



Universidade Federal da Bahia  
Escola Politécnica

Programa de Pós Graduação em Engenharias Elétrica e de Computação

**CRITÉRIO DE ESTABILIDADE ROBUSTO  
PARA SISTEMAS LINEARES COM ATRASO:  
UMA ABORDAGEM BASEADA EM  
CONTROLE PREDITIVO IRRESTRITO**

Mateus dos Santos de Meneses

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Salvador  
13 de Dezembro de 2024

MATEUS DOS SANTOS DE MENESES

**CRITÉRIO DE ESTABILIDADE ROBUSTO PARA SISTEMAS  
LINEARES COM ATRASO: UMA ABORDAGEM BASEADA EM  
CONTROLE PREDITIVO IRRESTRITO**

Esta Dissertação de Mestrado foi apresentada ao Programa de Pós Graduação em Engenharias Elétrica e de Computação da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica e de Computação.

Orientador: Prof. Dr. Tito Luís Maia Santos

Salvador  
13 de Dezembro de 2024

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Bernadete  
Sinay Neves, Escola Politécnica – UFBA.

---

M543 Meneses, Mateus dos Santos de.

Critério de estabilidade robusto para sistemas lineares com atraso:  
uma abordagem baseada em controle preditivo irrestrito / Mateus dos  
Santos de Meneses. – Salvador, 2024.  
66f.: il. color.

Orientador: Prof. Dr. Tito Luís Maia Santos.

Dissertação (mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia  
Elétrica e de Computação, Escola Politécnica, Universidade Federal da  
Bahia, 2024.

1. Controlador Preditivo. 2. Sistemas lineares. 3. Incerteza –  
modelagem. I. Santos, Tito Luís Maia. II. Universidade Federal da Bahia.  
III. Título.

---


CDD: 629.832

Mateus dos Santos de Meneses

# CRITÉRIO DE ESTABILIDADE ROBUSTO PARA SISTEMAS LINEARES COM ATRASO: UMA ABORDAGEM BASEADA EM CONTROLE PREDITIVO IRRESTRITO


Trabalho apresentado ao Programa de Pós Graduação em Engenharias Elétrica e de Computação da Escola Politécnica da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica e de Computação.

Trabalho aprovado. Salvador-BA, 13 de Dezembro de 2024

Documento assinado digitalmente  
 **TITO LUIS MAIA SANTOS**  
Data: 16/12/2024 11:21:45-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


---

Orientador: Prof. Dr. Tito Luís Maia Santos  
Universidade Federal da Bahia

Documento assinado digitalmente  
 **JOSE MARIO ARAUJO**  
Data: 15/12/2024 10:20:36-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. José Mário Araújo  
Instituto Federal da Bahia

Documento assinado digitalmente  
 **KURIOS IURI PINHEIRO DE MELO QUEIROZ**  
Data: 14/12/2024 16:42:56-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Kurios Iuri Pinheiro de Melo Queiroz  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte



*Aos meus pais, Maria e Arnaldo, que sempre me apoiaram  
e incentivaram a seguir meus sonhos.*

## AGRADECIMENTOS

À minha família – Maria, Arnaldo, Ariesnaldo, Arilma e Arildo – pelos ensinamentos transmitidos ao longo de todos os anos de convivência e pelo apoio incondicional durante minha trajetória acadêmica.

Ao meu orientador, Dr. Tito Santos, pela imensidão de conhecimento compartilhado e pela excelência na minha orientação.

À minha esposa, Adriele, por ter me acompanhado de perto em toda a jornada do mestrado, pelo apoio nos momentos mais difíceis e por vibrar comigo a cada conquista.

Aos meus amigos Renato e Walter, e às suas respectivas famílias, em especial Sylvia (em memória) e Marília, pelo companheirismo ao longo dos anos e, principalmente, por terem sido agentes motivadores no início da minha carreira acadêmica.

Ao meu amigo Iure, que, mesmo à distância, sempre esteve presente e proporcionou um espaço de escuta e apoio fundamentais.

A todos os meus colegas do SENAI CIMATEC, em especial Bruno, por sua contribuição ativa para o resultado final deste trabalho.

À instituição SENAI CIMATEC pelo incentivo, pela infraestrutura e pelo ambiente multidisciplinar de conhecimento, onde adquiri grande parte da base que possibilitou a realização deste trabalho.

À Universidade Federal da Bahia, por proporcionar um ambiente acadêmico enriquecedor, tanto pelo corpo docente quanto discente, que foi fundamental para o desenvolvimento desta pesquisa.

*Aquele que não sabe, e não sabe que não sabe, é um tolo – evitem-no.  
Aquele que não sabe, e sabe que não sabe, é uma criança – ensine-o.  
Aquele que sabe, e não sabe que sabe, é um dormente – desperte-o.  
Aquele que sabe, e sabe que sabe, é um sábio – siga-o.*

—PROVÉRPIO PERSA

## RESUMO

Este trabalho aborda o controle de sistemas dinâmicos sujeitos a atrasos variáveis, considerando incertezas paramétricas do modelo em cenários com referências futuras conhecidas, porém variantes. Propõe-se um método que combina um critério de estabilidade para sistemas com atrasos variáveis e incertezas de modelagem a um controlador preditivo para sistemas lineares, cuja formulação incorpora explicitamente referências futuras. O objetivo é garantir robustez frente a atrasos variáveis induzidos por redes de comunicação, considerando as incertezas do modelo e a variação das referências. Para isso, é formulado um novo critério de estabilidade robusta simplificado para sistemas com atraso variável e incertezas politópicas. A eficácia do método é avaliada por meio de simulações com robôs móveis sujeitos a atrasos variáveis e incertezas de modelagem. Os resultados fornecem diretrizes para a configuração dos parâmetros do controlador preditivo, demonstrando sua aplicabilidade e efetividade no contexto da robótica móvel.

**Palavras-chave:** Controlador Preditivo Irrestrito, Atrasos Variáveis no Tempo, Incertezas de Modelagem, Estabilidade

## ABSTRACT

This work addresses the control of dynamic systems subject to time-varying delays, considering parametric model uncertainties in scenarios with known but varying future references. A method is proposed that combines a stability criterion for systems with time-varying delays and modeling uncertainties with a predictive controller for linear systems, whose formulation explicitly incorporates future references. The objective is to ensure robustness against time-varying delays induced by communication networks, considering model uncertainties and reference variations. To this end, a new simplified robust stability criterion is formulated for systems with time-varying delays and polytopic uncertainties. The effectiveness of the method is evaluated through simulations with mobile robots subject to time-varying delays and modeling uncertainties. The results provide guidelines for configuring the predictive controller parameters, demonstrating its applicability and effectiveness in the context of mobile robotics.

**Keywords:** Unconstrained Predictive Controller, Time-varying delays, Model uncertainties, Stability

# SUMÁRIO

<b>Capítulo 1—Introdução</b>	1
1.1 Trabalhos Relacionados . . . . .	4
1.2 Objetivos . . . . .	5
1.2.1 Objetivo Geral . . . . .	5
1.2.2 Objetivos Específicos . . . . .	5
1.3 Organização do trabalho . . . . .	6
1.4 Trabalhos Desenvolvidos . . . . .	6
<b>Capítulo 2—Fundamentação Teórica</b>	7
2.1 Modelo Dinâmico em Espaço de Estados de Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo . . . . .	7
2.2 Controlador Preditivo Baseado em Modelo Linear e sem Restrições . . .	10
2.3 Incertezas de Modelagem . . . . .	12
2.3.1 Incerteza Limitada por Norma . . . . .	13
2.3.2 Incerteza Politópica . . . . .	13
2.4 Normas de Sinais e Sistemas de Tempo Discreto . . . . .	14
2.5 Teorema do Pequeno Ganho . . . . .	18
2.6 Considerações Finais . . . . .	19
<b>Capítulo 3—Critério de Estabilidade Robusto</b>	20
3.1 Controle com Referências Futuras na Presença de Atraso Variável . . . . .	20
3.2 Controle com Referências Futuras na Presença de Atraso Variável e Incertezas Paramétricas . . . . .	23
<b>Capítulo 4—Estudo de Casos</b>	27
4.1 Robô móvel terrestre . . . . .	27
4.1.1 Modelo Dinâmico de Robô Móvel Omnidirecional . . . . .	28
4.1.2 Cálculo do Critério de Robustez . . . . .	30
4.1.3 Simulações e Resultados . . . . .	30
4.2 Robô móvel subaquático . . . . .	32
4.2.1 Modelo Dinâmico do BlueROV2 e suas Incertezas . . . . .	34
4.2.2 Cálculo do Critério de Robustez . . . . .	39
4.2.3 Simulações e Resultados . . . . .	42

<b>Capítulo 5—Considerações finais</b>	54
<b>Apêndice A—Diagrama Simulink para Simulação de Robô Omnidirecional</b>	56
<b>Apêndice B—Cinemática e Dinâmica de Veículos Subaquáticos</b>	58
B.1 Frames de Referência . . . . .	58
B.2 Coordenadas Generalizadas . . . . .	59
B.3 Cinemática de Veículos Subaquáticos . . . . .	61
B.4 Dinâmica de Veículos Subaquáticos . . . . .	61
<b>Referências Bibliográficas</b>	63

## LISTA DE FIGURAS

2.1	Representação de incerteza limitada por norma na forma aditiva e multiplicativa. . . . .	13
2.2	Representação de um sistema <i>Single Input Single Output</i> (SISO) com entrada $u \in \ell_2$ e saída $y \in \ell_2$ . . . . .	16
2.3	Diagrama de blocos da conexão com retroalimentação de dois sistemas não-lineares genéricos $H_1$ e $H_2$ . . . . .	18
2.4	Sistema Linear Invariante no Tempo (LIT) em malha fechada com incerteza de modelagem $\delta(jw)$ . . . . .	19
2.5	Interconexão entre a incerteza multiplicativa e a função complementar de sensibilidade. . . . .	19
3.1	Sistema controlado com dois graus de liberdade. . . . .	21
3.2	Malha fechada de controle com atraso no caminho direto modelado como incerteza multiplicativa. . . . .	22
3.3	Interconexão entre o operador $\Phi_F$ e a função de transferência $G_{wv}$ . . . . .	22
3.4	Diagrama de blocos do controlador preditivo com atraso variável na entrada de controle. . . . .	25
3.5	Modificação da malha de controle com controlador preditivo. . . . .	26
4.1	Ilustração do cenário de controle remoto de um robô móvel terrestre. . . . .	27
4.2	Posição e orientação do robô em relação ao mundo e velocidades lineares e angular em relação ao frame fixo no robô. . . . .	28
4.3	Variação da norma infinito e do $N_{max}$ em função do ganho $Q$ para um ganho $R = I$ fixo. . . . .	31
4.4	Variação da norma infinito e do $N_{max}$ em função do ganho $Q$ para um ganho $R = 10000I$ fixo. . . . .	31
4.5	Resultados do seguimento de trajetória parametrizando o controlador MPC com a sintonia A da Tabela 4.1 sem atrasos de comunicação. . . . .	33
4.6	Seguimento de trajetória via sintonia 1 com variação de uma amostra de atraso. . . . .	34
4.7	Seguimento de caminho via sintonia B com atrasos fixos. . . . .	35
4.8	Resultados destacados do seguimento de trajetória vide sintonia 2 da Tabela 4.1. . . . .	35
4.9	Variação randômica de atraso do momento em que o robô passa pela aresta superior direita da trajetória. . . . .	36
4.10	Seguimento de trajetória via sintonia 2 com atraso variando de forma randômica. . . . .	36



4.11	Configuração padrão do BlueROV2. . . . .	37
4.12	Propulsores do veículo submarino BlueROV2. Propulsores horizontais de 1 a 4 para movimentos em surge, sway e yaw; Propulsores verticais 5 e 6 para movimento em heave. . . . .	37
4.13	Comparação entre os resultados obtidos com e sem incertezas de modelo para o grau de liberdade <i>surge</i> . . . . .	43
4.14	Comparação entre os resultados obtidos com e sem incertezas de modelo para o grau de liberdade <i>sway</i> . . . . .	43
4.15	Comparação entre os resultados obtidos com e sem incertezas de modelo para o grau de liberdade <i>heave</i> . . . . .	44
4.16	Comparação entre os resultados obtidos com e sem incertezas de modelo para o grau de liberdade <i>yaw</i> . . . . .	44
4.17	Arquitetura geral do Controlador de Rastreamento de Trajetória com Controlador Preditivo Linear como Controlador de Velocidade. . . . .	45
4.18	Trajetória desejada para o BlueROV2 em relação ao frame inercial NED. . . . .	46
4.19	Velocidades desejadas para o BlueROV2 em relação aos frames NED e <i>body-fixed</i> . . . . .	46
4.20	Comportamento do BlueROV2 no seguimento de trajetória sem atraso de comunicação. . . . .	48
4.21	Comportamento do BlueROV2 no seguimento de trajetória com atraso de comunicação constante de 2 amostras. . . . .	49
4.22	Comportamento do BlueROV2 no seguimento de trajetória com atraso de comunicação constante de 14 amostras. . . . .	50
4.23	Cenário de simulação em ambiente virtual para inspeção visual de um <i>Blowout Preventer</i> (BOP) por um <i>Remotely Operated Vehicle</i> (ROV). . . . .	51
4.24	Comportamento do BlueROV2 no seguimento de trajetória sem atraso de comunicação em ambiente virtual. . . . .	51
4.25	Comportamento do BlueROV2 no seguimento de trajetória com atraso de comunicação de até 2 amostras em ambiente virtual. . . . .	52
4.26	Comportamento do BlueROV2 no seguimento de trajetória com atraso de comunicação de até 14 amostras em ambiente virtual. . . . .	53
A.1	Modelo de robô omnidirecional utilizado no Simulink. . . . .	57
B.1	Definição do <i>body-fixed</i> frame para o BlueROV2 em que a cor vermelha representa o eixo $x_b$ , a cor verde representa o eixo $y_b$ e a cor azul representa o eixo $z_b$ . . . . .	59
B.2	Frame inercial <i>North East Down</i> (NED). . . . .	60

## LISTA DE TABELAS

4.1	Sintonias do Controlador Preditivo Linear para análise de estabilidade robusta. . . . .	30
4.2	Parâmetros do modelo dinâmico do BlueROV2 de diferentes pesquisas. .	40
4.3	Valores mínimos, médios e máximos dos parâmetros do modelo dinâmico do BlueROV2. . . . .	41
4.4	Valores do ganho $r$ e faixas de valores para o ganho $q$ para cada grau de liberdade do BlueROV2. . . . .	41
4.5	Lista de <i>waypoints</i> para a trajetória desejada do BlueROV2. . . . .	45
4.6	Atrasos de comunicação máximos tolerados para os cenários 2 e 3. . . . .	47

## LISTA DE SIGLAS

<b>AGV</b>	<i>Automated Guided Vehicle</i> . . . . .	1
<b>CAN</b>	<i>Controller Area Network</i> . . . . .	1
<b>DOF</b>	<i>Degrees of Freedom</i> . . . . .	59
<b>BIBO</b>	<i>Bounded Input Bounded Output</i> . . . . .	18
<b>BOP</b>	<i>Blowout Preventer</i> . . . . .	45
<b>LIT</b>	<i>Linear Invariante no Tempo</i> . . . . .	20
<b>LMI</b>	<i>Linear Matrix Inequality</i> . . . . .	20
<b>LQR</b>	<i>Linear Quadratic Regulator</i> . . . . .	28
<b>MIMO</b>	<i>Multiple Input Multiple Output</i> . . . . .	54
<b>MPC</b>	<i>Model Predictive Control</i> . . . . .	3
<b>NED</b>	<i>North East Down</i> . . . . .	58
<b>PSF</b>	<i>Preditor de Smith Filtrado</i> . . . . .	28
<b>ROS</b>	<i>Robot Operating System</i> . . . . .	5
<b>ROV</b>	<i>Remotely Operated Vehicle</i> . . . . .	61
<b>SISO</b>	<i>Single Input Single Output</i> . . . . .	13
<b>ZOH</b>	<i>Zero-Order Hold</i> . . . . .	29

## Capítulo

# 1

## INTRODUÇÃO

Sabe-se que, devido à ampla discussão na literatura, atrasos em sistemas de controle podem causar degradação de desempenho e instabilidade. De maneira intuitiva, em um sistema de controle em malha fechada com atraso, o controlador pode receber dados defasados do estado atual do sistema. Consequentemente, o controlador pode adotar decisões errôneas com base em medições passadas.

Cenários com atrasos são encontrados em diversas aplicações como processos químicos (CHEN; PENG, 2005), controle remoto de robôs (WAN; PAN, 2022), controle de suspensão ativa de veículos (BOUOUDEN et al., 2016), controle de trem de alta velocidade (JI et al., 2021) e controle de veículos elétricos (ZENG et al., 2022). Em especial, atrasos são observados em sistemas com transporte de matéria, a exemplo, controle de temperatura em processos industriais, e transporte de informações, como sistemas mecatrônicos pelos quais dados são transmitidos via redes de comunicação cabeadas ou sem fio (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2008). Destaca-se neste último caso o controle de sistemas robóticos, em que o avanço da tecnologia tem permitido o uso de redes de comunicação para controle de robôs móveis, sejam eles terrestres, aéreos ou subaquáticos, e também para o controle de robôs manipuladores. Um exemplo do controle remoto via redes de comunicação sem fio é o uso de *Automated Guided Vehicle (AGV)s* em ambientes industriais, como mostrado no trabalho Nakimuli et al. (2022), em que um Controlador Lógico Programável (CLP) remoto envia sinais de comando via rede 5G para o CLP embarcado no veículo. Luan et al. (2020) também aborda o uso de sistema de comunicação no controle de direção de veículos autônomos quando sensores, atuadores e a unidade de controle estão conectados em um mesmo barramento *Controller Area Network (CAN)*. Já no campo da robótica subaquática, Yan et al. (2020) mostram como modem acústicos podem ser utilizados para comunicação entre veículos subaquáticos e a superfície para o problema de seguimento de trajetória de *Remotely Operated Vehicle (ROV)s* navegando individualmente ou em formação. Na mesma linha de formação de veículos subaquáticos, Suryendu e Subudhi (2020) mostram que o desafio de formação de veículos autônomos subaquáticos pode ser agravado devido a atrasos variáveis na comunicação, ainda mais porque a comunicação entre robôs é realizada por modems acústicos, que são suscetíveis

variações de atraso significativas. Os autores destacam que os atrasos de comunicação podem variar em função da distância entre os veículos, principalmente devido às perturbações do ambiente marinho, tornando a missão de formação de grupos um desafio ainda maior.

Cabe ressaltar, ainda, que é possível assumir atrasos constantes ou limitados em sistemas de controle de transporte de matéria. Entretanto, atrasos de natureza variável são mais comuns em sistemas de controle via redes devido a fatores como congestionamento de rede, largura de banda variável, problemas de roteamento, entre outros.

Ademais aos desafios oriundos de atrasos variáveis, os erros de modelagem também impactam significativamente o desempenho de sistemas de controle mecatrônicos. Isso ocorre porque "Um modelo é a representação matemática de um sistema físico, biológico ou de informação" (ÅSTRÖM; MURRAY, 2020, p. 3-1, tradução nossa) e é fundamental lembrar que "um modelo é sempre uma aproximação do sistema real" (ÅSTRÖM; MURRAY, 2020, p. 3-1, tradução nossa). Por exemplo, os robôs subaquáticos têm suas características dinâmicas alteradas conforme a densidade da água varia, o que pode alterar a flutuabilidade do veículo, tornando necessário o rebalanceamento do sistema com adição ou remoção de massa através de lastros. Em sistemas robóticos industriais, como os AGVs, o modelo dinâmico também muda de acordo com a carga transportada, impactando o comportamento do sistema. O mesmo acontece em veículos aéreos utilizados para transporte de cargas. Outro aspecto relevante em se tratando de incertezas é que um modelo obtido através da linearização de um sistema não linear pode variar de acordo com o ponto de operação.

Para sistemas de controle via redes com atrasos constantes, técnicas tradicionais como a análise de margem de fase ou Compensadores de Tempo Morto podem ser utilizadas para análise de estabilidade. Quando há incertezas de modelagem, o critério de robustez de Nyquist é uma ferramenta consolidada que permite analisar a estabilidade do sistema no domínio da frequência, mesmo na presença de incertezas não estruturadas. No entanto, o desafio se intensifica quando o sistema é sujeito a atrasos variáveis. Nesses casos, o atraso não é previamente conhecido e pode variar ao longo do tempo, dificultando a aplicação direta de técnicas de estabilidade convencionais. Ainda, a presença simultânea de incertezas paramétricas e atrasos variáveis torna a análise de estabilidade mais complexa, demandando novas abordagens que considerem tanto a variação do atraso quanto as incertezas de modelagem.

Conforme é discutido na próxima seção, diversos trabalhos na literatura abordam a análise de estabilidade de sistemas de controle em que há presença de atraso variável. Alguns deles estendem a análise para sistemas com incertezas. Entretanto, salienta-se que os trabalhos citados usam a análise de estabilidade baseada no tempo e critério baseados no teorema de Lyapunov, o que pode tornar a análise mais complexa e computacionalmente custosa. Além disso, trabalhos baseados em Lyapunov-Krasovskii dependem da escolha de um funcional de Lyapunov adequado, o que pode ser variado e complexo de se obter.

Dessa forma, os autores do livro *Stability of Time-Delay Systems* afirmam que "[...] De modo geral, os testes no domínio da frequência são frequentemente preferidos por sua simplicidade conceitual e facilidade computacional, que geralmente podem ser verificados

de maneira eficiente ao plotar graficamente uma determinada medida dependente da frequência" (GU; CHEN; KHARITONOV, 2003, p. 31, tradução nossa).

Assim, Kao Chung-Yao; Lincoln (2004) propõem um critério de estabilidade robusto para sistemas com atraso variável baseado em análise frequencial. Nesse trabalho, os autores definem um critério de estabilidade robusta para sistemas *Single Input Single Output* (SISO) contínuos, amostrados e discretos, ao modificar a malha de controle de modo que o Teorema do Pequeno Ganho possa ser aplicado. Kao e Rantzer (2007), adaptaram o trabalho de Kao Chung-Yao; Lincoln (2004) com a generalização do critério para acomodar incertezas de modelagem, mantendo a abordagem de análise em frequência, porém assumindo um limitante superior para a taxa de variação do atraso. Franklin, Araújo e Santos (2021) também usa a mesma base teórica para propor um critério de estabilidade robusto para sistemas com atraso variável e incertezas de modelagem não estruturadas, porém com foco em sistemas *Multiple Input Multiple Output* (MIMO) de segunda ordem representados no domínio da frequência. Entretanto, diferente de Kao e Rantzer (2007), Franklin, Araújo e Santos (2021) não impõe limitantes para a taxa de variação do atraso.

O controle de sistemas com atraso de natureza variável é um tema de interesse na literatura e em desenvolvimento, ainda mais devido ao avanço de tecnologias de comunicação sem fio. Embora os trabalhos atuais realizem avanços significativos na área, não é de conhecimento do autor trabalhos que analisam, no domínio da frequência, a influência de atrasos variáveis e incertezas de modelagem paramétricas para controladores preditivos lineares baseados em modelo (no inglês, *Model Predictive Control* (MPC)) para explorar a informação de referências futuras.

De acordo com Alamir (2013) (apud Normey-Rico et al. (2024)), "[...] O MPC é umas das metodologias de controle mais usadas na indústria de processos [...]". Normey-Rico et al. (2024) complementa ao escrever que o MPC é "[...] depois do PID, a estratégia mais difundida e com maior utilização por parte dos usuários". Além disso, o controlador preditivo linear baseado em modelo é uma técnica em que a sintonia é realizada de forma direta e intuitiva, pois a função objetivo pode ser definida com base nas variáveis físicas do sistema, por exemplo, a posição e velocidade de um robô móvel juntamente com a tensão aplicada nos motores acoplados às rodas. Destaca-se ainda a usabilidade de controladores preditivos baseado em modelo em sistemas robóticos devido a inerente necessidade da geração de trajetórias, seja para problemas de navegação de robôs móveis ou para controle de manipuladores.

Adicionalmente a facilidade de sintonia do controlador preditivo linear baseado em modelo, o uso de incertezas paramétricas politópicas permite a representação direta de incertezas, facilitando a análise de estabilidade do sistema pelo projetista. Por exemplo, nos sistemas robóticos em que a massa total do robô pode variar devido a carga transportada, os valores máximos e mínimos da massa podem ser representados por vértices de um politopo. Outro exemplo é considerar que um veículo subaquático pode operar tanto em água doce quanto em água salgada, o que altera a densidade da água e, consequentemente, a flutuabilidade do veículo. Neste caso, a influência da densidade da água na dinâmica do veículo pode ser representada por um politopo.

Isto posto, o presente trabalho visa desenvolver e aplicar um critério de estabilidade

robusto baseado em frequência para sintonia de um controlador preditivo linear irrestrito baseado em modelo para seguimento de referências futuras em sistemas MIMO com atraso variável e incertezas de modelagem politópicas. Este critério de estabilidade robusto é uma combinação da utilização do Teorema do Pequeno em Ganho em sistema de controle com atraso variável apresentado em Kao Chung-Yao; Lincoln (2004) e estendido em Franklin, Araújo e Santos (2021) com a adição de incertezas paramétricas de modelagem com o uso de *Linear Matrix Inequality* (LMI)s, como apresentado no trabalho de Kothare, Balakrishnans e Moraris (1996). Destaca-se que o critério de estabilidade proposto não impõe limitantes para a taxa de variação do atraso.

## 1.1 TRABALHOS RELACIONADOS

No contexto de formação de grupos de robôs, Wan e Pan (2022) propõe uma técnica de controle de impedância adaptativo descentralizado para controle bilateral de robôs móveis em formação sujeitos a atrasos de natureza variável. Eles alegam que o controle remoto de múltiplos robôs por um único operador pode causar sobrecarga cognitiva devido as múltiplas fontes de informação, e, por isso, uma operação bilateral juntamente com a formação de grupos pode melhorar a ergonomia e eficiência da operação. Nesse trabalho, os ganhos do controlador de impedância adaptativo são ajustados online para garantir estabilidade usando o método de Lyapunov, assumindo atrasos randômicos com distribuição normal truncada e limitados por valores mínimos e máximos que dependem da média e variância da distribuição. Os autores mostraram a aplicabilidade da técnica proposta em um cenário experimental usando 3 robôs móveis (TurtleBots) e um dispositivo háptico (Phantom Omni) para controle remoto.

Dentro do campo de robótica aérea, Sankaranarayanan, Satpute e Nikolakopoulos (2022) propõe uma nova técnica de controle adaptativo para controle de um quadrotor com atraso variável e incertezas de modelagem. Os autores descrevem uma eventual necessidade de computação na borda para reduzir o consumo de energia em aplicações de maior complexidade computacional e também por consequência do aumento da capacidade de realizar deslocamentos com carga de massa elevada. Um caso semelhante, mas para robôs móveis terrestres, foi proposto por Santos et al. (2018), onde o controle é realizado em uma máquina com maior capacidade de processamento, e os dados de feedback e sinais de controle são transmitidos via rede sem fio, especificamente uma rede Zigbee. Neste trabalho, os autores propõem um Preditor de Smith Filtrado com um *Linear Quadratic Regulator* (LQR) para compensar atrasos de comunicação, distúrbios e ruídos de medição no controle de um robô móvel omnidirecional.

No âmbito de robôs manipuladores, Zhang et al. (2022) propõe um esquema de controlador adaptativo para teleoperação bilateral considerando atrasos variáveis e incertezas paramétricas. Os autores também usam o método de Lyapunov para garantir estabilidade, porém o trabalho parte da premissa que a taxa de variação do atraso possui um limitante superior. Os autores do trabalho validaram o esquema proposto em um cenário experimental com dois dispositivos háptico Phantom Omni, em que um deles atuava como líder e o outro como seguidor. Em contraste, Sankaranarayanan, Satpute e Nikolakopoulos (2022) propõem um controlador adaptativo para quadrotores sob atraso

variável e incertezas paramétricas, em que a estabilidade é garantida através do método de Lyapunov-Krasovskii, entretanto não há imposição de limitantes para a taxa de variação do atraso nem assume-se que o atraso é conhecido.

No que se refere a análise de estabilidade de sistemas com atraso variável no domínio da frequência, Kao Chung-Yao; Lincoln (2004) propõe um critério de estabilidade robusto para sistemas SISO contínuos, amostrados e discretos em que não há imposição de limitantes para a taxa de variação do atraso. O critério é obtido ao realizar uma modificação de malha de modo que o Teorema do Pequeno Ganho possa ser aplicado. Além disso, os autores mostram que o ganho do operador em que o atraso está presente tem a norma induzida  $\ell_2$  limitada pelo máximo atraso tolerável do sistema. Usando o trabalho de Kao Chung-Yao; Lincoln (2004) como base, Franklin, Araújo e Santos (2021) propõe um critério de estabilidade robusto para sistemas MIMO de segunda ordem com atraso variável e incertezas de modelagem não estruturadas. Nesse trabalho os autores continuam com a abordagem de análise em frequência e a não imposição de limitantes para a taxa de variação do atraso.

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 Objetivo Geral

Este trabalho visa desenvolver e aplicar um critério de estabilidade robusto para sintonia de um controlador preditivo linear sem restrições para seguimento de referências futuras em sistemas MIMO com atraso variável e incertezas paramétricas de modelagem.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

O cumprimento do Objetivo Geral se dará ao alcançar os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver critério de estabilidade robusto para controle de sistemas com atraso variável utilizando controlador preditivo linear sem restrições que considera informação de referências futuras;
- Estender o desenvolvimento do critério de estabilidade robusto para sistemas com incertezas paramétricas de modelagem;
- Implementar controlador preditivo linear sem restrições utilizando o framework de robótica *Robot Operating System* (ROS) 2 (MACENSKI et al., 2022) e linguagem de programação C++;
- Estudar e elaborar modelo dinâmico linear em Espaço de Estados de um robô móvel considerando incertezas paramétricas de modelagem;
- Aplicar e analisar o critério de estabilidade robusto proposto na sintonia do controlador preditivo linear sem restrições em um robô móvel simulado no simulador Gazebo;



### 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho está organizado em capítulos que abordam progressivamente os principais aspectos da pesquisa. O Capítulo 2 é dedicado à Fundamentação Teórica, explorando os tópicos de Modelo Dinâmico em Espaço de Estados de Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo, Controlador Preditivo Baseado em Modelo Linear e sem Restrições, Incertezas de Modelagem, Normas de sinais e sistemas no tempo discreto com a dedução do *Bounded Real Lemma* e Teorema do Pequeno Ganho. O Capítulo 3 apresenta o Critério de Estabilidade Robusto, tema central da pesquisa, com sua aplicação em robôs móveis detalhada no Capítulo 4. A dissertação é concluída com o Capítulo 5, que apresenta as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

### 1.4 TRABALHOS DESENVOLVIDOS

O desenvolvimento do trabalho proposto resultou na publicação e apresentação oral de dois artigos em eventos científicos. O primeiro abordou exclusivamente a discussão do critério de estabilidade robusto proposto, desconsiderando incertezas de modelagem. Já o segundo apresentou a extensão do critério proposto, incorporando incertezas paramétricas politópicas. A seguir, está a lista dos trabalhos desenvolvidos:

1. MENESES, M. S. et al. Uma abordagem simplificada para o controle de sistemas lineares com referências futuras na presença de atraso variável. In: SOCIEDADE BRASILEIRA DE AUTOMÁTICA. [S.l.], 2022.
2. MENESES, M. S.; PEREIRA, B. S. S.; SANTOS, T. L. M. Robust reference tracking control subject to time-varying delay with future reference anticipation. In: 2023 Latin American Robotics Symposium (LARS), 2023 Brazilian Symposium on Robotics (SBR), and 2023 Workshop on Robotics in Education (WRE). [S.l.: s.n.], 2023. p. 367–372.

Os trabalhos apresentados são oriundos do desenvolvimento teórico apresentados nos Capítulos 3.1 e 3.2 deste trabalho, respectivamente.

## FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Esta seção apresenta a fundamentação teórica necessária para o desenvolvimento do trabalho, abordando conceitos essenciais de controle de sistemas dinâmicos. Inicialmente, são discutidos os modelos dinâmicos em espaço de estados para sistemas lineares e invariantes no tempo, tanto em tempo contínuo quanto discreto. Em seguida, é detalhado o controlador preditivo baseado em modelo linear, incluindo a formulação do problema de otimização e a solução analítica. O capítulo também aborda as incertezas de modelagem, apresentando as abordagens de incerteza limitada por norma e incerteza politópica. Além disso, são introduzidas as normas de sinais e sistemas de tempo discreto, incluindo a norma  $\ell_2$  e a norma  $H_\infty$ . Após a apresentação das normas, é apresentada a dedução do *Bounded Real Lemma* para sistemas discretos, fornecendo uma ferramenta para cálculo da norma  $H_\infty$  de sistemas de tempo discreto via *Linear Matrix Inequality* (LMI). Por fim, o Teorema do Pequeno Ganho é apresentado como uma ferramenta para análise de estabilidade de sistemas na presença de incertezas de modelagem.

### 2.1 MODELO DINÂMICO EM ESPAÇO DE ESTADOS DE SISTEMAS LINEARES E INVARIANTES NO TEMPO

Segundo Åström e Murray (2020), o estado de um sistema dinâmico é uma coleção de variáveis que captura completamente o movimento passado do sistema com o objetivo de prever o seu comportamento futuro. O conjunto de todos os estados possíveis de um sistema dinâmico é então chamado de Espaço de Estados.

De forma geral, um modelo em Espaço de Estados de tempo contínuo e invariante no tempo pode ser representado pelas equações

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad (2.1)$$

$$y(t) = h(x(t), u(t)), \quad (2.2)$$

em que  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entradas,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de saídas,  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a função de dinâmica do sistema e  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  é a função de saída do sistema.

Se as funções  $f$  e  $h$  são lineares, o sistema é chamado de Linear Invariante no Tempo (LIT). Neste caso, as Equações (2.1) e (2.2) podem ser representada pelas equações

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.3)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (2.4)$$

em que:

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz de estado;
- $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é a de matriz de entrada;
- $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  é a matriz de saída; e
- $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$  é a matriz de transmissão direta.

No tempo discreto, o modelo em Espaço de Estados (2.3) e (2.4) pode ser representado pela equações

$$x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k], \quad (2.5)$$

$$y[k] = C_d x[k] + D_d u[k], \quad (2.6)$$

em que vale as mesmas dimensionalidades e definições de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  do caso contínuo.

Para um sistema contínuo controlado digitalmente, com período de amostragem  $T$ , e assumindo que o sinal de controle é aplicado à planta através de um *Zero-Order Hold* (ZOH), isto é,  $u(\tau) = u(kT)$  para  $kT \leq \tau < (k+1)T$ , Franklin, Powell e Workman (1998) mostram que as matrizes  $A_d$  e  $B_d$  podem ser calculadas a partir das matrizes  $A$  e  $B$  na Equação (2.3) pelas equações

$$A_d = e^{AT}, \quad (2.7)$$

$$B_d = \int_0^T e^{A\eta} d\eta B. \quad (2.8)$$

Para a matriz de saída, a conversão é direta, isto é,  $C_d = C$ .

Maciejowski (2002) enfatiza que em sistemas de controle digital, há um atraso entre a aquisição da informação do sistema e a aplicação do sinal de controle. Desta forma não é considerada uma transmissão direta de  $u[k]$  para  $y[k]$ , e, portanto, a matriz  $D_d$  em (2.6) é nula. Assim, (2.5) e (2.6) podem ser reescrita como

$$x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k], \quad (2.9)$$

$$y[k] = C_d x[k]. \quad (2.10)$$

Na Seção 2.2 será mostrado que a função custo utilizada no problema de otimização do controlador preditivo linear penalizará, para fins de inclusão da ação integral, incrementos do sinal de controle  $u[k]$ , isto é,  $\Delta u[k]$ . Desta forma, faz se necessário reescrever o modelo em Espaço de Estados (2.9) e (2.10) de forma que a variável de controle seja o incremento do sinal de controle  $\Delta u[k]$ . Uma das possíveis abordagens para a obtenção do modelo em

Espaço de Estados com variável de controle  $\Delta u[k]$  é considerar um novo vetor de estados  $\xi[k] = [\Delta x[k]^\top, y[k]^\top]^\top$ , sendo

$$\Delta x[k] = x[k] - x[k-1] \rightarrow x[k] = \Delta x[k] + x[k-1]. \quad (2.11)$$

A partir de (2.9), temos que

$$x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k], \quad (2.12)$$

$$x[k] = A_d x[k-1] + B_d u[k-1], \quad (2.13)$$

que ao subtrair (2.13) de (2.12) resulta em

$$\Delta x[k+1] = A_d \Delta x[k] + B_d \Delta u[k]. \quad (2.14)$$

Para obter a equação de saída em função de  $\Delta x[k]$ , temos que

$$y[k+1] = C_d x[k+1] \quad (2.15)$$

$$= C_d (\Delta x[k+1] + x[k]) \quad (2.16)$$

$$= C_d (A_d \Delta x[k] + B_d \Delta u[k] + x[k]) \quad (2.17)$$

$$= C_d A_d \Delta x[k] + C_d B_d \Delta u[k] + y[k]. \quad (2.18)$$

Desta forma, o modelo em Espaço de Estados com variável de controle  $\Delta u[k]$  pode ser representado pelas equações

$$\xi[k+1] = A_a \xi[k] + B_a \Delta u[k], \quad (2.19)$$

$$y[k] = C_a \xi[k], \quad (2.20)$$

dada que as novas matrizes aumentadas  $A_a$ ,  $B_a$  e  $C_a$  são expressas como

$$A_a = \begin{bmatrix} A_d & \mathbf{0}^\top \\ C_d A_d & I_{p \times p} \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B_d \\ C_d B_d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C_a = [\mathbf{0} \quad I_{p \times p}]. \quad (2.21)$$

sendo  $I_{p \times p}$  uma matriz identidade com dimensão  $p \times p$  e  $\mathbf{0}$  uma matriz de zeros de dimensão  $p \times n$ .

Wang (2009) mostra que a equação característica do sistema em Espaço de Estados aumentado (2.15) é dada por

$$\rho(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda I - A_d & \mathbf{0}^\top \\ -C_d A_d & (\lambda - 1) I_{p \times p} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

em que ao considerar a propriedade do determinante de matrizes de bloco inferior triangular, resulta em

$$\rho(\lambda) = (\lambda - 1)^p \det(\lambda I - A_d). \quad (2.23)$$

Dessa forma, Wang (2009) evidencia que os autovalores do sistema em Espaço de Estados aumentado (2.15) são os autovalores do sistema original (2.9) em combinação com mais  $p$  autovalores iguais a 1. Ou seja, o sistema aumentado insere  $p$  integradores no sistema original. Portanto, conclui-se que a ação integradora é inserida de forma natural ao utilizar o modelo em Espaço de Estados aumentado para o projeto do Controlador Preditivo Baseado em Modelo Linear desenvolvido na Seção 2.2.

## 2.2 CONTROLADOR PREDITIVO BASEADO EM MODELO LINEAR E SEM RESTRIÇÕES

De forma geral, o objetivo do Controlador Preditivo Baseado em Modelo é encontrar a sequência de entradas futuras que otimize o comportamento futuro da variável controlada do sistema ao longo de um horizonte de predição finito (WANG, 2009). Uma das vantagens do Controlador Preditivo Baseado em Modelo é a possibilidade de lidar com restrições de variáveis do sistema de forma natural. Outra vantagem é sua natural aplicabilidade em sistemas *Multiple Input Multiple Output* (MIMO) lineares e não-lineares modelados em Espaço de Estados. Apesar da ampla gama de aplicações possíveis, este estudo delimita-se à análise de Controlador Preditivo Baseado em Modelo Linear e sem restrições. Com essa delimitação, ao longo do trabalho, este controlador específico será referido apenas como Controlador Preditivo Linear.

A formulação do Controlador Preditivo Linear parte da premissa que o estado do sistema  $x[k]$  para  $k > 0$  está disponível para medição, conseqüentemente  $\xi[k]$ , e que o modelo em Espaço de Estados do sistema é conhecido. Além disso, assume-se que o modelo em Espaço de Estados do sistema é linear e invariante no tempo, representado pelas Equações (2.19) e (2.20). Assim, a trajetória futura do incremento do sinal de controle  $\Delta\mathcal{U}[k]$  é dada por

$$\Delta\mathcal{U}[k] = [\Delta u[k|k]^\top + \Delta u[k+1|k]^\top + \cdots + \Delta u[k+N_c-1|k]^\top]^\top \quad (2.24)$$

em que  $N_c$  é o horizonte de controle e  $\Delta u[k+i|k]$  é o incremento do sinal de controle no instante  $k+i$  calculado no instante  $k$ .

A partir de (2.24), a trajetória futura do estado aumentado do sistema  $\xi[k]$  é dada ao calcular recursivamente a Equação (2.19) dentro de um horizonte de predição  $N_p$ , assumindo sempre que  $N_c \leq N_p$  (MACIEJOWSKI, 2002). Desta forma, a trajetória futura do estado aumentado do sistema é dada por

$$\begin{aligned} \xi[k+1|k] &= A_a \xi[k] + B_a \Delta u[k] \\ \xi[k+2|k] &= A_a \xi[k+1|k] + B_a \Delta u[k+1|k] \\ &= A_a^2 \xi[k] + A_a B_a \Delta u[k] + B_a \Delta u[k+1|k] \\ &\vdots \\ \xi[k+N_p|k] &= A_a^{N_p} \xi[k] + A_a^{N_p-1} B_a \Delta u[k] + A_a^{N_p-2} B_a \Delta u[k+1|k] \\ &\quad + \cdots + A_a^{N_p-N_c} B_a \Delta u[k+N_c-1|k], \end{aligned} \quad (2.25)$$

ou alternativamente

$$\mathcal{X}[k] = \mathcal{A} \xi[k] + \mathcal{B} \Delta\mathcal{U}[k] \quad (2.26)$$

com

$$\mathcal{X}[k] = [\xi[k+1|k]^\top, \xi[k+2|k]^\top, \cdots, \xi[k+N_p|k]^\top]^\top, \quad (2.27)$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_a \\ A_a^2 \\ \vdots \\ A_a^{N_p} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_a & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ A_a B_a & B_a & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_a^{N_p-1} B_a & A_a^{N_p-2} B_a & \cdots & A_a^{N_p-N_c} B_a \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

De forma similar, a partir de (2.20) a trajetória futura da saída do sistema  $y[k]$  é dada por

$$\begin{aligned} y[k+1|k] &= C_a \xi[k+1|k] \\ &= C_a A_a \xi[k] + C_a B_a \Delta u[k] \\ y[k+2|k] &= C_a \xi[k+2|k] \\ &= C_a A_a \xi[k+1|k] + C_a B_a \Delta u[k+1|k] \\ &= C_a A_a^2 \xi[k] + C_a A_a B_a \Delta u[k] + C_a B_a \Delta u[k+1|k] \\ &\vdots \\ y[k+N_p|k] &= C_a A_a^{N_p} \xi[k] + C_a A_a^{N_p-1} B_a \Delta u[k] + C_a A_a^{N_p-2} B_a \Delta u[k+1|k] \\ &\quad + \cdots + C_a A_a^{N_p-N_c} B_a \Delta u[k+N_c-1|k]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Considerando então que a trajetória futura da saída do sistema é um vetor  $\mathcal{Y}[k]$  tal que

$$\mathcal{Y}[k] = [y[k+1|k]^\top, y[k+2|k]^\top, \dots, y[k+N_p|k]^\top]^\top, \quad (2.30)$$

verifica-se que

$$\mathcal{Y}[k] = \mathcal{C} \mathcal{X}[k] \quad (2.31)$$

$$= \mathcal{C} \mathcal{A} \xi[k] + \mathcal{C} \mathcal{B} \Delta \mathcal{U}[k], \quad (2.32)$$

sendo

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} C_a & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_a & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & C_a \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Por fim, define-se  $\mathcal{Y}_r[k]$  como o vetor de referências futuras, isto é,

$$\mathcal{Y}_r[k] = [y_r[k+1|k]^\top, y_r[k+2|k]^\top, \dots, y_r[k+N_p|k]^\top]^\top \quad (2.34)$$

Assim sendo, o problema de otimização do Controlador Preditivo Linear pode ser formulado como o problema de minimização da função custo sem restrições

$$J = (\mathcal{Y}[k] - \mathcal{Y}_r[k])^\top Q (\mathcal{Y}[k] - \mathcal{Y}_r[k]) + \Delta \mathcal{U}[k]^\top R \Delta \mathcal{U}[k] \quad (2.35)$$

em que:

- $Q$  e  $R$  são matrizes simétricas de ponderação de estados e de controle, respectivamente, com a dimensão apropriada e com as condições  $Q \geq 0$  e  $R > 0$ ;

- O primeiro termo está relacionado com o objetivo de minimizar o erro de rastreamento entre a referência futura  $\mathcal{Y}_r[k]$  e a trajetória de saída predita do sistema  $\mathcal{Y}[k]$  (WANG, 2009);
- O segundo termo está relacionado com o objetivo de minimizar o esforço de controle para que ele seja o menor possível (WANG, 2009).

Salienta-se que a função custo (2.35) é uma função quadrática em  $\Delta\mathcal{U}[k]$  e convexa. Desta forma, verifica-se que as matrizes  $Q$  e  $R$  são parâmetros de sintonia do Controlador Preditivo Linear.

Wang (2009) mostra que o problema de otimização do Controlador Preditivo Linear pode ser resolvido de forma analítica ao minimizar a função custo (2.35) em relação a  $\Delta\mathcal{U}[k]$ , isto é,  $\frac{\partial J}{\partial \Delta\mathcal{U}} = 0$ . Assim, a solução analítica do problema de otimização do Controlador Preditivo Linear é dada por

$$\Delta\mathcal{U}^*[k] = (\mathcal{B}^\top \mathcal{C}^\top Q \mathcal{C} \mathcal{B} + R)^{-1} \mathcal{B}^\top \mathcal{C}^\top Q^\top (\mathcal{Y}_r[k] - \mathcal{C} \mathcal{A} \xi[k]). \quad (2.36)$$

Porém, devido ao princípio do horizonte deslizante, apenas a primeira amostra de  $\Delta\mathcal{U}^*[k]$  é aplicada ao sistema, e os demais valores são descartados, repetindo-se o processo de otimização a cada novo instante de amostragem. Desta forma, a lei de controle do Controlador Preditivo Linear é dada por

$$\Delta u[k] = \overbrace{[\mathbf{I}_m \quad \mathbf{0}_m \quad \dots \quad \mathbf{0}_m \quad \mathbf{0}_m]}^{N_c} \Delta\mathcal{U}^*[k]. \quad (2.37)$$

com  $\mathbf{I}_m$  uma matriz identidade de dimensão  $m \times m$  e  $\mathbf{0}_m$  uma matriz de zeros de dimensão  $m \times m$ . Como o sistema é invariante no tempo, nota-se que (2.37) é uma lei de controle linear dada por dois ganhos constantes tal que (2.37) pode ser reescrita como

$$\Delta u[k] = K_{y_r} \mathcal{Y}_r[k] - [K_x \quad K_y] \begin{bmatrix} \Delta x[k] \\ y[k] \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

em que  $K_{y_r}$ ,  $K_x$  e  $K_y$  são calculadas a partir de (2.36) e (2.37).

## 2.3 INCERTEZAS DE MODELAGEM

Um modelo é a representação matemática de um sistema físico, biológico ou de informação. Modelos nos permitem entender um sistema e realizar previsões sobre seu comportamento futuro. Entretanto, modelos são apenas aproximações da realidade e, portanto, estão sujeitos a erros de modelagem (ÅSTRÖM; MURRAY, 2020).

Maciejowski (2002) mostra que na literatura de controle existem duas abordagens comuns para representar matematicamente incertezas de modelagem: incerteza limitada por norma e incertezas politópica.

### 2.3.1 Incerteza Limitada por Norma

Na incerteza limitada por norma, considerando a modelagem de sistemas *Single Input Single Output* (SISO) por funções de transferências, assume-se que apenas o modelo nominal  $P_n(s)$  da planta é conhecido. Desta forma, o modelo real  $P(s)$  é obtido ao adicionar no modelo nominal  $P_n(s)$  funções de transferências limitadas por norma que capturam as dinâmicas do sistema que não foram modeladas (ÅSTRÖM; MURRAY, 2020). Estas funções de transferências são consideradas como operadores de entrada/saída limitados que podem aparecer no sistema de forma aditiva ou multiplicativa. Da mesma forma, Morari e Zafiriou (1989) mostra que esta abordagem também pode ser utilizada para sistemas discretos em que  $P(z)$  é o modelo discreto do sistema real e  $P_n(z)$  é o modelo discreto nominal. Assim, na forma aditiva

$$P(z) = P_n(z) + \Delta(z). \quad (2.39)$$

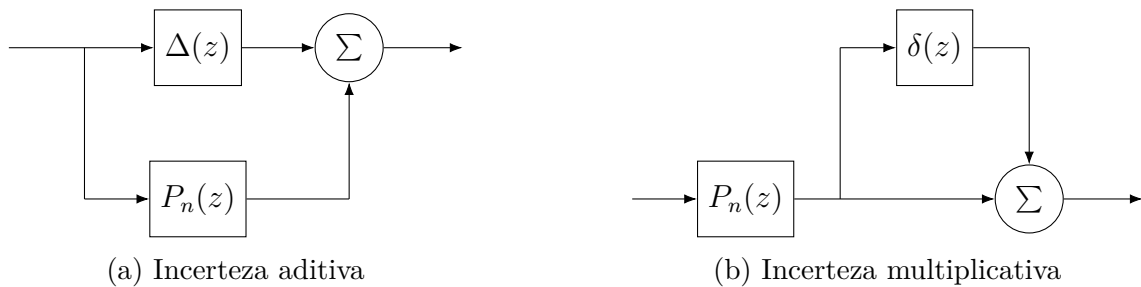
Em contraste, na forma multiplicativa

$$P(z) = P_n(z)(1 + \delta(z)). \quad (2.40)$$

Qual forma específica deve ser utilizada depende da aplicação e do tipo de incerteza que se deseja modelar (ÅSTRÖM; MURRAY, 2020). A Figura 2.1 ilustra a representação de incerteza limitada por norma na forma aditiva e multiplicativa. A partir da manipulação algébrica das funções de transferências ou através da álgebra de diagramas de blocos, é possível mostrar que os dois operadores se relacionam através da equação

$$\delta(z) = \frac{\Delta(z)}{P_n(z)}. \quad (2.41)$$

Figura 2.1: Representação de incerteza limitada por norma na forma aditiva e multiplicativa.



Fonte: Adaptado de Morari e Zafiriou (1989)

### 2.3.2 Incerteza Politópica

Na incerteza politópica, os parâmetros do modelo necessitam pertencer a uma região politópica convexa conhecida. De acordo com Maciejowski (2002), um politopo é uma



região finita  $n$ -dimensional definida por um conjunto finito de hiperplanos, que na sua definição geral não necessariamente é convexa.

Um exemplo da utilização de incerteza politópica é a modelagem em Espaço de Estados em que a matriz de dinâmica  $A$  e a matriz de controle  $B$  são incertas e pertencem a uma região politópica convexa. Ou seja, dado que a evolução do estado do sistema no tempo discreto é dada por

$$x[k+1] = A_i x[k] + B_i u[k] \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.42)$$

e que a planta real pertence ao politopo que é um feixe convexo com vértice  $(A_i, B_i)$ , então (MACIEJOWSKI, 2002)

$$[A, B] = \sum_{i=1}^N \lambda_i [A_i, B_i], \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0. \quad (2.43)$$

## 2.4 NORMAS DE SINAIS E SISTEMAS DE TEMPO DISCRETO

O projeto de controladores para sistemas lineares e não-lineares baseia-se em requisitos de desempenho e estabilidade oriundos do problema de controle em questão. Desta forma, torna-se necessário realizar análises quantitativas de propriedades de sinais e sistemas para garantir que os requisitos de desempenho e estabilidade sejam atendidos. Por exemplo, em sistemas de controle é usual minimizar o erro de rastreamento de referência e efeitos de perturbações externas, a exemplos de ruídos de medição na saída do sistema.

Uma das possíveis análises quantitativas é a utilização de normas de sinais e sistemas. Com normas é possível quantificar a magnitude de sinais analisando-os de forma individual ou analisando quantitativamente o efeito de um sistema sobre um sinal de entrada, isto é, analisar se um determinado sistema amplifica ou atenua uma classe de sinais de entrada.

Portanto, esta seção apresenta as normas de sinais e sistemas que servem de base para construção do critério de estabilidade tema de interesse deste trabalho. Em consequência, apenas a norma do espaço de sinais discretos  $\ell_2$  (sinais de energia finita) e a norma de sistemas  $H_\infty$  (norma  $\ell_2$  induzida) serão abordadas. A seção finaliza com a apresentação do *Bounded Real Lemma* para sistemas lineares e invariantes no tempo.

A definição de normas de sinais origina-se na teoria de espaços vetoriais. Desta forma, torna-se necessário definir o que é um espaço vetorial e como sua definição pode ser usada para sinais de tempo discreto. Um espaço vetorial  $\mathcal{V}$  com campo  $\mathbb{F}$  é um conjunto de elementos chamados vetores que precisam satisfazer uma série de regras e propriedades chamados de axiomas de espaço vetorial. Exemplos de espaços vetoriais são o conjunto de  $n$ -tuplas de números reais  $\mathbb{R}^n$  e o conjunto de  $n$ -tuplas de números complexos  $\mathbb{C}^n$ . Assim, para que  $\mathcal{V}$  seja considerado um espaço vetorial sobre  $\mathbb{F}$ , que pode ser tanto os números reais  $\mathbb{R}$  quanto os números complexos  $\mathbb{C}$ , torna-se necessário que as seguintes propriedades sejam satisfeitas:

1. Adição de vetores: Dados dois vetores  $v \in \mathcal{V}$  e  $w \in \mathcal{V}$ , existe um único vetor  $v + w \in \mathcal{V}$ , que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) Comutatividade:  $v + w = w + v$ ;
  - (ii) Associatividade:  $(v + w) + u = v + (w + u)$  para todo  $u \in \mathcal{V}$ ;
  - (iii) Elemento neutro: Existe um vetor  $\mathbf{0} \in \mathcal{V}$  tal que  $v + \mathbf{0} = v$ ; e
  - (iv) Elemento inverso: Para cada vetor  $v \in \mathcal{V}$ , existe um vetor  $-v \in \mathcal{V}$  tal que  $v + (-v) = \mathbf{0}$ .
2. Multiplicação por escalar: Dado um vetor  $v \in \mathcal{V}$  e um escalar  $\alpha \in \mathbb{F}$ , existe um único vetor  $\alpha v \in \mathcal{V}$ , que satisfaz as seguintes propriedades:
- (i) Associatividade:  $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$  para todo  $\beta \in \mathbb{F}$ ;
  - (ii) Multiplicação unitária:  $1v = v$ ;
3. Distributividade: Dados dois vetores  $v \in \mathcal{V}$  e  $w \in \mathcal{V}$  e dois escalares  $\alpha \in \mathbb{F}$  e  $\beta \in \mathbb{F}$ , vale que:
- (i)  $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$ ; e
  - (ii)  $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ .

Dado então um espaço vetorial  $\mathcal{V}$ , dois vetores  $v$  e  $w$  e um escalar  $\alpha \in \mathbb{F}$ , a norma de um vetor  $v$  é uma função  $\|\cdot\| : v \rightarrow \mathbb{R}_+$  que satisfaz as seguintes propriedades:

- $\|v\| \geq 0$  e  $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ ;
- $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$ ; e
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ .

Com base na definição de espaço vetorial e de normas de vetores, é possível definir o espaço de sinais discretos  $\ell_2$  da seguinte forma:

$$\ell_2 = \left\{ v : \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \|v\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} v[k]^T v[k] < \infty \right\}, \quad (2.44)$$

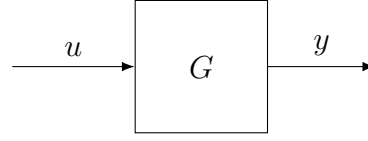
em que  $v[k]$  é o vetor de dimensão  $n$  no instante de tempo  $k$  e  $\|\cdot\|_2$  representa a norma  $\ell_2$ . Nota-se que o espaço de sinais discretos  $\ell_2$  é um espaço para sinais de energia finita.

Considerando  $G$ , um sistema SISO LIT, com uma entrada particular  $u$  e saída  $y = Gu$ , ilustrado na Figura 2.2, define-se o ganho do sistema  $G$  como a razão entre a norma  $\ell_2$  da saída com a norma  $\ell_2$  da entrada, ou seja,

$$\|G\|_{\text{ganho}} = \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} = \frac{\|Gu\|_2}{\|u\|_2} \quad \text{com} \quad \|u\|_2 \neq 0. \quad (2.45)$$

A esta razão é dada o nome de ganho  $\ell_2$  do sistema  $G$ . Entretanto, ao analisarmos o ganho  $\ell_2$  do sistema  $G$  não só para uma entrada particular, mas para todos os sinais de

Figura 2.2: Representação de um sistema SISO com entrada  $u \in \ell_2$  e saída  $y \in \ell_2$ .



Fonte: Autoria própria.

entradas pertencentes ao espaço  $\ell_2$ , obtemos a norma induzida  $H_\infty$  do sistema  $G$ , dada por

$$\|G\|_\infty = \sup_{\substack{u \in \ell_2 \\ \|u\|_2 \neq 0}} \frac{\|Gu\|_2}{\|u\|_2}, \quad (2.46)$$

que representa a maior amplificação que o sistema  $G$  pode causar em um sinal de entrada pertencente ao espaço  $\ell_2$ . Esta definição generaliza de forma natural para sistemas MIMO com  $n_u$  entradas e  $n_y$  saídas. Assim, a norma induzida  $H_\infty$  do sistema  $G$  é dada por

$$\|G\|_\infty = \sup_{\substack{u \in \ell_2^{n_u} \\ \|u\|_2 \neq 0}} \frac{\|Gu\|_2}{\|u\|_2}. \quad (2.47)$$

Com base no conceito de norma induzida para sistemas MIMO, é possível estabelecer um limitante superior para a norma  $H_\infty$  do sistema  $G$ . Toscano (2013) mostra que para um sistema  $G(s)$  MIMO, estável, próprio, e com condições iniciais nulas ( $x(0) = 0$ ), a norma  $H_\infty$  do sistema  $G(s)$  é limitada superiormente por  $\gamma$  se for possível encontrar uma função de Lyapunov  $V(x(t)) = x(t)^\top P x(t)$ , com  $P = P^\top \succ 0$ , e um escalar  $\gamma$  tal que

$$\dot{V}(x(t)) + y(t)^\top y(t) - \gamma^2 u(t)^\top u(t) < 0 \quad (2.48)$$

seja satisfeita.

Utilizando o mesmo ponto de partida apresentado por Toscano (2013), é possível estabelecer um limitante superior para a norma  $H_\infty$  para sistemas MIMO discretos. Dada a representação em espaço de estados para o sistema  $G(z)$

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k], \quad (2.49)$$

$$y[k] = Cx[k] + Du[k], \quad (2.50)$$

e assumindo que o sistema é assintoticamente estável, próprio, e com condições iniciais nulas ( $x[0] = 0$ ), a norma  $\|G\|_\infty$  é limitada superiormente por  $\gamma$ , isto é,  $\|G\|_\infty < \gamma$ , se for possível encontrar uma função de Lyapunov  $V(x[k]) = x[k]^\top P x[k] > 0$ , com  $P = P^\top \succ 0$ , e um escalar  $\gamma$  tal que

$$\Delta V(x[k]) + y[k]^\top y[k] - \gamma^2 u[k]^\top u[k] < 0. \quad (2.51)$$

Esta afirmação pode ser comprovada ao aplicar o operador de somatório nos dois lados da Equação (2.51), o que resulta em

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \Delta V(x[k]) + y[k]^\top y[k] - \gamma^2 u[k]^\top u[k] \right) \leq 0. \quad (2.52)$$

Dado que  $\Delta V(x[k]) = V(x[k+1]) - V(x[k])$ , temos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta V(x[k]) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N (V(x[k+1]) - V(x[k])). \quad (2.53)$$

A soma acima é telescópica, e portanto, os termos intermediários se cancelam, restando apenas o primeiro e o último termo. Assim, a Equação (2.53) pode ser reescrita como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta V(x[k]) = \lim_{N \rightarrow \infty} (x[N+1] - x[0]). \quad (2.54)$$

Através da premissa que as condições iniciais são nulas,  $x[0] = 0$ , que os sinais de entrada e saída são de energia finita, isto é,  $u[k] \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ , e que o sistema é assintoticamente estável, tem-se que o limite da Equação (2.54) é nulo. Portanto, a Equação (2.52) resulta em

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty} y[k]^T y[k]}{\sum_{k=0}^{\infty} u[k]^T u[k]} < \gamma^2. \quad (2.55)$$

Esta análise vale para todo sinal de entrada  $u[k] \in \ell_2^{nu}$  e, portanto, temos que

$$\sup_{\substack{u \in \ell_2^{nu} \\ \|u\|_2 \neq 0}} \frac{\|y\|_2^2}{\|u\|_2^2} < \gamma^2 \quad (2.56)$$

o que mostra que  $\|G\|_{\infty} < \gamma$ .

Dado que  $\gamma$  é um limitante superior para a norma  $H_{\infty}$  do sistema  $G(z)$ , é possível construir um problema com LMI para encontrar o menor limitante superior  $\gamma$  que satisfaça a inequação (2.51). Expandido (2.51), tem-se

$$x[k+1]^T P x[k+1] - x[k]^T P x[k] + y[k]^T y[k] - \gamma^2 u[k]^T u[k] < 0, \quad (2.57)$$

em que substituindo (2.49) e (2.50) em (2.57), resulta em

$$\begin{bmatrix} x[k]^T & u[k]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T P A - P + C^T C & A^T P B + C^T D \\ B^T P A + D^T C & B^T P B + D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[k] \\ u[k] \end{bmatrix} < 0. \quad (2.58)$$

Desta forma, a norma  $H_{\infty}$  do sistema  $G(z)$  pode ser obtida ao encontrar o menor valor para  $\gamma$  que satisfaça as LMIs

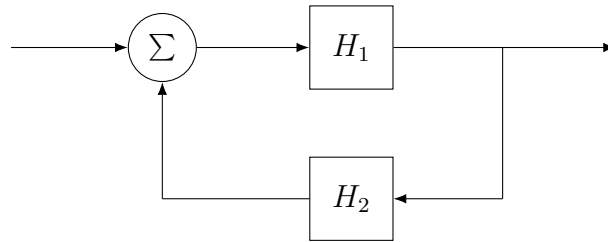
$$P = P^T \succ 0 \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} A^T P A - P + C^T C & A^T P B + C^T D \\ B^T P A + D^T C & B^T P B + D^T D - \mu I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.59)$$

em que  $\mu = \gamma^2$ .

## 2.5 TEOREMA DO PEQUENO GANHO

Em sua formulação geral, o Teorema do Pequeno Ganho é uma ferramenta de análise de estabilidade de sistemas não-lineares. Desta forma, “[...] considere o sistema de malha fechada mostrado na Figura 2.3 em que  $H_1$  e  $H_2$  são sistemas estáveis na perspectiva entrada/saída e o espaço dos sinais e condições iniciais são apropriadamente definidos. O ganho dos sistemas  $H_1$  e  $H_2$  é, respectivamente,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . Então o sistema em malha fechada é *Bounded Input Bounded Output* (BIBO) estável se  $\gamma_1\gamma_2 < 1$ ” (ÅSTRÖM; MURRAY, 2020, Teorema 10.4, p. 366, tradução nossa).

Figura 2.3: Diagrama de blocos da conexão com retroalimentação de dois sistemas não-lineares genéricos  $H_1$  e  $H_2$ .



Fonte: Åström e Murray (2020)

Åström e Murray (2020) mostra que o Teorema do Pequeno Ganho pode ser aplicado para análise de estabilidade de sistemas contínuos LIT na presença de incertezas de modelagem. Neste caso, o Teorema do Pequeno Ganho é derivado a partir da teoria de estabilidade no domínio da frequência proposta por Nyquist.

Portanto, a partir da descrição de incertezas e sua resposta em frequência para sistemas discretos apresentado em Morari e Zafriou (1989), considera-se para aplicação do Teorema do Pequeno Ganho o sistema em malha fechada mostrado na Figura 2.4 em que, sem perda de generalidade,  $\delta(e^{j\omega}) \forall \omega \in [0, \pi]$  é uma função de transferência BIBO estável que representa a incerteza de modelagem multiplicativa do sistema adicionada na malha como uma perturbação e  $P_n(e^{j\omega}) \forall \omega \in [0, \pi]$  é a função de transferência nominal do sistema. Nota-se que o modelo desconhecido do sistema  $P(e^{j\omega}) \forall \omega \in [0, \pi]$  é dado por  $P(e^{j\omega}) = P_n(e^{j\omega})(1 + \delta(e^{j\omega})) \forall \omega \in [0, \pi]$ .

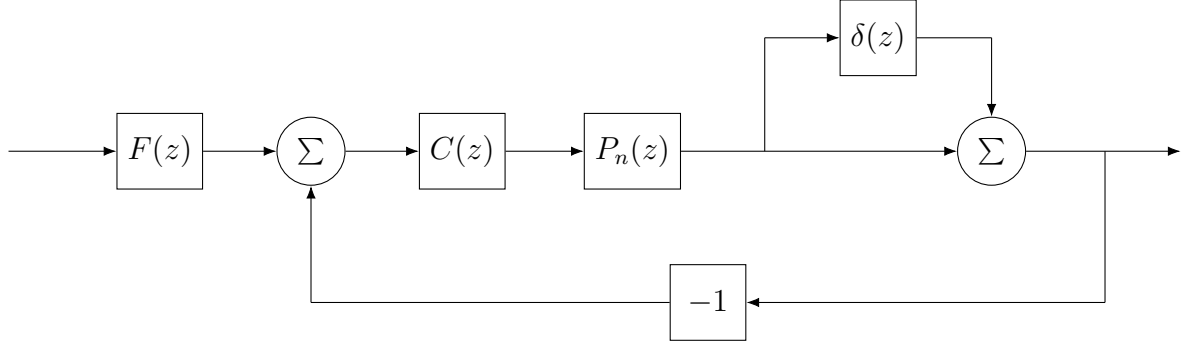
O sistema ilustrado na Figura 2.4 pode ser transformado através da manipulação de diagrama de blocos e da aplicação do princípio da superposição, resultando na interconexão entre a incerteza multiplicativa com valor negativo da função complementar de sensibilidade, conforme ilustrado na Figura 2.5. A partir desta interconexão, Åström e Murray (2020) mostra que o sistema em malha fechada é estável dado a incertezas de modelagem  $\delta(e^{j\omega})$  e a resposta em frequência do controlador  $C(e^{j\omega})$  se

$$|\delta(e^{j\omega})||\mathcal{T}(e^{j\omega})| < 1, \quad \forall \omega \in [0, \pi] \quad (2.60)$$

ou, equivalentemente, se

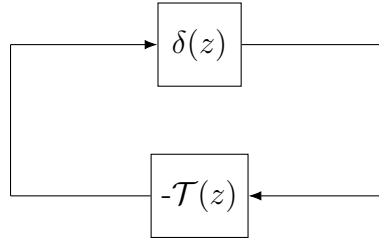
$$|\delta(e^{j\omega})|M_t \leq 1, \quad \forall \omega \in [0, \pi] \quad (2.61)$$

Figura 2.4: Sistema Linear Invariante no Tempo (LIT) em malha fechada com incerteza de modelagem  $\delta(jw)$ .



Fonte: Autoria própria

Figura 2.5: Interconexão entre a incerteza multiplicativa e a função complementar de sensibilidade.



Fonte: Adaptado de Åström e Murray (2020)

em que  $\mathcal{T}(e^{jw})$  é a função complementar de sensibilidade dada por

$$\mathcal{T}(e^{jw}) = \frac{C(e^{jw})P_n(e^{jw})}{1 + C(e^{jw})P_n(e^{jw})} \quad (2.62)$$

e  $M_t$  é o maior valor de  $|\mathcal{T}(e^{jw})|$  para todo  $w$ , isto é,

$$M_t = \sup_w |\mathcal{T}(e^{jw})| = \left\| \frac{C(e^{jw})P_n(e^{jw})}{1 + C(e^{jw})P_n(e^{jw})} \right\|_{\infty} \quad (2.63)$$

## 2.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo apresentou conceitos fundamentais para a compreensão do problema de controle de sistemas lineares invariantes no tempo com atrasos variáveis e incertezas paramétricas de modelo. Os conceitos apresentados servirão de base para a análise de estabilidade de um controlador preditivo linear no contexto do problema de seguimento de trajetória para sistemas robóticos.

## CRITÉRIO DE ESTABILIDADE ROBUSTO

As seções a seguir apresentam o critério de estabilidade robusto proposto para sintonia de um Controlador Preditivo Linear empregado em sistemas *Multiple Input Multiple Output* (MIMO) lineares com atraso variável e incertezas paramétricas de modelagem. O critério de estabilidade robusto é uma combinação da utilização do Teorema do Pequeno Ganho em sistema de controle com atraso variável apresentado em Kao Chung-Yao; Lincoln (2004) com a adição de incertezas de modelagem através do uso de *Linear Matrix Inequality* (LMI)s.

### 3.1 CONTROLE COM REFERÊNCIAS FUTURAS NA PRESENÇA DE ATRASO VARIÁVEL

Conforme visto na Seção 2.2, a lei de controle para um Controlador Preditivo Linear pode ser escrita como:

$$\Delta u[k] = K_{y_r} \mathcal{Y}_r[k] - K_\xi \begin{bmatrix} \Delta x[k] \\ y[k] \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Dado que ((3.1)) representa um sistema Linear Invariante no Tempo (LIT) multivariável, a relação entradas-saídas pode ser verificada:

$$U(z) = C_{ff}(z)Y_r(z) - C_{fb}(z)X(z), \quad (3.2)$$

em que as funções de transferência em função da referência  $y_r[k]$  e estados  $x[k]$  são dadas por  $C_{ff}(z)$  e  $C_{fb}(z)$  respectivamente, de tal forma que:

$$C_{ff}(z) = K_{y_r} \frac{z}{z-1} \begin{bmatrix} z \\ z^2 \\ \vdots \\ z^{N_p} \end{bmatrix}; \quad (3.3)$$

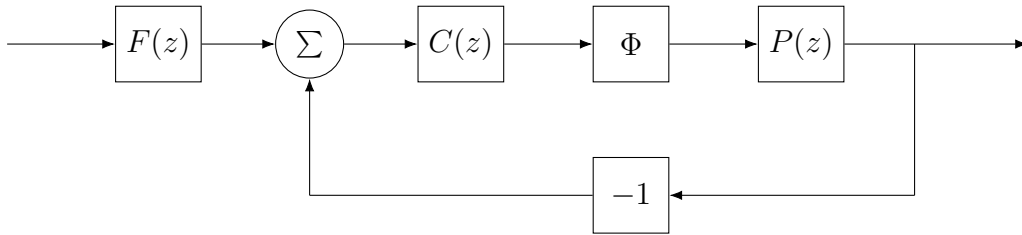
$$C_{fb}(z) = K_\xi \frac{z}{z-1} \begin{bmatrix} (1-z^{-1}) \mathbf{I} \\ C_d \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

em que  $C_d \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , sendo  $p$  o número de saídas e  $n$  o número de estados do sistema. Para o cenário do resultado preliminar em questão,  $p = n$  e, portanto,  $C_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Importante observar que a análise realizada na Equação (3.2) é válida para sistemas cujos estados são diretamente mensuráveis, ou que suas saídas sejam combinações lineares dos mesmos. Caso contrário, um observador de estados deve ser inserido na análise, como visto em Maciejowski (2002). Cabe destacar também que o filtro de referência  $C_{ff}(z)$  é não-causal, sendo esta uma característica esperada por se tratar de uma estratégia que demanda o conhecimento da referência futura.

A lei de controle no domínio  $z$  na Equação (3.2) pode ser descrita pelo diagrama de blocos da Figura 3.1, de tal forma que a função de transferência  $P(z)$  é regulada por um controlador de dois graus de liberdade dados por  $F(z)$  e  $C(z)$ . Observa-se nesta malha a adição do operador  $\Phi$  na entrada de controle da planta. Este operador foi inserido na malha de controle com o objetivo de avaliar o comportamento em malha fechada do controlador proposto voltado ao tratamento de referências futuras na presença de atraso variável. Desta forma, define-se o operador de atraso variável na entrada de controle tal que  $u[k - d[k]] = \Phi(u[k], k)$  com  $0 \leq d[k] \leq N_{max}$ . O critério proposto por Kao Chung-Yao; Lincoln (2004) é então utilizado de maneira a verificar a estabilidade robusta por meio do Teorema do Pequeno Ganho, sendo  $N_{max}$  a margem de atraso variável robusta a ser calculada.

Figura 3.1: Sistema controlado com dois graus de liberdade.



Fonte: Autoria própria.

As funções de transferência  $F(z)$  e  $C(z)$ , que representam o controlador proposto na Seção 2.2, são dadas a partir de ((3.2)) para sistemas em que todo os estados sejam diretamente calculados em função da saída:

$$C(z) = C_{fb}(z)C_d^{-1}, \quad (3.5)$$

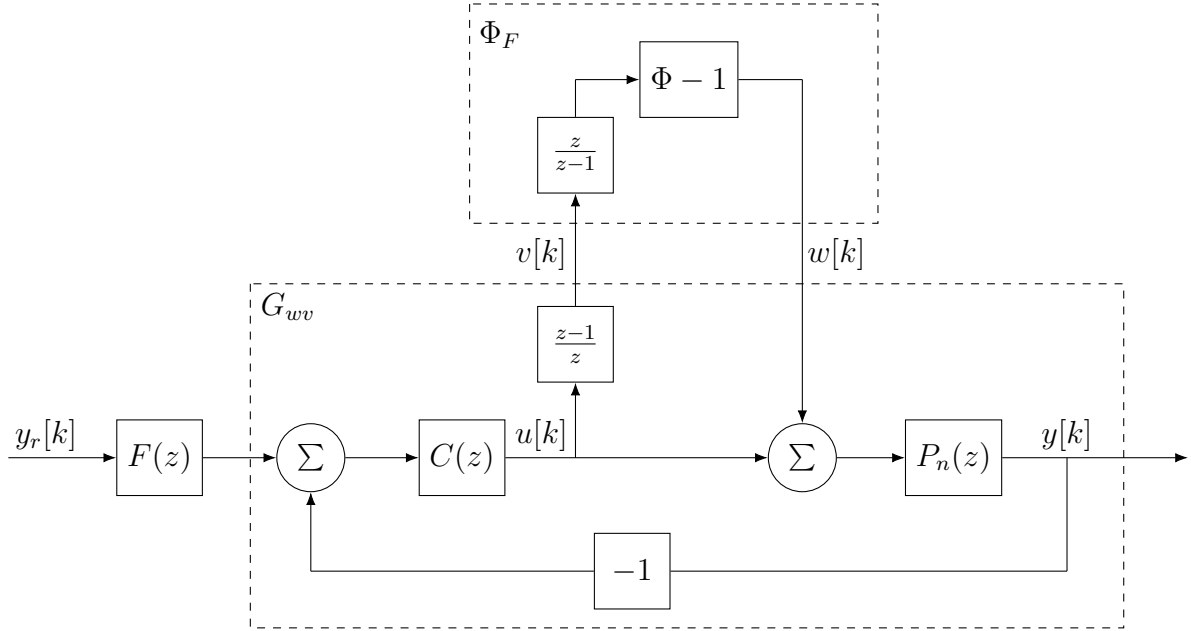
$$F(z) = C_{ff}(z)C(z)^{-1}. \quad (3.6)$$

Esta relação é válida para sistemas inteiramente atuados. No caso geral, considerando que a dimensão do vetor de estados e de controle não coincidem, a análise de estabilidade robusta pode ser realizada diretamente a partir de (3.2).

Kao Chung-Yao; Lincoln (2004) propõe que o efeito de atraso  $\Phi$  seja escrito por meio de uma modificação de malha, como mostrado na Figura 3.2, tal que seja possível aplicar o Teorema do Pequeno Ganho (vide Seção 2.5). Deve-se notar a equivalência de malha entre as Figuras 3.1 e 3.2. No entanto, na malha da Figura 3.2 o efeito do atraso variável



Figura 3.2: Malha fechada de controle com atraso no caminho direto modelado como incerteza multiplicativa.



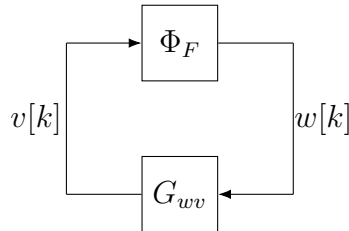
Fonte: Autoria própria.

é representado no subsistema  $\Phi_F$ , mas não se manifesta em  $M(z)$ . Adicionalmente, o mesmo autor demonstra que o máximo ganho induzido pelo subsistema  $\Phi_F$  é dado por  $N_{max}$ , isto é:

$$\|w[k]\|_{l_2} \leq N_{max} \|v[k]\|_{l_2}. \tag{3.7}$$

Logo, a avaliação de estabilidade do sistema, pode ser verificada ao analisar a função de transferência resultante  $M(z)$  em realimentação com o operador  $\Phi_F$ , conforme Figura 3.3, sendo possível analisar a estabilidade do conjunto via teorema do pequeno ganho, como demonstrado em Kao Chung-Yao; Lincoln (2004).

Figura 3.3: Interconexão entre o operador  $\Phi_F$  e a função de transferência  $G_{wv}$ .



Fonte: Autoria própria.

Contudo, visto que a análise em Kao Chung-Yao; Lincoln (2004) é realizada para sistemas monovariáveis, este trabalho utiliza a versão generalizada da análise de estabilidade para sistemas multivariáveis demonstrada em Franklin, Araújo e Santos (2021) ao

avaliar o sistema  $M(z)$  como o efeito do produto do operador de primeira diferença, dado por  $(z - 1)/z$ , pela função complementar de sensibilidade do sistema MIMO em questão, definida por  $(\mathbf{I} + P(z)C(z))^{-1} P(z)C(z)$ , como segue:

$$M(z) = \frac{z - 1}{z} (\mathbf{I} + P(z)C(z))^{-1} P(z)C(z). \quad (3.8)$$

Por fim, conforme descrito na Seção 2.5, o Teorema do Pequeno Ganho afirma que o sistema é garantidamente estável sob qualquer perturbação no sistema realimentado da Figura 3.3 se o ganho em qualquer frequência seja menor que a unidade. Dessa forma, conclui-se que, a partir de ((3.7)), o sistema controlado é estável se a condição ((3.9)) for satisfeita.

$$\|M(e^{j\omega})\|_{\infty} < \frac{1}{N_{max}} \quad \forall \omega \in [0, \pi]. \quad (3.9)$$

Deve-se notar que  $N_{max}$  descreve um limitante para atrasos inteiros tal que o mesmo pode ser obtido por

$$N_{max} = \left\lfloor \frac{1}{\|M(e^{j\omega})\|_{\infty}} \right\rfloor, \quad (3.10)$$

sendo  $\lfloor \alpha \rfloor$  o maior valor inteiro menor ou igual a  $\alpha$ .

Assim, entende-se que o critério de estabilidade para atrasos variáveis no tempo defendido por Kao Chung-Yao; Lincoln (2004) fornece uma avaliação de tolerância desta incerteza para o sistema controlado pela lei de controle ((3.2)), em que existe uma relação entre os parâmetros  $R$  e  $Q$  expostos em ((2.35)) e o valor máximo de atraso que garante estabilidade ao sistema. Este critério pode ser utilizados para fins de análise, verificando o máximo atraso variável tolerável para uma sintonia, mas pode ser definido como ferramenta de síntese, realizando a busca de parâmetros que permitam estabilizar um sistema na presença de um dado atraso máximo. Essa afirmação é corroborada pelos resultados discutidos em Meneses et al. (2022).

### 3.2 CONTROLE COM REFERÊNCIAS FUTURAS NA PRESENÇA DE ATRASO VARIÁVEL E INCERTEZAS PARAMÉTRICAS

No resultado preliminar apresentado na Seção 3.1, o critério de robustez foi abordado no domínio da frequência utilizando o modelo nominal da planta. Assim, o limite máximo de atraso variável no tempo foi definido desprezando o efeito potencial dos erros de modelagem. Isso pode gerar problemas na medida em que o máximo atraso variável tolerável pode ser sobreestimado. Assim, torna-se necessário considerar a presença de incertezas paramétricas no modelo da planta.

Para resolver o problema da inserção de incertezas na análise de estabilidade usando o Teorema do Pequeno Ganho para sistemas MIMO sujeitos a atrasos variáveis, Franklin, Araújo e Santos (2021) propõem a utilização de incertezas não estruturadas multiplicativas. Entretanto, incertezas não estruturadas multiplicativas pode ser de difícil definição. Assim, será proposta uma solução robusta baseada na definição de incertezas paramétricas politópicas em que os parâmetros incertos do modelo são utilizados diretamente na análise de estabilidade. A inclusão das incertezas do modelo é realizada ao calcular

o ganho da complementar de sensibilidade (norma  $H_\infty$  do sistema) utilizando o método de LMI proposto em Oliveira, Geromel e Bernussou (2002). Em seu trabalho, os autores consideram um sistema em malha fechada descrito pelas seguintes equações

$$\tilde{x}[k+1] = \mathcal{A}\tilde{x}[k] + \mathcal{B}w[k] \quad (3.11)$$

$$z[k] = \mathcal{C}\tilde{x}[k] + \mathcal{D}w[k] \quad (3.12)$$

que é resultado do sistema LIT de tempo discreto

$$x[k+1] = Ax[k] + B_w w[k] + B_u u[k] \quad (3.13)$$

$$z[k] = C_z x[k] + D_{z_w} w[k] + D_{z_u} u[k] \quad (3.14)$$

$$y[k] = C_y x[k] + D_{y_w} w[k] \quad (3.15)$$

conectado com o controlador dinâmico cujo modelo é dado por

$$x_c[k+1] = A_c x_c[k] + B_c y[k] \quad (3.16)$$

$$u[k] = C_c x_c[k] + D_c y[k]. \quad (3.17)$$

Neste contexto, assume-se que as matrizes em ((3.11)) e ((3.12)) são obtidas considerando  $\tilde{x}[k] = [x[k]^\top, x_c[k]^\top]^\top$ , ou seja, o vetor de estados é aumentado com os estados do controlador.

Para incorporar as incertezas do modelo, os autores Oliveira, Geromel e Bernussou (2002) definiram uma matriz  $\mathcal{M}$  dada por:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

A matriz na Equação (3.18) pertence a um poliedro convexo limitado denotado por  $\Gamma$ , em que  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_N$  são os vértices do poliedro. Formalmente, o poliedro convexo  $\Gamma$  é definido como:

$$\Gamma := \left\{ \mathcal{M}(\gamma) : \mathcal{M}(\gamma) = \sum_{i=1}^N \gamma_i \mathcal{M}_i, \gamma_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \gamma_i = 1 \right\}. \quad (3.19)$$

Com base nas equações do sistema e na introdução da matriz  $\mathcal{M}$ , o teorema a seguir fornece um resumo da abordagem, com base no método LMI, para calcular a norma  $H_\infty$  do sistema.

**Teorema 4** (OLIVEIRA; GEROMEL; BERNUSSOU, 2002): Se existirem matrizes simétricas  $\mathcal{P}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , e uma matriz  $\mathcal{G}$  tal que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_i & \mathcal{A}_i \mathcal{G} & \mathcal{B}_i & \mathbf{0} \\ \mathcal{G}^\top \mathcal{A}_i^\top & \mathcal{G} + \mathcal{G}^\top - \mathcal{P}_i & \mathbf{0} & \mathcal{G}^\top \mathcal{C}_i^\top \\ \mathcal{B}_i^\top & \mathbf{0} & \mathcal{I} & \mathcal{D}_i^\top \\ \mathbf{0} & \mathcal{C}_i \mathcal{G} & \mathcal{D}_i & \mu \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.20)$$

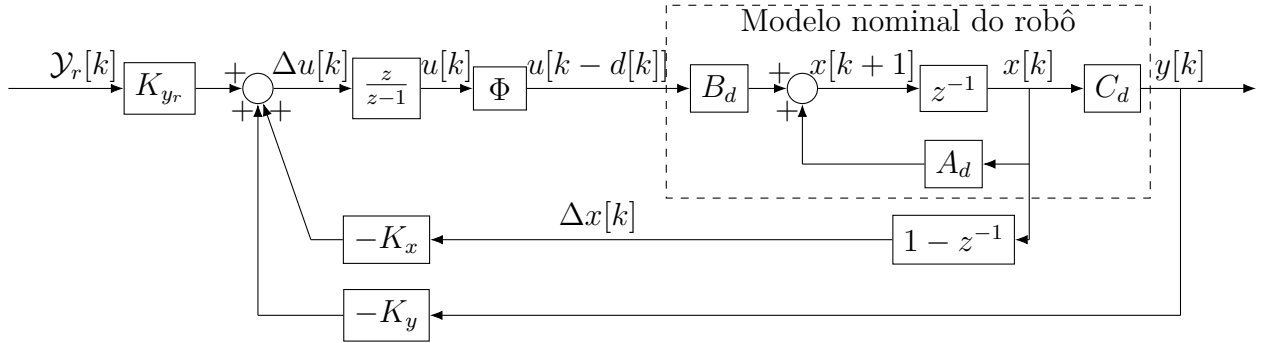
onde as matrizes  $\mathcal{A}_i$ ,  $\mathcal{B}_i$ ,  $\mathcal{C}_i$  e  $\mathcal{D}_i$  definem as matrizes extremas  $\mathcal{M}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , então a desigualdade

$$\|H_{wz}(\zeta)\|_\infty^2 < \mu \quad (3.21)$$

vale para todas as matrizes  $\mathcal{M}$  do domínio  $\Gamma$ . Este Teorema tem como base o *Bounded Real Lemma* apresentado na Seção 2.4, em que os autores adicionam novas variáveis de instrumentação nas LMIs para lidar com a incerteza paramétrica politópica.

Observa-se que o Teorema 4 proposto em Oliveira, Geromel e Bernussou (2002) é desenvolvido considerando o sistema em malha fechada modelado diretamente em Espaço de Estados. Desta forma, para aplicar o teorema, considerando também atrasos de tempo variável, o controlador preditivo é descrito conforme a Figura 3.4.

Figura 3.4: Diagrama de blocos do controlador preditivo com atraso variável na entrada de controle.



Fonte: Autoria própria.

Da mesma forma que na Seção 3.1, a malha de controle é modificada para que o efeito do atraso variável seja representado como uma incerteza multiplicativa. A Figura 3.5 apresenta o diagrama de blocos do sistema em malha fechada modificado.

Para calcular  $\|G_{wv}\|_\infty$  usando o Teorema 4 proposto em Oliveira, Geromel e Bernussou (2002), o vetor de estados em ((3.11)) e ((3.12)) é aumentado da seguinte forma:

$$\tilde{x}[k] = \begin{bmatrix} x[k] \\ x_c[k] \\ u[k-1] \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

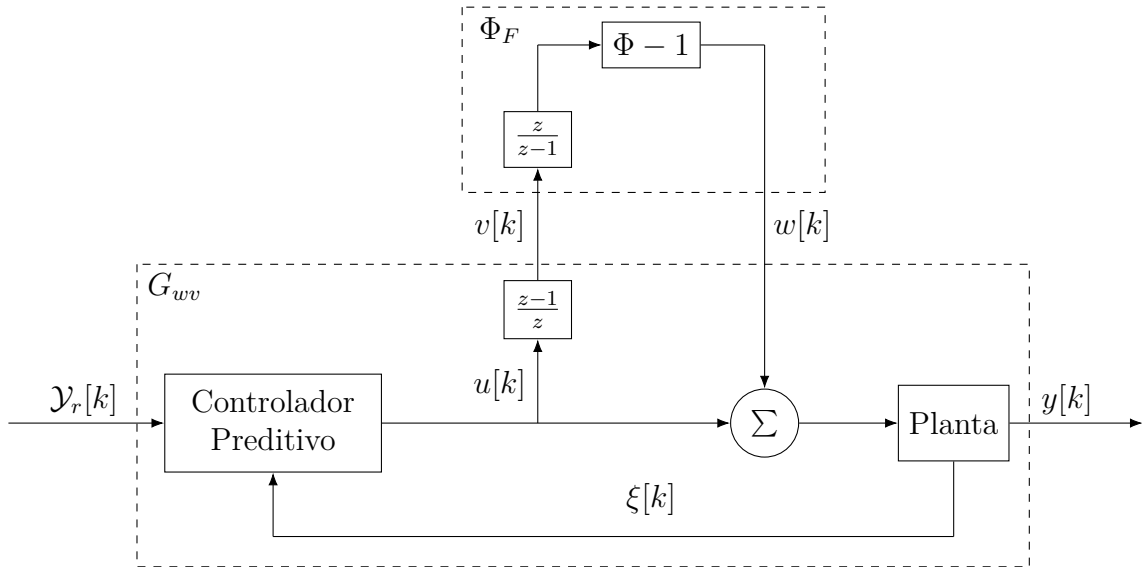
Além disso, considerando que para o sistema  $G_{wv}$  na Fig. 3.5, a saída é definida como  $z[k] = v[k] = \Delta u[k]$ , as matrizes em ((3.11)), ((3.12)) e ((3.18)) são:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_d + B_d D_c C_d & B_d C_c & \mathbf{0} \\ B_c C_d & A_c & \mathbf{0} \\ D_c C_d & C_c & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_d \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} D_c C_d & C_c & -I \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

Figura 3.5: Modificação da malha de controle com controlador preditivo.



Fonte: Adaptado de Kao Chung-Yao; Lincoln (2004)

e  $\mathcal{D} = \mathbf{0}$  em que  $\mathbf{0}$  denota uma matriz preenchida com zeros de dimensões apropriadas.

Desta forma, o critério de estabilidade robusta para o sistema  $G_{wv}$  é dado por:

$$N_{\max} = \left\lceil \frac{1}{\|G_{wv}\|_{\infty}} \right\rceil \quad (3.26)$$

em que  $\|G_{wv}\|_{\infty}$  é igual a norma  $H_{\infty}$  do sistema  $G_{wv}$ , ou seja:

$$\|G_{wv}\|_{\infty} = \sqrt{\mu} \quad (3.27)$$

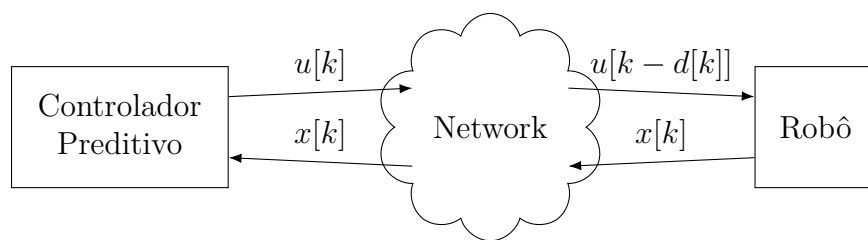
com  $\mu$  sendo calculado através do Teorema 4.

## ESTUDO DE CASOS

Para ilustrar a utilidade do critério de estabilidade robusta proposto neste trabalho, foram realizados dois estudo de casos. O primeiro é motivado pelo controle remoto de robôs móveis terrestres, enquanto o segundo é motivado pelo controle de veículos subaquáticos. Em linha com o que foi discutido na Seção 4.2.2, o primeiro estudo não considera incertezas de modelo. Em contraste, as incertezas de modelo são consideradas no estudo de caso do robô subaquático.

Ambas aplicações são baseados em um cenário de controle remoto de um robô móvel, em que os sinais de controle e medição de estados são transmitidos através de uma rede de comunicação. Este cenário é ilustrado na Figura 4.1, em que sem perda de generalidade, considera-se que todo o atraso de comunicação variável no tempo está concentrado no envio do sinal de controle e é dado por  $d[k]$  em que  $0 \leq d[k] \leq N_{max}$ .

Figura 4.1: Ilustração do cenário de controle remoto de um robô móvel terrestre.



Fonte: Adaptado de Meneses, Pereira e Santos (2023).

Por fim, ambos os estudo de casos foram analisados através simulações e os resultados discutidos.

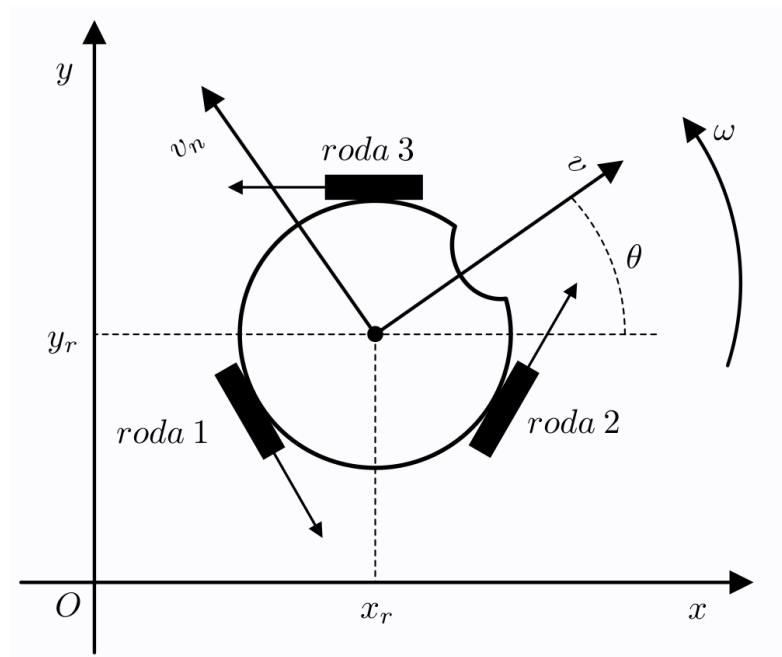
### 4.1 ROBÔ MÓVEL TERRESTRE

As análises robustas do presente estudo foram realizadas através de simulações utilizando MATLAB/Simulink. Estas simulações foram motivadas pelo cenário experimental

descrito em Santos et al. (2018), em que foi empregado o mesmo robô omnidirecional utilizado em Sobrinho et al. (2014). Santos et al. (2018) utilizaram um controlador do tipo *Linear Quadratic Regulator* (LQR)/Preditor de Smith Filtrado (PSF) que operava em um computador *host*, comunicando-se com o robô através de uma rede Zigbee. Portanto, foi adotada nas simulações do presente exemplo de aplicação a mesma arquitetura de controle e modelo dinâmico apresentado em Santos et al. (2018) e ilustrada no Apêndice A. A avaliação do comportamento do controlador perante incertezas no atraso foi baseada no problema de seguimento de caminho de robôs móveis.

A Figura 4.2 ilustra a cinemática do veículo, em que dois frames de referência são utilizados: o frame de referência do mundo e o frame de referência do robô. A posição e orientação do robô em relação ao mundo são dadas por  $x_r$ ,  $y_r$  e  $\theta$ , respectivamente. Já as velocidades lineares e velocidade angular em relação ao mundo mas expressas no frame de referência do robô são dadas por  $v$ ,  $v_n$  e  $\omega$ , respectivamente. Ademais, acoplado as rodas do robô, estão motores de corrente contínua controlados por sinais de tensão.

Figura 4.2: Posição e orientação do robô em relação ao mundo e velocidades lineares e angular em relação ao frame fixo no robô.



Fonte: Meneses et al. (2022)

#### 4.1.1 Modelo Dinâmico de Robô Móvel Omnidirecional

Para o estudo, o modelo em espaço de estados do robô omnidirecional ilustrado na Figura 4.2 foi considerado. O modelo linear de tempo contínuo que representa a dinâmica

do robô é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C_c x(t)\end{aligned}\quad (4.1)$$

em que a matriz  $A_c$  é dada por:

$$A_c = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3L^2 n_r^2 K_t K_v}{J R_a r^2} - \frac{B_w}{J} \end{bmatrix}.\quad (4.2)$$

sendo que

$$a_{11} = a_{22} = -\frac{3n_r^2 K_t K_v}{2M R_a r^2} - \frac{B}{M}.\quad (4.3)$$

e

$$B_c = \frac{n_r K_t}{R_a r} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2M} & -\frac{\sqrt{3}}{2M} \\ -\frac{1}{2M} & \frac{1}{2M} & \frac{1}{2M} \\ \frac{L}{J} & \frac{L}{J} & \frac{L}{J} \end{bmatrix}.\quad (4.4)$$

Por fim, a matriz de saída  $C_c = I_{3 \times 3}$ .

O vetor de estados  $x(t) = [v(t) \ v_n(t) \ \omega(t)]^\top$  contém as velocidades lineares ortogonais e a velocidade angular do robô. Já o sinal de controle  $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ u_3(t)]^\top$  contém respectivamente as tensões aplicadas nas rodas 1, 2 e 3. Por fim, a saída  $y(t)$  é igual ao vetor de estados.

Assumindo que os sinais de controle são aplicados aos motores de corrente contínua através um *Zero-Order Hold (ZOH)* e usando um período de amostragem  $T_s = 60$  ms, o modelo (4.1) discretizado é dado por

$$\begin{aligned}x[k+1] &= A_d x[k] + B_d u[k] \\ y[k] &= C_d x[k]\end{aligned}\quad (4.5)$$

em que a matrizes  $A_d$ ,  $B_d$  e  $C_d$  são dadas por

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.8218 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8218 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3856 \end{bmatrix},\quad (4.6)$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & -0.4 \\ -0.0461 & 0.0231 & 0.0231 \\ 0.8195 & 0.8195 & 0.8195 \end{bmatrix},\quad (4.7)$$

$$C_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\quad (4.8)$$



### 4.1.2 Cálculo do Critério de Robustez

Neste estudo de caso não foi considerado incertezas de modelo e, portanto, a aplicação do critério de estabilidade robusta depende apenas do modelo dinâmico do robô em tempo discreto e da sintonia do controlador.

A inspeção da função custo do Controlador Preditivo Linear (Equação (2.35)) mostra que dois ganhos são utilizados para sintonizar o controlador: a matriz de ponderação de erros de seguimento de referência  $Q$  e a matriz de ponderação de variação do sinal de controle  $R$ . Desta forma, o critério de estabilidade robusta foi aplicado ao considerar:

- (i) Um controlador com ações de controle mais agressivas e, conseqüentemente, com menor erro de seguimento de referência; e
- (ii) Um controlador com ações de controle mais suaves, porém com maior erro de seguimento de referência.

Assim, definiu-se a matriz de penalização do incremento de controle como  $R = 10000I$  para o controlador (i) e  $R = I$  para o controlador (ii), em que  $I$  é a matriz identidade de ordem adequada. Além disso, definiu-se os horizontes de predição e de controle como  $N_p = N_c = 20$ . Desta forma, o critério de estabilidade no controle do robô móvel foi analisado ao fixar o ganho  $R$  e analisar a tolerância do sistema em função da matriz  $Q = qI$  com  $q \in \mathbb{Z}^+$ .

Os resultados obtidos ao calcular a norma infinito da matriz de transferência  $M(e^{j\omega})$  conforme Equação (3.8) e o valor de  $N_{max}$  (Equação (3.10)) em função de  $Q$  é mostrado nas Figuras 4.3 e 4.4. Observa-se que para o controlador (i) que foi sintonizado para ter um comportamento mais agressivo, o sistema não tolera atrasos de comunicação para  $10 \leq q \leq 1000$ . Em contrapartida, ao tornar o controlador mais conservador com a sintonia do controlador (ii), o sistema tolera atrasos de comunicação de até  $N_{max} = 10$  amostrar para  $q = 10$  e  $N_{max} = 1$  amostra para  $q = 1000$ .

### 4.1.3 Simulações e Resultados

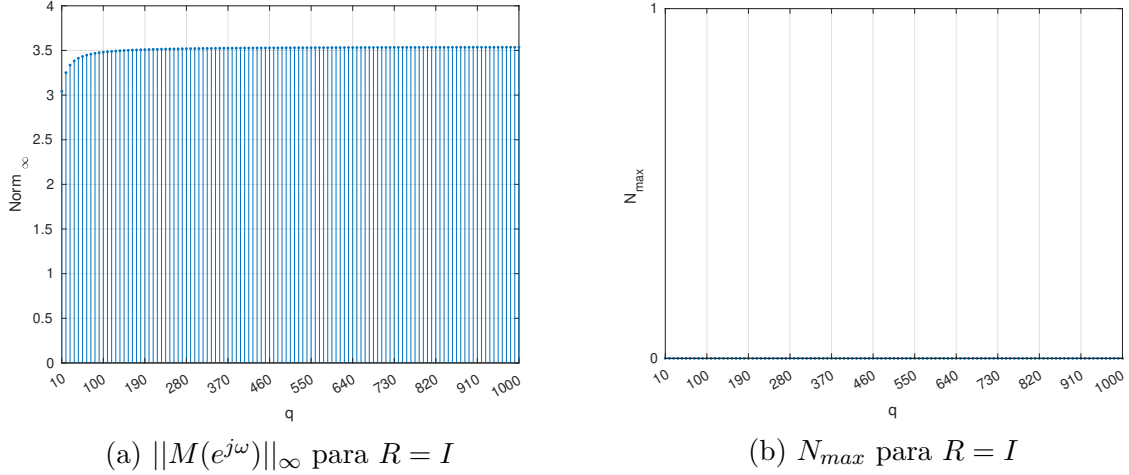
Foi realizada uma simulação numérica para avaliar a aplicabilidade do critério de estabilidade robusta para o problema de seguimento de trajetória de um robô móvel omnidirecional. A simulação foi realizada em ambiente MATLAB/Simulink (ver diagrama no Apêndice A) considerando as sintonias descritas na Tabela 4.1. Nesta mesma tabela é indicado o valor de  $N_{max}$  obtido através dos resultados descritos na Seção 4.1.2.

Tabela 4.1: Sintonias do Controlador Preditivo Linear para análise de estabilidade robusta.

Sintonia	$Q$	$R$	$N_{max}$
A	$100I$	$I$	0
B	$500I$	$10000I$	2

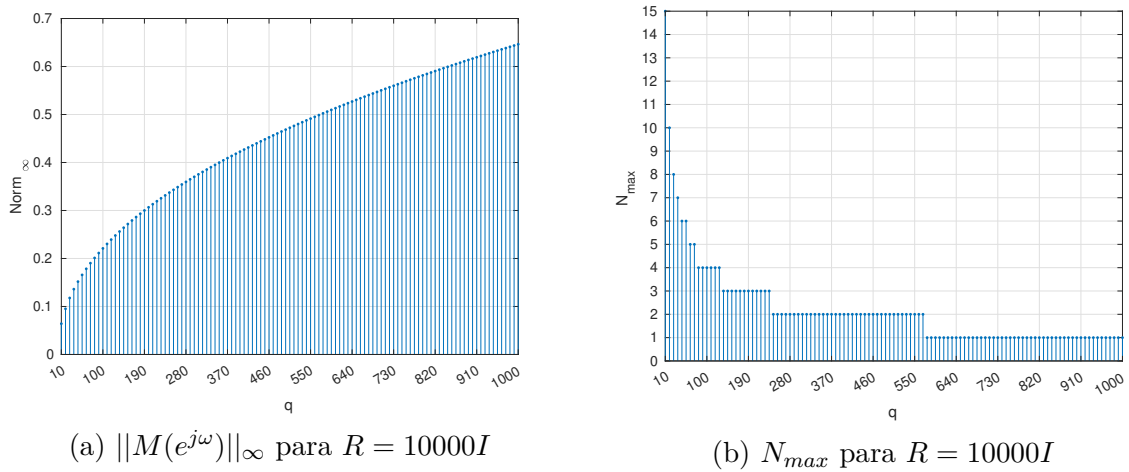
Fonte: Autoria própria.

Figura 4.3: Variação da norma infinito e do  $N_{max}$  em função do ganho  $Q$  para um ganho  $R = I$  fixo.



Fonte: Autoria própria.

Figura 4.4: Variação da norma infinito e do  $N_{max}$  em função do ganho  $Q$  para um ganho  $R = 10000I$  fixo.



Fonte: Autoria própria.

As duas sintonias definidas na Tabela 4.1 foram simuladas em um cenário de seguimento de caminho. O robô foi inicialmente posicionado em  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $\theta = 0$  e o caminho de referência foi definido como um quadrado de  $1 \times 1$  m que deve ser percorrido com uma velocidade de  $0,05$  m/s. Assim, analisou-se o comportamento do robô ao seguir o caminho de referência considerando os seguintes cenários:

1. Seguimento do caminho de referência usando a sintonia A da Tabela 4.1 de acordo com as seguintes condições de atraso:

- (a) Sem atraso de comunicação ( $d[k] = 0 \forall k$ ); e
  - (b) Com atraso de comunicação constante de 1 amostra ( $d[k] = 1 \forall k$ ).
2. Seguimento do caminho de referência usando a sintonia B da Tabela 4.1 de acordo com os seguintes condições de atraso:
- (a) Sem atraso de comunicação ( $d[k] = 0 \forall k$ );
  - (b) Com atraso de comunicação constante de 1 amostra ( $d[k] = 1 \forall k$ );
  - (c) Com atraso de comunicação constante de 2 amostras ( $d[k] = 2 \forall k$ ); e
  - (d) Com atraso de comunicação variável de no máximo 2 amostras ( $\max(d[k]) = 2 \forall k$ ).

Para o cenário 1a, como mostrado na Figura 4.5a, o robô segue o caminho de referência com mínimos desvios. Além disso, observa-se na Figura 4.5b que Controlador Preditivo Linear apresentou comportamento mais agressivo para manter o erro de seguimento baixo, o que era esperado devido ao relaxamento da penalização dos incrementos de controle na função custo do controlador. Nota-se também nos sinais de controle componentes de alta frequência visíveis nos momentos de mudança de direção ao contornar os vértices do quadrado.

Em contraste ao cenário 1a, as Figuras 4.6a e 4.6b mostram o comportamento do robô para o cenário 1b. Este resultado evidencia que ao ultrapassar o limite de atraso de transporte estabelecido pelo critério, em consonância com o resultado gráfico da Figura 4.3b, o sistema perde a estabilidade no problema de seguimento de referência em questão.

A Figura 4.7 apresenta o resultado do seguimento de caminho para os cenários 2a, 2b e 2c. Observa-se uma degradação no seguimento de referência causada pelo controle mais conservador aplicado. Na Figura 4.8, focando no trecho em que o robô passa pela aresta superior esquerda da trajetória, constata-se que, ao se manter um atraso fixo de  $N \leq 2$  — o que respeita o critério de robustez —, o sistema apresenta comportamento amortecido e satisfatório. Porém, ao exceder o limite com um atraso de  $N = 3$ , o sistema passa a oscilar, indicando que a estabilidade não é garantida quando o critério é violado.

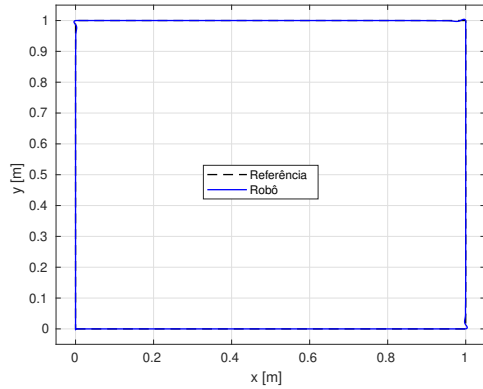
O cenário 2d, em que o atraso de comunicação varia de forma randômica (vide Figura 4.9), é mostrado na Figura 4.10. As Figuras 4.10a e 4.10b evidenciam uma degradação no seguimento, como esperado. Analisando as Figuras 4.9 e 4.10, percebe-se a dificuldade em definir qual cenário de atraso resulta em pior impacto. No entanto, ao respeitar o atraso máximo permitido pelo critério  $N_{max}$ , a estabilidade do sistema é garantida.

Esse equilíbrio entre robustez e velocidade de resposta reflete-se na ação de controle. Dessa forma, o critério de estabilidade e a formulação proposta podem ser aplicados na sintonia de controladores lineares para sistemas que possibilitam o uso de referências futuras, com o objetivo de otimizar o desempenho do seguimento de referência em malha fechada.

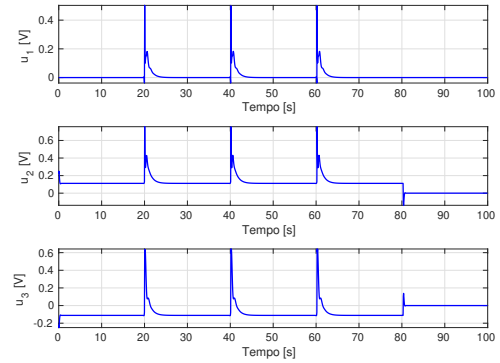
## 4.2 ROBÔ MÓVEL SUBAQUÁTICO

Para analisar experimentalmente o critério de estabilidade robusto foco deste estudo foram realizados testes utilizando o veículo subaquático BlueROV2 (Robotics (2023)). A

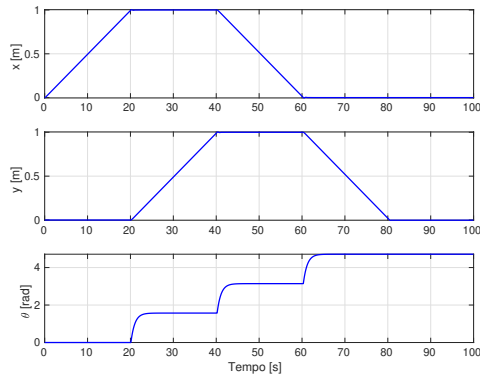
Figura 4.5: Resultados do seguimento de trajetória parametrizando o controlador MPC com a sintonia A da Tabela 4.1 sem atrasos de comunicação.



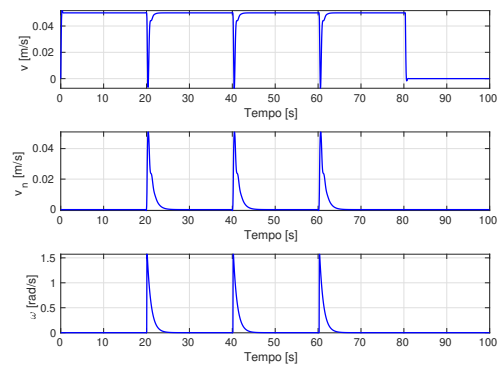
(a) Trajetória do robô.



(b) Sinais de controle.



(c) Posição e orientação em relação ao mundo.



(d) Velocidades lineares e angulares expressas no frame do robô.

Fonte: Autoria própria.

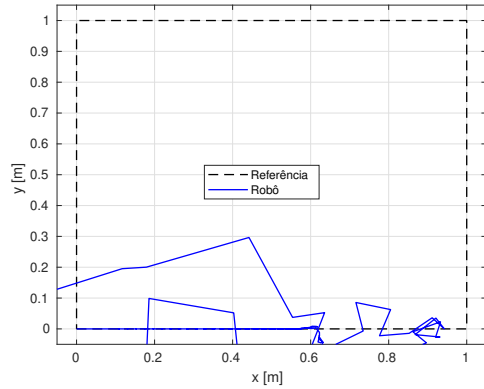
Figura 4.11 mostra a versão tradicional<sup>1</sup> do BlueROV2 que possui seis propulsores. O BlueROV2 é classificado como um *Remotely Operated Vehicle* (ROV) de baixo custo e pequeno porte projetado para aplicações de inspeção e pesquisa. Além disso, é capaz de operar até 300 m de profundidade e é alimentado por uma bateria. Seu controle é realizado através de computador conectado ao sistema de controle de baixo nível e telemetria do veículo via cabo umbilical.

Conforme mostra a Figura 4.12, o veículo na configuração tradicional é equipado com seis propulsores, sendo quatro posicionados horizontalmente em orientação vetorizada e dois verticalmente. Esta configuração proporciona ao veículo quatro graus de liberdade:

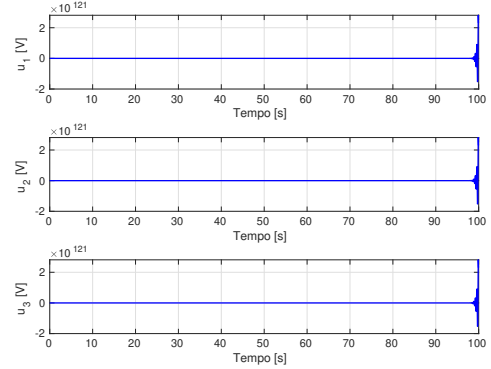
- movimento para frente e para trás (*surge*);

<sup>1</sup>O veículo também possui uma versão *heavy* com oito propulsores: quatro horizontais e quatro verticais

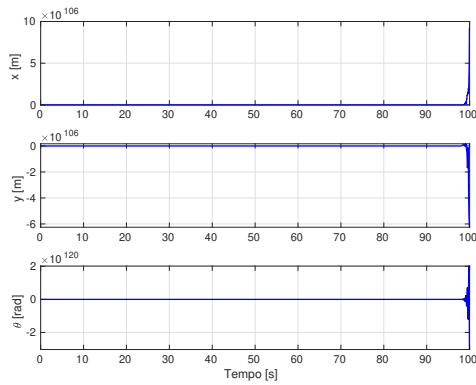
Figura 4.6: Seguimento de trajetória via sintonia 1 com variação de uma amostra de atraso.



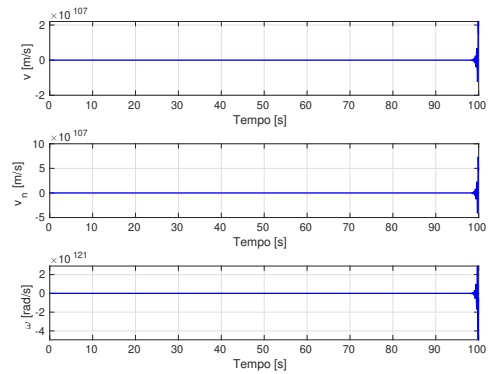
(a) Trajetória do robô.



(b) Sinais de controle.



(c) Posição e orientação em relação ao mundo.



(d) Velocidades lineares e angulares expressas no frame do robô.

Fonte: Autoria própria.

- movimento para a esquerda e para a direita (*sway*);
- movimento para cima e para baixo (*heave*); e
- rotação em relação ao eixo Z (*yaw*).

#### 4.2.1 Modelo Dinâmico do BlueROV2 e suas Incertezas

O modelo do BlueROV2 segue a convenção estabelecida por Fossen (2021a), detalhada no Apêndice B. Além disso, o BlueROV2 apresenta características de design que simplificam o modelo matemático, conforme demonstrado em Manzanilla et al. (2019). O veículo possui simetria em relação aos planos  $xz$  e  $yz$ . Adicionalmente, ele é meta-estável em rotação em relação ao eixo  $x$  (*roll*) e ao eixo  $y$  (*pitch*), o que significa que ele retorna

Figura 4.7: Seguimento de caminho via sintonia B com atrasos fixos.

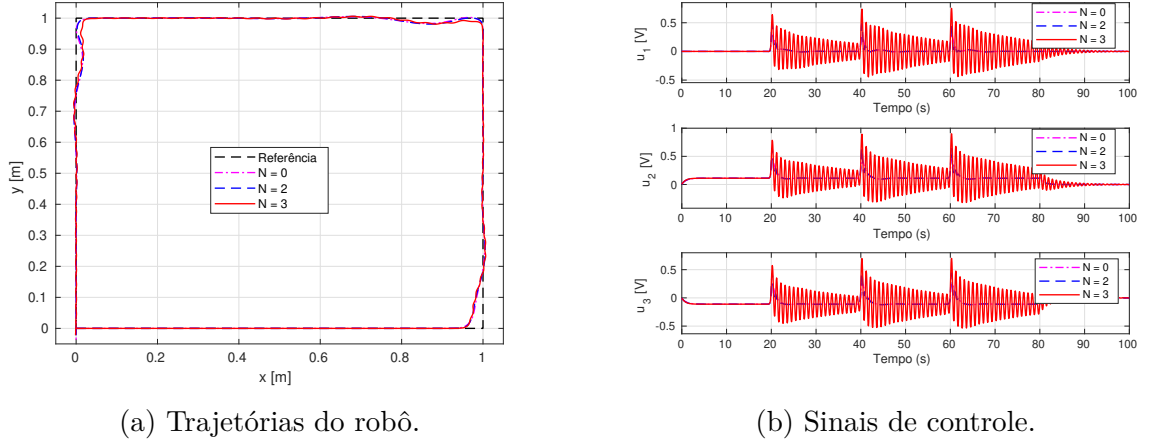
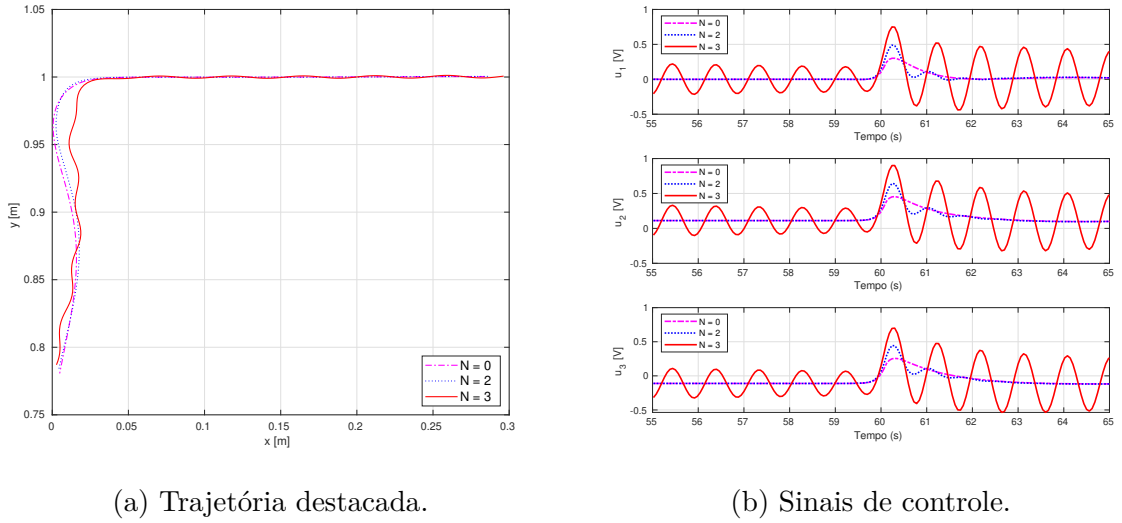


Figura 4.8: Resultados destacados do seguimento de trajetória vide sintonia 2 da Tabela 4.1.



à sua posição de equilíbrio de forma passiva quando perturbado nesses dois graus de liberdade (MANZANILLA et al., 2019). Essa estabilidade implica que  $K, M, p, q, \dot{p}, \dot{q} \approx 0$ , permitindo assim que os vetores de posição generalizada  $\eta = [x, y, z, \psi]^T$  e as forças e momentos de controle  $\tau = [X, Y, Z, N]^T$  sejam reduzidos de acordo (MANZANILLA et al., 2019).

As matrizes na Equação (B.9) para veículos subaquáticos, operando em todos os 6 *Degrees of Freedom* (DOF) enquanto realizam movimentos acoplados, exibem forte não-linearidade e acoplamento. No entanto, Gabl et al. (2021) realizou experimentos em um tanque circular de água, apto a fornecer corrente e ondas ao veículo, e os resultados mostraram que o BlueROV2 não apresenta forte acoplamento entre os DOF de movimento para velocidades  $|u| \leq 0.2$  m/s e  $|v| \leq 0.2$  m/s. Além disso, as características geométricas

Figura 4.9: Variação randômica de atraso do momento em que o robô passa pela aresta superior direita da trajetória.

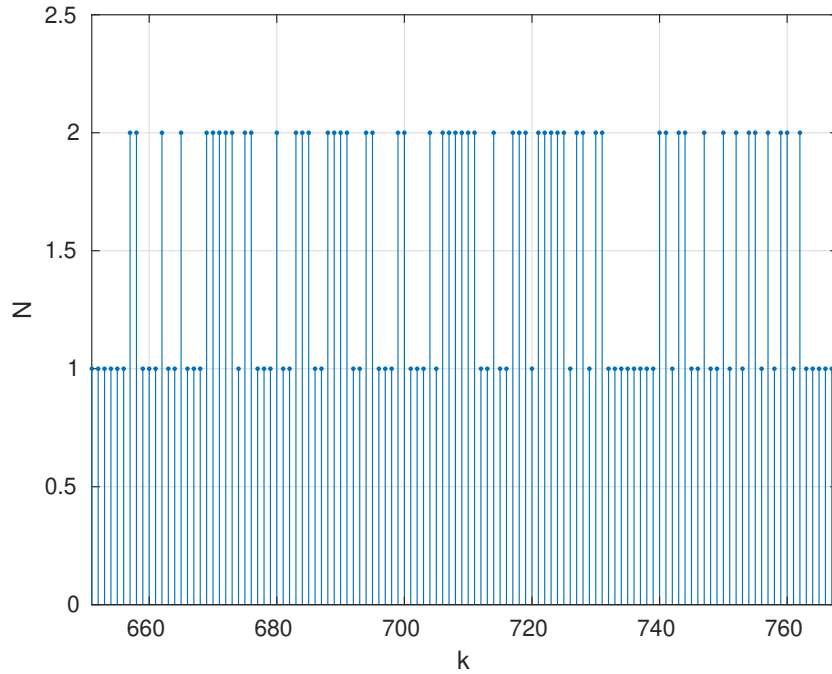
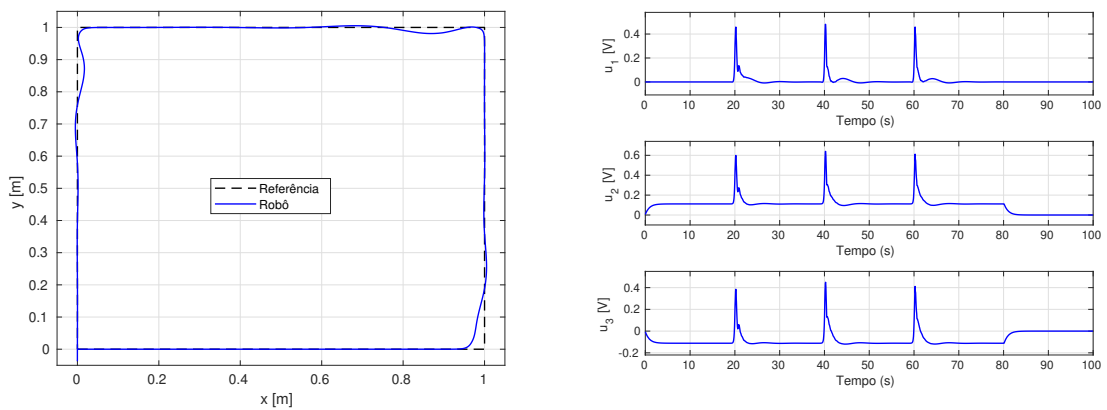


Figura 4.10: Seguimento de trajetória via sintonia 2 com atraso variando de forma randômica.



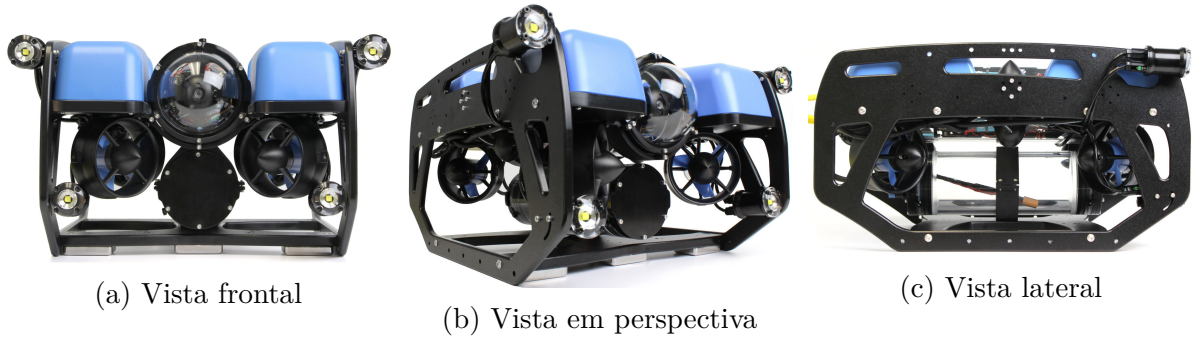
(a) Trajetória do robô.

(b) Sinais de controle.

do BlueROV2 oferecem algumas simplificações para as matrizes na Equação (B.9):

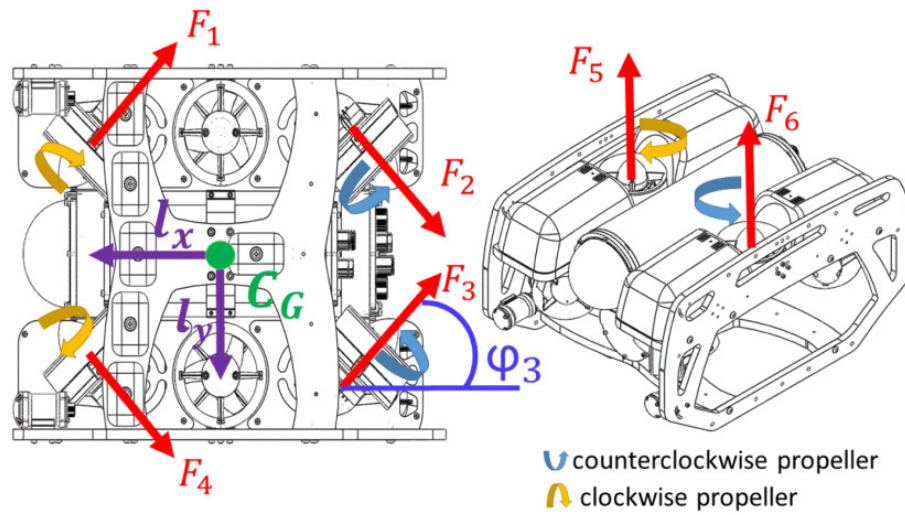
1. Devido à simetria em relação aos planos  $xz$  e  $yz$  e  $x_g = y_g = 0$ , a matriz de corpo

Figura 4.11: Configuração padrão do BlueROV2.



Fonte: Robotics (2023)

Figura 4.12: Propulsores do veículo submarino BlueROV2. Propulsores horizontais de 1 a 4 para movimentos em surge, sway e yaw; Propulsores verticais 5 e 6 para movimento em heave.



Fonte: Manzanilla et al. (2019)

rígido pode ser expressa da seguinte forma:

$$\mathbf{M}_{RB} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

que implica em

$$\mathbf{C}_{RB}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -mv \\ 0 & 0 & 0 & mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ mv & -mu & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$



Nota-se que a matriz  $\mathbf{C}_{RB}(v)$  na Equação (4.10) quando multiplicada pelo vetor de velocidade  $v$  resulta em termos acoplados. No entanto, assume-se que o veículo opera em baixas velocidades e, portanto, essa matriz pode ser negligenciada.

2. Devido à baixa velocidade do veículo e aos resultados em Gabl et al. (2021), os termos fora da diagonal principal na matriz de massa adicional podem ser negligenciados (FOSSSEN, 2021a). Assim, a matriz de massa adicional pode ser expressa como

$$\mathbf{M}_A = -\text{diag}\{X_{\dot{u}}, Y_{\dot{v}}, Z_{\dot{w}}, N_{\dot{r}}\}. \quad (4.11)$$

Existe também uma matriz para efeitos de força de Coriolis e centrípeta de massa adicional, dada por

$$\mathbf{C}_A(v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & Y_{\dot{v}}v \\ 0 & 0 & 0 & -X_{\dot{u}}u \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Y_{\dot{v}}v & X_{\dot{u}}u & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

No entanto, usando o mesmo argumento do item 1, a matriz  $\mathbf{C}_A(v)$  pode ser negligenciada.

3. Fossen (2021a) declara que, se o veículo estiver realizando movimentos não acoplados, faz sentido assumir uma estrutura diagonal para  $\mathbf{D}(v)$  e negligenciar os termos fora da diagonal. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(v) &= \mathbf{D} + \mathbf{D}_n(v) \\ &= -\text{diag}\{X_u, Y_v, Z_w, N_r\} \\ &\quad -\text{diag}\{X_{|u|u}|u|, Y_{|v|v}|v|, Z_{|w|w}|w|, N_{|r|r}|r|\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

No entanto, a baixa velocidade do veículo e os resultados em Gabl et al. (2021) permitem negligenciar a matriz de amortecimento quadrático, pois sua contribuição é pequena.

4. O vetor de forças e momentos gravitacionais e de flutuabilidade pode ser linearizado em torno do ponto de equilíbrio  $\theta = 0$  e  $\phi = 0$ , decorrente da característica de meta-estabilidade de ROVs e expresso como

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(W - B) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

em que  $W = mg$  é o peso do veículo e  $B = \rho g \nabla$  é a força de flutuabilidade. No entanto, Robotics (2023) afirma que o BlueROV2 é neutro em flutuabilidade em água doce, ou seja,  $W = B$ , e ligeiramente positivo em flutuabilidade em água salgada. Como  $(W - B) \approx 0$  para água salgada, o vetor de forças e momentos gravitacionais e de flutuabilidade pode ser negligenciado.

Portanto, o modelo dinâmico não linear simplificado do BlueROV2 é

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{D}\mathbf{v} = \boldsymbol{\tau} \quad (4.15)$$

que reescrito torna-se

$$\dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{v} + \mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{\tau} \quad (4.16)$$

A Equação (4.16) pode ser expressa na forma de um modelo em espaço de estados

$$\dot{\mathbf{x}} = [-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}]\mathbf{x} + [\mathbf{M}^{-1}]\boldsymbol{\tau} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (4.18)$$

em que  $\mathbf{x} = \mathbf{v}$  é o vetor de estados e  $\mathbf{C} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  é a matriz de saída.

A Tabela 4.2 reúne os parâmetros do modelo dinâmico do BlueROV2 oriundos de diferentes pesquisas. Nota-se que os valores dos parâmetros variam significativamente entre as fontes, o que destaca a incerteza do modelo dinâmico de veículos subaquáticos.

Para relacionar os parâmetros na Tabela 4.2 ao modelo dinâmico do BlueROV2, a Equação (4.17) pode ser expandida como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{r} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{X_u}{m-X_{\dot{u}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Y_v}{m-Y_{\dot{v}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Z_w}{m-Z_{\dot{w}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{N_r}{I_{zz}-N_{\dot{r}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ r \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{1}{m-X_{\dot{u}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m-Y_{\dot{v}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m-Z_{\dot{w}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}-N_{\dot{r}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ N \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Nota-se através da Equação (4.19) que o modelo simplificado é governado por quatro conjunto de parâmetros: a massa  $m$ , o momento de inércia  $I_{zz}$ , os coeficientes de arrasto linear  $X_u$ ,  $Y_v$ ,  $Z_w$  e  $N_r$ , e os coeficientes de massa adicional  $X_{\dot{u}}$ ,  $Y_{\dot{v}}$ ,  $Z_{\dot{w}}$  e  $N_{\dot{r}}$ . Uma Outra característica da expansão é o desacoplamento entre os graus de liberdade de movimento, ou seja, a simplificação do modelo dinâmico do BlueROV2 permite tratar cada grau de liberdade de movimento como um sistema linear de primeira ordem.

Para criação das matrizes  $\mathbf{M}$  e aplicação do Teorema 4 proposto por Oliveira, Geromel e Bernussou (2002), definiu-se matrizes  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{D}$  com valores mínimos e máximos para cada parâmetro, conforme a Tabela 4.2. Já o modelo nominal usado no Controlador Preditivo Linear utiliza os valores médios dos parâmetros. A Tabela 4.3 mostra os valores mínimos, médios e máximos para cada parâmetro.

#### 4.2.2 Cálculo do Critério de Robustez

A aplicação do Teorema 4 proposto por Oliveira, Geromel e Bernussou (2002) requer a definição das matrizes aumentadas  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$ , Equações (3.23) e (3.24) respectivamente,

Tabela 4.2: Parâmetros do modelo dinâmico do BlueROV2 de diferentes pesquisas.

Parâmetro	Símbolo	Und.	Artigo A <sup>1</sup>	Artigo B <sup>2</sup>	Artigo C <sup>3,4</sup>
Massa	$m$	kg	11.0	11.4	13.5
Densidade da água	$\rho$	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	1000	1000	1000
Volume	$\nabla$	$\text{m}^3$	-	0.0114	0.0134
Gravidade	$g$	$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$	-	9.82	9.82
Momento de Inércia	$I_{zz}$	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$	0.16	0.245	0.37
Massa Adicional	$X_{\dot{u}}$	kg	5.5	-	6.36
	$Y_{\dot{v}}$	kg	12.7	-	7.12
	$Z_{\dot{w}}$	kg	14.57	-	18.68
	$N_{\dot{r}}$	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$	0.12	-	0.222
Amortecimento Linear	$X_u$	$\text{kg}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$	-	25.15	13.7
	$Y_v$	$\text{kg}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$	-	7.364	0.0
	$Z_w$	$\text{kg}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$	-	17.955	33.0
	$N_r$	$\text{kg}\cdot\text{s}$	-	3.744	0.0
Amortecimento Quadrático	$X_{ u u}$	$\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$	-	17.77	141.0
	$Y_{ v v}$	$\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$	-	125.9	217.0
	$Z_{ w w}$	$\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$	-	72.36	190.0
	$N_{ r r}$	$\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$	-	0.1857	1.5

<sup>1</sup> Manzanilla et al. (2019)<sup>2</sup> Lipenitis e Einarsson (2020)<sup>3</sup> Benzon et al. (2022)<sup>4</sup> Parâmetros do BlueROV2 com a configuração de *heavy* com 8 propulsores: 4 horizontais e 4 verticais. Vale destacar que o BlueROV2 utilizado nesta pesquisa não possui a configuração *heavy*. No entanto, os parâmetros são apresentados aqui para destacar a incerteza do modelo dinâmico de veículos subaquáticos.

Tabela 4.3: Valores mínimos, médios e máximos dos parâmetros do modelo dinâmico do BlueROV2.

Parâmetro	Símbolo	Unidade	Mínimo	Médio	Máximo
Massa	$m$	kg	11.0	12.25	13.5
Momento de inércia	$I_{zz}$	kg·m <sup>2</sup>	0.16	0.26	0.37
Massa Adicional	$X_{\dot{u}}$	kg	-6.36	-5.93	-5.50
	$Y_{\dot{v}}$	kg	-12.7	-9.91	-7.12
	$Z_{\dot{w}}$	kg	-18.8	-16.62	-14.57
	$N_{\dot{r}}$	kg·m <sup>2</sup>	-0.22	-0.17	-0.12
Amortecimento linear	$X_u$	kg·s·m <sup>-1</sup>	-25.15	-19.42	-13.7
	$Y_v$	kg·s·m <sup>-1</sup>	-7.35	-7.35	-7.35
	$Z_w$	kg·s·m <sup>-1</sup>	-33.00	-25.48	-17.95
	$N_r$	kg·s	-3.73	-3.73	-3.73

Fonte: Autoria própria.

Tabela 4.4: Valores do ganho  $r$  e faixas de valores para o ganho  $q$  para cada grau de liberdade do BlueROV2.

Grau de Liberdade	$r$	Faixa de Valores para $q$
surge	200	[7100, 8000]
sway	200	[7100, 8000]
heave	200	[7100, 8000]
yaw	200	[1100, 2000]

Fonte: Autoria própria.

que compõem os vértices do poliedro  $\Gamma$  (Equação (3.19)). O cálculo desta matrizes dependem tanto da sintonia do controlador preditivo quanto dos valores dos parâmetros do modelo dinâmico do BlueROV2.

Para avaliar o critério de robustez sobre diferentes sintonias do controlador preditivo, definiu-se, para cada grau de liberdade do BlueROV2, um valor constante para o ganho  $r$  e uma faixa de valores para o ganho  $q$ . A Tabela 4.4 mostra os valores de  $r$  e as faixas de valores para  $q$  para cada grau de liberdade. Além disso, definiu-se para o Controlador Preditivo Linear um horizonte de predição  $N_p = 30$  e um horizonte de controle  $N_c = 20$ . Por fim, o período de amostragem do controlador foi definido como  $T_s = 10$  ms.

A inserção das incertezas foi realizada ao considerar os valores mínimos e máximos dos parâmetros do modelo dinâmico do BlueROV2, conforme a Tabela 4.3.

O cálculo da norma infinito usando o Teorema 4 com os vértices do poliedro foi realizado usando a linguagem de modelagem Yalmip (LÖFBERG, 2004) em combinação com o *solver* SDPT3 (TÜTÜNCÜ; TOH; TODD, 2003). Posteriormente, a tolerância máxima de atraso para o conjunto de parâmetros de sintonia do controlador foi avaliada usando a Equação ((3.26)).

A partir destas definições, o critério de estabilidade robusta foi calculado conforme

algoritmo apresentado abaixo.

---

**Algoritmo 1:** Cálculo do critério de estabilidade robusta.

---

```

1 Define-se valores de  $N_p$ ,  $N_c$  e  $T_s$ ;
2 Define-se as incertezas do modelo dinâmico do BlueROV2;
3 Define-se para cada grau de liberdade os valores de  $r$  e faixas de valores para  $q$ ;
4 Para cada grau de liberdade faça
5   Para cada valor de  $q$  faça
6     Inicializa-se as variáveis obrigatórias do solver;
7     Inicializa-se as variáveis de otimização;
8     Inicializa-se um array de LMIs;
9     Para cada valor de massa faça
10      Para cada valor de amortecimento linear faça
11        Para cada valor de massa adicional faça
12          Calcula-se as matrizes  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ ;
13          Define-se a LMI;
14          Adiciona-se a LMI ao array de LMIs;
15      Calcula-se a norma infinito e o atraso máximo tolerado considerando
        incertezas;
16      Calcula-se a norma infinito e o atraso máximo tolerado considerando o
        modelo nominal;

```

---

As Figuras 4.13, 4.14, 4.16 e 4.15 mostram os resultados obtidos ao executar o algoritmo de cálculo do critério de estabilidade robusta considerando os valores da Tabela 4.3 e da Tabela 4.4. O cálculo para o modelo nominal foi realizado usando a função `norm` do Matlab e considerando os valores médios dos parâmetros do modelo dinâmico do BlueROV2.

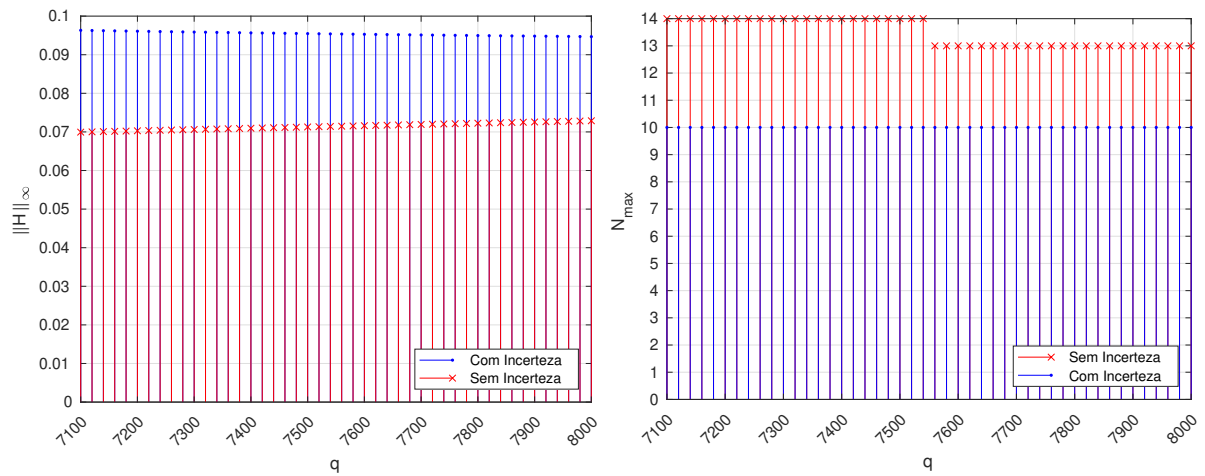
Nota-se nos resultados apresentados nas Figuras 4.13, 4.14, 4.16 e 4.15 a sensibilidade do máximo atraso tolerável  $N_{\max}$  quando incertezas de modelo são consideradas. Observa-se também que a maior sensibilidade ocorre para o grau de liberdade *yaw*, o que indica que este grau de liberdade é o mais crítico para a estabilidade do sistema.

### 4.2.3 Simulações e Resultados

Para avaliar o critério de robustez proposto, foram realizadas simulações numéricas utilizando o MATLAB, em que foi utilizado o método de integração de Runge-Kutta de quarta ordem para a resolução das equações de movimento, bem como simulações em ambiente virtual com o simulador Gazebo. Nessas simulações, o BlueROV2 foi submetido a diferentes configurações do Controlador Preditivo Linear e a atrasos de comunicação emulados durante o seguimento de trajetória.

A Figura 4.17 mostra a arquitetura de controle proposta para validar o critério de robustez. A cadeia de controle é composta por um gerador de trajetórias, transformação cinemática para conversão de frames de referência e o Controlador Preditivo Linear. O

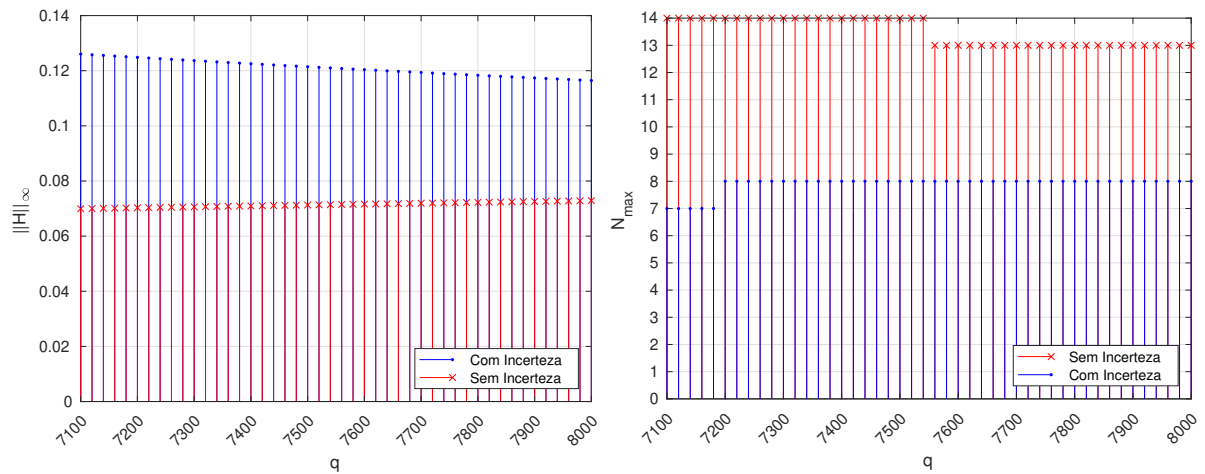
Figura 4.13: Comparação entre os resultados obtidos com e sem incertezas de modelo para o grau de liberdade *surge*.



(a) Comparação das normas  $H_\infty$  com e sem incertezas do modelo para o grau de liberdade *surge*. (b) Comparação do atraso máximo tolerável ( $N_{\max}$ ) com e sem incertezas de modelo para o grau de liberdade *surge*.

Fonte: Autoria própria.

Figura 4.14: Comparação entre os resultados obtidos com e sem incertezas de modelo para o grau de liberdade *sway*.

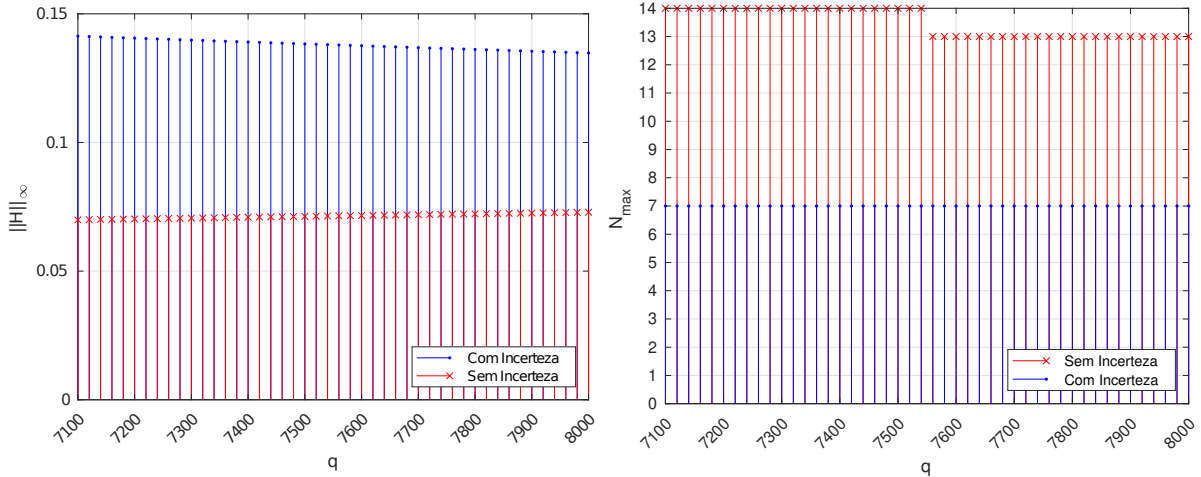


(a) Comparação das normas  $H_\infty$  com e sem incertezas do modelo para o grau de liberdade *sway*. (b) Comparação do atraso máximo tolerável ( $N_{\max}$ ) com e sem incertezas de modelo para o grau de liberdade *sway*.

Fonte: Autoria própria.

controlador foi apresentado na seção 2.2 enquanto a transformação cinemática é apresentada no Apêndice B. Já o gerador de trajetórias utilizado é apresentado adiante.

Figura 4.15: Comparação entre os resultados obtidos com e sem incertezas de modelo para o grau de liberdade *heave*.

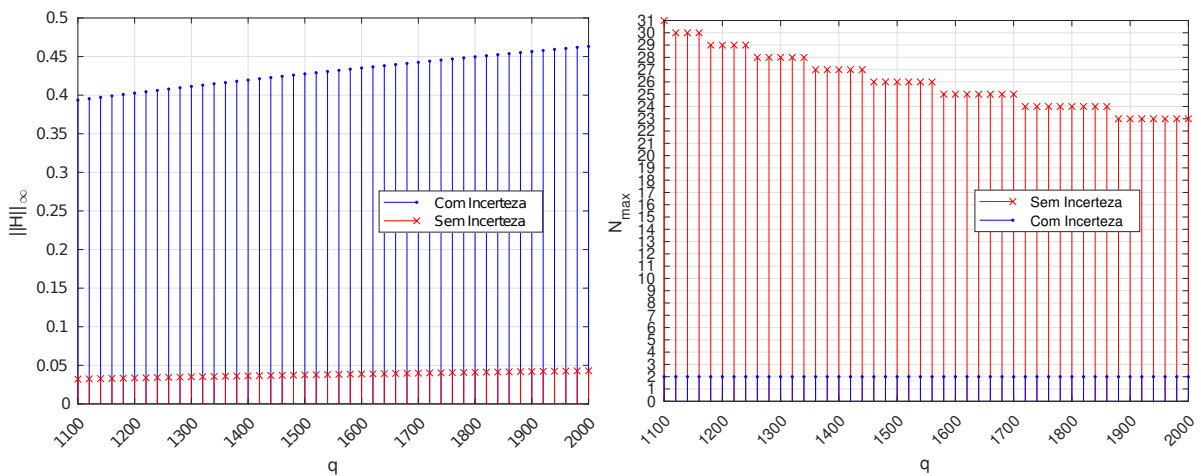


(a) Comparação das normas  $H_\infty$  com e sem incertezas do modelo para o grau de liberdade *heave*.

(b) Comparação do atraso máximo tolerável ( $N_{\max}$ ) com e sem incertezas de modelo para o grau de liberdade *heave*.

Fonte: Autoria própria.

Figura 4.16: Comparação entre os resultados obtidos com e sem incertezas de modelo para o grau de liberdade *yaw*.



(a) Comparação das normas  $H_\infty$  com e sem incertezas do modelo para o grau de liberdade *yaw*.

(b) Comparação do atraso máximo tolerável ( $N_{\max}$ ) com e sem incertezas de modelo para o grau de liberdade *yaw*.

Fonte: Autoria própria.

Salienta-se que para a validação proposta a geração de trajetória e transformações cinemáticas são realizadas offline e passadas para o Controlador Preditivo Linear. Devido o

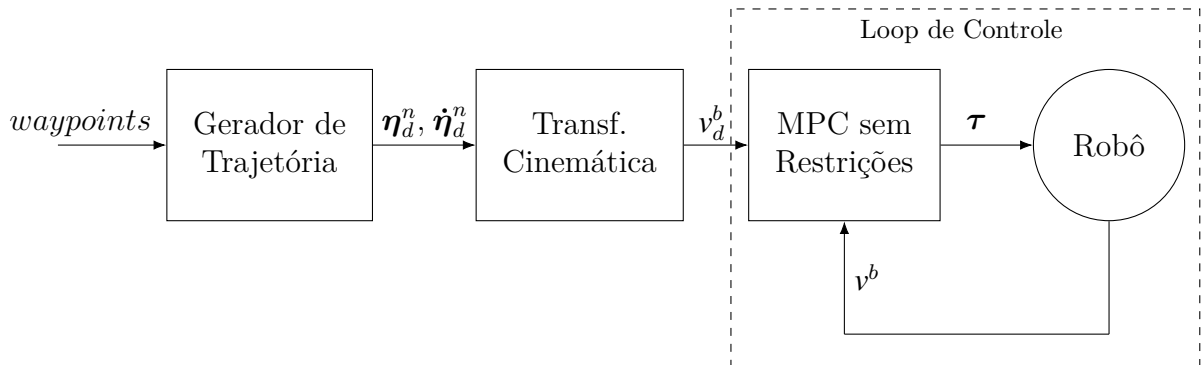
Tabela 4.5: Lista de *waypoints* para a trajetória desejada do BlueROV2.

N <sup>o</sup>	X (m)	Y (m)	Z (m)	yaw (°)	Tempo (s)
1	0.0	0.0	5.0	0	0
2	1.0	0.0	5.0	0	10
3	1.0	0.0	5.0	-90	15
4	1.0	0.0	2.0	-90	45
5	2.0	0.0	2.0	-90	55
6	2.0	0.0	5.0	-90	85
7	3.0	0.0	5.0	-90	95

Fonte: Autoria própria.

princípio do horizonte deslizante, o Controlador Preditivo Linear usa, a cada passo do loop de controle, apenas os valores da trajetória e transformações cinemáticas que estão no horizonte de predição.

Figura 4.17: Arquitetura geral do Controlador de Rastreamento de Trajetória com Controlador Preditivo Linear como Controlador de Velocidade.



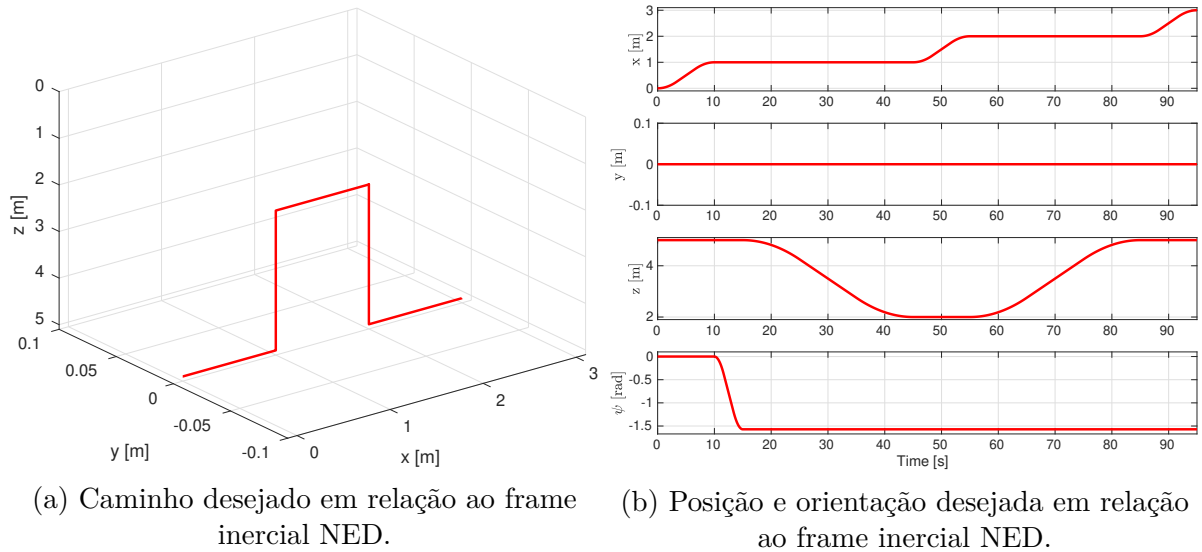
Fonte: Autoria própria.

Em ambas as simulações, o BlueROV2 foi submetido ao seguimento de trajetória inspirada na inspeção visual de estruturas submersas, a exemplo da inspeção visual de um *Blowout Preventer* (BOP) por um ROV. A trajetória foi definida em relação ao frame inercial NED (ver Apêndice B) com os *waypoints* listados na Tabela 4.5. Os *waypoints* são conectados por segmentos de retas e curvas parabólicas que devem ser percorridos em intervalos de tempo especificado. Para isso, utilizou-se a função `lspb` do Matlab Toolbox Corke (2017). O resultado da trajetória desejada é mostrado na Figura 4.18.

Entretanto, o modelo simplificado na Equação (4.19) foi obtido ao definir as velocidades lineares e angulares em relação ao frame *body-fixed* como estados do sistema. Desta forma, foi necessário converter a posição e orientação desejadas em relação ao frame inercial NED para o frame não inercial *body-fixed*. Assim, aplicou-se uma transformação cinemática para converter as velocidades desejadas para o frame *body-fixed*. A Figura 4.19 mostra as velocidades desejadas em relação aos dois frames de referência.

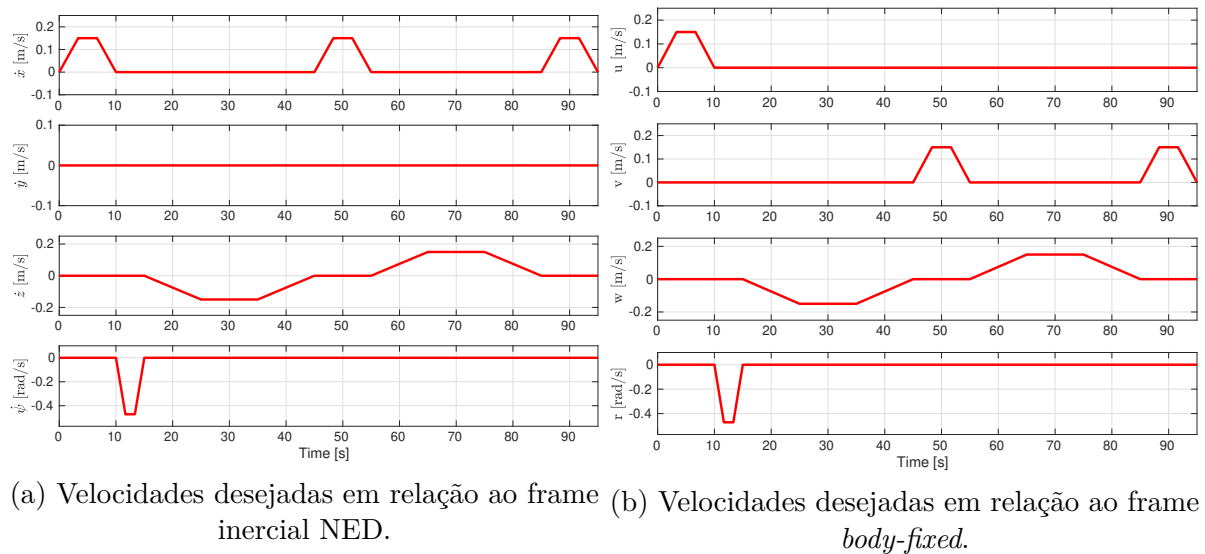


Figura 4.18: Trajetória desejada para o BlueROV2 em relação ao frame inercial NED.



Fonte: Autoria própria.

Figura 4.19: Velocidades desejadas para o BlueROV2 em relação aos frames NED e *body-fixed*.



Fonte: Autoria própria.

A simulação numérica foi realizada para os seguintes cenários:

- **Cenário 1:** Seguimento de trajetória sem atraso de comunicação;
- **Cenário 2:** Seguimento de trajetória com atraso de comunicação constante que respeite o critério de robustez considerando as incertezas do modelo, respeitando

Tabela 4.6: Atrasos de comunicação máximos tolerados para os cenários 2 e 3.

Cenário	$N_{max}$	Atraso (ms)
2	2	20
3	14	140

Fonte: Autoria própria.

também por conservadorismo o critério de robustez para o modelo nominal; e

- **Cenário 3:** Seguimento de trajetória com atraso de comunicação constante que respeite o critério de robustez considerando o modelo nominal mas que não respeite o critério de robustez para o modelo com incertezas.

Todos os cenários foram simulados com a mesma sintonia do Controlador Preditivo Linear, com  $r = 200$  e  $q = 7500$  para os graus de liberdade *surge*, *sway* e *heave*, e  $r = 200$  e  $q = 1500$  para o grau de liberdade *yaw*. O horizonte de predição foi definido como  $N_p = 30$  e o horizonte de controle como  $N_c = 20$ . O período de amostragem do controlador foi definido como  $T_s = 10$  ms. Dado estes parâmetros de sintonia, os atrasos de comunicação máximos tolerados para os cenários 2 e 3 foram obtidos a partir dos resultados apresentados nas Figuras 4.13, 4.14, 4.15 e 4.16. Como mostra as figuras, os atrasos de comunicação varia para cada grau de liberdade. Desta forma, considerou-se o pior cenário, ou seja, o menor valor de amostras atrasadas toleradas entre todos os graus de liberdade. A Tabela 4.6 mostra os atrasos de comunicação máximos tolerados para cada cenário.

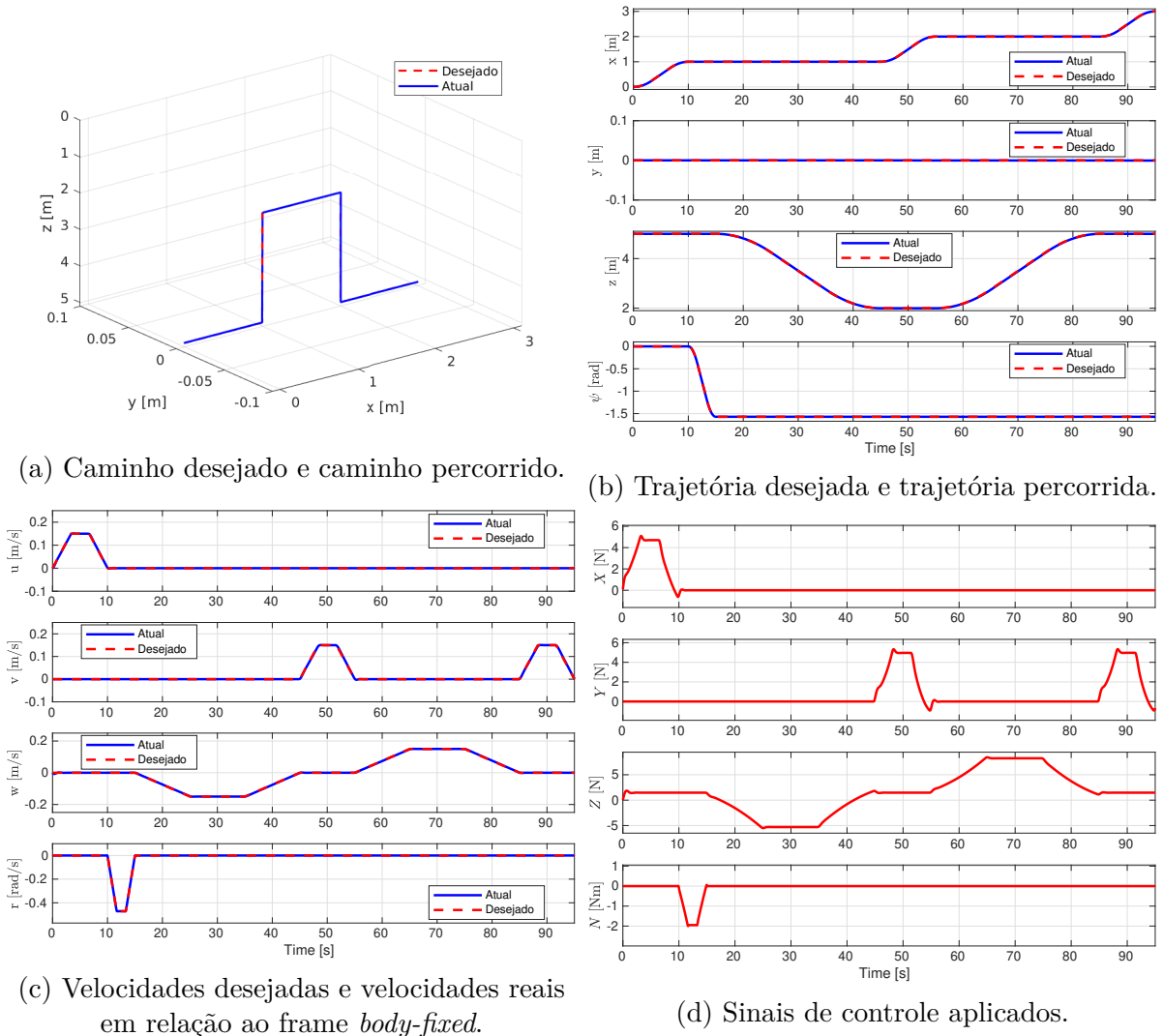
A simulação mostrou que para o cenário que não há atraso de comunicação, o BlueROV2 foi capaz de seguir a trajetória desejada sem indícios de instabilidade como mostra a Figura 4.20.

Para o cenário 2, em que foi forçado um valor constante de atraso de comunicação de 20 ms (2 amostras atrasadas), o BlueROV2 também foi capaz de seguir a trajetória desejada, como mostra a Figura 4.21. Entretanto, para o cenário 3, cujo o atraso de comunicação foi forçado para 140 ms (14 amostras atrasadas), o BlueROV2 não foi capaz de seguir a trajetória desejada. Observa-se na Figura 4.22 a ocorrência de instabilidade para o grau de liberdade *yaw*, comprometendo o seguimento da trajetória.

É interessante notar na Figura 4.16 que o resultado do critério de robustez para o grau de liberdade *yaw* mostra que ao considerar apenas o modelo nominal, o sistema é capaz de tolerar atrasos de comunicação de 260 ms (26 amostras atrasadas). Porém, o mesmo resultado para o modelo com incertezas mostra que o sistema é capaz de tolerar apenas 2 amostras de atraso. Isso evidencia a importância de considerar as incertezas do modelo na robustez do sistema.

A simulação em ambiente virtual utilizou a mesma arquitetura de controle e os mesmos parâmetros de sintonia do Controlador Preditivo Linear aplicados na simulação numérica. Para replicar o comportamento do BlueROV2, foi escolhido o simulador Gazebo Harmonic, em conjunto com o ROS 2 Jazzy, garantindo uma integração nativa entre a plataforma de simulação e o framework de robótica. O uso de um simulador que possui

Figura 4.20: Comportamento do BlueROV2 no seguimento de trajetória sem atraso de comunicação.



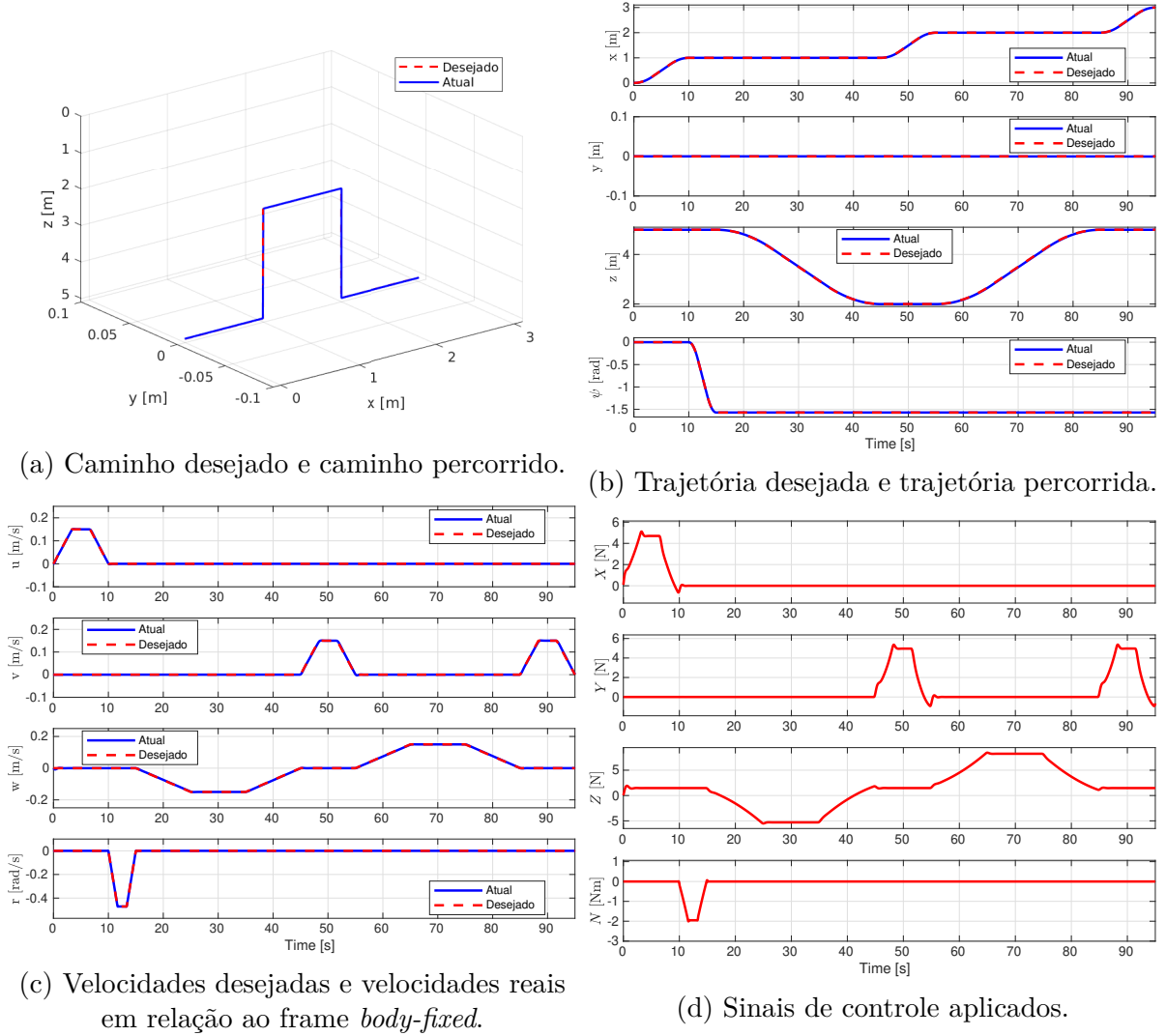
Fonte: Autoria própria.

motor físico realista permite validar o comportamento do controlador em um ambiente mais próximo do real.

O Gazebo oferece a capacidade de simular o comportamento dinâmico de veículos subaquáticos por meio de plugins e modelos físicos integrados, como a simulação de massa adicional, arrasto hidrodinâmico e flutuabilidade. No entanto, é necessário fornecer ao simulador os parâmetros físicos específicos do veículo. Para isso, foram utilizados os valores médios dos parâmetros do modelo dinâmico do BlueROV2, conforme apresentados na Tabela 4.3.

A simulação em ambiente virtual permitiu a criação de um cenário realista de inspeção visual de um BOP por um ROV, conforme ilustrado na Figura 4.23. Nesse contexto, o

Figura 4.21: Comportamento do BlueROV2 no seguimento de trajetória com atraso de comunicação constante de 2 amostras.



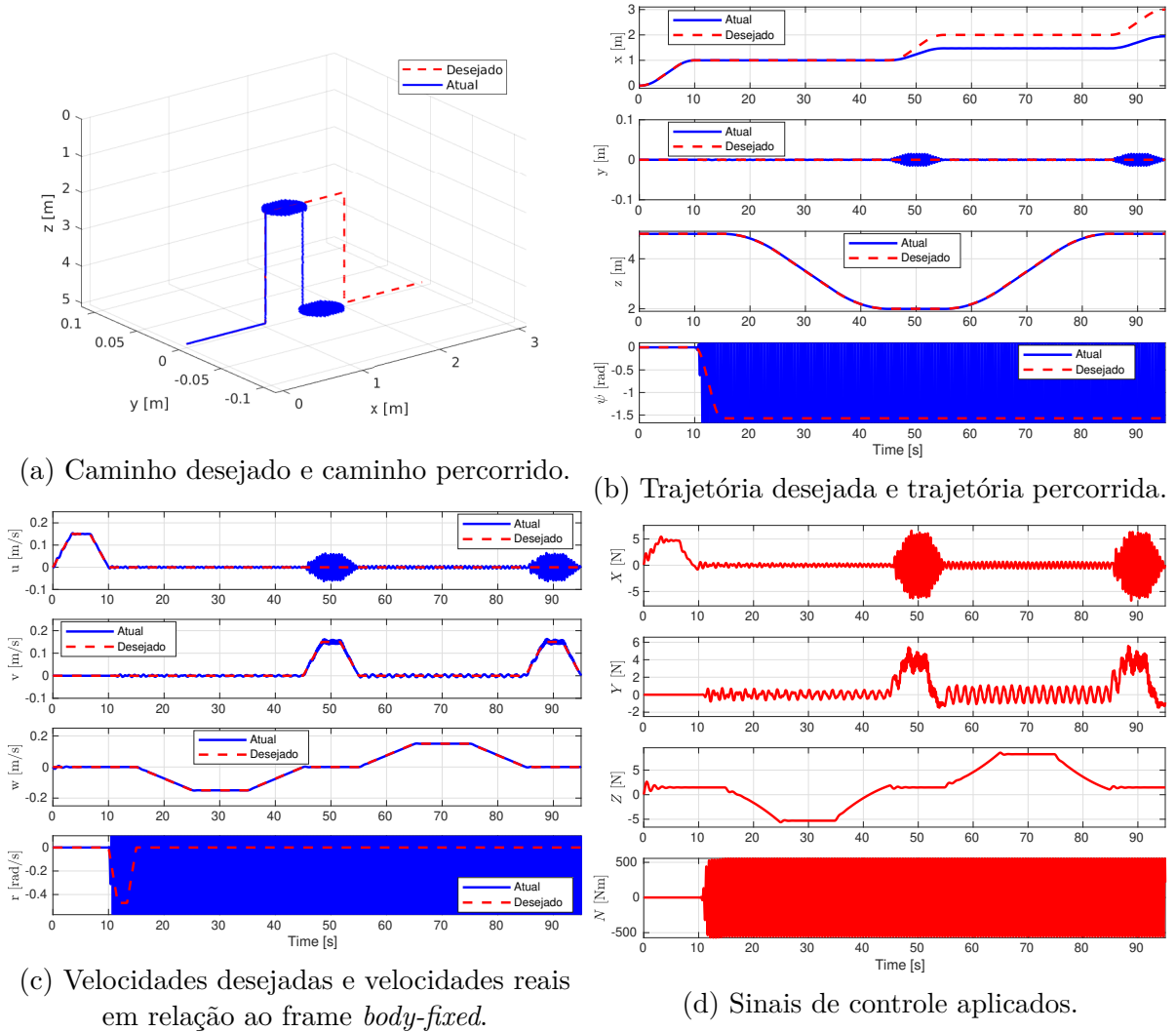
Fonte: Autoria própria.

BlueROV2 foi programado para seguir uma trajetória que emula a inspeção visual dos indicadores de controle do BOP (vide Figura 4.18a), demonstrando o comportamento esperado em operações subaquáticas reais.

Foram simulados os mesmos cenários da simulação numérica, com os mesmos parâmetros de sintonia e atrasos de comunicação, ou seja, com os ganhos  $r = 200$  e  $q = 7500$  para os graus de liberdade *surge*, *sway* e *heave*, e  $r = 200$  e  $q = 1500$  para o grau de liberdade *yaw*. O horizonte de predição foi definido como  $N_p = 30$  e o horizonte de controle como  $N_c = 20$ . O período de amostragem do controlador  $T_s = 10$  ms foi garantido ao configurar a frequência do loop de controle para 100 Hz.

Entretanto, ao contrário da simulação numérica, os atrasos variáveis de comunicação

Figura 4.22: Comportamento do BlueROV2 no seguimento de trajetória com atraso de comunicação constante de 14 amostras.



Fonte: Autoria própria.

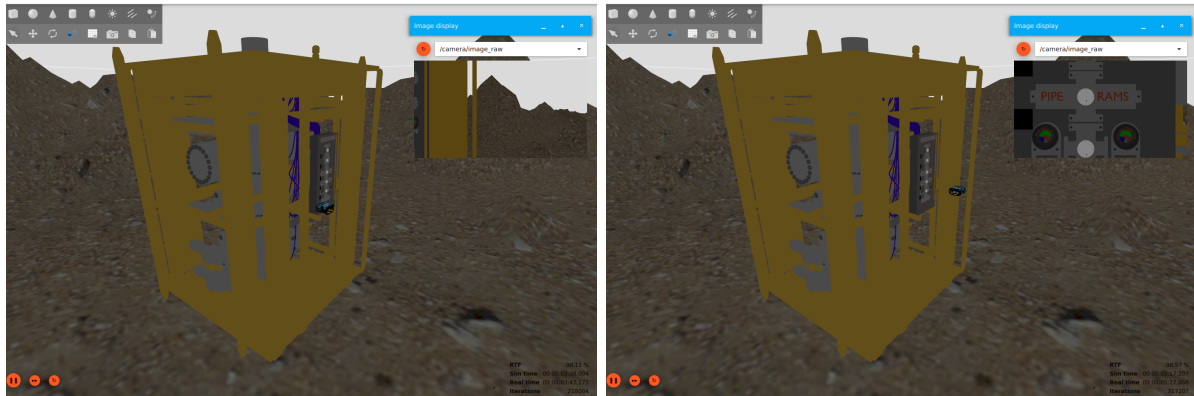
nos cenários 2 e 3 foram emulados utilizando a classe C++ `std::mt19937` da biblioteca padrão<sup>2</sup>, que gera números pseudoaleatórios.

No cenário 1, em que não há atraso de comunicação, o BlueROV2 foi capaz de seguir a trajetória desejada sem indícios de instabilidade, como mostra a Figura 4.24.

Para o cenário 2, em que segundo o critério não há instabilidade com a sintonia proposta caso o valor máximo de atraso  $N_{max} = 2$ , a simulação foi configurada para o atraso variar entre 0 e 20 ms. Como assegurado pelo critério de robustez, o BlueROV2 foi capaz de seguir a trajetória desejada, como mostra a Figura 4.25, mesmo na presença de

<sup>2</sup>Para mais detalhes sobre a implementação da `std::mt19937`, recomenda-se a consulta à documentação disponível em [cppreference \(2024\)](https://en.cppreference.com/w/cpp/algorithm/random).

Figura 4.23: Cenário de simulação em ambiente virtual para inspeção visual de um BOP por um ROV.

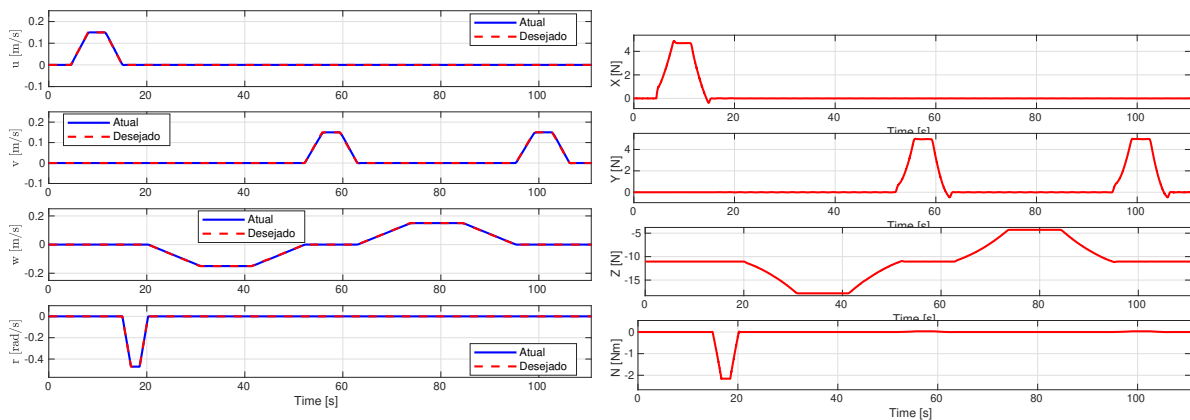


(a) BlueROV2 no início da trajetória de inspeção.

(b) BlueROV2 na metade da trajetória de inspeção.

Fonte: Autoria própria.

Figura 4.24: Comportamento do BlueROV2 no seguimento de trajetória sem atraso de comunicação em ambiente virtual.



(a) Velocidades em relação ao frame *body-fixed*.

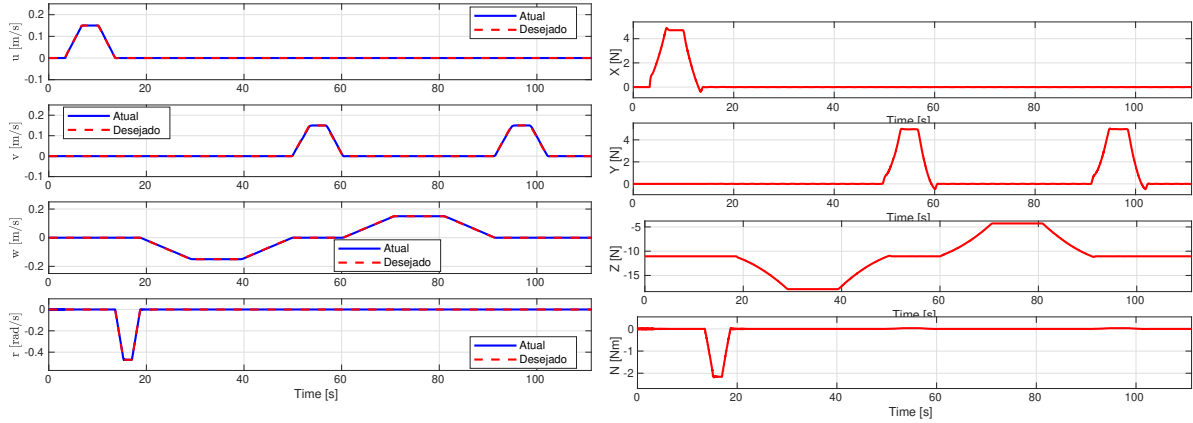
(b) Sinais de controle.

Fonte: Autoria própria.

atrasos variados conforme a Figura 4.25c que mostra o comportamento do atraso dentro de uma janela de tempo da trajetória.

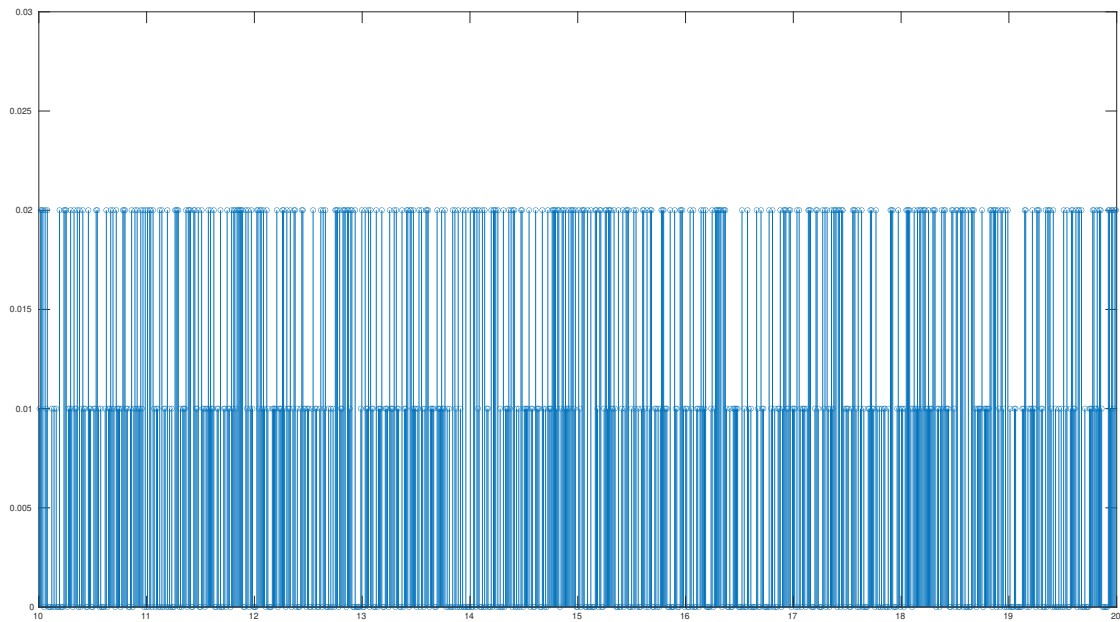
Para o cenário 3, em que o atraso de comunicação foi configurado para variar entre 0 e 140 ms (ou entre 0 a 14 amostras atrasadas), que não respeita o critério de robustez para o modelo com incertezas, o BlueROV2 não foi capaz de seguir a trajetória desejada, como mostra a Figura 4.26. A Figura 4.26c mostra como foi simulado o comportamento

Figura 4.25: Comportamento do BlueROV2 no seguimento de trajetória com atraso de comunicação de até 2 amostras em ambiente virtual.



(a) Velocidades em relação ao frame *body-fixed*.

(b) Sinais de controle.



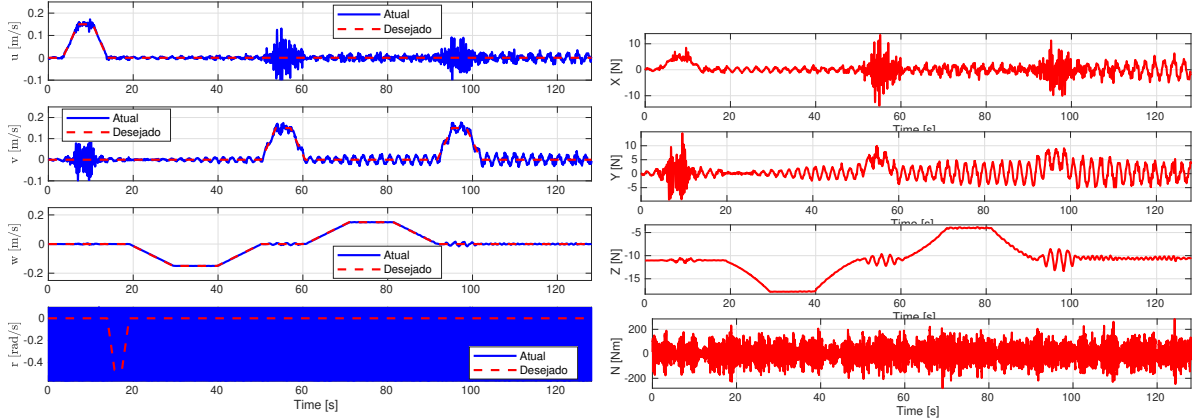
(c) Recorte da variação do atraso de comunicação para o cenário 2 em ambiente virtual.

Fonte: Autoria própria.

variável do atraso de comunicação para execução do cenário 3. Embora não tenha ocorrido a instabilidade, observa-se uma oscilação para o grau de liberdade *yaw*. No cenário proposto, esta oscilação inviabiliza uma inspeção visual eficiente por parte do operador do veículo.

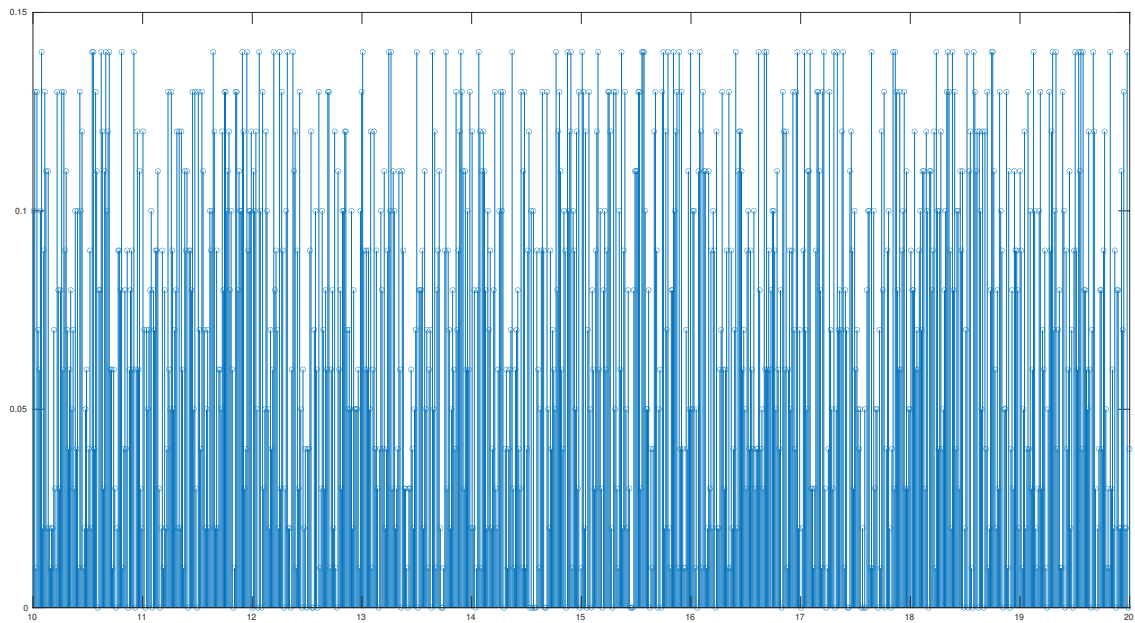
O resultado do cenário 3 expõe uma limitação do critério de robustez proposto: por ser um critério de suficiência, ele não prevê o comportamento do sistema quando o atraso

Figura 4.26: Comportamento do BlueROV2 no seguimento de trajetória com atraso de comunicação de até 14 amostras em ambiente virtual.



(a) Velocidades em relação ao frame *body-fixed*.

(b) Sinais de controle.



(c) Recorte da variação do atraso de comunicação para o cenário 3 em ambiente virtual.

Fonte: Autoria própria.

de comunicação excede o valor máximo tolerado. No entanto, o critério demonstrou sua eficácia em mostrar a estabilidade do sistema para atrasos de comunicação dentro dos limites estabelecidos, como evidenciado pelos resultados do cenário 2



## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho propôs-se um novo critério robusto de estabilidade para a sintonia de Controladores Preditivos Lineares em sistemas *Multiple Input Multiple Output* (MIMO) com atraso variável e incertezas paramétricas de modelagem. Através da aplicação do Teorema do Pequeno Ganho e da análise de incertezas politópicas por LMIs, foi possível formular teoricamente e validar quantitativamente este critério, utilizando ferramentas como o Matlab e o simulador Gazebo para aplicação do critério no problema de controle de caminho de um robô móvel terrestre omnidirecional e no problema de controle de trajetória de um veículo subaquático. Dessa forma, os objetivos propostos foram integralmente alcançados.

Referente às contribuições práticas, o critério proposto é uma ferramenta adicional que pode ser utilizada na sintonia de Controladores Preditivos Lineares em sistemas MIMO com atraso variável e incertezas paramétricas de modelagem. O uso do critério permite responder duas questões complementares em relação a estabilidade do sistema:

- (i) Considerando que o atraso é variável, mas limitado por um valor conhecido, quais as faixas de valores dos ganhos do controlador que garantem a estabilidade do sistema?
- (ii) Dado as faixas desejáveis dos ganhos do controlador, qual o valor máximo do atraso que garante a estabilidade do sistema?

. Os resultados alcançados evidenciaram também a importância de se considerar as influências das incertezas paramétricas de modelagem no projeto de controladores preditivos lineares e não apenas o atraso variável.

Salienta-se ainda que os estudo de casos mostraram a aplicabilidade do critério para dois tipos de sistemas de controle de robôs móveis, demonstrando que, apesar das particularidades de cada sistema, o critério proposto pode ser aplicado para diferentes tipos de sistemas de controle MIMO com atraso variável e incertezas paramétricas de modelagem.

Apesar das contribuições, algumas limitações precisam ser destacadas. O critério proposto assume que todos os estados do sistema estão disponíveis para medição, o que nem sempre é possível em aplicações práticas. Uma das opções para contornar essa

limitação é a utilização de observadores de estados. O uso de observadores, embora promissor, altera a dinâmica do sistema e por isso é necessário incluir no critério suas influências sobre a estabilidade do sistema. Ademais, o critério proposto define apenas uma condição de suficiência para a estabilidade do sistema, e desta forma, não define como será o comportamento do sistema em malha fechada caso ele seja violado. Por fim, os resultados foram obtidos apenas em simulações, sendo necessária uma validação experimental em sistemas reais para confirmar a aplicabilidade do critério em cenários de operação prática.

## DIAGRAMA SIMULINK PARA SIMULAÇÃO DE ROBÔ OMNIDIRECIONAL

A Figura A.1 ilustra o modelo de simulação desenvolvido no ambiente Simulink para o robô omnidirecional usado neste pesquisa. O diagrama é estruturado em cinco blocos principais: *Trajectory Control*, *Velocity Control*, *Robot*, *Odometry* e *Forwards Kinematics*.

O bloco *Trajectory Control* tem como função gerar as referências futuras de posição e velocidade do robô, com base em uma trajetória desejada definida em relação ao frame do mundo e na velocidade de navegação especificada. Essas referências são então utilizadas como entrada para o bloco *Velocity Control*, em que é implementado o Controlador Preditivo Linear Sem Restrições utilizado neste trabalho.

O sinal de controle gerado pelo bloco *Velocity Control* é enviado ao bloco *Robot*, que contém o modelo dinâmico do robô omnidirecional representado em Espaço de Estados. Esse bloco simula o comportamento físico do robô, considerando sua dinâmica interna, e tem como saída as velocidades lineares de cada roda do veículo.

Como as velocidades das rodas não são diretamente úteis para a análise do movimento global do robô, o bloco *Forwards Kinematics* é empregado para converter essas velocidades lineares das rodas em velocidades lineares e angulares em relação ao frame de referência acoplado ao centro geométrico do robô. É importante destacar que, na entrada desse bloco, um atraso de natureza variável é introduzido no modelo por meio de um gerador randômico, cujos limites superior e inferior são predefinidos. Esse atraso simula possíveis variações temporais que podem ocorrer em sistemas reais. A mesma abordagem foi utilizada na simulação de atrasos constantes, porém sem a presença do gerador randômico.

Por fim, o bloco *Odometry* calcula a posição e a orientação do robô em relação ao frame do mundo, utilizando as velocidades lineares e angulares fornecidas pelo bloco *Forwards Kinematics*.

As interconexões entre os blocos formam um laço de controle fechado, permitindo que o robô siga a trajetória desejada. Além disso, os dados gerados ao longo da simulação são utilizados para a plotagem de gráficos, permitindo a análise do desempenho do sistema.



## CINEMÁTICA E DINÂMICA DE VEÍCULOS SUBAQUÁTICOS

Esta seção introduz o modelo dinâmico e cinemático de veículos subaquáticos com base no trabalho de Fossen (2021a). Inicialmente são apresentados os sistemas de coordenadas comuns usados na navegação subaquática. O modelo dinâmico não linear é então apresentado como um conjunto de equações diferenciais acopladas que descrevem o movimento do veículo nos seis graus de liberdade.

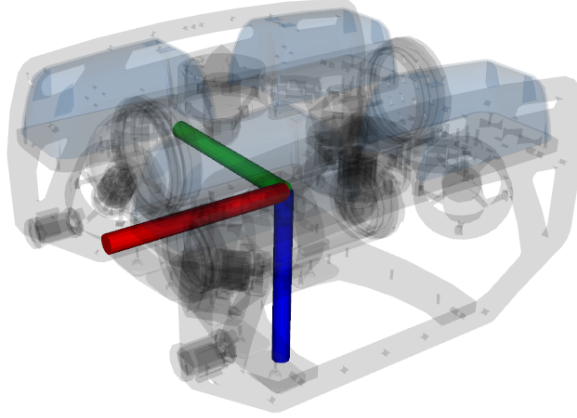
### B.1 FRAMES DE REFERÊNCIA

Para veículos subaquáticos navegando em uma pequena região da superfície da Terra (um plano tangente com lados de 10 x 10 km), dois sistemas de referência são comumente usados:

- **North East Down (NED):** O frame NED  $n = (x_n, y_n, z_n)$  é um sistema de referência global inercial fixo na superfície da Terra como ilustra a Figura B.2 e é definido:
  - Com a origem  $o_n$  localizada em um ponto fixo na superfície da Terra especificado por valores constantes de latitude e longitude  $(\lambda, \Phi)$ ;
  - Com o eixo  $x_n$  apontando para o norte;
  - Com o eixo  $y_n$  apontando para o leste; e
  - Com o eixo  $z_n$  apontando em direção ao centro da terra (para baixo).
- **Body-fixed frame:** O *body-fixed* frame, como ilustrado na Figura B.1, é um sistema de coordenadas móvel com origem  $o_b$  fixada no veículo e definido:
  - Com a origem definida pelo engenheiro de controle, que geralmente está localizada no centro geométrico do veículo;
  - Com o eixo  $x_b$  apontando para frente;

- Com o eixo  $y_b$  apontando para a direita; e
- Com o eixo  $z_b$  apontando para baixo.

Figura B.1: Definição do *body-fixed* frame para o BlueROV2 em que a cor vermelha representa o eixo  $x_b$ , a cor verde representa o eixo  $y_b$  e a cor azul representa o eixo  $z_b$ .



Fonte: Autoria própria.

Adicionalmente ao *body-fixed* frame, existem dois sistemas de coordenadas necessários para o desenvolvimento das equações de movimento para veículos subaquáticos. Esses sistemas são: O Centro de gravidade **CG** localizado no ponto  $\mathbf{r}_{bg}^b = [x_g, y_g, z_g]^\top$  em relação à origem  $o_b$ ; e o Centro de flutuabilidade **CO** localizado no ponto  $\mathbf{r}_{bb_o}^b = [x_{b_o}, y_{b_o}, z_{b_o}]^\top$  em relação à origem  $o_b$ . CG é o ponto em que assume-se que a massa total do veículo está concentrada enquanto CO é o ponto em que é assumido que a força de flutuabilidade é aplicada. Em geral, as localizações de CG e CO dependem de ajustes mecânicos, como a inserção de pequenos blocos de chumbos em locais específicos, e das condições da água.

## B.2 COORDENADAS GENERALIZADAS

Para veículos subaquáticos que não estão submetidos a quaisquer restrições de movimento, o número de coordenadas generalizadas independentes será igual ao número de *Degrees of Freedom* (DOF). O termo coordenadas generalizadas refere-se ao conjunto mínimo de coordenadas independentes necessárias para descrever a configuração do veículo. Para veículos subaquáticos, a posição generalizada é dada por

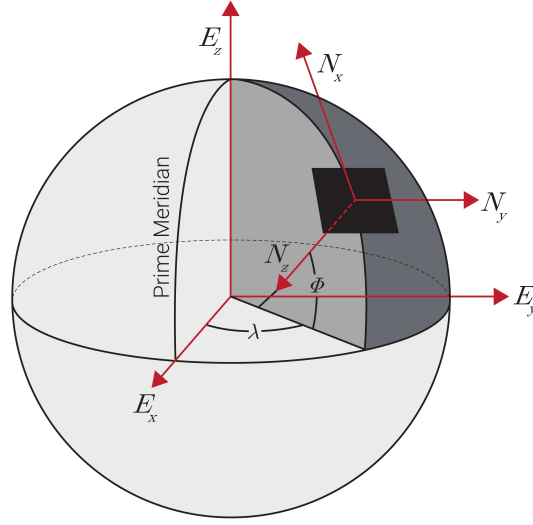
$$\boldsymbol{\eta} = [x^n, y^n, z^n, \phi, \theta, \psi]^\top, \quad (\text{B.1})$$

e a velocidade generalizada é a derivada temporal da Equação (B.1) e definida como

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = [\dot{x}^n, \dot{y}^n, \dot{z}^n, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^\top. \quad (\text{B.2})$$

em que ambas as posições e velocidades generalizadas são expressas em relação ao frame NED. No entanto, para derivar as equações de movimento, é necessário expressar as

Figura B.2: Frame inercial NED.



Fonte: VectorNav (2023)

posições e velocidades generalizadas no frame *body-fixed*. Assim, a velocidade do frame *body-fixed* é

$$\mathbf{v} = [u, v, w, p, q, r]^T, \quad (\text{B.3})$$

em que  $u, v$  e  $w$  são as velocidades lineares ao longo dos eixos  $x_b, y_b$  e  $z_b$ , respectivamente, e  $p, q$  e  $r$  são as velocidades angulares em torno dos eixos  $x_b, y_b$  e  $z_b$ , respectivamente.

A partir destas definições, Fossen (2021b) estabelece as seguintes convenções:

- $\mathbf{p}_{nb}^n \in \mathbb{R}^3$  é a posição de  $o_b$  em relação a  $o_n$  expressa no frame NED  $\{n\}$ ;
- $\mathbf{v}_{nb}^n \in \mathbb{R}^3$  é a velocidade linear de  $o_b$  em relação a  $o_n$  expressa no frame NED  $\{n\}$ ;
- $\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \in \mathbb{R}^3$  é a velocidade angular  $b$  em relação a  $\{n\}$  expressa no frame  $b$ ;
- $\mathbf{f}_b^n \in \mathbb{R}^3$  é a força com linha de atuação passando pelo ponto  $o_n$  e expressa no frame NED  $\{n\}$ ;
- $\mathbf{m}_b^n \in \mathbb{R}^3$  momento em relação ao ponto  $o_n$  expresso no frame NED  $\{n\}$ ;
- $\boldsymbol{\Theta}_{nb} \in \mathbb{T}^3$  ângulos de Euler que descrevem a rotação de  $\{b\}$  para  $\{n\}$ ;

em que  $\mathbb{R}^3$  é o *Espaço Euclidiano* e  $\mathbb{T}^3 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^3$  é o espaço tridimensional definido como o produto cartesiano de três círculos. Os ângulos de Euler estão no intervalo  $[-\pi, \pi)$ .

De acordo com Fossen (2021b), o movimento geral de um veículo subaquático em 6 graus de liberdade (DOFs), assumindo  $o_b$  como origem, é descrito pelo seguintes vetores

de posição, velocidade e força generalizadas:

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{nb}^n \\ \boldsymbol{\Theta}_{nb} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{nb}^n \\ \boldsymbol{\omega}_{nb}^b \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_b^n \\ \mathbf{m}_b^n \end{bmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

em que  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}^3$  denota o vetor de posição e orientação,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^6$  é o vetor de velocidade linear e angular expresso no frame *body-fixed*  $\{b\}$ , e  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^6$  é usado para expressar as força e momentos que atuam no veículo em relação frame *body-fixed*  $\{b\}$ .

### B.3 CINEMÁTICA DE VEÍCULOS SUBAQUÁTICOS

Portanto, as 6 equações cinemáticas de veículos subaquáticos podem ser expressas em forma matricial como

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J}_{\Theta}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_{nb}^n \\ \dot{\boldsymbol{\Theta}}_{nb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\Theta_{nb}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{T}(\Theta_{nb}) \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

em que  $\mathbf{R}_b^n := R_{z,\psi}R_{y,\theta}R_{x,\phi} := \mathbf{R}(\Theta_{nb})$  é a matriz de rotação do frame  $\{b\}$  para o frame  $\{n\}$  definida como

$$\mathbf{R}(\Theta_{nb}) = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & -s\psi c\phi + c\psi s\theta s\phi & s\psi s\phi + c\psi c\phi s\theta \\ s\psi c\theta & c\psi c\phi + s\phi s\theta s\psi & -c\psi s\phi + s\theta s\psi c\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

e  $\mathbf{T}(\Theta_{nb})$  é a matriz de transformação do frame  $\{b\}$  para o frame  $\{n\}$  definida como

$$\mathbf{T}(\Theta_{nb}) = \begin{bmatrix} 1 & s\phi t\theta & c\phi t\theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi/c\theta & c\phi/c\theta \end{bmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

em que  $s \cdot = \sin(\cdot)$ ,  $c \cdot = \cos(\cdot)$ , e  $t \cdot = \tan(\cdot)$ . Note que  $\mathbf{T}(\Theta_{nb})$  é singular quando  $\theta = \pm\pi/2$ . No entanto, essa singularidade não é um problema para *Remotely Operated Vehicle* (ROV)s, pois geralmente essa categoria de veículo não é projetada para operar nessa condição.

### B.4 DINÂMICA DE VEÍCULOS SUBAQUÁTICOS

Assumindo que um veículo subaquático navega em águas calmas, sem estar sujeito aos efeitos de vento, ondas, correntes e sem restrições de movimento (6 DOF), a dinâmica do veículo pode ser descrita pela seguinte equação de movimento expressa em forma vetorial (FOSSEN, 2021a):

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}(\mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{D}(\mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\tau} \quad (\text{B.9})$$

ou

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\mathbf{v})\mathbf{v} - \mathbf{D}(\mathbf{v})\mathbf{v} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})) \quad (\text{B.10})$$

em que:



- $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{RB} + \mathbf{M}_A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  é a matriz de inércia do sistema incluindo a massa do corpo rígido e a massa adicional devido a fenômenos hidrodinâmicos;
- $\mathbf{C}(\mathbf{v}) = \mathbf{C}_{RB}(\mathbf{v}) + \mathbf{C}_A(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  é a matriz de Coriolis e Centrípeta incluindo efeitos da massa de corpo rígido e da massa adicional;
- $\mathbf{D}(\mathbf{v}) = \mathbf{D} + \mathbf{D}_n(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  é a matriz de amortecimento linear e quadrático;
- $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$  é o vetor de forças e momentos oriundos da gravidade e da flutuabilidade do veículo; e
- $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$  é o vetor de entradas de controle.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ÅSTRÖM, K.; MURRAY, R. *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers, Second Edition*. [S.l.]: Princeton University Press, 2020. ISBN 9780691193984.
- BENZON, M. von et al. An open-source benchmark simulator: Control of a bluerov2 underwater robot. *Journal of Marine Science and Engineering*, v. 10, n. 12, 2022. ISSN 2077-1312. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2077-1312/10/12/1898>>.
- BOUOUDEN, S. et al. Constrained model predictive control for time-varying delay systems: Application to an active car suspension. *International Journal of Control, Automation and Systems*, Institute of Control, Robotics and Systems, v. 14, p. 51–58, 2 2016. ISSN 20054092.
- CHEN, C.-T.; PENG, S.-T. Design of a sliding mode control system for chemical processes. *Journal of Process Control*, v. 15, n. 5, p. 515–530, 2005. ISSN 0959-1524. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959152404001179>>.
- CORKE, P. I. *Robotics, Vision & Control: Fundamental Algorithms in MATLAB*. Second. [S.l.]: Springer, 2017. ISBN 978-3-319-54413-7.
- CPPREFERENCE. *Random number generation in C++*. 2024. <<https://en.cppreference.com/w/cpp/numeric/random>>. Accessed: 2024-10-22.
- FOSSSEN, T. *Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control*. Wiley, 2021. ISBN 9781119575030. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=tCQqEAAAQBAJ>>.
- FOSSSEN, T. *Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control*. [S.l.: s.n.], 2021. ISBN 978-1119575047.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; WORKMAN, M. L. *Digital control of dynamic systems*. 3rd. ed. [S.l.]: Addison Wesley Longman, Inc, 1998. 742 p. ISBN 0201820544.
- FRANKLIN, T. S.; ARAÚJO, J. M.; SANTOS, T. L. Receptance-based robust stability criteria for second-order linear systems with time-varying delay and unstructured uncertainties. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 149, p. 107191, 2021. ISSN 0888-3270.
- GABL, R. et al. Hydrodynamic loads on a restrained roV under waves and current. *Ocean Engineering*, Elsevier Ltd, v. 234, 8 2021. ISSN 00298018.

- GU, K.; CHEN, J.; KHARITONOV, V. *Stability of Time-Delay Systems*. USA: Birkhauser Boston, Inc., 2003. ISBN 0817642129.
- JI, J. et al.  $H_2/h_\infty$  networked control for high-speed train with parameter uncertainty and data transmission time-varying delay. p. 4895–4900, 2021.
- KAO, C. Y.; RANTZER, A. Stability analysis of systems with uncertain time-varying delays. *Automatica*, v. 43, n. 6, p. 959–970, 2007. ISSN 00051098.
- KAO CHUNG-YAO; LINCOLN, B. Simple stability criteria for systems with time-varying delays. *Automatica*, Elsevier, v. 40, n. 8, p. 1429–1434, 2004.
- KOTHARE, M. V.; BALAKRISHNANS, V.; MORARIS, M. *Robust Constrained Model Predictive Control using Linear Matrix Inequalities*. 1996. 1361-1379 p.
- LIPENITIS, A.; EINARSSON, E. M. *MPC control for the BlueROV2 - Theory and Implementation*. Dissertação (Mestrado) — Aalborg Universitet, 2020.
- LÖFBERG, J. Yalmip : A toolbox for modeling and optimization in matlab. In: *In Proceedings of the CACSD Conference*. Taipei, Taiwan: [s.n.], 2004.
- LUAN, Z. et al. Trajectory tracking control of autonomous vehicle with random network delay. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, v. 69, n. 8, p. 8140–8150, 2020.
- MACENSKI, S. et al. Robot operating system 2: Design, architecture, and uses in the wild. *Science Robotics*, American Association for the Advancement of Science (AAAS), v. 7, n. 66, may 2022.
- MACIEJOWSKI, J. M. *Predictive Control: with constraints*. [S.l.]: Pearson education, 2002.
- MANZANILLA, A. et al. Autonomous navigation for unmanned underwater vehicles: Real-time experiments using computer vision. *IEEE Robotics and Automation Letters*, v. 4, n. 2, p. 1351–1356, 2019.
- MENESES, M. S.; PEREIRA, B. S. S.; SANTOS, T. L. M. Robust reference tracking control subject to time-varying delay with future reference anticipation. In: *2023 Latin American Robotics Symposium (LARS), 2023 Brazilian Symposium on Robotics (SBR), and 2023 Workshop on Robotics in Education (WRE)*. [S.l.: s.n.], 2023. p. 367–372.
- MENESES, M. S. et al. Uma abordagem simplificada para o controle de sistemas lineares com referências futuras na presença de atraso variável. In: *SOCIEDADE BRASILEIRA DE AUTOMÁTICA*. [S.l.], 2022.
- MORARI, M.; ZAFIRIOU, E. *Robust Process Control*. Prentice Hall, 1989. ISBN 9780137821532. Disponível em: <<https://books.google.ro/books?id=HEcbgfyZEFoC>>.

- NAKIMULI, W. et al. Exploiting radio access information to improve performance of remote-controlled mobile robots in mec-based 5g networks. *Computer Networks*, v. 212, p. 109061, 2022. ISSN 1389-1286. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1389128622002067>>.
- NORMEY-RICO, J. et al. *Controle preditivo baseado em modelo-Caso monovariável linear*. [S.l.: s.n.], 2024.
- NORMEY-RICO, J. E.; CAMACHO, E. F. Dead-time compensators: A survey. *Control Engineering Practice*, v. 16, p. 407–428, 2008. ISSN 09670661.
- OLIVEIRA, M. C. D.; GEROMEL, J. C.; BERNUSSOU, J. Extended  $h_2$  and  $h_\infty$  norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems. *International Journal of Control*, v. 75, p. 666–679, 6 2002. ISSN 00207179.
- ROBOTICS, B. *BlueROV2*. 2023. Disponível em: <<https://bluerobotics.com/store/rov/bluerov2/>>.
- SANKARANARAYANAN, V. N.; SATPUTE, S.; NIKOLAKOPOULOS, G. Adaptive robust control for quadrotors with unknown time-varying delays and uncertainties in dynamics. *Drones*, v. 6, n. 9, 2022. ISSN 2504-446X. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2504-446X/6/9/220>>.
- SANTOS, J. et al. Remote control of an omnidirectional mobile robot with time-varying delay and noise attenuation. *Mechatronics*, v. 52, p. 7–21, 2018. ISSN 0957-4158.
- SOBRINHO, J. C. L. B. et al. Design and implementation of model-predictive control with friction compensation on an omnidirectional mobile robot. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, v. 19, n. 2, p. 467–476, 2014.
- SURYENDU, C.; SUBUDHI, B. Formation control of multiple autonomous underwater vehicles under communication delays. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, v. 67, n. 12, p. 3182–3186, 2020.
- TOSCANO, R. *Structured Controllers for Uncertain Systems*. Springer London, 2013. ISBN 978-1-4471-5187-6. Disponível em: <<https://link.springer.com/10.1007/978-1-4471-5188-3>>.
- TÜTÜNCÜ, R.; TOH, K.-C.; TODD, M. Solving semidefinite-quadratic-linear programs using sdpt3. *Mathematical Programming, Series B*, v. 95, p. 189–217, 02 2003.
- VECTORNAV. *Inertial navigation primer*. 2023. Accessed on: October 3, 2023. Disponível em: <<https://www.vectornav.com/resources/inertial-navigation-primer/math-fundamentals/math-refframes>>.
- WAN, L.; PAN, Y.-J. Bilateral teleoperation of a multi-robot formation with time-varying delays using adaptive impedance control. In: *2022 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*. [S.l.: s.n.], 2022. p. 1739–1746.

WANG, L. *Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB*. 1st. ed. [S.l.]: Springer Publishing Company, Incorporated, 2009. ISBN 1848823304.

YAN, J. et al. Position tracking control of remotely operated underwater vehicles with communication delay. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 28, n. 6, p. 2506–2514, 2020.

ZENG, H.-B. et al. Delay-dependent stability analysis of load frequency control systems with electric vehicles. *IEEE Transactions on Cybernetics*, v. 52, n. 12, p. 13645–13653, 2022.

ZHANG, H. et al. Adaptive finite-time control scheme for teleoperation with time-varying delay and uncertainties. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, v. 52, n. 3, p. 1552–1566, 2022.