aula ou sequência didática ou mesmo uma atividade em si que possa ser diretamente aplicada em sala de aula, sendo necessário a elaboração subsequente deste por quem queira aplicá-lo.

Já Cavalcanti (2015) sugere a aplicação do método no Ensino Médio utilizando como ferramenta planilhas eletrônicas, aliando o uso das tecnologias na educação para o ensino de matemática. O trabalho traz a sugestão de duas atividades, ambas com passo a passo ilustrativo para que os estudantes sejam capazes de construir sua planilha eletrônica e resolver os exercícios propostos. As atividades são apenas sugeridas, mas não são aplicadas em sala de aula.

Por sua vez, Teodoro (2015) traz em seu trabalho uma explanação sobre o método de Newton e as raízes complexas de um polinômio, discutindo o conceito de bacias de convergência e de fractais. Neste trabalho é apresentada uma série de ilustrações de bacias fractais de diferentes polinômios, uma experiência bastante interessante. Apesar do autor concluir seu trabalho citando a possibilidade de contextualizar o tema com o conteúdo de Números Complexos no Ensino Médio, percebe-se a falta de algum tipo de atividade, roteiro ou sequência didática.

Cardoso (2016) tem por objetivo oferecer instrumentos para a resolução de equações algébricas no Ensino Médio, utilizando métodos como o de Cardano-Tartaglia, manipulação algébrica de Ferrari e método de Newton. O autor traz a descrição de tais métodos no corpo do trabalho, bem como exemplos, mas percebe-se a ausência de um material de apoio que possa ser efetivamente aplicado em sala de aula, sendo assim necessária a elaboração deste por algum professor ou pesquisador interessado em aplicá-lo.

Em Roos (2017) tem-se um trabalho que deseja contribuir com o ensino da matemática por meio da abordagem geométrica do método Newton, onde são apresentados diversos exemplos tanto de casos unidimensionais (equações não lineares) como bidimensionais (duas equações não lineares com duas incógnitas). O trabalho traz uma abordagem mais avançada e não se direciona em nenhum momento ao público do Ensino Médio.

O trabalho de Santos (2018) consiste de uma pesquisa bibliográfica sobre soluções de equações por métodos numéricos e logaritmo de números negativos e apresentá-la em linguagem simples voltada para professores da educação básica. Desta forma, este material consiste em uma revisão destinada a professores, sendo assim não possui nenhum material ou aplicação direta para o Ensino Médio.

Já Brokveld (2021), teve o objetivo de produzir material didático para a exploração de métodos iterativos na educação básica. Este autor se propõe a construir diferentes materiais como plano de aula, vídeos e um livro dinâmico. Quanto ao material apresentado como plano de aula pelo autor, este na verdade se constitui de um roteiro explicativo de o quê e como o professor deve ensinar o conteúdo em sala. Como pontos positivos deste trabalho podemos destacar a qualidade do material utilizado, mas é importante citar que a total dependência da disponibilidade de laboratório de informática com acesso a internet na escola é um possivel empecilho para a replicação de proposta semelhante, o que torna a proposta bem menos acessível, principalmente na rede pública de ensino. O autor cita na conclusão do trabalho que essas atividades foram aplicadas nas turmas de terceiro ano na qual leciona, mas não são apresentando detalhes sobre a aplicação e os resultados obtidos pela mesma.

Desta forma, este trabalho aplica no Ensino Médio o Método de Newton-Raphson para estimar raízes de funções polinomiais, utilizando como ferramentas de apoio o aplicativo do Geogebra e o aplicativo de planilha eletrônica do Excel, por serem meios mais acessíveis aos alunos da rede pública de ensino. Além da construção de uma sequência didática, a mesma foi aplicada em sala de aula e os resultados aqui analisados e discutidos.

3 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Este capítulo destina-se ao embasamento matemático fundamental deste trabalho, apresentando alguns dos principais conceitos, definições e métodos pertinentes ao mesmo.

3.1 CONCEITOS BÁSICOS DE FUNÇÕES

Para Thomas (2009, p.1) “As funções são o elemento-chave para descrever o mundo real em termos matemáticos”. O mesmo autor traz a seguinte definição de função:

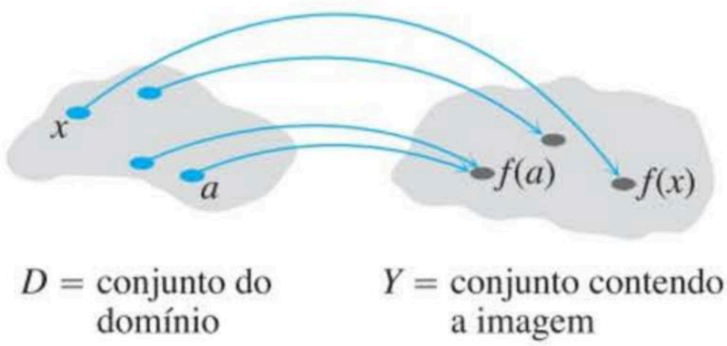
Definição 1: Uma função $f\colon D \to Y$ de um conjunto D para um conjunto Y é uma regra que associa um único elemento $f(x) \in Y$ a cada elemento $x \in D$.

Observação: Para fins didáticos, as funções apresentadas neste trabalho são consideradas reais, ou seja $D \subseteq \mathbb{R}$ e $Y \subseteq \mathbb{R}$.

O conjunto domínio é o conjunto de todos os possíveis valores de entrada. Já o conjunto de todos os valores de $f(x)$ é dito conjunto imagem. Segundo Lima (2017) uma função é composta por três partes: o domínio da função (o conjunto onde a função é definida), um contradomínio (conjunto onde a função toma valores) e uma regra, que permite associar, a cada elemento x pertencente ao domínio, um único elemento $f(x)$ no contradomínio, chamado valor da função no ponto x.

As funções podem ser representadas por meio de setas, onde ocorre a associação entre um elemento do domínio D e um único elemento do contradomínio Y.

Figura 1- Uma função do conjunto D para o conjunto Y associa um único elemento de Y a cada elemento de D.

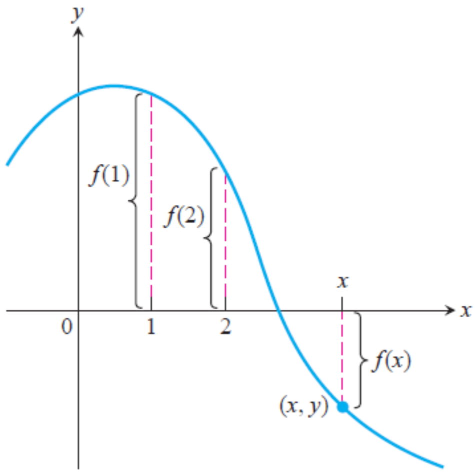


Fonte: Thomas (2009)

Também pode-se visualizar a função através de seu gráfico, formado pelos pontos do plano cartesiano cujas coordenadas sejam os pares ordenados de f:

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}.$$

Figura 2- Se (x, y) está no gráfico de f, então o valor de $y = f(x)$ é a altura do gráfico de acima do ponto x (ou abaixo de x se $f(x)$ for negativo).



Fonte: Thomas (2009)

É possível representar alguns pontos (pares ordenados) de uma função por meio de uma tabela de valores. Com esses valores é possível marcar os pontos em um plano cartesiano e, ligando os pontos, formar um esboço do gráfico da função.

Outra definição importante também encontrada em Thomas (2009, p.12) é a de polinômios:

Definição 2: Uma função $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com n inteiro não negativo é um polinômio $p(x)$ se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ onde os números $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ são constantes reais chamadas coeficientes do polinômio. Se o coeficiente a_n for diferente de zero (chamado de coeficiente dominante) e $n > 0$, então n é denominado grau do polinômio.

Observação: Em geral os polinômios trabalhados no Ensino Médio tem domínio em $\mathbb{R}$, mas posteriormente em certos momentos o domínio será expandido para o conjunto dos complexos.

3.2 LIMITES E CONTINUIDADES

De forma intuitiva, é possível imaginar que para qualquer função do tipo $y = f(x)$ definida num intervalo, onde o gráfico é esboçado em um movimento contínuo, sem necessidade de levantar o lápis, tem-se uma função contínua (THOMAS, 2009).

Para melhor compreensão do conceito de continuidade, cabe uma breve introdução de outro conceito importante no estudo de funções; o conceito de limite, que por sua vez é precedido pelo conceito de intervalo aberto.

Definição 3: Intervalos fechados e abertos.

i) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, definimos o conjunto $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ chamado de intervalo fechado.

ii) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, definimos o conjunto $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, chamado de intervalo aberto e limitado.

Por sua vez, os intervalos $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ e $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ são intervalos abertos ilimitados.

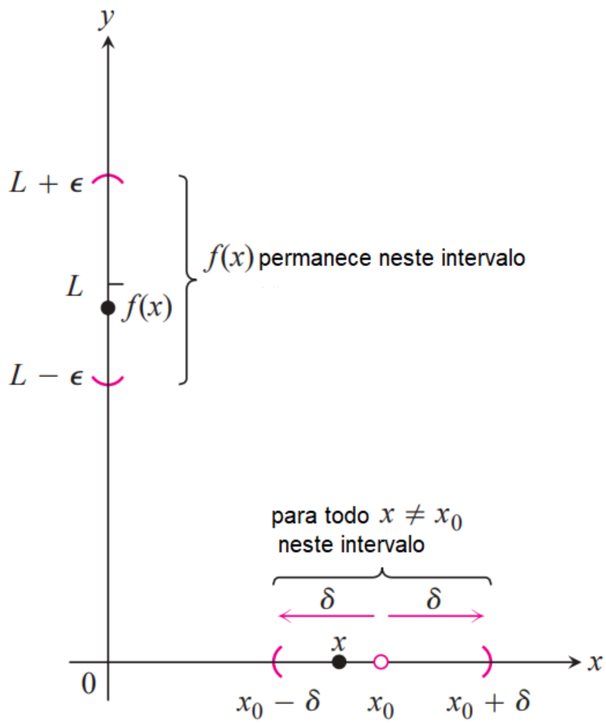
Definição 4: Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de x_0, exceto talvez em x_0, ou seja, o conjunto da forma $(x_0 - r,\ x_0 + r)\backslash\{x_0\}$ para algum $r > 0$. Dizemos que o limite de $f(x)$, conforme x se aproxima de x_0, é o número L, e escrevemos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

se para cada $\varepsilon > 0$ existir um número correspondente $\delta > 0$, tal que, para todos os valores de x, temos que

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Figura 3- Relação entre δ e ϵ na definição de limite.



Fonte: Thomas (2009)

Segundo Thomas (2009), para que a função f tenha um limite L, se faz necessário que quando x se aproxime de c os valores de $f(x)$ devem se aproximar de L, à medida que x se aproxima de c por ambos os lados, ou seja, seus limites laterais sejam iguais. Cabe aqui a definição de limites laterais:

Definição 5: Limites laterais

Seja $f(x)$ definida em um intervalo (a, b), e seja c tal que $a < c < b$. Se $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de L conforme x se aproxima de c nesse intervalo pelos valores de $x \geq c$, dizemos que f tem limite lateral à direita L em c e escreve-se

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L\,.$$

Seja $f(x)$ definida em um intervalo (a, b), e seja c tal que $a < c < b$. Se $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de M conforme x se aproxima de c nesse intervalo pelos valores de $x \leq c$, dizemos que f tem limite lateral à esquerda M em c e escreve-se

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = M.$$

Caso sejam $L = M$, os limites laterais são iguais e a função tem limite conforme apresentado no *Teorema 1*, cujos detalhes sobre a demonstração estão disponíveis em Muniz Neto (2015), na unidade 4 (Limites Laterais).

Teorema 1: Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de x_0, exceto talvez em x_0, ou seja, um conjunto da forma $(c - r, c + r)\backslash\{c\}$ para algum $r > 0$. Então $\lim_{x \to r} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to r^-} f(x) = L$ *e* $\lim_{x \to r^+} f(x) = L$.

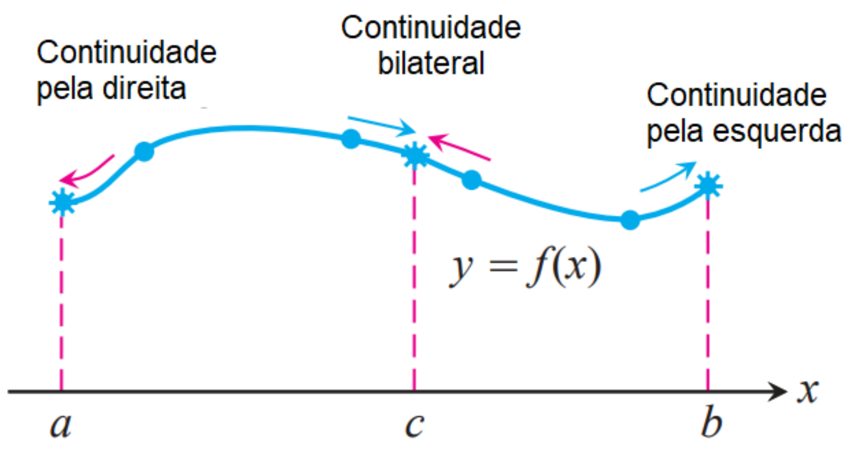
Desta forma, a continuidade da função em um ponto pode ser definida por:

Definição 6: Uma função $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ definida num intervalo fechado $[a, b]$ é contínua em um ponto c, onde $a < c < b$, quando $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Uma função $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua na extremidade esquerda a ou na extremidade direita b de seu domínio quando, respectivamente:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \; ou \; \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b) \; .$$

Figura 4- Continuidade nos pontos a, b e c.



Fonte: Thomas (2009)

3.3 DERIVADAS

Outro conceito importante para o presente trabalho e também fundamental para a aplicação do Método de Newton, é o de derivada de uma função. Este conceito, que para Guidorizzi (2013) pode ser apresentado pela seguinte definição.

Definição 7: Seja $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de seu domínio. O limite

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$$

quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em p e indica-se por $f'(p)$. Assim,

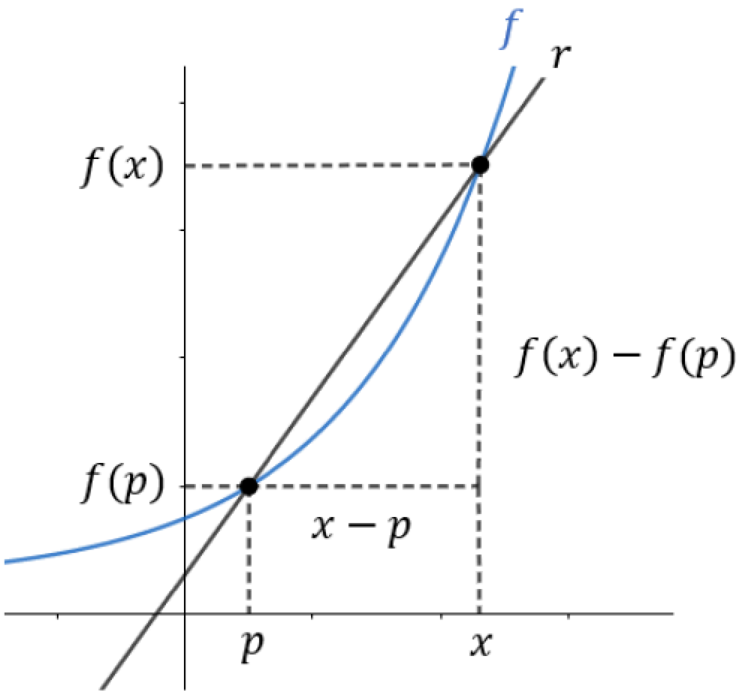
$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}.$$

Se f admite derivada em p, então diremos que f é derivável ou diferenciável em p.

O domínio de f' é o conjunto de pontos no domínio de f para o qual o limite existe, sendo o mesmo domínio de f ou menor que ele. Se f' existe para um determinado valor de x, dizemos que f é derivável em x. Se f' existe em todo o domínio de f, chamamos f de derivável (THOMAS, 2009).

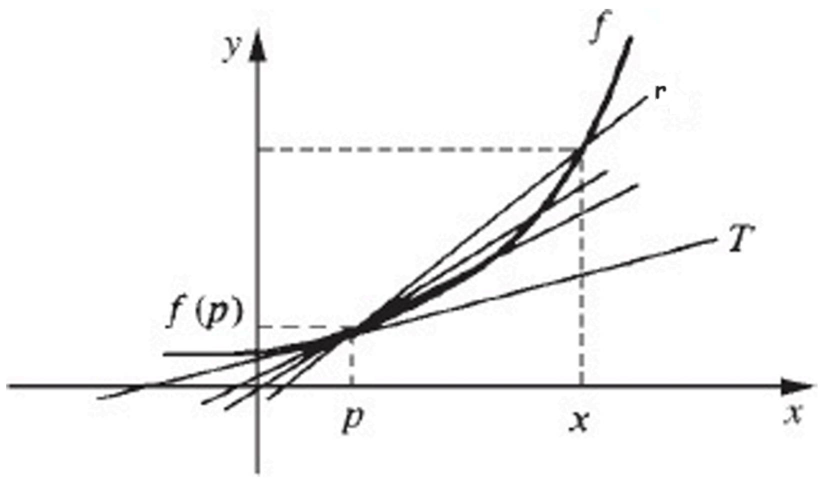
Geometricamente, a derivada de f em p, é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa p. Considerando uma reta r que passa pelos pontos $(p,\ f(p))$ e $(x,\ f(x))$, o coeficiente angular da reta r é $c_r = \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$. A medida que x tende a p, o coeficiente angular de r tende a $f'(p)$, $f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$. Utilizando a fórmula da equação da reta da Geometria analitica, tem-se $y - f(p) = f'(p)(x - p)$ a equação da reta tangente que passa pelo ponto $(p,\ f(p))$.

Figura 5 -Coeficiente angular da reta.



Fonte: Disponível em https://www.infoescola.com/wp-content/uploads/2019/05/img_5ce595b44aacf.png
Acessado em 08/09/2023.

Figura 6 -Reta tangente..



Fonte: Guidorizzi (2013).

Dentro dos objetivos deste trabalho, será necessário encontrar as derivadas de funções polinomiais, desta forma algumas regras são necessárias de serem apresentadas.

Regra 1: Derivada de uma função constante.

Se f tem o valor constante $f(x) = c$, então, $\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$.

Regra 2: Regra da derivada para potências inteiras.

Se n for um inteiro, então, $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

Regra 3: Regra da multiplicação por constante.

Se u é uma função derivável de x e c é uma constante, então, $\frac{d}{dx}(cf) = c\frac{df}{dx}$.

Regra 4: Regra da derivada da soma

Se u e v são funções deriváveis de x, então a soma das duas $u + v$ é derivável em qualquer ponto onde ambas são deriváveis. Nesses pontos, $\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$.

Regra 5: Combinando estas regras básicas é possível derivar qualquer polinômio, portanto todos os polinômios são deriváveis.

Exemplo: Calcular a derivada de:

a) $f(x) = 3x^5 + \frac{1}{3}x^4 + x + 2$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d(3x^5+\frac{1}{3}x^4+x+2)}{dx} = 3\frac{d(x^5)}{dx} + \frac{1}{3}\frac{d(x^4)}{dx} + \frac{d(x)}{dx} + \frac{d(2)}{dx} = 15x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 1$$

b) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4$

$\frac{df}{dx} = \frac{d(3x^3-2x^2+4)}{dx} = 3\frac{d(x^3)}{dx} - 2\frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(4)}{dx} = 9x^2 - 4x$

As provas das regras acima podem ser encontradas em Thomas (2009), no capítulo VII (Regras de Derivação) e Muniz Neto (2015), na unidade 10 (Cálculo de derivadas).

Observação : Lembremos que o conjunto de funções contínuas $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é denotado como $C[a, b]$. Além disso, trabalharemos com o conjunto $C^2[a, b]$ que contém todas as funções f tais que f'' é contínua em $[a, b]$.

3.4 SEQUÊNCIAS

Para Lima (2006): uma sequência de números reais é uma função x: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n, chamado o n-ésimo termo da sequência. Os valores de x_n são denominados termos da sequência e a sequência x: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ será designada por (x_n) ou $(x_1, x_2, x_3, ...)$. O conjunto formado por seus termos será representado por $\{x_n\}$ ou $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$.

Para algumas sequências, existe um número real que funciona como uma espécie de local de aproximação de todos os seus termos, assim, estes se aproximam indefinidamente desse número, que será chamado de limite. Nem toda sequência tem limite e as que o possuem são denominadas convergentes; as outras divergentes (CORRÊA, 2008).

O número real a é dito limite da sequência (x_n) quando, para todo número real $\varepsilon > 0$, arbitrariamente fornecido, é possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com $n > n_0$ cumprem a condição $\left|x_n - a\right| < \varepsilon$ (LIMA,2006).

Escreve-se simbolicamente:

$a = lim\, x_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N};\ n > n_0 \Rightarrow \left|x_n - a\right| < \varepsilon.$

Uma sequência (x_n) é limitada superiormente quando existir $c \in R$ tal que $x_n \leq c$. Analogamente, se existir $d \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \geq d$, a sequência será limitada inferiormente. Uma sequência limitada superiormente e inferiormente diz-se sequência limitada o que equivale a dizer que existe $k > 0$ tal que $\left|x_n\right| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por sua vez, as sequências são consideradas monótonas se forem crescentes, não decrescentes, decrescentes ou não crescentes. Uma sequência é crescente quando $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se vale $x_n \leq x_{n+1}$ para todo n, a sequência é não decrescente. Analogamente, uma sequência é decrescente se $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se vale $x_n \geq x_{n+1}$ para todo n, a sequência é não crescente (LIMA, 2017).

Dada uma sequência, pode-se, por sua vez estabelecer algum tipo de restrição à mesma de modo a obter uma subsequência, que pode ser entendida como:

Definição 8: Dada uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais, diz-se que uma subsequência de (x_n) é uma restrição da função x que define (x_n) a um conjunto infinito $N_1 = \left\{n_1 < n_2 < n_3 <\ldots< n_k <\ldots\right\}$. Denotamos a subsequência por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ ou $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ ou ainda $\left(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_k}, \ldots\right)$ (MUNIZ NETO, 2015).

Alguns teoremas são bastante pertinentes a este trabalho, uma vez que seus resultados serão bastante utilizados para diferentes demonstrações e conteúdos aqui apresentados, desta forma sendo aqui colocados:

Teorema 2: (Unicidade do limite) Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos. Ou seja, se $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, então $a = b$.

Teorema 3: (Limite de subsequência) Se o $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, então toda subsequência de (x_n) converge para o limite a.

Teorema 4: Toda sequência convergente é limitada.

Teorema 5: Toda sequência monótona limitada de números reais converge para um número real.

Teorema 6: (Teorema de Bolzano-Weierstrass) Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

As demonstrações dos teoremas 1, 2, 3, 5 e 6 estão disponíveis em Lima (2017), no capítulo 3 (Sequências de números reais) e Muniz Neto (2015), na unidade 1 (Sequências reais e seus limites).

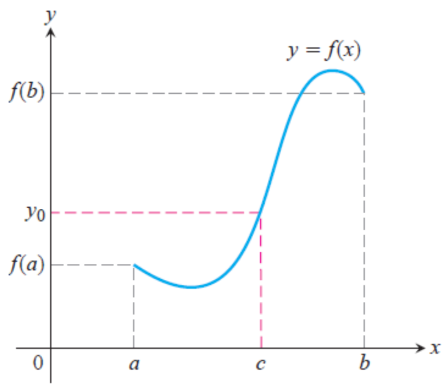
3.5 RAÍZES DE FUNÇÕES

As funções contínuas e diferenciáveis são muito úteis para a matemática e suas aplicações. Neste trabalho, destacam-se dois teoremas bastante pertinentes, sendo eles o Teoremas do Valor Intermediário (TVI) para funções contínuas e o Teorema do Valor Médio (TVM) de uma função diferenciável.

Teorema 7: (Teorema do Valor Intermediário).

Seja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e seja d um número entre $f(a)$ e $f(b)$. Então existe um número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Figura 6- Teorema do valor intermediário



Fonte: Thomas (2009)

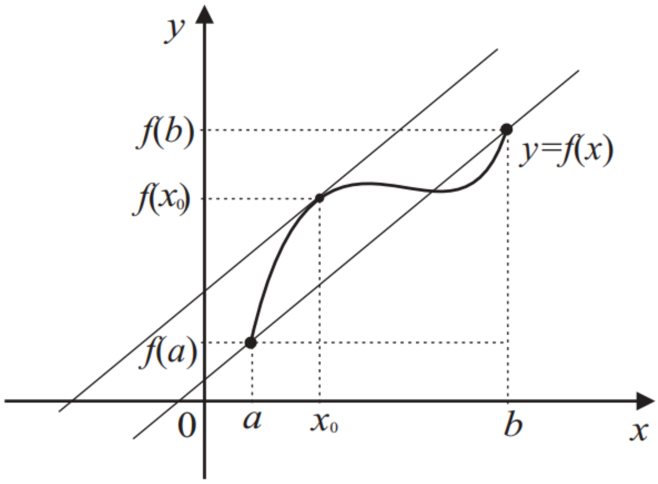
Teorema 8: (Teorema do Valor Médio).

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b), então existe pelo menos um número $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Geometricamente, o Teorema do Valor Médio leva à conclusão de que existe um ponto c, pertencente ao intervalo (a, b), tal que a inclinação $f'(c)$ da reta tangente ao gráfico da função no ponto $(c, f(c))$ é igual a inclinação da reta que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ ou seja, a reta secante $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Figura 7- Teorema do valor médio



Fonte: Corrêa

As demonstrações dos teoremas 7 e 8 estão disponíveis em Muniz Neto (2015), nas unidades 8 (Funções contínuas em intervalos) e 13 (Teorema do valor médio e aplicações), respectivamente.

Como consequência do Teorema do Valor Intermediário, se a função f é contínua num intervalo, e ocorre uma mudança de sinal neste, este intervalo contém um zero da função. Ou seja, se o gráfico da função cruza o eixo horizontal (eixo das abscissas) então realmente existe um ponto em que o valor da função é zero. Por sua vez, se a função não for contínua ou se num determinado intervalo não ocorre mudança de sinal na função, não é possível garantir a existência de raízes reais. O mesmo pode ocorrer quando o domínio da função não é um intervalo.

Exemplo: Seja a função $f(x) = \frac{1}{x}$, sabe-se que a mesma é contínua em todo o seu domínio ($\mathbb{R}^*$) e além disso:

- Para $x > 0$, tem-se $f(x)$ positivo;
- Para $x < 0$, tem-se $f(x)$ negativo.

Desta forma, mesmo ocorrendo mudança de sinal e a função sendo contínua, não é possível encontrar nenhuma raiz, uma vez que o domínio da função não é um intervalo.

Nem sempre é possível encontrar uma raiz real de um polinômio, por um outro lado todos os polinômios apresentam alguma raíz complexa. Por este motivo, utilizaremos nos próximos teoremas polinômios com domínio e contradomínio definidos no conjunto dos números complexos.

Teorema 9: (Teorema Fundamental da Álgebra-TFA) Toda função polinomial $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, com $n \geq 1$ $a_n \neq 0$, possui n raízes no corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos, onde n é o grau do polinômio.

Como consequência do TFA tem-se o Teorema da Decomposição.

Teorema 10: (Teorema da Decomposição) Toda função polinomial $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ ... \ + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$ pode ser fatorada como produto de exatamente n fatores, a saber: $p(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$, onde x_1 , x_2, ..., $x_n \in \mathbb{C}$ são as raízes de p.

Demonstração:

Tem-se que quando $n = 1$, $p(x) = a_1 x + a_0$ com $a_1 \neq 0$ de modo que p possui raíz $x_1 = -\frac{a_0}{a_1}$ e pode ser escrito como $p(x) = a_1 (x - x_1)$.

Supondo que todo polinômio $q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + \ ... \ + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ de grau $n - 1$ pode ser fatorado em $q(x) = b_{n-1}(x - x_1)(x - x_2) \ ... \ (x - x_{n-1})$, provaremos que é verdade para polinômios p de grau n.

Pelo TFA, existe $x_n \in \mathbb{C}$ tal que $p(x_n) = 0$. Utilizando da Proposição 1, encontrada em Fernandez e Santos (2010), segue que existe uma função polinomial $q(x)$ de grau $(n - 1)$ tal que, $p(x) = (x - x_n)q(x)$, assim

$$p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 = (x - x_n)(b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0) ,$$

que por sua vez equivale a dizer que

$$b_{n-1} x^n + \ (b_{n-2} - x_n b_{n-1}) x^{n-1} + \ ... \ + x_n b_0 = a_n x^n + ... \ + a_0 \ .$$

Pode-se observar, igualando-se os coeficientes de x^n que $a_n = b_{n-1} \neq 0$. Uma vez que q tem grau $n - 1$, tem-se por hipótese de indução que

$$p(x) = (x - x_n) b_{n-1} (x - x_1)(x - x_2) \ ... \ (x - x_{n-1}),$$

ou seja $p(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ ... \ (x - x_n)$, como se desejava demonstrar.

A demonstração do Teorema 9 está disponível em Fernandez e Santos (2010), não sendo apresentada diretamente aqui por necessitar de conhecimentos prévios não pertinentes a este trabalho.

Teorema 11: Se um número complexo $z = a + bi$, não real, for raiz de um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ...\ + a_1 x + a_0$ com coeficientes reais, então o conjugado $\overline{z} = a - bi$ também será a raiz desse polinômio.

Demonstração:

Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ...\ + a_1 x + a_0$ e z_0 uma raiz desse polinômio. Queremos provar que $p(z_0) = 0 \Rightarrow p(\overline{z_0}) = 0$. Dado que $p(z_0) = 0$, tem-se que:

$$a_n z_0^n + a_{n-1}z_0^{n-1} + \ ...\ + a_1 z_0 + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow \overline{a_n z_0^n + a_{n-1}z_0^{n-1} + \ ...\ + a_1 z_0 + a_0} = \overline{0}.$$

Utilizando propriedades de conjugado, tem-se

$$\overline{a_n z_0^n + a_{n-1}z_0^{n-1} + \ ...\ + a_1 z_0 + a_0} = \overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1}z_0^{n-1}} + ... + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} =$$

$$= \overline{a_n}\,\overline{z_0^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z_0^{n-1}} + ... + \overline{a_1}\,\overline{z_0} + \overline{a_0} = a_n(\overline{z_0})^n + a_{n-1}(\overline{z_0})^{n-1} + ... + a_1\overline{z_0} + a_0$$

.

Assim, $p(\overline{z_0}) = a_n(\overline{z_0})^n + a_{n-1}(\overline{z_0})^{n-1} + ... + a_1\overline{z_0} + a_0 = 0$, como desejado.

Teorema 12.: Todo polinômio de grau ímpar com coeficientes reais tem uma raiz real.

Demonstração: Pelo Teorema 10 temos que toda função polinomial $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ...\ + a_1 x + a_0$, possui n raízes, onde n é um número ímpar.

Vamos supor que a função não tenha raízes reais, logo suas n raízes serão complexas, assim se um número complexo $z = a + bi$, for raiz do polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ...\ + a_1 x + a_0$ com coeficientes reais, pelo Teorema 11, o conjugado $\overline{z} = a - bi$ também será a raiz desse polinômio. Logo este polinômio teria um número par de raízes, uma vez que as raízes complexas ocorrem em pares conjugados. Desta forma temos uma contradição uma vez que n é um número ímpar, então existe uma raiz real do polinômio.

Outra possibilidade de demonstrar este Teorema 12 seria por meio de ferramentas de cálculo diferencial.

Demonstração 2: Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau ímpar e coeficientes reais. Considerando, sem perda de generalidade $a_n > 0$.

Tem-se que,

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$$

de onde conclui-se que existem pontos a e $b \in \mathbb{R}$ que satisfazem $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Para o caso de $a_n < 0$, tem-se que,

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \to -\infty} p(x) = +\infty .$$

Em ambos os casos, pelo teorema do valor intermediário, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$, o que conclui a demonstração.

O problema de determinar uma raiz de uma função f é considerado um dos mais importantes da aproximação numérica. O processo envolve a determinação da solução de uma equação do tipo $f(x) = 0$, onde a raiz da equação é também denominada zero da função f (BURDEN, 2015). Para o autor os problemas de aproximar raízes podem ser analisados de maneira mais fácil por meio da forma de ponto fixo, onde determinadas escolhas podem levar a formas eficientes de aproximação de raízes.

Definição 9: O número p é um ponto fixo de uma dada função g se $g(p) = p$.

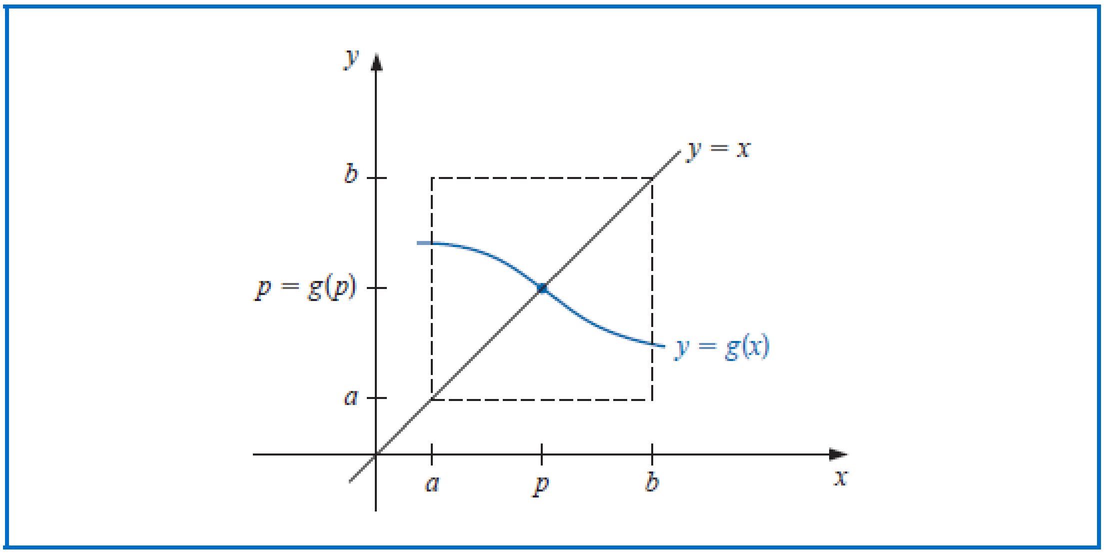
Sendo assim, encontrar a raiz de uma função $f(p) = 0$ pode ser resolvido por meio de uma função g e um ponto fixo em p da função, mais especificamente se definirmos $g(x) = x - f(x)$ temos que $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$. Assim a função $f(x)$ terá um zero em p, quando p for um ponto fixo de g.

Teorema 13: (Existência e unicidade do ponto fixo)

(i) Se $g: [a, b] \to [a, b]$ contínua, para todo $x \in [a, b]$, então g terá um ponto fixo em $[a, b]$.

(ii) se $g'(x)$ está bem definida em (a, b) e existe uma constante positiva $k < 1$, com $|g'(x)| \leq k$, para todo $x \epsilon (a, b)$, então o ponto fixo em $[a, b]$ será único.

Figura 8 - Ponto fixo em $[a, b]$



.Fonte: BURDEN (2015).

Demonstração:

(i) Se $g(a) = a$ ou $g(b) = b$, então g tem um ponto fixo em uma extremidade. Caso contrário, $g(a) > a$ e $g(b) < b$. A função $h(x) = g(x) - x$ é contínua em $[a, b]$ e é tal que onde

$$h(a) = g(a) - a > 0 \text{ e } h(b) = g(b) - b < 0.$$

O Teorema do Valor Intermediário implica a existência de $p \in (a, b)$ para o qual $h(p) = 0$. Esse número p é um ponto fixo de g uma vez que

$$0 = h(p) = g(p) - p \text{ implica que } g(p) = p.$$

(ii) Suponha que $|g'(x)| \leq k < 1$ e que p e q sejam pontos fixos em $[a, b]$. Se $p \neq q$, o Teorema do Valor Médio implica a existência de um número ξ entre p e q e, portanto, em $[a, b]$, com

$$\frac{g(p)-g(q)}{p-q} = g'(\xi).$$

Assim $|p - q| = |g(p) - g(q)| = |g'(\xi)|. |p - q| \leq k|p - q| < |p - q|$ o que é uma contradição. Desse modo, $p = q$, e o ponto fixo em $[a, b]$ é único.

Mesmo quando não é possível determinar com exatidão o ponto fixo, é possível obter aproximações para o mesmo com certo grau de precisão, por meio da técnica de iteração do ponto fixo, utilizando-se de uma escolha inicial p_0 gerando uma sequência $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida como $p_n = g(p_{n-1})$.

Sendo g contínua, e supondo que $p_n \rightarrow p$ quando $n \rightarrow \infty$, tem-se que $p = \lim_{n \to \infty} p_n = \lim_{n \to \infty} g(p_{n-1}) = g(\lim_{n \to \infty} p_{n-1}) = g(p)$, é dizer, a sequência converge a um ponto fixo.

Teorema 14: (Teorema do ponto fixo) Seja $g \in C[a, b]$ tal que $g(x) \in [a, b]$. Além disso, suponha que g' exista em (a, b) e que existe uma constante $0 < k < 1$ com $|g'(x)| \leq k$, para todo $x \in (a, b)$. Então, para qualquer número p_0 em $[a, b]$, a sequência definida por $p_n = g(p_{n-1})$, $n \geq 1$, converge para um único ponto fixo p em $[a, b]$.

Demonstração: O Teorema 13 implica a existência de um único ponto fixo p em $[a, b]$ com $g(p) = p$.

Uma vez que g leva $[a, b]$ a si mesmo, a sequência $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ é definida para todo $n \geq 0$, e $p_n \in [a, b]$, para todo n. Usando o Teorema do Valor Médio e o fato que $|g'(x)| \leq k$ temos, para cada ξ_n entre p_{n-1} e p

$|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)| = |g'(\xi_n)||p_{n-1} - p| \leq k|p_{n-1} - p|$, onde $\xi_n \in [a, b]$.

Aplicando indutivamente a desigualdade, temos que:

$$|p_n - p| \leq k|p_{n-1} - p| \leq k^2|p_{n-2} - p| \leq \ . \ . \ . \ \leq k^n|p_0 - p|.$$

Como $0 < k < 1$, temos que $\lim_{n \to \infty} k^n = 0$ e logo

$$\lim_{n \to \infty} |p_n - p| \leq \lim_{n \to \infty} k^n|p_0 - p| = 0.$$

Portanto $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge para p. Assim, para qualquer número p_0 em $[a, b]$, a sequência definida por $p_n = g(p_{n-1})$, com $n \geq 1$, converge para um único ponto fixo p em $[a, b]$.

3.6 MÉTODO DE NEWTON

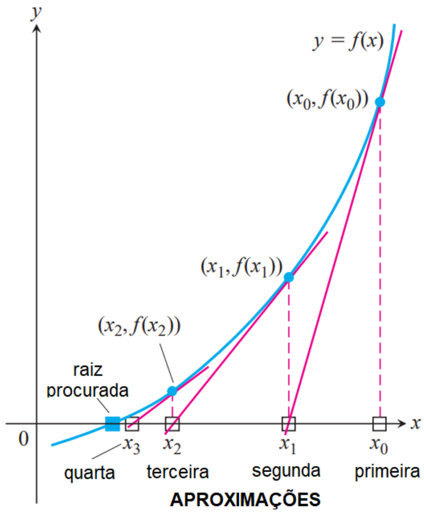
Existem diferentes técnicas para obter as raízes exatas ou aproximadas de funções, sendo os métodos iterativos ou de iteração de ponto fixo os mais utilizados para aproximações. Neste trabalho será dado destaque ao método numérico denominado método de Newton-Raphson, um método de ponto fixo.

Para Burden (2015) este método é um dos mais conhecidos e eficientes para determinação de raízes. Este método, utilizado por Isaac Newton (1642-1727) no século XVII, foi usado apenas para o caso de polinômios, porém Newton tinha ciência de sua ampla aplicação. Em 1690, Joseph Raphson descreveu o mesmo método, porém assim como Newton, também não utilizou de forma explícita a derivada (BURDEN, 2015).

Este método consiste em uma técnica de aproximação que em sua essência usa retas tangentes ao gráfico de $y = f(x)$ até que se chegue o mais perto possível de $f(x) = 0$. Tendo como objetivo produzir uma sequência de aproximações para estimar a solução de $f(x) = 0$ (THOMAS, 2009).

Por meio de uma sequência de aproximações, o método estima a solução de uma equação $f(x) = 0$. Tomando como partida um x_0 (graficamente ou por "adivinhação"), o método utiliza a tangente a $f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$, chamando x_1 o ponto onde a tangente cruza o eixo x. Prossegue-se utilizando cada aproximação para gerar a próxima, sendo que geralmente uma é melhor que a anterior (THOMAS, 2009).

Figura 9 - Aproximações sucessivas



Fonte: THOMAS (2009)

O método de Newton começa pela estimativa inicial x_0 e, sob condições favoráveis, melhora a estimativa a cada passo (THOMAS, 2009).

A equação que representa a tangente à curva em $(x_n, f(x_n))$, pode ser representada por

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

Tomando $y = 0$, ponto onde a curva cruza o eixo das abscissas, obtemos que

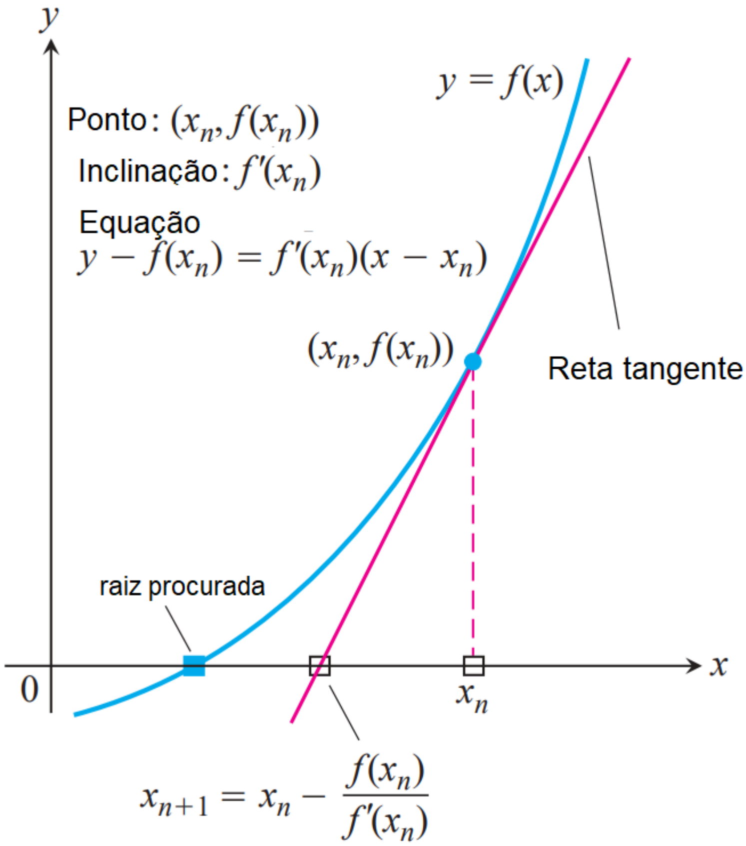
$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

$$-f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

$$\frac{-f(x_n)}{f'(x_n)} = x - x_n$$

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

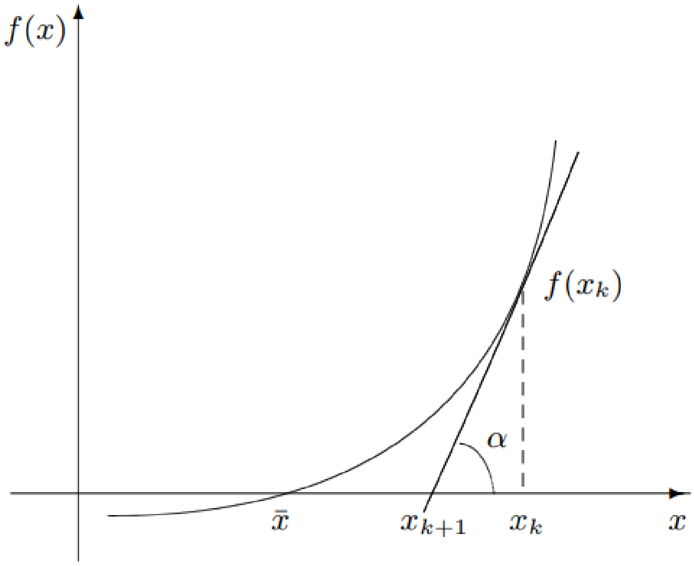
Figura 10- Geometria das etapas sucessivas do método de Newton.



Fonte: THOMAS (2009).

Para Franco (2006), o método pode ser interpretado geometricamente da seguinte forma:

Figura 11- Reta tangente ao gráfico da função.



Fonte: Franco (2006).

Dado x_k, o valor de x_{k+1} pode ser obtido graficamente traçando-se pelo ponto $(x_k, f(x_k))$ a tangente à curva $y = f(x)$. O ponto de intersecção da tangente com o eixo dos x determina x_{k+1}.

Utilizando a definição de tangente, temos que:

$$f'(x_k) = tg(\alpha) = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}} \Rightarrow x_k - x_{k+1} = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

O método de Newton é também conhecido como método das tangentes devido a sua interpretação geométrica.

Seguem alguns exemplos de problemas utilizando o Método de Newton, extraídos dos exercícios propostos em Thomas (2009) e Franco (2006).

Inicialmente, os cálculos são apresentados passo a passo. A partir do Exemplo 4 são utilizadas planilhas e gráficos a fim de otimizar o processo e permitir uma melhor visualização dos dados.

Exemplo 1: Utilizando o Método de Newton, estimar as soluções da equação $x^2 + x - 1 = 0$. Comece com

a) $x_0 = -1$

b) $x_0 = 1$.

Determinar x_2 para cada caso.

Solução: Seja $f(x) = x^2 + x - 1$ temos que $f'(x) = 2x + 1$.
Utilizando a fórmula de Bhaskara, temos que

$\Delta = b^2 - 4ac$ e $x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

Assim, $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5$, logo $x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2.1} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

a) Tomando $x_0 =- 1$ para aproximar o valor da raiz $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, temos que

$f(x_0) = (-1)^2 + (-1) - 1 =- 1$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} =- 1 - \frac{(-1)^2+(-1)-1}{2(-1)\ +1} =- 1 - \frac{(-1)}{(-1)} =- 2$, e portanto

$f(x_1) = (-2)^2 + (-2) - 1 = 1$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} =- 2 - \frac{(-2)^2+(-2)-1}{2(-2)\ +1} =- 1 - \frac{(1)}{(-3)} =- 1,666666667$.

$f(x_2) = ((-1,666666667)^2 + (-1,666666667) - 1 = 0,111111111$

Tomando $x_0 = 1$ para aproximar o valor da raiz $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, temos que

$f(x_0) = (1)^2 + (1) - 1 = 1$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{(1)^2+(1)-1}{2(-1)\ +1} = 1 - \frac{(1)}{(3)} = 0,6666666667$, e portanto

$f(x_1) = (0,6666666667)^2 + (0,6666666667) - 1 = 0,111111111$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,6666666667 - \frac{(0,6666666667)^2+(0,6666666667)-1}{2(0,6666666667)+1} = 0,619047619$.

$f(x_2) = (0,619047619)^2 + (0,619047619) - 1 = 0,00226757$

Note que $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 0,111111111$ e $f(x_2) = 0,00226757$, assim é possível perceber que os valores de $f(x)$ estão se aproximando do zero.

Exemplo 2: Use o método de Newton para estimar a única raiz real de $x^3 + 3x + 1 = 0$. Comece com $x_0 = 0$ e determine x_2.

Solução: Seja $f(x) = x^3 + 3x + 1$ temos que $f'(x) = 3x^2 + 3$.

Tomando $x_0 = 0$ temos que

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{0^3+3.0+1}{3.0^2+3} = 0 - \frac{1}{3} =- 0,3333333333 \ ,$$

assim, temos

$$f(x_1) = (-0,3333333333)^3 + 3(-0,3333333333) + 1 =- 0,037037036$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} =- 0,3333333333 - \frac{-0,037037036}{3.(-0,3333333333)^2+3} =- 0,3222222222 \ .$$

$$f(x_2) = (-0,3222222222)^3 + 3(-0,3222222222) + 1 = 0,0001220849$$

Comparando $f(x_1) =- 0,037037036$ e $f(x_2) = 0,0001220849$ percebemos que os valores estão se aproximando de zero.

Exemplo 3: Use o Método de Newton para estimar duas raízes reais da função $f(x) = x^4 + x - 3$. Comece com

a) $x_0 =- 1$

b) $x_0 = 1$.

Determinar x_2 para cada caso.

Solução: Seja $f(x) = x^4 + x - 3$ temos que $f'(x) = 4x^3 + 1$.

a) Tomando $x_0 =- 1$ tem-se:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} =- 1 - \frac{(-1)^4+(-1)-3}{4(-1)^3+1} =- 1 - \frac{(-3)}{(-3)} =- 2 \ ,$$

$$f(x_1) = (-2)^4 + (-2) - 3 = 11$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} =- 2 - \frac{11}{4(-2)^3+1} =- 2 - \frac{(11)}{(-31)} =- 1,64516129 \ ,$$

$$f(x_2) = (-1,64516129)^4 + (-1,64516129) - 3 = 2,680282305.$$

b) Tomando $x_0 = 1$ tem-se:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{(1)^4+(1)-3}{4(1)^3+1} = 1 - \frac{(-1)}{(5)} = 1,2 \ ,$$

$f(x_1) = (1,2)^4 + (1,2) - 3 = 0,2736$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,2 - \frac{0,2736}{4(1,2)^3+1} = 1,165419616$

$f(x_2) = (1,165419616)^4 + (1,165419616) - 3 = 0,0087202769$

Comparando $f(x_1) = 0,2736$ e $f(x_2) = 0,0087202769$ percebemos que os valores estão se aproximando de zero.

A partir do quarto exemplo, tendo em vista otimizar a busca de resultados, o Microsoft Excel será utilizado, uma vez que nele é possível trabalhar com um maior número de iterações a fim de se chegar a uma melhor aproximação para o zero da função.

Exemplo 4: Use o Método de Newton para estimar as duas raízes da função $f(x) = -x^2 + 2x + 1$. Comece com

a) $x_0 = 0$

b) $x_0 = 2$.

Determinar x_4 para cada caso.

Solução: Seja $f(x) =- x^2 + 2x + 1$ temos que $f'(x) =- 2x + 2$.

Utilizando a fórmula de Bhaskara, temos que

$\Delta = b^2 - 4ac$ e $x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$, assim $\Delta = 2^2 - 4(-1)1 = 4 + 4 = 8$, logo $x = \frac{-2\pm\sqrt{8}}{2(-1)} = \frac{2\pm\sqrt{5}}{2}$.

a) Tomando $x_0 = 0$ e utilizando o Microsoft Excel para otimizar a busca dos resultados, aproximar a raiz $\frac{2-\sqrt{5}}{2}$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	0	1	2	-0,5
1	-0,5	-0,25	3	-0,4166666667
2	-0,4166666667	-0,006944444444	2,833333333	-0,4142156863
3	-0,4142156863	-0,000006007304883	2,828431373	-0,4142135624
4	-0,4142135624	0	2,828427125	-0,4142135624

Para $x_4 =- 0,4142135624$ é possível obter um valor de $f(x) \approx 0$ utilizando a precisão padrão do excel (quinze casas decimais).

Observação: O símbolo ≈ será utilizado para representar a melhor aproximação possível de zero utilizando a precisão padrão do Excel.

b) Tomando $x_0 = 2$ e utilizando do Microsoft Excel para otimizar a busca dos resultados, aproximar a raiz $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	2	1	-2	2,5
1	2,5	-0,25	-3	2,416666667
2	2,416666667	-0,006944444444	-2,833333333	2,414215686
3	2,414215686	-0,000006007304884	-2,828431373	2,414213562
4	2,414213562	0	-2,828427125	2,414213562

Para $x_4 = 2,414213562$ é possível obter um valor de $f(x) \approx 0$ utilizando a precisão padrão do Excel (quinze casas decimais).

Exemplo 5: Usando o método de Newton, estimar uma raiz para cada uma das seguintes equações:

a) $2x = tg(x), x \neq 0$.

b) $5x^3 + x^2 - 12x + 4 = 0$.

c) $sen(x) - e^x = 0$.

d) $x^4 - 8 = 0$.

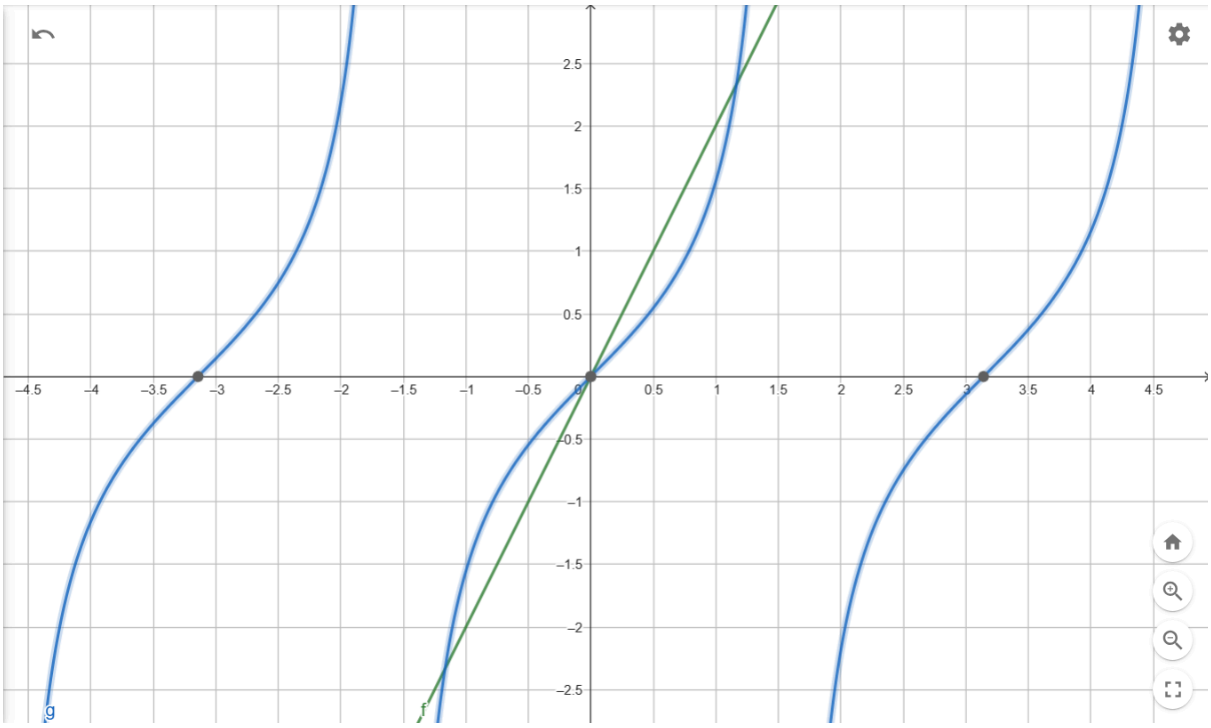
e) $x = cos(x)$

Observação: Nestes exemplos serão utilizadas derivadas de funções trigonométricas e exponenciais.

Solução:

a) Seja $f(x) = 2x$ e $g(x) = tg(x)$

Esboçando um gráfico pode-se estimar um ponto de partida para x_0.



Tomando um valor de $x_0 = 1$,

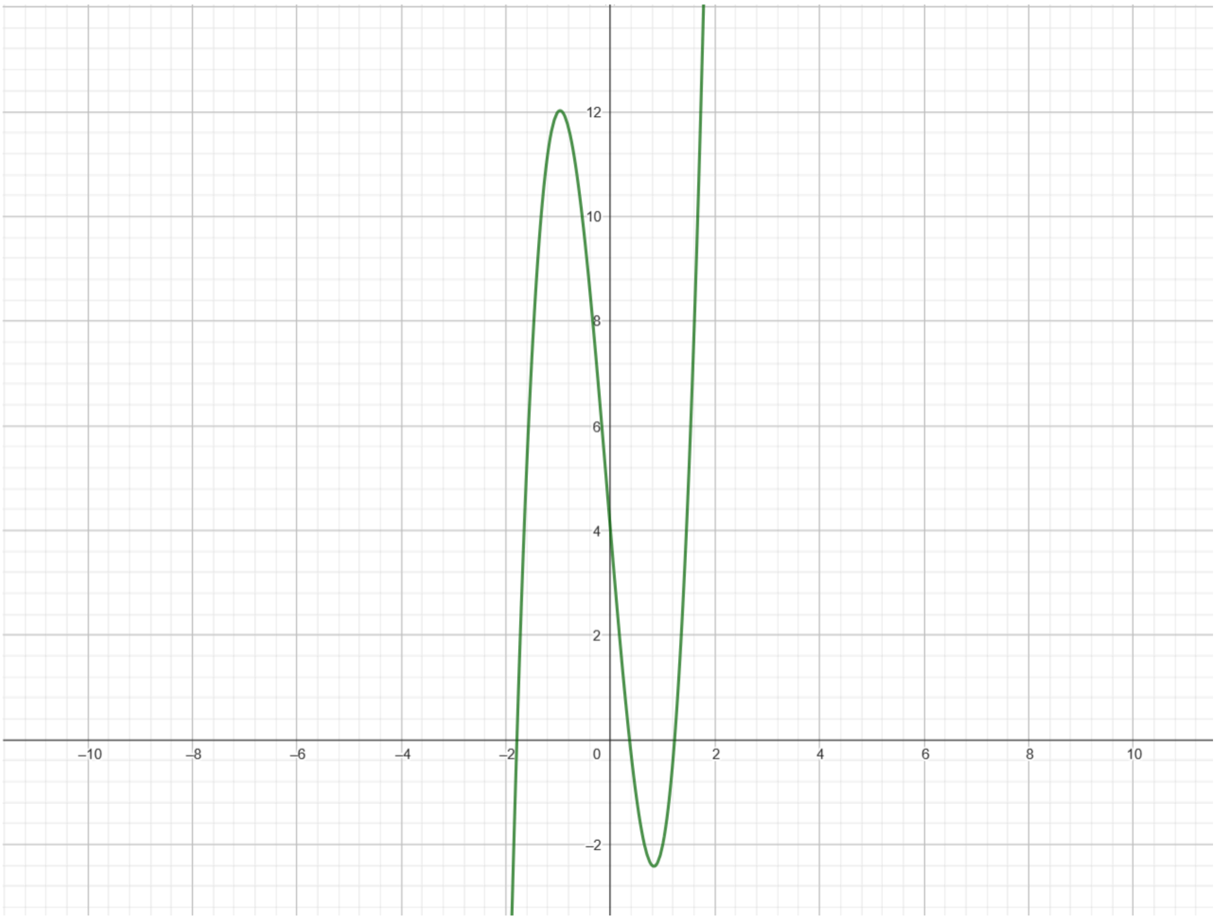
$f(x) = 2x - tg(x)$, e $f'(x) = 2 - sec^2(x)$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	1	0,4425922753	-1,425518821	1,31047803
1	1,31047803	-1,133327685	-13,09464644	1,223929096
2	1,223929096	-0,318528677	-6,652896315	1,1760509
3	1,1760509	-0,04820711793	-4,761482902	1,165926508
4	1,165926508	-0,001621894244	-4,44510516	1,165561636
5	1,165561636	-0,000002000423291	-4,434145039	1,165561185
6	1,165561185	0	-4,434131506	1,165561185

Para x_6 =1,165561185 tem-se um valor aproximado da raiz com 6 casas decimais de precisão e $f(x_6) \approx 0$.

b) Seja $f(x) = 5x^3 + x^2 - 12x + 4$.

Esboçando um gráfico pode-se estimar um ponto de partida para x_0.



Tomando um valor de $x_0 = 0$,

$f(x) = 5x^3 + x^2 - 12x + 4$,

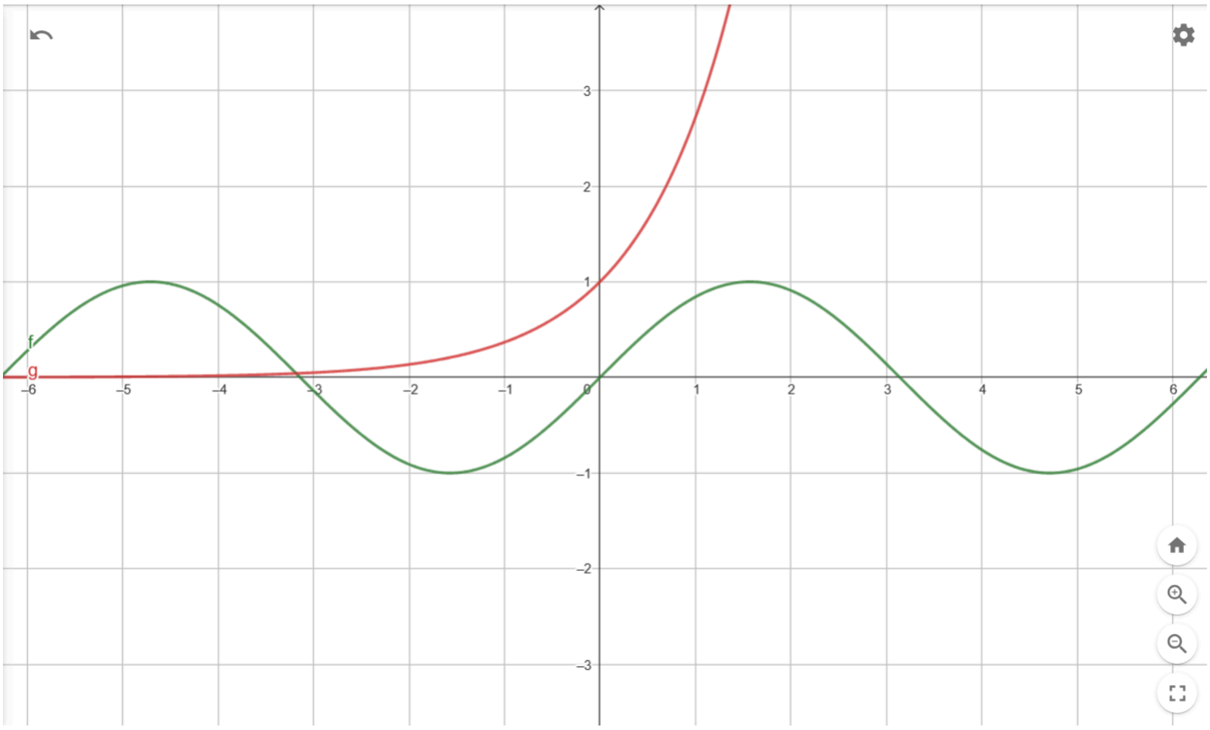
$f'(x) = 15x^2 + 2x - 12$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	0	4	-12	0,3333333333
1	0,3333333333	0,2962962963	-9,666666667	0,3639846743
2	0,3639846743	0,005781013625	-9,284758004	0,3646073091
3	0,3646073091	0,000002505492582	-9,276708033	0,3646075792
4	0,3646075792	0	-9,276704539	0,3646075792

Para $x_4 = 0,36460757921$ tem-se um valor aproximado da raiz com 5 casas decimais de precisão e $f(x_4) \approx 0$.

c) $sen(x) - e^x = 0$

Esboçando um gráfico pode-se estimar um ponto de partida para x_0.



Tomando um valor de $x_0 = -3$,

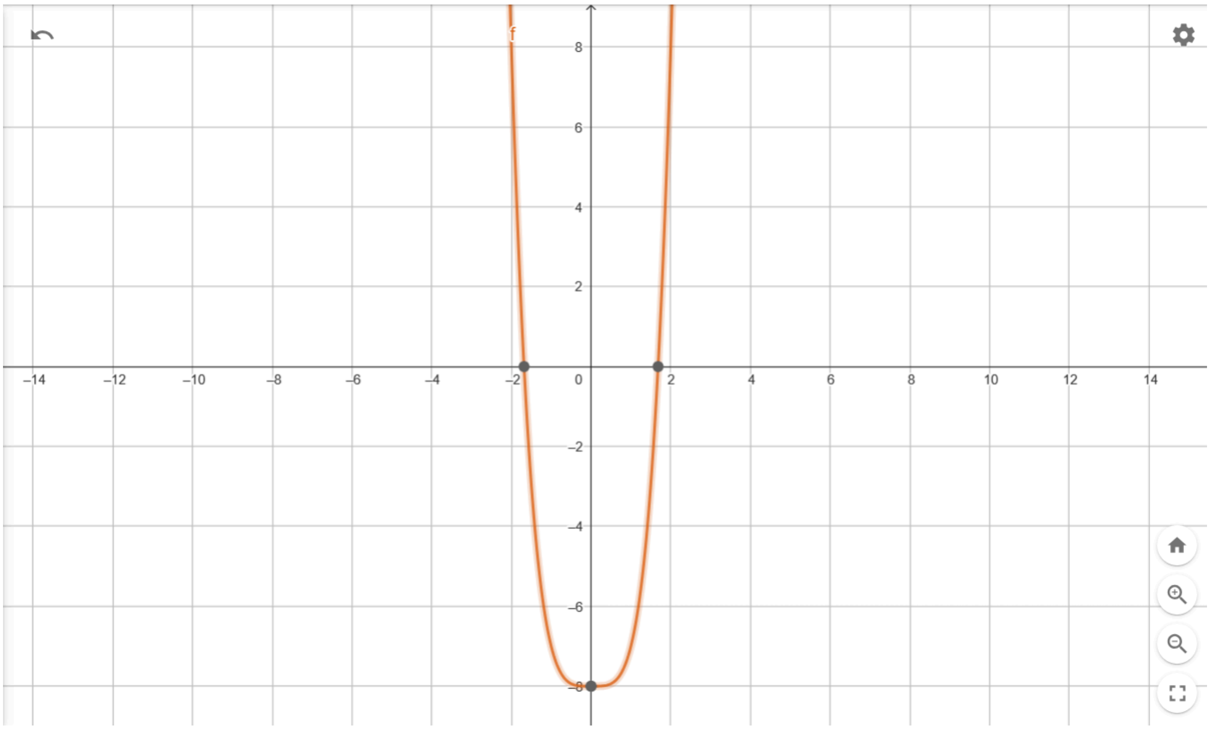
$f(x) = sen(x) - e^x$, e $f'(x) = cos(x) - e^x$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	-3	-0,1909070764	-1,039779565	-3,183603413
1	-3,183603413	0,0005623280468	-1,040553752	-3,183063
2	-3,183063	-0,00000001215813869	-1,040598702	-3,183063012
3	-3,183063012	0	-1,040598701	-3,183063012

Para $x_3 = -3,183063012$ tem-se um valor aproximado da raiz com 6 casas decimais de precisão e $f(x_4) \approx 0$.

d) $x^4 - 8 = 0$.

Esboçando um gráfico pode-se estimar um ponto de partida para x_0.



Tomando um valor de $x_0 = 2$,

$f(x) = x^4 - 8$,

$f'(x) = 4x^3$.

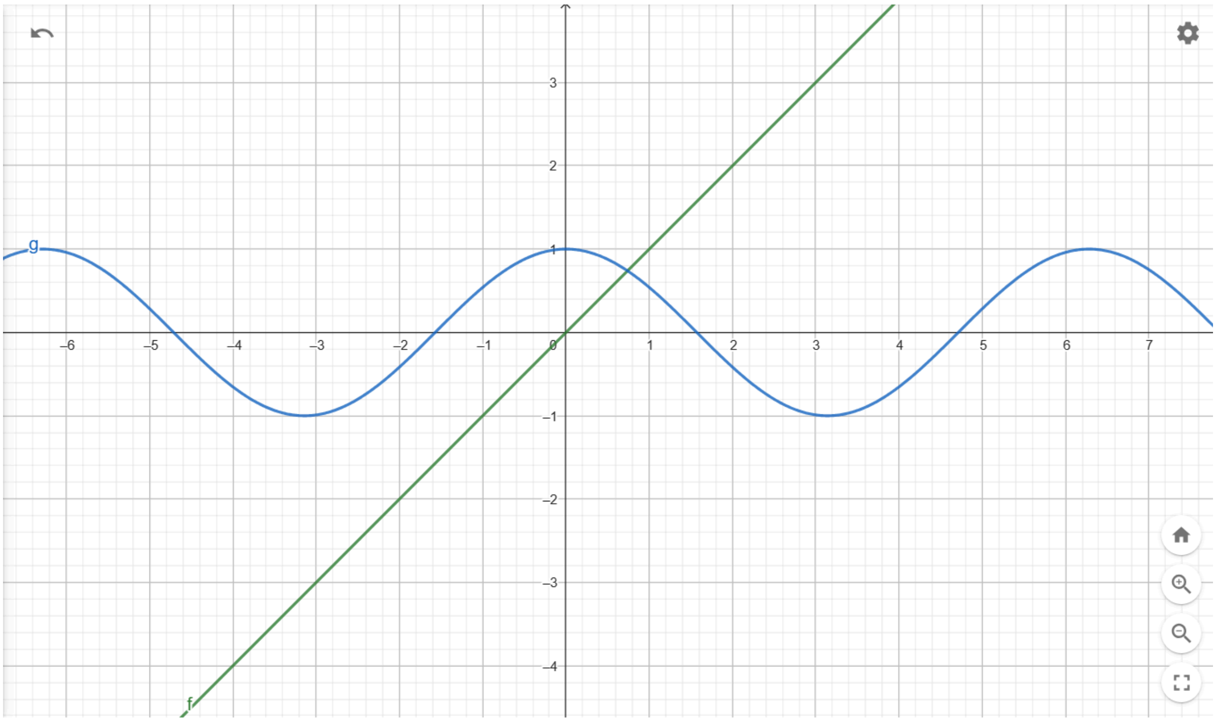
n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	2	8	32	1,75
1	1,75	1,37890625	21,4375	1,685677843
2	1,685677843	0,07417788051	19,15948036	1,681806241
3	1,681806241	0,0002551624049	19,027769	1,681792831
4	1,681792831	0,000000003051816577	19,02731385	1,681792831
5	1,681792831	0	19,02731384	1,681792831

Para $x_5 = 1,681792831$ tem-se um valor aproximado da raiz com 9 casas decimais de precisão e $f(x_5) \approx 0$.

e) $x = cos(x)$

Seja $f(x) = x$ e $g(x) = cos(x)$

Esboçando um gráfico pode-se estimar um ponto de partida para x_0.



Tomando um valor de $x_0 = 1$,

$f(x) = x - cos(x)$, e $f'(x) = 1 + sen(x)$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	1	0,4596976941	1,841470985	0,7503638678
1	0,7503638678	0,01892307382	1,681904953	0,7391128909
2	0,7391128909	0,00004645589899	1,673632544	0,7390851334
3	0,7390851334	0,0000000002847205804	1,673612029	0,7390851332
4	0,7390851332	0	1,673612029	0,7390851332

Para $x_4 = 0,7390851332$ tem-se um valor aproximado da raiz com 9 casas decimais de precisão e $f(x_4) \approx 0$.

3.6.1 Convergência do Método de Newton

Para Burden (2015) o método de Newton converge, desde que a aproximação inicial seja precisa o suficiente.

Teorema 15: (Teorema da convergência) Sejam $f \in C^2[a, b]$ e $p \in (a, b)$ tal que $f(p) = 0$ e $f'(p) \neq 0$, então, existe um $\delta > 0$, tal que o método de Newton gera uma sequência $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge para p para qualquer aproximação inicial $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$.

Demonstração: Pela continuidade da derivada da função em $[a, b]$, existe $\delta_1 > 0$ tal que o valor de $f'(x) \neq 0$, para todo x em $[p - \delta_1, p + \delta_1]$, dado que $f'(p) \neq 0$.

Utilizamos a iteração funcional $p_n = N_f(p_{n-1})$, para $n \geq 1$, com

$$N_f(x) = g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Seja k em $(0, 1)$, afirmamos que existe um intervalo $[p - \delta, p + \delta]$ que g leve em si mesmo para o qual $|g'(x)| \leq k$, para todo $x \in (p - \delta, p + \delta)$. Primeiro, observemos que

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x).f'(x) - f(x).f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x).f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

para $x \in [p - \delta_1, p + \delta_1]$. Além disso, como $f \in C^2[a, b]$, temos $g \in C^1[p - \delta_1, p + \delta_1]$. Por hipótese, $f(p) = 0$, de modo que

$$g'(p) = \frac{f(p)f''(p)}{[f'(p)]^2} = 0.$$

Sendo g' contínua e $0 < k < 1$, então existe δ, com $0 < \delta < \delta_1$ e tal que $|g'(x)| \leq k$, para todo $x \in [p - \delta, p + \delta]$. Agora provaremos que g leva o intervalo $[p - \delta, p + \delta]$ em $[p - \delta, p + \delta]$. Se $x \in [p - \delta, p + \delta]$, pelo Teorema do Valor Médio temos que, para algum ξ entre x e p, teremos $|g(x) - g(p)| = |g'(\xi)||x - p|$. Assim,

$$|g(x) - p| = |g(x) - g(p)| = |g'(\xi)||x - p| \leq k|x - p| < |x - p|.$$

Como $x \in [p - \delta, p + \delta]$, temos que $|x - p| < \delta$ logo $|g(x) - p| < \delta$, isto é $g(x) \in [p - \delta, p + \delta]$. Portanto, g leva $[p - \delta, p + \delta]$ em $[p - \delta, p + \delta]$. Assim, as hipóteses do Teorema do ponto fixo estão satisfeitas e a sequência $\{p_n\}_{n-1}^{\infty}$ definida por $p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$, para $n \geq 1$, converge para p, para qualquer $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$.

Segundo Franco (2006), a principal vantagem do Método de Newton é a convergência quadrática, o que leva a quantidade de dígitos corretos duplicar a cada iteração. Por outro lado, suas desvantagens seriam a necessidade de calcular-se a derivação e o valor numérico em cada interação, além de nem sempre a função ser diferenciável em todo o domínio (nestas situações é possível utilizar o método das secantes, onde ao invés de utilizarmos a reta tangente, utiliza-se a reta secante ao gráfico da função).

Definição 10: Suponha que $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ seja uma sequência que convirja para p, com $p_n \neq p$ para todo n. Caso existam constantes positivas λ e α com $\alpha \in \mathbb{N}$ tais que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^{\alpha}} = \lambda,$$

dizemos que $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge para p com ordem α, com constante de erro assintótica $\lambda > 0$.

i) Se $\alpha = 1$, (e $\lambda < 1$), a sequência é dita linearmente convergente.

ii) Se $\alpha = 2$, a sequência é dita quadraticamente convergente.

Teorema 16: Se f, f' e f'' são contínuas em I cujo centro $\bar{x}$ é solução de $f(x) = 0$ e se $f'(\bar{x}) \neq 0$, então a ordem de convergência do método de Newton é quadrática, ou seja, $\alpha = 2$.

Demonstração:

Dado que f, f' e f'' são contínuas em I e $f'(\bar{x}) \neq 0$ então existe um novo intervalo, que podemos chamar de $J \subset I$ tal que $\bar{x} \in J$ e temos que $f' \neq 0$ em J. Logo neste intervalo faz sentido considerar a função $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Além disso, pelo Teorema 15, podemos considerar x_0 tal que a partir de certo $n \geq n_0$, x_n está em J e por tanto $g(x_n)$ está bem definida.

Aplicando o Teorema de Taylor temos que existe ξ_n entre x_n e $\bar{x}$ tal que

$$f(\bar{x}) = f(x_n) + f'(x_n).(\bar{x} - x_n) + \frac{1}{2}f''(\xi_n)(\bar{x} - x_n)^2.$$

Dado que $f(\bar{x}) = 0$ e $f'(\bar{x}) \neq 0$ temos que

$0 = f(x_n) + f'(x_n).(\bar{x} - x_n) + \frac{1}{2}f''(\xi_n)(\bar{x} - x_n)^2$ com $f'(x_n) \neq 0$ em J onde $J \subset I$.

Assim $f(x_n) + f'(x_n).(\bar{x} - x_n) = -\frac{1}{2}f''(\xi_n)(\bar{x} - x_n)^2$

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \bar{x} - x_n = -\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}(\bar{x} - x_n)^2$$

$$\bar{x} - \left[x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right] = -\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}\left(\bar{x} - x_n\right)^2$$

$$\bar{x} - g(x_n) = -\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}\left(\bar{x} - x_n\right)^2$$

$$\frac{\bar{x} - x_{n+1}}{\left(\bar{x} - x_n\right)^2} = -\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}$$

$$\frac{\left|x_{n+1} - \bar{x}\right|}{\left(x_n - \bar{x}\right)^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}.$$

Desta forma $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\left|x_{n+1} - \bar{x}\right|}{\left(x_n - \bar{x}\right)^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}$ então é suficiente para justificar a existência do limite de $\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}$ quando $n \to +\infty$.

Dado que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \bar{x}$ (já sabemos que x_n converge à raiz $\bar{x}$) e ξ_n está sempre entre x_n e $\bar{x}$ temos que necessariamente ξ_n converge a $\bar{x}$. Além disso, f'' e f' é contínua em $\bar{x}$ com $\lim\limits_{n \to +\infty} \xi_n = \bar{x}$, então temos que $\lim\limits_{n \to +\infty} f''(\xi_n) = f''(\bar{x})$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} f'(\xi_n) = f'(\bar{x})$. Assim $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\left|x_{n+1} - \bar{x}\right|}{\left(x_n - \bar{x}\right)^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$.

Para exemplificar a ordem de convergência no Método de Newton, pode-se observar os exemplos anteriores:

Tomando a função $f(x) = 2x - tg(x)$, já exemplificada anteriormente:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	1	0,4425922753	-1,425518821	1,31047803
1	1,31047803	-1,133327685	-13,09464644	1,223929096
2	1,223929096	-0,318528677	-6,652896315	1,1760509
3	1,1760509	-0,04820711793	-4,761482902	1,165926508
4	1,165926508	-0,001621894244	-4,44510516	1,165561636
5	1,165561636	-0,000002000423291	-4,434145039	1,165561185
6	1,165561185	0	-4,434131506	1,165561185

Pode-se observar que os valores de x_4 e x_5 tem três casas decimais de precisão, enquanto o de x_5 e x_6 tem seis casas, exatamente o dobro do anterior.

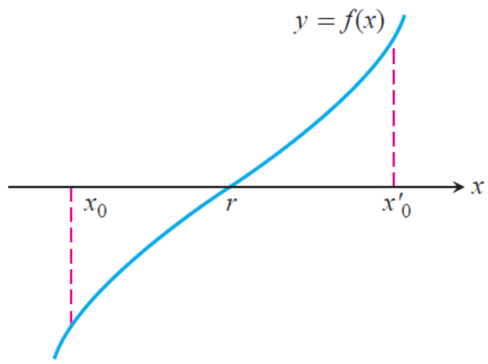
Tomando outra função já exemplificada, $f(x) = sen(x) - e^{x}$:

n	x	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	-3	-0,1909070764	-1,039779565	-3,183603413
1	-3,183603413	0,0005623280468	-1,040553752	-3,183063
2	-3,183063	-0,00000001215813869	-1,040598702	-3,183063012
3	-3,183063012	0	-1,040598701	-3,183063012

Pode-se observar que os valores de x_1 e x_2 tem três casas decimais de precisão, enquanto o de x_2 e x_3 tem seis casas, exatamente o dobro do anterior.

Como nem sempre ocorre convergência, sugere-se começar traçando o gráfico da função e estimando um bom valor para x_0. Se entre r e x_0 a curva da função for côncava para cima em $f(x) > 0$ e côncava para baixo quando $f(x_0) < 0$ o método irá sempre convergir. (Thomas, 2009, capítulo 4, tópico Convergência das Aproximações).

Figura 12- O Método de Newton convergirá para r a partir de qualquer ponto de partida.



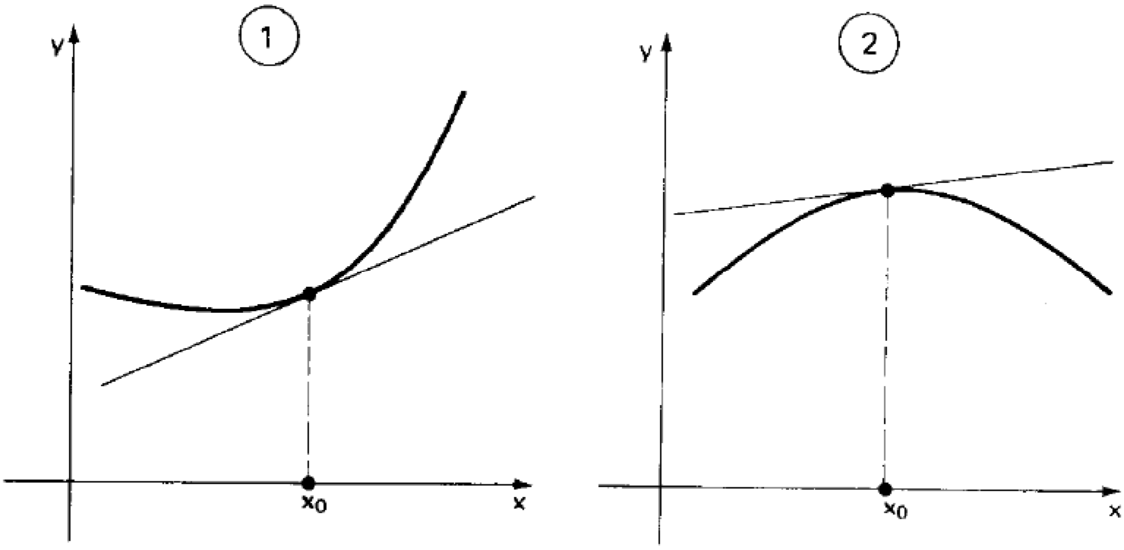
Fonte: Thomas (2009)

Cabe aqui colocar uma definição formal de concavidade, segundo Iezzi e Murakami (2001).

Definição 9: Seja f uma função contínua no intervalo $I = [a, b]$ e derivável no ponto $x_0 \in (a, b)$. Dizemos que o gráfico de f tem concavidade positiva em x_0 se, e somente se, existe uma vizinhança V de x_0 tal que, para $x \in V$, os pontos do gráfico de f estão acima da reta tangente à curva no ponto x_0.

Analogamente, se existe uma vizinhança V de x_0 tal que, para $x \in V$, os pontos do gráfico de f estão abaixo da reta tangente à curva no ponto x_0, dizemos que o gráfico f tem concavidade negativa.

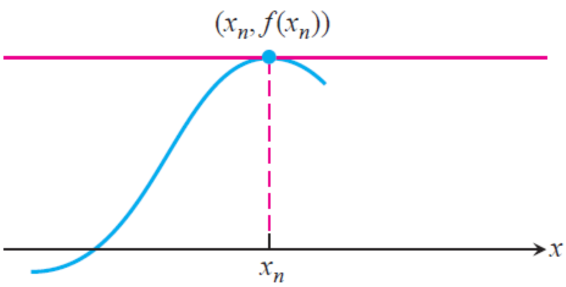
Figura 13- Concavidade positiva (para cima) e concavidade negativa (para baixo)



Fonte: IEZZI E MURAKAMI (2009)

No entanto, nem sempre o método converge. Por exemplo, se temos que $f'(x_0) = 0$, o método falha e é necessário escolher um novo ponto de partida.

Figura 14- Se $f'(x_0) = 0$, não há ponto de intersecção para definir x_{n+1}.

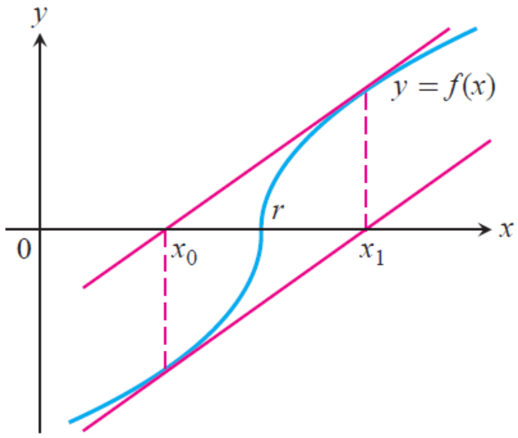


Fonte: Thomas (2009)

Também existem situações em que, não importa o número de iterações, as aproximações vão e vem entre dois valores, como no exemplo a seguir.

Seja $f(x) = -\sqrt{r - x}$, $x < r$ ou $\sqrt{x - r}$, $x > r$. Começando em $x_0 = r - h$, obtém-se na primeira iteração o ponto $x_1 = r + h$. Aplicando uma nova iteração, volta-se para o valor de x_0.

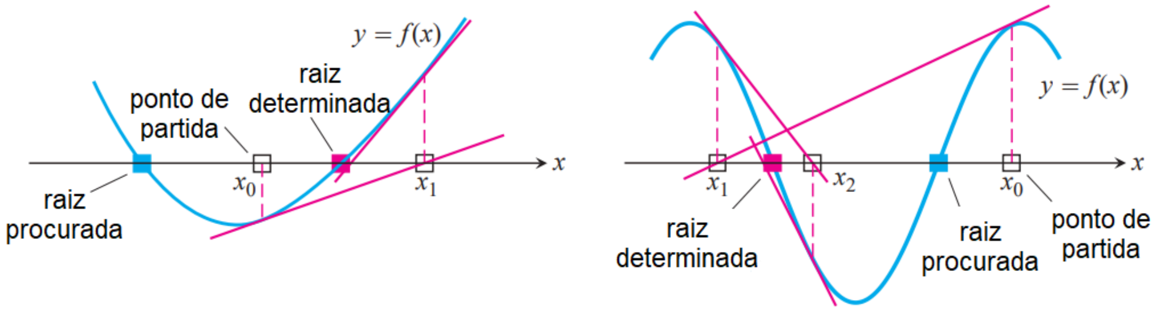
Figura 15- O Método de Newton não consegue convergir



Fonte: Thomas (2009).

Existem também situações mais raras, em que parece que o método irá convergir, mas não há raiz no ponto. Em outras, a raíz para a qual o método converge pode não ser a procurada.

Figura 16- Se o ponto de partida estiver distante, outra raiz pode ser determinada

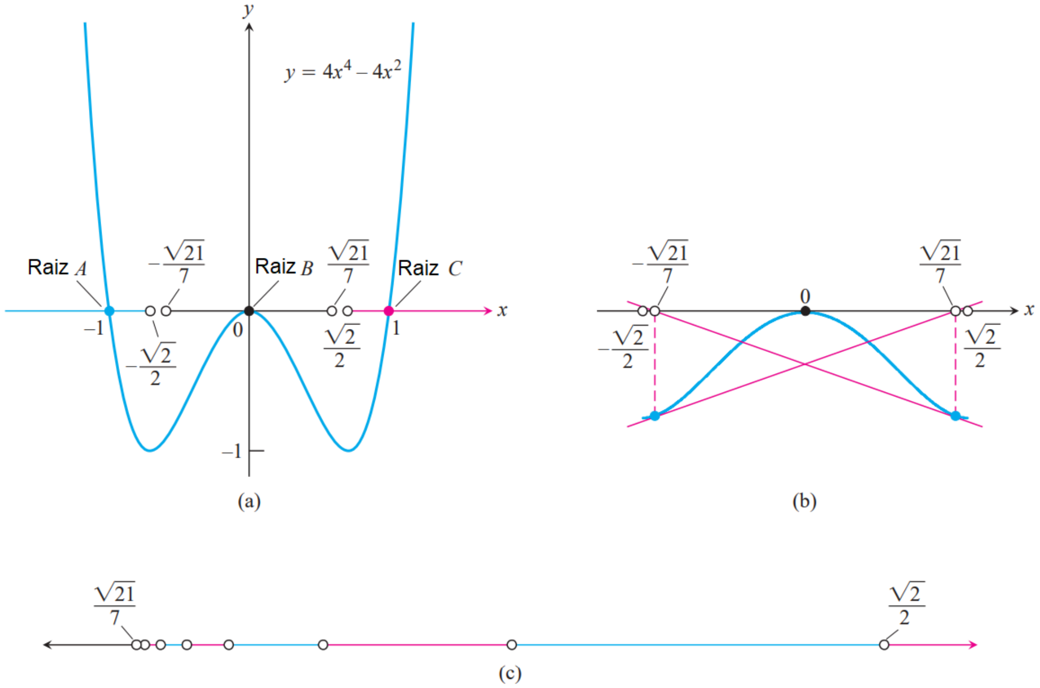


Fonte: Thomas (2009).

Também existem algumas equações para as quais o Método de Newton pode ser incerto pois para determinados intervalos, o resultado final é extremamente sensível à escolha do ponto de partida inicial.

Um exemplo pode ser encontrado em Thomas (2009, p.304), para o polinômio $f(x) = 4x^4 - 4x^2$. Sua derivada é $f'(x) = 16x^3 - 8x$

Figura 17-Gráfico de $f(x) = 4x^4 - 4x^2$



Fonte: Thomas (2009).

Partindo de um valor x_0 no intervalo $\left(-\infty, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ o método converge para a raiz A.

Por exemplo, tomando $x_0 = -1,5$, tem-se:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	-1,5	11,25	-42	-1,232142857
1	-1,232142857	3,146729634	-20,07261297	-1,075375542
2	-1,075375542	0,7236148095	-11,29458428	-1,011308128
3	-1,011308128	0,093045703	-8,458486207	-1,00030785
4	-1,00030785	0,002464694906	-8,012318545	-1,000000237
5	-1,000000237	0,000001893450198	-8,000009467	-1
6	-1	0	-8	-1

Partindo de um valor x_0 no intervalo $\left(\frac{-\sqrt{21}}{7}, \frac{\sqrt{21}}{7}\right)$ o método converge para a raiz B.

Por exemplo, tomando $x_0 = 0,5$, tem-se:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	0,5	-0,75	-2	0,125
1	0,125	-0,0615234375	-0,96875	0,06149193548
2	0,06149193548	-0,01506784087	-0,4882152138	0,0306288234
3	0,0306288234	-0,003748978978	-0,2445708486	0,01530001786
4	0,01530001786	-0,0009361429927	-0,1223428375	0,007648217297
5	0,007648217297	-0,0002339672245	-0,06117858023	0,00382388493
6	0,00382388493	-0,00005848752862	-0,03059018483	0,001911914508
7	0,001911914508	-0,00001462161489	-0,01529520424	0,0009559537594
8	0,0009559537594	-0,00000365538702	-0,007647616098	0,0004779764429
9	0,0004779764429	-0,0000009138457111	-0,003823809796	0,0002389881669
10	0,0002389881669	-0,0000002284613625	-0,001911905116	0,0001194940766
11	0,0001194940766	-0,00000005711533656	-0,0009559525855	0,00005974703745
12	0,00005974703745	-0,00000001427883388	-0,0004779762962	0,00002987351862
13	0,00002987351862	-0,000000003569708455	-0,0002389881485	0,0000149367593
14	0,0000149367593	-0,0000000008924271128	-0,0001194940743	0,000007468379646
15	0,000007468379646	-0,0000000002231067781	-0,00005974703716	0,000003734189823
16	0,000003734189823	0	-0,00002987351858	0,000001867094911

Partindo de um valor x_0 no intervalo $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ o método converge para a raiz C.

Por exemplo, tomando $x_0 = 1,5$, tem-se:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	1,5	11,25	42	1,232142857
1	1,232142857	3,146729634	20,07261297	1,075375542
2	1,075375542	0,7236148095	11,29458428	1,011308128
3	1,011308128	0,093045703	8,458486207	1,00030785
4	1,00030785	0,002464694906	8,012318545	1,000000237
5	1,000000237	0,000001893450198	8,000009467	1
6	1	0	8	1

Para os valores $x_0 = \pm\frac{\sqrt{21}}{7}$, as iterações levam de um valor ao outro, sem convergir para uma raiz. Tomando $x_0 = \frac{\sqrt{21}}{7} \approx 0,6546536707$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	0,6546536707	-0,9795918367	-0,7481756237	-0,6546536707
1	-0,6546536707	-0,9795918367	0,7481756237	0,6546536707

Porém, o mais curioso acontece nos intervalos $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{21}}{7}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{21}}{7}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, onde ocorre uma infinidade de intervalos abertos que convergem para a raiz A, alternados com intervalos que convergem para $\mathbb{C}$. É possível obter mais informações e ilustrações deste comportamento em George B.Thomas 11ª edição (versão em inglês).

4 NOVAS TENDÊNCIAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Neste tópico serão abordadas algumas das Novas Tendências no Ensino de Matemática, analisando de forma objetiva algumas das principais, sendo elas: Jogos Matemáticos, Resolução de Problemas, Modelagem Matemática, Investigação Matemática, Etnomatemática, Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) e História da Matemática. Destas, a mais pertinente ao presente trabalho são as TICs.

Os Jogos Matemáticos segundo Grando (2000), possibilitam a construção de relações lógicas e quantitativas, sendo caracterizado pelo raciocínio, demonstração, e capacidade de questionamento. Os jogos possibilitam uma postura mais participativa, maior interação e possibilidade de trabalho em grupo, estimulando a cooperação e o respeito.

Quanto à Resolução de Problemas, Polya foi pioneiro nesses estudos, esquematizando quatro etapas para a resolução de problemas: compreender o problema, elaborar um plano, executar o plano e fazer a verificação da solução. Esta tendência permite ao aluno desenvolver conhecimentos a partir de uma busca prática por soluções (Polya, 1995).

Quanto a Modelagem Matemática, David e Tomaz (2008) descrevem que por meio de uma investigação (de um objeto, conteúdo, projeto ou tema) é possível promover atividades escolares capazes de mobilizar os estudantes por meio de aprendizagens que relacionem as práticas sociais com as práticas disciplinares de alunos e professores. A Modelagem permite aos alunos investigar, criar e entender situações que envolvem a matemática, mas também vão além da mesma, se aplicando muitas vezes a situações e problemas reais que podem estar presentes na realidade dos mesmos.

Na década de 70 surge no Brasil a Etnomatemática, tendo como principal idealizador o professor Ubiratan D'Ambrósio. A Etnomatemática busca entender as matemáticas da humanidade em diferentes grupos, comunidades, povos e nações. Privilegiando os aspectos qualitativos, ligada a questões de natureza ambiental, de produção, se enquadrando numa concepção holística de educação (D'Ambrosio, 2013).

Já a História da Matemática se faz forte aliada, pois permite compreender a matemática e sua evolução como uma ciência aliada às necessidades sociais do ser humano. Mendes (2009) defende que a aplicação em sala de aula da História da Matemática deve ser contextualizada, com significados, formativo e conscientizador. A própria BNCC enfatiza à importância da mesma "incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática" (Brasil, 2018, p. 298).

Por sua vez, o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) além de forte aliado no ensino de matemática, se faz cada vez mais atual devido ao avanço das tecnologias no cotidiano dos estudantes, ainda que não tão acessível a todos. Neste trabalho, esta tendência se fez presente na elaboração e execução da Sequência Didática, desta forma será abordada mais detalhadamente.

4.1 TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO

Pode-se entender as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs), como uma conjugação da informática (tecnologia computacional) e a tecnologia da telecomunicações, tendo a internet sua expressão mais forte (Miranda, 2007).

Quanto ao uso das Tecnologias da Informação e Comunicação em sala de aula, Martins (2009, p.3) enfatiza que:

> As tecnologias, em especial o computador e a Internet, usadas como um meio e não como um fim, podem ter um precioso efeito no estímulo e na motivação do aluno para as actividades envolvendo-o nas matérias durante o processo de Ensino-Aprendizagem.

Segundo Borba (2015) às tecnologias vão ocupando o ambiente escolar conforme avançaram e se popularizaram, sendo que o autor identifica quatro Fases das tecnologias Digitais, sendo que:

> Entre a primeira fase, com início por volta de 1985, e a terceira fase se evidenciou o uso do software LOGO, a popularização dos computadores pessoais e o uso de softwares de geometria dinâmica que possibilitaram experimentações nas aulas de matemática. A quarta fase com a internet rápida amplia consideravelmente as possibilidades na sala de aula, inclusive abrindo espaço para mudança de papéis neste cenário. O ambiente virtual firma-se como lugar onde o pensamento matemático passa a ser desenvolvido e compartilhado de forma mais democrática ao integrar artefatos midiáticos que moldam o ser humano e são moldadas por ele, influenciando a maneira como o conhecimento é gerado (BORBA, 2015, p.1).

Assim, dentro das possibilidades presentes no ambiente escolar, a elaboração de atividades que permitam desenvolver a aprendizagem utilizando das ferramentas tecnológicas disponíveis pelos estudantes e pela escola (computador, celular, smartTV, entre outros) é uma estratégia bastante útil e enriquecedora. Se faz necessária para tanto uma articulação de políticas públicas voltadas para a estruturação do acesso às tecnologias no ambiente escolar, sendo que:

> Em nível nacional, uma das primeiras ações no sentido de estimular e promover a implementação do uso de tecnologia informática nas escolas brasileiras ocorreu em 1981 com a realização do I Seminário Nacional de Informática Educativa, onde estiveram presentes educadores de diversos estados brasileiros. Foi a partir desse evento que surgiram projetos como: Educom, Formar e Proinfe (BORBA e PENTEADO, 2001, p. 19).

Desde então, muitos projetos têm tentado efetivar esta implementação, sendo que ainda não foi alcançado um resultado efetivo.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+Ensino Médio) por sua vez, enfatizam no tópico “A escola como espaço de formação docente” que:

> Não é possível também, em pleno século 21, abrir mão dos recursos oferecidos pela tecnologia da informação e da comunicação e da capacitação dos professores para a utilização plena desses recursos. Nas últimas décadas, o custo financeiro desses equipamentos tem decrescido na mesma proporção da sua crescente relevância para a formação de alunos e professores, de forma que é inadiável nosso esforço em mudar atitudes refratárias a seu uso, uma vez que estão amplamente disseminados na vida social em geral (PCN+Ensino Médio, 2002, p.142).

Quanto à disciplina de Matemática, é interessante destacar Abrantes (2001, p.68) “A Competência Matemática desenvolve-se através de uma experiência Matemática rica e diversificada e da reflexão sobre essa experiência, de acordo com a maturidade dos alunos”.

O uso de tecnologias no processo de ensino-aprendizagem desta disciplina possibilita esta experiência rica, uma vez que deixa em segundo plano o emaranhado de contas e parte para ferramentas facilitadoras na visualização e resolução de problemas. Além disso, por serem atuais, as tecnologias estão presentes no cotidiano dos estudantes dentro e fora do ambiente escolar, ainda que de maneiras distintas.

Sendo assim, é consenso que o uso das tecnologias no ensino de matemática são uma força motivadora para professores e estudantes. Porém, encontra uma forte barreira em uma série de fatores, dentre eles o acesso e qualidade dos laboratórios de informática (Borba, 2015). Assim, o autor enfatiza a possibilidade do uso de celulares inteligentes, e a necessidade de ampliar o acesso a internet como mecanismo para superar a dificuldade de acesso a laboratórios de informática.

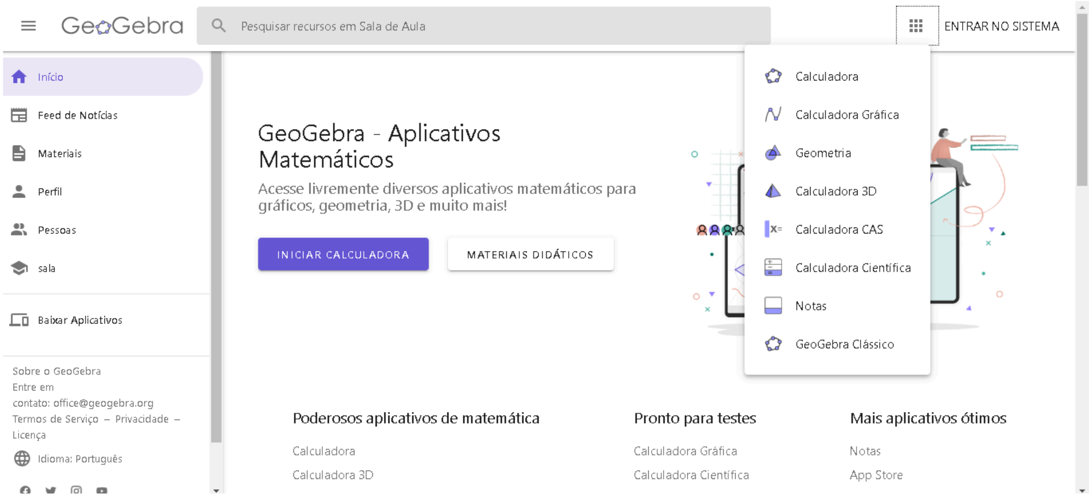
4.2 TICs UTILIZADAS NESTE TRABALHO

Para o presente trabalho, que trata da obtenção da aproximação de raízes de polinômios utilizando o Método de Newton-Raphson, optou-se por utilizar o softwares Geogebra (e seu aplicativo) para a construção dos gráficos e pelo uso de planilhas eletrônicas do Microsoft Office Excel (e seu respectivo aplicativo) para construção das planilhas para calcular os valores.

A escolha destas ferramentas se deu pela facilidade de utilização das mesmas, e principalmente por disporem de aplicativos gratuitos para Android, uma vez que a escola em que a pesquisa seria aplicada não dispõe de laboratório de informática. Assim, por meio dos aplicativos para celular, ambos gratuitos, os alunos foram capazes de realizar as atividades propostas na sequência didática com maior autonomia.

Quanto ao Geogebra, este software dinâmico é voltado para a matemática em diferentes níveis educacionais, oferecendo ferramentas de geometria, álgebra, gráficos, planilhas e cálculos. Oferece também uma plataforma on-line, além de aplicativos para as lojas do Google Play e App Store. Uma de suas propostas é apoiar a educação em ciência, tecnologia, engenharia e matemática, muito conhecida pela sua sigla do inglês STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics).

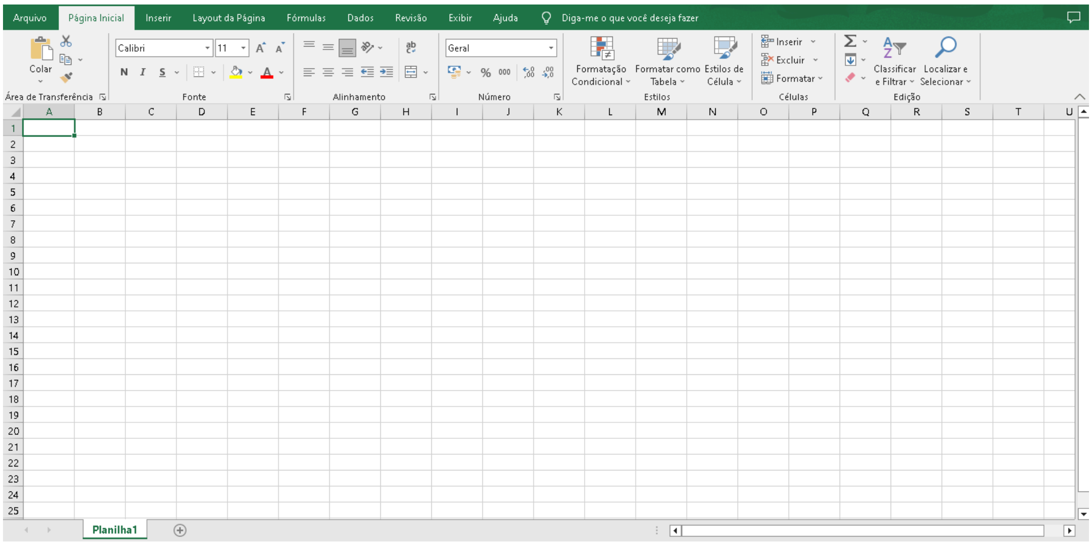
Figura 18- Tela inicial do Geogebra com algumas das ferramentas disponíveis.



Fonte: https://www.geogebra.org/ acessado em 30 de dezembro de 2022.

Quanto ao Microsoft Excel, este pode ser obtido por meio de assinatura do Microsoft 365, ou pode ser experimentado gratuitamente pelo período de um mês. Além disso, pode ser utilizado diretamente na web por meio de um email da Microsoft. Também é possível baixar aplicativos gratuitos nas lojas do Google Play, App Store e Amazon Appstore.

Figura 19-Tela inicial de uma planilha do Microsoft Excel.



Fonte: a autora.

5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Segundo Cabral (2017), as chamadas novas tendências no Ensino de Matemática, trazem consigo facetas como o “empréstimo de modelos”, sendo um deles as chamadas Sequências Didáticas (SD). Inicialmente estas foram introduzidas no campo de estudos de linguagens e linguagem escrita e atualmente difundido para outras ciências como a Matemática.

São diversos os conceitos presentes na literatura sobre Sequências Didáticas, sendo um dos mais difundidos o de Zabala (1998) que as define como:

> (...) um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos (p. 18).

Para Araújo (2013) a Sequência Didática (SD) proporciona ao professor uma sistematização que possibilita a organização das atividades em função dos núcleos temáticos e dos procedimentos estruturais.

Segundo Giordan (2014), na elaboração de uma SD o principal foco do professor não deve estar apenas no produto da aprendizagem, mas sim no processo. Para ele:

> (...) são instrumentos desencadeadores das ações e operações da prática docente em sala de aula. Em consequência, a estrutura e o planejamento da SD elaborada pelo professor determinarão a forma e os meios pelos quais os alunos vão interagir com os elementos da cultura e, consequentemente, quais serão os processos de apropriação dos conhecimentos (GIORDAN, 2014, p.48).

É importante também destacar a diferença entre um plano de aula e Sequência Didática, que segundo Castellar (2016), está na escala de abordagem, uma vez que as SDs são mais detalhadas, se desdobrando em dois produtos: o plano de aula e o material de apoio. Assim:

> Enquanto o plano de aula fica circunscrito aos registros dos seus objetivos, atividades e avaliação, a sequência didática avança para o material de apoio ou instrucional. Ou seja, a sequência didática atrela-se não apenas aos pormenores das atividades – que neste caso é a descrição das tarefas –, mas também às tarefas em si, com os enunciados das questões, imagens, figuras, tabelas etc (CASTELLAR, 2016 , p.41).

5.1 APLICAÇÃO E ANÁLISE

Como sugere Cabral (2017), para a construção de uma SD se faz necessário a realização de um diagnóstico dos conhecimentos prévios dos estudantes, a fim de perceber o que o aluno já sabe (conhecimentos mínimos necessários). Assim, partindo do diagnóstico realizado em duas turmas de 2º ano do Ensino Médio, de uma escola pública da Rede Estadual de Ensino da Bahia, foi possível perceber a necessidade de começar a abordagem do tema tendo como ponto de partida as funções afins e quadráticas, para então chegar aos polinômios de grau superior. Esta necessidade se deve principalmente ao fato de que a pandemia de COVID-19 no ano de 2020 acarretou na suspensão das aulas presenciais. Assim, as atividades letivas foram retomadas em 2021 na rede estadual, inicialmente de forma remota, em um segundo momento de forma híbrida e posteriormente de forma presencial. Desta forma, os estudantes se encontram em níveis de aprendizagem bastante diferenciados, sendo importante retomar determinados assuntos antes de avançar para outros.

A avaliação diagnóstica se deu em dois momentos distintos. O primeiro realizado no começo do ano letivo em ação conjunta pela unidade escolar, a fim de avaliar o "nível de conhecimento" dos alunos nas disciplinas de Lingua Portuguesa(por meio de uma produção textual) e Matemática (por meio de um questionário de conhecimentos básicos envolvendo operações, potenciação e radiciação, equações e noções de geometria plana). Por meio desta avaliação inicial é possível perceber as principais "deficiências escolares" dos estudantes e pensar em como propor estratégias de reposição. Em um segundo momento, prévio à elaboração da sequência didática, foi feito um novo diagnóstico por meio de um momento expositivo dialogado com os alunos, onde diferentes funções e gráficos foram expostos e os mesmos tiveram a oportunidade de dizer se já os conheciam de algum momento da trajetória escolar, ou se estes eram totalmente novos.

A turma na qual a sequência foi trabalhada é composta por 28 estudantes, entre 16 e 20 anos de idade, sendo em sua maioria oriundos de comunidade rural quilombola. Desta forma, trazem consigo costumes e bagagens diferentes dos estudantes residentes na sede do município. Apesar de ser uma turma com mais dificuldades de aprendizagem, se mostram sempre abertos ao novo e empenhados em aprender, além de possuírem um espírito de solidariedade e capacidade de trabalho em equipe inspiradores.

Segundo Cabral (2017) pode-se começar uma SD por meio de uma situação problema, gerando uma investigação inicial, partindo de uma "caixa de pandora" que após aberta deve desencadear uma série de desdobramentos levando o aluno a alguma descoberta matemática.

Desta forma, as atividades foram iniciadas por meio da retomada das funções polinomiais de primeiro grau (função afim). Foi feita uma breve explanação sobre o assunto, por meio de aula expositiva-dialogada, buscando resgatar e re-apresentar algumas noções básicas aos estudantes. Em seguida foi aplicada a primeira SD, onde os alunos em grupo, tentaram resolver duas situações problemas envolvendo funções afim. Por meio desta atividade foi possível identificar a lei da função, seu valor numérico em determinados pontos (valores de x) e esboçar seus gráficos em um plano cartesiano utilizando para isso papel milimetrado.

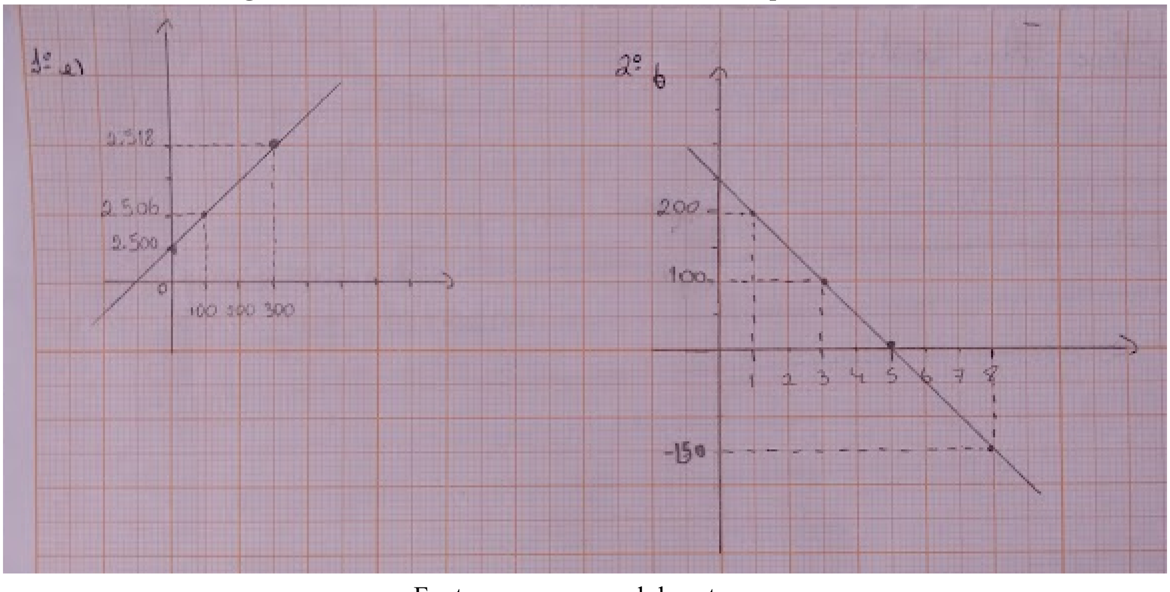
A sequência buscou resgatar os conhecimentos sobre o tema bem como permitir um olhar crítico sobre uma aplicação prática para tal conhecimento.

Foram feitos comentários pelos alunos como:

Ra: Ah, então é por isso que os vendedores ganham mais no mês que fazem mais vendas.

Im: Então significa que quanto mais esta pessoa vender mais o gráfico “sobe”.

Figura 20- Gráficos das funções afins, construídos pelos estudantes.



Fonte: acervo pessoal da autora.

Foi possível observar inicialmente uma grande dificuldade dos alunos em construírem o gráfico, desde o fato de nunca terem trabalhado com papel milimetrado, como a ausência de atividades de construção de gráficos (tanto em matemática como em outras disciplinas). Após a construção dos mesmos, os estudantes tiveram maior facilidade em responder as questões, sendo capazes de fazer estimativas aproximadas para outros valores a partir da observação dos gráficos.

A aluna Ym, no final da atividade chegou a comentar: “Este foi o ‘dever’ mais fácil que a senhora já passou este ano”. Quando perguntado por que ela achou a atividade mais fácil esta acrescentou “Porque foi o único que fazia sentido, e eu sabia exatamente o que tinha que fazer para resolver”.

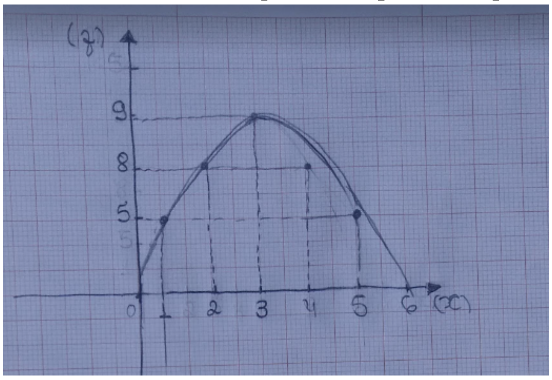
Percebe-se por meio deste tipo de comentário o quanto as sequências didáticas são importantes, ao apresentarem um sequenciamento lógico do que deve ser feito, diferente por exemplo dos exercícios presentes nos livros didáticos. O fato da sequência apresentar um começo e final relativamente rápido também ajuda o estudante a compreender a finalidade, o objetivo do que está sendo feito.

No segundo momento, foi apresentado uma breve explanação das funções polinomiais de segundo grau (função quadrática). De forma surpreendente percebeu-se que os alunos conheciam a função porém desconheciam a famosa Fórmula de Bhaskara, uma das mais utilizadas na obtenção de raízes destas funções.

As dificuldades dos estudantes nessa etapa aumentam pois a potenciação está presente e estes têm dificuldades no famoso “jogo de sinais”.

Durante a sequência didática, apesar das dificuldades os alunos se apresentaram bem mais motivados a resolver os problemas propostos, mostrando grande empenho na elaboração dos gráficos e se preocupando com os pontos encontrados e seu sentido.

Figura 21: Gráfico de uma função quadrática, produzido pelos estudantes.



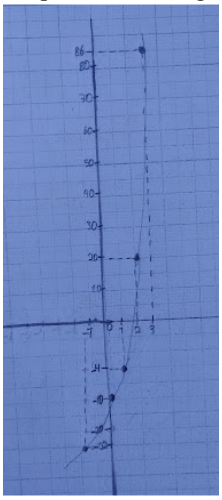
Fonte: acervo pessoal.

No terceiro momento foi apresentado o conteúdo polinômios, este totalmente novo para os estudantes pois deixou de fazer parte dos conteúdos obrigatórios da Base Nacional Comum Curricular.

Na atividade, os alunos se mostraram bem mais envolvidos e com menor dificuldade na execução. Foi possível perceber que alunos que anteriormente estavam menos motivados passaram a se interessar pelo assunto e foi nítido o esforço coletivo para terminar a SD.

Na elaboração do gráfico novas dificuldades surgiram, pois os valores agora eram “muito grandes” como observou a aluna Il, então com a ideia de escala foi possível fazer os gráficos no espaço da folha de papel milimetrado.

Figura 22: Gráfico de uma função polinomial de grau 3 produzido pelos estudantes



Fonte: acervo pessoal.

Os estudantes fizeram observações pertinentes como: “nossa, como os valores estão aumentando/diminuindo rapidamente” e também “este gráfico não é uma reta e nem uma parábola, parece um S”. Percebe-se por meio destes comentários que os estudantes estão conseguindo fazer suas próprias descobertas sobre o comportamento de funções.

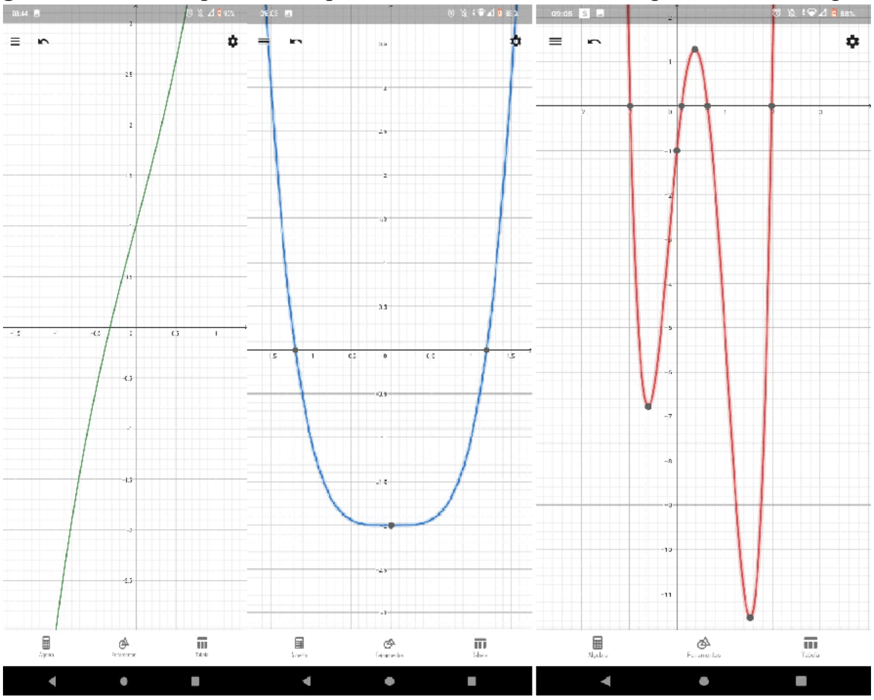
Em um outro momento, foram apresentadas as ideias de derivadas de funções polinomiais e introduzido o método de Newton, utilizando o Geogebra e o Excel como ferramentas tecnológicas de apoio para essa abordagem.

Dúvidas surgiram, mas neste momento já era possível observar uma maior familiaridade dos alunos com o conteúdo de funções. Exemplo disso, é que os estudantes aprenderam com facilidade a encontrar a derivada de uma função polinomial.

Outra observação importante foi a facilidade dos mesmos em entender o processo de aproximações utilizado no método de Newton, fazendo observações pertinentes quanto ao resultado estar chegando “cada vez mais perto” do zero da função.

O uso do Geogebra e do Excel foi novidade para a maioria. Quanto ao Geogebra, os alunos não apresentaram grandes dificuldades em gerar os gráficos de funções. A maioria conseguiu realizar a atividade tranquilamente após uma única explicação.

Figura 23: Gráficos produzidos pelos estudantes utilizando o aplicativo do Geogebra.

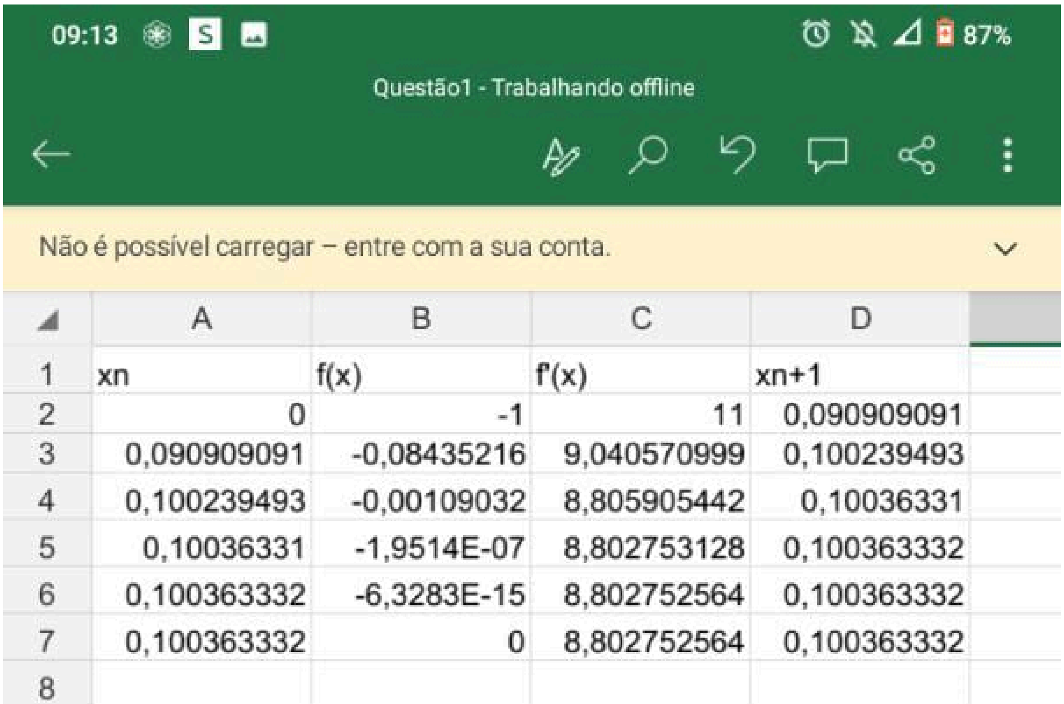


Fonte: acervo pessoal.

Quanto ao Excel os alunos apresentaram maior dificuldade com as funções por não estarem familiarizados com o trabalho em planilhas. Em contrapartida, apesar de mais "difícil" para começar a trabalhar, os alunos se mostraram mais empolgados, muitos deles falando inclusive que desejam fazer um curso de Excel no próximo ano pois não imaginavam que o mesmo "servisse para tanta coisa".

Cabe ressaltar que antes de solicitar o uso do Geogebra e do Excel, foi realizado um momento de construção coletiva com os alunos, onde por meio de computador e TV foram construídos alguns gráficos e planilhas com toda a turma, onde todos puderam participar e opinar sobre as mesmas.

Figura 24: Utilizando o aplicativo do Excel para a resolução da função $f(x)=8x^4-14x^3-9x^2+11x-1$



	A	B	C	D
1	xn	f(x)	f'(x)	xn+1
2	0	-1	11	0,090909091
3	0,090909091	-0,08435216	9,040570999	0,100239493
4	0,100239493	-0,00109032	8,805905442	0,10036331
5	0,10036331	-1,9514E-07	8,802753128	0,100363332
6	0,100363332	-6,3283E-15	8,802752564	0,100363332
7	0,100363332	0	8,802752564	0,100363332
8				

Fonte: acervo pessoal.

Cabe aqui salientar que a maioria dos estudantes de escola pública, principalmente no interior, tem acesso limitado a ferramentas tecnológicas como computadores, celulares e tablets. Assim, muitos deles utilizam os recursos disponíveis para acesso principalmente a redes sociais, utilizando assim poucos softwares e aplicativos, desconhecendo muitas vezes diversas funções disponíveis na palma da mão.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio da análise do percurso traçado ao longo da aplicação desta sequência didática, é possível perceber o quão desafiador é o rompimento com os modelos tradicionais de Ensino de Matemática.

Inicialmente, a mudança é percebida pelos estudantes de forma apreensiva. Eles relatam muitas dificuldades e apresentam muitas dúvidas e deficiências. No decorrer do percurso, é possível perceber uma superação gradual das dificuldades iniciais, bem como um maior interesse coletivo da turma em compreender o conteúdo e solucionar as atividades propostas. O uso das ferramentas tecnológicas como o planilhas eletrônica do Excel e o Geogebra, bem como de seus aplicativos se tornou um ponto bastante positivo nas etapas finais da atividade. Os estudantes se mostram mais empenhados em desenvolver as atividades com o auxílio de tais ferramentas facilitadoras na resolução de problemas matemáticos.

A fim de possibilitar uma melhor análise dos resultados obtidos com a sequência didática, aplicou-se ao final das atividades um questionário para que os alunos avaliassem a sua experiência. Neste buscou-se avaliar três aspectos:

- A satisfação do estudante quanto às atividades realizadas;
- Como este avalia a sua aprendizagem dos conteúdos;
- Como ele avalia as atividades do tipo Sequência Didática em relação aos métodos utilizados nas unidades anteriores.

Os resultados obtidos por meio da análise de 19 formulários preenchidos pelos estudantes estão apresentados nos gráficos seguintes:

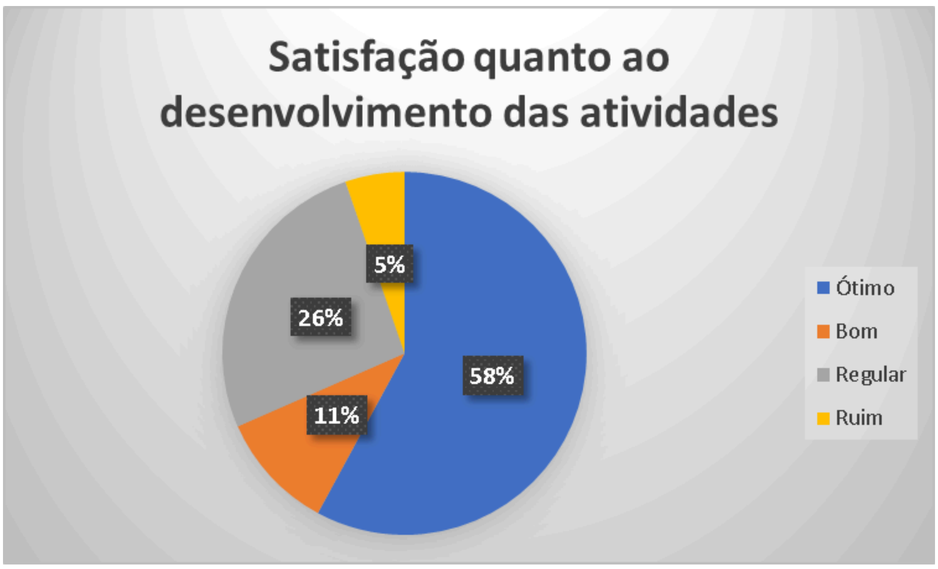


Gráfico 1: Satisfação dos estudantes quanto às atividades desenvolvidas.

Fonte: construído pela autora.

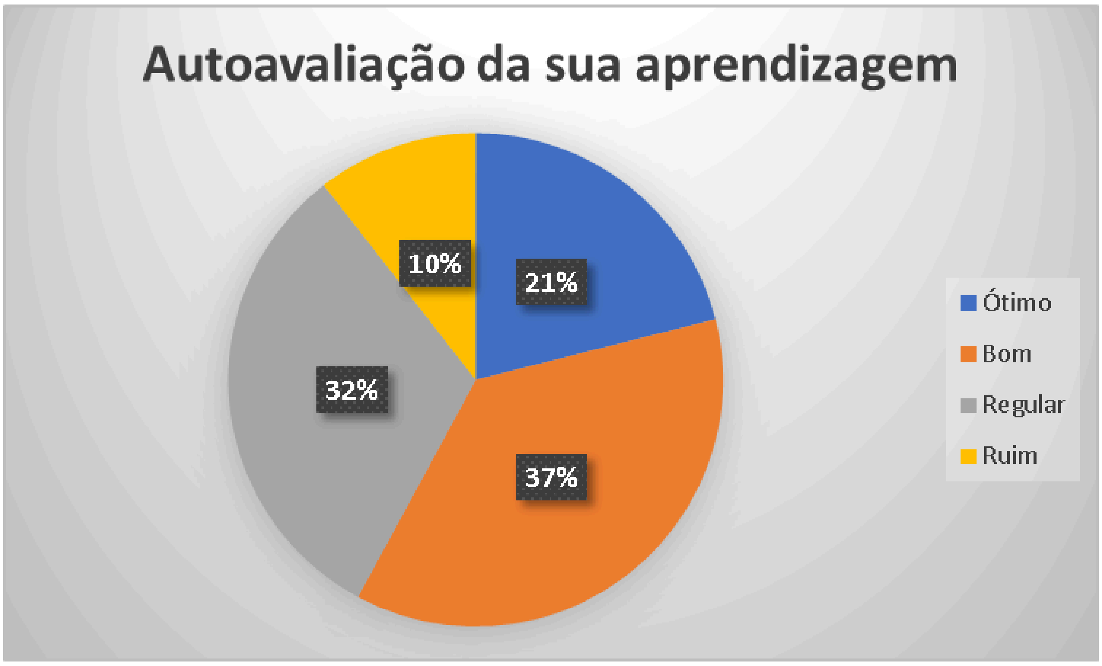


Gráfico 2: Autoavaliação da aprendizagem..

Fonte: construído pela autora.

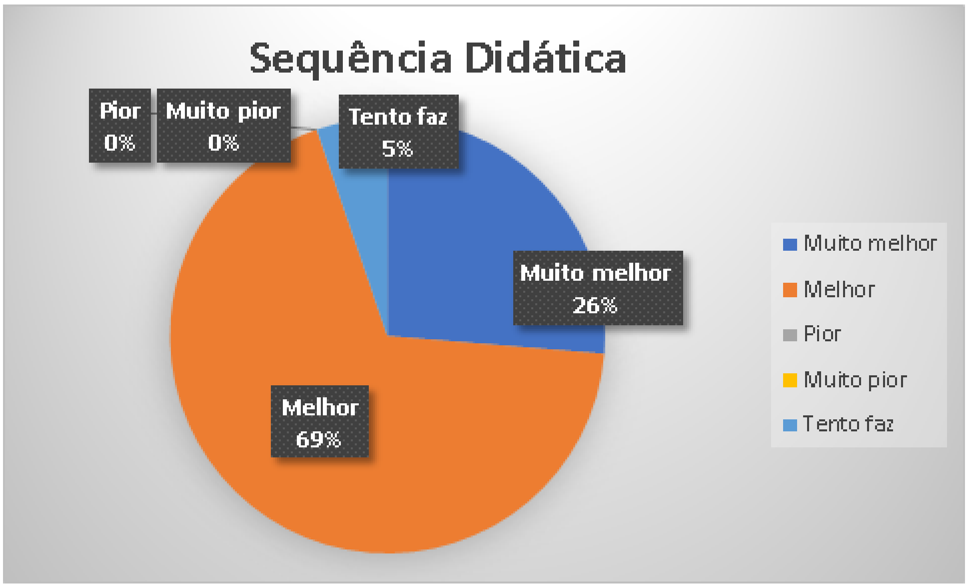


Gráfico 3: Percepção da sequência didática em relação às atividades anteriormente desenvolvidas.

Fonte: construído pela autora.

É possível perceber que a maioria dos estudantes se sentiu satisfeito em realizar as atividades propostas na Sequência Didática. Quanto à aprendizagem dos conteúdos, estes avaliaram em sua maioria a aprendizagem como boa ou ótima. Quando comparado o uso da Sequência Didática com a forma como os conteúdos vinham sendo trabalhados anteriormente (de maneira mais tradicional) 95% dos alunos consideram esta melhor ou muito melhor.

Assim, pode-se perceber que o uso de Sequências Didáticas nas aulas de matemática, neste trabalho especificamente no estudo das raízes de funções polinomiais e do Método de Newton, é uma possibilidade de ensino enriquecedora e satisfatória. O uso das tecnologias educacionais se faz um forte aliado na resolução de diversos problemas matemáticos, possibilitando estudos de conteúdos um pouco mais avançados do que os regularmente apresentados no Ensino Médio, como no presente trabalho.

Com a Reforma do Ensino Médio, ocorreu redução do número de aulas de matemática e criação de novas disciplinas denominadas Eletivas, cuja ementa fica a cargo de cada escola, e nas quais o aluno escolhe onde deseja se matricular. Assim, o uso de Sequências Didáticas que permitem avançar em conteúdos da matemática utilizando ferramentas tecnológicas como aplicativos de celular, se faz uma proposta viável para modelos de disciplinas novas, voltadas para os estudantes que tenham maior afinidade pelas áreas de exatas e tecnologias.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, Paulo. Reorganização Curricular do Ensino Básico. Lisboa: ME. 2001.

ARAÚJO, Denise Lino de. O que é (e como faz) sequência didática? Entrepalavras, Fortaleza - ano 3, v.3, n.1, p. 322-334, jan/jul 2013. Disponível em: http://www.entrepalavras.ufc.br/revista/index.php/Revista/article/viewFile/148/181 Acessado em: 13 de agosto de 2022.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. MEC. 2018

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCNs+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2002. 144 p .

BORBA, Marcelo de Carvalho. Fases das Tecnologias digitais e a reinvenção da sala de aula. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo – SP (palestra) Disponível em: 5111_4425_ID.pdf (sbembrasil.org.br) acessado em 06 de março de 2024.

BORBA, Marcelo de Carvalho; LACERDA, Hannah Dora Garcia. Políticas Públicas e Tecnologias Digitais: um celular por aluno. Educação Matemática Pesquisa (Online), v. 17, p. 490-507, 2015. Disponível em: POLÍTICAS PÚBLICAS E TECNOLOGIAS DIGITAIS: UM CELULAR POR ALUNO - PDF Free Download (docplayer.com.br) Acessado em 06 de março de 2024.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. Informática e Educação Matemática. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BROCKVELD, Leonardo de Liz. **Estudando métodos iterativos no ensino médio: uma proposta didática exploratória envolvendo o método de Newton e geometria dinâmica.** Dissertação (mestrado em Matemática)-Centro Tecnológico de Ciências Exatas e Educação, Universidade Federal de Santa Catarina. Blumenau, p.59. 2021.

BURDEN, Richard L; FAIRES, Douglas J.; BURDEN, Annette M. **Análise numérica**. Tradução: All Tasks. 3.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências Didáticas: estruturas e elaboração.** Belém: SBEM/SBEM-PA, 2017.

CARDOSO, Luiz César de Souza. **Solução por radicais de certas equações polinomiais de grau ímpar e método de Newton.** Dissertação (mestrado em Matemática)-Fundação Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. Três Lagoas, p.57. 2016.

CASTELLAR, Sonia M. Vanzella. **Metodologias ativas : sequências didáticas.** 1. ed. — São Paulo : FTD, 2016.

CAVALCANTI, Eduardo Santana. **Soluções de Equações Polinomiais via Método De Newton-Raphson com uso de planilhas eletrônicas.**. Dissertação (mestrado em Matemática)-Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal do Pará. Belém, p.80. 2015.

CORRÊA, Francisco Júlio Sobreira de Araujo. **Introdução à Análise Real.** 1.ed. Belém: UFPA, 2008. v.1.216p.

D'AMRÓSIO, Ubiratan. **Etnomatemática** – elo entre as tradições e a modernidade. Autêntica, 2013.

DAVID, Maria Manuela MS; TOMAZ, Vanessa Sena. **Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula.** Autêntica Editora, 2008.

FERNANDEZ, Cecília de Souza; SANTOS, Raphael Antunes dos.O Teorema Fundamental da Algebra. V Bienal da SBM. Sociedade Brasileira de Matemática. Universidade Federal da Paraíba. 2010. Disponível em: n45_Artigo02.pdf (sbm.org.br) Acessado em 08/06/2023.

FRANCO, Neide Maria Bertoldi. **Cálculo numérico**. 1ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. v.1.520p.

GEOGEBRA. Disponível em https://www.geogebra.org/ acessado em 30 de dezembro de 2022.

GIORDAN, M. Princípios de elaboração de SD no ensino de ciências. Disciplina PLC0703: O Planejamento do Ensino: Curso de Licenciatura em Ciências (USP/UNIVESP). Produção: Centro de Ensino e Pesquisa Aplicada (CEPA), Instituto de Física da Universidade de São Paulo. 2014. p. 46-53.

GRANDO, Regina Célia et al. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.** Campinas, SP: Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação, 2000.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**, vol 1. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real**: Volume 1.Funções de uma variável. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Um Curso de Análise**: Volume 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

MARTINS, Zélia. **As TIC no ensino-aprendizagem da Matemática**. In: Anais do X Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia. Universidade do Minho. Portugal. 2009.

Mendes, I. A. (2009). **Investigação Histórica no Ensino de Matemática**. Ciência Moderna Ltda.

MICROSOFT EXCEL. Disponivel em https://www.microsoft.com/pt-br/microsoft-365/excel acessado em 30 de dezembro de 2022.

Miranda, G. L. (2007). **Limites e possibilidades das TIC na educação**. Revista de ciências da educação, n. 3, maio/ago.

MUNIZ NETO, A. C. **Fundamentos de cálculo**. SBM, 2015 (Coleção PROFMAT).

OLIVEIRA, Julimar Carlos de. **Método de Newton-Raphson aplicado à localização de raízes polinomias**. Dissertação (mestrado em Matemática)-Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Maranhão. São Luís, p.44. 2014.

"Polinômios" em *Só Matemática*. Virtuous Tecnologia da Informação, 1998-2022. Consultado em 19/06/2022 às 19:18. Disponível na Internet em *https://www.somatematica.com.br/emedio/polinomios/polinomios12.php*

POLYA, George. A arte de resolver problemas (Tradução de How to solve it, 1945). Rio de Janeiro. Interciência, 1995.

ROOS, Dieyson. **Abordagem geométrica do método de Newton.** Dissertação (mestrado em Matemática)-Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade do Estado do Mato Grosso. Sinop, p.53. 2017.

SANTOS, Janio Cesar Alencar dos. **O método de Newton-Raphson na solução da equação 2^x=x^2: Uma Motivação para o Estudo da Existência de Logaritmo de Números Negativos.** Dissertação (mestrado em Matemática)-Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás. Catalão, p.38. 2018.

TEODORO, Marcelo Moura. **O Método de Newton e fractais**. Dissertação (mestrado em Matemática)-Departamento de Matemática e Estatística, Universidade Federal de São João del-Rei. São João del-Rei, p.23. 2015.

THOMAS, George B. **Cálculo**-Volume 1. Tradução: Thelma Guimarães e Leila Maria Vasconcelos Figueredo. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009.

ZABALA, Antoni. A prática educativa: como ensinar; tradução: Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998. 224 p.

APÊNDICE A- SEQUÊNCIA DIDÁTICA

DISCIPLINA: MATEMÁTICA
PROFESSORA: MARIA HORTÊNCIA
TURMA: 2º ANO DO ENSINO MÉDIO
CONTEÚDOS TRABALHADOS

- Funções polinomiais;
- Gráficos de funções polinomiais;
- Raízes (zeros) de funções polinomiais;
- Método de Newton.

HABILIDADES (BNCC)

- **EM13MAT101**
- **EM13MAT302**
- **EM13MAT401**
- **EM13MAT402**

TEMPO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

- 15 aulas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

- Lousa e pincel;
- Lápis, caderno e papel milimetrado;
- Tablet, celular e computador com as ferramentas Geogebra e Excel.

MOMENTO 1 (3 AULAS)
Organização da turma
As atividades serão desenvolvidas em grupos de 3 a 5 estudantes, conforme escolha dos mesmos.

Introdução
Breve revisão de função afim, seguida de atividade em grupo visando solucionar problemas e construir gráficos de funções.
Desenvolvimento

- Discussão coletiva;

- Consulta ao professor sobre dúvidas;
- Construção dos gráficos.

Conclusão

Entrega das soluções propostas por cada equipe juntamente com os gráficos produzidos.

Avaliação

- Participação dos estudantes;
- Engajamento da turma;
- Disposição para o trabalho em equipe;
- Soluções propostas.

MOMENTO 2 (3 AULAS)

Organização da turma

As atividades serão desenvolvidas em grupos de 3 a 5 estudantes, conforme escolha dos mesmos.

Introdução

Breve revisão de função quadrática, seguida de atividade em grupo visando solucionar problemas e construir gráficos de funções.

Desenvolvimento

- Discussão coletiva;
- Consulta ao professor sobre dúvidas;
- Construção dos gráficos.

Conclusão

Entrega das soluções propostas por cada equipe juntamente com os gráficos produzidos.

Avaliação

- Participação dos estudantes;
- Engajamento da turma;
- Disposição para o trabalho em equipe;
- Soluções propostas.

MOMENTO 3 (5 AULAS)

Organização da turma

As atividades serão desenvolvidas em grupos de 3 a 5 estudantes, conforme escolha dos mesmos.

Introdução

Apresentação das funções polinomiais de grau superior a dois, seguida de atividade em grupo visando solucionar problemas e construir gráficos de funções.

Desenvolvimento

- Discussão coletiva;
- Consulta ao professor sobre dúvidas;
- Construção dos gráficos.

Conclusão

Entrega das soluções propostas por cada equipe juntamente com os gráficos produzidos.

Avaliação

- Participação dos estudantes;
- Engajamento da turma;
- Disposição para o trabalho em equipe;
- Soluções propostas.

MOMENTO 4 (4 AULAS)

Organização da turma

As atividades serão desenvolvidas em grupos de 3 a 5 estudantes, conforme escolha dos mesmos.

Introdução

Apresentação da derivada de uma função polinomial, explicação ilustrativa do método de Newton e resolução de problemas utilizando o Geogebra e o Excel, seguida de atividade em grupo visando encontrar raízes de funções polinomiais usando tecnologia da educação.

Desenvolvimento

- Discussão coletiva;
- Consulta ao professor sobre dúvidas;
- Construção dos gráficos no GeoGebra;
- Construção das planilhas no Excel.

Conclusão

Entrega das soluções propostas por cada equipe juntamente com os gráficos produzidos.

Avaliação

- Participação dos estudantes;
- Engajamento da turma;
- Disposição para o trabalho em equipe;

- Soluções propostas.

Finalização da sequência

Coleta e apreciação de todos os materiais construídos pelos estudantes a fim de verificar seu nível de aproveitamento.

APÊNDICE B- MOMENTO 1

Função afim

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se **função afim** quando existem dois números reais a e b tal que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Situações iniciais

1) Um representante comercial recebe, mensalmente, um salário composto de duas partes:

• Uma parte fixa, no valor de R$ 2 500,00;

• Uma parte variável, que corresponde a uma comissão de 6% (0,06) sobre o total das vendas que ele faz durante o mês.

a) Chamando de b a parte fixa e de a o coeficiente da parte variável, escreva uma fórmula geral para representar esta função e calcular o salário desse vendedor.

b) Se no mês de janeiro, o vendedor não conseguir vender nada (0 reais), qual será seu salário?

c) Supondo que no mês de fevereiro o vendedor tenha conseguido vender 100 reais em mercadorias, qual será seu salário?

d) E em um mês onde ele vendeu 300 reais?

e) Tomando os valores calculados anteriormente para f(0), f(100) e f(300),vamos agora marcar esses pontos no plano cartesiano, colocando no eixo das abscissas os valores de x (vendas) e no eixo das ordenadas os valores de f(x) (salário do vendedor).

f) O que você consegue observar com relação ao gráfico?

2) Uma pessoa tinha no banco um saldo positivo de R$ 250,00. Após um saque no caixa eletrônico que fornece apenas cédulas de R$ 50,00, o novo saldo é dado em função do número x de cédulas retiradas.

a) Chamando de b a parte fixa e de a o coeficiente da parte variável, escreva uma fórmula geral para representar esta função e calcular o saldo da conta.

b) Suponha que a pessoa faça um saque e retire uma cédula da máquina, qual será o saldo final na conta?

c) E se forem retiradas 3 cédulas da máquina, qual será o saldo final?

d) Para quantas cédulas retiradas o saldo na conta será nulo (0 reais)?

e) A maioria das contas bancárias tem um “cheque especial”, ou seja, a pessoa pode sacar um certo valor que excede seu saldo disponível, devolvendo numa data posterior o dinheiro ao banco com os respectivos juros. Quando utilizamos o cheque especial, o valor do saldo da conta fica negativo, indicando que estamos devendo ao banco. Supondo que a pessoa acima tenha feito um saque e retirado oito notas do caixa eletrônico, qual o seu saldo final?

f) Tomando os valores calculados anteriormente para f(1), f(3) e f(8),vamos agora marcar esses pontos no plano cartesiano, colocando no eixo das abscissas os valores de x (cédulas) e no eixo das ordenadas os valores de f(x) (saldo).

g) O que você pode observar? Em qual ponto o gráfico da função cruza (toca) o eixo das abscissas?

O valor de x para o qual a função $f(x) = ax + b$ se anula, ou seja, para o qual $f(x) = 0$, denomina-se **zero da função afim**. Para determinar o zero de uma função afim basta resolver a equação $ax + b = 0$.

Geometricamente, o zero da função afim $f(x) = ax + b$ é a **abscissa** do ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo x.

Problemas adaptados de:

Dante, Luiz Roberto. Matemática: contexto & aplicações: Ensino Médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

APÊNDICE C- MOMENTO 2

Função quadrática

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **quadrática** quando existem números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tal que f leva x em $ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Escrevemos:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to ax^2 + bx + c$$

Situações iniciais

1) A trajetória da bola, em um chute a gol, descreve uma parábola. Supondo que sua altura h, em metros, t segundos após o chute, seja dada por h= $-t^2 + 6t$, responda:

a) Quais os coeficientes a, b e c da função?

b) Em que altura estará a bola após 1 segundo de chute, f(1)?

c) Em que altura estará a bola após 2, 3, 4 e 5 segundos?

d) Após quantos segundos a bola atinge o solo novamente?

e) Tomando os valores calculados anteriormente para f(1), f(2), f(3), f(4), e f(5),vamos agora marcar esses pontos no plano cartesiano, colocando no eixo das abscissas os valores de x (segundos) e no eixo das ordenadas os valores de f(x) (altura da bola).

f) O que você consegue observar com relação ao gráfico?

2) Uma bola é lançada ao ar. Suponham que sua altura h, em metros, t segundos após o lançamento, seja h = $-t^2 + 5t + 6$. Determinem:

a) Quais os coeficientes a, b e c da função?

b) Em que altura estará a bola após 1 do lançamento, f(1)?

c) Em que altura estará a bola após 2, 3, 4 e 5 segundos?

d) Após quantos segundos a bola deve atingir o solo?

e) Tomando os valores calculados anteriormente para f(1), f(2), f(3), f(4), e f(5),vamos agora marcar esses pontos no plano cartesiano, colocando no eixo das abscissas os valores de x (segundos) e no eixo das ordenadas os valores de f(x) (altura da bola).

f) O que você consegue observar com relação ao gráfico?

Problemas adaptados de:

Dante, Luiz Roberto. Matemática: contexto & aplicações: ensino Médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

APÊNDICE D- MOMENTO 3

Função Polinomial

As funções complexas $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definidas por expressões polinomiais são denominadas **funções polinomiais**.

Toda função definida por $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, para todo x complexo, é denominada função polinomial de grau n, em que n é um número inteiro positivo ou nulo e a_n é diferente de 0.

Exemplos:

a) f(x) = 2x - 1 é uma função polinomial de grau 1.

b) g(x) = $3x^2$ - 2x - 1 é uma função polinomial de grau 2.

c) h(x) = x^3 - $6x^2$ - x - 1 é uma função polinomial de grau 3.

d) p(x) = x4 – x^2 é uma função polinomial de grau 4.

Situação inicial

a) Para o polinômio p(x)= $4x^3$ -$3x^2$ +5x -10, vamos calcular os valores numéricos de p(x) para os respectivos valores de x:

X	P(x)= $4x^3$ -$3x^2$ +5x -10
-1	
0	
1	
2	
3	

b) Utilizando agora do papel milimetrado, vamos marcar os pontos no plano cartesiano, com os valores de x no eixo das abscissas e de p(x) no eixo das ordenadas.

c) Ligando os respectivos pontos, tente traçar o gráfico desta função.

d) O que você pode observar em relação aos gráficos construídos anteriormente (para as funções afim e quadrática)?

e) Observando o gráfico da função, você seria capaz de estimar um valor para o zero (raiz) da função neste intervalo? (Dica, observe os pontos em que a função toca no eixo das abscissas)

f) Agora, utilizando o aplicativo GeoGebra (Calculadora Gráfica) ou Grapher Free vamos gerar o gráfico desta função e comparar com o gráfico do papel milimetrado.

Problemas adaptados de:

Dante, Luiz Roberto. Matemática: contexto & aplicações: Ensino Médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

APÊNDICE E- MOMENTO 4

Método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Tendo em mãos o aplicativo GeoGebra e a planilha do Excel desenvolvida na aula anterior, vamos a seguinte atividade:

1) Dada a função $f(x)=x^3+3x+1$:

a) Calcular a derivada da função f´(x)

b) Utilizando o Geogebra, criar o gráfico da função;

c) Estimar o(s) intervalo(s) onde possivelmente encontraremos uma raiz real

d) Partindo do ponto $x_0=0$, estimar utilizando o Excel uma raiz da função.

2) Dada a função $f(x)=x^4-2$:

a) Calcular a derivada da função f´(x)

b) Utilizando o Geogebra, criar o gráfico da função;

c) Estimar o(s) intervalo(s) onde possivelmente encontraremos uma raiz real

d) Partindo do ponto $x_0=1$, estimar utilizando o Excel uma raiz da função.

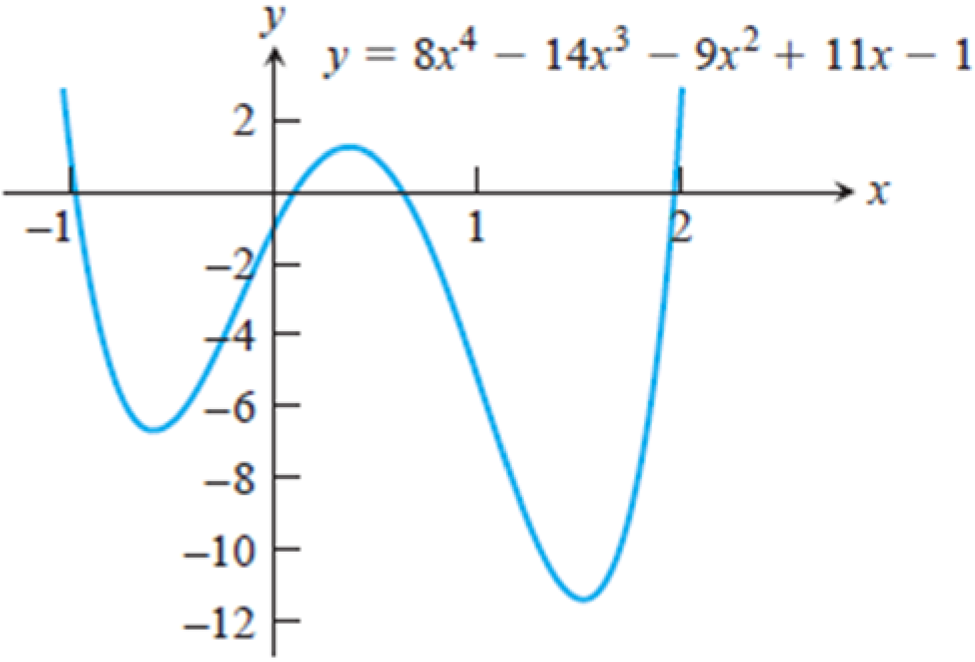
e) Partindo do ponto $x_0=-1$, estimar utilizando o Excel outra raiz da função.

3) Dada a função $f(x)=8x^4-14x^3-9x^2+11x-1$

a) Calcular a derivada da função $f'(x)$

b) Utilizando o Geogebra, criar o gráfico da função;

Será obtida algo semelhante a imagem



c) Estimar o(s) intervalo(s) onde possivelmente encontraremos uma raiz real

d) Escolhendo um ponto x_0 como ponto de partida, estimar utilizando o Excel uma raiz da função.

Problemas adaptados de: Thomas, 11 edição.

APÊNDICE F- AUTOAVALIAÇÃO

Autoavaliação

Nesta unidade os conteúdos foram trabalhados por meio de Sequências didáticas. Neste momento vocês estão sendo convidados a avaliar como foi esta experiência.

Sua satisfação quanto ao desenvolvimento das atividades

( )Ótimo ( )Bom ( ) Regular ( ) Ruim

Quanto a sua aprendizagem

( )Ótimo ( )Bom ( ) Regular ( ) Ruim

Em relação aos conteúdos e métodos das duas primeiras unidades, você considera as Sequências Didáticas:

( ) Muito melhor ( ) Melhor ( )Pior ( ) Muito pior ( ) Tanto faz

Este espaço é destinado a críticas, elogios ou sugestões:____

____

____