



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



TEOREMAS DE PITÁGORAS GENERALIZADOS E ÂNGULOS ASSIMÉTRICOS ENTRE SUBESPAÇOS

MANFINAPUL ARMANDO BLEZ

SALVADOR, BA

2024

MANFINAPUL ARMANDO BLEZ

**TEOREMAS DE PITÁGORAS GENERALIZADOS E ÂNGULOS
ASSIMÉTRICOS ENTRE SUBESPAÇOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao colegi-
ado do curso de Mestrado em Matemática da
Universidade Federal da Bahia, como parte dos
requisitos necessários à obtenção do grau de Mes-
tre em Matemática.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Orientador: ANDRÉ LUÍS GODINHO MANDOLESI

SALVADOR, BA

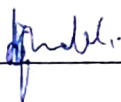
2024

Teoremas de Pitágoras Generalizados e Ângulos Assimétricos entre Subespaços

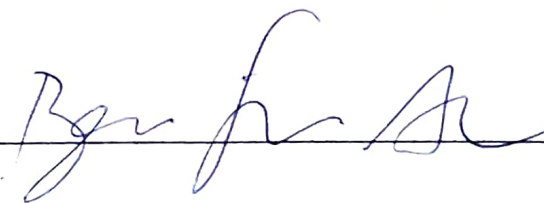
Manfinapul Armando Blez

Dissertação apresentada ao Colegiado do
Curso de Pós-graduação em Matemática da
Universidade Federal da Bahia, como
requisito parcial para obtenção do Título de
Mestre em Matemática.

Banca examinadora



Prof. Dr. André Luis Godinho Mandolesi (orientador - UFBA)



Prof. Dr. Benigno Oliveira Alves (UFBA)



Prof. Dr. Jaime Leonardo Orjuela Chamorro (UFBA)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária de Ciências e Tecnologias Prof. Omar Catunda, SIBI – UFBA.

B647 Blez, Manfinapul Armando

Teoremas de Pitágoras generalizados e ângulos assimétricos entre subespaços / Manfinapul Armando Blez. - Salvador, 2024.

43 f.

Orientador: Prof. Dr. André Luís Godinho Mandolesi

Dissertação de Mestrado – Universidade Federal da Bahia. Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2024.

1. Teorema de Pitágoras. 2. Fatores de Projeção de Volumes. 3. Ângulos Assimétricos. I. Mandolesi, André Luís Godinho. II. Universidade Federal da Bahia. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU: 514

*Dedico este trabalho a minha filha Jade Aliss Dantas Blez e a todas as pessoas que contribuíram
direta ou indiretamente para a sua realização*

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. André Luís Godinho Mandolesi, pela oportunidade de fazer pesquisa e o desenvolvimento dessa dissertação sob a sua orientação, paciência, disposição e pelos ensinamentos.

Aos meus pais (Armando João Blez, Celeste Gomes e Maria Ninfa da Silva) pelo apoio, por sempre estarem ao meu lado mesmo em momentos difíceis. Ao Tio Mateus Blez, como também a todos meus irmãos e irmãs.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal da Bahia que contribuíram na minha formação acadêmica e profissional, ao pessoal da Limpeza e ao pessoal do Centro de Atendimento à Pós-Graduação. Agradeço de uma forma especial a Professa. Dra. Cristina Lizana Aranedo pela amizade oferecida durante o curso, assim como pelas breves conversas sobre vários assuntos considerados na realização deste trabalho.

Agradeço os meus e minhas colegas, brasileiros e internacionais, com quem compartilhei tantos momentos agradáveis, desagradáveis, interessantes e de crescimento pessoal durante o tempo que estou no programa. Faço extensivo o meu agradecimento à Universidade Federal da Bahia, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior CAPES pelo suporte financeiro.

A educação é a arma mais poderosa que você pode usar para mudar o mundo.”

Nelson Mandela

★ 1918 — † 2013

Resumo

Neste trabalho, apresentamos generalizações do Teorema de Pitágoras para volumes multidimensionais em espaços reais ou complexos. O caso complexo foi descoberto recentemente, sendo mais simples que o real. Essas generalizações surgem do estudo de fatores de projeção de volumes, que descrevem a contração de volumes projetados ortogonalmente entre subespaços. Para estudá-los, usamos a álgebra exterior de Grassmann (que trata de multivetores, ou vetores multidimensionais), a interpretação geométrica de determinantes e multivetores simples (pouco conhecida no caso complexo), e os ângulos principais de Jordan entre subespaços. Também apresentamos os ângulos assimétricos entre subespaços, e mostramos como certas identidades trigonométricas que eles satisfazem estão ligadas aos teoremas de Pitágoras generalizados, unificando os casos real e complexo.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras; Fator de Projeção de Volumes; Ângulo Assimétrico.

Abstract

In this work, we present generalized Pythagorean theorems for multidimensional volumes in real or complex spaces. The complex case was discovered recently, and is simpler than the real one. These generalizations arise from the study of volume projection factors, which describe the contraction of volumes orthogonally projected between subspaces. To study them, we use Grassmann exterior algebra (which deals with multivectors, or multidimensional vectors), the geometric interpretation of determinants and simple multivectors (little known in the complex case), and Jordan's principal angles between subspaces. We also present asymmetric angles between subspaces, and show how certain trigonometric identities they satisfy are related to the generalized Pythagorean theorems, unifying the real and complex cases.

Keywords: Pythagorean theorem; volume projection factor; asymmetric angle.

Sumário

APRESENTAÇÃO	1
1 CONCEITOS BÁSICOS.	3
1.1 Geometria de \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n.	3
1.1.1 Produtos Interno e Hermitiano.	3
1.1.2 Espaço Real Subjacente de Espaços Complexos, Linhas Reais e Complexas	4
1.1.3 Projeção Ortogonal	5
1.1.4 Ângulo Entre Vetores Reais ou Complexos	6
1.2 Ângulos Principais Entre Subespaços	7
1.3 Álgebra de Grassmann	10
1.3.1 Interpretação geométrica	12
2 FATOR DE PROJEÇÃO	19
2.1 Fator de Projeção	19
2.2 Fator de Projeção de Linha	19
2.3 Fatores de projeção principais	22
2.4 Fórmulas para calcular o fator de projeção	22
2.5 Identidades	25
3 TEOREMAS DE PITÁGORAS GENERALIZADOS	27
3.1 Para linhas	27
3.2 Para subespaços	29
4 ÂNGULOS ASSIMÉTRICOS	33
4.1 Definições e propriedades	33
4.2 Identidades	36
CONSIDERAÇÕES FINAIS	39
REFERÊNCIAS	41

Apresentação

O Teorema de Pitágoras, relacionando o comprimento a da hipotenusa de um triângulo retângulo aos comprimentos b e c dos seus catetos por $a^2 = b^2 + c^2$, é um dos mais antigos na história da matemática, e possui muitas generalizações. Uma bem conhecida é que, se $X = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$ é uma partição de um espaço real ou complexo X em uma família $\{V_i\}_{i \in I}$ de subespaços mutuamente ortogonais com $I = \{1, 2, \dots, n\}$, e P_i é a projeção ortogonal em V_i , então, para qualquer $v \in X$:

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n \|P_i v\|^2.$$

Generalizações do Teorema de Pitágoras para áreas e volumes em espaços reais aparecem várias vezes na literatura [1, 2, 3, 4, 5, 6]. O Teorema de Pitágoras para áreas das faces de um tetraedro ortogonal, ou para os volumes $(n - 1)$ dimensionais das faces de um simplexo (generalização do tetraedro) ortogonal de dimensão n , é frequentemente redescoberto, por diferentes métodos. Para faces do tetraedro, o original é o Teorema de De Gua, do séc. XVIII [1].

Generalizações menos conhecidas, que continuam sendo redescobertas de tempos em tempos, relacionam áreas, volumes ou medidas de Lebesgue em geral às suas projeções ortogonais em certos subespaços. Monge, no séc. XVIII, conhecia essa interpretação para áreas planas em \mathbb{R}^3 . Em [7] é feita uma versão para projeções de paralelepípedos n -dimensionais. Uma versão para medidas de Lebesgue em espaços reais é dada em [8], que tenta também fazer o caso complexo, mas falha. [9, 10] apresentam a versões para projeções em subespaços de dimensões diferentes.

Em [11], é obtida uma generalização para espaços complexos, mais simples que a real, pois as medidas não são elevadas ao quadrado e há menos termos (já que a dimensão complexa é metade da do espaço real subjacente). Para isso, são usados fatores de projeção, que descrevem a contração das medidas de Lebesgue sob projeções ortogonais, e são ligados aos ângulos principais de Jordan entre subespaços [12, 13]. Também é usada a álgebra exterior de Grassmann [14, 15, 16], que pode ser vista como uma generalização da álgebra vetorial, capaz de descrever de forma mais simples objetos de maior dimensão: bivectores descrevem áreas, trivetores representam volumes, etc.

Os casos real e complexo dos teoremas de Pitágoras generalizados são unificados na forma de

identidades trigonométricas pitagóricas para ângulos entre subespaços [17], que se relacionam com os teoremas de Pitágoras generalizados por meio da interpretação geométrica de determinantes e blades (multivetores simples ou decomponíveis) reais e complexos [18]. Uma versão dessas identidades, para ângulos entre as faces de dimensão $n - 1$ de um simplexo ortogonal de dimensão n , é dada em [19], que também obtém uma lei dos cossenos para volumes de dimensão $n - 1$ (que tem como caso particular o teorema de Pitágoras para tais volumes).

A descrição da inclinação relativa entre subespaços é extremamente importante em muitas áreas, como geometria, álgebra linear, análise funcional, estatística, processamento de imagens, aprendizado de máquina, entre outras. Para subespaços de dimensões maiores, essa inclinação não pode ser completamente descrita por um único ângulo, sendo necessária uma lista de ângulos principais de Jordan [12, 13]. Para subespaços reais de mesma dimensão, eles costumam ser combinados num ângulo volumétrico, que dá uma descrição parcial da inclinação em termos da contração de volumes projetados ortogonalmente entre os subespaços [20]. Para subespaços de dimensão diferente, costuma-se tomar o ângulo entre o menor e sua projeção no maior [21].

Em [17] foi introduzido um ângulo assimétrico que incorpora a assimetria existente entre subespaços de dimensões diferentes e tem melhores propriedades. Ele está ligado a vários produtos (exterior, interno, etc.) das álgebras de Grassmann e Clifford [22], que facilitam a definição, o cálculo e a obtenção de propriedades úteis do ângulo. Uma vantagem dessa abordagem é que ela funciona igualmente bem em espaços reais ou complexos, e as identidades Pitagóricas desse ângulo são iguais em ambos os casos, unificando os teoremas de Pitágoras generalizados que eram diferentes.

Os conceitos desenvolvidos nesses trabalhos têm se mostrado bem úteis. Em [23], o Teorema de Pitágoras para áreas em linhas complexas foi usado para reinterpretar probabilidades na Mecânica Quântica e provar a Regra de Born. Em [22], foram usados para interpretar geometricamente certas propriedades algébricas do produto de Clifford. E em [24] o ângulo assimétrico é interpretado como uma métrica assimétrica na Grassmanniana Total de subespaços de diferentes dimensões.

O presente trabalho está organizado em quatro capítulos. O [Capítulo 1](#) abrange os conceitos básicos que incluem notações, definições e resultados essenciais para a demonstração dos principais resultados obtidos nos capítulos seguintes. Mais precisamente, apresentamos uma breve revisão sobre Geometria do \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n , Ângulos Principais Entre Subespaços, Álgebra de Grassmann, com uma perspectiva mais adequada ao estudo de Fatores de Projeção e do Ângulo Assimétrico.

No [Capítulo 2](#), estudamos os fatores de projeção e os relacionamos à álgebra de Grassmann. Teoremas pitagóricos generalizados são obtidos no [Capítulo 3](#), e o [Capítulo 4](#) apresenta o Ângulo Assimétrico, bem como a definição e propriedades mais diretamente relacionadas a ele.

Capítulo 1

Conceitos Básicos.

Neste capítulo, apresentamos algumas noções básicas de geometria do \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n , ângulos principais entre subespaços e álgebra exterior de Grassmann. Mais detalhes podem ser encontrados nas referências indicadas.

1.1 Geometria de \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n .

Restringiremos ao espaço vetorial $X = F^n$ com $F = \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) e faremos o uso do produto interno (ou hermitiano no caso complexo) definido a seguir.

1.1.1 Produtos Interno e Hermitiano.

Definição 1.1

Uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$; para todo $u, v \in X$
2. $\langle u, u \rangle \geq 0$; $\forall u \in X$, com $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$
3. $\langle u + w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$; $\forall u, v, w \in X$
4. $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$; $\forall u, v \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

define o produto interno no espaço vetorial real $X = \mathbb{R}^n$.

Usando as propriedades (1), (3) e (4) tem-se,

- $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ para todo $u, v, w \in X$;
- $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ para todo $u, v \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

O que permite dizer que o produto interno, em um espaço vetorial real, é uma aplicação bilinear.

Definição 1.2

Uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} ; \forall u, v \in X$
2. $\langle u, u \rangle \geq 0 ; \forall u \in X$, com $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$
3. $\langle u + w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle ; \forall u, v, w \in X$
4. $\langle \lambda u, v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle ; \forall u, v \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$

define o produto Hermitiano no espaço vetorial complexo $X = \mathbb{C}^n$.

Das propriedades (1), (3) e (4) temos,

- $\langle \lambda u + w, v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$ para todo $u, v, w \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$;
- $\langle u, \lambda v + w \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ para todo $u, v, w \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Mostrando que $\langle u, v \rangle$ é sesquilinear. Isto, é linear-conjugado em u e linear em v .

Definição 1.3

A norma, ou comprimento, em X é uma aplicação $\|\cdot\|$ que para cada elemento $u \in X$ associa um número real $\|u\|$, dada por

$$\|u\| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

A norma $\|\cdot\|$, definida acima, possui as seguintes propriedades:

1. $\|u\| \geq 0$; com $\|u\| = 0 \iff u = 0$
2. $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ para todo $u \in X$ e $\lambda \in F$
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ para todo $u, v \in X$

O espaço vetorial X munido de uma norma $\|\cdot\|$ é denominado espaço normado, que denotamos por $(X, \|\cdot\|)$.

1.1.2 Espaço Real Subjacente de Espaços Complexos, Linhas Reais e Complexas

Para, $X = \mathbb{C}^n$, o espaço real subjacente é o espaço $X_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^{2n}$, onde identificamos $(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$ com $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$, e no caso real, $X_{\mathbb{R}} = X$. Por exemplo, $v = (1 + 2i, 3 + 4i)$ e $iv = (-2 + i, -4 + 3i)$ em \mathbb{C}^2 correspondem, respectivamente a $(1, 2, 3, 4)$ e $(-2, 1, -4, 3)$ no $\mathbb{R}^{2 \cdot 2} =$

\mathbb{R}^4 . Neste contexto, o produto interno real é definido sobre $X_{\mathbb{R}}$ como $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re} \langle \cdot, \cdot \rangle$. Dizemos que $u, v \in X$ são \mathbb{R} -ortogonais se $\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}} = 0$ e \mathbb{C} -ortogonais se $\langle u, v \rangle = 0$. Observe que v e iv são \mathbb{R} -ortogonais e $|v| = |iv|$, de modo que no espaço real subjacente a multiplicação por i corresponde a uma rotação de $\frac{\pi}{2}$.

Definição 1.4

Para qualquer vetor $v \in X$, seja $\mathbb{R}v = \{cv : c \in \mathbb{R}\}$ e no caso complexo $\mathbb{C}v = \{cv : c \in \mathbb{C}\}$. Um vetor $0 \neq v \in X$ determina uma linha real $\mathbb{R}v$ e no caso complexo também uma linha complexa $\mathbb{C}v$ (que é isométrica a um plano real).

O uso de $\mathbb{R}v$ no caso complexo deve ser entendido como uma linha real no espaço vetorial real subjacente. Dizer que dois vetores u e v são \mathbb{C} -ortogonais, isto é, $\langle u, v \rangle = 0$ significa que as linhas complexas $\mathbb{C}u$ e $\mathbb{C}v$ são planos ortogonais no espaço real subjacente.

De fato, sejam $\bar{u} \in \operatorname{span}\{u, iu\} \simeq \mathbb{C}u$ e $\bar{v} \in \operatorname{span}\{v, iv\} \simeq \mathbb{C}v$ vetores arbitrários, então existem a, b, c , e d números reais tais que $\bar{u} = au + biu$ e $\bar{v} = cv + div$. Agora, consideremos o produto interno real:

$$\begin{aligned} \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle_{\mathbb{R}} &= \langle au + biu, cv + div \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \langle au, cv \rangle_{\mathbb{R}} + \langle au, div \rangle_{\mathbb{R}} + \langle biu, cv \rangle_{\mathbb{R}} + \langle biu, div \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= ac \langle u, v \rangle_{\mathbb{R}} + ad \langle u, iv \rangle_{\mathbb{R}} + bc \langle iu, v \rangle_{\mathbb{R}} + bd \langle iu, iv \rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

Sabemos que $\langle u, v \rangle = 0$ implica que tanto a parte real quanto a parte imaginária deste produto são nulas (ou seja, $\operatorname{Re} \langle u, v \rangle = \operatorname{Im} \langle u, v \rangle = 0$) e que $\operatorname{Re} \langle iu, v \rangle = \operatorname{Im} \langle u, v \rangle$, $\operatorname{Re} \langle u, iv \rangle = -\operatorname{Im} \langle u, v \rangle$ e $\operatorname{Re} \langle iu, iv \rangle = 0$. Assim, podemos concluir que $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle_{\mathbb{R}} = 0$. Portanto, como \bar{u} e \bar{v} foram escolhidos de forma arbitrária, concluímos que $\mathbb{C}u$ e $\mathbb{C}v$ são planos ortogonais no espaço real subjacente.

1.1.3 Projeção Ortogonal

Definição 1.5

Um operador linear $P : X \rightarrow X$ é chamado de projeção ortogonal sobre um subespaço $W \subseteq X$ se P satisfaz as seguintes condições:

1. $P^2 = P$ (idempotência);
2. $\langle P(v), u \rangle = \langle v, P(u) \rangle$ para todos $u, v \in X$ (auto-adjunta);
3. $P(X) = W$.

Segue da definição acima que, se $w \in W \stackrel{1e3}{\implies} P(w) = w$. Além disso, $v - P(v)$ é ortogonal ao subespaço W para todo $v \in X$. Pois,

$$\langle v - P(v), w \rangle = \langle v, w \rangle - \langle P(v), w \rangle = \langle v, w \rangle - \langle v, P(w) \rangle \stackrel{3}{=} \langle v, w \rangle - \langle v, w \rangle = 0.$$

A projeção ortogonal de V em W , significa que ao projetar de um vetor $v \in V$ sobre W equivale a minimizar a distância entre v e o subespaço W . E que $P(v) = \frac{\langle w, v \rangle}{\|w\|^2} w$ é uma projeção ortogonal sobre $\text{span}\{w\}$ se $w \neq 0$. De fato,

$$P(P(v)) = P\left(\frac{\langle w, v \rangle}{\|w\|^2} w\right),$$

como P é linear e $P(w) = w$ temos,

$$P\left(\frac{\langle w, v \rangle}{\|w\|^2} w\right) = \frac{\langle w, v \rangle}{\|w\|^2} P(w) = \frac{\langle w, v \rangle}{\|w\|^2} w = P(v).$$

Logo, $P^2 = P$, satisfazendo a condição (1). Agora verificaremos que P é auto-adjunta, ou seja, $\langle P(v), u \rangle = \langle v, P(u) \rangle$ para todo $u, v \in V$:

$$\langle P(v), u \rangle = \left\langle \frac{\langle w, v \rangle}{\|w\|^2} w, u \right\rangle = \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} \langle w, u \rangle,$$

como $\frac{\langle w, u \rangle}{\|w\|^2} w = P(u)$, temos

$$\langle v, P(u) \rangle = \left\langle v, \frac{\langle w, u \rangle}{\|w\|^2} w \right\rangle = \frac{\langle w, u \rangle}{\|w\|^2} \langle v, w \rangle.$$

Logo $\langle P(v), u \rangle = \langle v, P(u) \rangle$, portanto $P(v) = \frac{\langle w, v \rangle}{\|w\|^2} w$ é uma projeção ortogonal sobre $\text{span}\{w\}$.

Exemplo 1.6

Considere a transformação linear do \mathbb{R}^3 dada pela matriz P

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Essa transformação é uma projeção ortogonal do \mathbb{R}^3 sobre o subespaço $W = \text{span}\{w = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\}$, dada por

$$Pv = \langle w, v \rangle w.$$

O resultado de uma projeção é um invariante, ou seja, $P(Pv) = Pv$. Portanto, uma projeção P define um subespaço $\text{Im}(P)$, que consiste em todos os vetores invariantes por P .

Afirmção 1.7

Os autovalores de uma projeção só podem ser os números 0 ou 1.

De fato, Se $v \in V$ é um autovetor de uma projeção P com autovalor λ , então $\lambda v = Pv = PPv = P(\lambda v) = \lambda^2 v \Rightarrow \lambda(\lambda - 1)v = 0$. Como $v \neq 0$, devemos ter $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

1.1.4 Ângulo Entre Vetores Reais ou Complexos

Definição 1.8

O ângulo euclidiano $\theta_{v,w} \in [0, \pi]$ dos vetores não nulos $v, w \in X$ é o ângulo usual entre eles, isto é:

$$\cos \theta_{v,w} = \frac{\text{Re} \langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

O ângulo Hermitiano $\gamma_{v,w} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ é definido por

$$\cos \gamma_{v,w} = \frac{|\langle v, w \rangle|}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

No caso real, $\gamma_{v,w} = \min\{\theta_{v,w}, \pi - \theta_{v,w}\}$. No caso complexo, o ângulo Hermitiano é o ângulo Euclidiano entre o vetor v e o plano $\mathbb{C}w$. De fato, seja $u = P_{\mathbb{C}w}(v) = \frac{\langle w, v \rangle}{\|w\|^2} \cdot w$, logo $\|u\| = \frac{|\langle w, v \rangle|}{\|w\|^2} \cdot \|w\| = \frac{|\langle w, v \rangle|}{\|w\|}$ e $\langle v, u \rangle = \langle v, \frac{\langle w, v \rangle}{\|w\|^2} \cdot w \rangle = \frac{\langle w, v \rangle}{\|w\|^2} \cdot \langle v, w \rangle = \frac{|\langle w, v \rangle|^2}{\|w\|^2}$, portanto

$$\begin{aligned} \cos \theta_{v, \mathbb{C}w} = \cos \theta_{v,u} &= \frac{\operatorname{Re} \langle v, u \rangle}{\|v\| \cdot \|u\|} \\ &= \frac{\frac{|\langle w, v \rangle|^2}{\|w\|^2}}{\|v\| \cdot \frac{|\langle w, v \rangle|}{\|w\|}} \\ &= \frac{|\langle w, v \rangle|}{\|v\| \cdot \|w\|} \\ &= \cos \gamma_{v,w}. \end{aligned}$$

1.2 Ângulos Principais Entre Subespaços

Os ângulos principais entre dois subespaços fornecem as melhores caracterizações disponíveis das posições relativas dos subespaços.

Sejam $V, W \subset X$ subespaços não nulos, com $p = \dim V$, $q = \dim W$ e $m = \min\{p, q\}$. Uma decomposição do valor singular [12, 13] fornece bases principais ortonormais (e_1, e_2, \dots, e_p) de V e (f_1, f_2, \dots, f_q) de W tais que para $1 \leq i \leq m$ os planos principais $\operatorname{span}\{e_i, f_i\}$ (que podem ser degenerados) são ortogonais um ao outro e a qualquer e_i ou f_i com $i > m$. Os e_i 's e f_j 's são vetores principais de V e W e podem ser escolhidos de modo que,

$$\langle e_i, f_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \sigma_i & \text{se } i = j \end{cases} \quad (1.1)$$

com $0 \leq \sigma_m \leq \sigma_{m-1} \leq \dots \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 \leq 1$. Esses σ_i 's são valores singulares da projeção ortogonal $P: V \rightarrow W$, que é dada nas bases principais por uma matriz diagonal $q \times p$ com eles na diagonal. Os e_i 's (respectivamente f_j 's) também podem ser obtidos como autovetores ortonormais de P^*P (respectivamente PP^*), onde P^* é a adjunta de P . Os σ_i 's são raízes quadradas dos autovalores de P^*P se $p \leq q$ ou de PP^* caso contrário.

Definição 1.9

Os ângulos principais $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_m \leq \frac{\pi}{2}$ de V em W são os ângulos $\theta_i = \theta_{e_i, f_i}$ entre os vetores principais e_i e f_i .

Pela definição acima, $\sigma_i = \cos \theta_i$. Dessa forma a equação (1.1) pode ser reescrita como segue:

$$\langle e_i, f_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j, \\ \cos \theta_i & \text{se } i = j. \end{cases} \quad (1.2)$$

P é dado nas bases principais por uma matriz diagonal $q \times p$ formada com os $\cos\theta_i$'s, pois

$$Pe_i = \begin{cases} f_i \cdot \cos\theta_i & \text{se } 1 \leq i \leq m, \\ 0 & \text{se } i > m. \end{cases} \quad (1.3)$$

Uma interpretação geométrica é que a esfera unitária de V se projeta para um elipsóide em W . No caso real, para $1 \leq i \leq m$, os σ_i 's são os comprimentos dos seus semi-eixos, os e_i 's projetam sobre os semi-eixos e os f_i 's apontam ao longo deles. No caso complexo, para $1 \leq i \leq m$, existem dois semi-eixos de comprimento σ_i , correspondentes às projeções de e_i e ie_i .

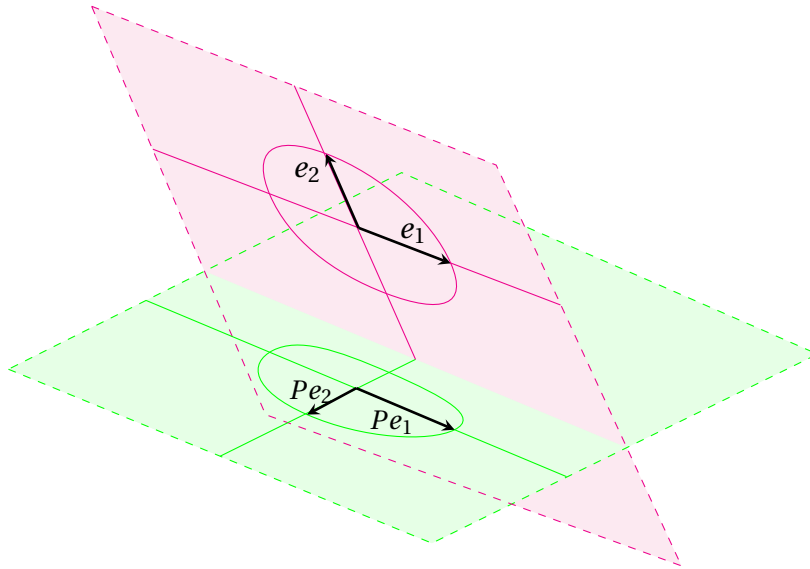


Figura 1 – Circunferência unitária em V se projeta em uma elipse em W .

A lista destes ângulos é difícil de trabalhar (ou pode ser inconveniente de lidar), em geral usa-se algum valor que reflita uma propriedade importante:

- ângulo mínimo de Dixmier que é o menor ângulo principal;
- ângulo de Friedrichs que é o primeiro não - nulo; e
- gap que é o seno do maior ângulo se $p = q$.

Exemplo 1.10

No espaço complexo \mathbb{C}^5 .

Seja $V = \text{span}\{v_1, v_2\} = \text{span}\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}(-1, 1, 1, i\sqrt{3}, -\sqrt{2}), \frac{1}{2\sqrt{2}}(i, i, i, \sqrt{3}, -i\sqrt{2})\right\}$

e

$W = \text{span}\{w_1, w_2, w_3\} = \text{span}\left\{(1, 0, 0, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1, 0, 0)\right\}$.

Como as bases são ortonormais, nelas a matriz da projeção $P: V \rightarrow W$ é

$$P = \begin{pmatrix} \langle w_1, v_1 \rangle & \langle w_1, v_2 \rangle \\ \langle w_2, v_1 \rangle & \langle w_2, v_2 \rangle \\ \langle w_3, v_1 \rangle & \langle w_3, v_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{i}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e sua adjunta P^* é a transposta conjugada:

$$P^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{i}{2\sqrt{2}} & -\frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, temos:

$$P^*P = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{i}{8} \\ -\frac{i}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

Vamos achar os autovalores de P^*P :

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{8} - \lambda & \frac{i}{8} \\ -\frac{i}{8} & \frac{3}{8} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{8} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{64} = 0 \Rightarrow \frac{3}{8} - \lambda = \pm \frac{1}{8}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \text{ ou } \frac{1}{4}$$

Os valores singulares de P são $\sigma = \sqrt{\lambda}$, logo $\sigma = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\frac{1}{2}$. Portanto, os ângulos principais de V e W são $\theta = \cos^{-1} \sigma = \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{3}$.

Vamos achar os autovetores de P^*P :

- Para $\lambda = \frac{1}{2}$: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{i}{8} \\ -\frac{i}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Escolhemos $(a, b) = (1, -i)\frac{1}{\sqrt{2}}$, logo

$$e_1 = av_1 + bv_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 1, i\sqrt{3}, -\sqrt{2})\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}(i, i, i, \sqrt{3}, -i\sqrt{2})\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$e_1 = \frac{1}{4}(0, 2, 2, 0, -2\sqrt{2}) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

- Para $\lambda = \frac{1}{4}$: $\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{i}{8} \\ -\frac{i}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Escolhemos $(a, b) = (1, i)\frac{1}{\sqrt{2}}$, logo

$$e_2 = av_1 + bv_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 1, i\sqrt{3}, -\sqrt{2})\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}(i, i, i, \sqrt{3}, -i\sqrt{2})\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$e_2 = \frac{1}{4}(-2, 0, 0, 2i\sqrt{3}, 0) = \left(-\frac{1}{2}, 0, 0, i\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right).$$

Assim, a base principal de V é $\{e_1, e_2, e_3\}$. Para achar a de W , podemos começar projetando esses vetores em W :

$$Pe_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{i}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 0w_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}w_2 + 0w_3 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

Logo $f_1 = \frac{Pe_1}{\|Pe_1\|} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right) = w_2$.

$$Pe_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{i}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}w_1,$$

logo, $f_2 = \frac{Pe_2}{\|Pe_2\|} = (-1, 0, 0, 0) = -w_1$. Para obter o f_3 , precisamos achar algum $aw_1 + bw_2 + cw_3$ que seja unitária e ortogonal a $f_1 = w_2$ e a $f_2 = -w_1$. Basta tomar $f_3 = w_3 = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)$. Note que (e_1, e_2) e (f_1, f_2, f_3) são bases principais de V e W respectivamente, e $\theta_{e_1, f_1} = \theta_1 = \frac{\pi}{4}$ e $\theta_{e_2, f_2} = \theta_2 = \frac{\pi}{3}$

1.3 Álgebra de Grassmann

A álgebra exterior de Grassmann [16, 25, 26] de um espaço vetorial $X = \mathbb{F}^n$ onde $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} é uma álgebra graduada

$$\bigwedge \mathbb{F}^n = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \bigwedge^p \mathbb{F}^n = \bigoplus_{p=0}^n \bigwedge^p \mathbb{F}^n = \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}^n \oplus \bigwedge^2 \mathbb{F}^n \oplus \cdots \oplus \bigwedge^n \mathbb{F}^n,$$

onde $\bigwedge^0 \mathbb{F}^n = \mathbb{F}$, $\bigwedge^1 \mathbb{F}^n = \mathbb{F}^n$ e $\bigwedge^p \mathbb{F}^n = \{0\}$ para todo $p \notin [0, n]$. Ela é munida do produto exterior

$$\wedge : \bigwedge^p X \times \bigwedge^q X \longrightarrow \bigwedge^{p+q} X,$$

que possui as seguintes propriedades para $A, B, C \in \bigwedge \mathbb{F}^n$

1. $A \wedge (\lambda B + C) = \lambda(A \wedge B) + A \wedge C$, com $\lambda \in \mathbb{F}$;
2. $A \wedge B = (-1)^{pq}(B \wedge A)$, se $A \in \bigwedge^p \mathbb{F}^n$ e $B \in \bigwedge^q \mathbb{F}^n$;
3. $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$.

(1) é a bilinearidade do produto exterior \wedge , (3) garante a associatividade e a (2) é a alternatividade que significa que trocar a ordem dos fatores no produto exterior introduz um fator de sinal $(-1)^{pq}$. Particularmente, se $p = q = 1$, isto implica que: $v \wedge w = -w \wedge v$, para todos os vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$. Como consequência direta, $v \wedge v = 0$. No entanto, é importante notar que somas de elementos com diferentes graus, como $1 + v$, são elementos de $\bigwedge X$ que não possuem um grau definido, porque não pertencem a nenhum subespaço único $\bigwedge^k X \subset \bigwedge X$. Elementos que não têm um grau definido podem ainda ser multiplicados dentro de $\bigwedge X$, mas eles nem comutam nem anti-comutam, por exemplo:

$$(1 + v) \wedge (1 + w) = 1 + v + w + v \wedge w,$$

$$(1 + w) \wedge (1 + v) = 1 + v + w - v \wedge w.$$

Então, $\bigwedge X$ é uma álgebra não comutativa (mas associativa). Os elementos de $\bigwedge X$ são chamados de *multivetores*, e os elementos de $\bigwedge^p X$ são *p-vetores* e são combinações lineares de blades ou multivetores simples: uma *blade de grau p* ou *p-vetor simples*, é uma expressão da forma $A = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_p$, com $v_1, v_2, \dots, v_p \in X$. Tem-se que $A \neq 0$ se, e somente se $v_1, v_2, \dots, v_p \in X$ são linearmente independentes. Nesse caso A representa o paralelepípedo orientado (no caso

real) gerado pelos vetores $v_1, v_2, \dots, v_p \in X$ (conforme a figura 2), sendo o caso complexo abordado posteriormente. Além disso A representa o subespaço p -dimensional

$$[A] = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_p\}.$$

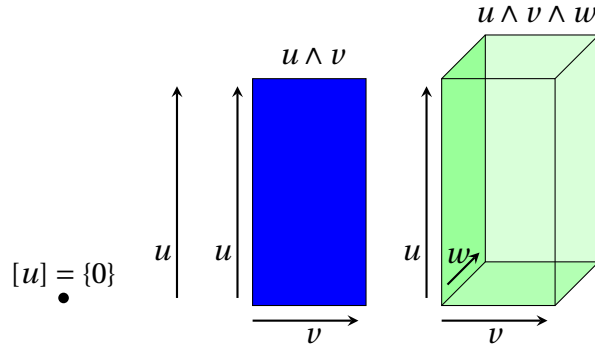


Figura 2 – No espaço real tridimensional, um 0-blade é um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, 1-blade é um vetor u , um 2-blade é um paralelogramo representado por $u \wedge v$, e um 3-blade $u \wedge v \wedge w$ representado por um paralelepípedo. Suas normas são respectivamente $|\lambda|$, o comprimento de u , área de $u \wedge v$ e o volume de $u \wedge v \wedge w$

Dois blades A e B em $\wedge^p X$ geram o mesmo subespaço se, e somente se, existe um escalar $0 \neq \lambda \in \mathbb{F}$ tal que $A = \lambda B$. Se $\lambda > 0$ dizemos que blades A e B têm a mesma orientação e se $\lambda < 0$ então elas têm orientação oposta.

Definição 1.11

O produto interno de p -vetores simples é dado por

$$\langle v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_p, w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_p \rangle = \det(\langle v_i, w_j \rangle) = \begin{vmatrix} \langle v_1, w_1 \rangle & \dots & \langle v_1, w_p \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_p, w_1 \rangle & \dots & \langle v_p, w_p \rangle \end{vmatrix}.$$

Devemos mostrar que o produto interno de p -vetores simples está bem definido, ou seja, que o resultado do produto interno não depende da escolha dos vetores que representam os p -vetores. Isto é provar que $\det(\langle v_i, w_j \rangle)$ é independente dos vetores usados para formar $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_p$ e $w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_p$.

Considere V e W subespaços p -dimensionais gerados por $\{v_1, \dots, v_p\}$ e $\{w_1, \dots, w_p\}$, respectivamente. Suponha que $\{u_1, \dots, u_p\}$ seja outra base para V tal que $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_p = u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_p$, então $u_j = \sum_{i=1}^p A_{ji} v_i$ onde A é uma matriz $p \times p$. O produto interno entre $u_1 \wedge \dots \wedge u_p$ e $w_1 \wedge \dots \wedge w_p$ é dado por

$$\langle u_1 \wedge \dots \wedge u_p, w_1 \wedge \dots \wedge w_p \rangle = \det(\langle u_i, w_j \rangle) = \det(A \cdot (\langle v_i, w_j \rangle)) = \det(A) \cdot \det(\langle v_i, w_j \rangle).$$

Como $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_p = u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_p \neq 0$, então $\det(A) = 1$, logo,

$$\begin{aligned} \langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_p, w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \rangle &= \det(\langle u_i, w_j \rangle) = \det(\langle v_i, w_j \rangle) \\ &= \langle v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_p, w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_p \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, o produto interno está bem definido.

Dados os números inteiros p e q com $p \leq q$, considere o seguinte conjunto

$$\mathcal{I}_p^q = \{(i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^p : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq q\}.$$

Para qualquer multi-índice $I = (i_1, \dots, i_p) \in \mathcal{I}_p^q$ escrevemos $|I| = i_1 + i_2 + \cdots + i_p$, e se $p < q$, $\hat{I} = (1, \dots, \hat{i}_1, \dots, \hat{i}_p, \dots, q) \in \mathcal{I}_{q-p}^q$, onde cada \hat{i}_k indica que o índice foi removido. Além disso, seja $\mathcal{I}_0^q = \{0\}$ e para $I \in \mathcal{I}_0^q$ definimos $|I| = 0$ e $\hat{I} = \{1, \dots, q\} \in \mathcal{I}_q^q$.

Definição 1.12

Dada uma base $\beta = (w_1, \dots, w_p)$ de $W \subset X$ e $1 \leq p \leq q$, os p -subespaços coordenadas de β são $\binom{q}{p}$ subespaços

$$W_I = \text{span}\{w_{i_1}, \dots, w_{i_p}\},$$

para $I = (i_1, \dots, i_p) \in \mathcal{I}_p^q$, que são representados pelas p -blades coordenadas de β ,

$$\omega_I = w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_p} \in \bigwedge^p W_I. \quad (1.4)$$

Para $I \in \mathcal{I}_0^q$ temos o 0-subespaço coordenado $W_I = \{0\}$ e $\omega_I = 1 \in \bigwedge^0 W_I$.

Quando β é ortonormal, $\{\omega_I\}_{I \in \mathcal{I}_p^q}$ é base ortonormal de $\bigwedge^p W$.

Se $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ é uma base do subespaço $V \subset X$, então uma base de $\bigwedge^k V \subset \bigwedge^k X$ é dada por

$$\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq p\}.$$

Além disso, se a base de V é ortonormal, então a base de $\bigwedge^k V$ é ortonormal. A dimensão de $\bigwedge^k V$ é dada por $\dim \bigwedge^k V = \binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$. Consequentemente,

$$\dim \bigwedge \mathbb{F}^n = \sum_{p=0}^n \dim \bigwedge^p \mathbb{F}^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n.$$

1.3.1 Interpretação geométrica

Gramiano.

Definição 1.13

Dados $v_1, v_2, \dots, v_p \in X$:

1. a matriz de Gram é $G = G(v_1, v_2, \dots, v_p) = (\langle v_i, v_j \rangle)_{p \times p}$;
2. o determinante de Gram ou Gramiano é $|G| = \det G$;
3. o paralelepípedo p -dimensional em $X_{\mathbb{R}}$ é dado por $[v_1, v_2, \dots, v_p] = \{\sum_{i=1}^p t_i v_i : 0 \leq t_i \leq 1\}$;
4. $\mathcal{V} = \mathcal{V}(v_1, v_2, \dots, v_p)$ é o p -volume de $[v_1, v_2, \dots, v_p]$, definido indutivamente por $\mathcal{V}(v_1) = \|v_1\|$ e $\mathcal{V}(v_1, v_2, \dots, v_p) = \mathcal{V}(v_1, v_2, \dots, v_{p-1}) \cdot \|u_p\|$, onde u_p é a componente de v_p que é \mathbb{R} -ortogonal a v_1, \dots, v_{p-1} .

O paralelepípedo definido no item 3 é ortogonal se os v_i 's são mutuamente \mathbb{R} -ortogonais, nesse caso $\mathcal{V}(v_1, v_2, \dots, v_k) = \|v_1\| \cdot \dots \cdot \|v_k\|$. Se P é uma projeção ortogonal em um subespaço $W \subset X$ então

$$P([v_1, v_2, \dots, v_k]) = [P(v_1), P(v_2), \dots, P(v_k)]. \quad (1.5)$$

Além disso, dado $A = v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_p \in \wedge^p V$ tem-se que,

$$P(A) = P(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_p) = P(v_1) \wedge P(v_2) \wedge \dots \wedge P(v_p) \quad (1.6)$$

Note que $[v_1, v_2, \dots, v_p]$ e \mathcal{V} são definidos no espaço real subjacente. Como $\|u_p\|$ é a altura de $[v_1, v_2, \dots, v_p]$ em relação à sua base $[v_1, v_2, \dots, v_{p-1}]$, então \mathcal{V} é o p -volume usual. O resultado seguinte apresenta o significado geométrico de $|G|$ no caso real, e veremos que tal resultado falha no caso complexo.

Teorema 1.14

$|G| = \mathcal{V}^2$, onde $|G|$ é o Gramiano de vetores $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$, e \mathcal{V} é o p -volume do paralelepípedo gerado por v_1, \dots, v_p .

Demonstração. A demonstração será feita por indução: $|G(v_1)| = \langle v_1, v_1 \rangle = \|v_1\|^2 = \mathcal{V}(v_1)^2$.

Suponha que o resultado vale para $p-1$, isto é, $|G(v_1, \dots, v_{p-1})| = \mathcal{V}(v_1, \dots, v_{p-1})^2$. Agora queremos mostrar que vale para p . Como $u_p = v_p - \lambda_1 v_1 - \dots - \lambda_{p-1} v_{p-1}$ para $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{R}$, com $\langle u_p, v_i \rangle = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, p-1$, temos

$$|G(v_1, \dots, v_p)| = \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_{p-1} \rangle & \langle v_1, v_p \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle v_{p-1}, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_{p-1}, v_{p-1} \rangle & \langle v_{p-1}, v_p \rangle \\ \langle v_p, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_p, v_{p-1} \rangle & \langle v_p, v_p \rangle \end{vmatrix}.$$

Substituindo v_p na última coluna pela sua decomposição $v_p = u_p + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{p-1} v_{p-1}$, e utilizando as propriedades do determinante e o fato $\langle u_p, v_i \rangle = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, p-1$, as entradas da última coluna (com exceção da última entrada) se tornam nulas:

$$|G(v_1, \dots, v_p)| = \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_{p-1} \rangle & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle v_{p-1}, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_{p-1}, v_{p-1} \rangle & 0 \\ \langle v_p, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_p, v_{p-1} \rangle & \langle v_p, u_p \rangle \end{vmatrix}.$$

Substituindo v_p por $u_p + \lambda_{p-1}v_{p-1} + \dots + \lambda_1v_1$ na última linha temos, da mesma forma

$$\begin{aligned} |G(v_1, \dots, v_p)| &= \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_{p-1} \rangle & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle v_{p-1}, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_{p-1}, v_{p-1} \rangle & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \langle u_p, u_p \rangle \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_{p-1} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_{p-1}, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_{p-1}, v_{p-1} \rangle \end{vmatrix} \cdot \langle u_p, u_p \rangle. \end{aligned}$$

Usando a hipótese de indução obtemos

$$\begin{aligned} |G(v_1, \dots, v_p)| &= |G(v_1, \dots, v_{p-1})| \cdot \|u_p\|^2 \\ &= \mathcal{V}(v_1, \dots, v_{p-1})^2 \|u_p\|^2 \\ &= \mathcal{V}(v_1, \dots, v_p)^2. \end{aligned} \quad \square$$

O determinante de Gram (ou Gramiano) acima é diferente de zero quando os v_i 's forem linearmente independentes, já que o volume p -dimensional de um paralelepípedo degenerado deve ser nulo.

Esse resultado falha no caso complexo, já que ele requer $\langle v_i, u_p \rangle = 0$ para $i < p$, mas a definição de volume apenas fornece $\langle v_i, u_p \rangle_{\mathbb{R}} = 0$.

Exemplo 1.15

No espaço complexo \mathbb{C}^2 , os vetores $w_1 = (i, 1)$ e $w_2 = (1, -i)$ não são \mathbb{C} -ortogonais, pois $\langle w_1, w_2 \rangle = \langle (i, 1), (1, -i) \rangle = \bar{i} \cdot 1 + \bar{1} \cdot (-i) = -i - i = -2i \neq 0$, mas são \mathbb{R} -ortogonal, formando no plano real adjacente um quadrado de área $\mathcal{V} = 2$. Seu Gramiano é

$$|G(w_1, w_2)| = \begin{vmatrix} \langle w_1, w_1 \rangle & \langle w_1, w_2 \rangle \\ \langle w_2, w_1 \rangle & \langle w_2, w_2 \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 2 \end{vmatrix} = 0 \neq \mathcal{V}^2.$$

A interpretação de um Gramiano de vetores complexos é similar ao caso real, porém o volume não é elevado ao quadrado, e a dimensão real do paralelepípedo é o dobro do número de vetores.

Teorema 1.16

$|G| = \mathcal{V}$, onde $|G|$ é o Gramiano de $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{C}^n$, e \mathcal{V} é o $2p$ -volume do paralelepípedo gerado por $v_1, \dots, v_p, iv_1, \dots, iv_p$.

Demonstração. Decompondo $G = G(v_1, \dots, v_p) = A + iB$ para matrizes reais $p \times p$ $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, temos $\langle v_i, v_j \rangle = a_{ij} + ib_{ij}$, então $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle_{\mathbb{R}} = \langle iv_i, iv_j \rangle_{\mathbb{R}}$ e $b_{ij} = \langle iv_i, v_j \rangle_{\mathbb{R}} = -\langle v_i, iv_j \rangle_{\mathbb{R}}$. No espaço real subjacente, a matriz de Gram de $v_1, \dots, v_p, iv_1, \dots, iv_p$ é

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Seja $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{1} & i\mathbb{1} \\ i\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}$, onde $\mathbb{1}$ é a matriz de identidade $p \times p$. Então $T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -i\mathbb{1} \\ -i\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}$.

Vamos calcular $T\mathcal{G}T^{-1}$:

$$T\mathcal{G}T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & i\mathbb{1} \\ i\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -i\mathbb{1} \\ -i\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \right).$$

Primeiro, vamos calcular a multiplicação $T\mathcal{G}$:

$$T\mathcal{G} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & i\mathbb{1} \\ i\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} A+iB & -B+iA \\ iA+B & -iB+A \end{pmatrix}.$$

Multiplicando esse resultado por T^{-1} :

$$\begin{aligned} T\mathcal{G}T^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} A+iB & -B+iA \\ iA+B & -iB+A \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -i\mathbb{1} \\ -i\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A+iB & -B+iA \\ iA+B & -iB+A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -i\mathbb{1} \\ -i\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (A+iB)\mathbb{1} + (-B+iA)(-i\mathbb{1}) & (A+iB)(-i\mathbb{1}) + (-B+iA)\mathbb{1} \\ (iA+B)\mathbb{1} + (-iB+A)(-i\mathbb{1}) & (iA+B)(-i\mathbb{1}) + (-iB+A)\mathbb{1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2(A+iB) & 0 \\ 0 & 2(A+iB) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & \overline{G} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e assim,

$$|G|^2 = \det \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & \overline{G} \end{pmatrix} = \det(T\mathcal{G}T^{-1}) = \det(T) \cdot \det(\mathcal{G}) \cdot \det(T^{-1}) = |\mathcal{G}| = \mathcal{V}^2. \quad \square$$

Exemplo 1.17

No espaço \mathbb{C} , os vetores unitários $v_1 = 1$ e $v_2 = i$ não são \mathbb{C} -ortogonais, pois $\langle v_1, v_2 \rangle = -i \neq 0$, mas são \mathbb{R} -ortogonais, formando no plano real subjacente um quadrado de área $\mathcal{V} = 1$. Seu Gramiano

$$\text{é } |G(v_1, v_2)| = \begin{vmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{vmatrix} = 0 \neq \mathcal{V}^2.$$

Neste caso temos que $[v_1, v_2, iv_1, iv_2] = [1, i, i, -1]$ é um paralelepípedo degenerado com 4-volume $\mathcal{V} = 0 = |G(v_1, v_2)|$. O quadrado desse exemplo é $[v_1, iv_1]$, com $\mathcal{V} = 1 = |G(v_1)|$.

Exemplo 1.18

Retomando o Exemplo 1.15, agora aplicando o teorema 1.16, temos $w_1 = (i, 1)$ e $w_2 = (1, -i)$ em \mathbb{C} . Assim, $iw_1 = (-1, i)$ e $iw_2 = (i, 1)$. Logo,

$$\mathcal{V}(w_1, w_2, iw_1, iw_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 = |G(w_1, w_2)|.$$

Alem disso, $w_1 = iw_2$, logo $\mathcal{V}(w_1, w_2) = \mathcal{V}(w_2, iw_2) = |G(w_2)| = 2$, como esperado.

Determinante Complexa

Seja M uma matriz $n \times n$ com colunas $v_1, \dots, v_n \in X$ e M^\dagger a sua transposta conjugada. Então $G = G(v_1, \dots, v_n) = M^\dagger M$ e portanto $|G| = |\det M|^2$.

Teorema 1.19

$|\det M| = \mathcal{V}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ no caso real;

$|\det M| = \sqrt{\mathcal{V}(v_1, \dots, v_n, iv_1, \dots, iv_n)}$ no caso complexo.

Demonstração. Segue dos Teoremas 1.14 e 1.16. □

Exemplo 1.20

Seja $M = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$ então $\det M = 3i$. Os vetores coluna $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (-i, 2i)$ em \mathbb{C}^2 têm normas $|v_1| = \sqrt{2}$, $|v_2| = \sqrt{5}$ e $\langle v_1, v_2 \rangle = i$, então $\langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}} = 0$ e eles formam um retângulo de área $\sqrt{10} \neq |M|$. Mas no espaço subjacente \mathbb{R}^4 os vetores $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (0, -1, 0, 2)$, $iv_1 = (0, 1, 0, 1)$ e $iv_2 = (1, 0, -2, 0)$ formam um paralelepípedo de 4-volume

$$\mathcal{V}(v_1, v_2, iv_1, iv_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 9 = |\det M|^2.$$

Exemplo 1.21

Seja $M = \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, então $\det M = -1 - 2i$. Os vetores coluna $v_1 = (i, 1)$ e $v_2 = (1+i, -1) \in \mathbb{C}^2$ têm normas $|v_1| = \sqrt{2}$ e $|v_2| = \sqrt{3}$, e $\langle v_1, v_2 \rangle = -i$. Considerando o produto interno no espaço real subjacente, temos $\langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}} = 0$, e v_1 e v_2 formam um retângulo de área $\sqrt{6} \neq |\det M|$.

No espaço subjacente \mathbb{R}^4 , os vetores são $v_1 = (0, 1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, -1, 0)$, $iv_1 = (-1, 0, 0, 1)$ e $iv_2 = (-1, 1, 0, -1)$, formando um paralelepípedo com volume

$$\mathcal{V}(v_1, v_2, iv_1, iv_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 = |\det M|^2$$

Blade Complexa

Dados $v_1, \dots, v_p \in X$, $B = v_1 \wedge \dots \wedge v_p$ tem a norma $\|B\| = \sqrt{\langle B, B \rangle} = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)} = \sqrt{|G(v_1, \dots, v_p)|}$. No caso real, o Teorema 1.14 fornece $\|B\| = \mathcal{V}(v_1, \dots, v_p)$. No caso complexo, o Teorema 1.19 em vez disso fornece $\|B\|^2 = \mathcal{V}(v_1, \dots, v_p, iv_1, \dots, iv_p)$.

Exemplo 1.22

Sejam $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $w = \left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}, 0\right)$ em \mathbb{C}^2 . Identificando o \mathbb{C}^2 como \mathbb{R}^4 , temos, $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $iv = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $w = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$ e $iw = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$. Usando \wedge para o produto exterior da álgebra exterior no \mathbb{R}^4 e Δ para o de \mathbb{C}^2 , temos

$$\|v \wedge w\| = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad e \quad \|v \Delta w\| = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1+i}{2} \\ -\frac{1-i}{2} & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Isso mostra que $v \wedge w$ e $v \Delta w$ representam coisas diferentes: enquanto $v \wedge w$ representa um paralelogramo de área $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $v \Delta w$ representa um paralelepípedo de dimensão 4 cujo volume é igual a $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ o mesmo que $v \wedge iv \wedge w \wedge iw$

$$\|v \wedge iv \wedge w \wedge iw\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Capítulo 2

Fator de Projeção

Este capítulo apresenta os fatores de projeção, fórmulas para calcular fatores de projeção e identidades.

2.1 Fator de Projeção

Nos próximos resultados usaremos $\dim_{\mathbb{R}}$ para denotar a dimensão de V sobre \mathbb{R} , isto, é a dimensão do espaço real subjacente. Logo $p = \dim V$ no caso real e $p = 2 \cdot \dim V$ no caso complexo.

Definição 2.1

Dados subespaços $V, W \subset X$, seja $P: V \rightarrow W$ a projeção ortogonal de V em W e $p = \dim_{\mathbb{R}} V$. O fator de projeção de V em W é dado por

$$\pi_{V,W} = \frac{|P(S)|_p}{|S|_p},$$

onde S é qualquer subconjunto de V com $|S|_p \neq 0$ e $|\cdot|_p$ é a medida de Lebesgue de dimensão p .

Observação 2.2 • $|P(S)|_p$ está definida pois $\dim_{\mathbb{R}} P(V) \leq p$;

- Como P é linear, $\pi_{V,W}$ não depende de S . Mais precisamente, $\pi_{V,W} = 0$ se $\dim_{\mathbb{R}} P(V) < p$, e se $\dim_{\mathbb{R}} P(V) = p$ então V e $P(V)$ podem ser identificados isometricamente como \mathbb{R}^p . A independência de S segue da linearidade e se deve a uma propriedade de medida de Lebesgue.

2.2 Fator de Projeção de Linha

Definição 2.3

Uma partição em X é uma coleção $\{V_1, \dots, V_k\}$ de subespaços mutuamente ortogonais tais que $X = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$.

Se P_{V_i} é projeção ortogonal em V_i , então para qualquer $v \in X$,

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^k \|P_{V_i}(v)\|^2. \quad (2.1)$$

Proposição 2.4

Para todo $v \in X$ e um subespaço vetorial real ou complexo $W \subset X$, seja P a projeção ortogonal em W . Então

$$\|P(v)\| = \|v\| \cdot \pi_{\mathbb{R}v, W}.$$

No caso complexo, sendo W um subespaço complexo, também temos:

$$\|P(v)\|^2 = \|v\|^2 \cdot \pi_{\mathbb{C}v, W}.$$

Demonstração. • Caso real: Na Definição 2.1 o fator de projeção $\pi_{\mathbb{R}v, W}$ é dado por

$$\pi_{\mathbb{R}v, W} = \frac{\|Pv\|}{\|v\|}.$$

A partir dessa expressão, obtemos a identidade:

$$\|Pv\| = \|v\| \cdot \pi_{\mathbb{R}v, W}.$$

- Caso complexo: O fator de projeção é definido sobre a linha complexa $\mathbb{C}v$. Portanto, devemos considerar simultaneamente a projeção de v e iv , sendo iv ortogonal a v . O quadrado formado por v e iv , denotado $[v, iv] \subset \mathbb{C}v$, é projetado no quadrado $[Pv, iPv] \subset W$.

Assim, o fator de projeção no caso complexo é dado por:

$$\pi_{\mathbb{C}v, W} = \frac{\|Pv\|^2}{\|v\|^2}.$$

Dessa forma, obtemos a igualdade:

$$\|Pv\|^2 = \|v\|^2 \cdot \pi_{\mathbb{C}v, W}. \quad \square$$

Proposição 2.5

Para quaisquer $v, w \in X$, temos:

- no caso real $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \pi_{\mathbb{R}v, \mathbb{R}w}$;
- no caso complexo
 - $|\operatorname{Re}\langle v, w \rangle| = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \pi_{\mathbb{R}v, \mathbb{R}w}$;
 - $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \pi_{\mathbb{R}v, \mathbb{C}w}$;
 - $|\langle v, w \rangle|^2 = \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 \cdot \pi_{\mathbb{C}v, \mathbb{C}w}$.

Demonstração. • Caso real: considere a projeção de v em $\mathbb{R}w$, $P(v) = \frac{\langle w, v \rangle}{|w|^2} w$, usando a Proposição 2.4 temos,

$$\|Pv\| = \|v\| \cdot \pi_{\mathbb{R}v, \mathbb{R}w}$$

logo,

$$|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\| \cdot \pi_{\mathbb{R}v, \mathbb{R}w}.$$

• Caso complexo

- Temos que a projeção em $\mathbb{R}w$ no espaço real subjacente $P(v) = \frac{\operatorname{Re}(\langle w, v \rangle)}{|w|^2} w$. Novamente usando a Proposição 2.4 para $W = \mathbb{R}w$

$$\|Pv\| = \|v\| \cdot \pi_{\mathbb{R}v, \mathbb{R}w}.$$

Portanto,

$$|\operatorname{Re}\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\| \cdot \pi_{\mathbb{R}v, \mathbb{R}w}.$$

- De novo, projeção em $\mathbb{C}w$, $P(v) = \frac{\langle w, v \rangle}{|w|^2} w$ usando a proposição 2.4 para $W = \mathbb{C}w$ temos,

$$\|Pv\| = \|v\| \cdot \pi_{\mathbb{R}v, \mathbb{C}w}.$$

Portanto:

$$|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\| \cdot \pi_{\mathbb{R}v, \mathbb{C}w}.$$

- usando a Proposição 2.4 para $W = \mathbb{C}w$.

$$\|Pv\|^2 = \|v\|^2 \cdot \pi_{\mathbb{C}v, \mathbb{C}w}.$$

Então:

$$|\langle v, w \rangle|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 \cdot \pi_{\mathbb{C}v, \mathbb{C}w}. \quad \square$$

O fator de projeção entre linhas depende claramente do ângulo entre elas. Mas no caso complexo alguns cuidados são necessários, pois existem diferentes conceitos de ângulos entre vetores complexos.

Corolário 2.6

Para quaisquer vetores não nulos $v, w \in X$,

$$\pi_{\mathbb{R}v, \mathbb{R}w} = |\cos \theta_{v, w}|. \quad (2.2)$$

Além disso, no caso complexo

$$\pi_{\mathbb{R}v, \mathbb{C}w} = \cos \gamma_{v, w}, \quad (2.3)$$

$$\pi_{\mathbb{C}v, \mathbb{C}w} = \cos^2 \gamma_{v, w}. \quad (2.4)$$

Demonstração. Segue da Definição 1.8 e da Proposição 2.5. □

2.3 Fatores de projeção principais

Definição 2.7

Dados subespaços $V, W \subset X$, (e_1, \dots, e_p) e (f_1, \dots, f_q) bases principais de V e W (respectivamente), com $p = \dim V$, $q = \dim W$ e $m = \min\{p, q\}$. Para todo $1 \leq i \leq m$, o fator de projeção principal π_i de V em W é o fator de projeção para as linhas de e_i e f_i , isto é

$$\pi_i = \begin{cases} \pi_{\mathbb{R}e_i, \mathbb{R}f_i} & \text{no caso real} \\ \pi_{\mathbb{C}e_i, \mathbb{C}f_i} & \text{no caso complexo} \end{cases} \quad (2.5)$$

Das equações (2.2) e (2.4) obtemos, para $1 \leq i \leq m$,

$$\pi_i = \begin{cases} |\cos \cos_{e_i, f_i}| & \text{no caso real,} \\ \cos^2 \gamma_{e_i, f_i} & \text{no caso complexo.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Como $0 \leq \langle e_i, f_i \rangle$ (no caso real assim como no caso complexo) temos que $\theta_{e_i, f_i} = \gamma_{e_i, f_i} = \theta_i$ é o ângulo principal, de modo que para $1 \leq i \leq m$

$$\pi_i = \begin{cases} \cos \theta_i & \text{no caso real,} \\ \cos^2 \theta_i & \text{no caso complexo.} \end{cases} \quad (2.7)$$

A equação (2.7) mostra que os fatores principais de projeção estão diretamente ligados aos ângulos principais de Jordan [12, 27, 20].

2.4 Fórmulas para calcular o fator de projeção

Proposição 2.8

Dados subespaços $V, W \subset X$ não nulos,

$$\pi_{V, W} = \begin{cases} \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \dots \cdot \pi_p & \text{se } p \leq q, \\ 0 & \text{se } p > q, \end{cases}$$

onde os π_i 's são os seus fatores de projeção principais, com $\dim V = p$ e $\dim W = q$.

Demonstração. Se $p > q$, então $\|P(S)\|_p = 0$, onde S é um subconjunto Lebesgue mensurável de V e P é a projeção ortogonal de V em W . Caso contrário, temos:

- caso real.

Seja $A = e_1 \wedge \dots \wedge e_p$ com $\|A\| = \|e_1 \wedge \dots \wedge e_p\| = \|e_1\| \cdot \dots \cdot \|e_p\| = 1$ onde (e_1, \dots, e_p) é a base principal de V em relação a W . Temos que a projeção ortogonal é dada na base principal

por uma matriz diagonal $q \times p$ formada com $\cos \theta'_i$'s. Daí, usando a Definição 2.1 e a equação (1.6), temos

$$\pi_{V,W} = \frac{\|P(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_p)\|}{\|e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_p\|} = \|P(e_1) \wedge P(e_2) \wedge \dots \wedge P(e_p)\|.$$

Pelas equações (1.3) e (2.7), obtemos,

$$\pi_{V,W} = \|P(e_1) \wedge P(e_2) \wedge \dots \wedge P(e_p)\| = \cos \theta_1 \cdot \dots \cdot \cos \theta_p \cdot \|f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p\| = \pi_1 \cdot \dots \cdot \pi_p \cdot 1.$$

- Caso complexo.

Seja $A = e_1 \wedge ie_1 \wedge \dots \wedge e_p \wedge ie_p$ um blade em V formado pelos elementos da base principal (e os seus produtos por i), onde \wedge é o produto exterior na álgebra exterior do espaço real subjacente. Então, $\|e_1 \wedge ie_1 \wedge \dots \wedge e_p \wedge ie_p\| = 1$. Usando as definições e as equações citadas acima, mas agora para o caso complexo, temos:

$$\pi_{V,W} = \|P(e_1) \wedge iP(e_1) \wedge \dots \wedge P(e_p) \wedge iP(e_p)\|_{2p} = \cos^2 \theta_1 \cdot \dots \cdot \cos^2 \theta_p = \pi_1 \cdot \dots \cdot \pi_p. \quad \square$$

Assim, no caso real, o fator pelo qual os volumes p -dimensionais em V encolhem, quando projetados em W é produto dos fatores pelos quais os comprimentos nas linhas principais $\mathbb{R}e_i$ se contraem. No caso complexo, o fator pelo qual os volumes $2p$ -dimensionais em V encolhem, quando projetados em W , é produto dos fatores pelos quais as retas $\mathbb{R}e_i$ e $\mathbb{R}(ie_i)$ nas linhas principais $\mathbb{C}e_i$ se contraem.

Agora fornecemos fórmulas práticas para calcular $\pi_{V,W}$ em termos das bases ortogonais. A Proposição 4.4 estende o seguinte resultado para outras bases.

Proposição 2.9

Sejam $V, W \subset X$ subespaços não nulos e P uma matriz que representa a projeção ortogonal $P: V \rightarrow W$ em bases ortonormais de V e W , então

$$\pi_{V,W} = \begin{cases} \sqrt{\det(P^T P)} & \text{no caso real;} \\ \det(\bar{P}^T P) & \text{no caso complexo.} \end{cases}$$

Se as dimensões de V e W são iguais, então

$$\pi_{V,W} = \begin{cases} |\det(P)| & \text{no caso real,} \\ |\det(P)|^2 & \text{no caso complexo.} \end{cases}$$

Demonstração. Suponha que $p > q$, então $\pi_{V,W} = 0$ pela Proposição 2.8. Para o caso $p \leq q$ é suficiente demonstrarmos o resultado para bases principais de V e W . Já vimos que a projeção ortogonal nas bases principais é dada pela matriz diagonal com os $\cos \theta'_i$'s na diagonal. Considere

a representação matricial de projeção ortogonal a seguir,

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cos\theta_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \text{ logo } \bar{P}^T = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cos\theta_p & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Daí

$$\bar{P}^T \cdot P = \begin{pmatrix} \cos^2\theta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cos^2\theta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cos^2\theta_p \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

- Caso real.

Calculando o determinante da matriz $P^T \cdot P$, e usando a Proposição 2.8 temos:

$$\det(P^T \cdot P) = \cos^2\theta_1 \cdot \dots \cdot \cos^2\theta_p = (\pi_{V,W})^2,$$

portanto,

$$\pi_{V,W} = \sqrt{\det(P^T P)}.$$

- Caso Complexo.

$$\det(\bar{P}^T \cdot P) = \cos^2\theta_1 \cdot \dots \cdot \cos^2\theta_p = \pi_{V,W},$$

Para $p = q$, temos que, $\det(P) = \det(\bar{P}^T)$, portanto:

- Caso real.

$$\pi_{V,W} = \sqrt{\det(P^T P)} = \sqrt{\det(P^T) \cdot \det(P)} = \sqrt{[\det(P)]^2} = |\det(P)|.$$

- Caso complexo.

$$\pi_{V,W} = \det(\bar{P}^T P) = [\det(P)]^2 = |\det(P)|^2. \quad \square$$

Proposição 2.10

Dados subespaços $V, W \subseteq X$ tais que, $\dim V = \dim W = p$, então para quaisquer blades não nulos $A \in \wedge^p V$ e $B \in \wedge^p W$ tem-se,

$$\pi_{V,W} = \begin{cases} \frac{|\langle A, B \rangle|}{\|A\| \cdot \|B\|} & \text{no caso real,} \\ \frac{|\langle A, B \rangle|^2}{\|A\|^2 \cdot \|B\|^2} & \text{no caso complexo.} \end{cases} \quad (2.9)$$

Demonstração. Demonstraremos o caso real e o caso complexo é análogo. Sejam $A = e_1 \wedge \dots \wedge e_p$ e $B = f_1 \wedge \dots \wedge f_p$ (qualquer outros $\langle A \rangle$ e $\langle B \rangle$ são múltiplos desses) onde e_i 's e f_i 's com $i = 1, 2, \dots, p$

são vetores principais de V e W respectivamente. Temos $\|A\| = \|B\| = 1$, daí, usando equação (1.2) e equação 2.7, obtemos,

$$\langle A, B \rangle = \begin{vmatrix} \langle e_1, f_1 \rangle & \langle e_1, f_2 \rangle & \cdots & \langle e_1, f_p \rangle \\ \langle e_2, f_1 \rangle & \langle e_2, f_2 \rangle & \cdots & \langle e_2, f_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_p, f_1 \rangle & \langle e_p, f_2 \rangle & \cdots & \langle e_p, f_p \rangle \end{vmatrix} = \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \dots \cdot \cos \theta_p = \pi_{A,B}. \quad \square$$

2.5 Identidades

Teorema 2.11

Para qualquer linha $L \subset X$ e qualquer partição ortogonal $X = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$,

- $\sum_{j=1}^k \pi_{L, V_j}^2 = 1$ no caso real,
- $\sum_{j=1}^k \pi_{L, V_j} = 1$ no complexo.

Demonstração. • Caso real: Na Proposição 2.4 temos que $\|P_{V_j}(v)\| = \|v\| \cdot \pi_{L, V_j}$, daí

$$\pi_{L, V_j}^2 = \left(\frac{\|P_{V_j}(v)\|}{\|v\|} \right)^2$$

$$\sum_{j=1}^k \pi_{L, V_j}^2 = \sum_{j=1}^k \frac{\|P_{V_j}(v)\|^2}{\|v\|^2}.$$

Pela equação (2.1) temos que $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^k \|P_{V_i}(v)\|^2$, portanto

$$\sum_{j=1}^k \pi_{L, V_j}^2 = \frac{1}{\|v\|^2} \sum_{j=1}^k \|P_{V_j}(v)\|^2 = \frac{\|v\|^2}{\|v\|^2} = 1$$

- Caso complexo:

Na Proposição 2.4 para o caso complexo temos que $\|P_{V_j}(v)\|^2 = \|v\|^2 \cdot \pi_{L, V_j}$, daí

$$\pi_{L, V_j} = \frac{\|P_{V_j}(v)\|^2}{\|v\|^2}.$$

Tomando o somatório em ambos os lados temos:

$$\sum_{j=1}^k \pi_{L, V_j} = \sum_{j=1}^k \frac{\|P_{V_j}(v)\|^2}{\|v\|^2}$$

$$= \frac{1}{\|v\|^2} \sum_{j=1}^k \|P_{V_j}(v)\|^2 = \frac{\|v\|^2}{\|v\|^2} = 1 \quad \square$$

Teorema 2.12

Se $V \subset X$ é um subespaço de X e $\dim V = p$, então

- $\sum_I \pi_{V, V_I}^2 = 1$ no caso real;

- $\sum_I \pi_{V, V_I} = 1$ no caso complexo,

onde as somas são realizadas sobre todos os subespaços coordenados p -dimensionais V_I de uma base ortogonal de X .

Demonstração. Seja $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base ortogonal de X . Para cada multi-índice $I = (i_1, \dots, i_q)$, onde $1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n$, definimos $V_I = \text{span}\{v_{i_1}, \dots, v_{i_q}\}$ e $B_I = v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_q} \in \wedge^q V_I$.

Podemos admitir sem perda de generalidade que a base de X é ortonormal de modo que $\{B_I\}$ é base ortonormal de $\wedge^q X$. Seja $A \in \wedge^q V$ com $\|A\| = 1$. Então, $\sum_I |\langle A, B_I \rangle|^2 = 1$, logo pela [Proposição 2.10](#) temos que

$$\sum_I \pi_{A, B_I}^2 = \sum_I \left(\frac{|\langle A, B_I \rangle|}{\|A\| \cdot \|B_I\|} \right)^2 = \sum_I |\langle A, B_I \rangle|^2 = 1.$$

O caso complexo é análogo. □

Capítulo 3

Teoremas de Pitágoras Generalizados

Os teoremas apresentados no Capítulo 2, conduzem aos teoremas generalizados de Pitágoras, estabelecendo uma relação entre o quadrado da medida unidimensional $|\cdot|_1$ de um conjunto real e os quadrados das medidas de suas projeções ortogonais nos subespaços de uma partição ortogonal, e a versão complexa que envolve medidas bidimensionais $|\cdot|_2$ não quadradas.

3.1 Para linhas

Teorema 3.1

(Teorema de Pitágoras Generalizado para Linhas)

Seja $L \subset X$ um subespaço unidimensional e $X = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ uma partição ortogonal. Dado qualquer conjunto mensurável de Lebesgue $S \subset L$, seja S_j sua projeção ortogonal em V_j . Então:

- $|S|_1^2 = \sum_{j=1}^k |S_j|_1^2$ no caso real,
- $|S|_2 = \sum_{j=1}^k |S_j|_2$ no caso complexo.

Demonstração. • Caso real

Na Definição 2.1 temos que $\pi_{L, V_j} = \frac{|P_{V_j}(S)|_1}{|S|_1} = \frac{|S_j|_1}{|S|_1}$ e na Proposição 2.11 temos que $\sum_{j=1}^k \pi_{L, V_j}^2 = 1$, portanto

$$1 = \sum_{j=1}^k \pi_{L, V_j}^2 = \sum_{j=1}^k \frac{|S_j|_1^2}{|S|_1^2}.$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^k |S_j|_1^2 = |S|_1^2.$$

- No caso complexo, na Definição 2.1 temos que $\pi_{S, V_j} = \frac{|P_{V_j}(S)|_2}{|S|_2} = \frac{|S_j|_2}{|S|_2}$ e na Proposição 2.11 no caso complexo temos que $\sum_{j=1}^k \pi_{S, V_j} = 1$, daí

$$1 = \sum_{j=1}^k \pi_{S, V_j} = \sum_{j=1}^k \frac{|S_j|_2}{|S|_2},$$

e portanto,

$$\sum_{j=1}^k |S_j|_2 = |S|_2. \quad \square$$

A figura 3 mostra o caso real, onde o quadrado do comprimento de S é a soma dos quadrados dos comprimentos de suas projeções ortogonais S_x , S_y e S_z nos eixos coordenados.

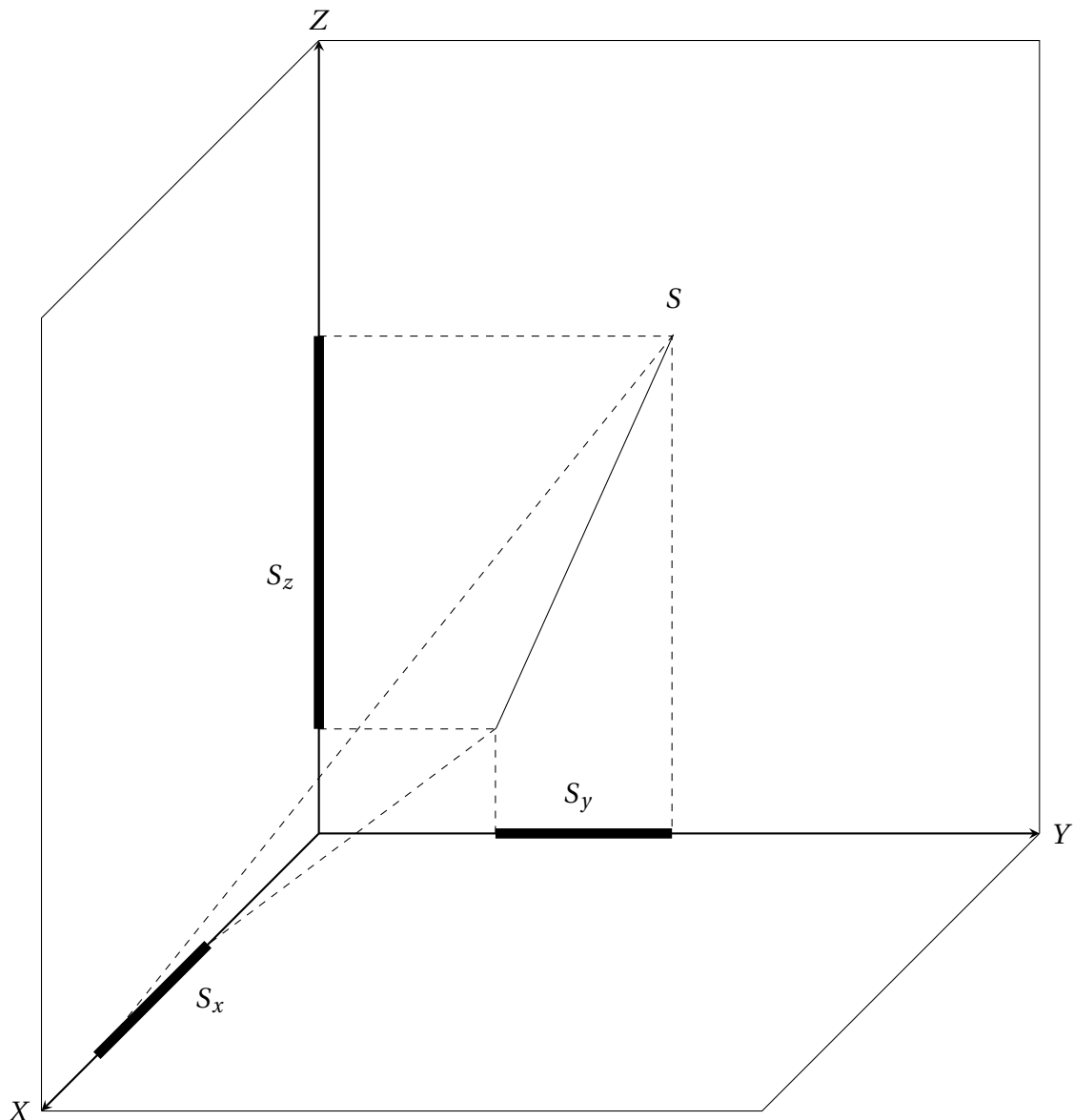


Figura 3 – Teorema de Pitágoras para linhas: $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$.

A figura 4 ilustra o Teorema para o caso complexo: uma área A em uma linha complexa Cv é a soma das áreas de suas projeções ortogonais nas linhas complexas Cv_1 e Cv_2 de uma base ortogonal de \mathbb{C}^2 .

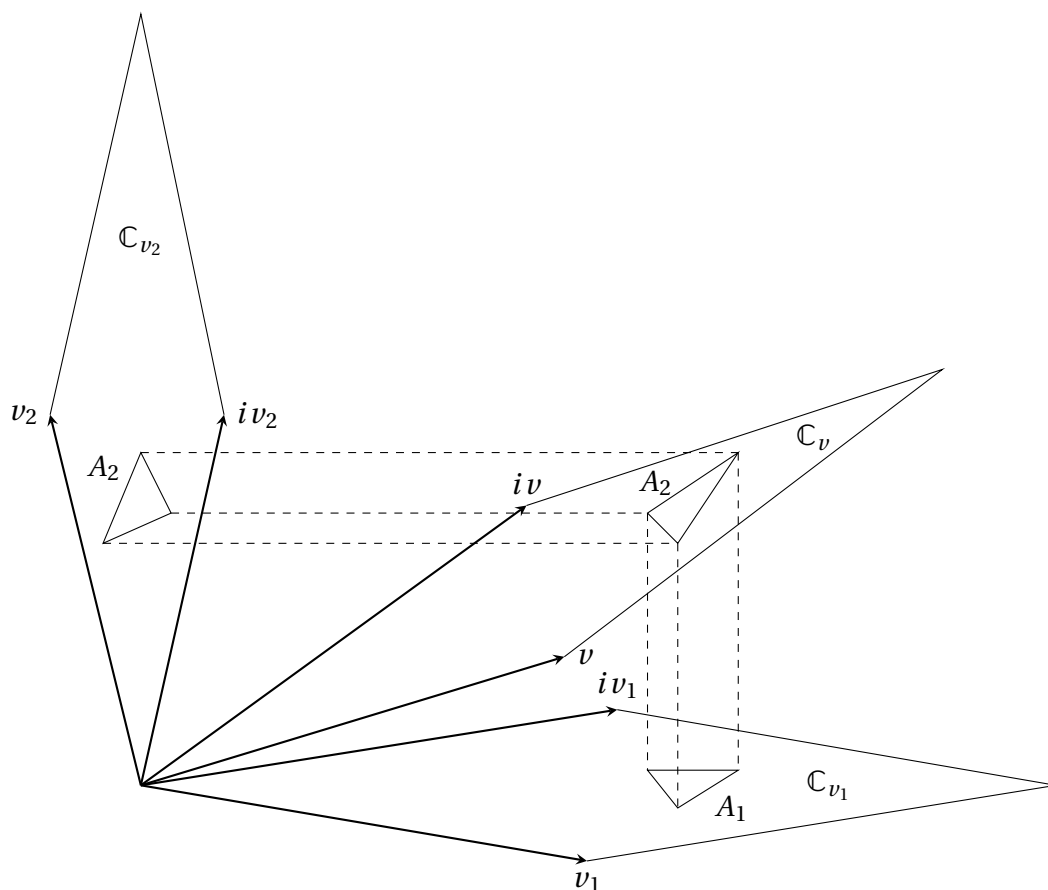


Figura 4 - Teorema de Pitágoras para linhas complexas: $A = A_1 + A_2$

3.2 Para subespaços

Teorema 3.2

(Teorema de Pitágoras Generalizada para Subespaços) Seja $V \subset X$ subespaço de dimensão $\dim V = p$. Para todo subconjunto $S \subset V$ Lebesgue mensurável tem-se

- $|S|_p^2 = \sum_I |S_I|_p^2$ caso real;
- $|S|_{2p}^2 = \sum_I |S_I|_{2p}^2$ no caso complexo.

onde as somas são feitas sobre as projeções ortogonais S_I de S em todos os subespaços coordenados de dimensão p de uma base ortogonal de X .

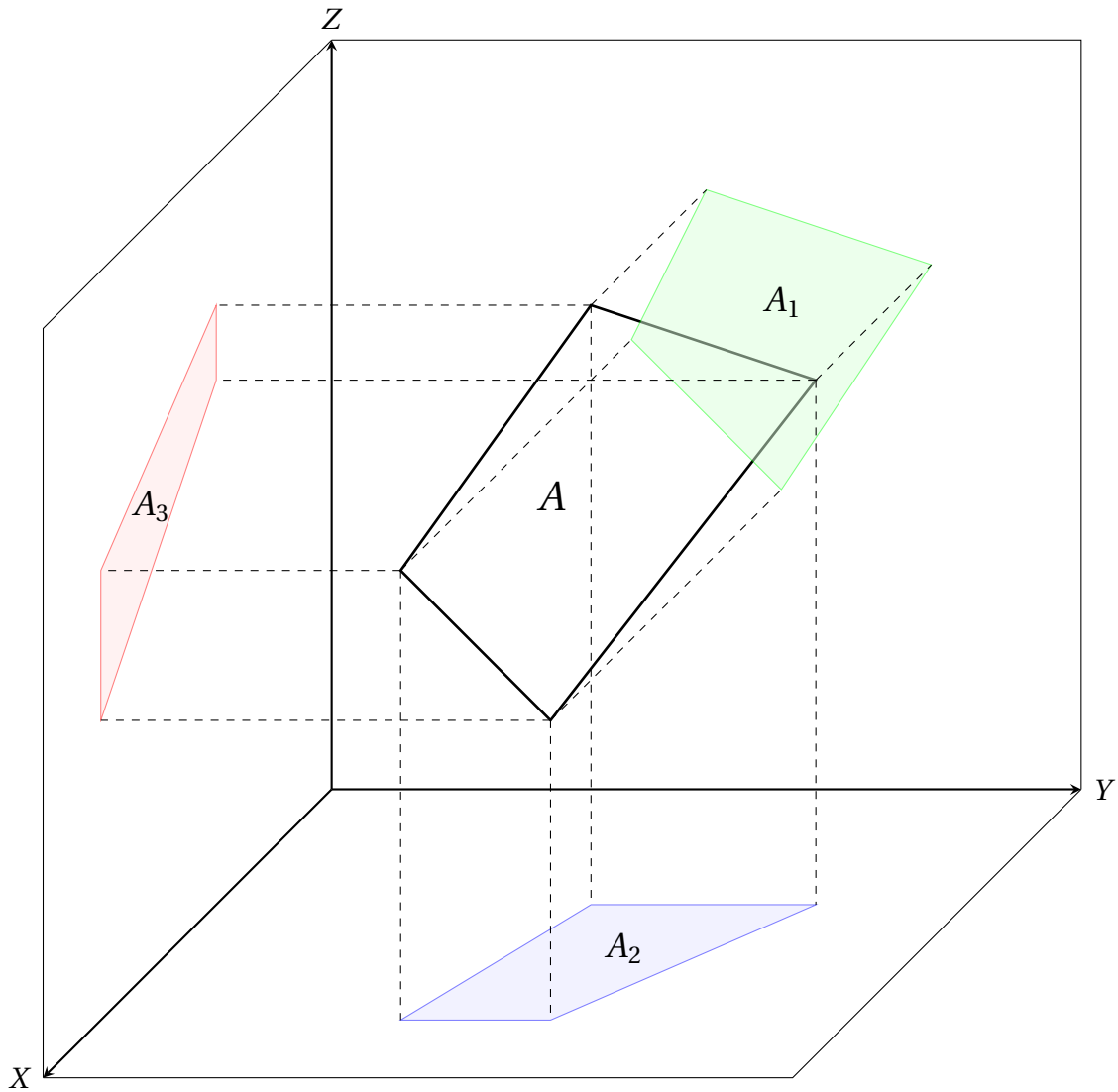


Figura 5 - Teorema de Pitágoras para subespaços: $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$.

Demonstração. Temos que $\pi_{V, V_I} = \frac{\|P_{V_I} S\|}{\|S\|} = \frac{|S_I|}{|S|}$. Usando o [Teorema 2.12](#) obtemos;

- No caso real,

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_I \pi_{V, V_I}^2 = \sum_I \left(\frac{|S_I|_p}{|S|_p} \right)^2 \\ &= \sum_I \frac{|S_I|_p^2}{|S|_p^2}, \end{aligned}$$

portanto

$$|S|_p^2 = \sum_I |S_I|_p^2.$$

- No caso complexo. Usando o [Teorema 2.12](#) temos;

$$1 = \sum_I \pi_{V, V_I} = \sum_I \frac{|S_I|_{2p}}{|S|_{2p}}$$

portanto,

$$\sum_I |S_I|_{2p} = |S|_{2p}$$

□

Teorema 3.3**(Teorema de Pitágoras Generalizado para Subespaços de dimensões diferentes)**

Sejam $V \subset X$ um subespaço de dimensão p , $S \subset V$ um conjunto mensurável de Lebesgue, e $p \leq q \leq n = \dim X$. Então:

- $|S|_p^2 = \binom{n-p}{n-q}^{-1} \cdot \sum_J |S_J|_p^2$ no caso real,
- $|S|_{2p} = \binom{n-p}{n-q}^{-1} \cdot \sum_J |S_J|_{2p}$ no caso complexo.

onde os S_J 's são projeções ortogonais de S nos subespaços coordenados de dimensão q de uma base ortogonal de X , e $|\cdot|_k$ é a medida de Lebesgue de dimensão k .

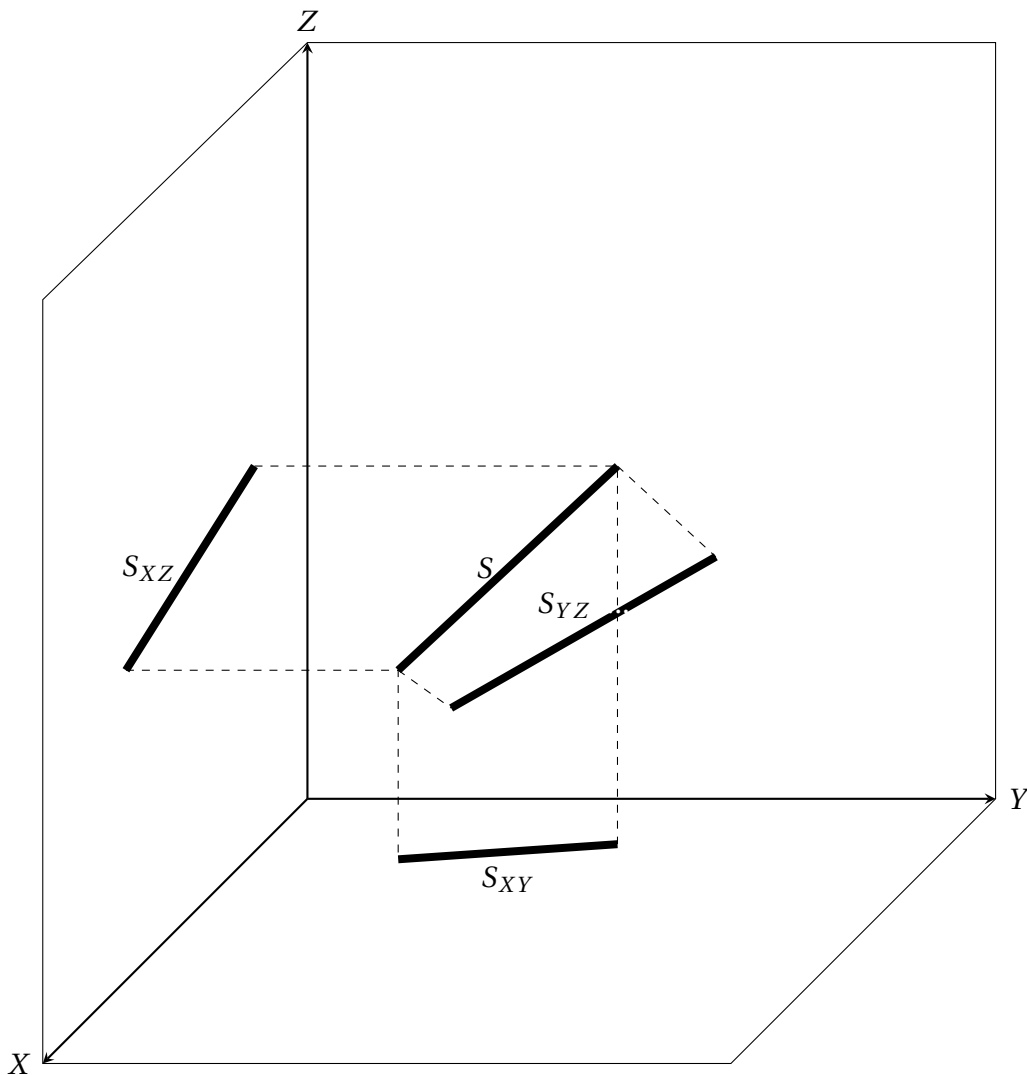


Figura 6 – Teorema de Pitágoras para subespaços de dimensões diferentes: $S^2 = \frac{1}{2} (S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{xz}^2)$

Demonstração. Seja (u_1, u_2, \dots, u_n) uma base ortonormal de X .

Cada subespaço coordenado V_I de dimensão p é determinado pela escolha de p desses vetores, com índices dados por $I \in \mathcal{I}_p^n$.

E cada subespaço coordenado V_J de dimensão q é dada por um $J \in \mathcal{J}_q^n$.

No caso real, o Teorema 3.2 nos dá $|S|_p^2 = \sum_{I \in \mathcal{J}_p^n} |S_I|_p^2$.

Fixado um multi-índice $I \in \mathcal{J}_p^n$, há $n - p$ u_i 's com $i \notin I$, e escolhendo $q - p$ deles podemos acrescentá-los a I para formar um $J \in \mathcal{J}_q^n$. Há $\binom{n-p}{q-p} = \binom{n-p}{n-q}$ maneiras de fazer isso, que é portanto o número de subespaços coordenados de dimensão q nos quais V_I está contido. Logo:

$$\sum_{J \in \mathcal{J}_q^n} \sum_{\substack{I \in \mathcal{J}_p^n, \\ I \subset J}} |S_I|_p^2 = \binom{n-p}{n-q} \sum_{I \in \mathcal{J}_p^n} |S_I|_p^2 = \binom{n-p}{n-q} |S|_p^2. \quad (3.1)$$

Por outro lado, se S_J é a projeção ortogonal de S em V_J , com $J \in \mathcal{J}_q^n$, sua projeção em V_I com $I \subset J$, então a projeção ortogonal de S_J em V_I é S_I . Assim, o Teorema 3.2 também nos dá:

$$|S_J|_p^2 = \sum_{\substack{I \in \mathcal{J}_p^n, \\ I \subset J}} |S_I|_p^2. \quad (3.2)$$

Combinando (3.1) e (3.2), temos:

$$\sum_{J \in \mathcal{J}_q^n} |S_J|_p^2 = \binom{n-p}{q-p} |S|_p^2. \quad \square$$

Capítulo 4

Ângulos Assimétricos

4.1 Definições e propriedades

Definição 4.1

Dados subespaços $V, W \subset X$ o ângulo assimétrico [17] de V para W é dado por

$$\Theta_{V,W} = \cos^{-1} \frac{\|P_W B\|}{\|B\|} \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

onde B é uma blade não-nula tal que $[B] = V$ e P_W é a projeção ortogonal em W .

No caso real $\cos \Theta_{V,W}$ mede o quanto um volume p -dimensional em V (com $p = \dim V$) contrai se projetado ortogonalmente em W . E no caso complexo $\cos^2 \Theta_{V,W}$ faz o mesmo com volumes $2p$ -dimensionais.

O ângulo é assimétrico pois em geral,

$$\Theta_{V,W} \neq \Theta_{W,V}$$

quando as dimensões são diferentes. Este tipo de ângulo é incomum, mas tem propriedades importantes, algumas são mencionadas a seguir.

Proposição 4.2

Sejam $V, W \subset X$ subespaços determinados por blades A e B respectivamente, P_W é projeção ortogonal em W e os ângulos principais são $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{\min\{p,q\}}$, onde $p = \dim V$ e $q = \dim W$. Então:

1. $\cos \Theta_{V,W} = \begin{cases} \prod_{i=1}^p \cos \theta_i & \text{se } p \leq q, \\ 0 & \text{se } p > q; \end{cases}$
2. $\Theta_{V,W} = 0 \iff V \subset W$;
3. $\Theta_{V,W} = \frac{\pi}{2} \iff V \cap W^\perp \neq \{0\}$;
4. $|\langle A, B \rangle| = \|A\| \|B\| \cos \Theta_{V,W}$ se $p = q$;

5. Se $p = q$ então $\Theta_{V,W} = \Theta_{W,V}$;
6. $\Theta_{V,W} = \Theta_{W^\perp, V^\perp}$;
7. $\pi_{V,W} = \begin{cases} \cos \Theta_{V,W} & \text{no caso real,} \\ \cos^2 \Theta_{V,W} & \text{no caso complexo.} \end{cases}$

Demonstração. Considere (e_1, e_2, \dots, e_p) e (f_1, f_2, \dots, f_q) bases principais dos subespaços V e W de X , respectivamente. Como são ortonormais, $\|e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_p\| = \|f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_q\| = 1$.

(1) Seja $B = e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_p$. Pela definição 4.1 temos que $\Theta_{V,W} = \cos^{-1} \left(\frac{\|P_W B\|}{\|B\|} \right)$.

Se $p > q$ temos que, $\|P_W B\| = 0$, logo, $\Theta_{V,W} = \cos^{-1}(0)$, portanto, $\cos \Theta_{V,W} = 0$.

Se $p \leq q$ então,

$$\begin{aligned} P_W B &= P_W(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_p) \\ &= P_W(e_1) \wedge P_W(e_2) \wedge \dots \wedge P_W(e_p) \\ &= (\cos \theta_1 \cdot f_1) \wedge (\cos \theta_2 \cdot f_2) \wedge \dots \wedge (\cos \theta_p \cdot f_p) \\ &= \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \dots \cdot \cos \theta_p \cdot f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Theta_{V,W} &= \cos^{-1} \left(\frac{\|\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \dots \cdot \cos \theta_p \cdot f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p\|}{\|e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_p\|} \right) \\ &= \cos^{-1}(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \dots \cdot \cos \theta_p), \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} \cos \Theta_{V,W} &= \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \dots \cdot \cos \theta_p \\ &= \prod_{i=1}^p \cos \theta_i. \end{aligned}$$

(2). De (1) tiramos que $\Theta_{V,W} = 0 \iff 1 = \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \dots \cdot \cos \theta_p \iff \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_p = 0 \iff V \subset W$

(3). Por (1), temos, no caso $p \leq q$,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \cos^{-1}(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \dots \cdot \cos \theta_p) \\ \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) &= \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \dots \cdot \cos \theta_p \\ 0 &= \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \dots \cdot \cos \theta_p. \end{aligned}$$

A última igualdade implica que algum dos $\cos \theta_i$'s é igual a zero. Como θ_p é o maior ângulo, temos $\theta_p = \frac{\pi}{2}$ o que implica que $V \cap W^\perp \neq \{0\}$, e vice-versa. Se $p > q$, sempre temos $V \cap W^\perp \neq \{0\}$, e $\Theta_{V,W} = \frac{\pi}{2}$ por (1).

(4). Com $p = q$, dados $A \in \wedge^p V$ e $B \in \wedge^p W$ temos $A = \lambda e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_p$ e $B = \delta f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p$, para $\lambda, \delta \in \mathbb{F}$. Logo $\|A\| = |\lambda|$ e $\|B\| = |\delta|$, e

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \langle \lambda e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_p, \delta f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p \rangle \\ &= \bar{\lambda} \delta \langle e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_p, f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p \rangle \\ &= \bar{\lambda} \delta \det(\langle e_i, f_j \rangle) \\ &= \bar{\lambda} \delta \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \dots \cdot \cos \theta_p \\ &= \bar{\lambda} \delta \cos \Theta_{V,W}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} |\langle A, B \rangle| &= |\lambda| \cdot |\delta| \cdot \cos \Theta_{V,W} \\ &= \|A\| \cdot \|B\| \cdot \cos \Theta_{V,W}. \end{aligned}$$

(5). Dados $A \in \wedge^p V$ e $B \in \wedge^p W$, tomamos

$$\Theta_{V,W} = \cos^{-1} \left(\frac{|\langle A, B \rangle|}{\|A\| \cdot \|B\|} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{|\langle B, A \rangle|}{\|B\| \cdot \|A\|} \right) = \Theta_{W,V}.$$

(6) Temos que $\dim V \leq \dim W$ se, e somente se, $\dim W^\perp \leq \dim V^\perp$. E os ângulos principais não-nulos de V e W são iguais aos de V^\perp e W^\perp [20]. Logo o resultado segue do item (1).

(7). Segue da Definição 4.1, da Definição 2.1 e da interpretação da norma de blade. \square

Nesta proposição, temos: (2) mostra que $\Theta_{V,W}$ mede quanto falta para que V esteja contido em W , (3) mostra que o ângulo assimétrico ser igual a $\frac{\pi}{2}$ não significa que todo o subespaço V seja ortogonal a W , mas basta que uma direção seja. Isto ajuda a entender a assimetria do ângulo, por exemplo, uma reta V pode estar mais ou menos perto de estar contida em um plano W e $0 \leq \Theta_{V,W} \leq \frac{\pi}{2}$, mas W nunca estará perto de estar contido em V , e sempre terá alguma direção ortogonal a V , logo $\Theta_{V,W} = \frac{\pi}{2}$. (5) e (6) mostram que entre subespaços da mesma dimensão não há tal assimetria. As demais propriedades permitem calcular o ângulo, assim como os seguintes resultados.

Proposição 4.3

Se P é uma matriz da projeção ortogonal de V em W ($P: V \rightarrow W$) em bases ortonormais de V e W , então

$$\cos^2 \Theta_{V,W} = \det(\bar{P}^T P).$$

Se $\dim V = \dim W$, então

$$\cos \Theta_{V,W} = |\det(P)|.$$

Demonstração. Da Proposição 2.9 e da Proposição 4.2 item (7), temos

- Caso real:

$$\cos \Theta_{V,W} = \pi_{V,W} = \sqrt{\det(P^T P)},$$

portanto,

$$\cos^2 \Theta_{V,W} = \det(P^T P).$$

Se $\dim V = \dim W$, temos,

$$\cos \Theta_{V,W} = \pi_{v,W} = |\det(P)|$$

- Caso complexo é análogo. □

Proposição 4.4

Dadas bases (v_1, v_2, \dots, v_p) de V e (w_1, w_2, \dots, w_q) de W , sejam $A_{p \times p} = \langle v_i, v_j \rangle$, $B_{q \times q} = \langle w_i, w_j \rangle$ e $C_{q \times p} = \langle w_i, v_j \rangle$. Então

$$\cos^2 \Theta_{V,W} = \frac{\det(\bar{C}^T B^{-1} C)}{\det A}.$$

Se $p = q$ então

$$\cos^2 \Theta_{V,W} = \frac{|\det C|^2}{\det A \cdot \det B}.$$

Demonstração. Pode ser encontrada em [11] □

4.2 Identidades

A identidade pitagórica $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ pode ser interpretada como $\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y = 1$ onde θ_x e θ_y representam os ângulos que uma reta faz com os eixos x e y . Essa relação nos conduz a generalizações relevantes para subespaços reais e complexos.

Teorema 4.5

(Identidade Pitagórica Generalizada para Linhas)

Dada uma partição ortogonal $X = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ e um subespaço unidimensional $L \subset X$, então

$$\sum_{i=1}^k \cos^2 \Theta_{L,W_i} = 1.$$

Demonstração. Utilizando a item (7) da proposição (4.2) e o teorema (2.11) obtemos:

- Caso real:

$$\sum_{i=1}^K \cos^2 \Theta_{L,W_i} = \sum_{i=1}^K \pi_{L,W_i}^2 = 1,$$

- Caso complexo:

$$\sum_{i=1}^K \cos^2 \Theta_{L,W_i} = \sum_{i=1}^K \pi_{L,W_i} = 1.$$

□

Teorema 4.6**(Teorema de Pitágoras Esférico Generalizado)**

Dados subespaços $U, W \subset X$ e $V \subset W$, seja P_W a projeção ortogonal em W . Então

$$\cos \Theta_{U,V} = \cos \Theta_{U,P_W(U)} \cos \Theta_{P_W(U),V}.$$

Demonstração. Se $U \cap W^\perp \neq \{0\}$ então $\Theta_{V,W} = \Theta_{W,V} = \frac{\pi}{2}$ e os dois lados dão 0. $U \cap W^\perp = \{0\}$ então $\dim V = \dim W$. Considere representação matricial das projeções ortogonais $P_1 : U \rightarrow V$, $P_2 : P_W U \rightarrow V$ e $P_3 : U \rightarrow P_W U$ em bases ortonormais de X .

Note que $P_1 = P_2 P_3$ e P_3 é uma matriz quadrada, daí temos:

$$\det(P_1^\top P_1) = |\det(P_3)|^2 \cdot \det(P_2^\top P_2).$$

Aplicando o resultado da Proposição 2.9 e item 7 da proposição (4.2) segue o resultado. \square

Teorema 4.7**(Identidade Pitagórica Generalizada para Subespaços)**

Seja $V \subset X$ um subespaço de dimensão p , e sejam W_i 's todos os subespaços coordenados de dimensão $0 \leq q \leq n = \dim X$ de uma base ortogonal de X . Então:

1. Se $p \leq q$ então $\sum_i \cos^2 \Theta_{V,W_i} = \binom{n-p}{n-q}$.
2. Se $p > q$ então $\sum_i \cos^2 \Theta_{W_i,V} = \binom{p}{q}$.

Demonstração. (1) Utilizando o Teorema 3.3 e o item (7) da Proposição 4.2 obtemos

- Caso real:

$$\binom{n-p}{n-q} = \sum_i \frac{|S_i|_p^2}{|S|_p^2} = \sum_i \pi_{V,W_i}^2 = \sum_i \cos^2 \Theta_{V,W_i}.$$

- Caso complexo:

$$\binom{n-p}{n-q} = \sum_i \frac{|S_i|_p^2}{|S|_p^2} = \sum_i \pi_{V,W_i} = \sum_i \cos^2 \Theta_{V,W_i}.$$

- (2) - Caso real: Pelo item (6) da Proposição 4.2 temos,

$$\sum_i \cos^2_{W_i,V} = \sum_i \cos^2_{V^\perp, W_i^\perp},$$

Usando o item (1) e considerando as dimensões de $\dim W_i^\perp = n - q$ e $\dim V^\perp = n - p$, obtemos

$$\sum_i \cos^2_{W_i,V} = \sum_i \cos^2_{V^\perp, W_i^\perp} = \binom{n - (n - p)}{n - (n - q)} = \binom{p}{q}.$$

- O caso complexo é análogo. \square

Considerações Finais

Ao longo do desenvolvimento do trabalho, podemos assegurar que os resultados propostos, relacionados à generalização do Teorema de Pitágoras, das identidades pitagóricas e de suas relações com ângulos assimétricos, foram alcançados. Dessa forma, cumprimos os objetivos estabelecidos, como a utilização dos fatores de projeção de volumes e a interpretação do determinante para formular demonstrações mais simples do que as encontradas na literatura, visando a simplificação e clareza dos resultados. Demonstramos que, apesar das diferenças entre os espaços reais e complexos, as identidades pitagóricas se mantêm em ambos. No entanto, as medidas (áreas, volumes etc.) associadas ao espaço complexo não se relacionam com suas projeções ortogonais por expressões quadráticas.

Referências

- 1 CARVALHO, H. M. de. Notas históricas e demonstrações do teorema de De Gua sobre as áreas das faces de um tetraedro: “Pitágoras” em três (ou n) dimensões. *CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 2022. [1](#)
- 2 DONCHIAN, P. S.; COXETER, H. An n -dimensional extension of Pythagoras’ theorem. *The Mathematical Gazette*, Cambridge University Press, v. 19, n. 234, p. 206–206, 1935. [1](#)
- 3 QUADRAT, J.-P.; LASSERRE, J. B.; HIRIART-URRUTY, J.-B. Pythagoras’ theorem for areas. *The American Mathematical Monthly*, Taylor & Francis, v. 108, n. 6, p. 549–551, 2001. [1](#)
- 4 AMIR-MOÉZ, A. R.; BYERLY, R. E.; BYERLY, R. R. Pythagorean theorem in unitary spaces. *Publikacije Elektrotehničkog fakulteta. Serija Matematika*, JSTOR, p. 85–89, 1996. [1](#)
- 5 YENG, S.; LIN, T.; LIN, Y.-F. The n -dimensional Pythagorean theorem. *Linear and Multilinear Algebra*, Taylor & Francis, v. 26, n. 1-2, p. 9–13, 1990. [1](#)
- 6 EIFLER, L.; RHEE, N. H. The n -dimensional Pythagorean theorem via the divergence theorem. *The American Mathematical Monthly*, Taylor & Francis, v. 115, n. 5, p. 456–457, 2008. [1](#)
- 7 ATZEMA, E. J. Beyond Monge’s theorem: A generalization of the Pythagorean theorem. *Mathematics Magazine*, Taylor & Francis, v. 73, n. 4, p. 293–296, 2000. [1](#)
- 8 CONANT, D.; BEYER, W. Generalized Pythagorean theorem. *The American Mathematical Monthly*, Taylor & Francis, v. 81, n. 3, p. 262–265, 1974. [1](#)
- 9 DRUCKER, D. A comprehensive Pythagorean theorem for all dimensions. *The American Mathematical Monthly*, Taylor & Francis, v. 122, n. 2, p. 164–168, 2015. [1](#)
- 10 CZYZEWSKA, K. Generalization of the Pythagorean theorem. *Demonstratio Mathematica*, De Gruyter Open, v. 24, n. 1-2, p. 305–310, 1991. [1](#)
- 11 MANDOLESI, A. L. G. Projection factors and generalized real and complex Pythagorean theorems. *Advances in Applied Clifford Algebras*, Springer, v. 30, n. 3, p. 43, 2020. [1](#), [36](#)
- 12 GALÁNTAI, A.; HEGEDŰS, C. J. Jordan’s principal angles in complex vector spaces. *Numerical Linear Algebra with Applications*, Wiley Online Library, v. 13, n. 7, p. 589–598, 2006. [1](#), [2](#), [7](#), [22](#)
- 13 GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. *Matrix Computations*. [S.l.]: The Johns Hopkins University Press, 2013. [1](#), [2](#), [7](#)
- 14 GALLIER, J. Q.; QUAINANCE, J. *Differential geometry and Lie groups*. [S.l.]: Springer, 2020. v. 12. [1](#)

- 15 LIMA, E. L. *Álgebra exterior*. [S.l.]: IMPA, 2009. 1
- 16 WINITZKI, S. *Linear algebra via exterior products*. [S.l.]: Sergei Winitzki, 2009. 1, 10
- 17 MANDOLESKI, A. L. G. Grassmann angles between real or complex subspaces. *arXiv preprint arXiv:1910.00147*, 2019. 2, 33
- 18 MANDOLESKI, A. L. G. Full geometric interpretation of complex blades, determinants and Gramians. *arXiv preprint arXiv:2403.17022*, 2024. 2
- 19 CHO, E. C. Dihedral angles of n-simplices. *Applied mathematics letters*, Pergamon, v. 5, n. 4, p. 55–57, 1992. 2
- 20 GLUCK, H. Higher curvatures of curves in euclidean space, II. *The American Mathematical Monthly*, Taylor & Francis, v. 74, n. 9, p. 1049–1056, 1967. 2, 22, 35
- 21 JIANG, S. Angles between Euclidean subspaces. *Geom. Dedicata*, v. 63, p. 113–121, 1996. 2
- 22 MANDOLESKI, A. L. G. Blade products and angles between subspaces. *Advances in Applied Clifford Algebras*, Springer, v. 31, n. 5, p. 69, 2021. 2
- 23 MANDOLESKI, A. L. G. Quantum fractionalism: the Born rule as a consequence of the complex Pythagorean theorem. *Phys. Lett. A*, v. 384, n. 28, p. 126725, 2020. 2
- 24 MANDOLESKI, A. L. G. Asymmetric geometry of Total Grassmannians. *arXiv preprint arXiv:2310.17865*, 2023. 2
- 25 YOKONUMA, T. *Tensor spaces and exterior algebra*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 1992. 10
- 26 MARCUS, M. Finite dimensional multilinear algebra. (*No Title*), 1973. 10
- 27 WEDIN, P. Å. On angles between subspaces of a finite dimensional inner product space. In: SPRINGER. *Matrix Pencils: Proceedings of a Conference Held at Pite Havsbad, Sweden, March 22–24, 1982*. [S.l.], 2006. p. 263–285. 22

Universidade Federal da Bahia

Instituto de Matemática e Estatística / Programa de Pós-Graduação em Matemática

Campus Universitário de Ondina, Av. Ademar de Barros s/n. Salvador-BA. CEP 40.170-110

www.pgmat.ufba.br