Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Formalismo Ergódico

Pedro Emanuel Oliveira dos Santos

Salvador-Bahia

Formalismo Ergódico

Pedro Emanuel Oliveira dos Santos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro

Salvador-Bahia
10 de maio de 2024

Sistema de Bibliotecas da UFBA

Pedro Emanuel Oliveira dos Santos.
Abreviação do título / Pedro Emanuel Oliveira dos Santos. – 2024.
58 f. : il

Orientador: Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística, Salvador, 2024.

1.

CDD - 519.72
CDU - 519.72

Formalismo Ergódico

Pedro Emanuel Oliveira dos Santos

Dissertação apresentada ao Colegiado do Curso de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora

Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro (UFBA)

Prof. Dr. Daniel Smania Brandão (USP-São Carlos)

Prof. Dr. Paulo Cesar Rodrigues Pinto Varandas (UFBA)

Agradecimentos

Eu quero agradecer a minha família, e em especial à minha mãe, pelo apoio durante todos esses anos de estudo. Quero agradecer também aos amigos que fiz durante a graduação e o mestrado na UFBA pelo companheirismo e pelo aprendizado mútuo. Agradeço também ao professor Vilton, meu orientador, pelo aprendizado. E agradeço à CAPES e à FAPESB pelo apoio financeiro durante o mestrado.

Resumo

Neste trabalho apresentamos os conceitos de Ergodicidade de Baire e de Formalismo Ergódico introduzidos em [Pi1]. Utilizamo-los para estudar atratores topológicos e atratores estatísticos e, em particular, para determinar condições de existência e finitude deles.

Estes conceitos também são usados para investigar atratores topológicos de aplicações do intervalo, mesmo com descontinuidades. Para isto, analisamos os atratores de intervalos errantes. Como consequência, demonstramos a finitude de atratores não periódicos de aplicações C^2 com descontinuidades.

Para aplicações do intervalo C^2 sem descontinuidades, demonstramos que os atratores topológicos e estatísticos coincidem e calculamos a média superior de Birkhoff de funções contínuas para pontos genéricos.

Palavras-chave: Ergodicidade de Baire; Formalismo Ergódico; Atratores topológicos; Atratores estatísticos; Aplicações do intervalo; Intervalos errantes.

Abstract

In this paper we present the concepts of Baire Ergodicity and Ergodic Formalism introduced in [Pi1]. We use them to study topological attractors and statistical attractors and, in particular, to determine their existence and finiteness.

These concepts are also used to investigate topological attractors of interval maps, even with discontinuities. To do this, we analyze the attractors of wandering intervals. As a result, we demonstrate the finiteness of non-periodic attractors of C^2 applications with discontinuities.

For applications of the interval C^2 without discontinuities, we show that the topological and statistical attractors coincide and we calculate the Birkhoff upper mean of continuous functions for generic points.

Keywords: Baire Ergodicity; Ergodic Formalism; Topological attractors; Statistical attractors; Interval maps; Wandering Intervals.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

1.1 Topologia fraca*

Seja (X, d) um espaço métrico. Denotaremos por $\mathcal{M}^1(X)$ o conjunto de todas probabilidades em X. Dados uma medida $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$, um conjunto finito $\Phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ de funções contínuas limitadas $\phi_i : X \to \mathbb{R}$ e um número $\varepsilon > 0$, definimos

$$V(\mu, \Phi, \varepsilon) = \left\{ \nu \in \mathcal{M}^1(X) : \left| \int \phi_i \, d\nu - \int \phi_i \, d\mu \right| < \varepsilon \text{ para todo } i \right\}. \tag{1.1}$$

Observamos que a interseção de dois quaisquer conjuntos desta forma contém algum conjunto desta forma (se $V(\mu, \Phi, \varepsilon)$ e $V(\eta, \Psi, \delta)$ são conjuntos desta forma, temos que $V(\mu, \Phi, \min\{\varepsilon, \delta\}) \subseteq V(\mu, \Phi, \varepsilon) \cap V(\eta, \Psi, \delta)$). Isto garante que a família $\{V(\mu, \Phi, \varepsilon) : \Phi, \varepsilon\}$ pode ser tomada como base de vizinhanças de cada $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$.

Chamamos de *topologia fraca** a topologia definida por estas bases de vizinhanças. Esta topologia depende apenas da topologia de X e não da métrica d. A topologia fraca* é Hausdorff devido ao seguinte resultado.

Lema 1.1.1. *Uma sequência $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para uma medida $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ na topologia fraca* se, e somente se,*

$$\int \phi \, d\mu_n \to \int \phi \, d\mu \quad \textit{para toda função contínua limitada } \phi : X \to \mathbb{R}.$$

Demonstração. Ver o Lema 2.1.1 de [OV]. □

Teorema 1.1.2. *Se X é um espaço métrico compacto, então $\mathcal{M}^1(X)$ com a topologia fraca* é metrizável. Se $\{f_n\}_{n \geqslant 1}$ é um subconjunto denso de $C(X, \mathbb{R})$, então*

$$D(\mu, \nu) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\left| \int f_n \, d\mu - \int f_n \, d\nu \right|}{2^n \|f_n\|}$$

é uma métrica em $\mathcal{M}^1(X)$ que induz a topologia fraca.*

Demonstração. Ver o Teorema 6.4 de [Wa]. □

Teorema 1.1.3. *Se X é um espaço métrico compacto, então $\mathcal{M}^1(X)$, munido com a topologia fraca*, é um espaço compacto.*

Demonstração. Ver o Teorema 6.5 de [Wa]. □

1.2 Alguns resultados de Teoria Ergódica

Sejam $(X, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $f : X \to X$ uma função mensurável. Dizemos que f *preserva* μ se

$$\mu(E) = \mu(f^{-1}(E)) \text{ para todo conjunto mensurável } E \subseteq X.$$

Neste caso, também dizemos que *μ é invariante por f*. Dizemos que f é *ergódica com respeito a uma probabilidade* μ se os únicos elementos $E \in \mathscr{A}$, tais que $f^{-1}(E) = E$, satisfazem $\mu(E) = 0$ ou $\mu(E) = 1$.

Teorema 1.2.1 (Existência de medidas invariantes)**.** *Sejam X um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ uma função contínua. Então, existe uma medida de probabilidade em X que é invariante por f.*

Demonstração. Ver o Capítulo 2 de [OV]. □

Definimos o conjunto Σ_2^+ da seguinte forma:

$$\Sigma_2^+ = \{s = (s_0 s_1 s_2 \dots) : s_j = 0 \text{ ou } s_j = 1\}.$$

Seja $\mathbf{d} : \Sigma_2^+ \times \Sigma_2^+ \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$\mathbf{d}(s,t) = \sum_{i \geqslant 0} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Observamos que para quaisquer $s, t \in \Sigma_2^+$, $\mathbf{d}(s,t)$ é uma série convergente, pois $|s_i - t_i| = 0$ ou $|s_i - t_i| = 1$ para todo $i \geqslant 0$; logo

$$\mathbf{d}(s,t) \leqslant \sum_{i \geqslant 0} \frac{1}{2^i} = 2.$$

Além disto, $\mathbf{d}$ é uma métrica em Σ_2^+. De fato, $\mathbf{d}(s,t) \geqslant 0$ para todos $t, s \in \Sigma_2^+$, e $\mathbf{d}(s,t) = 0$ se, e somente se, $s_i = t_i$ para todo $i \geqslant 0$, ou seja, se $s = t$. Já que $|s_i - t_i| = |t_i - s_i|$, temos que $\mathbf{d}(s,t) = \mathbf{d}(t,s)$. Agora, dados $s, t, r \in \Sigma_2^+$, temos que

$$|s_i - r_i| \leqslant |s_i - t_i| + |t_i - r_i|$$

para todo $i \geqslant 0$. Concluímos que

$$\mathbf{d}(s,r) \leqslant \mathbf{d}(s,t) + \mathbf{d}(t,r).$$

Portanto, $(\Sigma_2^+, \mathbf{d})$ é um espaço métrico.

Proposição 1.2.2. *Sejam $s, t \in \Sigma_2^+$ tais que $s_i = t_i$ para $i \leqslant n$. Então, $\mathbf{d}(s,t) \leqslant 1/2^n$. Reciprocamente, se $\mathbf{d}(s,t) \leqslant 1/2^n$, então $s_i = t_i$ para $i \leqslant n$.*

Demonstração. Se $s_i = t_i$, para $i \leqslant n$, então

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(s,t) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{|s_i - s_i|}{2^i} + \sum_{i \geqslant n+1} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \\ &\leqslant \sum_{i \geqslant n+1} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

Reciprocamente, se $s_j \neq t_j$ para algum $j \leqslant n$, temos que

$$\mathbf{d}(s,t) \geqslant \frac{1}{2^j} \geqslant \frac{1}{2^n}.$$

□

Vamos definir o shift em Σ_2^+. O *shift* ou *deslocamento* é a função $\sigma : \Sigma_2^+ \to \Sigma_2^+$ dada por $\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$. A função σ é contínua em Σ_2^+ com a topologia induzida por $\mathbf{d}$. De fato, sejam dados $\varepsilon > 0$ e $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$. Tomemos n tal que $1/2^n < \varepsilon$. Seja $\delta = 1/2^{n+1}$. Se $t = (t_0 t_1 t_2 \dots)$ satisfaz $\mathbf{d}(s,t) < \delta$, então $s_i = t_i$ para $i \leqslant n+1$. Logo, a i-ésima coordenada de $\sigma(s)$ e de $\sigma(t)$ são iguais para $i \leqslant n$. Portanto, $\mathbf{d}(\sigma(s), \sigma(t)) \leqslant 1/2^n < \varepsilon$.

Teorema 1.2.3 (Birkhoff). *Sejam $f : X \to X$ uma função mensurável e μ uma probabilidade invariante por f. Dada qualquer função integrável $\varphi : X \to \mathbb{R}$, o limite*

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\varphi \circ f^j)(x) \tag{1.2}$$

existe em μ-quase todo ponto $x \in X$. Além disso, a função $\tilde{\varphi}$ definida desta forma é integrável e satisfaz

$$\int_{x \in X} \tilde{\varphi}(x)\, d\mu = \int_{x \in X} \varphi(x)\, d\mu.$$

Demonstração. Ver o Teorema 3.2.3 de [OV]. □

Teorema 1.2.4. *Sejam X um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ uma função contínua. Então existe um conjunto mensurável $G \subseteq X$ com $\mu(G) = 1$ tal que*

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\varphi \circ f^j)(x) \to \tilde{\varphi}(x) \tag{1.3}$$

para todo $x \in G$ e toda função contínua $\varphi : X \to \mathbb{R}$.

Demonstração. Ver o Teorema 3.2.6 de [OV]. □

Capítulo 2

Formalismo Ergódico

O comportamento assintótico da órbita positiva de um ponto $x \in X$ em relação a $f : X \to X$ é complexo e fortemente dependente de x. Para entendermos o comportamento da órbita de x, estudamos o ω-limite de x, denotado por $\omega_f(x)$, que é o conjunto dos pontos de acumulação da sequência $\{f^n(x)\}_{n\geqslant 0}$. A existência de um atrator $A \subseteq X$ pode simplificar o estudo dos ω-limites, porque uma grande quantidade de pontos $x \in X$ é atraída para esse atrator e, em muitos casos, $\omega_f(x) = A$ para a maioria dos pontos atraídos. Dizemos que uma "grande quantidade" de pontos pertence à bacia de atração de A, representada por $\beta_f(A)$, se $\beta_f(A)$ não é um conjunto magro ou um conjunto de medida nula. Aqui, focaremos nos atratores topológicos, ou seja, quando $\beta_f(A)$ não é um conjunto magro. Isto significa que podemos considerar um contexto mais geral do que o de atratores métricos ($\beta_f(A)$ tem medida de Lebesgue positiva), pois não estaremos restritos a espaços de dimensão finita.

Um atrator métrico tem todas as ferramentas da Teoria Ergódica para estudar o comportamento estatístico dos pontos da bacia de atração dele. Porém, em geral, pontos genéricos da bacia de atração de um atrator topológico têm comportamento histórico, ou seja, não é esperado vermos a convergência da média de Birkhoff de potenciais contínuos destes pontos. Foi introduzido em [Pi1], e o estudaremos neste trabalho, o conceito de ergodicidade de Baire com dois objetivos: (1) estudar a existência e finitude de atratores topológicos e (2) estudar as propriedades estatísticas de pontos genéricos com comportamento histórico.

Enfatizando novamente a importância de atratores, foi conjecturado por Palis em 1995 (ver [Pa00, Pa05]) que em uma variedade suave compacta, existe um conjunto denso D de dinâmicas diferenciáveis tal que qual quer elemento de D tem uma quantidade finita de atratores métricos cuja união das bacias de atração tem probabilidade total na variedade supracitada. Essa conjectura, conhecida como a "Conjectura Global de Palis", foi construída de tal maneira que, se for verdadeira, podemos nos concentrar na descrição das propriedades desses atratores e as bacias de atração deles para entendermos todo o sistema. Num espaço de dimensão finita, observamos uma conexão forte entre atratores métricos e topológicos. Por isto, o problema da existência e finitude de atratores topológicos é relacionada à conjectura de Palis.

2.1 Ergodicidade de Baire

Nesta seção, X representa um espaço topológico.

Definição 2.1.1. Dizemos que $U \subseteq X$ é um *conjunto magro em* X se existe uma família $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos fechados em X com interior vazio tal que $U \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Um conjunto que não é magro em X é um *conjunto gordo em* X.

Se $U \subseteq X$ é um conjunto aberto em X, então ∂U é um conjunto magro, pois ∂U é um conjunto fechado em X com interior vazio. Como U é aberto, $X \setminus U$ é fechado. logo a fronteira de todo conjunto fechado também é um conjunto magro, pois $\partial V = \partial(X \setminus V)$ para todo $V \subseteq X$.

Definição 2.1.2. Seja $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de conjuntos abertos e densos em X. Dizemos que $U \subseteq X$ é um *conjunto residual em* X, se $U \supseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Se $U \subseteq X$ é um conjunto magro, então existe uma família $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos fechados em X com interior vazio tal que $U \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Consideremos a família $\{X \setminus F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, $X \setminus F_m$ é aberto e denso em X, pois não existe $V \subseteq X$ aberto não vazio em X tal que $V \subseteq F_m$, já que $\operatorname{int}(F_m) = \emptyset$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Logo, todo todo aberto não vazio intersecta $X \setminus F_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Como $X \setminus U \supseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X \setminus F_n$, concluímos que $X \setminus U$ é um conjunto residual. Portanto, o complementar de um conjunto magro contém um conjunto residual. Analogamente, prova-se que o complementar de um conjunto residual é um conjunto magro.

Definição 2.1.3. Dizemos que X é um *espaço de Baire* se dada uma família $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos abertos densos em X, temos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ é denso em X.

Sejam $U, V \subseteq X$. Escrevemos $U \sim V$ se $U \triangle V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$ é magro em X. A relação $\sim$ é de equivalência em X. De fato, $\sim$ é reflexiva, pois $U \triangle U = \emptyset$ é um conjunto magro em X, logo $U \sim U$. Como a diferença simétrica é uma operação comutativa, $\sim$ é simétrica. Seja $W \subseteq X$ tal que $U \sim W$ e $W \sim V$. Temos que $U \setminus V \subseteq (U \setminus W) \cup (W \setminus V)$ e $V \setminus U \subseteq (V \setminus W) \cup (W \setminus U)$. De fato, se $x \in U \setminus V$, então $x \in U$ e $x \notin V$. Agora, se $x \notin W$, provamos o que queríamos; então, suponhamos que $x \in W$. Logo, $x \in W \setminus V$. Concluímos que em ambos os casos $x \in (U \setminus W) \cup (W \setminus V)$. Portanto, $U \setminus V \subseteq (U \setminus W) \cup (W \setminus V)$.

Similarmente, prova-se que $V \setminus U \subseteq (V \setminus W) \cup (W \setminus U)$. Observamos que $U \setminus W$, $W \setminus V$, $V \setminus W$ e $W \setminus U$ são conjuntos magros, porque são subconjuntos de $U \triangle W$ e $W \triangle V$. Como $U \triangle V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$ e provamos que $U \setminus V$ e $V \setminus U$ são subconjuntos de conjuntos magros, temos que $U \sim V$, ou seja, $\sim$ é transitiva.

Definição 2.1.4. Dizemos que $V \subseteq X$ tem a *propriedade de Baire* se existe $U \subseteq X$ aberto em X tal que $U \sim V$.

Proposição 2.1.5 (Proposição 8.22 na página 47 de [Ke])**.** *A família de todos os subconjuntos de X que têm a propriedade de Baire é uma σ-álgebra em X. Além disso, esta é a menor σ-álgebra contendo todos os conjuntos abertos e todos os conjuntos magros em X. A esta σ-álgebra damos o nome de σ-álgebra de Baire.*

Demonstração. Seja $\mathcal{U}$ a classe de todos os subconjuntos de X com a propriedade de Baire. Temos que $\emptyset \in \mathcal{U}$, pois $\emptyset$ é um conjunto aberto e $\emptyset \triangle \emptyset = \emptyset$ é um conjunto magro.

Observamos que se $U \subseteq X$ é um conjunto aberto em X, então $\overline{U} \setminus U$ é um fechado de interior vazio, logo, magro. Analogamente, se $F \subseteq X$ é fechado, então $F \setminus \operatorname{int}(F)$ é fechado de interior vazio, logo, magro. Concluímos que $\overline{U}, F \in \mathcal{U}$, pois U e $\operatorname{int}(F)$ são abertos e $\overline{U} \triangle U = \overline{U} \setminus U$ e $F \triangle \operatorname{int}(F) = F \setminus \operatorname{int}(F)$ são magros.

Seja $V \in \mathcal{U}$. Então, existe $U \subseteq X$ aberto em X tal que $V \triangle U$ é magro em X. Observamos que

$$\begin{aligned}
(X \setminus V) \triangle (X \setminus U) &= [(X \setminus V) \setminus (X \setminus U)] \cup [(X \setminus U) \setminus (X \setminus V)] \\
&= [(X \setminus V) \cap U] \cup [(X \setminus U) \cap V] \\
&= (U \setminus V) \cup (V \setminus U) \\
&= V \triangle U,
\end{aligned}$$

que é um conjunto magro em X. Ainda, $X \setminus U \in \mathcal{U}$, porque é um conjunto fechado. Logo, pela transitividade de $\sim$, $X \setminus V \in \mathcal{U}$.

Seja $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma família em $\mathcal{U}$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe U_n aberto em X tal que $V_n \triangle U_n$ é magro em X. Logo, o conjunto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (V_n \triangle U_n)$ é magro em X. Temos que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ é aberto, pois é união de abertos. Ainda,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \triangle \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (V_n \triangle U_n).$$

Portanto, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \in \mathcal{U}$. Consequentemente, $\mathcal{U}$ é uma σ-álgebra em X.

Seja $\mathcal{V}$ uma σ-álgebra que contém os subconjuntos abertos e os magros de X. Seja $U \in \mathcal{U}$. Então, existe $A \subseteq X$ aberto tal que $M = A \triangle U$ é magro em X. Logo, $M \in \mathcal{V}$. Como $U = M \triangle A$, então $U \in \mathcal{V}$, pois $\mathcal{V}$ é uma σ-álgebra. Portanto, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, ou seja, $\mathcal{U}$ é a menor σ-álgebra que contém subconjuntos abertos e magros de X. $\square$

Observamos que a σ-álgebra de Baire, por conter todos os conjuntos abertos em X, contém a σ-álgebra de Borel em X, já que esta é a menor σ-álgebra que contém todos os abertos de X.

Definição 2.1.6. Dizemos que uma função $f : X \to X$ é *não singular* se a imagem inversa $f^{-1}(U)$ de todo subconjunto $U \subseteq X$ magro em X é um conjunto magro em X.

Observamos que se $U \subseteq X$ é gordo em X e $f : X \to X$ é não singular, então $f(U)$ é gordo em X. De fato, se $f(U)$ fosse magro em X, $f^{-1}(f(U))$ seria magro em X, pois f é não singular. Isto é uma contradição, porque $U \subseteq f^{-1}(f(U))$ e U é gordo em X. Assim, $f(U)$ é gordo em X.

Definição 2.1.7. Seja $f : X \to X$ uma função. Dizemos que $V \subseteq X$ é *f-invariante* se $f^{-1}(V) = V$. Dizemos que V é *quase f-invariante* se $f^{-1}(V) \triangle V$ é magro em X. Quando não houver perigo de ambiguidade, diremos apenas *invariante* e *quase invariante* respectivamente.

Seja $f : X \to X$ uma função. Observamos que se $A \subseteq f(X)$ é f-invariante, então $f(A) = A$. De fato, temos que

$$f(A) = f(f^{-1}(A)) \subseteq A.$$

Suponhamos que $A \not\subseteq f(A)$. Então, existe $x \in A$ tal que $x \notin f(A)$. Observamos que $f^{-1}(\{x\}) \subseteq f^{-1}(A) = A$. Como $f(f^{-1}(\{x\})) \subseteq \{x\}$, temos que $\{x\} \subseteq f(A)$, ou seja, $x \in f(A)$, o que é uma contradição! Portanto, $A = f(A)$.

Definição 2.1.8. Dizemos que uma função $f : X \to X$ é *topologicamente ergódica*, se todo conjunto invariante é magro ou residual.

Um exemplo simples de uma função topologicamente ergódica é $f : X \to X$, com $X = \{p_1, \ldots, p_n\}$ munido com a topologia discreta, dada por $f(p_j) = p_{j+1}$, com $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, e $f(p_n) = p_1$. De fato, $\emptyset$ e X são os únicos conjuntos invariantes, e estes são magro e residual em X respectivamente.

Proposição 2.1.9. *Se X é um espaço métrico completo separável sem pontos isolados, então X não admite uma função topologicamente ergódica não singular.*

Demonstração. Seja $f : X \to X$ uma função não singular. Dado $x \in X$, definimos a *órbita total de x* como

$$\mathcal{O}_f(x) = \{y \in X : f^n(y) = f^m(x) \text{ para alguns } n, m \geqslant 0\}.$$

Seja $\mathcal{U}$ a coleção de todas as órbitas totais dos pontos de X. Usando o Axioma da Escolha, selecionamos, para cada $O \in \mathcal{U}$, um único $x_O \in O$. Seja $A = \{x_O : O \in \mathcal{U}\}$; seja $A_0 = \bigcup_{j \geqslant 0} f^j(A)$. Como $X = \bigcup_{n \geqslant 0} f^{-n}(A_0)$ e f é não singular, A_0 é um conjunto gordo. Logo, existe $m \geqslant 0$ tal que $f^m(A)$ é gordo.

Seja

$$X_0 = \{x \in X : B_r(x) \cap f^m(A) \text{ não é um conjunto magro para todo } r > 0\}.$$

Como X é separável, X_0 é não vazio. De fato, se $X_0 = \emptyset$, para cada $x \in X$, existiria $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) \cap f^m(A)$ é um conjunto magro. Tomando uma subcobertura enumerável $\{B_{r_{x_n}}(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\{B_{r_x}(x)\}_{x \in X}$, concluiríamos que $f^m(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}(f^m(A) \cap B_{r_{x_n}}(x_n))$ é magro, o que é uma contradição! Fixemos $p \in X_0$. Por X não ter pontos isolados, $f^m(A) \setminus \{p\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}(f^m(A) \setminus B_{1/n}(p))$ não é um conjunto magro em X. Então, existe $r > 0$ tal que $f^m(A) \setminus B_r(p)$ não é magro em X. Sejam

$$P = \bigcup_{n \geqslant 0} f^{-n}\left(\bigcup_{j \geqslant 0} f^j(B_r(p) \cap f^m(A))\right) \quad \text{e} \quad Q = \bigcup_{n \geqslant 0} f^{-n}\left(\bigcup_{j \geqslant 0} f^j(f^m(A) \setminus B_r(p))\right).$$

Como P e Q são conjuntos gordos f-invariantes e $P \cap Q = \emptyset$, concluímos que f não é topologicamente ergódica. $\square$

Definição 2.1.10. Sejam X um espaço de Baire e $\mathscr{A}$ uma σ-álgebra em X cujos elementos possuem a propriedade de Baire. Dizemos que uma função $\mathscr{A}$-mensurável $f : X \to X$ é *Baire ergódica* se todo conjunto invariante $U \in \mathscr{A}$ é magro ou residual em X.

Definição 2.1.11. Seja $f : X \to X$ uma função contínua. Dizemos que f é *transitiva* se $\bigcup_{j \geqslant 0} f^j(U) \cap V \neq \emptyset$ para todos os abertos em X não vazios $U, V \subseteq X$.

A definição acima nos diz que se f é transitiva, então o conjunto $\bigcup_{j \geqslant 0} f^j(U)$ é denso em X para todo $U \subseteq X$ aberto não vazio.

Lema 2.1.12. *Sejam X um espaço de Baire e $\mathscr{B}$ a σ-álgebra de Borel em X. Se $f : X \to X$ é uma função não singular e transitiva, então f é Baire ergódica.*

Demonstração. Seja $V \in \mathscr{B}$ gordo e invariante. Seja $A \subseteq X$ aberto em X tal que $V \sim A$, ou seja, $V \triangle A$ é magro em X. O conjunto A existe porque todos os elementos de $\mathscr{B}$ têm a propriedade de Baire, conforme demonstrado na Proposição 2.1.5. Como $f^{-n}(V) \triangle f^{-n}(A) = f^{-n}(V \triangle A)$ e f é não singular, temos que $f^{-n}(V) \sim f^{-n}(A)$ para todo $n \geqslant 0$. Como f é contínua, $\bigcup_{j \geqslant 0} f^{-j}(A)$ é aberto em X. Além disso, dados $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, $B_\varepsilon(x) \cap \bigcup_{j \geqslant 0} f^{-j}(A) \neq \emptyset$, para algum $k \geqslant 0$, pois f é transitiva. Logo, $\bigcup_{j \geqslant 0} f^{-j}(A)$ é aberto e denso em X, ou seja, $\bigcup_{j \geqslant 0} f^{-j}(A) \sim X$. Como V é invariante, $V = \bigcup_{j \geqslant 0} f^{-j}(V)$; como $f^{-n}(V) \sim f^{-n}(A)$ para todo $n \geqslant 0$, $\bigcup_{j \geqslant 0} f^{-j}(V) \sim \bigcup_{j \geqslant 0} f^{-j}(A) \sim X$. Inferimos, pela transitividade de $\sim$, que V é residual em X. Portanto, f é Baire ergódica. $\square$

Definição 2.1.13. Dizemos que uma função $f : X \to X$ é *assintoticamente transitiva*, se

$$\left(\bigcup_{j\geqslant 0} f^j(A)\right) \cap \left(\bigcup_{j\geqslant 0} f^j(B)\right)$$

é um conjunto gordo para todos $A, B \subseteq X$ abertos não vazios em X.

Proposição 2.1.14. *Sejam X um espaço métrico de Baire, $\mathscr{B}$ a σ-álgebra de Borel em X e $f : X \to X$ uma função bimensurável*[1] *e bi-não singular*[2]*. Se f é não singular, então f é Baire ergódica se, e somente se, é assintoticamente transitiva.*

Demonstração. Suponhamos que f é Baire ergódica. Sejam A e B subconjuntos abertos em X não vazios. Como f é bimensurável, $\mathbb{A} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} f^j(A) \supseteq A$ e $\mathbb{B} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} f^j(B) \supseteq B$ são subconjuntos mensuráveis, gordos e invariantes de X. Então, pela Baire ergodicidade de f, $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, cada um, contêm um conjunto residual em X, logo, $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \bigcup_{j,k\in\mathbb{Z}}(f^j(A) \cap f^k(B))$ contém um conjunto residual em X. Concluímos que existem $j_0, k_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $f^{j_0}(A) \cap f^{k_0}(B)$ é gordo em X, pois do contrário, $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ seria uma união enumerável de conjuntos magros, logo magro, o que é uma contradição! Tomando $m \in \mathbb{Z}$ suficientemente grande para que $j_1 = m + j_0$ e $k_1 = m + k_0$ sejam inteiros positivos, temos, por f ser não singular, que $f^{j_1}(A) \cap f^{k_1}(B) \supseteq f^m(f^{j_0}(A) \cap f^{k_0}(B))$ é um conjunto gordo. Então, $\bigcup_{j\geqslant 0} f^j(A) \cap \bigcup_{j\geqslant 0} f^j(B)$ é um conjunto gordo, isto é, f é assintoticamente transitiva.

Agora, suponhamos que f é assintoticamente transitiva. Se f não fosse Baire ergódica, existiria $V \in \mathscr{B}$ gordo e invariante tal que $X \setminus V$ é gordo. Sejam $A, B \subseteq X$ conjuntos abertos tais que V é residual em A e $X \setminus V$ é residual em B. Observamos que f^j é bi-não singular para todo $j \in \mathbb{N}$, porque f é bi-não singular. Ainda, $f^j(A)$ é gordo para todo $j \geqslant 0$, pois A é aberto não vazio, logo, gordo. Além disto, V é residual em $f^j(A)$ para todo $j \geqslant 0$. De fato, como $A \triangle V$ é magro e $f^j(A) \setminus V = f^j(A) \setminus f^j(V) \subseteq f^j(A \setminus V) \subseteq f^j(A \triangle V)$, segue da bi-não singularidade de f^j que $f^j(A \triangle V)$ é magro, logo, $f^j(A) \setminus V$ é magro. Então, V é residual em $f^j(A)$. Analogamente, prova-se que $X \setminus V$ é residual em $f^j(B)$ para todo $j \geqslant 0$. Assim, como f é assintoticamente transitiva e bimensurável,

$$W = \left(\bigcup_{j\geqslant 0} f^j(A)\right) \cap \left(\bigcup_{j\geqslant 0} f^j(B)\right)$$

é um conjunto boreliano gordo em X, e V e $X \setminus V$ são residuais em W. Isso é uma contradição, pois implicaria $V \cap (X \setminus V) \neq \emptyset$. $\square$

Definição 2.1.15. Sejam X um espaço de Baire, $\mathscr{A}$ uma σ-álgebra de Baire em X, Y um espaço métrico completo separável e $\mathscr{B}$ a σ-álgebra de Borel em Y. Dizemos que $\varphi : X \to Y$ é um *potencial de Baire em X* se φ é uma função mensurável. A *imagem-suporte de φ* é:

[1] $f(U)$ e $f^{-1}(U)$ são mensuráveis, se $U \subseteq X$ é mensurável.
[2] $f(U)$ e $f^{-1}(U)$ são magros em X, se $U \subseteq X$ é magro em X.

$$\operatorname{Im}\operatorname{supp}\varphi = \{y \in Y : \varphi^{-1}(B_\varepsilon(y)) \text{ não é magro para todo } \varepsilon > 0\}.$$

Lema 2.1.16. *Sejam X um espaço de Baire, $\mathscr{A}$ uma σ-álgebra de Baire em X, Y um espaço métrico completo separável e $\mathscr{B}$ a σ-álgebra de Borel em Y. Se $\varphi : X \to Y$ é um potencial de Baire em X,* $\operatorname{Im}\operatorname{supp}\varphi \neq \emptyset$.

Demonstração. Se $\operatorname{Im}\operatorname{supp}\varphi = \emptyset$, para cada $y \in Y$ existiria $r_y > 0$ tal que $\varphi^{-1}(B_{r_y}(y))$ é magro. Como Y é um espaço métrico separável e $\bigcup_{y\in Y} B_{r_y}(y) = Y$, existe um conjunto enumerável $C = \{y_1, y_2, \dots\}$ tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{r_{y_n}}(y_n) = Y$. Então, $X = \varphi^{-1}(Y) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi^{-1}(B_{r_{y_n}}(y_n))$, mas isso é uma contradição, pois implica que X é um conjunto magro. □

Definição 2.1.17. Sejam Y um espaço topológico e $\mathscr{A}$ uma σ-álgebra de Baire em X. Dizemos que $\varphi : X \to Y$ é *quase invariante* (em relação a $f : X \to X$) se existe um conjunto residual invariante $U \in \mathscr{A}$ tal que $\varphi(x) = (\varphi \circ f)(x)$ para todo $x \in U$. Analogamente, φ é *quase constante* se existem $y_0 \in Y$ e um conjunto residual invariante $U \in \mathscr{A}$ tal que $\varphi(x) = y_0$ para todo $x \in U$.

Seja $A \subseteq X$. A *função característica de A* é $\chi_A : X \to \{0, 1\}$, dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}.$$

Proposição 2.1.18. *Sejam X um espaço de Baire e $\mathscr{A}$ uma σ-álgebra de Baire em X. Se $f : X \to X$ é mensurável, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) A função f é Baire ergódica.

(2) Todo potencial de Baire em X quase invariante é quase constante.

(3) A função

$$X \ni x \mapsto \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\varphi \circ f^j)(x)$$

é quase constante para toda função mensurável $\varphi : X \to \mathbb{R}$.

(4) A função

$$X \ni x \mapsto \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{0 \leqslant j < n : f^j(x) \in A\}$$

é quase constante para todo $A \in \mathscr{A}$.

Demonstração. (1) $\implies$ (2). Suponhamos que f é Baire ergódica, Y é um espaço métrico completo separável e $\varphi : X \to Y$ é uma função mensurável quase invariante. Pelo Lema 2.1.16, $\operatorname{Im}\operatorname{supp}\varphi \neq \emptyset$. Como φ é um potencial quase invariante, seja $U \in \mathscr{A}$

um conjunto f-invariante residual em X tal que $(\varphi \circ f)(x) = \varphi(x)$ para todo $x \in U$. Fixemos $p \in \operatorname{Im}\operatorname{supp}\varphi$. Sejam $B_n = \varphi^{-1}(B_{1/n}(p))$, $\triangle_n = \varphi^{-1}(Y \setminus B_{1/n}(p))$, $B'_n = B_n \cap U$ e $\triangle'_n = \triangle_n \cap U$ com $n \in \mathbb{N}$. Observamos que B'_n e $\triangle'_n$ são f-invariantes e $B'_n \cap \triangle'_n = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato,

$$\begin{aligned} f^{-1}(B'_n) &= f^{-1}(B_n \cap U) \\ &= f^{-1}(\varphi^{-1}(B_{1/n}(p)) \cap U) \\ &= \varphi^{-1}(B_{1/n}(p)) \cap U \qquad \text{(pois } \varphi \text{ é um potencial quase invariante)} \\ &= B_n \cap U = B'_n \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Similarmente, prova-se que $\triangle'_n$ é f-invariante. Ainda, B'_n e $\triangle'_n$ são complementares, logo, $B'_n \cap \triangle'_n = \emptyset$. Como $p \in \operatorname{Im}\operatorname{supp}\varphi$, B'_n é um conjunto gordo, então, pela Baire ergodicidade de f, temos que $\triangle'_n$ é um conjunto magro para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que $U \setminus \varphi^{-1}(p) = U \cap \varphi^{-1}(Y \setminus \{p\}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \triangle'_n$ é um conjunto magro. Isto mostra que $U \cap \varphi^{-1}(p)$ é residual em X. Logo, $\varphi(x) = p$ em um subconjunto residual de $x \in X$.

(2) $\implies$ (3). Seja $\psi : X \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$\psi(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\varphi \circ f^j)(x).$$

A mensurabilidade de ψ vem da mensurabilidade de φ. Então, (3) segue de (2) e de $(\psi \circ f)(x) = \psi(x)$ para todo $x \in X$. De fato, se $x \in X$,

$$\begin{aligned} (\psi \circ f)(x) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\varphi \circ f^j)(f(x)) \\ &= \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}(\varphi \circ f^j)(x)\right) - \frac{1}{n}\varphi(x)\right) \\ &= \psi(x). \qquad \text{(porque } (n+1)/n \to 1 \text{ e } 1/n \to 0 \text{ quando } n \to \infty) \end{aligned}$$

(3) $\implies$ (4). Observamos que χ_A é mensurável para todo $A \in \mathscr{A}$ e

$$\frac{1}{n}\#\{0 \leqslant j < n : f^j(x) \in A\} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\chi_A \circ f^j)(x).$$

Logo, (4) é uma consequência direta de (3).

(4) $\implies$ (1). Sejam $A \in \mathscr{A}$ tal que $f^{-1}(A) = A$ e

$$\psi(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\#\{0 \leqslant j < n : f^j(x) \in A\}.$$

Como A é f-invariante,

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}.$$

Segue do item (4) que existe um conjunto $U \in \mathscr{A}$ residual em X tal que $\psi(x) = 1$ para todo $x \in U$ ou $\psi(x) = 0$ para todo $x \in U$. Do primeiro caso, inferimos que $U \subseteq A$, logo A é residual em X. E do segundo, concluímos que $U \subseteq X \setminus A$, portanto, A é magro em X. Consequentemente, f é Baire ergódica. $\square$

Lema 2.1.19. *Sejam X e Y espaços de Baire e $f : Y \to X$ uma função contínua. Se f é não singular, então $f(A) \subseteq \overline{\operatorname{int}(f(A))}$ para todo aberto $A \subseteq Y$ em Y.*

Demonstração. Sejam $A \subseteq Y$ um conjunto aberto em Y e $a \in A$. Afirmamos que

$$f(\overline{B_\delta(a)}) \subseteq \overline{\operatorname{int}(f(\overline{B_\delta(a)}))}$$

para todo $\delta > 0$. De fato, caso contrário, existiria $y \in f(\overline{B_\delta(a)})$ tal que $y \notin \overline{\operatorname{int}(f(\overline{B_\delta(a)}))}$. Logo, existiria $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(y) \cap \operatorname{int}(f(\overline{B_\delta(a)})) = \emptyset$. Segue que

$$B_\varepsilon(y) \cap f(\overline{B_\delta(a)}) \subseteq \partial(f(\overline{B_\delta(a)})).$$

Isto implica que $B_\varepsilon(y) \cap f(\overline{B_\delta(a)})$ é um conjunto magro, pois fronteira de conjunto fechado é conjunto magro. Como f é não singular, temos que $f^{-1}(B_\varepsilon(y) \cap f(\overline{B_\delta(a)}))$ também é magro em X. Porém, isso é uma contradição, pois a continuidade de f implica que $f^{-1}(B_\varepsilon(y)) \cap B_\delta(a)$ é um conjunto aberto não vazio contido em $f^{-1}(B_\varepsilon(y) \cap f(\overline{B_\delta(a)}))$.

Tomando $r > 0$ tal que $B_r(a) \subseteq A$, segue que

$$\begin{aligned} f(a) \in f(B_r(a)) = f\left(\bigcup_{0<\delta<r} \overline{B_\delta(a)}\right) &= \bigcup_{0<\delta<r} f(\overline{B_\delta(a)}) \subseteq \\ &\subseteq \bigcup_{0<\delta<r} \overline{\operatorname{int}(f(\overline{B_\delta(a)}))} \subseteq \overline{\operatorname{int}(f(B_r(a)))} \subseteq \overline{\operatorname{int}(f(A))}, \end{aligned}$$

para todo $a \in A$. $\square$

2.2 Componentes Baire ergódicos

Para esta seção: sejam X um espaço de Baire, $\mathscr{A}$ uma σ-álgebra cujos elementos possuem a propriedade de Baire e $f : X \to X$ uma função mensurável.

Definição 2.2.1 (Componente Baire ergódico)**.** Dizemos que um conjunto f-invariante $U \subseteq X$ é um *componente Baire ergódico* se U é gordo e $f\big|_U$ é Baire ergódica.

Seja $\mathcal{I}(f) \subseteq \mathscr{A}$ a sub σ-álgebra([3]) (de $\mathscr{A}$) de todos os conjuntos f-invariantes mensuráveis. Dizemos que $\mathfrak{m} : \mathcal{I}(f) \to [0, \infty)$ é uma *f-função de Baire*, se $\mathfrak{m}(X) > 0$ e se $U, V \in \mathcal{I}(f)$ tais que $U \cap V$ é magro, então $\mathfrak{m}(U) + \mathfrak{m}(V) \leqslant \mathfrak{m}(U \cup V)$. Observamos que se $U, V \in \mathcal{I}(f)$ tais que $U \subseteq V$, então $\mathfrak{m}(V) = \mathfrak{m}(U \cup (V \setminus U)) \geqslant \mathfrak{m}(U) + \mathfrak{m}(V \setminus U)$. Logo, $\mathfrak{m}(U) \leqslant \mathfrak{m}(V)$.

[3]Dizemos que $\mathcal{I}(f)$ é uma sub σ-álgebra de $\mathscr{A}$ se $\mathcal{I}(f)$ é uma σ-álgebra em X e $\mathcal{I}(f) \subseteq \mathscr{A}$.

Proposição 2.2.2 (Critério para uma decomposição Baire ergódica finita)**.** *Se existem uma f-função de Baire $\mathfrak{m}$ e $\ell \in \mathbb{N}$ tais que $\mathfrak{m}(U) = 0$ ou $\mathfrak{m}(U) \geq \mathfrak{m}(X)/\ell$, para todo $U \in \mathcal{I}(f)$, então X pode ser decomposto, a menos de um conjunto magro, em no máximo ℓ componentes Baire ergódicos.*

Demonstração. Sejam $M \subseteq X$ um conjunto gordo invariante mensurável e $\mathcal{F}(M)$ a coleção dos conjuntos gordos invariantes mensuráveis contidos em M. Observamos que $\mathcal{F}(M) \neq \emptyset$, pois $M \in \mathcal{F}(M)$. Consideremos a inclusão, a menos de um conjunto magro, como uma ordem parcial em $\mathcal{F}(M)$. Ou seja, $A \leqslant A'$ se $A' \setminus A$ é magro. Afirmamos que todo subconjunto totalmente ordenado $\Gamma \subseteq \mathcal{F}(M)$ é finito. Em particular, Γ tem um limitante superior. Do contrário, existiria uma sequência infinita $\gamma_0 \supseteq \gamma_1 \supseteq \gamma_2 \supseteq \cdots$, com $\gamma_k \in \mathcal{F}(M)$, e $\Delta_k = \gamma_k \setminus \gamma_{k+1}$ gordo para todo $k \in \mathbb{N}$. Como γ_j seria invariante para todo $j \geqslant 0$, $f^{-1}(\Delta_j) = f^{-1}(\gamma_j \setminus \gamma_{j+1}) = f^{-1}(\gamma_j) \setminus f^{-1}(\gamma_{j+1}) = \gamma_j \setminus \gamma_{j+1} = \Delta_j$. Ou seja, Δ_j também seria um conjunto invariante. Logo, $\Delta_j \in \mathcal{F}(M)$. Então, por hipótese $\mathfrak{m}(\Delta_j) \geqslant \mathfrak{m}(X)/\ell$. Como $\Delta_i \cap \Delta_k \sim \emptyset$ se $i \neq k$, pela definição de $\mathfrak{m}$, teríamos que

$$\frac{j}{\ell}\mathfrak{m}(X) \leqslant \mathfrak{m}(\Delta_1) + \mathfrak{m}(\Delta_2) + \cdots + \mathfrak{m}(\Delta_j) \leqslant \mathfrak{m}\left(\bigcup_{i=1}^{j} \Delta_i\right) \leqslant \mathfrak{m}(X)$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Isto seria uma contradição!

Pelo Lema de Zorn([4]), existe um elemento maximal $U \in \mathcal{F}(M)$ e U é necessariamente um componente Baire ergódico, pois como U é elemento maximal em $\mathcal{F}(M)$, dado $V \subseteq U$ gordo invariante mensurável, $U \setminus V$ é magro, logo V é residual em U. Sejam $M_1 = X$ e U_1 um elemento maximal de $\mathcal{F}(M_1)$ dado pelo Lema de Zorn. Como $M_2 = X \setminus U_1$ é magro ou residual, porque é um conjunto invariante, podemos argumentar semelhantemente para obter um novo componente Baire ergódico $U_2 \subseteq M_2$. Prosseguindo indutivamente, podemos construir uma coleção de componentes Baire ergódicos $U_1, \ldots, U_i$ enquanto $X \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_i)$ for gordo. Todavia, como $\mathfrak{m}(U_j) \geqslant \mathfrak{m}(X)/\ell$ para todo $j \in \{1, \ldots, i\}$ e $U_j \cap U_k = \emptyset$ se $j \neq k$, esse processo tem de terminar em algum $k \leqslant \ell$. Logo, $X \sim U_1 \cup \cdots \cup U_k$, pois no fim do processo indutivo que descrevemos, $X \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_k)$ é um conjunto magro. □

2.3 Atratores topológicos

Por toda esta seção, exceto menção contrária, sejam (X, d) um espaço métrico compacto, $\mathscr{B}$ a σ-álgebra de Borel em X, X_0 um subconjunto aberto e denso em X e

[4] Se X é um conjunto não vazio parcialmente ordenado tal que todo subconjunto totalmente ordenado de X tem um limitante superior, então X tem um elemento maximal.

$f : X_0 \to X$ um homeomorfismo local. Seja 2^X o conjunto de todos os subconjuntos de X. Definimos $f^* : 2^X \to 2^X$ como

$$f^*(U) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } U \cap X_0 = \emptyset \\ f(U \cap X_0) & \text{se } U \cap X_0 \neq \emptyset \end{cases}.$$

Vamos apresentar um resultado útil sobre homeomorfismos locais: se M e N são espaços métricos e $g : M \to N$ é um homeomorfismo local, então g é uma função aberta e contínua. De fato: seja $U \subseteq M$ um aberto não vazio. Então, seja $x \in U$. Logo, $g(x) \in g(U)$. Como g é um homeomorfismo local, existe $V \subseteq M$ vizinhança aberta de x tal que $g\big|_V$ é um homeomorfismo sobre um subconjunto aberto de N. Temos que $U \cap V$ é uma vizinhança aberta de x e como $U \cap V \subseteq V$, $g(U \cap V)$ é um aberto que contém $g(x)$ e $g(U \cap V) \subseteq g(U)$. Portanto, $g(U)$ é aberto e g é aberta. Vamos mostrar que g é contínua. Seja $U \subseteq N$ um conjunto aberto não vazio. Seja $x \in g^{-1}(U)$. Visto que g é um homeomorfismo local, existe $V \subseteq M$ vizinhança aberta de x tal que $g\big|_V$ é um homeomorfismo sobre um subconjunto aberto de N. Seja $W \subseteq N$ esse subconjunto. Então, $W \cap U$ é um aberto que contém $g(x)$. Logo, $(g\big|_V)^{-1}(W \cap U)$ é um aberto em V que contém x. Como V é aberto, $(g\big|_V)^{-1}(W \cap U)$ é aberto em M. Além disso, $(g\big|_V)^{-1}(W \cap U) \subseteq g^{-1}(U)$. Portanto, g é contínua.

Como f é uma função aberta, $f^{-1}(D)$ é denso em X se $D \subseteq X$ é denso em X. Logo, se $U \subseteq X$ é residual em X, $f^{-1}(U)$ é residual em X. Além disso, visto que $X \setminus U$ é magro em X, $f^{-1}(X \setminus U) = X_0 \setminus f^{-1}(U)$ é magro em X. Portanto, f é não singular.

Definição 2.3.1. Seja $U \subseteq X$. Dizemos que U é *positivamente invariante* se $f^*(U) \subseteq U$, que U é *invariante* se $f^{-1}(U) = U$ e que U é *quase invariante* se $f^{-1}(U) \sim U$. Sejam $\mathcal{O}_f^+(U) = \bigcup_{n\geqslant 0} f^{*n}(U)$ a órbita positiva de U e $\mathcal{O}_f^-(U) = \bigcup_{n\geqslant 0} f^{-n}(U)$ a órbita negativa de $U \subseteq X$. O *ω-limite de $x \in X$*, representado por $\omega_f(x)$, é o conjunto dos pontos de acumulação da órbita positiva de x. Ou seja,

$$\omega_f(x) = \bigcap_{n\geqslant 0} \overline{\mathcal{O}_f^+(f^{*n}(x))}.$$

Equivalentemente, $y \in \omega_f(x)$ se, e somente se, $f^{n_k}(x) \to y$ para alguma sequência $n_k \to \infty$. Observamos que $\omega_f(x) = \omega_f(f(x))$ para todo $x \in X_0$. O *α-limite de $x \in X$*, representado por $\alpha_f(x)$, é o conjunto dos pontos de acumulação da órbita negativa de x. Isto é,

$$\alpha_f(x) = \bigcap_{n\geqslant 0} \overline{\mathcal{O}_f^-(f^{-n}(x))}.$$

Equivalentemente, $y \in \alpha_f(x)$ se, e somente se, existe uma sequência $y_k \in f^{-n_k}(x)$, com $n_k \to \infty$, tal que $y_k \to y$. Observamos que $\alpha_f(x) = \alpha_f(f(x))$ para todo $x \in X_0$. Seja $A \subseteq X$ um conjunto compacto. *A bacia de atração de* A é o conjunto

$$\beta_f(A) = \{x \in X : \emptyset \neq \omega_f(x) \subseteq A\}.$$

Definição 2.3.2 (Atratores topológicos)**.** Dizemos que um conjunto compacto $A \subseteq X$ é um *atrator topológico* se $\beta_f(A)$ e $\beta_f(A) \setminus \beta_f(A')$ são conjuntos gordos para todo conjunto compacto não vazio $A' \subsetneq A$.

Lema 2.3.3. *Se $U \subseteq X$ é um conjunto mensurável gordo quase invariante, então*

$$U' = \bigcup_{n \geqslant 0} f^{-n}\left(\bigcap_{j \geqslant 0} f^{-j}(U)\right)$$

é um conjunto mensurável gordo invariante e $U' \sim U$.

Demonstração. Seja $U_0 = \bigcap_{j \geqslant 0} f^{-j}(U)$. Temos que $f^{-1}(U)$ é gordo, pois U é gordo quase invariante. Observamos que

$$f^{-2}(U) \triangle f^{-1}(U) = f^{-1}(f^{-1}(U) \triangle U).$$

Como U é quase invariante, $f^{-1}(U) \triangle U$ é magro, e como f é não singular, $f^{-2}(U) \triangle f^{-1}(U)$ é magro. Continuando com esse processo, isto é, verificar se $f^{-k}(U) \triangle U$ é magro ou gordo para todo $k \in \mathbb{N}$, concluímos que $f^{-k}(U) \sim U$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, U_0 é um conjunto gordo e mensurável. Temos que

$$f^{-1}(U_0) = f^{-1}\left(\bigcap_{j \geqslant 0} f^{-j}(U)\right) = \bigcap_{j \geqslant 1} f^{-j}(U) \supseteq U_0.$$

Então, $U' = \bigcup_{n \geqslant 0} f^{-n}(U_0)$ é um conjunto gordo mensurável e, como $U_0 \cup f^{-1}(U_0) = f^{-1}(U_0)$,

$$f^{-1}(U') = f^{-1}\left(\bigcup_{n \geqslant 0} f^{-n}(U_0)\right) = \bigcup_{n \geqslant 1} f^{-n}(U_0) = \bigcup_{n \geqslant 0} f^{-n}(U_0) = U'.$$

Logo, U' é invariante. Como

$$U_0 \triangle U = \left(\bigcap_{j \geqslant 0} f^{-j}(U)\right) \triangle U \subseteq \bigcap_{j \geqslant 0} f^{-j}(U) \triangle U \subseteq f^{-1}(U) \triangle U,$$

temos que $U_0 \triangle U$ é um conjunto magro. Como f é não singular, $f^{-n}(f^{-1}(U) \triangle U)$ é um conjunto magro para todo $n \geqslant 0$. Além disso, como $f^{-n}(U) \triangle f^{-n}(U_0) = f^{-n}(U \triangle U_0)$ é magro, $f^{-n}(U_0) \sim f^{-n}(U) \sim U$ para todo $n \geqslant 0$. Consequentemente,

$$U' \triangle U \subseteq \bigcup_{n \geqslant 0} (f^{-n}(U_0) \triangle U)$$

é magro, ou seja $U \sim U'$. $\square$

Corolário 2.3.4. *A função f é Baire ergódica se, e somente se, todo subconjunto de X mensurável quase invariante é magro ou residual.*

Demonstração. Todo conjunto invariante é quase invariante. Então, precisamos apenas mostrar que se f é Baire ergódica, então todo conjunto mensurável quase invariante é magro ou residual. Suponhamos que $U \sim f^{-1}(U)$ é um conjunto gordo mensurável. Pelo Lema 2.3.3, U' é um conjunto mensurável gordo invariante e $U' \sim U$. Então, pela Baire ergodicidade de f, $U' \sim X$, logo $U \sim X$. Portanto, U é residual. □

Vamos caracterizar, para funções contínuas não singulares, a Baire ergodicidade em termos de conjuntos abertos ou compactos invariantes.

Corolário 2.3.5. *Sejam X um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ uma função contínua não singular. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) A função f é Baire ergódica.

(2) Todo conjunto aberto quase invariante não vazio é denso em X.

(3) O único conjunto compacto quase invariante de interior não vazio é X.

Demonstração. (1) $\implies$ (2). Seja $V \subseteq X$ um conjunto aberto quase invariante não vazio. Como f é Baire ergódica e V é aberto, V é residual em X. Logo V é denso em X.

(2) $\implies$ (3). Seja $K \subseteq X$ compacto quase invariante de interior não vazio. Como $\operatorname{int}(K) \neq \emptyset$, existe $U \subseteq X$ aberto não vazio tal que $U \sim K$. Temos que $U \sim f^{-1}(U)$, pois K é quase invariante, f é não singular e $U \sim K$. Assim, U é um conjunto aberto quase invariante não vazio. Por hipótese, U é denso em X, e visto que U é aberto, U é residual em X. Logo, $K \sim X$. Observamos que se $K \neq X$, então $X \setminus K$ seria um aberto não vazio magro. Segue, então que $K = X$.

(3) $\implies$ (2). Seja $A \subsetneq X$ um subconjunto aberto quase invariante não vazio. Então, $X \setminus A$ é um subconjunto fechado invariante não vazio. Logo, $X \setminus A$ é compacto. Como $X \setminus A \neq X$, $X \setminus A$ tem interior vazio. Portanto, A é denso em X.

(3) $\implies$ (1). Seja $U \subseteq X$ um conjunto gordo mensurável. Seja $A \subseteq X$ aberto tal que $A \sim U$. Já que f é não singular e $A \sim U$, A é um conjunto aberto não vazio quase invariante. Segue de (2), que é equivalente à hipótese, que A é denso em X. Consequentemente, $U \sim A \sim X$. Portanto, f é Baire ergódica. □

Definição 2.3.6 (Componente Baire ergódico para função não singular)**.** Dizemos que um conjunto mensurável $U \subseteq X$ é um *componente Baire ergódico de f* se U é um conjunto gordo quase invariante tal que $f\big|_{U'}$ é Baire ergódica, com U' dado pelo Lema 2.3.3.

Definição 2.3.7. Seja $U \subseteq X$ não vazio. A *distância de $x \in X$ a U* é dada por

$$d(x, U) = \inf \{d(x, y) : y \in U\}.$$

Definimos a *bola aberta de centro U e raio r* como

$$B_r(U) = \bigcup_{x \in U} B_r(x) = \{x \in X : d(x, U) < r\}.$$

Dizemos que um espaço métrico X (não necessariamente compacto) é *totalmente limitado* se para todo $\varepsilon > 0$, existe um conjunto finito $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ tal que $\bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(s_i) \supseteq X$.

Proposição 2.3.8. *Um espaço métrico é compacto se, e somente se, é completo e totalmente limitado.*

Demonstração. Ver o Capítulo 7 de [Mu]. □

Proposição 2.3.9. *Seja $\mathbb{K}(X)$ o conjunto dos subconjuntos compactos não vazios de X. A função $d_H : \mathbb{K}(X) \times \mathbb{K}(X) \to \mathbb{R}$, dada por*

$$d_H(U, V) = \inf \{r > 0 : B_r(U) \supseteq V \text{ e } B_r(V) \supseteq U\},$$

é uma métrica em $\mathbb{K}(X)$. Além disso, $(\mathbb{K}(X), d_H)$ é um espaço métrico compacto, porque X é um espaço métrico compacto.

Demonstração. Sejam $U, V, W \in \mathbb{K}(X)$.

(d1) Temos que $U \subseteq B_r(U)$ para todo $r > 0$. Logo, $d_H(U, U) = 0$.

(d2) Suponhamos que $d_H(U, V) = 0$. Então, para todo $r > 0$, $U \subseteq B_r(V)$ e $V \subseteq B_r(U)$. Assim, $U \subseteq \bigcap_{r>0} B_r(V) = \overline{V}$ e $V \subseteq \bigcap_{r>0} B_r(U) = \overline{U}$. Logo, $U \subseteq \overline{V}$ e $V \subseteq \overline{U}$. Como U e V são subconjuntos compactos de um espaço métrico, U e V são fechados. Concluímos que $U = V$.

(d3) Observamos que

$$\begin{aligned} d_H(U, V) &= \inf \{r > 0 : B_r(U) \supseteq V \text{ e } B_r(V) \supseteq U\} \\ &= \inf \{r > 0 : B_r(V) \supseteq U \text{ e } B_r(U) \supseteq V\} \\ &= d_H(V, U). \end{aligned}$$

(d4) Sejam $r, s > 0$ tais que $U \subseteq B_r(V)$, $V \subseteq B_r(U)$, $V \subseteq B_s(W)$ e $W \subseteq B_s(V)$. Seja $x \in U$. Então, $x \in B_r(V)$. Logo, existe $y \in V$ tal que $d(x, y) < r$. Já que $y \in V \subseteq B_s(W)$, existe $z \in W$ tal que $d(y, z) < s$. Portanto,

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) < r + s.$$

Concluímos que $U \subseteq B_{r+s}(W)$. Analogamente, prova-se que $W \subseteq B_{r+s}(U)$. Logo([5]),

$$\{r > 0 : B_r(U) \supseteq V \text{ e } B_r(V) \supseteq U\} + \{s > 0 : B_s(V) \supseteq W \text{ e } B_s(W) \supseteq V\} \tag{2.1}$$
$$\subseteq \{t > 0 : B_t(U) \supseteq W \text{ e } B_t(W) \supseteq U\}. \tag{2.2}$$

Tomando o ínfimo em ambos os lados da expressão acima, temos

$$d_H(U,V) + d_H(V,W) \geqslant d_H(U,W).$$

Portanto, $(\mathbb{K}(X), d_H)$ é um espaço métrico. Vamos mostrar que $(\mathbb{K}(X), d_H)$ é completo. Seja $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}(X)$. Tomemos uma subsequência de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $d_H(A_n, A_{n+1}) < 1/2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $A \subseteq X$ o conjunto dos pontos $x \in X$ que são limites de sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em X tais que $x_i \in A_i$ e $d(x_i, x_{i+1}) < 1/2^i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Observamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X. Como X é um espaço métrico completo, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $x \in X$. Por definição, $x \in A$. Consequentemente, A é não vazio, logo $\overline{A} \in \mathbb{K}(X)$. Como $x_n \to x$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geqslant n_0$, então $d(x_n, x) < \varepsilon$. Logo, $d(x_n, \overline{A}) < \varepsilon$ para todo $n \geqslant n_0$. Ainda, $d(x, A_n) \leqslant \varepsilon$ para todo $n \geqslant n_0$. Portanto, $d_H(A_n, \overline{A}) < \varepsilon$ para todo $n \geqslant n_0$, isto é, $A_n \to \overline{A}$ em $(\mathbb{K}(X), d_H)$. Por conseguinte, $(\mathbb{K}(X), d_H)$ é completo.

Vamos mostrar que $(\mathbb{K}(X), d_H)$ é totalmente limitado. Dado $\varepsilon > 0$, seja $S = \{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq X$ um conjunto finito tal que $\bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(s_i) \supseteq X$. Seja $C = \{C_i\}$ a coleção dos subconjuntos não vazios de S. Observamos que os elementos de C são pontos de $\mathbb{K}(X)$. Sejam $K \in \mathbb{K}(X)$ e $M \subseteq S$ o conjunto dos s_j tais que $B_\varepsilon(s_j) \cap K \neq \emptyset$. Já que K é não vazio e as bolas $B_\varepsilon(s_j)$ cobrem X, M é um subconjunto não vazio de S, isto é, $M = C_k$ para algum $k \leqslant 2^n - 1$. Então, $B_\varepsilon(K) \supseteq M$, pois $d(a, M) < \varepsilon$ com $a \in K$. Além disto, $B_\varepsilon(M) \supseteq K$ por construção. Portanto, $d_H(K, M) \leqslant \varepsilon$, ou seja, $(\mathbb{K}(X), d_H)$ é totalmente limitado.

Provamos que $(\mathbb{K}(X), d_H)$ é um espaço métrico completo e totalmente limitado, logo é compacto pela Proposição 2.3.8. □

Chamamos a função d_H de *métrica de Hausdorff*. Poderíamos ter definido a função d_H em $2^X \setminus \{\emptyset\} \times 2^X \setminus \{\emptyset\}$ tomando valores em $[0, \infty)$. No entanto, d_H não seria uma métrica. De fato, se definíssemos $d_H : 2^{\mathbb{R}} \setminus \{\emptyset\} \times 2^{\mathbb{R}} \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{R}$, teríamos que $d_H(\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 0$, porém $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Definição 2.3.10. Dizemos que $x \in X$ satisfaz uma propriedade P *genericamente em um conjunto gordo* $U \subseteq X$ se o conjunto de todos os pontos de U que não satisfazem P é magro.

[5]Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ não vazios e limitados inferiormente. Definimos $A + B = \{a + b : a \in A \text{ e } b \in B\}$. Temos que $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.

Proposição 2.3.11 (O atrator topológico de um componente Baire ergódico)**.** *Se $U \subseteq X$ é um componente Baire ergódico de f, então existe um único atrator topológico $A \subseteq \overline{U}$ atraindo um subconjunto residual de U. Ademais, $\omega_f(x) = A$ genericamente em U.*

Demonstração. Seja $\mathbb{K}(\overline{U})$ o conjunto dos subconjuntos compactos não vazios de $\overline{U}$. Segue do Lema 2.3.3 que $U' \sim U$ é um conjunto mensurável gordo e f-invariante. Consideremos a função $\psi : U' \to \mathbb{K}(\overline{U})$ dada por $\psi(x) = \omega_f(x)$.

Afirmação 1. A função ψ é mensurável.

Demonstração. Seja $\psi_{n,m} : U' \to \mathbb{K}(\overline{U})$ dada por $\psi_{n,m}(x) = \{f^n(x), \dots, f^{n+m}(x)\}$. Já que f é contínua em $x_0 \in U'$, f^n é contínua em x_0 para todo $n \geqslant 0$. Logo, dado $\varepsilon_j > 0$, existe $\delta_j > 0$ tal que se $d(x, x_0) < \delta_j$, então $d(f^j(x), f^j(x_0)) < \varepsilon_j$, com $j \in \{n, \dots, n+m\}$. Sejam $\delta = \min \delta_j$ e $\varepsilon = \min \varepsilon_j$. Logo, se $d(x, x_0) < \delta$, então $B_{\varepsilon/2}(\psi_{n,m}(x_0)) \supseteq \psi_{n,m}(x)$ e $B_{\varepsilon/2}(\psi_{n,m}(x)) \supseteq \psi_{n,m}(x_0)$. Assim, $d_H(\psi_{n,m}(x), \psi_{n,m}(x_0)) < \varepsilon$, ou seja, $\psi_{n,m}$ é contínua em x_0. Como x_0 é arbitrário, $\psi_{n,m}$ é contínua em U' para todo $m \in \mathbb{N}$. Então, $\psi_{n,m}$ é uma sequência de funções contínuas em U'. Mostraremos que

$$\lim_{m \to \infty} \psi_{n,m}(x) = \overline{\mathcal{O}_f^+(f^n(x))}.$$

Sejam $x \in U'$ e $y \in \overline{\mathcal{O}_f^+(f^n(x))}$. Então, existe uma sequência $\{f^{m_k}(x)\}$ em $\mathcal{O}_f^+(f^n(x))$, com $m_k \geqslant n$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e $m_k \nearrow \infty$, convergindo para y, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geqslant k_0$, então $d(f^{m_k}(x), y) < \varepsilon$. Logo, $y \in B_\varepsilon(f^{m_k}(x))$ para algum $k \geqslant k_0$. Assim, $y \in B_\varepsilon(\psi_{n,m_k}(x))$. Logo, $B_\varepsilon(\psi_{n,m_k}(x)) \supseteq \overline{\mathcal{O}_f^+(f^n(x))}$ para todo $\varepsilon > 0$. Observamos que para qualquer $\varepsilon > 0$, temos $\psi_{n,m}(x) \subseteq B_\varepsilon(\overline{\mathcal{O}_f^+(f^n(x))})$, pois $\psi_{n,m}(x) \subseteq \overline{\mathcal{O}_f^+(f^n(x))}$. Logo, para todo $\varepsilon > 0$,

$$d_H(\psi_{n,m}(x), \overline{\mathcal{O}_f^+(f^n(x))}) < \varepsilon.$$

Segue que a função $\psi_n : U' \to \mathbb{K}(\overline{U})$ dada por dada por $\psi_n(x) = \overline{\mathcal{O}_f^+(f^n(x))}$ é uma função mensurável, porque a sequência $\{\psi_{n,m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ de funções mensuráveis converge pontualmente para ψ_n. Visto que $\omega_f(x) = \bigcap_{k \geqslant 0} \overline{\mathcal{O}_f^+(f^{*n_k}(x))}$, temos

$$\lim_{k \to \infty} \psi_{n_k}(x) = \omega_f(x) = \psi(x).$$

para todo $x \in U'$. Portanto, ψ é uma função mensurável. □

Como U' é um espaço de Baire, $f\big|_{U'}$ é uma função Baire ergódica não singular e $\psi \circ f\big|_{U'} = \psi$, isto é, ψ é um potencial de Baire em X, segue da Proposição 2.1.18 que ψ é quase constante. Então, existem um conjunto mensurável $U'' \subseteq U'$, $U'' \sim U$, e um conjunto compacto não vazio $A \in \mathbb{K}(\overline{U})$ tais que $\psi(x) = \omega_f(x) = A$ para todo $x \in U''$. □

Definição 2.3.12. Seja $\mathfrak{O}$ o conjunto de todos os subconjuntos abertos de X. Definimos a *projeção de Baire* como a função $\pi : \mathscr{B} \to \mathfrak{O}$ dada por

$$\pi(U) = \bigcup_{\mathfrak{O} \ni V \sim U} V.$$

Observamos que $\pi(U)$ é o aberto maximal equivalente a U. De fato, seja W o aberto maximal equivalente a U. Temos que $W \subseteq \pi(U)$, pois $W \in \mathfrak{O}$ e $W \sim U$. Por outro lado, considerando-se que W é o aberto maximal equivalente a U, $V \subseteq W$ para todo $V \sim U$ aberto. Logo, $\pi(U) \subseteq W$. Além disto, $\pi(U) = \operatorname{int}(\overline{V})$ para todo aberto $V \sim U$. De fato, seja $V \sim U$ um aberto. Temos que $\operatorname{int}(\overline{V}) \supseteq V$. Ainda, $\overline{V} \setminus V = \partial V$ é um conjunto magro. Logo, $\overline{V} \sim V$. Temos também que $\overline{V} \setminus \operatorname{int}(\overline{V}) \subseteq \overline{V} \setminus V = \partial V$ é um conjunto magro. Assim, $\overline{V} \sim \operatorname{int}(\overline{V})$. Segue que $\operatorname{int}(\overline{V}) \sim V \sim U$. Logo, $\operatorname{int}(\overline{V}) \subseteq \pi(U)$, pois $\pi(U)$ é o aberto maximal equivalente a U. Fixemos $x \in \pi(U)$. Então, existe $V \in \mathfrak{O}$, com $V \sim U$, tal que $x \in V$. Como $V \subseteq \operatorname{int}(\overline{V})$, temos que $x \in \operatorname{int}(\overline{V})$. Assim, $\pi(U) = \operatorname{int}(\overline{V})$ para todo aberto $V \sim U$.

Lema 2.3.13. *Se existe $\delta > 0$ tal que todo conjunto mensurável invariante é magro ou residual em uma bola aberta de raio δ, então X pode ser decomposto, a menos de um conjunto magro, em um número finito de componentes Baire ergódicos.*

Demonstração. Seja μ uma probabilidade de Borel em $\mathscr{B}$ tal que $\operatorname{supp}\mu = X$. Por exemplo, podemos tomar um subconjunto enumerável e denso em X, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, e $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{x_n}$. Seja $\mathfrak{m} : \mathscr{B} \to [0,1]$ uma função dada por $\mathfrak{m}(U) = \mu(\pi(U))$. Observamos que $\mathfrak{m}(X) = 1$ e se $U, V \in \mathscr{B}$ são tais que $U \cap V$ é magro, então

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m}(U) + \mathfrak{m}(V) &= \mu(\pi(U)) + \mu(\pi(V)) \\
&= \mu(\pi(U)) + \mu(\pi(V)) - \mu(\pi(U \cap V)) + \mu(\pi(U \cap V)) \\
&= \mu(\pi(U) \cup \pi(V)) \qquad (\mu(\pi(U \cap V)) = \mu(\emptyset) = 0, \text{ pois } U \cap V \text{ é magro}) \\
&\leqslant \mu(\pi(U \cup V)) \qquad (\text{pois } \operatorname{int}(U) \cup \operatorname{int}(V) \subseteq \operatorname{int}(U \cup V)) \\
&= \mathfrak{m}(U \cup V).
\end{aligned}$$

Logo, $\mathfrak{m}$ é uma f-função de Baire. Por compacidade, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que

$$\inf\{\mu(B_\delta(p)) : p \in X\} \geqslant 1/\ell.$$

De fato, se $\inf\{\mu(B_\delta(p)) : p \in X\} = 0$, então dado $\varepsilon > 0$, existiria $p \in X$ tal que $\mu(B_\delta(p)) < \varepsilon$. Isto seria uma contradição com $\operatorname{supp}\mu = X$, porque nesse caso, $\mu(A) > 0$, se $A \subseteq X$ é um aberto não vazio. Assim, se $U \subseteq X$ é um conjunto mensurável invariante, então $\mathfrak{m}(U) = 0$ ou $\mathfrak{m}(U) \geqslant 1/\ell$. A demonstração segue agora da Proposição 2.2.2. □

Lema 2.3.14. *Se $\Lambda \subseteq X$ é um conjunto compacto magro, então dado $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\Lambda)$ não contém uma bola de raio δ, ou seja,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup\{r > 0 : B_r(p) \subseteq B_\varepsilon(\Lambda) \text{ e } p \in X\} = 0$$

Demonstração. Do contrário, como Λ é compacto, existiriam $\delta > 0$ e uma sequência convergente $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em Λ tais que $B_\delta(p_n) \subseteq B_{1/n}(\Lambda)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso implicaria que $d(x, \Lambda) = 0$ para todo $x \in B_\delta(p)$, onde $p = \lim_n p_n$. Pela compacidade de Λ, teríamos que $B_\delta(p) \subseteq \Lambda$ o que contradiria a hipótese de Λ ser magro. $\square$

Definição 2.3.15. Definimos o Ω-*limite de* $x \in X$ como

$$\Omega_f(x) = \bigcap_{r>0}\bigcap_{n\geqslant 0}\left(\overline{\bigcup_{m\geqslant n} f^{*m}(B_r(x))}\right).$$

O conjunto $\Omega_f(x)$ é não vazio e compacto para cada $x \in X$, mesmo se $x \notin X_0$. Ademais, $\Omega_f(x) = \Omega_f(f(x))$ para todo $x \in X_0$.

De fato, como f é contínua em $x \in X_0$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$. Logo,

$$\Omega_f(f(x)) = \bigcap_{r>0}\bigcap_{n\geqslant 0}\left(\overline{\bigcup_{m\geqslant n} f^{*m}(B_r(f(x)))}\right) \supseteq \bigcap_{r'>0}\bigcap_{n\geqslant 0}\left(\overline{\bigcup_{m\geqslant n} f^{*m}(f(B_{r'}(x)))}\right) = \Omega_f(x).$$

Por outro lado, como f é um homeomorfismo local, f é uma função aberta, logo para todo $r > 0$ e todo $x \in X_0$, existe $r' > 0$ tal que $f(B_r(x)) \supseteq B_{r'}(f(x))$. Segue que

$$\Omega_f(f(x)) = \bigcap_{r>0}\bigcap_{n\geqslant 0}\left(\overline{\bigcup_{m\geqslant n} f^{*m}(B_r(f(x)))}\right) \subseteq \bigcap_{r'>0}\bigcap_{n\geqslant 0}\left(\overline{\bigcup_{m\geqslant n} f^{*m}(f(B_{r'}(x)))}\right) = \Omega_f(x).$$

O *conjunto não errante de* f, denotado por $\Omega(f)$, é o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que $V \cap \bigcup_{m\geqslant 1} f^{*m}(V) \neq \emptyset$ para cada vizinhança aberta V de x. Temos que

$$\Omega(f) = \{x \in X : x \in \Omega_f(x)\}.$$

De fato, seja $y \in \{x \in X : x \in \Omega_f(x)\}$. Logo, $y \in \Omega_f(y)$. Então, para todos $r > 0$ e $n \geqslant 0$, $y \in \overline{\bigcup_{m\geqslant n} f^{*m}(B_r(y))}$. Segue que para todos $r > 0$ e $n \geqslant 0$, $B_r(y) \cap \bigcup_{m\geqslant n} f^{*m}(B_r(y)) \neq \emptyset$. Portanto, $y \in \Omega(f)$. Ou seja, $\Omega(f)$ é o conjunto dos pontos Ω-recorrentes (dizemos que um ponto $x \in X$ é *recorrente* ou ω-*recorrente* se $x \in \omega_f(x)$).

Dizemos que f é *fortemente transitiva em* X, se para todo aberto $V \subseteq X$, $\bigcup_{n\geqslant 0} f^n(V) = X$. Observamos que $\bigcup_{n\geqslant 0} f^n(V) \cap W \neq \emptyset$ para qualquer $W \subseteq X$ aberto não vazio. Portanto, se f é fortemente transitiva, então f é transitiva.

Segundo Guckenheimer, em [Gu], dizemos que um conjunto $\Lambda \subseteq X$ *tem dependência sensível das condições iniciais* se existe $r > 0$ tal que

$$\sup_n \operatorname{diam}(f^n(\Lambda \cap B_\varepsilon(x))) \geq r$$

para cada $x \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$.

Teorema 2.3.16. *Se existe $\delta > 0$ tal que $\overline{\bigcup_{n\geqslant 0} f^{*n}(U)}$ contém uma bola aberta de raio δ, para cada $U \subseteq X$ aberto em X não vazio, então X pode ser decomposto, a menos de um conjunto magro, em um número finito de componentes Baire ergódicos $U_1, \ldots, U_\ell \subseteq X$. Além disso, para cada $j \in \{1, \ldots, \ell\}$, U_j é um conjunto aberto e os atratores A_j associados a U_j satisfazem as seguintes propriedades:*

(1) Cada A_j contém alguma bola aberta B_j de raio δ e $A_j = \overline{\operatorname{int}(A_j)}$.

(2) (a) Cada A_j é transitivo e $\omega_f(x) = A_j$, genericamente, em U_j.

(b) Se $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é uma função Borel mensurável, então para cada A_j, existe $a_j \in \mathbb{R}$ tal que $\limsup \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\varphi \circ f^k)(x) = a_j$ genericamente em $\beta_f(A_j)$.

(c) Se $U \in \mathscr{B}$, então para cada A_j, existe $u_j \in [0,1]$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\#\{0 \leqslant j < n : f^j(x) \in U\} = u_j$$

genericamente em $\beta_f(A_j)$.

(3) Para cada $j \in \{1, \ldots, \ell\}$, temos $\operatorname{int}(\beta_f(A_j)) \sim \beta_f(A_j) \sim U_j$. Em particular,

$$\beta_f(A_1) \cup \cdots \cup \beta_f(A_\ell) \text{ contém um conjunto aberto e denso em } X.$$

(4) Se $x \in \overline{U_j}$, então $\Omega_f(x) \supseteq A_j$, e $\Omega_f(x) = A_j$, se $x \in U_j$, para todo $j \in \{1, \ldots, \ell\}$. Em particular,

$$\Omega(f) \subseteq \left(\bigcup_{j=0}^{\ell} A_j\right) \cup \left(X \setminus \bigcup_{j=0}^{\ell} U_j\right),$$

onde $X \setminus \bigcup_{j=0}^{\ell} U_j$ é um conjunto compacto de interior vazio.

Ademais, se $\bigcup_{n\geq 0} f^{*n}(U)$ contém alguma bola aberta de raio δ, para cada conjunto U aberto em X não vazio, as seguintes propriedades também são válidas:

(5) Para cada A_j, existe um conjunto positivamente invariante $\mathcal{A}_j \subseteq A_j$, que contém um subconjunto aberto e denso de A_j, tal que f é fortemente transitiva em $\mathcal{A}_j$. De fato, $\alpha_f(x) \supseteq \overline{U_j} \supseteq A_j \supseteq \mathcal{A}_j$ para cada $x \in \mathcal{A}_j$.

(6) Ou $\omega_f(x) = A_j$ para cada $x \in \mathcal{A}_j$ com $\omega_f(x) \neq \emptyset$ ou A_j tem dependência sensível das condições iniciais.

Demonstração. Observamos que

$$A \sim f^{-n}(f^{*n}(A)) \cap A \tag{2.3}$$

para todo $A \subseteq X$ e $n \geqslant 0$. De fato, tomando $X_n = \bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(X_0)$([6]), temos que $f^{*n}(A) = f^n(A \cap X_n)$ para cada $A \subseteq X$. Como f é homeomorfismo local, X_n é aberto e denso em X. Então, $f^{-n}(f^{*n}(A)) = f^{-n}(f^n(A \cap X_n)) \supseteq A \cap X_n \sim A$. Segue que $A \sim f^{-n}(f^{*n}(A)) \cap A$.

Dado um conjunto mensurável gordo positivamente invariante $U \subseteq X$, seja $V \subseteq X$ um conjunto aberto tal que $U \sim V$.

Afirmação 2. O conjunto U é residual em $\operatorname{int}(f^{*n}(V))$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Observamos que pelo Lema 2.1.19, $\operatorname{int}(f^{*n}(V))$ é um conjunto não vazio. Já que $f^{*n}(U) \subseteq U$, precisamos apenas mostrar que $\operatorname{int}(f^{*n}(V)) \setminus f^{*n}(U)$ é magro. Suponhamos que $\operatorname{int}(f^{*n}(V)) \setminus f^{*n}(U)$ é gordo. Então, existe um aberto não vazio $Y \subseteq \operatorname{int}(f^{*n}(V))$ tal que $Y \cap f^{*n}(U)$ é um conjunto magro. Então, por (2.3), $f^{-n}(Y) \cap U \sim f^{-n}(Y) \cap f^{-n}(f^{*n}(U)) \cap U = f^{-n}(Y \cap f^{*n}(U)) \cap U$. Como f é não singular, $f^{-n}(Y \cap f^{*n}(U))$ é um conjunto magro. Isto implica que $f^{-n}(Y) \cap U$ é magro. Além disto, $(f^{-n}(Y) \cap V) \cap U$ é magro, pois $U \sim V$, logo $f^{-n}(Y) \cap V$ é magro. Isto contradiz $f^{-n}(Y) \cap V$ ser um subconjunto aberto não vazio de V. Logo, U deveria ser residual em $f^{-n}(Y) \cap V$. □

Por hipótese, $\overline{\bigcup_{n \geqslant 0} f^{*n}(V)}$ contém uma bola aberta B de raio δ, então $B \cap \bigcup_{n \geqslant 0} f^{*n}(V)$ é um subconjunto denso de B. Pelo Lema 2.1.19, $f^{*n}(V) \subseteq \overline{\operatorname{int}(f^{*n}(V))}$; assim, $B \cap \bigcup_{n \geqslant 0} \operatorname{int}(f^{*n}(V))$ é um subconjunto aberto e denso de B. Logo, pela Afirmação 2, U é residual em B. Ou seja,

$$\textit{todo conjunto gordo positivamente invariante é residual em uma bola aberta de raio } \delta. \tag{2.4}$$

Consequentemente, a hipótese do Teorema 2.3.16 implica a hipótese do Lema 2.3.13, pois todo conjunto invariante é positivamente invariante. Então, X pode ser decomposto, a menos de um conjunto magro, em $\ell \geqslant 1$ componentes Baire ergódicos $W_1, \ldots, W_\ell$. Pela Proposição 2.3.11, cada componente Baire ergódico W_j, $j \in \{1, \ldots, \ell\}$, tem um único atrator topológico A_j tal que $\omega_f(x) = A_j$ genericamente em W_j.

Suponhamos que A_j é magro. Do Lema 2.3.14, temos que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\sup\{r > 0 : B_r(p) \subseteq B_\varepsilon(A_j) \text{ e } p \in X\} < \delta/2. \tag{2.5}$$

Seja $n_0 \geqslant 1$ tal que $W_j' = \{x \in W_j : f^n(x) \in B_\varepsilon(A_j), \forall n \geqslant n_0\}$ é gordo. Esse n_0 existe, porque $A_j = \omega_f(x)$ genericamente em W_j. Já que f é não singular e W_j' é um conjunto gordo, temos que $f^{*n_0}(W_j')$ também é gordo. Pela definição de W_j', temos que $f(W_j') \subseteq W_j'$.

[6] Haja vista que o domínio e o contradomínio de f são respectivamente X_0 e X, se $f(x) \in X \setminus X_0$ para algum $x \in X_0$, não poderíamos aplicar f ao ponto $f(x)$. Por isto, definimos X_n como o conjunto dos pontos de X que podemos aplicar f n vezes.

Logo, W_j' é positivamente invariante. Assim, $f^{*n_0}(W_j')$ também é positivamente invariante. No entanto, como $f^{*n_0}(W_j') \subseteq B_\varepsilon(A_j)$, segue da desigualdade (2.5) que W_j' não pode ser residual em uma bola de raio maior que ou igual a $\delta/2$, o que é uma contradição com (2.4). Então, A_j é gordo.

Como A_j é um conjunto gordo compacto, $\operatorname{int}(A_j) \neq \emptyset$. Temos que $A_j \supseteq \overline{\bigcup_{n\geqslant 0} f^{*n}(\operatorname{int}(A_j))}$, pois A_j é um compacto positivamente invariante. Logo, por hipótese, A_j contém uma bola aberta B_j de raio δ.

Como $A_j = \omega_f(x)$ para todo x em um conjunto residual $R_j \subseteq W_j$, para cada $x \in R_j$, existe $n_x \geqslant 1$ tal que $f^{n_x}(x) \in B_j$. Já que $\omega_f(x) = A_j$, residualmente em B_j, temos que existe $p \in B_j$ tal que $\mathcal{O}_f^+(p)$ é denso em A_j, em particular, A_j é transitivo([7]). Do Lema 2.1.19, segue que $f^n(p) \in f^{*n}(B_j) \subseteq \overline{\operatorname{int}(f^{*n}(B_j))} \subseteq A_j$ para todo $n \geqslant 0$. Em particular, $d_H(\{f^n(p)\}, \operatorname{int}(f^{*n}(B_j))) = 0$ para todo $n \geqslant 0$. Isso implica

$$d_H\left(A_j, \bigcup_{n\geqslant 0} \operatorname{int}(f^{*n}(B_j))\right) = d_H\left(\mathcal{O}_f^+(p), \bigcup_{n\geqslant 0} \operatorname{int}(f^{*n}(B_j))\right) = 0,$$

o que prova que $\bigcup_{n\geqslant 0} \operatorname{int}(f^{*n}(B_j))$ é um subconjunto aberto e denso de A_j, ou seja, $A_j = \overline{\operatorname{int}(A_j)}$. Já que $W_j \sim U_j = \bigcup_{n\geqslant 0} f^{-n}(\operatorname{int}(A_j))$, temos que U_j é um componente Baire ergódico com A_j sendo seu atrator topológico $\omega_f(x) = A_j$ residualmente em U_j. Isso prova os itens (1) e (2)(a). Os itens (2)(b) e (2)(c) são deduzidos da Proposição 2.1.18. Isso conclui a demonstração dos itens (1) e (2). Podemos considerar $U_1, \dots, U_\ell$ ao invés de $W_1, \dots, W_\ell$ como a decomposição, a menos de um conjunto magro, de X em componentes Baire ergódicos. Além disso, se $x \in U_j$, então, por definição, $f^m(x) \in A_j$ para algum $m \geqslant 0$. Logo, $\omega_f(x) \subseteq A_j$, o quê prova que $U_j \subseteq \beta_f(A_j)$. Tendo em vista que $\beta_f(A_j) \setminus U_j \subseteq X \setminus \bigcup_{n=1}^{\ell} U_n \sim \emptyset$, concluímos que $\beta_f(A_j) \sim U_j$. Como U_j é aberto, $U_j \subseteq \operatorname{int}(\beta_f(A_j))$. Assim, $\operatorname{int}(\beta_f(A_j)) \setminus U_j \subseteq X \setminus \bigcup_{n=1}^{\ell} U_n \sim \emptyset$, e inferimos que $\operatorname{int}(\beta_f(A_j)) \sim \beta_f(A_j) \sim U_j$. Ainda, $U_1 \cup \cdots \cup U_\ell \subseteq \beta_f(A_1) \cup \cdots \cup \beta_f(A_\ell)$, logo, $\beta_f(A_1) \cup \cdots \cup \beta_f(A_\ell)$ contém um subconjunto aberto e denso de X. Com isso, concluímos a prova do item (3).

Dados $p \in \overline{U_j}$ e $\varepsilon > 0$, seja $p_\varepsilon \in B_\varepsilon(p) \cap R_j$. Como $\omega_f(p_\varepsilon) = A_j$, temos que

$$\bigcap_{n\geqslant 0}\left(\overline{\bigcup_{m\geqslant n} f^{*m}(B_\varepsilon(p))}\right) \supseteq \omega_f(p_\varepsilon) = A_j,$$

para todo $\varepsilon > 0$. De fato, para todos $n \geqslant 0$ e $\varepsilon > 0$,

$$\overline{\mathcal{O}_f^+(f^{*n}(p_\varepsilon))} \subseteq \overline{\bigcup_{m\geqslant n} f^{*m}(B_\varepsilon(p))}.$$

Logo, $\Omega_f(p) \supseteq A_j$ para todo $p \in \overline{U_j}$. Se $p \in U_j$, então $f^n(p) \in \operatorname{int}(A_j)$ para algum $n \geqslant 0$. Assim, $\omega_f(p) \subseteq A_j$. Como $f^n(p) \in \operatorname{int}(A_j)$, temos que $\Omega_f(p) \subseteq A_j$; para vermos isto,

[7] Dizemos que $A \subseteq X$ é um conjunto transitivo se $f\big|_A$ é transitiva.

basta tomar $r > 0$ tal que $B_r(f^n(p)) \subseteq \operatorname{int}(A_j)$. Se $x \in \Omega(f)$, então $x \in \Omega_f(x)$. Se $x \in U_j$ para algum $j \in \{1, \ldots, \ell\}$, então $x \in A_j$; se $x \notin U_j$, para todo $j \in \{1, \ldots, \ell\}$, então x pertence a um compacto de interior vazio, pois cada U_j é aberto e equivalente a W_j, e estes são a decomposição de X em componentes Baire ergódicos. Concluímos que

$$\Omega(f) \subseteq \left(\bigcup_{j=0}^{\ell} A_j \right) \cup \left(X \setminus \bigcup_{j=0}^{\ell} U_j \right).$$

Isso finaliza a prova do item (4).

Suponhamos que $\bigcup_{n \geqslant 0} f^{*n}(A)$ contém uma bola aberta de raio δ para cada aberto não vazio $A \subseteq X$. Definimos, para $0 < r < \delta$,

$$\Delta_r^n(x) = \bigcup_{m \geqslant n} f^{*m}(B_r(x)).$$

Observamos que para cada $0 < \varepsilon < r/2$, $\Delta_r^n(x) \setminus B_\varepsilon(\partial \Delta_r^n(x))$ é um conjunto compacto. De fato, seja $\{y_n\}$ uma sequência de pontos de $\Delta_r^n(x) \setminus B_\varepsilon(\partial \Delta_r^n(x))$ tal que $y_n \to y$. Se $y \in B_\varepsilon(\partial \Delta_r^n(x))$, então, existe uma vizinhança aberta V de y tal que $V \subseteq B_\varepsilon(\partial \Delta_r^n(x))$, pois $B_\varepsilon(\partial \Delta_r^n(x))$ é aberto. Essa vizinhança V não contém pontos da sequência $\{y_n\}$, pois esta é formada somente por pontos de $\Delta_r^n(x) \setminus B_\varepsilon(\partial \Delta_r^n(x))$. Logo, $y \in \Delta_r^n(x) \setminus B_\varepsilon(\partial \Delta_r^n(x))$; e concluímos que $\Delta_r^n(x) \setminus B_\varepsilon(\partial \Delta_r^n(x))$ é compacto. Como $\Delta_r^n(x)$ contém uma bola aberta de raio δ, $\Delta_r^n(x) \setminus B_\varepsilon(\partial \Delta_r^n(x)) \neq \emptyset$, de fato, esse conjunto contém uma bola de raio $\delta - \varepsilon$. Ainda, observamos que $\Delta_r^{n+1}(x) \setminus B_\varepsilon(\partial \Delta_r^{n+1}(x)) \subseteq \Delta_r^n(x) \setminus B_\varepsilon(\partial \Delta_r^n(x))$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\Omega_f^r(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \bigcap_{n \geqslant 0} (\Delta_r^n(x) \setminus B_\varepsilon(\partial \Delta_r^n(x))) \in \mathbb{K}(X)$$

é um conjunto compacto bem-definido para cada $x \in X$. Ademais, para cada $x \in X$, $\Omega_f^r(x)$ contém uma bola aberta $B_{x,r}$ de raio δ e

$$B_r(x) \cap \alpha_f(y) \neq \emptyset, \text{ para todo } y \in B_{x,r}. \tag{2.6}$$

De fato, se $y \in B_{x,r}$, então $y \in \Omega_f^r(x)$. Logo, $y \in \Delta_r^n(x) \setminus B_\varepsilon(\partial \Delta_r^n(x))$ para todo $n \geqslant 0$. Segue que existe $m \geqslant n$ tal que $y \in f^{*m}(B_r(x))$. Daí, $f^{-m}(y) \cap B_r(x)$. Consequentemente, $B_r(x) \cap \alpha_f(y) \neq \emptyset$ para todo $y \in B_{x,r}$. Ressaltamos que $\Omega_f^0(x) = \lim_{r \searrow 0} \Omega_f^r(x) = \bigcap_{r > 0} \Omega_f^r(x)$, pois $\Delta_r^n \subseteq \Delta_{r'}^n$ se $0 < r < r' < \delta$. Então, segue de (2.6) que para cada $x \in X$,

(a) $\Omega_f^0(x)$ contém uma bola aberta B_x de raio δ e

(b) $x \in \alpha_f(y)$ para todo $y \in B_x$.

Afirmação 3. A função $\psi : X \to \mathbb{K}(X)$, dada por $\psi(x) = \Omega_f^0(x)$, é mensurável.

Demonstração. Sejam $\Delta_r^{n,m}(x) = \bigcup_{j=n}^{m} f^{*j}(B_r(x))$ e $\psi_{r,\varepsilon,n,m} : X \to \mathbb{K}(X)$ uma função dada por $\psi_{r,\varepsilon,n,m}(x) = \Delta_r^{n,m}(x) \setminus B_\varepsilon(\partial\Delta_r^{n,m}(x))$. Como $\psi_{r,\varepsilon,n,m}$ é uma função contínua e $\lim_m \psi_{r,\varepsilon,n,m} = \Delta_r^n(x) \setminus B_\varepsilon(\partial\Delta_r^{n,m}(x))$, temos que $\psi_{r,\varepsilon,n} : X \to \mathbb{K}(X)$, dada por $\psi_{r,\varepsilon,n}(x) = \Delta_r^n(x) \setminus B_\varepsilon(\partial\Delta_r^n(x))$, é uma função mensurável. Semelhantemente, $\psi_{r,\varepsilon} = \lim_n \psi_{r,\varepsilon,n}$, $\psi_r = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \psi_{r,\varepsilon}$ e $\psi = \lim_{r\searrow 0} \psi_r$ são funções mensuráveis. □

Temos que para todo $x \in U_j' = \bigcup_{n\geqslant 0} f^{-n}\left(\bigcap_{m\geqslant 0} f^{-m}(U_j)\right)$, $(\psi \circ f)(x) = \psi(x)$, ψ é mensurável, $U_j' \sim U_j$ e U_j' é f-invariante, logo, pela Proposição 2.1.18, ψ é quase constante. Então, existe $p_j \in U_j'$ tal que $\psi(x) = \Omega_f^0(x) = \Omega_f^0(p_j)$ genericamente em U_j, e isso implica que $\Omega_f^0(x)$ contém a bola B_{p_j} de raio δ genericamente em U_j. Então, para cada $y \in B_{p_j}$, $x \in \alpha_f(y)$ para um conjunto residual de $x \in U_j$. Por compacidade, $\alpha_f(y) \supseteq \overline{U_j} \supseteq A_j$ para cada $y \in B_{p_j}$. Como $\operatorname{int} A_j \neq \emptyset$ e A_j é positivamente invariante, temos que $A_j \supseteq B_{p_j}$. Como $\alpha_f(x) \subseteq \alpha_f(f^j(x))$, temos que $\alpha_f(x) \supseteq \overline{U_j} \supseteq A_j$ para cada $x \in \mathcal{A}_j = \bigcup_{n\geqslant 0} f^{*n}(B_{p_j})$, o quê prova que f é fortemente transitiva no conjunto positivamente invariante $\mathcal{A}_j \subseteq A_j$. Além disso, segue da transitividade de A_j que $\mathcal{A}_j$ contém um subconjunto aberto e denso em A_j, o quê prova o item (5).

Suponhamos que existe $p \in \mathcal{A}_j$ tal que $\emptyset \neq \Lambda = \omega_f(p) \neq A_j$. Sejam $q \in \mathcal{A}_j \setminus \Lambda$ e $r = d_H(\{q\}, \Lambda) > 0$. Seja $n_0 \geqslant 0$ tal que $\mathcal{O}_f^+(f^{n_0}(p)) \subseteq B_{r/2}(\Lambda)$. Dados $x \in \mathcal{A}_j$ e $\varepsilon > 0$, sejam $n_0 \leqslant n_1 \leqslant n_2$ tais que $f^{-n_1}(p) \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset \neq f^{-n_2}(q) \cap B_\varepsilon(x)$. Como $f^n(p) \in B_{r/2}(\Lambda)$ para todo $n \geqslant n_0$, temos que $f^{*-n_2}(B_\varepsilon(x)) \cap B_{r/2}(\Lambda)$ e $q \in f^{*-n_2}(B_\varepsilon(x))$, o quê prova que $\sup_{n\geqslant 1} \operatorname{diam}\left(f^{*-n}(B_\varepsilon(x))\right) \geqslant r/2$ para cada $x \in V_j$ e $\varepsilon > 0$. Isso conclui o item (6) e a prova do teorema. □

2.4 Atratores estatísticos

Sejam (X, d) um espaço métrico compacto, $X_0 \subseteq X$ um subconjunto aberto e denso em X e $f : X_0 \to X$ uma função contínua não singular. A *frequência de visita (superior) de* $x \in X$ *a* $V \subseteq X$ é dada por

$$\tau_x(V) = \tau_{x,f}(V) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{0 \leq j < n : f^j(x) \in V\}. \tag{2.7}$$

O *ω-limite estatístico de* $x \in X$ é o conjunto

$$\omega_f^\star(x) = \{y : \tau_x(B_\varepsilon(y)) > 0 \text{ para todo } \varepsilon > 0\}.$$

Segundo Ilyashenko, em [AAIS], a *bacia de atração estatística* de um conjunto compacto $A \subseteq X$ é definida por

$$\beta_f^\star(A) = \{x : \omega_f^\star(x) \subseteq A\}.$$

Se M é um subconjunto aberto não vazio de $\mathbb{R}^n$ e $h : M \to M$ é uma função contínua([8]), dizemos que um conjunto compacto $A \subseteq M$ é um *atrator estatístico de Ilyashenko para* h se $\mathrm{Leb}\,(\beta_h^\star(A)) > 0$ (Leb é a medida de Lebesgue em M) e não existe conjunto compacto não vazio $A' \subsetneq A$ tal que $\mathrm{Leb}\,(\beta_h^\star(A)) \setminus (\beta_h^\star(A')) = 0$. Combinando as definições de atrator estatístico de Ilyashenko com a definição que apresentamos de atrator topológico, definimos o atrator estatístico topológico da seguinte maneira:

Definição 2.4.1 (Atrator estatístico topológico)**.** Dizemos que um conjunto compacto $A \subseteq X$ é um *atrator estatístico topológico para a função* $f : X_0 \to X$ se $\beta_f^\star(A)$ e $\beta_f^\star(A) \setminus \beta_f^\star(A')$ são conjuntos gordos para todo conjunto compacto não vazio $A' \subsetneq A$.

Por uma questão de simplicidade, chamaremos o atrator estatístico topológico apenas de atrator estatístico.

Seja $\mathcal{M}^1(X)$ o conjunto de todas as probabilidades em X. Sejam $\mathcal{D} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots\}$ um conjunto enumerável e denso em $C(X, [0,1])$ e D uma métrica em $\mathcal{M}^1(X)$ compatível com a topologia fraca*. Temos que $(\mathcal{M}^1(X), D)$ é um espaço métrico compacto. Consideremos em $\mathcal{M}^1(X)$ a topologia gerada por D. Seja $\mathbb{K}(\mathcal{M}^1(X))$ o conjunto de todos os subconjuntos compactos não vazios de $\mathcal{M}^1(X)$ e consideremos a métrica de Hausdorff D_H em $\mathbb{K}(\mathcal{M}^1(X))$. Observamos que $(\mathbb{K}(\mathcal{M}^1(X)), D_H)$ é um espaço métrico compacto.

Seja $X' = \bigcap_{j\geqslant 0} f^{-j}(X)$. Consideremos a função $\mho_f : X' \to \mathbb{K}(\mathcal{M}^1(X))$. O *espectro estatístico de* x, denotado por $\mho_f(x)$, é o conjunto de todos os pontos de acumulação de $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)}$ na topologia fraca*, ou seja,

$$\mho_f(x) = \left\{ \mu \in \mathcal{M}^1(X) : D\left(\frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \delta_{f^j(x)}, \mu \right) \to 0 \text{ para alguma sequência } n_k \nearrow \infty \right\}.$$

A demonstração do Lema 2.4.2 abaixo é semelhante à verificação na Proposição 2.3.11 que a função $\psi : U' \to \mathbb{K}(\overline{U})$ dada por $\psi(x) = \omega_f(x)$ é mensurável.

Lema 2.4.2. *A função* $\mho_f$ *é mensurável.*

Demonstração. Dado $x \in X'$, sejam $\mu_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{f^j(x)}$, $K_{\ell,t}(x) = \bigcup_{j=\ell}^{\ell+t}\{\mu_j\} \in \mathbb{K}(\mathcal{M}^1(X))$, $K_\ell(x) = \overline{\bigcup_{j\geqslant \ell}\{\mu_j\}} \in \mathbb{K}(\mathcal{M}^1(X))$. Como $X' \ni x \mapsto K_{\ell,t}(x) \in \mathbb{K}(\mathcal{M}^1(X))$ é uma função contínua, logo mensurável, e $K_\ell(x) = \lim_{t\to\infty} K_{\ell,t}(x)$, temos que $X' \ni x \mapsto K_\ell(x) \in \mathbb{K}(\mathcal{M}^1(X))$ é mensurável. Ademais, como $\mho_f(x) = \lim_{\ell\to\infty} K_\ell(x) = \bigcap_{\ell\geqslant 1} K_\ell(x) \in \mathbb{K}(\mathcal{M}^1(X))$, concluímos que $\mho_f$ é mensurável. $\square$

Lema 2.4.3. *Para todo* $x \in X$, $\omega_f^\star(x) = \overline{\bigcup_{\mu\in\mho_f(x)} \operatorname{supp}\mu}$.

[8]Em um contexto mais geral, poderíamos tomar M como uma variedade Riemanniana.

Demonstração. Se $x \notin X'$, então $\omega_f(x) = \omega_f^\star(x) = \emptyset$. Então, podemos supor que $x \in X'$. Como $\operatorname{supp}\mu \subseteq \omega_f^\star(x)$, para cada $\mu \in \mho_f(x)$, temos que $\omega_f^\star(x) \supseteq \bigcup_{\mu\in\mho_f(x)} \operatorname{supp}\mu$. Ainda, $\omega_f^\star(x) \supseteq \overline{\bigcup_{\mu\in\mho_f(x)} \operatorname{supp}\mu}$, porque $\omega_f^\star(x)$ é um conjunto fechado para todo $x \in X'$. Reciprocamente, se $p \in \omega_f^\star(x)$ e $\varepsilon > 0$, então existe uma sequência $j_k \nearrow \infty$, $k \to \infty$, tal que $\frac{1}{j_k}\sum_{i=0}^{j_k-1} \delta_{f^{j_i}(x)}(B_{1/n}(p)) \geqslant \theta/2$ para algum $\theta > 0$ e para todos $n, k \in \mathbb{N}$. Seja $\mu_{j_k} = \frac{1}{j_k}\sum_{i=0}^{j_k-1} \delta_{f^{j_i}(x)}$. Como, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\mu_{j_k} \in \mho_f(x)$ e este é um conjunto compacto, $\{\mu_{j_k}\}$ possui uma subsequência convergente. Seja $\mu_n \in \mho_f(x)$ o limite desta subsequência para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\mu_{j_k}(B_{1/n}(p)) \geqslant \theta/2$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e algum $\theta > 0$, e μ_n é o limite de uma subsequência de $\{\mu_{j_k}\}$, $\mu_n(B_{1/n}(p)) \geqslant \theta/2$ para cada $n \in \mathbb{N}$. A menos de uma subsequência, podemos supor que $\lim_n \mu_n = \mu$. Pela compacidade de $\mho_f(x)$, $\mu \in \mho_f(x)$. Como $\mu(B_\varepsilon(p)) > 0$ para todo $\varepsilon > 0$, temos que $\operatorname{supp}\mu \cap B_\varepsilon(p) \neq \emptyset$, ou seja, $p \in \operatorname{supp}\mu$ para algum $\mu \in \mho_f(x)$. Portanto, está provado que $\omega_f^\star(x) \subseteq \overline{\bigcup_{\mu\in\mho_f(x)} \operatorname{supp}\mu}$. $\square$

Proposição 2.4.4 (O atrator estatístico de um componente Baire ergódico)**.** *Se $U \subseteq X$ é um componente Baire ergódico de f, então existe um único atrator estatístico $\mathcal{A} \subseteq \overline{U}$ atraindo estatisticamente um subconjunto residual de U. Além disto, $\omega_f^\star(x) = \mathcal{A}$ genericamente em U e $\mathcal{A} \subseteq A$, onde A é o atrator topológico de U.*

Demonstração. Como $\mho_f(f(x)) = \mho_f(x)$ para todo $x \in U'$ (U' conforme o Lema 2.3.3) e $\mho_f : U' \to \mathbb{K}(\mathcal{M}^1(X))$ é mensurável, $\mho_f$ é um potencial de Baire para $f\big|_{U'}$. Então, pela Proposição 2.1.18, temos que existe $\mathfrak{A} \in \mathbb{K}(\mathcal{M}^1(X))$ tal que

$$\mho_f(x) = \mathfrak{A} \text{ genericamente em } U'.$$

Considerando que pelo Lema 2.4.3, $\omega_f^\star(x) = \overline{\bigcup_{\mu\in\mho_f(x)} \operatorname{supp}\mu}$, temos

$$\omega_f^\star(x) = \mathcal{A} := \overline{\bigcup_{\mu\in\mathfrak{A}} \operatorname{supp}\mu} \text{ genericamente em } U \sim U'.$$

$\square$

2.5 Comportamento Histórico

Definição 2.5.1. Sejam $f : X \to X$ uma função contínua e $U \subseteq X$ um conjunto aberto. Dizemos que f é *fortemente transitiva em U*, se $\bigcup_{n\geqslant 0} f^n(V) \supseteq U$ para todo conjunto aberto $V \subseteq U$.

Definição 2.5.2. Sejam $x \in X$ e $f : X \to X$ uma função. O *conjunto estável de x com respeito a f* é

$$W_f^s(x) = \left\{ y \in X : \lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \right\}.$$

Definimos ainda o *conjunto estável de $U \subseteq X$ com respeito a f* como

$$W_f^s(U) = \bigcup_{y \in U} W_f^s(y).$$

Representaremos por $\mathcal{M}^1(f)$ o conjunto das probabilidades de Borel invariantes por f e por $\mathcal{M}_e^1(f)$ o conjunto de todas as probabilidades de Borel ergódicas invariantes.

A *bacia de atração de uma medida* $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$, denotada por $\beta_f(\mu)$, é o conjunto de todos os $x \in X$ tais que $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)}$ converge para μ na topologia fraca*. Observamos que se $\mu \in \mathcal{M}_e^1(f)$, então $\beta_f(\mu) \neq \emptyset$, pois $\mu(\beta_f(\mu)) = 1$. De fato, pelo Teorema 1.2.4, existe um conjunto compacto $G \subseteq X$ com $\mu(G) = 1$ tal que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} (\varphi \circ f^j)(x) \to \int \varphi \, d\mu$$

para todo $x \in G$ e toda função contínua $\varphi : X \to \mathbb{R}$. Logo $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} \to \mu$ para todo $x \in G$, pelo Lema 1.1.1. Consequentemente, $G = \beta_f(\mu)$, e assim $\mu(\beta_f(\mu)) = 1$.

Proposição 2.5.3. *Sejam X um espaço métrico de Baire separável e $f : X \to X$ uma função contínua. Se tomarmos $X_0 = \{x \in X : \overline{\mathcal{O}_f^-(W_f^s(x))} = X\}$, então $\mho_f(x) \supseteq \{\mu \in \mathcal{M}^1(f) : \beta_f(\mu) \cap X_0 \neq \emptyset\} \supseteq \{\mu \in \mathcal{M}_e^1(f) : \mu(X_0) > 0\}$ genericamente em X.*

Demonstração. Seja D uma métrica em $\mathcal{M}^1(X)$ compatível com a topologia fraca*. Dados $x \in X$ e $\ell \in \mathbb{N}$, seja

$$\delta_{\ell,x} = \frac{1}{\ell}\sum_{j=0}^{\ell-1} \delta_{f^j(x)} \in \mathcal{M}^1(X).$$

Consideremos qualquer $\mu \in \mathcal{M}^1(f)$, com $\beta_f(\mu) \cap X_0 \neq \emptyset$. Seja $p \in \beta_f(\mu) \cap X_0$, ou seja, $\mho_f(p) = \{\mu\}$ e $\overline{\mathcal{O}_f^-(W_f^s(p))} = X$. Já que $\overline{\mathcal{O}_f^-(W_f^s(p))} = X$ e $\mho_f(y) = \mho_f(p)$ para todo $y \in \mathcal{O}_f^-(W_f^s(p))$, temos que $\beta_f(\mu)$ é um conjunto denso.

Dados $r > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, seja

$$V(r,n) = \{x \in \beta_f(\mu) : D(\delta_{m,x}, \mu) < r \;\; \forall m \geqslant n\}.$$

Como $V(r,1) \subseteq V(r,2) \subseteq V(r,3) \subseteq \cdots$ e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V(r,n) = \beta_f(\mu)$, dado $t \in \mathbb{N}$, existe $n(t) \geqslant t$ tal que $V(r,n(t))$ é um conjunto $(1/t)$-denso em $\beta_f(\mu)$, e já que $\beta_f(\mu)$ é denso em X, $V(r,n(t))$ é $(1/t)$-denso em X, isto é., $B_{1/t}(V(r,n(t)))$([9]) $= X$. Como X é separável, $V(r,n(t))$ admite um subconjunto $(1/t)$-denso enumerável, isto é, existe um conjunto enumerável $V'(r,n(t)) \subseteq V(r,n(t))$ tal que $B_{1/t}(V'(r,n(t))) = X$. Segue da continuidade de f que existe $\varepsilon = \varepsilon(r,n(t),y) > 0$ tal que

$$D(\delta_{n,x}, \mu) < r \text{ para cada } x \in B_\varepsilon(y) \text{ e } y \in V'(r,n(t)).$$

[9] $B_{1/t}(V(r,n(t))) = \bigcup_{x \in V(r,n(t))} B_{1/t}(x)$.

Observamos que o conjunto $W_r(m) = \bigcup_{t\geqslant m}\bigcup_{y\in V'(r,n(t))} B_\varepsilon(y)$ é um conjunto aberto e $(1/m)$-denso para todo $m \in \mathbb{N}$. Além disto, se $x \in W_r(m)$, então $D(\delta_{n,x}, \mu) < r$ para algum $n \geqslant m$. Definindo $W_r = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} W_r(m)$, temos que W_r é residual e para cada $x \in W_r$, existe $\ell_j \to \infty$ tal que $D(\delta_{\ell_j,x}, \mu) < r$. Finalmente, temos que $W(\mu) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_{1/n}$ é um conjunto residual e $\mu \in \mho_f(x)$ para todo $x \in W(\mu)$. Tomando um subconjunto denso e enumerável $\{\mu_1, \mu_2, \dots\} \subseteq \{\mu \in \mathcal{M}^1(f) : \beta_f(\mu) \cap X_0 \neq \emptyset\}$, temos que $W = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W(\mu_n)$ é um conjunto residual e, pela compacidade de $\mho_f(x)$, temos também que $\mho_f(x) = \overline{\{\mu \in \mathcal{M}^1(f) : \beta_f(\mu) \cap X_0 \neq \emptyset\}}$ para cada $x \in W$; isto encerra a demonstração. $\square$

Definição 2.5.4 ([Ruel] e [Ta])**.** Sejam X um espaço métrico compacto, $X_0 \subseteq X$ um subconjunto mensurável de X e $f : X_0 \to X$ uma função mensurável. Dizemos que um ponto $x \in \bigcap_{n\geqslant 0} f^{-n}(X)$ tem *comportamento histórico* se $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{f^j(x)}$ não converge na topologia fraca*.

Dizemos que $x \in X$ é um *ponto periódico de* f se existe $n \geqslant 1$ tal que $f^n(x) = x$. Representaremos por $\mathrm{Per}\,(f)$ o conjunto de todos os pontos periódicos de f. Chamamos a órbita positiva de um ponto periódico de f de *órbita periódica*.

Teorema 2.5.5. *Sejam X um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ uma função contínua não singular. Se existe $\delta > 0$ tal que $\overline{\bigcup_{n\geqslant 0} f^n(U)}$ contém uma bola aberta de raio δ, para cada $U \subseteq X$ aberto em X não vazio, então existe uma coleção finita de atratores topológicos $A_1, \dots, A_\ell$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

(1) O conjunto $\beta_f(A_1) \cup \dots \cup \beta_f(A_\ell)$ contém um subconjunto aberto e denso em X.

(2) Cada A_j contém alguma bola aberta de raio δ e $A_j = \overline{\mathrm{int}\,(A_j)}$.

(3) (a) Cada A_j é transitivo e $\omega_f(x) = A_j$ genericamente em $\beta_f(A_j)$.

(b) Se $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é uma função Borel mensurável, então para cada A_j, existe $a_j \in \mathbb{R}$ tal que $\limsup \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\varphi \circ f^j)(x) = a_j$ genericamente em $\beta_f(A_j)$.

(c) Se $U \subseteq X$ é subconjunto de Borel de X, então para cada A_j, existe $u_j \in [0,1]$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\#\{0 \leqslant j < n : f^j(x) \in U\} = u_j$$

genericamente em $\beta_f(A_j)$.

(4) O conjunto $\overline{\Omega(f) \setminus \bigcup_{j=0}^{\ell} A_j}$ é um compacto de interior vazio.

Além disso, se $\bigcup_{n\geq 0} f^n(U)$ contém alguma bola aberta de raio δ, para cada conjunto aberto em X não vazio U, as seguintes propriedades também são válidas:

(5) Para cada A_j, existe um conjunto positivamente invariante $\mathcal{A}_j \subseteq A_j$, com $A_j = \overline{\operatorname{int}(\mathcal{A}_j)}$, tal que f é fortemente transitiva em $\mathcal{A}_j$.

(6) Ou $\omega_f(x) = A_j$ para cada $x \in \mathcal{A}_j$ ou A_j tem dependência sensível das condições iniciais.

(7) Se $\mathcal{A}_j$ contém mais de uma órbita periódica, então genericamente os pontos de $\beta_f(A_j)$ têm comportamento histórico.

Demonstração. Observamos que o Teorema 2.5.5 satisfaz todas as hipóteses do Teorema 2.3.16, então todos os itens do Teorema 2.5.5 seguem do Teorema 2.3.16, exceto o item (7).

O item (7) decorre da Proposição 2.5.3. De fato, suponhamos que existam $p, q \in \mathcal{A}_j \cap \operatorname{Per}(f)$ tais que $\mathcal{O}_f^+(p) \cap \mathcal{O}_f^+(q) = \emptyset$. Sejam

$$\mu = \frac{1}{\#\mathcal{O}_f^+(p)} \sum_{x \in \mathcal{O}_f^+(p)} \delta_x \quad \text{e} \quad \nu = \frac{1}{\#\mathcal{O}_f^+(q)} \sum_{x \in \mathcal{O}_f^+(q)} \delta_x.$$

Tomando $g = f\big|_{\mathcal{A}_j}$, segue do item (5) do Teorema 2.3.16 que $\alpha_f(x) \supseteq \overline{\mathcal{A}_j} = A_j$ para todo $x \in \mathcal{A}_j$. Isto implica que $\mathcal{O}_f^-(x)$ é denso em A_j se $x \in \mathcal{A}_j$. Como A_j é um conjunto positivamente invariante, temos que $\mathcal{O}_g^-(x)$ é denso em A_j para todo $x \in \mathcal{A}_j$. Por fim, como $\mathcal{O}_g^-(x) \subseteq \mathcal{O}_g^-(W_g^s(x))$, concluímos que $(A_j)_0 = \{y \in A_j : \overline{\mathcal{O}_g^-(W_g^s(y))} = A_j\} \supseteq \mathcal{A}_j$ e, então, pela Proposição 2.5.3, $\mho_f(x) = \mho_g(x) \supseteq \{\mu, \nu\}$ genericamente em A_j. Tendo em vista que $\beta_f(A_j) \sim \bigcup_{n \geqslant 0} f^{-n}(A_j)$, segue que $\mho_f(x) \supseteq \{\mu, \nu\}$ genericamente em $\beta_f(A_j)$; isto prova que genericamente os pontos de $\beta_f(A_j)$ têm comportamento histórico. $\square$

Dizemos que $f : X \to X$ é *unicamente ergódica* se f tem uma e apenas uma probabilidade de Borel invariante.

Teorema 2.5.6. *Seja $f : X \to X$ uma função contínua e não singular definida em um espaço métrico compacto X. Se f é fortemente transitiva, então f é unicamente ergódica ou genericamente os pontos de X têm comportamento histórico. Ademais, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(a) Para toda $\varphi \in C(X, \mathbb{R})$,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\varphi \circ f^j)(x) = \max \left\{ \int \varphi \, d\mu : \mu \in \mathcal{M}^1(f) \right\} \text{ genericamente em } X.$$

(b) $\omega_f(x) = X$ e $\omega_f^\star(x) = \overline{\bigcup_{\mu \in \mathcal{M}^1(f)} \operatorname{supp} \mu}$ genericamente em X.

Demonstração. Como X é compacto, f é contínua e fortemente transitiva, segue, da Proposição 2.5.3, que

$$\mho_f(x) = \mathcal{M}^1(f) \neq \emptyset \text{ genericamente em } X. \tag{2.8}$$

Logo, concluímos de (2.8) que se f não é unicamente ergódica, então $\#\mho_f(x) > 1$ genericamente em X. Então, genericamente $x \in X$ tem comportamento histórico. Dados $\varphi \in C(X, \mathbb{R})$ e $x \in X$, segue da convergência na topologia fraca* que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\varphi \circ f^j)(x) = \limsup_{n\to\infty} \int \varphi \, d\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{f^j(x)}\right) = \sup\left\{\int \varphi \, d\mu : \mu \in \mho_f(x)\right\}.$$

Além disso, pela compacidade de $\mathcal{M}^1(f)$, temos que

$$\max\left\{\int \varphi \, d\mu : \mu \in \mathcal{M}^1(f)\right\} = \sup\left\{\int \varphi \, d\mu : \mu \in \mathcal{M}^1(f)\right\}.$$

Assim, se $\varphi \in C(X, \mathbb{R})$ e x é um ponto de X, podemos usar (2.8) para concluir que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\varphi \circ f^j)(x) = \sup\left\{\int \varphi \, d\mu : \mu \in \mho_f(x)\right\} =$$
$$= \sup\left\{\int \varphi \, d\mu : \mu \in \mathcal{M}^1(f)\right\} = \max\left\{\int \varphi \, d\mu : \mu \in \mathcal{M}^1(f)\right\}.$$

Isto prova o item (a).

Já que f fortemente transitiva implica f transitiva, temos que $\omega_f(x) = X$ genericamente em X. A demonstração de que $\omega_f^\star(x) = \overline{\bigcup_{\mu\in\mathcal{M}^1(f)} \operatorname{supp}\mu}$ genericamente em X segue de (2.8) e do Lema 2.4.3. □

2.6 Funções topologicamente crescentes

Sejam X um espaço métrico compacto, $X_0 \subseteq X$ um subconjunto aberto e denso em X e $f : X_0 \to X$ uma função contínua não singular.

Definição 2.6.1. Dizemos que f é *δ-crescente*, $\delta > 0$, se para cada aberto não vazio $V \subseteq X$, existem $n \geqslant 0$, $q \in X$ e uma componente conexa $U \subseteq V$ de $f^{-n}(B_\delta(q))$ tal que $f^n(U) = B_\delta(q)$. Uma função é *topologicamente crescente* se é uma função δ-crescente para algum $\delta > 0$.

Um exemplo de função topologicamente crescente é $g : [0,1] \to [0,1]$ monótona por partes, contínua e transitiva.

Definição 2.6.2. Dizemos que um conjunto aberto $V_{n,\delta}(p) \subseteq X$ é uma *pré-bola de ordem $n \in \mathbb{N}$, raio $\delta > 0$, para $p \in X$* se existe $q \in X$ tal que

(1) $V_{n,\delta}(p)$ é a componente conexa de $f^{-n}(B_\delta(q))$ que contém p e

(2) $f^n(p) \in B_{\delta/2}(q) \subseteq f^n(V_{n,\delta}(p)) = B_\delta(q)$.

Dizemos que $n \in \mathbb{N}$ é um *tempo δ-crescente para $p \in X$* se existe uma pré-bola $V_{n,\delta}(p)$ para p. Vamos denotar por $\mathcal{G}(\delta, p) \subseteq \mathbb{N}$ o *conjunto de todos os tempos δ-crescentes para $p \in X$*.

Se $n \geqslant 2$ é um tempo δ-crescente para p, então $n-1$ é um tempo δ-crescente para $f(p)$. De fato, se $V_{n,\delta}(p)$ é uma pré-bola de ordem n e raio δ para p, então existe $q \in X$ tal que $V_{n,\delta}(p)$ é a componente conexa de $f^{-n}(B_\delta(q))$ que contém p. Logo, $V_{n-1,\delta}(f(p)) = f(V_{n,\delta}(p))$ é a componente conexa de $f^{-(n-1)}(B_\delta(q))$ que contém $f(p)$. Ainda, por $V_{n,\delta}(p)$ ser uma pré-bola de ordem n e raio δ para p, $f^n(p) \in B_{\delta/2}(q) \subseteq f^n(V_{n,\delta}(p)) = B_\delta(q)$. Portanto, $f^{n-1}(f(p)) \in B_\delta(q) \subseteq f^{n-1}(f(V_{n,\delta}(p))) = f^{n-1}(V_{n-1,\delta}(f(p))) = B_\delta(q)$. Concluímos que $V_{n-1,\delta}(f(p))$ é uma pré-bola de ordem $n-1$ e raio δ para $f(p)$. Assim, $\mathcal{G}(\delta, f(p)) \supseteq \mathcal{G}(\delta, p) - 1 = \{n-1 : n \in \mathcal{G}(\delta, p)\}$ para todo $p \in X$.

Seja $r > 0$. O conjunto

$$\mathfrak{G}_r(n, \delta) = \{p \in X : n \in \mathcal{G}(\delta, p) \text{ com } \operatorname{diam}(V_{n,\delta}(p)) < r\}$$

é aberto. De fato, dado $p \in \mathfrak{G}_r(n,\delta)$, tomemos $s > 0$ tal que $B_s(p) \subseteq V_{n,\delta}(p)$. Então, $B_s(p) \subseteq \mathfrak{G}_r(n,\delta)$. Se f é uma função δ-crescente, então

$$\mathfrak{G}(\delta) = \bigcap_{\ell \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geqslant n} \mathfrak{G}_{1/\ell}(m, \delta),$$

o conjunto de todos os *pontos com infinitos tempos δ-crescentes para pré-bolas arbitrariamente pequenas*, é um conjunto residual. De fato, $\bigcup_{m \geqslant n} \mathfrak{G}_{1/\ell}(m,\delta)$ é residual, e interseção de uma família enumerável de conjuntos residuais é residual.

Dado $x \in \mathfrak{G}(\delta)$, o *$\omega$-limite em tempo δ-crescente para x*, denotado por $\omega_{\delta,f}(x)$, é o conjunto de todos os $y \in X$ tais que $y = \lim_j f^{n_j}(x)$ com $n_j \in \mathcal{G}(\delta, x)$ e $\operatorname{diam}(V_{n_j,\delta}) \to 0$. Observamos que $\omega_{\delta,f}(x)$ é um conjunto compacto e que $\omega_{\delta,f}(x) = \omega_{\delta,f}(f(x))$ para todo $x \in \mathfrak{G}(\delta)$. De fato, seja $\{y_n\}$ uma sequência em $\omega_{\delta,f}(x)$ tal que $y_n \to y$. Mostraremos que $y \in \omega_{\delta,f}(x)$. Para cada $j \geqslant 1$, tomemos n_j tal que $d(y_{n_j}, y) < 1/(2j)$. Agora, escolhemos k_j tal que $d(f^{k_j}(x), y_{n_j}) < 1/(2j)$ e $k_j < k_{j+1}$. Então $d(f^{k_j}(x), y) \leqslant d(f^{k_j}(x), y_{n_j}) + d(y_{n_j}, y) < 1/(2j) + 1/(2j) = 1/j$. Logo, $y \in \omega_{\delta,f}(x)$.

Suponhamos que f é uma função δ-crescente. Então, para cada aberto não vazio $V \subseteq X$, existem $n \geqslant 0$, $q \in X$ e uma componente conexa $U \subseteq V$ de $f^{-n}(B_\delta(q))$ tal que $f^n(U) = B_\delta(q)$. Temos que $\overline{\bigcup_{m \geqslant 0} f^m(V)}$ contém uma bola aberta de raio δ, pois $B_\delta(q) = f^n(U) \subseteq f^n(V)$ para algum $n \geqslant 0$. Consequentemente, f satisfaz a hipótese do Teorema 2.3.16. Logo, pelo Teorema 2.3.16, X pode ser decomposto em uma coleção finita de componentes Baire ergódicos $U_1, \dots, U_\ell$, com U_j sendo um conjunto aberto para todo $j \in \{1, \dots, \ell\}$. Seja A_j o atrator topológico para U_j. Novamente, pelo Teorema 2.3.16, A_j contém uma bola B_j de raio δ. Em particular, $\operatorname{int}(A_j) \neq \emptyset$ e, já que A_j é transitivo, temos que $A_j = \overline{\operatorname{int}(A_j)}$.

Lema 2.6.3. *Existe $\Lambda_j \subseteq B_{\delta/2}(\Lambda_j) \subseteq A_j$ tal que $\omega_{\delta,f}(x) = \Lambda_j$ residualmente em U_j.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{G}(r,\delta,x)$ o conjunto de todos os tempos δ-crescentes para x tais que $\operatorname{diam}(V_{n,\delta}(x)) < r$ e $\psi_{n,m,r} : \mathfrak{G}_r(\delta) \to \mathbb{K}(X)$ uma função dada por $\psi_{n,m,r}(x) = \{f^j(x) : j \in \{n, \dots, n+m\} \cap \mathcal{G}(r,\delta,x)\}$. Como $\psi_{n,m,r}$ é contínua, a função $\psi_{n,r} : \mathfrak{G}_r(\delta) \to \mathbb{K}(X)$ dada por $\psi_{n,r}(x) = \lim_m \psi_{n,m,r}(x) = \overline{\{f^j(x) : j \geqslant n \text{ e } j \in \mathcal{G}(r,\delta,x)\}}$ é uma função mensurável, pois é limite pontual de funções continuas, logo mensuráveis. Analogamente, ψ_r é mensurável, onde $\psi_r(x) = \lim_n \psi_{n,r}(x) = \bigcap_n \overline{\{f^j(x) : j \geqslant n \text{ e } j \in \mathcal{G}(r,\delta,x)\}}$. Finalmente, haja vista que $\omega_{\delta,f}(x) = \lim_{\mathbb{N}\ni r\to\infty} \psi_{1/r}(x)$, temos que $\mathfrak{G}_\delta \ni x \mapsto \omega_{\delta,f} \in \mathbb{K}(X)$ é uma função mensurável e, então um potencial de Baire invariante. Logo, pela Proposição 2.1.18, aplicada à $f\big|_{U_j}$, existe $\Lambda_j \in \mathbb{K}(X)$ tal que $\omega_{\delta,f}(x) = \Lambda_j$ genericamente em U_j. Já que $A_j = \overline{\operatorname{int}(A_j)}$, $\omega_{\delta,f}(x) = \Lambda_j$ genericamente em $\operatorname{int}(A_j)$. Pela definição de tempo δ-crescente para x, se $y \in \omega_{\delta,f}(x)$ e $x \in \operatorname{int}(A_j)$, temos que $B_{\delta/2}(y) \subseteq A_j$ e, consequentemente, $B_{\delta/2}(\Lambda_j) \subseteq A_j$. □

Teorema 2.6.4. *Sejam X um espaço métrico compacto e $X_0 \subseteq X$ um subconjunto aberto e denso de X. Se $f : X_0 \to X$ é uma função δ-crescente, então X pode ser decomposto, a menos de um conjunto magro, em um número finito de componentes Baire ergódicos $U_1, \dots, U_\ell \subseteq X$. Cada U_j é um conjunto aberto em X e os atratores A_j associados a U_j satisfazem as seguintes propriedades:*

(1) Cada A_j é transitivo, contém uma bola de raio δ e $A_j = \overline{\operatorname{int}(A_j)}$.

(2) O conjunto $\overline{\Omega(f) \setminus \bigcup_{j=0}^{\ell} A_j}$ é compacto com interior vazio.

(3) Para cada A_j, existe um conjunto positivamente invariante $\mathcal{A}_j \subseteq A_j$ que contém um subconjunto aberto e denso de A_j e f é transitiva em $\mathcal{A}_j$.

(4) Genericamente em U_j, $\omega_f^\star(x) = \omega_f(x) = A_j$.

(5) $h_{top}(f\big|_{\mathcal{A}_j}) > 0$([10]).

(6) $f\big|_{\mathcal{A}_j}$ tem uma quantidade não enumerável de probabilidades ergódicas invariantes.

(7) Se x é um ponto genérico de U_j e $\varphi \in C(X,\mathbb{R})$, então

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\varphi \circ f^j)(x) \geqslant \sup \left\{ \int \varphi \, d\mu : \mu \in \mathcal{M}^1(f\big|_{\mathcal{A}_j}) \right\}. \tag{2.9}$$

[10] Ver definição de Entropia topológica no Apêndice A.

(8) Genericamente $x \in X$ tem comportamento histórico.

Demonstração. A decomposição em um número finito de componentes Baire ergódicos U_j, os atratores topológicos A_j, os itens (1), (2), (3) e $\omega_f(x) = A_j$ genericamente em U_j decorrem do Teorema 2.3.16. Além disso, segue do Teorema 2.3.16 e da Proposição 2.5.3 que $\mho_f(x) \supseteq \mathcal{M}^1(f\big|_{\mathcal{A}_j})$ genericamente em A_j, onde $\mathcal{A}_j = \{x \in A_j : \alpha_f(x) \supseteq A_j\}$ contém um subconjunto aberto e denso de A_j. Seja $\Lambda_j \subseteq B_{\delta/2}(\Lambda_j) \subseteq A_j$ o conjunto compacto dado pelo Lema 2.6.3 tal que $\omega_{\delta,f}(x) = \Lambda_j$ genericamente em U_j e consideremos um ponto $p \in B_{\delta/8}(\Lambda_j)$.

Afirmação 4 (Ferradura Local)**.** Dado $0 < \varepsilon < \delta/4$, existem conjuntos abertos S_0 e S_1, com $\overline{S_j} \subseteq B_\varepsilon(p)$, $j \in \{0,1\}$, $\overline{S_0} \cap \overline{S_1} = \emptyset$ e inteiros $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tais que $\overline{S_j}$ é uma componente conexa de $f^{-n_j}(\overline{B_\varepsilon(p)})$ e $f^{n_j}(\overline{S_j}) = \overline{B_\varepsilon(p)}$.

Demonstração. Seja $q \in B_{\delta/4}(p) \cap \Lambda_j$. Como $\mathfrak{G}(\delta)$ contém um conjunto residual, sejam $p_0, p_1 \in B_\varepsilon(p) \cap \mathfrak{G}(\delta)$ tais que $q \in \omega_{\delta,f}(p_j)$, para $j \in \{0,1\}$. Sejam

$$r = \min\{d(p_0,p_1)/3, d(p_0, \partial B_\varepsilon(p))/3, d(p_1, \partial B_\varepsilon(p))/3\}$$

e $n_j \in \mathcal{G}(r, \delta, p_j)$, $j \in \{0,1\}$, de tal forma que $f^{n_j}(p_j)$ seja suficientemente próximo a q para que $f^{n_j}(p_j) \in B_\delta(p)$. Logo, existem pré-bolas $V_{n_j,\delta}(p_j)$, $j \in \{0,1\}$, com diâmetros menores do que r tais que $f^{n_j}(V_{n_j,\delta}(p_j)) \supseteq \overline{B_\varepsilon(p)}$. Seja S_j a componente conexa de $(f^{n_j}\big|_{V_{n_j,\delta}(p_j)})^{-1}(B_\varepsilon(p))$ que contém p_j. Então, $f^{n_j}(\overline{S_j}) = \overline{B_\varepsilon(p)}$, $\overline{S_j} \subseteq B_r(p_j) \subseteq B_\varepsilon(p)$ e $\overline{S_0} \cap \overline{S_1} \subseteq B_r(p_0) \cap B_r(p_1) = \emptyset$ o que prova a Afirmação 4. □

Sejam $F_\varepsilon : \overline{S_0} \cup \overline{S_1} \to \overline{B_\varepsilon(p)}$ uma função dada por $F_\varepsilon(x) = f^{R(x)}(x)$, com $R(x) = n_j$, para $x \in \overline{S_j}$, onde S_j e n_j são como na Afirmação 4. Tomando $\Gamma_\varepsilon = \bigcap_{n \geqslant 0} F_\varepsilon^{-n}(\overline{B_\varepsilon(p)})$, podemos utilizar a *função itinerário*[11] a fim de obter uma semiconjugação entre $F_\varepsilon\big|_{\Gamma_\varepsilon}$ e o shift $\sigma : \Sigma_2^+ \to \Sigma_2^+$. Como isto implica que $h_{top}(F_\varepsilon) \geqslant h_{top}(\sigma) = \log 2$([12]), temos que

$$h_{top}(f\big|_{A_j}) \geqslant \frac{1}{2}(n_0 + n_1) h_{top}(F_\varepsilon) > 0,$$

o que prova o item (5). Do mesmo modo, segue desta semiconjugação que $\mathcal{M}_e^1(F_\varepsilon)$ é um conjunto não enumerável e, tendo em vista que $\int R\, d\mu \leqslant \max\{n_0, n_1\}$ para todo $\mu \in \mathcal{M}_e^1(F_\varepsilon)$, temos que $\mathcal{M}_e^1(f\big|_{A_j})$ também é um conjunto não enumerável, o que prova o item (6). Os itens (7) e (8) seguem da Proposição 2.5.3 e dos itens (2) e (4).

Observamos que a Afirmação 4 implica que para todo $p \in B_{\delta/4}(\Lambda_j)$ e todo $0 < \varepsilon < \delta/2$, existe uma probabilidade f-invariante ergódica μ tal que $\operatorname{supp} \mu \cap B_\varepsilon(p) \neq \emptyset$. Ou

[11] $I : \Gamma_\varepsilon \to \Sigma_2^+$ dada por $I(x)(n) = (\chi_{S_1} \circ F_\varepsilon^n)(x)$.

[12] Ver seção 10.2.2 de [OV] o porquê de $h_{top}(\sigma) = \log 2$.

seja, $\overline{\bigcup_{\mu\in\mathcal{M}^1_e(f|_{\mathcal{A}_j})}\operatorname{supp}\mu}\supseteq B_{\delta/4}(\Lambda_j)$ e, por transitividade e compacidade, isso implica que

$$A_j\supseteq\overline{\bigcup_{\mu\in\mathcal{M}^1_e(f|_{\mathcal{A}_j})}\operatorname{supp}\mu}\supseteq\overline{\mathcal{A}_j}=A_j.$$

Logo, já que $\omega_f^\star(x)=\overline{\bigcup_{\mu\in\mho_f(x)}\operatorname{supp}\mu}\supseteq\overline{\bigcup_{\mu\in\mathcal{M}^1_e(f|_{\mathcal{A}_j})}\operatorname{supp}\mu}$ genericamente em U_j, pelo Lema 2.4.3, temos que $\omega_f^\star(x)=A_j$ genericamente em U_j. Isto completa a demonstração do item (4). □

Corolário 2.6.5. *Sejam X um espaço métrico compacto e $f:X\to X$ uma função topologicamente crescente. Se f é fortemente transitiva, então f tem entropia topológica positiva e um conjunto não enumerável de probabilidades ergódicas invariantes. Além disto, genericamente, $x\in X$ tem comportamento histórico, $\omega_f^\star(x)=X$ e*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\varphi\circ f^j)(x)=\sup\left\{\int\varphi\,d\mu:\mu\in\mathcal{M}^1(f)\right\}$$

para toda função contínua $\varphi:X\to\mathbb{R}$.

Demonstração. Ver do item (3) ao (7) do Teorema 2.6.4. □

Teorema 2.6.6. *Sejam X um espaço métrico compacto e $f:X\to X$ uma função topologicamente crescente. Então existe uma coleção finita de atratores topológicos $A_1,\dots,A_\ell$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

(1) O conjunto $\beta_f(A_1)\cup\cdots\cup\beta_f(A_\ell)$ contém um subconjunto aberto e denso de X.

(2) O conjunto $\overline{\Omega(f)\setminus\bigcup_{j=0}^{\ell}A_j}$ é compacto com interior vazio.

(3) Genericamente, $x\in X$ tem comportamento histórico.

(4) Cada A_j é transitivo e $A_j=\overline{\operatorname{int}(A_j)}$.

(5) Genericamente em $\beta_f(A_j)$, $\omega_f^\star(x)=\omega_f(x)=A_j$.

(6) Para cada A_j, existe um conjunto positivamente invariante $\mathcal{A}_j\subseteq A_j$ que contém um subconjunto aberto e denso de A_j e f é transitiva em $\mathcal{A}_j$.

(7) $f|_{\mathcal{A}_j}$ tem uma quantidade não enumerável de probabilidades ergódicas invariantes.

(8) $h_{top}(f|_{\mathcal{A}_j})>0$.

(9) Se $\varphi \in C(X,\mathbb{R})$, então existem constantes $a_+, a_- \in \mathbb{R}$ tais que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\varphi\circ f^j)(x) = a_+ \geqslant \sup\left\{\int \varphi\, d\mu : \mu \in \mathcal{M}^1(f\big|_{\mathcal{A}_j})\right\} \geqslant$$
$$\geqslant \inf\left\{\int \varphi\, d\mu : \mu \in \mathcal{M}^1(f\big|_{\mathcal{A}_j})\right\} \geqslant a_- = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\varphi\circ f^j)(x)$$

genericamente em $\beta_f(A_j)$.

Demonstração. Todos os itens deste Teorema, exceto o (9), seguem do Teorema 2.6.4, pois cada componente Baire ergódico U_j é equivalente à bacia de atração $\beta_f(A_j)$. Agora, para finalizarmos a prova deste Teorema, suponhamos que $\varphi \in C(X,\mathbb{R})$. Segue da Baire ergodicidade de f que existe $a_+ \in \mathbb{R}$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\varphi\circ f^j)(x) = a_+ \text{ genericamente em } U_j.$$

Pelo mesmo raciocínio, existe $b_+ \in \mathbb{R}$ tal que

$$-\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\varphi\circ f^j)(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}-(\varphi\circ f^j)(x) = b_+ \text{ genericamente em } U_j.$$

Segue do item (7) do Teorema 2.6.4 que, genericamente em $\beta_f(A_j)$,

$$a_+ = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\varphi\circ f^j)(x) \geqslant \sup\left\{\int \varphi\, d\mu : \mu \in \mathcal{M}^1(f\big|_{\mathcal{A}_j})\right\} \tag{2.10}$$

e também que

$$b_+ = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}-(\varphi\circ f^j)(x) \geqslant \sup\left\{\int -\varphi\, d\mu : \mu \in \mathcal{M}^1(f\big|_{\mathcal{A}_j})\right\},$$

genericamente em $\beta_f(A_j)$. Definindo $a_- = b_+$, temos que, genericamente em $\beta_f(A_j)$,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\varphi\circ f^j)(x) = a_- = -\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}-(\varphi\circ f^j)(x) \leqslant$$
$$\leqslant -\sup\left\{\int -\varphi\, d\mu : \mu \in \mathcal{M}^1(f\big|_{\mathcal{A}_j})\right\} = \inf\left\{\int \varphi\, d\mu : \mu \in \mathcal{M}^1(f\big|_{\mathcal{A}_j})\right\}.$$

Isto completa a prova deste Teorema. □

Capítulo 3

Aplicações do intervalo

Desde os estudos de Poincaré e Denjoy, a existência de intervalos errante é um problema central em Dinâmica unidimensional. Um problema em particular é entender o comportamento assintótico das órbitas e em provar a finitude dos atratores. Em [Gu], Guckenheimer demonstra que aplicações S-unimodal não flat não admitem intervalo errante e cada uma tem um único atrator topológico.

Os resultados de Guckenheimer foram generalizados por Blokh e Lyubich, em [BL], para aplicações não flat S-multimodal e por Lyubich, em [Ly89], para aplicações C^3 não flat multimodal. Em ambos artigos, Blokh e Lyubich mostram a inexistência de intervalo errante e a finitude de atratores topológicos. Para aplicações C^2 não flat, a inexistência de intervalo errante foi provada por de Melo e van Strien em [MvS]. Em [vSV], van Strien e Vargas demonstraram a finitude de atratores métricos não periódicos para aplicações C^2 não flat e obtiveram uma prova alternativa para a inexistência de intervalos errantes para aplicações C^2 não flat. Todos os artigos mencionados acima fazem uso um entendimento profundo do comportamento assintótico dessas dinâmicas e da inexistência de intervalo errante para obter a finitude de atratores topológicos ou métricos não periódicos.

Em [Br], Brandão mostrou a unicidade de atrator topológico não periódico para aplicações C^2 contráteis de Lorenz não flat. O mesmo resultado para atratores métricos foi obtido por Keller e St. Pierre em [SP, KSP] supondo que a aplicção de Lorenz é C^3 com derivada Schwarziana negativa. Em [BPP21], Brandão, Palis e Pinheiro provaram o resultado de Keller e St. Pierre sem supor que aplicação é não flat.

Em [BPP19] Brandão Palis e Pinheiro mostraram que a existência de intervalo errante não é um impedimento para a prova da finitude de atratores métricos não periódicos para aplicações me geral mesmo com várias descontinuidades. Isso também é verdade para atratores topológicos, então combinando essa informação com o Formalismo Ergódico, foi provado em [Pi2] a finitude de atratores topológicos não periódicos para funções descontínuas que são C^2 por partes. Apresentamos este resultado no Teorema 3.1.20.

3.1 Formalismo Ergódico para aplicações do intervalo

Sejam $\mathcal{C} \subseteq (0,1)$ um conjunto finito e $f : [0,1] \setminus \mathcal{C} \to [0,1]$ um homeomorfismo local. Seja $f^* : 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ uma função dada por

$$f^*(U) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } U \subseteq \mathcal{C} \\ f(U \setminus \mathcal{C}) & \text{se } U \not\subseteq \mathcal{C} \end{cases}.$$

Devido às descontinuidades de f, vamos estender o conceito de pontos periódicos. Dados $p, q \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$, escrevemos $f^n(p_-) = q_-$ se $f^n(p-\delta, p) \cap (p-\delta, p) \neq \emptyset$ para todo $\delta > 0$. Analogamente, escrevemos $f^n(p_+) = q_+$ se $f^n(p, p+\delta) \cap (p, p+\delta) \neq \emptyset$ para todo $\delta > 0$. Dizemos que $p \in [0,1]$ é um *ponto tipo-periódico de f* se existe $k \geqslant 1$ tal que $f^k(p_-) = p_-$ ou $f^k(p_+) = p_+$.

Um *atrator tipo-periódico* é um conjunto finito $A = \{p, f(p_-), \ldots, f^{n-1}(p_-)\}$, com $f^n(p) = p_-$, ou $A = \{p, f(p_+), \ldots, f^{n-1}(p_+)\}$, com $f^n(p) = p_+$, tal que, para algum $r > 0$,

(1) $f^n\big|_{(p-r,r)}$ é um homeomorfismo, $f^n(p-r,p) \subseteq (p-r,r)$ e $\lim_j f^{nj}(x) = p$ para todo $x \in (p-r,p)$ ou

(2) $f^n\big|_{(p,p+r)}$ é um homeomorfismo, $f^n(p,p+r) \subseteq (p,p+r)$ e $\lim_j f^{nj}(x) = p$ para todo $x \in (p,p+r)$.

Denotamos a *união das bacias de atração de todos os atratores tipo-periódicos* por $\mathbb{B}(f)$ e por $\mathrm{Per}\,(f)$ o *conjunto de todos os pontos tipo-periódicos de f*.

Definição 3.1.1. Dizemos que um intervalo $I \subseteq [0,1]$ é um *homeotervalo de f* se $f^n\big|_I$ é um homeomorfismo para todo $n \geqslant 1$.

Definição 3.1.2. Dizemos que um homeotervalo $J \subseteq [0,1]$ é um *intervalo errante* se $J \cap \mathbb{B}(f) = \emptyset$ e $f^j(J) \cap f^k(J) = \emptyset$ para todo $j \in \{1, \ldots, k-1\}$.

O *conjunto não errante de f*, denotado por $\Omega(f)$, é o conjunto dos pontos $x \in [0,1]$ tais que $V \cap \bigcup_{n \geqslant 0} f^{*n}(V) \neq \emptyset$ para toda vizinhança aberta V de x. Logo, $I \cap \Omega(f) = \emptyset$ para todo intervalo errante I.

Lema 3.1.3 (Lema do Homeotervalo; [MvS]). *Seja $I \subseteq [0,1]$ um homeotervalo de f. Então, temos as seguintes possibilidades:*

(a) I é um intervalo errante;

(b) todo ponto de I está contido na "bacia de uma órbita tipo periódica", ou seja, $I \subseteq \mathbb{B}(f) \cup \mathcal{O}_f^-(\mathrm{Per}\,(f))$: algum iterado de I é mapeado em um intervalo L tal que f^m leva L monotonicamente nele mesmo para algum $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Suponhamos que nem todos os intervalos $I, f(I), f^2(I), \ldots$ são disjuntos. Então, existem $n, m \geqslant 0$ tais que $\mathrm{int}\,(f^n(I)) \cap \mathrm{int}\,(f^{n+m}(I)) \neq \emptyset$. Logo, para todo $k \geqslant 0$,

$$f^{km}(f^n(I) \cap f^{n+m}(I)) = f^{n+km}(I) \cap f^{n+(k+1)m}(I) \neq \emptyset$$

e, então, $L = \overline{\bigcup_{k \geqslant 0} f^{n+km}(I)}$ é um intervalo. Além disso, $f^m\big|_L$ é um homeomorfismo e, pela teoria de homeomorfismos em $\mathbb{R}$, se $x \in L$, então ou $x \in \mathrm{Per}(f^m)$ ou $x \in \mathbb{B}(f^m)$. Isto implica que $I \subseteq \mathbb{B}(f) \cup \mathcal{O}_f^-(\mathrm{Per}\,(f))$. □

Concluímos do Lema 3.1.3 que se $I = (a, b)$ não é um homeotervalo, tomando

$$n = \min\{j \geqslant 0 : f^j(I) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset\},$$

então existe $c \in \mathcal{C}$ tal que $c \in f^n(I)$ e $f^n\big|_I$ é um homeomorfismo entre I e o intervalo aberto $f^n(I)$. Consequentemente, se I não é um homeotervalo de f, então

$$\mathrm{int}\left(\bigcup_{n \geqslant 0} f^n(I)\right) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset.$$

Lema 3.1.4. *Se $U \subseteq [0, 1]$ é um componente Baire ergódico de f, então $U \cap \mathbb{B}(f) \sim \emptyset$.*

Demonstração. Se $U \cap \mathbb{B}(f) \not\sim \emptyset$, então existiriam um intervalo aberto (a, b), com $(a, b) \setminus U \sim \emptyset$ tal que $(a, b) \subseteq \beta_f(A)$, onde $A = \{p, f(p_-), \ldots, f^{n-1}(p_-)\}$, e $\varepsilon > 0$ tal que

(i) $f^n((p, p+\varepsilon]) = (p, f(p+\varepsilon)] \subseteq (p, p+\varepsilon)$

(ii) ou $f^n([p-\varepsilon, p)) = [f(p-\varepsilon), p) \subseteq [p-\varepsilon, p)$.

Para o caso (i), tomaríamos $\gamma \in (p, p+\varepsilon)$ e definiríamos

$$V_0 = \bigcup_{j \geqslant 0} f^{-j}\left(\bigcup_{i \geqslant 0} f^i(p, \gamma)\right) \quad \text{e} \quad V_1 = \bigcup_{j \geqslant 0} f^{-j}\left(\bigcup_{i \geqslant 0} f^i(\gamma, p+\varepsilon)\right).$$

Observando que V_0 e V_1 seriam conjuntos gordos invariantes e $V_0 \cap V_1 = \emptyset$, concluiríamos que $V_0 \cap U$ e $V_1 \cap U$ seriam conjuntos gordos quase invariantes contidos em U, o que contradiria U ser um componente Baire ergódico. Para o caso (ii), tomaríamos $\gamma \in (p-\varepsilon, p)$ e definiríamos

$$W_0 = \bigcup_{j \geqslant 0} f^{-j}\left(\bigcup_{i \geqslant 0} f^i(p-\varepsilon, \gamma)\right) \quad \text{e} \quad W_1 = \bigcup_{j \geqslant 0} f^{-j}\left(\bigcup_{i \geqslant 0} f^i(\gamma, p)\right).$$

Neste caso, também conseguiríamos uma decomposição de U em dois conjuntos gordos invariantes, ou seja, obteríamos novamente uma contradição com U ser um componente Baire ergódico. Portanto, $U \cap \mathbb{B}(f) \sim \emptyset$. □

Lema 3.1.5. *Se $U \subseteq [0,1]$ é um componente Baire ergódico de f, então $U \cap \mathcal{O}_f^-(\mathrm{Per}\,(f)) \sim \emptyset$.*

Demonstração. Observamos que $\omega_f(x)$ é uma órbita periódica para cada $x \in \mathcal{O}_f^-(\mathrm{Per}\,(f))$. Por outro lado, $\omega_f(x) = A$ genericamente em U, onde A é o atrator topológico de U. Portanto, se $U \cap \mathcal{O}_f^-(\mathrm{Per}\,(f))$ é um conjunto gordo, então A é genericamente em U uma órbita periódica e

$$(U \cap \mathcal{O}_f^-(\mathrm{Per}\,(f))) \setminus (U \cap \mathcal{O}_f^-(A)) \sim \emptyset.$$

Em particular, $U \cap \mathcal{O}_f^-(A)$ é um conjunto gordo. Todavia, como A é finito e f é não singular, temos que $\mathcal{O}_f^-(A)$ é um conjunto magro, o que contradiz $U \cap \mathcal{O}_f^-(A)$ ser gordo. □

Lema 3.1.6. *Se $U \subseteq [0,1]$ é um componente Baire ergódico de f e $I \subseteq [0,1]$ é um homeotervalo de f, então $U \cap I \sim \emptyset$.*

Demonstração. Suponhamos que $U \cap I$ é um conjunto gordo. Seja $(p,q) \subseteq I$ tal que $U \cap (p,q) \sim (p,q)$. Se (p,q) não é um intervalo errante, segue do Lema 3.1.3 que $(p,q) \subseteq \mathbb{B}(f) \cup \mathcal{O}_f^-(\mathrm{Per}\,(f))$, mas isso é impossível pelos Lemas 3.1.4 e 3.1.5, visto que $U \cap (p,q) \sim (p,q)$. Então, (p,q) é um intervalo errante. Neste caso, temos que $U_0 = \bigcup_{n \geqslant 0} f^n(p,(p+q)/2)$ e $U_1 = \bigcup_{n \geqslant 0} f^n((p+q)/2, q)$ são conjuntos abertos positivamente invariantes, e $U_0 \cap U_1 = \emptyset$. Isso implica que $W_0 = \bigcup_{j \geqslant 0} f^{-j}(U_0)$ e $W_1 = \bigcup_{j \geqslant 0} f^{-j}(U_1)$ são conjuntos abertos invariantes, e $W_0 \cap W_1 = \emptyset$. Portanto,

$$f^{-1}(U \cap W_0) \sim U \cap W_0 \not\sim \emptyset \not\sim U \cap W_1 \sim f^{-1}(U \cap W_1).$$

Como U é componente Baire ergódico, W_0 e W_1 são residuais em U. Mas isso é impossível, porque teríamos dois conjuntos residuais em U que são disjuntos. □

Lema 3.1.7. *Seja $U \subseteq [0,1]$ um conjunto mensurável quase invariante. Se U é um conjunto gordo, então U é um componente Baire ergódico de f se, e somente se, $f\big|_U$ é assintoticamente transitiva.*

Demonstração. Como $\mathcal{C}$ é finito e f é um homeomorfismo local, temos que

$$U' = \bigcup_{n \geqslant 0} f^{-n} \left(\bigcap_{j \geqslant 0} f^{-j}(U) \right)$$

é um conjunto f-invariante e $U' \sim U$ pelo Lema 2.3.3. Como U' é um conjunto boreliano, U é um conjunto com a propriedade de Baire e é um espaço de Baire com respeito a topologia induzida. Ademais, $f\big|_{U'}$ é contínua e não singular. Assim, segue da Proposição 2.1.14 que $f\big|_{U'}$ é Baire ergódica se, e somente se, $f\big|_{U'}$ é assintoticamente transitiva. Já que $U' \sim U$, U é um componente Baire ergódico de f se, e somente se, $f\big|_{U'}$ é Baire ergódica se, e somente se, $f\big|_{U'}$ é assintoticamente transitiva se, e somente se, $f\big|_U$ é assintoticamente transitiva. □

Proposição 3.1.8. *Seja $H(f)$ a união de todos os homeotervalos de f. Se $[0,1] \setminus H(f)$ é um conjunto gordo, então $[0,1] \setminus H(f)$ pode ser decomposto no máximo em $\#\mathcal{C}$ componentes Baire ergódicos. Ademais, se U é um componente Baire ergódico de f, então $U \cap H(f) \sim \emptyset$.*

Demonstração. Sejam $M \subseteq [0,1]$ um conjunto aberto tal que $M \sim [0,1] \setminus H(f)$. Seja $X = \overline{M}$. Observamos que se $x \in X$, então $B_\varepsilon(x) \not\subseteq H(f)$ para todo $\varepsilon > 0$, pois $M \sim [0,1] \setminus H(f)$. Logo, $f^n\big|_{B_\varepsilon(x)}$ não é um homeomorfismo para todo $\varepsilon > 0$ e para algum $n \in \mathbb{N}$. Segue que $\bigcup_{n \geqslant 0} f^{*n}(B_\varepsilon(x)) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$. Então, para cada $c \in \mathcal{C}$, definimos

$$\mathcal{U}(c) = \left\{ x \in X : c \in \bigcup_{n \geqslant 0} f^{*n}(B_\varepsilon(x)) \ \forall \varepsilon > 0 \right\}. \tag{3.1}$$

Então, $X = \bigcup_{c \in \mathcal{C}} \mathcal{U}(c)$. De fato, se $x \in X$, então existe $c \in \mathcal{C}$ tal que $c \in \bigcup_{n \geqslant 0} f^{*n}(B_\varepsilon(x))$ para todo $\varepsilon > 0$. Logo, um elemento de $\{\mathcal{U}(c) : c \in \mathcal{C}\}$ é um conjunto gordo.

Afirmação 5. O conjunto $\mathcal{U}(c)$ é compacto para cada $c \in \mathcal{C}$. Em particular, $\mathcal{U}(c)$ é mensurável para cada $c \in \mathcal{C}$.

Demonstração. Seja $p \in \overline{\mathcal{U}(c)}$, ou seja, $p = \lim_n p_n$ para alguma sequência $p_n \in \mathcal{U}(c)$. Dado $\varepsilon > 0$, sejam $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p_{n_0} \in B_\varepsilon(p)$ e $\delta > 0$ tal que $B_\delta(p_{n_0}) \subseteq B_\varepsilon(p)$. Como $p_{n_0} \in \mathcal{U}(c)$, temos que

$$c \in \bigcup_{n \geqslant 0} f^{*n}(B_\delta(p_{n_0})) \subseteq \bigcup_{n \geqslant 0} f^{*n}(B_\varepsilon(p)),$$

logo $p \in \mathcal{U}(c)$. Concluímos que $\mathcal{U}(c)$ é compacto para todo $c \in \mathcal{C}$. □

Afirmação 6. $\mathcal{U}(c) \setminus \mathcal{C} \subseteq f^{-1}(\mathcal{U}(c)) \subseteq \mathcal{U}(c)$. Em particular, $f^{-1}(\mathcal{U}(c)) \sim \mathcal{U}(c)$.

Demonstração. Fixemos $p \in \mathcal{U}(c)$. Se $q \in f^{-1}(p) \subseteq f^{-1}(\mathcal{U}(c))$, então $f^*(B_\varepsilon(q))$ é uma vizinhança aberta de p para todo $\varepsilon > 0$. Então, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(p) \subseteq f^*(B_\varepsilon(q))$. Segue que

$$c \in \bigcup_{n \geqslant 0} f^{*n}(B_\delta(p)) \subseteq \bigcup_{n \geqslant 0} f^{*n}(B_\varepsilon(q))$$

para todo $\varepsilon > 0$. Isto prova que $q \in \mathcal{U}(c)$. Concluímos que $f^{-1}(\mathcal{U}(c)) \subseteq \mathcal{U}(c)$.

Ainda, se $p \notin \mathcal{C}$, então $f^{-1}(B_\varepsilon(f(p)))$ é uma vizinhança aberta de p para todo $\varepsilon > 0$ e, então, tomando $\delta_\varepsilon \in (0, d(p, \mathcal{C}))$, onde $d(p, \mathcal{C}) = \min\{|p - c| : c \in \mathcal{C}\}$, satisfazendo $B_{\delta_\varepsilon}(p) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(p)))$, temos que $f^*(B_{\delta_\varepsilon}(p)) \subseteq B_\varepsilon(f(p))$. Logo,

$$c \in \bigcup_{n \geqslant 0} f^{*n}(B_{\delta_\varepsilon}(p)) \subseteq \bigcup_{n \geqslant 0} f^{*n}(B_\varepsilon(f(p))).$$

Isto prova que $f(p) \in \mathcal{U}(c)$ e então, $f^*(\mathcal{U}(c)) = f(\mathcal{U}(c) \setminus \mathcal{C}) \subseteq \mathcal{U}(c)$. Portanto, $\mathcal{U}(c) \setminus \mathcal{C} \subseteq f^{-1}(\mathcal{U}(c))$. Observamos que $\mathcal{U}(c) \setminus f^{-1}(\mathcal{U}(c)) = \mathcal{C}$, um conjunto magro, logo $f^{-1}(\mathcal{U}(c)) \sim \mathcal{U}(c)$. □

Suponhamos que $\mathcal{U}(c)$ é um conjunto gordo. Como $\mathcal{U}(c)$ é compacto, $\operatorname{int}(\mathcal{U}(c)) \neq \emptyset$. Dados conjuntos abertos não vazios $V_0, V_1 \subseteq \mathcal{U}(c)$, temos que

$$c \in \left(\bigcup_{n \geqslant 0} f^{*n}(V_0) \right) \cap \left(\bigcup_{n \geqslant 0} f^{*n}(V_1) \right).$$

Isto prova que f restrita a $\mathcal{U}(c)$ é assintoticamente transitiva. Tendo em vista que $\mathcal{U}(c)$ é um conjunto mensurável quase invariante, segue do Lema 3.1.7 que

Se $\mathcal{U}(c)$ é um conjunto gordo, então $\mathcal{U}(c)$ é um componente Baire ergódico para f.

Afirmação 7. Se $\mathcal{U}(c)$ é um conjunto gordo, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(c) \subseteq \mathcal{U}(c)$.

Demonstração. Já que $\mathcal{U}(c)$ é um conjunto compacto gordo, existe $p \in \operatorname{int}(\mathcal{U}(c))$. Tomando $\delta > 0$ tal que $B_\delta(p) \subseteq \mathcal{U}(c)$, segue, da definição de $\mathcal{U}(c)$, que $c \in f^{*n}(B_\delta(p))$ para algum $n \geqslant 0$ e, como $f^{*n}(B_\delta(p))$ é um conjunto aberto, $B_\varepsilon(c) \subseteq f^{*n}(B_\delta(p))$ para algum $\varepsilon > 0$. Como $f^{-1}(\mathcal{U}(c)) \sim \mathcal{U}(c)$, temos que $f^{-m}(\mathcal{U}(c)) \sim \mathcal{U}(c)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Em particular, $f^{-n}(\mathcal{U}(c)) \sim \mathcal{U}(c)$. Logo, $\mathcal{U}(c) \setminus f^{-n}(\mathcal{U}(c))$ é um conjunto magro. Então, $B_\delta(p) \setminus f^{-n}(\mathcal{U}(c)) \subseteq \mathcal{U}(c) \setminus f^{-n}(\mathcal{U}(c))$ é um conjunto magro. Segue que $f^n(B_\delta(p)) \setminus f^n(f^{-n}(\mathcal{U}(c)))$ é um conjunto magro. Consequentemente, $f^{*n}(B_\delta(p)) \setminus \mathcal{U}(c) \subseteq f^n(B_\delta(p)) \setminus f^n(f^{-n}(\mathcal{U}(c)))$ é um conjunto magro. Temos, então, que $B_\varepsilon(c) \setminus \mathcal{U}(c) \sim \emptyset$. Assim, pela compacidade de $\mathcal{U}(c)$, $B_\varepsilon(c) \subseteq \mathcal{U}(c)$. □

Seja $\mathcal{C}_0 = \{c \in \mathcal{C} : \mathcal{U}(c) \text{ é um conjunto gordo}\}$. Sejam $c, c' \in \mathcal{C}_0$. Como $\mathcal{U}(c)$ e $\mathcal{U}(c')$ são componentes Baire ergódicos, ou $\mathcal{U}(c) \sim \mathcal{U}(c')$ ou $\mathcal{U}(c) \cap \mathcal{U}(c') \sim \emptyset$. Logo, podemos escolher $\{c_1, \ldots, c_\ell\} \subseteq \mathcal{C}_0$ tal que para cada $c \in \mathcal{C}_0$, exista um único c_j, $j \in \{1, \ldots, \ell\}$, tal que $\mathcal{U}(c) \sim \mathcal{U}(c_j)$. Portanto, $\{\mathcal{U}(c_1), \ldots, \mathcal{U}(c_\ell)\}$ é uma decomposição Baire ergódica de $[0,1] \setminus H(f)$ para f. Observamos que $\ell \leqslant \#\mathcal{C}$ e que $H(f) \cap U \sim \emptyset$ para qualquer U componente Baire ergódico para f pelo Lema 3.1.6. Assim, está concluída a prova. □

Corolário 3.1.9 (Ω-decomposição de aplicações do intervalo)**.** *Sejam $\mathcal{C} \subseteq (0,1)$ um conjunto finito e $f : [0,1] \setminus \mathcal{C} \to [0,1]$ um homeomorfismo local tal que* $\operatorname{Per}(f)$ *seja um conjunto enumerável. Se $\Omega(f)$ é um conjunto gordo, então $\Omega(f)$ pode ser decomposto em no máximo $\#\mathcal{C}$ componentes Baire ergódicos.*

Demonstração. Seja $H(f)$ a união de todos os homeotervalos de f. Observamos que $\Omega(f) \cap H(f) \subseteq \operatorname{Per}(f) \subseteq \Omega(f)$. De fato, se $f^n(p) = p$, ou seja, se $p \in \operatorname{Per}(f)$, para algum $n > 0$, e $V \subseteq [0,1]$ é uma vizinhança aberta de p, então $p \in f^n(V) \cap V$, ou seja, $p \in \Omega(f)$. Concluímos disso que $\operatorname{Per}(f) \subseteq \Omega(f)$. Ainda, fixado $p \in \Omega(f) \cap H(f)$, seja I um homeotervalo que contém p. Então, $f^n(I) \cap I \neq \emptyset$ para algum $n > 0$. Pela demonstração do Lema 3.1.3, os pontos de I são mapeados para pontos fixos de $f^m\big|_L$ ou para algum iterado de ponto fixo de $f^m\big|_L$, onde L é definido na prova do Lema 3.1.3. Portanto, $p \in \mathrm{Per}\,(f)$. Concluímos que $\Omega(f) \cap H(f) \subseteq \mathrm{Per}\,(f)$. Como $\mathrm{Per}\,(f) \sim \emptyset$, segue que $\Omega(f) \cap H(f) \sim \emptyset$. Logo, a decomposição Baire ergódica de $[0,1] \setminus H(f)$, dada pela Proposição 3.1.8, induz uma decomposição Baire ergódica de $\Omega(f)$. □

O próximo resultado que demonstraremos será enunciado em um contexto mais geral: o de espaços métricos de Baire separáveis.

Proposição 3.1.10. *Sejam X um espaço métrico de Baire separável e $f : X \to X$ uma função contínua. As seguintes propriedades são equivalentes:*

(1) Existe $x \in X$ tal que $\omega_f(x) = X$;

(2) Para um subconjunto residual de pontos $x \in X$, temos que $\omega_f(x) = X$;

(3) Para todo conjunto aberto não vazio $U \subseteq X$ o conjunto $\bigcup_{n\geqslant 0} f^{-n}(U)$ é denso em X, ou seja, f é transitiva.

Demonstração. (1) $\implies$ (3). Sejam $U \subseteq X$ um conjunto aberto não vazio e $y \in X$. Fixemos $x \in X$ tal que $\omega_f(x) = X$. Como $y \in \omega_f(x)$, para cada vizinhança aberta V de y, existe $n > 0$ tal que $f^n(x) \in V$. Além disto, já que $\omega_f(x) = X$, podemos encontrar um $m > 0$ tal que $f^m(x) \in U$. Tomemos $m > n$. Então, como $f^n(x) \in V$ e $f^m(x) \in U$, temos

$$f^{-(m-n)}(U) \supseteq f^{-(m-n)}(\{f^m(x)\}) \supseteq \{f^n(x)\},$$

então, $f^{-(m-n)}(U)$, que está contido em $\bigcup_{j\geqslant 0} f^{-j}(U)$, intersecta V. Como V é arbitrário, $y \in \overline{\bigcup_{j\geqslant 0} f^{-j}(U)}$.

(3) $\implies$ (2). Seja $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ uma base enumerável de abertos para X. Já que para cada i, o conjunto $f^{-i}(U_n)$ é aberto, segue da hipótese que

$$S_{i,n} = \bigcup_{j\geqslant i} f^{-j}(U_n) = \bigcup_{j\geqslant 0} f^{-j}(f^{-i}(U_n))$$

é aberto e denso. Seja

$$S_n = \bigcap_{i\geqslant 0} S_{i,n}.$$

Então, S_n é residual para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que $S = \bigcap_n S_n$ também é residual. Afirmamos que se $x \in S$, então $x \in \omega_f(x)$, ou seja, para todo conjunto aberto U, temos que $f^m(x) \in U$ para infinitos valores de $m > 0$. Como U contém algum U_n, vamos provar essa afirmação para $U = U_n$. Temos que

$$x \in S \subseteq S_n \subseteq \bigcap_{i\geqslant 0} \bigcup_{j\geqslant i} f^{-j}(U_n).$$

Isto significa que $x \in f^{-m}(U_n)$ para infinitos valores de m. Para estes mesmos valores, temos que $f^m(x) \in U_n$.

(2) $\implies$ (1). Se para um conjunto residual de pontos $x \in X$, temos que $\omega_f(x) = X$, em particular, existe $x \in X$ tal que $\omega_f(x) = X$. □

Lema 3.1.11. *Sejam $U \subseteq (a,b) \subseteq [0,1]$ um conjunto aberto não vazio e $\mathcal{P}$ a coleção de todas as componentes conexas de U. Seja $F : U \to [a,b]$ uma função ramo completa*[1]*. Se $\overline{U_0}$ tem interior não vazio, onde $U_0 = \bigcap_{n\geqslant 0} F^{-n}(a,b)$, então ou $\omega_F(x) = [a,b]$ genericamente em (a,b) ou $\overline{U_0} \sim H$, onde H é uma união de homeotervalos de F.*

Demonstração. Dados $n \in \mathbb{N}$ e $x \in F^{-n}(a,b)$, seja $\mathcal{P}_n(x)$ a componente conexa de $F^{-n}(a,b)$ que contém x. Note que se $\lim_n \operatorname{diam}(\mathcal{P}_n(x)) > 0$ para algum $x \in U_0$, então $I = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n(x)$ é um homeotervalo. De fato, como $I \subseteq \mathcal{P}_n(x)$ e $F^n\big|_{\mathcal{P}_n(x)}$ é um homeomorfismo entre $\mathcal{P}_n(x)$ e (a,b), para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $F^n\big|_I$ é um homeomorfismo entre I e $F^n(I)$. Logo, já que I é um intervalo, I é um homeotervalo. Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $P_n \in \mathcal{P}$ tal que $F^n(I) \subseteq P_n$.

Portanto, $V = \{x \in U_0 : \lim_n \operatorname{diam}(\mathcal{P}_n(x)) > 0\}$ é um subconjunto de H. Seja $T = U_0 \setminus V$. Se $\overline{T} \sim \emptyset$, então $\overline{U_0} \sim H$, logo a demonstração estaria concluída. Então, podemos supor que $B = \operatorname{int}(\overline{T})$ é não vazio.

Fixemos $p \in B \cap T$. Tomando $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos que $\mathcal{P}_n(p) \subseteq B$. Observamos que

$$F^*(T) = F(U_0 \setminus V) = F^*\left(\bigcap_{n\geqslant 0} F^{-n}(a,b) \setminus V\right) \subseteq \bigcap_{n\geqslant 0} F^*(F^{-n}(a,b) \setminus V) \subseteq T.$$

Logo, T é positivamente invariante. Como T é denso em B e $F^{*n}\big|_{\mathcal{P}_n(p)}$ é um homeomorfismo de $\mathcal{P}_n(p)$ em (a,b), temos que $F^n(T)$ é denso em (a,b). Logo, T é denso em (a,b), pois T é positivamente invariante. Consequentemente, $\operatorname{int}(V) = \emptyset$ e, pela definição de V, $V = \emptyset$. Assim, $U_0 = T$ é denso em (a,b), $\operatorname{diam}(\mathcal{P}_n(x)) \to 0$ para todo $x \in U_0$ e $F^{*n}(\mathcal{P}_n(x)) = (a,b)$. Já que estas propriedades implicam que F é transitiva (F é transitiva, porque todo intervalo aberto J que contém x é um subconjunto de $\mathcal{P}_n(x)$, e como $\operatorname{diam}(\mathcal{P}_n(x)) \to 0$ para todo $x \in U_0$, $J \supseteq \mathcal{P}_n(x)$ para n suficientemente grande), $\omega_F(x) = [a,b]$ genericamente em (a,b). □

Definição 3.1.12. Suponhamos que f é um difeomorfismo local C^2. Dizemos que f é *não flat* se para cada $c \in \mathcal{C}$, existem $\varepsilon > 0$, constantes $\alpha, \beta \geqslant 1$ e difeomorfismos C^2, $\phi_0 : [c-\varepsilon, c] \to \operatorname{Im}(\phi_0)$ e $\phi_1 : [c, c+\varepsilon] \to \operatorname{Im}(\phi_1)$, tais que $\phi_0(c) = \phi_1(c) = 0$ e

$$f(x) = \begin{cases} a + (\phi_0(x))^\alpha, & \text{se } x \in (c-\varepsilon, c) \cap (0,1) \\ b + (\phi_1(x))^\beta, & \text{se } x \in (c, c+\varepsilon) \cap (0,1) \end{cases},$$

[1] Dizemos que F é uma *função ramo completa* se é um homeomorfismo local e $F(P) = (a,b)$ para todo $P \in \mathcal{P}$.

onde $a = f(c_-) = \lim_{0<\delta\to 0} f(c-\delta)$ e $b = f(c_+) = \lim_{0<\delta\to 0} f(c+\delta)$. Dizemos que f é *não degenerada* se f é não flat e $\operatorname{Per}(f)$ é um conjunto magro.

Nas mesmas condições da Proposição 3.1.10, uma órbita positiva é densa em X se, e somente se, f é transitiva. De fato, seja $x \in X$ tal que $\overline{\mathcal{O}_f^+(f^n(x))} = X$ para todo $n \geqslant 0$. Logo, $\omega_f(x) = \bigcap_{n\geqslant 0} \overline{\mathcal{O}_f^+(f^n(x))} = X$, ou seja, f é transitiva. Reciprocamente, se f é transitiva, $\omega_f(x) = X$. Como $\omega_f(x) \subseteq \overline{\mathcal{O}_f^+(f^n(x))}$ para todo $n \geqslant 0$, $\overline{\mathcal{O}_f^+(f^n(x))} = X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\overline{\mathcal{O}_f^+(f^n(x))}$ é densa em X.

Sejam X um espaço métrico, $g : X \to X$ uma função mensurável e μ uma probabilidade invariante por g. Seja $E \subseteq X$ um conjunto mensurável tal que $\mu(E) > 0$. Consideremos a função *tempo de primeiro retorno* $\rho_E : E \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definida da seguinte forma:

$$\rho_E(x) = \min\{n \geqslant 1 : g^n(x) \in E\} \tag{3.2}$$

sempre que o conjunto do lado direito for não vazio; caso contrário, $\rho_E(x) = \infty$. Seja $\rho(x) = \rho_E(x)$. A *função de primeiro retorno a* E é definida por

$$G(x) = g^{\rho(x)}(x) \tag{3.3}$$

em um subconjunto de medida total de E.

Definição 3.1.13. Um *ciclo de intervalos para* f é uma união de intervalos compactos disjuntos $I_1, \ldots, I_t \subseteq [0,1]$ tal que f é transitiva em $\bigcup_{j=1}^t I_j$.

Definição 3.1.14. Dizemos que $A \subseteq [0,1]$ é um *conjunto de Cantor* se A é um conjunto compacto, $\operatorname{int}(A) = \emptyset$ e A não admite pontos isolados.

Lema 3.1.15. *Se $x \in [0,1] \setminus \mathcal{O}_f^-(\mathcal{C})$ e $\operatorname{int}(\omega_f(x)) \neq \emptyset$, então $f\big|_{\omega_f(x)}$ é transitiva e $\omega_f(x) = I_1 \cup \cdots \cup I_t$, onde $\{I_1, \ldots, I_t\}$ é uma coleção finita de intervalos compactos dois-a-dois disjuntos.*

Demonstração. Como $\operatorname{int}(\omega_f(x)) \neq \emptyset$, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $y = f^\ell(x) \in \operatorname{int}(\omega_f(x))$, e, então $\omega_f(x) = \overline{\mathcal{O}_f^+(y)}$ com $y \in \omega_f(x)$, provando que

$$f\big|_{\omega_f(x)} \text{ é transitiva.} \tag{3.4}$$

Seja $\{J_1, \ldots, J_s\}$ a coleção de todas as componentes conexas J de $\omega_f(x)$ tal que $\operatorname{int}(J) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Por construção, $\{J_1, \ldots, J_s\}$ é uma coleção finita de intervalos fechados dois-a-dois disjuntos. Seja $\mathcal{U}$ o conjunto de todas as componentes conexas de $(J_1 \cup \cdots \cup J_s) \setminus \mathcal{C}$. Dado $I \in \mathcal{U}$, segue de (3.4) que $f^j(\operatorname{int}(I)) \cap \bigcup_{i=1}^s \operatorname{int}(J_i) \neq \emptyset$. Então, para cada $I \in \mathcal{U}$, seja

$$r(I) = \min\left\{ j \geqslant 1 : f^j(\operatorname{int}(I)) \cap \bigcup_{i=1}^s \operatorname{int}(J_i) \neq \emptyset \right\}.$$

Afirmação 8. A aplicação $f^{r(I)}|_{\text{int}\,(I)}$ é um homeomorfismo para todo $I \in \mathcal{U}$.

Demonstração. Se $f^j(\text{int}\,(I)) \cap \mathcal{C} = \emptyset$ para todo $j \in \{1, \ldots, r(I)-1\}$, então a Afirmação é verdadeira. Logo, suponhamos que $\ell = \min\{j \geqslant 1 : f^j(\text{int}\,(I)) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset\} < r(I)$. Neste caso, $f^\ell|_{\text{int}\,(I)}$ é um homeomorfismo e $f^\ell(\text{int}\,(I)) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Assim, visto que $f^\ell(\text{int}\,(I)) \subseteq \text{int}\,(\omega_f(x))$, temos que $f^\ell(\text{int}\,(I)) \cap \bigcup_{i=1}^s \text{int}\,(J_i) \neq \emptyset$, o que contradiz a definição de $r(I)$. Portanto, $r(I) = \min\{j \geqslant 1 : f^j(\text{int}\,(I)) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset\}$, e assim, $f^{r(I)}|_{\text{int}\,(I)}$ é um homeomorfismo para todo $I \in \mathcal{U}$. □

Afirmação 9. Para cada $I \in \mathcal{U}$, $f^{r(I)}(I) \subseteq \bigcup_{i=1}^s J_i$.

Demonstração. Como $f^{r(I)}(\text{int}\,(I)) \cap \bigcup_{i=1}^s \text{int}\,(J_i) \neq \emptyset$, $\bigcup_{i=1}^s J_i$ é um conjunto fechado e, pela Afirmação 8, $f^{r(I)}(\text{int}\,(I))$ é um conjunto aberto, se $f^{r(I)}(I) \not\subseteq \bigcup_{i=1}^s J_i$, então existe $i \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $\partial J_i \cap \text{int}\,(\omega_f(x)) \supseteq \partial J_i \cap f^{r(I)}(\text{int}\,(I)) \neq \emptyset$, mas isso é impossível, porque J_i é uma componente conexa de $\omega_f(x)$. □

Seja

$$W = \bigcup_{i=1}^{s} J_i \cup \bigcup_{I \in \mathcal{U}} \bigcup_{j=1}^{r(I)-1} \overline{f^j(I)}.$$

Temos que W é um conjunto compacto e que $f^*(W) \subseteq W \subseteq \omega_f(x)$. Como $\text{int}\,(W) \neq \emptyset$, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $q = f^\ell(x) \in \text{int}\,(W)$. Portanto, $W \subseteq \omega_f(x) = \omega_f(q) \subseteq \overline{\mathcal{O}_f^+(q)} \subseteq W$. Como W é uma união finita de intervalos compactos, é união finita de intervalos compactos dois-a-dois disjuntos $I_1, \ldots, I_t$. □

Proposição 3.1.16. *Se $U \subseteq [0,1]$ é um componente Baire ergódico de f, então existe um atrator topológico A tal que*

(1) $\omega_f(x) = A$ genericamente em U. Em particular, $U \setminus \beta_f(A) \sim \emptyset$;

(2) A é um ciclo de intervalos para f ou um conjunto de Cantor;

(3) se A é um conjunto de Cantor, então

$$A = \left(\bigcup_{c \in \mathcal{C}_-} \overline{\mathcal{O}_f^+(f(c_-))} \right) \cup \left(\bigcup_{c \in \mathcal{C}_+} \overline{\mathcal{O}_f^+(f(c_+))} \right),$$

onde $\mathcal{C}_- = \{c \in \mathcal{C} : c \in \overline{\mathcal{O}_f^+(x) \cap (0,c)}$ genericamente em $U\}$ e $\mathcal{C}_+ = \{c \in \mathcal{C} : c \in \overline{\mathcal{O}_f^+(x) \cap (c,1)}$ genericamente em $U\}$.

Demonstração. A existência de um atrator topológico segue da Proposição 2.3.11. Deste mesmo resultado e do Teorema 2.3.16, temos que $U \setminus \beta_f(A) \sim \emptyset$ e $\omega_f(x) = A$ genericamente em U. Está provado o item (1).

Suponhamos que A tem interior não vazio. Então, pelo Lema 3.1.15, A é um ciclo de intervalos.

Suponhamos que $\operatorname{int}(A) = \emptyset$. Sejam $\mathcal{C}_- = \{c \in \mathcal{C} : c \in \overline{\mathcal{O}_f^+(x) \cap (0,c)}$ genericamente em $U\}$ e $\mathcal{C}_+ = \{c \in \mathcal{C} : c \in \overline{\mathcal{O}_f^+(x) \cap (c,1)}$ genericamente em $U\}$. Pelas definições de $\mathcal{C}_-$ e $\mathcal{C}_+$, temos que

$$\overline{\mathcal{O}_f^+(f(c_-))} \subseteq \omega_f(x) \text{ genericamente em } U, \text{ para todo } c \in \mathcal{C}_-,$$

e

$$\overline{\mathcal{O}_f^+(f(c_+))} \subseteq \omega_f(x) \text{ genericamente em } U, \text{ para todo } c \in \mathcal{C}_+.$$

Em particular, como $\omega_f(x) = A$ genericamente em U,

$$A \supseteq A_0 = \left(\bigcup_{c \in \mathcal{C}_-} \overline{\mathcal{O}_f^+(f(c_-))} \right) \cup \left(\bigcup_{c \in \mathcal{C}_+} \overline{\mathcal{O}_f^+(f(c_+))} \right).$$

Para provarmos que $A \subseteq A_0$, vamos construir uma função auxiliar g da seguinte maneira: para cada $c \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_-$, seja $a_c \in (0,c)$ tal que $(a_c, c) \cap \mathcal{C} = \emptyset$ e $(a_c, c) \cap \mathcal{O}_f^+(x) = \emptyset$ genericamente em U. Similarmente, para cada $c \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_+$, seja $b_c \in (c,1)$ tal que $(c, b_c) \cap \mathcal{C} = \emptyset$ e $(c, b_c) \cap \mathcal{O}_f^+(x) = \emptyset$ genericamente em U. Seja $g : [0,1] \setminus \mathcal{C} \to [0,1]$ um homeomorfismo local tal que $g(c_-) \in \{0,1\}$ para cada $c \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_-$, $g(c_+) \in \{0,1\}$ para cada $c \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_+$ e $g(x) = f(x)$ para cada $x \notin V = \left(\bigcup_{c \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_-} (a_c, c) \right) \cup \left(\bigcup_{c \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_+} (c, b_c) \right)$.

Como $\mathcal{O}_f^+(x) = \mathcal{O}_g^+(x)$ genericamente em U, temos que U é um componente Baire ergódico para g, A é o atrator topológico associado a U em relação a g e $\omega_g(x) = \omega_f(x) = A$ genericamente em U.

Fixemos $p \in A \setminus A_0$ e suponhamos que $\mathcal{W}(p) = \{x \in U : p \in \omega_g(x)\}$ é um conjunto gordo. Seja $I = (a,b)$ a componente conexa de $[0,1] \setminus A_0$ que contém p. Observamos que $\mathcal{O}_g^+(\partial I) \cap I = \emptyset$. Seja $G : I^* \to I$ a função de primeiro retorno a I por g, onde $I^* = \{x \in I : \mathcal{O}_g^+(g(x)) \cap I \neq \emptyset\}$. Afirmamos que $\mathcal{O}_g^+(g(c_\pm)) \cap I = \emptyset$. De fato, se $c \in \mathcal{C}_\pm$, então $\overline{\mathcal{O}_g^+(g(c_\pm))} = \overline{\mathcal{O}_f^+(f(c_\pm))} \subseteq A_0$ e se $c \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_\pm$, $\overline{\mathcal{O}_g^+(g(c_\pm))} \subseteq \{0,1\}$. Portanto, G é uma função ramo completa. Segue de g ser uma função não singular e de $p \in \omega_g(x) \cap I$ que $U_0 = U \cap I \sim \bigcap_{n \geqslant 0} G^{-n}(U) = \{x \in U \cap I : \#(\mathcal{O}_g^+(x) \cap I) = \infty\} \subseteq \bigcap_{n \geqslant 0} G^{-n}(I)$ é um conjunto gordo. Logo, segue do Lema 3.1.11 que (i) $\omega_G(x) = [a,b]$ genericamente em (a,b) ou (ii) $U \cap I \sim H$, onde H é uma união de homeotervalos de G. Como $\omega_G(x) = [a,b]$ implica que $\operatorname{int}(A) = \operatorname{int}(\omega_g(x)) \supseteq (a,b) \neq \emptyset$ genericamente em U, (i) não pode ocorrer, pois supomos que $\operatorname{int}(A) = \emptyset$. Ainda, como todo homeotervalo de G é um homeotervalo de g, (ii) também é impossível pelo Lema 3.1.6, o que nos leva a uma contradição. Portanto, $A_0 = A$.

Agora, vamos mostrar que A é um conjunto de Cantor, porque estamos supondo que $\operatorname{int}(A) = \emptyset$. Para isso, vamos provar que A não admite pontos isolados. Assim, suponhamos que $p \in A$ é um ponto isolado de A. Seja $I = (a, b)$ a componente conexa de $[0,1] \setminus (A \setminus \{p\})$ que contém p. Já que $p \in \omega_g(x)$ genericamente em U e g é não singular, então $\#\{x \in U : \mathcal{O}_g^+(x) \cap (a,p) \neq \emptyset$ genericamente em $U\} = \infty$ ou $\#\{x \in U : \mathcal{O}_g^+(x) \cap (p,b) \neq \emptyset$ genericamente em $U\} = \infty$. Suponhamos que $\#\{x \in U : \mathcal{O}_g^+(x) \cap (a,p) \neq \emptyset$ genericamente em $U\} = \infty$; o outro caso é similar. Neste caso, seja $G : (a,p)^* \to (a,p)$ a função de primeiro retorno a (a,p) por g, onde $(a,p)^* = \{x \in (a,p) : \mathcal{O}_g^+(g(x)) \cap (a,p) \neq \emptyset\}$. Logo, $U_0 = U \cap (a,p) \sim \bigcap_{n \geqslant 0} G^{-n}(U) = \{x \in U \cap (a,p) : \#(\mathcal{O}_g^+(x) \cap (a,p)) = \infty\} \subseteq \bigcap_{n \geqslant 0} G^{-n}(a,p)$ é um conjunto gordo. Como um intervalo errante para G é um intervalo errante para g, segue dos Lemas 3.1.6 e 3.1.11 que $\omega_G(x) = [a,b]$ genericamente em (a,b). Logo, $\omega_G(x) = [a,p]$ genericamente em $U \cap (a,p)$. Isso implica que $\omega_g(x)$ é um ciclo de intervalos genericamente em $U \cap (a,p)$ e, então, pela ergodicidade de g, $\omega_g(x) = \omega_f(x) = A$ é um ciclo de intervalos genericamente em U, o que contradiz nossa hipótese de $\operatorname{int}(A) = \emptyset$. $\square$

Teorema 3.1.17. *Se f não tem intervalos errantes,* $\operatorname{Per}(f)$ *é um conjunto magro e $[0,1] \setminus \mathbb{B}(f)$ é um conjunto gordo, então existe uma coleção finita de atratores $A_1, \ldots, A_\ell$ com $\ell \leqslant \#\mathcal{C}$ tal que*

(1) $[0,1] \setminus \mathbb{B}(f) \sim \bigcup_{j=1}^{\ell} \beta_f(A_j)$*;*

(2) para cada $j \in \{1, \ldots, \ell\}$, $\omega_f(x) = A_j$ genericamente em $\beta_f(A_j)$;

(3) cada A_j é um conjunto de Cantor ou um ciclo de intervalos;

(4) se A_j é um conjunto de Cantor, então $A_j = \bigcup_{v \in V} \overline{\mathcal{O}_f^+(v)}$ para algum $V \subseteq \{f(c_\pm) : c \in \mathcal{C}\}$[2]*.*

Demonstração. Como f não tem intervalos errantes e $\operatorname{Per}(f) \sim \emptyset$, temos que $H(f) \sim \mathbb{B}(f)$, onde $H(f)$ é a união de todos os homeotervalos de f. De fato, como f não tem intervalo errante e $\operatorname{Per}(f) \sim \emptyset$, se $I \subseteq [0,1]$ é um homeotervalo de f, então $I \subseteq \mathbb{B}(f) \cup \mathcal{O}_f^-(\operatorname{Per}(f))$, pelo Lema 3.1.3. Como $\mathcal{O}_f^-(\operatorname{Per}(f))$ é magro, $H(f) \setminus \mathbb{B}(f) \sim \emptyset$. Então, segue da Proposição 3.1.8 que $[0,1] \setminus \mathbb{B}(f)$ pode ser decomposto em no máximo $\ell \in \{1, \ldots, \#\mathcal{C}\}$ componentes Baire ergódicos; digamos $U_1, \ldots, U_\ell$.

Agora, aplicando a Proposição 3.1.16, cada U_j possui um atrator topológico A_j e $\omega_f(x) = A_j$ genericamente em $\beta_f(A_j) \sim U_j$, o que prova o item (2). Já que $[0,1] \setminus \mathbb{B}(f) \sim \bigcup_{j=1}^{\ell} \beta_f(A_j)$, está provado o item (1). Os itens (3) e (4) também seguem da Proposição 3.1.16. $\square$

[2]De fato, $V = \{f(c_\pm) : c \in \mathcal{C}_\pm\}$, onde $\mathcal{C}_- = \{c \in \mathcal{C} : c \in \overline{\mathcal{O}_f^+(x) \cap (0,c)}\}$ genericamente em $\beta_f(A_j)$ e $\mathcal{C}_+ = \{c \in \mathcal{C} : c \in \overline{\mathcal{O}_f^+(x) \cap (c,1)}\}$ genericamente em $\beta_f(A_j)$.

Dizemos que $x \in [0,1] \setminus \mathcal{C}$ é um *ponto fixo de* f se $f(x) = x$. Representaremos por $\mathrm{Fix}\,(f)$ o conjunto de todos os pontos fixos de f.

Seja $I \subseteq [0,1] \setminus \mathcal{C}$. Definimos $\omega_f(I) = \bigcup_{x \in I} \omega_f(x)$.

Proposição 3.1.18 (Proposição 6 de [BPP19]). *Dado um difeomorfismo local C^2 não flat $f : [0,1] \setminus \mathcal{C} \to [0,1]$, $\mathcal{C} \subseteq [0,1]$ é um conjunto finito, seja $\mathcal{V}_f = \{f(c_\pm) : c \in \mathcal{C}\}$ o conjunto dos valores críticos de f. Se I é um intervalo errante para f, então $\omega_f(I) \subseteq \overline{\mathcal{O}_f^+(\mathcal{V}_f)}$.*

Demonstração. Ver Proposição 6 de [BPP19]. □

Proposição 3.1.19 (Atratores de intervalos errantes, [BPP19]). *Seja $f : [0,1] \setminus \mathcal{C} \to [0,1]$ um difeomorfismo local C^2 não flat com $\mathcal{C} \subseteq [0,1]$ finito. Então, existe um número finito de conjuntos compactos invariantes $A_1, \ldots, A_\ell \subseteq [0,1]$, com $\ell \in \{1, \ldots, 2^{2\#\mathcal{C}}\}$, tais que $\omega_f(I) = A_j$ para algum $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ sempre que I for um intervalo errante para f. Além disso, para cada $j \in \{1, \ldots, \ell\}$,*

(1) $A_j \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$;

(2) $A_j = \bigcup_{v \in V} \overline{\mathcal{O}_f^+(v)}$ para algum $V \subseteq \{f(c_\pm) : c \in \mathcal{C}\}$.

Demonstração. Se necessário, podemos estender f a uma função C^2 g definida em um intervalo maior $J = [a,b] \supseteq [0,1]$ tal que $g(\partial J) \subseteq \partial J$ e $\omega_g(x) \subseteq [0,1]$ para cada $x \in (a,b)$. Então, podemos supor que $f(\{0,1\}) \subseteq \{0,1\}$ e que existem $\alpha, \beta \in (0,1)$ tais que $\Omega(f) \cap (0,1) \subseteq [\alpha, \beta]$.

Seja I um intervalo errante. Como $\omega_f(I) = \omega_f(f^n(I))$ para cada $n \geqslant 0$, trocando I por $f^\ell(I)$ caso necessário, podemos supor que $\overline{f^n(I)} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ para cada $n \geqslant 0$, porque $\mathcal{C}$ é um conjunto finito e I é um intervalo errante, logo apenas uma quantidade finita de iterados de I intersecta $\mathcal{C}$. Se essa quantidade for ℓ, trocamos I por $f^\ell(I)$. Assim, o fecho de todo iterado de $f^\ell(I)$ não intersecta $\mathcal{C}$. Sejam $\mathcal{C}_-(I) = \{c \in \mathcal{C} : c \in \overline{\mathcal{O}_f^+(I) \cap (0,c)}\}$ e $\mathcal{C}_+(I) = \{c \in \mathcal{C} : c \in \overline{\mathcal{O}_f^+(I) \cap (c,1)}\}$. Para cada $c \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_-(I)$, seja $a_c \in (0,c)$ tal que $\mathcal{O}_f^+(I) \cap (a_c, c) = \emptyset$. Similarmente, para cada $c \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_+(I)$, seja $b_c \in (c,1)$ tal que $\mathcal{O}_f^+(I) \cap (c, b_c) = \emptyset$. Seja

$$U = \left(\bigcup_{c \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_-(I)} (a_c, c) \right) \cup \left(\bigcup_{c \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_+(I)} (c, b_c) \right).$$

Seja $g : [0,1] \setminus \mathcal{C} \to [0,1]$ um difeomorfismo local C^2 não flat tal que $g\big|_{([0,1] \setminus \mathcal{C}) \setminus U} = f\big|_{([0,1] \setminus \mathcal{C}) \setminus U}$ e $g(c_\pm) \in \{0,1\}$ para cada $c \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_\pm(I)$. Observamos que $f^n(I) = g^n(I)$ para cada $n \geqslant 0$ e então, I é um intervalo errante para g e $\omega_f(I) = \omega_g(I)$.

Já que $g(\{0,1\}) = f(\{0,1\}) \subseteq \{0,1\}$, temos que $\mathcal{O}_g^+(g(c_\pm)) \subseteq \{0,1\}$ para cada $c \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_\pm(I)$. Como $\omega_g(I) \subseteq \Omega(g) \cap (0,1) \subseteq [\alpha, \beta] \subseteq (0,1)$, segue da Proposição 3.1.18

aplicada a I e a g que

$$\omega_g(I) \subseteq \left(\bigcup_{c \in \mathcal{C}_-(I)} \overline{\mathcal{O}_g^+(g(c_-))} \right) \cup \left(\bigcup_{c \in \mathcal{C}_+(I)} \overline{\mathcal{O}_g^+(g(c_+))} \right).$$

Por outro lado, se $c \in \mathcal{C}_-(I)$, então $g(c_-) \in \omega_g(I)$, logo, $\overline{\mathcal{O}_g^+(g(c_-))} \subseteq \omega_g(I)$. Similarmente, se $c \in \mathcal{C}_+(I)$, então $g(c_+) \in \omega_g(I)$, logo, $\overline{\mathcal{O}_g^+(g(c_+))} \subseteq \omega_g(I)$. Portanto,

$$\omega_g(I) = \left(\bigcup_{c \in \mathcal{C}_-(I)} \overline{\mathcal{O}_g^+(g(c_-))} \right) \cup \left(\bigcup_{c \in \mathcal{C}_+(I)} \overline{\mathcal{O}_g^+(g(c_+))} \right).$$

Já que $\mathcal{O}_f^+(I) \cap U = \emptyset$, assim como $\mathcal{O}_f^+(f(c_\pm)) \cap U = \emptyset$ para todo $c \in \mathcal{C}_\pm(I)$, temos que

$$\omega_f(I) = \bigcup_{v \in V} \overline{\mathcal{O}_f^+(v)},$$

onde $V \subseteq \mathcal{V}_f = \{f(c_\pm) : c \in \mathcal{C}\}$ é dado por $V = \{f(c_-) : c \in \mathcal{C}_-(I)\} \cup \{f(c_+) : c \in \mathcal{C}_+(I)\}$. Assim, tomando $\mathfrak{A} = \left\{ \bigcup_{s \in S} \overline{\mathcal{O}_f^+(s)} : S \in 2^{\mathcal{V}_f} \right\}$ e fixando $A_1, \ldots, A_\ell$ como os conjuntos $A_j \in \mathfrak{A}$, $j \in \{1, \ldots, \ell\}$, tais que $\omega_f(I) = A_j$ para algum intervalo errante I. Como $\#\mathcal{V}_f \leqslant 2\#\mathcal{C}$, concluímos a demonstração desta Proposição. $\square$

Teorema 3.1.20 (Finitude dos atratores topológicos não periódicos de funções C^2 por partes)**.** *Seja $f : [0,1] \setminus \mathcal{C} \to [0,1]$ um difeomorfismo local C^2 não degenerado. Se $[0,1] \setminus \mathbb{B}(f)$ é um conjunto gordo, então existe uma coleção finita de atratores topológicos $A_1, \ldots, A_n$, com $n \leqslant \#\mathcal{C} + 2^{2\#\mathcal{C}}$, tais que*

$$[0,1] \setminus \mathbb{B}(f) \sim \bigcup_{j=1}^{n} \beta_f(A_j).$$

Ademais,

(1) para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\omega_f(x) = A_j$ genericamente em $\beta_f(A_j)$;

(2) se f não admite intervalo errante, então $n \leqslant \#\mathcal{C}$;

(3) cada A_j é um ciclo de intervalos ou um conjunto de Cantor;

(4) se A_j é um conjunto de Cantor, então $A_j = \bigcup_{v \in V} \overline{\mathcal{O}_f^+(v)}$ para cada $V \subseteq \{f(c_\pm) : c \in \mathcal{C}\}$;

(5) se I é um intervalo errante, então $I \subseteq \beta_f(A_j)$ para algum $j \in \{1, \ldots, n\}$, onde A_j é um conjunto de Cantor.

Demonstração. Seja $\mathbb{B}_1(f)$ a união de todos os intervalos errantes de f. Se $\mathbb{B}_1(f) \neq \emptyset$, seja $\mathfrak{A} = \{A'_1, \ldots, A'_\ell\}$, com $\ell \leqslant 2^{2\#\mathcal{C}}$, o conjunto de atratores topológicos dado pela Proposição 3.1.19; caso contrário, $\mathfrak{A} = \emptyset$. Se $\Omega(f)$ é um conjunto magro, seja $\mathfrak{B} = \emptyset$. Se $\Omega(f)$ é um conjunto gordo, segue da Proposição 3.1.8 que $\Omega(f)$ pode ser decomposto em no máximo $\#\mathcal{C}$ componentes Baire ergódicos, digamos $U_1, \ldots, U_m$, $m \leqslant \#\mathcal{C}$. Pela Proposição 2.3.11 e pelo Teorema 2.3.16, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, existe um atrator topológico A''_j tal que $U_j \sim \beta_f(A''_j)$ e $\omega_f(x) = A''_j$ genericamente em U_j. Então, se $\Omega(f)$ não é um conjunto magro, seja $\mathfrak{B} = \{A''_1, \ldots, A''_m\}$. Assim, tomando $\{A_1, \ldots, A_n\} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, finalizamos a prova de que $[0,1] \setminus \mathbb{B}(f) \sim \bigcup_{j=1}^{n} \beta_f(A_j)$ e dos itens (1) e (2). A prova dos demais itens segue da Proposição 3.1.16. $\square$

Apêndice A

Entropia topológica

Seja X um espaço topológico compacto e α uma cobertura aberta de X. Chamamos *entropia da cobertura* α o número

$$H(\alpha) = \log N(\alpha),$$

onde $N(\alpha)$ é o menor número tal que α admite alguma subcobertura finita com esse número de elementos.

Dadas duas coberturas abertas α e β, dizemos que α é *menos fina que* β, e escrevemos $\alpha \prec \beta$, se todo elemento de β está contido em algum elemento de α. Afirmamos que se $\alpha \prec \beta$, então $H(\alpha) \leqslant H(\beta)$. De fato, seja $\{B_1, \ldots, B_{N(\beta)}\}$ uma subcobertura de β com o menor número de elementos. Para cada $i \in \{1, \ldots, N(\beta)\}$, existe $A_i \in \alpha$ tal que $A_i \supseteq B_i$. Logo, $\{A_1, \ldots, A_{N(\beta)}\}$ cobre X e é uma subcobertura de α. Segue que $N(\alpha) \leqslant N(\beta)$. Um exemplo desse fato é: se β é uma subcobertura de α, então $\alpha \prec \beta$, logo,

$$H(\alpha) \leqslant H(\beta). \tag{A.1}$$

Dadas coberturas abertas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, representamos por $\alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_n$ a *soma* desta coberturas, isto é, a cobertura cujos elementos são as interseções $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ com $A_j \in \alpha_j$ para cada j. Observamos que $\alpha_j \prec \alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_n$ para todo j. Sejam α e β coberturas abertas de X. Temos que $H(\alpha \vee \beta) \leqslant H(\alpha) + H(\beta)$. De fato, sejam $\{A_1, \ldots, A_{N(\alpha)}\}$ uma subcobertura de α com o menor número de elementos e $\{B_1, \ldots, B_{N(\beta)}\}$ uma subcobertura de β com o menor número de elementos. Então,

$$\{A_i \cap B_j : 1 \leqslant i \leqslant N(\alpha) \text{ e } 1 \leqslant j \leqslant N(\beta)\} \tag{A.2}$$

é uma cobertura de $\alpha \vee \beta$; logo, $N(\alpha \vee \beta) \leqslant N(\alpha)N(\beta)$.

Antes de prosseguirmos com entropia topológica, vamos tratar de sequências subaditivas. Dizemos que uma sequência $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $[-\infty, \infty)$ é *subaditiva* se vale $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$ para todo $m, n \geqslant 1$.

Lema A.0.1. *Se* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência subaditiva, então*

$$\lim_n \frac{a_n}{n} = \inf_n \frac{a_n}{n} \in [-\infty, \infty). \tag{A.3}$$

Demonstração. Ver o Lema 3.3.4 de [OV]. □

Seja $f : X \to X$ uma função contínua. Se α é uma cobertura aberta de X, então qualquer pré-imagem $f^{-j}(\alpha) = \{f^{-j}(A) : A \in \alpha\}$ também é uma cobertura aberta de X. Para cada $n \geqslant 1$, denotamos

$$\alpha^n = \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\alpha).$$

Vemos que

$$H(\alpha^{m+n}) = H(\alpha^m \vee f^{-m}(\alpha^n)) \leqslant H(\alpha^m) + H(f^{-m}(\alpha^n)) \leqslant H(\alpha^m) + H(\alpha^n)$$

para todo $m, n \geqslant 1$. Ou seja, a sequência $H(\alpha^n)$ é subaditiva. Consequentemente, o limite

$$h(f, \alpha) = \lim_n \frac{1}{n} H(\alpha^n) = \inf_n \frac{1}{n} H(\alpha^n) \tag{A.4}$$

existe e é finito. Ele é chamado *entropia de f com respeito à cobertura aberta α*. A relação (A.1) implica

$$\alpha \prec \beta \implies h(f, \alpha) \leqslant h(f, \beta). \tag{A.5}$$

Por fim, definimos a *entropia topológica de f* como sendo

$$h_{top}(f) = \sup \{h(f, \alpha) : \alpha \text{ é uma cobertura aberta de } X\}. \tag{A.6}$$

Sejam X e Y espaços topológicos compactos e $f : X \to X$ e $g : Y \to Y$ funções contínuas. Dizemos que g é *um fator topológico de f* se existe uma aplicação contínua sobrejetiva $\theta : X \to Y$ satisfazendo $\theta \circ f = g \circ \theta$. Neste caso, também dizemos que θ *semiconjuga f com g*; θ é uma *semiconjugação entre f e g*. Se θ é um homeomorfismo, dizemos que f e g são *topologicamente equivalentes*, ou *topologicamente conjugadas*, e chamamos θ de *conjugação topológica entre f e g*.

Proposição A.0.2. *Se g é um fator topológico de f, então $h_{top}(g) \leqslant h_{top}(f)$. Em particular, se f e g são topologicamente equivalentes, então $h_{top}(f) = h_{top}(g)$.*

Demonstração. Seja $\theta : X \to Y$ uma função contínua sobrejetiva tal que $\theta \circ f = g \circ \theta$. Dada uma cobertura aberta α de Y, a família

$$\theta^{-1}(\alpha) = \{\theta^{-1}(A) : A \in \alpha\}$$

é uma cobertura aberta de X. A soma α^n é formada pelos conjuntos da forma $\bigcap_{j=0}^{n-1} g^{-j}(A_j)$ com $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1} \in \alpha$. Igualmente, a soma $\theta^{-1}(\alpha)^n$ é formada pelos conjuntos da forma $\bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\theta^{-1}(A_j))$. Temos que

$$\begin{aligned}\bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\theta^{-1}(A_j)) &= \bigcap_{j=0}^{n-1} \theta^{-1}(g^{-j}(A_j)) \quad (\text{pois } \theta \circ f = g \circ \theta)\\ &= \theta^{-1}\left(\bigcap_{j=0}^{n-1} g^{-j}(A_j)\right).\end{aligned}$$

Observando que os conjuntos da forma no lado direito desta igualdade constituem a pré-imagem $\theta^{-1}(\alpha^n)$ de α^n, concluímos que $\theta^{-1}(\alpha^n) = \theta^{-1}(\alpha)^n$. Como θ é sobrejetiva, uma família $\gamma \subseteq \alpha^n$ cobre Y se, e somente se, a sua pré-imagem $\theta^{-1}(\gamma)$ cobre X. Portanto,

$$H(\theta^{-1}(\alpha)^n) = H(\theta^{-1}(\alpha^n)) = H(\alpha^n).$$

Como n é arbitrário, segue que $h(f, \theta^{-1}(\alpha)) = h(g, \alpha)$. Então, tomando o supremo sobre todas as coberturas abertas α de Y

$$h_{top}(g) = \sup_\alpha h(g, \alpha) = \sup_\alpha h(f, \theta^{-1}(\alpha)) \leqslant h_{top}(f).$$

Isto prova a primeira parte desta Proposição. A segunda parte é uma consequência imediata, pois nesse caso, f também é um fator topológico de g. $\square$

Referências

[AAIS] Arnold, V. I.; Afrajmovich, V. S.; Ilyashenko, Y.; Shilnikov, L. P. *Bifurcation Theory and Catastrophe Theory.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1999.

[ALM] Alseda, L.; Llibre, J.; Misiurewicz, M. *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One.* World Scientific Publishing, 1993 (Advanced Series in Nonlinear Dynamics; 5).

[BC] Block, L. S.; Copel, W. A. *Dynamics in One Dimension.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1992.

[BL] Blokh, A.M. and Lyubich, M. *Non-existence of wandering intervals and structure of topological attractors of one-dimensional dynamical systems II, The smooth case.* Erg. Th. and Dynam. Sys. 9, 751-758, 1989

[BPP19] Brandão, P; Palis, J; Pinheiro, V. *On the finiteness of attractors for piecewise C^2 maps of the interval.* Erg. Theo. and Dyn. Sys.. Volume 39, Issue 7, pp. 1784-1804, 2019.

[BPP21] Brandão, P.; Palis, P.; Pinheiro, V. *On the finiteness of attractors for one-dimensional maps with discontinuities.* Advances in Mathematics, 389, https://doi.org/10.1016/j.aim.2021.107891 (2021).

[Br] Brandão, P. *Topological attractors of contracting Lorenz maps*, Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non lin´eaire, Vol. 35, Issue 5, 1409-1433, 2018.

[CM] Coven, E. M.; Mulvey, I. *Transitivity and the centre for maps of the circle.* Ergod. Th. & Dynam. Sys., 6, 1-8, 1986.

[De] Devaney, R. L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.* Westview Press, 2003.

[dV] de Vries, J. *Topological Dynamical Systems.* Berlin: Walter de Gruyter, 2014 (de Gruyter Studies in Mathematics; 59).

[Gu] Guckenheimer, J. *Sensitive Dependence to Initial Conditions for One Dimensional Maps.* Commun. Math. Phys., 70, 133-160, 1979.

[Ha] Halmos, P. R. *Naive Set Theory.* New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1960. (The University Series in Undergraduate Mathematics).

[Ke] Kechris, A. S. *Classical descriptive set theory.* New York: Springer-Verlag, 1995 (Graduate texts in mathematics; 156).

[KSP] Keller, G.; St. Pierre, M. *Topological and measurable dynamics of Lorenz maps*, Ergodic Theory, Analysis, and Efficient Simulation of Dynamical Systems, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, pp. 333-361, 2001.

[Li] Lima, E. L. *Espaços Métricos.* Rio de Janeiro: Editora do IMPA, 2020 (Projeto Euclides).

[Ly89] Lyubich, M.. *Non-existence of wandering intervals and structure of topological attractors of one dimensional dynamical systems 1. The case of negative Schwarzian derivative.* Ergodic Theory Dynamical Systems, 9, 737-750, 1989.

[Mn] Mañé, R. *Ergodic theory and differentiable dynamics.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1987.

[Mu] Munkres, J. R. *Topology Second Edition.* Upper Saddle River, NJ 07458: Prentice Hall, 2000.

[MvS] de Melo, W.; Strien, S. van. *One-Dimensional Dynamics*, Springer-Verlag, 1993

[OV] Oliveira, K.; Viana, M. *Fundamentos da Teoria Ergódica.* Rio de Janeiro: SBM, 2014 (Coleção Fronteiras da Matemática).

[Pa00] Palis, J. *A Global View of Dynamics and a Conjecture on the Denseness of Finitude of Attractors*, Astérisque, France, v. 261, p. 339-351, 2000.

[Pa05] Palis, J. *A global perspective for non-conservative dynamics.* Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire, 22, p. 487-507, 2005

[Pi1] Pinheiro, V. *Ergodic Formalism for topological Attractors and historic behavior.* Preprint, 2021.

[Pi2] Pinheiro, V. *Topological and statistical attractors for interval maps.* Preprint, arXiv:2109.04579, 2021.

[Ruel] Ruelle, D. *Historical behaviour in smooth dynamical systems.* In B. Krauskopf, H. Broer, and G. Vegter, editors, Global Analysis of Dynamical Systems, Festschrift dedicated to Floris Takens for his 60th birthday, pages 63-65. Taylor & Franci, 2001.

[Ruet] Ruette, S. *CHAOS ON THE INTERVAL a survey of relationship between the various kinds of chaos for continuous interval maps.* Preprint, 2018.

[SP] St. Pierre, M.*Topological and measurable dynamics of Lorenz maps.* Dissertationes Mathematicae, 382, 1-134, 1999

[Ta] Takens, F. *Orbits with historic behaviour, or non-existence of averages.* Nonlinearity, 21(3): T33, 2008.

[vSV] Strien, S. van; Vargas, E. *Real bounds, ergodicity and negative Schwarzian for multimodal maps.* J. Am. Math. Soc. 17, 749-782. 2004

[Wa] Walters, P. *An introduction to ergodic theory.* New York: Springer-Verlag, 1982. (Graduate texts in mathematics; 79).

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática e Estatística / Programa de pós-graduação em Matemática

---

Av. Milton Santos, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA
CEP: 40170 - 110
<http://www.pgmat.ufba.br>