



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

ESCOLA POLITÉCNICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

NOVAS ESTRATÉGIAS DE CONTROLE PREDITIVO
COM DESACOPLAMENTO

RODRIGO GALVÃO DE SOUZA CÂMARA

Salvador - BA, 2024



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

ESCOLA POLITÉCNICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

NOVAS ESTRATÉGIAS DE CONTROLE PREDITIVO COM DESACOPLAMENTO

RODRIGO GALVÃO DE SOUZA CÂMARA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE) da Universidade Federal da Bahia para a obtenção do título de **Mestre em Engenharia Elétrica**, orientado pelo Prof. Dr. Tito Luís Maia Santos.

Salvador - BA

2024

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Bernadete
Sinay Neves, Escola Politécnica – UFBA.

C173	Câmara, Rodrigo Galvão de Souza. Novas estratégias de controle preditivo com desacoplamento / Rodrigo Galvão de Souza Câmara. – Salvador, 2024. 117f.: il. color. Orientador: Prof. Dr. Tito Luís Maia Santos. Dissertação (mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Escola Politécnica, Universidade Federal da Bahia, 2024. 1. Controle preditivo. 2. Sistemas multivariáveis. 3. Desacoplador. I. Santos, Tito Luís Maia. II. Universidade Federal da Bahia. III. Título. CDD: 621.317
------	--

NOVAS ESTRATÉGIAS DE CONTROLE PREDITIVO COM DESACOPLAMENTO

RODRIGO GALVÃO DE SOUZA CÂMARA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Escola Politécnica, Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Banca examinadora da dissertação

Documento assinado digitalmente
 TITO LUIS MAIA SANTOS
Data: 20/12/2024 15:48:07-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Tito Luís Maia Santos

Universidade Federal da Bahia - Orientador


Prof. Dr. Andre Gustavo Scolari Conceição

Universidade Federal da Bahia - Membro interno

Documento assinado digitalmente
 FABRICIO GONZALEZ NOGUEIRA
Data: 20/12/2024 11:47:50-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira

Universidade Federal do Ceará - Membro externo

Salvador - BA, 12 de Dezembro de 2024

Para minha mãe, Edelvira.

Agradecimentos

A minha mãe, pelo amor, cuidado e dedicação.

A minha irmã, pelo companheirismo e apoio.

A Juliana pela companhia e apoio durante este percurso.

A PVC que me ensinou, ainda me ensina e continua aprendendo a fazer engenharia na prática.

Ao Prof. Dr. Tito, meu orientador, pela ajuda e incentivo na jornada e, principalmente, por desmitificar a área de Controle e reacender o interesse pela área acadêmica.

Resumo

Neste trabalho será proposto um conjunto de estratégias considerando uma representação aumentada em espaço de estados na implementação de controladores preditivos baseados em modelo para permitir o uso de desacopladores com a garantia de estabilidade e robustez em sistemas lineares multivariáveis com restrições. A nova formulação é genérica podendo ser utilizada com diversos desacopladores aplicáveis ao processo e variadas estratégias de controladores preditivos. Será apresentado um levantamento inicial da literatura na área de pesquisa com o objetivo de dar embasamento para a formalização da prova de estabilidade e robustez para o controlador preditivo utilizando a representação proposta e os resultados serão apresentados através de estudos de caso de simulação. A principal contribuição decorre da obtenção de respostas desacopladas com garantias de estabilidade e robustez.

Palavras-chave: Controle preditivo, desacoplamento, sistemas multivariáveis, estabilidade, robustez.

Abstract

This work will propose a set of strategies based on augmented representation in state space during the implementing model-based predictive controller to enable the use of decoupler with the guarantee of stability and robustness in constrained multivariable linear systems. The new formulation is general and can be used with many decouplers that applicable to the process and many predictive controller strategies. A initial literature review will be carried out with the objective of providing a basis for formalization of the proof of stability and robustness for the predictive controller using the proposed representation and the results will be presented through simulation study cases. The main contribution comes from obtaining decoupled responses with guarantees of stability and robustness.

Keywords: Predictive control, decoupling, multivariable systems, stability, robustness.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação ilustrativa de um desacoplador	22
Figura 2 – Desacoplador ideal	23
Figura 3 – Desacoplador simplificado	24
Figura 4 – Desacoplador invertido	25
Figura 5 – Estrutura básica de um MPC	26
Figura 6 – Ilustração do conceito de horizonte deslizante	27
Figura 7 – Horizontes finitos e infinitos (modelo perfeito e sem perturbação)	35
Figura 8 – Comparação das respostas do sistema de quatro tanques com e sem desacoplador.	65
Figura 9 – Respostas da saída e do controle com um MPC robusto padrão e o MPC robusto proposto com desacoplador explícito - caso de estudo do tanque quadruplo.	75
Figura 10 – Perturbação aditiva (w_k) obtida do modelo de predição linear: superior - sem desacoplamento, inferior - com desacoplamento.	76
Figura 11 – Respostas da saída e de controle com um MPC robusto padrão e o MPC robusto proposto com desacoplador explícito na presença de ruído de medição - caso de estudo do tanque quadruplo.	76
Figura 12 – Perturbação aditiva (w_k) obtida do modelo de predição linear na presença de ruído de medição: superior - sem desacoplamento, inferior - com desacoplamento.	76
Figura 13 – Resposta da saída e do controle com um MPC robusto padrão e o MPC robusto proposto com desacoplador explícito - caso de estudo CSTR.	79
Figura 14 – Resposta da saída e do controle com um MPC robusto padrão e o MPC robusto proposto com desacoplador explícito na presença de ruído de medição - caso de estudo CSTR.	80
Figura 15 – Perturbações aditivas (w_k) obtidas do modelo de predição linear: superior - sem ruído de medição, inferior - com ruído de medição.	81
Figura 16 – Ponto de equilíbrio estável no sentido de Lyapunov (sistema autônomo)	97
Figura 17 – Ponto de equilíbrio assintoticamente estável no sentido de Lyapunov (sistema autônomo)	97

Lista de tabelas

Tabela 1 – Parâmetros do modelo dos tanques interconectados.	64
--	----

Lista de abreviaturas e siglas

CSTR – do inglês *Continuous Stirred Tank Reactor*

MIMO – do inglês *Multiple-Input and Multiple-Output*

SISO – do inglês *Single-Input and Single-Output*

MPC – do inglês *Model-based Predictive Control*

TITO – do inglês *Two Input and Two Output*

FOPTD – do inglês *First-Order plus Time Delay*

MPC – do inglês *Model Predictive Control*

MAC – do inglês *Model Algorithmic Control*

IDCOM – do inglês *Identification and Command*

IDCOM-M – do inglês *Identification and Command - Multivariable*

DMC – do inglês *Dynamic Matrix Control*

QDMC – do inglês *Quadratic Dynamic Matrix Control*

GPC – do inglês *Generalized predictive control*

CARMA – do inglês *Controller Auto-Regressive Moving-Average*

CARIMA – do inglês *Controller Auto-Regressive Integrated Moving-Average*

LQR – do inglês *Linear-Quadratic Regulator*

LQG – do inglês *Linear-Quadratic Gaussian*

RMPC – do inglês *Robust Model Predictive Control*

MRPI – do inglês *Minimal Robust Positively Invariant*

CSTR – do inglês *Continuous Stirred Tank Reactor*

LIT – linearmente invariante no tempo

Lista de símbolos

s	Variável complexa utilizada na Transformada de Laplace
$F(s)$	Função de transferência
$\mathbf{F}(s)$	Matriz de transferência de dimensões apropriadas
$x(k)$ ou x_k	Vetor de dimensões apropriadas
\mathbf{A}	Matriz de dimensões apropriadas
\mathbf{A}^\top	Transposta da matriz \mathbf{A}
\mathbf{I}	Matriz identidade de dimensões apropriadas
$\mathbf{0}$	Matriz de dimensões apropriadas com todos os elementos iguais a zero
z^{-1}	Operador de atraso discreto (<i>backward-shift operator</i>)
Δ	Operador de incremento ($\Delta = 1 - z^{-1}$)
$\mathbf{F}(z^{-1})$	Matriz de transferência pulsada com dimensões apropriadas
$x_{k+j k}$	Valor esperado de $x(k+j)$ com as informações disponíveis no instante k
\Re	Conjunto dos números reais
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais
\mathbb{Z}	Conjunto dos números inteiros

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Revisão Bibliográfica	17
1.2	Motivação	19
1.3	Objetivos	19
1.3.1	Objetivos Específicos	20
1.4	Estrutura da Dissertação de Mestrado	20
1.5	Trabalhos Desenvolvidos	21
1.5.1	Conferência aceita	21
1.5.2	Periódico aceito	21
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	22
2.1	Desacopladores para sistemas multivariáveis	22
2.1.1	Desacoplador ideal	23
2.1.2	Desacoplador simplificado	24
2.1.3	Desacoplador invertido	24
2.1.4	Outros métodos de desacoplamento	25
2.2	Controladores Preditivos baseados em Modelo - MPC	26
2.2.1	O problema de controle para um MPC	27
2.2.2	Exemplos de controladores preditivos	30
2.2.2.1	<i>Model Algorithmic Control - MAC</i>	30
2.2.2.2	<i>Dynamic Matrix Control - DMC</i>	31
2.2.2.3	<i>Generalized predictive control - GPC</i>	32
2.2.2.4	Controle preditivo com abordagem em espaço de estados	32
2.2.2.5	Controlador preditivo baseado em modelo de velocidade	33
2.3	Controladores Preditivos Regulatórios com Garantia de Estabilidade	34
2.3.1	Otimidade não garante estabilidade	34
2.3.2	MPC regulatório com garantia de estabilidade para sistemas lineares com restrições	36
2.4	Controladores Preditivos para Seguimento de Referência com Garantia de Estabilidade	41
2.4.1	MPC para seguimento de referência com garantia de estabilidade para sistemas lineares com restrições	42
2.5	Controladores Preditivos Robustos para Seguimento de Referência com Garantia de Estabilidade	47

2.5.1	Restrições robustas	48
2.5.2	MPC robusto para seguimento de referência com garantia de estabilidade para sistemas lineares com restrições	49
3	REPRESENTAÇÃO AUMENTADA COM DESACOPLADOS	53
3.1	Definição do problema	53
3.1.1	Otimidade não garante desacoplamento	54
3.1.2	Desacoplamento para casos sem restrição	54
3.2	Representação de desacopladores por equação de estados	54
3.3	Representação aumentada com desacopladores	56
4	CONTROLE PREDITIVO DESACOPLADO COM GARANTIA DE ESTABILIDADE	59
4.1	Modelo de velocidade para a representação aumentada desacoplada	59
4.2	Ingredientes estabilizantes	60
4.2.1	MPC regulatório desacoplado com garantia de estabilidade para sistemas lineares com restrições	61
4.3	Estudo de caso	63
5	CONTROLE PREDITIVO ROBUSTO COM DESACOPLAMENTO	67
5.1	Modelo de predição	67
5.2	Parametrização dos pontos de equilíbrio	67
5.3	Restrições robustas	68
5.4	MPC robusto e desacoplado para seguimento de referência com garantia de estabilidade para sistemas lineares com restrições	69
5.5	Correção da referência com perturbações constantes - MPC Desacoplado	71
5.6	Casos de estudo	73
5.6.1	Tanque quádruplo	74
5.6.2	Caso do reator de tanque com agitação contínua (CSTR, do inglês <i>Continuous Stirred Tank Reactor</i>)	77
6	CONCLUSÃO	82
	REFERÊNCIAS	84

	APÊNDICES	89
	APÊNDICE A – CONCEITOS PRELIMINARES	90
A.1	Álgebra Linear	90
A.2	Teoria de controle	90
A.3	Teoria dos conjuntos	92
A.4	Funções	96
A.5	Estabilidade segundo Lyapunov	96
	APÊNDICE B – MÁXIMO CONJUNTO ADMISSÍVEL	99
B.1	Finitude de \mathcal{O}_∞	100
B.2	Determinação de \mathcal{O}_∞	100
B.3	Aproximação de \mathcal{O}_∞	101
B.4	Caso para modelo com representação aumentada devido a inclusão da dinâmica do desacoplador	102
	APÊNDICE C – MÁXIMO CONJUNTO INVARIANTE AD- MISSÍVEL PARA SEGUIMENTO DE RE- FERÊNCIA	104
	APÊNDICE D – DETERMINAÇÃO DO CONJUNTO DE EQUILÍBRIOS ADMISSÍVEIS	106
D.1	Caso para modelo com representação aumentada devido a inclusão da dinâmica do desacoplador	107
	APÊNDICE E – DETERMINAÇÃO DO CONJUNTO TER- MINAL INVARIANTE ROBUSTO	109
E.1	Caso para modelo com representação aumentada devido a inclusão da dinâmica do desacoplador	110
	APÊNDICE F – FACTIBILIDADE RECURSIVA E CONVER- GÊNCIA	111
F.1	Factibilidade recursiva	111
F.1.1	Análise da convergência	113
F.1.1.1	Limite no erro do seguimento a referência artificial	115

1 Introdução

A maioria dos sistemas de controle industriais são sistemas multivariáveis, ou sistemas MIMO (do inglês *Multiple-Input and Multiple-Output*), como são popularmente conhecidos, e um dos problemas mais importantes para o controle desses sistemas é o problema de acoplamento (LIU L.; ZHANG, 2019). Conforme definição de (WANG, 2003), desacoplamento é a simplificação de um sistema multivariável em um número de sistemas monovariáveis (ou SISO, do inglês *Single-Input and Single-Output*) sem acoplamentos cruzados entre eles. Esta definição apresenta as duas justificativas principais para o uso de desacopladores em projetos de sistemas de controle:

1. **Facilitar o projeto dos controladores.** Ao se considerar múltiplos sistemas monovariáveis em substituição a um sistema multivariável, a sintonia dos controladores torna-se mais fácil, uma vez que, em geral, os projetos de controladores monovariáveis são mais simples.
2. **Evitar que a variação no *set point* de uma variável de processo interfira em outras variáveis.** Com a existência do acoplamento, ao se ajustar os parâmetros do controlador para alterar a performance em uma variável de processo, a mudança na variável manipulada pode afetar a performance de outra malha levando-a para um valor indesejado, inclusive, podendo ocasionar a instabilidade do sistema.

Como enfatizado por Wang (2003), a popularidade do controle com desacoplamento não tem como principal causa a capacidade de simplificação do projeto do sistema de controle multivariável, e sim a necessidade de variação do *set point* de uma variável de processo sem interferência nas demais variáveis do sistema. Ainda em seu livro, Wang cita como exemplo de uma dessas aplicações as aeronaves de decolagem vertical. Neste sistema as saídas de interesse são o ângulo de inclinação, a posição horizontal e a altitude, e as variáveis de controle consistem de três diferentes turbinas. Como as variáveis são acopladas, o piloto deve adquirir uma habilidade considerável de forma a manipular simultaneamente todas as turbinas e conseguir controlar com sucesso a aeronave. Caso haja um desacoplamento, o piloto passará a ter três subsistemas independentes e estáveis para controlar o ângulo de inclinação, a posição horizontal e a altitude, tornando a operação muito mais simples e segura.

O Controle Preditivo, ou Controle Preditivo baseado em Modelo (MPC, do inglês *Model-based Predictive Control*), é uma técnica de controle avançado largamente difundida

e que possui impacto significativo no controle de processos industriais. A boa aceitação na indústria se deve a facilidade no entendimento de sua ideia básica, a capacidade inerente em sua formulação para aplicações em plantas multivariáveis e, principalmente, pelo enorme potencial em trabalhar com restrições (MACIEJOWSKI, 2001). Em seu livro, Camacho e Bordons (1999), atribuem este sucesso ao fato de que o MPC é, talvez, o método mais genérico para tratar do problema do controle de processo no domínio do tempo.

Por possuir uma capacidade inerente para trabalho com sistemas multivariáveis, o uso de desacopladores em controladores MPC com o objetivo de simplificação de projeto não é justificável. O problema de acoplamento em controladores MPC ganha destaque na literatura devido ao fato de que, conforme analisado por Dworak P. e Ghosh (2019), apesar da lei de controle para o MPC ser obtida através da resolução de um problema de otimização, o desacoplamento perfeito não é garantido. A interação entre entradas-saídas só podem ser reduzidas através de modificações dos parâmetros de critério, dos pesos da função objetivo e/ou das restrições consideradas. Ou seja, apesar de ser um controlador ótimo, o MPC não garante desacoplamento do processo.

1.1 Revisão Bibliográfica

O desenvolvimento tecnológico dos últimos anos tem aumentado a possibilidade de uso dos controladores MPC, que se apresentam como solução ideal para o problema de controle em plantas MIMO. Portanto, já é possível encontrar alguns trabalhos sobre desacoplamento dinâmico com este tipo de controlador na literatura. A maioria dos trabalhos, como pode ser visto em (ZERMANI M.A.; MAMI, 2012a), (ZERMANI M.A.; MAMI, 2012b), (ZABET; HABER, 2011) e (PEREIRA; FLESCHE, 2020b), sugere o desacoplamento através da variação dos pesos do erro na função custo, seja considerando uma variação a partir de condicionantes (como a troca de referência de alguma saída ou a transferência de alguma malha para operação em manual) ou considerando os pesos como uma função variante no tempo. A ideia é que quando ocorra a variação do valor de referência para uma das saídas, o peso na função custo, relacionado ao erro das outras saídas seja aumentado. Apesar de apresentarem resultados positivos, este método não faz uso de um desacoplador propriamente dito. Trata-se, na verdade, de uma sintonia do controlador MPC em que o sinal de controle ótimo é obtido através da minimização de uma função custo que prioriza a minimização do erro das saídas cuja referências permanecem constantes. Uma desvantagem deste método advém do fato de que uma mudança de sintonia do controlador poderá acarretar em perda na capacidade de desacoplamento na medida que o conceito depende de uma ponderação do erro suficientemente elevada, que é variável de acordo com os parâmetros de sintonia do MPC, como por exemplo o horizonte

de predição.

Em (SCHMITZ U.; BARS, 2007), além do uso da técnica de variação de pesos da função custo, é sugerida uma desaceleração do sinal de referência através da utilização de um filtro de primeira ordem. Porém, com este método, o autor deixa de fazer uso de todo o potencial do ponto de vista da otimalidade que o controlador preditivo pode proporcionar. Se não houver nenhuma restrição no processo para que a mudança de referência ocorra de forma brusca, então o ideal é que o controle ótimo seja obtido tentando alcançar este tipo de mudança. Caso contrário, o sistema deixa de ter uma resposta ótima, ainda que sem eliminar completamente o efeito do acoplamento, para ter uma resposta não ótima e que pode afetar significativamente sua performance. Isso pode ser verificado no próprio trabalho citado, ao se comparar as respostas do controlador MPC com uso de referência filtrada com o MPC que utiliza a variação de pesos da função custo. No primeiro caso, a resposta foi muito mais lenta que no segundo.

Outro método, encontrado na literatura (SANIYE; SULEYMAN, 2011) e (DWORKAK P.; GHOSH, 2019), considera restrições nas saídas em que não houve mudança de referência. Esta técnica apresenta vantagens em relação as anteriores: é mais intuitiva, evita problemas com troca dos valores dos pesos da função custo e não exclui os pesos como fatores de sintonia e nem altera o formato do sinal de referência (DWORKAK P.; GHOSH, 2019). Porém a proposta inclui restrições que não existiam inicialmente no sistema, podendo alterar significativamente o problema de controle original.

Já a proposta apresentada por Middleton e Adams (2008) faz uso de um desacoplador para sistemas MIMO com representação por espaço de estados. É considerado o desacoplador por realimentação de estados proposto por Falb e Wolovich (1967) com modificações na função custo dos controladores preditivos clássicos. O trabalho apresentou resultados positivos, inclusive para sistemas com zero de fase não-mínima, mas a alteração na função custo do controlador preditivo exige uma comprovação de estabilidade e robustez que não foi apresentada pelo trabalho.

Em Lima e Santos (2013), foi mostrado que o uso de desacopladores externos em conjunto com um controlador MPC baseado no modelo desacoplado com garantias de estabilidade impostas por Mayne D.Q. e Scokaert (2000), permite a estabilidade do sistema. O desacoplador externo tem o intuito de eliminar ou reduzir a interação cruzada, ao passo que o controlador MPC pode ser utilizado para lidar com dinâmicas complexas a exemplo de processo com atraso, sistemas de fase não-mínima e processos com referências futuras conhecidas (LIMA; SANTOS, 2013). Porém o trabalho tratou apenas dos casos sem restrições. Em Zhang e Gao (2015), foi apresentado um MPC com critérios para garantia de estabilidade e robustez, porém somente para o caso sem restrições e sob um

determinado conjunto de condições.

Há ainda trabalhos como Straßberger D. e Sergiyenko (2015) que aplicam a abordagem geométrica de desacoplamento para os controladores MPC. E outros que utilizam de redes neurais com função custo dinâmica (PEREIRA; FLESCHE, 2020a; QIN; ZHU; CHAI, 1996; ZHU; QIN; CHAI, 1999).

A maior parte destes trabalhos não considera formulações MPC com garantias de estabilidade e o problema de estabilidade robusta na presença de restrições não foi considerado.

1.2 Motivação

Nas seções anteriores foi visto que a maioria dos sistemas de controle são para sistemas MIMO e a importância do desacoplamento para estes sistemas. Foi indicado o crescimento de utilização de controles preditivos, devido ao avanço da tecnologia, e que, apesar de ser um controle ótimo, o MPC não garante o desacoplamento perfeito.

Os trabalhos existentes que tratam do problema de desacoplamento em controladores preditivos, em sua maioria, propõem soluções baseadas em alterações de parâmetros de sintonia do controlador sem uma garantia formal de desacoplamento. Trabalhos que, de fato utilizam desacopladores, em sua maioria o fazem alterando a função custo do controlador preditivo sem uma demonstração de garantia de estabilidade ou robustez. Em (LIMA; SANTOS, 2013), há uma comprovação de estabilidade nominal (caso sem restrição), mas sem uma garantia de robustez. Nesse contexto, a combinação de estratégias MPC com desacoplamento, satisfação robusta de restrições e garantias de estabilidade robusta merecem uma atenção particular.

1.3 Objetivos

O objetivo deste trabalho é propor uma formulação MPC baseada numa representação aumentada que permita alcançar as condições para desacoplamento com garantias de estabilidade e robustez. A representação utilizada será por abordagem em espaço de estados através do uso de uma representação ampliada em que considera a inclusão da dinâmica do desacoplador no modelo utilizado para implementação do controlador MPC. Desta forma, será apresentada uma estratégia genérica, que pode ser aplicada em

algoritmos padrões de controladores preditivos e assim, a estabilidade e robustez podem ser garantidas, conforme trabalhos anteriores.

1.3.1 Objetivos Específicos

Para alcançar o objetivo principal deste trabalho, estão previstas as seguintes etapas:

- Proposição de uma representação de espaço de estados ampliados;
- Formalização de condições suficientes que garantam uma resposta desacoplada por meio de controladores preditivos lineares com desacopladores;
- Proposição de algoritmos de controladores preditivos desacoplados baseados na representação aumentada com garantias de estabilidade;
- Proposição de algoritmos de controladores preditivos desacoplados baseados na representação aumentada com garantias de robustez entrada-estado;
- Realização de análise comparativa por meio de estudos de casos simulados.

1.4 Estrutura da Dissertação de Mestrado

A estrutura desse projeto de dissertação está organizada conforme abaixo:

- No Capítulo 2 será apresentada a fundamentação teórica que sustenta a proposta deste trabalho;
- O Capítulo 3 apresenta a proposta para a representação aumentada do modelo da planta desacoplada;
- A utilização da representação aumentada é aplicada em um algoritmo MPC com garantia de estabilidade e os resultados obtidos por simulações computacionais são apresentados no Capítulo 4;
- No Capítulo 5 é apresentada a aplicação da representação proposta para uma estratégia de MPC para seguimento de referência com garantia de estabilidade e robustez, incluindo os resultados obtidos por simulações computacionais;
- E por fim, o Capítulo 6 apresenta os comentários finais.

1.5 Trabalhos Desenvolvidos

A seguir são apresentadas as publicações desenvolvidas como decorrência das atividades relacionadas a esta dissertação.

1.5.1 Conferência aceita

(Rodrigo G. de S. Câmara and Tito L. M. Santos). Uma representação aumentada voltada ao Controle Preditivo com desacopladores. In *XXIV Congresso Brasileiro de Automática*, 3(1):3178-3184, 2022.

1.5.2 Periódico aceito

(Rodrigo G. de S. Câmara and Tito L. M. Santos). Robust decoupling MPC for linear systems with bounded disturbances. *ISA Transactions*, 139:1-12, 2023.

2 Fundamentação Teórica

Neste capítulo será apresentado o arcabouço teórico necessário para um melhor entendimento do trabalho desta dissertação. Alguns conceitos preliminares citados neste capítulo podem ser encontrados no Apêndice A.

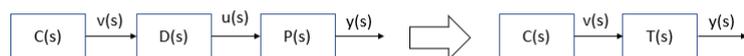
2.1 Desacopladores para sistemas multivariáveis

Este trabalho não tem como objetivo apresentar um novo modelo de desacoplador ou se aprofundar no estudo de algum modelo específico existente na literatura. Conforme descrito na Seção 1.3, o objetivo do trabalho é apresentar uma nova representação aumentada em espaço de estados, que inclui os estados do desacoplador aos estados do processo, de forma a permitir a implementação de técnicas de controle MPC já conhecidas, mas sem acoplamento cruzado. Desta forma, diversos desacopladores poderão ser utilizados desde que seja adequado para o processo que se deseja controlar e que possa ser representado por espaço de estados, podendo, inclusive, utilizar-se de uma representação mínima, pois não existe a necessidade de estados observáveis.

Nas simulações serão considerados um ou mais dos métodos de desacoplamento conhecidos como simplificado, ideal ou invertido, brevemente descritos nas próximas seções.

Os três métodos citados apresentam o mesmo conceito: considerando a matriz de transferência que representa a dinâmica da planta como $\mathbf{P}(s)$, o objetivo é projetar uma matriz de transferência $\mathbf{D}(s)$, tal que $\mathbf{P}(s)\mathbf{D}(s)$ seja uma matriz de transferência diagonal $\mathbf{T}(s)$. A Figura 1 ilustra este conceito e as Equações (2.1) e (2.2) apresentam um exemplo para o caso de um processo com duas entradas e duas saídas (TITO, do inglês *Two Input and Two Output*).

Figura 1 – Representação ilustrativa de um desacoplador



Fonte: Elaborada pelo autor

$$\mathbf{P}(s)\mathbf{D}(s) = \mathbf{T}(s), \quad \text{tal que} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}(s) = \begin{bmatrix} D_{11}(s) & D_{12}(s) \\ D_{21}(s) & D_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}(s) = \begin{bmatrix} T_{11}(s) & 0 \\ 0 & T_{22}(s) \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Substituindo a Equação (2.2) em (2.1), temos:

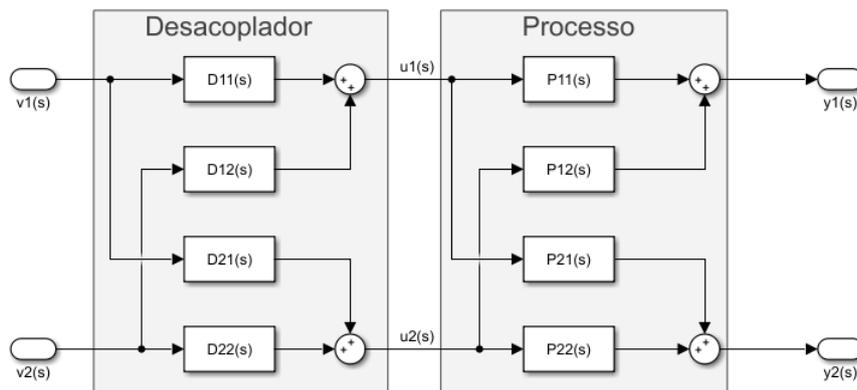
$$\begin{aligned} \mathbf{D}(s) &= \mathbf{P}(s)^{-1}\mathbf{T}(s) \\ &= \frac{1}{P_{11}(s)P_{22}(s)-P_{12}(s)P_{21}(s)} \begin{bmatrix} P_{22}(s)T_{11}(s) & -P_{12}(s)T_{22}(s) \\ -P_{21}(s)T_{11}(s) & P_{11}(s)T_{22}(s) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Como os elementos $P_{11}(s)$, $P_{12}(s)$, $P_{21}(s)$ e $P_{22}(s)$ representam as funções de transferência do processo, são supostamente conhecidos. Os únicos elementos desconhecidos são $T_{11}(s)$ e $T_{22}(s)$, que representam a dinâmica desejada para o sistema desacoplado.

2.1.1 Desacoplador ideal

A técnica chamada de desacoplamento ideal em (LUYBEN, 1970 apud GAGNON E.; DESBIENS, 1998), considera a escolha de $\mathbf{T}(s)$ como $T_{11}(s) = P_{11}(s)$ e $T_{22}(s) = P_{22}(s)$, na Equação (2.3). A desvantagem desta técnica é que, geralmente, resulta em expressões complicadas para $\mathbf{D}(s)$, o que pode dificultar sua realização (GAGNON E.; DESBIENS, 1998). A Figura 2 ilustra este tipo de desacoplamento.

Figura 2 – Desacoplador ideal



Fonte: Elaborada pelo autor

2.1.2 Desacoplador simplificado

A técnica conhecida como desacoplamento simplificado (LUYBEN, 1970 apud GAGNON E.; DESBIENS, 1998) é largamente utilizada na literatura e consiste na escolha da matriz de transferência do desacoplador como

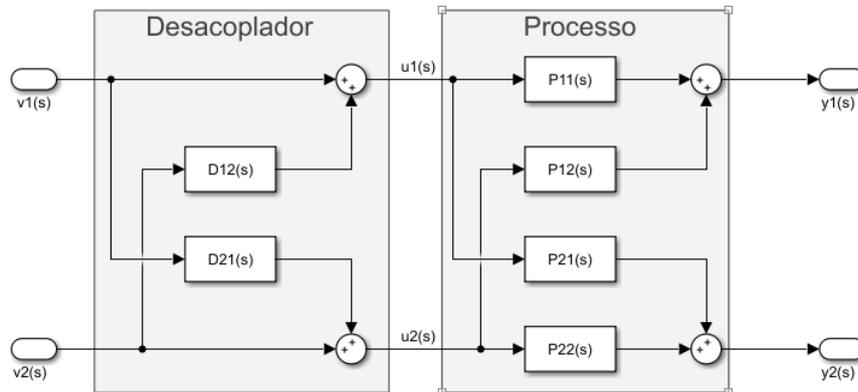
$$\mathbf{D}(s) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{P_{12}(s)}{P_{11}(s)} \\ -\frac{P_{21}(s)}{P_{22}(s)} & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

resultando em uma matriz de transferência $\mathbf{T}(s)$ conforme a seguir

$$\mathbf{T}(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) - \frac{P_{12}(s)P_{21}(s)}{P_{22}(s)} & 0 \\ 0 & P_{22}(s) - \frac{P_{12}(s)P_{21}(s)}{P_{11}(s)} \end{bmatrix}.$$

Esta escolha torna a realização do desacoplador mais fácil porém a matriz de transferência $\mathbf{T}(s)$ obtida é mais complexa contendo elementos com soma de funções de transferência, o que, em geral, torna mais complicada a sintonia dos controladores (GAGNON E.; DESBIENS, 1998). Esta técnica é apresentada na Figura 3.

Figura 3 – Desacoplador simplificado

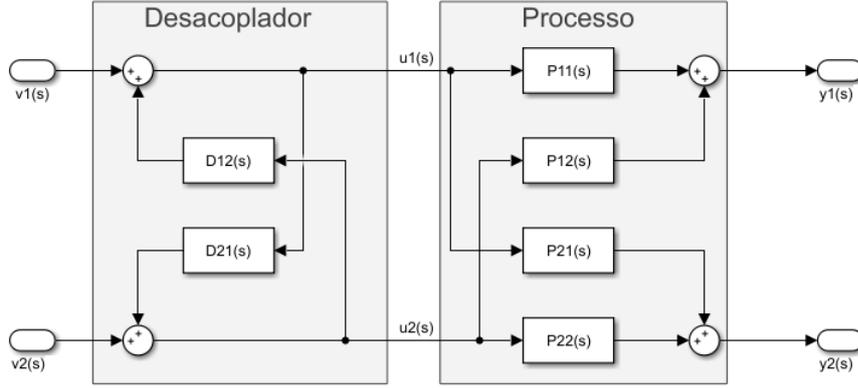


Fonte: Elaborada pelo autor

2.1.3 Desacoplador invertido

Na técnica apresentada por Shinskey (1996), conhecida como desacoplamento invertido, utiliza-se a mesma matriz de transferência do desacoplador simplificado, porém com modificações na estrutura de interligação do desacoplador com o processo, conforme mostra a Figura 4, que fazem com que a matriz de transferência $\mathbf{T}(s)$ obtida seja igual a do desacoplador ideal, combinando portanto, as vantagens dos dois tipos anteriores de desacoplamento.

Figura 4 – Desacoplador invertido



Fonte: Elaborada pelo autor

Foram sugeridas várias técnicas para a obtenção de um desacoplador invertido, como as apresentadas em (SHINSKEY, 1996; WANG; HUANG; GUO, 2000). Para exemplificar este tipo de desacoplador, considere a técnica apresentada em (WANG; HUANG; GUO, 2000) que obtém o desacoplador utilizando-se de uma aproximação do processo por um modelo do tipo FOPTD (do inglês *First-Order plus Time Delay*), obtido da resposta ao degrau. Neste modelo, $\mathbf{P}(s)$ é aproximado por $\hat{\mathbf{P}}(s)$ tal que

$$\hat{\mathbf{P}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{K_{11}}{\tau_{11}s+1} e^{-sL_{11}} & \frac{K_{12}}{\tau_{12}s+1} e^{-sL_{12}} \\ \frac{K_{12}}{\tau_{12}s+1} e^{-sL_{12}} & \frac{K_{22}}{\tau_{22}s+1} e^{-sL_{22}} \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

sendo K_{ij} , τ_{ij} e L_{ij} , respectivamente, o ganho, a constante de tempo e o atraso de P_{ij} .

O desacoplador invertido é definido considerando a mesma estrutura do desacoplador simplificado, dada pela Equação (2.4), com

$$-\frac{P_{12}(s)}{P_{11}(s)} = -\frac{K_{12}(\tau_{11}s+1)}{K_{11}(\tau_{12}s+1)} e^{-v\tau_{d12}s}, \quad (2.6)$$

$$-\frac{P_{21}(s)}{P_{22}(s)} = -\frac{K_{21}(\tau_{22}s+1)}{K_{22}(\tau_{21}s+1)} e^{-v\tau_{d21}s}, \quad (2.7)$$

com $\tau_{d12} = L_{12} - L_{11}$, $\tau_{d21} = L_{21} - L_{22}$ e $v(L) = \begin{cases} 1, & \text{se } \tau_{dij} \geq 0 \\ 0, & \text{se } \tau_{dij} < 0 \end{cases}$.

2.1.4 Outros métodos de desacoplamento

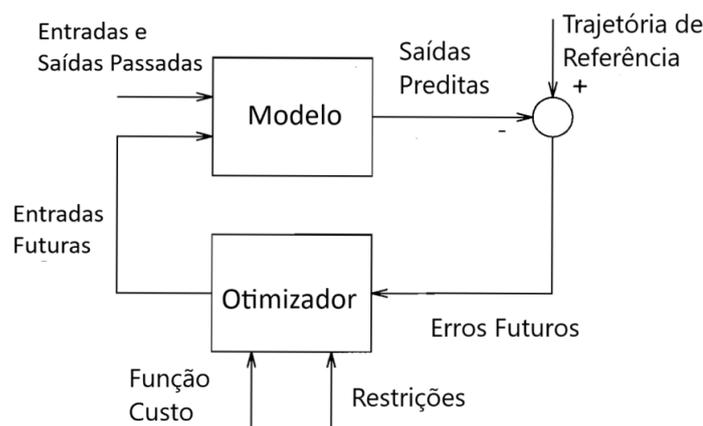
Outras abordagens para desacoplamento são consideradas na literatura, como por exemplo o desacoplador por realimentação de estados proposto em (FALB; WOLOVICH, 1967) ou os métodos apresentados no livro de Wang (2003). Como a abordagem proposta neste trabalho independe da técnica de desacoplamento utilizada, sua aplicação pode ser

estendida para quaisquer outros métodos desde que sejam aplicáveis ao processo a ser controlado e que possam ser representados por espaço de estados.

2.2 Controladores Preditivos baseados em Modelo - MPC

Segundo Camacho e Bordons (1999), o termo Controle Preditivo baseado em Modelo (MPC, do inglês *Model Predictive Control*) não designa uma estratégia de controle específica mas uma ampla variedade de métodos de controle que fazem uso explícito de um modelo do processo para obter um sinal de controle através da minimização de uma função custo apresentando basicamente a estrutura mostrada na Figura 5 e as três características a seguir:

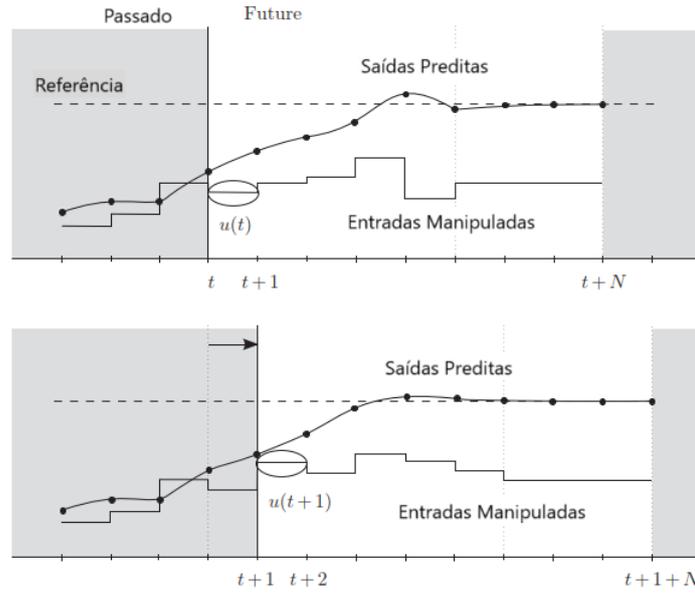
Figura 5 – Estrutura básica de um MPC



Fonte: Adaptado de (CAMACHO; BORDONS, 1999)

- Uso explícito do modelo para prever a saída do processo em um instante futuro (horizonte).
- Cálculo da sequência de controle por meio da minimização de uma função objetivo.
- Utilização da estratégia do horizonte deslizante, descrita a seguir. A cada amostragem de tempo, partindo do estado atual (t), um problema de controle ótimo em malha aberta é resolvido considerando um horizonte, N , finito (diagrama superior da Figura 6). Da sequência de sinais de controle ótimo obtida, apenas o primeiro deles é aplicada ao processo. No próximo passo da amostragem de tempo, $t + 1$, um novo problema de controle ótimo considerando as novas medições dos estados é resolvido sobre um horizonte, N , finito, mas deslocado no tempo (diagrama inferior da Figura 6). E assim sucessivamente.

Figura 6 – Ilustração do conceito de horizonte deslizante



Fonte: Adaptado de (BORELLI F.; MORARI, 2017)

As principais vantagens de se utilizar controladores preditivos são: a sua capacidade inerente em controlar plantas multivariáveis (demanda inicialmente mais importante), a facilidade para incluir o tratamento de restrições do processo (presente em praticamente todas as aplicações), uso em plantas não-lineares sem restrição (cuja computação *off-line* de uma lei de controle usualmente requer que a dinâmica da planta possua uma estrutura especial) e em plantas variantes no tempo (MAYNE D.Q.; SCOKAERT, 2000).

2.2.1 O problema de controle para um MPC

Considere um sistema dinâmico discreto dado por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, u_k), \\ y_k &= h(x_k), \end{aligned} \tag{2.8}$$

sendo $x_k \in \mathfrak{R}^n$ o vetor de estados, $u_k \in \mathfrak{R}^m$ o vetor de controle, e $y_k \in \mathfrak{R}^p$ o vetor de saídas em um dado instante k e $f(\cdot)$ com um ponto de equilíbrio na origem ($f(0, 0) = 0$). Notar que $x_k = x(kTs)$, sendo $x(t)$, o sinal de tempo contínuo, $x(kTs)$, a versão amostrada, e x_k , o sinal de tempo discreto. Na sequência, a nomenclatura $u_{k+i|k}$ indica a i -ésima ação de controle que deve ser calculada dadas as informações no instante k e $x_{k+i|k}$ indica a i -ésima predição dos estados após a aplicação de uma sequência de controle $\mathbf{u} = [u_{k|k}; u_{k+1|k}; \dots; u_{k+i-1|k}]$ que foi calculada dadas as informações no instante k .

As restrições no controle e nos estados são representadas por

$$u_{k+i|k} \in \mathcal{U}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1; \quad (2.9)$$

$$x_{k+i|k} \in \mathcal{X}, \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad (2.10)$$

onde \mathcal{U} é um subconjunto convexo e compacto¹ de \mathfrak{R}^m e \mathcal{X} é um subconjunto convexo e fechado² de \mathfrak{R}^n .

O objetivo do controle, geralmente, é levar o estado para a origem ou para um estado de equilíbrio x_r para o qual a saída é $y_r = h(x_r) = r$, sendo r é uma referência constante. A sequência deste trabalho irá considerar o primeiro caso, sem perda de generalidade, uma vez que, com uma escolha adequada de mudança de coordenadas, o segundo problema se reduz ao primeiro.

Para o evento $x_{k|k}$, ou seja, para o estado x no tempo k , a função objetivo, também chamada de função custo é definido por

$$V(x_k, \mathbf{u}_k, k) = \sum_{i=0}^{N-1} L(x_{k+i|k}, u_{k+i|k}) + F(x_{k+N|k}), \quad (2.11)$$

onde $\mathbf{u}_k = \{u_{k|k}; u_{k+1|k}; \dots; u_{k+N-1|k}\}$ é uma sequência de controle a ser aplicado no sistema e $L(\cdot, \cdot)$ e $F(\cdot)$ são conhecidas como custo de etapa e custo terminal, respectivamente. Para reduzir o formalismo, considera-se que o custo de etapa é escolhido para atender $L(x, u) \geq c(|(x, u)|)^2$ (alternativamente, esta condição pode ser substituída por $L(x, u) \geq c(|(z, u)|)^2$ onde $z = h(x)$ e (f, h) detectável³) e $L(0, 0) = 0$.

Além das restrições dos estados (2.10) e da entrada (2.9), pode ser imposta uma restrição terminal, no qual os estados preditos no horizonte N devem pertencer ao conjunto terminal dado por

$$x_{k+N|k} \in \mathcal{X}_f \subset \mathcal{X}. \quad (2.12)$$

No evento $x_{k|k}$, o problema de controle ótimo do MPC, $\mathcal{P}_N(x_k, k)$ (o sufixo N é para indicar que a otimização é sob um horizonte finito N), consiste de minimizar $V(x_k, \mathbf{u}_k, k)$ sujeito as restrições de controle e dos estados mais a restrição terminal, obtendo uma sequência de controle ótimo

$$\mathbf{u}^o(x_k, k) = \left\{ u_{k|k}^o(x_k); u_{k+1|k}^o(x_k); \dots; u_{k+N-1|k}^o(x_k) \right\}, \quad (2.13)$$

¹ definições 12 e 13 no Apêndice A.

² definições 13 e 9 no Apêndice A.

³ definição 7 no Apêndice A.

uma trajetória de estados ótima

$$\mathbf{x}^o(x_k, k) = \{x_{k|k}^o(x_k); x_{k+1|k}^o(x_k); \cdots; x_{k+N|k}^o(x_k)\}, \quad (2.14)$$

e o valor da função custo

$$\mathbf{V}^o(x_k, \mathbf{u}_k, k) = \mathbf{V}(x_k^o, \mathbf{u}_k^o, k). \quad (2.15)$$

Segundo o conceito do horizonte deslizante, o primeiro sinal de controle $u_{k|k}(x_k)$ da sequência ótima $\mathbf{u}^o(x_k, k)$ é então aplicado ao sistema no instante k .

Sendo $f(\cdot)$, $h(\cdot)$ e $L(\cdot, \cdot)$ invariantes no tempo, o problema $\mathcal{P}_N(x_k, k)$ também é invariante no tempo, de forma que, $V(x_k, \mathbf{u}_k, k) = V(x_k, \mathbf{u}_k, 0)$ para todo k , então para cada evento $x_{k|k}$, é suficiente resolver o problema $\mathcal{P}_N(x_k, 0) := \mathcal{P}_N(x_k)$, ou seja, cada instante é considerado como tempo zero. E assim o problema de otimização para sistemas discretos invariantes no tempo pode ser simplificado para

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_N(x_k) : \min_{\mathbf{u}_k} \quad & V(x_k, \mathbf{u}_k) = \sum_{i=0}^{N-1} L(x_{k+i|k}, u_{k+i|k}) + F(x_{k+N|k}) \\ & s.t. \\ & u_{k+i|k} \in \mathcal{U}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1; \\ & x_{k+i|k} \in \mathcal{X}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1; \\ & x_{k+N|k} \in \mathcal{X}_f \subset \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Como N é finito, ao menos um mínimo existe se $f(\cdot)$, $L(\cdot)$ e $F(\cdot)$ são contínuas, \mathcal{U} compacto e \mathcal{X} e \mathcal{X}_f fechados. Tipicamente o custo é formulado tal que $V(x_k, \mathbf{u}_k)$ é convexo em u_k . Neste caso particular, o mínimo local também é o mínimo global.

Alternativamente podem ser escolhidos horizonte de predição da saída, N , diferente do horizonte de predição de controle, N_u , com $N_u < N$. Neste caso, a sequência de controle passa a ser $\mathbf{u} = \{u_{k|k}; u_{k+1|k}; \cdots; u_{k+N_u|k}\}$ e o custo de etapa precisa ser desmembrado, $L(x_{k+i|k}, u_{k+i|k}) = \sum_{i=0}^{N-1} L_x(x_{k+i|k}) + \sum_{i=0}^{N_u} L_u(u_{k+i|k})$, e assim o problema de otimização para sistemas discretos invariantes no tempo passa a ter a seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_N(x_k) : \min_{\mathbf{u}_k} \quad & V(x_k, \mathbf{u}_k) = \sum_{i=0}^{N-1} L_x(x_{k+i|k}) + \sum_{i=0}^{N_u} L_u(u_{k+i|k}) \\ & + F(x_{k+N|k}) \\ & s.t. \\ & u_{k+i|k} \in \mathcal{U}, \quad i = 0, 1, \dots, N_u; \\ & x_{k+i|k} \in \mathcal{X}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1; \\ & x_{k+N|k} \in \mathcal{X}_f \subset \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

2.2.2 Exemplos de controladores preditivos

A seguir serão apresentados alguns algoritmos de controladores preditivos com uso consolidado na indústria.

2.2.2.1 Model Algorithmic Control - MAC

A primeira descrição da aplicação de um controlador preditivo foi apresentado por (RICHALET et al., 1976 apud QIN; BADGWELL, 1997). As ideias chaves apresentadas naquela conferência culminaram no controlador conhecido como *Model Algorithmic Control* (MAC), cujo *software* é chamado de *IDCOM*, um acrônimo para *Identification and Command*. As principais características para este tipo de controlador preditivo são (QIN; BADGWELL, 1997):

- Modelo de planta linear obtido pela resposta da planta ao impulso (degrau truncado).
- Função objetivo com performance quadrática.
- MPC utilizado para seguimento de referência.
- Restrições na saída e na entrada podem ser consideradas na formulação do controlador.

Como mencionado acima, a formulação deste MPC considera como modelo do processo a saída da planta no instante k representada pela relação dos coeficientes da resposta truncada da planta ao impulso, conforme representação abaixo, para o caso SISO:

$$y_k = \sum_{j=1}^M h_j u_{k-j} = H(z^{-1})u_k. \quad (2.18)$$

Este modelo considera que a saída em dado instante de tempo depende de uma combinação linear dos valores de entrada passados, onde os pesos h_j são os coeficientes da resposta ao impulso da planta. Como a resposta é truncada em M elementos, o sistema deve ser considerado estável e casual (CAMACHO; BORDONS, 1999), uma das grandes desvantagens desse controlador.

Apesar de ter sido apresentado um controlador para o caso SISO, há uma versão deste MPC para o caso multivariável, cujo software é conhecido como *IDCOM-M* (*IDCOM-Multivariable*). A simplicidade do algoritmo, bem como a possibilidade de incluir restrições,

tornou esta formulação em uma das mais utilizadas na indústria (CAMACHO; BORDONS, 1999). Por outro lado, esta abordagem só é permitida em plantas assintoticamente estáveis e é muito raro, na prática, que os testes de resposta ao impulso sejam realizados de forma adequada, pois são necessários impulsos de grandes amplitudes de forma a excitar a planta adequadamente, além da necessidade de se obter uma sequência longa o suficiente, para se obter uma representação adequada do processo (MACIEJOWSKI, 2001).

2.2.2.2 *Dynamic Matrix Control - DMC*

Apresentado em (CUTLER; RAMAKER, 1980), o controlador DMC, do inglês *Dynamic Matrix Control*, foi desenvolvido pelos engenheiros da *Shell Oil* no começo dos anos 70, tendo sua aplicação inicial em 1973. As principais características deste algoritmo de controle são (QIN; BADGWELL, 1997):

- Modelo da planta linear obtido pela resposta ao degrau.
- Controle multivariável sem consideração de restrições.

Considerando o modelo de uma planta, com uma entrada e uma saída, gerado pela resposta ao degrau, tem-se a seguinte representação do processo:

$$y_k = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \Delta u_{k-j},$$

onde os pesos g_j são os coeficientes da resposta ao degrau da planta.

Uma versão posterior do algoritmo, conhecida como QDMC, do inglês *Quadratic Dynamic Matrix Control*, incorporou a programação quadrática ao algoritmo *DMC* original permitindo considerar restrições na entrada e na saída do processo. Apesar deste algoritmo ter obtido uma grande aceitação na indústria mundial, principalmente na indústria petroquímica (CAMACHO; BORDONS, 1999), este MPC apresenta algumas desvantagens listadas abaixo (MACIEJOWSKI, 2001):

- Só pode ser utilizado em plantas assintoticamente estáveis.
- Geralmente é impraticável aplicar degraus nas entradas das plantas, pois podem ser disruptivos para a operação normal do processo.
- Para sistemas multivariáveis, as respostas ao degrau se mostra um modelo de representação ineficiente, em termos de requisitos de armazenamento, devido a grande quantidade de coeficientes a serem armazenados.

2.2.2.3 Generalized predictive control - GPC

Apresentado por (CLARKE; MOHTADI; TUFFS, 1987), o método de controle GPC, do inglês *Generalized predictive control*, se tornou um dos mais populares tanto na indústria como no meio acadêmico. O algoritmo prevê uma solução analítica (na ausência de restrições), sendo capaz de lidar com plantas instáveis e de fase não-mínima (CAMACHO; BORDONS, 1999).

Este MPC utiliza o modelo da planta por função de transferência. Este é o modelo mais utilizado em plantas SISO, quando é considerada uma operação em torno de um ponto de operação e após sua linearização (CAMACHO; BORDONS, 1999). Este modelo é conhecido como CARMA, do inglês *Controller Auto-Regressive Moving-Average* e é representado por

$$A(z^{-1})y_k = z^{-d}B(z^{-1})u_{k-1} + C(z^{-1})e_k, \quad (2.19)$$

onde u_k e y_k são as sequências de controle e de saída da planta, e_k é um ruído branco com média igual a zero, z^{-1} é o operador de atraso, d é o tempo morto do sistema, $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ e $C(z^{-1})$ são polinômios em z^{-1} dados por:

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_naz^{-na}, \\ B(z^{-1}) &= b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_nbz^{-nb}, \\ C(z^{-1}) &= 1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \dots + c_ncz^{-nc}. \end{aligned}$$

2.2.2.4 Controle preditivo com abordagem em espaço de estados

Uma das primeiras formulações MPC em espaço de estados foi apresentada em (ORDYS; CLARKE, 1993). Esse modelo pode ser obtido através de equações de diferenças que representem a planta ou realizando uma transformação a partir de outros modelos já existentes do processo, como o modelo por meio da resposta ao impulso, ao degrau ou por funções de transferência. Sua representação é conforme a seguir

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \mathbf{A}x_k + \mathbf{B}u_k + \mathbf{\Gamma}w_k, \\ y_k &= \mathbf{C}x_k + \nu_k, \end{aligned} \quad (2.20)$$

sendo $x_k \in \mathfrak{R}^n$, o vetor de estados no instante k , $u_k \in \mathfrak{R}^m$, o vetor do sinal de controle no instante k , $w_k \in \mathfrak{R}^{n_w}$, representa uma perturbação aditiva desconhecida no instante k , $\nu_k \in \mathfrak{R}^p$, representa um ruído de medição no instante k e $y_k \in \mathfrak{R}^p$, o vetor de saída do processo no instante k .

A principal vantagem de utilizar a representação por espaço de estados é a

capacidade inerente para lidar com processos multivariáveis (*MIMO*), além da capacidade de trabalhar com modelos de perturbação complexos (MACIEJOWSKI, 2001).

2.2.2.5 Controlador preditivo baseado em modelo de velocidade

Os controladores preditivos baseados em modelo de velocidade são úteis pela incorporação da ação integral ao modelo de predição, levando a rejeição de perturbações do tipo constante (ruído branco). Para o caso de representação por espaço de estados, o modelo de velocidade elimina a necessidade de observadores de perturbação para calcular o valor da referência de controle de regime permanente ($u_{eq,r}$) associada a um valor de referência (r).

Para o caso do GPC, a implementação se faz utilizando o modelo conhecido como CARIMA, do inglês *Controller Auto-Regressive Integrated Moving-Average*, dado por

$$A(z^{-1})y_k = z^{-d}B(z^{-1})u_{k-1} + \frac{C(z^{-1})e_k}{\Delta},$$

onde $\Delta = 1 - z^{-1}$ e u_k , y_k , e_k , z^{-1} , d , $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ e $C(z^{-1})$ dados conforme Equação 2.19.

Para a representação por espaço de estados, da Equação 2.20, os vetores de estados nos instantes $k + 1$ e k são dados respectivamente por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \mathbf{A}x_k + \mathbf{B}u_k + \mathbf{\Gamma}w_k, \\ x_k &= \mathbf{A}x_{k-1} + \mathbf{B}u_{k-1} + \mathbf{\Gamma}w_{k-1}. \end{aligned}$$

Subtraindo-se os estados nos instantes k e $k - 1$ ($\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$), obtém-se a relação a seguir

$$\Delta x_{k+1} = \mathbf{A}\Delta x_k + \mathbf{B}\Delta u_k + \mathbf{\Gamma}\Delta w_k.$$

Para os vetores de saída, temos

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= \mathbf{C}\mathbf{A}x_k + \mathbf{C}\mathbf{B}u_k + \mathbf{C}\mathbf{\Gamma}w_k + \nu_k, \\ y_k &= \mathbf{C}\mathbf{A}x_{k-1} + \mathbf{C}\mathbf{B}u_{k-1} + \mathbf{C}\mathbf{\Gamma}w_{k-1} + \nu_{k-1}. \end{aligned}$$

Subtraindo-se as saídas nos instantes k e $k - 1$, obtém-se a relação a seguir

$$y_{k+1} = y_k + \mathbf{C}\mathbf{A}\Delta x_k + \mathbf{C}\mathbf{B}\Delta u_k + \mathbf{C}\mathbf{\Gamma}\Delta w_k + \Delta \nu_k.$$

Considerando que a perturbação é do tipo ruído branco, $\Delta w_k = 0$, e que o ruído de medição é constante, $\Delta \nu_k = 0$ (o erro de leitura das variáveis de saída tendem a ser o mesmo, pois a leitura é repetida a cada instante k considerando as mesmas condições de medição para o instante $k - 1$), temos o modelo de velocidade por espaço de estados dado por

$$\begin{aligned}\xi_{k+1} &= \mathbf{A}_\xi \xi_k + \mathbf{B}_\xi \Delta u_k, \\ y_k &= \mathbf{C}_\xi \xi_k,\end{aligned}\tag{2.21}$$

sendo $\xi_k = [\Delta x_k; y_k]$ e as matrizes aumentadas definidas conforme a seguir

$$\mathbf{A}_\xi = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{CA} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_\xi = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{CB} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_\xi = [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}].$$

2.3 Controladores Preditivos Regulatórios com Garantia de Estabilidade

2.3.1 Otimalidade não garante estabilidade

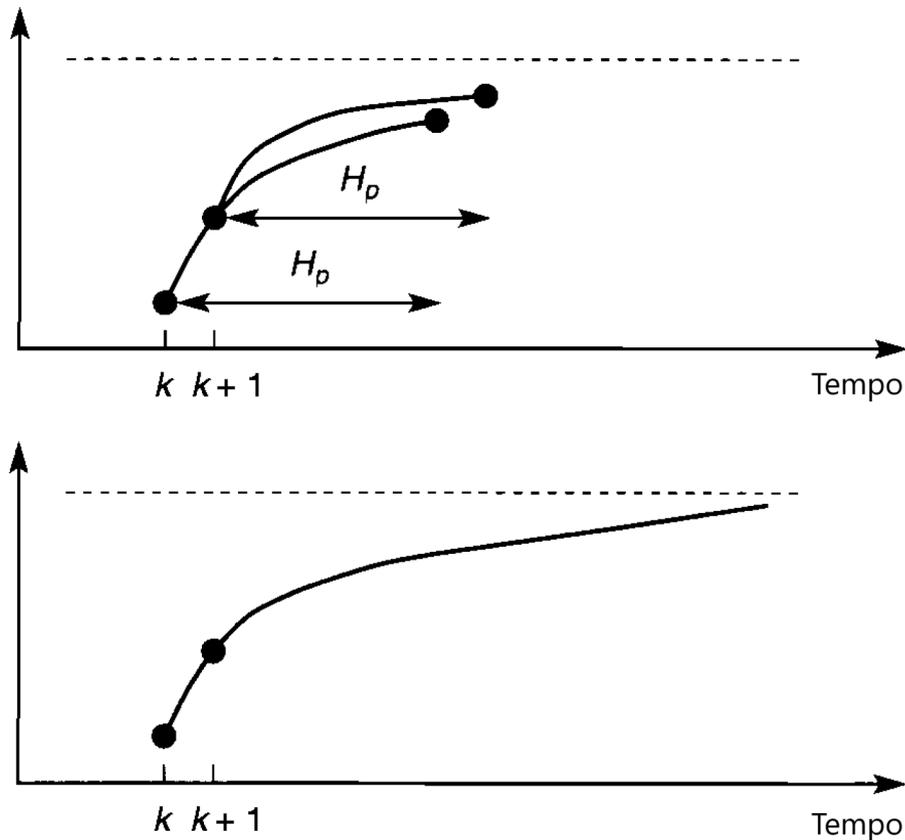
Sabe-se que para controladores de horizonte infinito, tipo LQR⁴ (do inglês *Linear-Quadratic Regulator*) e LQG (do inglês *Linear-Quadratic Gaussian*), são necessárias apenas condições elementares para a garantia de estabilidade (estabilizabilidade e detectabilidade)⁵. Este resultado é, de certa forma, intuitivo, uma vez que, se for possível estabilizar o processo, então é razoável esperar que o ótimo seja estável uma vez que o erro não pode ir a infinito na melhor das situações (SANTOS, 2011).

O mesmo não é válido para os controladores preditivos devido ao uso do princípio do horizonte deslizante. Para ilustrar o problema, considere a parte superior da Figura 7 que representa uma formulação de horizonte finito, com a saída da planta sendo levada para uma referência constante. No instante k , uma trajetória é ótima sob o horizonte de predição H_p . Na ausência de perturbação, e com um modelo perfeito, a planta no instante $k + 1$ está no estado que foi predito no passo anterior. É de se esperar que a porção inicial da nova trajetória ótima obtida no instante $k + 1$ coincida com a trajetória ótima previamente calculada. Porém um novo intervalo de tempo, entre $k + H_p$ e $k + 1 + H_p$, entra em cena. Este intervalo não havia sido considerado no problema de otimização do instante k e, portanto, sua presença poderá levar a uma trajetória ótima completamente diferente da computada anteriormente.

⁴ ver Definição 8 no Apêndice A

⁵ ver Definições 5 e 7 no Apêndice A.

Figura 7 – Horizontes finitos e infinitos (modelo perfeito e sem perturbação)



Fonte: Adaptado de (MACIEJOWSKI, 2001)

A parte inferior da Figura 7 apresenta o caso para o horizonte infinito. No instante k uma trajetória ótima sob o horizonte infinito foi determinada (implicitamente). No instante $k + 1$, não há novas informações para o problema de otimização, então a trajetória ótima a partir deste instante corresponde ao mesmo trecho da trajetória calculada anteriormente. Isto é consequência do princípio de otimalidade de Bellman, que assegura que qualquer trecho de uma trajetória ótima é por si só uma trajetória ótima (MACIEJOWSKI, 2001). Exemplificando de maneira qualitativa: se o caminho mais curto entre Salvador e o Vale do Capão passa por Feira de Santana, então o trecho da rota entre Feira de Santana e o Vale do Capão tem que ser o mesmo caminho ótimo considerando a partida em Feira de Santana e a chegada no Vale do Capão.

Este princípio não se aplica para o caso do horizonte finito porque surge um problema de otimização diferente a cada passo (MACIEJOWSKI, 2001). Na realidade, pode-se demonstrar, a partir do princípio de otimalidade de Bellman, que $u_{k+1|k} \rightarrow u_{k+1|k+1}$ apenas quando $N = N_u \rightarrow \infty$. Como consequência, ao otimizar uma janela da predição finita, observando horizontes distintos, não se obtém a solução ótima do problema do horizonte infinito. Desta maneira, se uma função custo for mal escolhida, o sistema de malha fechada controlado por uma estratégia MPC pode ser instável mesmo para o caso

nominal (sem incertezas) (SANTOS, 2011).

Em sua tese, Santos (2011), ilustra essa situação com simulações para o problema dos quatro tanques acoplados apresentados em Johansson (2000a). Com o exemplo, três importantes pontos foram destacados: (i) otimalidade em um horizonte finito não implica estabilidade devido ao princípio do horizonte deslizante, (ii) nem sempre é fácil perceber que uma função custo foi mal escolhida e (iii) algoritmos MPC com garantia de estabilidade são especialmente úteis nos casos de sistemas com dinâmicas complexas como plantas instáveis ou de fase não mínima.

2.3.2 MPC regulatório com garantia de estabilidade para sistemas lineares com restrições

As propostas iniciais dos controladores MPC utilizados na indústria não possuíam uma garantia de estabilidade formal, apesar de seus usuários, obviamente, possuírem consciência da importância desse requerimento. Contudo, devido a limitação de seu uso em plantas estáveis e a escolha de largos horizontes de predição comparados com os tempos de acomodação das plantas, as propriedades de estabilidade associadas com o horizonte infinito eram alcançadas (MAYNE D.Q.; SCOKAERT, 2000).

Após o estudo de diferentes trabalhos sobre a garantia de estabilidade em controladores preditivos, Mayne D.Q. e Scokaert (2000), compila as principais ideias da época e apresenta os três “ingredientes” essenciais para a garantia de estabilidade em controladores preditivos em malha fechada. São eles: o custo terminal $F(\cdot)$, o conjunto de restrição terminal $X_f(\cdot)$ e um controlador estabilizante local $\mathbf{K}_f(\cdot)$.

Considere o sistema dinâmico discreto representado pela Equação 2.8. Na sequência, será usado x^+ para representar o estado sucessor $f(x, u)$, de forma que a Equação poderá ser representada de forma simplificada por $x^+ = f(x, u)$, $y = h(x)$ e o problema de controle preditivo dado pela Equação 2.16 pode ser simplificado para

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_N(x) : \min_{\mathbf{u}} \quad & V(x, \mathbf{u}) = \sum_{i=0}^{N-1} L(x(i), u(i)) + F(x(N)) \\ \text{s.t.} \quad & \\ & u(i) \in \mathcal{U}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \\ & x(i) \in \mathcal{X}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \\ & x(N) \in \mathcal{X}_f \subset \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

sendo $x(i) := x_{0+i|0}$ e $u(i) := u_{0+i|0}$.

O conjunto de estados que podem ser controlados por um controlador preditivo com

horizonte finito N é X_N ⁶. Suponha então, que $x \in X_N$ ($x := x_0$, na nomenclatura simplificada), e que a sequência de controle ótimo $\mathbf{u}^o(x) = \{u^o(0;x), u^o(1;x), \dots, u^o(N-1;x)\}$ que resolve $\mathcal{P}_N(x)$, foi determinado. Seja $\mathbf{x}^o(x) = \{x, x^o(1;x), \dots, x^o(N;x)\}$ a trajetória dos estados ótima. O controlador preditivo então utiliza apenas o primeiro sinal da sequência de controle ótimo, $u = u^o(0;x)$, levando o processo do estado inicial x para o estado sucessor $x^+ = x^o(1;x) = f(x, u^o(0;x))$. Deseja-se determinar uma sequência de controle factível $\tilde{\mathbf{u}}(x)$ para x^+ e portanto, uma fronteira superior para $V^o(x^+)$.

Desde que $\{u^o(0;x), u^o(1;x), \dots, u^o(N-1;x)\}$ é uma sequência de controle factível para $\mathcal{P}_N(x)$, $x^o(N;x) \in \mathcal{X}_f$, e a sequência de controle $\{u^o(1;x), \dots, u^o(N-1;x)\}$ leva x^+ para $x^o(N;x) \in \mathcal{X}_f$. Para obter uma sequência de controle factível para $\mathcal{P}_N(x^+)$, será adicionado um elemento u para esta sequência, resultando em $\{u^o(1;x), \dots, u^o(N-1;x), u\}$. A nova sequência será factível para $\mathcal{P}_N(x^+)$ se $u \in \mathcal{U}$ e u levar $x^o(N;x) \in \mathcal{X}_f$ para o estado $f(x^o(N;x), u) \in \mathcal{X}_f$, que é o caso se $u = \mathbf{K}_f(x^o(N;x))$ (um sinal de controle por realimentação de estados) e \mathcal{X}_f e o controlador local \mathbf{K}_f apresentarem as seguintes propriedades:

$$\mathcal{X}_f \subset \mathcal{X}, \quad \mathbf{K}_f(x) \in \mathcal{U} \quad \text{e} \quad f(x, \mathbf{K}_f(x)) \in \mathcal{X}_f, \quad \forall x \in \mathcal{X}_f$$

ou seja, \mathcal{X}_f é positivamente invariante⁷ quando a lei de controle é $\mathbf{K}_f(\cdot)$ (MAYNE D.Q.; SCOKAERT, 2000).

Se as condições forem satisfeitas, a sequência de controle

$$\tilde{\mathbf{u}}(x) = \{u^o(1;x), \dots, u^o(N-1;x), \mathbf{K}_f(x^o(N;x))\}$$

é factível para $\mathcal{P}_N(x^+)$. A trajetória dos estados resultante do estado inicial $x^+ = x^o(1;x)$ e da sequência de controle $\tilde{\mathbf{u}}(x)$ é

$$\tilde{\mathbf{x}}(x) = \{x^o(1;x), \dots, x^o(N;x), f(x^o(N;x), \mathbf{K}_f(x^o(N;x)))\}.$$

E o custo associado é

$$\begin{aligned} V(x^+, \tilde{\mathbf{u}}(x)) = & V^o(x) - L(x, u^o(0;x)) - F(x^o(N;x)) \\ & + L(x^o(N;x), \mathbf{K}_f(x^o(N;x))) + F(f(x^o(N;x), \mathbf{K}_f(x^o(N;x))))). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Para a garantia de estabilidade assintótica, no sentido de Lyapunov⁸, a função custo deve ser uma função de Lyapunov, ou seja, ser uma função definida positiva e decrescer com

⁶ Definição 16 no Apêndice A.

⁷ Definição 18 no Apêndice A.

⁸ Definição 28 no Apêndice A.

o passar do tempo. A primeira condição é atendida ao se assumir $L(x, u) \geq c(|(x, u)|)^2$, conforme dito na Seção 2.2.1. Para a segunda condição ser atendida, $V(x, \mathbf{u}(x))$ deve ser escolhida de forma a atender

$$V(x^+, \tilde{\mathbf{u}}(x)) - V(x, \mathbf{u}(x)) + L(x, u(0; x)) \leq 0. \quad (2.24)$$

Substituindo a Equação 2.23 na Equação 2.24 temos

$$L(x^o(N; x), \mathbf{K}_f(x^o(N; x))) + F(f(x^o(N; x), \mathbf{K}_f(x^o(N; x)))) - F(x^o(N; x)) \leq 0. \quad (2.25)$$

Essa condição é satisfeita se $F(\cdot)$ é uma função de Lyapunov na vizinhança da origem (que assegura que o último termo da Equação 2.25 seja positivo) e $\mathbf{K}_f(\cdot)$ e \mathcal{X}_f são escolhidos adequadamente. A condição satisfeita é suficiente para assegurar que o estado do sistema em malha fechada $x^+ = f(x, u)$ converge para zero quando $k \rightarrow \infty$ se seu estado inicial estiver em X_N . Diante do exposto, são apresentadas as seguintes condições que, se satisfeitas, asseguram estabilidade assintótica (exponencial) em malha fechada (MAYNE D.Q.; SCOKAERT, 2000):

- A1.** $\mathcal{X}_f \subset \mathcal{X}$, \mathcal{X}_f é um conjunto fechado e $0 \in \mathcal{X}_f$ (as restrições dos estados são respeitadas em \mathcal{X}_f).
- A2.** $\mathbf{K}_f(x) \in \mathcal{U}$, $\forall x \in \mathcal{X}_f$ (as restrições das entradas são respeitadas em \mathcal{X}_f).
- A3.** $f(x, \mathbf{K}_f(x)) \in \mathcal{X}_f$, $\forall x \in \mathcal{X}_f$ (\mathcal{X}_f é positivamente invariante sob $\mathbf{K}_f(\cdot)$).
- A4.** $F(f(x, \mathbf{K}_f(x))) - F(x) + L(x, \mathbf{K}_f(x)) \leq 0$, $\forall x \in \mathcal{X}_f$ ($F(\cdot)$ é uma função de Lyapunov local).

As condições A1 e A2 garantem que as restrições dos estados e do controle são respeitadas no conjunto terminal mediante a utilização da lei de controle local $\mathbf{K}_f(x)$. A condição A3 implica que a restrição terminal é um conjunto positivamente invariante mediante a utilização da lei de controle local $\mathbf{K}_f(x)$, ou seja, a restrição terminal deve ser escolhida de tal forma que o sucessor de todo estado em \mathcal{X}_f , deve pertencer ao mesmo conjunto \mathcal{X}_f no instante seguinte após a aplicação da lei de controle local. Estas três primeiras condições garantem que \mathcal{X}_f é um conjunto positivamente invariante admissível o que assegura a propriedade da factibilidade recursiva. Em outras palavras, se $\mathcal{P}_N(x)$ apresenta uma solução factível para x , então existirá uma solução factível para $\mathcal{P}_N(x^+)$. Por fim, a condição A4 afirma que $F(\cdot)$ é uma função de controle de Lyapunov que torna toda a função custo $V(x, \mathbf{u})$ uma função de controle de Lyapunov para o sistema controlado (SANTOS, 2011).

A título de exemplo, considere um MPC por representação de espaço de estados, conforme Equação (2.20), cuja função custo considerada é do tipo quadrática representada por

$$V(x_k, r_k, u_{r,k}; \mathbf{u}(k)) = \sum_{j=1}^N (y_{k+j|k} - r_k)^\top \mathbf{Q} (y_{k+j|k} - r_k) + \sum_{j=0}^{N_u} (u_{k+j|k} - u_{r,k})^\top \mathbf{R} (u_{k+j|k} - u_{r,k}) + F(x(k+N|k)), \quad (2.26)$$

sendo $y_{k+j|k}$ uma predição para y_k dada a informação disponível no instante k , $\mathbf{u}(k) = [u_{k|k}^\top \dots u_{k+N_u-1|k}^\top]^\top$, $u_{r,k}$ o sinal de controle em regime permanente que leva $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = r_k$, $\mathbf{Q} \geq 0$ é a matriz de ponderação da saída⁹ e $\mathbf{R} > 0$ a matriz de ponderação de entrada¹⁰, escolhidos como parâmetros do controlador MPC.

Seja a lei de controle local dada por uma realimentação de estados do tipo $u_k = \mathbf{K}_f(x_k)$, tal que

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BK}_f)^\top \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_f) - \mathbf{P} + \mathbf{K}_f^\top \mathbf{R} \mathbf{K}_f + \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} = 0, \quad (2.27)$$

com $\mathbf{P} > 0$.

Essa lei de controle pode ser a própria solução do regulador linear quadrático (LQR) ou outra realimentação de estados linear.

O custo terminal pode ser escolhido como $F(x_{k+N|k}) = (x_{N|k})^\top \mathbf{P} (x_{N|k})$, sendo $\mathbf{P} > 0$ uma função de Lyapunov, que pode ser considerada como a mesma função utilizada para o problema do controlador LQR da Equação (2.27).

Por fim, resta determinar o último dos "ingredientes", a restrição terminal, que determinará o conjunto terminal que assegura a admissibilidade da lei implícita estabilizante obtida da solução da Equação (2.27), garantindo a factibilidade recursiva. Tendo em vista que as restrições dada pelas Equações (2.9) e (2.10) devem ser consideradas na forma poliedral $\mathcal{X} = \{x_k \in \mathfrak{R}^n : \mathbf{H}_x x_k \leq g_x\}$ e $\mathcal{U} = \{u_k \in \mathfrak{R}^m : \mathbf{H}_u u_k \leq g_u\}$, pode-se calcular o máximo conjunto poliedral admissível positivamente invariante¹¹, \mathcal{O}_∞ , tal que $x_k \in \mathcal{O}_\infty \Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_f)x_k \in \mathcal{O}_\infty$, com $u_k = \mathbf{K}_f x_k \in \mathcal{U}, \forall x_k \in \mathcal{O}_\infty$ e $x_k \in \mathcal{X}, \forall x_k \in \mathcal{O}_\infty$. Maiores detalhes de como obter o máximo conjunto poliedral admissível positivamente invariante é apresentando no Apêndice B.

⁹ Definição 1 no Apêndice A

¹⁰ Definição 2 no Apêndice A

¹¹ O conjunto invariante não necessariamente precisa ser o máximo (\mathcal{O}_∞) como indicado em Gilbert e Tan (1991), mas é comum utilizá-lo para aumentar o domínio de atração.

Desta forma, o problema de otimização para MPC com garantia de estabilidade utilizado neste trabalho é dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_N(x_k) : \min_{\mathbf{u}_k} \quad & V(x_k, r_k, u_{r,k}; \mathbf{u}_k) = \sum_{i=0}^{N-1} (y_i - r_k)^\top \mathbf{Q} (y_i - r_k) \\
& + \sum_{i=0}^{N_u} (u_i - u_{r,k})^\top \mathbf{R} (u_i - u_{r,k}) \\
& + (x_N)^\top \mathbf{P} (x_N) \\
\text{s.t.} \quad & \\
& x_0 = x(k), \\
& x_{i+1} = \mathbf{A}x_i + \mathbf{B}u_i, \quad i = 0, 1, \dots, N-1; \\
& x_i \in \mathcal{X}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1; \\
& u_i \in \mathcal{U}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1; \\
& x_N \in \mathcal{O}_\infty.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Premissas.

- (1) Considere que o par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é controlável, o par (\mathbf{C}, \mathbf{A}) é observável e x_k é conhecido.
- (2) Considere que os conjuntos \mathcal{X} e \mathcal{U} são compactos, convexos e com a origem em seus interiores.
- (3) Considere $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ uma matriz semi-definida positiva e $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ uma matriz definida positiva.
- (4) Considere que $\mathbf{P} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ seja uma matriz definida positiva tal que $(\mathbf{A} + \mathbf{BK})^\top \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{BK}) - \mathbf{P} + \mathbf{K}^\top \mathbf{R} \mathbf{K} + \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} = \mathbf{0}$.
- (5) Existe uma lei de controle local estabilizante, $\mathbf{K}_f(x)$.
- (6) O conjunto terminal \mathcal{O}_∞ é positivamente invariante admissível sob $\mathbf{K}_f(x)$.

Resumindo, a implementação do MPC com garantia de estabilidade, considerando a estratégia do controle preditivo apresentada acima, pode ser realizada seguindo o Algoritmo 1. Importante notar que todos os passos do algoritmo, com exceção do último, são executados fora do loop de controle (*offline*).

Algoritmo 1: Implementação de MPC regulatório com garantia de estabilidade

Entrada: \mathbf{Q} , \mathbf{R} , N , N_u , \mathcal{U} , \mathcal{X} , r_k e $u_{r,k}$

Saída: Controlador preditivo regulatório com garantia de estabilidade

- 1 Escolhe-se as matrizes de ponderação \mathbf{Q} e \mathbf{R} , definindo o custo de etapa da função custo $L((y_{k+1})_Q, (u_{k+1})_R)$.
- 2 Define-se uma lei de controle estabilizante por realimentação $u_k = \mathbf{K}_f x_k$. Neste exemplo foi considerada a solução do problema de controle ótimo irrestrito - LQR.
- 3 Determina-se $\mathbf{P} > 0$ da equação matricial abaixo

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BK}_f)^\top \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_f) - \mathbf{P} + \mathbf{K}_f^\top \mathbf{R} \mathbf{K}_f + \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} = 0.$$
- 4 Determina-se o custo terminal dado por

$$F(x(k+N|k)) = (x_{N|k})^\top \mathbf{P} (x_{N|k}).$$
- 5 Obtém-se o máximo conjunto positivamente invariante admissível, \mathcal{O}_∞ associado a lei estabilizante implícita $u_k = \mathbf{K}_f x_k$, para utilizar como conjunto terminal, conforme apresentado no Apêndice B.
- 6 Resolve o problema de otimização dado pela Equação (2.28).

retorna $u = u^o(0; x)$

2.4 Controladores Preditivos para Seguimento de Referência com Garantia de Estabilidade

A maioria dos resultados para garantia de estabilidade em MPC considera o problema de regulação, ou seja, manter o sistema em um estado estacionário que, normalmente, é considerada como a origem. Contudo, como os "ingredientes" estabilizantes dependem do estado estacionário, uma mudança de referência requer que o MPC seja projetado novamente a cada mudança de *set-point*, exigindo um grande esforço computacional online devido a complexidade dos algoritmos, podendo levar a uma perda de factibilidade (LIMON et al., 2008a).

Nos trabalhos de Limon et al. (2005), Limon et al. (2008a), foi apresentada uma formulação para o MPC utilizando o conceito de referência artificial para aplicação em sistemas lineares para qualquer referência admissível através de uma evolução admissível.

As propostas iniciais do uso de referência artificial reduzia consideravelmente o domínio de atração (LIMON et al., 2008a). A ideia da referência artificial é da convergência do alvo de referência para o alvo desejado, quando possível. Para isso, o alvo artificial passa a ser uma nova variável de decisão obtida do problema de otimização do MPC em cada instante de tempo. Além disso, se a referência não é admissível, o sistema é levado para um equilíbrio admissível que minimiza uma dada função custo de erro estacionário Limon et al. (2005), Limon et al. (2008a). Em Ferramosca et al. (2009) a função custo de erro do seguimento de referência foi generalizada para ser expressa como uma função definida positiva e convexa.

Neste trabalho será considerada a proposta apresentada em Santos (2018), que apresentou uma modificação dos MPC's apresentados anteriormente ((LIMON et al., 2005; LIMON et al., 2008a; FERRAMOSCA et al., 2009) baseado em uma simplificação da parametrização dos estados estacionários de forma que não há o acréscimo de novas variáveis de decisões, mantendo as variáveis normalmente utilizadas nos controladores preditivos padrões para o problema regulatório. Os principais ingredientes deste MPC são: i) função custo de erro do seguimento de referência que penaliza o desvio entre a referência artificial e a referência desejada (LIMON et al., 2008a; FERRAMOSCA et al., 2009), ii) condições terminais estabilizantes extendidas (LIMON et al., 2008a; FERRAMOSCA et al., 2009), e iii) uma parametrização dos estados estacionários simplificada sem acréscimo de novas variáveis de decisão para o problema de otimização do MPC (SANTOS, 2018).

2.4.1 MPC para seguimento de referência com garantia de estabilidade para sistemas lineares com restrições

Considere um sistema por representação por espaço de estados, conforme Equação (2.20), desconsiderando o ruído de medição ($\nu_{k+1} = \nu_k = 0$) e a perturbação dos estados ($w(k)$)

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \mathbf{A}x_k + \mathbf{B}u_k, \\ y_k &= \mathbf{C}x_k, \end{aligned} \tag{2.29}$$

sendo $x_k \in \mathfrak{R}^n$, o vetor de estados no instante k , $u_k \in \mathfrak{R}^m$, o vetor do sinal de controle no instante k e $y_k \in \mathfrak{R}^q$, o vetor de saída do processo no instante k .

O sistema é sujeito a restrições conforme apresentado nas Equações (2.9) e (2.10) e considerada por representação por poliedros e de forma compacta dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \{z \in \mathfrak{R}^{n+m} : \mathbf{F}_z z \leq g_z\}, \\ [x_k^\top \quad u_k^\top]^\top &\in \mathcal{Z}, \quad k \geq 0, \end{aligned} \tag{2.30}$$

sendo o conjunto $\mathbb{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ um poliedro convexo, compacto e não vazio com a origem em seu interior. Também é assumido que o par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é controlável e x_k é conhecido em todo o instante de tempo.

Considere um *set-point* \bar{y} . As entradas e estados associados a este *set-point* são solução de

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{I}_n & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0}_{q \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n,1} \\ \bar{y} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

O conjunto de todos os estados estacionários admissíveis para o sistema é $X_s = \{\bar{x} \in \mathcal{X} : \exists \bar{u} \in \mathcal{U} \text{ tal que } (\mathbf{A} - \mathbf{I})\bar{x} + \mathbf{B}\bar{u} = \mathbf{0}\}$. Analogamente, o conjunto de entradas estacionárias é chamada de U_s . O conjunto de todos os *set-points* admissíveis é chamado de $S = \{s = \mathbf{C}\bar{x} + \mathbf{C}\bar{B}\bar{u} : \bar{x} \in \mathcal{X}, \bar{u} \in \mathcal{U} \text{ e } (\mathbf{A} - \mathbf{I})\bar{x} + \mathbf{B}\bar{u} = \mathbf{0}\}$ (LIMON et al., 2005).

Alternativamente, o conjunto de entradas e estados estacionários do sistema (2.29) é um subespaço linear m -dimensional de \mathfrak{R}^{n+m} dado por

$$\bar{z} = [\bar{x}^\top \quad \bar{u}^\top]^\top = \mathbf{M}_\theta \bar{\theta} = [\mathbf{M}_x^\top \quad \mathbf{M}_u^\top]^\top \bar{\theta}, \quad (2.32)$$

onde \mathbf{M}_θ é uma matriz que define a base para o espaço nulo de $[\mathbf{A} - \mathbf{I} \quad \mathbf{B}]$ e $\bar{\theta}$ é um parâmetro livre.

As saídas estacionárias controladas são dadas por

$$\bar{y} = \mathbf{M}_y \bar{\theta}, \quad (2.33)$$

onde $\mathbf{M}_y = [\mathbf{C} \quad \mathbf{0}] \mathbf{M}_\theta \bar{\theta}$ (FERRAMOSCA et al., 2010). Essa parametrização permite caracterizar o subespaço de estados e entradas estacionários por um número mínimo de variáveis ($\bar{\theta}$), o que simplifica cálculos adicionais necessário para a derivação do controlador proposto (LIMON et al., 2005).

Uma condição de equilíbrio pode ser dada por $\bar{x} = \mathbf{A}\bar{x} + \mathbf{B}\bar{u}$. Baseada nesta condição nominal de estado estacionário, uma lei de controle estabilizante pode ser dada por

$$u_k = \mathbf{K}_f(x_k - \bar{x}) + \bar{u}. \quad (2.34)$$

Alternativamente, substituindo a Equação (2.32) em (2.34), a lei de controle estabilizante pode ser representada por

$$u_k = \mathbf{K}_f x_k + \mathbf{L}\bar{\theta}, \quad (2.35)$$

com $\mathbf{L} = -\mathbf{K}_f \mathbf{M}_x + \mathbf{M}_u$.

Os trabalhos iniciais com abordagem em referência artificial são baseados em novas variáveis de decisão que definem o alvo artificial para cada instante de tempo. Nesses trabalhos, são utilizadas variáveis de decisão adicionais ou um problema de otimização adicional é solucionado para obter factibilidade recursiva e propriedades adequadas para permitir seguimento de referência (SANTOS, 2018). No trabalho apresentado em Santos (2018), o parâmetro de estado estacionário, $\bar{\theta}$, é obtido diretamente de variáveis conhecidas e mensuráveis, tornando o MPC para seguimento de referência equivalente ao MPC regulatório, em relação ao número de variáveis de decisão. Essa abordagem é apresentada a seguir.

Considere uma lei de controle estabilizante dada por (2.34). Note que $\bar{h} = \bar{u} - \mathbf{K}_f \bar{x}$ é um vetor base que define os valores estacionários. Alternativamente $u_k = \mathbf{K}_f x_k + \bar{h}$ com $\bar{h} = u_k - \mathbf{K}_f x_k = \bar{u} - \mathbf{K}_f \bar{x}$. E o sistema em malha fechada é dado por

$$x_{k+1} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_f x_k + \mathbf{B}\bar{h}. \quad (2.36)$$

Portanto, a condição estacionária é definida por

$$\bar{x} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_f \bar{x} + \mathbf{B}\bar{h}, \quad (2.37)$$

onde os autovalores da matrix $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_f)$ estão estritamente dentro do círculo unitário.

Então os pontos estacionários podem ser representados por

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_\theta \bar{\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_x \\ \mathbf{M}_u \end{bmatrix} \bar{\theta} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_f)^{-1} \mathbf{B} \\ \mathbf{I} + \mathbf{K}_f (\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_f)^{-1} \mathbf{B} \end{bmatrix} \bar{\theta}, \quad (2.38)$$

com $\bar{\theta} = \bar{h} = \bar{u} - \mathbf{K}_f \bar{x}$. Além disso, o parâmetro de estado estacionário também pode ser obtido de $\bar{\theta} = u_k - \mathbf{K}_f x_k$. Observe também que $\mathbf{L} = [-\mathbf{K}_f \quad \mathbf{I}] \mathbf{M}_\theta = \mathbf{I}$, na Equação (2.35).

Esta nova parametrização apresenta uma solução específica para obter M_θ considerando que o valor de $\bar{\theta}$ pode ser sempre calculado de u_k e x_k . Esta solução pode ser aplicável se $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ é uma matriz singular (SANTOS, 2018).

Assim, o problema de otimização para MPC para seguimento de referência com garantia de estabilidade pode ser dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_N(x_k) : \min_{\mathbf{u}_k} \quad V(x_k, r_k, \mathbf{u}_k) = & \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - \bar{x})^\top \mathbf{Q} (x_i - \bar{x}) \\ & + \sum_{i=0}^{N-1} (u_i - \bar{u})^\top \mathbf{R} (u_i - \bar{u}) \\ & + (x_N - \bar{x})^\top \mathbf{P} (x_N - \bar{x}) \\ & + V_o(\bar{y} - r_k) \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\text{s.t.} \quad x_0 = x(k), \quad (2.39a)$$

$$x_{i+1} = \mathbf{A}x_i + \mathbf{B}u_i, \quad i = 0, 1, \dots, N-1; \quad (2.39b)$$

$$[x_i^\top \quad u_i^\top]^\top \in \mathbb{Z}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1; \quad (2.39c)$$

$$[\bar{x}^\top \quad \bar{u}^\top]^\top = \mathbf{M}_\theta \bar{\theta}, \quad (2.39d)$$

$$\bar{y} = \mathbf{M}_y \bar{\theta}, \quad (2.39e)$$

$$\bar{\theta} = u_{N-1} - \mathbf{K}_f x_{N-1}, \quad (2.39f)$$

$$[x_N^\top \quad \bar{\theta}^\top]^\top \in \mathcal{O}_{\infty, \lambda}^w, \quad (2.39g)$$

onde M_θ é considerado conforme apresentado na equação (2.38), $\mathbb{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{U}$, $\bar{\theta}$ é implicitamente definido pelas variáveis de otimização devido a nova parametrização do estado estacionário, e $\mathcal{O}_{\infty, \lambda}^w$ é calculado conforme apresentado por Limon et al. (2008a) com $\mathbf{L} = \mathbf{I}$. Uma aproximação para o máximo conjunto invariante admissível para seguimento de referência, $\mathcal{O}_{\infty, \lambda}^w$, é apresentado em detalhes no Apêndice C.

Premissas.

- (1) Considere que o par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é controlável, o par (\mathbf{C}, \mathbf{A}) é observável e x_k é conhecido.
- (2) Considere que o conjunto $\mathbb{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ é um poliedro convexo, compacto e não vazio com a origem em seu interior.
- (3) Considere $\mathbf{R} \in \Re^{m \times m}$ e $\mathbf{Q} \in \Re^{n \times n}$ são matrizes definidas positivas.
- (4) Considere que a função custo de erro estacionário $V_o : \Re^p \rightarrow \Re$ é definida positiva, convexa e subdiferenciável¹² tal que $V_o(0_p) = 0$.
- (5) Considere que $\mathbf{P} \in \Re^{n \times n}$ seja uma matriz definido positiva tal que $(\mathbf{A} + \mathbf{BK})^\top \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{BK}) - \mathbf{P} + \mathbf{K}^\top \mathbf{R} \mathbf{K} + \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} = \mathbf{0}$.
- (6) Existe uma lei de controle local estabilizante, $\mathbf{K}_f(x)$.
- (7) Considere que matriz $M_\theta = [M_x^\top \quad M_u^\top]^\top$ é definida por $\mathbf{M}_x = (\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BK}_f)^{-1} \mathbf{B}$, $\mathbf{M}_u = \mathbf{I} + \mathbf{K}_f \mathbf{M}_x$, e $\mathbf{M}_y = \mathbf{C} \mathbf{M}_x$.

¹² Definição 26 no Apêndice A

- (8) Considere que $\mathcal{O}_{\infty, \lambda}^w \subset \mathfrak{R}^{n+m}$ seja um conjunto invariante estendido para $x_{k+1} = \mathbf{A}x_k + \mathbf{B}u_k$ sujeito à $[x_k^\top \ u_k^\top]^\top \in \mathbb{Z}$ com $u_k = \mathbf{K}_f x_k + \bar{u}$ e $M_\theta \bar{u} \in \lambda \mathbb{Z}$, $\lambda \in (0, 1)$.

O Algoritmo 2 resume como implementar o MPC com garantia de estabilidade para seguimento de referência apresentado nesta seção. Importante notar que todos os passos do algoritmo, com exceção do último, são executados fora do loop de controle (*offline*).

Algoritmo 2: Implementação de MPC para seguimento de referência com garantia de estabilidade

Entrada: \mathbf{Q} , \mathbf{R} , N , \mathcal{U} , \mathcal{X} , r_k , $u_{r,k}$, λ e \mathbf{T}

Saída: Controlador preditivo para seguimento de referência com garantia de estabilidade

- 1 Escolhe-se as matrizes de ponderação \mathbf{Q} e \mathbf{R} , definindo o custo de etapa da função custo $L((x_{k+1})_Q, (u_{k+1})_R)$.

- 2 Define-se uma lei de controle estabilizante por realimentação $u_k = \mathbf{K}_f(x_k - \bar{x}) + \bar{u}$. Neste exemplo foi considerada a solução do problema de controle ótimo irrestrito - LQR.

- 3 Determina-se $\mathbf{P} > 0$ da equação matricial abaixo

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_f)^\top \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_f) - \mathbf{P} + \mathbf{K}_f^\top \mathbf{R} \mathbf{K}_f + \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} = 0.$$

- 4 Determina-se o custo terminal dado por

$$F(x(k+N|k)) = (x_{N|k})^\top \mathbf{P} (x_{N|k}).$$

- 5 Determina-se o custo do desvio, que para este trabalho é dado conforme abaixo, sendo \mathbf{T} , uma matriz definida positiva que penaliza o desvio entre o alvo desejado r_k e o alvo artificial \bar{y}

$$V_o(\bar{y} - r_k) = (\bar{y} - r_k)^\top \mathbf{T} (\bar{y} - r_k).$$

- 6 Obtém-se uma aproximação para o máximo conjunto invariante admissível para seguimento de referência $\mathcal{O}_{\infty, \lambda}^w$ associado a lei estabilizante implícita $u_k = \mathbf{K}_f(x_k - \bar{x}) + \bar{u}$, para utilizar como conjunto terminal, conforme apresentado no Apêndice C.

- 7 Resolve o problema de otimização dado pela Equação (2.39).

retorna $u = u^o(0; x)$

2.5 Controladores Preditivos Robustos para Seguimento de Referência com Garantia de Estabilidade

É bem conhecido que a ação de uma perturbação, mesmo que não seja persistente, pode tornar instável um controlador preditivo que é estável para o caso nominal. O ponto chave é que para garantir a estabilidade, o algoritmo deve primeiro garantir a factibilidade, que é a existência de uma sequência de entrada admissível que satisfaça as restrições e atenda às condições terminais. No entanto, a factibilidade não é assegurada pela minimização restrita do custo nominal para vetores de estado futuro sob qualquer perturbação (CHISCI; ROSSITER; ZAPPA, 2001).

Para solucionar esse problema, Algoritmos de Controladores Preditivos Robustos baseados em Modelo (RMPC, do inglês *Robust Model Predictive Control*) foram largamente estudados durante os últimos anos. O MPC de modo dual com contração das restrições baseado em previsões nominais foi originalmente proposto em (CHISCI; ROSSITER; ZAPPA, 2001). A estratégia baseada em tubo definida do mínimo conjunto robusto positivamente invariante (MRPI, do inglês *Minimal Robust Positively Invariant*) com o estado inicial livre foi apresentado em (MAYNE; SERON; RAKOVIĆ, 2005) de tal forma que uma função custo decrescente foi garantida. A versão com realimentação da saída do MPC baseado em tubo foi proposta em (MAYNE et al., 2006). O MPC robusto baseado em tubo para seguimento de referência constante foi proposto em (FERRAMOSCA et al., 2010). Uma versão melhorada do MPC baseado em tubo para reduzir o conservadorismo do MRPI foi apresentado em (RAKOVIĆ et al., 2012). Um MPC robusto para seguimento de zona em uma região derivado das previsões nominais foi apresentado em (FERRAMOSCA et al., 2012). Discussões relevantes sobre MPC robusto e estocásticos estão apresentadas em (MAYNE, 2015) e (KOUVARITAKIS; CANNON, 2015).

As estratégias baseadas em tubos são conhecidas devido a capacidade de assegurar atendimento as restrições de forma robusta. O MPC com contração das restrições baseado em previsões nominais são alternativas úteis com um número de variáveis de decisão equivalente à suas respectivas versões não robustas. Inspirado por Chisci, Rossiter e Zappa (2001) e Ferramosca et al. (2012), este trabalho considera um MPC robusto baseado nas previsões nominais considerando os ingredientes estabilizantes tradicionais de forma a assegurar um controlador preditivo robusto com garantia de estabilidade. Para isso será considerado a mesma estratégia de MPC para seguimento de referência apresentada na Seção 2.4 com a inclusão da ideia de restrições robustas e correção de referência para perturbações constantes, conforme apresentado em (SANTOS; CUNHA, 2023).

2.5.1 Restrições robustas

Considere um sistema por representação por espaço de estados, conforme Equação (2.20), desconsiderando o ruído de medição ($\nu_{k+1} = \nu_k = 0$)

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \mathbf{A}x_k + \mathbf{B}u_k + \mathbf{\Gamma}w_k, \\ y_k &= \mathbf{C}x_k, \end{aligned} \quad (2.40)$$

sendo $x_k \in \mathfrak{R}^n$, o vetor de estados no instante k , $u_k \in \mathfrak{R}^m$, o vetor do sinal de controle no instante k , $w_k \in \mathfrak{R}^{n_w}$, representa uma perturbação aditiva desconhecida no instante k e $y_k \in \mathfrak{R}^q$, o vetor de saída do processo no instante k . É considerado que o par (A, B) é controlável, o par (C, A) é observável, x_k é conhecido, $x_k \in \mathcal{X}$, $u_k \in \mathcal{U}$ e $w_k \in \mathcal{W}$, com $\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{W}$ sendo conjuntos compactos e convexos com a origem em seus interiores.

Considere a parametrização dos pontos estacionários desconsiderando a perturbação dada pela equação (2.38), com os autovalores de $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_f$ estando estritamente dentro do círculo unitário. Baseado na lei de controle estabilizante irrestrita ($u_k = \mathbf{K}_f x + \bar{\theta}$) e com $\mathbf{\Phi} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_f$, a contratação das restrições pode ser computada recursivamente como segue

$$\mathcal{X}_{j+1} = \mathcal{X}_j \ominus \mathbf{\Phi}^j \mathbf{\Gamma} \mathcal{W}, \quad j \in \mathbb{N}; \quad (2.41)$$

$$\mathcal{U}_{j+1} = \mathcal{U}_j \ominus \mathbf{K}_f \mathbf{\Phi}^j \mathbf{\Gamma} \mathcal{W}, \quad j \in \mathbb{N}; \quad (2.42)$$

onde $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}$ and $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}$ e \ominus é a diferença de Pontryagin¹³.

Estes conjuntos são utilizados para definir as restrições do MPC tal que a factibilidade recursiva e as restrições robustas sejam satisfeitas. A ideia principal é remover a propagação do pior caso das restrições baseada em uma lei auxiliar de realimentação de estados. Uma aproximação simplificada pode ser obtida diretamente de uma aproximação para o mínimo conjunto robusto positivamente invariante (KOUVARITAKIS; CANNON, 2015; LIMON et al., 2008b; SANTOS; CUNHA, 2023). Detalhes para a obter aproximações internas tais que $\mathcal{U}_{inner, \infty} \subset \mathcal{U}_\infty$ e $\mathcal{X}_{inner, \infty} \subset \mathcal{X}_\infty$ são revisitadas no Apêndice D.

O conjunto nominal de alvos admissíveis, considerando a representação dada pelas equações (2.32) e (2.33), são definidos por

$$\bar{\mathcal{Y}} = \{y \in \mathfrak{R}^m : y = \mathbf{M}_y \bar{\theta}, x = \mathbf{M}_x \bar{\theta} \in \text{Int}(\mathcal{X}_\infty), u = \mathbf{M}_u \bar{\theta} \in \text{Int}(\mathcal{U}_\infty)\}. \quad (2.43)$$

Na prática, para simplificar o esforço computacional, as restrições $x = \mathbf{M}_x \bar{\theta} \in$

¹³ Definição 24 no Apêndice A

$\text{Int}(\mathcal{X}_\infty)$ e $u = \mathbf{M}_u \bar{\theta} \in \text{Int}(\mathcal{U}_\infty)$ podem ser substituídas, respectivamente, por $x = \mathbf{M}_x \bar{\theta} \in \lambda \mathcal{X}_{inner,\infty}$ e $u = \mathbf{M}_u \bar{\theta} \in \lambda \mathcal{U}_{inner,\infty}$, onde $0 < \lambda < 1$ como discutido no Apêndice E.

2.5.2 MPC robusto para seguimento de referência com garantia de estabilidade para sistemas lineares com restrições

A lei de controle do MPC robusto é derivada do seguinte problema de otimização

$$\mathcal{P}_N(x_k) : \min_{\mathbf{u}_k, \bar{\theta}_k} V(\mathbf{u}_k, \bar{\theta}_k; x_k, r_k) \quad (2.44a)$$

$$\text{s.t. } x_0 = x(k), \quad (2.44b)$$

$$[\bar{x}_k^\top \ \bar{u}_k^\top]^\top = \mathbf{M}_\theta \bar{\theta}_k, \quad (2.44c)$$

$$\bar{y}_k = \mathbf{M}_y \bar{\theta}_k, \quad (2.44d)$$

$$x_{i+1|k} = \mathbf{A}x_{i|k} + \mathbf{B}u_{i|k}, \quad i \in \mathbb{N}_{[0, N-1]}; \quad (2.44e)$$

$$x_{i|k} \in \mathcal{X}_i, \quad i \in \mathbb{N}_{[1, N-1]}; \quad (2.44f)$$

$$u_{i|k} \in \mathcal{U}_i, \quad i \in \mathbb{N}_{[0, N-1]}; \quad (2.44g)$$

$$[x_{N|k}^\top \ \bar{\theta}_k^\top]^\top \in \mathcal{Z}_f, \quad (2.44h)$$

onde

$$\begin{aligned} V(\mathbf{u}_k, \bar{\theta}_k; x_k, r_k) &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\|y_{i|k} - \bar{y}_k\|_Q^2 + \|u_{i|k} - \bar{u}_k\|_R^2 \right) + \|x_{N|k} - \bar{x}_k\|_P^2 \\ &\quad + \|\bar{y}_k - r_k\|_T^2, \end{aligned}$$

com M_θ considerado conforme apresentado na equação (2.38), $\bar{\theta}$ obtido da resolução do problema de otimização e \mathcal{Z}_f pode ser derivado de algoritmos padrões para MPC de seguimento de referência como em Paulson, Santos e Mesbah (2019). Uma estratégia para obtenção do conjunto terminal é apresentada no Apêndice E.

O alvo ótimo admissível nominal (r_k^o) é definido pelo seguinte problema de otimização auxiliar, resolvido implicitamente pelo problema de otimização da Equação (2.44h)

$$\min_{\theta} \|r_k - \bar{y}^o\|_T \quad (2.45a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{M}_y \bar{\theta} = \bar{y}^o, \quad (2.45b)$$

$$[(\mathbf{M}_x \bar{\theta})^\top \ \bar{\theta}^\top]^\top \in \mathcal{Z}_f. \quad (2.45c)$$

Premissas.

- (1) Considere que o par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é controlável, o par (\mathbf{C}, \mathbf{A}) é observável e x_k é conhecido.
- (2) Considere que os conjuntos $\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{W}$ são compactos, convexos e com a origem em seus interiores.
- (3) Considere $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ e $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ são matrizes definidas positivas.
- (4) Considere que a função custo de erro estacionário $V_o : \mathfrak{R}^p \rightarrow \mathfrak{R}$ é definida positiva, convexa e subdiferenciável tal que $V_o(0_p) = 0$ ($V_o = \|\bar{y}_k - r_k\|_T^2$).
- (5) Considere que $\mathbf{P} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ seja uma matriz definido positiva tal que $(\mathbf{A} + \mathbf{BK})^\top \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{BK}) - \mathbf{P} + \mathbf{K}^\top \mathbf{R} \mathbf{K} + \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} = \mathbf{0}$.
- (6) Existe uma lei de controle local estabilizante, $\mathbf{K}_f(x)$.
- (7) Considere que matriz $M_\theta = [M_x^\top \quad M_u^\top]^\top$ é definida por $\mathbf{M}_x = (\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BK}_f)^{-1} \mathbf{B}$, $\mathbf{M}_u = \mathbf{I} + \mathbf{K}_f \mathbf{M}_x$, e $\mathbf{M}_y = \mathbf{C} \mathbf{M}_x$.
- (8) Considere que $\mathcal{Z}_f \subset \mathfrak{R}^{n+m}$ seja um conjunto invariante estendido tal que $[x^\top \quad \bar{\theta}^\top]^\top \in \mathcal{Z}_f \Rightarrow [(\mathbf{A} + \mathbf{BK}_f)x + \mathbf{B} \mathbf{L} \bar{\theta} + (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_f)^N \mathbf{\Gamma} w]^\top \quad \bar{\theta}^\top]^\top \in \mathcal{Z}_f$, $\forall w \in \mathcal{W}$, $\mathcal{Z}_f \subseteq \mathcal{X}_N$, $[\mathbf{K}_f \quad \mathbf{L}] \mathcal{Z}_f \subseteq \mathcal{U}_N$, $[\mathbf{0}_{m,n} \quad \mathbf{M}_x] \mathcal{Z}_f \subseteq \mathcal{X}_\infty$, e $[\mathbf{0}_{m,n} \quad \mathbf{M}_u] \mathcal{Z}_f \subseteq \mathcal{U}_\infty$.

O Algoritmo 3 resume como implementar o MPC com garantia de estabilidade para segmento de referência apresentado nesta seção. Assim como nos casos anteriores, o último passo é o único realizado no loop de controle.

Algoritmo 3: Implementação de MPC robusto para seguimento de referência com garantia de estabilidade

Entrada: \mathbf{Q} , \mathbf{R} , N , \mathcal{U} , \mathcal{X} , r_k , $u_{r,k}$, λ e \mathbf{T}

Saída: Controlador preditivo robusto para seguimento de referência com garantia de estabilidade

1 Escolhe-se as matrizes de ponderação \mathbf{Q} e \mathbf{R} , definindo o custo de etapa da função custo $L((x_{k+1})_{\mathbf{Q}}, (u_{k+1})_{\mathbf{R}})$.

2 Define-se uma lei de controle estabilizante por realimentação $u_k = \mathbf{K}_f(x_k - \bar{x}) + \bar{u}$. Neste exemplo foi considerada a solução do problema de controle ótimo irrestrito - LQR.

3 Determina-se $\mathbf{P} > 0$ da equação matricial abaixo

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BK}_f)^\top \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_f) - \mathbf{P} + \mathbf{K}_f^\top \mathbf{R} \mathbf{K}_f + \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} = 0.$$

4 Determina-se o custo terminal dado por

$$F(x(k + N|k)) = (x_{N|k})^\top \mathbf{P} (x_{N|k}).$$

5 Determina-se o custo do desvio, que para este trabalho é dado conforme abaixo, sendo \mathbf{T} , uma matriz definida positiva que penaliza o desvio entre o alvo desejado r_k e o alvo artificial \bar{y}

$$V_o(\bar{y} - r_k) = (\bar{y} - r_k)^\top \mathbf{T} (\bar{y} - r_k).$$

6 Obtém-se uma aproximação para o máximo conjunto invariante admissível para seguimento de referência com robustez \mathcal{Z}_f associado a lei estabilizante implícita $u_k = \mathbf{K}_f(x_k - \bar{x}) + \bar{u}$, para utilizar como conjunto terminal, conforme apresentado no Apêndice E.

7 Resolve o problema de otimização dado pela Equação (2.44).

retorna $u = u^o(0; x)$

A prova da factibilidade recursiva e a análise da convergência estão demonstradas no Apêndice F. A prova da factibilidade recursiva segue os principais passos de (CHISCI; ROSSITER; ZAPPA, 2001; FERRAMOSCA et al., 2012) e as propriedades de convergência derivam da versão linear da prova apresentada em (CUNHA; SANTOS, 2022). Devido a complexidade, ambas foram apresentadas já considerando a representação aumentada para inclusão da dinâmica dos desacopladores, proposta por este trabalho (Capítulo 3). O Apêndice F também mostra que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_k - \bar{y}^o\| \rightarrow 0$ se $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k \rightarrow 0$. Este resultado vem da estratégia da predição nominal, mas não é suficiente na presença de perturbação

constante como é desejado para o caso do problema de controle para seguimento de referência sem erro estacionário. Uma alternativa interessante é utilizar uma correção de referência (LIMÓN et al., 2010; PAULSON; SANTOS; MESBAH, 2019; SANTOS; CUNHA, 2021) baseada em um estimador de perturbação com o intuito de evitar o erro estacionário constante com a factibilidade recursiva não sendo afetada pela mudança do alvo. Esta estratégia será utilizada e esta explicada na Subseção 5.5, já considerando o modelo de representação aumentada para inclusão da dinâmica dos desacopladores proposto por este trabalho.

Uma vantagem significativa desta estratégia de MPC robusto se comparado com outros MPC não robustos vem do fato de que factibilidade recursiva e atendimento à restrições robustas são garantidas. Contudo, uma redução do domínio de atração é verificado devido a contração das restrições, algo comumente esperado devido ao conservadorismo imposto por estratégias de controle robusto.

3 Representação aumentada com desacopladores

Neste capítulo será apresentada uma formulação de representação em espaço de estados aumentada para uso em controladores preditivos. O modelo apresentado é genérico e pode ser aplicado nas mais diversas abordagens de controladores MPC.

3.1 Definição do problema

Considere uma representação em espaço de estados similar a definida na Equação 2.20

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= \mathbf{A}x_k + \mathbf{B}u_k + \mathbf{\Gamma}w_k, \\y_k &= \mathbf{C}x_k + \nu_k,\end{aligned}\tag{3.1}$$

sendo $x_k \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados num instante k , $u_k \in \mathbb{R}^m$ representa o vetor do sinal de controle, $w_k \in \mathbb{R}^{n_p}$ representa uma perturbação aditiva desconhecida, $\nu_k \in \mathbb{R}^m$ representa um ruído de medição e $y_k \in \mathbb{R}^m$ o vetor de saída do processo.

Importante destacar que tanto u_k como y_k pertencem a \mathbb{R}^m , ou seja, o número de entradas do sistema é igual ao número de saídas. A abordagem proposta se restringe a modelos quadrados, sendo uma definição típica em estratégias de controle baseadas em desacopladores (GAGNON; POMERLEAU; DESBIENS, 1998). Também será assumido que o par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é controlável, o par (\mathbf{C}, \mathbf{A}) é observável, x_k é conhecido, $x_k \in \mathcal{X}$, $u_k \in \mathcal{U}$ e $w_k \in \mathcal{W}$. Além disso, \mathcal{X} , \mathcal{U} e \mathcal{W} são conjuntos compactos e convexos com a origem em seu interior.

Uma estratégia de controle preditivo, como visto na Equação 2.17, pode ser definida com vista a minimizar um custo dado $V(x_k, r_k, u_{r,k}; \mathbf{u}(k))$ no qual $r_k \in \mathbb{R}^m$ é um vetor de referência e $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^{m \times N_u}$ é um vetor com N_u controles futuros.

No presente trabalho será apresentada uma formulação de representação em espaço de estados aumentada que permite assegurar uma resposta desacoplada na ausência de restrições ativas para os mais diversos algoritmos de controladores preditivos que utilizam a representação do modelo por espaço de estados.

3.1.1 Otimalidade não garante desacoplamento

Tendo em vista a presença de acoplamento significativo entre a entrada (u_k) e saída (y_k), considere que o sistema encontra-se em regime permanente com $y_{k-1} = y_{k-2} = r_{k-1}$. Então assuma que ocorre uma mudança de referência no instante k tal que $\Delta r_k = r_k - r_{k-1} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^\top$. No que diz respeito ao conjunto de controles futuros que otimiza o critério ótimo ($V(x_k, r_k, u_{r,k}; \mathbf{u}^o(k))$), não há motivos para esperar que o impacto de $\Delta r_k = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^\top$ se manifeste apenas no primeiro elemento do vetor de saída, pois todo vetor u_k e todos os elementos do erro do seguimento de referência ($y_{k+1|k} - r_k$) podem ser explorados com vistas a minimizar a função custo dada por $V(x_k, r_k, u_{r,k}; \mathbf{u}(k))$. Por consequência, o impacto da mudança de referência ($\Delta r_k = r_k - r_{k-1} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^\top$) no vetor de saídas (y_{k+1}) depende dos parâmetros de ajuste da função custo de etapa (\mathbf{Q}_y e \mathbf{R}). Naturalmente, há um sacrifício do erro de seguimento de referência de todas as saídas visando a minimização de $V(x_k, r_k, u_{r,k}; \mathbf{u}(k))$ na presença de acoplamentos significativos.

3.1.2 Desacoplamento para casos sem restrição

A solução ótima para o caso sem restrição pode ser obtida com desacoplamento se $V(x_k, r_k, v_{r,k}; \mathbf{v}(k))$, onde \mathbf{Q}_y e \mathbf{R} são matrizes diagonais, $Y(z) = \mathbf{H}(z)V(z)$ é uma matriz de transferência diagonal, $\mathbf{v}(k) = [v_{k|k}^\top \ \dots \ v_{k+N_u-1|k}^\top]^\top$, e v_k representa o controle virtual para um sistema desacoplado $\mathbf{H}(z)$. Neste caso, $V(x_k, r_k, v_{r,k}; \mathbf{v}(k))$ pode ser decomposto em m problemas de otimização independentes como segue $V(x_k, r_k, v_{r,k}; \mathbf{v}(k)) = \sum_{\ell=1}^m V_\ell(x_k, r_k, v_{r,k}; \mathbf{v}(k))$, onde $[v_{k+j|k}^\circ]_\ell$, $j = 0, 1, \dots, N_u - 1$ define apenas o valor ideal de $V_\ell(x_k, r_k, v_{r,k}; \mathbf{v}(k))$. Este tipo de solução explícita foi usada em trabalhos relacionados (MIDDLETON; ADAMS, 2008; ZHANG, 2013; ZHANG; GAO, 2015), mas o mapeamento linear é necessário para impor restrições em u_{k+j} quando $\mathbf{v}(k)$ torna-se a nova variável de decisão. Se forem utilizados ingredientes estabilizadores, robustos ou não, o mapeamento de restrições deverá ser considerado, o que é normalmente negligenciado na literatura relacionada.

3.2 Representação de desacopladores por equação de estados

Considere que o modelo entrada-saída referente ao sistema (3.1) é dado por

$$\mathbf{P}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}. \quad (3.2)$$

Um desacoplador causal e estável, definido pela matriz de transferência $\mathbf{D}(z) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, é um sistema dinâmico tal que

$$\mathbf{P}_{\mathbf{D}}(z) = \mathbf{P}(z)\mathbf{D}(z), \quad (3.3)$$

sendo $\mathbf{P}_{\mathbf{D}}(z) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ uma matriz de transferência diagonal. Para preservar a estabilidade interna, $\mathbf{D}(z)$ deve ser estável e não pode ocorrer o cancelamento entre polos instáveis e zeros de transmissão fora do interior do círculo unitário na multiplicação $\mathbf{P}(z)\mathbf{D}(z)$. Em outras palavras, os polos e os zeros de transmissão de $\mathbf{P}(z)$ devem ser preservados em $\mathbf{P}_{\mathbf{D}}(z)$.

Deve-se observar que a relação da entrada virtual (entrada desacoplada) para a entrada efetiva é dada por

$$U(z) = \mathbf{D}(z)V(z), \quad (3.4)$$

sendo $Y(z) = \mathbf{P}_{\mathbf{D}}(z)V(z)$ com $Y_j(z) = P_D^{j,j}(z)V_j(z)$, na ausência de perturbações.

Como $\mathbf{D}(z)$ é causal, uma realização mínima em espaço de estados é dada por

$$\begin{aligned} \psi_{k+1} &= \mathbf{A}_{\mathbf{D}}\psi_k + \mathbf{B}_{\mathbf{D}}v_k, \\ u_k &= \mathbf{C}_{\mathbf{D}}\psi_k + \mathbf{D}_{\mathbf{D}}v_k, \end{aligned} \quad (3.5)$$

sendo $\psi_k \in \mathfrak{R}^{n_d}$ o vetor de estados num instante k , $v_k \in \mathfrak{R}^m$ representa o vetor do sinal de controle virtual (entrada do desacoplador) e $u_k \in \mathfrak{R}^m$ o vetor do sinal de controle (saída do desacoplador). Qualquer realização mínima pode ser utilizada neste caso sem perda de generalização. É razoável partir de uma condição de equilíbrio tal que assume-se que ψ_0 é conhecido.

Como dito anteriormente, as estratégias de controle preditivo com desacopladores, costuma-se utilizar $\mathbf{P}_{\mathbf{D}}(z)$ como modelo de predição que relaciona v_k e y_k . Assim, o problema pode ser tratado como um conjunto de m sistemas monovariáveis. Essa abordagem simplifica o problema, mas despreza a dinâmica do desacoplador, o que dificulta a imposição das condições estabilizantes na presença de restrições em u_k . Para evitar este problema, será usada uma representação aumentada, para fins de predição, que preserva a dinâmica interna do desacoplador.

3.3 Representação aumentada com desacopladores

Considere, agora, uma representação aumentada onde o vetor de estados é formado pela concatenação dos vetores de estados do modelo da planta dado pela Equação (3.1) e do modelo do desacoplador representado pela Equação (3.5), tem-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \psi_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}_{n,n_d} \\ \mathbf{0}_{n_d,n} & \mathbf{A}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \psi_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{n_d,m} \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n,m} \\ \mathbf{B}_D \end{bmatrix} v_k + \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{0}_{n_d,n_w} \end{bmatrix} w_k, \\ y_k &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0}_{m,n_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \psi_k \end{bmatrix} + \nu_k. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Substituindo a expressão do sinal de controle da Equação (3.5), $u_k = \mathbf{C}_D \psi_k + \mathbf{D}_D v_k$, na Eq. (3.6), chega-se à seguinte representação

$$\begin{aligned} \chi_{k+1} &= \mathbf{A}_\chi \chi_k + \mathbf{B}_\chi v_k + \mathbf{\Gamma}_\chi w_k, \\ y_k &= \mathbf{C}_\chi \chi_k + \nu_k, \end{aligned} \quad (3.7)$$

sendo $\chi_k = [x_k^\top \ \psi_k^\top]^\top$ e as matrizes aumentadas definidas por

$$\mathbf{A}_\chi = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}\mathbf{C}_D \\ \mathbf{0}_{n_d,n} & \mathbf{A}_D \end{bmatrix}, \mathbf{B}_\chi = \begin{bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{D}_D \\ \mathbf{B}_D \end{bmatrix}, \mathbf{\Gamma}_\chi = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{0}_{n_d,n_w} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_\chi = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0}_{m,n_d} \end{bmatrix}.$$

Nesta formulação, há de se destacar que: (i) x_k é um vetor de estados medido no instante “ k ”; (ii) o vetor de estados do desacoplador, $\psi_k = \mathbf{A}_D \psi_{k-1} + \mathbf{B}_D v_{k-1}$, é calculado a cada instante “ k ”; (iii) o sinal de controle virtual, v_k , é obtido a partir da estratégia de controle preditivo por meio de um algoritmo de otimização e (iv) $u_k = \mathbf{C}_D \psi_k + \mathbf{D}_D v_k$ é o sinal de controle efetivamente aplicado à entrada do processo. Ao contrário das estratégias de controle preditivo que estão baseadas num modelo desacoplado, $\mathbf{P}_d(z)$, as restrições para o controle efetivo podem ser expressas diretamente por uma combinação linear dos estados com o controle virtual, isto é

$$u_k = \mathbf{F}_\chi \chi_k + \mathbf{F}_v v_k, \quad (3.8)$$

com $\mathbf{F}_\chi = [\mathbf{0} \ \mathbf{C}_D]$ e $\mathbf{F}_v = \mathbf{D}_D$. Como o sistema é invariante no tempo, esta transformação linear pode ser diretamente aplicada para a predição como segue

$$u_{k+j|k} = \mathbf{F}_\chi \chi_{k+j|k} + \mathbf{F}_v v_{k+j|k}. \quad (3.9)$$

Considerando a Equação (3.8), a nova restrição de entrada pode ser expressa por

$$[\chi_k^\top \ v_k^\top]^\top \in \mathbb{Z} \rightarrow u_k \in \mathbb{U}, \quad (3.10)$$

onde $\mathbb{Z} = \{[\chi^\top \ v^\top]^\top \in \mathfrak{R}^{n+n_d+m} \mid \mathbf{F}_\chi \chi + \mathbf{F}_v v \in \mathbb{U}\}$.

Para o caso em que é considerada uma realimentação de estados dada por $v_k = \mathbf{K}_\chi \chi_k$. Uma restrição poliedral para o sinal de controle, descrita na forma $\mathbf{H}_u u_k \leq g_u$, pode ser reescrita por meio de uma restrição nos estados dada por

$$\mathbf{H}_u (\mathbf{F}_\chi \chi_k + \mathbf{F}_v \mathbf{K}_\chi \chi_k) \leq g_u. \quad (3.11)$$

Esta transformação é importante para fins de determinação do conjunto terminal que assegura a admissibilidade da lei implícita estabilizante, garantindo factibilidade recursiva e, se desejado, otimalidade local - no interior do conjunto invariante.

A título de exemplo, assumindo $\mathbf{R} > 0$ e $\mathbf{Q}_y > 0$, é possível calcular uma lei de controle ($v_k = \mathbf{K}_\chi \chi_k$) tal que

$$\Phi_\chi^\top \mathbf{P}_\chi \Phi_\chi - \mathbf{P}_\chi + \mathbf{K}_\chi^\top \mathbf{R} \mathbf{K}_\chi + \mathbf{C}_\chi^\top \mathbf{Q}_y \mathbf{C}_\chi = \mathbf{0},$$

com $\mathbf{P}_\chi > 0$ e $\Phi_\chi = \mathbf{A}_\chi + \mathbf{B}_\chi \mathbf{K}_\chi$. Essa lei pode ser a própria solução do regulador linear quadrático (LQR) ou outra realimentação de estados linear. Tendo em vista restrições nos estados e no controle na forma $\mathcal{X} = \{x_k \in \mathfrak{R}^n : \mathbf{H}_x x_k \leq g_x\}$ e $\mathcal{U} = \{u_k \in \mathfrak{R}^m : \mathbf{H}_u u_k \leq g_u\}$, pode-se calcular o máximo conjunto poliedral admissível positivamente invariante¹, \mathcal{O}_∞ , tal que

$$\chi_k \in \mathcal{O}_\infty \Rightarrow (\mathbf{A}_\chi + \mathbf{B}_\chi \mathbf{K}_\chi) \chi_k \in \mathcal{O}_\infty, \quad (3.12)$$

com $(\mathbf{F}_\chi + \mathbf{F}_v \mathbf{K}_\chi) \mathcal{O}_\infty \subset \mathcal{U}$, $\forall \chi_k \in \mathcal{O}_\infty$ e $[\mathbf{I} \ \mathbf{0}] \mathcal{O}_\infty \subset \mathcal{X}$, $\forall \chi_k \in \mathcal{O}_\infty$.

Desta forma, é possível implementar estratégias com desacopladores usando controladores preditivos lineares com garantia de estabilidade a exemplo de (LIMON et al., 2008a) e (FERRAMOSCA et al., 2009), bem como, o algoritmo 1 apresentado na seção

¹ O conjunto invariante não necessariamente precisa ser o máximo (\mathcal{O}_∞) como indicado em (GILBERT; TAN, 1991), mas é comum utilizá-lo para aumentar o domínio de atração.

2.3.2.

As técnicas de controle preditivo baseadas em desacopladores são definidas tais que duas condições devem ser atendidas para assegurar desacoplamento no caso nominal (sem restrições e sem erros de modelagem): condição (i), a função custo $V(x_k, r_k, u_{r,k}; \mathbf{u}(k))$ deve ser convexa com parcelas quadráticas desacopladas e condição (ii), a solução ótima \mathbf{v}_k^o não deve apresentar restrições ativas durante o regime transitório. A Condição (i) implica que todas as parcelas sejam na forma $\delta_i y_i(k + j|k)^2$ ou $\rho_i v_i(k + j|k)^2$ com $\delta_i > 0$ e $\rho_i > 0$. Isto é naturalmente assegurada por meio de matrizes $\mathbf{Q}_y > 0$ e $\mathbf{R} > 0$ diagonais. A Condição (ii) não pode ser assegurada *a priori*, pois a presença de restrições ativas depende de fatores como amplitude da mudança de referência e ponderações da função custo. Não obstante, devido às características lineares do modelo do sistema controlado, quanto menor for o período com restrições ativas, menor será o efeito do acoplamento na resposta à mudança de referência. Esta é uma propriedade importante, pois a resposta com acoplamento pode eventualmente ocorrer, mas seu efeito será mitigado caso a ocorrência de restrições ativas não ocorra num intervalo prolongado.

Para demonstrar a flexibilidade da representação aumentada proposta, os dois próximos capítulos apresentarão aplicações com abordagens diferentes de controladores preditivos.

4 Controle preditivo desacoplado com garantia de estabilidade

Neste capítulo será utilizada a representação em espaço de estados aumentada apresentada no Capítulo 3 aplicada a uma estratégia de MPC permitindo assegurar uma resposta desacoplada na ausência de restrições ativas e incorporando a garantia de estabilidade de controladores preditivos com convergência e factibilidade recursiva assegurada para o problema do controle regulatório, conforme apresentada na Seção 2.3.

4.1 Modelo de velocidade para a representação aumentada desacoplada

Utilizando a representação aumentada sugerida pela Equação (3.7) no modelo de velocidade apresentado pela Equação (2.21) temos

$$\begin{aligned}\xi_{k+1+j|k} &= \mathbf{A}_\xi \xi_{k+j|k} + \mathbf{B}_\xi \Delta v_{k+j|k}, \\ y_{k+j|k} &= \mathbf{C}_\xi \xi_{k+j|k},\end{aligned}\tag{4.1}$$

sendo $\xi_k = [\Delta \chi_k^\top \ y_k^\top]^\top$, $\xi_{k+j|k} = [\Delta \chi_{k+j|k}^\top \ y_{k+j|k}^\top]^\top$ e com as matrizes aumentadas definidas conforme a seguir

$$\mathbf{A}_\xi = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\chi & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_\chi \mathbf{A}_\chi & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_\xi = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_\chi \\ \mathbf{C}_\chi \mathbf{B}_\chi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_\xi = [\mathbf{0} \ \mathbf{I}].$$

Usando o modelo de velocidade, a combinação linear que define o incremento de controle passa a ser

$$\Delta u_k = \mathbf{F}_\xi \xi_k + \mathbf{F}_v \Delta v_k,\tag{4.2}$$

com $\mathbf{F}_\xi = [\mathbf{F}_\chi \ \mathbf{0}] = [\mathbf{0} \ \mathbf{C}_D \ \mathbf{0}]$ e $\mathbf{F}_v = \mathbf{D}_D$.

4.2 Ingredientes estabilizantes

Considerando as definições apresentadas na Seção 2.3.2, os "ingrediente" para garantia de estabilidade em sistemas lineares com controle MPC são: (i) uma lei de controle estabilizante local, (ii) um custo terminal, e (iii) um conjunto de restrição terminal.

Para a representação aumentada proposta neste trabalho, a lei estabilizante implícita é dada por

$$\Delta v_k = \mathbf{K}_\xi(\xi_k - \xi_{eq,r}), \quad (4.3)$$

com \mathbf{K}_ξ e o custo terminal podendo ser determinado pela solução do problema LQR:

$$\Phi^\top \mathbf{P} \Phi - \mathbf{P} = -\mathbf{K}_\xi^\top \mathbf{R} \mathbf{K}_\xi - \mathbf{C}_\xi^\top \mathbf{Q} \mathbf{C}_\xi, \quad (4.4)$$

com $\Phi = (\mathbf{A}_\xi + \mathbf{B}_\xi \mathbf{K}_\xi)$ e $\xi_{eq,r} = [\mathbf{0}^\top \ r^\top]^\top$.

Deve-se notar que $\xi_{eq,r}$ e u_r definem uma translação da origem da representação em espaço de estados para fins de regulação com

$$\xi_{eq,r} = \mathbf{A}_\xi \xi_{eq,r} \Rightarrow \xi_{k+1+j|k} - \xi_{eq,r} = \mathbf{A}_\xi(\xi_{k+j|k} - \xi_{eq,r}) + \mathbf{B}_\xi \Delta v_{k+j|k}, \quad (4.5a)$$

$$u_k = \Delta u_k + u_{k-1} \Rightarrow u_k - u_r = \Delta u_k + u_{k-1} - u_r. \quad (4.5b)$$

Esta translação não interfere no cálculo do custo terminal, pois, considerando $\Delta v_k = \mathbf{K}_\xi(\xi_k - \xi_{eq,r})$, o modelo de predição $\xi_{k+1+j|k} = \mathbf{A}_\xi \xi_{k+j|k} + \mathbf{B}_\xi \Delta v_{k+j|k}$ resulta em

$$\xi_{k+1+j|k} - \xi_{eq,r} = (\mathbf{A}_\xi + \mathbf{B}_\xi \mathbf{K}_\xi)(\xi_{k+j|k} - \xi_{eq,r}). \quad (4.6)$$

A única diferença significativa, em relação aos ingredientes estabilizantes, diz respeito à definição do conjunto terminal uma vez que, para permitir uma representação de restrição na forma poliedral $\mathcal{U} = \{u_k \in \mathfrak{R}^m : \mathbf{H}_u u_k \leq g_u\}$, a restrição em Δu_k deve ser convertida para $u_k = \Delta u_k + u_{k-1}$, o que implica a necessidade da incorporação da dinâmica de u_{k-1} como segue

$$\begin{bmatrix} \tilde{\xi}_{k+1+j|k} \\ \tilde{u}_{k+j|k} \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}_\xi & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_\xi & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_\xi \\ \mathbf{F}_v \end{bmatrix} [\mathbf{K}_\xi \ \mathbf{0}] \right)}_{\mathbf{A}_a} \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_{k+j|k} \\ \tilde{u}_{k-1+j|k} \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

sendo $\tilde{\xi}_{k+j|k} = \xi_{k+j|k} - \xi_{eq,r}$ e $\tilde{u}_{k-1+j|k} = u_{k-1+j|k} - u_r$.

Uma aproximação para o máximo conjunto poliedral admissível positivamente invariante, considerando a representação auemtnada proposta neste trabalho, é apresentando no Apêndice B.

4.2.1 MPC regulatório desacoplado com garantia de estabilidade para sistemas lineares com restrições

Considerando os ingredientes estabilizantes apresentados, a estratégia baseada em desacoplamento recai na formulação usual de uma técnica de controle preditivo com garantias de estabilidade obtida com um problema de otimização como segue

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_N(x_k) : \min_{\Delta \mathbf{v}(k)} & V(\xi_k, u_{k-1}, r_k; \Delta \mathbf{v}(k)) & (4.8) \\ \text{s.t.} & \\ & \xi_0 = \xi(k), \\ & \xi_{i+1} = \mathbf{A}_\xi \xi_i + \mathbf{B}_\xi \Delta v_i, & i = 0, 1, \dots, N-1; \\ & u_i \in \mathcal{U}, & i = 0, 1, \dots, N-1; \\ & \Delta u_i \in \Delta \mathcal{U}, & i = 0, 1, \dots, N-1; \\ & x_i \in \mathcal{X}, & i = 0, 1, \dots, N-1; \\ & [\xi_N^\top \ u_{N-1}^\top] \in \Omega_\epsilon^{r_k}. \end{aligned}$$

A função custo é dada por

$$\begin{aligned} V(\xi_k, u_{k-1}, r_k; \Delta \mathbf{v}(k)) &= \sum_{j=1}^{N-1} (y_j - r_k)^\top \mathbf{Q} (y_j - r_k) \\ &+ \sum_{j=0}^{N_v} \Delta v_j^\top \mathbf{R} \Delta v_j \\ &+ (\xi_N - \xi_{eq})^\top \mathbf{P} (\xi_N - \xi_{eq}). \end{aligned}$$

Premissas.

- (1) Considere que o par $(\mathbf{A}_\xi, \mathbf{B}_\xi)$ é controlável, o par $(\mathbf{C}_\xi, \mathbf{A}_\xi)$ é observável e ξ_k é conhecido.
- (2) Considere que os conjuntos \mathcal{X} , \mathcal{U} e $\Delta \mathcal{U}$ são compactos, convexos e com a origem em seus interiores.

- (3) Considere $\mathbf{R} \in \Re^{m \times m}$ uma matriz semi-definida positiva e $\mathbf{Q} \in \Re^{n \times n}$ uma matriz definida positiva.
- (4) Considere que $\mathbf{P}_\xi \in \Re^{n \times n}$ seja uma matriz definida positiva tal que $(\mathbf{A}_\xi + \mathbf{B}_\xi \mathbf{K}_\xi)^\top \mathbf{P}_\xi (\mathbf{A}_\xi + \mathbf{B}_\xi \mathbf{K}_\xi) - \mathbf{P}_\xi + \mathbf{K}_\xi^\top \mathbf{R} \mathbf{K}_\xi + \mathbf{C}_\xi^\top \mathbf{Q} \mathbf{C}_\xi = \mathbf{0}$.
- (5) Existe uma lei de controle local estabilizante, $\mathbf{K}_\xi(x)$.
- (6) O conjunto terminal $\Omega_\epsilon^{r_k}$ é positivamente invariante admissível sob $\mathbf{K}_\xi(x)$.

Dessa forma, a implementação do MPC com garantia de estabilidade, considerando a estratégia do controle preditivo desacoplado apresentada acima, pode ser realizada seguindo o Algoritmo 4

Algoritmo 4: Implementação de MPC regulatório desacoplado com garantia de estabilidade

Entrada: $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, N, N_u, \mathcal{U}, \Delta \mathcal{U}, \mathcal{X}, r_k$ e $u_{r,k}$

Saída: Controlador preditivo regulatório desacoplado com garantia de estabilidade

- 1 Escolhe-se as matrizes de ponderação \mathbf{Q} e \mathbf{R} , definindo o custo de etapa da função custo $L((y_{k+1})_Q, (u_{k+1})_R)$.
- 2 Define-se uma lei de controle estabilizante por realimentação $\Delta v_k = \mathbf{K}_\xi(\xi_k - \xi_{eq,r})$. Neste exemplo foi considerada a solução do problema de controle ótimo irrestrito - LQR.
- 3 Determina-se $\mathbf{P}_\xi > 0$ da equação matricial abaixo

$$(\mathbf{A}_\xi + \mathbf{B}_\xi \mathbf{K}_\xi)^\top \mathbf{P}_\xi (\mathbf{A}_\xi + \mathbf{B}_\xi \mathbf{K}_\xi) - \mathbf{P}_\xi + \mathbf{K}_\xi^\top \mathbf{R} \mathbf{K}_\xi + \mathbf{C}_\xi^\top \mathbf{Q} \mathbf{C}_\xi = \mathbf{0}.$$
- 4 Determina-se o custo terminal dado por

$$F(x(k+N|k)) = (x_{N|k})^\top \mathbf{P}_\xi (x_{N|k}).$$
- 5 Obtém-se uma aproximação para o máximo conjunto positivamente invariante admissível, $\Omega_\epsilon^{r_k} \subset \mathcal{O}_{a,\infty}^{r_k}$ associado a lei estabilizante implícita $\Delta v_{k+N-1|k} = \mathbf{K}_\xi(\xi_{k+N|k} - \xi_{eq,k})$, para utilizar como conjunto terminal, conforme apresentado no Apêndice B.
- 6 Resolve o problema de otimização dado pela Equação (4.8).

retorna $u = u^\circ(0; x)$

Como descrito anteriormente, $\Delta u_{k+j|k}$, $u_{k+j|k}$ e $x_{k+j|k}$ podem ser obtidos por combinações lineares envolvendo $\xi_{k+j|k}$, $\Delta v_{k+j|k}$ e $u_{k+j-1|k}$. Devido ao princípio do horizonte

deslizantes, utiliza-se apenas $u_k = u_{k|k}$, repetindo-se a operação a cada amostragem. Deve-se destacar que a representação aumentada voltada ao desacoplamento pode ser combinada a múltiplas estratégias com estabilidade garantida. A abordagem baseada em modelo de velocidade é apenas uma das diversas alternativas.

A dimensão em espaço de estados utilizada para fins de obtenção do conjunto invariante terminal é dada $n + n_d + 2m$, o que pode ser um elemento complicador para fins de cálculo do conjunto terminal. Este conjunto é calculado fora do problema de otimização, o que diminui o impacto da representação aumentada. Com relação ao problema de otimização, o custo computacional não é impactado consideravelmente, pois o número de variáveis de decisão é preservado. Não obstante, a principal contribuição do presente trabalho consiste na proposta de uma representação aumentada para fins de respostas desacopladas com garantia de estabilidade em controladores preditivos. Neste contexto, a representação aumentada proposta pode ser aplicada a outras técnicas de controle preditivo com estabilidade garantida.

4.3 Estudo de caso

O problema de controle de tanques acoplados será considerado nesta seção (JOHANSSON, 2000a). Este problema é particularmente interessante, pois as estratégias de controle preditivo podem resultar numa resposta instável para horizontes de predições curtos devido ao princípio do horizonte deslizante. O problema da instabilidade surge na configuração com zeros de transmissão de tempo discreto fora do círculo unitário (GARCIA-GABIN; CAMACHO, 2002b).

O modelo dos tanques é apresentado a seguir

$$\begin{aligned}\dot{h}_1(t) &= -\frac{a_1}{A_1}\sqrt{2gh_1(t)} + \frac{a_3}{A_1}\sqrt{2gh_3(t)} + \frac{\gamma_1 k_1}{A_1}u_1(t), \\ \dot{h}_2(t) &= -\frac{a_2}{A_2}\sqrt{2gh_2(t)} + \frac{a_4}{A_2}\sqrt{2gh_4(t)} + \frac{\gamma_2 k_2}{A_2}u_2(t), \\ \dot{h}_3(t) &= -\frac{a_3}{A_3}\sqrt{2gh_3(t)} + \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3}u_2(t), \\ \dot{h}_4(t) &= -\frac{a_4}{A_4}\sqrt{2gh_4(t)} + \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4}u_1(t),\end{aligned}$$

sendo $h_\ell(t)$ o nível em centímetros, $u_\ell(t)$ o comando de vazão em volts, $g = 981 \text{ cm/s}^2$ e os demais parâmetros apresentados na Tabela 1.

Assume-se que todos os estados são mensuráveis, mas a saída controlada é definida

Tabela 1 – Parâmetros do modelo dos tanques interconectados.

i	A_i (cm ²)	a_i (cm ²)	k_i (cm ³ /(sV))	γ_i
1	28	0,071	3,14	0,43
2	32	0,057	3,29	0,34
3	28	0,071	-	-
4	32	0,057	-	-

por $y(t) = k_c[h_1(t) \ h_2(t)]^\top$ com $k_c = 0,5$. O ponto de equilíbrio considerado é dado por $\bar{h}_1 = 12,6$ cm e $\bar{h}_2 = 13$ cm. Essa configuração resulta num modelo linearizado dado por

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{1,5}{63s+1} & \frac{2,5}{(63s+1)(39s+1)} \\ \frac{2,5}{(56s+1)(91s+1)} & \frac{1,6}{91s+1} \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

O modelo linearizado foi discretizado com um período de amostragem $T_s = 5$ s. Para evitar o cancelamento do zero de transmissão, preservando a estabilidade interna, foi utilizado o mesmo desacoplador simplificado aplicado em Lima e Santos (2013) dado por

$$D(z) = \begin{bmatrix} -1 & P_{12}(z)/P_{11}(z) \\ P_{21}(z)/P_{22}(z) & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Com vistas a minimizar as fontes de restrições ativas, permitindo uma análise mais detalhada das discussões, optou-se por incluir apenas as restrições de controle dadas por $2 V \leq u_{k+j|k} \leq 5 V$ sem perda de generalidade. Para fins de sintonia do controlador preditivo baseado em modelo de velocidade, foram utilizados $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, $\mathbf{P} > 0$ e \mathbf{K}_ξ sendo as matrizes associadas à solução do problema LQR. Para o cálculo do conjunto terminal, utilizou-se $\epsilon = 0.1$ e o pacote *MPT3 Toolbox* (HERCEG et al., 2013). Serão comparadas duas estratégias, a saber: (i) controlador preditivo proposto com desacoplamento ($N = N_u = 5$) e (ii) controlador preditivo com garantia de estabilidade sem desacoplamento ($N = 5$ e $N_u = 5$). Para fins de comparação, a mesma abordagem para estabilização foi utilizada tal que a técnica sem desacoplamento pode ser recuperada impondo $\mathbf{A}_D = \mathbf{0}$, $\mathbf{B}_D = \mathbf{0}$, $\mathbf{C}_D = \mathbf{0}$ e $\mathbf{D}_d = \mathbf{I}$. Há de se destacar que a resposta desacoplada é observada neste tipo de problema mesmo na ausência de restrições (LIMA; SANTOS, 2013). São consideradas duas mudanças de referências e uma perturbação do tipo degrau de amplitude $0,3$ cm é adicionada à saída 1 no instante $t = 1300$ s.

As respostas das estratégias testadas são apresentadas na Figura 8. A técnica com desacoplamento apresenta um efeito de fase não-mínima significativa, o que é necessário para incorporar o efeito da variação de uma referência sem variar a outra saída. Essa demanda decorre da necessidade de se preservar os zeros de transmissão para preservação da estabilidade interna. Na técnica sem desacoplamento, o efeito transitório se manifesta

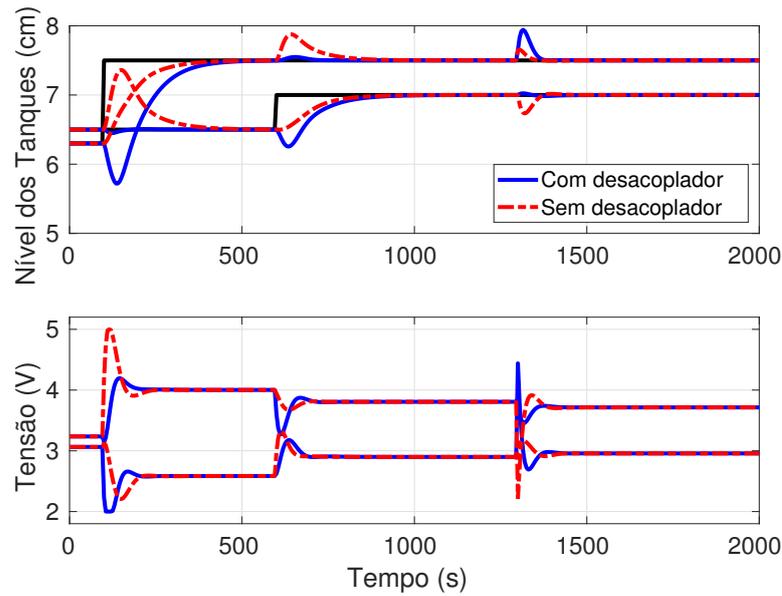


Figura 8 – Comparação das respostas do sistema de quatro tanques com e sem desacoplador. na saída em que não ocorre a mudança de referência, conforme esperado. Há de se observar que ocorre uma pequena interação cruzada na técnica com desacoplamento, mas esse resultado é bastante reduzido tendo em vista a utilização do modelo de simulação não-linear. Em outras palavras, uma mudança de referência no nível $h_2(t)$ tem efeito reduzido em $h_1(t)$. Quando se observa o efeito da rejeição de perturbação, nota-se que a técnica com desacoplamento praticamente restringe o impacto da perturbação ao escopo do nível do tanque 1, o que não ocorre na técnica convencional. Há de se destacar que, assim como se verificou no cenário sem restrições discutido em (LIMA; SANTOS, 2013), caso os ingredientes estabilizantes não sejam usados com $N = N_u = 5$, observa-se uma resposta instável em malha aberta.

Um aspecto interessante dos resultados apresentados na Figura 8 decorre do custo associado ao desacoplamento uma vez que surge um erro de seguimento de referência significativo. Graças a esse erro, torna-se possível realizar a mudança de referência sem provocar a interação cruzada. Esse erro poderia ser reduzido aumentando a ponderação \mathbf{Q} ou reduzindo \mathbf{R} , mas optou-se por manter o mesmo parâmetro de sintonia para preservar a análise comparativa. No entanto, deve-se enfatizar que a grandeza do sinal v_k não é equivalente ao sinal u_k . Neste sentido, ao se utilizar a abordagem proposta, os parâmetros \mathbf{Q}_y e \mathbf{R} devem ser definidos em função de $\mathbf{P}_D(z)$.

Apesar de ser utilizada uma técnica com garantias de estabilidade nominal, foi obtida uma operação segura mesmo na presença de restrições, independente dos parâmetros de sintonia. Na formulação apresentada, estabilidade nominal e desacoplamento são tratados conjuntamente. Durante a primeira mudança de referência, pode-se verificar que ocorreu a saturação da ação de controle no seu valor mínimo. Mesmo com a saturação, o efeito da interação cruzada foi significativamente reduzido, especialmente quando se

compara à técnica sem desacoplamento. Portanto, a técnica proposta também permite mitigar o efeito da interação cruzada na presença de restrições ativas.

5 Controle Preditivo Robusto com Desacoplamento

Na prática, desacoplamento perfeito é muito difícil de ser obtido devido ao erro de modelagem (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005), mas uma redução da interação cruzada pode ser verificada se um MPC robusto for capaz de garantir factibilidade recursiva e convergência. Neste capítulo será utilizada a representação em espaço de estados aumentada apresentada no Capítulo 3 aplicada a um MPC robusto para sistemas lineares com restrições e perturbações limitadas de tal modo que factibilidade recursiva, satisfação a restrições robustas e seguimento de referência sem erro estacionário possam ser obtidos, conforme estratégia apresentada na Seção 2.5.2.

5.1 Modelo de predição

Considerando a representação aumentada sugerida pela Equação (3.7), desprezando-se o ruído de medição, temos

$$\begin{aligned}\chi_{k+1} &= \mathbf{A}_\chi \chi_k + \mathbf{B}_\chi v_k + \mathbf{\Gamma}_\chi w_k, \\ y_k &= \mathbf{C}_\chi \chi_k,\end{aligned}\tag{5.1}$$

sendo $\chi_k = [x_k^\top \ \psi_k^\top]^\top$ e as matrizes aumentadas definidas por

$$\mathbf{A}_\chi = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{BC}_D \\ \mathbf{0}_{n_d, n} & \mathbf{A}_D \end{bmatrix}, \mathbf{B}_\chi = \begin{bmatrix} \mathbf{BD}_D \\ \mathbf{B}_D \end{bmatrix}, \mathbf{\Gamma}_\chi = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{0}_{n_d, n_w} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_\chi = [\mathbf{C} \ \mathbf{0}_{m, n_d}].$$

5.2 Parametrização dos pontos de equilíbrio

Do modelo apresentado na seção anterior, temos que uma condição de equilíbrio pode ser dada por $\bar{\chi} = \mathbf{A}_\chi \bar{\chi} + \mathbf{B}_\chi \bar{v}$. E assim, a lei de controle estabilizante apresentada pela Eq. (2.34) passa a ser representada por

$$v_k = \mathbf{K}_\chi (\chi_k - \bar{\chi}) + \bar{v},\tag{5.2}$$

com os autovalores da matriz $(\mathbf{A}_\chi + \mathbf{B}_\chi \mathbf{K}_\chi)$ estando estritamente dentro do círculo unitário.

Alternativamente, conforme apresentado na Eq. (2.35), a lei de controle pode ser dada por

$$v_k = \mathbf{K}_\chi \chi_k + \mathbf{L} \bar{\theta}, \quad (5.3)$$

com $\mathbf{L} = -\mathbf{K}_\chi \mathbf{M}_x + \mathbf{M}_u$.

Neste caso temos,

$$\bar{y} = \mathbf{M}_y \bar{\theta}, \quad (5.4a)$$

$$\bar{x} = \mathbf{M}_x \bar{\theta}, \quad (5.4b)$$

$$\bar{u} = \mathbf{M}_u \bar{\theta}, \quad (5.4c)$$

$$\mathbf{M}_y = \mathbf{C}_\chi \mathbf{M}_x, \quad (5.4d)$$

$$\mathbf{M}_x = [\mathbf{I}_n \ \mathbf{0}_{n,n_d}] \mathbf{M}_\chi, \quad (5.4e)$$

$$\mathbf{M}_u = \mathbf{F}_\chi \mathbf{M}_x + \mathbf{F}_v \mathbf{M}_v. \quad (5.4f)$$

Considerando a solução trivial (SANTOS, 2018; SANTOS; CUNHA, 2021) apresentada na Eq. (2.38), a parametrização do equilíbrio é simplificada por

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}_m, \quad (5.5a)$$

$$\mathbf{M}_x = (\mathbf{A}_\chi + \mathbf{B}_\chi \mathbf{K}_\chi)^{-1} \mathbf{B}_\chi, \quad (5.5b)$$

$$\mathbf{M}_v = \mathbf{K}_\chi \mathbf{M}_x + \mathbf{I}_m. \quad (5.5c)$$

5.3 Restrições robustas

Considerando a contração das restrições dos estados e das entradas apresentado pelas Eq. (2.41) e (2.42), temos a seguinte equivalência para a representação aumentada com o desacoplador

$$\mathcal{X}_{j+1} = \mathcal{X}_j \ominus [\mathbf{I}_n \ \mathbf{0}_{n,n_d}] \Phi^j \Gamma_\chi \mathbb{W}, \quad j \in \mathbb{N}; \quad (5.6)$$

$$\mathcal{U}_{j+1} = \mathcal{U}_j \ominus (\mathbf{F}_\chi + \mathbf{F}_v \mathbf{K}) \Phi^j \Gamma_\chi \mathbb{W}, \quad j \in \mathbb{N}; \quad (5.7)$$

onde $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}$ and $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}$.

E o conjunto nominal de alvos admissíveis mantendo-se definido conforme apre-

sentado pela Eq. (2.43)

$$\bar{\mathcal{Y}} = \{y \in \mathfrak{R}^m | y = \mathbf{M}_y \bar{\theta}, \mathbf{M}_x \bar{\theta} = \text{Int}(\mathcal{X}_\infty), \mathbf{M}_u \bar{\theta} = \text{Int}(\mathcal{U}_\infty)\}.$$

Para simplificar o esforço computacional, assim como na seção 2.5, as restrições em x e u podem ser substituídas, respectivamente, por $x = \mathbf{M}_x \bar{\theta} \in \lambda \mathcal{X}_{inner,\infty}$ e $u = \mathbf{M}_u \bar{\theta} \in \lambda \mathcal{U}_{inner,\infty}$, onde $0 < \lambda < 1$ como apresentado no Apêndice E.

5.4 MPC robusto e desacoplado para seguimento de referência com garantia de estabilidade para sistemas lineares com restrições

Considerando a lei de controle do MPC robusto apresentada pelo problema de otimização na Eq. (2.44) e considerando a nova representação aumentada devido ao acréscimo da dinâmica do desacoplador temos

$$\mathcal{P}_N(x_k) : \min_{\mathbf{v}_k, \bar{\theta}_k} V(\mathbf{v}_k, \bar{\theta}; \chi_k, r_k) \quad (5.8a)$$

$$\text{s.t. } \chi_0 = \chi(k), \quad (5.8b)$$

$$[\bar{\chi}_k^\top \ \bar{v}_k^\top]^\top = \mathbf{M}_\theta \bar{\theta}_k, \quad (5.8c)$$

$$\bar{y}_k = \mathbf{M}_y \bar{\theta}_k, \quad (5.8d)$$

$$\chi_{i+1|k} = \mathbf{A}_\chi \chi_{i|k} + \mathbf{B}_\chi v_{i|k}, \quad i \in \mathbb{N}_{[0, N-1]}; \quad (5.8e)$$

$$[\mathbf{I}_n \ \mathbf{0}_{n, nd}] \chi_{i|k} \in \mathcal{X}_i, \quad i \in \mathbb{N}_{[1, N-1]}; \quad (5.8f)$$

$$\mathbf{F}_\chi \chi_{i|k} + \mathbf{F}_v v_{i|k} \in \mathcal{U}_i, \quad i \in \mathbb{N}_{[0, N-1]}; \quad (5.8g)$$

$$[\chi_{N|k}^\top \ \bar{\theta}_k^\top]^\top \in \mathcal{Z}_f, \quad (5.8h)$$

onde

$$\begin{aligned} V(\mathbf{v}_k, \bar{\theta}_k; \chi_k, r_k) &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\|y_{i|k} - \bar{y}_k\|_{\mathbf{Q}}^2 + \|v_{i|k} - \bar{v}_k\|_{\mathbf{R}}^2 \right) + \|\chi_{N|k} - \bar{\chi}_k\|_{\mathbf{P}}^2 \\ &\quad + \|\bar{y}_k - r_k\|_{\mathbf{T}}^2. \end{aligned}$$

Premissas.

- (1) Considere que o par $(\mathbf{A}_\chi, \mathbf{B}_\chi)$ é controlável, o par $(\mathbf{C}_\chi, \mathbf{A}_\chi)$ é observável e χ_k é conhecido.

- (2) Considere que os conjuntos \mathcal{X} , \mathcal{U} e \mathcal{W} são compactos, convexos e com a origem em seus interiores.
- (3) Considere $\mathbf{R} \in \Re^{m \times m}$ e $\mathbf{Q} \in \Re^{n \times n}$ são matrizes definidas positivas.
- (4) Considere que a função custo de erro estacionário $V_o : \Re^p \rightarrow \Re$ é definida positiva, convexa e subdiferenciável tal que $V_o(0_p) = 0$ ($V_o = \|\bar{y}_k - r_k\|_{\mathbf{T}}^2$).
- (5) Considere que $\mathbf{P}_\chi \in \Re^{n \times n}$ seja uma matriz definido positiva tal que $(\mathbf{A}_\chi + \mathbf{B}_\chi \mathbf{K}_\chi)^\top \mathbf{P}_\chi (\mathbf{A}_\chi + \mathbf{B}_\chi \mathbf{K}_\chi) - \mathbf{P}_\chi + \mathbf{K}_\chi^\top \mathbf{R} \mathbf{K}_\chi + \mathbf{C}_\chi^\top \mathbf{Q} \mathbf{C}_\chi = \mathbf{0}$.
- (6) Existe uma lei de controle local estabilizante, $\mathbf{K}_\chi(x)$.
- (7) Considere que matriz $\mathbf{M}_\theta = [\mathbf{M}_\chi^\top \quad \mathbf{M}_u^\top]^\top$ é definida por $\mathbf{M}_\chi = [\mathbf{I}_n \quad \mathbf{0}_{n,n_d}] \mathbf{M}_\chi$, $\mathbf{M}_u = \mathbf{F}_\chi \mathbf{M}_\chi + \mathbf{F}_v \mathbf{M}_v$, e $\mathbf{M}_y = \mathbf{C}_\chi \mathbf{M}_\chi$. Sendo $\mathbf{M}_\chi = (\mathbf{A}_\chi + \mathbf{B}_\chi \mathbf{K}_\chi)^{-1} \mathbf{B}_\chi$ e $\mathbf{M}_v = \mathbf{K}_\chi \mathbf{M}_\chi + \mathbf{I}_m$.
- (8) Considere que $\mathcal{Z}_f \subset \Re^{n+m}$ seja um conjunto invariante estendido tal que $[x^\top \quad \bar{\theta}^\top]^\top \in \mathcal{Z}_f \Rightarrow [(\mathbf{A}_\chi + \mathbf{B}_\chi \mathbf{K}_\chi) \chi + \mathbf{B}_\chi \mathbf{L} \bar{\theta} + (\mathbf{A}_\chi + \mathbf{B}_\chi \mathbf{K}_\chi)^N \Gamma_\chi w]^\top \quad \bar{\theta}^\top]^\top \in \mathcal{Z}_f$, $\forall w \in \mathcal{W}$, $\mathcal{Z}_f \subseteq \mathcal{X}_N$, $[\mathbf{K}_\chi \quad \mathbf{L}] \mathcal{Z}_f \subseteq \mathcal{U}_N$, $[\mathbf{0}_{m,n} \quad \mathbf{M}_\chi] \mathcal{Z}_f \subseteq \mathcal{X}_\infty$, e $[\mathbf{0}_{m,n} \quad \mathbf{M}_u] \mathcal{Z}_f \subseteq \mathcal{U}_\infty$.

Uma estratégia para obtenção do conjunto terminal é apresentada no Apêndice E.

A lei de controle do horizonte deslizante ($u_k = \kappa_{\text{MPC}}(y_t, x_k)$) para o MPC robusto para seguimento de referência com desacoplamento é dada por

$$u_k = \mathbf{F}_\chi \chi_k + \mathbf{F}_v v_{0|k}^*, \quad (5.9)$$

onde $v_{0|k}^*$ é o primeiro elemento da sequência de controle que minimiza o problema de otimização (5.8). Note que se $\mathbf{A}_d = \mathbf{0}_{m,m}$, $\mathbf{B}_d = \mathbf{0}_{m,m}$, $\mathbf{C}_d = \mathbf{0}_{m,m}$, e $\mathbf{D}_d = \mathbf{I}_m$, então um MPC típico para seguimento de referência baseado na predição nominal é obtido sem a propriedade de desacoplamento ($v_k = u_k$), conforme apresentado na Seção 2.5.2.

O alvo ótimo admissível nominal (y_t^o), derivado da Eq. (2.45), agora é definido pelos seguintes problemas de otimização auxiliares

$$\min_{\theta} \|\|y_t - \bar{y}^o\|_{\mathbf{T}} \quad (5.10a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{M}_y \theta = \bar{y}^o, \quad (5.10b)$$

$$[(\mathbf{M}_\chi \theta)^\top \quad \theta^\top]^\top \in \mathcal{Z}_f. \quad (5.10c)$$

No Apêndice F está a prova da factibilidade recursiva e a demonstração da convergência de y_k para um conjunto positivamente invariante robusto em torno de y_t^o .

O Apêndice F também mostra que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_k - \bar{y}^o\| \rightarrow 0$ se $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k \rightarrow 0$. Conforme apresentado na Seção 2.5.2, um estimador de perturbação faz-se necessário para evitar o erro estacionário constante que, para o caso do MPC desacoplado proposto por este trabalho, possui a forma apresentada na Seção 5.5.

5.5 Correção da referência com perturbações constantes - MPC Desacoplado

Uma maneira simples e eficaz de obter rejeição assintótica de perturbação constante na ausência de restrição ativa em estado estacionário é corrigir artificialmente o seguimento para a referência desejada com base na solução explícita irrestrita. Note que se o custo de compensação for quadrático, a solução ótima sem restrições ativas pode ser reescrita da seguinte forma

$$v_k^* = \mathcal{K}(\mathbf{F}_\chi \chi_k + \mathbf{F}_t r_k). \quad (5.11)$$

Assume-se, sem perda de generalidade, que o sistema não possui pólos de ação integral¹ ($\det(\mathbf{I}_{n+n_d} - \mathbf{A}_\chi) \neq 0$).

A condição de equilíbrio para uma perturbação constante (w_∞) pode ser parametrizada por

$$\chi_\infty = (\mathbf{I}_{n+n_d} - \mathbf{A}_\chi)^{-1}(\mathbf{B}_\chi v_\infty + \mathbf{\Gamma}_\chi w_\infty), \quad (5.12a)$$

$$y_\infty = \mathbf{C}_\chi (\mathbf{I}_{n+n_d} - \mathbf{A}_\chi)^{-1}(\mathbf{B}_\chi v_\infty + \mathbf{\Gamma}_\chi w_\infty). \quad (5.12b)$$

Portanto, a saída desejada converge para r_k se v_k convergir para o seguinte alvo de controle virtual modificado

$$v_\infty = [\mathbf{C}_\chi (\mathbf{I}_{n+n_d} - \mathbf{A}_\chi)^{-1} \mathbf{B}_\chi]^{-1} (r_k - \mathbf{C}_\chi (\mathbf{I}_{n+n_d} - \mathbf{A}_\chi)^{-1} \mathbf{\Gamma}_\chi w_\infty). \quad (5.13)$$

¹ Se $\det(\mathbf{I}_{n+n_d} - \mathbf{A}_\chi) = 0$, a mesma estratégia pode ser aplicada para $\chi_{k+1} = (\mathbf{A}_\chi + \mathbf{B}_\chi \mathbf{K}_\chi) \chi_k + \mathbf{B}_\chi \mathbf{L} \bar{\theta}_k$ com $u_k = \mathbf{K}_\chi \chi_k + \mathbf{L} \bar{\theta}_k$ e $\det(\mathbf{I}_{n+n_d} - \mathbf{A}_\chi - \mathbf{B}_\chi \mathbf{K}_\chi) \neq 0$.

Desta forma, um alvo modificado pode ser definido por

$$v_\infty = [\mathbf{C}_\chi(\mathbf{I}_{\mathbf{n}+\mathbf{n}_d} - \mathbf{A}_\chi)^{-1}\mathbf{B}_\chi]^{-1}(r_k - \mathbf{C}_\chi(\mathbf{I}_{\mathbf{n}+\mathbf{n}_d} - \mathbf{A}_\chi)^{-1}\mathbf{\Gamma}_\chi w_\infty), \quad (5.14)$$

$$\chi_\infty = (\mathbf{I}_{\mathbf{n}+\mathbf{n}_d} - \mathbf{A}_\chi)^{-1}[\mathbf{B}_\chi v_\infty + \mathbf{\Gamma}_\chi w_\infty], \quad (5.15)$$

$$r_k^m = (\mathcal{K}\mathbf{F}_t)^{-1}(v_\infty - \mathcal{K}\mathbf{F}_\chi \chi_\infty). \quad (5.16)$$

A ideia principal é fornecer um alvo modificado para definir uma correção externa para o controle em estado estacionário, assumindo a ausência de restrições ativas após o efeito transitório. Na presença de uma perturbação constante, se r_k^m é um alvo admissível sem restrição ativa no estado estacionário, então $\chi_k \rightarrow \chi_\infty$, $v_k \rightarrow v_\infty$ e $y_k \rightarrow r_k$. A perturbação no estado estacionário pode ser estimada da mesma forma que em (SANTOS; CUNHA, 2021; PAULSON; SANTOS; MESBAH, 2019), filtrando o erro de previsão um passo à frente ($\mathbf{\Gamma}_\chi \mathbf{w}_{k-1} = \mathbf{A}_\chi \chi_k - \mathbf{B}_\chi v_k$) com um filtro baixa passa de primeira ordem.

Na prática, v_k^m , χ_k^m e y_k^m podem ser computados para substituir v_∞ , χ_∞ e r_k^m em cada instante de amostra. Seus valores são obtidos de

$$\hat{w}_{k,\infty} = \alpha \hat{w}_{k-1,\infty} + (1 - \alpha)\mathbf{\Gamma}_\chi w_{k-1}, \quad (5.17)$$

onde $0 < \alpha < 1$ define o polo do filtro.

Então, r_k^m substitui r_k tal que a nova função custo do problema de otimização dado pela Equação 5.8 passa a ser $V(\mathbf{v}_k, \bar{\theta}_k; \chi_k, r_k^m)$. As principais propriedades tais como factibilidade recursiva e satisfação a restrições robustas são totalmente preservadas, pois o domínio de atração não depende da referência.

Dessa forma, a implementação do MPC robusto para seguimento de referência com garantia de estabilidade, considerando a estratégia do controle preditivo desacoplado apresentada acima, pode ser realizada seguindo o Algoritmo 5

Algoritmo 5: Implementação de MPC robusto e desacoplado para seguimento de referência com garantia de estabilidade

Entrada: \mathbf{Q} , \mathbf{R} , N , \mathcal{U} , \mathcal{X} , r_k , $u_{r,k}$, λ , \mathbf{T} e α

Saída: Controlador preditivo robusto e desacoplado para seguimento de referência com garantia de estabilidade

- 1 Escolhe-se as matrizes de ponderação \mathbf{Q} e \mathbf{R} , definindo o custo de etapa da função custo $L((x_{k+1})_{\mathbf{Q}}, (u_{k+1})_{\mathbf{R}})$.
- 2 Define-se uma lei de controle estabilizante por realimentação $v_k = \mathbf{K}_{\chi}(\chi_k - \bar{\chi}) + \bar{v}$. Neste exemplo foi considerada a solução do problema de controle ótimo irrestrito - LQR.
- 3 Determina-se $\mathbf{P}_{\chi} > 0$ da equação matricial abaixo

$$(\mathbf{A}_{\chi} + \mathbf{B}_{\chi}\mathbf{K}_{\chi})^{\top}\mathbf{P}_{\chi}(\mathbf{A}_{\chi} + \mathbf{B}_{\chi}\mathbf{K}_{\chi}) - \mathbf{P}_{\chi} + \mathbf{K}_{\chi}^{\top}\mathbf{R}\mathbf{K}_{\chi} + \mathbf{C}_{\chi}^{\top}\mathbf{Q}\mathbf{C}_{\chi} = \mathbf{0}.$$

- 4 Determina-se o custo terminal dado por

$$F(\chi(k + N|k)) = (\chi_{N|k} - \bar{\chi}_k)^{\top}\mathbf{P}(\chi_{N|k} - \bar{\chi}_k).$$

- 5 Determina-se o custo do desvio, que para este trabalho é dado conforme abaixo, sendo \mathbf{T} , uma matriz definida positiva que penaliza o desvio entre o alvo desejado r_k e o alvo artificial \bar{y}

$$V_o(\bar{y} - r_k) = (\bar{y} - r_k)^{\top}\mathbf{T}(\bar{y} - r_k).$$

- 6 Obtém-se uma aproximação para o máximo conjunto invariante admissível para seguimento de referência com robustez \mathcal{Z}_f associado a lei estabilizante implícita $v_k = \mathbf{K}_{\chi}(\chi_k - \bar{\chi}) + \bar{v}$, para utilizar como conjunto terminal, conforme apresentado no Apêndice E.

- 7 Resolve o problema de otimização dado pela Equação (5.8).

retorna $u = u^o(0; x)$

5.6 Casos de estudo

Dois casos de estudos são apresentados nesta seção para ilustrar o efeito do MPC desacoplado baseado em representação aumentada. Primeiramente, o processo do tanque quadrúplo (JOHANSSON, 2000b) é usado devido a presença de zero de fase não-mínima. Este problema é particularmente interessante pois a estratégia de desacoplamento deverá

assegurar a estabilidade interna (GARCIA-GABIN; CAMACHO, 2002a). Na verdade, o MPC sem as propriedades estabilizantes pode não conseguir fornecer estabilidade em malha fechada se o horizonte de predição não for corretamente escolhido. Além disso, uma referência típica de controle de reator é utilizada no segundo caso para ilustrar um problema em tempo discreto sem a transmissão de zeros fora do círculo unitário.

5.6.1 Tanque quádruplo

Será utilizado o mesmo modelo do tanque quádruplo (JOHANSSON, 2000a) apresentado na Seção 4.3, linearizado considerando o mesmo ponto de equilíbrio ($\bar{h}_1 = 12.6 \text{ cm}$, $\bar{h}_2 = 13 \text{ cm}$), mas com um período de amostragem é $T_s = 10 \text{ s}$.

Baseado na versão discreta do modelo linearizado, o seguinte desacoplador simplificado é utilizado

$$D(z) = \begin{bmatrix} -1 & P_{12}(z)/P_{11}(z) \\ P_{21}(z)/P_{22}(z) & -1 \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

onde $P_{ij}(z)$ é a função de transferência parcial da entrada j para a saída i . Este desacoplador preserva a transmissão de zeros de forma a evitar um sistema internamente instável em malha fechada.

Neste trabalho, as restrições de entrada e saída são definidas, respectivamente, por

$$1 \text{ V} \leq u_{i,k} \leq 5 \text{ V}, \quad i = 1, 2; \quad (5.19)$$

$$0 \text{ cm} \leq h_{i,k} \leq 18 \text{ cm}, \quad i = 1, 4; \quad (5.20)$$

Para representar os erros de modelagem e as perturbações externas foi considerado $\|w_k\|_\infty \leq 0.2$ com $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}_4$.

Os seguintes parâmetros do MPC foram utilizados: $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_2$, $\mathbf{R} = \mathbf{I}_2$, $N = 5$, e $\alpha = 0.8$. As matrizes $\mathbf{P} > 0$, e \mathbf{K}_χ vieram da solução do problema LQR, enquanto $\mathbf{T} = 100\|\mathbf{P}\|_2\mathbf{I}_2$ foi escolhido livremente baseado em \mathbf{P} . É importante notar que os parâmetros de projeto do MPC robusto sem desacoplamento são análogos ao MPC desacoplado.

Todas as simulações foram realizadas com o modelo não-linear em Matlab/Simulink e a comparação das estratégias do MPC robusto são apresentadas na Fig. 9 onde mudanças de referências são realizadas em 100 s e 800 s e uma perturbação na saída (em $y_1(t)$) com amplitude 0.2 é considerada em 1500 s. O efeito não-linear em relação as perturbações aditivas podem ser verificados na Fig. 10, mas o limite da perturbação especificada

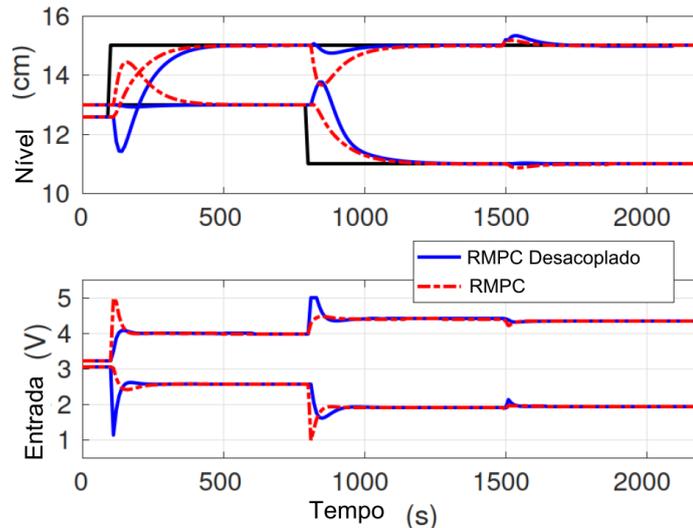


Figura 9 – Respostas da saída e do controle com um MPC robusto padrão e o MPC robusto proposto com desacoplador explícito - caso de estudo do tanque quadruplo.

$\|w_k\|_\infty \leq 0.2$ é respeitada apesar do efeito não-linear. Ambas estratégias de MPC robusto são adequadas para lidar com a satisfação de restrições robustas e convergência para o alvo desejado na presença de erros de modelagem e de perturbações externas. Como esperado, as restrições de controle são respeitadas, mas as respostas transitórias são significativamente diferentes devido ao desacoplador explícito. O efeito do acoplamento não é completamente eliminado com o MPC desacoplado devido ao erro de modelagem da planta não-linear e a saturação de entrada (ocorrida em torno de 800 s), mas o efeito do acoplamento é mitigado consideravelmente. Neste caso, o preço a se pagar para obter uma mitigação significativa do acoplamento cruzado é preservar a resposta de fase não-mínima da referência para a saída. Em verdade, isto não é o problema para a maioria das aplicações que não apresentam zeros de fase não-mínima como indicado no outro caso de estudo.

A análise do caso de estudo inicial é completada com a apresentação da simulação com ruído de medição conforme mostrado na Fig. 11. Um ruído branco de banda limitada em tempo discreto com potência de ruído dada por 0.002 e $T_s = 10$ s foi utilizado para simular o ruído de medição em cada nível, onde os índices $j = 1, 2, 3, 4$ foram, respectivamente, utilizados para cada um dos sinais medidos ($h_j(kT_s)$). O efeito do ruído em relação às perturbações aditivas pode ser verificado na Fig. 12. As propriedades principais de ambas estratégias foram preservadas: (i) seguimento de referência sem erro estacionário para o valor esperado da saída (valor médio em estado estacionário), (ii) satisfação às restrições, e (iii) mitigação do acoplamento cruzado com o MPC proposto com desacoplador explícito. Em resumo, o MPC desacoplado proposto preserva os principais benefícios das estratégias de controle preditivo robusto assim como seguimento de referência sem erro estacionário e satisfação de restrições robustas. Além disso, fornece repostas desacopladas para sistemas lineares sem restrições ativas e também é capaz de obter uma mitigação significativa do acoplamento cruzado para sistemas não-lineares devido às suas propriedades de robustez.

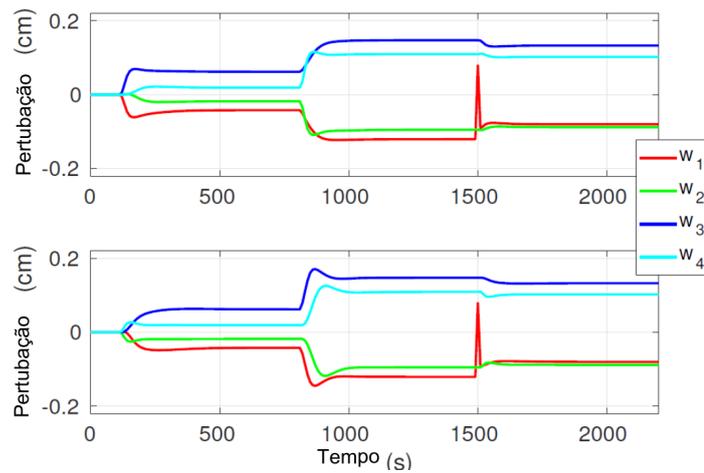


Figura 10 – Perturbação aditiva (w_k) obtida do modelo de predição linear: superior - sem desacoplamento, inferior - com desacoplamento.

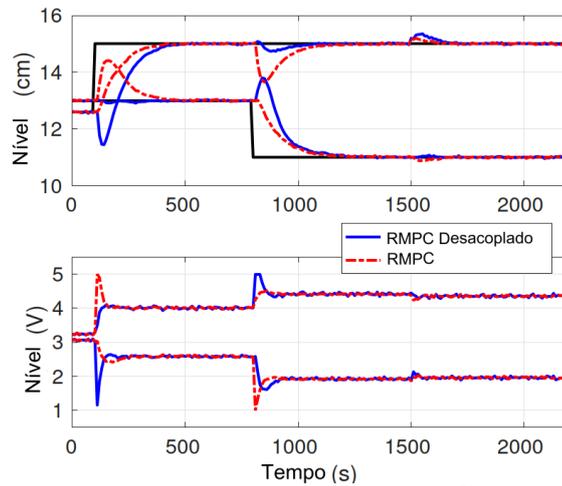


Figura 11 – Respostas da saída e de controle com um MPC robusto padrão e o MPC robusto proposto com desacoplador explícito na presença de ruído de medição - caso de estudo do tanque quadruplo.

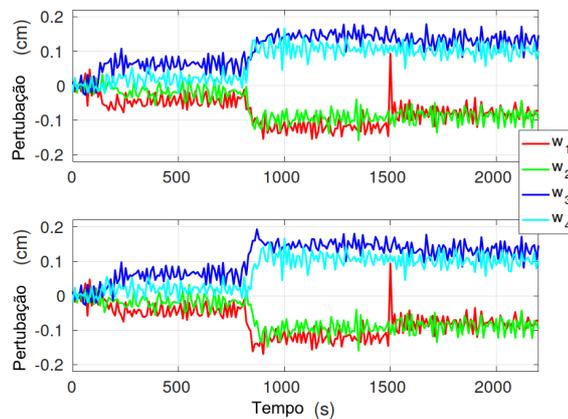


Figura 12 – Perturbação aditiva (w_k) obtida do modelo de predição linear na presença de ruído de medição: superior - sem desacoplamento, inferior - com desacoplamento.

5.6.2 Caso do reator de tanque com agitação contínua (CSTR, do inglês *Continuous Stirred Tank Reactor*)

Este caso de estudo é uma referência típica de controle de processo baseada em um CSTR não isotérmico, onde uma reação química exotérmica de primeira ordem $A \rightarrow B$ é considerada (GUPTA, 1998). O modelo não-linear é definido por

$$\frac{d}{dt}C_A(t) = q_i \frac{C_{Af}(t) - C_A(t)}{V} - \kappa(t)C_A(t), \quad (5.21)$$

$$\frac{d}{dt}T(t) = q_i \frac{T_i(t) - T(t)}{V} + J\kappa(t)C_A(t) - \frac{Q_h(t)}{\rho c_p V}, \quad (5.22)$$

onde $\kappa(t) = \kappa_0 e^{-E/(RT(t))}$, $J = -\Delta H/(\rho c_p)$.

Os parâmetros de simulação vieram de (GUPTA, 1998) de modo que $A_c = 0.05 \text{ m}^2$, $-\Delta H = -50 \times 10^6 \text{ cal/Kmol}$, $\rho = 10^6 \text{ g/m}^3$, $c_p = 1 \text{ cal/(gK)}$, $E/R = 1000\text{K}$, $\kappa_0 = 4.872997584 \text{ s}^{-1}$, $q_i = 5 \cdot 10^{-3} \text{ l/s}$.

A concentração de entrada ($C_{Af}(t)$) e a remoção de calor ($\frac{Q_h(t)}{\rho c_p}$) são consideradas como as variáveis manipuladas. A concentração de saída ($C_A(t)$) e a temperatura medida ($T(t)$) são as variáveis de processo. Como em (GUPTA, 1998), a condição de equilíbrio para linearização é dada por $h^* = 1 \text{ m}$, $C_A^* = 1 \text{ Kmol/m}^3$, $T^* = 400 \text{ K}$, $q_o^* = 5 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$, $C_{Af}^* = 5 \text{ Kmol/m}^3$, e $\frac{Q_h^*}{\rho c_p} = 0.75$. Então, as variáveis em torno do equilíbrio são definidas por

$$y_k = x_k = [(C_A(kT_s) - C_A^*) (T(kT_s) - T^*)]^\top, \quad (5.23)$$

$$u_k = [(C_{Af}(kT_s) - C_{Af}^*) (Q_h(kT_s) - Q_h^*)/(\rho c_p)]^\top. \quad (5.24)$$

As seguintes restrições são consideradas

$$4 \text{ Kmol/m}^3 \leq C_{Af}(kT_s) \leq 6 \text{ Kmol/m}^3, \quad (5.25a)$$

$$0.5 \text{ cal/s} \leq \frac{Q_h(kT_s)}{\rho c_p} \leq 1 \text{ cal/s}, \quad (5.25b)$$

$$0.75 \text{ Kmol/m}^3 \leq C_A(kT_s) \leq 1.25 \text{ Kmol/m}^3, \quad (5.25c)$$

$$380 \text{ K} \leq T(kT_s) \leq 420 \text{ K}. \quad (5.25d)$$

Os parâmetros de projeto do MPC robusto são $T_s = 0.5$, $N = 5$, $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{R} = 100\mathbf{I}_2$, $\mathbf{P} > 0$ e K_χ oriundos da solução do problema LQR, $\mathbf{T} = 100\|\mathbf{P}\|_2\mathbf{I}_2$ e $\alpha = 0.9$. Assim como destacado no estudo de caso anterior, é importante notar que os parâmetros

de projeto do MPC robusto sem desacoplamento são análogos ao da versão desacoplada.

Para definição das restrições robustas, o conjunto fechado de perturbação é dado por $|w_{1,k}| \leq 0.01$ e $|w_{2,k}| \leq 0.1$ com $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}_2$. Note que a magnitude de $w_{1,k}$ e $w_{2,k}$ não são similares porque as escalas de concentração e temperatura são significativamente diferentes.

Mais uma vez, foi utilizado o desacoplador simplificado dado por

$$\mathbf{D}(z) = \begin{bmatrix} -1 & P_{12}(z)/P_{11}(z) \\ P_{21}(z)/P_{22}(z) & -1 \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

As respostas da saída e do controle para os cenários do MPC com e sem desacoplamento são apresentadas na Fig. 13. Neste caso, o modelo de malha aberta não possui transmissão de zeros fora do círculo unitário de modo que a resposta com acoplamento cruzado é completamente eliminada. A resposta para o seguimento de referência são similares para o caso com e sem desacoplamento. Uma perturbação na entrada de temperatura ($T_i(t)$) com amplitude de 2 K é simulada no instante 60 s, mas ambas estratégias são capazes de rejeitar o efeito da perturbação em estado estacionário devido a correção do alvo. Os cenários na presença de ruído de medição também são considerados neste caso de estudo como mostrado na Fig. 14. Um ruído branco de banda limitada em tempo discreto (Matlab 2020b/Simulink 10.2) com potência de ruído de $2 \cdot 10^{-6}$ e $T_s = 0.5\text{ s}$ foi utilizado para este caso. O efeito do ruído na presença de perturbação aditiva pode ser comparado ao caso livre de ruído na Fig. 15. Observe que as respostas à perturbação aditiva ficam muito mais próximas de seus limites na presença do ruído. O efeito também é claro na evolução da concentração. No entanto, a propriedade de erro estacionário médio zero, factibilidade recursiva e resposta ao seguimento de referência com desacoplamento são preservadas. Portanto, a abordagem linear proposta pode ser aplicada em sistemas de controle não-lineares com restrição na presença de ruídos de modo que uma significativa mitigação do acoplamento cruzado pode ser alcançada com o erro de modelagem do modelo da planta podendo ser tratado pelo uso de uma estratégia de MPC robusto.

A principal vantagem desta estratégia de desacoplamento é a capacidade de garantir convergência, satisfação às restrições robustas e factibilidade recursiva, apesar das perturbações devido ao fato de que as dinâmicas internas do desacoplador são tratadas pela representação aumentada.

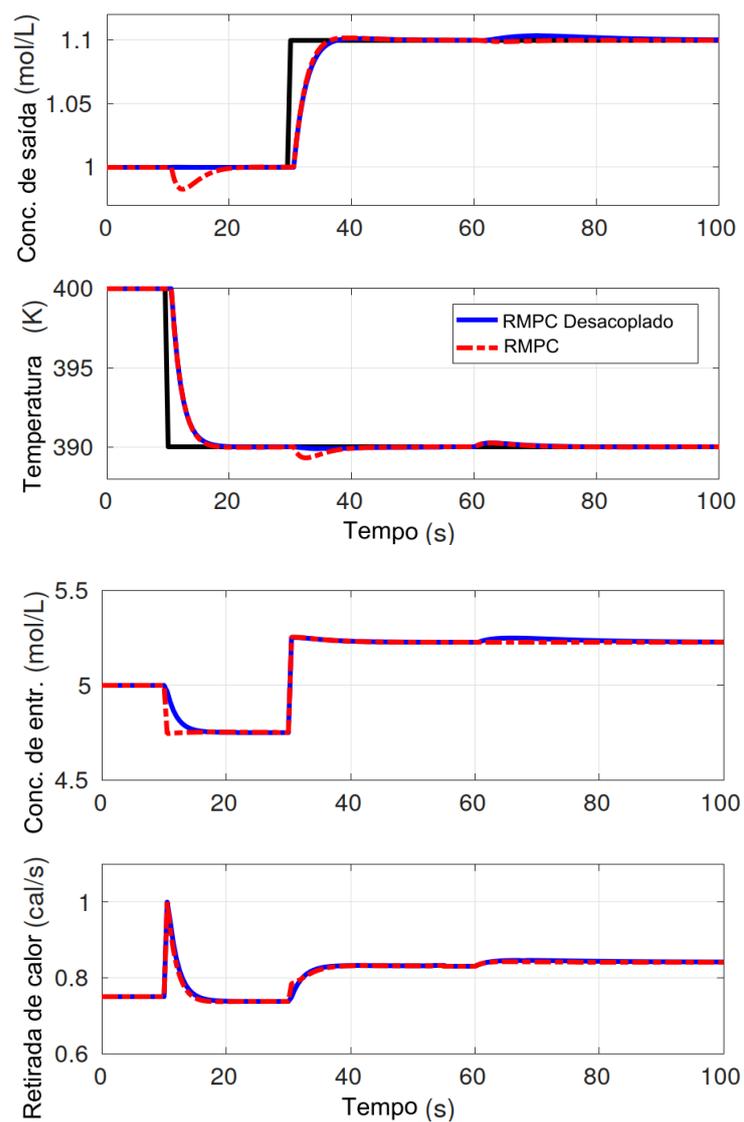


Figura 13 – Resposta da saída e do controle com um MPC robuto padrão e o MPC robusto proposto com desacoplador explícito - caso de estudo CSTR.

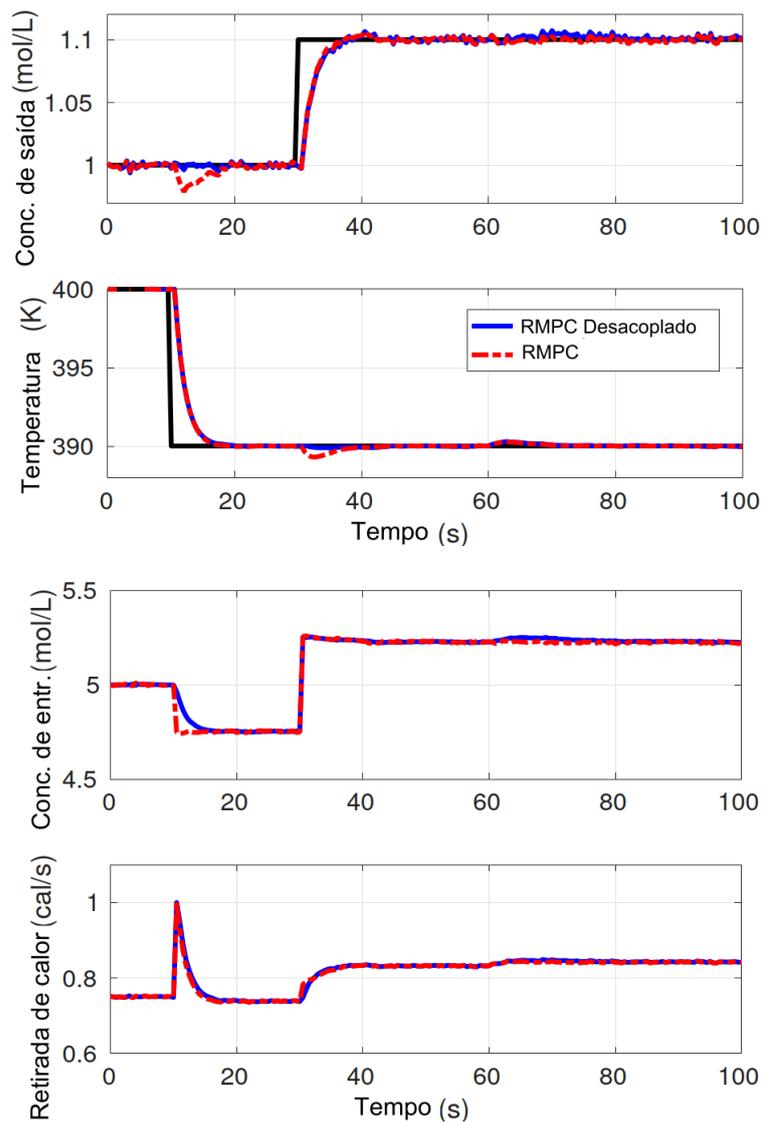


Figura 14 – Resposta da saída e do controle com um MPC robuto padrão e o MPC robusto proposto com desacoplador explícito na presença de ruído de medição - caso de estudo CSTR.

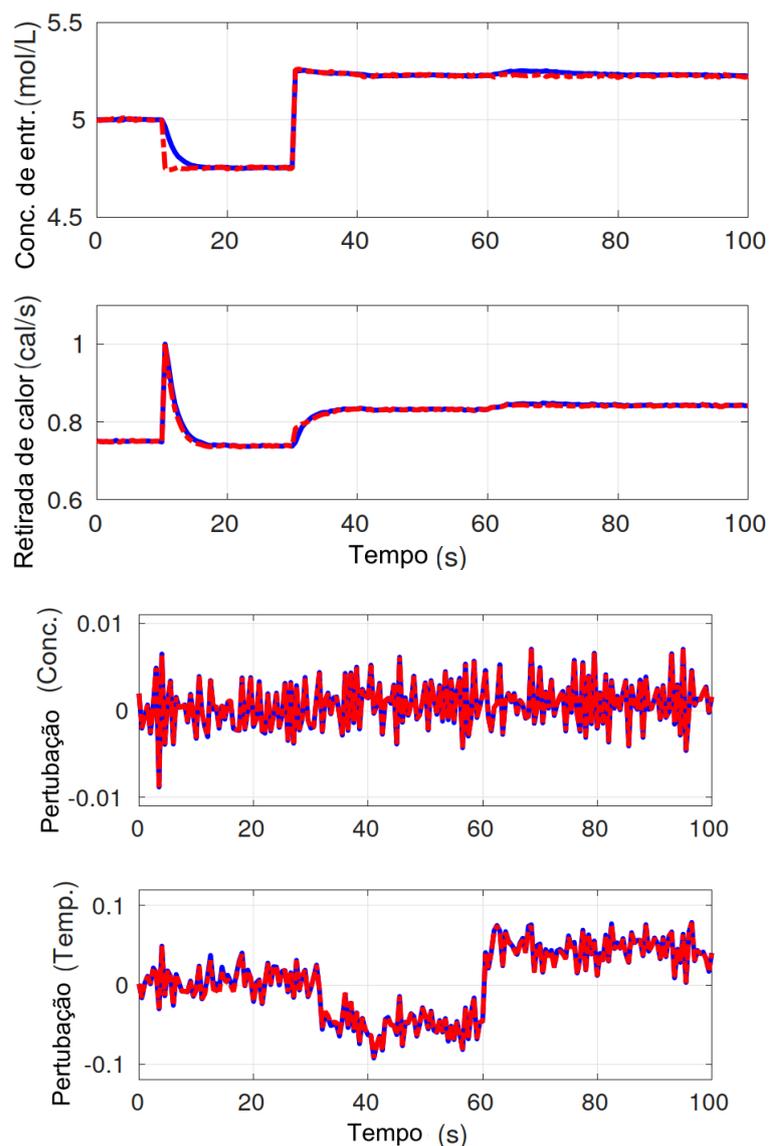


Figura 15 – Perturbações aditivas (w_k) obtidas do modelo de predição linear: superior - sem ruído de medição, inferior - com ruído de medição.

6 Conclusão

Neste projeto de dissertação foi apresentada uma abordagem mais ampla de trabalho com desacoplamento de sistemas multivariáveis para uso com controladores preditivos baseados em modelo que, ao contrário da maioria dos trabalhos relacionados, não depende do tipo de desacoplador utilizado nem da sintonia do controlador. A representação aumentada sugerida é semelhante a formulação clássica do controlador MPC linear, cujo universo de técnicas com garantia de estabilidade e robustez é bastante amplo, permitindo, portanto, a aplicação da abordagem proposta nas mais diversas estratégias de controle MPC. Em contraposição às técnicas disponíveis na literatura, a dinâmica do desacoplador é considerada na predição, o que permite assegurar estabilidade robusta.

O trabalho destacou a importância do mapeamento entre a entrada virtual da representação aumentada (entrada do desacoplador) e a entrada real (entrada do processo) para permitir o tratamento das restrições do problema de controle original. Este mapeamento permite que as restrições reais sejam consideradas no problema de otimização do MPC. Inclusive, devido a este mapeamento foi necessário um aumento adicional da representação por espaço de estados para o caso do uso do MPC utilizando o modelo de velocidade, conforme apresentado na Seção 4.2. Portanto, conclui-se que, apesar da proposta de desacoplamento apresenta ser para uso mais geral em controladores preditivos, o mapeamento entre entradas virtuais e entradas reais pode exigir uma adequação do controlador.

Foi visto que os parâmetros de projeto para o MPC sem desacoplamento são análogos ao da versão desacoplada, apresentada neste trabalho, facilitando sua aplicação em projetos de controladores preditivos.

Os resultados das simulações indicam que os objetivos foram alcançados, uma vez que o acoplamento cruzado foi eliminado ou mitigado, de forma significativa. Os principais motivos para que não houvesse uma eliminação completa do efeito do acoplamento é devido ao erro de modelagem da não-linear ou a condição de restrição ativa, como por exemplo, saturação da entrada do processo. Ambas as situações são melhoradas de acordo com a escolha da estratégia do MPC escolhido bem como de seus parâmetros de sintonia. A mitigação do desacoplamento devido ao efeito do erro de modelagem pode ser melhorado se for escolhido um MPC robusto com seus parâmetros de robustez devidamente escolhidos, bem como o efeito devido a restrição ativa pode ser melhorado com uma adequada seleção das matrizes de ponderação da função custo, de forma a evitar a saturação dos estados ou das entradas da planta. É importante salientar que, assim como ocorre para o caso

desacoplado, sempre haverá um preço a pagar para a melhoria de um aspecto na resposta do sistema. Por exemplo, aumentar a robustez do controlador pode diminuir o domínio de atração da resposta do sistema, e alterar as matrizes de ponderação do MPC pode acarretar em um maior tempo de acomodação do sistema.

Para o caso das plantas de fase não-mínima, apresentadas nas seções 4.3 e 5.6.1, foi visto que para mitigar o acoplamento cruzado, a técnica com desacoplamento apresentou uma efeito de fase não-mínima significativa, que foi necessário para incorporar o efeito da variação de uma referência sem variar a outra saída.

Por fim, foi verificado que a técnica de desacoplamento proposta é capaz de rejeitar perturbação com mitigação do acoplamento cruzado, caso o controlador MPC seja devidamente escolhido.

Dentre as principais perspectivas de trabalho futuro, deve-se destacar: (i) o problema de mitigação do acoplamento cruzado na presença de restrições ativas, (ii) o desenvolvimento do método de desacoplamento para sistemas não-lineares, e (iii) a validação da abordagem proposta em plataformas experimentais.

Referências

BORELLI F., B. A.; MORARI, M. *Predictive control for linear and hybrid systems*. 1st. ed. New York: Cambridge University Press, 2017.

CAMACHO, E.; BORDONS, C. *Model Predictive Control*. 1st. ed. Great Britain: Springer, 1999.

CHEN, C. T. *Linear system theory and design*. 3rd. ed. New York: Oxford University Press, 1999.

CHISCI, L.; ROSSITER, J.; ZAPPA, G. Systems with persistent disturbances: predictive control with restricted constraints. *Automatica*, v. 37, n. 7, p. 1019–1028, 2001. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109801000516>>.

CLARKE, D.; MOHTADI, C.; TUFFS, P. Generalized predictive control—part i. the basic algorithm. *Automatica*, v. 23, n. 2, p. 137–148, 1987. ISSN 0005-1098.

CUNHA, V. M.; SANTOS, T. L. M. Robust nonlinear model predictive control based on nominal predictions with piecewise constant references and bounded disturbances. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 32, n. 6, p. 3944–3968, 2022.

CUTLER, C. R.; RAMAKER, B. L. Dynamic matrix control—a computer control algorithm. *Joint Automatic Control Conference*, v. 17, p. 72, 1980.

DWORAK P., G. J. A. S.; GHOSH, S. Effective use of MPC for dynamic decoupling of MIMO systems. *Elektronika ir Elektrotechnika*, v. 25, n. 2, p. 3–8, 2019.

FALB, P.; WOLOVICH, W. A. *Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems*. [S.l.], 1967.

FERRAMOSCA, A. et al. Mpc for tracking with optimal closed-loop performance. *Automatica*, v. 45, n. 8, p. 1975–1978, 2009. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S000510980900212X>>.

FERRAMOSCA, A. et al. Mpc for tracking zone regions. *Journal of Process Control - J PROCESS CONTROL*, v. 20, p. 506–516, 04 2010.

FERRAMOSCA, A. et al. Robust mpc for tracking zone regions based on nominal predictions. *Journal of Process Control*, v. 22, n. 10, p. 1966–1974, 2012. ISSN 0959-1524. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959152412002077>>.

GAGNON, E.; POMERLEAU, A.; DESBIENS, A. Simplified, ideal or inverted decoupling? *ISA Transactions*, v. 37, p. 265–276, 1998.

GAGNON E., P. A.; DESBIENS, A. Simplified, ideal ou inverted decoupling? *ISA Transactions*, v. 37, 1998.

GARCIA-GABIN, W.; CAMACHO, E. Application of multivariable GPC to a four tank process with unstable transmission zeros. In: *Proceedings of the 2002 International Conference on Applications*. [S.l.: s.n.], 2002.

GARCIA-GABIN, W.; CAMACHO, E. F. Application of multivariable gpc to a four tank process with unstable transmission zeros. In: IEEE. *Proceedings of the International Conference on Control Applications*. [S.l.], 2002. v. 2, p. 645–650.

GILBERT, E.; TAN, K. Linear systems with state and control constraints: the theory and application of maximal output admissible sets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 36, n. 9, p. 1008–1020, 1991.

GUPTA, Y. Control of integrating processes using dynamic matrix control. *Chemical Engineering Research and Design*, v. 76, n. 4, p. 465–470, 1998. ISSN 0263-8762. Process Operations and Control.

HERCEG, M. et al. Multi-Parametric Toolbox 3.0. In: *Proc. of the European Control Conference*. Zürich, Switzerland: [s.n.], 2013. p. 502–510. <<http://control.ee.ethz.ch/~mpt>>.

JOHANSSON, K. The quadruple-tank process: a multivariable laboratory process with an adjustable zero. *IEEE Transaction on Control System Technology*, v. 8, n. 3, p. 456–465, 2000.

JOHANSSON, K. The quadruple-tank process: a multivariable laboratory process with an adjustable zero. *IEEE Transaction on Control System Technology*, v. 8, n. 3, p. 456–465, 2000.

KOLMANOVSKY, I.; GILBERT, E. G. Theory and computation of disturbance invariant sets for discrete-time linear systems. *Mathematical problems in engineering*, Hindawi, v. 4, n. 4, p. 317–367, 1998.

KOUVARITAKIS, B.; CANNON, M. *Model predictive control: Classical, robust and stochastic*. [S.l.]: Springer, 2015.

LIMA, C.; SANTOS, T. Estudo sobre a redução do acoplamento em estratégias de controle preditivo baseado em modelo. In: *XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. [S.l.: s.n.], 2013. p. Artigo 7701.

LIMON, D. et al. Mpc for tracking of piece-wise constant references for constrained linear systems. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 38, n. 1, p. 135–140, 2005. ISSN 1474-6670. 16th IFAC World Congress. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667016368951>>.

LIMON, D. et al. Mpc for tracking piecewise constant references for constrained linear systems. *Automatica*, v. 44, n. 9, p. 2382–2387, 2008. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109808001106>>.

LIMON, D. et al. On the design of robust tube-based MPC for tracking. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 41, n. 2, p. 15333–15338, 2008. ISSN 1474-6670. 17th IFAC World Congress.

LIMÓN, D. et al. Robust tube-based MPC for tracking of constrained linear systems with additive disturbances. *Journal of Process Control*, Elsevier, v. 20, n. 3, p. 248–260, 2010.

- LIU L., T. S. X. D. Z. T. C. Y.; ZHANG, S. A review of industrial MIMO decoupling control. *International Journal of Control, Automation and Systems*, v. 17, 2019.
- MACIEJOWSKI, J. *Predictive Control with Constraints*. 1st. ed. .: Prentice Hall, 2001.
- MAYNE, D. Robust and stochastic mpc: Are we going in the right direction? *IFAC-PapersOnLine*, v. 48, n. 23, p. 1–8, 2015. ISSN 2405-8963. 5th IFAC Conference on Nonlinear Model Predictive Control NMPC 2015. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896315025392>>.
- MAYNE, D. et al. Robust output feedback model predictive control of constrained linear systems. *Automatica*, v. 42, n. 7, p. 1217–1222, 2006. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109806001221>>.
- MAYNE, D.; SERON, M.; RAKOVIĆ, S. Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbances. *Automatica*, v. 41, n. 2, p. 219–224, 2005. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109804002870>>.
- MAYNE D.Q., R. J. R. C.; SCOKAERT, P. Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, v. 36, n. 6, p. 789–814, 2000.
- MIDDLETON, R.; ADAMS, G. Modification of model predictive control to reduce cross-coupling. In: *17th World Congress The International Federation of Automatic Control*. [S.l.]: IFAC, 2008. p. 9940–9945.
- ORDYS, A. W.; CLARKE, D. W. A state-space description for gpc controllers. *International Journal of Systems Science*, v. 24, p. 1727–1744, 1993. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:121709281>>.
- PAULSON, J. A.; SANTOS, T. L.; MESBAH, A. Mixed stochastic-deterministic tube MPC for offset-free tracking in the presence of plant-model mismatch. *Journal of process control*, Elsevier, v. 83, p. 102–120, 2019.
- PEREIRA, G. da F.; FLESCH, R. C. C. Desacoplamento de sistemas multivariáveis não lineares com mpc usando função custo dinâmica. In: *Congresso Brasileiro de Automática-CBA*. [S.l.: s.n.], 2020. v. 2, n. 1.
- PEREIRA, G. F.; FLESCH, R. Desacoplamento de sistemas multivariáveis não lineares com MPC usando função custo dinâmica. In: *Anais do Congresso Brasileiro de Automática*. [S.l.]: SBA, 2020.
- QIN, J.; BADGWELL, T. An overview of industrial model predictive control technology. *AIChE Symposium Series*, v. 93, 01 1997.
- QIN, X.; ZHU, K.; CHAI, T. Robust adaptive decoupling design for generalized predictive control with neural network. In: *Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 1996. v. 3, p. 2426–2431.
- RAKOVIĆ, S. V. et al. Homothetic tube model predictive control. *Automatica*, v. 48, n. 8, p. 1631–1638, 2012. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109812001768>>.

- RICHALET, J. et al. Algorithmic control of industrial processes. p. 1119–1167, 1976.
- SANIYE, A.; SULEYMAN, K. Decoupling constrained model predictive control of multi-component packed distillation column. *World Applied Sciences Journal*, v. 13, n. 3, p. 517–530, 2011.
- SANTOS, T. *Contribuições para o Controle Preditivo com Compensação de Atraso Robusta*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2011.
- SANTOS, T.; CUNHA, V. Robust mpc for linear systems with bounded disturbances based on admissible equilibria sets. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 31, n. 7, p. 2690–2711, 2021.
- SANTOS, T. L.; CUNHA, V. M. Tractable robust mpc for tracking piecewise constant references based on nominal predictions. *Journal of Process Control*, v. 129, p. 103030, 2023. ISSN 0959-1524. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959152423001178>>.
- SANTOS, T. L. M. Modified reference tracking mpc for constrained linear systems. *International Journal of Systems Science*, Taylor & Francis, v. 49, n. 8, p. 1674–1684, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00207721.2018.1478014>>.
- SCHMITZ U., H. R. A. F.; BARS, R. Decoupling predictive control by error dependent tuning of the weighting factors. *ATP Journal PLUS*, 2007.
- SHINSKEY, F. *Process Control System: application, design and tuning*. 4. ed. New York: McGraw-Hill, 1996.
- SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. 2. ed. [S.l.]: Wiley, 2005.
- STRASSBERGER D., M. P.; SERGIYENKO, O. A decoupled MPC for motion control in robotino using a geometric approach. *Journal of Physics: Conference Series*, v. 659, 2015.
- TÔRRES, L. A. B. *Teoria de Estabilidade de Lyapunov*. 2019. Março, 2019. Disponível em: <http://www.cpdee.ufmg.br/~torres/wp-content/uploads/2018/02/Estabilidade_Lyapunov.pdf>. Acesso em 5 de Maio de 2024.
- WANG, Q.-G. *Decoupling Control*. 1st. ed. German: Springer, 2003.
- WANG, Q.-G.; HUANG, B.; GUO, X. Auto-tuning of tito decoupling controllers from step tests. *ISA Transactions*, v. 39, n. 4, p. 407–418, 2000. ISSN 0019-0578. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001905780000288>>.
- ZABET, K.; HABER, R. Improvement of the decoupling effect of the predictive controllers GPC and PFC by parameter adaptation. In: *18th International Conference on Process Control*. [S.l.]: Slovak University of Technology in Bratislava, 2011. p. 419–426.
- ZERMANI M.A., F. E.; MAMI, A. Decoupling multivariable GPC with reference observation and feedforward compensation method. case study: Neonate incubator. *International Journal of Computer Science*, v. 9, n. 3, p. 508–515, 2012.

- ZERMANI M.A., F. E.; MAMI, A. Self-tuning weighting factor to decoupling control for incubator system. *International Journal of Information Technology, Control and Automation*, v. 2, n. 3, p. 67–83, 2012.
- ZHANG, J. Improved nonminimal state space model predictive control for multivariable processes using a non-zero-pole decoupling formulation. *Industrial Engineering & Chemistry Research*, v. 52, n. 3, p. 4874–4880, 2013.
- ZHANG, R.; GAO, F. An improved decoupling structure based state space MPC design with improved performance. *Systems & Control Letters*, v. 75, p. 77–83, 2015. ISSN 0167-6911.
- ZHU, K.; QIN, X.; CHAI, T. A new decoupling design of self-tuning multivariable generalized predictive control. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, v. 13, n. 3, p. 183–196, 1999.

Apêndices

APÊNDICE A – Conceitos preliminares

A.1 Álgebra Linear

Definição 1 (Matriz semidefinida positiva). *Seja \mathbf{A} uma matriz quadrada de ordem n , simétrica. Essa matriz é dita semidefinida positiva se*

$$x^\top \mathbf{A}x \geq 0, \quad \forall x \neq 0.$$

Definição 2 (Matriz definida positiva). *Seja \mathbf{A} uma matriz quadrada de ordem n , simétrica. Essa matriz é dita definida positiva se*

$$x^\top \mathbf{A}x > 0, \quad \forall x \neq 0.$$

Definição 3 (Pseudo-inversa de Moore-Penrose). *Seja uma matriz $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$. Sua pseudo-inversa, $\mathbf{A}^\dagger \in \mathfrak{R}^{n \times m} = G$, sempre existe, é única e possui as quatro propriedades a seguir*

$$(P1) \quad \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A} = \mathbf{A},$$

$$(P2) \quad \mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{G} = \mathbf{G},$$

$$(P3) \quad (\mathbf{A}\mathbf{G})^\top = \mathbf{A}\mathbf{G},$$

$$(P4) \quad (\mathbf{G}\mathbf{A})^\top = \mathbf{G}\mathbf{A}.$$

A.2 Teoria de controle

Considere um sistema LIT representado conforme a seguir

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \mathbf{A}x_k + \mathbf{B}u_k, \\ y_k &= \mathbf{C}x_k + \mathbf{D}u_k, \end{aligned} \tag{A.1}$$

sendo $x_k \in \mathfrak{R}^n$, o vetor de estados no instante k , $u_k \in \mathfrak{R}^m$, o vetor do sinal de controle no instante k , e $y_k \in \mathfrak{R}^q$, o vetor de saída do processo no instante k .

Definição 4 (Controlabilidade). *Um sistema é dito controlável no instante k_0 se for possível, por meio de um vetor de entrada u_k , transferir o sistema de qualquer estado inicial x_{k_0} (ou saída y_{k_0}) para qualquer outro estado (ou saída), em um intervalo de tempo finito.*

Controlabilidade de estados

Considere a matriz de controlabilidade de estado dada por

$$\mathbf{M}_{\mathbf{C}\mathbf{x}} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}].$$

O sistema possui os estados completamente controláveis se o posto da matriz $\mathbf{M}_{\mathbf{C}\mathbf{x}}$ for n .

Controlabilidade de saída

No projeto prático de um sistema de controle, pode-se desejar controlar a saída em vez de controlar o estado do sistema. A controlabilidade completa do estado não é necessária nem suficiente para controlar a saída do sistema. Portanto, é desejável definir em separado a controlabilidade da saída. Considere o sistema apresentado pela Equação A.1 e a matriz de controlabilidade de saída dada por

$$\mathbf{M}_{\mathbf{C}\mathbf{y}} = [\mathbf{C}\mathbf{B} \mid \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} \mid \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \mid \mathbf{D}].$$

O sistema possui as saídas completamente controláveis se o posto da matriz $\mathbf{M}_{\mathbf{C}\mathbf{y}}$ for q .

Definição 5 (Estabilizabilidade). *Um sistema parcialmente controlável é considerado estabilizável, se os modos não controláveis forem estáveis e os modos instáveis forem controláveis.*

Definição 6 (Observabilidade). *Um sistema é dito observável no instante k_0 se, com o sistema no estado x_{k_0} , for possível determinar esse estado a partir da observação da saída durante um intervalo de tempo finito. Considere o sistema apresentado pela Equação A.1 e a matriz de observabilidade dada por*

$$\mathbf{M}_{\mathbf{O}} = [\mathbf{C}^\top \mid \mathbf{A}^\top \mathbf{C}^\top \mid (\mathbf{A}^\top)^2 \mathbf{C}^\top \mid \dots \mid (\mathbf{A}^\top)^{n-1} \mathbf{C}^\top].$$

O sistema é observável se o posto da matriz $\mathbf{M}_{\mathbf{O}}$ for n .

Definição 7 (Detectabilidade). *Um sistema parcialmente observável é considerado detectável, se os modos não observáveis forem estáveis e os modos instáveis forem observáveis.*

Definição 8 (Regulador linear Quadrático - LQR). *Considere um sistema LIT representado por*

$$x_{k+1} = \mathbf{A}x_k + \mathbf{B}u_k, \quad (\text{A.2})$$

sendo o par (A, B) estabilizável.

Considere a seguinte função custo quadrática

$$J(x_0, \mathbf{u}_k) = \sum_{i=0}^{\infty} x_k^\top \mathbf{Q}x_k + u_k^\top \mathbf{R}u_k, \quad (\text{A.3})$$

com $R > 0$, $Q > 0$ e o par $(Q^{1/2}, A)$ observável.

O regulador linear quadrático de horizonte infinito é obtido através da solução do problema de otimização dado por

$$\begin{aligned} J^o(x_0) &= \min_{\mathbf{u}_k} J(x_0, \mathbf{u}_k) \\ \text{s.t. } x_{k+1} &= \mathbf{A}x_k + \mathbf{B}u_k. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A solução é obtida resolvendo a Equação Algébrica de Riccati

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} + \mathbf{Q} - \mathbf{A}^\top \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{B}^\top \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{P} \mathbf{A} = 0, \quad (\text{A.5})$$

com $\mathbf{P} > 0$.

E a lei de controle é dada por

$$u_k^o = \mathbf{K}x_k, \quad (\text{A.6})$$

com $\mathbf{K} = -(\mathbf{B}^\top \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{P} \mathbf{A}$.

A.3 Teoria dos conjuntos

Considere o sistema autônomo

$$x_{k+1} = g_a(x_k). \quad (\text{A.7})$$

Considere o sistema sujeito à entradas externas

$$x_{k+1} = g(x_k, u_k). \quad (\text{A.8})$$

Ambos os sistemas sujeitos às restrições de entradas e saídas

$$x_k \in \mathcal{X}, \quad u_k \in \mathcal{U}, \quad \forall k \geq 0. \quad (\text{A.9})$$

Definição 9 (Conjunto fechado). *Um conjunto $F \subset \mathfrak{R}$ é fechado se, e somente se, seu complementar $A = \mathfrak{R} - F$ é aberto.*

Definição 10 (Conjunto aberto). *Um conjunto $A \subset \mathfrak{R}$ chama-se aberto quando $A = \text{int}A$, isto é, quando todos os pontos de A são interiores a A .*

Diz-se que um ponto a é interior ao conjunto $A \subset \mathfrak{R}$ quando existe um número $\epsilon > 0$ tal que o intervalo aberto $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ está contido em A .

Definição 11 (Conjunto limitado). *Diz-se que um conjunto $X \subseteq \mathfrak{R}$ é limitado quando existe algum $b > 0 \in \mathfrak{R}$, tal que $|x| \leq b$ para todo $x \in X$.*

Definição 12 (Conjunto compacto). *Diz-se que um conjunto $X \subseteq \mathfrak{R}$ é compacto em \mathfrak{R} se X é fechado e limitado. Ou ainda, $X \subseteq \mathfrak{R}$ é compacto \iff toda sequência em X possui uma subsequência que converge para um ponto $x \in X$.*

Definição 13 (Conjunto convexo). *Seja Ω um espaço vetorial real. Um conjunto não vazio $C \subset \Omega$ é dito ser um conjunto convexo se para todos $x, y \in C$ e todo $\lambda \in [0, 1]$ valer $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$, ou seja, se o segmento de reta conectando quaisquer $x, y \in C$ estiver inteiramente contido em C .*

Definição 14 (Conjunto precursor para o conjunto \mathcal{S}). *Para o sistema autônomo A.7, o conjunto precursor para o conjunto \mathcal{S} é definido como*

$$\text{Pre}(\mathcal{S}) = \{x \in \mathfrak{R}^n : g_a(x) \in \mathcal{S}\}. \quad (\text{A.10})$$

Para o sistema sujeito à entradas externas A.8, o conjunto precursor para o conjunto \mathcal{S} é definido como

$$\text{Pre}(\mathcal{S}) = \{x \in \mathfrak{R}^n : \exists u \in \mathcal{U} \text{ s.a. } g(x, u) \in \mathcal{S}\}. \quad (\text{A.11})$$

Ou seja, para um sistema autônomo, $Pre(\mathcal{S})$ é o conjunto de estados que evolui para o conjunto alvo \mathcal{S} em um passo. Para um sistema sujeito à entradas externas, $Pre(\mathcal{S})$ é o conjunto de estados que podem ser levados para o conjunto alvo \mathcal{S} em um passo enquanto satisfaz as restrições nos estados e nas entradas.

Definição 15 (Conjunto sucessor do conjunto \mathcal{S}). *Para o sistema autônomo A.7, o conjunto sucessor para o conjunto \mathcal{S} é definido como*

$$Suc(\mathcal{S}) = \{x \in \mathfrak{R}^n : \exists x_0 \in \mathcal{S} \text{ s.a. } x = g_a(x_0)\}. \quad (\text{A.12})$$

Para o sistema sujeito à entradas externas A.8, o conjunto sucessor para o conjunto \mathcal{S} é definido como

$$Suc(\mathcal{S}) = \{x \in \mathfrak{R}^n : \exists x_0 \in \mathcal{S}, \exists u_0 \in \mathcal{U} \text{ s.a. } x = g(x_0, u_0)\}. \quad (\text{A.13})$$

Portanto, todos os estados contidos em \mathcal{S} são mapeados para um conjunto $Suc(\mathcal{S})$ sob o mapa g_a (caso do sistema autônomo) ou sob o mapa g para alguma entrada $u \in \mathcal{U}$ (caso do sistema sujeito à entradas externas).

Definição 16 (Conjunto controlável em N -passos, $K_N(\mathcal{S})$). *Para um dado conjunto alvo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$, o conjunto controlável em N -passos, $K_N(\mathcal{S})$, do sistema A.7 ou A.8 sujeito as restrições A.9 é definido recursivamente como*

$$K_j(\mathcal{S}) = Pre(K_{j-1}(\mathcal{S})) \cap \mathcal{X}, \quad K_0(\mathcal{S}) = \mathcal{S}, \quad j \in \{1, \dots, N\} \quad (\text{A.14})$$

Em outras palavras, todos os estados x_0 do sistema A.7 pertencentes ao conjunto controlável em N -passos, $K_N(\mathcal{S})$, evoluirão para o conjunto alvo \mathcal{S} em N passos, satisfazendo as restrições nos estados.

Da mesma maneira, todos os estados x_0 do sistema A.8 pertencentes ao conjunto controlável em N -passos, $K_N(\mathcal{S})$, podem ser levados, por uma sequência de controle adequada, para o conjunto alvo \mathcal{S} em N passos, satisfazendo as restrições nos estados e nas entradas.

Definição 17 (Conjunto alcançável em N -passos, $R_N(\mathcal{X}_0)$). *Para um dado conjunto inicial $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{X}$, o conjunto alcançável em N -passos, $R_N(\mathcal{X}_0)$, do sistema A.7 ou A.8 sujeito as restrições A.9 é definido como*

$$R_{i+1}(\mathcal{X}_0) = \text{Suc}(R_i(\mathcal{X}_0)) \cap \mathcal{X}, \quad R_0(\mathcal{X}_0) = \mathcal{X}_0, \quad i = \{0, \dots, N-1\}. \quad (\text{A.15})$$

Da Definição 17, todos os estados x_0 pertencentes a \mathcal{X}_0 irão evoluir (ou poderão ser levados, com as entradas adequadas) para o conjunto alcançável em N -passos, $R_N(\mathcal{X}_0)$, em N passos, satisfazendo as restrições nos estados e nas entradas (quando aplicável).

Definição 18 (Conjunto positivamente invariante). *Um conjunto $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{X}$ é dito ser um conjunto positivamente invariante para o sistema autônomo A.7 sujeito às restrições A.9, se*

$$x_0 \in \mathcal{O} \rightarrow x_k \in \mathcal{O}, \forall k \in \mathbb{N}_+, \quad (\text{A.16})$$

ou ainda,

$$\mathcal{O} \subseteq \text{Pre}(\mathcal{O}). \quad (\text{A.17})$$

Definição 19 (Máximo conjunto positivamente invariante, \mathcal{O}_∞). *O conjunto $\mathcal{O}_\infty \subseteq \mathcal{X}$ é o máximo conjunto positivamente invariante para o sistema autônomo A.7 sujeito às restrições A.9, se \mathcal{O}_∞ é invariante e \mathcal{O}_∞ contém todos os conjuntos invariantes contidos em \mathcal{X} .*

Definição 20 (Poliedro). *Um poliedro $P \in \mathbb{R}^n$ é denominado como uma interseção de um conjunto finito de meio espaços em \mathbb{R}^n*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}x \leq b\}. \quad (\text{A.18})$$

Definição 21 (Politopo). *Um politopo é a fronteira de um poliedro.*

Definição 22 (Soma de Minkowski). *A soma de Minkowski de dois conjuntos $P, Q \subset \mathbb{R}^n$ é definido como*

$$P \oplus Q = \{x + y : x \in P, y \in Q\}. \quad (\text{A.19})$$

Definição 23 (Zonotopo). *Um zonotopo $P \in \mathbb{R}^d$ é um politopo convexo que é representado como a soma de Minkowski de finitos segmentos de linhas*

$$P = L_1 + L_2 + \dots + L_m, \quad (\text{A.20})$$

onde L_i é o segmento de linha $[a_i, b_i]$ com $a_i, b_i \in \mathbb{R}^d$ para $i = 1, \dots, m$. Os segmentos de linha $[a_i, b_i]$ ($i = 1, \dots, m$) são chamados de geradores do zonotopo P .

Definição 24 (Diferença de Pontryagin). *A diferença de Pontryagin de dois politopos P e Q é um politopo*

$$P \ominus Q = \{x \in \mathfrak{R}^n : x + q \in P, \forall q \in Q\}. \quad (\text{A.21})$$

A.4 Funções

Definição 25 (Subgradiente). *Um vetor $g \in \mathfrak{R}^n$ é um subgradiente de $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ em $x \in \text{dom } f$ se para todo $z \in \text{dom } f$,*

$$f(z) \geq f(x) + g^\top(z - x). \quad (\text{A.22})$$

Se f é convexa e diferenciável, então seu gradiente em x é um subgradiente.

Definição 26 (Função subdiferenciável). *Uma função f é chamada de subdiferenciável em x se existe pelo menos um subgradiente em x .*

A função f é chamada de subdiferenciável se for subdiferenciável para todo $x \in \text{dom } f$.

Definição 27 (Função definida positiva). *Seja uma função escalar contínua $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, $f(0) = 0$. A função é dita definida positiva se $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathfrak{R}^n - \{0\}$.*

A.5 Estabilidade segundo Lyapunov

Definição 28 (Estabilidade de Lyapunov). *Um ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema $x_{k+1} = g(x_k)$ é:*

- *estável (no sentido de Lyapunov) se, para cada $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que*

$$\|x_0\| < \delta \rightarrow \|x_k\| < \varepsilon, \quad \forall k \geq 0. \quad (\text{A.23})$$

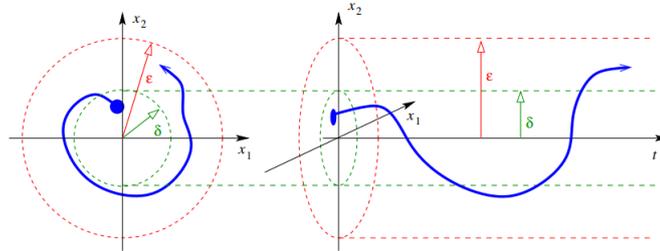
- *assintoticamente estável em $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^n$ se é estável e*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0, \quad \forall x_0 \in \Omega. \quad (\text{A.24})$$

- *instável se não for estável.*

Em outras palavras, um ponto de equilíbrio é estável para um sistema autônomo, se ao considerarmos um estado inicial próximo deste ponto de equilíbrio, os estados do sistema permanecerem em sua vizinhança para sempre, conforme apresentado na Fig. 16

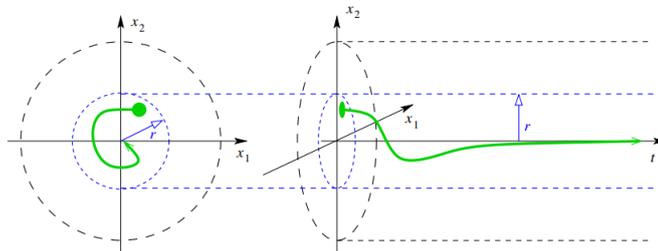
Figura 16 – Ponto de equilíbrio estável no sentido de Lyapunov (sistema autônomo)



Fonte: (TÔRRES, 2019)

Um ponto de equilíbrio será assintoticamente estável para um sistema autônomo, se ao considerarmos um estado inicial próximo deste ponto de equilíbrio, os estados do sistema além de permanecerem em sua vizinhança para sempre, convergirão para ele à medida que o tempo passa, conforme apresentado na Fig. 17

Figura 17 – Ponto de equilíbrio assintoticamente estável no sentido de Lyapunov (sistema autônomo)



Fonte: (TÔRRES, 2019)

Teorema 1. *Seja $x = 0$ um ponto de equilíbrio de $x_{k+1} = g(x_k)$. Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um conjunto fechado e limitado contendo a origem em seu interior. Assuma que existe uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua na origem e finita para todo $x \in \Omega$, tal que*

$$V(0) = 0 \text{ e } V(x) > 0, \forall x \in \Omega \setminus \{0\}, \quad (\text{A.25a})$$

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq -\alpha(x_k), \forall x \in \Omega \setminus \{0\} \quad (\text{A.25b})$$

onde $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua definida positiva. Então $x = 0$ é assintoticamente estável em Ω .

A função $V(x)$ que satisfaz as condições A.25 é chamada de função de Lyapunov.

APÊNDICE B – Máximo conjunto admissível

Apresentado por Gilbert e Tan (1991), o máximo conjunto admissível pode ser obtido conforme descrito a seguir. Considere um sistema representado por um modelo discreto linear invariante no tempo dado por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \mathbf{A}x_k + \mathbf{B}u_k, \\ y_k &= \mathbf{C}x_k + \mathbf{D}u_k, \end{aligned} \tag{B.1}$$

sendo $x_k \in \mathfrak{R}^n$, o vetor de estados no instante k , $u_k \in \mathfrak{R}^m$, o vetor do sinal de controle no instante k e $y_k \in \mathfrak{R}^p$, o vetor de saída do processo no instante k .

Para simplificar, as restrições dos estados e das entradas são representadas por restrições nas saídas dada por $y_k = \mathbf{C}x_k + \mathbf{D}u_k \in \mathcal{Y}$, com $\mathcal{Y} \subset \mathfrak{R}^p$ sendo um conjunto convexo e contendo a origem em seu interior. Considere uma lei de controle por realimentação de estados dada por $u_k = \mathbf{K}x_k$.

A ideia é obter um conjunto seguro de condições iniciais, ou seja, um conjunto \mathcal{Z} tal que $x_0 \in \mathcal{Z}$ implica que a restrição $y_k \in \mathcal{Y}$ para todo inteiro $k \geq 0$ é satisfeita.

Alternativamente considere um sistema autônomo dado por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \mathbf{A}x_k, \\ y_k &= \mathbf{C}x_k, \end{aligned} \tag{B.2}$$

sendo $x_k \in \mathfrak{R}^n$ e as restrições na saída dadas por $y_k \in \mathcal{Y}, \forall k \in \mathbb{Z}^+$, com \mathbb{Z}^+ , sendo o conjunto dos inteiros não negativos.

O problema em (B.1) toma a forma de (B.2) se as transformações a seguir são consideradas $\mathbf{A} + \mathbf{BK} \rightarrow \mathbf{A}$, $\mathbf{C} + \mathbf{DK} \rightarrow \mathcal{C}$ e $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ portanto, a partir deste ponto será considerado o sistema autônomo sem perda de generalidade.

O conjunto de restrições dos estados associado com \mathbf{A} , \mathbf{C} , \mathcal{Y} é $\mathcal{X}(\mathbf{C}, \mathcal{Y}) = \{x \in \mathfrak{R}^n : \mathbf{C}x \in \mathcal{Y}\}$. O conjunto $\mathcal{Z} \subset \mathfrak{R}^n$ é *A-invariante* se $\mathbf{A}\mathcal{Z} \subset \mathcal{Z}$. E assim, o conjunto máximo admissível é definido por

$$\mathcal{O}_\infty(\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathcal{Y}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{CA}^k x \in \mathcal{Y}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+\}. \quad (\text{B.3})$$

B.1 Finitude de \mathcal{O}_∞

Supondo (\mathbf{C}, \mathbf{A}) observável e \mathcal{Y} fechado e definindo

$$\mathcal{O}_k(\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathcal{Y}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{CA}^t x \in \mathcal{Y}, \text{ para } t = 0, \dots, k\}, \quad (\text{B.4})$$

temos que $\mathcal{O}_\infty \subset \mathcal{O}_{t_2} \subset \mathcal{O}_{t_1}, \forall t_1, t_2 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $t_1 \leq t_2$.

É dito que \mathcal{O}_∞ é finitamente determinado se para algum $k \in \mathbb{Z}^+$, $\mathcal{O}_\infty = \mathcal{O}_k$. Considere k^* sendo o menor dos elementos em \mathbb{Z}^+ tal que $\mathcal{O}_\infty = \mathcal{O}_{k^*}$. Então k^* é chamado de índice de admissibilidade. De (B.4) concluí-se que $\mathcal{O}_\infty = \mathcal{O}_k$, para todo $k \geq k^*$.

Teorema 2. \mathcal{O}_∞ é finitamente determinada se e somente se $\mathcal{O}_k = \mathcal{O}_{k+1}$ para algum $k \in \mathbb{Z}^+$.

Conforme demonstrado por Gilbert e Tan (1991), se i) \mathbf{A} é assintoticamente estável (todos seus autovalores estão estritamente dentro do círculo unitário); ii) se o par (\mathbf{C}, \mathbf{A}) é observável; iii) \mathcal{Y} é fechado e; iv) $0 \in \text{int } \mathcal{Y}$, então \mathcal{O}_∞ é finitamente determinado. Essas condições são suficientes para determinação da finitude de \mathcal{O}_∞ .

B.2 Determinação de \mathcal{O}_∞

Considere que o conjunto de restrições \mathcal{Y} é representado por desigualdades funcionais conforme a seguir

$$\mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R}^p : f_i(y) \leq 0, i = 0, \dots, s\}, \quad (\text{B.5})$$

com $f_i : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e satisfazendo $f_i(0) \leq 0$ para $i = 1, \dots, s$.

Se \mathcal{O}_∞ for finitamente determinado, pode ser dado por

$$\mathcal{O}_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(\mathbf{CA}^k x) \leq 0, \quad i \in \{0, \dots, s\}, \quad k \in \{0, \dots, k^*\}\}. \quad (\text{B.6})$$

E k^* e \mathcal{O}_∞ podem ser determinados conforme Algoritmo 6

Algoritmo 6: Determinação de k^* e \mathcal{O}_∞

Entrada: \mathbf{C} , \mathbf{A} , $f_i(y)$ para $i = \{1, \dots, s\}$

Saída: Máximo conjunto admissível

- 1 Considere $k = 0$.
- 2 Resolva o seguinte problema de otimização para $i = 1, \dots, s$:

$$\text{maximize } J_i(x) = f_i(\mathbf{CA}^{k+1}x) \quad (\text{B.7})$$

,
sujeito às restrições

$$f_j(\mathbf{CA}^t x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, s, \quad t = 0, \dots, k. \quad (\text{B.8})$$

Considere J_i^* como o máximo valor de $J_i(x)$.

se $J_i^* \leq 0$ para $i = 1, \dots, s$ **então**

 | pare e considere $k^* = k$ e defina \mathcal{O}_∞ por (B.6).

senão

 | continue.

- 3 Substitua k por $k + 1$ e retorne para o passo 2.

retorna k^* e \mathcal{O}_∞

B.3 Aproximação de \mathcal{O}_∞

Considere um sistema que satisfaz as condições suficientes de finitude de \mathcal{O}_∞ , apresentadas na seção B.1, exceto pelo item i, que é relaxado para \mathbf{A} sendo estável segundo Lyapunov¹ com uma raízes características de \mathbf{A} no círculo unitário, e somente com valor de $\lambda = 1$ (a situação mais comum). Fazendo a diagonalização em blocos de \mathbf{A} , onde cada bloco corresponde a distintos autovalores de \mathbf{A} (CHEN, 1999), é possível encontrar coordenadas que transforme \mathbf{A} , e conseqüentemente \mathbf{C} , para a forma

$$\mathbf{C} = [\mathbf{C}_L \quad \mathbf{C}_s], \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_d & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_s \end{bmatrix}, \quad (\text{B.9})$$

com as partições de \mathbf{A} e \mathbf{C} com dimensões consistentes, d é o número de raízes características em $\lambda = 1$, e $\mathbf{A}_s \in \mathfrak{R}^{(n-d) \times (n-d)}$ é assintoticamente estável.

¹ ver Definição 28 no Apêndice A

Para um $\epsilon > 0$ e pequeno, considere

$$\mathcal{Y}(\epsilon) = \{y \in \mathfrak{R}^p : f_i(y) \leq -\epsilon, \quad i = 1, \dots, s\}. \quad (\text{B.10})$$

E

$$\epsilon_0 = -\max\{f_i(0) : i = 1, \dots, s\}. \quad (\text{B.11})$$

Teorema 3. *Suponha \mathbf{A} e \mathbf{C} na forma (B.9), (\mathbf{C}, \mathbf{A}) observável, \mathbf{A}_s assintoticamente estável, as funções $f_i : \mathfrak{R}^p \rightarrow \mathfrak{R}$, $i = 1, \dots, s$ contínuas, $\epsilon_0 > 0$ (dado por (B.11)) e \mathcal{Y} um conjunto fechado com a origem em seu interior. Considere*

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_L & 0 \\ \mathbf{C}_L & \mathbf{C}_s \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{2p \times n}. \quad (\text{B.12})$$

Então para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, existe um conjunto finitamente determinado $\mathcal{O}_\infty(\mathbf{A}, \hat{\mathbf{C}}, \mathcal{Y}(\epsilon) \times \mathcal{Y})$ tal que

$$\mathcal{O}_\infty(\mathbf{A}, \hat{\mathbf{C}}, \mathcal{Y}(\epsilon) \times \mathcal{Y}) \subset \mathcal{O}_\infty(\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathcal{Y}).$$

E assim $\mathcal{O}_\infty(\mathbf{A}, \hat{\mathbf{C}}, \mathcal{Y}(\epsilon) \times \mathcal{Y})$ pode ser utilizado como uma aproximação para o máximo conjunto admissível, sendo cada vez mais próximo de $\mathcal{O}_\infty(\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathcal{Y})$ a medida que ϵ tende a 0, porém com o número de interações aumentando para a obtenção do conjunto.

B.4 Caso para modelo com representação aumentada devido a inclusão da dinâmica do desacoplador

Nas seções anteriores foi abordado o máximo conjunto admissível para a saída do sistema, conforme apresentado originalmente por Gilbert e Tan (1991). Aqui será dado efoque ao conjunto dos estados admissíveis, tendo como objetivo obter o máximo conjunto poliedral admissível positivamente invariante para os estados considerando o sistema aumentado dado pela equação (4.1) que inclui a dinâmica do desacoplador e o modelo de velocidade para permitir a rejeição à perturbações constantes. A lei de controle estabilizante implícita por realimentação de estados é dada por $\Delta v_k = \mathbf{K}_\xi(\xi_k - \xi_{eq,r})$.

Para se obter a restrição terminal, através da representação de restrições na forma poliedral $\mathcal{U} = \{u_k \in \mathfrak{R}^m : \mathbf{H}_u u_k \leq g_u\}$, a restrição em Δu_k deve ser convertida para $u_k = \Delta u_k + u_{k-1}$, o que implica a necessidade da incorporação da dinâmica de u_{k-1} como

segue

$$\begin{bmatrix} \tilde{\xi}_{k+1+j|k} \\ \tilde{u}_{k+j|k} \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}_\xi & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_\xi & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_\xi \\ \mathbf{F}_v \end{bmatrix} [\mathbf{K}_\xi \mathbf{0}] \right)}_{\mathbf{A}_a} \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_{k+j|k} \\ \tilde{u}_{k-1+j|k} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.13})$$

sendo $\tilde{\xi}_{k+j|k} = \xi_{k+j|k} - \xi_{eq,r}$ e $\tilde{u}_{k-1+j|k} = u_{k-1+j|k} - u_r$.

Cabe enfatizar que $\mathbf{F}_\xi \tilde{\xi}_k = \mathbf{F}_\xi \xi_k$, pois $\mathbf{F}_\xi = [\mathbf{F}_\chi \mathbf{0}] = [\mathbf{0} \mathbf{C}_D \mathbf{0}]$. Neste caso, o estado adicional definido por $\tilde{u}_{k-1+j|k}$ tem o papel de armazenar o controle futuro anterior tal que $\tilde{u}_{k+j|k}$ pode ser obtido por meio de $\Delta u_{k+j|k} + \tilde{u}_{k-1+j|k}$. Assim, pode-se obter uma aproximação invariante admissível ($\Omega_\epsilon^{r_k}$) para o máximo conjunto poliedral admissível positivamente invariante aumentado dependente de r_k ($\mathcal{O}_{a,\infty}^{r_k}$), tal que $[\xi_{k+N|k}^\top \ u_{k+N-1|k}^\top] \in \mathcal{O}_{a,\infty}^{r_k}$ e $[\xi_{k+N|k}^\top \ u_{k+N-1|k}^\top] \in \Omega_\epsilon^{r_k}$ asseguram a invariância e a satisfação das restrições sob a lei de controle $\Delta v_{k+N-1|k} = \mathbf{K}_\xi(\xi_{k+N|k} - \xi_{eq,k})$ com $\xi_{eq,k}$ sendo a condição de equilíbrio definida por r_k . A aproximação invariante e admissível se faz necessária na prática, pois o máximo conjunto invariante admissível pode não ser finitamente determinado em decorrência dos autovalores iguais à unidade (devido a incorporação da ação integral).

Nesta abordagem aproximada, $\Omega_\epsilon^{r_k} \subset \mathcal{O}_{a,\infty}^{r_k}$, pode ser calculado com um algoritmo finitamente determinado conforme proposto em (GILBERT; TAN, 1991, Seção 5). De forma simplificada, assumindo de $\mathcal{O}_{a,\infty}^{r_k} \subset \mathbb{Z}^{r_k}$ com $\mathbb{Z}^{r_k} = \{z \in \Re^{n+n_d+2m} : \mathbf{H}_z z \leq g_z\}$, sendo \mathbb{Z}^{r_k} o conjunto de restrições de controle e estados transladados descritos no espaço de estados aumentados. A restrição contraída é definida por

$$\mathbb{Z}_{\epsilon,ss}^{r_k} = \{z \in \Re^{n+n_d+2m} : \mathbf{H}_z \mathbf{A}_{ss} z \leq g_z - \Upsilon \epsilon\}, \quad (\text{B.14})$$

sendo $\epsilon > 0$ um parâmetro de contração, $\Upsilon \epsilon$ um vetor constante com elementos iguais a ϵ e

$$\mathbf{A}_{ss} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{F}_\xi + \mathbf{F}_v \mathbf{K}_\xi)(\mathbf{I} - \mathbf{A}_\xi - \mathbf{B}_\xi \mathbf{K}_\xi)^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Finalmente, a aproximação $\Omega_\epsilon^{r_k}$ pode ser obtida substituindo a restrição \mathbb{Z}^{r_k} pela interseção $\mathbb{Z}^{r_k} \cap \mathbb{Z}_{\epsilon,ss}^{r_k}$. O conjunto $\Omega_\epsilon^{r_k}$ tende a $\mathcal{O}_{a,\infty}^{r_k}$ quando ϵ tende a 0. Por outro lado, o número de iterações para a obtenção de $\Omega_\epsilon^{r_k}$ também tende a aumentar com a redução de ϵ . Detalhes da aproximação invariante admissível podem ser obtidos em (GILBERT; TAN, 1991, Seção 5). Vale enfatizar que $\mathbf{A}_{ss} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}_a^k$ e $\mathbf{A}_{ss} \mathbf{A}_a = \mathbf{A}_{ss}$. Assim, a restrição contraída praticamente não altera o volume e a forma do conjunto terminal assumindo valores pequenos de ϵ .

APÊNDICE C – Máximo conjunto invariante admissível para seguimento de referência

A seguir será demonstrado como obter o máximo conjunto invariante admissível para seguimento de referência, $\mathcal{O}_{\infty, \lambda}^w$, conforme apresentado por Limon et al. (2008a), utilizando algoritmos padrões para definição do máximo conjunto invariante poliedral admissível de saída (GILBERT; TAN, 1991).

Considere um sistema por representação de estados conforme equação (2.29) com as restrições dos estados e das entradas dadas pela equação (2.30).

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \mathbf{A}x_k + \mathbf{B}u_k, \\ y_k &= \mathbf{C}x_k, \end{aligned} \tag{C.1}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \{z \in \mathfrak{R}^{n+m} : \mathbf{F}_z z \leq g_z\}, \\ [x_k^\top \quad u_k^\top]^\top &\in \mathbb{Z}, \quad k \geq 0. \end{aligned} \tag{C.2}$$

O conjunto de entradas e estados estacionários do sistema (C.1) é dado pela equação (2.32)

$$\bar{z} = [\bar{x}^\top \quad \bar{u}^\top]^\top = \mathbf{M}_\theta \bar{\theta} = [\mathbf{M}_x^\top \quad \mathbf{M}_u^\top]^\top \bar{\theta}. \tag{C.3}$$

A existência das restrições limita o conjunto de entradas e estados estacionários admissíveis conforme a seguir

$$\bar{\mathbb{Z}} = \{(\bar{x}, \bar{u}) = \mathbf{M}_\theta \bar{\theta} : \mathbf{M}_\theta \bar{\theta} \in \mathbb{Z}\}. \tag{C.4}$$

Considere que o sistema (C.1) é controlado pela lei de controle dada pela equação (2.35).

$$u_k = \mathbf{K}x_k + \mathbf{L}\bar{\theta}, \tag{C.5}$$

com $\mathbf{L} = -\mathbf{K}\mathbf{M}_x + \mathbf{M}_u$.

Considerando o estado estendido $w = (x, \bar{\theta})$, o sistema em malha fechado pode

ser representado por $w_{k+1} = \mathbf{A}_w w_k$, onde

$$\mathbf{A}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{BK} & \mathbf{BL} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_\theta} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.6})$$

Seja W_λ um poliedro convexo definido como

$$W_\lambda = \{w = (x, \bar{\theta}) : (x, \mathbf{K}x_k + \mathbf{L}\bar{\theta}) \in \mathbb{Z}, \quad \mathbf{M}_\theta \bar{\theta} \in \lambda \mathbb{Z}\}.$$

Então é dito que o conjunto Ω^w é um conjunto invariante admissível para seguimento de referência se para todo $w \in \Omega^w$, então $A_w w \in \Omega^w$ e $\Omega^w \subseteq W_1$. E o máximo conjunto invariante admissível para seguimento de referência é dado por $\mathcal{O}_\infty^w = \{w : A_w^i w \in W_1, \forall i \geq 0\}$.

Devido aos autovalores unitários de A_w , este conjunto pode não ser finitamente determinado. Então considere o conjunto dado por

$$\mathcal{O}_{\infty, \lambda}^w = \{w : A_w^i w \in W_\lambda, \forall i \geq 0\},$$

que é determinado para qualquer $\lambda \in (0, 1)$ e portanto, é um poliedro convexo. Dado que $\lambda \mathcal{O}_\infty^w \subset \mathcal{O}_{\infty, \lambda}^w \subset \mathcal{O}_\infty^w$ e λ pode ser escolhido arbitrariamente próximo de 1, o conjunto invariante obtido pode ser utilizado como uma aproximação confiável do máximo conjunto invariante admissível para seguimento de referência, \mathcal{O}_∞^w .

APÊNDICE D – Determinação do conjunto de equilíbrios admissíveis

O objetivo desta seção é obter uma aproximação interna para \mathcal{U}_∞ e \mathcal{X}_∞ tal que $\mathcal{U}_{inner,\infty} \subset \mathcal{U}_\infty$ e $\mathcal{X}_{inner,\infty} \subset \mathcal{X}_\infty$. Este problema é tratado conforme proposto em (KOUVARITAKIS; CANNON, 2015, seção 3.2.2).

Considere o sistema dado pela Eq. (2.40) e que o conjunto de perturbações é representado pelo politopo¹ a seguir com a origem em seu interior

$$\mathcal{W} = \{w \in \mathbb{R}^{n_w} : \mathbf{H}_w w \leq g_w\}. \quad (\text{D.1})$$

O mínimo conjunto positivamente invariante (mrpi) para o sistema (2.40) é definido por

$$W_{mrpi} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \Phi^j \Gamma \mathcal{W}, \quad (\text{D.2})$$

onde $\Phi = \mathbf{A} + \mathbf{BK}$. Uma aproximação externa invariante finitamente determinada para mrpi ($W_{mrpi} \subset W_{mrpi,outer}$) pode ser definida por

$$W_{mrpi,outer} = \frac{1}{1 - \alpha(r)} \bigoplus_{j=0}^{r-1} \Phi^j \Gamma \mathcal{W}, \quad (\text{D.3})$$

$$\Phi^{\alpha(r)} \Gamma \mathcal{W} \subseteq \alpha(r) \Gamma \mathcal{W}, \quad (\text{D.4})$$

onde $\alpha(r) < 1$ é um parâmetro de contração que é válido para um inteiro r suficientemente grande. Na prática, r é aumentado de tal forma que $(1 - \alpha(r)) \approx 1$.

A condição (D.12) pode ser diretamente verificada se a seguinte desigualdade vetorial é válida (KOUVARITAKIS; CANNON, 2015, Definição 3.4):

$$\max_{w \in \mathcal{W}} \mathbf{H}_w \Gamma^\dagger \Phi^j \Gamma \mathcal{W} \leq \rho g_w, \quad (\text{D.5})$$

onde Γ^\dagger é a pseudo-inversa de Moore-Penrose² de Γ . Desta forma, da aproximação externa

¹ ver definição 21 no Apêndice A.

² ver definição 3 no Apêndice A.

para o mrpi, a aproximação interna para as restrições de controle e estados são dadas por

$$\mathcal{U}_{inner,\infty} = \{u \in \mathfrak{R}^m : \mathbf{H}_u u \leq g_u - c_u\}, \quad (\text{D.6})$$

$$\mathcal{X}_{inner,\infty} = \{x \in \mathfrak{R}^n : \mathbf{H}_x x \leq g_x - c_x\}, \quad (\text{D.7})$$

com c_u e c_x sendo obtidos de

$$c_u = \frac{1}{1 - \alpha(r)} \sum_{j=0}^{r-1} \max_{w \in \mathcal{W}} \mathbf{H}_u \Phi^j \Gamma \mathcal{W}, \quad (\text{D.8})$$

$$c_x = \frac{1}{1 - \alpha(r)} \sum_{j=0}^{r-1} \max_{w \in \mathcal{W}} \mathbf{H}_x \Phi^j \Gamma \mathcal{W}. \quad (\text{D.9})$$

Portanto, os alvos nominais admissíveis são dados por

$$\bar{\mathcal{Y}} = \{y \in \mathfrak{R}^p : y = \mathbf{M}_y \bar{\theta}, x = \mathbf{M}_x \bar{\theta} \in \mathcal{X}_{inner,\infty}, u = \mathbf{M}_u \bar{\theta} \in \mathcal{U}_{inner,\infty}\}.$$

Note que a verificação da condição (D.12) e o cálculo de (D.16) e (D.17) pode ser simplificada significativamente se \mathcal{W} é representada por um zonotopo³, mas a solução com politopo é mais geral.

D.1 Caso para modelo com representação aumentada devido a inclusão da dinâmica do desacoplador

Considere o sistema dado pela Eq. (3.7) e que o conjunto de perturbações é representado pelo politopo dado pela equação (D.1), o mínimo conjunto positivamente invariante (mrpi) para o sistema (3.7) é definido por

$$W_{mrpi} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \Phi^j \Gamma_{\chi} \mathcal{W}, \quad (\text{D.10})$$

onde $\Phi = \mathbf{A}_{\chi} + \mathbf{B}_{\chi} \mathbf{K}$. Uma aproximação externa invariante finitamente determinada para mrpi ($W_{mrpi} \subset W_{mrpi,outer}$) pode ser definida por

$$W_{mrpi,outer} = \frac{1}{1 - \alpha(r)} \bigoplus_{j=0}^{r-1} \Phi^j \Gamma_{\chi} \mathcal{W}, \quad (\text{D.11})$$

$$\Phi^{\alpha(r)} \Gamma_{\chi} \mathcal{W} \subseteq \alpha(r) \Gamma_{\chi} \mathcal{W}, \quad (\text{D.12})$$

³ ver definição 23 no Apêndice A

onde $\alpha(r) < 1$ é um parâmetro de contração que é válido para um inteiro r suficientemente grande. Na prática, r é aumentado de tal forma que $(1 - \alpha(r)) \approx 1$.

A condição (D.12) pode ser diretamente verificada se a seguinte desigualdade vetorial é válida (KOUVARITAKIS; CANNON, 2015, Definição 3.4):

$$\max_{w \in \mathcal{W}} \mathbf{H}_w \mathbf{\Gamma}_\chi^\dagger \mathbf{\Phi}^j \mathbf{\Gamma}_\chi \mathcal{W} \leq \rho g_w, \quad (\text{D.13})$$

onde $\mathbf{\Gamma}_\chi^\dagger$ é a pseudo-inversa de Moore-Penrose de $\mathbf{\Gamma}_\chi$. Desta forma, da aproximação externa para o mrpi, a aproximação interna para as restrições de controle e estados são dadas por

$$\mathcal{U}_{inner,\infty} = \{u \in \mathfrak{R}^m : \mathbf{H}_u u \leq g_u - c_u\}, \quad (\text{D.14})$$

$$\mathcal{X}_{inner,\infty} = \{x \in \mathfrak{R}^n : \mathbf{H}_x x \leq g_x - c_x\}, \quad (\text{D.15})$$

com c_u e c_x sendo obtidos de

$$c_u = \frac{1}{1 - \alpha(r)} \sum_{j=0}^{r-1} \max_{w \in \mathcal{W}} \mathbf{H}_u (\mathbf{F}_\chi + \mathbf{F}_\nu) \mathbf{\Phi}^j \mathbf{\Gamma}_\chi \mathcal{W}, \quad (\text{D.16})$$

$$c_x = \frac{1}{1 - \alpha(r)} \sum_{j=0}^{r-1} \max_{w \in \mathcal{W}} \mathbf{H}_x [\mathbf{I}_n \ \mathbf{0}_{n,nd}] \mathbf{\Phi}^j \mathbf{\Gamma}_\chi \mathcal{W}. \quad (\text{D.17})$$

Portanto, os alvos nominais admissíveis são dados por

$$\bar{\mathcal{Y}} = \{y \in \mathfrak{R}^p : y = \mathbf{M}_y \bar{\theta}, x = \mathbf{M}_x \bar{\theta} \in \mathcal{X}_{inner,\infty}, u = \mathbf{M}_u \bar{\theta} \in \mathcal{U}_{inner,\infty}\}.$$

Note que a verificação da condição (D.12) e o cálculo de (D.16) e (D.17) pode ser simplificada significativamente se \mathcal{W} é representada por um zonotopo⁴ (SANTOS; CUNHA, 2021), mas a solução com polítopo é mais geral.

⁴ ver definição 23 no Apêndice A

APÊNDICE E – Determinação do conjunto terminal invariante robusto

A seguir é apresentado como um conjunto poliedral (ou poliedro) positivamente invariante admissível e robusto pode ser obtido para uso como conjunto terminal. Considere um sistema representado conforme a seguir

$$\xi_{k+1} = \mathbf{A}_\xi \xi_k + \mathbf{\Gamma}_\xi w_k, \quad (\text{E.1})$$

$$\text{com } \xi_k = [x_k^\top \quad \theta_k^\top]^\top, w \in \mathcal{W}, \mathbf{\Gamma}_\xi = [((\mathbf{A}_\xi + \mathbf{B}_\xi \mathbf{K}_f)^N \mathbf{\Gamma})^\top \mathbf{0}_{m,n_w}^\top]^\top, \mathbf{A}_\xi = \begin{bmatrix} (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K}_f) & \mathbf{B} \mathbf{L} \\ \mathbf{0}_{m,n} & \mathbf{I}_{m,m} \end{bmatrix}.$$

As restrições dos equilíbrios

$$[\mathbf{0}_{m,n} \quad \mathbf{M}_x] \mathcal{Z}_f \subset \mathcal{X}_\infty, \quad (\text{E.2})$$

$$[\mathbf{0}_{m,n} \quad \mathbf{M}_u] \mathcal{Z}_f \subset \mathcal{U}_\infty, \quad (\text{E.3})$$

podem ser substituídas por

$$[\mathbf{0}_{m,n} \quad \mathbf{M}_x] \mathcal{Z}_f \subseteq \lambda \mathcal{X}_\infty, \quad (\text{E.4})$$

$$[\mathbf{0}_{m,n} \quad \mathbf{M}_u] \mathcal{Z}_f \subseteq \lambda \mathcal{U}_\infty, \quad (\text{E.5})$$

com $0 < \lambda < 1$, de tal forma que o conjunto poliedral invariante é finitamente determinado usando algoritmos padrões (KOLMANOVSKY; GILBERT, 1998). Em resumo, o conjunto terminal deve ser admissível para a factibilidade recursiva tal que

$$\mathcal{Z}_f \subseteq \tilde{\mathcal{Z}}, \quad (\text{E.6})$$

onde

$$\tilde{\mathcal{Z}} = \{z \in \mathfrak{R}^{n+m} : [\mathbf{I}_n \quad \mathbf{0}_{n,m}]z \in \mathcal{X}_N, [\mathbf{K}_f \quad \mathbf{L}]z \in \mathcal{U}_N, [\mathbf{0}_{m,n} \quad \mathbf{M}_x]z \in \lambda \mathcal{X}_\infty\}. \quad (\text{E.7})$$

De $\xi_{k+1} = \mathbf{A}_\xi \xi_k + \mathbf{\Gamma}_\xi w_k$, com $w \in \mathcal{W}$ e $\xi \in \tilde{\mathcal{Z}}$, então \mathcal{X}_f pode ser obtido utilizando o algoritmo proposto em (KOLMANOVSKY; GILBERT, 1998).

E.1 Caso para modelo com representação aumentada devido a inclusão da dinâmica do desacoplador

Para este caso, o sistema é representado por

$$\xi_{k+1} = \mathbf{A}_\xi \xi_k + \mathbf{\Gamma}_\xi w_k, \quad (\text{E.8})$$

$$\text{com } \xi_k = [\chi_k^\top \quad \theta_k^\top]^\top, w \in \mathcal{W}, \mathbf{\Gamma}_\xi = [((\mathbf{A}_\xi + \mathbf{B}_\xi \mathbf{K}_\chi)^N \mathbf{\Gamma})^\top \mathbf{0}_{m,n_w}^\top]^\top \text{ e } \mathbf{A}_\xi = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_\chi + \mathbf{B}_\chi \mathbf{K}_\chi) & \mathbf{B}_\chi \mathbf{L} \\ \mathbf{0}_{m,n+nd} & \mathbf{I}_{m,m} \end{bmatrix}.$$

As restrições dos equilíbrios $[\mathbf{0}_{m,n+nd} \ \mathbf{M}_x] \mathcal{Z}_f \subseteq \mathcal{X}_\infty$ e $[\mathbf{0}_{m,n+nd} \ \mathbf{M}_u] \mathcal{Z}_f \subseteq \mathcal{U}_\infty$ podem ser substituídas por $[\mathbf{0}_{m,n+nd} \ \mathbf{M}_x] \mathcal{Z}_f \subseteq \lambda \mathcal{X}_\infty$ e $[\mathbf{0}_{m,n+nd} \ \mathbf{M}_u] \mathcal{Z}_f \subseteq \lambda \mathcal{U}_\infty$ com $0 < \lambda < 1$ e o conjunto terminal deve ser admissível para a factibilidade recursiva tal que

$$\mathcal{Z}_f \subseteq \tilde{\mathcal{Z}}, \quad (\text{E.9})$$

onde

$$\tilde{\mathcal{Z}} = \{z \in \mathfrak{R}^{n+nd+m} : [\mathbf{I}_n \ \mathbf{0}_{n,nd+m}]z \in \mathcal{X}_N, [(\mathbf{F}_\chi + \mathbf{F}_v \mathbf{K}_\chi) \ \mathbf{L}]z \in \mathcal{U}_N, [\mathbf{0}_{m,n+nd} \ \mathbf{M}_x]z \in \lambda \mathcal{X}_\infty, [\mathbf{0}_{m,n+nd} \ \mathbf{M}_u]z \subseteq \lambda \mathcal{U}_\infty\}. \quad (\text{E.10})$$

De $\xi_{k+1} = \mathbf{A}_\xi \xi_k + \mathbf{\Gamma}_\xi w_k$, com $w \in \mathcal{W}$ e $\xi \in \tilde{\mathcal{Z}}$, então \mathcal{X}_f pode ser obtido utilizando o algoritmo proposto em (KOLMANOVSKY; GILBERT, 1998).

APÊNDICE F – Factibilidade recursiva e convergência

F.1 Factibilidade recursiva

As predições nominais são definidas de $\chi_{0|k} = \chi_k$, $\chi_{0|k+1} = \chi_{k+1}$. Se χ_k fornece uma solução viável, a factibilidade recursiva é apresentada utilizando a seguinte transformação ótima

$$v_{j|k}^* = \mathbf{K}\chi_{j|k}^* + c_{j|k}^*, \quad j \in [0, N-1], \quad (\text{F.1})$$

onde $c_j^* \in \mathfrak{R}^m$ pode sempre ser obtido de $v_{j|k}^*$, $\chi_{j|k}^*$ e \mathbf{K} . Então, um candidato viável para $k+1$ é definido por

$$v_{j|k+1}^c = \mathbf{K}\chi_{j|k+1}^c + c_{j+1|k}^*, \quad j \in [0, N-2], \quad (\text{F.2})$$

$$v_{N-1|k+1}^c = \mathbf{K}\chi_{N-1|k+1}^c + \mathbf{L}\theta_k^*. \quad (\text{F.3})$$

Note que $\chi_{1|k}^* = \Phi\chi_k + \mathbf{B}_\chi c_{0|k}^*$ com $\Phi = (\mathbf{A}_\chi + \mathbf{B}_\chi \mathbf{K})$. Portanto, a seguinte incompatibilidade na predição é válida

$$\chi_{0|k+1}^c = \mathbf{A}_\chi \chi_k + \mathbf{B}_\chi v_k + \Gamma_\chi w_k \quad (\text{F.4})$$

$$= \Phi\chi_k + \mathbf{B}_\chi c_{0|k}^* + \Gamma_\chi w_k \quad (\text{F.5})$$

$$= \chi_{1|k}^* + \Gamma_\chi w_k. \quad (\text{F.6})$$

A Eq. (F.6) pode ser reescrita pela multiplicação em ambos os lados por Φ e pela adição de $\mathbf{B}_\chi c_{1|k}^*$ como segue

$$\Phi\chi_{0|k+1}^c + \mathbf{B}_\chi c_{1|k}^* = \Phi[\chi_{1|k}^* + \Gamma_\chi w_k] + \mathbf{B}_\chi c_{1|k}^*, \quad (\text{F.7})$$

ou alternativamente

$$\chi_{1|k+1}^c = \chi_{2|k}^* + \Phi\Gamma_\chi w_k. \quad (\text{F.8})$$

Por suposição, a incompatibilidade geral da predição de um passo pode ser dada por

$$\chi_{j-1|k+1}^c = \chi_{j|k}^* + \Phi^{j-1}\Gamma_\chi w_k, \quad j \in [1, N]. \quad (\text{F.9})$$

Além disso, de $v_{N-1|k+1}^c = \mathbf{K}\chi_{N-1|k+1}^c + \mathbf{L}\theta_k^*$, a predição terminal $\chi_{N|k+1}^c$ é dada por

$$\chi_{N|k+1}^c = \mathbf{A}_\chi \chi_{N-1|k+1}^c + \mathbf{B}_\chi v_{N-1|k+1}^c \quad (\text{F.10})$$

$$= \Phi \chi_{N-1|k+1}^c + \mathbf{B}_\chi \mathbf{L}\theta_k^* \quad (\text{F.11})$$

$$= \Phi(\chi_{N|k}^* + \Phi^{N-1} \Gamma_\chi \mathbf{w}_k) + \mathbf{B}_\chi \mathbf{L}\theta_k^* \quad (\text{F.12})$$

$$= \Phi \chi_{N|k}^* + \mathbf{B}_\chi \mathbf{L}\theta_k^* + \Phi^N \Gamma_\chi w_k. \quad (\text{F.13})$$

Então, a factibilidade de $\chi_{N|k+1}^c$ é garantida porque \mathcal{X}_f é um conjunto robusto positivamente invariante tal que

$$[\chi_{N|k}^{*\top} \theta_k^{*\top}]^\top \in \mathcal{X}_f \Rightarrow [(\Phi \chi_{N|k}^* + \mathbf{B}_\chi \mathbf{L}\theta_k^* + \Phi^N \Gamma_\chi w_k)^\top \theta_k^{*\top}]^\top \in \mathcal{X}_f, \forall w_k \in \mathcal{W}.$$

A factibilidade de $v_{N-1|k+1}^c = \mathbf{K}\chi_{N-1|k+1}^c + \mathbf{L}\theta_k^*$ é verificada a seguir. Considere $v_{N|k}^* = \mathbf{K}\chi_{N|k}^* + \mathbf{L}\theta_k^*$ com $\mathbf{F}_\chi \chi_{N|k}^* + \mathbf{F}_v v_{N|k}^* \in \mathcal{U}_N$ porque $[\chi_{N|k}^{*\top} \theta_k^{*\top}]^\top \in \mathcal{X}_f$ e $z \in \mathcal{X}_f \Rightarrow [\mathbf{F}_\chi \mathbf{F}_v]z \in \mathcal{U}_N$. Então, a seguinte igualdade é verificada

$$v_{N-1|k+1}^c - v_{N|k}^* = \mathbf{K}\chi_{N-1|k+1}^c + \mathbf{L}\theta_k^* - \mathbf{K}\chi_{N|k}^* \quad (\text{F.14})$$

$$= \mathbf{K}\Phi^{N-1} \Gamma_\chi w_k, \quad (\text{F.15})$$

com $\chi_{N-1|k+1}^c - \chi_{N|k}^* = \Phi^{N-1} \Gamma_\chi w_k$ da Eq. (F.9). Além disso, $\mathbf{F}_\chi \chi_{N|k}^c + \mathbf{F}_v v_{N|k}^c \in \mathcal{U}_{N-1}$ desde que $\mathbf{F}_\chi \chi_{N|k}^* + \mathbf{F}_v v_{N|k}^* \in \mathcal{U}_N$ e $\mathcal{U}_N = \mathcal{U}_{N-1} \ominus (\mathbf{F}_\chi + \mathbf{F}_v \mathbf{K}) \Phi^{N-1} \Gamma_\chi \mathcal{W}$, que assegura que as restrições de controle e estado são respeitadas devido a escolha de $v_{N-1|k+1}^c = \mathbf{K}\chi_{N-1|k+1}^c + \mathbf{L}\theta_k^*$.

Agora, a factibilidade de toda solução candidata é verificada. Primeiro, note que $v_{j-1|k+1}^c - v_{j|k}^* = \mathbf{K}(\chi_{j-1|k+1}^c - \chi_{j|k}^*) + c_{j|k}^* - c_{j|k}^*$, de tal forma que

$$\chi_{j-1|k+1}^c - \chi_{j|k}^* \in \Phi^{j-1} \Gamma_\chi \mathcal{W}, \quad j \in [1, N], \quad (\text{F.16})$$

$$v_{j-1|k+1}^c - v_{j|k}^* \in \mathbf{K}\Phi^{j-1} \Gamma_\chi \mathcal{W}, \quad j \in [1, N], \quad (\text{F.17})$$

$$x_{j-1|k+1}^c - x_{j|k}^* \in [\mathbf{I}_n \ \mathbf{0}_{n,nd}] \Phi^{j-1} \Gamma_\chi \mathcal{W}, \quad j \in [1, N]. \quad (\text{F.18})$$

Portanto, como $x_{j|k}^* \in \mathcal{X}_j$, e $\mathcal{X}_j = \mathcal{X}_{j-1} \ominus [\mathbf{I}_n \ \mathbf{0}_{n,nd}] \Phi^{j-1} \Gamma_\chi \mathcal{W}$, então $x_{j-1|k+1}^c \in \mathcal{X}_{j-1}$, $j \in [1, N]$ da definição da diferença de Pontryagin¹. Além disso, $\mathbf{F}_\chi \chi_{j|k}^* + \mathbf{F}_v v_{j|k}^* \in \mathcal{U}_j$ do problema de otimização, e a seguinte fronteira para o controle também é válida $\mathbf{F}_\chi(\chi_{j-1|k+1}^c - \chi_{j|k}^*) + \mathbf{F}_v(v_{j-1|k+1}^c - v_{j|k}^*) \in (\mathbf{F}_\chi + \mathbf{F}_v \mathbf{K}) \Phi^{j-1} \Gamma_\chi \mathcal{W}$, $j \in [1, N]$. Note que $(\mathbf{F}_\chi + \mathbf{F}_v \mathbf{K}) \Phi^{j-1} \Gamma_\chi \mathcal{W}$ é utilizado ao invés de $\mathbf{F}_\chi \Phi^{j-1} \Gamma_\chi \mathcal{W} \oplus \mathbf{F}_v \mathbf{K} \Phi^{j-1} \Gamma_\chi \mathcal{W}$ porque $\chi_{j-1|k+1}^c - \chi_{j|k}^*$ e $v_{j-1|k+1}^c - v_{j|k}^*$ são afetados pelo mesmo sinal de perturbação (w_k) em cada instante de predição $k + 1$. Portanto, devido a definição da diferença de Pontryagin, temos

¹ ver Definição 24 no Apêndice A

$\mathcal{U}_j = \mathcal{U}_{j-1} \ominus (\mathbf{F}_\chi + \mathbf{F}_v \mathbf{K}) \Phi^{j-1} \mathbf{T} \mathcal{W} \Rightarrow \mathbf{F}_\chi \chi_{j-1|k+1}^c + \mathbf{F}_v v_{j-1|k+1}^c \in \mathcal{U}_{j-1}$, $j \in [1, N]$. E assim, todas as restrições do controle e dos estados são respeitadas se as soluções candidatas propostas forem utilizadas, completando a prova.

F.1.1 Análise da convergência

A análise da convergência é derivada principalmente das ideias apresentadas em (CUNHA; SANTOS, 2022) para sistemas lineares.

Considere o conjunto de alvos factíveis dado por

$$\bar{\mathcal{Y}}_f = \{y \in \mathbb{R}^p | y = \mathbf{M}_y \theta, [(\mathbf{M}_\chi \theta)^\top \theta^\top]^\top \in \mathcal{Z}_f\}. \quad (\text{F.19})$$

O custo do erro estacionário é tal que

$$\|y_s - y_t\|_{\mathbf{T}}^2 - \|\bar{y}^o - y_t\|_{\mathbf{T}}^2 \geq \|y_s - \bar{y}^o\|_{\mathbf{T}}^2, \quad \forall y_s \in \bar{\mathcal{Y}}_f. \quad (\text{F.20})$$

Esta desigualdade é válida com \bar{y}^o minimizando $\|y_s - y_t\|_{\mathbf{T}}^2$ sujeito a $y_s \in \bar{\mathcal{Y}}_f$ e $(\bar{y}^o - y_t)^\top \mathbf{T} (y_s - y_t) \geq 0$ devido a condição de otimalidade de uma função quadrática com restrição em um domínio convexo. A propriedade inicial pode ser diretamente verificada como

$$\|y_s - y_t\|_{\mathbf{T}}^2 = \|y_s - \bar{y}^o + \bar{y}^o - y_t\|_{\mathbf{T}}^2 \quad (\text{F.21})$$

$$= \|y_s - \bar{y}^o\|_{\mathbf{T}}^2 + 2(\bar{y}^o - y_t)^\top \mathbf{T} (y_s - y_t) + \|\bar{y}^o - y_t\|_{\mathbf{T}}^2. \quad (\text{F.22})$$

Agora considere o custo ótimo transladado como mostrado a seguir

$$W^*(\chi_k, y_t) = V_N^*(\chi_k, y_t) - \|\bar{y}^o - y_t\|_{\mathbf{T}}^2, \quad (\text{F.23})$$

onde $\|\bar{y}^o - y_t\|_{\mathbf{T}}$ é o valor mínimo admissível para o custo de erro estacionário e $V_N^*(\chi_k, y_t) = J_N^*(\mathbf{v}_k^*; \theta_k^*; \chi_k, y_t)$ é o valor ótimo da função custo. Portanto, um limite inferior para o custo é dado por

$$W^*(\chi_k, y_t) \geq \|y_k - \bar{y}_k^*\|_{\mathbf{Q}}^2 + \|\bar{y}_k^* - \bar{y}^o\|_{\mathbf{T}}^2 \quad (\text{F.24})$$

$$\geq \|y_k - \bar{y}^o\|_{\mathbf{S}}^2, \quad (\text{F.25})$$

onde $\mathbf{S} > 0$, $\mathbf{Q} - \mathbf{S} > 0$, $\mathbf{T} - \mathbf{S} > 0$ e $\alpha_{\mathbf{L}}(\cdot) = \|y_k - \bar{y}^o\|_{\mathbf{S}}^2$ é uma função- \mathcal{K}_∞ .

O limite superior pode ser obtido assumindo-se que χ_k é suficientemente próximo

de $\bar{\chi}^o = \mathbf{M}_\chi \theta^o$, isto é, $[\chi_k^\top \ \theta^{o\top}] \in \mathcal{X}_f$, then $v_{j|k}^c = \mathbf{K}x_{j|k}^c + \mathbf{L}\theta^o$ é admissível para todo o horizonte de previsão. Neste caso, $\|y_{j+1|k}^c - \bar{y}^o\|_{\mathbf{Q}}^2 = \|x_{j|k}^c - \bar{c}^o\|_{\mathbf{C}_\chi^\top \mathbf{C}_\chi^\top \mathbf{Q} \mathbf{C}_\chi}^2$, $\|v_{j+1|k}^c - \bar{v}^o\|_{\mathbf{R}}^2 = \|\chi_{j+1|k}^c - \bar{\chi}^o\|_{\mathbf{K}^\top \mathbf{R} \mathbf{K}}^2$, e as seguintes igualdades são válidas

$$\|\chi_{j|k}^c - \bar{\chi}^o\|_{\mathbf{P}}^2 = \|y_{j|k}^c - \bar{y}^o\|_{\mathbf{Q}}^2 + \|v_{j|k}^c - \bar{v}^o\|_{\mathbf{R}}^2 + \|\chi_{j+1|k}^c - \bar{\chi}^o\|_{\mathbf{P}}^2 \quad (\text{F.26})$$

porque $(\mathbf{A}_\chi + \mathbf{B}_\chi \mathbf{K})^\top \mathbf{P} (\mathbf{A}_\chi + \mathbf{B}_\chi \mathbf{K}) - \mathbf{P} = -\mathbf{K}^\top \mathbf{R} \mathbf{K} - \mathbf{C}_\chi^\top \mathbf{Q} \mathbf{C}_\chi$. E assim, utilizando a Eq. (F.26) recursivamente de $j = N - 1$ até $j = 0$, o seguinte limite superior é obtido em uma vizinhança de $\bar{\chi}^o$

$$W^*(\chi_k, y_t) \leq \|\chi_k - \bar{\chi}^o\|_{\mathbf{P}}^2, \quad (\text{F.27})$$

com $\chi_{0|k}^c = \chi_k$.

Como o domínio factível é fechado porque \mathcal{X} e \mathcal{U} são conjuntos compactos, então $W^*(\chi_k, y_t) \leq \rho \|\chi_{0|k}^c - \bar{\chi}^o\|_{\mathbf{P}}^2$ com um adequado $\rho \geq 1$ pode ser usado para obter o limite superior de todo o domínio factível. Por exemplo, considere que $\chi \in \Psi$ define o domínio factível, e $\mathcal{N} = \{\chi \in \mathfrak{R}^{n+n_d} \mid [\chi^\top \ \theta^{o\top}] \in \mathcal{X}_f\}$. Considere $\tilde{\rho} = \max_{\chi \in \Psi, \chi \notin \mathcal{N}} W^*(\chi, y_t) / (\|\chi - \bar{\chi}^o\|_{\mathbf{P}}^2)$. Note que a desigualdade $W^*(\chi_k, y_t) \leq \tilde{\rho} \|\chi_{0|k}^c - \bar{\chi}^o\|_{\mathbf{P}}^2$ é um limite superior externo do conjunto \mathcal{N} e $\rho = \max\{1, \tilde{\rho}\}$. Neste caso, os seguintes limites podem ser definidos

$$\|\chi_k - \bar{\chi}^o\|_{\mathbf{C}_\chi^\top \mathbf{S} \mathbf{C}_\chi}^2 \leq W^*(\chi_k, y_t) \leq \rho \|\chi_k - \bar{\chi}^o\|_{\mathbf{P}}^2. \quad (\text{F.28})$$

O próximo passo é avaliar a propriedade decrescente da variação da função custo, isto é, $\Delta W_k = W^c(\chi_{k+1}, y_t) - W^*(\chi_k, y_t) = V_N^c(\chi_{k+1}, y_t) - V_N^*(\chi_k, y_t)$ onde $W^c(\chi_{k+1}, y_t)$ e $V_N^c(\chi_{k+1}, y_t)$ são obtidos do candidato factível. Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} \|y_{i-1|k+1}^c - \bar{y}_k\|_{\mathbf{Q}}^2 - \|y_{i|k}^* - \bar{y}_k\|_{\mathbf{Q}}^2 &\leq 2|(y_{i-1|k+1}^c - \bar{y}_k)^\top \mathbf{Q} \mathbf{C}_\chi \Phi^{i-1} \Gamma_\chi w_k| \\ &\quad + \|\mathbf{C}_\chi \Phi^{j-1} \Gamma_\chi w_k\|_{\mathbf{Q}}, \end{aligned} \quad (\text{F.29})$$

$$\|v_{i-1|k+1}^c - \bar{v}_k\|_{\mathbf{R}}^2 - \|v_{i|k}^* - \bar{v}_k\|_{\mathbf{R}}^2 \leq 2|(v_{i-1|k+1}^c - \bar{v}_k)^\top \mathbf{R} \mathbf{K} \Phi^{j-1} \Gamma_\chi w_k| \quad (\text{F.30})$$

$$+ \|\mathbf{K} \Phi^{j-1} \Gamma_\chi w_k\|_{\mathbf{R}}, \quad (\text{F.31})$$

tal que $\|y_{i-1|k+1}^c - \bar{y}_k\|_{\mathbf{Q}}^2 - \|y_{i|k}^* - \bar{y}_k\|_{\mathbf{Q}}^2 + \|v_{i-1|k+1}^c - \bar{v}_k\|_{\mathbf{R}}^2 - \|v_{i|k}^* - \bar{v}_k\|_{\mathbf{R}}^2 \leq \beta_i(\|w_k\|)$ onde $\beta_i(\cdot)$ é uma função- \mathcal{K}_∞ . Mais uma vez, a condição do custo terminal é utilizada na seguinte forma

$$\|\chi_{N|k+1}^c - \bar{\chi}^o\|_{\mathbf{P}}^2 - \|\chi_{N-1|k+1}^c - \bar{\chi}^o\|_{\mathbf{P}}^2 = -\|y_{N-1|k+1}^c - \bar{y}^o\|_{\mathbf{Q}}^2 - \|v_{N-1|k+1}^c - \bar{v}^o\|_{\mathbf{R}}^2.$$

E então, como usualmente é feito para a convergência em MPC, a prova da variação do

custo é dada por

$$\begin{aligned} V_N^c(\chi_{k+1}, y_t) - V_N^*(\chi_k, y_t) &\leq -\|y_{0|k} - \bar{y}_k\|_{\mathbf{Q}}^2 - \|v_k - \bar{v}_k\|_{\mathbf{R}}^2 \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N-1} \beta_j(\|w_k\|) + \beta_N(\|w_k\|), \end{aligned} \quad (\text{F.32})$$

onde $\|\Phi^{j-1}\Gamma_\chi w_k\|_{\mathbf{P}} + 2|(\chi_{i-1|k+1}^c - \bar{\chi}_k)^\top \mathbf{P}\Phi^{i-1}\Gamma_\chi w_k| \leq \beta_N(\|w_k\|)$. Da condição de otimalidade com $\beta_W(\|w_k\|) = \sum_{j=1}^{N-1} \beta_j(\|w_k\|) + \beta_N(\|w_k\|)$, temos

$$V_N^*(\chi_{k+1}, y_t) - V_N^*(\chi_k, y_t) = W^*(\chi_{k+1}, y_t) - W^*(\chi_k, y_t) \quad (\text{F.33})$$

$$\leq -\|y_k - \bar{y}_k\|_{\mathbf{Q}}^2 + \beta_W(\|w_k\|). \quad (\text{F.34})$$

Para finalizar a prova da convergência, utiliza-se o seguinte resultado do Lema 1

$$\|y_k - \bar{y}_k\|_{\mathbf{Q}}^2 \geq \gamma \|\chi_k - \bar{\chi}_k\|_{\tilde{\mathbf{Q}}}^2, \quad (\text{F.35})$$

onde $\gamma > 0$, e $\tilde{\mathbf{Q}} > 0$ como mostrado em F.1.1.1. Então, $-\|y_k - \bar{y}_k\|_{\mathbf{Q}}^2 \leq -\gamma \|\chi_k - \bar{\chi}_k\|_{\tilde{\mathbf{Q}}}^2$, e a seguinte propriedade decrescente é válida

$$W^*(\chi_{k+1}, y_t) - W^*(\chi_k, y_t) \leq -\gamma \|\chi_k - \bar{\chi}^o\|_{\tilde{\mathbf{Q}}}^2 + \beta_W(\|w_k\|), \quad (\text{F.36})$$

onde $\tilde{\mathbf{Q}} > 0$, $\gamma > 0$, e $\beta_W(\cdot)$ é uma função- \mathcal{K} , completando a prova.

Note que se $w_k \rightarrow 0$, então $\|y_k - \bar{y}^o\| \rightarrow 0$ com a condição de estabilidade assintótica sendo obtida.

F.1.1.1 Limite no erro do seguimento a referência artificial

Lema 1. *Assume-se que $\bar{y}_k \in \bar{\mathcal{Y}}_f$ é o alvo artificial ótimo factível em k , e $\bar{y}^o \in \bar{\mathcal{Y}}_f$ é o alvo admissível ótimo. Então, um escalar constante $\gamma > 0$, e uma matriz de restrição $\tilde{\mathbf{Q}} > 0$ existe tal que $\|y_k - \bar{y}_k\|_{\mathbf{Q}}^2 \geq \gamma \|\chi_k - \bar{\chi}_k\|_{\tilde{\mathbf{Q}}}^2$.*

A prova do Lema 1 é dividido em dois casos complementares: (i) $\chi_k - \bar{\chi}_k \leq \epsilon_x$, e (ii) $\chi_k - \bar{\chi}_k > \epsilon_x$ onde $\epsilon_x > 0$ define uma vizinhança para qualquer alvo factível tal que o candidato sem restrição ($v_{j|k}^c = \mathbf{K}\chi_{j|k}^c + \mathbf{L}\bar{\theta}_k$ com $\bar{y}_k = \mathbf{M}_y\bar{\theta}_k$) fornece uma solução factível para qualquer χ_k dentro de $\Omega_{\bar{\chi}_k} = \{\chi \in \mathfrak{R}^{n+nd} \mid \|\chi - \bar{\chi}_k\| \leq 2\epsilon_x\}$. Note que ϵ_x é válido para qualquer $\Omega_{\bar{\chi}} = \{\chi \in \mathfrak{R}^{n+nd} \mid \|\chi - \bar{\chi}\| \leq 2\epsilon_x\}$ com $\bar{\chi} \in \{\chi \in \mathfrak{R}^{n+nd} \mid \chi = \mathbf{M}_\chi\theta, \mathbf{M}_y\theta \in \bar{\mathcal{Y}}_f\}$. O parâmetro $\epsilon_x > 0$ garante uma folga em torno de $\bar{\chi}_k$ de modo que o alvo artificial possa se mover enquanto o solução irrestrita preserva a factibilidade. Este parâmetro existe porque \bar{x}_k e \bar{u}_k estão dentro do interior de \mathcal{X}_∞ e \mathcal{U}_∞ respectivamente.

Assumindo que $\chi_k - \bar{\chi}_k < \epsilon_x$, considere $\bar{y}_\eta = \lambda_c \bar{y}_k + (1 - \lambda_c) \bar{y}^o$, com $0 < \lambda_c < 1$, $\chi_\eta = \mathbf{M}_\chi \theta_\eta$, $y_\eta = \mathbf{M}_y \theta_\eta$, e $\bar{y}_\eta - \bar{y}_k = (1 - \lambda_c)(\bar{y}^o - \bar{y}_k)$. Como o domínio factível para os alvos admissíveis é fechado, então $\bar{\chi}_k - \bar{\chi}^o \leq \mathcal{B}_x$ e $\bar{\chi}_\eta - \bar{\chi}_k \leq (1 - \lambda_c)\bar{\chi}_k - \bar{\chi}^o$.

Considere $\tilde{\lambda}_c$ suficientemente próximo de 1 de modo que $(1 - \tilde{\lambda}_c) < \epsilon_x \mathcal{B}_x^{-1}$. Então, $\bar{\chi}_\eta - \bar{\chi}_k \leq (1 - \tilde{\lambda}_c) \mathcal{B}_x \leq \epsilon_x$ e $\chi_k - \bar{\chi}_\eta \leq \chi_k - \bar{\chi}_k + \bar{\chi}_k - \bar{\chi}_\eta < 2\epsilon_x$ para todo $\lambda_c \geq \tilde{\lambda}_c$.

Portanto, com $\lambda_c \geq \tilde{\lambda}_c$, um limite superior para $W^*(\chi_k, y_t) = V_N^*(\chi_k, y_t) - \|\bar{y}^o - y_t\|_{\mathbf{T}}$ pode ser definido do candidato irrestrito como demonstrado a seguir:

$$W^*(\chi_k, y_t) \leq \|\chi_k - \bar{\chi}_\eta\|_{\mathbf{P}}^2 + \|\bar{y}_\eta - y_t\|_{\mathbf{T}}^2 - \|\bar{y}^o - y_t\|_{\mathbf{T}}^2 \quad (\text{F.37})$$

$$\begin{aligned} &\leq \|\chi_k - \bar{\chi}_k + \bar{\chi}_k - \bar{\chi}_\eta\|_{\mathbf{P}}^2 + \lambda_c \|\bar{y}_k - y_t\|_{\mathbf{T}}^2 + (1 - \lambda_c) \|\bar{y}^o - y_t\|_{\mathbf{T}}^2 \\ &\quad - \lambda_c \|\bar{y}^o - y_t\|_{\mathbf{T}}^2 - (1 - \lambda_c) \|\bar{y}^o - y_t\|_{\mathbf{T}}^2 \end{aligned} \quad (\text{F.38})$$

$$\begin{aligned} &\leq 4\|\chi_k - \bar{\chi}_k\|_{\mathbf{P}}^2 + 4\|\bar{\chi}_k - \bar{\chi}_\eta\|_{\mathbf{P}}^2 \\ &\quad + \lambda_c (\|\bar{y}_k - y_t\|_{\mathbf{T}}^2 - \|\bar{y}^o - y_t\|_{\mathbf{T}}^2) \end{aligned} \quad (\text{F.39})$$

$$\begin{aligned} &\leq 4\|\chi_k - \bar{\chi}_k\|_{\mathbf{P}}^2 + 4(1 - \lambda_c)^2 \|\bar{\chi}_k - \bar{\chi}^o\|_{\mathbf{P}}^2 \\ &\quad + \lambda_c (\|\bar{y}_k - y_t\|_{\mathbf{T}}^2 - \|\bar{y}^o - y_t\|_{\mathbf{T}}^2), \end{aligned} \quad (\text{F.40})$$

onde $\bar{\chi}_k - \bar{\chi}_\eta = (1 - \lambda_c)(\bar{\chi}_k - \bar{\chi}^o)$ e $p_1 + p_2^a \leq \max(2^a p_1^a, 2^a p_2^a)$ foram usados. Além disso, de $W^*(\chi_k, y_t) \geq \|\bar{y}_k - y_t\|_{\mathbf{T}}^2 - \|\bar{y}^o - y_t\|_{\mathbf{T}}^2$, um novo limite é expresso por

$$\begin{aligned} \|\bar{y}_k - y_t\|_{\mathbf{T}}^2 - \|\bar{y}^o - y_t\|_{\mathbf{T}}^2 &\leq 4\|\chi_k - \bar{\chi}_k\|_{\mathbf{P}}^2 + 4(1 - \lambda_c)^2 \|\bar{\chi}_k - \bar{\chi}^o\|_{\mathbf{P}}^2 \\ &\quad + \lambda_c (\|\bar{y}_k - y_t\|_{\mathbf{T}}^2 - \|\bar{y}^o - y_t\|_{\mathbf{T}}^2). \end{aligned} \quad (\text{F.41})$$

Alternativamente,

$$(1 - \lambda_c) (\|\bar{y}_k - y_t\|_{\mathbf{T}}^2 - \|\bar{y}^o - y_t\|_{\mathbf{T}}^2) = 4\|\chi_k - \bar{\chi}_k\|_{\mathbf{P}}^2 + 4(1 - \lambda_c)^2 \|\bar{\chi}_k - \bar{\chi}^o\|_{\mathbf{P}}^2, \quad (\text{F.42})$$

ou simplesmente

$$(\|\bar{y}_k - y_t\|_{\mathbf{T}}^2 - \|\bar{y}^o - y_t\|_{\mathbf{T}}^2) = 4(1 - \lambda_c)^{-1} \|\chi_k - \bar{\chi}_k\|_{\mathbf{P}}^2 + 4(1 - \lambda_c) \|\bar{\chi}_k - \bar{\chi}^o\|_{\mathbf{P}}^2, \quad (\text{F.43})$$

para $1 > \lambda_c > \tilde{\lambda}_c$.

De $\|\bar{y}_k - y_t\|_{\mathbf{T}}^2 - \|\bar{y}^o - y_t\|_{\mathbf{T}}^2 \geq \|\bar{y}_k - \bar{y}^o\|_{\mathbf{T}}^2$, qualquer constante μ com $0 < \mu < 1$ pode ser utilizada para se obter a seguinte desigualdade

$$\mu \|\bar{y}_k - \bar{y}^o\|_{\mathbf{T}}^2 + (1 - \mu) \|\bar{y}_k - \bar{y}^o\|_{\mathbf{T}}^2 - 4(1 - \lambda_c) \|\bar{\chi}_k - \bar{\chi}^o\|_{\mathbf{P}}^2 \leq 4 \frac{\|\chi_k - \bar{\chi}_k\|_{\mathbf{P}}^2}{1 - \lambda_c}. \quad (\text{F.44})$$

E assim, uma constante positiva e finita, $\lambda_c > \tilde{\lambda}_c \rightarrow 1$, pode ser definida para garantir que

$(1 - \mu)\|\bar{y}_k - \bar{y}^o\|_{\mathbf{T}}^2 - 4(1 - \lambda_c)\|\bar{\chi}_k - \bar{\chi}^o\|_{\mathbf{P}}^2 > 0$ o que garante, para um adequado $\hat{\mu} > 0$, que o seguinte limite é estabelecido com $\tilde{\mu} = 4/\mu$

$$\hat{\mu}\|\bar{y}_k - \bar{y}^o\|_{\mathbf{Q}}^2 \leq \|\bar{y}_k - \bar{y}^o\|_{\mathbf{T}}^2 \leq \tilde{\mu}\|\chi_k - \bar{\chi}_k\|_{\mathbf{P}}^2.$$

Baseado no fato que $\|y_k - \bar{y}^o\|_{\mathbf{Q}} - \|\bar{y}_k - y_k\|_{\mathbf{Q}} \leq \|\bar{y}_k - \bar{y}^o\|_{\mathbf{Q}}$, então

$$\|y_k - \bar{y}^o\|_{\mathbf{Q}} \leq \|\bar{y}_k - y_k\|_{\mathbf{Q}} + \frac{\sqrt{\tilde{\mu}}}{\sqrt{\hat{\mu}}}\|\chi_k - \bar{\chi}_k\|_{\mathbf{P}} \quad (\text{F.45})$$

ou simplesmente

$$\|y_k - \bar{y}^o\|_{\mathbf{Q}} \leq \|\chi_k - \bar{\chi}_k\|_{\tilde{\mathbf{Q}}}, \quad (\text{F.46})$$

com $\tilde{\mathbf{Q}} = \frac{\sqrt{\tilde{\mu}}}{\sqrt{\hat{\mu}}}\mathbf{P} + \mathbf{C}_\chi^\top \mathbf{Q} \mathbf{C}_\chi$.

Se $\|\chi_k - \bar{\chi}_k\| > \epsilon_x$, então $\|\chi_k - \bar{\chi}_k\|_{\tilde{\mathbf{Q}}} > \tilde{\epsilon}_x$, e $\|y_k - \bar{y}^o\|_{\mathbf{Q}} \leq \mathcal{B}^o$ devido ao domínio factível fechado. Assim, a razão máxima é obtida por $\|y_k - \bar{y}^o\|_{\mathbf{Q}}/\|\chi_k - \bar{\chi}_k\|_{\tilde{\mathbf{Q}}} \leq \mathcal{B}^o/\tilde{\epsilon}_x$, o que garante que $\|y_k - \bar{y}^o\|_{\mathbf{Q}} \leq (\mathcal{B}^o/\tilde{\epsilon}_x)\|\chi_k - \bar{\chi}_k\|_{\tilde{\mathbf{Q}}}$.

Finalmente a demonstração é completada com $\sqrt{\gamma} = \max\{1, (\mathcal{B}^o/\tilde{\epsilon}_x)\}$ de modo que

$$\|y_k - \bar{y}^o\|_{\mathbf{Q}} \leq \sqrt{\gamma}\|\chi_k - \bar{\chi}_k\|_{\tilde{\mathbf{Q}}}, \quad (\text{F.47})$$

finalizando a prova do Lema.