



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
TESE DE DOUTORADO



Pontes Suspensas modeladas através de vigas de Timoshenko-Ehrenfest

Leandro Correia Araújo

SALVADOR, BA

2024

Leandro Correia Araújo

Pontes Suspensas modeladas através de vigas de Timoshenko-Ehrenfest

Tese de Doutorado apresentada ao colegiado do curso de Doutorado em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Matemática.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Orientador: Carlos Alberto Raposo da Cunha

Coorientador: Joilson Oliveira Ribeiro

SALVADOR, BA

2024

Leandro Correia Araújo

Pontes Suspensas modeladas através de vigas de Timoshenko-Ehrenfest

Tese de Doutorado apresentada ao colegiado do curso de Doutorado em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Aprovada em 17/12/2024 pela seguinte comissão examinadora

Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha (Orientador) - UFPA

Prof. Dr. Joilson Oliveira Ribeiro (Co-orientador) - UFBA

Prof. Dr. Mirelson Martins Freitas - UnB

Prof. Dr. Luiz Gutemberg Rosário Miranda - UFPA

Prof. Dr. Kleyber Mota da Cunha - UFBA

SALVADOR, BA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal da Bahia
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

D722c Araújo, Leandro Correia
Pontes Suspensas modeladas através de vigas de Timoshenko-Ehrenfest / Leandro Correia
Araújo. – SALVADOR, BA, 2024
81 f. : il. color

Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA, SALVADOR, BA, 2024.
Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha

1. Palavra-chave1. 2. Palavra-chave2. 3. Palavra-chave3. I. da Cunha, Carlos Alberto Raposo da Cunha. Orient. II. Universidade Federal da Bahia. III. Instituto de Matemática. IV. Título.

CDD 515.353

À Duda, na esperança que ela venha a ler este trabalho algum dia...

Agradecimentos

Agradeço primeiro à Deus e também à minha família, em especial à minha mãe, dona Lourdes, que acreditou em mim desde o ventre e fez tudo o que pode para que eu estudasse. Gratidão que se estende aos amigos, sem os quais não há dúvidas que tornaram essa jornada menos sinuosa, tomo o cuidado aqui de citar alguns como Joedson, Sávio, Elivan, Glaene, Ênio, Janara e Eduardo, além de outros que mesmo não citados aqui, foram muito importantes. Agradeço aos professores e demais funcionários da Ufba que contribuíram para minha formação. Agradeço ao professor Luiz Gutemberg Rosário Miranda por ter proposto o capítulo 3 e por sua colaboração efetiva na elucidação das questões referentes à análise assintótica do modelo parcialmente amortecido. Agradeço ao professor Joilson Oliveira Ribeiro, co-orientador, pelo constante apoio em minha trajetória acadêmica. Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha, o qual me ajudou a alcançar os sonhos de publicar artigos na área de Matemática e tornar-me doutor.

Por fim, agradeço aos membros da banca, que me honraram com suas presenças e pelos enriquecedores comentários aprimorando ainda mais este trabalho.

“É isso, é o que faz um herói, né? Parte da jornada é o fim!”

Tony Stark - Vingadores Ultimato - 2019

Resumo

Este trabalho trata da existência global de solução e do comportamento assintótico para três modelos de ponte suspensa: totalmente amortecido com atrito, parcialmente amortecido com atrito e totalmente amortecido com viscoelasticidade do tipo Kelvin-Voigt. Para ambos os modelos, é aplicada a teoria dos semigrupos para provar a existência global da solução e na análise do comportamento assintótico. No primeiro modelo citado acima, obtemos analiticidade para o semigrupo associado, propriedade que implica o decaimento exponencial da solução. Para o segundo obtemos decaimento exponencial, caso válida a condição $\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$ e caso contrário é válido o decaimento polinomial. Por fim, para o último modelo, obtemos o decaimento exponencial.

Palavras-chave: Ponte Suspensa. vigas de Timoshenko-Ehrenfest. Existência de solução. Comportamento Assintótico. Semigrupos.

Abstract

This work deals with the global existence of a solution and the asymptotic behavior for three suspension bridge models: fully damped with friction, partially damped with friction and fully damped with Kelvin-Voigt type viscoelasticity. For both models, semigroup theory is applied to prove the global existence of the solution and to analyze the asymptotic behavior. In the first model mentioned above, we obtain analyticity for the associated semigroup, a property that implies the exponential decay of the solution. For the second we obtain exponential decay, if the condition $\frac{\bar{k}}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$ is valid and otherwise the polynomial decay is valid. Finally, for the last model, we obtain exponential decay.

Keywords: Suspension Bridge. Timoshenko-Ehrenfest Beams. Existence of solution. Asymptotic behavior. Semigroups.

Lista de abreviaturas e siglas

IME	Instituto de Matemática e Estatística
UFBA	Universidade Federal da Bahia
UFPA	Universidade Federal do Pará
UFSJ	Universidade Federal de São João Del Rei
UnB	Universidade de Brasília
UESB	Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas

Lista de símbolos

\rightharpoonup	convergência fraca
\rightharpoonup^*	convergência fraca estrela
$C_0^\infty(\Omega)$	espaço das funções $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ e com suporte compacto em Ω .
$L^p(\Omega)$	conjunto das (classes de) funções p -integráveis à Lebesgue em Ω
$\mathcal{D}(\Omega)$	espaço das funções testes em Ω
$\mathcal{D}'(\Omega)$	dual de $\mathcal{D}(\Omega)$ (conjunto de todas as distribuições)
$L_{\text{loc}}^1(\Omega)$	conjunto das funções localmente integráveis
$W^{m,p}(\Omega)$	espaços de Sobolev
$L^p(0, T; X)$	conjunto das (classes de) funções vetoriais mensuráveis

Lista de Figuras

Figura 1 – Ponte Tacoma em sua inauguração.	2
Figura 2 – Ponte Tacoma após ruptura de sua estrutura.	3
Figura 3 – Viga sob ação.	5
Figura 4 – Paul Ehrenfest (à esquerda) e Stephen Timoshenko em São Petesburgo.	7
Figura 5 – Deslocamentos do Cabo Principal e do Deque da Ponte	8
Figura 6 – Ponte Suspensa	31

Sumário

Introdução	1
1	DEFINIÇÕES E TEOREMAS PRELIMINARES 11
1.1	Espaços de Sobolev e Desigualdades importantes 11
1.1.1	Espaço das Distribuições 12
1.1.2	Derivada de Distribuições 16
1.1.3	Espaços de Sobolev 17
1.2	Semigrupos 18
1.2.1	Gerador infinitesimal 19
1.2.2	Resultados de existência e de estabilidade 24
1.2.2.1	Resultados relativos ao comportamento assintótico 26
2	PONTE SUSPensa COM AMORTECIMENTO POR ATRITO 31
2.1	Energia do Sistema 32
2.2	Semigrupo Associado e Existência de Solução 33
2.3	Analiticidade do Semigrupo 37
3	PONTE SUSPensa PARCIALMENTE AMORTECIDA 43
3.1	Energia do Sistema 43
3.2	Semigrupo Associado e Existência de Solução 45
3.2.1	Notação e Considerações 45
3.2.2	Existência e unicidade de solução 46
3.3	Análise assintótica 48
3.3.1	$\gamma_1 \neq 0, \gamma_2 = 0$ e $\gamma_3 \neq 0$ 49
3.3.2	$\gamma_1 \neq 0, \gamma_2 \neq 0$ e $\gamma_3 = 0$ 56
3.3.3	$\gamma_1 = 0, \gamma_2 \neq 0$ e $\gamma_3 \neq 0$ 63
4	AMORTECIMENTO DO TIPO KELVIN-VOIGT 65
4.1	Ponte Suspensa com amortecimento do tipo Kelvin-Voigt 65
4.2	Energia do Sistema 66
4.3	Semigrupo Associado e Existência de Solução 67
4.4	Comportamento Assintótico 70
Considerações Finais e Perspectivas Futuras	75

Introdução

A necessidade de superar obstáculos é onipresente na história da humanidade e imagina-se que as primeiras pontes surgiram por ação da própria natureza com a queda de árvores, o que permitia a travessia entre dois pontos isolados fisicamente para seres humanos (e outros animais) em busca de alimentos antes de sua transição de nômades para vivência em locais fixos. Com o tempo estas foram aprimoradas com os recursos que o ser humano dispunha nas mais diversas épocas como cipós, pedras, cordas, bambu, cabos de aço, concreto... De forma mais objetiva, uma ponte, conforme a ABNT, [4], é uma “estrutura sujeita a ação de carga em movimento, com posicionamento variável, aqui chamada de carga móvel, utilizada para transpor um obstáculo natural (rio, córrego, vale etc.)”.

Inicialmente, era comum que essas estruturas possuíssem formato de arco, como a ponte Ponte Arkadiko, que liga as cidades de Tirinte e Epidauro, no Peloponeso, na Grécia, a qual foi construída entre 1300 e 1190 a.C (período micênico) e ainda hoje encontra-se em uso. Os romanos se especializaram na construção de pontes em arco, com destaque para as pontes Mílvia (na qual é costume que casais prendam cadeados no poste de iluminação central, ver [12]) e Santo Ângelo (que é ornamentada com esculturas de anjos), ambas em Roma e sobre o rio Tibre. Somente no século 18, começaram as estruturas em ferro fundido, sendo a primeira delas a ponte em Coalbrookdale, a Iron Bridge, uma ponte em arco que cruza o rio Severn em Shropshire na Inglaterra e que foi inaugurada em 1781.

Em particular, pontes suspensas destacam-se pela capacidade de seu comprimento, a ponte Ponte Çanakkale 1915 na Turquia, por exemplo, possui vão principal com 2023m, superando em 32m a ponte Ponte Akashi-Kaikyo (também conhecida como Ponte de Kobe), localizada no Japão, cujo vão principal mede 1991m. Ainda, alguns desastres despertaram e impulsionaram pesquisas sobre mecanismos de estabilização para tornar as estruturas resistentes a ventos, movimentos de marés, passagens de pessoas e até terremotos. A ponte em Broughton foi uma das primeiras pontes suspensas da Europa, tendo sido construída em 1826, entretanto, em 14 de Abril de 1831 a ponte desabou quando uma companhia do Corpo de Fuzileiros do Exército Britânico marchou através da ponte em passos sincronizados, o que implicou um fenômeno de ressonância mecânica. A ponte Tacoma Narrows, localizada nos Estados Unidos, ver [figura 1](#), desabou em 07 Novembro de 1940, ver

Figura 1 – Ponte Tacoma em sua inauguração.



Fonte: [37].

figura 2, tendo sido inaugurada em Julho do mesmo ano, após ser atingida por ventos com velocidade de cerca de 70km/h. Entretanto, a queda da ponte Tacoma Narrows não ocorreu devido à ressonância mecânica, mas à um efeito aeroelástico chamado flutter (quando uma superfície de sustentação apresenta característica oscilatória auto-excitada a partir de uma determinada velocidade [2]).

Em 2000, a Millennium Bridge, uma ponte suspensa de aço para uso pedonal que liga Bankside à cidade de Londres (ao custo de mais de 20 milhões de libras à época e inaugurada pela rainha Elizabeth II), sofreu uma vibração lateral inesperada e excessiva devido a uma resposta estrutural ressonante, fazendo com que fechasse alguns dias após sua abertura e os reparos levaram mais de um ano para serem concluídos. Problemas como estes são resolvidos através da introdução de mecanismos estabilizadores na estrutura. Foi o que aconteceu com a Ponte Rio-Niterói, no Brasil, construída em 1968. A ponte balançava com frequência chegando a atingir cerca de 60cm para cima ou para baixo, causando desconforto a quem viajava na ponte. Em 2004 foram instalados atenuadores dinâmicos sincronizados, e esta aplicação evitou desconforto e danos ou falha estrutural total. O colapso nas estruturas mecânicas pode ser considerado um efeito de ressonância, como ocorreu fortemente na ponte Broughton. A ressonância mecânica ocorre quando a energia é transferida de um objeto para outro com a mesma frequência natural ou ressonante. Vibrações fortes podem

Figura 2 – Ponte Tacoma após ruptura de sua estrutura.



Fonte: [37].

causar muitos danos às estruturas e podem desmoronar materiais.

A característica crítica do presente trabalho é a introdução de amortecimentos no sistema para evitar ressonância e produzir estabilização exponencial para a estrutura. Neste trabalho analisaremos o amortecimento externo tipo atrito e o amortecimento interno tipo Kelvin-Voigt. Em 1943, Timoshenko publicou dois artigos sobre ponte suspensas, [34] e [35], e recentemente temos alguns trabalhos onde o modelo da ponte pênsil está sob a ação de diversos mecanismos estabilizadores: O amortecimento por atrito combinado com o amortecimento termoelástico dado pela configuração de Fourier foi considerado em [5] para o sistema da ponte pênsil, onde o cabo é suposto ser isolado termicamente, e é foi provado que a solução decai exponencialmente até zero. O trabalho [5] foi recentemente generalizado para amortecimento por atrito com coeficiente variável no tempo e termos de atraso variáveis no tempo, ver [24]. A dissipação térmica é importante para o amortecimento porque a temperatura é transmitida entre os materiais e o ambiente de maneira natural. Por exemplo, explosões de pavimentos de concreto podem ser causadas por forças de compressão axial induzidas no pavimento pelo aumento da temperatura e umidade, ver [17]. Outro mecanismo de estabilização é o amortecimento viscoelástico. Em [25], a estabilidade exponencial foi compro-

vada considerando um sistema de feixe térmico de Timoshenko com suspensórios combinando o amortecimento Kelvin-Voigt e a dissipação de calor dada pela lei de Cattaneo. Alguns outros mecanismos de amortecimento usados em pontes suspensas são rolamentos de efeito de fricção, juntas de expansão, parafusos de fricção, histerese em cabos de aço e amortecimento aerodinâmico e de fundação. Pontes suspensas de longo vão foram construídas em grande número nas últimas décadas, por exemplo, a Ponte Humen e a ponte Xihoumen na China. Deslocamento longitudinal excessivo leva à degradação e danos por fadiga aos componentes de conexão. Em [19], um esquema de amortecimento paralelo de amortecedores de fluido viscoso e de fricção foi proposto para resolver o problema de deslocamento longitudinal cumulativo excessivo e alcançar um desempenho de controle eficaz em relação à resposta sísmica. Em [21], foi proposta uma nova estratégia usando estabilizadores amortecidos para controlar as rotações do tabuleiro da ponte nos pontos de junção entre a viga e uma torre ou pilar da ponte.

O modelo Timoshenko-Ehrenfest

Sob orientação de Jakob-Bernoulli, Daniel Bernoulli e Euler chegaram a um modelo de vigas, o qual é conhecido como teoria clássica de vigas, ainda é muito utilizado atualmente por aproximar razoavelmente muitos problemas em engenharia. Tendo em vista que o comprimento é muito maior que as outras dimensões da viga, este modelo caracteriza-se por considerar que as seções transversais ao eixo longitudinal permanecem planas, indeformadas e ortogonais à dita linha neutra. Desse modo, este modelo leva em conta os deslocamentos transversais e o ângulo de rotação que cada seção transversal sofre durante a ação de uma força.

A viga de comprimento L , ver Figura 3, de módulo de elasticidade E , momento de inércia I , área de seção transversal A , onde ρ é a densidade do material e $\varphi = \varphi(t, x)$ é o deslocamento é modelada pela equação,

$$EI\varphi_{xxxx} + \rho A\varphi_{tt} = 0. \quad (1)$$

Para mais detalhes sobre a dedução desta equação, o leitor pode consultar [36], capítulo 1.

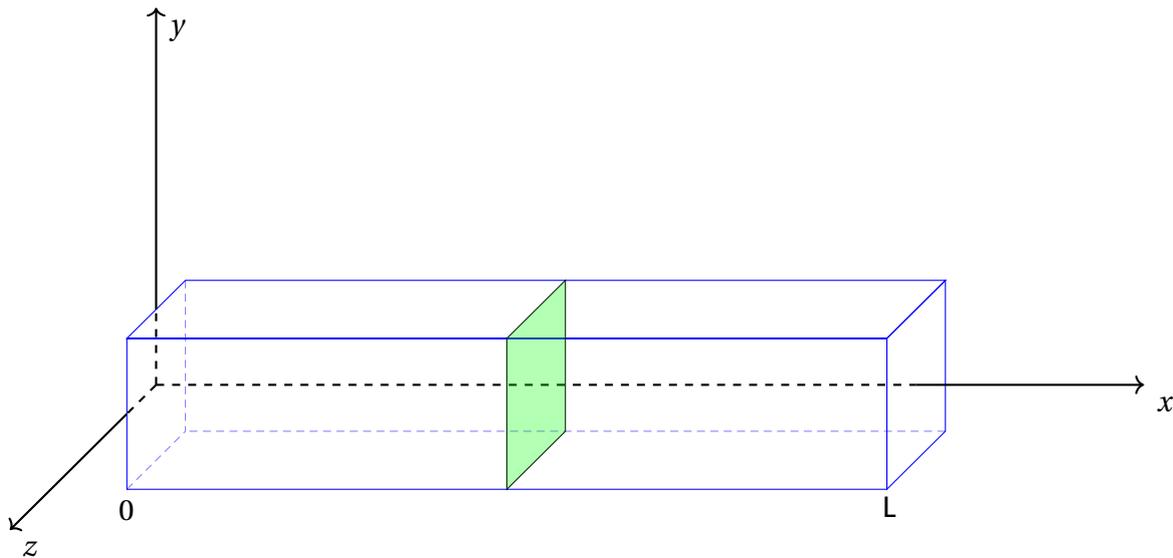
Rayleigh em 1877 refinou essa equação ao introduzir movimentos de rotação dos elementos da viga em conjunto com os movimentos de deslocamento vertical. Notando que o ângulo de rotação é igual à declividade da curva de reflexão, φ_x , temos que a aceleração correspondente é dada por φ_{xtt} . Isso implica que o momento de inércia do elemento em torno do eixo que passa pelo centro de massa é igual a $\rho I\varphi_{xtt}dx$. Agora, devido ao princípio de D'Alembert, chegamos à equação

$$-V + M_x - \rho I\varphi_{xtt} = 0, \quad (2)$$

onde V é a força de cisalhamento. Agora, levando em consideração o equilíbrio dinâmico para forças na direção da vibração transversal, temos

$$V_x = M_{xx} - \varphi_{xxtt} = -\rho A\varphi_{tt}. \quad (3)$$

Figura 3 – Viga sob ação.



Fonte: O autor.

Chegamos a

$$EI\varphi_{xxxx} + \rho A\varphi_{tt} - \rho I\varphi_{xxtt} = 0. \quad (4)$$

Esta equação é conhecida como Bresse-Rayleigh, pois descobriu-se que Bresse havia chegado aos mesmos resultados cerca de 18 anos antes de Rayleigh, veja [9].

Em 1921, Timoshenko apresentou em [33] o seguinte modelo de vigas, com duas equações hiperbólicas

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (5)$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0. \quad (6)$$

Ele obteve esse sistema de equações ao refinar a equação de [Bresse-Rayleigh](#) adicionando o efeito de deformação por cisalhamento ao considerar a declividade da curva de deflexão como dependente de dois termos

$$\varphi_x = \psi + \beta, \quad (7)$$

onde ψ é a rotação da seção transversal com a deformação por cisalhamento negligenciada e β é o ângulo associado com a deformação por cisalhamento no eixo neutro na mesma seção transversal.

Contudo, decorre da mecânica dos sólidos que

$$M = EI\psi_x. \quad (8)$$

$$V = -\kappa\beta AG = -k(\varphi_x - \psi)AG, \quad (9)$$

onde κ é o coeficiente de cisalhamento e G é o modulo de cisalhamento.

Nessas condições, Timoshenko substituiu a equação 2 por

$$-V + M_x - \rho I\psi_{tt} = 0, \quad (10)$$

e substituindo as equações 8 e 9 em 10, obtém-se

$$EI\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x - \psi)AG - \rho I\psi_{tt} = 0. \quad (11)$$

Pelas equações 3 e 9, obtemos que

$$\kappa(\varphi_{xx} - \psi_x)AG - \rho Au_{tt} = 0. \quad (12)$$

Combinando as duas equações para eliminar ψ , obtemos a equação de Bresse-Timoshenko

$$EI\varphi_{xxxx} + \rho A\varphi_{tt} - \rho I\left(1 + \frac{E}{\kappa G}\right)\varphi_{xxtt} + \frac{\rho^2 I}{kG}\varphi_{tttt} = 0. \quad (13)$$

Tomando $k = \kappa AG$, $\rho_1 = \rho A$ e $\rho_2 = \rho I$, as equações 12 e 11 tornam-se 5 e 6, respectivamente.

Há ainda uma curiosidade histórica sobre este modelo: a participação de Paul Ehrenfest, ver Figura 4, em seu desenvolvimento, ver [10]. Nascido na Áustria em 1880, Paul Ehrenfest graduou-se em Física e casou-se com a Matemática Tatyana Alexeyevna Afanasyeva em 1904, a qual contribuiu ativamente nas obras de Paul. Ainda, Ehrenfest participou por duas vezes da prestigiada Conferência de Solvay, foi amigo de Albert Einstein e vizinho de Timoshenko, com o qual também desenvolveu amizade e costumavam conversar sobre teoria da relatividade e mecânica quântica. Atualmente, sabemos que Ehrenfest contribuiu para o desenvolvimento do modelo de vigas, não ficando claro porque Timoshenko ocultou inicialmente a participação de Paul em sua pesquisa e o quanto este último contribuiu. Busca-se então um pouco mais de clareza sobre os participantes no desenvolvimento do modelo e à correta distribuição dos créditos aos seus desenvolvedores. Esta tem sido uma preocupação recente de I. Elishakoff.

Este modelo pioneiro de Timoshenko

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x &= 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) &= 0, \end{aligned}$$

sempre decai exponencialmente com dois mecanismos de estabilização, (ver Raposo *et al.* [31]), porém, em posse de apenas um mecanismo, (ver Soufyane [32]), para o decaimento exponencial é necessário e suficiente que

$$\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}. \quad (14)$$

Do ponto de vista físico, tal relação entre os coeficientes do sistema implica que as velocidades das ondas φ , das vibrações transversais, e ψ , que representa o ângulo de rotação das seções transversais da viga, sejam iguais. Como a velocidade de ondas é infinita, esta condição é conhecida como Paradoxo da Velocidade igual de ondas. Essa condição não física foi descoberta posteriormente ao longo dos diversos trabalhos baseados neste modelo, mais detalhes podem ser encontrados em [23].

Figura 4 – Paul Ehrenfest (à esquerda) e Stephen Timoshenko em São Petesburgo.



Fonte: [11]

Em 2010, Isaac Elishakoff propôs em [9] um modelo a partir da teoria de Timoshenko, o qual difere por possuir apenas um espectro de frequência, isto é, uma única equação de ondas, eliminando o Paradoxo da Velocidade igual de ondas. A saber,

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (15)$$

$$-\rho_2 \varphi_{ttx} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (16)$$

O modelo tornou-se conhecido como Modelo de Vigas de Timoshenko-Ehrenfest truncado. Este modelo não será tratado neste trabalho.

O modelo de Ponte Suspensa

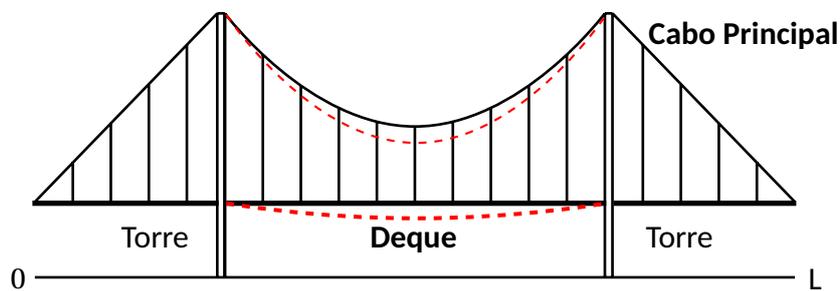
Conforme [8], este tipo de modelo foi proposto inicialmente em [18], entretanto, notamos que o modelo estabelecido neste trabalho utiliza uma viga do tipo Euler-Bernoulli, veja também o capítulo 2 de [1] para mais detalhes. Utilizaremos argumento semelhante tendo em vista que uma ponte suspensa é uma estrutura mecânica que transporta carga através de um cabo principal modelado por uma corda elástica $u = u(x, t)$, o qual é acoplado ao deque através de cabos de suspensão, onde x denota a distância ao longo da linha central da viga até sua posição de equilíbrio e t é o tempo. Os cabos suspensos serão considerados molas elásticas lineares com rigidez padrão $\lambda > 0$. A constante

$\alpha > 0$ é o módulo de elasticidade da corda (segurando o cabo principal ao deque) e, sabendo que uma corda elástica é modelada pela equação de onda $c^2 u_{xx} = u_{tt}$, chegamos a

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} = 0 \quad (17)$$

Assumiremos que o cabo principal sustenta o próprio peso, o peso dos cabos de suspensão e a viga sem produzir flexão e toda deformação do cabo e da viga devido a cargas vivas são pequenas. Quando uma carga viva p é adicionada, certamente uma quantidade p_1 de p é carregada pelos cabos de suspensão enquanto a parte restante $p - p_1$ é transportado pela rigidez de flexão da viga.

Figura 5 - Deslocamentos do Cabo Principal e do Deque da Ponte



Fonte: O autor.

Assim, o cabo principal é deslocado para baixo, ver [Figura 5](#), o que nos guia a

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) = 0 \quad (18)$$

Por outro lado, a viga é puxada para cima, de modo que a equação 5 torna-se:

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) = 0 \quad (19)$$

Lembrando que $\varphi = \varphi(x, t)$ é o deslocamento da seção transversal no ponto $x \in (0, L)$. e $\psi = \psi(x, t)$ é o ângulo de rotação da seção transversal. Obtemos então o sistema

$$\begin{aligned} u_{tt} - \alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) &= 0, \\ \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) &= 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) &= 0. \end{aligned}$$

cuja energia, veja a [Seção 2.1](#), é definida por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [|u_t|^2 + \alpha |u_x|^2 + b |\psi_x|^2 + \rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \lambda |\varphi - u|^2 + k |\varphi_x + \psi|^2] dx$$

e satisfaz a condição

$$\frac{d}{dt} E(t) = 0,$$

o que implica que o sistema é conservativo. Acontece que nos problemas da vida real, precisamos de sistemas que dissipem a energia, tornando o modelo estável. Os mecanismos estabilizadores mais utilizados são o atrito, que é proporcional à velocidade, e o amortecimento viscoelástico do tipo Kelvin-Voigt.

Estrutura do trabalho

Este trabalho encontra-se organizado em quatro capítulos:

Capítulo 1

De caráter introdutório, buscamos aqui apresentar a teoria necessária para o desenvolvimento dos capítulos seguintes. Na medida do possível, encontrar-se-à demonstrações dos teoremas e proposições, entretanto, a demonstração de alguns resultados fogem ao escopo deste trabalho, para estes há a indicação de referências. Ainda, o leitor habituado com a notação e a teoria aqui apresentada pode dispensar sua leitura.

Capítulo 2

Neste capítulo aplicamos o método de semigrupos para obtermos solução e unicidade para o problema da ponte suspensa munida de amortecimento por atrito através do Teorema de Lummer-Phillips. Mais ainda, obtemos analiticidade para o semigrupo associado, implicando em decaimento exponencial. Este trabalho foi publicado em 13 de Outubro de 2023, veja [30].

Capítulo 3

Neste capítulo aplicamos o método de semigrupos para obtermos solução e unicidade para o problema ponte suspensa munida de amortecimento por atrito parcial. Utilizamos o Teorema de Lummer-Phillips. Ainda, obtemos o decaimento exponencial para o problema proposto em posse da relação $\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$ e decaimento polinomial quando não válida tal relação. Este trabalho foi publicado em 29 de Julho de 2024, veja [14].

Capítulo 4

Neste capítulo aplicamos novamente o método de semigrupos para obtermos solução e unicidade para o problema da ponte suspensa munida de amortecimento viscoelástico do tipo Kelvin-Voigt, também como consequência do Teorema de Lummer-Phillips. O decaimento exponencial por

sua vez é obtido em posse do Teorema de Gearhart. Este trabalho foi publicado em 09 de Agosto de 2024, veja [7].

Capítulo 1

Definições e Teoremas Preliminares

1.1 Espaços de Sobolev e Desigualdades importantes

Ao trabalharmos com várias variáveis o cálculo clássico torna-se incapaz de apresentar uma teoria geral para lidarmos com equações diferenciais parciais. As equações abaixo, por exemplo, possuem soluções diferentes.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0. \quad (1.2)$$

De fato, temos que $u(x, y) = |x|$ satisfaz à primeira equação, contudo $\frac{\partial u}{\partial x}$ não está definida quando $x = 0$. Segundo Hounie [15], existem duas formas de fazer com que as equações acima tenham as mesmas soluções: restringir o espaço de soluções, de maneira a ser válido o Teorema de Schwarz (ver [20], página 150) ou trabalhar com funções “generalizadas”, de modo que a derivação seja sempre possível. Desse modo, $\frac{\partial u}{\partial x}$ torna-se um objeto independente de y e $u(x, y) = |x|$ satisfará a segunda equação, mesmo que não seja diferenciável no sentido clássico. A segunda abordagem apresenta a vantagem de maximizar os possíveis candidatos à solução de uma equação, entretanto, deve-se tomar cuidado para preservar o máximo possível as propriedades dos espaços de funções.

Para fixar as ideias, vejamos agora outro exemplo, considere o funcional

$$F(u) = \int_0^1 \int_0^1 (1 + u_x^2 + u_y^2) dx dy, \quad (1.3)$$

onde $u \in C^1([0, 1] \times [0, 1])$ e u deve assumir valores prefixados no bordo ∂C de $(0, 1) \times (0, 1)$.

Suponha agora que u é mínimo de 1.3 e seja v duas vezes diferenciável em C e nula numa vizinhança da fronteira de C . Então a função

$$\phi(t) = F(u + tv), t \in \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

tem um mínimo em $t = 0$ e conseqüentemente temos $\phi'(t) = 0$. Com efeito, note que $u + tv$ tem os mesmos valores que u em ∂C e nossa hipótese é que $F(u) \leq F(\omega)$, $\omega \in C^1(\bar{C})$ tal que $\omega = u$ em ∂C . Derivando sob o sinal de integração, obtemos

$$0 = \phi'(t) = 2 \int \int_C (u_x v_x + u_y v_y) dx dy. \quad (1.5)$$

Supondo que u é duas vezes continuamente diferenciável em C e integrando por partes, a primeira parcela com relação a x e a segunda em relação a y , teremos

$$0 = \int \int_C (u_{xx} + u_{yy}) v dx dy. \quad (1.6)$$

Desse modo, a densidade das funções C^∞ com suporte compacto (ver teorema 1.2.1 de [15]), nos permite concluir que

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ em } C. \quad (1.7)$$

Logo, uma condição necessária para que $u \in C^2(\bar{C})$ seja uma mínimo de 1.3 é que $\Delta u = 0$. Contudo, a equação 1.3 está definida para funções $u \in C^1(\bar{C})$, tornando a condição $u \in C^2(\bar{C})$ artificial.

Por outro lado, se u for apenas C^1 , podemos integrar a equação 1.5 de outro modo e chegarmos a

$$\int \int_C u \Delta v dx dy = 0. \quad (1.8)$$

Caso $u \in C^2$, as equações são equivalentes, mas a última está definida apenas para u integrável, mesmo que não seja diferenciável em qualquer ponto. Caso u satisfaça à equação 1.8 para toda v duas vezes diferenciável com suporte compacto em C , dizemos que u é uma “solução fraca” da equação $\Delta u = 0$, o que nos sugere como estender a noção de derivação à funções não diferenciáveis.

1.1.1 Espaço das Distribuições

Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Definimos $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ e denotamos

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Exemplo: Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $u = u(x, y)$ uma função real. Vamos exibir o conjunto $\{D^\alpha u : |\alpha| \leq 2\}$. Temos

$$D^{(0,0)} u = \frac{\partial^0 u}{\partial x^0 \partial y^0} = u, \quad D^{(1,0)} u = \frac{\partial^1 u}{\partial x^1 \partial y^0} = u_x, \quad D^{(0,1)} u = \frac{\partial^1 u}{\partial x^0 \partial y^1} = u_y, \\ D^{(1,1)} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial y^1} = u_{xy}, \quad D^{(0,2)} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^0 \partial y^2} = u_{yy}, \quad D^{(2,0)} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial y^0} = u_{xx}.$$

Isto é

$$\{D^\alpha u : |\alpha| \leq 2\} = \{u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{yy}, u_{xx}\}.$$

Seja Ω um aberto em \mathbb{R}^n . Vamos denotar por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

que possuem suporte compacto em Ω e derivadas parciais contínuas de todas as ordens. É bem conhecido que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.

Definição: Dizemos que uma sequência de funções $\varphi_n \in C_0^\infty(\Omega)$ é convergente para zero quando:

(a) O suporte de todas as φ_n estão contidos em um único compacto K .

(b) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ a sequência $D^\alpha \varphi_n$ converge uniformemente para zero em K .

$C_0^\infty(\Omega)$ munido com esta noção de convergência é denominado de espaço das funções teste e denotado por

$$\mathcal{D}(\Omega).$$

Definição de Distribuição : Denominamos de distribuição em $\mathcal{D}(\Omega)$ todo funcional linear

$$T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

que é contínuo na convergência definida por (a) e (b).

O conjunto de todas as distribuições sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ é um espaço vetorial o qual representamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Usamos a seguinte notação

$$\langle T, \varphi \rangle$$

para indicar o valor de T em φ .

Dizemos que uma sequência $T_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$ converge para zero quando para toda função teste

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

a sequência

$$\langle T, \varphi_n \rangle$$

converge para zero em \mathbb{R} . Neste caso escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 0 \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Dizemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{quando} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_n - T = 0 \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Exemplo 1. Quando $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ definimos o funcional linear

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx \quad \text{para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

É fácil ver que

$$T_u \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Teorema 1.1 (Lema de Du Bois Raymond)

Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω .

Demonstração. Claramente se $u = 0$ quase sempre em Ω então

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx = 0 \quad \text{quase sempre em } \Omega$$

logo

$$\langle T_u, \varphi \rangle = 0 \quad \text{para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

portanto $T_u = 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Vamos agora supor que $T_u = 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Considere um subconjunto aberto limitado $A \subset \Omega$. Temos que $\mathcal{D}(A)$ é denso em $L^1(A)$. Como $u \in L^1(A)$, dado $\epsilon > 0$ existe $v \in \mathcal{D}(A)$ tal que

$$\int_A |u - v| dx \leq \epsilon.$$

Da hipótese $T_u = 0$ temos

$$\left| \int_A v\varphi dx \right| = \left| \int_A (v\varphi - u\varphi) dx \right| \leq \epsilon \max|\varphi|$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(A)$. Consideremos os subconjuntos compactos e disjuntos de A definidos por

$$K_1 = \{x \in A : v(x) \geq \epsilon\}, \quad K_2 = \{x \in A : v(x) \leq -\epsilon\}$$

Da observação segue que existem distribuições $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(A)$ tais que

$$\varphi_1 = 1 \text{ em } K_1, \quad \varphi_1 = 0 \text{ em } K_2, \quad 0 \leq \varphi_1 \leq 1, \tag{1.9}$$

$$\varphi_2 = 0 \text{ em } K_1, \quad \varphi_2 = 1 \text{ em } K_2, \quad 0 \leq \varphi_2 \leq 1. \tag{1.10}$$

Seja $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$, temos

$$\psi = 1 \text{ em } K_1, \quad \psi = -1 \text{ em } K_2, \quad -1 \leq \psi \leq 1$$

Denotando $K = K_1 \cup K_2$ temos

$$\int_A v\psi dx = \int_{A/K} v\psi dx + \int_K v\psi dx$$

Levando em conta $|v| \leq \epsilon$ em A/K temos

$$\begin{aligned} \left| \int_K v\psi dx \right| &\leq \left| \int_{A/K} v\psi dx \right| + \left| \int_K v\psi dx \right| \\ &\leq \epsilon \text{ med}(A/K) + \epsilon \max|\psi| \\ &\leq \epsilon \text{ med}(A/K) + \epsilon \end{aligned}$$

Da definição de ψ temos

$$\int_K |v|, dx = \int_K |v\psi|, dx \leq \epsilon \text{med}(A/K) + \epsilon.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_A |u| dx &= \int_A |u - v + v| dx \\ &\leq \int_A |u - v| dx + \int_A |v| dx \\ &\leq \int_A |u - v| dx + \int_K |v| dx + \int_{A/K} |v| dx \\ &\leq \epsilon + \epsilon \text{med}(A/K) + \epsilon + \epsilon \text{med}(A/K). \end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ segue que $u = 0$ quase sempre em A . Sendo A arbitrário concluímos que $u = 0$ quase sempre em Ω . \square

Deste lema segue que cada função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ define uma única distribuição $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, e devido a este fato é comum dizermos

“a distribuição u ” ao invés de “a distribuição T_u ”.

Observação: É importante observar que existem distribuições que são definidas por funções que não são $L^1_{loc}(\Omega)$. De fato. Seja x_0 um ponto de Ω . Definimos δ_{x_0} o funcional linear em $\mathcal{D}(\Omega)$ por

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0), \text{ para toda distribuição } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

δ_{x_0} é denominada “Distribuição de Dirac concentrada no ponto x_0 .” Quando $x_0 = 0$ temos $\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0)$.

Vejam os então que $\delta_{x_0} \notin L^1_{loc}(\Omega)$. De fato, se existir $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx = \varphi(x_0), \text{ para toda distribuição } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

então

$$\int_{\Omega} u(x)||x - x_0||\varphi(x) dx = ||x - x_0||\varphi(x)|_{x=x_0} = 0.$$

Então, pelo Lema de Du Bois Raymond teremos

$$u(x) = 0 \text{ quase sempre em } \Omega,$$

e então

$$\varphi(x_0) = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx = 0, \text{ para toda distribuição } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

o que é uma contradição.

Notação: A seguir utilizamos o símbolo \hookrightarrow para indicar imersão densa e destacamos algumas imersões importantes:

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega), \text{ para todo } 1 \leq p < \infty.$$

1.1.2 Derivada de Distribuições

Seja $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ uma distribuição. O valor de T em φ é dado por

$$\langle T, \varphi \rangle.$$

Denotamos a derivada de ordem α de uma distribuição T por

$$D^\alpha T, \quad |\alpha| \leq n$$

e definimos esta derivada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.11)$$

✓ $D^\alpha T$ é uma distribuição,

✓ Pela definição (1.11) T possuem derivadas de todas as ordens.

Como consequência, as funções $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições.

A derivada de uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ não é, em geral, uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$. Seja u a função de Heaviside

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Obviamente $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. A derivada de u no sentido das distribuições é a função delta de Dirac, que não é $L^1_{loc}(\Omega)$ como visto anteriormente. De fato, para toda distribuição $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned} \langle u', \varphi \rangle &= (-1) \langle u, \varphi' \rangle \\ &= - \int_0^\infty \varphi' dx \\ &= \varphi(0) \\ &= \langle \delta_0, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

Logo $\langle u', \varphi \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle$, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ implica que

$$u' = \delta_0 \text{ no sentido das distribuições.}$$

Vamos então definir os espaços de Sobolev e apresentar algumas de suas propriedades que utilizaremos neste texto:

1.1.3 Espaços de Sobolev

Seja Ω um domínio no espaço \mathbb{R}^n , limitado ou ilimitado e com fronteira suave Γ . Para $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, definimos $W^{m,p}(\Omega)$ como o espaço das funções $u \in L^p(\Omega)$ cujas derivadas, no sentido das distribuições, de ordem $\leq m$ também pertencem a $L^p(\Omega)$. $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $p = 2$, usualmente denotamos $W^{m,p}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$ e este é um espaço de Hilbert com o produto interno correspondente. O fecho de C_0^∞ , espaço das funções suaves com suporte compacto em Ω , em $W^{m,p}(\Omega)$ será denotado por $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Teorema 1.2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$. Vale a igualdade se, e somente se, um dos vetores x, y é um múltiplo escalar do outro.

Teorema 1.3 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg)

Sejam j e m inteiros satisfazendo $0 \leq j < m$ e sejam $1 \leq q, r \leq \infty$ e $p \in \mathbb{R}$, $\frac{j}{m} \leq a \leq 1$ tais que

$$\frac{1}{p} - \frac{j}{n} = a \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n} \right) + (1-a) \frac{1}{q}.$$

Então,

- i) Para qualquer $W^{m,r}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ existe uma constante C , dependente apenas de a, j, m, n, q e r , para a qual é válida a desigualdade

$$|D^j|_p \leq C |D^m u|_r^a |u|_q^{1-a}. \quad (1.12)$$

com a exceção de que se $1 < r < \infty$ e $m - j - \frac{n}{r}$ é um inteiro não negativo, então a equação 1.12 é válida somente se $\frac{j}{m} \leq a < 1$.

- ii) Para qualquer $W^{m,r}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ onde Ω é um domínio limitado com bordo suave, então existem duas constante C_1, C_2 , tais que é válida a desigualdade

$$|D^j|_{p,\Omega} \leq C_1 |D^m u|_{r,\Omega}^a |u|_{q,\Omega}^{1-a} + C_2 |u|_{q,\Omega}. \quad (1.13)$$

com a mesma exceção do item i).

Em particular, para todo $u \in W_0^{m,r}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, a constante C_2 em 1.13 pode ser nula.

Teorema 1.4 (Primeira Desigualdade de Poincaré)

Seja Ω um domínio limitado em \mathbb{R}^n e $u \in H_0^1(\Omega)$. Então existe uma constante positiva C dependente apenas de Ω e n tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema 1.5 (Segunda Desigualdade de Poincaré)

Seja Ω um domínio limitado de C^1 em \mathbb{R}^n . Então existe uma constante positiva C dependente apenas de Ω e n tal que para todo $u \in H^1(\Omega)$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} u dx \right).$$

Teorema 1.6 (Lax-Milgram)

Seja $B(u, v)$ uma forma sesquilinear contínua e coerciva em um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Então, dado qualquer $g \in \mathcal{H}'$, o espaço dual de \mathcal{H} , existe um único elemento $u \in \mathcal{H}$ tal que

$$B(u, v) = L(v), \forall v \in \mathcal{H}, \text{ com } L(v) = \langle g, v \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}.$$

Demonstração. Ver [27], capítulo 19, Teorema 19.10. □

Vamos finalizar esta seção sobre um importante teorema de regularização de solução para problemas elípticos.

Teorema 1.7 (Agmon-Douglis-Nirenberg)

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^2 e cuja fronteira $\partial\Omega$ seja limitada e $f \in L^p(\Omega)$ com $1 < p < \infty$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ é solução do problema elítico

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.14)$$

então $u \in W^{2,p}(\Omega)$ e existe $C > 0$, dependente apenas de Ω e p , tal que $\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$.

Demonstração. Ver [3]. □

1.2 Semigrupos

A teoria de Semigrupos se aplica ao estudo da existência de solução e a análise do comportamento assintótico de sistemas dissipativos governados por equações diferenciais parciais.

Definição 1.8

Seja X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|_X$. Uma família $S(t), 0 \leq t < \infty$, de operadores lineares limitados em um espaço de Banach X é dito um C_0 -semigrupo se,

1. $S(0) = I$,

$$2. S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2), \forall t_1, t_2 \geq 0,$$

$$3. \lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)x - Ix\|_X = 0, \forall x \in X.$$

Observação 1.9

A condição 2. é denominada de propriedade do semigrupo.

Observação 1.10

A condição 3. diz que para cada $x \in X$, $S(t) : X \rightarrow X$ é um operador linear contínuo em $t \in [0, \infty)$.

Exemplo de um C_0 -semigrupo.

$S(t) : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ definido por $S(t)f(x) = f(x + t)$ com $f \in H^1(\mathbb{R})$ é um C_0 -semigrupo.

1.2.1 Gerador infinitesimal

Definição 1.11

Seja X um espaço de Banach e $S(t)$ um C_0 -semigrupo. Dizemos que o operador linear

$$\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$$

é o *gerador infinitesimal* do semigrupo $S(t)$ quando

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in X; \text{o limite } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)x - Ix}{h} \text{ existe em } X \right\}$$

e para cada $x \in D(\mathcal{A})$

$$\mathcal{A}x = \left[\frac{d}{dt} S(t)x \right]_{t=0} = \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} \right]_{t=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)x - Ix}{h}.$$

A seguir, apresentaremos as principais propriedades de um gerador infinitesimal.

Proposição 1.12

Um C_0 -semigrupo $S(t)$ possui um único gerador infinitesimal.

Demonstração. Vamos supor que \mathcal{A} e \mathcal{B} sejam dois geradores infinitesimais do C_0 -semigrupo $S(t)$.

Seja $x \in D(\mathcal{A})$. Logo,

$$\mathcal{A}x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)x - Ix}{h} = \mathcal{B}x, \text{ e assim } \mathcal{A}x = \mathcal{B}x \text{ e } x \in D(\mathcal{B}).$$

Reciprocamente, se $x \in D(\mathcal{B})$, então

$$\mathcal{B}x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)x - Ix}{h} = \mathcal{A}x, \text{ e então } \mathcal{B}x = \mathcal{A}x \text{ e } x \in D(\mathcal{A}).$$

Portanto, $D(\mathcal{A}) = D(\mathcal{B})$ e $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. □

Definição 1.13

Dizemos que um semigrupo $S(t)$ é limitado quando existe uma constante $M \geq 1$ tal que $\|S(t)\|_X \leq M$.

Definição 1.14

Dizemos $S(t)$ é um semigrupo de contrações quando $\|S(t)\|_X \leq 1$.

Proposição 1.15

Seja X um espaço de Banach e $S(t)$ um C_0 -semigrupo limitado. Então, existe $M \geq 1$ tal que $\|S(t)\|_X \leq Me^{wt}$, para todo $t \geq 0$ e w uma constante positiva.

Demonstração. Sendo $S(t)$ limitado, considere $\delta > 0$ o maior número real tal que $\|S(\delta)\|_X \leq M$, $\forall 0 < \delta < t$. Como $\|S(0)\|_X = \|I\|_X = 1$, temos $M \geq 1$.

Desde que $t > \delta$, pelo algoritmo de Euclides, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t = n\delta + r$ com $0 \leq r < \delta$. Temos então,

$$\begin{aligned} \|S(t)\|_X &= \|S(n\delta + r)\|_X = \|S(n\delta)S(r)\|_X = \|S(n\delta)\| \|S(r)\|_X \\ &= \|S(\delta) \cdot \dots \cdot S(\delta)\|_X \|S(r)\|_X = \|S(\delta)\|_X^n \|S(r)\|_X \leq M^n M. \end{aligned}$$

Como $t = n\delta + r$, temos $t > n\delta$, isto é, $n < \frac{t}{\delta}$ e, portanto, $\|S(t)\|_X \leq M^{\frac{t}{\delta}} M$ devido $M \geq 1$. Escrevendo

$$M^{\frac{t}{\delta}} = e^{\ln M^{\frac{t}{\delta}}} = e^{\frac{t}{\delta} \ln M}$$

e, definindo $w = \frac{1}{\delta} \ln M$, segue que $M^{\frac{t}{\delta}} = e^{wt}$, $w > 0$. Assim sendo,

$$\|S(t)\|_X \leq Me^{wt}, \quad w > 0, t > 0.$$

□

Proposição 1.16

Seja \mathcal{A} o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo $S(t)$. Então

$$\mathcal{A}S(t)x = S(t)\mathcal{A}x$$

para todo $x \in D(\mathcal{A})$.

Demonstração. Para $x \in D(\mathcal{A})$, denotemos $S(t)x = y$. Temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}S(t)x = \mathcal{A}y &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)y - Iy}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h} \\ &= S(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)x - x}{h} = S(t)\mathcal{A}x. \end{aligned}$$

□

A seguinte propriedade comprova que o C_0 -semigrupo preserva a mesma propriedade da função exponencial, no que diz respeito a derivada.

Proposição 1.17

Seja X um espaço de Banach e $S(t)$ um C_0 -semigrupo com gerador infinitesimal A . Então

$$\frac{d}{dt}S(t)x = \mathcal{A}S(t)x, \quad \forall x \in D(\mathcal{A}).$$

Demonstração. Para $x \in D(\mathcal{A})$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d^+}{dt}S(t)x &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t)S(h)x - S(t)x}{h} \\ &= S(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - Ix}{h} = S(t)\mathcal{A}x. \end{aligned}$$

Por outro lado temos,

$$\begin{aligned} \frac{d^-}{dt}S(t)x &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t-h)x - S(t)x}{-h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t-h)x - S(t-h+h)x}{-h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t-h)x - S(t-h)S(h)x}{-h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} S(t-h) \left[\frac{Ix - S(h)x}{-h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} S(t-h) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - Ix}{h} = S(t)\mathcal{A}x. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d^+}{dt}S(t)x = \frac{d^-}{dt}S(t)x = S(t)\mathcal{A}x, \quad \forall x \in D(\mathcal{A}).$$

Utilizando a proposição 1.16 segue que

$$\frac{d}{dt}S(t)x = \mathcal{A}S(t)x, \quad \forall x \in D(\mathcal{A}).$$

□

Observação 1.18

Desde que

1. $S(0) = I$,
2. $S(t+h) = S(t)S(h)$, $\forall t, s \geq 0$,
3. $\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x$, $\forall x \in D(A)$,

vamos denotar, de agora em diante, (por analogia ao caso em $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X)$) o C_0 -Semigrupo $S(t)$ com gerador infinitesimal \mathcal{A} por

$$S(t) = e^{t\mathcal{A}}.$$

Proposição 1.19

Sejam $S(t)$ e $T(t)$ C_0 -semigrupos. Se $S(t)$ e $T(t)$ possuem o mesmo gerador infinitesimal \mathcal{A} , então $S(t) = T(t)$.

Demonstração. Considere $F(s) = S(t-s)T(s)$, para todo $s \geq 0$, $t \geq 0$. Temos,

$$F'(s) = -S'(t-s)T(s) + S(t-s)T'(s).$$

Como $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ e $T(t) = e^{At}$, utilizando as proposições 1.16 e 1.17 segue que

$$F'(s) = -\mathcal{A}S(t-s)T(s) + S(t-s)\mathcal{A}T(s) = -S(t-s)\mathcal{A}T(s) + S(t-s)\mathcal{A}T(s) = 0.$$

Logo, F é uma função constante. Observando que $F(0) = S(t)$ e $F(t) = T(t)$, temos $S(t) = T(t)$, $\forall t \geq 0$. □

Definição 1.20

Um operador linear $B : D(B) \subset X \rightarrow X$ é fechado quando seu gráfico

$$\{(x, Bx) : x \in D(B)\}$$

for um subespaço fechado de $X \times X$.

Equivalentemente, B é fechado se $x_n \in D(B)$ for uma sequência tal que $x_n \rightarrow x$ e $Bx_n \rightarrow y$ quando $n \rightarrow \infty$ então $x \in D(B)$ e $Bx = y$.

Proposição 1.21

Seja X um espaço de Banach. $\mathcal{A} : X \rightarrow X$ o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo $S(t) = e^{t\mathcal{A}}$, $t \geq 0$, então \mathcal{A} é um operador fechado.

Demonstração. Seja x_n uma sequência em $D(\mathcal{A})$ tal que $x_n \rightarrow x$, $x \in X$ e $\mathcal{A}x_n \rightarrow y$, quando $n \rightarrow \infty$. Desde que

$$\frac{d}{dt} S(t)x_n = \mathcal{A}S(t)x_n = S(t)\mathcal{A}x_n,$$

integrando em $[0, t]$ obtemos

$$S(t)x_n - Ix_n = \int_0^t S(s)\mathcal{A}x_n ds.$$

Passando ao limite $n \rightarrow \infty$ obtemos

$$S(t)x - Ix = \int_0^t S(s)y ds.$$

Pelo teorema do valor médio para integrais obtemos que

$$\frac{S(t)x - Ix}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t S(s)y ds = S(c)y, \text{ com } 0 \leq c \leq t.$$

Passando ao limite $t \rightarrow 0$ obtemos

$$\mathcal{A}x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - Ix}{t} = S(0)y,$$

logo, $x \in D(\mathcal{A})$ e $\mathcal{A}x = y$, e portanto \mathcal{A} é fechado. □

Observação 1.22

Se \mathcal{A} é um operador fechado, o $D(\mathcal{A})$ munido da norma do gráfico,

$$\|x\|_{D(\mathcal{A})}^2 = \|x\|_X^2 + \|\mathcal{A}x\|_X^2$$

é um espaço completo.

Teorema 1.23

Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{A} : X \rightarrow X$ o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo $S(t) = e^{t\mathcal{A}}$, $t \geq 0$.

Definindo $U : [0, \infty) \rightarrow X$ por $U(t) = S(t)x$ temos que:

- $U(t) \in C^0([0, \infty); X)$ para todo $x \in X$,
- $U(t) \in C^0([0, \infty); D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, \infty); X)$ para todo $x \in D(\mathcal{A})$.

Demonstração. Vamos supor $x \in X$. Denotando $h = t - t_0 > 0$ temos que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} U(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} S(t)x = \lim_{h \rightarrow 0} S(t_0 + h)x = \lim_{h \rightarrow 0} S(t_0)S(h)x = S(t_0) \lim_{h \rightarrow 0} S(h)x = S(t_0)x = U(t_0).$$

portanto $U(t) \in C([0, \infty); X)$ para todo $x \in X$.

Agora considere $x \in D(\mathcal{A})$. Logo

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(t+h) - U(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t)S(h)x - S(t)x}{h} \\ &= S(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)x - Ix}{h}. \end{aligned}$$

Como $x \in D(\mathcal{A})$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(t+h) - U(t)}{h} = S(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)x - Ix}{h} = S(t)\mathcal{A}x = U'(t),$$

e assim $U(t)$ é derivável e portanto $U(t) \in C^1([0, \infty); X)$. Finalmente, para $x \in D(\mathcal{A})$ temos que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} U(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} S(t)x = S(t_0)x = U(t_0).$$

Como \mathcal{A} é fechado, o $D(\mathcal{A})$ é completo e então $S(t_0)x \in D(\mathcal{A})$.

Por fim, precisamos mostrar que $S(t)x \in D(\mathcal{A})$ para qualquer $t > 0$. Ou seja, queremos mostrar que para todo $x \in D(\mathcal{A})$ e para qualquer $t > 0$ existe

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h}.$$

Lembrando que $S(t+h)x = S(t)S(h)x$, a expressão que queremos analisar torna-se

$$\frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} = \frac{S(t)S(h)x - S(t)x}{h} = S(t) \frac{S(h)x - x}{h}.$$

Como $\frac{S(h)x - x}{h}$ é a definição de $\mathcal{A}x$, já que $x \in D(\mathcal{A})$. Tomando o limite quando $h \rightarrow 0^+$, temos:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} = \mathcal{A}x.$$

Assim, podemos concluir que:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} = S(t)\mathcal{A}x.$$

Logo, o limite existe, e $S(t)x$ pertence ao domínio de \mathcal{A} .

Portanto $U(t) \in C^1([0, \infty); D(\mathcal{A}))$.

□

Corolário 1.24 (veja [28], p. 100.)

Seja X um espaço de Banach e \mathcal{A} o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo $S(t) = e^{t\mathcal{A}}$. Então, $U(t) = S(t)U_0$ é a única solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} U_t - \mathcal{A}U = 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (1.15)$$

com $U(t)$ satisfazendo

- $U(t) \in C(0, \infty; X)$ para todo $x \in X$, (Solução fraca).
- $U(t) \in C^0(0, \infty; D(\mathcal{A})) \cap C^1(0, \infty; X)$ para todo $x \in D(\mathcal{A})$, (Solução forte).

1.2.2 Resultados de existência e de estabilidade

Teorema 1.25 (Hille-Yosida)

Um operador linear \mathcal{A} (não limitado) é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $S(t)$, $t \geq 0$ se, e só se,

1. \mathcal{A} é fechado e $\overline{D(\mathcal{A})} = X$;
2. O conjunto resolvente $\rho(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} contém \mathbb{R}^+ e para cada $\lambda > 0$, temos

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração. Veja [28]. Teorema 3.1, página 8.

□

Corolário 1.26

Seja \mathcal{A} o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $S(t)$. O conjunto resolvente de \mathcal{A} contém o semiplano direito, isto é, $\rho(\mathcal{A}) \supset \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$ e para tal λ

$$\|R(\lambda : \mathcal{A})\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda} \text{ onde } R(\lambda : \mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}. \quad (1.16)$$

Demonstração. Ver [28], Corolário 3.6, pg 11. □

Definição 1.27

Seja um X espaço de Banach e X^* seu dual. Denotaremos o valor de $x^* \in X^*$ no ponto $x \in X$ por $\langle x^*, x \rangle$ ou $\langle x, x^* \rangle$ e definimos o conjunto de dualidade $F(x) = \{x^*; x^* \in X^* \text{ e } \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$.

Definição 1.28

Seja $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear densamente definido em dizemos que A é dissipativo se existe $x \in F(x)$ tal que

$$\operatorname{Re}\langle Ax, x^* \rangle \leq 0.$$

Teorema 1.29

Um operador A é dissipativo se, e somente se

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|, \quad \forall x \in D(A) \text{ e } \lambda > 0.$$

Demonstração. Sejam A um operador linear dissipativo, $\lambda > 0$ e $x \in D(A)$. Se $x^* \in F(x)$, o conjunto de dualidade, e com $\operatorname{Re}\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$, então

$$\|\lambda x - Ax\| \|x\| \geq |\langle \lambda x - Ax, x^* \rangle| \geq \operatorname{Re}\langle \lambda x - Ax, x^* \rangle \geq \lambda \|x\|^2$$

Por outro lado, considere $x \in D(A)$ e assumamos que $\lambda \|x\| \leq \|\lambda x - Ax\|$ para todo $\lambda > 0$. Se $y_\lambda^* \in F(\lambda x - Ax)$ e $z_\lambda^* = \frac{y_\lambda^*}{\|y_\lambda^*\|}$, e para todo $\lambda > 0$,

$$\lambda \|x\| \leq \|\lambda x - Ax\| = \langle \lambda x - Ax, z_\lambda^* \rangle = \lambda \operatorname{Re}\langle x, z_\lambda^* \rangle - \operatorname{Re}\langle Ax, z_\lambda^* \rangle \leq \lambda \|x\| - \operatorname{Re}\langle Ax, z_\lambda^* \rangle.$$

Sendo assim, obtemos que $\operatorname{Re}\langle Ax, z_\lambda^* \rangle \leq 0$ e que $\operatorname{Re}\langle x, z_\lambda^* \rangle \geq \|x\| - \frac{1}{\lambda} \|Ax\|$.

Agora, note que a bola unitária de X^* é compacta na topologia fraco-estrela de X^* e que $z_\lambda^*, \lambda \rightarrow \infty$, tem um ponto de acumulação fraco-estrela $z^* \in H^*, \|z^*\| \leq 1$. Desse modo, temos que $\operatorname{Re}\langle Ax, z^* \rangle \leq 0$ e $\operatorname{Re}\langle x, z^* \rangle \geq \|x\|$. Contudo, $\operatorname{Re}\langle x, z^* \rangle \leq |\langle x, z^* \rangle| \leq \|x\|$ e concluímos que $\langle x, z^* \rangle = \|x\|$.

Tomando $x^* = \|x\|z^*$ temos que $x^* \in F(x)$ e que $\operatorname{Re}\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$. Portanto, para cada $x \in D(A)$ existe um $x^* \in F(x)$ tal que $\operatorname{Re}\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$ e concluímos que A é dissipativo. □

Teorema 1.30 (Lumer-Phillips)

Seja \mathcal{A} um operador linear com domínio $D(\mathcal{A})$ denso no espaço de Banach X . Se \mathcal{A} é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem $R(\lambda_0 I - \mathcal{A})$, de $\lambda_0 I - \mathcal{A}$ é X , então \mathcal{A} é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X .

Demonstração. Veja [28]. Teorema 4.3, página 14. □

Estamos interessados em trabalhar em espaços de Hilbert \mathcal{H} . Apresentamos então o seguinte corolário do Teorema de Lumer-Phillips.

Corolário 1.31

Seja \mathcal{A} um operador linear com domínio $D(\mathcal{A})$ denso no espaço de Hilbert \mathcal{H} . Se \mathcal{A} é dissipativo e $0 \in \rho(\mathcal{A})$, então \mathcal{A} é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em \mathcal{H} .

Demonstração. Ver [22] Teorema 1.2.4, pg 3. □

Corolário 1.32

Seja A um operador linear fechado e densamente definido. Se A e A^* são dissipativos, então A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X .

Demonstração. Pelo Teorema de Lummer-Phillips, é suficiente provarmos que $R(\lambda I - A) = X$. Como A é fechado e dissipativo, temos que $R(\lambda I - A)$ é um subespaço fechado de X . Assim, se

$$R(\lambda I - A) \neq X$$

então existe $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$ tal que $\langle x^*, x - Ax \rangle = 0$ para todo $x \in D(A)$. Mas isto implica que $x^* - A^*x^* = 0$ e como A^* também é dissipativo, segue do teorema 1.29 que $x^* = 0$, o que é uma contradição. □

1.2.2.1 Resultados relativos ao comportamento assintótico

Na seção anterior definimos critérios para que um operador linear não limitado \mathcal{A} seja o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo. De agora em diante estamos particularmente interessado em resultados sobre o comportamento assintótico de C_0 -semigrupos definidos em espaço de Hilbert \mathcal{H} .

Definição 1.33

Dizemos que um C_0 -semigrupo $e^{\mathcal{A}t}$ é exponencialmente estável se existem constantes positivas ω e C tais que

$$\|e^{\mathcal{A}t}\| \leq Ce^{-\omega t}, \forall t \geq 0.$$

Teorema 1.34 (Borichev-Tomilov)

Seja $S(t)$ um C_0 -Semigrupo em um espaço de Hilbert \mathcal{H} associado ao operador \mathcal{A} tal que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$. Seja $\beta \in \mathbb{R}$. Quando $|\beta| \rightarrow \infty$, então

$$\frac{1}{|\beta|^\epsilon} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C, \iff \|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{C}{t^{1/\epsilon}} \quad (1.17)$$

onde C não depende de β .

Demonstração. Veja [6], Theorem 2.4. □

Teorema 1.35 (Huang)

Seja $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ um C_0 -semigrupo no espaço de Hilbert H . Então $S(t)$ é exponencialmente estável se, e só se,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup\{\operatorname{Re} \lambda; \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} < 0 \\ e \\ \sup_{\operatorname{Re} \lambda \geq 0} \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty \end{array} \right.$$

Demonstração. Ver [16]. □

Teorema 1.36 (Gearhart-Herbst-Huang-Prüss)

Seja $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ um C_0 -semigrupo no espaço de Hilbert H . Então $S(t)$ é exponencialmente estável se, e só se,

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\mathcal{A}) \supset \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\} \\ e \\ \overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty \end{array} \right.$$

Demonstração. Ver [13, 29]. □

Teorema 1.37

Seja $S(t)$ um semigrupo de contrações sobre um espaço de Hilbert \mathcal{H} , então os teoremas acima são equivalentes.

Demonstração. Ver [22], pg 4. □

Definição 1.38

Seja $S(t)$ um C_0 -semigrupo em um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Dizemos que $S(t)$ é diferenciável para $t > t_0$ se para cada $x \in \mathcal{H}$ temos que $t \mapsto S(t)x$ é diferenciável para $t > t_0$. Ainda, $S(t)$ é dito diferenciável se for diferenciável para $t > 0$.

Definição 1.39

Seja $e^{\mathcal{A}t}$ um C_0 -semigrupo, diremos que $e^{\mathcal{A}t}$ é analítico se o mesmo admitir uma extensão $S(\lambda)$ para $\lambda \in \Delta_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg \lambda| < \theta\}$ para algum $\theta > 0$ tal que $\lambda \mapsto S(\lambda)$ é uma função analítica e

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\Delta_\theta \ni \lambda} \|S(\lambda) - z\| = 0, \forall z \in H \\ S(\lambda + \mu) = S(\lambda)S(\mu), \forall \lambda, \mu \in \Delta_\theta. \end{array} \right.$$

Teorema 1.40

Seja $S(t)$ um C_0 -semigrupo uniformemente limitado e \mathcal{A} seu gerador infinitesimal. Se $0 \in \rho(\mathcal{A})$, então são equivalentes:

- a) $S(t)$ pode ser estendido para um semigrupo analítico em um setor $\Delta_\delta = \{z; |\arg z| < \delta\}$ e $\|S(z)\|$ é uniformemente limitado em casa subsector fechado $\Delta_{\delta'}, \delta' < \delta$ de Δ_δ .
- b) Existe uma constante C tal que para cada $\sigma > 0, \tau \neq 0$,

$$\|R(\sigma + i\tau; \mathcal{A})\| \leq \frac{C}{|\tau|}.$$

c) Existem $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ e $M > 0$ tais que

$$\rho(\mathcal{A}) \supset \Sigma = \left\{ \lambda; |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta \right\} \cup \{0\}.$$

d) $S(t)$ é diferenciável para $t > 0$ e existe uma constante C tal que

$$\|\mathcal{A}S(t)\| = \|\mathcal{A}e^{At}\| \leq \frac{C}{t}, \forall t > 0$$

Demonstração. Teorema 5.2 de [28], página 61. □

Lema 1.41

Seja \mathcal{A} o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $S(t)$ tal que $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$. Seja $\gamma > \max(0, \omega)$.

Se $x \in D(\mathcal{A}^2)$, então

$$S(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda; A)x d\lambda$$

e para cada $\delta > 0$, a integral converge uniformemente em t , para $t \in [\delta, \frac{1}{\delta}]$.

Demonstração. Veja o Corolário 7.5 em [28], página 29. □

Teorema 1.42 (Liu-Yong)

Seja $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ um C_0 -semigrupo no espaço de Hilbert H . Então $S(t)$ é analítico se, e só se,

$$\begin{aligned} \rho(\mathcal{A}) \supset \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\} \\ e \\ \overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|\beta(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty \end{aligned}$$

Demonstração. Apresentaremos a demonstração como em [22], Teorema 1.3.3 pg 5. Primeiro, note que se $\overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|\beta(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty$ é válido, então existe uma constante $M > 0$ tal que para qualquer $\beta \in \mathbb{R}$, temos

$$\|\beta(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq M.$$

Agora, observe que $\left\{ \lambda; -\frac{|\operatorname{Im} \lambda|}{2M} \leq \operatorname{Re} \lambda \leq 0 \right\} \subset \rho(\mathcal{A})$. Para ver isso, vamos tomar $\lambda = \alpha + i\beta$ com $-\frac{\beta}{2M} \leq \alpha \leq 0$ e temos $(\alpha + i\beta)I - \mathcal{A} = (i\beta I - \mathcal{A}) + \alpha I = (i\beta I - \mathcal{A})(I + \alpha(i\beta I - \mathcal{A})^{-1})$ e pelo Teorema da Contração e a limitação acima, decorre que $I + \alpha(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}$ é inversível. Logo, $(\alpha + i\beta)I - \mathcal{A}$ é inversível e

$$\|((\alpha + i\beta)I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{2M}{|\beta|} \leq \frac{C}{|\lambda|}, \quad (1.18)$$

onde $C = \sqrt{4M^2 + 1}$. Pelo Lema 1.41, para qualquer $\gamma > 0$ e $x \in D(\mathcal{A}^2)$, temos

$$S(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} x d\lambda,$$

e para $\eta > 0$, a integral converge uniformemente em $t \in [\eta, \frac{1}{\eta}]$. Para todo $y \in \mathcal{H}$, temos que

$$(S(t)x, y) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{\gamma-i\beta}^{\gamma+i\beta} (e^{\lambda t} (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} x, y) d\lambda. \quad (1.19)$$

Sejam θ_1, θ_2 dois ângulos tais que $\tan(\theta_1) = \tan(\theta_2) = -\frac{1}{2M}$ com $\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \pi$ e $\pi < \theta_2 < \frac{3\pi}{2}$ e considere a curva fechada no plano complexo em λ , $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, onde

$$\Gamma_0 = \{\lambda; \operatorname{Re} \lambda = \gamma, -\beta \leq \operatorname{Im} \lambda \leq \beta\},$$

$$\Gamma_1 = \left\{ \lambda; \operatorname{Im} \lambda = \beta, -\frac{\beta}{2M} \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \gamma \right\},$$

$$\Gamma_2 = \left\{ \lambda; \lambda = \rho e^{i\theta_1}, 0 \leq \rho \leq \frac{C\beta}{2M} \right\},$$

$$\Gamma_3 = \left\{ \lambda; \lambda = \rho e^{i\theta_2}, 0 \leq \rho \leq \frac{C\beta}{2M} \right\},$$

$$\Gamma_4 = \left\{ \lambda; \operatorname{Im} \lambda = -\beta, -\frac{\beta}{2M} \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \gamma \right\}.$$

Como $(e^{\lambda t}(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}x, y)$ é analítico em $\lambda \in \{\lambda; \operatorname{Re} \lambda \geq 0\} \cup \left\{ \lambda; -\frac{|\operatorname{Im} \lambda|}{2M} \leq \operatorname{Re} \lambda \leq 0 \right\} \subset \rho(\mathcal{A})$, segue do Teorema de Cauchy para funções analíticas que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma-i\beta}^{\gamma+i\beta} (e^{\lambda t}(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}x, y) d\lambda &= \int_{-\frac{\beta}{2M}}^{\gamma} (e^{(\delta+i\beta)t}((\delta+i\beta)I - \mathcal{A})^{-1}x, y) d\delta \\ &+ \int_{\frac{|\beta|}{2M}}^{\gamma} (e^{(\delta-i\beta)t}((\delta-i\beta)I - \mathcal{A})^{-1}x, y) d\delta + e^{i\theta_1} \int_0^{\frac{C|\beta|}{2M}} (e^{\rho t e^{i\theta_1}}((\rho t e^{i\theta_1})I - \mathcal{A})^{-1}x, y) d\rho \\ &+ e^{i\theta_2} \int_0^{\frac{C|\beta|}{2M}} (e^{\rho t e^{i\theta_2}}((\rho t e^{i\theta_2})I - \mathcal{A})^{-1}x, y) d\rho = I_1^\beta + I_2^\beta + I_3^\beta + I_4^\beta. \end{aligned}$$

Se $S(t)$ é um C_0 -semigrupo de contrações, pelo 1.26, para λ com $\operatorname{Re} \lambda > 0$, temos que

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|}$$

e combinando com 1.18, para $t > 0$,

$$\left| I_1^\beta \right| \leq \frac{C}{\beta} \int_{-\frac{\beta}{2M}}^{\gamma} e^{\delta t} d\delta \|x\| \|y\| \rightarrow 0, \beta \rightarrow +\infty. \quad (1.20)$$

Usando o mesmo argumento, $\left| I_2^\beta \right| \rightarrow 0$, quando $\beta \rightarrow +\infty$. Novamente por 1.18, temos que $\left| I_3^\beta \right| \leq C \int_0^{\frac{C\beta}{2M}} \frac{1}{\rho} e^{\rho t \cos \theta_1} d\rho \|x\| \|y\|$, quando $\beta \rightarrow \infty$, isto que implica que

$$I_3^\beta \rightarrow I_3 = e^{i\theta_1} \int_0^\infty (e^{\rho t e^{i\theta_1}}(\rho e^{i\theta_1} I - \mathcal{A})^{-1}x, y) d\rho$$

Analogamente, temos

$$I_4^\beta \rightarrow I_4 = e^{i\theta_2} \int_0^\infty (e^{\rho t e^{i\theta_2}}(\rho e^{i\theta_2} I - \mathcal{A})^{-1}x, y) d\rho$$

Estas integrais convergem uniformemente para $t \in \left[\eta, \frac{1}{\eta}\right]$, portanto, temos que

$$(S(t)x, y) = I_3 + I_4, t \geq 0,$$

mais ainda, temos que para $t > 0$ I_3 e I_4 são diferenciáveis e segue que

$$(S'(t)x, y) = e^{2i\theta_1} \int_0^\infty \rho \left(e^{\rho t e^{i\theta_1}} (\rho e^{i\theta_1} I - \mathcal{A})^{-1} x, y \right) d\rho + e^{2i\theta_2} \int_0^\infty \rho \left(e^{\rho t e^{i\theta_2}} (\rho e^{i\theta_2} I - \mathcal{A})^{-1} x, y \right) d\rho.$$

Daí,

$$|(S'(t)x, y)| \leq C \left(\int_0^\infty e^{\rho t \cos\theta_1} d\rho + \int_0^\infty e^{\rho t \cos\theta_2} d\rho \right) \|x\| \|y\| = \frac{C_1}{t} \|x\| \|y\|, \quad (1.21)$$

onde $C_1 = -\frac{C}{\cos\theta_1} - \frac{C}{\cos\theta_2}$. Como y é arbitrário e pela densidade de $D(\mathcal{A}^2)$ em \mathcal{H} , segue [1.21](#)

$$\|S'(t)\| = \|\mathcal{A}S(t)\| \leq \frac{C_1}{t}, t > 0;$$

E segue do [Teorema 1.40](#), que $S(t)$ é analítico. A outra implicação decorre imediatamente do [Teorema 1.40](#).

□

Próximos passos

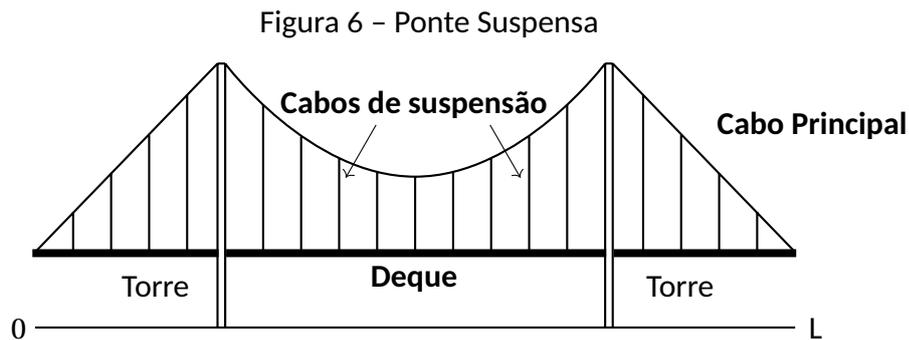
Nas próximas seções iremos utilizar os resultados previamente apresentados sobre espaços de Sobolev e Teoria de Semigrupos para obter a existência e unicidade de solução, assim como estudar o comportamento assintótico para três modelos de ponte suspensa. Nosso foco é o amortecimento friccional dado pelo atrito e o amortecimento viscoelástico.

Inicialmente consideramos o modelo totalmente amortecido por atrito nas equações do sistema. Em seguida analisaremos a influência do atrito quando localizado em duas das três equações que compõe o sistema. Por fim, no último capítulo iremos analisar a influência do amortecimento viscoelástico do tipo Kelvin-Voigt.

Capítulo 2

Ponte suspensa com amortecimento por atrito

Uma ponte suspensa é uma estrutura que transporta cargas verticais através de um cabo principal modelado por um corda elástica $u = u(x, t)$, a qual é acoplada ao deque através de cabos suspensos, onde x denota a distância à linha central da viga em seu estado de equilíbrio e t é o tempo. Conforme a [Figura 6](#) a seguir,



Fonte: O autor.

Considerando que o deque possui dimensões de seção transversal desprezíveis quando comparadas ao comprimento (vão da ponte), esta será modelada através da teoria unidimensional de Timoshenko para uma viga de comprimento L . Denotando por $\varphi = \varphi(x, t)$ o deslocamento da seção transversal em $x \in (0, L)$, por $\psi = \psi(x, t)$ o ângulo de rotação da seção transversal, chegaremos ao sistema

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) + \gamma_1 u_t = 0, \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (2.1)$$

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) + \gamma_2 \varphi_t = 0, \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (2.2)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \gamma_3 \psi_t = 0, \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (2.3)$$

onde $\alpha, \lambda, k, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \rho_1, \rho_2$ são constantes positivas, as condições de contorno tipo Dirichlet

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(L, t) = 0, t > 0, \\ \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = 0, t > 0, \\ \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, t > 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

e dados iniciais dados por,

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), x \in (0, L), \\ \varphi(0, t) &= \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), x \in (0, L), \\ \psi(0, t) &= \psi_0(x), \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), x \in (0, L). \end{aligned} \quad (2.5)$$

De modo que nossas funções pertencem ao espaços funcionais

$$\begin{aligned} u_0(x) &\in H_0^1(0, L), & u_1(x) &\in L^2(0, L) \\ \varphi_0(x) &\in H_0^1(0, L), & \varphi_1(x) &\in L^2(0, L) \\ \psi_0(x) &\in H_0^1(0, L), & \psi_1(x) &\in L^2(0, L). \end{aligned}$$

2.1 Energia do Sistema

Queremos agora determinar a energia do sistema, para isso, vamos começar multiplicando a primeira equação do sistema por u_t , o que nos dá

$$u_t u_{tt} - \alpha u_t u_{xx} - \lambda u_t (\varphi - u) + \gamma_1 (u_t)^2 = 0.$$

Integrando em $(0, L)$, temos

$$\int_0^L u_t u_{tt} dx - \alpha \int_0^L u_t u_{xx} dx - \lambda \int_0^L u_t (\varphi - u) dx = -\gamma_1 \int_0^L |u_t|^2 dx.$$

Fazendo integração por partes, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L |u_t|^2 dx + \alpha \int_0^L u_{tx} u_x dx - \lambda \int_0^L u_t (\varphi - u) dx &= -\gamma_1 \int_0^L |u_t|^2 dx, \\ \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L |u_t|^2 dx + \frac{d}{dt} \frac{\alpha}{2} \int_0^L |u_x|^2 dx - \lambda \int_0^L u_t (\varphi - u) dx &= -\gamma_1 \int_0^L |u_t|^2 dx. \end{aligned}$$

Agora, vamos multiplicar a segunda equação por φ_t ,

$$\rho_1 \varphi_t \varphi_{tt} - k \varphi_t (\varphi_x + \psi)_x + \lambda \varphi_t (\varphi - u) + \gamma_2 (\varphi_t)^2 = 0.$$

Integrando em $(0, L)$, ficamos com

$$\rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi_{tt} dx - k \int_0^L \varphi_t (\varphi_x + \psi)_x dx + \lambda \int_0^L \varphi_t (\varphi - u) dx = - \int_0^L \gamma_2 |\varphi_t|^2 dx.$$

Fazendo integração por partes e usando as condições de contorno, obtemos

$$\frac{d}{dt} \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + k \int_0^L \varphi_{tx} (\varphi_x + \psi) dx + \lambda \int_0^L \varphi_t (\varphi - u) dx = - \int_0^L \gamma_2 |\varphi_t|^2 dx.$$

Por fim, a terceira equação será multiplicada por ψ_t , vejamos

$$\rho_2 \psi_t \psi_{tt} - b \psi_t \psi_{xx} + \lambda \psi_t (\varphi_x + \psi) = -\gamma_3 (\psi_t)^2.$$

Novamente, vamos integrar em $(0, L)$,

$$\rho_2 \int_0^L \psi_t \psi_{tt} dx - b \int_0^L \psi_t \psi_{xx} dx + \lambda \int_0^L \psi_t (\varphi_x + \psi) dx = - \int_0^L \gamma_3 |\psi_t|^2 dx.$$

Aplicando integral por partes e as condições de contorno,

$$\frac{d}{dt} \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\psi_t|^2 dx + b \int_0^L \psi_{tx} \psi_x dx + \lambda \int_0^L \psi_t (\varphi_x + \psi) dx = - \int_0^L \gamma_3 |\psi_t|^2 dx,$$

isto é,

$$\frac{d}{dt} \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\psi_t|^2 dx + \frac{d}{dt} \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \lambda \int_0^L \psi_t (\varphi_x + \psi) dx = - \int_0^L \gamma_3 |\psi_t|^2 dx.$$

Somando as 3 equações obtidas, chegamos a

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L (|u_t|^2 + \alpha |u_x|^2 + b |\psi_x|^2 + \rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \lambda |\varphi - u|^2 + k |\varphi_x + \psi|^2) dx \\ & = -\gamma_1 \int_0^L |u_t|^2 dx - \int_0^L \gamma_2 |\varphi_t|^2 dx - \int_0^L \gamma_3 |\psi_t|^2 dx. \end{aligned}$$

Sendo assim, definimos a energia $E(t)$ do sistema por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (|u_t|^2 + \alpha |u_x|^2 + b |\psi_x|^2 + \rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \lambda |\varphi - u|^2 + k |\varphi_x + \psi|^2) dx.$$

Temos então a seguinte proposição:

Proposição 2.1

A energia $E(t)$ definida acima satisfaz a

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\gamma_1 \int_0^L |u_t|^2 dx - \int_0^L \gamma_2 |\varphi_t|^2 dx - \int_0^L \gamma_3 |\psi_t|^2 dx.$$

2.2 Semigrupo Associado e Existência de Solução

Utilizando a notação $u_t = v$, $\varphi_t = w$ e $\psi_t = z$, podemos escrever $U = (u, v, \varphi, w, \psi, z)^T$, e segue que

$$U_t = \begin{pmatrix} v \\ \alpha u_{xx} + \lambda(\varphi - u) - \gamma_1 v \\ w \\ \frac{1}{\rho_1} [k(\varphi_x + \psi)_x - \lambda(\varphi - u) - \gamma_2 w] \\ z \\ \frac{1}{\rho_1} [b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) - \gamma_3 z] \end{pmatrix} = \mathcal{A}U,$$

o qual se reduz ao problema de evolução de Cauchy de primeira ordem conforme definido em (1.15),

$$\begin{cases} U_t - \mathcal{A}U = 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

onde $U \in \mathcal{H} = \{H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)\}^3$. Por sua vez, observe que o domínio do operador \mathcal{A} definido acima é dado por $D(\mathcal{A}) = \{H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \times L^2(0, L)\}^3$. O espaço \mathcal{H} introduzido é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por,

$$\begin{aligned} \langle U, \tilde{U} \rangle &= \int_0^L v \tilde{v} dx + \alpha \int_0^L u_x \tilde{u}_x dx + \rho_1 \int_0^L w \tilde{w} dx + \rho_2 \int_0^L z \tilde{z} dx + b \int_0^L \psi_x \tilde{\psi}_x \\ &\quad + \lambda \int_0^L (\varphi - u)(\tilde{\varphi} - \tilde{u}) dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi)(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi}) dx. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Isto nos permite definir uma norma em \mathcal{H} por $\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle U, U \rangle$. Agora, é evidente que $D(\mathcal{A})$ é denso em \mathcal{H} e queremos então mostrar que \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$, $t \geq 0$, em \mathcal{H} . Tendo em vista o Corolário 1.31, utilizaremos os seguintes lemas para obtermos este resultado.

Lema 2.2

O operador \mathcal{A} é dissipativo.

Demonstração. Para todo $U = (u, v, \varphi, w, \psi, z) \in D(\mathcal{A})$, escrevendo os termos de $\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}}$:

Para o primeiro termo,

$$\alpha \int_0^L u_{xx} \bar{v} dx + \lambda \int_0^L (\varphi - u) \bar{v} dx - \gamma_1 \int_0^L v \bar{v} dx = -\alpha \int_0^L u_x \bar{v}_x dx + \lambda \int_0^L (\varphi - u) \bar{v} dx - \gamma_1 \int_0^L |v|^2 dx. \quad (2.7)$$

Para o segundo termo,

$$\alpha \int_0^L v_x \bar{u}_x dx, \quad \text{notando que} \quad \overline{u_x v_x} = v_x \bar{u}_x. \quad (2.8)$$

Para o terceiro termo,

$$\begin{aligned} &k \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \bar{w} dx - \lambda \int_0^L (\varphi - u) \bar{w} dx - \gamma_2 \int_0^L w \bar{w} dx \\ &= k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{w}_x dx - \lambda \int_0^L (\varphi - u) \bar{w} dx - \gamma_2 \int_0^L |w|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Para o quarto termo,

$$b \int_0^L \psi_{xx} \bar{z} dx - k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{z} dx - \gamma_3 \int_0^L z \bar{z} dx = -b \int_0^L \psi_x \bar{z}_x dx - k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{z} dx - \gamma_3 \int_0^L |z|^2 dx. \quad (2.10)$$

Para o quinto termo,

$$b \int_0^L z_x \bar{\psi}_x dx, \quad \text{notando que} \quad \overline{\psi_x z_x} = z_x \bar{\psi}_x. \quad (2.11)$$

Para o sexto termo,

$$\lambda \int_0^L (w - v) \overline{(\varphi - u)} dx. \quad (2.12)$$

Para o último termo,

$$k \int_0^L (w_x - v) \overline{(\varphi_x + \psi)} dx. \quad (2.13)$$

Agora, notando que $\theta - \bar{\theta} = 2i \operatorname{Im}(\theta)$ e utilizando de 2.7 a 2.13, chegamos a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= -2i\alpha \int_0^L \operatorname{Im}(u_x \overline{v_x}) dx + 2i\lambda \int_0^L \operatorname{Im}[(\varphi - u)(w - v)] dx \\ &\quad + 2ik \int_0^L \operatorname{Im}[(\varphi_x + \psi)(w_x - v)] dx + 2ib \int_0^L \operatorname{Im}(\psi_x z_x) dx \\ &\quad - \gamma_1 \int_0^L |v|^2 dx - \gamma_2 \int_0^L |w|^2 dx - \gamma_3 \int_0^L |z|^2 dx \end{aligned}$$

E tomando a parte real, temos

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = -\gamma_1 \int_0^L |v|^2 dx - \gamma_2 \int_0^L |w|^2 dx - \gamma_3 \int_0^L |z|^2 dx \leq 0.$$

Logo, \mathcal{A} é dissipativo. □

Lema 2.3

$0 \in \rho(\mathcal{A})$ o conjunto resolvente do operador \mathcal{A} .

Demonstração. Seja $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^T \in \mathcal{H}$ e considere a equação resolvente

$$-AU = F.$$

Em termos das componentes de U e F , podemos escrever

$$-v = f_1 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (2.14)$$

$$-\alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) + \gamma_1 v = f_2 \text{ em } L^2(0, L), \quad (2.15)$$

$$-w = f_3 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (2.16)$$

$$-k(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) + \gamma_2 w = f_4 \text{ em } L^2(0, L), \quad (2.17)$$

$$-z = f_5 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (2.18)$$

$$-b\psi_{xx} + \lambda(\varphi_x + \psi) + \gamma_3 z = f_6 \text{ em } L^2(0, L). \quad (2.19)$$

Usando 2.14 - 2.19, chegamos a

$$-\alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) = \gamma_1 f_1 + f_2 := g_1 \text{ em } L^2(0, L), \quad (2.20)$$

$$-k(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) = \gamma_2 f_3 + f_4 := g_2 \in L^2(0, L), \quad (2.21)$$

$$-b\psi_{xx} + \lambda(\varphi_x + \psi) = \gamma_3 f_5 + f_6 := g_3 \in L^2(0, L). \quad (2.22)$$

Multiplicando 2.20 por $\tilde{u} \in H_0^1(0, L)$, 2.21 por $\tilde{\varphi} \in H_0^1(0, L)$ e 2.22 por $\tilde{\psi} \in H_0^1(0, L)$, ao integrar por partes, temos

$$-\alpha \int_0^L \tilde{u}_x u_x dx - \int_0^L \lambda \tilde{u}(\varphi - u) dx = \int_0^L \tilde{u} g_1 dx \in L^2(0, L), \quad (2.23)$$

$$-k \int_0^L \tilde{\varphi}_x (\varphi_x + \psi) dx + \lambda \int_0^L \tilde{\varphi}(\varphi - u) dx = \int_0^L \tilde{\varphi} g_2 dx \in L^2(0, L), \quad (2.24)$$

$$-b \int_0^L \tilde{\psi}_x \psi_x dx + \lambda \int_0^L \tilde{\psi}(\varphi_x + \psi) dx = \int_0^L \tilde{\psi} g_3 dx \in L^2(0, L). \quad (2.25)$$

Somando 2.23, 2.24 e 2.25, obtemos o problema variacional

$$B((u, \varphi, \psi); (\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi})) = L(\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}), \quad (2.26)$$

onde, $B : [H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)]^2 \rightarrow \mathbb{C}$ é dado por

$$B((u, \varphi, \psi); (\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi})) = \alpha \int_0^L u_x \tilde{u}_x dx + \lambda \int_0^L (\varphi - u)(\tilde{\varphi} - \tilde{u}) dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi)(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi}) + b \int_0^L \psi_x \tilde{\psi}_x dx$$

e $L : [H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)] \rightarrow \mathbb{C}$, o qual é dado por

$$L((\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi})) = \int_0^L \tilde{u} g_1 dx + \int_0^L \tilde{\varphi} g_2 dx + \int_0^L \tilde{\psi} g_3 dx.$$

Agora, definindo uma norma em $H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$ por $\|(u, \varphi, \psi)\|^2 = B((u, \varphi, \psi); (u, \varphi, \psi))$, temos que nesta norma B é contínua e uma forma bilinear coerciva em $H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$. Sendo assim, pelo Teorema de Lax-Milgram, existe uma única $(u, \varphi, \psi) \in H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$ que é solução de 2.26, para todo $(\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$. Pela teoria de equações elípticas (veja [22], capítulo 1), 2.20, 2.21 e 2.22 nos guiam a $u, \varphi, \psi \in H^2(0, L)$, isto é, $u, \varphi, \psi \in H_0^1 \cap H^2(0, L)$. Por outro lado, segue de 2.18, 2.16 e 2.18 que $v, w, z \in H_0^1(0, L)$. Portanto, temos que $U \in D(\mathcal{A})$ e segue que $-AF = U$ tem solução única.

Por fim, observe que $\|U\|_{\mathcal{H}} \leq K\|F\|_{\mathcal{H}}$, onde K é uma constante positiva independente de U , ou seja, $\|A^{-1}F\| \leq K\|F\|_{\mathcal{H}}$, logo, $U \in D(\mathcal{A})$ e concluímos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

□

Teorema 2.4

O operador \mathcal{A} gera um C_0 -semigrupo de contrações

$$S(t) = e^{At}, t \geq 0$$

no espaço de Hilbert \mathcal{H} .

Demonstração. Como \mathcal{A} é dissipativo, densamente definido e $0 \in \rho(\mathcal{A})$, a conclusão segue do Corolário 1.31. □

Teorema 2.5

Seja $U_0 \in \mathcal{H}$, então existe uma única solução fraca U do problema 2.2 satisfazendo

$$U \in C^0([0, +\infty); \mathcal{H}).$$

Mais ainda, se $U_0 \in D(\mathcal{A})$, então

$$U \in C^0([0, +\infty); D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, +\infty); \mathcal{H}).$$

Demonstração. Considerando que o operador \mathcal{A} gera um C_0 -semigrupo de contrações

$$S(t) = e^{\mathcal{A}t}, t \geq 0$$

no espaço de Hilbert \mathcal{H} , pelo corolário 1.24, temos que $U(t) = e^{t\mathcal{A}}U_0$ é a única solução de 2.2 satisfazendo às condições acima. \square

2.3 Analiticidade do Semigrupo

Lema 2.6

$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$.

Demonstração. Note que como $0 \in \rho(\mathcal{A})$, assim, se $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ é falso, então existe $\theta \in \mathbb{R}$, com $\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{H}}^{-1} \leq \theta < \infty$ e uma sequência $\beta^n \in \mathbb{R}$ tal que $\beta^n \rightarrow \theta$ e uma sequência de funções vetoriais complexas $U^n \in D(\mathcal{A})$ tais que $\|U^n\|_{\mathcal{H}} = 1$ e também que $\|(i\beta^n I - \mathcal{A})^{-1}U^n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, ou ainda, de forma equivalente, $\|(i\beta^n I - \mathcal{A})U^n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Isto é,

$$i\beta^n u^n - v^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (2.27)$$

$$i\beta^n v^n - \alpha u_{xx}^n - \lambda(\varphi^n - u^n) + \gamma_1 v^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (2.28)$$

$$i\beta^n \varphi^n - w^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (2.29)$$

$$i\beta^n \rho_1 w^n - k(\varphi_x^n + \psi^n)_x + \lambda(\varphi^n - u^n) + \gamma_2 w^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (2.30)$$

$$i\beta^n \psi^n - z^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (2.31)$$

$$i\beta^n \rho_2 z^n - b\psi_{xx}^n + k(\varphi_x^n + \psi^n) + \gamma_3 z^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (2.32)$$

Agora, multiplicando $(i\beta^n I - A)U^n$ com U^n em \mathcal{H} , obtemos,

$$\langle (i\beta^n I - A)U^n, U^n \rangle_{\mathcal{H}} = i\beta^n \|U^n\|_{\mathcal{H}}^2 - \langle AU^n, U^n \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Tomando a parte real, obtemos

$$\operatorname{Re} \langle (i\beta^n I - A)U^n, U^n \rangle_{\mathcal{H}} = \gamma_1 \int_0^L |v^n|^2 dx + \gamma_2 \int_0^L |w^n|^2 dx + \gamma_3 \int_0^L |z^n|^2 dx.$$

Como U^n é limitado e $(i\beta^n I - A)U^n \rightarrow 0$, temos que

$$v_n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (2.33)$$

$$w_n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (2.34)$$

$$z_n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (2.35)$$

Agora, utilizando 2.33 em 2.27, chegamos a

$$i\beta^n u^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L) \quad (2.36)$$

e como $\beta^n \rightarrow \theta$, então

$$u^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (2.37)$$

Precisamos ainda provar que

$$u^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L). \quad (2.38)$$

Usando 2.34 em 2.29 e 2.35 em 2.31, semelhante ao que fizemos acima, chegamos em

$$\varphi^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (2.39)$$

$$v^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (2.40)$$

Usando 2.37, 2.39 e 2.40 em 2.28, vamos obter

$$u_{xx}^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (2.41)$$

Integrando de 0 a x , temos

$$u_x^n - u_x^n(0) \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (2.42)$$

Aplicando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (veja [22], pag 10) com $m = 2$, $a = \frac{1}{2}$, $p = 2$, $r = 2$, $j = 1$, $n = 1$ e $q = 2$, temos

$$\|u_x^n(0)\|_{L^2(0, L)} \leq C_1 \|u_{xx}^n(0)\|_{L^2(0, L)}^{\frac{1}{2}} \|u^n(0)\|_{L^2(0, L)}^{\frac{1}{2}} + c_2 \|u^n(0)\|_{L^2(0, L)}.$$

Por 2.37, $u^n(0) \rightarrow 0$ em $L^2(0, L)$ e por 2.41, $u_{xx}^n(0) \rightarrow 0$ em $L^2(0, L)$. Então, temos $u_x^n(0) \rightarrow 0$ em $L^2(0, L)$ e por 2.42, temos $u_x^n \rightarrow 0$ em $L^2(0, L)$. Como $u^n \rightarrow 0$ em $L^2(0, L)$ e u_x^n em $L^2(0, L)$, deduzimos que

$$u^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L). \quad (2.43)$$

Aplicando a mesma ideia, chegamos a

$$\varphi^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L). \quad (2.44)$$

$$\psi^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L). \quad (2.45)$$

Segue de 2.33, 2.34, 2.35, 2.43, 2.44 e 2.45, que $\|U^n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$, contradizendo que $\|U^n\|_{\mathcal{H}} = 1$. Concluimos então que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$.

□

Teorema 2.7

O semigrupo $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$, $t \geq 0$, gerado por \mathcal{A} é analítico.

Demonstração. Utilizaremos o teorema de Liu-Yong, como $\{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\} \subset \rho(A)$ já foi feito acima, agora suponha que $\overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\| < \infty$ é falso, então existe uma sequência $\beta^n \rightarrow \infty$ (sem perda de generalidade, digamos $\beta^n > 0$) e existe também uma sequência de vetores complexos $U^n = (u^n, v^n, \varphi^n, w^n, \psi^n, z^n)^T \in D(\mathcal{A})$ com $\|U^n\|_{\mathcal{H}} = 1$ tais que

$$\left\| \left(iI - \frac{1}{\beta^n} A \right) U^n \right\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \quad (2.46)$$

isto é,

$$i u^n - \frac{1}{\beta^n} v^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (2.47)$$

$$i v^n - \frac{1}{\beta^n} [\alpha u_{xx}^n + \lambda(\varphi^n - u^n) - \gamma_1 v^n] \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (2.48)$$

$$i \varphi^n - \frac{1}{\beta^n} w^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (2.49)$$

$$i \rho_1 w^n - \frac{1}{\beta^n} [k(\varphi_x^n + \psi^n)_x - \lambda(\varphi^n - u^n) - \gamma_2 w^n] \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (2.50)$$

$$i \psi^n - \frac{1}{\beta^n} z^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (2.51)$$

$$i \rho_2 z^n - \frac{1}{\beta^n} [b \psi_{xx}^n - k(\varphi_x^n + \psi^n)_x - \gamma_3 z^n] \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (2.52)$$

Tomando o produto interno de $\left(iI - \frac{1}{\beta^n} A \right) U^n$ com U^n em \mathcal{H} , temos

$$\left\langle \left(iI - \frac{1}{\beta^n} A \right) U^n, U^n \right\rangle_{\mathcal{H}} = i \|U^n\|_{\mathcal{H}}^2 - \frac{1}{\beta^n} \langle AU^n, U^n \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Tomando a parte real, temos

$$\operatorname{Re} \left\langle \left(iI - \frac{1}{\beta^n} A \right) U^n, U^n \right\rangle_{\mathcal{H}} = \frac{\gamma_1}{\beta^n} \int_0^L |v^n|^2 dx + \frac{\gamma_2}{\beta^n} \int_0^L |w^n|^2 dx + \frac{\gamma_3}{\beta^n} \int_0^L |z^n|^2 dx.$$

Como U^n é limitado e $\left(iI - \frac{1}{\beta^n} A \right) U^n \rightarrow 0$, teremos que

$$\frac{1}{\beta^n} \int_0^L |v^n|^2 dx \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (2.53)$$

$$\frac{1}{\beta^n} \int_0^L |w^n|^2 dx \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (2.54)$$

$$\frac{1}{\beta^n} \int_0^L |z^n|^2 dx \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (2.55)$$

Agora, usando 2.53 em 2.47, 2.54 em 2.49 e 2.55 em 2.51, temos

$$u^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (2.56)$$

$$\varphi^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (2.57)$$

$$\psi^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (2.58)$$

Note que precisamos das seguintes convergências,

$$u^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (2.59)$$

$$\varphi^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (2.60)$$

$$\psi^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L). \quad (2.61)$$

Tomando o produto interno de 2.48 com v^n em $L^2(0, L)$, chegamos a

$$i \|v^n\|_{L^2(0, L)}^2 - \frac{1}{\beta^n} [\alpha \langle u_{xx}^n, v^n \rangle + \lambda \langle (\varphi^n - u^n), v^n \rangle - \gamma_1 \langle v^n, v^n \rangle] \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (2.62)$$

Tomando a parte real, temos

$$-\frac{1}{\beta^n} \alpha \langle u_{xx}^n, v^n \rangle - \frac{1}{\beta^n} \lambda \langle (\varphi^n - u^n), v^n \rangle + \frac{1}{\beta^n} \gamma_1 \langle v^n, v^n \rangle \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (2.63)$$

Como $\|\varphi^n - u^n\|_{L^2(0, L)}^2 \leq \|U^n\|_{\mathcal{H}}^2 = 1$, então $\varphi^n - u^n$ é limitado. Usando 2.53, obtemos de 2.63 que

$$\frac{1}{\beta^n} \langle u_{xx}^n, v^n \rangle \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (2.64)$$

Agora, usando 2.64, obtemos de 2.62 que

$$v^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L) \quad (2.65)$$

Segue de 2.48, que

$$\frac{1}{\beta^n} [\alpha u_{xx}^n + \lambda(\varphi^n - u^n) - \gamma_1 v^n] \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L).$$

Multiplicando por β^n temos que

$$\alpha u_{xx}^n + \lambda(\varphi^n - u^n) - \gamma_1 v^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (2.66)$$

Desse modo segue de 2.65 e 2.66 que $u_{xx}^n \rightarrow 0$ em $L^2(0, L)$. Integrando de 0 a x e usando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, como na prova do Lema 3, temos que $u_x^n \rightarrow 0$ em $L^2(0, L)$ e então,

$$u^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L). \quad (2.67)$$

Aplicando a mesma ideia, provamos que

$$\varphi^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (2.68)$$

$$\psi^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (2.69)$$

e que

$$w^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (2.70)$$

$$z^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (2.71)$$

Desse modo, segue de 2.65, 2.67, 2.68, 2.69, 2.70 e 2.71 que $\|U^n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$ e obtemos a contradição $\|U^n\|_{\mathcal{H}} = 1$.

□

Corolário 2.8

O C_0 -semigrupo de contrações $S(t) = e^{At}$, $t \leq 0$, gerado por \mathcal{A} é exponencialmente estável.

Demonstração. Como $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$, pelo teorema de [Huang-Herbst-Gearhart-Prss](#) só precisamos provar que $\overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{H}} < \infty$. Pela analiticidade, existe $M > 0$ tal que $\|\beta(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{H}} < M$, quando $|\beta| \rightarrow \infty$. Tomando $|\beta| > M$, temos que $\frac{M}{|\beta|} < 1$ e assim,

$$\begin{aligned} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{H}} &= \frac{1}{|\beta|} \|\beta(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \frac{1}{|\beta|} M < 1, \text{ para todo } |\beta| > M. \end{aligned}$$

Então, $\overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{H}} < 1$ e concluímos que $S(t)$ é exponencialmente estável. □

Capítulo 3

Ponte suspensa parcialmente amortecida

Nesta capítulo vamos analisar a influência do amortecimento friccional atuando parcialmente no sistema. Considere

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) + \gamma_1 u_t = 0, \text{ em } (0, l) \times \mathbb{R}_+, \quad (3.1)$$

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) + \gamma_2 \varphi_t = 0, \text{ em } (0, l) \times \mathbb{R}_+, \quad (3.2)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \gamma_3 \psi_t = 0, \text{ em } (0, l) \times \mathbb{R}_+, \quad (3.3)$$

onde $\alpha, \lambda, k, \gamma_1, \rho_1, \rho_2$ são constantes positivas, $\gamma_2, \gamma_3 \geq 0$, e com as condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in (0, l),$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad x \in (0, l),$$

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \quad x \in (0, l),$$

e as condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neumann

$$u(0, t) = u(l, t) = \varphi(0, t) = \varphi(l, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(l, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3.4)$$

3.1 Energia do Sistema

Nesta seção deduziremos a energia associada ao modelo e provaremos que ela é decrescente com relação ao tempo, o caracteriza sua natureza dissipativa. Primeiro, vamos multiplicar (3.1) por u_t e integrando em $(0, l)$, obtemos

$$\int_0^l u_t u_{tt} dx - \alpha \int_0^l u_t u_{xx} dx - \lambda \int_0^l u_t (\varphi - u) dx = -\gamma_1 \int_0^l |u_t|^2 dx.$$

Integrando por partes e usando as condições de contorno, nós temos

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^l |u_t|^2 dx + \alpha \int_0^l u_{tx} u_x dx - \lambda \int_0^l u_t (\varphi - u) dx = -\gamma_1 \int_0^l |u_t|^2 dx,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{d}{dt} \frac{\alpha}{2} \int_0^l |u_x|^2 dx - \lambda \int_0^l u_t(\varphi - u) dx = -\gamma_1 \int_0^l |u_t|^2 dx. \quad (3.5)$$

Agora, multiplicando (3.2) por φ_t e integrando em $(0, l)$ nós obtemos

$$\rho_1 \int_0^l \varphi_t \varphi_{tt} dx - \kappa \int_0^l \varphi_t (\varphi_x + \psi)_x dx + \lambda \int_0^l \varphi_t (\varphi - u) dx = -\gamma_2 \int_0^l |\varphi_t|^2 dx.$$

Fazendo integração por partes e usando novamente as condições de contorno, chegamos a

$$\frac{d}{dt} \frac{\rho_1}{2} \int_0^l |\varphi_t|^2 dx + \kappa \int_0^l \varphi_{tx} (\varphi_x + \psi) dx + \lambda \int_0^l \varphi_t (\varphi - u) dx = -\gamma_2 \int_0^l |\varphi_t|^2 dx. \quad (3.6)$$

Ao multiplicar (3.3) por ψ_t e integrando em $(0, l)$ nós obtemos

$$\rho_2 \int_0^l \psi_t \psi_{tt} dx - b \int_0^l \psi_t \psi_{xx} dx + \kappa \int_0^l \psi_t (\varphi_x + \psi) dx = -\gamma_3 \int_0^l |\psi_t|^2 dx.$$

Integrando por partes e usando as condições de contorno segue que

$$\frac{d}{dt} \frac{\rho_2}{2} \int_0^l |\psi_t|^2 dx + b \int_0^l \psi_{tx} \psi_x dx + \kappa \int_0^l \psi_t (\varphi_x + \psi) dx = -\gamma_3 \int_0^l |\psi_t|^2 dx,$$

isto é,

$$\frac{d}{dt} \frac{\rho_2}{2} \int_0^l |\psi_t|^2 dx + \frac{d}{dt} \frac{b}{2} \int_0^l |\psi_x|^2 dx + \kappa \int_0^l \psi_t (\varphi_x + \psi) dx = -\gamma_3 \int_0^l |\psi_t|^2 dx. \quad (3.7)$$

Somando (3.5), (3.6) e (3.7) e notando que

$$\begin{aligned} -\lambda \int_0^l u_t (\varphi - u) dx + \lambda \int_0^l \varphi_t (\varphi - u) dx &= \lambda \int_0^l (\varphi - u)_t (\varphi - u) dx \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\lambda}{2} \int_0^l |\varphi - u|^2 dx, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -\kappa \int_0^l \varphi_t (\varphi_x + \psi)_x dx + \kappa \int_0^l \psi_t (\varphi_x + \psi) dx &= \kappa \int_0^l (\varphi_x + \psi) (\varphi_x + \psi)_t dx \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\kappa}{2} \int_0^l |\varphi_x + \psi|^2 dx, \end{aligned}$$

deduzimos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^l [|u_t|^2 + \alpha |u_x|^2 + b |\psi_x|^2 + \rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \lambda |\varphi - u|^2 + \kappa |\varphi_x + \psi|^2] dx \\ = -\gamma_1 \int_0^l |u_t|^2 dx - \gamma_2 \int_0^l |\varphi_t|^2 dx - \gamma_3 \int_0^l |\psi_t|^2 dx. \end{aligned}$$

Denotando a energia por $E(t)$, nós definimos

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l [|u_t|^2 + \alpha |u_x|^2 + b |\psi_x|^2 + \rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \lambda |\varphi - u|^2 + \kappa |\varphi_x + \psi|^2] dx,$$

e segue que

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\gamma_1 \int_0^l |u_t|^2 dx - \gamma_2 \int_0^l |\varphi_t|^2 dx - \gamma_3 \int_0^l |\psi_t|^2 dx. \quad (3.8)$$

3.2 Semigrupo Associado e Existência de Solução

Mostraremos nesta seção a existência e unicidade de solução fraca e forte do sistema (3.1) – (3.4). Antes, apresentaremos alguns resultados preliminares como notação e lemas técnicos.

3.2.1 Notação e Considerações

Tendo em vista as condições de contorno em (3.4), vamos considerar o seguinte espaço de Sobolev

$$H_*^m(0, l) = \left\{ f \in H^m(0, l) : \int_0^l f \, dx = 0 \right\}.$$

Para os espaços de Sobolev $H_0^1(0, l)$ e $H_*^1(0, l)$ são válidas as desigualdades de Poincaré

$$\lambda_1 \|f\|_2^2 \leq \|f_x\|_2^2, \quad \forall f \in H_0^1(0, l) \quad \text{ou} \quad \forall f \in H_*^1(0, l),$$

onde $\lambda_1 > 0$ é a constante de Poincaré (o menor autovalor de $-\partial_{xx}$).

Para mostrarmos a existência e unicidade de solução do sistema (3.1)– (3.4) utilizaremos a teoria de semigrupos. Provaremos que o operador \mathcal{A} definido em (3.12) é o gerador de um semigrupo de contrações no espaço de Hilbert \mathcal{H} dado por

$$\mathcal{H} := [H_0^1(0, l) \times L^2(0, l)]^2 \times H_*^1(0, l) \times L^2(0, l). \quad (3.9)$$

Vamos definir em \mathcal{H} o seguinte produto interno

$$\begin{aligned} \langle U, \tilde{U} \rangle = & \int_0^L v \tilde{v} \, dx + \alpha \int_0^L u_x \tilde{u}_x \, dx + \rho_1 \int_0^L w \tilde{w} \, dx + \rho_2 \int_0^L z \tilde{z} \, dx + b \int_0^L \psi_x \tilde{\psi}_x \\ & + \lambda \int_0^L (\varphi - u)(\tilde{\varphi} - \tilde{u}) \, dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi)(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi}) \, dx. \end{aligned}$$

onde $U = (u, v, \varphi, w, \psi, z)'$ e $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\varphi}, \tilde{w}, \tilde{\psi}, \tilde{z})'$, deste modo, \mathcal{H} é um espaço de Hilbert onde $\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle U, U \rangle$.

Claramente, existe uma constante positiva κ_0 tal que

$$\|\varphi_x\|_2^2 \leq \kappa_0 \left(\|\psi_x\|_2^2 + \|\varphi_x + \psi\|_2^2 \right). \quad (3.10)$$

Pela desigualdade de Poincaré e (3.10), obtemos uma desigualdade muito útil

$$\|\varphi\|_2^2 \leq \gamma \left(\|\psi_x\|_2^2 + \|\varphi_x + \psi\|_2^2 \right), \quad (3.11)$$

onde $\gamma = \kappa_0 \lambda_1^{-1}$ com λ_1 sendo a constante de Poincaré.

Assim, estamos preparados para estabelecer o resultado associado à existência e unicidade de solução. Para isto, apresentamos as seguintes suposições que serão assumidas ao longo do artigo.

3.2.2 Existência e unicidade de solução

Escreveremos o sistema (3.1)-(3.4) como um problema de evolução de Cauchy de primeira ordem, introduzindo a função vetorial $U = (u, v, \varphi, w, \psi, z)^T$, onde $u_t = v$, $\varphi_t = w$ e $\psi_t = z$. Então,

$$U_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ \varphi_t \\ w_t \\ \psi_t \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \alpha u_{xx} + \lambda(\varphi - u) - \gamma_1 v \\ w \\ \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - \frac{\lambda}{\rho_1}(\varphi - u) - \frac{\gamma_2}{\rho_1} w \\ z \\ \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \frac{\gamma_3}{\rho_2} z \end{pmatrix} = \mathcal{A}U,$$

onde

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha \partial_{xx} - \lambda I & -\gamma_1 I & \lambda I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{\lambda}{\rho_1} I & 0 & \frac{\kappa}{\rho_1} \partial_{xx} - \frac{\lambda}{\rho_1} I & -\frac{\gamma_2}{\rho_1} & \frac{\kappa}{\rho_1} \partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & -\frac{\kappa}{\rho_2} \partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2} \partial_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2} \partial_x & -\frac{\gamma_3}{\rho_2} I \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

O sistema (3.1)-(3.4) é reduzido ao seguinte problema de evolução de primeira ordem,

$$\begin{cases} U_t - \mathcal{A}U = 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (3.13)$$

onde

$$\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

é um operador linear ilimitado no espaço \mathcal{H} com domínio $D(\mathcal{A}) = [H_0^1(0, l) \cap H^2(0, l) \times H_0^1(0, l)]^2 \times H_*^2(0, l) \times H_*^1(0, l)$. É evidente que $D(\mathcal{A})$ é denso em \mathcal{H} .

Queremos mostrar que \mathcal{A} é o gerador de um C_0 -semigrupo de contrações $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$, $t \geq 0$, em \mathcal{H} . Para isto, considere os dois seguintes lemas.

Lema 3.1

O operador \mathcal{A} é dissipativo.

Demonstração. Para todo $U = (u, v, \varphi, w, \psi, z)^T \in D(\mathcal{A})$, analogamente ao Lema 2.2, vale que

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = -\gamma_1 \int_0^L |v|^2 dx - \gamma_2 \int_0^L |w|^2 dx - \gamma_3 \int_0^L |z|^2 dx \leq 0.$$

Logo, \mathcal{A} é dissipativo. □

Lema 3.2

$0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Demonstração. Dado $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^T \in \mathcal{H}$, a equação resolvente $-AU = F$ in \mathcal{H} , em termos das coordenadas de U e F , torna-se

$$-v = f_1 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (3.14)$$

$$-\alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) + \gamma_1 v = f_2 \text{ em } L^2(0, L), \quad (3.15)$$

$$-w = f_3 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (3.16)$$

$$-\kappa(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) + \gamma_2 w = f_4 \text{ em } L^2(0, L), \quad (3.17)$$

$$-z = f_5 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (3.18)$$

$$-b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \gamma_3 z = f_6 \text{ em } L^2(0, L). \quad (3.19)$$

substituindo (3.14), (3.16) e (3.18) em (3.15), (3.17) e (3.19), respectivamente, temos

$$-\alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) = \gamma_1 f_1 + f_2 := g_1 \in L^2(0, L), \quad (3.20)$$

$$-\kappa(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) = \gamma_2 f_3 + f_4 := g_2 \in L^2(0, L), \quad (3.21)$$

$$-b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = \gamma_3 f_5 + f_6 := g_3 \in L^2(0, L). \quad (3.22)$$

Multiplicando as equações (3.20), (3.21) e (3.22) pelo conjugado das funções $\tilde{u} \in H_0^1(0, l)$, $\tilde{\varphi} \in H_0^1(0, l)$ e $\tilde{\psi} \in H_*^1(0, l)$, respectivamente, e integrando por partes, obtemos

$$-\alpha \int_0^L \tilde{u}_x u_x dx - \int_0^L \lambda \tilde{u}(\varphi - u) dx = \int_0^L \tilde{u} g_1 dx \in L^2(0, L), \quad (3.23)$$

$$-k \int_0^L \tilde{\varphi}_x (\varphi_x + \psi) dx + \lambda \int_0^L \tilde{\varphi}(\varphi - u) dx = \int_0^L \tilde{\varphi} g_2 dx \in L^2(0, L), \quad (3.24)$$

$$-b \int_0^L \tilde{\psi}_x \psi_x dx + \lambda \int_0^L \tilde{\psi}(\varphi_x + \psi) dx = \int_0^L \tilde{\psi} g_3 dx \in L^2(0, L). \quad (3.25)$$

Denotando $\mathcal{V} = H_0^1(0, l) \times H_0^1(0, l) \times H_*^1(0, l)$ e adicionando (3.23), (3.24) e (3.25), criamos um problema variacional

$$\mathbb{B}((u, \varphi, \psi), (\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi})) = \mathbb{L}(\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}), \quad (3.26)$$

onde $\mathbb{B} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ é dado por

$$\mathbb{B}((u, \varphi, \psi), (\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi})) = \alpha \int_0^L u_x \tilde{u}_x dx + \lambda \int_0^L (\varphi - u)(\tilde{\varphi} - \tilde{u}) dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi)(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi}) + b \int_0^L \psi_x \tilde{\psi}_x dx$$

e, $\mathbb{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ é um operador linear contínuo

$$\mathbb{L}(\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = \int_0^L \tilde{u} g_1 dx + \int_0^L \tilde{\varphi} g_2 dx + \int_0^L \tilde{\psi} g_3 dx.$$

Definimos em \mathcal{V} a norma $\|(u, \varphi, \psi)\|_{\mathcal{V}}^2 = \mathbb{B}((u, \varphi, \psi), (u, \varphi, \psi))$. É evidente que com esta norma, \mathbb{B} é uma forma sesquilinear contínua e coerciva \mathcal{V} . Além disso, pelo Lema de Lax-Milgram, existe uma única $(u, \varphi, \psi) \in \mathcal{V}$ solução de (3.26), para todo $(\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in \mathcal{V}$. Pela teoria de equações elípticas, (3.20), (3.21) e (3.22) nos leva a $u, \varphi, \psi \in H^2(0, l)$, e então, $u, \varphi \in H_0^1(0, l) \cap H^2(0, l)$ e $\psi \in H_*^2(0, l)$. Segue de (3.14), (3.16) e (3.18) que temos $v, w \in H_0^1(0, l)$ e $z \in H_*^1(0, l)$. Então, temos que $U \in D(\mathcal{A})$ e vale a unicidade de solução da equação $-AU = F$. Note que $\|U\|_{\mathcal{H}} \leq K\|F\|_{\mathcal{H}}$ onde K é uma constante positiva independente de U , ou seja $\|A^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq K\|F\|_{\mathcal{H}}$. Logo, concluímos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

□

Proposição 3.3

\mathcal{A} é o gerador de um C_0 -semigrupo de contrações $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$, $t \geq 0$, no espaço de Hilbert \mathcal{H} .

Demonstração. Como \mathcal{A} é dissipativo, densamente definido e $0 \in \rho(\mathcal{A})$, a conclusão é consequência do Teorema de Lummer-Phillips. □

Ainda, da 3.3, podemos estabelecer o seguinte resultado

Teorema 3.4

Seja $U_0 \in \mathcal{H}$, então existe única solução fraca U do problema (3.15) satisfazendo

$$U \in C^0([0, +\infty); \mathcal{H}). \quad (3.27)$$

Mais ainda, se $U_0 \in D(\mathcal{A})$, então

$$U \in C^0([0, +\infty); D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, +\infty); \mathcal{H}). \quad (3.28)$$

Demonstração. Pelo corolário 1.24, $U(t) = e^{t\mathcal{A}}U_0$ é a única solução de (3.15) satisfazendo (3.27) e (3.28). □

3.3 Análise assintótica

Nesta seção mostraremos que quando assumimos $\gamma_1, \gamma_3 \neq 0$ e $\gamma_2 = 0$ ou $\gamma_1, \gamma_2 \neq 0$ e $\gamma_3 = 0$ a relação dada pela velocidade de propagação de ondas dada por

$$\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}, \quad (3.29)$$

é uma condição necessária e suficiente para garantir estabilidade exponencial. Entretanto, quando consideramos $\gamma_1 = 0$ e $\gamma_2, \gamma_3 \neq 0$ não há estabilidade exponencial, mesmo em posse da relação entre os coeficientes do sistema.

Para realizar as análises assintóticas utilizaremos os teoremas de Huang-Herbst-Gearhart-Prüss e Borichev-Tomilov.

3.3.1 $\gamma_1 \neq 0, \gamma_2 = 0$ e $\gamma_3 \neq 0$

Os resultados principais desta subsecção são os seguintes teoremas:

Teorema 3.5

Assumindo que $\gamma_1 \neq 0, \gamma_2 = 0$ e $\gamma_3 \neq 0$, o semigrupo associado $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ é exponencialmente estável se e somente se (3.29) é verdadeiro.

e

Teorema 3.6

Assumindo que $\gamma_1 \neq 0, \gamma_2 = 0$ e $\gamma_3 \neq 0$. Se (3.29) é falso, então o C_0 -Semigrupo $S(t)$ associado ao sistema é polinomialmente estável e satisfaz

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{C}{t^{1/2}} \|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} \quad \forall U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad (3.30)$$

onde C é uma constante positiva. Mais ainda, esta taxa não pode ser melhorada.

A demonstração destes teoremas virá na forma de alguns lemas. Em todos esses lemas usaremos o operador resolvente de \mathcal{A} dado pela equação

$$(i\beta I - \mathcal{A})U = F, \quad (3.31)$$

onde $U = (u, v, \varphi, w, \psi, z)' \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)' \in \mathcal{H}$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Sendo assim, de (3.31) chegamos ao sistema

$$i\beta u - v = f_1, \quad (3.32)$$

$$i\beta v - \alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) + \gamma_1 v = f_2, \quad (3.33)$$

$$i\beta \varphi - w = f_3, \quad (3.34)$$

$$i\rho_1 \beta w - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) = \rho_1 f_4, \quad (3.35)$$

$$i\beta \psi - z = f_5, \quad (3.36)$$

$$i\rho_2 \beta z - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \gamma_3 z = \rho_2 f_6. \quad (3.37)$$

Devemos provar primeiro o seguinte lema.

Lema 3.7

O conjunto formado pelos resolventes do operador \mathcal{A} contém o conjunto $i\mathbb{R}$, isto é, $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$.

Demonstração. Como no lema (3.2), $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Agora seja $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Suponha que exista algum $i\beta$ que seja um autovalor do operador \mathcal{A} , ou seja, $AU = i\beta U$ com $U \neq 0$.

Por outro lado, de (3.1) nós temos que

$$\langle AU, U \rangle_{\mathcal{H}} = i\beta \|U\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Tomando a parte real desta última equação, resulta que $\|v\|_2^2 = \|z\|_2^2 = 0$, então $v = z = 0$. Tomando $F = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$, de (3.32) e (3.36) resulta que $u = \psi = 0$, de (3.33) nós temos que $\varphi = 0$ e de (3.34) resulta que $w = 0$. Mas isto é uma contradição, logo não há autovalores imaginários. \square

Ao longo da demonstração dos lemas seguintes assumiremos que $\beta \neq 0$. De modo que rotineiramente usaremos o fato que existe uma constante c tal que $0 < \frac{1}{|\beta|} < c < 1$ que será determinada depois.

Lema 3.8

Seja $U = (u, v, \varphi, w, \psi, z)'$ a solução do sistema (3.32)-(3.37). Então existe uma constante positiva C_1 tal que

$$\|v\|_2^2 + \rho_2 \|z\|_2^2 \leq C_1 \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.38)$$

Demonstração. Note que

$$i\beta \|U\|_{\mathcal{H}}^2 - \langle AU, U \rangle_{\mathcal{H}} = \langle F, U \rangle_{\mathcal{H}},$$

de (3.1) obtemos que

$$\gamma_1 \|v\|_2^2 + \gamma_3 \|z\|_2^2 = \text{Re} \langle F, U \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Da desigualdade de Hölder segue o resultado. \square

Lema 3.9

Seja $U = (u, v, \varphi, w, \psi, z)'$ a solução do sistema (3.32)-(3.37). Então, existe uma constante positiva C_2 tal que

$$\alpha \|u_x\|_2^2 - \frac{C_2}{\beta^2} \|w\|_2^2 \leq C_2 \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.39)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (3.33) por \bar{u} , e integrando em $(0, l)$, vamos obter

$$i\beta \langle v, u \rangle + \alpha \|u_x\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2 - \lambda \langle \varphi, u \rangle + \gamma_1 \langle v, u \rangle = \langle f_2, u \rangle. \quad (3.40)$$

Das equações (3.32) e (3.34) nós temos que $-i\beta u = -v - f_1$ e $\varphi = -\frac{i}{\beta}(w + f_3)$, disto segue que

$$-\|v\|_2^2 + \alpha \|u_x\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2 + \frac{i\lambda}{\beta} \langle w, u \rangle + \gamma_1 \langle v, u \rangle = \langle f_2, u \rangle + \langle v, f_1 \rangle - \frac{i\lambda}{\beta} \langle f_3, u \rangle. \quad (3.41)$$

Finalizamos a demonstração usando a desigualdade de Hölder, a desigualdade de Young, desigualdade de Poincaré e (3.38). \square

Lema 3.10

Seja $U = (u, v, \varphi, w, \psi, z)$ a solução do sistema (3.32)-(3.37). então existe uma constante positiva C_3 tal que

$$\kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 - \frac{C_3}{|\beta|} (\|\psi_x\|_2^2 + \|z\|_2^2 + \|w\|_2^2) \leq C_3 \left(|\beta| \left| \frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b} \right| |\langle \psi_x, w \rangle| + \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} \right). \quad (3.42)$$

Demonstração. Multiplicando as equações (3.37) por $\overline{\varphi}_x + \overline{\psi}$, integrando em $(0, l)$ obtemos

$$-i\beta\rho_2\langle z_x, \varphi \rangle + i\beta\rho_2\langle z, \psi \rangle + b\langle \psi_x, (\varphi_x + \psi)_x \rangle + \kappa\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \gamma_3\langle z, \varphi_x + \psi \rangle = \rho_2\langle f_6, \varphi_x + \psi \rangle \quad (3.43)$$

Pela equação (3.35) segue que

$$-i\beta\rho_1\overline{w} - \kappa(\overline{\varphi}_x + \overline{\psi})_x + \lambda(\overline{\varphi} - \overline{u}) = \rho_1\overline{f_4}. \quad (3.44)$$

Multiplicando as equações (3.44) por $\frac{b}{\kappa}\psi_x$, integrando em $(0, l)$ obtemos

$$-i\beta\frac{b\rho_1}{\kappa}\langle \psi_x, w \rangle - b\langle \psi_x, (\varphi_x + \psi)_x \rangle + \frac{b\lambda}{\kappa}\langle \psi_x, \varphi \rangle + \frac{b\lambda}{\kappa}\langle \psi, u_x \rangle = \frac{b\rho_1}{\kappa}\langle \psi_x, f_4 \rangle. \quad (3.45)$$

Somando equações (3.43) e (3.45) temos que

$$\begin{aligned} & -i\beta\rho_2\langle z_x, \varphi \rangle - i\beta\frac{b\rho_1}{\kappa}\langle \psi_x, w \rangle + i\beta\rho_2\langle z, \psi \rangle + \kappa\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \gamma_3\langle z, \varphi_x + \psi \rangle \\ & + \frac{b\lambda}{\kappa}\langle \psi_x, \varphi \rangle + \frac{b\lambda}{\kappa}\langle \psi, u_x \rangle = \rho_2\langle f_6, \varphi_x + \psi \rangle + \frac{b\rho_1}{\kappa}\langle \psi_x, f_4 \rangle. \end{aligned}$$

Da equação (3.34) nós obtemos que $i\beta\varphi = w + f_3$ e $\varphi = -\frac{i}{\beta}(w + f_3)$, então

$$\begin{aligned} \rho_2\langle z_x, w \rangle - i\beta\frac{b\rho_1}{\kappa}\langle \psi_x, w \rangle + i\beta\rho_2\langle z, \psi \rangle + \kappa\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \gamma_3\langle z, \varphi_x + \psi \rangle + i\frac{b\lambda}{\kappa\beta}\langle \psi_x, w \rangle + \frac{b\lambda}{\kappa}\langle \psi, u_x \rangle \\ = \rho_2\langle f_6, \varphi_x + \psi \rangle + \frac{b\rho_1}{\kappa}\langle \psi_x, f_4 \rangle - \rho_2\langle z_x, f_3 \rangle - i\frac{b\lambda}{\kappa\beta}\langle \psi_x, f_3 \rangle. \end{aligned}$$

Da equação (3.36) nós obtemos que $z = i\beta\psi - f_5$, $i\beta\psi = z + f_5$ e $\psi = -\frac{i}{\beta}(z + f_5)$, então

$$\begin{aligned} & i\beta\left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{\kappa}\right)\langle \psi_x, w \rangle - \rho_2\|z\|_2^2 + \kappa\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \gamma_3\langle z, \varphi_x + \psi \rangle + i\frac{b\lambda}{\kappa\beta}\langle \psi_x, w \rangle - i\frac{b\lambda}{\kappa\beta}\langle z, u_x \rangle \\ & = \rho_2\langle f_6, \varphi_x + \psi \rangle + \frac{b\rho_1}{\kappa}\langle \psi_x, f_4 \rangle - \rho_2\langle z_x, f_3 \rangle + \rho_2\langle f_{5_x}, w \rangle + \rho_2\langle z, f_5 \rangle - i\frac{b\lambda}{\kappa\beta}\langle \psi_x, f_3 \rangle + i\frac{b\lambda}{\kappa\beta}\langle f_5, u_x \rangle. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \kappa\|\varphi_x + \psi\|_2^2 & = -i\beta\left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{\kappa}\right)\langle \psi_x, w \rangle + \rho_2\|z\|_2^2 - \gamma_3\langle z, \varphi_x + \psi \rangle + i\frac{b\lambda}{\kappa\beta}\langle \psi_x, w \rangle + \\ & - i\frac{b\lambda}{\kappa\beta}\langle z, u_x \rangle + \rho_2\langle f_6, \varphi_x + \psi \rangle + \frac{b\rho_1}{\kappa}\langle \psi_x, f_4 \rangle - \rho_2\langle z_x, f_3 \rangle + \rho_2\langle f_{5_x}, w \rangle + \\ & + \rho_2\langle z, f_5 \rangle - i\frac{b\lambda}{\kappa\beta}\langle \psi_x, f_3 \rangle + i\frac{b\lambda}{\kappa\beta}\langle f_5, u_x \rangle. \end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Hölder e Young, (3.38) e (3.39) finalizamos a demonstração. \square

Lema 3.11

Seja $U = (u, v, \varphi, w, \psi, z)$ a solução do sistema (3.32)-(3.37). então , então existe uma constante positiva C_4 tal que

$$b\|\psi_x\|_2^2 - \frac{C_4}{|\beta|}(\|\psi_x\|_2^2 + \|z\|_2^2 + \|w\|_2^2) \leq C_4\left(|\beta|\left|\frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b}\right||\langle \psi_x, w \rangle| + \|F\|_{\mathcal{X}}\|U\|_{\mathcal{X}}\right). \quad (3.46)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (3.37) por $\bar{\psi}$, integrando em $(0, l)$ chegamos a

$$i\beta\rho_2\langle z, \psi \rangle + b\|\psi_x\|_2^2 + \kappa\langle \varphi_x + \psi, \psi \rangle + \gamma_3\langle z, \psi \rangle = \rho_2\langle f_6, \psi \rangle.$$

De (3.36) temos que $i\beta\psi = z + f_5$, então, substituindo apropriadamente nós obtemos a equação

$$-\rho_2\|z\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 + \kappa\langle \varphi_x + \psi, \psi \rangle + \gamma_3\langle z, \psi \rangle = \rho_2\langle f_6, \psi \rangle + \rho_2\langle z, f_5 \rangle.$$

Usando a desigualdade de Hölder, as desigualdades de Young e Poincaré, (3.38) e (3.42) finalizamos a prova. □

Lema 3.12

Seja $U = (u, v, \varphi, w, \psi, z)$ a solução do sistema (3.32)-(3.37). Então, existe uma constante positiva C_5 tal que

$$\rho_1\|w\|_2^2 - \frac{C_5}{|\beta|} (\|\psi_x\|_2^2 + \|z\|_2^2 + \|w\|_2^2) \leq C_5 \left(|\beta| \left| \frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b} \right| |\langle \psi_x, w \rangle| + \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} \right). \quad (3.47)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (3.35) por $\bar{\varphi}$, integrando em $(0, l)$ obtemos

$$i\beta\rho_1\langle w, \varphi \rangle + \kappa\langle \varphi_x + \psi, \varphi_x \rangle + \lambda\|\varphi\|_2^2 - \lambda\langle u, \varphi \rangle = \rho_1\langle f_4, \varphi \rangle.$$

De (3.34) nós temos que $i\beta\varphi = w + f_3$, então, substituindo apropriadamente obtemos a equação

$$\rho_1\|w\|_2^2 = \kappa\langle \varphi_x + \psi, \varphi_x \rangle + \lambda\|\varphi\|_2^2 - \lambda\langle u, \varphi \rangle - \rho_1\langle f_4, \varphi \rangle - \rho_1\langle w, f_3 \rangle.$$

Usando as desigualdades de Hölder, Young e Poincaré, (3.10), (3.11), (3.39) e (3.42) segue o resultado desejado. □

Prova do Teorema (3.5). Assumindo que (3.29) seja verdadeiro, dos lemas (3.10), (3.11) e (3.12) obtemos que

$$\kappa\|\varphi_x + \psi\|_2^2 - \frac{C_3}{|\beta|} (\|\psi_x\|_2^2 + \|z\|_2^2 + \|w\|_2^2) \leq C_3\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}, \quad (3.48)$$

$$b\|\psi_x\|_2^2 - \frac{C_4}{|\beta|} (\|\psi_x\|_2^2 + \|z\|_2^2 + \|w\|_2^2) \leq C_4\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \quad (3.49)$$

e

$$\rho_1\|w\|_2^2 - \frac{C_5}{|\beta|} (\|\psi_x\|_2^2 + \|z\|_2^2 + \|w\|_2^2) \leq C_5\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.50)$$

Usando as desigualdades de Hölder, Young, Poincaré e (3.11), vamos obter uma constante C' tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C' \left(\|v\|_2^2 + \rho_1\|w\|_2^2 + \rho_2\|z\|_2^2 + \alpha\|u_x\|_2^2 + \kappa\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 \right).$$

Pelos lemas (3.8), (3.9), (3.10), (3.11) e (3.12) obtemos uma constante positiva C tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 - \frac{C}{|\beta|} (\|\psi_x\|_2^2 + \|z\|_2^2 + \|w\|_2^2) \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Tomando $c = \frac{1}{2C}$ vamos obter

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq 2C\|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.51)$$

Sendo assim,

$$\overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 2C < \infty.$$

Mais ainda, pelo lema (3.7) temos $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$. Assim, o teorema Gearhart-Herbst-Prüss-Huang nos garante que o semigrupo $S(t)$ é exponencialmente estável. Agora, assumindo que (3.29) é falso, queremos mostrar que a segunda condição do teorema de Gearhart-Herbst-Prüss-Huang não ocorre. Para isto, vamos obter uma sequência $\beta_n \in \mathbb{R}$ e uma sequência de funções limitadas $F_n = (f_{1n}, f_{2n}, f_{3n}, f_{4n}, f_{5n}, f_{6n})$ tais que

$$\limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \infty.$$

Pela equação (3.31) temos

$$i\beta u - v = f_{1n}, \quad (3.52)$$

$$i\beta v - \alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) + \gamma_1 v = f_{2n}, \quad (3.53)$$

$$i\beta \varphi - w = f_{3n}, \quad (3.54)$$

$$i\rho_1 \beta w - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) = \rho_1 f_{4n}, \quad (3.55)$$

$$i\beta \psi - z = f_{5n}, \quad (3.56)$$

$$i\rho_2 \beta z - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \gamma_3 z = \rho_2 f_{6n}. \quad (3.57)$$

Tomando $f_{1n} = f_{3n} = f_{5n} = 0$ chegamos a

$$-\beta^2 u - \alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) + i\gamma_1 \beta u = f_{2n}, \quad (3.58)$$

$$-\rho_1 \beta^2 \varphi - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) = \rho_1 f_{4n}, \quad (3.59)$$

$$-\rho_2 \beta^2 \psi - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + i\gamma_3 \beta \psi = \rho_2 f_{6n}. \quad (3.60)$$

Devido às condições de contorno (3.4) podemos supor que $u(x) = A \sin(\theta_n x)$, $\varphi(x) = B \sin(\theta_n x)$ e $\psi(x) = C \cos(\theta_n x)$, onde $\theta_n = \frac{n\pi}{L}$, com $n \in \mathbb{N}$.

$$[P_1 A - \lambda B] \sin(\theta_n x) = f_{2n}, \quad (3.61)$$

$$[-\lambda A + P_2 B + \kappa \theta_n C] \sin(\theta_n x) = \rho_1 f_{4n}, \quad (3.62)$$

$$[\kappa \theta_n B + P_3 C] \cos(\theta_n x) = \rho_2 f_{6n}, \quad (3.63)$$

onde

$$P_1 = -\beta^2 + \alpha \theta_n^2 + \lambda + i\gamma_1 \beta,$$

$$P_2 = \lambda - \rho_1 \beta^2 + \kappa \theta_n^2,$$

$$P_3 = -\rho_2 \beta^2 + b \theta_n^2 + \kappa + i\gamma_3 \beta.$$

Agora, tomando $f_{2n} = 0$, $f_{4n} = \rho_1^{-1} \sin(\theta_n x)$ e $f_{6n} = \rho_2^{-1} \cos(\theta_n x)$ resulta no sistema

$$P_1 A - \lambda B = 0, \quad (3.64)$$

$$-\lambda A + P_2 B + \kappa \theta_n C = 1, \quad (3.65)$$

$$\kappa \theta_n B + P_3 C = 0. \quad (3.66)$$

Resolvendo o sistema acima, vamos obter

$$B = \frac{P_1 P_3}{P_3 (P_1 P_2 - \lambda^2) - \kappa^2 \theta_n^2 P_1}. \quad (3.67)$$

Tomando $\beta = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_1}} \theta_n$, obtemos

$$\begin{aligned} P_1 P_3 &= \rho_2 \left(\alpha - \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \left(\frac{b}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^4 + i \left[\left(\alpha - \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \gamma_3 + \gamma_1 \rho_2 \left(\frac{b}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \right] \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_1}} \theta_n^3 + \\ &+ \left[\kappa \left(\alpha - \frac{\kappa}{\rho_1} \right) + \lambda \rho_2 \left(\frac{b}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1} \right) - \gamma_1 \gamma_3 \frac{\kappa}{\rho_1} \right] \theta_n^2 + \left[i (\lambda \gamma_3 + \gamma_1 \kappa) \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_1}} \right] \theta_n + \lambda \kappa, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P_3 (P_1 P_2 - \lambda^2) - \kappa^2 \theta_n^2 P_1 &= \lambda \rho_2 \left[\left(\frac{b}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1} \right) - \kappa^2 \right] \left(\alpha - \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^4 + \\ &+ i \lambda \left[\left(\alpha - \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \gamma_3 + \gamma_1 \rho_2 \left(\frac{b}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1} \right) - \gamma_1 \kappa^2 \right] \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_1}} \theta_n^3 + \\ &+ \lambda \left[\kappa \left(\alpha - \frac{\kappa}{\rho_1} \right) - \gamma_1 \gamma_3 \frac{\kappa}{\rho_1} - \kappa^2 \right] \theta_n^2 + i \lambda \gamma_1 \kappa \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_1}} \theta_n. \end{aligned}$$

Portanto, para $\frac{\kappa}{\rho_1} \neq \frac{b}{\rho_2}$ temos

$$|B| \rightarrow \frac{\rho_2 \left(\frac{b}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1} \right)}{\lambda \rho_2 \left(\frac{b}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1} \right) - \kappa^2} \neq 0, \text{ quando } \beta \rightarrow \infty. \quad (3.68)$$

Sendo assim, quando $\beta \rightarrow \infty$ chegamos a

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \geq \rho_1 \|w\|_2^2 = \frac{\rho_1 L}{2} \beta^2 |B|^2 \rightarrow +\infty. \quad (3.69)$$

□

Prova do Teorema (3.6). Assumindo que (3.29) é falso, isto é,

$$\frac{\kappa}{\rho_1} \neq \frac{b}{\rho_2},$$

obtemos dos lemas (3.8), (3.9), (3.10), (3.11) e (3.12) uma constante C' que é independente de β tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C' (|\beta| \langle \psi_x, w \rangle + \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}). \quad (3.70)$$

Usando a desigualdade de Young e (3.46) obtemos uma constante positiva C tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C|\beta|^2 \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.71)$$

Então,

$$\frac{1}{|\beta|^2} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C, \text{ quando } |\beta| \rightarrow \infty. \quad (3.72)$$

Usando o Teorema (1.34) obtemos

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{C}{t^{1/2}}, \quad (3.73)$$

o que implica que para todo $F \in \mathcal{H}$ segue que

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{1/2}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.74)$$

Como 0 pertence ao resolvente do operador \mathcal{A} , segue que \mathcal{A} sobrejetivo em \mathcal{H} , então tomando $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{A}U_0 = F$ temos

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{1/2}} \|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.75)$$

Sendo assim, o semigrupo $S(t)$ é polinomialmente estável.

Para mostrar que esta taxa polinomial é ótima, procederemos por um argumento por contradição. Suponha que a taxa $t^{-1/2}$ pode ser melhorada, ou seja, existe $0 < \epsilon < 2$ tal que

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{1/(2-\epsilon)}} \|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.76)$$

Usando o Teorema (1.34) obtemos que

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-\epsilon}} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C, \text{ quando } |\lambda| \rightarrow \infty. \quad (3.77)$$

Contudo, pela desigualdade (3.69) obtemos uma sequência de números reais (β) e uma sequência de funções limitadas F em \mathcal{H} tais que

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-\epsilon}} \|U\|_{\mathcal{H}} \geq \frac{JL}{2} |\lambda|^\epsilon B^2 \rightarrow \infty, \text{ quando } |\lambda| \rightarrow \infty. \quad (3.78)$$

então,

$$\frac{1}{|\beta|^{2-\epsilon}} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \rightarrow \infty, \text{ quando } |\beta| \rightarrow \infty. \quad (3.79)$$

De modo que obtemos uma contradição. Sendo assim, a taxa não pode ser melhorada, provando o teorema.

□

3.3.2 $\gamma_1 \neq 0, \gamma_2 \neq 0$ e $\gamma_3 = 0$

Os principais resultados dessa subsecção são os seguintes teoremas:

Teorema 3.13

Assumindo que $\gamma_1 \neq 0, \gamma_2 \neq 0$ e $\gamma_3 = 0$, o semigrupo associado $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ é exponencialmente estável se, e só se, a relação (3.29) é verdadeira.

Teorema 3.14

Assumindo que $\gamma_1 \neq 0, \gamma_2 \neq 0$ e $\gamma_3 = 0$. Se (3.29) não é verdade, então o C_0 -Semigrupo $S(t)$ associado com o sistema é polinomialmente estável e satisfaz

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{C}{t^{1/2}} \|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} \quad \forall U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad (3.80)$$

onde C é uma constante positiva. Mais ainda, a taxa de estabilização é ótima.

Analogamente à subsecção anterior, faremos a demonstração em alguns lemas nos quais utilizaremos o operador resolvente de \mathcal{A} dado pela equação

$$(i\beta I - \mathcal{A})U = F, \quad (3.81)$$

onde $U = (u, v, \varphi, w, \psi, z)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^T \in \mathcal{H}$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Desse modo, de (3.31) obtemos o sistema

$$i\beta u - v = f_1, \quad (3.82)$$

$$i\beta v - \alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) + \gamma_1 v = f_2, \quad (3.83)$$

$$i\beta \varphi - w = f_3, \quad (3.84)$$

$$i\rho_1 \beta w - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) + \gamma_2 w = \rho_1 f_4, \quad (3.85)$$

$$i\beta \psi - z = f_5, \quad (3.86)$$

$$i\rho_2 \beta z - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = \rho_2 f_6. \quad (3.87)$$

Devemos mostrar primeiro o seguinte lema.

Lema 3.15

O conjunto formado pelos resolventes do operador \mathcal{A} contém o conjunto $i\mathbb{R}$, isto é, $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$.

Demonstração. Como vimos no Lema (3.2), $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Agora, seja $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Suponha que existe algum $i\beta$ que seja autovalor de \mathcal{A} , isto é, $AU = i\beta U$ com $U \neq 0$.

Por outro lado, de (3.1) obtemos que

$$\langle AU, U \rangle_{\mathcal{H}} = i\beta \|U\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Tomando a parte real da última equação, segue que $\|v\|_2^2 = \|w\|_2^2 = 0$, então $v = w = 0$. Tomando $F = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$, de (3.82) e (3.84) resulta que $u = \varphi = 0$, de (3.85) temos que $\psi = 0$ e de (3.86) resulta que $z = 0$. O que é uma contradição, logo, não existem autovalores imaginários. \square

Durante a demonstração dos lemas seguintes iremos assumir que $\beta \neq 0$. Então, rotineiramente usaremos o fato que existe uma constante c tal que $0 < \frac{1}{|\beta|} < c < 1$ a qual será determinada posteriormente.

Lema 3.16

Seja $U = (u, v, \varphi, w, \psi, z)'$ a solução de sistema (3.82)-(3.87). então existe uma constante positiva C tal que

$$\|v\|_2^2 + \rho_1 \|w\|_2^2 \leq C \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.88)$$

Demonstração. Note que

$$i\beta \|U\|_{\mathcal{H}}^2 - \langle AU, U \rangle_{\mathcal{H}} = \langle F, U \rangle_{\mathcal{H}},$$

de (3.1) obtemos

$$\gamma_1 \|v\|_2^2 + \gamma_2 \|w\|_2^2 = \operatorname{Re} \langle F, U \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Usando a desigualdade de Hölder segue o resultado. \square

Lema 3.17

Seja $U = (u, v, \varphi, w, \psi, z)'$ a solução do sistema (3.32)-(3.37). então existe uma constante positiva C_1 tal que

$$\alpha \|u_x\|_2^2 \leq C_1 \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.89)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (3.33) por \bar{u} , e integrando em $(0, l)$ obtemos

$$i\beta \langle v, u \rangle + \alpha \|u_x\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2 - \lambda \langle \varphi, u \rangle + \gamma_1 \langle v, u \rangle = \langle f_2, u \rangle. \quad (3.90)$$

Das equações (3.32) e (3.34) segue que $-i\beta u = -v - f_1$ e $\varphi = -\frac{i}{\beta}(w + f_3)$, de modo que

$$-\|v\|_2^2 + \alpha \|u_x\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2 + \frac{i\lambda}{\beta} \langle w, u \rangle + \gamma_1 \langle v, u \rangle = \langle f_2, u \rangle + \langle v, f_1 \rangle - \frac{i\lambda}{\beta} \langle f_3, u \rangle. \quad (3.91)$$

Finalizamos utilizando as desigualdades de Hölder, Young, Poincaré e (3.88) e a desigualdade $\frac{1}{|\beta|} < 1$. \square

Lema 3.18

Seja $U = (u, v, \varphi, w, \psi, z)$ a solução de sistema (3.32)-(3.37). então existe uma constante positiva C tal que

$$b \|\psi_x\|_2^2 - C_2 \|z\|_2^2 \leq C_2 \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.92)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (3.37) por $\bar{\psi}$, integrando em $(0, l)$ obtemos que

$$i\beta \rho_2 \langle z, \psi \rangle + b \|\psi_x\|_2^2 + \kappa \langle \varphi_x + \psi, \psi \rangle = \rho_2 \langle f_6, \psi \rangle. \quad (3.93)$$

Agora, multiplicando a equação (3.35) por $-\int_0^x \bar{\psi}(s) ds$, integrando em $(0, l)$ obtemos

$$\begin{aligned} -i\beta\rho_1 \left\langle w, \int_0^x \psi(s) ds \right\rangle - \kappa \langle \varphi_x + \psi, \psi \rangle + \lambda \left\langle \varphi, \int_0^x \psi(s) ds \right\rangle - \lambda \left\langle u, \int_0^x \psi(s) ds \right\rangle \\ - \gamma_2 \left\langle w, \int_0^x \psi(s) ds \right\rangle = -\rho_1 \left\langle f_4, \int_0^x \psi(s) ds \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Somando as equações (3.93) e (3.94) temos

$$\begin{aligned} i\beta\rho_2 \langle z, \psi \rangle - i\beta\rho_1 \left\langle w, \int_0^x \psi(s) ds \right\rangle + b \|\psi_x\|_2^2 + \lambda \left\langle \varphi, \int_0^x \psi(s) ds \right\rangle - \lambda \left\langle u, \int_0^x \psi(s) dx \right\rangle \\ - \gamma_2 \left\langle w, \int_0^x \psi(s) dx \right\rangle = \rho_2 \langle f_6, \psi \rangle - \rho_1 \left\langle f_4, \int_0^x \psi(s) dx \right\rangle. \end{aligned}$$

De (3.34) e (3.36) temos que $i\beta\varphi = w + f_3$ e $i\beta\psi = z + f_5$, respectivamente, então substituindo adequadamente obtemos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} -\rho_2 \|z\|_2^2 + \rho_1 \left\langle w, \int_0^x z(s) ds \right\rangle + b \|\psi_x\|_2^2 - i\frac{\lambda}{\beta} \left\langle w, \int_0^x \psi(s) ds \right\rangle - \lambda \left\langle u, \int_0^x \psi(s) ds \right\rangle - \gamma_2 \left\langle w, \int_0^x \psi(s) ds \right\rangle \\ = \rho_2 \langle f_6, \psi \rangle - \rho_1 \left\langle f_4, \int_0^x \psi(s) ds \right\rangle + \rho_2 \langle z, f_5 \rangle - \rho_1 \left\langle w, \int_0^x f_5(s) dx \right\rangle + i\frac{\lambda}{\beta} \left\langle f_3, \int_0^x \psi(s) ds \right\rangle. \end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Hölder, Young e Poincaré, (3.88) e a desigualdade $\frac{1}{|\beta|} < 1$ finalizamos a prova. □

Lema 3.19

Seja $U = (u, v, \varphi, w, \psi, z)$ a solução de sistema (3.32)-(3.37). então existe uma constante positiva C_3 tal que

$$\kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 - \frac{C_3}{|\beta|} \|z\|_2^2 \leq C_3 \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.95)$$

Demonstração. multiplicando a equação (3.35) por $\bar{\varphi}$, integrando over $(0, l)$ we obtain

$$i\beta\rho_1 \langle w, \varphi \rangle + \kappa \langle \varphi_x + \psi, \varphi_x \rangle + \lambda \|\varphi\|_2^2 - \lambda \langle u, \varphi \rangle + \gamma_2 \langle w, \varphi \rangle = \rho_1 \langle f_4, \varphi \rangle.$$

Note que

$$\langle \varphi_x + \psi, \varphi_x \rangle = \|\varphi_x + \psi\|_2^2 - \langle \varphi_x + \psi, \psi \rangle \quad (3.96)$$

logo

$$i\beta\rho_1 \langle w, \varphi \rangle + \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 - \kappa \langle \varphi_x + \psi, \psi \rangle + \lambda \|\varphi\|_2^2 - \lambda \langle u, \varphi \rangle + \gamma_2 \langle w, \varphi \rangle = \rho_1 \langle f_4, \varphi \rangle.$$

De (3.84) e (3.86) obtemos que $i\beta\varphi = w + f_3$ e $\psi = -\frac{i}{\beta}(z + f_5)$ donde ao substituir adequadamente obtemos a igualdade

$$\begin{aligned} -\rho_1 \|w\|_2^2 + \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 - i\frac{\kappa}{\beta} \langle \varphi_x + \psi, z \rangle + \lambda \|\varphi\|_2^2 - i\frac{\lambda}{\beta} \langle u, w \rangle + i\frac{\gamma_2}{\beta} \|w\|_2^2 = \rho_1 \langle f_4, \varphi \rangle + \rho_1 \langle w, f_3 \rangle + \\ + i\frac{\lambda}{\beta} \langle u, f_3 \rangle - i\frac{\gamma_2}{\beta} \langle w, f_3 \rangle + i\frac{\kappa}{\beta} \langle \varphi_x + \psi, f_5 \rangle. \end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Hölder, Young e Poincaré, assim como (3.88) e (3.92) chegamos ao resultado.

□

Lema 3.20

Seja $U = (u, v, \varphi, w, \psi, z)$ a solução de sistema (3.82)-(3.87). então existe uma constante positiva C_4 tal que

$$\rho_2 \|z\|_2^2 - C_4 \left(\frac{1}{|\beta|} |\langle \psi_x, w \rangle| + |\langle \psi, u_x \rangle| + |\langle \psi_x, w \rangle| \right) \leq C_4 \left(|\beta| \left| \frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b} \right| |\langle \psi_x, w \rangle| + \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} \right) \quad (3.97)$$

Demonstração. Multiplicando a equações (3.87) por $\bar{\varphi}_x + \bar{\psi}$, integrando em $(0, l)$ obtemos

$$-i\beta\rho_2 \langle z_x, \varphi \rangle + i\beta\rho_2 \langle z, \psi \rangle + b \langle \psi_x, (\varphi_x + \psi)_x \rangle + \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 = \rho_2 \langle f_6, \varphi_x + \psi \rangle. \quad (3.98)$$

Pela equação (3.85) segue que

$$-i\beta\rho_1 \bar{w} - \kappa(\bar{\varphi}_x + \bar{\psi})_x + \lambda(\bar{\varphi} - \bar{u}) + \gamma_2 \bar{w} = \rho_1 \bar{f}_4. \quad (3.99)$$

multiplicando as equações (3.99) por $\frac{b}{\kappa} \psi_x$ e integrando em $(0, L)$ obtemos que

$$-i\beta \frac{b\rho_1}{\kappa} \langle \psi_x, w \rangle - b \langle \psi_x, (\varphi_x + \psi)_x \rangle + \frac{b\lambda}{\kappa} \langle \psi_x, \varphi \rangle + \frac{b\lambda}{\kappa} \langle \psi, u_x \rangle + \frac{b\gamma_2}{\kappa} \langle \psi_x, w \rangle = \frac{b\rho_1}{\kappa} \langle \psi_x, f_4 \rangle \quad (3.100)$$

Somando as equações (3.98) e (3.100) temos

$$\begin{aligned} -i\beta\rho_2 \langle z_x, \varphi \rangle - i\beta \frac{b\rho_1}{\kappa} \langle \psi_x, w \rangle + i\beta\rho_2 \langle z, \psi \rangle + \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \frac{b\lambda}{\kappa} \langle \psi_x, \varphi \rangle + \frac{b\lambda}{\kappa} \langle \psi, u_x \rangle + \\ + \frac{b\gamma_2}{\kappa} \langle \psi_x, w \rangle = \rho_2 \langle f_6, \varphi_x + \psi \rangle + \frac{b\rho_1}{\kappa} \langle \psi_x, f_4 \rangle. \end{aligned}$$

Das equações (3.84) obtemos que $i\beta\varphi = w + f_3$, respectivamente, então

$$\begin{aligned} \rho_2 \langle z_x, w \rangle - i\beta \frac{b\rho_1}{\kappa} \langle \psi_x, w \rangle + i\beta\rho_2 \langle z, \psi \rangle + \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + i \frac{b\lambda}{\kappa\beta} \langle \psi_x, w \rangle + \frac{b\lambda}{\kappa} \langle \psi, u_x \rangle + \\ + \frac{b\gamma_2}{\kappa} \langle \psi_x, w \rangle = \rho_2 \langle f_6, \varphi_x + \psi \rangle + \frac{b\rho_1}{\kappa} \langle \psi_x, f_4 \rangle - \rho_2 \langle z_x, f_3 \rangle - i \frac{b\lambda}{\kappa\beta} \langle \psi_x, f_3 \rangle. \end{aligned}$$

Da equação (3.86) obtemos que $z = i\beta\psi - f_5$ e $i\beta\psi = z + f_5$ então

$$\begin{aligned} i\beta \left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{\kappa} \right) \langle \psi_x, w \rangle - \rho_2 \|z\|_2^2 + \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + i \frac{b\lambda}{\kappa\beta} \langle \psi_x, w \rangle + \frac{b\lambda}{\kappa} \langle \psi, u_x \rangle + \frac{b\gamma_2}{\kappa} \langle \psi_x, w \rangle \\ = \rho_2 \langle f_6, \varphi_x + \psi \rangle + \frac{b\rho_1}{\kappa} \langle \psi_x, f_4 \rangle - i \frac{b\lambda}{\kappa\beta} \langle \psi_x, f_3 \rangle - \rho_2 \langle z_x, f_3 \rangle + \rho_2 \langle f_{5x}, w \rangle + \rho_2 \langle z, f_5 \rangle. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \rho_2 \|z\|_2^2 = \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + i\beta \left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{\kappa} \right) \langle \psi_x, w \rangle + i \frac{b\lambda}{\kappa\beta} \langle \psi_x, w \rangle + \frac{b\lambda}{\kappa} \langle \psi, u_x \rangle + \frac{b\gamma_2}{\kappa} \langle \psi_x, w \rangle + \\ - \rho_2 \langle f_6, \varphi_x + \psi \rangle - \frac{b\rho_1}{\kappa} \langle \psi_x, f_4 \rangle + i \frac{b\lambda}{\kappa\beta} \langle \psi_x, f_3 \rangle + \rho_2 \langle z_x, f_3 \rangle - \rho_2 \langle f_{5x}, w \rangle - \rho_2 \langle z, f_5 \rangle. \end{aligned}$$

Finalizamos a prova usando as desigualdades de Hölder, Young e (3.95).

□

Prova do Teorema (3.5). Assumindo que (3.29) é verdadeiro, segue do lema (3.11) que

$$\rho_2 \|z\|_2^2 - C_4 \left(\frac{1}{|\beta|} |\langle \psi_x, w \rangle| + |\langle \psi, u_x \rangle| + |\langle \psi_x, w \rangle| \right) \leq C_4 \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}, \quad (3.101)$$

além disso,

$$b \|\psi_x\|_2^2 - C_2 C_4 \left(\frac{1}{|\beta|} |\langle \psi_x, w \rangle| + |\langle \psi, u_x \rangle| + |\langle \psi_x, w \rangle| \right) \leq C_2 \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.102)$$

Usando as desigualdades de Hölder, Young, Poincaré e (3.11) obtemos uma constante positiva C' tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C' \left(\|v\|_2^2 + \rho_1 \|w\|_2^2 + \rho_2 \|z\|_2^2 + \alpha \|u_x\|_2^2 + \kappa \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + b \|\psi_x\|_2^2 \right).$$

pelos lemas (3.16), (3.17), (3.18), (3.19) e (3.20) obtemos uma constante positiva C_6 tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 - C_6 \left(\frac{1}{|\beta|} |\langle \psi_x, w \rangle| + |\langle \psi, u_x \rangle| + |\langle \psi_x, w \rangle| \right) - \frac{C_6}{|\beta|} \|z\|_2^2 \leq C_6 \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}},$$

resultando na existência de uma constante positiva C a qual vale

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 - \frac{C}{|\beta|} (\rho_2 \|z\|_2^2 + b \|\psi_x\|_2^2 + \rho_1 \|w\|_2^2) \leq C \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}},$$

então

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 - \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Tomando $c = \frac{1}{2C}$ obtemos

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq 2C \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.103)$$

Sendo assim,

$$\overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 2C < \infty.$$

Mais ainda, do lema (3.7) temos $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$. Outrossim, o Teorema Gearhart-Herbst-Prüss-Huang nos garante que o semigrupo $S(t)$ tem estabilidade exponencial.

Agora, assumindo que (3.29) é falso, queremos mostrar que a segunda condição do Teorema de Gearhart-Herbst-Prüss-Huang não ocorre. Para isto, vamos exibir uma sequência $\beta_n \in \mathbb{R}$ e uma sequência de funções limitadas $F_n = (f_{1n}, f_{2n}, f_{3n}, f_{4n}, f_{5n}, f_{6n})$ tal que

$$\limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \infty.$$

Usando a equação (3.81) obtemos

$$i\beta u - v = f_{1n}, \quad (3.104)$$

$$i\beta v - \alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) + \gamma_1 v = f_{2n}, \quad (3.105)$$

$$i\beta \varphi - w = f_{3n}, \quad (3.106)$$

$$i\rho_1 \beta w - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) + \gamma_2 w = \rho_1 f_{4n}, \quad (3.107)$$

$$i\beta \psi - z = f_{5n}, \quad (3.108)$$

$$i\rho_2 \beta z - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = \rho_2 f_{6n}. \quad (3.109)$$

Tomando $f_{1n} = f_{3n} = f_{5n} = 0$ chegamos a

$$-\beta^2 u - \alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) + i\gamma_1 \beta u = f_{2n}, \quad (3.110)$$

$$-\rho_1 \beta^2 \varphi - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) + i\gamma_2 \beta \varphi = \rho_1 f_{4n}, \quad (3.111)$$

$$-\rho_2 \beta^2 \psi - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = \rho_2 f_{6n}. \quad (3.112)$$

Pelas condições de contorno (3.4) podemos supor que $u(x) = A \sin(\theta_n x)$, $\varphi(x) = B \sin(\theta_n x)$ e $\psi(x) = C \cos(\theta_n x)$, onde $\theta_n = \frac{n\pi}{L}$, com $n \in N$,

$$[P_1 A - \lambda B] \sin(\theta_n x) = f_{2n}, \quad (3.113)$$

$$[-\lambda A + P_2 B + \kappa \theta_n C] \sin(\theta_n x) = \rho_1 f_{4n}, \quad (3.114)$$

$$[\kappa \theta_n B + P_3 C] \cos(\theta_n x) = \rho_2 f_{6n}, \quad (3.115)$$

onde

$$P_1 = -\beta^2 + \alpha \theta_n^2 + \lambda + i\gamma_1 \beta,$$

$$P_2 = \lambda - \rho_1 \beta^2 + \kappa \theta_n^2 + i\gamma_2 \beta,$$

$$P_3 = -\rho_2 \beta^2 + b \theta_n^2 + \kappa.$$

Agora, tomando $f_{2n} = f_{4n} = 0$ e $f_{6n} = \rho_2^{-1} \cos(\theta_n x)$ resulta no sistema

$$P_1 A - \lambda B = 0, \quad (3.116)$$

$$-\lambda A + P_2 B + \kappa \theta_n C = 0, \quad (3.117)$$

$$\kappa \theta_n B + P_3 C = 1. \quad (3.118)$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos

$$C = \frac{P_1 P_2 - \lambda^2}{P_3 (P_1 P_2 - \lambda^2) - \kappa \theta_n^2 P_1}. \quad (3.119)$$

Tomando $\beta = \sqrt{\frac{b}{\rho_2}} \theta_n$ temos que

$$\begin{aligned} P_1 P_2 - \lambda^2 &= \rho_1 \left(\alpha - \frac{b}{\rho_2} \right) \left(\frac{b}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \theta_n^4 + i \left[\left(\alpha - \frac{b}{\rho_2} \right) \gamma_2 + \gamma_1 \rho_1 \left(\frac{b}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1} \right) \right] \sqrt{\frac{b}{\rho_2}} \theta_n^3 + \\ &+ \left[\lambda \left(\alpha - \frac{b}{\rho_2} \right) - \gamma_1 \gamma_2 \frac{b}{\rho_2} \right] \theta_n^2 + i \lambda [\gamma_1 + \gamma_2] \sqrt{\frac{b}{\rho_2}} \theta_n, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P_3 (P_1 P_2 - \lambda^2) - \kappa^2 \theta_n^2 P_1 &= \kappa \left[\rho_1 \left(\frac{b}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1} \right) - \kappa \right] \left(\alpha - \frac{b}{\rho_2} \right) \theta_n^4 + \\ &+ i \kappa \left[\left(\alpha - \frac{b}{\rho_2} \right) \gamma_2 + \gamma_1 \rho_1 \left(\frac{b}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1} \right) - \kappa \gamma_1 \right] \sqrt{\frac{b}{\rho_2}} \theta_n^3 + \\ &+ \kappa \left[\lambda \left(\alpha - \frac{b}{\rho_2} \right) - \gamma_1 \gamma_2 \frac{b}{\rho_2} - \lambda \kappa \right] \theta_n^2 + i \lambda \kappa [\gamma_1 + \gamma_2] \sqrt{\frac{b}{\rho_2}} \theta_n. \end{aligned}$$

Portanto, para $\frac{\kappa}{\rho_1} \neq \frac{b}{\rho_2}$ temos

$$|C| \rightarrow \frac{\rho_1 \left(\frac{b}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1} \right)}{\kappa \rho_1 \left(\frac{b}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1} \right) - \kappa^2} \neq 0, \text{ quando } \beta \rightarrow \infty. \quad (3.120)$$

Sendo assim, quando $\beta \rightarrow \infty$ chegamos a

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \geq \rho_2 \|z\|_2^2 = \frac{\rho_2 L}{2} \beta^2 |C|^2 \rightarrow +\infty. \quad (3.121)$$

Desse modo, o Teorema de Gearhart-Herbst-Prüss-Huang nos garante que não há estabilidade exponencial para o semigrupo $S(t)$.

□

Prova do Teorema (3.14). Assumindo que (3.29) é falso, isto é,

$$\frac{\kappa}{\rho_1} \neq \frac{b}{\rho_2},$$

obtemos dos lemas (3.16), (3.17), (3.18), (3.19) e (3.20) uma constante C' que é independente de β tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C' (|\beta| \langle \psi_x, w \rangle + \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}). \quad (3.122)$$

Usando a desigualdade de Young e (3.92) uma constante positiva C tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C |\beta|^2 \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.123)$$

Então,

$$\frac{1}{|\beta|^2} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C, \text{ quando } |\beta| \rightarrow \infty. \quad (3.124)$$

então utilizando o Teo (1.34) obtemos

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{C}{t^{1/2}}. \quad (3.125)$$

implicando que para todo $F \in \mathcal{H}$ segue que

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{1/2}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.126)$$

Como zero pertence ao resolvente do operador \mathcal{A} , segue que \mathcal{A} está contido em \mathcal{H} , então tomando $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{A}U_0 = F$ temos

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{1/2}} \|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.127)$$

Sendo assim, o semigrupo $S(t)$ é polinomialmente estável.

Para mostrar que a taxa da estabilidade polinomial é ótima, partiremos novamente de um argumento por contradição. Suponha que a taxa $t^{-1/2}$ possa ser melhorada, ou seja, existe $0 < \epsilon < 2$ tal que

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{1/(2-\epsilon)}} \|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.128)$$

Usando o Teorema (1.34) obtemos que

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-\epsilon}} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C, \text{ quando } |\beta| \rightarrow \infty. \quad (3.129)$$

Entretanto, pela desigualdade (3.69) obtemos uma sequência de números reais (β) e uma sequência de funções limitadas F em \mathcal{H} tal que

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-\epsilon}} \|U\|_{\mathcal{H}} \geq \frac{JL}{2} |\lambda|^\epsilon B^2 \rightarrow \infty, \text{ quando } |\lambda| \rightarrow \infty. \quad (3.130)$$

então,

$$\frac{1}{|\beta|^{2-\epsilon}} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \rightarrow \infty, \text{ quando } |\beta| \rightarrow \infty. \quad (3.131)$$

Obtemos então uma contradição. Sendo assim, a taxa não pode ser melhorada e, portanto, a prova está concluída. □

3.3.3 $\gamma_1 = 0, \gamma_2 \neq 0$ e $\gamma_3 \neq 0$

O principal resultado desta subseção é o seguinte teorema,

Teorema 3.21

Assumindo que $\gamma_1 = 0, \gamma_2 \neq 0$ e $\gamma_3 \neq 0$, o semigrupo associado $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ não possui estabilidade exponencial.

Demonstração. Vamos obter uma sequência $\beta_n \in \mathbb{R}$ e uma sequência de funções limitadas $F_n = (f_{1n}, f_{2n}, f_{3n}, f_{4n}, f_{5n}, f_{6n})$ tal que

$$\limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \infty.$$

Analogamente ao sistema (3.82)-(3.87) temos

$$i\beta u - v = f_{1n}, \quad (3.132)$$

$$i\beta v - \alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) = f_{2n}, \quad (3.133)$$

$$i\beta \varphi - w = f_{3n}, \quad (3.134)$$

$$i\rho_1 \beta w - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) + \gamma_2 w = \rho_1 f_{4n}, \quad (3.135)$$

$$i\beta \psi - z = f_{5n}, \quad (3.136)$$

$$i\rho_2 \beta z - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \gamma_3 z = \rho_2 f_{6n}. \quad (3.137)$$

Tomando $f_{1n} = f_{3n} = f_{5n} = 0$ chegamos a

$$-\beta^2 u - \alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) = f_{2n}, \quad (3.138)$$

$$-\rho_1 \beta^2 \varphi - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) + i\gamma_2 \beta \varphi = \rho_1 f_{4n}, \quad (3.139)$$

$$-\rho_2 \beta^2 \psi - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + i\gamma_3 \beta \psi = \rho_2 f_{6n}. \quad (3.140)$$

Decorre das condições de contorno em (3.4) que podemos assumir que $u(x) = A \sin(\theta_n x)$, $\varphi(x) = B \sin(\theta_n x)$ e $\psi(x) = C \cos(\theta_n x)$, onde $\theta_n = \frac{n\pi}{L}$, com $n \in N$.

$$[P_1 A - \lambda B] \sin(\theta_n x) = f_{2n} \quad (3.141)$$

$$[-\lambda A + P_2 B + \kappa \theta_n C] \sin(\theta_n x) = \rho_1 f_{4n} \quad (3.142)$$

$$[\kappa \theta_n B + P_3 C] \cos(\theta_n x) = \rho_2 f_{6n}. \quad (3.143)$$

onde

$$P_1 = -\beta^2 + \alpha \theta_n^2 + \lambda,$$

$$P_2 = \lambda - \rho_1 \beta^2 + \kappa \theta_n^2 + i\gamma_2 \beta,$$

$$P_3 = -\rho_2 \beta^2 + b \theta_n^2 + \kappa + i\gamma_3 \beta.$$

Tomando $f_{2n} = \sin(\theta_n x)$ e $f_{4n} = f_{6n} = 0$ resulta o seguinte sistema

$$P_1 A - \lambda B = 1 \quad (3.144)$$

$$-\lambda A + P_2 B + \kappa \theta_n C = 0 \quad (3.145)$$

$$\kappa \theta_n B + P_3 C = 0. \quad (3.146)$$

Escolhendo $\beta = \sqrt{\alpha \theta_n^2 + \lambda}$ obtemos que $P_1 = 0$, logo de (3.144) resulta que

$$B = -\frac{1}{\lambda}.$$

Assim,

$$|B| \rightarrow \frac{1}{\lambda}, \quad (3.147)$$

quando fazemos $\beta \rightarrow \infty$. Sendo assim, quando $\beta \rightarrow \infty$ chegamos em

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \geq \rho_1 \|w\|_2^2 = \frac{\rho_1 L}{2} \beta^2 |B|^2 \rightarrow +\infty. \quad (3.148)$$

Pelo Teorema de Gearhart-Herbst-Prüss-Huang obtemos que não é válido o decaimento exponencial de $S(t)$.

□

Capítulo 4

Amortecimento do tipo Kelvin-Voigt

Conforme [26], alguns materiais, sobretudo os poliméricos, apresentam propriedades mecânicas que em determinados aspectos se assemelham a um sólido elástico que obedece à lei de Hooke para a elasticidade; e em outros, à lei de Newton para a viscosidade. A esse comportamento dualístico dá-se o nome de viscoelasticidade, sendo umas das abordagens mais comuns a desenvolvida por Kelvin e Voigt.

4.1 Ponte Suspensa com amortecimento do tipo Kelvin-Voigt

Considere o seguinte modelo de ponte suspensa com amortecimento do tipo viscoelástico de Kelvin-Voigt,

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) - \gamma_1 u_{txx} = 0, \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (4.1)$$

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) - \gamma_2 \varphi_{txx} = 0, \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (4.2)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - \gamma_3 \psi_{txx} = 0, \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (4.3)$$

onde $\alpha, \lambda, k, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \rho_1, \rho_2$ são constantes positivas, conforme [Capítulo 2](#), e as condições de contorno são dadas por

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(L, t) = 0, t > 0, \\ \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = 0, t > 0, \\ \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, t > 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

com dados iniciais

$$\begin{aligned} u(0, t) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), x \in (0, L), \\ \varphi(0, t) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), x \in (0, L), \\ \psi(0, t) = \psi_0(x), \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), x \in (0, L). \end{aligned} \quad (4.5)$$

De modo que nossas funções pertencem ao espaços funcionais

$$u_0(x) \in H_0^1(0, L), \quad u_1(x) \in L^2(0, L),$$

$$\varphi_0(x) \in H_0^1(0, L), \quad \varphi_1(x) \in L^2(0, L),$$

$$\psi_0(x) \in H_0^1(0, L), \quad \psi_1(x) \in L^2(0, L).$$

4.2 Energia do Sistema

Agora determinaremos a energia do sistema! Iniciaremos multiplicando a primeira equação do sistema por u_t , obtendo

$$u_t u_{tt} - \alpha u_t u_{xx} - \lambda u_t (\varphi - u) - \gamma_1 u_t u_{txx} = 0.$$

Integrando em $(0, L)$, chegamos a

$$\int_0^L u_t u_{tt} dx - \alpha \int_0^L u_t u_{xx} dx - \lambda \int_0^L u_t (\varphi - u) dx = \gamma_1 \int_0^L u_t u_{txx} dx.$$

Fazendo integração por partes e usando as condições de contorno, temos que

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L |u_t|^2 dx + \alpha \int_0^L u_{tx} u_x dx - \lambda \int_0^L u_t (\varphi - u) dx = -\gamma_1 \int_0^L |u_{tx}|^2 dx.$$

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L |u_t|^2 dx + \frac{d}{dt} \frac{\alpha}{2} \int_0^L |u_x|^2 dx - \lambda \int_0^L u_t (\varphi - u) dx = -\gamma_1 \int_0^L |u_{tx}|^2 dx.$$

Multiplicando a segunda equação por φ_t ,

$$\rho_1 \varphi_t \varphi_{tt} - k \varphi_t (\varphi_x + \psi)_x + \lambda \varphi_t (\varphi - u) - \gamma_2 \varphi_t \varphi_{txx} = 0.$$

Integrando em $(0, L)$, ficamos com

$$\rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi_{tt} dx - k \int_0^L \varphi_t (\varphi_x + \psi)_x dx + \lambda \int_0^L \varphi_t (\varphi - u) dx = \int_0^L \gamma_2 \varphi_t \varphi_{txx} dx.$$

Fazendo integração por partes novamente, obtemos

$$\frac{d}{dt} \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + k \int_0^L \varphi_{tx} (\varphi_x + \psi) dx + \lambda \int_0^L \varphi_t (\varphi - u) dx = - \int_0^L \gamma_2 |\varphi_{tx}|^2 dx.$$

Para a terceira equação, multiplicaremos por ψ_t , vejamos

$$\rho_2 \psi_t \psi_{tt} - b \psi_t \psi_{xx} + \lambda \psi_t (\varphi_x + \psi) - \gamma_3 \psi_t \psi_{txx} = 0.$$

Novamente, vamos integrar em $(0, L)$,

$$\rho_2 \int_0^L \psi_t \psi_{tt} dx - b \int_0^L \psi_t \psi_{xx} dx + \lambda \int_0^L \psi_t (\varphi_x + \psi) dx = \int_0^L \gamma_3 \psi_t \psi_{txx} dx.$$

Aplicando mais uma vez integral por partes e as condições de contorno,

$$\frac{d}{dt} \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\psi_t|^2 dx + b \int_0^L \psi_{tx} \psi_x dx + \lambda \int_0^L \psi_t (\varphi_x + \psi) dx = - \int_0^L \gamma_3 |\psi_{tx}|^2 dx.$$

Ou seja,

$$\frac{d}{dt} \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\psi_t|^2 dx + \frac{d}{dt} \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \lambda \int_0^L \psi_t (\varphi_x + \psi) dx = - \int_0^L \gamma_3 |\psi_{tx}|^2 dx.$$

Ao somar as 3 equações obtidas, resulta que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L [|u_t|^2 + \alpha |u_x|^2 + b |\psi_x|^2 + \rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \lambda |\varphi - u|^2 + k |\varphi_x + \psi|^2] dx \\ & = -\gamma_1 \int_0^L |u_{tx}|^2 dx - \int_0^L \gamma_2 |\varphi_{tx}|^2 dx - \gamma_3 \int_0^L |\psi_{tx}|^2 dx. \end{aligned}$$

Por fim, a energia do nosso sistema é definida como

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [|u_t|^2 + \alpha |u_x|^2 + b |\psi_x|^2 + \rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \lambda |\varphi - u|^2 + k |\varphi_x + \psi|^2] dx.$$

4.3 Semigrupo Associado e Existência de Solução

Tomando $u_t = v$, $\varphi_t = w$ e $\psi_t = z$, podemos tomar $U = (u, v, \varphi, w, \psi, z)^T$, o que implica que

$$U_t = \begin{pmatrix} v \\ \alpha u_{xx} + \lambda(\varphi - u) - \gamma_1 v_{xx} \\ w \\ \frac{1}{\rho_1} [k(\varphi_x + \psi)_x - \lambda(\varphi - u) - \gamma_2 w_{xx}] \\ z \\ \frac{1}{\rho_2} [b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) - \gamma_3 z_{xx}] \end{pmatrix} := \mathcal{A}U.$$

Chegamos então ao seguinte problema de Cauchy,

$$\begin{cases} U_t - \mathcal{A}U = 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (4.6)$$

onde $U \in \mathcal{H} = \{H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)\}^3$. Por sua vez, observe que o domínio do operador \mathcal{A} definido acima é dado por $D(\mathcal{A}) = \{H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \times L^2(0, L)\}^3$. O espaço \mathcal{H} introduzido é um espaço de

Hilbert com o produto interno dado por,

$$\begin{aligned} \langle U, \tilde{U} \rangle = & \int_0^L v \bar{p} dx + \alpha \int_0^L u_x \bar{o}_x dx + \rho_1 \int_0^L w \bar{r} dx + \rho_2 \int_0^L z \bar{t} dx \\ & + \lambda \int_0^L (\varphi - u)(\bar{q} - \bar{o}) dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi)(\bar{q}_x + \bar{s}) dx \end{aligned}$$

com $U = (u, v, \varphi, w, \psi, z)^T$ e $\tilde{U} = (o, p, q, r, s, t)^T$, o que nos permite definir uma norma em \mathcal{H} por $\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle U, U \rangle$.

Da teoria de espaços de Sobolev, concluímos que $D(\mathcal{A})$ é denso em \mathcal{H} e vamos mostrar que \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $S(t) = e^{At}$, $t \geq 0$, em \mathcal{H} . O seguinte resultado é fundamental para nosso objetivo.

Teorema 4.1

Seja A um operador linear ilimitado com domínio $D(A)$ denso em um espaço de Hilbert H . Se A é dissipativo e $0 \in \rho(A)$, o conjunto resolvente de A , então A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em H .

Demonstração. Veja [22], Theorem 1.2.4, page 3. □

Lema 4.2

O operador \mathcal{A} é dissipativo.

Demonstração. Para todo $U = (u, v, \varphi, w, \psi, z) \in D(\mathcal{A})$, analogamente ao Lema 2.2, vale que

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = -\gamma_1 \int_0^L |u_{tx}|^2 dx - \int_0^L \gamma_2 |\varphi_{tx}|^2 dx - \int_0^L \gamma_3 |\psi_{tx}|^2 dx.$$

Logo, \mathcal{A} é dissipativo. □

Lema 4.3

$0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Demonstração. Seja $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6)^T \in \mathcal{H}$ e considere a equação resolvente

$$-AU = F.$$

Em termos das componentes de U e F , podemos escrever

$$-v = f^1 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (4.7)$$

$$-\alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) + \gamma_1 v_{xx} = f^2 \text{ em } L^2(0, L), \quad (4.8)$$

$$-w = f^3 \text{ em } H_0^1(0, L) \quad (4.9)$$

$$-k(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) + \gamma_2 w_{xx} = f^4 \text{ em } L^2(0, L), \quad (4.10)$$

$$-z = f^5 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (4.11)$$

$$-b\psi_{xx} + \lambda(\varphi_x + \psi) + \gamma_3 z_{xx} = f^6 \text{ em } L^2(0, L). \quad (4.12)$$

Usando 4.7 - 4.12, chegamos a

$$-\alpha u_{xx} - \lambda(\varphi - u) = \gamma_1 f_{xx}^1 + f^2 := g_1 \in L^2(0, L), \quad (4.13)$$

$$-k(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) = \gamma_2 f_{xx}^3 + f^4 := g_2 \in L^2(0, L), \quad (4.14)$$

$$-b\psi_{xx} + \lambda(\varphi_x + \psi) = \gamma_3 f_{xx}^5 + f^6 := g_3 \in L^2(0, L). \quad (4.15)$$

Multiplicando 4.13 por $\tilde{u} \in H_0^1(0, L)$, 4.14 por $\tilde{\varphi} \in H_0^1(0, L)$ e 4.15 por $\tilde{\psi} \in H_0^1(0, L)$, ao integrar por partes, temos

$$-\alpha \int_0^L \tilde{u}_x u_x dx - \int_0^L \lambda \tilde{u}(\varphi - u) dx = \int_0^L \tilde{u} g_1 dx \in L^2(0, L), \quad (4.16)$$

$$-k \int_0^L \tilde{\varphi}_x(\varphi_x + \psi) dx + \lambda \int_0^L \tilde{\varphi}(\varphi - u) dx = \int_0^L \tilde{\varphi} g_2 dx \in L^2(0, L), \quad (4.17)$$

$$-b \int_0^L \tilde{\psi}_x \psi_x dx + \lambda \int_0^L \tilde{\psi}(\varphi_x + \psi) dx = \int_0^L \tilde{\psi} g_3 dx \in L^2(0, L). \quad (4.18)$$

Somando 4.16, 4.17 e 4.18, obtemos um problema variacional

$$B((u, \varphi, \psi); (\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi})) = L((\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi})), \quad (4.19)$$

onde, $B : [H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)]^2 \rightarrow \mathbb{C}$, é dado por

$$\begin{aligned} B((u, \varphi, \psi); (\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi})) &= \alpha \int_0^L u_x \tilde{u}_x dx + \lambda \int_0^L (\varphi - u)(\tilde{\varphi} - \tilde{u}) dx \\ &\quad + k \int_0^L (\varphi_x + \psi)(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi}) + b \int_0^L \psi_x \tilde{\psi}_x dx \end{aligned}$$

e $L : [H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)] \rightarrow \mathbb{C}$, o qual é dado por

$$L((\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi})) = \int_0^L \tilde{u} g_1 dx + \int_0^L \tilde{\varphi} g_2 dx + \int_0^L \tilde{\psi} g_3 dx.$$

Definindo uma norma em $H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$ por $\|(u, \varphi, \psi)\|^2 = B((u, \varphi, \psi); (u, \varphi, \psi))$, temos que nesta norma B é contínua e uma forma bilinear coerciva em $H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$.

Sendo assim, pelo Teorema de Lax-Milgram, existe uma única $(u, \varphi, \psi) \in H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$ que é solução de 4.19, para todo $(\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$. Pela teoria de equações elípticas (veja [22], cap 1), 4.13, 4.14 e 4.15 nos guiam a $u, \varphi, \psi \in H^2(0, L)$, isto é, $u, \varphi, \rho \in H_0^1 \cap H^2(0, L)$. Por outro lado, segue de 4.7, 4.9 e 4.10 que $v, w, z \in H_0^1(0, L)$. Logo, $U \in D(\mathcal{A})$ e concluímos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. □

Teorema 4.4

O operador \mathcal{A} gera um C_0 -semigrupo de contrações

$$S(t) = e^{At}, t \geq 0$$

no espaço de Hilbert \mathcal{H} .

Demonstração. Como \mathcal{A} é dissipativo, densamente definido e $0 \in \rho(\mathcal{A})$, a conclusão segue do Teorema 4.1. \square

Teorema 4.5

Seja $U_0 \in \mathcal{H}$, então existe uma única solução fraca U do problema 4.6 satisfazendo

$$U \in C^0([0, +\infty); \mathcal{H}).$$

Mais ainda, se $U_0 \in D(\mathcal{A})$, então U é uma solução forte com a seguinte regularidade

$$U \in C^0([0, +\infty); D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, +\infty); \mathcal{H}).$$

Demonstração. Considerando que o operador \mathcal{A} gera um C_0 -semigrupo de contrações

$$S(t) = e^{At}, t \geq 0$$

no espaço de Hilbert \mathcal{H} , pelo corolário 1.24, temos que $U(t) = e^{t\mathcal{A}}U_0$ é a única solução de 4.6 satisfazendo às condições acima. \square

4.4 Comportamento Assintótico

Novamente, vamos mostrar que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$. Para isso, iremos supor falso que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$, o que implica que existem θ e uma sequência $\beta^n \rightarrow \theta, |\beta^n| < |\theta|$, tal que $\|(i\beta^n - A)^{-1}\|_{L(\mathcal{H})} \rightarrow \infty$ e para todo $M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que se $n > n_0$, então

$$\|(i\beta^n - A)^{-1}\|_{L(\mathcal{H})} > M.$$

Assim, existem $0 \neq y^n \in \mathcal{H}$ tais que

$$\frac{\|(i\beta^n - A)^{-1}y^n\|_{\mathcal{H}}}{\|y^n\|_{\mathcal{H}}} > M.$$

Tomando $g^n = (i\beta^n - A)^{-1}y^n$, podemos escrever

$$\frac{\|g^n\|_{\mathcal{H}}}{\|(i\beta^n - A)g^n\|_{\mathcal{H}}} > M.$$

$$\frac{\|(i\beta^n - A)g^n\|_{\mathcal{H}}}{\|g^n\|_{\mathcal{H}}} < \frac{1}{M}.$$

Daí, $\|(i\beta^n - A)U^n\|_{\mathcal{H}} < \frac{1}{M}$, com $n > n_0$ e $U^n = \frac{g^n}{\|g^n\|} \in D(\mathcal{A}), \|U^n\| = 1$. Logo, observamos que

$$\|(i\beta^n - A)U^n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0.$$

Isto é,

$$i\beta^n u^n - v^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (4.20)$$

$$i\beta^n v^n - \alpha u_{xx} + \lambda(\varphi - u) + \gamma_1 v_{xx} \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (4.21)$$

$$i\beta^n \varphi^n - w^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (4.22)$$

$$i\beta^n w^n - k(\varphi_x + \psi)_x + \lambda(\varphi - u) + \gamma_2 w_{xx} \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (4.23)$$

$$i\beta^n \psi^n - z^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (4.24)$$

$$i\beta^n z^n - b\psi_{xx} + k(\varphi - \psi) - \gamma_2 z_{xx} \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (4.25)$$

Agora, note que

$$\langle (i\beta^n - A)U^n, U^n \rangle_{\mathcal{H}} = i\beta^n \|U^n\|_{\mathcal{H}}^2 - \langle AU^n, U^n \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Tomando a parte real, temos

$$\operatorname{Re} \langle (i\beta^n - A)U^n, U^n \rangle_{\mathcal{H}} = \gamma_1 \int_0^L |v_x^n|^2 dx + \gamma_2 \int_0^L |w_x^n|^2 dx + \gamma_3 \int_0^L |z_x^n|^2 dx.$$

Como U^n é limitado e $(i\beta^n - A)U^n \rightarrow 0$, temos que

$$v_x^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (4.26)$$

$$w_x^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (4.27)$$

$$z_x^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (4.28)$$

Aplicando a Desigualdade de Poincaré, temos que

$$v^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (4.29)$$

$$w^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (4.30)$$

$$z^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (4.31)$$

Substituindo 4.29 em 4.20, 4.30 em 4.22 e 4.31 em 4.24, temos que

$$u^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (4.32)$$

$$\varphi^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (4.33)$$

$$\psi^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (4.34)$$

Observe porém que precisamos que

$$u^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (4.35)$$

$$\varphi^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (4.36)$$

$$\psi^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L). \quad (4.37)$$

Agora, usando 4.29 a 4.34 em 4.21, vamos obter

$$-\alpha u_{xx}^n - \gamma_1 v_{xx}^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (4.38)$$

Integrando de 0 a x , temos

$$-\alpha u_x^n + \alpha u_x^n(0) - \gamma_1 v_x^n + \gamma_1 v_x^n(0) \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (4.39)$$

Por 4.26, chegamos a

$$u_x^n - u_x^n(0) \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (4.40)$$

Agora, aplicando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (veja [22], pag 10) com $m = 2$, $a = \frac{1}{2}$, $p = 2$, $r = 2$, $j = 1$, $n = 1$ e $q = 2$, temos

$$\|u_x^n(0)\|_{L^2(0,L)} \leq C_1 \|u_{xx}^n(0)\|_{L^2(0,L)}^{\frac{1}{2}} \|u^n(0)\|_{L^2(0,L)}^{\frac{1}{2}} + c_2 \|u^n(0)\|_{L^2(0,L)}.$$

Por 29, $u^n(0) \rightarrow 0$ em $L^2(0, L)$ e por 4.38, $u_{xx}^n(0) \rightarrow 0$ em $L^2(0, L)$. Então, temos $u_x^n(0) \rightarrow 0$ em $L^2(0, L)$ e por 4.40, temos $u_x^n \rightarrow 0$ em $L^2(0, L)$. Como $u^n \rightarrow 0$ em $L^2(0, L)$ e u_x^n em $L^2(0, L)$, deduzimos que

$$u^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L). \quad (4.41)$$

Aplicando a mesma ideia, chegamos a

$$\varphi^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L). \quad (4.42)$$

$$\psi^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L). \quad (4.43)$$

Sendo assim, temos que $\|U^n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$, contradizendo $\|U^n\|_{\mathcal{H}} = 1$. Concluimos então que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$.

Agora, queremos que $\overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|\beta(i\beta - A)^{-1}\|_{L(H)} < \infty$. Suponha, por absurdo, que isso seja falso. Então existem uma sequência $\beta^n \rightarrow \infty$ com $\beta^n > 0$ e também uma sequência de vetores complexos unitários $U^n = (u^n, v^n, \varphi^n, w^n, \psi^n, z^n)$, tal que

$$\left\| \left(i - \frac{1}{\beta^n} A \right) U^n \right\| \rightarrow 0,$$

ou seja,

$$i u^n - \frac{1}{\beta^n} v^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (4.44)$$

$$i v^n - \frac{1}{\beta^n} [\alpha u_{xx}^n + \lambda(\varphi^n - u^n) + \gamma_1 v_{xx}^n] \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (4.45)$$

$$i \varphi^n - \frac{1}{\beta^n} w^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (4.46)$$

$$i \rho_1 w^n - \frac{1}{\beta^n} [k(\varphi_x^n + \psi)_x - \lambda(\varphi^n - u^n) + \gamma_2 w_{xx}^n] \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (4.47)$$

$$i \psi^n - \frac{1}{\beta^n} z^n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (4.48)$$

$$i \rho_2 z^n - \frac{1}{\beta^n} [b\psi_{xx} - k(\varphi_x^n + \psi)_x + \gamma_3 z_{xx}^n] \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (4.49)$$

Vale que

$$\operatorname{Re} \left\langle \left(i - \frac{1}{\beta^n} A \right) U^n, U^n \right\rangle_{\mathcal{H}} = \frac{\gamma_1}{\beta^n} \int_0^L |v_x^n|^2 dx + \frac{\gamma_2}{\beta^n} \int_0^L |w_x^n|^2 dx + \frac{\gamma_3}{\beta^n} \int_0^L |z_x^n|^2 dx.$$

Como U^n é limitado e $\left(i - \frac{1}{\beta^n} A \right) U^n \rightarrow 0$, então vale que

$$\frac{v_x^n}{\beta^n} \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (4.50)$$

$$\frac{w_x^n}{\beta^n} \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (4.51)$$

$$\frac{z_x^n}{\beta^n} \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (4.52)$$

Aplicando a Desigualdade de Poincaré, temos que

$$\frac{v^n}{\beta^n} \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (4.53)$$

$$\frac{w^n}{\beta^n} \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (4.54)$$

$$\frac{z^n}{\beta^n} \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (4.55)$$

Substituindo 4.53 em 4.44, 4.54 em 4.46 e 4.55 em 4.48, obtemos

$$u^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (4.56)$$

$$\varphi^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (4.57)$$

$$\psi^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (4.58)$$

Agora, multiplicando a equação 4.45 por v ,

$$i \|v\| - \frac{1}{\beta^n} [-\alpha \langle u_{xx}^n, v \rangle + \lambda \langle (\varphi^n - u^n), v \rangle + \gamma_1 \langle v_{xx}^n, v \rangle] \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (4.59)$$

Tomando a parte real, segue que

$$\frac{1}{\beta^n} \alpha \langle u_{xx}^n, v \rangle - \frac{1}{\beta^n} \lambda \langle (\varphi^n - u^n), v \rangle - \frac{1}{\beta^n} \gamma_1 \langle v_{xx}^n, v \rangle \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L).$$

Fazendo integral por partes, isso implica que,

$$\frac{\alpha}{\beta^n} \langle u_{xx}^n, v \rangle \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (4.60)$$

Usando 4.60 em 4.59, chegamos a

$$v^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (4.61)$$

Sendo assim, temos por 4.45 que

$$\frac{1}{\beta^n} [\alpha u_{xx}^n + \lambda(\varphi^n - u^n) + \gamma_1 v_{xx}^n] \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (4.62)$$

Agora, multiplicando por β^n , chegamos a

$$\alpha u_{xx}^n + \lambda(\varphi^n - u^n) + \gamma_1 v_{xx}^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (4.63)$$

Aplicando 4.56, 4.57 e a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg novamente, concluiremos que

$$u_x^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (4.64)$$

Analogamente, vamos concluir que $\varphi^n, \psi^n \rightarrow 0$ em H_0^1 e temos que $v^n, w^n, z^n \rightarrow 0$ em L^2 . Contradi-
zendo que U^n são vetores unitários.

Corolário 4.6

O C_0 -semigrupo de contrações $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$, $t \geq 0$, gerado por \mathcal{A} é exponencialmente estável.

Demonstração. Com efeito, como $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$, pelo Teorema de Huang-Herbst-Gearhart-Prüss, precisaremos mostrar apenas que

$$\overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty.$$

Para $|\beta| \geq 1$ teremos que

$$\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq |\beta| \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \|\beta(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})},$$

e portanto,

$$\overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|\beta(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty.$$

□

Considerações Finais e Perspectivas Futuras

Nesta tese, estudamos três problemas através da técnica de semigrupos aplicadas às Equações Diferenciais Parciais. Obtivemos a existência e unicidade de solução para todos os problemas e decaimento exponencial para o primeiro e o último, para o segundo problema há decaimento exponencial em posse da condição $\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$ e decaimento polinomial caso a mesma não ocorra. Mais ainda, no problema da Ponte suspensa com atrito foi possível provar a analiticidade do semigrupo associado.

Para a continuação da pesquisa, inicialmente nos propomos a analisar as situações para o problema da Ponte Suspensa:

1. Mudança do amortecimento para o fracionário entre o atrito e o Kelvin-Voigt;
2. Mudança para amortecimento parcial do sistema Kelvin-Voigt.

Referências

- [1] Filippo Gazzola. *Mathematical Models for Suspension Bridges*. Modeling, simulation & applications. Springer International Publishing, January 2015.
- [2] ACINÉZIO, M. de M. et al. Modelagem e verificação experimental de um gerador piezoaeroelástico de energia. *Anais do Congresso Nacional de Engenharia Mecânica*, 6, 2010. Disponível em: < <http://www.abcm.org.br/anais/conem/2010/PDF/CON10-1454.pdf> >.
- [3] AGMON, S.; DOUGLIS, A.; NIRENBERG, L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. i. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 12(4):623–727, 1959. Disponível em: < <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cpa.3160120405> >.
- [4] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 7188: Carga móvel rodoviária e de pedestres em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas*. ABNT, Rio de Janeiro, 2013.
- [5] BOCHICCHIO, I.; CAMPO, M.; FERNÁNDEZ, J.R.; NASO, M.G. Analysis of a thermoelastic timoshenko beam model. *Acta. Mech*, 231:4111–4127, 2020. Disponível em: < <https://doi.org/10.1007/s00707-020-02750-3> >.
- [6] BORICHEV, A.; TOMILOV, Y. Optimal polynomial decay of functions and operator semi-groups. *Math. Ann.*, pages 455–478, 2009. Disponível em: < <https://doi.org/10.1007/s00208-009-0439-0> >.
- [7] CORREIA, L.; RAPOSO, C.; RIBEIRO, J.; GUTEMBERG, L. Suspension bridge with kelvin-voigt damping. *Contributions to Mathematics*, 10(1):11–19, 2024. Disponível em: < https://shahindp.com/Contrib_Math/v10/CM24_v10_pp11-19.pdf >.
- [8] DRÁBEK, P.; LEINFELDER, H.; TAJČOVÁ, G. Coupled string-beam equations as a model of suspension bridges. *Appl. Math. (Prague)*, 44(2):97–142, April 1999.
- [9] ELISHAKOFF, I. An equation both more consistent and simpler than the bresse-timoshenko equation. *advances in mathematical and experimental methods for materials and structures*.

- Solid Mechanics and Its Applications*, 2010. Disponível em: < https://doi.org/10.1007/978-90-481-3467-0_19>.
- [10] ELISHAKOFF, I. Stepan prokofievich timoshenko and america. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 99(3):e201800338, 2019. Disponível em: < <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/zamm.201800338>>.
- [11] ELISHAKOFF, I. Stephen timoshenko's life during last five years in the russian empire: From the letters of his son gregory. *Mechanics Research Communications*, 115(103691), 2021. Disponível em: < <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2021.103691>>.
- [12] G1. Pontes e árvores abrigam 'cadeados do amor' pelo mundo; veja locais. *Globo*, 2015. Disponível em: < <https://g1.globo.com/turismo-e-viagem/noticia/2015/06/pontes-e-arvores-abrigam-cadeados-do-amor-pelo-mundo-veja-locais.html>>.
- [13] GEARHART, L. M. Spectral theory for contraction semigroups on hilbert space. *S. Transactions of the American Mathematical Society*, pages 385-394, 1978. Disponível em: < <https://www.ams.org/journals/tran/1978-236-00/S0002-9947-1978-0461206-1/S0002-9947-1978-0461206-1.pdf>>.
- [14] GUTEMBERG, L.; RAPOSO, C.; CORREIA, L.; RIBEIRO, J. Stability analysis of a partially damped suspension bridge by friction. *Electronic Journal of Mathematics*, 8(1):1-18, 2024. Disponível em: < https://shahindp.com/Electron_J_Math/v8/EJM24_v8_pp1-18.pdf>.
- [15] HOUNIE, J. G. *Teoria elementar das distribuições*. IMPA, Rio de Janeiro, 1979. Disponível em: <https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/12_CBM_79_04.pdf>.
- [16] HUANG, F. L. Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems hilbert spaces. *Annals of Differential Equations*, pages 43-56, 1985.
- [17] KERR A. D.; SHADE P. J. Analysis of concrete pavement blowups. *Acta. Mech*, 52:201-224, 1984. Disponível em: < <https://doi.org/10.1007/BF01179617>>.
- [18] LAZER, A.; MCKENNA, P. Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges: Some new connections with nonlinear analysis. *SIAM Rev. Soc. Ind. Appl. Math.*, 32(4):537-578, December 1990.
- [19] LIANG, L.; FENG, Z.; XU, Y.; CHEN, Z. A parallel scheme of friction dampers and viscous dampers for girder-end longitudinal displacement control of a long-span suspension bridge under operational and seismic conditions. *Buildings*, 412:1-12, 2023. Disponível em: < <https://doi.org/10.3390/buildings13020412>>.
- [20] LIMA, E. L. *Curso de Análise Volume 2*. IMPA, Rio de Janeiro, 2014.

- [21] LIU, Z.; CHEN, L. Damping of long-span suspension bridges with damped outriggers. *labse Congress: Bridges and Structures*, pages 1856–1864, 2022. Disponível em: < <https://doi.org/10.2749/nanjing.2022.1856>>.
- [22] LIU, Z.; ZHENG, S. *Semigroups associated with dissipative systems*, volume 1. Chapman & Hall, London, 1999.
- [23] MIRANDA, L. G. R. *Estabilização de sistemas do tipo Timoshenko-Ehrenfest com base nas consequências do segundo espectro de frequências*. PhD thesis, Universidade Federal do Pará, 2021. Disponível em: < <https://pdm.propesp.ufpa.br/ARQUIVOS/teses/2021/Tese%20final.pdf>>.
- [24] MUKIAWA, S. E.; ENYI, C. D.; MESSAOUDI, S. A. Stability of thermoelastic timoshenko beam with suspenders and time-varying feedback. *Adv. Cont. Discr. Mod*, 7:1–19, 2023. Disponível em: < <https://doi.org/10.1186/s13662-023-03752-w><.
- [25] MUKIAWA, S. E.; KHAN, Y.; AL SULAIMANI, H.; OMABA, M. E.; ENYI, C.D. Thermal timoshenko beam system with suspenders and kelvin-voigt damping. *Front. Appl. Math. Stat*, 9:1–7, 2023. Disponível em: < <https://doi.org/10.3389/fams.2023.1153071>>.
- [26] NAVARRO, R. F. Modelos viscoelásticos aplicáveis a materiais reais: uma revisão. *verificar*, 20. Disponível em: < <http://www2.ufcg.edu.br/revista-remap/index.php/REMAP/article/view/597/423>>.
- [27] OLIVEIRA, C. R. *Introdução à Análise Funcional*. IMPA, Rio de Janeiro, 2018.
- [28] PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [29] PRÜSS, J. On the spectrum of c_0 -semigroups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 284(2):847–857, 1984. Disponível em: < <http://www.jstor.org/stable/1999112>>.
- [30] RAPOSO, C.; CORREIA L.; RIBEIRO, J.; CUNHA, A. Suspension bridge with internal damping. *Acta Mech*, 235:203–214, 2023. Disponível em: < <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03744-7>>.
- [31] RAPOSO, C.; FERREIRA, J.; SANTOS, L.; CASTRO, N. Exponential stability for the timoshenko system with two weak dampings. *Applied Mathematics Letters*, 18:535–541, 2005. Disponível em: < <https://doi.org/10.1016/j.aml.2004.03.017>>.
- [32] SOUFYANE, Abdelaziz. Stabilisation de la poutre de timoshenko. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 328:731–734, 1999. Disponível em: < [https://doi.org/10.1016/S0764-4442\(99\)80244-4](https://doi.org/10.1016/S0764-4442(99)80244-4)>.

- [33] TIMOSHENKO, S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philos*, 41:744–746, 1921. Disponível em: < <https://doi.org/10.1080/14786442108636264>>.
- [34] TIMOSHENKO, S. P. Theory of suspension bridges. *Journal of the Franklin Institute*, 235:213–238, 1943. Disponível em: < [https://doi.org/10.1016/S0016-0032\(43\)90627-1](https://doi.org/10.1016/S0016-0032(43)90627-1)>.
- [35] TIMOSHENKO, S. P. Theory of suspension bridges. *Journal of the Franklin Institute*, 235:327–349, 1943. Disponível em: < [https://doi.org/10.1016/S0016-0032\(43\)90418-1](https://doi.org/10.1016/S0016-0032(43)90418-1)>.
- [36] TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. *Theory of elastic stability*. McGraw-Hill Book, New York, 1961.
- [37] Wikipedia. Tacoma narrows bridge (1940). < Disponível em: [https://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge_\(1940\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge_(1940))>.

Universidade Federal da Bahia

Instituto de Matemática e Estatística / Programa de Pós-Graduação em Matemática

Campus Universitário de Ondina, Av. Ademar de Barros s/n. Salvador-BA. CEP 40.170-110

www.pgmat.ufba.br