



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



Estudo das equações diferenciais via sistemas diferenciais exteriores e suas reduções por simetrias

JOÃO AUGUSTO DE MOURA LEITE JÚNIOR

SALVADOR, BA

2024

JOÃO AUGUSTO DE MOURA LEITE JÚNIOR

**Estudo das equações diferenciais via sistemas diferenciais
exteriores e suas reduções por simetrias**

Dissertação de Mestrado apresentada ao colegiado do curso de Mestrado em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Orientador: Diego Catalano Ferraioli

SALVADOR, BA

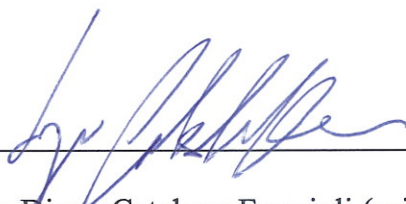
2024

Estudo das equações diferenciais via sistemas diferenciais exteriores e suas reduções por simetrias

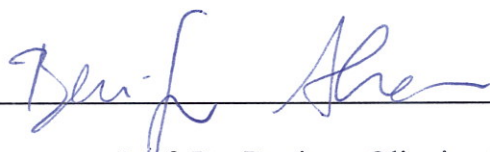
João Augusto de Moura Leite Júnior

Dissertação apresentada ao Colegiado do Curso de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

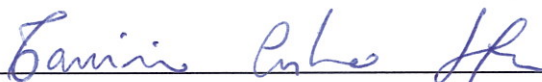
Banca examinadora



Prof. Dr. Diego Catalano Ferraioli (orientador - UFBA)



Prof. Dr. Benigno Oliveira Alves (UFBA)



Prof. Dr. Tarcísio Castro Silva (UNB)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária de
Ciências e Tecnologias Prof. Omar Catunda, SIBI – UFBA.

L533 Leite Júnior, João Augusto de Moura

Estudo das equações diferenciais via sistemas diferenciais
exteriores e suas reduções por simetrias/ João Augusto de
Moura Leite Júnior. – Salvador, 2024.

98 f.

Orientador: Prof. Dr. Diego Catalano Ferraioli

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Bahia.
Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Pós-
Graduação em Matemática, 2024.

1. Sistemas Diferenciais Exteriores. 2. Espaços de Jatos. 3.
Equações Diferenciais Não Lineares. 4. Simetrias. 5.
Transformações de Bäcklund. 6. Fibrados. I. Ferraioli, Diego
Catalano. II. Universidade Federal da Bahia. III. Título.

CDU:517.929

Agradecimentos

Agradeço à família e aos amigos, pelo apoio, conversas e encorajamento, elementos essenciais para que eu pudesse desviar das pedras que tumultuam a caminhada.

Também sou muito grato aos meus professores, dos colégios e da universidade. Em particular, expresso os meus agradecimentos ao meu orientador, Diego Catalano Ferraioli, pelos ensinamentos sobre Matemática e sobre ser matemático.

Além disso, agradeço aos colegas da Universidade Federal da Bahia (UFBA) pelas conversas matemáticas que ampliam a nossa visão de mundo.

Agradeço à banca examinadora, pela generosidade em aceitar o convite para participar desta banca, e pelas sugestões que certamente aprimoram e enriquecem o trabalho que realizei.

Por fim, gostaria de agradecer às agências de fomento CAPES e FAPESB pelo apoio financeiro.

“Matemática é a arte de dar o mesmo nome a coisas diferentes.”

Henri Poincaré

★ 1854 — † 1912

Resumo

Em linhas gerais, a presente dissertação visa estudar, sob a perspectiva geométrica dos *espaços de jatos* e dos *sistemas diferenciais exteriores*, as equações diferenciais e algumas relações que podem ser estabelecidas entre suas soluções. Como veremos, a partir do processo de *redução por simetrias* de sistemas diferenciais exteriores, podemos sistematicamente construir transformações que relacionam soluções de equações obtidas por um processo de redução, de modo que, assim, podemos estabelecer *transformações de Bäcklund* entre equações diferenciais.

O trabalho se subdivide em cinco capítulos. No Capítulo 1, são apresentados alguns prerrequisitos acerca da teoria das *variedades suaves*, aproveitando o ensejo para introduzir as principais notações e convenções utilizadas ao longo do texto. Sucessivamente, no Capítulo 2, são mostrados alguns resultados básicos no âmbito das submersões e, mais especificamente, são estabelecidos alguns fatos sobre os *fibrados*, que serão úteis para o desenvolvimento dos próximos capítulos. O Capítulo 3, aproveitando-se do instrumental teórico exposto nos capítulos anteriores, introduz os *espaços de jatos de seções do fibrado*. Assim, discute-se a interpretação das equações diferenciais como subvariedades desses ambientes geométricos e, a partir disso, são apresentadas algumas importantes noções de simetria, juntamente com alguns resultados básicos. O Capítulo 4 aborda o tema da redução por simetrias de equações diferenciais do ponto de vista da teoria dos sistemas diferenciais exteriores. Portanto, depois de uma breve introdução ao formalismo dos sistemas diferenciais exteriores, são logo discutidas as aplicações destes ao estudo das equações diferenciais, visando principalmente elucidar os aspectos que mais desempenham um papel central na redução por simetrias. Por fim, o Capítulo 5 trata do tema principal deste trabalho, que é a descrição de um método útil para obter transformações de Bäcklund por meio de diferentes reduções de um mesmo sistema diferencial exterior.

Palavras-chave: Sistemas Diferenciais Exteriores, Espaços de Jatos, Equações Diferenciais Não Lineares, Redução por Simetrias, Variedades Integrais, Simetrias, Transformações de Bäcklund, Extensões Integráveis, Formas Diferenciais, Fibrados.

Abstract

In general terms, this dissertation aims to study, from the geometric perspective of jet spaces and exterior differential systems, the differential equations and the relationships that can be established between their solutions. As we will see, from the process of reduction by symmetries of exterior differential systems, we can systematically construct transformations that relate solutions of equations obtained by a reduction process so that, in this way, we can establish Bäcklund transformations between differential equations.

The work is subdivided into five chapters. Chapter 1 presents some prerequisites on smooth manifolds, taking the opportunity to introduce the main notations and conventions used throughout the text. Successively, in Chapter 2, some basic results are shown in the context of submersions, and, more specifically, some facts about fiber bundles are established that will be useful for the development of the following chapters. Chapter 3, taking advantage of the theoretical tools in previous chapters, introduces the jet spaces of sections of a fiber bundle. Thus, the interpretation of differential equations as submanifolds of these geometric environments is discussed, and based on this, some essential notions of symmetry are presented, together with some basic results. Chapter 4 addresses the symmetry reduction of differential equations from the point of view of the theory of exterior differential systems. Therefore, after a short introduction to the formalism of exterior differential systems, their applications to the study of differential equations are immediately discussed, aiming to elucidate above all the aspects that play a central role in symmetry reduction. Finally, Chapter 5 is devoted to the main topic of this work, which is the discussion of a useful method for obtaining Bäcklund transformations through different reductions of the same exterior differential system.

Keywords: Exterior Differential Systems, Jet Spaces, Nonlinear Differential Equations, Symmetry Reduction, Integral Manifolds, Symmetries, Bäcklund Transformations, Integrable Extensions, Differential Forms, Bundles.

Sumário

Introdução	1
1	PRELIMINARES E NOTAÇÕES BÁSICAS 5
1.1	Variedades, Aplicações Suaves, Campos e Formas 5
1.2	Grupos e Álgebras de Lie 14
1.3	Distribuições e Teorema de Frobenius 17
2	FIBRADOS 20
2.1	Noções Preliminares sobre Fibrados 20
2.2	Fibrados Vetoriais 26
2.3	Formas Diferenciais Semibásicas 29
3	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COMO SUBVARIEDADES DOS ESPAÇOS DE JATOS 35
3.1	Espaço de 1-Jatos 35
3.2	Espaço de k -Jatos 38
3.3	Distribuição de Cartan 40
3.4	Simetrias Infinitesimias da Distribuição de Cartan 43
3.5	Equações Diferenciais como Subvariedades 47
4	SISTEMAS DIFERENCIAIS EXTERIORES E REDUÇÃO POR SIMETRIAS 52
4.1	Sistemas Diferenciais Exteriores e suas Variedades Integrais 52
4.2	Aplicação dos Sistemas Diferenciais Exteriores às Equações Diferenciais 56
4.3	Redução por Simetrias de SDEs 61
5	TRANSFORMAÇÕES DE BÄCKLUND VIA REDUÇÃO POR SIMETRIAS 73
5.1	Extensões Integráveis 73
5.2	Definição de Transformação de Bäcklund 80
5.3	Construção de Transformações de Bäcklund 82
5.3.1	Diagramas Comutativos 82
5.3.2	Transformações de Bäcklund 85

Introdução

As equações diferenciais descrevem fenômenos dos mais variados tipos, contudo, a determinação de suas soluções pode ser uma tarefa de extrema complexidade. Por isso, para além da Matemática em si, toda técnica útil para o estudo das suas soluções possui relevantes aplicações em Física, Química, Biologia, Economia, bem como qualquer outra área do conhecimento que faça uso de equações diferenciais.

A partir dos trabalhos de matemáticos tais como Darboux, Monge, Ampère, Lie e Cartan, originou-se uma abordagem geométrica nova para tratar as equações diferenciais e estudar suas soluções. Ao longo de dois séculos, esse novo ponto de vista se consolidou progressivamente numa ampla série de técnicas que hoje são descritas na linguagem da Geometria Diferencial moderna, em particular a geometria dos espaços de jatos e o formalismo dos sistemas diferenciais exteriores. Para uma revisão dos principais desenvolvimentos ocorridos nessa área, os trabalhos [1, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 17, 18, 19, 20] e as referências neles contidas podem ser bastante ilustrativos.

Neste trabalho, estamos interessados no estudo de um tipo de transformação de equações diferenciais que surgiu historicamente na segunda metade do século XIX, quando o matemático A. V. Bäcklund mostrou uma maneira geométrica segundo a qual é possível transformar superfícies pseudoesféricas em superfícies pseudoesféricas (i.e., aquelas com curvatura gaussiana constante negativa). Do ponto de vista das equações diferenciais, quando a curvatura gaussiana é $K = -1$, essa transformação entre superfícies pseudoesféricas corresponde a uma transformação entre soluções da equação sine-Gordon, $u_{xy} = \sin u$.

De fato, a transformação de Bäcklund estabelece uma correspondência entre a equação sine-Gordon $u_{xy} = \sin u$ e uma sua cópia $\bar{u}_{xy} = \sin \bar{u}$, onde $u = u(x, y)$ e $\bar{u} = \bar{u}(x, y)$, por meio

do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{\bar{u}_x - u_x}{2} = \eta \operatorname{sen} \left(\frac{u + \bar{u}}{2} \right), \\ \frac{\bar{u}_y + u_y}{2} = \frac{1}{\eta} \operatorname{sen} \left(\frac{\bar{u} - u}{2} \right), \end{cases} \quad \eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (1)$$

que goza da seguinte propriedade fundamental: $u_{xy} = \operatorname{sen} u$ e $\bar{u}_{xy} = \operatorname{sen} \bar{u}$ são as condições de integrabilidade de (1). Assim, assumindo que u seja uma solução da sine-Gordon, i.e., $u_{xy} = \operatorname{sen} u$, então (1) é compatível (ou integrável), e sua solução \bar{u} é também solução da sine-Gordon, i.e., $\bar{u}_{xy} = \operatorname{sen} \bar{u}$. Por exemplo, tomando a solução trivial $u = 0$ da sine-Gordon, o sistema (1) se reduz ao sistema compatível

$$\begin{cases} \left(\frac{\bar{u}}{2} \right)_x = \eta \operatorname{sen} \left(\frac{\bar{u}}{2} \right), \\ \left(\frac{\bar{u}}{2} \right)_y = \frac{1}{\eta} \operatorname{sen} \left(\frac{\bar{u}}{2} \right), \end{cases}$$

cuja solução

$$\bar{u} = 4 \operatorname{arctg}(e^{\eta x + y/\eta + c})$$

é uma solução não trivial da sine-Gordon.

A transformação de Bäcklund, analiticamente descrita pelo sistema (1), foi na verdade uma generalização de uma transformação já descoberta por Luigi Bianchi, porém a contribuição de Bäcklund foi imediatamente considerada fundamental, até pelo próprio Bianchi, pois abriu novos cenários para a identificação de métodos geométricos úteis para a determinação de soluções exatas de equações diferenciais não lineares. Assim, a expressão “transformação de Bäcklund” passou a ser comumente utilizada para indicar aquelas correspondências, entre soluções de duas equações diferenciais (ou sistemas) \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 , definidas por um terceiro sistema \mathcal{E}_3 que possui \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 como condições de integrabilidade.

Um simples exemplo de transformação de Bäcklund, nesse sentido mais amplo, é certamente definido pelas equações de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x - v_y = 0, \\ u_y + v_x = 0, \end{cases} \quad (2)$$

em que $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$. De fato, analisando a compatibilidade (ou integrabilidade) desse sistema, é imediato verificar que as duas cópias $u_{xx} + u_{yy} = 0$ e $v_{xx} + v_{yy} = 0$ da equação de Laplace são exatamente suas condições de integrabilidade. Portanto, para toda solução v fixada de $v_{xx} + v_{yy} = 0$, (2) é integrável e define uma nova solução u da equação de Laplace.

Um outro exemplo, também bastante simples, é representado pelo sistema

$$\begin{cases} z_x - u_x = \sqrt{2} \exp\left(\frac{z+u}{2}\right), \\ z_y + u_y = -\sqrt{2} \exp\left(\frac{u-z}{2}\right), \end{cases} \quad (3)$$

que estabelece uma correspondência de tipo Bäcklund entre a equação de onda e a equação de Liouville:

$$z_{xy} = 0, \quad u_{xy} = e^u, \quad (4)$$

com $z = z(x, y)$ e $u = u(x, y)$. De fato, (4) são as condições de integrabilidade de (3). Logo, assumindo $z_{xy} = 0$, o sistema (3) é compatível se, e somente se, $u_{xy} = e^u$. É verdade também o recíproco, i.e., assumindo $u_{xy} = e^u$, então (3) é compatível se, e somente se, $z_{xy} = 0$. Por exemplo, tomando a solução $z = 0$ da equação de onda, o sistema (3) se reduz ao seguinte:

$$\begin{cases} u_x = -\sqrt{2}e^{u/2}, \\ u_y = -\sqrt{2}e^{u/2}, \end{cases} \quad (5)$$

pelo qual é determinada a seguinte solução não trivial da equação de Liouville:

$$u = \ln\left(\frac{2}{(x+y+c)^2}\right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Em geral, o problema de provar a existência de uma transformação de Bäcklund entre duas equações pode ser muito difícil, e ainda hoje estamos muito longe de conseguir lidar com esse problema na sua generalidade. Alguns progressos significativos foram realizados pela escola russa, em particular pelo grupo de pesquisa liderado por A. M. Vinogradov, introduzindo a noção de “recobrimento diferencial” ou “extensão diferencial” [17, 19, 20]. Nos anos mais recentes, essas ideias de Vinogradov foram adaptadas ao contexto dos sistemas diferenciais exteriores por I. M. Anderson e M. E. Fels [4, 5], que descreveram uma forma de construir transformações de Bäcklund entre sistemas diferenciais exteriores obtidos por meio de uma redução por simetrias de um mesmo sistema diferencial exterior. O objetivo principal deste nosso trabalho é descrever essa técnica de Anderson e Fels.

O trabalho se subdivide em cinco capítulos. No Capítulo 1, são apresentados alguns prerequisites acerca da teoria das *variedades suaves*, aproveitando o ensejo para introduzir as principais notações e convenções utilizadas ao longo do texto. Sucessivamente, no Capítulo 2, são mostrados alguns resultados básicos no âmbito das submersões e, mais especificamente, são estabelecidos alguns fatos sobre os *fibrados*, que serão úteis para o desenvolvimento dos próximos capítulos. O Capítulo 3, aproveitando-se do instrumental teórico exposto nos capítulos anteriores, introduz os *espaços de jatos de seções do fibrado*. Assim, discute-se a interpretação das equações diferenciais como subvariedades desses ambientes geométricos e, a partir disso, são apresentadas algumas importantes noções de simetria, juntamente com alguns resultados

básicos. O Capítulo 4 aborda o tema da redução por simetrias de equações diferenciais do ponto de vista da teoria dos sistemas diferenciais exteriores. Portanto, depois de uma breve introdução ao formalismo dos sistemas diferenciais exteriores, são logo discutidas as aplicações destes ao estudo das equações diferenciais, visando principalmente elucidar os aspectos que mais desempenham um papel central na redução por simetrias. Por fim, o Capítulo 5 trata do tema principal deste trabalho, que é a descrição de um método útil para obter transformações de Bäcklund por meio de diferentes reduções de um mesmo sistema diferencial exterior.

Capítulo 1

Preliminares e Notações Básicas

Neste capítulo, apresentaremos sucintamente algumas noções fundamentais da teoria das variedades suaves, com o objetivo principal de fixar as notações e convenções básicas utilizadas ao longo deste trabalho. Para uma descrição mais detalhada e sistemática dos aspectos abordados, recomendamos as referências [21, 22, 25].

1.1 Variedades, Aplicações Suaves, Campos e Formas

Uma *variedade topológica* M de dimensão n consiste de um espaço topológico Hausdorff, com base enumerável e *localmente euclidiano*, i.e., todo ponto $p \in M$ admite uma vizinhança aberta $U \subset M$, $p \in U$, homeomorfa a um aberto de \mathbb{R}^n , sendo um tal homeomorfismo chamado de *carta* da variedade. Nesse sentido, um *atlas* de M é um conjunto $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$ de cartas tais que os seus domínios definem uma cobertura da variedade.

Ao longo de todo o texto, trabalharemos com *variedades suaves*, i.e., pares (M, \mathcal{A}) em que M é uma variedade topológica e \mathcal{A} é um atlas (maximal)

$$\mathcal{A} := \{\varphi_\alpha : U_\alpha \subset M \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n\}_\alpha$$

tal que todas as possíveis *funções de transição*

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

são suaves.

Dada uma variedade suave (M, \mathcal{A}) , o conjunto das funções contínuas definidas em M e com contradomínio \mathbb{R} é denotado por $C_{\mathcal{A}}^0(M)$, e o conjunto das *funções suaves* de M é dado por:

$$C_{\mathcal{A}}^\infty(M) := \{f : M \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \circ \varphi_\alpha^{-1} \text{ é suave, } \forall \varphi_\alpha \in \mathcal{A}\}.$$

Observamos que $C_A^\infty(M) \subset C_A^0(M)$ e que, quando não há risco de confusão quanto ao atlas adotado, utilizamos a notação mais enxuta $C^\infty(M)$. Destacamos o fato de que $C^\infty(M)$ tem uma evidente estrutura de **álgebra** (associativa) sobre o corpo dos números reais.

Por fim, em uma **vizinhança coordenada** $U \subset M$ (i.e., aberto da variedade no qual se define uma carta φ), temos as **funções coordenadas** $x_i := \pi_i \circ \varphi \in C^\infty(U)$, em que cada $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a projeção na i -ésima coordenada, $i = 1, \dots, n$.

Aplicações Suaves entre Variedades

Uma aplicação $F : M \rightarrow N$ entre variedades suaves é dita ser **suave** se, para toda função suave $f \in C^\infty(N)$, $f \circ F \in C^\infty(M)$. Denotamos

$$C^\infty(M, N) := \{F : M \rightarrow N \mid F \text{ é suave}\}.$$

Para toda $F \in C^\infty(M, N)$, temos a aplicação **pullback**

$$\begin{aligned} F^*: C^\infty(N) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longmapsto F^*(f) := f \circ F \end{aligned}.$$

Dizemos que $F \in C^\infty(M, N)$ é um **difeomorfismo** se F for uma bijeção suave com inversa F^{-1} suave. De forma análoga, F é um **difeomorfismo local** se, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança aberta U de p tal que a restrição $F|_U : U \rightarrow F(U)$ é um difeomorfismo.

Vetores Tangentes, Push-Forward e Fibrado Tangente

Dadas uma variedade suave n -dimensional M e um ponto $p \in M$, uma aplicação \mathbb{R} -linear

$$\begin{aligned} \xi_p: C^\infty(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \xi_p(f) \end{aligned}$$

para a qual vale a **Regra de Leibniz**

$$\xi_p(f \cdot g) = f(p)\xi_p(g) + g(p)\xi_p(f), \quad \forall f, g \in C^\infty(M),$$

é chamada de **vetor tangente** a M em p . É fácil verificar que o conjunto $T_p M$ de todos os vetores tangentes a M em p é um \mathbb{R} -espaço vetorial, chamado de **espaço tangente** a M em p .

O **diferencial** (ou **push-forward**) de uma aplicação $F \in C^\infty(M, N)$ no ponto $p \in M$ é a aplicação

$$\begin{aligned} F_{*p}: T_p M &\longrightarrow T_{F(p)} N \\ \xi_p &\longmapsto \xi_p \circ F^* \end{aligned},$$

também denotada por $dF|_p$.

Em uma vizinhança coordenada $U \subset M$ de p , com uma carta φ e funções coordenadas x_1, \dots, x_n , podemos descrever o espaço tangente $T_p M$ da seguinte maneira: dado $\xi_p \in T_p M$, existem únicos escalares reais v_1, \dots, v_n tais que

$$\xi_p = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \quad (1.1)$$

em que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p := (\varphi^{-1})_{*\varphi(p)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)} \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

sendo cada $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)} \in T_{\varphi(p)}(\varphi(U))$ o operador de derivação direcional no ponto $\varphi(p)$ e na direção do i -ésimo vetor e_i da base canônica de \mathbb{R}^n . De fato, o sistema de **vetores tangentes coordenados** $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\}$ é uma base de $T_p M$, que portanto é um espaço vetorial n -dimensional.

É digna de nota também a **Regra da Cadeia**, a qual afirma que, se $F \in C^\infty(M, N)$ e $G \in C^\infty(N, P)$, então $G \circ F \in C^\infty(M, P)$ e, mais ainda, para todo $p \in M$,

$$(G \circ F)_{*p} = G_{*F(p)} \circ F_{*p}.$$

Com o auxílio do Teorema da Função Inversa, sabemos que uma aplicação suave entre variedades suaves $F : M \rightarrow N$ é difeomorfismo local se, e somente se, para todo $p \in M$, F_{*p} é um isomorfismo linear.

Lembramos também de duas noções basilares envolvendo o diferencial de uma aplicação suave. Nomeadamente, uma aplicação $F \in C^\infty(M, N)$ é **imersão** quando, para todo $p \in M$, $F_{*p} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ é injetivo. Por outro lado, $F \in C^\infty(M, N)$ é **submersão** quando, para todo $p \in M$, $F_{*p} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ é sobrejetivo.

Nesse sentido, uma **subvariedade imersa** é dada por uma variedade suave $S \subset M$ (com respeito à topologia induzida de M) para a qual a inclusão $i : S \ni p \rightarrow p \in M$ é uma imersão. Analogamente, uma **subvariedade mergulhada** em M é dada por uma variedade suave $S \subset M$ (com respeito à topologia induzida de M) para a qual a inclusão $i : S \ni p \rightarrow p \in M$ é um **mergulho**, isto é, uma imersão entre variedades suaves que é um homeomorfismo na imagem com respeito às topologias induzidas pelo domínio e contradomínio. Em particular, a topologia de uma subvariedade mergulhada coincide com aquela induzida pelo mergulho. Ao longo de todo o texto, os termos *subvariedade* e *subvariedade mergulhada* são sinônimos. Claramente, toda subvariedade mergulhada é, também, uma subvariedade imersa. Reciprocamente, toda imersão é, localmente, um mergulho.

Por fim, lembramos que (veja, por exemplo, [21, 22, 25]), para uma variedade suave n -dimensional M , o **fibrado tangente** de M , que denotaremos por TM , é uma variedade $2n$ -dimensional, dada pela união disjunta dos espaços tangentes em todos os pontos de M ,

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M,$$

com cartas ψ do tipo:

$$\psi \left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) = (x_1(p), \dots, x_n(p), v_1, \dots, v_n), \quad (1.2)$$

em que x_1, \dots, x_n são as funções coordenadas associadas a uma carta da variedade M .

Campos Vetoriais Tangentes

Uma aplicação \mathbb{R} -linear

$$\begin{aligned} X: C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longmapsto X(f) \end{aligned}$$

para a qual vale a **Regra de Leibniz**

$$X(fg) = fX(g) + gX(f), \quad \forall f, g \in C^\infty(M),$$

é chamada de **campo vetorial tangente** (ou, simplesmente, **campo vetorial**). Ou seja, os campos vetoriais tangentes de uma variedade suave são as derivações da respectiva álgebra das funções suaves. Denotamos por $\mathcal{D}(M)$ o conjunto dos campos vetoriais tangentes de M . Evidentemente, $\mathcal{D}(M)$ tem uma estrutura de $C^\infty(M)$ -módulo.

Por outro lado, de um ponto de vista geométrico, os campos vetoriais são aplicações suaves

$$\begin{aligned} X: M &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto X_p \in T_p M \end{aligned} .$$

Nesse sentido, em uma vizinhança coordenada U de uma variedade M de dimensão n , com uma carta $\varphi : U \subset M \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, os vetores tangentes coordenados definem o sistema de **campos coordenados** $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$, chamado também de **referencial local associado à carta** φ . Relativamente a um referencial desse tipo, todo campo em U pode ser escrito da seguinte maneira:

$$X|_U = \sum_{i=1}^n X|_U(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Dado $X \in \mathcal{D}(M)$, uma **curva integral** (ou **trajetória**) de X é uma curva suave

$$\begin{aligned} \gamma: I &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \gamma(t) \end{aligned} ,$$

definida em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, tal que

$$X_{\gamma(t_0)} = \gamma_{*t_0} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right),$$

para todo $t_0 \in I$. Podemos verificar se uma curva suave $\gamma : I \longrightarrow M$ é uma curva integral do campo vetorial X da seguinte maneira: γ é curva integral de X se, e somente se, dados $p \in \gamma(I)$

e uma vizinhança coordenada U de p com funções coordenadas x_1, \dots, x_n associadas a uma carta φ , a *representação coordenada* $\varphi(\gamma(t)) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ de um arco $\gamma(J) \subset \varphi(U)$, com $J \subset I$, satisfaz o seguinte sistema de EDOs:

$$\frac{d}{dt}x_i(t) = a_i(\gamma(t)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.3)$$

em que $a_i := X|_U(x_i)$. Desse modo, pelo Teorema de Existência e Unicidade das soluções das equações diferenciais ordinárias, o sistema de equações (1.3), quando atrelado a condições iniciais, admite solução única. Em particular, existe uma única curva integral $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ de X tal que $\gamma(0) = p$, para a qual será reservada a notação γ_p .

Agora, pelo Teorema de Dependência Suave das soluções das equações diferenciais ordinárias com respeito às condições iniciais, existem uma vizinhança aberta $V_p \subset U$ de p e um número real $\epsilon > 0$ de sorte que, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$,

$$\begin{aligned} A_t: V_p &\longrightarrow A_t(V_p) \\ q &\longmapsto \gamma_q(t) \end{aligned}$$

é uma bijeção suave. Além disso, por construção, temos as seguintes propriedades:

1. Para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, A_t é um difeomorfismo tal que $A_t^{-1} = A_{-t}$;
2. $A_0 = id_{V_p}$;
3. $A_{t_1} \circ A_{t_2} = A_{t_2} \circ A_{t_1} = A_{t_1+t_2}$, desde que $|t_1|, |t_2|, |t_1+t_2| < \epsilon$ e $A_{t_1}, A_{t_2} \in V_p$.

Devido a essas propriedades, a família $\{A_t\}_t$ é denominada **fluxo** de X ao redor de p . A partir do fluxo, podemos recuperar o correspondente campo X , pois as trajetórias γ_q do campo são tais que

$$(\gamma_q)_* \left(\frac{d}{dt} \Big|_0 \right) = X_{\gamma_q(0)} = X_q, \quad \forall q \in M.$$

De fato, podemos escrever $X = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} A_t^*$.

Por fim, vamos tecer alguns comentários acerca do **comutador** (ou **Colchete de Lie**) de campos vetoriais, i.e., a aplicação

$$\begin{aligned} [,]: \mathcal{D}(M) \times \mathcal{D}(M) &\longrightarrow \mathcal{D}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto [X, Y] := X \circ Y - Y \circ X \end{aligned}$$

Em primeiro lugar, é fácil verificar que são válidas as seguintes propriedades:

1. (**Antissimetria**) $[X, Y] = -[Y, X]$, $\forall X, Y \in \mathcal{D}(M)$;
2. (**Bilinearidade**) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$, $\forall X, Y, Z \in \mathcal{D}(M)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$;
3. (**Identidade de Jacobi**) $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$, $\forall X, Y, Z \in \mathcal{D}(M)$.

Localmente, no domínio U de uma carta φ , com coordenadas x_1, \dots, x_n , escrevendo dois campos X e Y como

$$X|_U = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad Y|_U = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

teremos que

$$[X|_U, Y|_U] = \sum_{i,j=1}^n \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Covetores Tangentes

Seja M uma variedade suave n -dimensional. Para cada $p \in M$, consideramos o espaço vetorial $(T_p M)^*$ dual a $T_p M$, denotando-o por $T_p^* M$. Ou seja,

$$T_p^* M := \{T : T_p M \longrightarrow \mathbb{R} \mid T \text{ é } \mathbb{R} - \text{linear}\}.$$

Um genérico elemento de $T_p^* M$ é denominado **covetor tangente** a M em p , e $T_p^* M$ é denominado **espaço vetorial cotangente** a M em p . Em uma vizinhança coordenada $U \subset M$, por intermédio do referencial local $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ associado a uma carta φ , podemos fornecer uma descrição em coordenadas do espaço cotangente a M em todo ponto de U . De fato, dado $p \in U$, observe que, usando a Regra da Cadeia,

$$dx_i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) = (x_i)_* \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) = (x_i \circ \varphi^{-1})_* \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{\varphi(p)} \right) = (\pi_i)_* \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{\varphi(p)} \right) = \delta_{ij},$$

sendo δ_{ij} o Delta de Kronecker.

Dessa forma, vemos que $\{dx_1|_p, \dots, dx_n|_p\}$ é uma base de $T_p^* M$, chamada de **base de covetores coordenados da carta** φ . Portanto, $T_p^* M$ é um espaço vetorial n -dimensional e, dado $T \in T_p^* M$, existem (únicos) escalares reais a_1, \dots, a_n tais que

$$T = \sum_{i=1}^n a_i dx_i|_p. \tag{1.4}$$

O **fibrado cotangente** de M , que será denotado por $T^* M$, é uma variedade $2n$ -dimensional, dado pela união disjunta

$$T^* M := \bigcup_{p \in M} T_p^* M.$$

As cartas de $T^* M$ são do tipo:

$$\psi \left(\sum_{i=1}^n a_i dx_i|_p \right) = (x_1(p), \dots, x_n(p), a_1, \dots, a_n), \tag{1.5}$$

em que x_1, \dots, x_n são as funções coordenadas associadas a uma carta da variedade M .

Mais em geral, para cada $k \geq 1$, o conjunto dos k -covetores tangentes a M em p é dado por

$$\Lambda_p^k(M) := \{T : T_p M \times \cdots \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R} \mid T \text{ é multilinear e alternada}\}.$$

Assim, o **fibrado dos k -covetores tangentes** a M (veja, por exemplo, [21, 22, 25]) é a união disjunta:

$$\Lambda^k(M) := \bigcup_{p \in M} \Lambda_p^k(M).$$

Formas Diferenciais

Seja M uma variedade suave n -dimensional. De um ponto de vista algébrico, dado $k \geq 1$, uma **k -forma diferencial** é uma aplicação $C^\infty(M)$ -linear e antissimétrica

$$\begin{aligned} \alpha: \mathcal{D}(M) \times \cdots \times \mathcal{D}(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ (X_1, \dots, X_k) &\mapsto \alpha(X_1, \dots, X_k) \end{aligned}.$$

Para todo k , o conjunto das k -formas diferenciais de M é denotado por $\Omega^k(M)$. Evidentemente, para todo k , $\Omega^k(M)$ tem uma estrutura de $C^\infty(M)$ -módulo. Além disso, uma **0-forma diferencial** é simplesmente uma função suave de M . Ou seja, $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$.

Por outro lado, dados $k \geq 1$ e uma k -forma diferencial α , é possível mostrar que o número real $\alpha(X_1, \dots, X_k)(p)$ depende somente dos vetores tangentes $X_1|_p, \dots, X_k|_p$ e, a partir disso, de um ponto de vista geométrico, as k -formas diferenciais podem ser identificadas (veja [22]) com as seções do fibrado dos k -covetores tangentes,

$$\begin{aligned} \alpha: M &\longrightarrow \Lambda^k(M) \\ p &\mapsto \alpha_p \in \Lambda_p^k(M) \end{aligned},$$

de modo tal que

$$\alpha_p(X_1|_p, \dots, X_k|_p) = \alpha(X_1, \dots, X_k)(p), \quad \forall p \in M. \quad (1.6)$$

Em particular, pode-se ver que, localmente, nas coordenadas $\{x_1, \dots, x_n\}$ de uma carta φ com domínio U , as bases de covetores coordenados ponto a ponto definem um sistema de 1-formas $\{dx_1, \dots, dx_n\}$, chamado de **correferencial coordenado associado à carta φ** .

A **álgebra exterior das formas diferenciais** de M é dada por

$$\Omega^*(M) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^k(M),$$

sendo dotada de uma soma

$$\begin{aligned} +: \Omega^k(M) \times \Omega^k(M) &\longrightarrow \Omega^k(M) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha + \beta \end{aligned},$$

e de um produto (**produto exterior**)

$$\begin{aligned} \wedge: \Omega^k(M) \times \Omega^h(M) &\longrightarrow \Omega^{k+h}(M) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

tal que \wedge denota simplesmente o produto de uma função suave por forma diferencial quando $k = 0$, enquanto que, para $k, h > 0$, o produto \wedge é definido pela fórmula:

$$\alpha \wedge \beta(X_1, \dots, X_{k+h}) := \frac{1}{k!h!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{k+h}} (-1)^\sigma \alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \beta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+h)}),$$

para todos os campos vetoriais $X_1, \dots, X_{k+h} \in \mathcal{D}(M)$, sendo \mathbb{S}_{k+h} o grupo simétrico de $k+h$ símbolos e $(-1)^\sigma$ o sinal da permutação $\sigma \in \mathbb{S}_{k+h}$.

Em particular, para quaisquer 1-formas diferenciais $\theta_1, \dots, \theta_m$, vale que:

$$\theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_m(X_1, \dots, X_m) = \det \begin{pmatrix} \theta_1(X_1) & \dots & \theta_1(X_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_m(X_1) & \dots & \theta_m(X_m) \end{pmatrix}.$$

Ademais, em virtude das observações supracitadas, e em particular de (1.6), temos que, em uma vizinhança coordenada U da variedade, uma arbitrária k -forma diferencial α se expressa da seguinte maneira:

$$\alpha|_U = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

em que cada $\alpha_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(U)$.

Seja $F \in C^\infty(M, N)$. A noção de pullback já apresentada pode ser estendida para as formas diferenciais. Com efeito, dado $k \geq 1$, o **pullback** de F é a aplicação linear

$$\begin{aligned} F^*: \Omega^k(N) &\longrightarrow \Omega^k(M) \\ \alpha &\mapsto F^*(\alpha) \end{aligned},$$

tal que

$$\begin{aligned} F^*(\alpha)_p: T_p M \times \dots \times T_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\xi_1, \dots, \xi_k) &\mapsto \alpha_{F(p)}(dF_p(\xi_1), \dots, dF_p(\xi_k)) \end{aligned},$$

para todo $p \in M$.

Usando essa definição, é fácil ver que, para todas as funções suaves $F \in C^\infty(M, N)$ e $G \in C^\infty(N, P)$,

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*.$$

Além disso, dados $k, h \geq 0$, para quaisquer formas diferenciais $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^h(M)$, vale que:

$$F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*(\alpha) \wedge F^*(\beta).$$

Também, dados $k \geq 1$ e $X \in \mathcal{D}(M)$, podemos definir o **operador de inserção**

$$\begin{aligned} X \lrcorner : \Omega^k(M) &\longrightarrow \Omega^{k-1}(M) \\ \alpha &\longmapsto X \lrcorner \alpha \end{aligned} ,$$

tal que, para quaisquer campos $X_1, \dots, X_{k-1} \in \mathcal{D}(M)$,

$$X \lrcorner \alpha(X_1, \dots, X_{k-1}) := \alpha(X, X_1, \dots, X_{k-1}).$$

Ademais, dada $f \in C^\infty(M)$, $X \lrcorner f := 0$.

Imediatamente da definição, vemos que o operador de inserção de qualquer campo suave de M é uma aplicação $C^\infty(M)$ -linear.

Dentre todas as possíveis aplicações sobre as formas diferenciais, aquela de diferenciação ocupa, certamente, um lugar fundamental. O **diferencial exterior** é o único operador $d : \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(M)$ tal que, para todo $k \geq 0$, transforma k -formas diferenciais em $(k+1)$ -formas diferenciais, completamente determinado pelas seguintes propriedades:

(P1) d é \mathbb{R} -linear:

$$d(a\alpha_1 + b\alpha_2) = ad\alpha_1 + bd\alpha_2,$$

quaisquer que sejam os reais a, b e as formas diferenciais $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega^k(M)$;

(P2) $d^2 = 0$;

(P3) Para quaisquer formas diferenciais $\alpha \in \Omega^k(M)$ e $\beta \in \Omega^l(M)$,

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta;$$

(P4) Qualquer que seja a função suave $f \in C^\infty(M)$, df é o diferencial de f , ou seja,

$$df(X) = X(f),$$

para todo $X \in \mathcal{D}(M)$.

É fácil provar que, em uma vizinhança coordenada de U de M , com uma carta φ e coordenadas $\{x_1, \dots, x_n\}$, podemos escrever:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

É importante também destacarmos a **propriedade de naturalidade** do diferencial exterior,

$$F^* \circ d = d \circ F^*,$$

para toda $F \in C^\infty(M, N)$. Repare que, nessa identidade, o diferencial exterior no primeiro membro é aquele de N , enquanto que o diferencial exterior no segundo membro é aquele de M .

Uma outra aplicação fundamental é representada pela *derivada de Lie*. De fato, dados $k \geq 1$, uma função suave $f \in C^\infty(M)$, campos vetoriais $X, Y \in \mathcal{D}(M)$ e uma k -forma diferencial $\alpha \in \Omega^k(M)$, definimos:

- A *derivada de Lie de f ao longo de X* , $\mathcal{L}_X f := X(f)$;
- A *derivada de Lie de Y ao longo de X* , $\mathcal{L}_X Y := [X, Y]$;
- A *derivada de Lie de $\alpha \in \Omega^k(M)$ ao longo de X* ,

$$\mathcal{L}_X(\alpha)(X_1, \dots, X_k) = X(\alpha(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{i=1}^k \alpha(X_1, \dots, \mathcal{L}_X X_i, \dots, X_k).$$

Equivalentemente, a derivada de Lie de formas diferenciais pode ser entendida como o limite de uma razão incremental,

$$\mathcal{L}_X(\alpha) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A_t^*(\alpha) - \alpha}{t},$$

sendo $\{A_t\}_t$ o fluxo do campo X .

Observe que $\mathcal{L}_X f \in C^\infty(M)$, $\mathcal{L}_X Y \in \mathcal{D}(M)$ e $\mathcal{L}_X \alpha \in \Omega^k(M)$.

Para concluirmos, iremos exibir uma pequena coletânea de propriedades, as quais mostram como as formas diferenciais se relacionam com os operadores \lrcorner , d e \mathcal{L}_X descritos nesta seção.

1. (**Fórmula “Mágica” de Cartan**) Dados $X \in \mathcal{D}(M)$ e $\alpha \in \Omega^*(M)$,

$$\mathcal{L}_X \alpha = X \lrcorner d\alpha + d(X \lrcorner \alpha);$$

2. Dado $X \in \mathcal{D}(M)$ $\alpha \in \Omega^*(M)$, $\mathcal{L}_X d\alpha = d(\mathcal{L}_X \alpha)$;
3. Dados $X, Y \in \mathcal{D}(M)$ e $\alpha \in \Omega^*(M)$, $\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y \alpha) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X \alpha) = \mathcal{L}_{[X, Y]} \alpha$;
4. Dados $k, h \geq 0$, $X \in \mathcal{D}(M)$, $\alpha \in \Omega^k(M)$ e $\beta \in \Omega^h(M)$,

$$X \lrcorner (\alpha \wedge \beta) = (X \lrcorner \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (X \lrcorner \beta).$$

1.2 Grupos e Álgebras de Lie

Um **grupo de Lie** G é uma variedade suave com estrutura de grupo (G, \cdot) na qual o produto

$$\begin{aligned} m : G \times G &\longrightarrow G \\ (g_1, g_2) &\mapsto m(g_1, g_2) := g_1 \cdot g_2 \end{aligned}$$

e a inversão

$$\begin{aligned} i : G &\longrightarrow G \\ g &\mapsto i(g) := g^{-1} \end{aligned}$$

são aplicações suaves.

Chamamos a atenção para o fato de que, sendo G um grupo de Lie e $g \in G$, temos os difeomorfismos

1. (**Translação à esquerda**)

$$\begin{aligned} L_g : G &\longrightarrow G \\ h &\mapsto g \cdot h \end{aligned} ;$$

2. (**Translação à direita**)

$$\begin{aligned} R_g : G &\longrightarrow G \\ h &\mapsto h \cdot g \end{aligned} .$$

Um teorema demonstrado por *Élie Cartan* expressa uma propriedade fundamental acerca dos grupos de Lie.

Teorema 1.1. *Sejam G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo (no sentido algébrico). Temos que H é um subgrupo de Lie mergulhado se, e somente se, H é um conjunto fechado na topologia de G .*

Para uma prova do resultado acima, consulte [14].

Lembramos que uma **álgebra de Lie** é dada por um espaço vetorial \mathfrak{g} dotado de um produto

$$[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

tal que:

- a) $[,]$ é bilinear;
- b) $[,]$ é alternado, i.e., $[X, X] = 0, \forall X \in \mathfrak{g}$;
- c) $[,]$ satisfaz a **identidade de Jacobi**, i.e., para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

O produto $[,]$ é chamado de **comutador** (ou **colchete de Lie**).

É fácil ver que, se $[,]$ é alternado, então $[,]$ é antissimétrico, i.e., para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$, $[X, X] = -[Y, X]$. Mais ainda, quando o corpo sobre o qual \mathfrak{g} é um espaço vetorial tem característica distinta de dois, a alternância e a antissimetria são propriedades equivalentes.

Um simples exemplo de álgebra de Lie é o já mencionado colchete de Lie de campos vetoriais. Ademais, dada uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , um subespaço vetorial $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ é uma **subálgebra de Lie** quando for fechado pelo colchete de Lie, i.e., para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$, $[X, Y] \in \mathfrak{g}$.

Associamos a um grupo de Lie G a chamada **álgebra de Lie dos campos invariantes à direita**, dada por:

$$\mathfrak{g} := \{X \in \mathcal{D}(G) \mid (R_g)_* X_h = X_{R_g(h)}, \forall g, h \in G\}.$$

É fácil ver que a aplicação

$$\begin{aligned} \text{Av: } \mathfrak{g} &\longrightarrow T_e G \\ X &\mapsto X_e \end{aligned}$$

é um isomorfismo linear. Dessa forma, $\mathfrak{g} \simeq T_e G$.

Ação de Grupos de Lie

Sejam M uma variedade suave n -dimensional, G um grupo de Lie de dimensão m e $\mathfrak{g} \simeq T_e G$ a sua respectiva álgebra de Lie. Iremos assumir que G age suavemente em M à esquerda, por meio de uma ação

$$\begin{aligned} \mu : G \times M &\longrightarrow M \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

que assumimos ser **regular**, i.e., tal que o espaço das órbitas $\overline{M} := M/G$ é uma variedade suave e, além disso, a projeção canônica que associa a todo $x \in M$ a sua órbita \mathcal{O}_x ,

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_G : M &\longrightarrow \overline{M} \\ x &\mapsto \mathcal{O}_x \end{aligned}$$

é uma submersão. Assim, sendo cada órbita $\mathcal{O}_x = \mathbf{q}_G^{-1}(\mathcal{O}_x) \subset M$ pré-imagem de um valor regular, temos que, pelo Teorema da Função Implícita, cada órbita é uma subvariedade de dimensão m .

Uma caracterização útil das ações regulares de grupos de Lie é dada pelo seguinte

Teorema 1.2. *Seja G um grupo de Lie agindo suavemente à esquerda em uma variedade suave M . Temos que G age regularmente em M se, e somente se, o subconjunto*

$$R_G := \{(x, g \cdot x) \mid x \in M, g \in G\} \subset M \times M$$

é fechado.

Para uma prova do resultado acima, consulte [13].

É conveniente definirmos, para todo $x \in M$, a aplicação

$$\begin{aligned} \mu_x : G &\longrightarrow M \\ g &\mapsto \mu_x(g) := \mu(g, x) \end{aligned}$$

Ademais, chamamos a atenção para o fato de que, para todo campo vetorial $Z \in \mathfrak{g}$, a curva integral maximal $\gamma_e^Z(t)$ de Z , que passa pelo elemento neutro $e \in G$ por $t = 0$, está definida para todos os pontos de \mathbb{R} [14]. Desse modo, podemos considerar a seguinte

Definição 1.3. A aplicação **exponencial** é dada por

$$\begin{aligned} \exp: \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ Z &\longmapsto \gamma_e^Z(1) \end{aligned}$$

A partir da aplicação exponencial, introduzimos uma importante classe de campos vetoriais em M .

Definição 1.4. Para cada $Z \in \mathfrak{g}$, defimos o **campo vetorial fundamental**:

$$\tilde{Z}_x := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\exp(tZ) \cdot x), \quad \forall x \in M.$$

O conjunto dos campos vetoriais fundamentais é denotado por Γ_G e, além disso, para todo $x \in M$, denotamos $\Gamma_{G,x} := \{\tilde{Z}_x \mid Z \in \mathfrak{g}\}$.

O conjunto Γ_G define uma álgebra de Lie [14], chamada de **álgebra de Lie dos campos vetoriais fundamentais**. Observamos também que, dados $x \in M$ e $Z \in \mathfrak{g}$, $\tilde{Z}_x = (\mu_x)_{*e}(Z)$ e $\Gamma_{G,x} = (\mu_x)_{*e}(T_e G)$.

Denotaremos também com $\mathbf{\Gamma}_G$, em negrito, a distribuição gerada pelos campos vetoriais fundamentais, i.e.,

$$\mathbf{\Gamma}_G = \langle \Gamma_G \rangle.$$

Evidentemente, como \mathbb{R} -espaços vetoriais, $\Gamma_G \subset \mathbf{\Gamma}_G$. Além disso, teremos que $\mathbf{\Gamma}_G = \ker \mathbf{q}_{G*}$. Ademais, chamamos a atenção para o fato de que todo $\xi \in \ker \mathbf{q}_{G*}$ é vetor de um campo fundamental \tilde{Z} , i.e., $\xi = \tilde{Z}_x$. De fato, existe uma curva suave $\gamma : (\epsilon, \epsilon) \rightarrow G$ tal que $\gamma(0) = e$, $\tilde{\gamma} = \mu_x \circ \gamma$ e $\tilde{\gamma}_{*0} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_0 \right) = \xi$. Decorre disso que o campo vetorial fundamental $\tilde{Z} \in \mathcal{D}(M)$ associado a $Z := \gamma_{*0} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_0 \right) \in T_e G \simeq \mathfrak{g}$ é tal que $\tilde{Z}_x = \xi$. De fato, pela Regra da Cadeia,

$$\xi = (\mu_x \circ \gamma)_{*0} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_0 \right) = (\mu_x)_{*e} \circ \gamma_{*0} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_0 \right) = (\mu_x)_{*e}(Z) = \tilde{Z}_x.$$

Além disso, é possível provar [11] que, quando a ação é **efetiva** (i.e., para cada $g \in G$, existe $x \in M$ tal que $g \cdot x \neq x$), a correspondência $\mathfrak{g} \ni X \mapsto \tilde{X} \in \Gamma_G$ é um isomorfismo de álgebras de Lie.

1.3 Distribuições e Teorema de Frobenius

Em uma variedade suave n -dimensional M , uma **distribuição suave k -dimensional** (ou de dimensão k) é dada por uma aplicação $\mathcal{F} : M \ni p \rightarrow \mathcal{F}_p \subset T_p M$ tal que, para cada $p \in M$, \mathcal{F}_p é um subespaço vetorial de $T_p M$ e existe uma vizinhança aberta $U \subset M$ de p tal que

$$\mathcal{F}|_U = \text{span}\{X_1, \dots, X_k\},$$

sendo k uma constante independente de p e $\{X_1, \dots, X_k\} \subset \mathcal{D}(U)$ ponto a ponto linearmente independente. Para denotar que uma distribuição \mathcal{F} é de dimensão k , escrevemos $\dim \mathcal{F} = k$.

Sendo \mathcal{F} uma distribuição suave k -dimensional sobre uma variedade suave M , dizemos que um campo $X \in \mathcal{D}(M)$ está **inscrito** na distribuição \mathcal{F} , ou que **pertence** à distribuição \mathcal{F} , e escrevemos $X \in \mathcal{F}$, quando, para todo $p \in M$, $X_p \in \mathcal{F}_p$. Observamos que, se temos $\mathcal{F} = \text{span}\{X_1, \dots, X_k\}$, então $X \in \mathcal{F}$ se, e somente se, existem funções $f_1, \dots, f_k \in C^\infty(M)$ tais que $X = \sum_{i=1}^k f_i X_i$. Mais ainda, sendo $\tilde{\mathcal{F}}$ uma outra distribuição suave de dimensão constante sobre M , dizemos que $\tilde{\mathcal{F}}$ está **contida** (ou **inscrita**) em \mathcal{F} , e escrevemos $\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$, quando, para todo $p \in M$, $\tilde{\mathcal{F}}_p \subset \mathcal{F}_p$.

Além disso, de maneira dual, podemos descrever as distribuições a partir de um conjunto de 1-formas diferenciais, as quais anulam os campos vetoriais pertencentes à distribuição. De fato, denotando com I o submódulo de $\Omega^1(M)$ das 1-formas anuladas pelos campos de \mathcal{F} , podemos interpretar \mathcal{F} como sendo a distribuição dos subespaços que anulam as formas de I , i.e.,

$$\mathcal{F} = \text{ann}(I).$$

Na prática, pode ser útil denotar I com \mathcal{F}^\perp , e também denotar $\text{ann}(I)$ com I^\perp .

Ademais, para uma genérica distribuição \mathcal{F} sobre uma variedade suave M , definimos uma **variedade integral** de \mathcal{F} como sendo uma subvariedade imersa $\bar{N} \subset M$ tal que, para todo $p \in \bar{N}$, $T_p \bar{N} \subset \mathcal{F}_p$. Alternativamente, pode-se pensar em uma variedade integral como sendo uma imersão $h : N \rightarrow M$ na qual $\bar{N} := h(N)$ satisfaz a propriedade $T_p \bar{N} \subset \mathcal{F}_p$, $\forall p \in \bar{N}$. Quando $\dim \mathcal{F} = \dim \bar{N}$, dizemos que \bar{N} é uma **variedade integral maximal** de \mathcal{F} e, nesse caso, para todo $p \in \bar{N}$, $T_p \bar{N} = \mathcal{F}_p$. Por fim, dizemos que a distribuição \mathcal{F} é **completamente integrável** se, para cada $p \in M$, existe uma variedade integral maximal N tal que $p \in N$. Em particular, toda distribuição suave unidimensional é completamente integrável, visto que, nesse caso, todos os pontos da variedade M admitem variedades integrais maximais determinadas pelas curvas integrais dos campos vetoriais.

Sendo \mathcal{F} uma distribuição suave k -dimensional definida em uma variedade n -dimensional M , uma importante ferramenta para avaliarmos a completa integrabilidade de \mathcal{F} é dada pelas **integrais primeiras** da distribuição. Uma função suave $f \in C^\infty(M)$ é dita ser uma integral primeira de \mathcal{F} se, para todo campo $X \in \mathcal{F}$, $X(f) = 0$. Nesse sentido, não é difícil verificar que \mathcal{F} é completamente integrável se, e somente se, para cada $x \in M$, há uma vizinhança aberta U de x na qual $\mathcal{F}|_U$ admite o maior número possível de integrais primeiras funcionalmente independentes, a saber, $n - k$.

Além disso, um critério fundamental que caracteriza as distribuições completamente integráveis é descrito pelo Teorema de Frobenius.

Teorema 1.5 (Frobenius). *Sejam M uma variedade suave n -dimensional e \mathcal{F} uma distri-*

buição suave k -dimensional definida em M . As seguintes asserções são equivalentes:

1. \mathcal{F} é completamente integrável;
2. Se $U \subset M$ é um aberto para o qual existem campos vetoriais $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{D}(U)$ tais que $\mathcal{F}|_U = \text{span}\{X_1, \dots, X_k\}$, então, para quaisquer $1 \leq i, j \leq k$, $[X_i, X_j] \in \mathcal{F}|_U$;
3. Se $U \subset M$ é um aberto para o qual existem 1-formas diferenciais $\theta^1, \dots, \theta^{n-k} \in \Omega^1(U)$ tais que $\mathcal{F}|_U = \text{ann}\{\theta^1, \dots, \theta^{n-k}\}$, então, para cada $1 \leq i \leq k$, existem 1-formas diferenciais $\alpha^1, \dots, \alpha^{n-k} \in \Omega^1(U)$ tais que

$$d\theta^i = \sum_{j=1}^{n-k} \alpha^j \wedge \theta^j.$$

Observamos que, de um ponto de vista algébrico, a última das asserções elencadas no Teorema de Frobenius também pode ser descrita ao dizermos que cada $d\theta^i$ pertence ao ideal gerado pelas formas diferenciais $\theta^1, \dots, \theta^{n-k}$. Ideais desse tipo irão reaparecer no Capítulo 5.

Por fim, chamamos a atenção para uma outra noção basilar associada às distribuições suaves. De fato, dizemos que um difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow M$ é uma **simetria finita** da distribuição \mathcal{F} se φ preserva a distribuição, isto é, para cada $x \in M$, $\varphi_{*x}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_{\varphi(x)}$. Ademais, um campo vetorial em M é dito ser uma **simetria infinitesimal** de \mathcal{F} se o seu fluxo é composto por simetrias finitas de \mathcal{F} , e denotamos por $\text{Sym}(\mathcal{F})$ o conjunto de todas as simetrias infinitesimais da distribuição \mathcal{F} . No Capítulo 3, iremos estabelecer uma caracterização útil das simetrias infinitesimais das distribuições.

Capítulo 2

Fibrados

Neste capítulo, vamos introduzir, com brevidade, a noção de *fibrado*, fornecendo alguns simples exemplos e comentando sobre alguns importantes casos particulares. Aos leitores interessados em obter mais informações acerca do tema, indicamos as referências [14, 23].

2.1 Noções Preliminares sobre Fibrados

Definição 2.1. Um **fibrado** consiste de uma quádrupla (E, π, B, F) , em que E, B e F são variedades suaves, $\pi : E \rightarrow B$ é uma submersão sobrejetora, e vale a **propriedade de trivialização local**: dado $x \in B$, há uma vizinhança aberta do ponto x , digamos U , e um difeomorfismo $\psi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ de sorte que $\pi_1 \circ \psi_U = \pi$, sendo π_1 a projeção da variedade produto $U \times F$ no aberto U .

Assim, na presença de um fibrado (E, π, B, F) , a variedade E é chamada de **espaço total**, B é chamada de **espaço base**, e F é chamada de **fibra padrão**. Além disso, o difeomorfismo ψ_U é comumente chamado de **trivialização local**, e a pré-imagem $\pi^{-1}(x)$ de um ponto $x \in B$ é chamada de **fibra em x** . Em particular, por meio da propriedade de trivialização local, vemos que $\dim E = \dim B + \dim F$.

Quando não há risco de confusão quanto à fibra padrão, é costumeiro se referir ao fibrado (E, π, B, F) por meio da aplicação $\pi : E \rightarrow B$, ou apenas por meio do espaço total E . Pelo fato de que π é submersão, temos que π é aberta e também que, dado $x \in B$, a fibra $\pi^{-1}(x) \subset E$ é uma subvariedade (mergulhada) difeomorfa à fibra padrão F .

A seguir, iremos estabelecer, sobre o espaço total E , cartas adaptadas às fibras do fibrado. A ideia é a de usar cartas de E para, localmente, parametrizar as fibras com $m := \dim F$ coordenadas.

Definição 2.2. Seja $\pi : E \rightarrow B$ um fibrado. Dizemos que uma carta $\varphi : V \subset E \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, definida em um aberto $V \subset E$, é uma **carta adaptada às fibras** de π se, dados $p, q \in V$

tais que $\pi(p) = \pi(q)$, vale que $pr_1(\varphi(p)) = pr_1(\varphi(q))$, sendo pr_1 a projeção do produto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ no seu primeiro fator \mathbb{R}^n .

A existência de cartas adaptadas às fibras dos fibrados advém da forma local das submersões e, por exemplo, na Seção 2.3, mostraremos como este conceito auxilia na simplificação da expressão local de certas formas diferenciais. Por enquanto, na prova da nossa primeira proposição, veremos que as trivializações locais também induzem cartas adaptadas às fibras dos fibrados.

Proposição 2.3. *Seja $\pi : E \rightarrow B$ um fibrado. Dado $p \in E$, existem uma vizinhança aberta V do ponto p e uma carta de E , definida em V , que é adaptada às fibras de π .*

Demonstração. Dado $p \in E$, existe uma vizinhança aberta $U \subset B$ do ponto $\pi(p)$ para a qual se define uma trivialização local $\psi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$. Como $\pi_1 \circ \psi_U = \pi$ em $\pi^{-1}(U)$, podemos escrever $\psi_U(p) = (\pi(p), v) \in U \times F$. Daí, consideramos cartas

$$\varphi_p : U_{\pi(p)} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi_v : U_v \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

com $U_{\pi(p)} \subset U$ vizinhança aberta de $\pi(p)$ e $U_v \subset F$ vizinhança aberta de v . Desse modo, a aplicação

$$(\varphi_p, \varphi_v) : U_{\pi(p)} \times U_v \subset U \times F \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

define uma carta da variedade produto $U \times F$ para o ponto $(\pi(p), v)$. Assim, como ψ_U é um difeomorfismo e $(\psi_U)^{-1}(U_{\pi(p)} \times U_v)$ é uma vizinhança aberta de p , podemos afirmar que a aplicação

$$\phi := (\varphi_p, \varphi_v) \circ \psi_U|_{(\psi_U)^{-1}(U_{\pi(p)} \times U_v)} : (\psi_U)^{-1}(U_{\pi(p)} \times U_v) \subset E \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

define uma carta do espaço total E para o ponto p .

Além disso, dados $\bar{p}, \bar{q} \in (\psi_U)^{-1}(U_{\pi(p)} \times U_v)$, e usando novamente que $\pi_1 \circ \psi_U = \pi$ em $\pi^{-1}(U)$, obtemos:

$$\begin{cases} pr_1(\phi(\bar{p})) = \varphi_p \circ \pi_1 \circ \psi_U(\bar{p}) = \varphi_p \circ \pi(\bar{p}) \\ pr_1(\phi(\bar{q})) = \varphi_p \circ \pi_1 \circ \psi_U(\bar{q}) = \varphi_p \circ \pi(\bar{q}) \end{cases}.$$

Daí, se $\pi(\bar{p}) = \pi(\bar{q})$, então $pr_1(\phi(\bar{p})) = pr_1(\phi(\bar{q}))$. Portanto, ϕ é uma carta de E , definida na vizinhança aberta de p dada por $(\psi_U)^{-1}(U_{\pi(p)} \times U_v)$, e ϕ é adaptada às fibras do fibrado, como desejado. \square

Fixado um fibrado $\pi : E \rightarrow B$, as coordenadas locais $\{x_1, \dots, x_{n+m}\}$ definidas no domínio de uma carta adaptada são chamadas de **coordenadas adaptadas** (ou **naturais**).

Definição 2.4. *Seja $\pi : E \rightarrow B$ um fibrado. Uma aplicação suave $\sigma : B \rightarrow E$ é dita ser uma **seção suave** do fibrado π quando vale que $\pi \circ \sigma = id_B$. Denotamos o conjunto das seções*

suaves de π por $\Gamma(\pi)$. Analogamente, quando $\sigma : U \rightarrow E$ for uma aplicação suave definida em um aberto $U \subset B$ tal que $\pi \circ \sigma = id_U$, diremos que σ é uma **seção local suave** do fibrado π . Dado $x \in B$, denotamos o conjunto das seções locais suaves definidas em uma vizinhança aberta de x por $\Gamma_x(\pi)$.

Proposição 2.5. *Seja $\pi : E \rightarrow B$ um fibrado. Dado $x \in B$, existe uma seção local suave $\sigma : U \rightarrow E$ definida em uma vizinhança aberta U de x .*

Demonstração. Dado $x \in B$, temos uma trivialização local $\psi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$, em que $U \subset B$ é uma vizinhança aberta do ponto x . Agora, dado $v \in F$, defina a aplicação

$$\begin{aligned} \sigma : U &\longrightarrow E \\ y &\longmapsto (\psi_U)^{-1} \circ \tilde{v}(y) \end{aligned} ,$$

em que

$$\begin{aligned} \tilde{v} : U &\longrightarrow U \times F \\ y &\longmapsto (y, v) \end{aligned} .$$

Pelo fato de que \tilde{v} é suave e ψ_U é um difeomorfismo, obtemos que a aplicação σ é suave. Ademais, usando que $\pi_1 \circ \psi_U = \pi$ em $\pi^{-1}(U)$, calculamos:

$$\pi \circ \sigma(y) = \pi_1 \circ \psi_U \circ \sigma(y) = \pi_1 \circ \tilde{v}(y) = y, \quad \forall y \in U.$$

Logo, σ é uma seção local suave do fibrado π definida no aberto U , com $x \in U$. □

Escólio 2.6. *Seja $\pi : E \rightarrow B$ um fibrado. Dado $p \in E$, existe uma seção local suave $\sigma : U \rightarrow E$ tal que $p \in \sigma(U)$.*

Demonstração. Dado $p \in E$, basta considerarmos, na demonstração da Proposição 2.5, $x = \pi(p)$ e o único $v \in F$ tal que $\psi_U(p) = (\pi(p), v)$. De fato, perceba que a seção local suave $\sigma : U \rightarrow E$ é tal que

$$\sigma(\pi(p)) = (\psi_U)^{-1} \circ \tilde{v}(\pi(p)) = (\psi_U)^{-1}((\pi(p), v)) = (\psi_U)^{-1} \circ \psi_U(p) = p.$$

□

Observação 2.7. *O Escólio 2.6 vale, de fato, para qualquer submersão $\mathbf{p} \in C^\infty(E, B)$ [21]. Em particular, a Proposição 2.5 é válida para qualquer submersão sobrejetiva $\mathbf{p} \in C^\infty(E, B)$.*

A seguir, dois simples exemplos para ilustrar alguns dos aspectos abordados.

Exemplo 2.8 (Fibrado Tangente). *No Capítulo 1, definimos o fibrado tangente por meio da união disjunta dos espaços tangentes em todos os pontos da variedade. Por outro lado, a partir da referida união disjunta, naturalmente se define a submersão*

$$\begin{aligned} \pi : TM &\longrightarrow M \\ \xi_p &\longmapsto p \end{aligned} .$$

Note ainda que, a partir da equação (1.1), temos em toda vizinhança coordenada $U \subset M$ um difeomorfismo

$$\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

com a seguinte descrição em coordenadas locais:

$$\phi \left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) = (p, v_1, \dots, v_n).$$

Ou seja, o fibrado tangente a uma variedade n -dimensional tem fibra padrão \mathbb{R}^n . Ademais, note que as cartas descritas pela fórmula (1.2) são cartas adaptadas às fibras de TM . Observamos também que os campos vetoriais são as seções suaves do fibrado tangente.

Exemplo 2.9 (Fibrado Cotangente). No Capítulo 1, definimos o fibrado cotangente por meio da união disjunta dos espaços cotangentes em todos os pontos da variedade. Por outro lado, a partir da referida união disjunta, naturalmente se define a submersão

$$\begin{array}{ccc} \pi : T^*M & \longrightarrow & M \\ \alpha_p & \longmapsto & p \end{array}.$$

Note ainda que, a partir da equação (1.4), temos em toda vizinhança coordenada $U \subset M$ um difeomorfismo

$$\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

com a seguinte descrição em coordenadas locais:

$$\phi \left(\sum_{i=1}^n v_i d(x_i)_p \right) = (p, v_1, \dots, v_n).$$

Ou seja, o fibrado cotangente a uma variedade n -dimensional tem fibra padrão \mathbb{R}^n . Ademais, note que as cartas descritas pela fórmula (1.5) são cartas adaptadas às fibras de T^*M . Observamos também que as 1-formas diferenciais são as seções suaves do fibrado cotangente.

Em geral, observamos que, para $k \geq 1$, as k -formas diferenciais são as seções suaves do fibrado dos k -covetores tangentes.

Por meio da Proposição 2.5 e do Escólio 2.6, percebemos que sempre podemos definir seções locais suaves relativas a um dado fibrado. Por outro lado, existem fibrados que não admitem uma seção global suave sequer.

Exemplo 2.10 (Fibrado Tangente Furado). Sejam $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ a esfera e $T\mathbb{S}^2 \setminus \{0\}$ o conjunto dos vetores tangentes não nulos. O **fibrado tangente furado** de \mathbb{S}^2 é a quádrupla $(T\mathbb{S}^2 \setminus \{0\}, \pi, \mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, em que

$$\begin{array}{ccc} \pi : T\mathbb{S}^2 \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \\ \xi_p & \longmapsto & p \end{array}.$$

Pelo fato de que as seções suaves do fibrado tangente TS^2 são campos vetoriais, dizer que π tem uma seção suave globalmente definida implicaria na existência de um campo vetorial em S^2 globalmente não nulo, algo que é proibido pelo Teorema da Bola “Cabeluda”. Portanto, não há seção suave de π que esteja definida em toda a esfera S^2 .

Por outro lado, a existência de uma seção suave globalmente definida, associada a uma certa hipótese de conexidade, é condição suficiente para adquirirmos uma versão global do Escólio 2.6. Mais precisamente, pode-se mostrar o seguinte

Lema 2.11. *Sejam $\pi : E \rightarrow B$ um fibrado com fibras conexas e s uma seção local suave de π definida em um aberto $U \subset B$ suficientemente pequeno. Se $\Gamma(\pi) \neq \emptyset$, então existe uma seção suave global $\sigma : B \rightarrow E$ tal que $\sigma|_U = s$.*

Para uma prova desse resultado, veja [23].

Definição 2.12. *Sejam (E, π, B, F) um fibrado, G variedade suave e $S \subset E$ uma subvariedade. Se $(S, \pi|_S, \pi(S), G)$ define um fibrado, o chamamos de **subfibrado** de π .*

Do ponto de vista notacional, é comum se referir a um subfibrado somente por meio da submersão sobrejetora $\pi|_S : S \rightarrow \pi(S)$. Observamos também que a fibra padrão de π pode ser diferente da fibra padrão do subfibrado $\pi|_S$. A seguir, fornecemos um simples exemplo de subfibrado.

Exemplo 2.13 (Fibrado Vertical). *Sejam $\pi : E \rightarrow B$ um fibrado e $\tilde{\pi} : TE \rightarrow E$ o fibrado tangente. O **fibrado vertical** a π é dado pela união disjunta*

$$V(\pi) := \bigcup_{p \in E} \ker \pi_{*p} \subset TE.$$

Equivalentemente, o fibrado vertical a π é dado pela aplicação

$$\tilde{\pi}|_V : V(\pi) \rightarrow E$$

tal que

$$(\tilde{\pi}|_V)^{-1}(p) = \ker \pi_{*p}, \quad \forall p \in E.$$

Assim, temos que $V(\pi)$ é um subfibrado de TE .

A seguir, iremos tecer mais alguns comentários acerca das trivializações locais dos fibrados.

De fato, sejam $\pi : E \rightarrow B$ fibrado com fibra padrão F e $\{U_\alpha\}_\alpha$ cobertura aberta de B , de sorte que, para cada α , há uma trivialização local $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$. Dado $x \in U_\alpha$, pelo fato de que $\pi_1 \circ \psi_\alpha = \pi$ em $\pi^{-1}(U_\alpha)$, podemos escrever

$$\psi_\alpha(p) = (x, \psi_{\alpha,x}(p)), \quad \forall p \in \pi^{-1}(x),$$

em que $\psi_{\alpha,x} : \pi^{-1}(x) \longrightarrow F$ é um difeomorfismo. Assim, para quaisquer índices α, β tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, a fibra em $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ é difeomorfa à fibra padrão via $\psi_{\alpha,x}$, bem como via $\psi_{\beta,x}$, de modo que podemos considerar a aplicação $\psi_{\alpha,x} \circ (\psi_{\beta,x})^{-1} \in \text{Diff}(F)$, em que $\text{Diff}(F)$ denota o conjunto dos difeomorfismos da fibra padrão F em si mesma. Isto enseja a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta &\longrightarrow \text{Diff}(F) \\ x &\mapsto \psi_{\alpha,x} \circ (\psi_{\beta,x})^{-1} . \end{aligned}$$

Dizemos que $\tau_{\alpha\beta}$ é a **função de transição** entre as trivializações locais ψ_α e ψ_β . Elencamos algumas propriedades interessantes das funções de transição:

(1) $\tau_{\alpha\alpha}(x) = id_F, \forall \alpha, \forall x \in U_\alpha$, visto que: $\tau_{\alpha\alpha}(x) = \psi_{\alpha,x} \circ (\psi_{\alpha,x})^{-1} = id_F$;

(2) $\tau_{\alpha\beta}(x) = (\tau_{\beta\alpha}(x))^{-1}, \forall \alpha, \beta, \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$, visto que:

$$\tau_{\alpha\beta}(x) = \psi_{\alpha,x} \circ (\psi_{\beta,x})^{-1} = \left((\psi_{\beta,x}) \circ (\psi_{\alpha,x})^{-1} \right)^{-1} = (\tau_{\beta\alpha}(x))^{-1};$$

(3) (**Condição do Cociclo**) $\tau_{\alpha\beta} \circ \tau_{\beta\gamma}(x) = \tau_{\alpha\gamma}(x), \forall \alpha, \beta, \gamma, \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$, visto que:

$$\tau_{\alpha\beta} \circ \tau_{\beta\gamma}(x) = \psi_{\alpha,x} \circ (\psi_{\beta,x})^{-1} \circ \psi_{\beta,x} \circ (\psi_{\gamma,x})^{-1} = \psi_{\alpha,x} \circ (\psi_{\gamma,x})^{-1} = \tau_{\alpha\gamma}(x).$$

É interessante destacar que a condição do cociclo pode ser utilizada para construir fibrados e, para uma discussão mais detalhada nesse sentido, consulte [14].

A partir do ponto de vista exposto acima acerca das trivializações locais, podemos realizar algumas observações quanto à restrição de um fibrado. De fato, a restrição de um fibrado $\pi : E \longrightarrow B$ à uma genérica subvariedade $S \subset E$ não define sempre um subfibrado. Contudo, quando $S = \pi^{-1}(W)$, em que $W \subset B$ é uma subvariedade, $\pi|_S : S \longrightarrow \pi(S) = W$ define um subfibrado de π . Com efeito, sejam $\{U_\alpha\}_\alpha$ uma cobertura aberta de B e uma coleção $\{\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F\}_\alpha$ de trivializações locais relativas ao fibrado π . Claramente, $\{V_\alpha := U_\alpha \cap W\}_\alpha$ é uma cobertura aberta de W , de sorte que $\{\psi_\alpha|_{\pi^{-1}(V_\alpha)} : \pi^{-1}(V_\alpha) \longrightarrow V_\alpha \times F\}_\alpha$ define uma coleção de trivializações locais com respeito a qual $\pi|_S$ se torna um subfibrado de π . Em suma, temos a seguinte (veja [14])

Proposição 2.14. *Sejam $\pi : E \longrightarrow B$ um fibrado com fibra padrão F , $W \subset B$ uma subvariedade e $S := \pi^{-1}(W) \subset E$. Nessas condições, temos que $\pi|_S$ é um subfibrado de π com fibra padrão F .*

A partir do resultado supracitado, construiremos um certo tipo de fibrado, descrito pela nossa próxima proposição [14].

Proposição 2.15 (Fibrado Pullback). *Seja $\pi : E \longrightarrow B$ um fibrado com fibra padrão F , e considere $f \in C^\infty(\tilde{B}, B)$. A união disjunta*

$$f^*(E) := \bigcup_{q \in \tilde{B}} E_{f(q)}$$

*define um fibrado com fibra padrão F , denominado **fibrado pullback** de E por f .*

Demonstração. Sendo $\pi : E \longrightarrow B$ um fibrado com fibra padrão F , obviamente a aplicação

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}: \tilde{B} \times E &\longrightarrow \tilde{B} \times B \\ (q, p) &\mapsto (q, \pi(p)) \end{aligned}$$

define um fibrado com fibra padrão F . Ademais, o gráfico de f , $\text{Graf}(f) := \{(q, f(q)) \mid q \in \tilde{B}\}$, é uma subvariedade do produto $\tilde{B} \times B$. Assim, denotando $S := \tilde{\pi}^{-1}(\text{Graf}(f))$, obtemos da Proposição 2.14 que a restrição $\tilde{\pi}|_S : S \longrightarrow \text{Graf}(f)$ é um subfibrado de π com fibra padrão F . Mas, imeditamente da definição, obtemos que $S = f^*(E)$. Ou seja, temos um fibrado

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}|_{f^*(E)}: f^*(E) &\longrightarrow \text{Graf}(f) \\ \xi_q &\mapsto (q, f(q)) \end{aligned}$$

com fibra padrão F . Para concluirmos, note que temos um difeomorfismo

$$\begin{aligned} \phi: \text{Graf}(f) &\longrightarrow \tilde{B} \\ (q, f(q)) &\mapsto q \end{aligned}$$

e, dessa forma, a composição

$$\begin{aligned} \phi \circ \tilde{\pi}|_{f^*(E)}: f^*(E) &\longrightarrow \tilde{B} \\ \xi_q &\mapsto q \end{aligned}$$

define um fibrado com a mesma fibra padrão de $\tilde{\pi}|_{f^*(E)}$, como desejado. □

2.2 Fibrados Vetoriais

Nesta seção, iremos discorrer brevemente acerca de um particular tipo de fibrado, que será extensivamente utilizado ao longo do texto.

Definição 2.16. *Sejam $\pi : E \longrightarrow B$ um fibrado com fibra padrão \mathbb{R}^k , $\{U_\alpha\}_\alpha$ cobertura aberta de B , e considere trivializações locais $\{\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k\}_\alpha$. Se, para todos $x \in B$ e α , a fibra $\pi^{-1}(x)$ é dotada de uma estrutura de espaço vetorial real e $\psi_{\alpha,x}$ é um isomorfismo linear, dizemos que π é um **fibrado vetorial real de dimensão (ou posto) $k = \text{rk}(E)$** .*

Os exemplos (2.8), (2.9) e (2.13) retratam fibrados vetoriais.

Proposição 2.17. *Seja $\pi : E \longrightarrow B$ um fibrado vetorial real de dimensão k . Dado $x \in B$, existem uma vizinhança aberta $U_\alpha \subset B$ de x e seções locais $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ de π , definidas em U_α , tais que*

$$\{\sigma_1(y), \dots, \sigma_k(y)\}$$

é base de $\pi^{-1}(y)$, $\forall y \in U_\alpha$.

Demonstração. Esta prova utiliza a mesma ideia da demonstração da Proposição 2.5. De fato, dado $x \in B$, temos uma trivialização local $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$, em que $U_\alpha \subset B$ é uma vizinhança aberta do ponto x . Assim sendo, defina as aplicações

$$\begin{aligned} \sigma_i: U_\alpha &\longrightarrow E \\ y &\longmapsto (\psi_\alpha)^{-1} \circ \tilde{e}_i(y) \end{aligned} \quad ,$$

em que

$$\begin{aligned} \tilde{e}_i: U_\alpha &\longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k \\ y &\longmapsto (y, e_i) \end{aligned} \quad ,$$

sendo e_i o i -ésimo vetor da base canônica de \mathbb{R}^k , $i = 1, \dots, k$. Como visto na prova da Proposição 2.5, todas as aplicações σ_i são seções locais suaves de π definidas no aberto U_α . Ademais, dado $y \in U_\alpha$, veremos que $\{\sigma_1(y), \dots, \sigma_k(y)\} \subset \pi^{-1}(y)$ é base da fibra em y e, como $\psi_{\alpha,y} : \pi^{-1}(y) \rightarrow \mathbb{R}^k$ é isomorfismo linear, basta verificarmos que $\{\psi_{\alpha,y}(\sigma_1(y)), \dots, \psi_{\alpha,y}(\sigma_k(y))\}$ é base de \mathbb{R}^k . De fato, sendo π_2 a projeção da variedade produto $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ na fibra padrão \mathbb{R}^k , temos o seguinte:

$$\psi_{\alpha,y}(\sigma_i(y)) = \pi_2 \circ \psi_\alpha \circ \sigma_i(y) = \pi_2 \circ \tilde{e}_i(y) = e_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

e isto termina a prova. □

No contexto dessa última proposição, dizemos que $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ é um **referencial local associado** a ψ_α .

Proposição 2.18. *Seja $\pi : E \rightarrow B$ um fibrado vetorial real de dimensão k . Dado $p \in E$, existe uma seção suave $\sigma : B \rightarrow E$ tal que $p \in \sigma(B)$.*

Demonstração. Vamos primeiramente mostrar que a seção nula

$$\begin{aligned} \sigma: B &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto 0_x \end{aligned}$$

é suave. De fato, dado $x \in B$, consideramos uma trivialização local $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$, em que $U_\alpha \subset B$ é um aberto que contém o ponto x . Note que, para todo $p \in U_\alpha$,

$$\psi_\alpha \circ \sigma|_{U_\alpha}(p) = (\pi(p), \psi_{\alpha,\pi(p)}(0_{\pi(p)})) = (\pi(p), 0),$$

tendo em vista que $\psi_{\alpha,\pi(p)}$ é, em particular, uma aplicação linear. Logo, $\psi_\alpha \circ \sigma|_{U_\alpha}$ é suave e, assim, pela generalidade do ponto $x \in B$, conseguimos concluir que σ é suave. Daí, $\sigma \in \Gamma(\pi) \neq \emptyset$. Além disso, π tem fibras conexas, visto que as fibras são espaços vetoriais. Desse modo, podemos aplicar o Lema 2.11 para inferir o enunciado. □

Definição 2.19. *Sejam $\pi : E \rightarrow B$ um fibrado vetorial real de dimensão k e $E' \subset E$ uma subvariedade. Vamos dizer que um subfibrado $\pi|_{E'} : E' \rightarrow B$ de π é um **subfibrado vetorial de dimensão \tilde{k}** se $\pi|_{E'}$ define um fibrado vetorial de dimensão \tilde{k} .*

Agora, vamos estabelecer uma equivalência para a noção de subfibrado vetorial de posto constante. Primeiramente, introduzimos a seguinte

Definição 2.20. *Seja $\pi : E \rightarrow B$ um fibrado vetorial real de dimensão k . Dizemos que um subfibrado $\pi|_{E'} : E' \rightarrow B$ de π tem **dimensão constante** se, para todo $x \in B$, o conjunto $(\pi|_{E'})^{-1}(x) = \pi^{-1}(x) \cap E' \subset \pi^{-1}(x)$ é um subespaço vetorial com dimensão $r := \dim(\pi|_{E'})^{-1}(x)$ independente de x . A constante r é chamada de **dimensão** do subfibrado.*

Proposição 2.21. *Seja $\pi : E \rightarrow B$ um fibrado vetorial real de dimensão k . Um subfibrado $\pi|_{E'} : E' \rightarrow B$ de π define um subfibrado vetorial de dimensão k' se, e só se, $\pi|_{E'} : E' \rightarrow B$ define um subfibrado de dimensão k' .*

Demonstração. Pelas definições, é imediato perceber que, se $\pi|_{E'} : E' \rightarrow B$ define um subfibrado vetorial de dimensão k' , então $\pi|_{E'} : E' \rightarrow B$ define um subfibrado de dimensão k' . Reciprocamente, seja $\{\psi_\alpha\}_\alpha$ uma coleção de trivializações locais de π definidas nos abertos $\pi^{-1}(U_\alpha) \subset E$ que, por sua vez, definem uma cobertura do espaço total E . Para cada α , considere a aplicação

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \cap E' &\longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^{k'} \\ y &\longmapsto (\pi(y), \pi_{k'} \circ \psi_{\alpha, \pi(y)}(y)) \end{aligned}$$

em que $\pi_{k'} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k'}$ é a projeção nas primeiras k' entradas. O nosso objetivo será aquele de mostrar que $\{\tilde{\psi}_\alpha\}_\alpha$ é uma coleção de trivializações locais do subfibrado $\pi|_{E'}$ e, além disso, verificar que, para cada $x \in B$, $\tilde{\psi}_{\alpha, x} : \pi^{-1}(x) \cap E' \rightarrow \mathbb{R}^{k'}$ é um isomorfismo linear.

Com efeito, por hipótese, cada fibra $\pi^{-1}(x) \cap E'$ é um subespaço vetorial de dimensão $\dim \pi^{-1}(x) \cap E' = k'$. Assim, pelo fato de que $\pi_{k'}$ é sobrejetiva e $\psi_{\alpha, x}$ é um isomorfismo linear, temos que $\tilde{\psi}_{\alpha, x} = \pi_{k'} \circ \psi_{\alpha, x}|_{\pi^{-1}(x) \cap E'}$ também é um isomorfismo linear. Daí, uma simples conta direta revela que a aplicação $U_\alpha \times \mathbb{R}^{k'} \ni (x_1, x_2) \mapsto (\tilde{\psi}_{\alpha, x_1})^{-1}(x_2) \in \pi^{-1}(U_\alpha) \cap E'$ é a inversa de $\tilde{\psi}_\alpha$, ou seja, $\tilde{\psi}_\alpha$ é uma bijeção. Além disso, sendo ψ_α suave, temos que $\tilde{\psi}_\alpha$ é suave também. Ou seja, $\tilde{\psi}_\alpha$ é uma bijeção suave.

Agora, veja que, utilizando a identificação $T_{\tilde{\psi}_\alpha(y)}(U_\alpha \times \mathbb{R}^{k'}) \simeq T_{\pi(y)}U_\alpha \times T_{\tilde{\psi}_\alpha, \pi(y)}\mathbb{R}^{k'}$, podemos escrever $\tilde{\psi}_{\alpha * y} = (\pi|_{E' * y}, (pr_{2k'} \circ \tilde{\psi}_\alpha) * y)$, em que $pr_{2k'} : U_\alpha \times \mathbb{R}^{k'} \rightarrow \mathbb{R}^{k'}$ é a projeção em $\mathbb{R}^{k'}$. Tendo em vista que $\pi|_{E'}$ é uma submersão, sabemos que $\ker \pi|_{E' * y} = T_y(\pi^{-1}(\pi(y)) \cap E')$ e, desse modo, se $\xi \in T_y(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap E')$ é tal que $\tilde{\psi}_{\alpha * y}(\xi) = 0$, então há uma curva suave $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \pi^{-1}(\pi(y)) \cap E'$ de sorte que $\beta(0) = y$ e $\beta_{*0} = \xi$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} 0 &= (pr_{2k'} \circ \tilde{\psi}_\alpha) * y(\beta_{*0}) \\ &= (pr_{2k'} \circ \tilde{\psi}_\alpha \circ \beta)_{*0}, \text{ pela Regra da Cadeia,} \\ &= (\tilde{\psi}_{\alpha, \pi(y)} \circ \beta)_{*0}, \text{ pois } \pi \circ \beta \equiv \pi(y). \end{aligned}$$

Daí, $\tilde{\psi}_{\alpha, \pi(y)} \circ \beta$ é uma função constante e, uma vez que $\tilde{\psi}_{\alpha, \pi(y)}$ é um isomorfismo linear, a curva β deve ser constante e, assim sendo, $\beta_{*0} = \xi = 0$. Consequentemente, temos que $\tilde{\psi}_{\alpha * y}$ é uma aplicação linear injetiva. Mas, sendo $\pi|_{E'} : E' \rightarrow B$ um fibrado de dimensão k' , vemos que o domínio e a imagem de $\tilde{\psi}_{\alpha * y}$ são espaços vetoriais de mesma dimensão (a saber, $n + k'$) e, assim, obtemos que $\tilde{\psi}_{\alpha * y}$ é um isomorfismo linear. Portanto, pelo Teorema da Função Inversa, $\tilde{\psi}_\alpha$ é um difeomorfismo local e, sendo uma bijeção, a aplicação $\tilde{\psi}_\alpha$ é, globalmente, um difeomorfismo. Por construção, sendo $\pi_1 : U_\alpha \times \mathbb{R}^{k'} \rightarrow \mathbb{R}^{k'}$ a projeção em $\mathbb{R}^{k'}$, $\pi_1 \circ \tilde{\psi}_\alpha = \pi|_{E'}$ e, com essa observação, concluímos a prova da asserção enunciada. \square

O teorema a seguir [21] fornece um critério útil para dizer quando uma dada coleção de subespaços vetoriais define um fibrado vetorial real de dimensão constante.

Teorema 2.22. *Sejam $\pi : E \rightarrow B$ um fibrado vetorial real de dimensão k e $\{D_x \subset \pi^{-1}(x)\}_{x \in B}$ uma coleção de subespaços vetoriais. Suponha que há uma constante m tal que, para todo $y \in B$, existem seções locais suaves $\sigma_1, \dots, \sigma_m : U \subset B \rightarrow E$ definidas em uma vizinhança aberta de y tais que, para todo $x \in U$, $\{\sigma_1(x), \dots, \sigma_m(x)\}$ é base de D_x . Nessas condições, temos que a união disjunta $D := \bigcup_{x \in B} D_x$ é um subfibrado vetorial de dimensão m .*

Por fim, observamos que, se $\pi : E \rightarrow B$ é um fibrado no qual as fibras são espaços vetoriais reais, então $\Gamma(\pi)$ define um $C^\infty(B)$ -módulo. De fato, sendo $f_1, f_2 \in C^\infty(B)$ e $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(\pi)$,

$$(f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2)(x) := f_1(x)\sigma_1(x) + f_2(x)\sigma_2(x), \quad x \in B,$$

define uma estrutura de $C^\infty(B)$ -módulo em $\Gamma(\pi)$. Em particular, se π é um fibrado vetorial, $\Gamma(\pi)$ define um $C^\infty(B)$ -módulo.

2.3 Formas Diferenciais Semibásicas

As formas diferenciais básicas e semibásicas irão desempenhar um papel importante no Capítulo 4 e no Capítulo 5, especialmente no âmbito da redução por simetrias. Mais do que para apenas fibrados $\pi : E \rightarrow B$, essas formas diferenciais também podem ser consideradas no contexto mais geral de submersões $p : M \rightarrow N$.

Definição 2.23. *Seja $p : M \rightarrow N$ uma submersão. Dizemos que uma forma diferencial $\alpha \in \Omega^*(M)$ é **p-semibásica** quando, para todo $X \in \ker p_*$, $X \lrcorner \alpha = 0$. Denotamos por $\Omega_{sb}^*(M)$ o conjunto das formas diferenciais semibásicas. Além disso, $\Omega_{sb}^k(M)$ denota, para todo $k \geq 0$, o conjunto das k -formas diferenciais semibásicas.*

Sendo $q_G : M \rightarrow M/G$ a projeção canônica definida por meio da ação de um grupo de Lie G em uma variedade M , chamamos uma forma q_G -semibásica de **forma G -semibásica**.

Observe que, para todos $X \in \ker \mathbf{p}_*$ e $\alpha \in \Omega^*(N)$,

$$X \lrcorner \mathbf{p}^* \alpha = 0. \quad (2.1)$$

Definição 2.24. *Seja $\mathbf{p} : M \rightarrow N$ uma submersão. Dizemos que uma forma diferencial $\alpha \in \Omega^*(M)$ é **\mathbf{p} -básica** quando, dado $\alpha \in \Omega^*(M)$, existe $\beta \in \Omega^*(N)$ tal que $\alpha = \mathbf{p}^*(\beta)$.*

Analogamente ao caso semibásico, chamamos uma forma \mathbf{q}_G -básica de **forma G -básica**. Decorre da definição que toda forma \mathbf{p} -semibásica (ou G -básica) α é tal que $X \lrcorner \alpha = X \lrcorner \mathbf{p}^* \alpha = 0$, para todo campo X vertical com relação à submersão \mathbf{p} (ou \mathbf{q}_G). Trabalhando, porém, com submersões que possuem fibras conexas, vale também o recíproco (veja [7], Corolário 2.3), portanto, nesse caso, vale a seguinte outra caracterização:

Proposição 2.25. *Relativamente a uma submersão com fibras conexas, uma forma α é básica se, e somente se,*

$$X \lrcorner \alpha = X \lrcorner d\alpha = 0,$$

para todo campo vertical X .

Ademais, veja que, a partir da equação (2.1), toda forma diferencial básica é também semibásica.

Podemos utilizar coordenadas adaptadas para expressar localmente uma forma diferencial semibásica. De fato, sejam M e N variedades suaves e $\mathbf{p} : M \rightarrow N$ uma submersão, com $n := \dim M$ e $m := \dim \ker \mathbf{p}_*$, de modo que $\dim N = n - m$. Dado $x \in M$, pela forma local das submersões, existem vizinhanças coordenadas $U \subset M$ de x e $\bar{U} \subset N$ de $\mathbf{p}(x)$ nas quais podemos considerar cartas $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de M e $\psi : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ de N tais que $\mathbf{p}(U) \subset \bar{U}$ e

$$\psi \circ \mathbf{p} \circ \varphi^{-1} = pr_1 : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}.$$

No referencial local associado à carta adaptada φ , vamos escrever localmente um qualquer **campo vertical** $X \in \ker \mathbf{p}_*$. De fato,

$$X|_U = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad f_i \in C^\infty(U), \quad i = 1, \dots, n.$$

Dado $x \in U$,

$$\begin{aligned} \psi_{*\mathbf{p}(x)} \circ \mathbf{p}_{*x} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x \right) &= \psi_{*\mathbf{p}(x)} \circ \mathbf{p}_{*x} \circ \varphi_{*\varphi(x)}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(x)} \right) \\ &= (\psi \circ \mathbf{p} \circ \varphi^{-1})_{*\varphi(x)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(x)} \right) \\ &= (pr_1)_{*\varphi(x)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(x)} \right) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } i > n - m \\ \neq 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \end{aligned}$$

Uma vez que $\psi_{*\mathbf{p}(x)}$ é um isomorfismo, obtemos que $\mathbf{p}_{*x} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x \right) = 0$ se, e somente se, $i > n - m$. Logo, todo campo vertical X é localmente dado por

$$X|_U = \sum_{i=n-m+1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Portanto, nas coordenadas adaptadas $\{x_1, \dots, x_{n-m}, \dots, x_n\}$ e para todo $k \geq 1$, qualquer k -forma diferencial semibásica α é localmente dada por

$$\alpha|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n-m} \alpha_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Para cada $k \geq 1$, e relativamente a uma submersão \mathbf{p} , o conjunto dos ***k-covetores tangentes p-semibásicos*** é dado por

$$\Lambda^k(M)_{\text{sb}} := \bigcup_{x \in M} \Lambda_x^k(M)_{\mathbf{p}, \text{sb}},$$

em que, para cada $x \in M$,

$$\Lambda_x^k(M)_{\mathbf{p}, \text{sb}} := \{T \in \Lambda_x^k(M) \mid \xi \lrcorner T = 0, \forall \xi \in \ker \mathbf{p}_{*x}\}.$$

Lema 2.26. *Seja $\mathbf{p} : M \rightarrow N$ uma submersão, com $n := \dim M$ e $m := \dim \ker \mathbf{p}_*$. Para todos $k \geq 1$ e $x \in M$, a aplicação*

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_x^* : \Lambda_{\mathbf{p}(x)}^k(N) &\longrightarrow \Lambda_x^k(M)_{\mathbf{p}, \text{sb}} \\ \alpha_{\mathbf{p}(x)} &\longmapsto \mathbf{p}_x^*(\alpha)_x \end{aligned}$$

é um isomorfismo linear. Em particular, para todo $x \in M$, $\dim \Lambda_x^k(M)_{\mathbf{p}, \text{sb}} = \binom{n-m}{k}$.

Demonstração. Sejam $\alpha, \beta \in \Omega^k(N)$. Começamos observando que, pela definição do pullback de formas diferenciais, se $\alpha_{\mathbf{p}(x)} = \beta_{\mathbf{p}(x)}$, então $\mathbf{p}_x^*(\alpha_{\mathbf{p}(x)}) = \mathbf{p}_x^*(\beta_{\mathbf{p}(x)})$. Além disso, observamos também que, como $\mathbf{p}^*(\alpha) \in \Omega^k(M)$ é uma forma diferencial básica, $\mathbf{p}^*(\alpha)$ é semibásica, de sorte que $\mathbf{p}_x^*(\alpha)_x \in \Lambda_x^k(M)_{\mathbf{p}, \text{sb}}$. Portanto, a partir destas duas observações, vemos que a aplicação \mathbf{p}_x^* como enunciada está bem definida. Ademais, por meio da definição de soma entre formas diferenciais e da linearidade do pullback em x , obtemos a linearidade de \mathbf{p}_x^* . A injetividade da aplicação \mathbf{p}_x^* advém do fato de \mathbf{p} ser uma submersão. De fato, dados $\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_k \in T_{\mathbf{p}(x)}N$, suponha que $\mathbf{p}_x^*(\alpha_{\mathbf{p}(x)}) = \mathbf{p}_x^*(\beta_{\mathbf{p}(x)})$. Pela sobrejetividade do diferencial de \mathbf{p} em x , existem vetores tangentes $\xi_1, \dots, \xi_k \in T_x M$ tais que:

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)_{\mathbf{p}(x)}(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_k) &= (\alpha - \beta)_{\mathbf{p}(x)}(\mathbf{p}_{*x}(\xi_1), \dots, \mathbf{p}_{*x}(\xi_k)) \\ &= \mathbf{p}_x^*(\alpha - \beta)_x(\xi_1, \dots, \xi_k) \\ &= \mathbf{p}_x^*((\alpha - \beta)_{\mathbf{p}(x)})(\xi_1, \dots, \xi_k) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para concluirmos, iremos mostrar a sobrejetividade de \mathbf{p}_x^* . Para alcançarmos esse último objetivo, vamos verificar primeiramente a sobrejetividade quando $k = 1$.

Afirmção 2.27. Dado $T \in \Lambda_x^k(M)_{p, sb}$, $T \in \text{Im } \mathbf{p}_x^*$.

Demonstração. Sejam $U \subset N$ uma vizinhança coordenada contendo o ponto $\mathbf{p}(x)$ e

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-m}} \right\}$$

o referencial local associado. Sendo \mathbf{p}_x^* uma aplicação linear injetiva e o conjunto

$$\{dx_1|_{\mathbf{p}(x)}, \dots, dx_{n-m}|_{q(x)}\}$$

linearmente independente, o conjunto

$$C := \mathbf{p}_x^* \{dx_1|_{\mathbf{p}(x)}, \dots, dx_{n-m}|_{\mathbf{p}(x)}\} = \{d(x_1 \circ \mathbf{p})|_x, \dots, d(x_{n-m} \circ \mathbf{p})|_x\}$$

também é linearmente independente. Por outro lado, pela sobrejetividade do diferencial de \mathbf{p} em x , existem vetores tangentes $\xi_1, \dots, \xi_{n-m} \in T_x M$ tais que $D := \{\mathbf{p}_{*x}(\xi_1), \dots, \mathbf{p}_{*x}(\xi_{n-m})\}$ é linearmente independente. Em particular, $\{\xi_1, \dots, \xi_{n-m}\}$ é linearmente independente e, com isso, conseguimos verificar que $\text{span}\{\xi_1, \dots, \xi_{n-m}\} \cap \ker \mathbf{p}_{*x} = \{0\}$. De fato, considere qualquer $\eta \in \text{span}\{\xi_1, \dots, \xi_{n-m}\} \cap \ker \mathbf{p}_{*x}$, de modo que existem $a_1, \dots, a_{n-m} \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\eta = \sum_{i=1}^{n-m} a_i \xi_i.$$

Daí,

$$0 = \mathbf{p}_{*x}(\eta) = \sum_{i=1}^{n-m} a_i \mathbf{p}_{*x}(\xi_i)$$

e, como D é linearmente independente,

$$a_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Logo, $\eta = 0$.

A partir do exposto acima, inferimos que, fixada uma base $\{\xi_{n-m+1}, \dots, \xi_n\}$ de $\ker \mathbf{p}_{*x}$,

$$\mathcal{B} := \{\xi_1, \dots, \xi_{n-m}, \xi_{n-m+1}, \dots, \xi_n\}$$

é base de $T_x M$. Agora, afirmamos que a matriz

$$A := \left[d(x_j \circ \mathbf{p})|_x(\xi_i) \right]_{1 \leq i, j \leq n-m}$$

é inversível, ou seja, afirmamos que o conjunto

$$\left\{ u_j := \left(d(x_j \circ \mathbf{p})|_x(\xi_1), \dots, d(x_j \circ \mathbf{p})|_x(\xi_{n-m}) \right) \right\}_{j=1}^{n-m}$$

é linearmente independente. Realmente, sejam b_1, \dots, b_{n-m} números reais tais que

$$\sum_{j=1}^{n-m} b_j u_j = 0.$$

Equivalentemente, para todo $i \in \{1, \dots, n - m\}$,

$$\sum_{j=1}^{n-m} b_j d(x_j \circ \mathbf{p})|_x(\xi_i) = 0. \quad (2.2)$$

Mas, é imediato ver que, para todos os vetores tangentes $\{\xi_{n-m+1}, \dots, \xi_n\} \subset \ker \mathbf{p}_{*x}$, a equação (2.2) também é válida. Deste modo, por \mathcal{B} ser base, deduzimos que

$$\sum_{j=1}^{n-m} b_j d(x_j \circ \mathbf{p})_x = 0.$$

Daí, como C é linearmente independente, $b_j = 0$, $i = 1, \dots, n - m$. Assim, podemos dizer que há (únicos) $c_1, \dots, c_{n-m} \in \mathbb{R}$ tais que

$$A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(\xi_1) \\ \vdots \\ T(\xi_{n-m}) \end{pmatrix}.$$

Além disso, como $T \in \Lambda_{\text{sb}, x}^1(M)$,

$$T(\xi_i) = 0, \quad i = n - m + 1, \dots, n.$$

Ou seja, avaliamos o funcional linear T na base \mathcal{B} e, a partir disso, vemos que

$$T = \sum_{i=1}^{n-m} c_i d(x_i \circ \mathbf{p})|_x = \mathbf{p}_x^* \left(\sum_{i=1}^{n-m} c_i dx_i|_{\mathbf{p}(x)} \right) \in \text{Im} \mathbf{p}_x^*.$$

□

Por indução, demonstraremos a sobrejetividade em geral. De fato, com $k \geq 2$, tome $\omega \in \Omega^k(M)$ tal que $\omega_x \in \Lambda_x^k(M)_{\mathbf{p}, \text{sb}}$ e seja $\xi \in T_x M$. Daí, considere o $(k - 1)$ -covetor tangente a M em x dado por $\xi \lrcorner \omega_x$. Sendo ω_x semibásico, $\xi \lrcorner \omega_x$ também o é. Logo, por hipótese de indução, existe $T \in \Lambda_{\mathbf{p}(x)}^{k-1}(N)$ tal que $\mathbf{p}_x^*(T) = \xi \lrcorner \omega_x$. Note que, como \mathbf{p}_x^* é uma aplicação injetiva, T é único, de sorte que denotamos $T_\xi := T$. A aplicação $T_x M \ni \xi \mapsto T_\xi \in \Lambda_{\mathbf{p}(x)}^{k-1}(N)$ possui as seguintes propriedades:

- Dados $\xi, \eta \in T_x M$ e $a \in \mathbb{R}$, $T_{\xi+a\eta} = T_\xi + aT_\eta$, em virtude da linearidade da inserção de vetores tangentes e da injetividade de \mathbf{p}_x^* ;
- Dados $\xi, \eta \in T_x M$ tais que $\mathbf{p}_{*x}(\xi) = \mathbf{p}_{*x}(\eta)$, $T_\xi = T_\eta$, e podemos ver isto da seguinte maneira: se $\xi - \eta \in \ker \mathbf{p}_{*x}$ e é ω_x semibásico, então $(\xi - \eta) \lrcorner \omega_x = 0$, i.e., $\xi \lrcorner \omega_x = \eta \lrcorner \omega_x$ e, pela injetividade de \mathbf{p}_x^* , obtemos a igualdade desejada.

A partir destas propriedades, e pela sobrejetividade do diferencial de \mathbf{p} em x , está bem definida e completamente determinada a aplicação

$$L : T_{\mathbf{p}(x)} N \times \dots \times T_{\mathbf{p}(x)} N \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$L(\mathbf{p}_{*x}(\xi), \dots) = T_\xi, \quad \forall \xi \in T_x M$$

e, além disso, L é multilinear. Ademais, não é difícil ver que L é alternada: se, a partir da segunda entrada, encontram-se duas entradas coincidentes, então L se anula, pelo fato de que T_ξ é alternado; por outro lado, sem perda de generalidade, suponha que a primeira entrada de L coincida com a segunda. Deste modo, sendo $\{\xi_i \mid 1 \leq i \leq k-2\} \subset T_x M$, calculamos:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{p}_{*x}(\xi), \mathbf{p}_{*x}(\xi), \mathbf{p}_{*x}(\xi_1), \dots, \mathbf{p}_{*x}(\xi_{k-2})) &= T_\xi(\mathbf{p}_{*x}(\xi), \mathbf{p}_{*x}(\xi_1), \dots, d\mathbf{p}_x(\xi_{k-2})) \\ &= \mathbf{p}_x^*(T_\xi)(\xi, \xi_1, \dots, \xi_{k-2}) \\ &= \xi \lrcorner \omega_x(\xi, \xi_1, \dots, \xi_{k-2}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ou seja, temos que $L \in \Lambda_{\mathbf{p}(x)}^k(N)$. Por fim, verificamos que, dados $\xi_1, \dots, \xi_k \in T_x M$,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_x^*(L)(\xi_1, \dots, \xi_k) &= L(\mathbf{p}_{*x}(\xi_1), \dots, \mathbf{p}_{*x}(\xi_k)) \\ &= T_{\xi_1}(\mathbf{p}_{*x}(\xi_2), \dots, \mathbf{p}_{*x}(\xi_k)) \\ &= \mathbf{p}_x^*(T_{\xi_1})(\xi_2, \dots, \xi_k) \\ &= \xi_1 \lrcorner \omega_x(\xi_2, \dots, \xi_k) \\ &= \omega_x(\xi_1, \dots, \xi_k). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\omega_x = \mathbf{p}_x^*(L) \in \text{Im} \mathbf{p}_x^*,$$

como queríamos demonstrar. □

Capítulo 3

Equações Diferenciais como Subvariedades dos Espaços de Jatos

Neste capítulo, iremos apresentar uma breve introdução aos espaços de jatos, um tipo de variedade na qual as equações diferenciais podem ser entendidas, de um ponto de vista geométrico, como sendo subvariedades equipadas com uma distribuição, chamada de *distribuição de Cartan induzida*. Dessa forma, as soluções de uma equação são tratadas como variedades integrais da distribuição de Cartan induzida, sob certas condições de independência. Para o leitor interessado em um tratamento sistemático da teoria dos espaços de jatos, recomendamos as referências [16, 17, 18, 23, 26, 27, 28].

3.1 Espaço de 1-Jatos

Lembramos ao leitor que, de acordo com a Definição 2.4, fixados um fibrado $\pi : E \rightarrow B$ e $a \in B$, $\Gamma_a(\pi)$ denota o conjunto das seções de π definidas, pelo menos localmente, em uma vizinhança aberta de a .

Definição 3.1. *Sejam $\pi : E \rightarrow B$ um fibrado e $a \in B$. Dizemos que duas seções $r, s \in \Gamma_a(\pi)$ são **0-tangentes em a** se $r(a) = s(a)$. Agora, se r e s são 0-tangentes em a e se verifica que $r_{*a} = s_{*a}$, então dizemos que as seções r e s são **1-tangentes em a** .*

No contexto da definição anterior, é evidente que, para $k = 0, 1$, o fato de duas seções de $\Gamma_a(\pi)$ serem k -tangentes em a define uma relação de equivalência sobre o conjunto $\Gamma_a(\pi)$. Tal relação será denotada por \sim_a^k e, além disso, a classe de equivalência de uma seção $s \in \Gamma_a(\pi)$ será denotada por $[s]_a^k$.

Definição 3.2. *Seja $\pi : E \rightarrow B$ um fibrado. Para $k = 0, 1$, o **espaço de k -jatos do fibrado π no ponto $a \in B$** , denotado por $J_a^k(\pi)$, é definido como sendo o quociente $\Gamma_a(\pi) / \sim_a^k$, i.e.,*

$$J_a^k(\pi) := \{[s]_a^k \mid s \in \Gamma_a(\pi)\}.$$

Nesse sentido, o **espaço de k -jatos** de π , denotado por $J^k(\pi)$, é definido como sendo a união disjunta

$$J^k(\pi) := \bigcup_{a \in B} J_a^k(\pi).$$

Naturalmente, toda fibra $\pi^{-1}(a)$ pode ser identificada com $J_a^0(\pi)$ e, assim, podemos também escrever que $E = J^0(\pi)$. A seguir, vamos introduzir uma estrutura diferenciável para $J^1(\pi)$. De fato, começamos observando que da Definição 3.1, e da definição de pushforward, decorre imediatamente a seguinte

Proposição 3.3. *Sejam $\pi : E \rightarrow B$ um fibrado, com $\dim E = n + m$ e $\dim B = n$, $a \in B$ e $r, s \in \Gamma_a(\pi)$ seções tais que $r \sim_a^0 s$. Temos que $r \sim_a^1 s$ se, e somente se, para todo sistema de coordenadas $\{x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^m\}$ de E adaptadas às fibras, com $\{x^i\}$ coordenadas locais em B e $\{u^j\}$ coordenadas locais nas fibras, verifica-se*

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_a (r^j) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_a (s^j), \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, \quad (3.1)$$

em que, para todos os índices i, j , denotamos $r^j := u^j \circ r$ e $s^j := u^j \circ s$.

Agora, sejam as projeções

$$\begin{aligned} \pi_{1,0}: \quad J^1(\pi) &\longrightarrow J^0(\pi) \\ [s]_a^1 &\longmapsto s(a) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \pi_1: \quad J^1(\pi) &\longrightarrow B \\ [s]_a^1 &\longmapsto a \end{aligned} ,$$

de maneira que $\pi_1 = \pi \circ \pi_{1,0}$, e seja $\{x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^m\}$ um sistema de coordenadas adaptadas às fibras, relativamente a uma carta $\varphi : V \subset E \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$. Pode-se definir uma parametrização de $\pi_{1,0}^{-1} \subset J^1(\pi)$ por meio das funções $\{x^i, u^j, u_i^j\}$ definidas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x^i: \quad \pi_{1,0}^{-1}(V) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [s]_a^1 &\longmapsto (x^i \circ s)(a) \end{aligned} ,$$

$$\begin{aligned} u^j: \quad \pi_{1,0}^{-1}(V) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [s]_a^1 &\longmapsto (u^j \circ s)(a) \end{aligned}$$

e a aplicação

$$\begin{aligned} u_i^j: \quad \pi_{1,0}^{-1}(V) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [s]_a^1 &\longmapsto \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_a (u^j \circ s) \end{aligned} .$$

De fato, sendo $n = \dim B$ e $n + m = \dim E$, toda carta $\varphi : V \subset E \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ se estende a uma aplicação $\varphi^{(1)}$ tal que

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}: \pi_{1,0}^{-1}(V) &\longrightarrow \varphi(V) \times \mathbb{R}^{nm} \\ [s]_a^1 &\mapsto \left(x^i([s]_a^1), u^j([s]_a^1), u_i^j([s]_a^1) \right). \end{aligned}$$

Agora, devido à Proposição 3.3, $\varphi^{(1)}$ está bem definida e, além disso, é injetiva. Ademais, a aplicação $\varphi^{(1)}$ é também sobrejetiva, pois, a partir de um arbitrário vetor $(c_{ij}) \in \mathbb{R}^{nm}$, a seção local suave $s \in \Gamma_a(\pi)$ dada por $s(x^1, \dots, x^n) = \left(x^1, \dots, x^n, \sum_{i=1}^n c_{i1}x^i, \dots, \sum_{i=1}^n c_{im}x^i \right)$ é tal que $\varphi^{(1)}([s]_a^1) = (x^i([s]_a^1), u^j([s]_a^1), c_{ij})$.

Definindo então em $J^1(\pi)$ a menor topologia na qual todas as aplicações $\varphi^{(1)}$ são contínuas, resultará que cada $\varphi^{(1)}$ é um homeomorfismo e, portanto, $J^1(\pi)$ é localmente euclidiano. Nesse sentido, como podemos cobrir a variedade $J^0(\pi)$ com uma quantidade enumerável de cartas adaptadas $\varphi : V \rightarrow \varphi(V) \subset \mathbb{R}^{n+m}$, podemos cobrir $J^1(\pi)$ com uma quantidade enumerável de homeomorfismos $\varphi^{(1)} : \pi_{1,0}^{-1}(V) \rightarrow \varphi(V) \times \mathbb{R}^{nm}$ e, portanto, $J^1(\pi)$ admite também uma base enumerável.

Ademais, dados $a, b \in B$ e seções locais $r \in \Gamma_a(\pi)$ e $s \in \Gamma_b(\pi)$ tais que $[r]_a^1 \neq [s]_b^1 \in J^1(\pi)$, se ambas as classes de equivalência pertencem a um aberto do tipo $\pi_{1,0}^{-1}(V)$, então tais classes conseguem ser separadas por abertos de $J^1(\pi)$ por meio do homeomorfismo $\varphi^{(1)}$ definido em $\pi_{1,0}^{-1}(V)$. Agora, se $[r]_a^1 \in \pi_{1,0}^{-1}(V)$ e $[s]_b^1 \notin \pi_{1,0}^{-1}(V)$, então $r(a) \neq s(b)$ e, como $J^0(\pi)$ é Hausdorff, podemos separar por abertos os pontos $r(a)$ e $s(b)$ e, conseqüentemente, podemos também separar por abertos as classes de equivalência, fazendo isso ao considerar pré-imagens, por meio de $\pi_{1,0}$, de abertos disjuntos do espaço total. Dessa forma, conseguimos constatar que $J^1(\pi)$ é Hausdorff e, portanto, $J^1(\pi)$ possui uma estrutura de variedade topológica, com atlas $\{\varphi_\alpha^{(1)}\}_{\alpha \in S}$ obtido de um atlas $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in S}$ de cartas de E adaptadas às fibras de π .

Mais ainda, sendo $\varphi^{(1)}$ e $\psi^{(1)}$ cartas de $J^1(\pi)$ com $\text{Dom}(\varphi^{(1)}) \cap \text{Dom}(\psi^{(1)}) \neq \emptyset$, e considerando $\{x^i, u^j\}$ e $\{y^i, v^j\}$ dois sistemas de coordenadas adaptadas respectivamente referentes às cartas φ e ψ de E , a Regra da Cadeia nos diz que, fixados $1 \leq i_0 \leq n$ e $1 \leq j_0 \leq m$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y^{i_0}} \Big|_a (v^{j_0} \circ s) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_a (v^{j_0} \circ s) \frac{\partial}{\partial y^{i_0}} \Big|_a (x^i) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y^{i_0}} \Big|_a (x^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{s(a)} (v^{j_0}) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_{s(a)} (v^{j_0}) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_a (u^j \circ s) \right). \end{aligned}$$

Assim, vemos que as **coordenadas derivadas** v_i^j dependem de maneira suave das coordenadas $\{x^i, u^j\}$ e, além disso, dependem de maneira afim das coordenadas derivadas u_i^j . Dessa forma, temos que as funções de transição do atlas $\{\varphi_\alpha^{(1)}\}_{\alpha \in S}$ são suaves e, portanto, $J^1(\pi)$ é, de fato, uma variedade suave de dimensão $\dim J^1(\pi) = n + m + mn$.

3.2 Espaço de k -Jatos

Tendo em vista a Proposição 3.3, apresentamos a seguinte

Definição 3.4. *Sejam $\pi : E \rightarrow B$ um fibrado, com $\dim B = n$ e $\dim E = n + m$, $a \in B$ e $r, s \in \Gamma_a(\pi)$ tais que $r(a) = s(a)$. Dizemos que r e s são **k -tangentes em a** se todas as suas derivadas, até a ordem k , coincidem em a .*

No contexto da definição anterior, é importante observar que a condição sobre a igualdade das derivadas em a independe da escolha de coordenadas e define uma relação de equivalência sobre o conjunto $\Gamma_a(\pi)$. Tal relação será denotada por \sim_a^k e, além disso, a classe de equivalência de uma seção $s \in \Gamma_a(\pi)$ será denotada por $[s]_a^k$. Assim, podemos generalizar a Definição 3.2, definindo para todo número natural k o espaço de jatos $J^k(\pi)$.

Definição 3.5. *Seja $\pi : E \rightarrow B$ um fibrado. O **espaço de k -jatos do fibrado π no ponto $a \in B$** , denotado por $J_a^k(\pi)$, é definido como sendo o quociente $\Gamma_a(\pi) / \sim_a^k$, i.e.,*

$$J_a^k(\pi) := \{[s]_a^k \mid s \in \Gamma_a(\pi)\}.$$

Nesse sentido, o **espaço de k -jatos** de π , denotado por $J^k(\pi)$, é definido como sendo a união disjunta:

$$J^k(\pi) := \bigcup_{a \in B} J_a^k(\pi).$$

Assim, analogamente ao caso de $J^1(\pi)$, definimos as projeções

$$\begin{aligned} \pi_{k,0}: J^k(\pi) &\longrightarrow J^0(\pi) \\ [s]_a^k &\longmapsto s(a) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \pi_k: J^k(\pi) &\longrightarrow B \\ [s]_a^k &\longmapsto a \end{aligned} \quad ,$$

de maneira que $\pi \circ \pi_{k,0} = \pi_k$. Nesta caso, porém, para qualquer $0 \leq l \leq k$, consideramos também as aplicações

$$\begin{aligned} \pi_{k,l}: J^k(\pi) &\longrightarrow J^l(\pi) \\ [s]_a^k &\longmapsto [s]_a^l \end{aligned} \quad ,$$

de maneira que, para quaisquer $0 \leq h \leq l \leq k$, $\pi_{k,h} = \pi_{l,h} \circ \pi_{k,l}$.

A seguir, vamos introduzir uma estrutura diferenciável para $J^k(\pi)$. Com efeito, seja $\{x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^m\}$ um sistema de coordenadas adaptadas às fibras, relativamente a uma carta $\varphi : V \subset E \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$. Pode-se definir uma parametrização de $\pi_{k,0}^{-1}(V)$ por meio das funções $\{x^i, u^j, u_\sigma^j\}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x^i: \pi_{k,0}^{-1}(V) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [s]_a^k &\longmapsto (x^i \circ s)(a) \end{aligned} \quad ,$$

$$\begin{aligned} u^j: \pi_{k,0}^{-1}(V) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [s]_a^k &\longmapsto (u^j \circ s)(a) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} u_\sigma^j: \pi_{k,0}^{-1}(V) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [s]_a^k &\longmapsto \left. \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma} \right|_a (u^j \circ s) . \end{aligned}$$

De fato, sendo $n = \dim B$ e $n + m = \dim E$, toda carta $\varphi : V \subset E \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ se estende a uma aplicação $\varphi^{(k)}$ tal que

$$\begin{aligned} \varphi^{(k)}: \pi_{k,0}^{-1}(V) &\longrightarrow \varphi(V) \times \mathbb{R}^d \\ [s]_a^k &\longmapsto \left(x^i([s]_a^k), u^j([s]_a^k), u_\sigma^j([s]_a^k) \right) , \end{aligned}$$

com $d := m \left(\binom{n+k}{k} - 1 \right)$. Veja que, a partir da Definição 3.5, cada aplicação $\varphi^{(k)}$ está bem definida e é injetiva. Além disso, fixado $(c_\sigma^j) \in \mathbb{R}^d$, podemos considerar polinômios $P_j = P_j(x^1, \dots, x^n)$ tais que

$$\left. \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma} \right|_a P_j = c_\sigma^j, \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq |\sigma| \leq k.$$

Ou seja, temos uma seção local suave $s \in \Gamma_a(\pi)$,

$$s(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n, P_1(x^1, \dots, x^n), \dots, P_m(x^1, \dots, x^n)),$$

tal que $\varphi^{(k)}([s]_a^k) = (x^i([s]_a^k), u^j([s]_a^k), c_\sigma^j)$, de modo que $\varphi^{(k)}$ é sobrejetiva e, portanto, bijetiva.

Assim, podemos concluir que $J^k(\pi)$ é uma variedade suave de modo inteiramente análogo àquele realizado em $J^1(\pi)$. De fato, definimos em $J^k(\pi)$ a menor topologia na qual todas as aplicações $\varphi^{(k)}$ são contínuas. Em particular, cada $\varphi^{(k)}$ é um homeomorfismo e, portanto, $J^k(\pi)$ é localmente euclidiano. Nesse sentido, como podemos cobrir a variedade $J^0(\pi)$ com uma quantidade enumerável de cartas adaptadas $\varphi : V \longrightarrow \varphi(V) \subset \mathbb{R}^{n+m}$, podemos cobrir $J^k(\pi)$ com uma quantidade enumerável de homeomorfismos $\varphi^{(k)} : \pi_{k,0}^{-1}(V) \longrightarrow \varphi(V) \times \mathbb{R}^d$ e, portanto, $J^k(\pi)$ admite uma base enumerável.

Ademais, dados $a, b \in B$ e seções locais $r \in \Gamma_a(\pi)$ e $s \in \Gamma_b(\pi)$ tais que $[r]_a^k \neq [s]_b^k \in J^k(\pi)$, se ambas as classes de equivalência pertencem a um aberto do tipo $\pi_{k,0}^{-1}(V)$, então tais classes conseguem ser separadas por abertos de $J^k(\pi)$ por meio do homeomorfismo $\varphi^{(k)}$ definido em $\pi_{k,0}^{-1}(V)$. Agora, se $[r]_a^k \in \pi_{k,0}^{-1}(V)$ e $[s]_b^k \notin \pi_{k,0}^{-1}(V)$, então $r(a) \neq s(b)$ e, como $J^0(\pi)$ é Hausdorff, podemos separar por abertos os pontos $r(a)$ e $s(b)$ e, conseqüentemente, podemos também separar por abertos as classes de equivalência, fazendo isso ao considerar pré-imagens, por meio de $\pi_{k,0}$, de abertos disjuntos do espaço total. Dessa forma, conseguimos constatar que $J^k(\pi)$ é Hausdorff e, portanto, $J^k(\pi)$ possui uma estrutura de variedade topológica com atlas $\{\varphi_\alpha^{(k)}\}_{\alpha \in S}$ obtido a partir de um atlas $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in S}$ de cartas de E adaptadas às fibras de π .

Mais ainda, similarmente ao caso de $J^1(\pi)$, aplicando-se sucessivas vezes a Regra da Cadeia, pode-se mostrar que, sendo $\varphi^{(k)}$ e $\psi^{(k)}$ cartas de $J^k(\pi)$ com $\text{Dom}(\varphi^{(k)}) \cap \text{Dom}(\psi^{(k)}) \neq \emptyset$, e considerando $\{x^i, u^j\}$ e $\{y^i, v^j\}$ dois sistemas de coordenadas adaptadas respectivamente referentes às cartas φ e ψ de E , cada **coordenada derivada** v_σ^j depende de maneira suave das coordenadas $\{x^i, u^j\}$ e, além disso, depende de maneira polinomial das coordenadas derivadas u_α^j , com $1 \leq |\alpha| \leq |\sigma|$. Dessa forma, temos que as funções de transição do atlas $\{\varphi_\alpha^{(k)}\}_{\alpha \in S}$ são suaves e, portanto, $J^k(\pi)$ é, de fato, uma variedade suave de dimensão $\dim J^k(\pi) = n + m \binom{n+k}{k}$.

Relativamente à estrutura suave com a qual equipamos os espaços de k -jatos, todas as projeções $\pi_{k,l} : J^k(\pi) \rightarrow J^l(\pi)$ e $\pi_k : J^k(\pi) \rightarrow B$ são fibrados.

Definição 3.6. *Seja $\pi : E \rightarrow B$ um fibrado. O k -ésimo prolongamento de uma seção local $s : U \subset B \rightarrow E$ de π é dado pela aplicação*

$$j^k s : U \rightarrow J^k(\pi) \\ a \mapsto [s]_a^k .$$

Evidentemente, $\pi_k \circ j^k(s) = id_U$. Além disso, podemos sempre assumir que a imagem da seção, $s(U) \subset J^0(\pi)$, esteja contida no domínio V de uma carta adaptada φ de $J^0(\pi)$. Assim, usando a carta $\psi := \pi \circ \varphi$ de B , a imagem da aplicação $j^k s \circ \psi^{-1}$ está contida em $\pi_{k,0}^{-1}(V)$ e, portanto, a composição $\varphi^{(k)} \circ j^k s \circ \psi^{-1}$ está bem definida e é suave. Ou seja, temos que, para cada seção local suave s do fibrado π , $j^k s$ é uma seção local suave do fibrado π_k .

Por fim, gostaríamos de sublinhar a forma local das seções e dos seus prolongamentos. De fato, em coordenadas adaptadas $\{x^i, u^j\}$, as seções de um fibrado π são da forma

$$s(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n, u^1(x^1, \dots, x^n), \dots, u^m(x^1, \dots, x^n)),$$

ou mais simplesmente,

$$s(x) = (x^i, u^j(x)).$$

Desse modo, os k -ésimos prolongamentos são da forma

$$j^k s(x) = (x^i, u_\sigma^j(x)),$$

em que $u_0^j := u^j$ e $0 \leq |\sigma| \leq k$.

3.3 Distribuição de Cartan

A partir dos prolongamentos de seções locais, introduzimos uma importante distribuição sobre os espaços de jatos.

Definição 3.7. *Em $J^k(\pi)$, a **distribuição de Cartan**, denotada por $\mathcal{C}^k(\pi)$, é a aplicação que, a cada ponto $\theta \in J^k(\pi)$, associa o subespaço $\mathcal{C}_\theta^k(\pi) \subset T_\theta(J^k(\pi))$ gerado por todos os vetores*

$\xi \in T_\theta(J^k(\pi))$ tangentes aos prolongamentos de seções locais s tais que a imagem do k -ésimo prolongamento $j^k s$ contém θ .

A distribuição de Cartan, evidentemente, é uma estrutura geométrica intrinsicamente definida em $J^k(\pi)$ e, portanto, suas propriedades independem da escolha de coordenadas locais. Contudo, é extremamente importante saber como esta distribuição é descrita em coordenadas. Esta descrição é fornecida pela seguinte

Proposição 3.8. *Seja $\pi : E \rightarrow B$ um fibrado, com $n = \dim B$ e $n + m = \dim E$. Em toda vizinhança coordenada $U \subset J^k(\pi)$, com coordenadas $\{x^i, u^j, u_\sigma^j\}$, podemos escrever*

$$\mathcal{C}^k(\pi)|_U = \text{span} \left\{ D_i^{(k)}, \frac{\partial}{\partial u_\rho^j} \right\} = \text{ann} \{ \omega_\sigma^j \},$$

sendo $0 \leq |\sigma| \leq k-1$, $|\rho| = k$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ e, além disso,

$$D_i^{(k)} := \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{0 \leq |\sigma| \leq k-1} \sum_{j=1}^m u_{\sigma+1_i}^j \frac{\partial}{\partial u_\sigma^j}$$

e

$$\omega_\sigma^j := du_\sigma^j - \sum_{i=1}^n u_{\sigma+1_i}^j dx^i.$$

Demonstração. Sejam $F \in C^\infty(J^k(\pi))$, $a \in B$, $s \in \Gamma_a(\pi)$ e $\theta := j^k s(a)$. Em uma vizinhança coordenada $U \subset J^k(\pi)$, definida ao redor de θ , pela regra da cadeia, podemos escrever

$$(j^k s)_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) (F) = \frac{\partial F}{\partial x^i} + \sum_{0 \leq |\sigma| \leq k} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial u_\sigma^j} \right) \left(\frac{\partial u_\sigma^j}{\partial x^i} \right) \quad (3.2)$$

$$= D_i^{(k)}(F) + \sum_{|\rho|=k} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial u_\rho^j}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial u_\rho^j} \right). \quad (3.3)$$

Logo,

$$\mathcal{C}^k(\pi)|_U = \text{span} \left\{ D_i^{(k)}, \frac{\partial}{\partial u_\rho^j} \right\}.$$

Daí, procurando a expressão mais geral de uma 1-forma anulada pelos campos $D_i^{(k)}$ e $\frac{\partial}{\partial u_\rho^j}$, obtém-se facilmente que tal expressão é uma combinação linear das 1-formas ω_σ^j . Decorre imediatamente disso que

$$\mathcal{C}^k(\pi)|_U = \text{ann} \{ \omega_\sigma^j \}.$$

□

No contexto da proposição anterior, os campos vetoriais $D_i^{(k)}$ são comumente chamados de **derivadas totais truncadas à ordem k** , enquanto que as 1-formas diferenciais ω_σ^j são chamadas de **formas de Cartan**.

Como corolário da Proposição 3.8, temos que

$$\dim \mathcal{C}^k(\pi) = n + m \binom{n+k-1}{k}.$$

Ademais, para quaisquer $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, e sempre que $|\sigma| = k - 1$,

$$\left[\frac{\partial}{\partial u_{\sigma+1_i}^j}, D_i^{(k)} \right] = \frac{\partial}{\partial u_{\sigma}^j}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial u_{\sigma}^j} \lrcorner \omega_{\sigma}^j = 1 \neq 0.$$

Equivalentemente, podemos afirmar que $d\omega_{\sigma}^j = dx^i \wedge du_{\sigma+1_i}^j$ não pertence ao ideal gerado pelas formas de Cartan. Desse modo, vemos que vale a

Proposição 3.9. *A distribuição de Cartan não é completamente integrável.*

Finalizaremos esta seção com um resultado fundamental [24], que caracteriza as variedades integrais da distribuição de Cartan.

Teorema 3.10. *Uma subvariedade n -dimensional $\Sigma \subset J^k(\pi)$ tal que, localmente, satisfaz a condição de independência $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n|_{\Sigma} \neq 0$, é uma variedade integral de $\mathcal{C}^k(\pi)$ se, e somente se, Σ é localmente gráfico do k -ésimo prolongamento de uma seção local de π .*

Demonstração. Pela definição de $\mathcal{C}^k(\pi)$, já sabemos que os prolongamentos de seções de π são variedades integrais de $\mathcal{C}^k(\pi)$ que satisfazem a condição de independência $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \neq 0$. Portanto, precisamos provar somente a recíproca. Se $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n|_{\Sigma} \neq 0$, então as funções $\{x^1, \dots, x^n\}$ podem ser usadas como coordenadas em Σ que, portanto, localmente admite uma parametrização da forma $u_{\sigma}^j(x) = f_{\sigma}^j(x)$, $0 \leq |\sigma| \leq k$. Por outro lado, $\mathcal{C}^k(\pi) = \text{ann } \{\omega_{\mu}^j\}$, com $\omega_{\mu}^j = du_{\mu}^j - \sum_{i=1}^n u_{\mu+1_i}^j dx^i$ e $0 \leq |\mu| \leq k - 1$. Portanto, se Σ for uma variedade integral de $\mathcal{C}^k(\pi)$, teremos que $\omega_{\mu}^j|_{\Sigma} = 0$, i.e.,

$$0 = \left(du^j - \sum_{i=1}^n u_i^j dx^i \right) \Big|_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_0^j(x)}{\partial x^i} dx^i - \sum_{i=1}^n f_i^j(x) dx^i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_0^j(x)}{\partial x^i} - f_i^j(x) \right) dx^i,$$

logo,

$$f_i^j(x) = \frac{\partial f_0^j(x)}{\partial x^i}.$$

Analogamente,

$$0 = \left(du_h^j - \sum_{i=1}^n u_{h+1_i}^j dx^i \right) \Big|_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_h^j(x)}{\partial x^i} dx^i - \sum_{i=1}^n f_{h+1_i}^j(x) dx^i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_h^j(x)}{\partial x^i} - f_{h+1_i}^j(x) \right) dx^i,$$

logo,

$$f_{h+1_i}^j(x) = \frac{\partial f_h^j(x)}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 f_0^j(x)}{\partial x^i \partial x^h}.$$

Dessa forma, iterativamente obtemos que

$$f_{\sigma}^j(x) = \frac{\partial^{|\sigma|} f_0^j(x)}{\partial x^{\sigma_1} \cdots \partial x^{\sigma_n}}. \quad (3.4)$$

Portanto, a subvariedade Σ é (localmente) o k -ésimo prolongamento de uma seção local $x \mapsto (x, f_0(x))$. \square

3.4 Simetrias Infinitesimias da Distribuição de Cartan

Conforme prometido no Capítulo 1, vamos mostrar uma caracterização das simetrias infinitesimais de uma distribuição suave.

Teorema 3.11. *Seja $\mathcal{F} = \text{span}\{X_1, \dots, X_d\} = \text{ann}\{\theta_1, \dots, \theta_{n-d}\}$ uma distribuição suave definida em uma variedade suave M . As seguintes asserções são equivalentes:*

1. $X \in \text{Sym}(\mathcal{F})$;
2. $\mathcal{L}_X X_i = \sum_{j=1}^d \mu_{ij} X_j$, $\mu_{ij} \in C^\infty(M)$, para todo $i \in \{1, \dots, d\}$;
3. $\mathcal{L}_X(\theta_i) = \sum_{j=1}^{n-d} \nu_{ij} \theta_j$, $\nu_{ij} \in C^\infty(M)$, para todo $i \in \{1, \dots, n-d\}$.

Demonstração. A prova deste resultado será realizada por meio de três implicações.

- $1 \implies 2$ Sejam X uma simetria infinitesimal da distribuição \mathcal{F} e $\{A_t\}_t$ o seu fluxo. Temos que $\{A_t\}_t$ é uma família de simetrias finitas de \mathcal{F} , logo, para todo t , vale o seguinte:

$$(A_t)_*(X) = \sum_{j=1}^d \alpha_{ij}(t) X_j, \quad (3.5)$$

onde as funções suaves $\alpha_{ij}(t)$ dependem diferenciavelmente do parâmetro t . Daí, diferenciando (3.5) com respeito ao parâmetro t , e aplicando isso em $t = 0$, temos

$$\mathcal{L}_X X_i = \sum_{j=1}^d \mu_{ij} X_j,$$

onde $\mu_{ij} := \left. \frac{d\alpha_{ij}}{dt} \right|_{t=0}$.

- $2 \implies 3$ Suponha que o campo X satisfaça a propriedade 2. Por um lado, sabemos que $X(\theta_j(X_i)) = \mathcal{L}_X(\theta_j) + \theta_j(\mathcal{L}_X X_i) = 0$, tendo em vista que $\theta_j(X_i) = 0$. Por outro lado, por 2, $\mathcal{L}_X(X_i)$ também é anulado por todas as 1-formas $\{\theta_1, \dots, \theta_{n-d}\}$, de sorte que o mesmo ocorre com $\mathcal{L}_X(\theta_j)$ e, portanto, $\mathcal{L}_X(\theta_j)$ é uma combinação das formas $\{\theta_k\}_{k=1}^{n-d}$.
- $3 \implies 1$ Em um primeiro passo, sendo ω uma 1-forma diferencial, vamos mostrar a validade da fórmula

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} A_t^*(\omega) = A_s^*(\mathcal{L}_X(\omega)).$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} A_t^*(\omega) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A_{t+s}^*(\omega) - A_s^*(\omega)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A_s^* \circ A_t^*(\omega) - A_s^*(\omega)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A_s^*(A_t^*(\omega) - A_0^*(\omega))}{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= A_s^* \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{A_t^*(\omega) - A_0^*(\omega)}{t} \right) \\ &= A_s^*(\mathcal{L}_X \omega). \end{aligned}$$

Portanto, a 1-forma diferencial $\Theta_k(t) := A_t^*(\theta_k) \wedge \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_{n-d}$, que depende diferenciavelmente de t , é tal que $\Theta_k(0) = 0$, pois $A_0^*(\theta_k) = \theta_k$. Além disso, veja que Θ_k satisfaz a EDO

$$\frac{d\Theta_k}{dt}(t) = A_t^*(\mathcal{L}_X(\theta_k)) \wedge \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_{n-d} \stackrel{3}{=} \sum_{j=1}^{n-d} A_t^*(\nu_{ij}) A_t^*(\theta_i) \wedge \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_{n-d} = \sum_{j=1}^{n-d} A_t^*(\nu_{ij}) \Theta_j.$$

Logo, pelo teorema de existência e unicidade de uma EDO com valor inicial fixado, temos que $\Theta_k(t) \equiv 0$, para todo k e para todo t . Ou seja, sempre temos que A_t^* é uma combinação das 1-formas diferenciais $\{\theta_1, \dots, \theta_{n-d}\}$. Portanto, o fluxo $\{A_t\}_t$ é uma família de simetrias finitas da distribuição \mathcal{F} , significando que $X \in \text{Sym}(\mathcal{F})$.

□

A partir do Teorema 3.11, podemos obter uma descrição local das simetrias infinitesimais da distribuição de Cartan.

Teorema 3.12. *Localmente, as simetrias infinitesimais de $\mathcal{C}^k(\pi)$ são da forma*

$$Z = \sum_{i=1}^n a_i \partial_{x^i} + \sum_{j=1}^m \sum_{|\sigma|=0}^k b_\sigma^j \partial_{u_\sigma^j},$$

onde os coeficientes b_σ^j são recursivamente calculados pela fórmula

$$b_{\sigma+1_i}^j = D_i^{(k+1)}(b_\sigma^j) - \sum_{h=1}^n u_{\sigma+1_h}^j D_i^{(k+1)}(a_h),$$

em que $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, $0 \leq |\sigma| \leq k-1$.

Demonstração. Sabemos que, localmente, $\mathcal{C}^k(\pi) = \text{ann} \{\omega_\sigma^j\}$. Além disso, $d\omega_\sigma^j = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge du_{\sigma+1_i}^j$. A partir da Fórmula Mágica de Cartan,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Z(\omega_\sigma^j) &= Z \lrcorner d\omega_\sigma^j + d(Z \lrcorner \omega_\sigma^j) \\ &= Z \lrcorner \left(\sum_{i=1}^n dx^i \wedge du_{\sigma+1_i}^j \right) + d \left(b_\sigma^j - \sum_{h=1}^n a_h u_{\sigma+1_h}^j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (a_i du_{\sigma+1_i}^j - b_{\sigma+1_i}^j dx^i) + d \left(b_\sigma^j - \sum_{h=1}^n a_h u_{\sigma+1_h}^j \right). \end{aligned}$$

Por outro lado, para toda $f \in C^\infty(J^k(\pi))$,

$$\begin{aligned} df &= \sum_{i=1}^n \partial_{x^i}(f) dx^i + \sum_{j=1}^m \sum_{|\rho|=0}^k \partial_{u_\rho^j}(f) du_\rho^j \\ &= \sum_{i=1}^n \partial_{x^i}(f) dx^i + \sum_{j=1}^m \sum_{|\rho|=0}^k \partial_{u_\rho^j}(f) \left(du_\rho^j - \sum_{i=1}^n u_{\rho+1_i}^j dx^i + \sum_{i=1}^n u_{\rho+1_i}^j dx^i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n D_i^{(k+1)}(f) dx^i + \sum_{j=1}^m \sum_{|\rho|=0}^k \partial_{u_\rho^j}(f) \omega_\rho^j, \end{aligned}$$

de modo que

$$df \equiv \sum_{i=1}^n D_i^{(k+1)}(f) dx^i \pmod{\{\omega_\rho^j\}}.$$

Logo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Z(\omega_\sigma^j) &\equiv \sum_{i=1}^n \left(a_i \sum_{r=1}^n D_r^{(k+1)}(u_{\sigma+1_i}^j) dx^r - b_{\sigma+1_i}^j dx^i \right) + \sum_{s=1}^n D_s^{(k+1)} \left(b_\sigma^j - \sum_{h=1}^n a_h u_{\sigma+1_h}^j \right) dx^s \\ &\equiv \sum_{s=1}^n D_s^{(k+1)}(b_\sigma^j) dx^s - \sum_{i=1}^n b_{\sigma+1_i}^j dx^i - \sum_{s=1}^n \sum_{h=1}^n u_{\sigma+1_h}^j D_s^{(k+1)}(a_h) dx^s \\ &\equiv \sum_{i=1}^n \left(D_i^{(k+1)}(b_\sigma^j) - u_{\sigma+1_h}^j \sum_{h=1}^n D_i^{(k+1)}(a_h) - b_{\sigma+1_i}^j \right) dx^i \pmod{\{\omega_\rho^j\}}. \end{aligned}$$

Dessa forma, temos $\mathcal{L}_Z(\omega_\sigma^j) \equiv 0 \pmod{\{\omega_\rho^j\}}$ se, e somente se:

$$b_{\sigma+1_i}^j = D_i^{(k+1)}(b_\sigma^j) - \sum_{h=1}^n u_{\sigma+1_h}^j D_i^{(k+1)}(a_h).$$

□

A partir do Teorema 3.12, mostraremos que todas as simetrias infinitesimais da distribuição de Cartan $\mathcal{C}^k(\pi)$ são prolongamentos de campos vetoriais definidos em $J^0(\pi)$ ou $J^1(\pi)$.

Teorema 3.13. (Teorema de Lie-Bäcklund) *Toda simetria infinitesimal de $\mathcal{C}^k(\pi)$ é o prolongamento de uma simetria infinitesimal de $\mathcal{C}^1(\pi)$. Mais ainda, quando $m > 1$, todas as simetrias infinitesimais de $\mathcal{C}^k(\pi)$ são prolongamentos de campos definidos em $J^0(\pi)$.*

Demonstração. O fato de que toda simetria infinitesimal de $\mathcal{C}^k(\pi)$ é o prolongamento de alguma simetria infinitesimal de $\mathcal{C}^1(\pi)$ advém imediatamente do Teorema 3.12.

Sejam $j \in \{1, \dots, m\}$, $Z \in \text{Sym}(\mathcal{C}^1(\pi))$ uma simetria infinitesimal, e defina $\phi_j := Z \lrcorner \omega^j$.

Novamente pelo Teorema 3.12, podemos escrever localmente:

$$Z = \sum_{i=1}^n a_i \partial_{x^i} + \sum_{h=1}^m b^h \partial_{u^h} + \sum_{h=1}^m \sum_{i=1}^n b_i^h \partial_{u_i^h}; \quad \phi_j = b^j - \sum_{i=1}^n a_i u_i^j \quad (3.6)$$

Em seguida, temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Z \omega^j &= d\phi_j + Z \lrcorner d\omega^j \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial x^i} dx^i + \sum_{h=1}^m \frac{\partial \phi_j}{\partial u^h} du^h + \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^m \frac{\partial \phi_j}{\partial u_i^h} du_i^h + \sum_{i=1}^n Z \lrcorner (dx^i \wedge du_i^j) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial x^i} dx^i + \sum_{h=1}^m \frac{\partial \phi_j}{\partial u^h} du^h + \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^m \frac{\partial \phi_j}{\partial u_i^h} du_i^h + \sum_{i=1}^n a_i du_i^j - \sum_{i=1}^n b_i^j dx^i. \end{aligned}$$

Agora, sendo que, para cada índice fixado $j \in \{1, \dots, m\}$, $du^j \equiv \sum_{i=1}^n u_i^j dx^i \pmod{\{\omega^h\}}$, temos por um lado que:

$$\mathcal{L}_Z \omega^j \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial x^i} dx^i - \sum_{i=1}^n b_i^j dx^i + \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^m \frac{\partial \phi_j}{\partial u_i^h} u_i^h dx^i + \sum_{i=1}^n \left(a_i + \frac{\partial \phi_j}{\partial u_i^j} \right) du_i^j + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^m \frac{\partial \phi_j}{\partial u_i^h} du_i^h \pmod{\{\omega^h\}}$$

Assim, para todo índice fixado $i \in \{1, \dots, n\}$, a condição de simetria $\mathcal{L}_Z \omega^j \equiv 0 \pmod{\{\omega^h\}}$ se traduz no seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} b_i^j = \frac{\partial \phi_j}{\partial x^i} + \sum_{h=1}^m \frac{\partial \phi_j}{\partial u^h} u_i^h = D_i^{(1)}(\phi_j), \\ a_i = -\frac{\partial \phi_j}{\partial u_i^j}, \\ \frac{\partial \phi_j}{\partial u_i^h} = 0, \quad \forall h \neq j. \end{cases}$$

Daí, sendo $m > 1$, temos que, para quaisquer $h \neq j \in \{1, \dots, m\}$,

$$\frac{\partial a_i}{\partial u_i^h} = -\frac{\partial}{\partial u_i^h} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial u_i^j} \right) = -\frac{\partial}{\partial u_i^j} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial u_i^h} \right) = 0$$

e, assim,

$$\frac{\partial a_i}{\partial u_i^h} = 0, \quad \forall h \in \{1, \dots, m\},$$

i.e., para todo $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$a_i = a_i(x, u). \quad (3.7)$$

Analogamente, vamos provar que o mesmo vale para todas as funções b^j . Nesse sentido, lembrando-se de (3.6), (3.7) e do nosso sistema de equações,

$$\frac{\partial b^j}{\partial u_i^h} = \frac{\partial \phi_j}{\partial u_i^h} + \sum_{l=1}^n \delta_{hj} \delta_{li} a_l + 0 u_l^j = -\delta_{hj} a_i + \delta_{hj} a_i = 0,$$

donde $b^j = b^j(x, u)$, $\forall j$.

Podemos reescrever as funções b_i^j usando (3.6), como vemos a seguir:

$$\begin{aligned} b_i^j &= \frac{\partial b^j}{\partial x^i} - \sum_{l=1}^n \frac{\partial (u_l^j a_l)}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial b^j}{\partial u^k} - \sum_{l=1}^n \frac{\partial (u_l^j a_l)}{\partial u^k} \right) u_i^k \\ &= D_i^{(1)}(b^j) - \sum_{l=1}^n D_i^{(1)}(u_l^j a_l) \\ &= D_i^{(1)}(b^j) - \sum_{l=1}^n D_i^{(1)}(a_l) u_l^j, \quad \text{posto que sempre temos que } D_i^{(1)}(u_l^j) = 0. \end{aligned}$$

\therefore Cada b_i^j é, claramente, a i -ésima componente do primeiro prolongamento do campo vetorial

$$X := \sum_{i=1}^n a_i \partial_{x^i} + \sum_{j=1}^m b^j \partial_{u^j} \in \mathcal{D}(J^0(\pi)),$$

como queríamos demonstrar. \square

Este resultado nos motiva a definir o seguinte:

Definição 3.14. *Uma simetria infinitesimal da distribuição de Cartan $\mathcal{C}^k(\pi)$ é denominada **simetria de ponto** se, e somente se, tal simetria for o prolongamento de um campo de E . Quando isto não ocorre, i.e., quando a simetria é prolongamento de uma simetria de $\mathcal{C}^1(\pi)$, mas não de um campo definido em $J^0(\pi)$, dizemos que tal simetria é uma **simetria de contato**.*

Se $Z \in \text{Sym}(\mathcal{C}^k(\pi))$ for o prolongamento do campo $X \in \mathcal{D}(E)$, escreveremos $Z = X^{(k)}$. Nesse caso, dizemos que X é um **gerador de simetria**. Na Seção 3.5, iremos tecer alguns comentários acerca do uso de simetrias de ponto para descrever soluções de equações diferenciais.

Dada uma simetria $Z \in \text{Sym}(\mathcal{C}^k(\pi))$, a função $\phi := (\phi_1, \dots, \phi_m)$, onde $\phi_j := Z \lrcorner \omega^j$, é denominada **função geradora** da simetria Z . Nestes termos, temos o seguinte

Corolário 3.15. *Toda simetria $Z \in \text{Sym}(\mathcal{C}^k(\pi))$ é unicamente determinada por sua função geradora $\phi := (\phi_1, \dots, \phi_m)$. Explicitamente, em coordenadas locais,*

$$Z = Z_\phi = \sum_{j=1}^m \sum_{|\sigma|=0}^k D_\sigma^{(k)}(\phi_j) \partial_{u_\sigma^j} - \sum_{i=1}^n \partial_{u_i^h}(\phi_h) D_i^{(k)}, \quad (3.8)$$

com $h \in \{1, \dots, m\}$, $\sigma := (i_1, \dots, i_n)$ e $D_\sigma^{(k)} := (D_1^{(k)})^{i_1} \circ \dots \circ (D_n^{(k)})^{i_n}$. Em particular, quando $m > 1$, a função geradora depende linearmente das variáveis u_i^j e, além disto, para quaisquer $j \neq h$,

$$\partial_{u_i^j}(\phi_j) = \partial_{u_i^h}(\phi_h) \text{ e } \partial_{u_i^h}(\phi_j) = 0.$$

A partir da fórmula (3.8), vemos que o termo

$$\sum_{j=1}^m \sum_{|\sigma|=0}^k D_\sigma^{(k)}(\phi_j) \partial_{u_\sigma^j}$$

é a componente transversal aos prolongamentos de seções, de modo que, de um ponto de vista geométrico, podemos dizer que as funções geradoras medem a velocidade com a qual as simetrias infinitesimais deformam as variedades integrais da distribuição de Cartan.

3.5 Equações Diferenciais como Subvariedades

Os espaços de jatos são os ambientes nos quais geometricamente as equações diferenciais podem ser descritas como sendo subvariedades.

De fato, um sistema de equações diferenciais de ordem k

$$\begin{cases} F^1(x, u_\sigma(x)) = 0, \\ \vdots \\ F^k(x, u_\sigma(x)) = 0, \end{cases}$$

para uma função $u = (u^1, \dots, u^m)$ de $x = (x^1, \dots, x^n)$, sob hipóteses de regularidade para $F = (F^1, \dots, F^k)$, pode ser tratado como sendo uma subvariedade $\mathcal{E} = \{F(x, u_\sigma) = 0\} \subset J^k(\pi)$ do k -ésimo espaço de jatos do fibrado

$$\begin{array}{ccc} \pi: & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (x, u) & \longmapsto & x \end{array}$$

Dessa forma, as soluções (no sentido usual) $u = f(x)$ desse sistema são geometricamente descritas pelas seções $s(x) = (x, f(x))$ tais que os k -ésimos prolongamentos $j^k s$ têm gráfico contido em \mathcal{E} e, portanto, são variedades integrais da restrição de $\mathcal{C}^k(\pi)$ à equação \mathcal{E} , descrita a seguir.

A **distribuição de Cartan induzida**, denotada por $\mathcal{C}^k(\mathcal{E})$, associa, a cada ponto $\theta \in J^k(\pi)$, o subespaço formado pelos vetores de $\mathcal{C}_\theta^k(\pi)$ tangentes à equação em θ , ou seja,

$$\mathcal{C}_\theta^k(\mathcal{E}) := \mathcal{C}_\theta^k(\pi) \cap T_\theta \mathcal{E}.$$

Exemplo 3.16 (Equações Diferenciais Ordinárias). Considere o fibrado

$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, u) &\longmapsto x \end{aligned}$$

de modo que o k -ésimo espaço de jatos $J^k(\pi)$ é uma variedade suave $(k+2)$ -dimensional que tem por coordenadas $\{x, u, u_1, \dots, u_k\}$. De acordo com o formalismo dos espaços de jatos, a equação diferencial ordinária de ordem k

$$u^{(k)} = F(x, u, u', \dots, u^{(k-1)}) \quad (3.9)$$

é, na verdade, a subvariedade $(k+1)$ -dimensional

$$\mathcal{E} = \{u_k = F(x, u, u_1, \dots, u_{k-1})\} \subset J^k(\pi),$$

com coordenadas internas $\{x, u, u_1, \dots, u_{k-1}\}$. Nesse caso, a respectiva distribuição de Cartan induzida é dada por

$$\mathcal{C}^k(\mathcal{E}) = \text{ann}\{du_{k-1} - Fdx, du_h - u_{h+1}dx \mid h = 0, \dots, k-2\}.$$

Equivalentemente,

$$\mathcal{C}^k(\mathcal{E}) = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} + u_1 \frac{\partial}{\partial u} + \dots + u_{k-1} \frac{\partial}{\partial u_{k-2}} + F \frac{\partial}{\partial u_{k-1}} \right\}.$$

Em particular, pelo fato de que $\mathcal{C}^k(\mathcal{E})$ é uma distribuição unidimensional, temos que $\mathcal{C}^k(\mathcal{E})$ é completamente integrável. Ademais, uma solução $u = u(x)$ de (3.9) corresponde a uma seção local $s(x) = (x, u(x))$ de π tal que seu k -ésimo prolongamento,

$$j^k(s)(x) = (x, u(x), u_1(x), \dots, u_k(x)),$$

tem gráfico contido em \mathcal{E} .

Exemplo 3.17 (Equação do Calor). Considere o fibrado

$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, t, u) &\longmapsto (x, t) \end{aligned}$$

de modo que o segundo espaço de jatos $J^2(\pi)$ é uma variedade suave 8-dimensional que tem por coordenadas $\{x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}\}$. A **equação do calor** é descrita pela subvariedade 7-dimensional

$$\mathcal{E} = \{u_{xx} = u_t\} \subset J^2(\pi),$$

com coordenadas internas $\{x, t, u, u_x, u_t, u_{xt}, u_{tt}\}$.

A respectiva distribuição de Cartan induzida é 4-dimensional e, em coordenadas, é dada por

$$\mathcal{C}^2(\mathcal{E}) = \text{ann}\{du - u_x dx - u_t dt, du_x - u_t dx - u_{xt} dt, du_t - u_{xt} dx - u_{tt} dt\}.$$

Ademais, uma solução da equação do calor no sentido usual corresponde, geometricamente, a uma seção local $s = s(x, t)$ de π tal que seu segundo prolongamento,

$$j^2(s)(x, t) = (x, t, u(x, t), u_x(x, t), u_t(x, t), u_{xx}(x, t), u_{xt}(x, t), u_{tt}(x, t)),$$

tem gráfico contido em \mathcal{E} .

Concluiremos esta seção com alguns comentários acerca da noção de simetria de uma equação diferencial.

Definição 3.18. Uma **simetria finita da equação diferencial** $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ é uma simetria finita da distribuição $\mathcal{C}^k(\pi)$ que preserva a equação, no sentido de que $\varphi(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$. Uma **simetria infinitesimal da equação diferencial** $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ é uma simetria infinitesimal da distribuição $\mathcal{C}^k(\pi)$ que é tangente à equação.

Em virtude da definição de simetria de uma distribuição, e em particular de uma equação, as simetrias podem ser utilizadas para transformar uma solução em uma outra, ou também para calcular soluções invariantes. De fato, iremos terminar este capítulo sucintamente ilustrando uma maneira pela qual simetrias de ponto podem ser calculadas e utilizadas para descrever soluções de equações diferenciais. Por outro lado, o leitor interessado pode consultar [16, 17, 18, 23, 26, 27, 28] para ulteriores detalhes sobre a teoria das simetrias e suas aplicações.

Exemplo 3.19. Neste exemplo, vamos calcular os geradores das simetrias de ponto da equação do calor $u_t - u_{xx} = 0$. Nesse sentido, em primeiro lugar, por meio da forma local das simetrias, apresentada no Teorema 3.12, juntamente com o Teorema de Lie-Backlund, um gerador de simetria de ponto da equação do calor é da forma

$$X := \xi(x, t, u)\partial_x + \tau(x, t, u)\partial_t + \phi(x, t, u)\partial_u.$$

Aplicando a condição de tangência da simetria $X^{(2)}$ à subvariedade $u_t - u_{xx} = 0$,

$$X^{(2)}(u_t - u_{xx}) = 0 \quad (\text{mod } u_t - u_{xx} = 0),$$

obtemos a seguinte expressão:

$$-2\tau_u u_x u_{xt} - 2\tau_x u_{xt} - \tau_{uu} u_x^2 u_t + (\xi_u - 2\tau_{xu} - 3\xi_u) u_x u_t + (\tau_t - \phi_u - \tau_{xx} + \phi_u - 2\xi_x) u_t - \xi_{uu} u_x^3 + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu}) u_x^2 + (2\phi_{xu} - \xi_{xx} + \xi_t) u_x + \phi_{xx} - \phi_t = 0,$$

i.e., um polinômio nulo nas coordenadas $\{u, u_x, u_t, u_{xt}\}$ de $J^2(\pi)$. Assim, pelo fato de que todos os coeficientes do polinômio devem ser nulos, obtemos o seguinte sistema sobredeterminado de EDPs lineares:

$$\begin{cases} \tau_u = 0, \\ \tau_x = 0, \\ \tau_{uu} = 0, \\ \xi_u - 2\tau_{xu} - 3\xi_u = 0, \\ \tau_t - \phi_u - \tau_{xx} + \phi_u - 2\xi_x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_{uu} = 0, \\ \phi_{uu} - 2\xi_{xu} = 0, \\ 2\phi_{xu} - \xi_{xx} + \xi_t = 0, \\ \phi_{xx} - \phi_t = 0. \end{cases}$$

Resolvendo tal sistema, encontramos:

$$\begin{cases} \xi = c_1 + c_4 x + 2c_5 t + 4c_6 x t, \\ \tau = c_2 + 2c_4 t + 4c_6 t^2, \\ \phi = (c_3 - c_5 x - 2c_6 t - c_6 x^2) u + \alpha, \end{cases}$$

onde c_1, \dots, c_6 são constantes reais e α é uma solução da equação do calor.

Em particular, pondo $c_1 = \dots = c_5 = 0$, $c_6 = 1$ e $\alpha = 0$, vemos que

$$X = 4tx\partial_x + 4t^2\partial_t - (x^2 + 2t)u\partial_u,$$

é gerador de simetria de ponto da equação do calor.

Por fim, via um simples exemplo, chamamos a atenção para o fato de que, a partir dos fluxos das simetrias de ponto das equações diferenciais, podemos transformar soluções em soluções das equações diferenciais.

Exemplo 3.20. Pelo Exemplo 3.19, sabemos que o segundo prolongamento do campo

$$X = 4tx\partial_x + 4t^2\partial_t - (x^2 + 2t)u\partial_u$$

é simetria (de ponto) da equação do calor. Portanto, o fluxo de X ,

$$A_\epsilon(x, t, u) = \left(\frac{x}{1 - 4\epsilon t}, \frac{t}{1 - 4\epsilon t}, (u\sqrt{1 - 4\epsilon t}) \exp \left\{ \frac{-\epsilon x^2}{1 - 4\epsilon t} \right\} \right),$$

agindo sobre uma seção $s(x, t) = (x, t, f(x, t))$, que descreve uma solução $u = f(x, t)$ da equação do calor, a deformará numa família a 1 parâmetro de seções

$$s_\epsilon(x, t) = (A_\epsilon \circ s \circ \bar{A}_{-\epsilon})(x, t) = (x, t, f_\epsilon(x, t)),$$

em que $\bar{A}_\epsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a aplicação tal que $\bar{A}_\epsilon \circ \pi = \pi \circ A_\epsilon$, isto é, $\bar{A}_\epsilon(x, t) = \left(\frac{x}{1-4\epsilon t}, \frac{t}{1-4\epsilon t} \right)$,
e

$$f_\epsilon(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+4\epsilon t}} \exp\left(\frac{-\epsilon x^2}{1+4\epsilon t}\right) f\left(\frac{x}{1+4\epsilon t}, \frac{t}{1+4\epsilon t}\right)$$

é uma família de soluções dependentes do parâmetro ϵ .

Sistemas Diferenciais Exteriores e Redução por Simetrias

Os rudimentos da teoria dos *sistemas diferenciais exteriores* surgiram na década de 10 do século XIX, quando o matemático alemão Johann Friedrich Pfaff estudou a descrição de subvariedades nas quais uma dada 1-forma diferencial se anula. Após cerca de um século, o matemático francês Élie Cartan fundou e desenvolveu essa teoria. De fato, em 1877, Frobenius introduziu o diferencial exterior de uma forma Pfaffiana (chamado de *covariante bilinear*) e, no século XX, Cartan conceituou de maneira geral as formas diferenciais e a operação de diferenciação exterior.

Um dos grandes objetivos no estudo dos sistemas diferenciais exteriores é aquele de descrever as suas *variedades integrais* ou, em outras palavras, as subvariedades imersas sobre as quais as formas diferenciais dos sistemas se anulam. Realmente, como veremos na Seção 4.2, o interesse em tais variedades integrais se deve ao fato de que toda equação diferencial admite uma descrição local para as suas soluções por meio das variedades integrais de certos sistemas diferenciais exteriores com *condição de independência*.

Para o leitor que desejar um maior detalhamento dos tópicos a serem abordados neste capítulo, recomendamos as referências [2, 3, 7, 15]. Além disso, observamos que, daqui em diante, salvo menção contrária, M denota uma variedade suave n -dimensional.

4.1 Sistemas Diferenciais Exteriores e suas Variedades Integrais

Lembramos que $\Omega^*(M)$ denota a álgebra exterior das formas diferenciais sobre M e, com relação a tal estrutura algébrica, é natural adotar a noção de *ideal algébrico exterior* descrita pela seguinte

Definição 4.1. *Um subconjunto $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$ é um **ideal algébrico exterior** se valem as*

seguintes propriedades:

1. $f\omega \in \mathcal{I}$, para toda $f \in C^\infty(M)$ e para toda $\omega \in \Omega^*(M)$;
2. $\omega^1 + \omega^2 \in \mathcal{I}$, para todas as formas diferenciais $\omega^1, \omega^2 \in \mathcal{I}$;
3. $\alpha \wedge \omega \in \mathcal{I}$, para todas as formas diferenciais $\alpha \in \Omega^*(M)$ e $\omega \in \mathcal{I}$.

De maneira equivalente, podemos dizer que $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$ é um ideal algébrico exterior se $(\mathcal{I}, +)$ é um grupo abeliano e, além disso, para todas as formas diferenciais $\alpha \in \Omega^*(M)$ e $\beta \in \mathcal{I}$, vale que $\alpha \wedge \beta \in \mathcal{I}$.

Para um genérico subconjunto $S \subset \Omega^*(M)$, denotaremos por $\mathcal{I} = \langle S \rangle_{\text{alg}}$ o ideal algébrico exterior gerado por S . Portanto, diremos que $\mathcal{I} = \langle S \rangle_{\text{alg}}$ é o ideal gerado algebricamente por S .

A partir da definição anterior, e considerando o fato de que a álgebra $\Omega^*(M)$ é equipada com a operação de diferenciação exterior, é também natural definirmos uma noção de *ideal algébrico exterior diferenciavelmente gerado* da maneira descrita pela seguinte

Definição 4.2 (Sistema Diferencial Exterior). Dizemos que $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$ é um **sistema diferencial exterior (SDE)** quando \mathcal{I} é um ideal algébrico exterior de $\Omega^*(M)$ tal que $d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$. Ademais, um **SDE com condição de independência** é um par (\mathcal{I}, ω) , no qual \mathcal{I} é um SDE e $\omega \in \Omega^k(M)$ é uma k -forma diferencial decomponível, i.e., existem 1-formas diferenciais $\omega_i \in \Omega^1(M)$, $i = 1, \dots, k$, tais que $\omega = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k$. Nesse sentido, uma tal forma diferencial ω é chamada de **condição de independência**.

Analogamente ao caso dos ideais algébricos, utilizaremos a notação $\mathcal{I} = \langle S \rangle_{\text{diff}}$ para denotar o SDE gerado por um subconjunto $S \subset \Omega^*(M)$, i.e., $\langle S \rangle_{\text{diff}} = \langle S, dS \rangle_{\text{alg}}$, em que $dS := \{d\omega \mid \omega \in S\}$. Portanto, diremos que $\mathcal{I} = \langle S \rangle_{\text{diff}}$ é o SDE diferenciavelmente gerado por S .

Observamos também que, a partir de dois SDEs $\mathcal{I}_i \subset \Omega^*(M_i)$, $i = 1, 2$, podemos definir um terceiro SDE da seguinte maneira. Com efeito, sendo $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$ a projeção no i -ésimo fator, é fácil verificar que

$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 := \langle \pi_1^*(\mathcal{I}_1) \cup \pi_2^*(\mathcal{I}_2) \rangle_{\text{alg}} \subset \Omega^*(M_1 \times M_2)$$

define um SDE, denominado **soma direta** de \mathcal{I}_1 e \mathcal{I}_2 .

Um tipo particularmente importante de SDE é o descrito pela seguinte

Definição 4.3. Um SDE $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$ é **Pfaffiano** se globalmente, ou localmente (na vizinhança de todo ponto), \mathcal{I} for diferenciavelmente gerado por um sistema de 1-formas diferenciais.

De maneira equivalente, dizemos que um SDE $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$ é Pfaffiano se \mathcal{I} for diferenciavelmente gerado pelo módulo das seções de um subfibrado $I \subset \Lambda^1(M)$, ou seja, $\mathcal{I} = \langle \Gamma(I) \rangle_{\text{diff}}$.

Exemplo 4.4. Recordamos que, no Exemplo 3.17, ambientamos a equação do calor $u_{xx} = u_t$ em um espaço de jets 8-dimensional, e descrevemos a distribuição de Cartan induzida

$$\mathcal{C}^2(\mathcal{E}) = \text{ann}\{du - u_x dx - u_t dt, du_x - u_t dx - u_{xt} dt, du_t - u_{xt} dx - u_{tt} dt\}.$$

A partir disso, podemos definir o sistema Pfaffiano

$$\mathcal{I} = \langle du - u_x dx - u_t dt, du_x - u_t dx - u_{xt} dt, du_t - u_{xt} dx - u_{tt} dt \rangle_{\text{diff}} \subset \Omega^*(\mathcal{E}).$$

De maneira mais ampla, na Seção 4.2, iremos discorrer acerca de sistemas Pfaffianos obtidos por meio da distribuição de Cartan induzida.

Também observamos que as **componentes homogêneas** \mathcal{I}^k de um SDE $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$ são definidas como sendo

$$\mathcal{I}^k := \mathcal{I} \cap \Omega^k(M), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Naturalmente, toda componente homogênea é um $C^\infty(M)$ -módulo e, além disso,

$$\mathcal{I} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{I}^k.$$

Daqui em diante, sempre consideraremos SDEs tais que $\mathcal{I}^0 = \{0\} \subset C^\infty(M)$, posto que, mesmo quando $\mathcal{I}^0 \neq \{0\}$, assumiremos que sempre podemos nos restringir às subvariedades em que as funções não triviais de \mathcal{I}^0 são nulas.

Uma outra condição recorrentemente utilizada no estudo dos SDEs é descrita pela seguinte

Definição 4.5. Dizemos que um SDE $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$ satisfaz a **propriedade de posto constante** se, para cada $1 \leq k \leq n$, existe um subfibrado $I^k \subset \Lambda^k(M)$ de dimensão constante tal que $\Gamma(I^k) = \mathcal{I}^k$.

De agora em diante, iremos supor que todos os nossos SDEs satisfazem à propriedade de posto constante.

Na prática, os SDEs mais recorrentes são aqueles algebricamente gerados por formas diferenciais de grau baixo, geralmente 1 ou 2. Por esse motivo, é conveniente introduzirmos a seguinte

Definição 4.6. Um SDE $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$ é **algebricamente gerado pelas suas primeiras k componentes homogêneas** se, para cada $x \in M$, existe uma vizinhança aberta $U \subset M$ de x tal que

$$\mathcal{I}|_U = \langle \mathcal{I}^1|_U, \dots, \mathcal{I}^k|_U \rangle_{\text{alg}}.$$

Como evidenciado no início deste capítulo, a principal motivação para o estudo dos SDEs tem sido o fato de que eles permitem caracterizar geometricamente as soluções das equações

diferenciais como sendo certas subvariedades sobre as quais as formas dos SDEs se anulam. É natural, portanto, introduzir a noção de *variedade integral* de um SDE, de acordo com a seguinte

Definição 4.7 (Variedade Integral). *Seja $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$ um SDE. Uma imersão $h : N \rightarrow M$ é dita ser uma **variedade integral** de \mathcal{I} quando $h^*(\mathcal{I}) = \{0\}$. Em particular, dada uma condição de independência ω , dizemos que h é uma **variedade integral admissível** quando $h^*\omega \neq 0$.*

A seguir, apresentamos duas simples proposições que auxiliam na descrição das variedades integrais dos SDEs algebricamente gerados pelas suas primeiras componentes homogêneas.

Proposição 4.8. *Sejam $k \geq 1$, $h : N \rightarrow M$ uma imersão e $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$ um SDE tal que*

$$\mathcal{I} = \langle \mathcal{I}^1, \dots, \mathcal{I}^k \rangle_{\text{diff}}.$$

Nessas condições, h é variedade integral de \mathcal{I} se, e somente se, para todo $j \in \{1, \dots, k\}$, $h^(\mathcal{I}^j) = \{0\}$.*

Demonstração. Se h é variedade integral de \mathcal{I} , obtemos diretamente da definição que, para todo $j \in \{1, \dots, k\}$, $h^*(\mathcal{I}^j) = \{0\}$.

Reciprocamente, dado $\theta \in \mathcal{I} = \langle \mathcal{I}^1, \dots, \mathcal{I}^k \rangle_{\text{diff}}$, há formas diferenciais $\theta_1 \in \mathcal{I}^1, \dots, \theta_k \in \mathcal{I}^k$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k \in \Omega^*(M)$ tais que

$$\theta = \sum_{i=1}^k \alpha_i \wedge \theta_i + \sum_{i=1}^k \beta_i \wedge d\theta_i.$$

Daí, sendo que $h^*\theta_i = 0$ e $h^*d\theta_i = dh^*\theta_i = 0$, teremos

$$h^*(\theta) = \sum_{i=1}^k h^*(\alpha_i) \wedge h^*(\theta_i) + \sum_{i=1}^k h^*(\beta_i) \wedge h^*(d\theta_i) = 0.$$

Ou seja, $h^*(\mathcal{I}) = \{0\}$ e, como h é imersão, concluímos que h é variedade integral de \mathcal{I} . \square

Proposição 4.9. *Sejam $k \geq 1$, $h : N \rightarrow M$ uma imersão e $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$ um SDE tal que*

$$\mathcal{I} = \langle \mathcal{I}^1, \dots, \mathcal{I}^k \rangle_{\text{diff}}.$$

Fixado $j \in \{1, \dots, k\}$, se $\mathcal{I}^j = \langle \theta_1, \dots, \theta_l \rangle_{\text{diff}}$, então: $h^(\mathcal{I}^j) = \{0\}$ se, e somente se, são válidas as igualdades $h^*(\theta_1) = \dots = h^*(\theta_l) = 0$.*

Demonstração. Evidentemente, se $h^*(\mathcal{I}^j) = \{0\}$, então $h^*(\theta_1) = \dots = h^*(\theta_l) = 0$.

Reciprocamente, para cada forma diferencial $\theta \in \mathcal{I}^j = \langle \theta_1, \dots, \theta_l \rangle_{\text{diff}}$, existem formas diferenciais $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in \Omega^*(M)$ tais que

$$\theta = \sum_{i=1}^l \alpha_i \wedge \theta_i + \sum_{i=1}^l \beta_i \wedge d\theta_i.$$

Daí, sendo que $h^*\theta_i = 0$ e $h^*d\theta_i = dh^*\theta_i = 0$, teremos

$$h^*(\theta) = \sum_{i=1}^l h^*(\alpha_i) \wedge h^*(\theta_i) + \sum_{i=1}^l h^*(\beta_i) \wedge h^*(d\beta_i) = 0.$$

Ou seja, $h^*(\mathcal{I}^j) = \{0\}$. □

Outra ferramenta que auxilia na descrição das variedades integrais dos sistema diferenciais exteriores é a noção de *integral primeira (local)*, que surge naturalmente no contexto dos sistemas Pfaffianos. Em geral, diremos que uma função $f \in C^\infty(M)$ é uma ***integral primeira*** de um SDE $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$ se $df \in \mathcal{I}$. Analogamente, diremos que uma função suave $f \in C^\infty(U)$, $U \subset M$ aberto, é uma ***integral primeira (local)*** se $df \in \mathcal{I}|_U$.

Agora, dado um sistema Pfaffiano $\mathcal{I} = \langle I \rangle_{\text{diff}}$, gerado por um subfibrado $I \subset \Lambda^1(M)$, o diferencial exterior induz a seguinte aplicação $C^\infty(M)$ -linear:

$$\begin{aligned} \delta_0: I &\longrightarrow \Lambda^2(M)/\langle I \rangle_{\text{alg}} \\ \theta &\longmapsto [d\theta] \end{aligned} .$$

Podemos, portanto, definir a sequência de sistemas Pfaffianos derivados

$$I =: I^{(0)} \supset I^{(1)} \supset \dots \supset I^{(\infty)},$$

em que

$$I^{(1)} = \ker \delta_0 = \{\theta \in I \mid d\theta = 0 \text{ mod } I\}$$

e, recursivamente,

$$I^{(k)} = \ker \delta_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots,$$

com

$$\begin{aligned} \delta_{k-1}: I^{(k-1)} &\longrightarrow \Lambda^2(M)/\langle I^{(k-1)} \rangle_{\text{alg}} \\ \theta &\longmapsto [d\theta] \end{aligned} .$$

Assim, para o menor k pelo qual $I^{(k)} = I^{(k+1)}$, introduz-se a notação $I^{(\infty)} := I^{(k)}$ e se diz que k é o ***comprimento*** da sequência dos sistemas Pfaffianos derivados.

O termo $I^{(\infty)}$ é o maior subfibrado integrável de I , cuja dimensão é o número máximo de integrais primeiras funcionalmente independentes de I .

4.2 Aplicação dos Sistemas Diferenciais Exteriores às Equações Diferenciais

Ao longo desta seção, mostraremos como as soluções de equações diferenciais podem ser descritas por meio de variedades integrais de SDEs, Pfaffianos ou não.

Definição 4.10 (Ideal de Contato). Em um espaço de jatos $J^k(\pi)$, o **Ideal de Contato** $\mathcal{C}_{sde}^k(\pi)$ é o SDE Pfaffiano diferenciavelmente gerado em toda vizinhança coordenada pelas formas de Cartan, i.e.,

$$\mathcal{C}_{sde}^k(\pi)|_U := \left\langle \omega_\sigma^j \mid 1 \leq j \leq m, 0 \leq |\sigma| \leq k-1 \right\rangle_{diff}.$$

Veja que $\mathcal{C}_{sde}^k(\pi)$ independe das expressões locais das formas de Cartan, devido ao fato de que a primeira componente homogênea de $\mathcal{C}_{sde}^k(\pi)$ coincide com $\mathcal{C}^k(\pi)^\perp$.

Seja $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ uma equação diferencial, em que $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a projeção nas variáveis independentes, e considere a restrição

$$\mathcal{C}_{sde}^k(\mathcal{E}) := \left\langle (\omega_\sigma^j)|_{\mathcal{E}} \mid 1 \leq j \leq m, 0 \leq |\sigma| \leq k-1 \right\rangle_{diff}$$

de $\mathcal{C}_{sde}^k(\pi)$ à equação \mathcal{E} . Pelo Teorema 3.10, temos que as variedades integrais do sistema $\mathcal{C}_{sde}^k(\mathcal{E})$ com condição de independência $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ são k -ésimos prolongamentos de seções localmente descritas por soluções da equação \mathcal{E} .

Exemplo 4.11. Considere o espaço de k -jatos $J^k(\pi)$, sendo $\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a projeção nas variáveis independentes, $\pi(x, y, u) = (x, y)$. Nos pontos em que $F := \frac{\sqrt{u_x u_y}}{x+y}$ for definida e satisfizer as necessárias condições de regularidade, temos uma equação diferencial

$$\mathcal{E} := \left\{ u_{xy} = \frac{\sqrt{u_x u_y}}{x+y} \right\} \subset J^2(\pi),$$

que descreve uma subvariedade 7-dimensional de $J^2(\pi)$. Nesse caso, as formas de Cartan restritas à equação \mathcal{E} são

$$\begin{cases} \bar{\omega}_0 := \omega_0|_{\mathcal{E}} = du - u_x dx - u_y dy, \\ \bar{\omega}_x := \omega_x|_{\mathcal{E}} = du_x - u_{xx} dx - \frac{\sqrt{u_x u_y}}{x+y} dy, \\ \bar{\omega}_y := \omega_y|_{\mathcal{E}} = du_y - \frac{\sqrt{u_x u_y}}{x+y} dx - u_{yy} dy. \end{cases}$$

Pelo Teorema 3.10, as variedades integrais bidimensionais do SDE $\mathcal{C}_{sde}^k(\mathcal{E}) = \langle \bar{\omega}_0, \bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y \rangle_{diff}$ com condição de independência $dx \wedge dy$ são gráficos de prolongamentos de seções $(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$ para as quais $u = f(x, y)$ é uma solução, no sentido usual, da equação \mathcal{E} . Entretanto, podemos utilizar também outros SDEs, definidos em variedades de dimensão menor do que 7, de modo a ainda conseguirmos localmente descrever as soluções da equação \mathcal{E} por meio das variedades integrais de tais sistemas com condição de independência $dx \wedge dy$. Por exemplo, em $J^1(\pi)$, a forma diferencial ω_0 e a 2-forma

$$dx \wedge \bar{\omega}_x = dx \wedge \left(du_x - \frac{\sqrt{u_x u_y}}{x+y} dy \right)$$

podem ser usadas para definir o SDE não Pfaffiano

$$\mathcal{I} = \left\langle du - u_x dx - u_y dy, dx \wedge \left(du_x - \frac{\sqrt{u_x u_y}}{x+y} dy \right) \right\rangle_{diff}$$

com condição de independência $dx \wedge dy$. Assim, devido ao fato de que $\omega_0 \in \mathcal{I}$, o Teorema 3.10 nos leva a novamente concluir que as variedades integrais Σ de \mathcal{I} são ainda gráficos de prolongamentos de seções $(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$ tais que

$$0 = dx \wedge \left(du_x - \frac{\sqrt{u_x u_y}}{x+y} dy \right) \Big|_{\Sigma} = \left(f_{xy} - \frac{\sqrt{u_x u_y}}{x+y} \right) dx \wedge dy.$$

Logo, a função $u = f(x, y)$ é, no sentido usual, solução de \mathcal{E} . Ou seja, as variedades integrais de \mathcal{I} também descrevem soluções de \mathcal{E} . Análogas considerações valem para o SDE

$$\mathcal{J} := \langle \omega_0, dy \wedge \omega_y \rangle_{\text{diff}}.$$

Exemplo 4.12 (Equações de Monge-Âmpere). Mais uma vez, consideramos o fibrado $\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\pi(x, y, u) = (x, y)$. No espaço de jatos $J^2(\pi)$, com coordenadas $\{x, y, u, p, q, r, s, t\} = \{x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}\}$, as subvariedades

$$\mathcal{E} = \{F = 0\} \subset J^2(\pi),$$

em que

$$F := Ar + 2Bs + Ct + D(rt - s^2) + E$$

e $A, B, C, D, E \in C^\infty(J^1(\pi))$, descrevem as **equações de Monge-Âmpere**. Também neste exemplo, denotaremos por $\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y$ as restrições à equação \mathcal{E} das 1-formas

$$\begin{cases} \omega_0 = du - pdx - qdy, \\ \omega_x = dp - rdx - sdy, \\ \omega_y = dq - sdx - tdy, \end{cases}$$

que descrevem a distribuição de Cartan em $J^2(\pi)$. Novamente pelo Teorema 3.10, podemos afirmar que as variedades integrais de $\mathcal{C}_{sde}^2(\mathcal{E}) = \langle \bar{\omega}_0, \bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y \rangle_{\text{diff}}$, com condição de independência $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, são gráficos de segundos prolongamentos

$$(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y), f_x(x, y), f_y(x, y), f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y), f_{yy}(x, y))$$

de seções da forma $(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$, em que $u = f(x, y)$ é uma solução de \mathcal{E} no sentido usual.

A seguir, iremos mostrar como as soluções de uma equação de Monge-Âmpere podem ser também descritas pelas variedades integrais de um SDE não Pfaffiano definido em $J^1(\pi)$, reduzindo assim de 3 a dimensão do ambiente em que se podem estudar essas equações.

De fato, devido à forma de F , é possível encontrar uma 2-forma

$$\tilde{\rho} = Fdx \wedge dy - \rho, \quad \rho \in \Omega^2(J^1(\pi)), \quad (4.1)$$

que é uma combinação linear de $\omega_x \wedge \omega_y$ e dos produtos exteriores de ω_x e ω_y com dx , dy , dp e dq . Por exemplo, considerando-se

$$\tilde{\rho} = -A\omega_x \wedge dy + B(\omega_x \wedge dx - \omega_y \wedge dy) + C\omega_y \wedge dx + D(\omega_x \wedge \omega_y + \omega_y \wedge dp - \omega_x \wedge dq),$$

teremos que

$$\rho = Adp \wedge dy + B(dq \wedge dy - dp \wedge dx) - Cdq \wedge dx + Ddp \wedge dq + Edx \wedge dy.$$

Assim, usando (4.1), temos que, para toda seção

$$s(x, y) = (x, y, f(x, y)),$$

vale o seguinte:

$$0 = j^2(s)^*(\tilde{\rho}) = j^2(s)^*(Fdx \wedge dy) - j^1(s)^*(\rho).$$

Portanto, $f(x, y)$ é uma solução da equação $F = 0$ se, e somente, se, $j^2(s)^*(\rho) = 0$.

Decorre disso que as variedades integrais de $\mathcal{I} = \langle \omega_0, \rho \rangle_{\text{diff}}$, com condição de independência $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, descrevem soluções de F .

Exemplo 4.13 (Equação de Burgers). Seja $\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ o fibrado tal que $\pi(x, t, u) = (x, t)$. A equação de Burgers é descrita pela subvariedade 7-dimensional

$$\mathcal{E} = \{u_{xx} = u_t - 2uu_x\} \subset J^2(\pi).$$

Como a equação de Burgers pertence à classe de equações de Monge-Âmpère (neste caso usamos t no lugar de y), é possível aplicar à \mathcal{E} as considerações do exemplo anterior. Neste exemplo, porém, mostraremos que as soluções de \mathcal{E} podem ser descritas também pelas variedades integrais de um SDE não Pfaffiano em \mathbb{R}^4 , reduzindo assim ainda mais a dimensão da variedade em que a equação pode ser estudada. Com efeito, em \mathbb{R}^4 , com coordenadas $\{x, t, u, u_x\}$, consideramos o SDE

$$\mathcal{I} = \langle (du - u_x dx) \wedge dt, d(u_x + u^2) \wedge dt + du \wedge dx \rangle_{\text{diff}} \subset \Omega^*(\mathbb{R}^4),$$

com condição de independência $dx \wedge dt$.

Nesse caso, toda variedade admissível admite uma parametrização da forma

$$\begin{aligned} h: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, t) &\longmapsto (x, t, f(x, t), g(x, t)) \end{aligned}$$

tal que

$$0 = h^*((du - u_x dx) \wedge dt) = (df - gdx) \wedge dt = (\partial_x f - g)dx \wedge dt$$

e

$$0 = h^*(d(u_x + u^2) \wedge dt + du \wedge dx) = d(g + f^2) \wedge dt + df \wedge dx = (\partial_x g + 2g\partial_x f - \partial_t f)dx \wedge dt,$$

de onde obtemos que

$$g = \partial_x f, \quad \partial_t f = \partial_x g + 2f\partial_x f. \quad (4.2)$$

Logo, $u = f(x, t)$ é tal que

$$\partial_t f = \partial_x^2 f + 2f\partial_x f \quad (4.3)$$

e, portanto, vemos que $h(x, y) = (x, y, f(x, y), f_x(x, y))$ descreve uma correspondência entre variedades integrais admissíveis e soluções da equação de Burgers. Por fim, gostaríamos de apontar a relação entre os geradores de \mathcal{I} e as formas de Cartan restritas à equação de Burgers

$$\begin{cases} \bar{\omega}_0 := \omega_0|_{\mathcal{E}} = du - u_x dx - u_t dt, \\ \bar{\omega}_x := \omega_x|_{\mathcal{E}} = du_x - (u_t - 2uu_x)dx - u_{xt}dt, \\ \bar{\omega}_t := \omega_t|_{\mathcal{E}} = du_t - u_{xt}dx - u_{tt}dy. \end{cases}$$

De fato, verifica-se que os pullbacks dos geradores de \mathcal{I} por meio da aplicação

$$\begin{aligned} \psi: \quad J^1(\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, t, u, u_x, u_t) &\longmapsto (x, t, u, u_x) \end{aligned}$$

coincidem com as 2-formas

$$\begin{cases} (du - u_x dx) \wedge dt = \bar{\omega}_0 \wedge dt, \\ d(u_x + u^2) \wedge dt + du \wedge dx = \bar{\omega}_0 \wedge dx + (\bar{\omega}_x + 2u\bar{\omega}_0) \wedge dt. \end{cases}$$

Exemplo 4.14 (Korteweg-de Vries). No espaço de 3-jatos $J^3(\pi)$, com respeito ao fibrado

$$\begin{aligned} \pi: \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, u) &\longmapsto (x, y) \end{aligned}$$

e usando as coordenadas canônicas $\{x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_{xxx}, u_{xxy}, u_{xyy}, u_{yyy}\}$, podemos descrever a **equação diferencial de Korteweg-de Vries (KdV)** como sendo a subvariedade 11-dimensional

$$\mathcal{E} := \{u_{xxx} = u_y - uu_x\} \subset J^3(\pi).$$

Nesse caso, as formas de Cartan restritas à equação são:

$$\begin{cases} \bar{\omega}_0 := \omega_0|_{\mathcal{E}} = du - u_x dx - u_y dy, \\ \bar{\omega}_x := \omega_x|_{\mathcal{E}} = du_x - u_{xx} dx - u_{xy} dy, \\ \bar{\omega}_y := \omega_y|_{\mathcal{E}} = du_y - u_{xy} dx - u_{yy} dy, \end{cases} ; \begin{cases} \bar{\omega}_{xx} := \omega_{xx}|_{\mathcal{E}} = du_{xx} - (u_y - uu_x)dx - u_{xxy}dy, \\ \bar{\omega}_{xy} := \omega_{xy}|_{\mathcal{E}} = du_{xy} - u_{xxy}dx - u_{xyy}dy, \\ \bar{\omega}_{yy} := \omega_{yy}|_{\mathcal{E}} = du_{yy} - u_{xyy}dx - u_{yyy}dy. \end{cases}$$

Pelo Teorema 3.10, as variedades integrais de $\mathcal{C}_{sde}^3(\mathcal{E}) = \langle \bar{\omega}_0, \bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y, \bar{\omega}_{xx}, \bar{\omega}_{xy}, \bar{\omega}_{xy} \rangle_{diff}$, com condição de independência $dx \wedge dy$, são gráficos de terceiros prolongamentos de seções que descrevem soluções da KdV no sentido usual. Por outro lado, assim como nos exemplos anteriores, podemos considerar um SDE não Pfaffiano \mathcal{J} em uma variedade de dimensão inferior, por exemplo $J^2(\pi)$, que possui dimensão 8. Consideremos de fato o SDE

$$\mathcal{J} = \langle \omega_0, \omega_x, \omega_y, dy \wedge \bar{\omega}_{xx} = dy \wedge du_{xx} + (u_y - uu_x)dx \wedge dy \rangle_{diff} \subset \Omega^*(J^2(\pi))$$

com condição de independência $dx \wedge dy$. Neste caso, as variedades integrais admissíveis admitem parametrizações

$$h(x, y) = (x, y, f(x, y), f_x(x, y), f_y(x, y), f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y), f_{yy}(x, y)),$$

e são tais que

$$\begin{aligned} 0 &= h^*(dy \wedge du_{xx} + (u_y - uu_x)dx \wedge dy) \\ &= dy \wedge df_{xx} + (f_y - ff_x)dx \wedge dy \\ &= (-f_{xxx} + f_y - ff_x)dx \wedge dy, \end{aligned}$$

ou seja, $f_{xxx} = f_y - ff_x$ e, portanto, f soluciona a KdV. Em termos das 1-formas de Cartan, $dy \wedge du_{xx} + (u_y - uu_x)dx \wedge dy = dy \wedge \bar{\omega}_{xx}$. Por fim, destacamos que poderíamos utilizar um SDE definido em uma variedade de dimensão ainda menor do que 8, nomeadamente, 5. De fato, em \mathbb{R}^5 , com coordenadas $\{x, y, u, p, r\}$, considere o SDE

$$\mathcal{I} = \langle \theta_1, \theta_2, \theta_3 \rangle_{\text{diff}}$$

com condição de independência $dx \wedge dy$, em que

$$\begin{cases} \theta_1 := (du - pdx) \wedge dy = \bar{\omega}_0 \wedge dy, \\ \theta_2 := (rdx - dp) \wedge dy = dy \wedge \bar{\omega}_x, \\ \theta_3 := (dr + updx) \wedge dy + du \wedge dx = \bar{\omega}_{xx} \wedge dy + \bar{\omega}_0 \wedge dx. \end{cases}$$

Neste caso, toda variedade integral admissível admite uma parametrização $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$, $h(x, y) = (x, y, f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))$, tal que

$$0 = h^*\theta_1 = (df_1 - f_2 dx) \wedge dy = (f_{1x} - f_2)dx \wedge dy,$$

$$h^*\theta_2 = (f_3 dx - df_2) \wedge dy = (f_3 - f_{2x})dx \wedge dy$$

e

$$0 = h^*\theta_3 = (df_3 + f_1 f_2 dx) \wedge dy + df_1 \wedge dx = (f_{3x} + f_1 f_2 - f_{1y})dx \wedge dy,$$

de onde obtemos que

$$f_2 = f_{1x}, \quad f_3 = f_{2x}, \quad f_{1xxx} = f_{1y} - f_1 f_{1x}.$$

Portanto, h é o primeiro prolongamento de uma seção definida por uma solução da KdV.

4.3 Redução por Simetrias de SDEs

Por meio de uma submersão $\mathbf{p} : M \rightarrow N$, gostaríamos de, a partir de um sistema diferencial exterior $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$, induzir um SDE $\mathcal{J} \subset \Omega^*(N)$. Nesse sentido, o candidato natural é o conjunto:

$$\mathcal{J} := \{\theta \in \Omega^*(N) \mid \mathbf{p}^*(\theta) \in \mathcal{I}\}.$$

Dadas uma família $\{\theta_i\}_{i=1}^k$ de formas diferenciais em \mathcal{J} e uma família de formas diferenciais $\{\alpha_i\}_{i=1}^k$ definidas em N ,

$$\mathbf{p}^* \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \wedge \theta_i \right) = \sum_{i=1}^k \mathbf{p}^*(\alpha_i) \wedge \mathbf{p}^*(\theta_i) \in \mathcal{I},$$

pois cada $\mathbf{p}^*\theta_i \in \mathcal{I}$ e o SDE \mathcal{I} é, em particular, um ideal de $\Omega^*(M)$. Logo,

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \wedge \theta_i \in \mathcal{J}.$$

Além disso, para todo $\theta \in \mathcal{J}$,

$$\mathbf{p}^*(d\theta) = d\mathbf{p}^*(\theta) \in \mathcal{I},$$

pois $\mathbf{p}^*(\theta) \in \mathcal{I}$ e o SDE \mathcal{I} é, em particular, fechado por diferenciação exterior. Logo,

$$d\theta \in \mathcal{J}.$$

Ou seja, concluímos que $\mathcal{J} \subset \Omega^*(N)$ é um sistema diferencial exterior, e isso nos motiva a adotar a seguinte

Definição 4.15 (Redução de SDEs). *Sejam $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$ um SDE e $\mathbf{p} \in C^\infty(M, N)$ uma submersão. A **redução de \mathcal{I} por \mathbf{p}** , denotada por \mathcal{I}/\mathbf{p} , é definida do seguinte modo:*

$$\mathcal{I}/\mathbf{p} := \{\theta \in \Omega^*(N) \mid \mathbf{p}^*\theta \in \mathcal{I}\}.$$

Similarmente, dados $k \geq 1$, um subfibrado $A \subset \Lambda^k(M)$, e supondo que \mathbf{p} é sobrejetiva, definimos a **redução A/\mathbf{p} de A por \mathbf{p}** como sendo

$$A/\mathbf{p} := \{\eta \in \Lambda^k(N) \mid \mathbf{p}^*(\eta) \in A\}.$$

Neste texto, a redução de subfibrados e sistemas diferenciais exteriores será efetuada no contexto das ações dos *grupos de simetrias* dos sistemas.

Definição 4.16. *Dizemos que dois SDEs $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$ e $\mathcal{J} \subset \Omega^*(N)$ são **equivalentes** quando há um difeomorfismo $\phi : M \rightarrow N$ tal que $\phi^*(\mathcal{J}) = \mathcal{I}$. Em particular, quando $N = M$ e $\mathcal{I} = \mathcal{J}$, dizemos que $\phi : M \rightarrow M$ é uma **simetria** de \mathcal{I} . Nesse sentido, um **grupo de simetrias** de \mathcal{I} é dado por um grupo de Lie G que age em M suavemente à esquerda e no qual, para todo $g \in G$, o difeomorfismo*

$$\begin{aligned} \mu_g: M &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

é simetria de \mathcal{I} .

Proposição 4.17. *Se $\phi : M \rightarrow M$ é simetria de \mathcal{I} e $h : N \rightarrow M$ é variedade integral de \mathcal{I} , então $\phi \circ h : N \rightarrow M$ é variedade integral de \mathcal{I} .*

Demonstração. Sendo que ϕ é difeomorfismo e h é, em particular, uma imersão, temos que $\phi \circ h$ é imersão. Além disso,

$$\begin{aligned} (\phi \circ h)^*(\mathcal{I}) &= h^*(\phi^*(\mathcal{I})) \\ &= h^*(\mathcal{I}), \text{ pois } \phi \text{ é simetria de } \mathcal{I}, \\ &= \{0\}, \text{ pois } h \text{ é variedade integral de } \mathcal{I}. \end{aligned}$$

□

No âmbito da redução de um SDE \mathcal{I} por um grupo de simetrias G , adotaremos as notações

$$\mathcal{I}/G := \mathcal{I}/\mathbf{q}_G, \quad \mathcal{I}^k/G := \mathcal{I}^k/\mathbf{q}_G, \quad I^k/G := I^k/\mathbf{q}_G,$$

em que $\mathbf{q}_G : M \rightarrow M/G$ é a projeção canônica. Além disso, nesse contexto, utilizaremos por diversas vezes as formas diferenciais básicas e semibásicas, descritas no Capítulo 2. Nesse sentido, esclarecemos que, na presença de um SDE $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$,

$$\mathcal{I}_{G,\text{sb}} = \{\alpha \in \mathcal{I} \mid X \lrcorner \alpha = 0, \forall X \in \Gamma_G = \ker \mathbf{q}_{G^*}\}$$

denota a subálgebra das formas G -semibásicas pertencentes ao sistema \mathcal{I} , enquanto que $\mathcal{I}_{G,\text{sb}}^k$ denota sua k -ésima componente homogênea, $\mathcal{I}_{G,\text{sb}}^k = \mathcal{I}_{G,\text{sb}} \cap \Omega^k(M)_{G,\text{sb}}$, onde denotamos com $\Omega^k(M)_{G,\text{sb}}$ o módulo das k -formas diferenciais G -semibásicas. Analogamente, $I_{G,\text{sb}}^k$ denota o conjunto dos k -covetores tangentes G -semibásicos pertencentes ao subfibrado I^k ,

$$I_{G,\text{sb}}^k = I^k \cap \Lambda^k(M)_{G,\text{sb}}.$$

Mais em geral, para qualquer subfibrado $J \subset \Lambda^k(M)$, $J_{G,\text{sb}}^k$ denota o conjunto dos k -covetores tangentes G -semibásicos de J , i.e.,

$$J_{G,\text{sb}}^k = J^k \cap \Lambda^k(M)_{G,\text{sb}}.$$

Usaremos também a seguinte

Definição 4.18. *Uma forma θ em M é G -invariante se, e somente se, uma das seguintes condições equivalentes é satisfeita:*

- (a) $\mu_g^* \theta = \theta$, para todo $g \in G$;
- (b) $\mathcal{L}_X \theta = 0$, para todo X campo vetorial fundamental da ação de G em M .

Além disso, como já observado na Seção 2.3, com a Proposição 2.25, assumindo daqui por diante que as submersões consideradas têm fibras conexas, podemos caracterizar as formas básicas θ com a propriedade $X \lrcorner \theta = X \lrcorner d\theta = 0$, para todo campo vertical X . Por outro lado, em virtude da fórmula de Cartan, e do fato de que todo campo vertical é combinação linear dos campos fundamentais da ação de G , obtemos a caracterização dada pela seguinte

Proposição 4.19. *Uma forma θ é G -básica se, e somente se, θ é G -semibásica e G -invariante.*

Realmente, se θ é G -básica, então é certamente G -semibásica e, para todo campo fundamental X , vale que $\mathcal{L}_X \theta = d(X \lrcorner \theta) + X \lrcorner d\theta = 0$ e também que $0 = \mathcal{L}_X \theta = X \lrcorner d\theta$.

Lema 4.20. *Seja G um grupo de simetrias de um SDE $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$, agindo regularmente em uma variedade n -dimensional M , e suponha que $I_{G,\text{sb}}^k \subset \Lambda^k(M)$ é um subfibrado de dimensão r . Então, $\mathbf{q}_G^*(I^k/G)$ também é um fibrado de dimensão r , e vale a seguinte identidade:*

$$\mathbf{q}_G^*(I^k/G) = I_{G,\text{sb}}^k. \quad (4.4)$$

Além disso, se U for um aberto de M em que $\mathbf{q}_G : M \rightarrow M/G$ admite uma seção $\sigma : \bar{U} \rightarrow U$, definida em um aberto $\bar{U} \subset M/G$, então, para toda forma α que descreve uma seção de $I_{G, sb}^k|_U$, o pullback $\sigma^*(\alpha)$ é uma seção de $(I^k/G)|_{\bar{U}}$. Em particular, toda base de seções locais de $I_{G, sb}^k$ determina uma base de seções locais de I^k/G .

Demonstração. Pelo modo com o qual se definiu a redução de subfibrados, é imediato perceber que $\mathbf{q}_G^*(I^k/G) \subset I_{G, sb}^k$. Por outro lado, comece fixando $x_0 \in M$ e $\alpha_0 \in I_{G, sb, x_0}^k$. Existe $\tilde{\alpha}_0 \in \Lambda_{\mathbf{q}_G(x_0)}^k(M/G)$ tal que $\alpha_0 = \mathbf{q}_{Gx_0}^* \tilde{\alpha}_0$. Além disso, pela Proposição 2.18, sabemos que existe $\alpha \in \Omega^*(M/G)$ tal que $\alpha_{\mathbf{q}_G(x_0)} = \tilde{\alpha}_0$. Em particular, $\alpha_0 = (\mathbf{q}_G^* \alpha)_{x_0}$. Ademais, observamos que, para um genérico $x_1 \in \mathcal{O}_{x_0}$, há $g \in G$ tal que $\mu_g(x_0) = x_1$. Assim, pela G -invariância das formas diferenciais G -básicas,

$$\alpha_0 = (\mathbf{q}_G^* \alpha)_{x_0} = (\mu_g^* \mathbf{q}_G^* \alpha)_{x_0} = (\mu_g^*)_{x_0} (\mathbf{q}_G^* \alpha)_{x_1} = (\mu_g^*)_{x_0} \mathbf{q}_{Gx_1}^* \tilde{\alpha}_0. \quad (4.5)$$

Daí, compondo $(\mu_{g^{-1}}^*)_{x_1}$ com ambos os lados de (4.5),

$$\mathbf{q}_{Gx_1}^* \tilde{\alpha}_0 = (\mu_{g^{-1}}^*)_{x_1} \alpha_0. \quad (4.6)$$

Agora, supondo que $I_{G, sb}^k \subset \Lambda^k(M)$ é um subfibrado de dimensão r , podemos novamente aplicar a Proposição 2.18 para concluir que há θ seção de $I_{G, sb}^k$ tal que $\theta_{x_0} = \alpha_0$. Logo, por (4.6), e pelo fato de que $\mu_{g^{-1}}$ é uma simetria de \mathcal{I} ,

$$\mathbf{q}_{Gx_1}^* \tilde{\alpha}_0 = (\mu_{g^{-1}}^* \theta)_{x_1} \in I_{x_1}^k. \quad (4.7)$$

Pela generalidade de $x_1 \in \mathcal{O}_{x_0}$, (4.7) implica que $\tilde{\alpha}_0 \in I^k/G$. Logo, $\mathbf{q}_{Gx_0}^* \tilde{\alpha}_0 = \alpha_0 \in \mathbf{q}_G^*(I^k/G)$, ou seja, obtemos que $I_{G, sb}^k \subset \mathbf{q}_G^*(I^k/G)$ e, portanto, vale a igualdade (4.4). Para mostrarmos que a redução de I^k por G define um subfibrado de dimensão r de $\Lambda^k(M/G)$, usamos a Observação 2.7 para obter uma seção local suave $\sigma : \bar{U} \subset M/G \rightarrow M$ da submersão sobrejetiva \mathbf{q}_G , definida em uma vizinhança aberta de um genérico ponto de M/G . Daí, por (4.4),

$$(I^k/G)|_{\bar{U}} = \sigma^*(I_{G, sb}^k). \quad (4.8)$$

Por meio da equação (4.8) e da Proposição 2.17, constatamos que, ao redor de todo ponto do quociente M/G , há um referencial local de I^k/G composto por r formas diferenciais, obtidas via pullback de uma seção local suave de \mathbf{q}_G . Portanto, pelo Teorema 2.22, vemos que a redução $I^k/G \subset \Lambda^k(M/G)$ define um subfibrado de dimensão r . Estas considerações provam também a segunda parte do enunciado. \square

Ao longo deste quarto capítulo, utilizaremos recorrentemente uma noção de transversalidade entre fibrados e submersões, apresentada a seguir.

Com efeito, na presença de um subfibrado $J \subset \Lambda^1(N)$, definimos, para todo $x \in N$, o **anulador** de J em x como sendo

$$\text{ann}J_x := \{\xi \in T_x M \mid \theta(\xi) = 0, \forall \theta \in J_x\}.$$

Ou seja, para todo $x \in N$,

$$\text{ann}J_x := \bigcap_{\theta \in J_x} \ker \theta.$$

Portanto, definimos

$$\text{ann}J := \bigcup_{x \in N} \text{ann}J_x.$$

A partir dessa definição, e fixada uma submersão $\mathbf{p} : N \rightarrow M$, dizemos que o subfibrado J é **transversal à submersão \mathbf{p}** se $\text{ann}J \cap \ker \mathbf{p}_* = \{0\}$, i.e., $\text{ann}J_x \cap \ker \mathbf{p}_{*x} = \{0\} \subset T_x N$, para todo $x \in N$. Em outras palavras, J é transversal à submersão \mathbf{p} se, ponto por ponto, os vetores verticais não anulam os covetores de J . Nesse sentido, na presença de um SDE $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$ e de uma ação de um grupo de simetrias G de \mathcal{I} , dizemos que tal ação é **transversal ao sistema \mathcal{I}** se o subfibrado I^1 for transversal à projeção canônica \mathbf{q}_G . Lembramos que, nesse caso, denotamos $\mathbf{\Gamma}_G = \ker \mathbf{q}_{G*}$, portanto, a condição de transversalidade consiste em

$$\text{ann}I^1 \cap \mathbf{\Gamma}_G = \{0\}.$$

Em última análise, por meio de ações de grupos de simetrias de SDEs, o nosso intuito é aquele de relacionar variedades integrais de SDEs que descrevem equações diferenciais. A maneira com a qual faremos isso depende da hipótese de transversalidade dos grupos de simetrias em relação aos SDEs.

Proposição 4.21. *Sejam M uma variedade e G um grupo de simetrias de um SDE $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$, com ação regular sobre M . A ação de G em M é transversal a \mathcal{I} se, e somente se,*

$$I^1 + \Lambda^1(M)_{G, \text{sb}} = \Lambda^1(M). \quad (4.9)$$

Demonstração. Vamos assumir que $n = \dim M$ e que $m = \dim G$. Supondo (4.9), temos que, para todos $x \in M$ e $\alpha \in \Lambda_x^1(M)$, existem $\alpha_1 \in I_x^1$ e $\alpha_2 \in \Lambda_x^1(M)_{G, \text{sb}}$ tais que

$$\alpha(\xi) = (\alpha_1 + \alpha_2)(\xi) = 0,$$

se $\xi \in \text{ann}I_x^1 \cap \mathbf{\Gamma}_{G,x}$. Logo, pela arbitrariedade de x e α , temos que $\xi = 0$ e, portanto, $\text{ann}I^1 \cap \mathbf{\Gamma}_G = \{0\}$. Reciprocamente, sob a condição de transversalidade, temos, para todo $x \in M$, uma decomposição para o espaço tangente a M em x do tipo:

$$T_x M = \text{ann}I_x^1 \oplus \mathbf{\Gamma}_{G,x} \oplus \mathbb{V},$$

em que $\dim \text{ann}I_x^1 = \text{codim } I_x^1 \leq n - m$ e $\dim \mathbf{\Gamma}_{G,x} = m$. Agora, fixe $\alpha \in \Lambda_x^1(M) \setminus \Lambda_x^1(M)_{G, \text{sb}}$. Para cada $\alpha_1 \in I_x^1$, existe $\alpha_2 \in \Lambda_x^1(M)_{G, \text{sb}}$ tal que

$$\alpha|_{\text{ann}I_x^1} = \alpha_1|_{\text{ann}I_x^1} + \alpha_2|_{\text{ann}I_x^1} \quad (4.10)$$

e

$$\alpha|_{\mathbb{V}} = \alpha_1|_{\mathbb{V}} + \alpha_2|_{\mathbb{V}}. \quad (4.11)$$

Sendo que $\alpha \notin \Lambda_x^1(M)_{G, \text{sb}}$, existe $\xi \in \Gamma_{G,x}$ tal que $\xi \notin \ker \alpha$. Daí, por transversalidade, pode-se dizer que existe $\alpha_1 \in I_x^1$ tal que $\alpha_1(\xi) = \alpha(\xi) \neq 0$. Para tais ξ e α_1 , temos a decomposição

$$\text{span}\{\xi\} \oplus (\ker \alpha_1 \cap \Gamma_{G,x}) = \Gamma_{G,x}.$$

Assim, pela maneira com a qual ξ , α_1 e α_2 foram escolhidos,

$$\begin{cases} \alpha(\xi) = \alpha_1(\xi) + \alpha_2(\xi) \\ \alpha|_{\ker \alpha_1 \cap \Gamma_{G,x}} = \alpha_1|_{\ker \alpha_1 \cap \Gamma_{G,x}} + \alpha_2|_{\ker \alpha_1 \cap \Gamma_{G,x}} \end{cases},$$

ou seja,

$$\alpha|_{\Gamma_{G,x}} = \alpha_1|_{\Gamma_{G,x}} + \alpha_2|_{\Gamma_{G,x}}. \quad (4.12)$$

Portanto, por (4.10), (4.11) e (4.12), $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, com $\alpha_1 \in I_x^1$ e $\alpha_2 \in \Lambda_x^1(M)_{G, \text{sb}}$ e, assim, obtemos (4.9). \square

Corolário 4.22. *Seja G um grupo de simetrias de um SDE $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$ tal que a sua ação sobre M seja regular e transversal a \mathcal{I} . Nessas condições, temos que I^1/G e $I_{G, \text{sb}}^1$ são subfibrados tais que $rk(I^1/G) = rk(I_{G, \text{sb}}^1) = rk(I^1) - rk(\Gamma_G)$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.20, temos que $rk(I^1/G) = rk(I_{G, \text{sb}}^1)$. Por outro lado, pela definição de $I_{G, \text{sb}}^k$, temos que $I_{G, \text{sb}}^1 = I^1 \cap \Lambda^1(M)_{G, \text{sb}}$ e, usando o teorema de Grassmann, temos que

$$rk(I^1/G) = rk(I_{G, \text{sb}}^1) = rk(I^1 \cap \Lambda^1(M)_{G, \text{sb}}) = rk(I^1) + rk(\Lambda^1(M)_{G, \text{sb}}) - rk(I^1 + \Lambda^1(M)_{G, \text{sb}}).$$

Logo, a tese segue de (4.9) e observando que $rk(\Lambda^1(M)) - rk(\Gamma_G) = rk(\Lambda^1(M)_{G, \text{sb}})$. \square

Como veremos a seguir, o resultado expresso no Corolário 4.22 pode ser generalizado, no sentido de que, na presença de um grupo de simetrias G com ação transversal a um SDE \mathcal{I} , I^k/G e $I_{G, \text{sb}}^k$ são, para todo k , subfibrados de dimensão constante. Para chegarmos nesse resultado, usaremos a transversalidade da ação para construir um conveniente conjunto de geradores algébricos para \mathcal{I} .

Nesse sentido, veja que, pela hipótese de posto constante, para cada $x \in M$, existe uma vizinhança aberta $U \subset M$ de x na qual as componentes homogêneas de um SDE $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$, $\mathcal{I}^k = \Gamma(I^k)$, admitem descrições locais do tipo:

$$I^k|_U = \text{span}\{\theta_1, \dots, \theta_{r_k}\}, \quad k = 1, \dots, n,$$

de modo que denotamos $d_k := rk(I^k \text{ mod } I^1)|_U$. Em particular, podemos completar o referencial local

$$\{\theta_1, \dots, \theta_{r_1}\}$$

do fibrado I^1 de maneira tal que

$$\{\theta_1, \dots, \theta_{r_1}, \theta_{r_1+1}, \dots, \theta_n\}$$

seja um referencial local do fibrado dos covetores tangentes $\Lambda^1(M)$. Desse modo,

$$B_U^{1k} := \{\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

constitui um referencial local do fibrado dos k -covetores tangentes $\Lambda^k(M)$. Além disso, por construção, $B_U^{2k} := \{\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_k} \mid 1 \leq i_1 \leq r_1\} \subset B_U^{1k}$ é um subconjunto ponto a ponto linearmente independente e tal que

$$(\langle I^1 \rangle_{\text{alg}} \cap \Lambda^k(M))|_U = \text{span} B_U^{2k}.$$

Denotamos $p_k := rk(\text{span} B_U^{2k})$. Assim, tendo em vista que

$$B_U^{2k} = B_U^{1k} \setminus \{\sigma_{i_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{i_k} \mid r_1 < i_1 < \cdots < i_k \leq n\},$$

obtemos que $p_k = \binom{n}{k} - \binom{n-r_1}{k}$.

Proposição 4.23. *Se $k > n - r_1$, então $d_k = 0$.*

Demonstração. Com $k > n - r_1$, temos $\binom{n}{k} \geq r_k \geq p_k = \binom{n}{k}$, ou seja, $r_k = p_k = \binom{n}{k}$. Portanto, $d_k = r_k - p_k = 0$. \square

Proposição 4.24. *Sejam M uma variedade suave n -dimensional e G um grupo de simetrias m -dimensional de um SDE $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$, com ação regular sobre M . Fixado $x \in M$, considere um referencial local $B_0 := \{X_1, \dots, X_m\}$ de Γ_G definido em uma vizinhança aberta suficientemente pequena U de x . Se a ação de G em M é transversal a \mathcal{I} , então existe um referencial local de formas diferenciais*

$$\{\alpha^i, \theta^j, \omega^s\} \subset \Omega^1(U),$$

com $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq r_1 - m$ e $1 \leq s \leq n - r_1$, tal que $\{\theta^i\} \subset \Gamma(I_{G, \text{sb}}^1|_U)$ é um referencial local de $I_{G, \text{sb}}^1$, $\{\alpha^i, \theta^j\} \subset \Gamma(I^1|_U)$ é um referencial local de I^1 , $\{\theta^j, \omega^s\} \subset \Omega^1(U)_{G, \text{sb}}$ é um referencial local de $\Lambda^1(M)_{G, \text{sb}}$ e, para todo $k = 1, \dots, m$,

$$\alpha^i(X_k) = \delta_{ik}, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (4.13)$$

Demonstração. Os argumentos da prova fornecida a seguir dependem da Proposição 2.17, do Teorema 2.22 e do Corolário 4.22.

Com efeito, a transversalidade da ação permite tomarmos $B_2 := \{\theta^1, \dots, \theta^{r_1-m}\}$ como sendo um referencial local de $I_{G, \text{sb}}^1$ definido em U . Assim, temos que existe um subconjunto $B_3 := \{\omega^1, \dots, \omega^{n-r_1}\} \subset \Omega^1(U)_{G, \text{sb}}$, ponto a ponto linearmente independente, no qual, para todo $y \in U$, o subespaço $\mathbb{V}_y := \text{span}\{\omega_y^1, \dots, \omega_y^{n-r_1}\}$ é tal que

$$I_{G, \text{sb}, y}^1 \oplus \mathbb{V}_y = \Lambda_y^1(M)_{G, \text{sb}}.$$

Analogamente, existe $\tilde{B}_1 := \{\alpha^1, \dots, \alpha^m\} \subset \Gamma(I^1|_U)$, ponto a ponto linearmente independente, tal que, para todo $y \in U$, o subespaço $\mathbb{W}_y := \{\alpha_y^1, \dots, \alpha_y^m\}$ é tal que

$$I_{G, \text{sb}, y}^1 \oplus \mathbb{W}_y = I_y^1.$$

Ademais, seja $\tilde{B}_0 = \{Z_1, \dots, Z_{n-m}\} \subset \mathcal{D}(U)$, ponto a ponto linearmente independente, tal que, para todo $y \in U$, o subespaço $\mathbb{Z}_y := \{Z_{1y}, \dots, Z_{(n-m)y}\}$ é tal que

$$\text{span}B_0|_y \oplus \mathbb{Z}_y = T_yU.$$

Usando novamente a transversalidade da ação, vemos que $\text{span}B_0 \cap \text{ann}(\text{span}\tilde{B}_1) = \{0\}$. Em particular, o referencial $\overline{B}_1 := \{\bar{\alpha}^1, \dots, \bar{\alpha}^m\}$ dual a B_0 está contido em $\text{span}\tilde{B}_1|_{\text{span}B_0}$. Ou seja, podemos definir o subconjunto $B_1 \subset \text{span}\tilde{B}_1 \subset \Gamma(I^1|_U)$, composto por m 1-formas diferenciais tais que $B_1|_{\text{span}B_0} = \overline{B}_1$. Em particular, B_1 é ponto a ponto linearmente independente, de maneira que podemos, sem perda de generalidade, supor que $B_1 = \tilde{B}_1$. Assim, por construção, o conjunto $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \{\alpha^i, \theta^j, \omega^s\} \subset \Omega^1(U)$ constitui um referencial local de $\Lambda^1(M)$ que satisfaz as propriedades enunciadas. \square

Teorema 4.25. *Sejam M uma variedade n -dimensional e G um grupo de simetrias m -dimensional de um SDE $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$. Suponha que a ação de G em M é regular e transversal a \mathcal{I} . Nessas condições, para cada $x \in M$, há uma vizinhança aberta U de x na qual se definem um referencial local $\{\alpha^i, \theta^j, \omega^1, \dots, \omega^{n-r_1}\} \subset \Omega^1(U)$ e formas diferenciais ponto a ponto linearmente independentes $\beta^{u_k} \in \Omega^k(U)$ tais que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{I}|_U = \langle \alpha^i, \theta^j, \beta^{u_k} \rangle_{\text{alg}} \\ I_{G,\text{sb}}^1|_U = \text{span}\{\theta^j\} \\ I_{G,\text{sb}}^k|_U = \text{span}\{\beta^{u_k}, \omega^{s_1} \wedge \dots \wedge \omega^{s_{k-1}} \wedge \theta^j, \dots, \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^k\} \end{array} \right. ,$$

em que $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq r_1 - m$, $1 \leq u_k \leq d_k$, $1 \leq s_1 < \dots < s_k \leq n - r_1$ e $1 \leq k \leq n$.

Em particular, para todo $k = 1, \dots, n$, $I_{G,\text{sb}}^k \subset \Lambda^k(M)_{G,\text{sb}}$ é um subfibrado de dimensão constante igual a

$$\text{rk}(I_{G,\text{sb}}^k) = d_k + \binom{n-m}{k} - \binom{n-r_1}{k}.$$

Demonstração. Sejam $x \in M$ e $U \subset M$ uma vizinhança aberta suficientemente pequena de x . Pela Proposição 4.23, se $k > n - r_1$, então $(I^k \equiv 0 \text{ mod } I^1)|_U$. Dessa forma, para descrevermos $\mathcal{I}|_U$, precisamos calcular I^1 e $(I^k \text{ mod } I^1)|_U$ para todo $2 \leq k \leq n - r_1$. Nesse sentido, adotamos o referencial local $\{\alpha^i, \theta^j, \omega^s\} \subset \Omega^1(U)$ de $\Lambda^1(M)$ fornecido pela Proposição 4.24. Logo, $\{\theta^j\}$ é referencial local de $I_{G,\text{sb}}^1$ e $\{\alpha^i, \theta^j\}$ é um referencial local de I^1 . Em particular, $I_{G,\text{sb}}^1|_U = \text{span}\{\theta^j\}$ e $(I^k \text{ mod } I^1)|_U \subset \text{span}\{\omega^{s_1} \wedge \dots \wedge \omega^{s_k}\}$. Assim, sendo que $d_k := \text{rk}(I^k \text{ mod } I^1)|_U$, temos que, para todo $u_k = 1, \dots, d_k$ e para toda escolha de índices $1 \leq s_1 < \dots < s_k \leq n - r_1$, existem funções suaves $A_{s_1 \dots s_k}^{u_k} \in C^\infty(U)$ tais que as k -formas diferenciais

$$\beta^{u_k} := \sum_{1 \leq s_1 < \dots < s_k \leq n-r_1} A_{s_1 \dots s_k}^{u_k} \omega^{s_1} \wedge \dots \wedge \omega^{s_k}, \quad u_k = 1, \dots, d_k,$$

definem uma base para $(I^k \bmod I^1)|_U$. Desse modo, lembrando-se novamente de que $\{\alpha^i, \theta^j\}$ constitui um referencial local de I^1 , vemos que, para cada $\beta \in \mathcal{I}^k|_U$, existem funções suaves $C_{u_k} \in C^\infty(U)$ e $(k-1)$ -formas diferenciais $\mu^i, \nu^j \in \Omega^{k-1}(U)$ tais que

$$\beta = \sum_{i=1}^m \mu^i \wedge \alpha^i + \sum_{j=1}^{r_1-m} \nu^j \wedge \theta^j + \sum_{u_k=1}^{d_k} C_{u_k} \beta^{u_k}.$$

Dessa maneira, podemos concluir que $\mathcal{I}|_U = \langle \alpha^i, \theta^j, \beta^{u_k} \rangle_{\text{alg}}$.

Ademais, com $k = 1, \dots, n$, sendo que $\{\theta^j, \omega^s\}$ é um referencial local de $\Lambda^1(M)_{G, sb}$, o conjunto

$$R_k := \{\omega^{s_1} \wedge \dots \wedge \omega^{s_k}, \omega^{s_1} \wedge \dots \wedge \omega^{s_{k-1}} \wedge \theta^j, \dots, \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^k\} \subset \Lambda^k(U)_{G, sb}$$

é um subconjunto ponto a ponto linearmente independente. Além disso, pelo Lema 2.26,

$$rk(\text{span} R_k) = \sum_{a+b=k} \binom{n-r_1}{a} \binom{r_1-m}{b} = \binom{n-m}{k} = rk(\Lambda^k(U)_{G, sb})$$

e, portanto, $\text{span} R_k = \Lambda^k(U)_{G, sb}$. Assim, tendo em vista que R_k e $\{\alpha^i, \theta^j, \omega^s\}$ são, respectivamente, referenciais locais de $\Lambda^k(M)_{G, sb}$ e $\Lambda^1(M)$, podemos calcular:

$$\begin{aligned} I_{G, sb}^k|_U &= (\Lambda^k(M)_{G, sb} \cap I^k)|_U \\ &= (\text{span}\{\omega^{s_1} \wedge \dots \wedge \omega^{s_k}\} \cap I^k|_U) \oplus \text{span}\{\omega^{s_1} \wedge \dots \wedge \omega^{s_{k-1}} \wedge \theta^j, \dots, \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^k\} \\ &= (I^k \bmod I^1)|_U \oplus \text{span}\{\omega^{s_1} \wedge \dots \wedge \omega^{s_{k-1}} \wedge \theta^j, \dots, \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^k\} \\ &= \text{span}\{\beta^{u_k}\} \oplus \text{span}\{\omega^{s_1} \wedge \dots \wedge \omega^{s_{k-1}} \wedge \theta^j, \dots, \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^k\} \\ &= \text{span}\{\beta^{u_k}, \omega^{s_1} \wedge \dots \wedge \omega^{s_{k-1}} \wedge \theta^j, \dots, \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^k\}. \end{aligned}$$

Em particular, observando-se que

$$\{\beta^{u_k}, \omega^{s_1} \wedge \dots \wedge \omega^{s_{k-1}} \wedge \theta^j, \dots, \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^k\} = \{\beta^{u_k}\} \cup (R_k \setminus \{\omega^{s_1} \wedge \dots \wedge \omega^{s_k}\}),$$

obtemos que $rk(I_{G, sb}^k) = d_k + \binom{n-m}{k} - \binom{n-r_1}{k}$. Logo, pelo Teorema 2.22, $I_{G, sb}^k := \Lambda^k(M)_{G, sb} \cap I^k$ é um subfibrado de dimensão $d_k + \binom{n-m}{k} - \binom{n-r_1}{k}$, $k = 1, \dots, n$. \square

Note que, pelo modo com o qual definimos a redução de subfibrados, se a redução de I^k pela ação regular de um grupo de simetrias G , $I^k/G \subset \Lambda^k(M/G)$, define um subfibrado, então podemos afirmar que o espaço das seções do subfibrado I^k/G coincide com a k -ésima componente homogênea do sistema reduzido \mathcal{I}/G , i.e.,

$$(\mathcal{I}/G)^k = \Gamma(I^k/G).$$

Assim, se a ação de G é transversal a \mathcal{I} , o Teorema 4.25 assegura que $I_{G, sb}^k$ é um subfibrado de dimensão constante. Daí, pelo Lema 4.20, I^k/G é um subfibrado de dimensão constante e, portanto, obtemos o

Corolário 4.26. *Seja $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$ um SDE que satisfaz a propriedade de posto constante, e seja G um grupo de simetrias de \mathcal{I} . Suponha que a ação de G em M é regular e transversal a \mathcal{I} . Nessas condições, o SDE reduzido \mathcal{I}/G satisfaz a propriedade de posto constante.*

Sucessivamente, note também que, pelo Teorema 4.25 e pelo Lema 4.20, $I_{G, \text{sb}}^k$ e I^k/G são subfibrados de mesma dimensão. Assim, o Lema 4.20 revela que, em abertos suficientemente pequenos $U \subset M$, os fibrados $I_{G, \text{sb}}^k|_U$ são gerados por conjuntos de formas diferenciais G -básicas, obtidas via o pullback $(\mathbf{q}_G|_U)^*$ de formas diferenciais que descrevem seções de $(I^k/G)|_{\mathbf{q}_G(U)}$. A partir do Lema 2.11, podemos constatar que

$$\Gamma((I^k/G)|_{\mathbf{q}_G(U)}) = \Gamma(I^k/G)|_{\mathbf{q}_G(U)} = (\mathcal{I}/G)^k|_{\mathbf{q}_G(U)}.$$

Analogamente, sempre tomando U como sendo um aberto suficientemente diminuto, decorre do Lema 2.11 que

$$\Gamma(I_{G, \text{sb}}^k|_U) = \Gamma(I_{G, \text{sb}}^k)|_U = \mathcal{I}_{G, \text{sb}}^k|_U$$

e, assim, $\mathcal{I}_{G, \text{sb}}^k|_U$ é o $C^\infty(U)$ -módulo dado por todas as possíveis combinações lineares finitas das formas diferenciais G -básicas que geram $I_{G, \text{sb}}^k|_U$. Assim,

$$\mathcal{I}_{G, \text{sb}}^k|_U = \left\langle (\mathbf{q}_G|_U)^*((\mathcal{I}/G)^k|_{\mathbf{q}_G(U)}) \right\rangle_{\text{alg}} \cap \Omega^k(U). \quad (4.14)$$

Mas, utilizando as notações do Teorema 4.25, podemos escrever

$$\mathcal{I}|_U = \langle \alpha^i, \mathcal{I}_{G, \text{sb}}^1|_U, \dots, \mathcal{I}_{G, \text{sb}}^n|_U \rangle_{\text{alg}}. \quad (4.15)$$

Desse modo, aplicando (4.14) em (4.15), vemos que o Teorema 4.25 admite o seguinte

Corolário 4.27. *Seja G um grupo de simetrias de um SDE $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$. Suponha que a ação de G em M é regular e transversal a \mathcal{I} . Nessas condições, para cada $x \in M$, há uma vizinhança aberta U de x na qual se definem formas diferenciais ponto a ponto linearmente independentes $\{\mu^a\}_a \subset \Omega^1(U)$, e formas diferenciais ponto a ponto linearmente independentes $\{\nu^b, \tau^c\}_{b,c} \subset (\mathcal{I}/G)|_{\mathbf{q}_G(U)}$, tais que o conjunto $\{\mu^a, \mathbf{q}_G^*(\nu^b), \mathbf{q}_G^*(\tau^c)\}_{a,b,c}$ é ponto a ponto linearmente independente e*

$$\begin{cases} \mathcal{I}|_U = \langle \mu^a, \mathbf{q}_G^*(\nu^b), \mathbf{q}_G^*(\tau^c) \rangle_{\text{alg}}, \\ (\mathcal{I}/G)|_{\mathbf{q}_G(U)} = \langle \nu^b, \tau^c \rangle_{\text{alg}}, \\ I_{G, \text{sb}}^1|_U = \text{span}\{\mathbf{q}_G^*(\nu^b)\}_b. \end{cases} \quad (4.16)$$

Um conjunto $\{\mu^a, \mathbf{q}_G^*(\nu^b), \mathbf{q}_G^*(\tau^c)\}_{a,b,c}$ tal como descrito no Corolário 4.27 é dito ser um *conjunto de geradores algébricos adaptados à ação do grupo de simetrias G* .

Finalmente, destacamos aqui mais um corolário do Teorema 4.25, que é particularmente útil para a determinação de uma base local de \mathcal{I}/G .

Corolário 4.28. *Seja \mathcal{I} um SDE algebricamente gerado pelas suas primeiras k componentes homogêneas, e seja G um grupo de simetrias com ação regular e transversal ao sistema \mathcal{I} . Então, para todo ponto $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ na qual $\mathcal{I}|_U$ é algebricamente gerado por uma base*

$$\mathcal{B}(U) = \{\alpha^i, \theta^j, \beta^{u_2}, \dots, \beta^{u_k}\},$$

em que $\{\alpha^i, \theta^j\} \subset \Omega^1(U)$, $\{\theta^i\} \subset \Omega^1(U)_{G, sb}$ e $\{\beta^{u_h}\} \subset \Omega^h(U)_{G, sb}$, para todo $h = 2, \dots, k$. Em particular, $\mathcal{I}_{G, sb}(U)$ é algebricamente gerado pela base

$$\mathcal{B}_{G, sb} = \{\theta^j, \beta^{u_2}, \dots, \beta^{u_k}\}.$$

Além disso, para toda seção local $\sigma : \bar{U} \rightarrow U$ de \mathbf{q}_G , o SDE quociente $\bar{\mathcal{I}} := \mathcal{I}/G$ é algebricamente gerado por

$$\bar{\mathcal{B}}(\bar{U}) = \sigma^*(\mathcal{B}_{G, sb}(U)).$$

Pode-se também provar (veja [2]) que o quociente $\bar{\mathcal{I}}$ de um SDE Pfaffiano \mathcal{I} é ainda Pfaffiano se, e somente se, além de transversal ao sistema \mathcal{I} , a ação de G for também transversal ao sistema Pfaffiano derivado $I^{(1)}$ (isto é, $\text{ann}I^{(1)} \cap \Gamma_G = \{0\}$). Nesse caso, se o posto de \mathcal{I} for r , e se q for a dimensão das órbitas de G , teremos que $r - q$ é o posto de $\bar{\mathcal{I}}$.

Esses resultados podem ser ilustrados pelo seguinte exemplo.

Exemplo 4.29. *Seja o fibrado*

$$\begin{aligned} \pi: \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, u, v) &\longmapsto (x, y) \end{aligned} .$$

O sistema de duas equações diferenciais parciais no plano

$$\begin{cases} u_y = 0 \\ v_x = 0 \end{cases}$$

descreve uma subvariedade 6-dimensional $\mathcal{E} \subset J^1(\pi)$, com coordenadas internas $\{x, y, u, v, u_x, v_y\}$, que pode ser identificada com \mathbb{R}^6 . Nesse caso, o SDE de Cartan restrito ao sistema de equações é dado por

$$\mathcal{C}_{sde}^1(\mathcal{E}) = \langle du - u_x dx, dv - v_y dy, dx \wedge du_x, dy \wedge dv_y \rangle_{alg} \subset \Omega^*(\mathbb{R}^6).$$

Note que $\mathcal{C}_{sde}^1(\mathcal{E})$ é invariante sob a ação do grupo $G = \mathbb{R}$ que translada simultaneamente as variáveis dependentes u e v ,

$$\begin{aligned} \mu: \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^6 &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ (a, x, y, u, v, u_x, v_y) &\longmapsto (x, y, a + u, a + v, u_x, v_y) \end{aligned} .$$

Dessa forma, observe que todas as órbitas da ação podem ser identificadas com \mathbb{R}^5 e, mais ainda, a projeção canônica se escreve como

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_G: \quad \mathbb{R}^6 &\longrightarrow \mathbb{R}^5 \\ (x, y, u, v, u_x, v_y) &\longmapsto (x, y, w, w_x, w_y) \end{aligned} ,$$

com $w := u - v$, $w_x := u_x$ e $w_y := -v_y$. De fato, a ação de G é regular. Além disso, vemos que a álgebra de Lie dos campos vetoriais fundamentais da ação é dada por

$$\Gamma_G = \text{span}\{\partial_u + \partial_v\}.$$

Veja que, como $(\partial_u + \partial_v) \lrcorner (du - v_x dx) = 1 \neq 0$ e $(\partial_u + \partial_v) \lrcorner (dv - v_y dy) = 1 \neq 0$, a ação de G em \mathbb{R}^6 é transversal ao sistema $\mathcal{C}_{sde}^1(\mathcal{E})$. Assim, podemos calcular a redução de $\mathcal{C}_{sde}^1(\mathcal{E})$ por G via os pullbacks das 1-formas e 2-formas diferenciais G -semibásicas em $\mathcal{C}_{sde}^1(\mathcal{E})$ relativamente a uma seção de \mathfrak{q}_G . Com efeito, podemos usar a seção

$$\begin{aligned} \sigma : \quad \mathbb{R}^5 & \longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ (x, y, w, w_x, w_y) & \mapsto (x, y, w, 0, w_x, -w_y) \end{aligned}$$

e a seguinte base

$$\mathcal{B}_{G, sb} = \{du - dv - u_x dx + v_y dy, dx \wedge du_x, dy \wedge dv_y\}$$

para as formas semibásicas do SDE $\mathcal{C}_{sde}^1(\mathcal{E})$. Assim, aplicando-se o pullback relativamente à seção σ , vemos que o sistema reduzido $\mathcal{C}_{sde}^1(\mathcal{E})/G$ resulta ser

$$\mathcal{C}_{sde}^1(\mathcal{E})/G = \langle dw - w_x dx - w_y dy, dx \wedge dw_x, dy \wedge dw_y \rangle_{alg} \subset \Omega^*(\mathbb{R}^5). \quad (4.17)$$

É fácil ver que as variedades integrais do sistema reduzido com condição de independência $dx \wedge dy$ descrevem soluções da **equação de onda**,

$$u_{xy} = 0.$$

Também é interessante observar que o SDE (4.17) não é Pfaffiano, pois a ação não é transversal ao SDE derivado, que nesse caso é nulo.

Capítulo 5

Transformações de Bäcklund Via Redução por Simetrias

Com base nos resultados do último capítulo, podemos agora discutir o tema principal deste trabalho, que é o método de Anderson e Fels [3, 4, 5] para obter transformações de Bäcklund por meio de diferentes reduções de um mesmo sistema diferencial exterior.

5.1 Extensões Integráveis

A noção de *extensão integrável* (ou *recobrimento diferenciável*) é matematicamente bastante recente, pois foi desenvolvida na década de 80 do século XX nos trabalhos de I. S. Krasil'shchik e A. M. Vinogradov [19, 20], motivados pelos trabalhos de F. B. Estabrook e H. D. Wahlquist [29, 30] sobre a noção de estrutura de prolongamento. O leitor interessado pode encontrar uma discussão detalhada da relação entre a noção de extensão integrável e aquela de estrutura de prolongamento no Capítulo 6 de [17]. Mais recentemente, esta noção foi adaptada ao contexto dos sistemas diferenciais exteriores por T. Ivey e J. M. Landsberg, que em [15] adotam a seguinte

Definição 5.1 (*Extensão Integrável*). *Sejam M, N variedades suaves, $\mathbf{p} : N \rightarrow M$ uma submersão e $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$ um SDE. Dizemos que um SDE $\mathcal{K} \subset \Omega^*(N)$ é uma **extensão integrável** de \mathcal{I} se existe um subfibrado $J \subset \Lambda^1(N)$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

(P1) J tem dimensão constante igual a $\text{rk}(J) = \dim N - \dim M$;

(P2) J é transversal à \mathbf{p} ;

(P3) $\mathcal{K} = \langle \Gamma(J) \cup \mathbf{p}^*(\mathcal{I}) \rangle_{\text{alg}}$.

Ademais, um subfibrado $J \subset \Lambda^1(N)$ para o qual valem as propriedades (P1), (P2) e (P3) é dito ser um **subfibrado admissível** à extensão \mathcal{K} .

Do ponto de vista notacional, podemos condensar o fato de que um SDE $\mathcal{K} \subset \Omega^*(N)$ é extensão integrável de um SDE $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$, relativamente a uma submersão $\mathbf{p} \in C^\infty(N, M)$, ao escrevermos que $\mathbf{p} : (N, \mathcal{K}) \longrightarrow (M, \mathcal{I})$ é uma extensão integrável.

Proposição 5.2. *Sejam $\mathbf{p} : (N, \mathcal{K}) \longrightarrow (M, \mathcal{I})$ uma extensão integrável e $J \subset \Lambda^1(N)$ um subfibrado admissível para essa extensão. São válidas as seguintes asserções:*

1. $\Lambda^1(N) = J \oplus \mathbf{p}^*(\Lambda^1(M))$;
2. $K^1 = J \oplus \mathbf{p}^*(I^1)$;
3. Qualquer subfibrado complementar a $\mathbf{p}^*(I^1)$ em K^1 é admissível;
4. Se \mathcal{I} é Pfaffiano, então \mathcal{K} é Pfaffiano;
5. Se \mathcal{I} é completamente integrável, então \mathcal{K} é completamente integrável.

Demonstração. **Prova de 1** Sejam $x \in N$ e $\alpha \in J_x \cap \mathbf{p}^*(\Lambda^1(M))_x$. Existe $\tilde{\alpha} \in \Lambda_x^1(M)$ tal que $\alpha = \mathbf{p}_x^*(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha} \circ \mathbf{p}_{*x}$ e, dessa forma, vemos que $\ker \mathbf{p}_{*x} \subset \ker \alpha$. Além disso, por construção, $\text{ann} J_x \subset \ker \alpha$. Somando-se a isso o fato de que J é transversal a \mathbf{p} , podemos escrever:

$$\text{ann} J_x \oplus \ker \mathbf{p}_{*x} \subset \ker \alpha. \quad (5.1)$$

Por outro lado, é um simples resultado de Álgebra Linear o fato de que a dimensão do anulador de um dado espaço vetorial é igual à codimensão de tal espaço vetorial. Assim, sendo que $rk(J) = \dim N - \dim M$,

$$\dim \text{ann} J_x = \dim M. \quad (5.2)$$

Ademais, sendo \mathbf{p} submersão,

$$\dim \ker \mathbf{p}_{*x} = \dim N - \dim M. \quad (5.3)$$

Logo, de (5.1), (5.2) e (5.3), obtemos que $\dim \ker \alpha \geq \dim M = \dim \Lambda_x^1(M)$ e, assim,

$$\alpha = 0.$$

Ou seja,

$$J_x \cap \mathbf{p}^*(\Lambda^1(M))_x = \{0\}. \quad (5.4)$$

Para concluirmos, observe que, pelo Lema 2.26,

$$\dim \mathbf{p}^*(\Lambda^1(M))_x = \dim M. \quad (5.5)$$

Lembrando-se uma vez mais do fato de que $rk(J) = \dim N - \dim M$, obtemos de (5.4) e (5.5) que $rk(J \oplus \mathbf{p}^*(\Lambda^1(M))) \geq \dim N = \dim \Lambda_x^1(N)$ e, portanto,

$$\Lambda_x^1(N) = J_x \oplus \mathbf{p}^*(\Lambda^1(M))_x.$$

Prova de 2 Por 1, temos que $J \cap \mathbf{p}^*(I^1) = \{0\}$. Além disso, para todos $x \in N$ e $T \in J_x \oplus \mathbf{p}^*(I^1)_x$, pelo fato de que J e $\mathbf{p}^*(I^1)$ são fibrados vetoriais, existem 1-formas diferenciais $\alpha \in \Gamma(J) \subset \mathcal{K}^1 = \Gamma(K^1)$ e $\beta \in \mathbf{p}^*(I^1) \subset \mathcal{K}^1$ tais que $T = \alpha_x + \beta_x \in K_x^1$.

Reciprocamente, dados $x \in N$ e $T \in K_x^1$, existem 1-formas diferenciais $\omega \in \mathcal{K}^1$, $\alpha \in \Gamma(J)$ e $\beta_1, \dots, \beta_h \in \mathbf{p}^*(\mathcal{I})$, e funções suaves $f_1, \dots, f_h \in C^\infty(N)$, tais que $\omega = \alpha + \sum_{i=1}^h f_i \beta_i$ e $T = \omega_x$. Daí, $T = \alpha_x + \sum_{i=1}^h f_i(x) \beta_x^i \in J_x \oplus \mathbf{p}^*(I^1)_x$.

Prova de 3 Seja $B \subset \Lambda^1(N)$ um subfibrado complementar a $\mathbf{p}^*(I^1)$ em K^1 . Por 2, temos que $\dim B = \dim N - \dim M$, ou seja, B satisfaz a propriedade (P1) da Definição 5.1.

Agora, para cada $x \in N$, tome $\xi \in \text{ann}B_x \cap \ker \mathbf{p}_{*x}$. Por um lado, pelo fato de que B é complementar a $\mathbf{p}^*(I^1)$ em K^1 , temos que, para cada $T \in K_x$, existem $T_1 \in B_x$ e $T_2 \in I_x^1$ tais que $T = T_1 + \mathbf{p}_x^*(T_2) = T_1 + T_2 \circ \mathbf{p}_{*x}$, de sorte que $T(\xi) = T_1(\xi) + T_2 \circ \mathbf{p}_{*x}(\xi) = 0 + 0 = 0$. Ou seja, $\xi \in \text{ann}K_x$. Por outro lado, a partir de 2, obtemos $T_3 \in J_x$ e $T_4 \in I_x^1$ tais que $T = T_3 + \mathbf{p}_x^*(T_4) = T_3 + T_4 \circ \mathbf{p}_{*x}$, de sorte que $0 = T(\xi) = T_3(\xi) + T_4 \circ \mathbf{p}_{*x}(\xi) = T_3(\xi)$. Daí, pela generalidade de $T \in K_x$, vemos que $\xi \in \text{ann}J_x$. Por fim, para cada $\tilde{T} \in \Lambda_x^1(N)$, usando 1, obtemos $\tilde{T}_1 \in J_x$ e $\tilde{T}_2 \in \Lambda_x^1(M)$ tais que $\tilde{T} = \tilde{T}_1 + \mathbf{p}_x^*(\tilde{T}_2) = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 \circ \mathbf{p}_{*x}$, de sorte que $\tilde{T}(\xi) = \tilde{T}_1(\xi) + \tilde{T}_2 \circ \mathbf{p}_{*x}(\xi) = 0 + 0 = 0$. Ou seja, $\xi \in \text{ann}\Lambda_x^1(N) = \{0\}$ e, portanto, $\text{ann}(B_x) \cap \ker \mathbf{p}_{*x} = \{0\}$, mostrando assim que B satisfaz a propriedade (P2) da Definição 5.1.

Para finalizarmos, verificaremos a terceira propriedade que conceitua as extensões integráveis. Com efeito, veja que $\mathcal{K}^1 = \Gamma(B \oplus \mathbf{p}^*(I^1)) \supset \Gamma(B)$. Assim, imediatamente vemos que $\langle \Gamma(B) \cup \mathbf{p}^*(\mathcal{I}) \rangle_{\text{alg}} \subset \mathcal{K} = \langle \Gamma(J) \cup \mathbf{p}^*(\mathcal{I}) \rangle_{\text{alg}}$. Por outro lado, fixada uma 1-forma diferencial $\omega \in \Gamma(J) \subset \mathcal{K}^1$, observamos que, pelo fato de K^1 ser soma direta dos subfibrados B e $\mathbf{p}^*(I^1)$, estão bem definidas as aplicações

$$\begin{aligned} \alpha: N &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto \alpha_x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \beta: N &\longrightarrow \mathbf{p}^*(I^1) \\ x &\longmapsto \beta_x \end{aligned},$$

em que, para todo $x \in N$, $\omega_x = \alpha_x + \beta_x$. Além disso, α e β são suaves, posto que ω é suave. Desse modo, $\omega = \alpha + \beta$, com $\alpha \in \Gamma(B)$ e $\beta \in \Gamma(\mathbf{p}^*(I^1))$. Mas, pelo fato de que $\Gamma(\mathbf{p}^*(I^1)) \subset \mathcal{K}^1 = \Gamma(J) + \mathbf{p}^*(\mathcal{I})$, vemos que há 1-formas diferenciais $\beta^1 \in \Gamma(J)$ e $\beta^2 \in \mathcal{I}^1$ tais que $\beta = \beta^1 + \mathbf{p}^*(\beta^2)$. Para todo $x \in N$, $\beta_x = \beta_x^1 + \left(\mathbf{p}^*(\beta^2)\right)_x$, em que $\beta_x^1 \in J_x$ e $\left(\mathbf{p}^*(\beta^2)\right)_x \in \mathbf{p}^*(I^1)_x$, de sorte que, por 2, $\beta_x^1 = 0$. Logo, $\beta = \mathbf{p}^*(\beta^2) \in \mathbf{p}^*(\mathcal{I})$. Ou seja, podemos escrever $\omega = \alpha + \beta \in \Gamma(B) + \mathbf{p}^*(\mathcal{I})$. Desse modo, obtemos que $\Gamma(J) \subset \Gamma(B) + \mathbf{p}^*(\mathcal{I})$, de onde vemos que $\mathcal{K} = \langle \Gamma(J) \cup \mathbf{p}^*(\mathcal{I}) \rangle_{\text{alg}} \subset \langle \Gamma(B) \cup \mathbf{p}^*(\mathcal{I}) \rangle_{\text{alg}}$, mostrando assim que B satisfaz a propriedade (P3) da Definição 5.1.

Portanto, o subfibrado B é admissível para a extensão integrável $\mathbf{p}: (N, \mathcal{K}) \longrightarrow (M, \mathcal{I})$.

Prova de 4 Por 2, já temos que $\mathcal{K} \supset \langle \Gamma(K^1) \rangle_{\text{diff}} = \langle \Gamma(J \oplus \mathbf{p}^*(I^1)) \rangle_{\text{diff}}$. Por outro lado, sendo \mathcal{I} um SDE pfaffiano, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \langle \Gamma(J) \cup \mathbf{p}^*(\mathcal{I}) \rangle_{\text{alg}}, \text{ usando a propriedade (P3) de 5.1,} \\
&= \langle \Gamma(J) \cup \mathbf{p}^*(\mathcal{I}) \rangle_{\text{diff}}, \text{ pois } \mathcal{K} \text{ é um ideal diferencial,} \\
&= \langle \Gamma(J) \cup \mathbf{p}^*(\langle \Gamma(I^1) \rangle_{\text{diff}}) \rangle_{\text{diff}}, \text{ usando aqui que } \mathcal{I} \text{ é Pfaffiano,} \\
&\subset \langle \Gamma(J) \cup \langle \mathbf{p}^*(\Gamma(I^1)) \rangle_{\text{diff}} \rangle_{\text{diff}}, \text{ pela naturalidade do pullback,} \\
&= \langle \Gamma(J) \cup \mathbf{p}^*(\Gamma(I^1)) \rangle_{\text{diff}} \\
&\subset \langle \Gamma(J) \cup \Gamma(\mathbf{p}^*(I^1)) \rangle_{\text{diff}}, \text{ pois } \mathbf{p}^*(\Gamma(I^1)) \subset \Gamma(\mathbf{p}^*(I^1)), \\
&\subset \langle \Gamma(J \oplus \mathbf{p}^*(I^1)) \rangle_{\text{diff}}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, $\mathcal{K} = \langle \Gamma(J \oplus \mathbf{p}^*(I^1)) \rangle_{\text{diff}}$ e, portanto, \mathcal{K} é Pfaffiano.

Prova de 5 Verificamos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \langle \Gamma(J) \cup \mathbf{p}^*(\mathcal{I}) \rangle_{\text{alg}}, \text{ usando a propriedade (P3) de 5.1,} \\
&= \langle \Gamma(J) \cup \mathbf{p}^*(\langle \mathcal{I}^1 \rangle_{\text{diff}}) \rangle_{\text{alg}}, \text{ pois } \mathcal{I} \text{ é Pfaffiano,} \\
&= \langle \Gamma(J) \cup \mathbf{p}^*(\langle \mathcal{I}^1 \rangle_{\text{alg}}) \rangle_{\text{alg}}, \text{ usando aqui a completa integrabilidade de } \mathcal{I}, \\
&\subset \langle \Gamma(J) \cup \langle \mathbf{p}^*(\mathcal{I}^1) \rangle_{\text{alg}} \rangle_{\text{alg}}, \text{ pela naturalidade do pullback,} \\
&= \langle \Gamma(J) \cup \mathbf{p}^*(\mathcal{I}^1) \rangle_{\text{alg}} \\
&\subset \mathcal{K}, \text{ usando a propriedade (P3) de 5.1.}
\end{aligned}$$

Decorre disso que $\langle \Gamma(J) \cup \mathbf{p}^*(\mathcal{I}^1) \rangle_{\text{alg}} = \mathcal{K} = \langle \mathcal{K}^1 \rangle_{\text{alg}}$ e, portanto, o sistema \mathcal{K} é completamente integrável. \square

Proposição 5.3. *Seja $\mathbf{p} : (N, \mathcal{K}) \rightarrow (M, \mathcal{I})$ uma extensão integrável. Se $h : P \rightarrow N$ é uma variedade integral de \mathcal{K} , então $\mathbf{p} \circ h : P \rightarrow M$ é uma variedade integral de \mathcal{I} .*

Demonstração. Seja $\theta \in \mathcal{I}$. Logo, $\mathbf{p}^*(\theta) \in \mathcal{K}$ e, como h é variedade integral de \mathcal{K} , temos que $0 = h^*(\mathbf{p}^*(\theta)) = (\mathbf{p} \circ h)^*(\theta)$. Para concluirmos, temos de mostrar que $\mathbf{p} \circ h$ é uma imersão. Com efeito, dados $x \in P$ e $\xi \in \ker(\mathbf{p} \circ h)_x$, obtemos da Regra da Cadeia que

$$0 = (\mathbf{p} \circ h)_{*x}(\xi) = \mathbf{p}_{*h(x)} \circ h_{*x}(\xi)$$

e, assim,

$$h_{*x}(\xi) \in \ker \mathbf{p}_{*h(x)}. \quad (5.6)$$

Por outro lado, dado $T \in K_{h(x)}^1$, pelo fato de que \mathcal{K} satisfaz a propriedade de posto constante, podemos aplicar a Proposição 2.18 para o fibrado vetorial K^1 , de modo a extrairmos $\omega \in \mathcal{K}^1$ tal que $T = \omega_{h(x)}$. Daí, sendo que h é variedade integral de \mathcal{K} ,

$$T(h_{*x}(\xi)) = \omega_{h(x)}(h_{*x}(\xi)) = h^*(\omega)_x(\xi) = 0.$$

Assim, inferimos que

$$h_{*x}(\xi) \in \text{ann}K_{h(x)}^1. \quad (5.7)$$

Ademais, note que, sendo J um subfibrado admissível à extensão integrável, $J \subset K^1$ e, portanto, K^1 é transversal à submersão \mathbf{p} . Assim, por (5.6), (5.7) e pela transversalidade de K^1 com respeito à submersão \mathbf{p} ,

$$h_{*x}(\xi) \in \ker \mathbf{p}_{*h(x)} \cap \text{ann}K_{h(x)}^1 = \{0\},$$

de modo que

$$h_{*x}(\xi) = 0.$$

Mas, como h é imersão,

$$\xi = 0.$$

Dessa forma, vemos que $\mathbf{p} \circ h$ é uma imersão e, portanto, uma variedade integral do sistema diferencial exterior \mathcal{I} . \square

Reciprocamente, na presença de uma extensão integrável $\mathbf{p} : (N, \mathcal{K}) \longrightarrow (M, \mathcal{I})$, podemos localmente reconstruir variedades integrais do sistema \mathcal{K} a partir das variedades integrais do sistema \mathcal{I} . De fato, considere uma variedade integral $\tilde{h} : P \longrightarrow M$ de \mathcal{I} , $W := \mathbf{p}^{-1}(\tilde{h}(P)) \subset N$ e a restrição $\mathcal{K}|_W$, supondo que $W \neq \emptyset$. Para todo $y \in P$, pelo fato de que \tilde{h} é localmente um mergulho, $\tilde{h}_{*y} : T_y P \longrightarrow T_{\tilde{h}(y)} \tilde{h}(P)$ é um isomorfismo linear. Desse modo, fixados quaisquer $k \geq 1$, $\beta \in \mathcal{I}^k$, $x \in W$ e $\xi_1, \dots, \xi_k \in T_x W$, existem $y \in P$ e $\eta_1, \dots, \eta_k \in T_x W$ tais que:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^*(\beta)_x(\xi_1, \dots, \xi_k) &= \beta_{\mathbf{p}(x)}(\mathbf{p}_{*x}\xi_1, \dots, \mathbf{p}_{*x}\xi_k) \\ &= \beta_{\tilde{h}(y)}(\tilde{h}_{*y}\eta_1, \dots, \tilde{h}_{*y}\eta_k) \\ &= \tilde{h}^*(\beta)_y(\eta_1, \dots, \eta_k) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, tomando a variedade P pequena o suficiente para que $W \subset N$ seja uma subvariedade mergulhada, decorre da propriedade (P3) referente à noção de extensão integrável que $\mathcal{K}|_W \subset \langle \Gamma(\pi|_{\pi^{-1}(W)}) \rangle_{\text{alg}} \subset \Omega^1(W)$, em que $\pi : J \subset \Lambda^1(N) \longrightarrow N$ é um subfibrado admissível para a extensão \mathcal{K} . Observe que, pela Proposição 2.14, $\pi|_{\pi^{-1}(W)}$ de fato define um fibrado, no qual a fibra padrão coincide com a de π . Mais ainda, sabemos que $\pi|_{\pi^{-1}(W)}$ admite um conjunto de trivializações locais provenientes de restrições de trivializações locais do subfibrado de dimensão constante π e, dessa forma, $\pi|_{\pi^{-1}(W)}$ é um fibrado vetorial real de dimensão constante. Por outro lado, por meio da segunda asserção da Proposição 5.2, temos que $\mathcal{K}|_W \supset \langle \mathcal{K}^1|_W \rangle_{\text{alg}} = \langle \Gamma(K^1)|_W \rangle_{\text{alg}} \supset \langle \Gamma(\pi|_{\pi^{-1}(W)}) \rangle_{\text{alg}}$. Ou seja, $\mathcal{K}|_W = \langle \Gamma(\pi|_{\pi^{-1}(W)}) \rangle_{\text{alg}}$, de sorte que $\mathcal{K}|_W$ é completamente integrável. Dessa maneira, a partir das variedades integrais do sistema \mathcal{I} , é possível localmente determinar variedades integrais da extensão \mathcal{K} por meio da integração de sistemas de equações diferenciais ordinárias.

Exemplo 5.4 (sine-Gordon). Neste exemplo, apresentaremos uma extensão integrável da equação **sine-Gordon**, equação diferencial da segunda ordem dada por

$$\mathcal{E} := \{u_{xy} = \text{sen}(u)\} \subset J^2(\pi),$$

em que $\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ projeta (x, y, u) em (x, y) .

Com efeito, fixado $\eta \neq 0$, considere a subvariedade

$$\mathcal{E}_\eta := \left\{ \bar{u}_x = u_x + 2\eta \text{sen}\left(\frac{u + \bar{u}}{2}\right), \quad \bar{u}_y = \frac{2}{\eta} \text{sen}\left(\frac{\bar{u} - u}{2}\right) - u_y \right\} \subset J^1(\tilde{\pi}),$$

em que $\tilde{\pi} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a projeção nas variáveis independentes, $\tilde{\pi}(x, y, u, \bar{u}) = (x, y)$. O espaço de 1-jatos $J^1(\tilde{\pi})$ é descrito pelas coordenadas $\{x, y, u, \bar{u}, u_x, u_y, \bar{u}_x, \bar{u}_y\}$ e, dessa forma, $\dim J^1(\tilde{\pi}) = 8$ e $\dim \mathcal{E}_\eta = 6$. Assim, consideramos a submersão

$$\begin{aligned} \mathbf{p}: \quad \mathcal{E}_\eta &\longrightarrow J^1(\pi) \\ (x, y, u, \bar{u}, u_x, u_y) &\longmapsto (x, y, u, u_x, u_y) \end{aligned}$$

em que as formas diferenciais $\omega_0, \alpha \in \Omega^*(J^1(\pi))$ e $\bar{\omega}_0 \in J^1(\tilde{\pi})$ são dadas por

$$\begin{cases} \omega_0 := du - u_x dx - u_y dy, \\ \bar{\omega}_0 := d\bar{u} - \bar{u}_x dx - \bar{u}_y dy, \\ \alpha := 1/2(du_y \wedge dy - du_x \wedge dx) - \text{sen}(u) dx \wedge dy. \end{cases}$$

Afirmamos que, com respeito à submersão \mathbf{p} , o sistema diferencial exterior

$$\mathcal{K} := \langle \bar{\omega}_0|_{\mathcal{E}_\eta}, \mathbf{p}^*(\omega_0), \mathbf{p}^*(\alpha) \rangle_{\text{diff}} \subset \Omega^*(\mathcal{E}_\eta)$$

é extensão integrável do SDE

$$\mathcal{I} := \langle \omega_0, \alpha \rangle_{\text{diff}} \subset \Omega^*(J^1(\pi)).$$

Note que o Exemplo 4.12 revela que o SDE com condição de independência $(\mathcal{I}, dx \wedge dy)$, por meio das suas variedades integrais, descreve soluções locais de \mathcal{E} . Para visualizarmos \mathcal{K} como extensão integrável de \mathcal{I} , o nosso candidato a subfibrado admissível será $J := \text{span}\{\bar{\omega}_0|_{\mathcal{E}_\eta}\}$. A seguir, conferimos a validade das propriedades (P1), (P2) e (P3) para esse J .

(P1) Imediatamente da definição de $J \subset \Lambda^1(\mathcal{E}_\eta)$, vemos que J é um subfibrado de dimensão constante igual a $\text{rk}(J) = 1 = \dim \mathcal{E}_\eta - \dim J^1(\pi)$.

(P2) Note que $\text{ann}J = \ker \bar{\omega}_0|_{\mathcal{E}_\eta}$ e $\ker \mathbf{p}_* = \text{span}\{\partial_{\bar{u}}\}$. Daí, sendo que $\partial_{\bar{u}} \lrcorner \bar{\omega}_0|_{\mathcal{E}_\eta} = 1 \neq 0$, $\ker \mathbf{p}_* \cap \text{ann}J = \{0\}$.

(P3) Veja que $\Gamma(J) = \{f \cdot \bar{\omega}_0|_{\mathcal{E}_\eta} \mid f \in C^\infty(\mathcal{E}_\eta)\}$, logo, é claro que $\langle \Gamma(J) \cup \mathbf{p}^*(\mathcal{I}) \rangle_{\text{alg}} \subset \mathcal{K}$. Por outro lado, é imediato ver que $\bar{\omega}_0|_{\mathcal{E}_\eta}, \mathbf{p}^*(\omega_0), \mathbf{p}^*(\alpha), d\mathbf{p}^*(\omega_0), d\mathbf{p}^*(\alpha) \in \Gamma(J) \cup \mathbf{p}^*(\mathcal{I})$. Além disso, é fácil verificar que $d\bar{\omega}_0|_{\mathcal{E}_\eta} \in \langle \Gamma(J) \cup \mathbf{p}^*(\mathcal{I}) \rangle_{\text{alg}}$, visto que

$$d\bar{\omega}_0|_{\mathcal{E}_\eta} = 2\mathbf{p}^*\alpha - \eta \cos\left(\frac{u + \bar{u}}{2}\right) (\mathbf{p}^*\omega_0 + \bar{\omega}_0|_{\mathcal{E}_\eta}) \wedge dx - \frac{1}{\eta} \cos\left(\frac{u - \bar{u}}{2}\right) (\bar{\omega}_0|_{\mathcal{E}_\eta} - \mathbf{p}^*\omega_0) \wedge dy.$$

Desse modo, $\mathcal{K} \subset \langle \Gamma(J) \cup \mathbf{p}^*(\mathcal{I}) \rangle_{\text{alg}}$.

Vejam agora a maneira com a qual se pode relacionar soluções da sine-Gordon com soluções da equação \mathcal{E}_η . De fato, $u = 0$ é uma solução da sine-Gordon e, a partir dela, podemos obter uma solução de \mathcal{E}_η ao integrar o seguinte sistema de EDOs da primeira ordem:

$$\begin{cases} \left(\frac{\bar{u}}{2}\right)_x = \eta \operatorname{sen}\left(\frac{\bar{u}}{2}\right), \\ \left(\frac{\bar{u}}{2}\right)_y = \frac{1}{\eta} \operatorname{sen}\left(\frac{\bar{u}}{2}\right). \end{cases} \quad (5.8)$$

Para resolvermos a primeira EDO em (5.8), fazemos o seguinte:

$$\int \frac{d\left(\frac{\bar{u}}{2}\right)}{\eta \operatorname{sen}\left(\frac{\bar{u}}{2}\right)} = \int dx,$$

ou seja,

$$\frac{1}{\eta} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\bar{u}}{4}\right) \right| = x + \tilde{h}(y).$$

Isso equivale a

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\bar{u}}{4}\right) = e^{\eta x + h(y)}$$

e, supondo que $-2\pi < \bar{u} < 2\pi$, temos que

$$\bar{u} = 4 \operatorname{arctg}(e^{\eta x + h(y)}).$$

Assim, de acordo com a segunda EDO em (5.8),

$$h(y) = (1/\eta)y + c,$$

com $c \in \mathbb{R}$. Portanto, com $-2\pi < \bar{u} < 2\pi$,

$$u = 0, \quad \bar{u} = 4 \operatorname{arctg}(e^{\eta x + y/\eta + c}), \quad c \in \mathbb{R},$$

é uma família de soluções do sistema de equações diferenciais \mathcal{E}_η .

Exemplo 5.5 (KdV). Com coordenadas $\{x, y, u, u_x, u_{xx}, t, \bar{u}\}$ em \mathbb{R}^7 , consideramos a submersão

$$\begin{aligned} \mathbf{p}: \quad \mathbb{R}^7 &\longrightarrow \mathbb{R}^5 \\ (x, y, u, u_x, u_{xx}, t, \bar{u}) &\longmapsto (x, y, u, u_x, u_{xx}) \end{aligned}$$

e as formas diferenciais $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \Omega^*(\mathbb{R}^5)$, $dt, \eta \in \Omega^*(\mathbb{R}^7)$, dadas por:

$$\begin{cases} \theta_1 := (du - u_x dx) \wedge dy, \\ \theta_2 := (u_{xx} dx - du_x) \wedge dy, \\ \theta_3 := (du_{xx} + uu_x dx) \wedge dy + du \wedge dx, \\ \eta := 18d\bar{u} + (18\bar{u}^2 + 3u - 18t)dx + (3u_{xx} - 6\bar{u}u_x + (u + 12t)(6\bar{u}^2 + u - 6t))dy. \end{cases}$$

Afirmamos que, com respeito à submersão \mathbf{p} , o sistema diferencial exterior

$$\mathcal{K} := \langle dt, \eta, \mathbf{p}^*(\theta_1), \mathbf{p}^*(\theta_2), \mathbf{p}^*(\theta_3) \rangle_{\text{diff}} \subset \Omega^*(\mathbb{R}^7)$$

é extensão integrável do SDE

$$\mathcal{I} := \langle \theta_1, \theta_2, \theta_3 \rangle_{\text{diff}} \subset \Omega^*(\mathbb{R}^5).$$

Note que o Exemplo 4.14 revela que o SDE com condição de independência $(\mathcal{I}, dx \wedge dy)$, por meio das suas variedades integrais, descreve soluções da KdV. Agora, para visualizarmos \mathcal{K} como extensão integrável de \mathcal{I} , o nosso candidato a subfibrado admissível será $J := \text{span}\{dt, \eta\}$. A seguir, conferimos a validade das propriedades (P1), (P2) e (P3) para esse J .

(P1) Imediatamente da definição de $J \subset \Lambda^1(\mathbb{R}^7)$, vemos que J é um subfibrado de dimensão constante igual a $\text{rk}(J) = 2 = \dim \mathbb{R}^7 - \dim \mathbb{R}^5$.

(P2) Note que $\text{ann}J = \ker dt \cap \ker \eta$ e $\ker \mathbf{p}_* = \text{span}\{\partial_t, \partial_{\bar{u}}\}$. Para todos $a, b \in \mathbb{R}$, vale que:

$$\begin{cases} (a\partial_t + b\partial_{\bar{u}}) \lrcorner dt = a, \\ (a\partial_t + b\partial_{\bar{u}}) \lrcorner \eta = 18b. \end{cases}$$

Consequentemente, $\text{ann} J \cap \ker \mathbf{p}_* = \{0\}$.

(P3) $J := \text{span}\{dt, \eta\} = \text{span}\{dt\} \oplus \text{span}\{\eta\}$, logo, $\Gamma(J) = \{f \cdot dt + g \cdot \eta \mid f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^7)\}$. Desse modo, é claro que $\langle \Gamma(J) \cup \mathbf{p}^*(\mathcal{I}) \rangle_{\text{alg}} \subset \mathcal{K}$. Por outro lado, é imediato ver que $dt, \eta, \mathbf{p}^*(\theta_1), \mathbf{p}^*(\theta_2), \mathbf{p}^*(\theta_3), d\mathbf{p}^*(\theta_1), d\mathbf{p}^*(\theta_2), d\mathbf{p}^*(\theta_3) \in \langle \Gamma(J) \cup \mathbf{p}^*(\mathcal{I}) \rangle_{\text{alg}}$. Além disso, pode-se verificar que

$$\begin{aligned} d\eta &= 2\bar{u}\eta \wedge dx + \left(\frac{2\bar{u}(u + 12t) - u_x}{3} \right) \eta \wedge dy + (6\bar{u}^2 + 2u + 6t)\theta_1 + \\ &\quad + 6\bar{u}\theta_2 + 3\theta_3 + 6 \left(3dx + (u + 12t + 2(6t - 6\bar{u}^2 - u))dy \right) \wedge dt, \end{aligned}$$

de sorte que $d\eta \in \langle \Gamma(J) \cup \mathbf{p}^*(\mathcal{I}) \rangle_{\text{alg}}$ e, portanto, $\mathcal{K} \subset \langle \Gamma(J) \cup \mathbf{p}^*(\mathcal{I}) \rangle_{\text{alg}}$.

5.2 Definição de Transformação de Bäcklund

Adaptando ao contexto dos sistemas diferenciais exteriores a definição de transformação de Bäcklund dada por Krasil'shchick e Vinogradov em [19, 20] (veja também [17]), T. Ivey e J. M. Landsberg adotaram em [15] a seguinte

Definição 5.6 (Transformação de Bäcklund). Dizemos que um SDE $\mathcal{B} \subset \Omega^*(N)$ é uma **transformação de Bäcklund** entre os SDEs $\mathcal{I}_1 \subset \Omega^*(M_1)$ e $\mathcal{I}_2 \subset \Omega^*(M_2)$ se existem duas extensões integráveis $\mathbf{p}_i : (N, \mathcal{B}) \rightarrow (M_i, \mathcal{I}_i)$, $i = 1, 2$.

Esquemáticamente, para denotar que o SDE $\mathcal{B} \subset \Omega^*(N)$ define uma transformação de Bäcklund entre os SDEs $\mathcal{I}_1 \subset \Omega^*(M_1)$ e $\mathcal{I}_2 \subset \Omega^*(M_2)$, usaremos um diagrama

$$\begin{array}{ccc} & (N, \mathcal{B}) & \\ \swarrow \mathbf{p}_1 & & \searrow \mathbf{p}_2 \\ (M_1, \mathcal{I}_1) & & (M_2, \mathcal{I}_2). \end{array}$$

A importância da transformação de Bäcklund \mathcal{B} reside no fato dela estabelecer uma relação entre as variedades integrais de \mathcal{I}_1 e \mathcal{I}_2 . De fato, como já observamos, usando \mathbf{p}_1 , podemos localmente levantar variedades integrais do sistema \mathcal{I}_1 em variedades integrais de \mathcal{B} e, sucessivamente, utilizar a submersão \mathbf{p}_2 para transformar tais variedades integrais em variedades integrais do sistema \mathcal{I}_2 . Analogamente, o mesmo procedimento pode ser feito ao contrário, i.e., levantar localmente variedades integrais de \mathcal{I}_2 para determinar variedades integrais de \mathcal{B} e, por fim, utilizar a submersão \mathbf{p}_1 para transformar tais variedades integrais em variedades integrais de \mathcal{I}_1 .

Exemplo 5.7 (sine-Gordon). *A partir do Exemplo 5.4, iremos descrever uma autotransformação de Bäcklund da sine-Gordon, isto é, uma transformação de Bäcklund da sine-Gordon em si mesma. De fato, utilizando as notações do Exemplo 5.4, considere $N := \mathcal{E}_\eta$, $\mathcal{B} := \mathcal{K}$, $\mathbf{p}_1 := \mathbf{p}$, $M_1 := J^1(\pi)$ e $\mathcal{I}_1 := \mathcal{I}$, de modo que $\mathbf{p}_1 : (N, \mathcal{B}) \rightarrow (M_1, \mathcal{I}_1)$ é uma extensão integrável da sine-Gordon. Analogamente, considere o fibrado*

$$\begin{array}{ccc} \bar{\pi} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, \bar{u}) & \mapsto & (x, y) \end{array},$$

a submersão

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}_2 : \mathcal{E}_\eta & \longrightarrow & J^1(\bar{\pi}) \\ (x, y, u, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y) & \mapsto & (x, y, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y) \end{array},$$

a variedade suave $M_2 := J^1(\bar{\pi})$, e o sistema diferencial exterior $\mathcal{I}_2 := \langle \bar{\omega}_0, \bar{\alpha} \rangle_{diff} \subset \Omega^*(M_2)$, em que $\bar{\alpha} := 1/2(d\bar{u}_y \wedge dy - d\bar{u}_x \wedge dx) - \text{sen}(\bar{u})dx \wedge dy$. De modo inteiramente análogo àquele realizado no Exemplo 5.4, vemos que \mathbf{p}_2 também é uma extensão integrável da sine-Gordon. Ou seja, \mathcal{K} é uma autotransformação de Bäcklund da sine-Gordon. Esquemáticamente, temos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & (\mathcal{E}_\eta, \mathcal{K}) & \\ \swarrow \mathbf{p}_1 & & \searrow \mathbf{p}_2 \\ (J^1(\pi), \mathcal{I}_1) & & (J^1(\bar{\pi}), \mathcal{I}_2) \end{array}.$$

5.3 Construção de Transformações de Bäcklund

5.3.1 Diagramas Comutativos

Nesta seção, reunimos alguns resultados técnicos preliminares sobre diagramas comutativos.

Começamos com a seguinte

Proposição 5.8. *Seja*

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\mathbf{p}_1} & N \\ & \searrow \mathbf{p}_3 & \downarrow \mathbf{p}_2 \\ & & M \end{array}$$

um diagrama comutativo de variedades suaves no qual \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 e \mathbf{p}_3 são aplicações suaves, sendo \mathbf{p}_1 uma submersão sobrejetiva. Temos que

$$\ker \mathbf{p}_{2*} = \mathbf{p}_{1*}(\ker \mathbf{p}_{3*}).$$

Demonstração. Fixe $x \in P$. Dado $\xi \in \mathbf{p}_{1*x}(\ker \mathbf{p}_{3*x})$, existe $\eta \in \ker \mathbf{p}_{3*x}$ tal que $\xi = \mathbf{p}_{1*x}(\eta)$, de sorte que, pela Regra da Cadeia,

$$\mathbf{p}_{2*\mathbf{p}_1(x)}(\xi) = \mathbf{p}_{2*\mathbf{p}_1(x)} \circ \mathbf{p}_{1*x}(\eta) = (\mathbf{p}_2 \circ \mathbf{p}_1)_{*x}(\eta) = \mathbf{p}_{3*x}(\eta) = 0,$$

ou seja, $\xi \in \ker \mathbf{p}_{2*\mathbf{p}_1(x)}$. Por outro lado, para cada $\eta \in \ker \mathbf{p}_{2*\mathbf{p}_1(x)}$, pelo fato de que \mathbf{p}_1 é uma submersão, existe $\xi \in T_x P$ tal que $\mathbf{p}_{1*x}(\xi) = \eta$. Daí, usando novamente a Regra da Cadeia,

$$\mathbf{p}_{3*x}(\xi) = (\mathbf{p}_2 \circ \mathbf{p}_1)_{*x}(\xi) = \mathbf{p}_{2*\mathbf{p}_1(x)} \circ \mathbf{p}_{1*x}(\xi) = \mathbf{p}_{2*\mathbf{p}_1(x)}(\eta) = 0,$$

ou seja, $\xi \in \ker \mathbf{p}_{3*x}$ e, portanto, $\eta \in \mathbf{p}_{1*x}(\ker \mathbf{p}_{3*x})$. Portanto, concluímos que

$$\ker \mathbf{p}_{2*\mathbf{p}_1(x)} = \mathbf{p}_{1*x}(\ker \mathbf{p}_{3*x}), \quad \forall x \in P.$$

Daí, pela sobrejetividade de \mathbf{p}_1 , podemos escrever $\ker \mathbf{p}_{2*} = \mathbf{p}_{1*}(\ker \mathbf{p}_{3*})$, como desejado. □

Lema 5.9. *Seja \mathcal{I} um SDE definido em uma variedade suave P , e seja*

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\mathbf{p}_1} & N \\ & \searrow \mathbf{p}_3 & \downarrow \mathbf{p}_2 \\ & & M \end{array}$$

um diagrama comutativo de variedades suaves no qual \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_3 são submersões sobrejetivas. Nessas condições, \mathbf{p}_2 é uma submersão sobrejetiva e vale que

$$(\mathcal{I}/\mathbf{p}_1)/\mathbf{p}_2 = \mathcal{I}/\mathbf{p}_3.$$

Demonstração. A sobrejetividade de \mathbf{p}_2 é uma imediata consequência da sobrejetividade de \mathbf{p}_1 e da sobrejetividade de \mathbf{p}_3 . Agora, aplicando a Observação 2.7 à submersão sobrejetiva \mathbf{p}_1 , vemos que, para cada $x \in N$, temos uma seção (local) suave $\sigma : U \subset N \rightarrow P$ definida em uma vizinhança aberta de x e, desse modo, a partir de $\mathbf{p}_2 \circ \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_3$, obtemos

$$\mathbf{p}_2|_U = \mathbf{p}_3 \circ \sigma \in C^\infty(U, M).$$

Portanto, pela generalidade do ponto $x \in N$, $\mathbf{p}_2 \in C^\infty(N, M)$. Assim sendo, para cada $y \in P$, pela Regra da Cadeia, podemos escrever $(\mathbf{p}_2)_{*\mathbf{p}_1(y)} \circ \mathbf{p}_{1*y} = \mathbf{p}_{3*y}$, de modo que a sobrejetividade de $(\mathbf{p}_2)_{*\mathbf{p}_1(y)}$ advém da sobrejetividade de \mathbf{p}_{1*y} e da sobrejetividade de \mathbf{p}_{3*y} . Agora, sendo que \mathbf{p}_1 é sobrejetiva e o ponto $y \in P$ é arbitrário, obtemos que \mathbf{p}_2 é submersão.

Para concluirmos, basta repetidamente aplicarmos a definição de redução de SDEs. Com efeito,

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}/\mathbf{p}_1)/\mathbf{p}_2 &= \{\theta \in \Omega^*(M) \mid \mathbf{p}_2^*(\theta) \in \mathcal{I}/\mathbf{p}_1\} \\ &= \{\theta \in \Omega^*(M) \mid \mathbf{p}_1^* \circ \mathbf{p}_2^*(\theta) \in \mathcal{I}\} \\ &= \{\theta \in \Omega^*(M) \mid (\mathbf{p}_2 \circ \mathbf{p}_1)^*(\theta) \in \mathcal{I}\} \\ &= \{\theta \in \Omega^*(M) \mid \mathbf{p}_3^*(\theta) \in \mathcal{I}\} \\ &= \mathcal{I}/\mathbf{p}_3. \end{aligned}$$

□

Definição 5.10. *Sejam $\mathcal{K} \subset \Omega^*(M_1)$, $\mathcal{J} \subset \Omega^*(M_2)$ e $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M_3)$ sistemas diferenciais exteriores e $\mathbf{p}_1 \in C^\infty(M_1, M_2)$, $\mathbf{p}_2 \in C^\infty(M_2, M_3)$ e $\mathbf{p}_3 \in C^\infty(M_1, M_3)$ submersões. Dizemos que*

$$\begin{array}{ccc} (M_1, \mathcal{I}) & \xrightarrow{\mathbf{p}_1} & (M_2, \mathcal{J}) \\ & \searrow \mathbf{p}_3 & \downarrow \mathbf{p}_2 \\ & & (M_3, \mathcal{K}) \end{array}$$

é um **diagrama comutativo de SDEs** se são válidas as seguintes afirmações:

1. $\mathbf{p}_2 \circ \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_3$;
2. $\mathcal{J} = \mathcal{I}/\mathbf{p}_1$;
3. $\mathcal{K} = \mathcal{J}/\mathbf{p}_2 = \mathcal{I}/\mathbf{p}_3$.

Lema 5.11. *Seja G um grupo de simetrias de um SDE $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$ tal que G age regularmente em M , e seja $H \subset G$ um subgrupo de G que também age regularmente em M . Nessas condições, a **aplicação orbital***

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}: M/H & \longrightarrow & M/G \\ Hx & \mapsto & Gx \end{array}$$

é uma submersão sobrejetiva, por meio da qual

$$\begin{array}{ccc} (M, \mathcal{I}) & \xrightarrow{q_H} & (M/H, \mathcal{I}/H) \\ & \searrow q_G & \downarrow p \\ & & (M/G, \mathcal{I}/G) \end{array}$$

define um diagrama comutativo de SDEs.

Demonstração. Pela regularidade das ações dos grupos de Lie G e H sobre M , obtemos imediatamente que

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{q_H} & M/H \\ & \searrow q_G & \downarrow p \\ & & M/G \end{array}$$

é um diagrama comutativo de variedades suaves no qual q_H e q_G são submersões sobrejetivas. Daí, pelo Lema 5.9, p é uma submersão sobrejetiva e

$$\begin{array}{ccc} (M, \mathcal{I}) & \xrightarrow{q_H} & (M/H, \mathcal{I}/H) \\ & \searrow q_G & \downarrow p \\ & & (M/G, \mathcal{I}/G) \end{array}$$

define um diagrama comutativo de SDEs. □

Observamos que, a partir do Teorema 1.2, pode-se mostrar que o subgrupo $H \subset G$ do Lema 5.11 age regularmente se, e somente se, H é fechado em G .

Corolário 5.12. *Sejam $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$ um SDE, G_1 e G_2 grupos de simetria de \mathcal{I} , e H um subgrupo tanto de G_1 como de G_2 . Suponha que as ações de G_1 , G_2 e H sobre M sejam regulares. Nessas condições, as aplicações orbitais $p_1 : M/H \rightarrow M/G_1$ e $p_2 : M/H \rightarrow M/G_2$ são submersões sobrejetivas e*

$$\begin{array}{ccccc} & & (M, \mathcal{I}) & & \\ & \swarrow & \downarrow q_H & \searrow & \\ & & (M/H, \mathcal{I}/H) & & \\ & \swarrow p_1 & & \searrow p_2 & \\ (M/G_1, \mathcal{I}/G_1) & & & & (M/G_2, \mathcal{I}/G_2) \end{array}$$

é um diagrama comutativo de SDEs.

Demonstração. Basta aplicar o Lema 5.11 para $H \subset G_1$ e $H \subset G_2$.

□

5.3.2 Transformações de Bäcklund

Em termos das extensões integráveis, o Corolário 4.27 imediatamente implica o seguinte resultado fundamental.

Teorema 5.13. *Seja G um grupo de simetrias de um sistema diferencial exterior $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$. Suponha que G age regularmente em M e transversalmente ao SDE \mathcal{I} . Nessas condições, temos que \mathcal{I} é uma extensão integrável do SDE reduzido \mathcal{I}/G .*

Assim, a partir desse resultado, podemos também provar o seguinte outro

Teorema 5.14. *Seja G um grupo de simetrias de um SDE $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$. Suponha que a ação de G em M é regular e transversal ao sistema \mathcal{I} , e suponha também que $H \subset G$ é um subgrupo fechado de Lie. Com respeito à aplicação orbital*

$$\begin{aligned} \mathbf{p}: M/H &\longrightarrow M/G \\ Hx &\longmapsto Gx \end{aligned} \quad ,$$

\mathcal{I}/H é uma extensão integrável de \mathcal{I}/G .

Demonstração. Começamos observando que, pela transversalidade da ação de G em M , também temos que a ação de H em M é transversal ao sistema \mathcal{I} . Desse modo, pelo Corolário 4.22, I^1/G e I^1/H são subfibrados de dimensão constante, de sorte que podemos considerar um subfibrado de dimensão constante $\overline{K} \subset \Lambda^1(M/H)$ tal que

$$I^1/H = \overline{K} \oplus \mathbf{p}^*(I^1/G). \quad (5.9)$$

Assim, \overline{K} é o nosso candidato a subfibrado admissível e, nesse sentido, verificaremos as propriedades (P1), (P2) e (P3) de uma extensão integrável. Com efeito:

(P1) Por construção, $\overline{K} \subset \Lambda^1(M/H)$ é um subfibrado de dimensão constante e, a partir de (5.9), a sua dimensão pode ser calculada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} rk(\overline{K}) &= rk((I^1/H)) - rk(\mathbf{p}^*(I^1/G)) \\ &= rk((I^1/H)) - rk((I^1/G)) \\ &= \dim G - \dim H \\ &= (\dim M - \dim H) - (\dim M - \dim G) \\ &= \dim(M/H) - \dim(M/G). \end{aligned}$$

(P2) Para mostrarmos a transversalidade de \mathbf{p} com respeito ao subfibrado \overline{K} , iremos verificar uma certa relação entre as distribuições Γ_G e Γ_H , da qual a transversalidade é obtida como corolário. De fato, seja $K := \mathbf{q}_H^*(\overline{K})$, de modo que $K_{H, sb} = K$. Agora, aplicando a Proposição 5.8 ao diagrama

$$\begin{array}{ccc} (M, \mathcal{I}) & \xrightarrow{\mathbf{q}_H} & (M/H, \mathcal{I}/H) \\ & \searrow \mathbf{q}_G & \downarrow \mathbf{p} \\ & & (M/G, \mathcal{I}/G), \end{array}$$

obtemos que

$$\ker \mathbf{p}_* = \mathbf{q}_{H*}(\Gamma_G). \quad (5.10)$$

Ademais, note que, por definição, $\mathbf{q}_{H*}(\text{ann}K) \subset \text{ann}\overline{K}$ e, mais ainda, pelo fato de que \mathbf{q}_H é uma submersão, $\text{ann}\overline{K} \subset \mathbf{q}_{H*}(\text{ann}K)$. Ou seja, temos a igualdade

$$\mathbf{q}_{H*}(\text{ann}K) = \text{ann}\overline{K}. \quad (5.11)$$

Assim, a partir das equações (5.10) e (5.11), a condição de transversalidade

$$\text{ann}\overline{K} \cap \ker \mathbf{p}_* = \{0\}$$

é equivalente à condição

$$\text{ann}K \cap \Gamma_G \subset \Gamma_H. \quad (5.12)$$

De fato, iremos mostrar que, em (5.12), é válida a igualdade. Nesse sentido, aplicamos o pullback \mathbf{q}_H^* em ambos os lados da equação (5.9). Pelo Lema 2.26,

$$\mathbf{q}_H^*(I^1/H) = \mathbf{q}_H^*(\overline{K}) \oplus \mathbf{q}_H^*(\mathbf{p}^*(I^1/G)). \quad (5.13)$$

Daí, aplicando em (5.13) o Lema 4.20 e o Lema 5.11, obtemos:

$$I_{H, sb}^1 = K \oplus I_{G, sb}^1. \quad (5.14)$$

A partir de (5.14) e das transversalidades das ações de H e G , podemos usar o Corolário 4.22 para calcular a dimensão do subfibrado $K \subset \Lambda^1(M)$ da seguinte maneira:

$$rk(K) = rk(I_{H, sb}^1) - rk(I_{G, sb}^1) = rk(\Gamma_G) - rk(\Gamma_H). \quad (5.15)$$

Assim, podemos usar (5.15) para calcular a dimensão de $\Lambda^1(M)_{H, sb}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} rk(\Lambda^1(M)_{H, sb}) &= \dim M - rk(\Gamma_H) \\ &= rk(\Lambda^1(M)_{G, sb}) + rk(\Gamma_G) - (rk(\Gamma_G) - rk(K)) \\ &= rk(\Lambda^1(M)_{G, sb}) + rk(K). \end{aligned}$$

Note também que, por (5.14), $\Lambda^1(M)_{G, sb} \cap K = \{0\}$. Assim, vemos que

$$\Lambda^1(M)_{H, sb} = \Lambda^1(M)_{G, sb} \oplus K. \quad (5.16)$$

Tomando o anulador de ambos os lados de (5.16), concluímos:

$$\Gamma_H = \text{ann}\Lambda^1(M)_{H,\text{sb}} = \text{ann}\Lambda^1(M)_{G,\text{sb}} \cap \text{ann}K = \Gamma_G \cap \text{ann}K,$$

como queríamos.

(P3) Pelo Teorema 5.13, \mathcal{I} é extensão integrável de \mathcal{I}/G , de modo tal que, usando um conjunto de geradores $\{\mu^a, (\mathbf{q}_G|_U)^*(\nu^b), (\mathbf{q}_G|_U)^*(\tau^c)\}_{a,b,c}$ oriundo do Corolário 4.27, podemos escrever, em abertos $U \subset M$ suficientemente diminutos, o seguinte:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}|_U &= \langle \mu^a, (\mathbf{q}_G|_U)^*(\nu^b), (\mathbf{q}_G|_U)^*(\tau^c) \rangle_{\text{alg}} \\ &= \langle \mu^a, (\mathbf{p} \circ \mathbf{q}_H|_U)^*(\nu^b), (\mathbf{p} \circ \mathbf{q}_H|_U)^*(\tau^c) \rangle_{\text{alg}} \\ &= \langle \mu^a, (\mathbf{q}_H|_U)^* \circ (\mathbf{p}|_{\mathbf{q}_H(U)})^*(\nu^b), (\mathbf{q}_H|_U)^* \circ (\mathbf{p}|_{\mathbf{q}_H(U)})^*(\tau^c) \rangle_{\text{alg}} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Por (5.17) e pela escolha de \overline{K} , obtemos imediatamente que, sendo

$$\mathcal{K}|_{\mathbf{q}_H(U)} := \langle \Gamma(\overline{K}|_{\mathbf{q}_H(U)}) \cup (\mathbf{p}|_{\mathbf{q}_H(U)})^*(\nu^b), (\mathbf{p}|_{\mathbf{q}_H(U)})^*(\tau^c) \rangle_{\text{alg}},$$

$\mathcal{K}|_{\mathbf{q}_H(U)} \subset (\mathcal{I}/H)|_{\mathbf{q}_H(U)}$. Por outro lado, usando novamente (5.17), dados $\theta \in (\mathcal{I}/H)|_{\mathbf{q}_H(U)}$ e uma seção local σ de \mathbf{q}_H definida em $\mathbf{q}_H(U)$, existem formas diferenciais $\alpha^a, \beta^b, \omega^c$ tais que

$$\theta = \sum_a \sigma^*(\alpha^a) \wedge \sigma^*(\mu^a) + \sum_b \sigma^*(\beta^b) \wedge \mathbf{p}^*(\nu^b) + \sum_c \sigma^*(\omega^c) \wedge \mathbf{p}^*(\tau^c). \quad (5.18)$$

Novamente pela forma com a qual escolhemos \overline{K} , veja que, como $J := \text{span}\{\mu^a\}_a \subset I^1|_U$, cada pullback $\sigma^*(\mu^a) \in \Gamma((I^1/H)|_{\mathbf{q}_H(U)})$ se decompõe em uma soma

$$\sigma^*(\mu^a) = \lambda_1^a + \lambda_2^a, \quad \lambda_1^a \in \Gamma(\overline{K}|_{\mathbf{q}_H(U)}), \quad \lambda_2^a \in \Gamma(\mathbf{p}^*(I^1/G)|_{\mathbf{q}_H(U)}). \quad (5.19)$$

Evidentemente, $\Gamma(\overline{K}|_{\mathbf{q}_H(U)}) \subset \mathcal{K}|_{\mathbf{q}_H(U)}$. Ademais, considere uma arbitrária 1-forma diferencial $\Phi \in (\mathcal{I}/G)|_{\mathbf{q}_G(U)} = \langle \nu^b, \tau^c \rangle_{\text{alg}}$. Sendo s uma seção local de \mathbf{q}_G definida em $\mathbf{q}_G(U)$,

$$\mathbf{p}^*\Phi = (\mathbf{q}_G \circ s \circ \mathbf{p})^*\Phi = \mathbf{p}^*s^*\mathbf{q}_G^*\Phi.$$

Perceba agora que, como $\mathbf{q}_G^*\Phi \in \mathcal{I}_{G,\text{sb}}^1|_U$, decorre do Lema que 4.20 que o pullback $s^*\mathbf{q}_G^*\Phi \in (\mathcal{I}/G)|_{\mathbf{q}_G(U)}$ e, portanto, $\mathbf{p}^*\Phi \in \mathcal{K}|_{\mathbf{q}_H(U)}$. Logo,

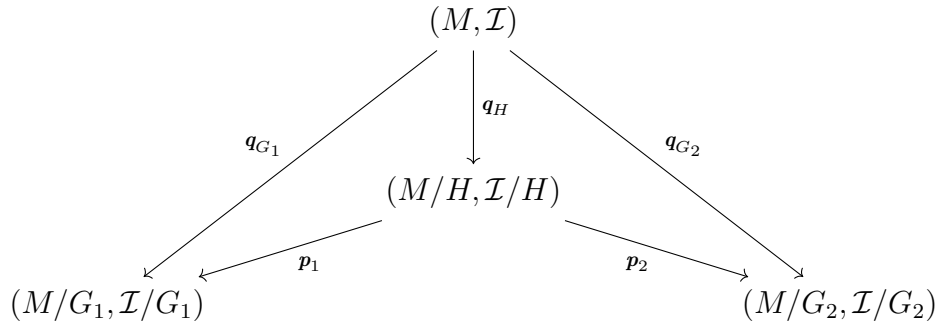
$$\Gamma(\mathbf{p}^*(I^1/G)|_{\mathbf{q}_H(U)}) = \text{span}\{\mathbf{p}^*\Phi \mid \Phi\} \subset \mathcal{K}|_{\mathbf{q}_H(U)}.$$

Assim, aplicando (5.19) em (5.18), vemos que $\theta \in \mathcal{K}|_{\mathbf{q}_H(U)}$ e, dessa maneira, conseguimos concluir que vale (P3), de sorte que \mathcal{I}/H é, segundo a aplicação orbital \mathbf{p} , extensão integrável de \mathcal{I}/G , como queríamos demonstrar.

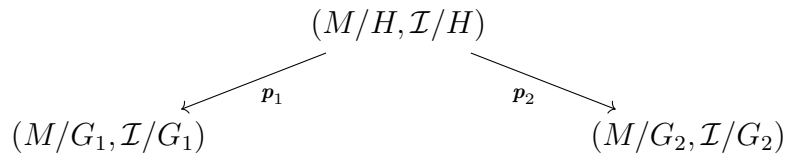
□

Finalmente, apresentamos o resultado principal.

Teorema 5.15. *Sejam $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$ um SDE, G_1 e G_2 grupos de simetria de \mathcal{I} , e H um subgrupo tanto de G_1 como de G_2 . Suponha que as ações de G_1 , G_2 e H sobre M sejam regulares. Nessas condições, as aplicações orbitais $\mathbf{p}_1 : M/H \rightarrow M/G_1$ e $\mathbf{p}_2 : M/H \rightarrow M/G_2$ são submersões sobrejetivas e*



é um diagrama comutativo de SDEs. Além disso, se as ações de G_1 e G_2 são transversais a \mathcal{I} , então todas as aplicações do diagrama comutativo supracitado são extensões integráveis. Em particular, o diagrama



define $\mathcal{I}/H \subset \Omega^*(M/H)$ como sendo uma transformação de Bäcklund entre os sistemas diferenciais exteriores $\mathcal{I}/G_1 \subset \Omega^*(M/G_1)$ e $\mathcal{I}/G_2 \subset \Omega^*(M/G_2)$.

Demonstração. O fato de que as aplicações orbitais são submersões sobrejetivas e a comutatividade do diagrama de SDEs são assegurados pelo Corolário 5.12. Ademais, sob as condições de transversalidade requisitadas, o Teorema 5.13 garante que as submersões \mathbf{q}_{G_1} , \mathbf{q}_H , \mathbf{q}_{G_2} são extensões integráveis, enquanto que o Teorema 5.14 garante que as submersões \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 também são extensões integráveis. \square

A seguir, mostramos como usar o Teorema 5.15 para construir a clássica transformação de Bäcklund entre a equação de onda $u_{xy} = 0$ e a equação de Liouville $u_{xy} = e^u$.

Exemplo 5.16. *Considere a variedade produto $J^2(\pi) \times J^2(\bar{\pi})$, definida por $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, u) \mapsto x \in \mathbb{R}$ e $\bar{\pi} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (\bar{x}, \bar{u}) \mapsto \bar{x} \in \mathbb{R}$, e equipada com coordenadas $\{x, u, u_x, u_{xx}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_{\bar{x}}, \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}\}$. Iremos nos restringir ao aberto*

$$M := \{(x, u, u_x, u_{xx}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_{\bar{x}}, \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}) \in J^2(\pi) \times J^2(\bar{\pi}) \mid u_x > 0, \bar{u}_{\bar{x}} > 0, u + \bar{u} > 0\},$$

e consideraremos a restrição a M da soma direta dos SDEs de Cartan, i.e.,

$$\mathcal{I} := \left(\mathcal{C}_{sde}^2(\pi) + \mathcal{C}_{sde}^2(\bar{\pi}) \right) \Big|_M.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \langle \omega_0, \omega_x, \bar{\omega}_0, \bar{\omega}_{\bar{x}} \rangle_{diff}|_M \\ &= \langle \omega_0, \omega_x, \bar{\omega}_0, \bar{\omega}_{\bar{x}}, d\omega_0, d\omega_x, d\bar{\omega}_0, d\bar{\omega}_{\bar{x}} \rangle_{alg}|_M,\end{aligned}$$

em que $\omega_0 = du - u_x dx$, $\omega_x = du_x - u_{xx} dx$, $\bar{\omega}_0 = d\bar{u} - \bar{u}_{\bar{x}} d\bar{x}$ e $\bar{\omega}_{\bar{x}} = d\bar{u}_{\bar{x}} - \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} d\bar{x}$. Nesse caso, o subgrupo fechado H mencionado no Teorema 5.15 será aquele com álgebra de campos fundamentais

$$\Gamma_H := \text{span}\{X_1 := \partial_{\bar{u}} - \partial_u, X_2 := (u\partial_u)^{(2)} + (\bar{u}\partial_{\bar{u}})^{(2)}\},$$

em que denotamos com

$$(u\partial_u)^{(2)} = u\partial_u + u_x\partial_{u_x} + u_{xx}\partial_{u_{xx}}$$

e

$$(\bar{u}\partial_{\bar{u}})^{(2)} = \bar{u}\partial_{\bar{u}} + \bar{u}_{\bar{x}}\partial_{\bar{u}_{\bar{x}}} + \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}\partial_{\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}}$$

os prolongamentos de $u\partial_u$ e $\bar{u}\partial_{\bar{u}}$, respectivamente, até a segunda ordem. Logo, as funções coordenadas x e \bar{x} são invariantes de ordem zero de Γ_H . Por outro lado, até a primeira ordem (i.e., em $J^1(\pi) \times J^1(\bar{\pi})$), os fluxos de X_1 e X_2 atuam, sobre um ponto $(x^0, u^0, u_x^0, \bar{x}^0, \bar{u}^0, \bar{u}_{\bar{x}}^0)$, respectivamente na forma seguinte:

$$x = x^0, \quad u = u^0 - t, \quad u_x = u_x^0, \quad \bar{x} = \bar{x}^0, \quad \bar{u} = \bar{u}^0 + t, \quad \bar{u}_{\bar{x}} = \bar{u}_{\bar{x}}^0$$

e

$$x = x^0, \quad u = u^0 e^s, \quad u_x = u_x^0 e^s, \quad \bar{x} = \bar{x}^0, \quad \bar{u} = \bar{u}^0 e^s, \quad \bar{u}_{\bar{x}} = \bar{u}_{\bar{x}}^0 e^s,$$

em que t e s são os parâmetros dos respectivos fluxos. Portanto, além dos óbvios invariantes de ordem zero x e \bar{x} , os campos X_1 e X_2 compartilham também os dois seguintes invariantes da primeira ordem e funcionalmente independentes:

$$V := \log\left(\frac{\bar{u}_{\bar{x}}}{u + \bar{u}}\right), \quad W := \log\left(\frac{u_x}{u + \bar{u}}\right).$$

Pois $J^1(\pi) \times J^1(\bar{\pi})$ é 6-dimensional e a ação de H possui órbitas bidimensionais, a independência funcional de $\{x, \bar{x}, V, W\}$ assegura que todo invariante de ordem menor do que dois, relativamente à ação de H , é uma função de (x, \bar{x}, V, W) . Nesse caso, dizemos que $\{x, \bar{x}, V, W\}$ é um **sistema fundamental de invariantes** de ordem menor do que dois.

Por outro lado, $M \subset J^2(\pi) \times J^2(\bar{\pi})$ é 8-dimensional, portanto, para completar $\{x, \bar{x}, V, W\}$ a um sistema fundamental de invariantes de ordem até dois, precisamos de mais dois invariantes de ordem dois. Esses invariantes de ordem superior podem ser facilmente determinados ao observarmos que

$$[X_i, D_x^{(2)}] = [X_i, D_{\bar{x}}^{(2)}] = 0, \quad i = 1, 2,$$

com

$$D_x^{(2)} = \partial_x + u_x\partial_u + u_{xx}\partial_{u_x},$$

$$D_{\bar{x}}^{(2)} = \partial_{\bar{x}} + \bar{u}_{\bar{x}}\partial_{\bar{u}} + \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}\partial_{\bar{u}_{\bar{x}}}.$$

De fato, a partir dessa comutatividade, deduzimos que $D_x^{(2)}$ e $D_{\bar{x}}^{(2)}$ levam invariantes em invariantes e, desse modo, podem ser usados para gerar os seguintes invariantes de ordem dois:

$$\begin{cases} W_x := D_x^{(2)}(W) = \frac{u_{xx}}{u_x} - \frac{u_x}{u + \bar{u}}, \\ V_{\bar{x}} := D_{\bar{x}}^{(2)}(V) = \frac{\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}}{\bar{u}_{\bar{x}}} - \frac{\bar{u}_{\bar{x}}}{u + \bar{u}}. \end{cases} \quad (5.20)$$

Deixamos para o leitor a verificação de que $D_x^{(2)}(W)$ e $D_{\bar{x}}^{(2)}(V)$ são de ordem 1, mais exatamente:

$$\begin{cases} V_x = D_x^{(2)}(V) = -e^W, \\ W_{\bar{x}} = D_{\bar{x}}^{(2)}(W) = -e^V. \end{cases} \quad (5.21)$$

Em breve, verificaremos que (5.21) são, de fato, as equações diferenciais para as variedades integrais admissíveis do sistema quociente \mathcal{I}/H . Na prática, a determinação das relações funcionais entre os invariantes prolongados e os invariantes de ordem inferior pode ser um método alternativo para a descrição do quociente. Em termos do sistema fundamental de invariantes $\{x, \bar{x}, V, W, V_{\bar{x}}, W_x\}$, temos então que

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_H : \quad M &\longrightarrow M/H \\ (x, u, u_x, u_{xx}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_{\bar{x}}, \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}) &\mapsto (x, \bar{x}, V, W, V_{\bar{x}}, W_x) \end{aligned}$$

e, desse modo,

$$\begin{aligned} \sigma(x, \bar{x}, V, W, V_{\bar{x}}, W_x) &= (x = x, u = 0, u_x = e^W, u_{xx} = e^W W_x + e^{2W}, \bar{x} = \bar{x}, \bar{u} = 1, \\ &\bar{u}_{\bar{x}} = e^V, \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} = e^V V_{\bar{x}} + e^{2V}) \end{aligned}$$

é uma seção de \mathbf{q}_H . De fato, observando que $u_x = e^W(u + \bar{u})$ e $\bar{u}_{\bar{x}} = e^V(u + \bar{u})$, a seção σ é determinada pelas escolhas $u = 0$, $\bar{u} = 1$, e pelas expressões (5.20) de $V_{\bar{x}}$ e W_x . Sendo nesse caso a ação de H transversal a \mathcal{I} e $I^{(1)}$, como observado no final do Capítulo 4, teremos que também o SDE quociente \mathcal{I}/H é Pfaffiano. Portanto, para determinar os geradores de \mathcal{I}/H , basta calcularmos o pullback, por σ , das 1-formas H -semibásicas pertencentes ao sistema \mathcal{I} .

Com efeito, observando preliminarmente que

$$I_{H, \text{sb}}^1 = \text{span} \left\{ \theta_{H, \text{sb}}^1 := \frac{1}{\bar{u}_{\bar{x}}} \bar{\omega}_{\bar{x}} - \frac{1}{u_x} \omega_x, \theta_{H, \text{sb}}^2 := \frac{1}{\bar{u}_{\bar{x}}} \bar{\omega}_{\bar{x}} + \frac{1}{u_x} \omega_x - \frac{2}{u + \bar{u}} (\omega_0 + \bar{\omega}_0) \right\},$$

teremos que

$$\begin{aligned} I/H &= \text{span} \{ \sigma^*(\theta_{H, \text{sb}}^1), \sigma^*(\theta_{H, \text{sb}}^2) \} \\ &= \text{span} \left\{ \frac{1}{2} (\sigma^*(\theta_{H, \text{sb}}^1) + \sigma^*(\theta_{H, \text{sb}}^2)), \frac{1}{2} (\sigma^*(\theta_{H, \text{sb}}^1) - \sigma^*(\theta_{H, \text{sb}}^2)) \right\} \\ &= \text{span} \{ dV - V_{\bar{x}} d\bar{x} + e^W dx, dW + e^V d\bar{x} - W_x dx \}. \end{aligned}$$

Dessa maneira, vemos que as variedades integrais de \mathcal{I}/H , com condição de independência $dx \wedge d\bar{x}$, são descritas pelo sistema de equações diferenciais parciais (5.21). Nesse sentido, dizemos que \mathcal{I}/H descreve o sistema (5.21).

Sucessivamente, sempre tendo em vista o Teorema 5.15, o próximo passo é aquele de construir as reduções de \mathcal{I} entre as quais \mathcal{I}/H define uma transformação de Bäcklund.

Tendo em vista esse objetivo, consideramos a seguinte outra álgebra de Lie de simetrias de \mathcal{I} :

$$\Gamma_{G_1} := \text{span}\{X_1, X_2, Z_1 := \partial_u + \partial_{\bar{u}}\}.$$

Nesse caso, um sistema fundamental de invariantes de ordem até dois, relativamente à ação de G_1 , será formado ainda pelos invariantes de ordem zero x e \bar{x} , por um único invariante de ordem um, e dois invariantes de ordem dois. Em particular, em virtude do fato de que $\Gamma_H \subset \Gamma_{G_1}$, o invariante fundamental da primeira ordem de Γ_G é uma função de V e W . De fato, observando que

$$Z_1 \left(\log \left(\frac{\bar{u}_{\bar{x}}}{u + \bar{u}} \right) \right) = \frac{1}{(u + \bar{u})^2} = Z_1 \left(\log \left(\frac{u_x}{u + \bar{u}} \right) \right),$$

deduzimos imediatamente que

$$u_1 := \log \left(\frac{\bar{u}_{\bar{x}}}{u + \bar{u}} \right) - \log \left(\frac{u_x}{u + \bar{u}} \right) = \log \bar{u}_{\bar{x}} - \log u_x = \log \left(\frac{\bar{u}_{\bar{x}}}{u_x} \right) \quad (5.22)$$

é um invariante da primeira ordem de Γ_{G_1} . Além disso, pois as derivadas totais truncadas $D_x^{(2)}$ e $D_{\bar{x}}^{(2)}$ ainda comutam com os campos fundamentais da ação de G_1 em M , deduzimos que

$$u_{1x} := D_x^{(2)}(u_1) = -\frac{u_{xx}}{u_x} \quad (5.23)$$

e

$$u_{1\bar{x}} := D_{\bar{x}}^{(2)}(u_1) = \frac{\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}}{\bar{u}_{\bar{x}}} \quad (5.24)$$

são invariantes da segunda ordem de Γ_{G_1} . Dessa forma, encontramos o sistema fundamental de invariantes de ordem até dois $\{x, \bar{x}, u_1, u_{1x}, u_{1\bar{x}}\}$ da ação de G_1 , em termos do qual

$$\mathfrak{q}_{G_1} : \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M/G_1 \\ (x, u, u_x, u_{xx}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_{\bar{x}}, \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}) & \mapsto & (x, \bar{x}, u_1, u_{1x}, u_{1\bar{x}}) \end{array}.$$

Nesse caso, a ação do grupo de simetrias G_1 é transversal ao sistema \mathcal{I} , mas não é transversal ao sistema derivado $I^{(1)}$ e, portanto, o sistema reduzido \mathcal{I}/G_1 não é Pfaffiano. Assim como na redução anterior, em que observamos que as relações funcionais (5.21) entre os invariantes prolongados fornecem as equações diferenciais para as variedades integrais admissíveis do quociente \mathcal{I}/H , também no caso atual podemos verificar a mesma coisa. De fato, $\{x, \bar{x}, u_1, u_{1x}, u_{1\bar{x}}\}$ é um sistema maximal funcionalmente independente, portanto, $u_{1x\bar{x}} = D_x^{(2)} D_{\bar{x}}^{(2)}(u_1) = D_{\bar{x}}^{(2)} D_x^{(2)}(u_1)$ depende funcionalmente dos anteriores, e um simples cálculo prova que

$$u_{1x\bar{x}} = 0. \quad (5.25)$$

Como verificaremos daqui a pouco, (5.25) é a equação diferencial que descreve as variedades integrais admissíveis de \mathcal{I}/G_1 . Pois esse quociente é não Pfaffiano, encontraremos que \mathcal{I}/G_1 é algebricamente gerado pelas seguintes formas

$$du_1 - u_{1x}dx - u_{1\bar{x}}d\bar{x}, \quad du_{1x} \wedge dx, \quad du_{1\bar{x}} \wedge d\bar{x}.$$

De fato, usando o Corolário 4.28, verificaremos que o sistema quociente \mathcal{I}/G_1 é algebricamente gerado pelo pullback, por meio de uma seção σ_1 de \mathfrak{q}_{G_1} , de 1-formas e 2-formas G_1 -semibásicas em \mathcal{I} .

Com efeito, usando as notações do tipo adotado no Corolário 4.28, observamos preliminarmente que

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \langle \omega_0, \bar{\omega}_0, \omega_x, \bar{\omega}_x, d\omega_0, d\bar{\omega}_0, d\omega_x, d\bar{\omega}_x \rangle_{alg} |_M \\ &= \left\langle \alpha^1 = \omega_0, \alpha^2 = \bar{\omega}_0, \alpha^3 = \frac{1}{u_x}\omega_x + \frac{1}{\bar{u}_x}\bar{\omega}_x, \theta, \beta^1, \beta^2 \right\rangle_{alg} |_M, \end{aligned}$$

com θ, β^1, β^2 semibásicas tais que

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{\bar{u}_x}\bar{\omega}_x - \frac{1}{u_x}\omega_x = d \log \left(\frac{\bar{u}_x}{u_x} \right) - \frac{\bar{u}_{x\bar{x}}}{\bar{u}_x}d\bar{x} + \frac{u_{xx}}{u_x}dx, \\ \beta^1 &= \frac{1}{\bar{u}_x}d\bar{\omega}_x - \frac{\bar{u}_{x\bar{x}}}{\bar{u}_x^2}d\bar{\omega}_0 = \left(-\frac{1}{\bar{u}_x}d\bar{u}_{x\bar{x}} + \frac{\bar{u}_{x\bar{x}}}{\bar{u}_x^2}d\bar{u}_x \right) \wedge d\bar{x}, \\ \beta^2 &= \frac{1}{u_x}d\omega_x - \frac{u_{xx}}{u_x^2}d\omega_0 = \left(-\frac{1}{u_x}du_{xx} + \frac{u_{xx}}{u_x^2}du_x \right) \wedge dx. \end{aligned}$$

Além disso, levando em conta as expressões (5.22), (5.23) e (5.24) de u_1, u_{1x} e $u_{1\bar{x}}$, podemos considerar a seção σ_1 de \mathfrak{q}_{G_1} definida pelas escolhas $u = 0, \bar{u} = 0$ e $\bar{u}_{x\bar{x}} = 1$, i.e.,

$$\sigma_1(x, \bar{x}, u_1, u_{1x}, u_{1\bar{x}}) = \left(x = x, u = 0, u_x = \frac{e^{-u_1}}{u_{1\bar{x}}}, u_{xx} = e^{-u_1} \frac{u_{1x}}{u_{1\bar{x}}}, \bar{x} = \bar{x}, \bar{u}_x = \frac{1}{u_{1\bar{x}}}, \bar{u}_{x\bar{x}} = 1 \right).$$

Assim, obtemos que

$$\begin{cases} \sigma_1^*(\theta) = du_1 - u_{1\bar{x}}d\bar{x} - u_{1x}dx, \\ \sigma_1^*(\beta^1) = -du_{1\bar{x}} \wedge d\bar{x}, \\ \sigma_1^*(\beta^2) = du_{1x} \wedge dx. \end{cases} \quad (5.26)$$

Portanto, como já observamos acima, \mathcal{I}/G_1 é algebricamente gerado pelas formas (5.26), e suas variedades integrais admissíveis são descritas pela equação de onda na forma $u_{1x\bar{x}} = 0$.

Quanto à aplicação orbital \mathbf{p}_1 , da parte esquerda do primeiro diagrama do Teorema 5.15, temos que

$$\mathbf{p}_1 = \mathfrak{q}_{G_1} \circ \sigma,$$

portanto, levando em conta as expressões (5.22), (5.23) e (5.24) de u_1, u_{1x} e $u_{1\bar{x}}$, obtemos a seguinte forma coordenada para essa aplicação:

$$\mathbf{p}_1(x, \bar{x}, V, W, V_{\bar{x}}, W_x) = (x = x, \bar{x} = \bar{x}, u_1 = V - W, u_{1x} = -W_x - e^W, u_{1\bar{x}} = V_{\bar{x}} + e^V).$$

Por outro lado, considere agora

$$Z_2 = u^2 \partial_u + D_x(u^2) \partial_{u_x} + D_x^{(2)}(u^2) \partial_{u_{xx}} - \bar{u}^2 \partial_{\bar{u}} - D_{\bar{x}}(\bar{u}^2) \partial_{\bar{u}_{\bar{x}}} - D_{\bar{x}}^{(2)}(\bar{u}^2) \partial_{\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}}$$

e a álgebra de simetrias de \mathcal{I} dada por

$$\Gamma_{G_2} = \text{span}\{X_1, X_2, Z_2\}.$$

Analogamente ao caso da ação de G_1 em M , os invariantes de Γ_{G_2} podem ser escritos em termos daqueles de Γ_H . De fato, um sistema fundamental de invariantes é representado pelo sistema $\{x, \bar{x}, u_2, u_{2x}, u_{2\bar{x}}\}$, em que

$$\begin{cases} u_2 := \log \left(\frac{2u_x \bar{u}_{\bar{x}}}{(u + \bar{u})^2} \right), \\ u_{2x} := D_x^{(2)}(u_2) = \frac{u_{xx}}{u_x} - \frac{2u_x}{u + \bar{u}}, \\ u_{2\bar{x}} := D_{\bar{x}}^{(2)}(u_2) = \frac{\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}}{\bar{u}_{\bar{x}}} - \frac{2\bar{u}_{\bar{x}}}{u + \bar{u}}. \end{cases} \quad (5.27)$$

Em termos desse sistema de invariantes,

$$\mathfrak{q}_{G_2} : \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M/G_2 \\ (x, u, u_x, u_{xx}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_{\bar{x}}, \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}) & \mapsto & (x, \bar{x}, u_2, u_{2x}, u_{2\bar{x}}) \end{array}.$$

Decorre disso também que o invariante $u_{2x\bar{x}} := D_x^{(2)}(D_{\bar{x}}^{(2)}(u_2)) = D_{\bar{x}}^{(2)}(D_x^{(2)}(u_2))$ depende funcionalmente dos anteriores. Em particular, é fácil verificar que

$$u_{2x\bar{x}} = e^{u_2}. \quad (5.28)$$

Pois novamente, como no caso de G_1 , a ação de G_2 é transversal ao sistema \mathcal{I} mas não ao sistema $I^{(1)}$, teremos que o sistema quociente \mathcal{I}/G_2 é um SDE não Pfaffiano em uma variedade 5-dimensional. Portanto, sendo (5.28) a equação para suas variedades integrais admissíveis, teremos que

$$\mathcal{I}/G_2 = \langle du_2 - u_{2x} dx - u_{2\bar{x}} d\bar{x}, (du_{2x} - e^{u_2} d\bar{x}) \wedge dx, (du_{2\bar{x}} - e^{u_2} dx) \wedge d\bar{x} \rangle_{\text{alg}}|_M.$$

Nesse caso, assim como no caso anterior, esse resultado para os geradores algébricos de \mathcal{I}/G_2 pode ser obtido também usando o Corolário 4.28, determinando um sistema de formas G_2 -semibásicas e, sucessivamente, o pullback dessas formas com relação a uma seção σ_2 de \mathfrak{q}_{G_2} .

Quanto à aplicação orbital \mathfrak{p}_2 , da parte direita do primeiro diagrama do Teorema 5.15, teremos que

$$\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{q}_{G_2} \circ \sigma,$$

portanto, levando em conta as expressões de u_2 , u_{2x} e $u_{2\bar{x}}$ em (5.27), obtemos a seguinte forma coordenada para essa aplicação:

$$\mathbf{p}_2(x, \bar{x}, V, W, V_{\bar{x}}, W_x) = (x = x, \bar{x} = \bar{x}, u_2 = V + W + \log 2, u_{2x} = W_x - e^W, u_{2\bar{x}} = V_{\bar{x}} - e^V).$$

Finalmente, observando que

$$V - W = \log \frac{\bar{u}_{\bar{x}}}{u_x} = u_1$$

e

$$V + W = \log \frac{\bar{u}_{\bar{x}} u_x}{(u + \bar{u})^2} = \log \frac{2\bar{u}_{\bar{x}} u_x}{(u + \bar{u})^2} - \log 2 = u_2 - \log 2,$$

obtemos que

$$V - W = u_1,$$

$$V + W = u_2 - \log 2,$$

i.e.,

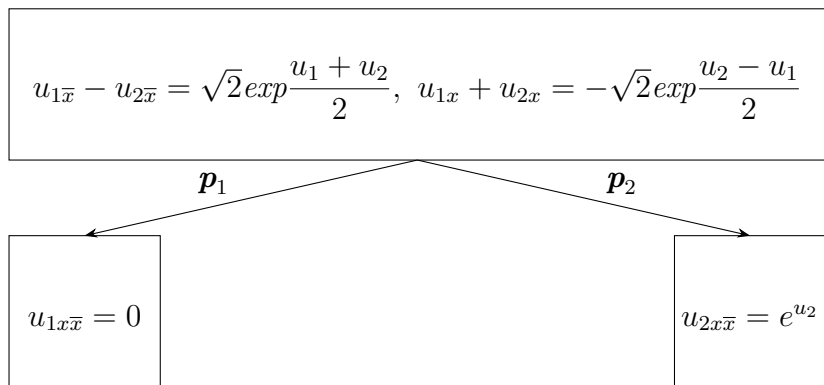
$$V = \frac{u_1 + u_2}{2} - \log \sqrt{2},$$

$$W = \frac{u_2 - u_1}{2} - \log \sqrt{2}.$$

Portanto, em termos de u_1 e u_2 , o sistema (5.21) se escreve do seguinte modo:

$$\begin{cases} u_{1x} + u_{2x} = -\sqrt{2} \exp\left(\frac{u_2 - u_1}{2}\right), \\ u_{1\bar{x}} - u_{2\bar{x}} = \sqrt{2} \exp\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right), \end{cases}$$

e pelo Teorema 5.15, obtemos finalmente a clássica transformação de Bäcklund entre as equações de onda e de Liouville:



Com o intuito de ilustrar uma aplicação dessa transformação de Bäcklund, mostraremos como, a partir da solução trivial $u_1 = 0$ da equação de onda, podemos encontrar uma solução da equação de Liouville ao integrarmos o sistema de equações

$$\begin{cases} u_{2x} = -\sqrt{2} e^{u_2/2}, \\ u_{2\bar{x}} = -\sqrt{2} e^{u_2/2}. \end{cases} \quad (5.29)$$

Com efeito, pela primeira equação em (5.29),

$$\frac{-1}{\sqrt{2}} \int \frac{du_2}{e^{u_2/2}} = \int dx,$$

de onde obtemos que

$$e^{-u_2/2} = \frac{x}{\sqrt{2}} + g(\bar{x}),$$

ou seja,

$$u_2 = -2 \log \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + g(\bar{x}) \right).$$

Agora, utilizando a segunda equação em (5.29),

$$-\sqrt{2}e^{u_2/2} = -2\sqrt{2} \left(\frac{g_{\bar{x}}}{x + \sqrt{2}g(\bar{x})} \right),$$

de modo que

$$g_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Assim,

$$g(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{\sqrt{2}} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Portanto, para cada $c \in \mathbb{R}$,

$$u_2 = \log \left(\frac{2}{(x + \bar{x} + c)^2} \right)$$

é uma solução da equação de Liouville.

Referências

- [1] D. V. Alekseevskij, V. V. Lychagin and A. M. Vinogradov, *Geometry I*, Encyclopedia of Mathematical Sciences, Springer-Verlag, 1991.
- [2] I. M. Anderson, M. E. Fels, *Exterior Differential Systems with Symmetry*, Acta Appl. Math., 87 (2005) 3–31.
- [3] I. M. Anderson, M. E. Fels, *Symmetry reduction of exterior differential systems and Bäcklund transformations for PDE in the plane*. Acta. Appl. Math. **120** (2012) 29-60.
- [4] I. M. Anderson, M. E. Fels, *Bäcklund transformations for Darboux integrable differential systems*, Sel. Math. New Ser. 21 (2015) 379-448.
- [5] I. M. Anderson, M. E. Fels, *Bäcklund transformations for Darboux integrable differential systems: Examples and applications*, J. Geom. Phys. 102 (2016) 1-31.
- [6] L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, Enrico Spoerri, Pisa 1894.
- [7] R. L. Bryant, S. S. Chern, R. B. Gardner, H. L. Goldschmidt, P. A. Griffiths, *Exterior Differential Systems*, Springer-Verlag (1991).
- [8] R. Bryant, P. Griffiths and D. Grossman, *Exterior differential systems and Euler-Lagrange partial differential equations*, University of Chicago Press, 2008.
- [9] R. Bryant, P. Griffiths and L. Hsu, *Hyperbolic exterior differential systems and their conservation laws, part I*, Sel. Math. New Ser. 1 (1995), 21-112.
- [10] E. Cartan, *Oeuvres complètes*, Gauthier-Villars, 1953.
- [11] S. S. Chern, W. H. Chen, K. S. Lam, *Lectures on Differential Geometry*, World Scientific (1999).
- [12] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitésimal*, Gauthier-Villars, Paris, 1915.

-
- [13] Dieudonné J., *Éléments d'analyse*, Tome III: Chapitres XVI et XVII. Cahiers Scientifiques, Fasc. XXXIII, Gauthier-Villars diteur, Paris (1970).
- [14] Mark J. D. Hamilton, *Mathematical Gauge Theory: With Applications to the Standard Model of Particle Physics*, Springer, Munich, Germany (2017).
- [15] Thomas A. Ivey, J. M. Landsberg, *Cartan for Beginners: Differential Geometry via Moving Frames and Exterior Differential Systems*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (2003).
- [16] N. Kamran, *Selected topics in the geometrical study of differential equations*, American Mathematical Society, Rhode Island (2002).
- [17] I. S. Krasil'shchik, A. M. Vinogradov, et al, *Symmetries and conservation laws for differential equations of mathematical physics*, American Mathematical Society, Rhode Island (1999).
- [18] I. S. Krasil'shchik, V. V. Lychagin and A. M. Vinogradov, *Geometry of jet spaces and nonlinear partial differential equations*, Advanced Studies in Contemporary Mathematics, Gordon and Breach Science Publishers, New York (1986).
- [19] I. S. Krasil'shchik, A. M. Vinogradov, *Nonlocal symmetries and the theory of coverings: An addendum to A. M. Vinogradov's 'Local symmetries and conservation laws'*, Acta Appl. Math. **2** (1984), 79-96.
- [20] I. S. Krasil'shchik, A. M. Vinogradov, *Nonlocal trends in the geometry of differential equations: Symmetries, conservation laws, and Bäcklund transformations*, Acta Appl. Math. **15** (1989), 161-209.
- [21] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, Seattle, Washington (2012).
- [22] Shigeyuki Morita, *Geometry of Differential Forms*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society (2001).
- [23] D. J. Saunders, *The Geometry of Jet Bundles*, Cambridge University Press, New York (1989).
- [24] O. Stormark, *Lie's Structural Approach to PDE Systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 80. Cambridge Univ. Press, Cambridge (2000).
- [25] L. W. Tu, *An Introduction to Manifolds*, Springer, Medford, Massachusetts (2011).
- [26] A. M. Vinogradov, *Category of nonlinear differential equations*, In Global Analysis - Studies and Applications I, Springer, 77-102 (1984).

-
- [27] A. M. Vinogradov, *Geometry of nonlinear differential equations*, Journal of Soviet Mathematics **17** (1981), 1624-1649.
- [28] A. M. Vinogradov, *Local symmetries and conservation laws*, Acta Appl. Math. **2** (1984), 21-78.
- [29] H. D. Wahlquist and F. B. Estabrook, *Prolongation Structures of Nonlinear Evolution Equations*, J. Math. Phys., 16 (1975) 1-7.
- [30] H. D. Wahlquist and F. B. Estabrook, *Prolongation Structures of Nonlinear Evolution Equations*, II, J. Math. Phys., 17 (1976) 1293-1297.