



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - IME
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



GEOMETRIA FINSLER E INCÊNDIOS FLORESTAIS

JOÃO MARK SOUZA OLIVEIRA

Salvador - Bahia

2025

GEOMETRIA FINSLER E INCÊNDIOS FLORESTAIS

JOÃO MARK SOUZA OLIVEIRA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Benigno Oliveira Alves.

Salvador-Bahia

2025

Sistema de Bibliotecas da UFBA

João Mark Souza Oliveira.

Geometria Finsler e Incêndios Florestais/ João Mark Souza Oliveira – 2025.

88 f. : il

Orientador: Benigno Oliveira Alves.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Salvador, 2025.

1. Geometria Finsler. 2. Geodésicas. 3. Incêndios Florestais. I. Alves, Benigno Oliveira. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Geometria Finsler e Incêndios Florestais.

CDD - 519.72


CDU - 519.72

Geometria Finsler e Incendios Florestais.


João Mark Souza Oliveira

Dissertação apresentada ao Colegiado do Curso de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.


Banca examinadora

Documento assinado digitalmente
 **BENIGNO OLIVEIRA ALVES**
Data: 07/02/2025 16:22:52-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^o Dr^o Benigno Oliveira Alves (orientador - UFBA)

Documento assinado digitalmente
 **DIEGO CATALANO FERRAIOLI**
Data: 06/02/2025 23:37:35-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^o. Dr^o. Diego Catalano Ferraioli (Interno - UFBA)

Documento assinado digitalmente
 **MARCOS MARTINS ALEXANDRINO DA SILVA**
Data: 05/02/2025 14:55:30-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^a. Dro^o. Marcos Martins Alexandrino da Silva (Externo, USP)

*Aqueles que esperam no Senhor renovam suas forças.
(Isaías 40:31)*

Agradecimentos

Genuflexo, meu agradecimento maior vai para Deus por me dar forças nos momentos de fraqueza. Pedi-Lhe que nada na minha vida fosse fácil, mas que Ele sempre me fizesse forte ao longo do processo, e assim Ele o fez. Então, meu muito obrigado, Deus.

Ao João criança, dirijo-lhe meu obrigado, por ter sido um menino sonhador, humilde, que sempre quis seu lugar no mundo, sem pisotear em ninguém, mas, mesmo com as mãos calejadas, construiu seu castelo pedra por pedra para ter um lugar onde se ancorar, algo que fosse seu porto seguro. Pequeno João, tanto crescemos juntos, o que eu sou hoje foi o que você construiu outrora. Você sempre me fez ter orgulho de quem sou atualmente.

À minha família agradeço por todo tipo de apoio, por ser meu primeiro modelo de que tipo de ser humano eu devo ser. Em particular, mãe e pai, obrigado por terem me incentivado a correr atrás dos meus sonhos, a me deixarem voar quando eu sabia que vocês queriam que eu sempre ficasse no ninho com vocês. Viver é doloroso às vezes, mas também é enriquecedor. Sou feliz por tudo que construí até aqui.

Ao meu irmão Isaías, ser-te-ei grato por toda minha vida. Por ser esse irmão de um coração gigantesco, por ser um irmão-pai, por sempre ter estado lá quando eu precisei. Seus cuidados foram lenitivos em tempos de cólera.

Ao meu irmão Lucas por, mesmo alguns quilômetros de distância, estar sempre perto. Você é o irmão mais incrível do mundo, e eu sou alguém melhor porque aprendi contigo a arte de ser um ser humano com um coração bondoso, de destilhar bondade em tudo que faço. Afinal, não existe verdadeira inteligência sem bondade.

À Érika e Manoel, obrigado pelos dias em que pude sentir a beleza e a simplicidade da vida em seu apogeu. Grato pelos dias incríveis, por sempre me fazerem ser da casa, por me fazerem rir nos dias banais. Acolhimento é ouro que não se encontra em minas.

Agradeço também à Menena e a Eron por todo carinho, aconchego na ilha. Todos os momentos lá, mesmo que rápidos, foram eternos e um acalanto para alma. Ter a visão do mar naquelas tardes fagueiras suscitavam em mim a calma e a alegria de manter-me firme nesta caminhada. Obrigado por sempre me darem combustível para repor minhas energias.

A todos meus outros oito irmãos, meu obrigado. Vocês me ensinam todos os dias sobre bondade, respeito, honestidade, virtude, força etc. Eu jamais titubearia no caminho porque aprendi com os melhores.

À minha melhor amiga, Eduarda, obrigado por toda compreensão pelo meu ostracismo em virtude da imersão acadêmica. Mesmo com todo hiato, sempre mantivemos um liame indestrutível, uma ligação que não se dissolve com o tempo. Grato por me admirar muito mais do que eu acho que mereço. Chego aqui hoje porque sua amizade também foi e sempre continuará sendo alicerce.

À minha amiga Micaele e meu amigo Igor, por serem dois seres humanos batalhadores, honestos, belos e verdadeiros, obrigado pelas conversas, pelos entendimentos, pela torcida, por tudo.

Agradeço à Denise, por me apresentar Salvador e estar sempre disponível para o que eu precisasse. Amizades assim são únicas. Você é uma das pessoas que mais me ajudou a entender toda essa loucura da vida caótica urbana.

À Escola Municipal Verididano Zacarias de Oliveira, por ser o lugar em que o pequeno João abriu asas à imaginação e passou a ter as primeiras convicções do que queria ser. Obrigado, por ser essa escola pública de qualidade, por ter professores que sempre incentivam, que tiram tempo para escrever recados nas provas “Parabéns!”, “Continue sempre assim!”, “Você vai longe!” Vocês não sabem o quanto cada palavra de incentivo me fez absurdamente forte.

Ao Colégio Estadual Professor João de Oliveira, por ter sido um local onde pude amadurecer, ter me possibilitado reafirmar todas as minhas certezas pueris. Nunca, nem por um segundo, eu tive dúvida de onde queria chegar e de quem eu realmente sou. Vocês potencializaram minhas convicções. Em particular, agradeço ao meu professor de Matemática Adriano Góis, por me encantar, por mostrar a beleza da Matemática. Suas aulas sempre foram pura e doce poesia. Eram meus maiores confortos no colégio. Obrigado por todas as conversas e por me enxergar além do que eu conseguia. Sua ajuda e incentivo foram essenciais.

À graduação na UFBA, por ter me dado grandes professores, exemplos de doutores excepcionais, de pessoas que atingiram um patamar elevado em nível de conhecimento, mas que sempre foram solícitos às nossas angústias, medos. Foram professores-amigos que encontrei. Em particular, agradeço ao professor Marcelo, Cristina Lizana, Maykel, Vinicius Castelluber, pelas cartas de recomendação que me ajudaram a ser aprovado no Impa, Instituto que sempre foi o Olimpo dos deuses para mim. Ser aprovado lá só me deu mais certeza de que eu posso estar onde que quiser, porque trabalhei arduamente para isso. Estendo meu agradecimento à Cristina Lizana, por ser essa mulher que torna tudo mais fácil. Eu fico impressionado com a magia com que ela ensina, é como se regesse a mais

bela orquestra, na qual a Matemática é tema principal.

Não posso me esquecer dos amigos de graduação: Edvaldo, Mirla, Luana, Mayra, Enzo, Victória, Victor Paiva, Larissa, Juliana, Rosi etc. Em particular, a Edvaldo, por ter dividido os pais dele comigo, pessoas batalhadoras, inspiradoras e benemerentes.

A Benigno, meu orientador, que me encontrou em 2019, e que continua até hoje sendo essa pessoa que exerce a docência tão bem, que ensina com amor, que é um amigo extraordinário, que ouve, dá aquele puxão de orelha e faz a gente crescer absurdamente com todas as dicas passadas. Obrigado por ser esse exemplo de ser humano na pós-graduação.

À Manuela Silva por ter dado o melhor curso de mestrado que alguém poderia ter. Manu abordou o curso Grupos e Anéis de tal modo que era impossível se sentir cansado, saturado. Ela entregou teoria, rigor na hora da correção das provas, diversão, tudo. Obrigado, Manu, por ter feito a caminhada ter sido mais leve. Tudo foi indubitavelmente perfeito.

A Marcos Alexandrino, agradeço pela co-orientação informal, pelas poucas conversas profícuas, mas que deram um norte impressionante. Grato por ter me indicado o artigo principal na qual minha dissertação desenvolve feto. Obrigado por sempre me auxiliar nos processos seletivos tanto do mestrado, quanto do doutorado. Minhas aprovações têm sua contribuição significativa.

A Diego Catalano, pelas reuniões matemáticas e poéticas, por sempre solicitar que nossas reuniões terminassem com um poema de minha autoria. Eram reuniões encantadoras. Obrigado pelas dicas úteis na época que fui seu orientando. Grato também por aceitar compor, junto com Marcos e Benigno, a banca examinadora da minha dissertação.

À Patrícia Marçal, pelas dicas sutis, por ter sido aquela pessoa a me dizer o erro sem dizer que eu estava errado. Obrigado por ser essa mulher genial e uma potência da Geometria.

Aos amigos da pós-graduação: João Roberto, Marcelo, Gabriel Morales e, em particular, Carlos Rocha. Carlos é o matemático mais organizado que conheço, a pessoa de uma gentileza fora de série, muito engraçado, um amigo que nos impulsiona a crescer e que nos inspira. Obrigado, no doutorado a gente se esbarra novamente.

Meu muito obrigado à Sara. Sara, é muito bom ter uma mulher na Geometria para poder somar, para tornar as coisas leves, para cativar. Ninguém melhor do que você pode fazer isso. Uma mulher que ocupa posição privilegiada na Matemática deve ser todos os dias aplaudida.

À Capes por todo o apoio financeiro ao longo dessa jornada.

À guisa de conclusão, agradeço a todas as mãos que moldaram o João de hoje. Eu sou porque nós somos.

*“ Não sou aquele que sabe, mas
aquele que busca.”*

(Hermann Hesse)

Resumo

A abordagem analítica mais simples para modelar a propagação de incêndios florestais considera que o espaço das velocidades é representado por uma indicatriz em cada ponto. Desde então, a modelagem elíptica tem sido amplamente aceita. Em *A general model for wildfire propagation with wind and slope* [23], Javaloyes (2023) apresenta um modelo mais sofisticado para a propagação do fogo, levando em consideração a inclinação do relevo e a contribuição do vento, cuja elipse, agora, coincide com a indicatriz de uma métrica Finsler. Por fim, o comportamento do fogo é modelado por um sistema de EDO, ou, alternativamente, a aplicação do fogo também é caracterizada por um sistema de EDP com certas condições de ortogonalidade.

Palavras-chave: Métrica Finsler; Indicatriz; Incêndios florestais.

Abstract

The simplest analytical approach to model the propagation of wildfires considers that the velocity space is represented by an indicatrix at each point. Since then, elliptic modeling has been widely accepted. In *A general model for wildfire propagation with wind and slope* [23], Javaloyes (2023) presents a more sophisticated model for fire propagation, taking into account the slope of the terrain and the contribution of wind, where the ellipse now coincides with the indicatrix of a Finsler metric. Finally, the behavior of the fire is modeled by a system of ODEs, or alternatively, the application of fire is also characterized by a system of PDEs with certain orthogonality conditions.

Keywords: Finsler metric; Indicatrix; Wildfires.

Sumário

Introdução	10
1 Fundamentos da Geometria Finsler	12
1.1 Métrica Finsler	13
1.2 (α, β) -métricas	20
1.3 Indicatriz	23
1.4 Comprimento de uma curva e a distância	25
1.5 Aplicação de Legendre e métrica dual	27
1.6 Métrica de Zermelo	27
1.7 Cone Ortogonal	33
1.8 Campo gradiente	36
1.9 Conexão de Chern	40
1.10 Derivada covariante	43
1.11 Geometria Lorentz-Finsler	45
2 Geodésicas e Função Transnormal	51
2.1 Geodésicas	52
2.2 Geodésicas de uma métrica de Zermelo	56
2.3 Aplicação Exponencial	57
2.4 Hessiano	61
2.5 Função Transnormal	62
2.6 Pontos de corte	65
3 Incêndios Florestais	69
3.1 Incêndio florestal em uma superfície	70
3.2 Efeito da inclinação	71
3.3 Construção da métrica de Matsumoto	72
3.4 Efeito do vento nos incêndios	75
3.5 Cálculo da frente de fogo	77
3.6 Detectando o abraço do urso: os pontos de corte do incêndio florestal	82

Introdução

Imagine que você saiba a direção em que um incêndio florestal irá se propagar ou quais são os pontos focais desse incêndio. Saber de tais informações é muito útil, a fim de evitar os impactos devastadores do fogo na vida selvagem e também na vida humana. Fornecer um modelo fidedigno desse fenômeno natural e também antrópico é fulcral para evitar perdas de vida e prejuízos financeiros.

Felizmente, a Geometria Finsler oferece ferramentas úteis para entender o fenômeno supracitado. Em *A Finsler geodesic spray paradigm for wildfire spread modelling*, Steen Markvorsen (2012) [27] relacionou a propagação de um incêndio com uma métrica Finsler, caso o vento não seja muito forte, considerando-o constante ao longo do tempo. Foi notado que as frentes e os raios de onda para a propagação de um incêndio florestal são, respectivamente, indicatrizes e geodésicas de uma métrica Finsler. Ulteriormente, Javaloyes (2023) [23] propôs um modelo genérico para o cálculo dessas frentes, considerando alguns aspectos, tais como: inclinação do terreno e o vento variando com o tempo. Com isso observou-se que o vento induz uma espécie de crescimento semielíptico do fogo, enquanto que a influência da inclinação é modelada por meio de um termo que vem da métrica de Matsumoto (ou seja, a métrica Finsler não reversível que mede o tempo de subir e descer uma colina).

A grosso modo, uma métrica Finsler é uma aplicação suave fora da origem, positiva e 1-homogênea que, a cada ponto e direção em uma variedade associa um produto interno. A dependência da direção, o que não acontece no caso Riemanniano, gera casos em que o comprimento de um vetor difere do comprimento do seu oposto e, por conseguinte, o tempo gasto para percorrer um trajeto depende da direção.

Pode-se dizer que o que se conhece hoje por Geometria Finsler tem seus primórdios nos trabalhos de B. Riemann (1826-1866), em meados da segunda metade do século XIX, contudo, seu nome se deve às contribuições do matemático alemão Paul Finsler (1894-1970), o qual estudou os fundamentos dessa nova geometria, publicando-os na sua tese, em 1918, intitulada *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen* (Sobre curvas e superfícies em espaços generalizados), sob a orientação de Constantin Carathéodory (1873-1950). No entanto, foi o matemático francês Élie Cartan (1869-1951) que, em 1934,

cunhou o termo Geometria Finsler em homenagem ao matemático homônimo.

Assim como na Geometria Riemanniana, podemos fazer uso do cálculo diferencial e integral na Geometria Finsler. Vários objetos da Geometria Riemanniana, tais como conexões e geodésicas, podem ser estudados de modo análogo na Geometria Finsler. Em síntese, como asseverou Shiing-Shen Chern (1911-2004), “a Geometria Finsler é a Geometria Riemanniana sem a restrição quadrática” [12]. Para ver mais sobre a história da geometria Finsler, ler [2, 42].

O objetivo principal dessa dissertação é apresentar os fundamentos da Geometria Finsler, mostrando as semelhanças e diferenças em relação à Geometria Riemanniana. Além disso, mostramos a utilidade dessa Geometria no que tange à modelagem de fenômenos naturais, como os incêndios florestais.

O presente trabalho está dividido em três capítulos. No Capítulo 1, apresentamos a definição de métrica Finsler, bem como alguns exemplos clássicos, como a classe das (α, β) - métricas. Estudamos algumas estruturas geométricas, como a indicatriz e o cone ortogonal. Ainda, neste capítulo, introduzimos a noção de conexão de Chern, a qual nos permitirá, mais tarde, definir geodésicas.

No Capítulo 2, discutiremos sobre geodésicas, aplicação exponencial e, apresentando aqui, uma versão do lema de Gauss no contexto Finsler. Também, trataremos sobre a Função Transnormal, que generaliza a função distância, e, traremos a demonstração de um Teorema de Wang que, com hipóteses adicionais, pode ser generalizado [3].

Finalmente, o Capítulo 3 é voltado exclusivamente para apresentar a construção de um modelo matemático de incêndios florestais, cujo espaço das velocidades do fogo coincide com uma indicatriz de uma métrica Finsler em cada ponto. Nesta última parte, levaremos em conta a contribuição da inclinação do relevo e, por fim, o efeito do vento, obtendo equações que descrevem a propagação do fogo ao longo do tempo.

Capítulo 1

Fundamentos da Geometria Finsler

As variedades de Finsler são uma generalização natural das conhecidas variedades Riemannianas. A diferença precípua é que a métrica, chamada de *tensor fundamental*, depende não apenas do ponto $p \in M$ da variedade, mas também da direção $v \in T_pM$. A Geometria Finsler recebeu esse nome em homenagem ao matemático alemão Paul Finsler, que a estudou em sua tese de doutorado de 1918 [17].

A Geometria de Finsler é um tipo de Geometria diferencial. Geralmente, é considerada uma generalização da Geometria Riemanniana. De fato, Georg Friedrich Bernhard Riemann, em sua palestra intitulada *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Sobre as Hipóteses que Fundamentam a Geometria), em 10 de junho de 1854, já sugeriu a possibilidade de estudar uma geometria mais geral do que a geometria Riemanniana, mas ele afirmou que os significados geométricos das quantidades que aparecem em tal espaço generalizado não seriam claros e que isso não poderia produzir nenhuma contribuição para a geometria. Além disso, os matemáticos negligenciaram o estudo de tais espaços por mais de 60 anos.

Aos vinte e quatro anos, Finsler assumiu o problema relacionado ao espaço equipado com a função métrica mencionada por Riemann. Finsler estudou essa geometria do ponto de vista da geometrização do cálculo das variações. Essa tese chamou a atenção da maioria dos matemáticos que trabalhavam em geometria. Assim, Finsler (1894-1970) foi considerado o criador da geometria de Finsler.

A geometria de Finsler tem muitas aplicações em vários campos da Física e da Biologia, como a teoria da relatividade, termodinâmica, óptica, ecologia, evolução e biologia do desenvolvimento [5, 10]. Vários matemáticos contribuíram para o estudo e aprimoramento da geometria de Finsler. Estudos históricos sobre os estágios de desenvolvimento dessa geometria foram introduzidos por Matsumoto e Won. Para mais contextualizações históricas, recomenda-se [2, 42]. Geometria Finsler uma geometria poderosíssima, a qual, embora seja antiga, tem sido revivida por inúmeros estudiosos, ajudando a compreen-

der melhor o comportamento de meios anisotrópicos, ou seja, meios que dependem de uma direção. A construção desse capítulo está ancorada principalmente nos resultados de [4, 6, 34, 37, 38, 40].

1.1 Métrica Finsler

Em geometria Finsleriana, a métrica é um objeto que depende de uma direção. Esse contraste basilar em relação à geometria Riemanniana acarreta, por exemplo, na falta de simetria da distância. Uma métrica Riemanniana é uma aplicação g suave, que associa a cada $p \in M$ um produto interno em T_pM . A suavidade significa que, para quaisquer campos $X, Y \in \Gamma(TM)$, a função $p \rightarrow g_p(X_p, Y_p)$ é suave. Para mais detalhes sobre a Geometria Riemanniana recomendamos ver [15]. No entanto, apesar da métrica Finsler depender da direção, ainda conseguimos algumas desigualdades famosas, como a desigualdade triangular e a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Nessa seção, introduziremos alguns objetos geométricos e investigaremos suas propriedades e veremos os fundamentos dessa Geometria tão poderosa.

Definição 1.1.1. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n . Chamamos uma função contínua $F : TM \rightarrow [0, +\infty)$ de **métrica Finsler** em M se F satisfaz*

1. F é C^∞ em $TM \setminus 0$;
2. F é positiva homogênea de grau 1, ou seja, $F(\lambda v) = \lambda F(v)$ para qualquer $\lambda > 0$ e $v \in TM$;
3. F é fortemente convexa, ou seja, para todo $v \in TM \setminus 0$, o tensor fundamental associado a F dado por

$$g_v(u, w) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2(v + su + tw)|_{s,t=0} = \frac{1}{2} \text{Hess}(F^2)_v(u, w), \quad (1.1)$$

para quaisquer $u, w \in T_pM$ é positivo definido, ou seja, $g_v(u, u) > 0$ se $u \neq 0$.

O par (M, F) é chamado **variedade Finsler**.

Observação 1.1.1. *Se F é uma métrica Finsler, então $F(0) = 0$, pela continuidade e pela homogeneidade.*

Observação 1.1.2. *A condição de ser positivo homogêneo de grau 1 é necessária para o comprimento de uma curva seja independente da reparametrização positiva.*

Definição 1.1.2. *Uma métrica Finsler F é dita **reversível** (ou **simétrica**) quando $F(v) = F(-v) \forall v \in TM$.*

Isso já nos mostra que a métrica Finsler não é uma métrica no sentido usual.

Exemplo 1.1.1. *O exemplo mais simples de uma métrica Finsler é a norma de uma métrica Riemanniana g numa variedade M . Nesse caso, $F(v) = \sqrt{g(v, v)}$ é uma métrica Finsler reversível, cujo tensor fundamental coincide com g .*

Exemplo 1.1.2. *Se α e β são respectivamente uma norma riemanniana e uma 1-forma em M , então $F(v) = \alpha(v) + \beta(v) = \sqrt{g(v, v)} + \beta(v)$ é uma métrica Finsler desde que $\|\beta\|_\alpha = \sup_{\|v\|=1} \beta(v) < 1$, $v \in TM$. Tal métrica é denominada **métrica Randers**, já que foi introduzida pelo físico norueguês Gunnar Randers (1914-1992) em 1941 [35]. Trabalharemos com mais detalhes tal métrica em seções futuras.*

As métricas Randers são intuitivamente métricas Finsler formadas por pequenas perturbações de métricas Riemannianas e, como mostra o lema abaixo, são reversíveis se, e somente se, são Riemannianas. Porém, observo aqui que nem toda métrica Finsler reversível é Riemanniana.

Lema 1.1.1. *Seja (M, F) uma variedade Randers. Se F é reversível, então (M, F) é uma variedade riemanniana.*

Demonstração. Com efeito, como, por hipótese, $F(v) = \alpha(v) + \beta(v) = \alpha(-v) + \beta(-v) = \alpha(v) - \beta(v) = F(-v)$, temos que $\beta(v) = 0 \forall v \in TM$. Logo, nós obtemos $F = \alpha$. \square

Observação 1.1.3. *Existe uma relação biunívoca entre produto interno $h = \langle \cdot, \cdot \rangle$ e uma forma quadrática positiva definida $q(v) := h(v, v)$. Uma forma quadrática é uma aplicação $q : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que dada uma base de $T_p M$, q nessa base é um polinômio de grau 2. Por exemplo, em \mathbb{R}^2 qualquer forma quadrática associada a um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é da forma*

$$q(v) = av_1^2 + 2bv_1v_2 + cv_2^2,$$

se $v = v_1f_1 + v_2f_2$, onde $\{f_1, f_2\}$ é uma base de \mathbb{R}^2 e $a = \langle f_1, f_1 \rangle$, $b = \langle f_1, f_2 \rangle$ e $c = \langle f_2, f_2 \rangle$.

Em Geometria Finsler, no entanto, isso não acontece. Basta considerar a métrica Randers $F(v) = \alpha(v) + \beta(v)$ e observar que

$$F^2(v) = g(v, v) + 2\sqrt{g(v, v)}\beta(v) + \beta^2(v),$$

que não é um polinômio de grau 2 quando $\beta \neq 0$. Dessa maneira, a métrica Randers não satisfaz a restrição quádrlica.

Sabemos, pelo lema acima, se a métrica Randers é reversível, então ela é Riemanniana. Métricas Riemannianas são sempre reversíveis. Não obstante, nem toda métrica Finsler reversível é Riemanniana. Vejamos um exemplo:

Exemplo 1.1.3. A função

$$F(v) = \{v_1^4 + 3v_1^2v_2^2 + v_2^4\}^{\frac{1}{4}}$$

é uma métrica Finsler reversível para todo $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, que não é Riemmaniana, pois $F^2(v)$ não é um polinômio de grau 2. Mais geralmente, uma função $F(v) = \{v_1^4 + 3cv_1^2v_2^2 + v_2^4\}^{\frac{1}{4}}$, com $c \in (0, 2)$, é uma métrica Finsler.

Exemplo 1.1.4. A métrica $F(v_1, v_2) = \sqrt{\sqrt{v_1^4 + v_2^4 + \lambda(v_1^2 + v_2^2)}}$ para $\lambda > 0$ e $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ é uma métrica Finsler, denominada de perturbação da métrica quádrica.

O lema seguinte traz algumas propriedades geométricas do tensor fundamental, as quais serão usadas para demonstrar algumas desigualdades similares ao caso euclidiano, como a desigualdade triangular e a desigualdade de Cauchy-Schwarz no nosso contexto.

Lema 1.1.2. Seja (M, F) variedade Finsler, para qualquer $v \in TM \setminus 0$ as seguintes propriedades são válidas.

- (i) g_v é bilinear e simétrica;
- (ii) g_v é positivo homogêneo de grau 0, ou seja, $g_{\lambda v} = g_v$ para qualquer $\lambda > 0$;
- (iii) $g_v(v, v) = F^2(v)$;
- (iv) $g_v(v, w) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} F^2(v + sw)|_{s=0} = \frac{1}{2} d(F^2)_v w$, $w \in T_p M$.

Demonstração. item i Por (1.1), temos o seguinte:

$$\begin{aligned} g_v(u, w) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2(v + su + tw)|_{s,t=0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} F^2(v + tu + sw)|_{s,t=0} \\ &= g_v(w, u), \end{aligned}$$

para qualquer $u, w \in T_p M$. Ademais, dados $u, z, w \in T_p M$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g_v(u + \lambda z, w) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2(v + s(u + \lambda z) + tw)|_{s,t=0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} d(F^2)_{(v+tw)}(u + \lambda z)|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |_{t=0} d(F^2)_{(v+tw)}(u) + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial}{\partial t} |_{t=0} d(F^2)_{(v+tw)}(z) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2(v + su + tw)|_{s,t=0} + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2(v + sz + tw)|_{s,t=0} \\ &= g_v(u, w) + \lambda g_v(z, w). \end{aligned}$$

Com isso, finalizamos a prova do item i.

item ii Segue da bilinearidade do tensor fundamental e usando o fato de F ser 1-homogênea. Com efeito: Dados $\lambda > 0$ e $v \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} g_{\lambda v}(u, w) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2(\lambda v + su + tw)|_{s,t=0} = \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2(v + s \frac{u}{\lambda} + t \frac{w}{\lambda})|_{s,t=0} \\ &= \lambda^2 g_v(\frac{u}{\lambda}, \frac{w}{\lambda}) = g_v(u, w), \end{aligned}$$

para quaisquer $u, w \in T_p M$. Verifiquemos agora o item iii:

$$2g_v(v, v) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} |_{s,t=0} F^2(\lambda v + sv + tv) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} |_{s,t=0} (1+s+t)^2 F^2(v) = 2F^2(v).$$

E para finalizar vejamos item iv

$$\begin{aligned} 2g_v(v, w) &= \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2(v + sv + tw)|_{s,t=0} = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} |_{s,t=0} (1+s)^2 F^2(v + \frac{t}{1+s} w) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} |_{s=0} \left\{ (1+s)^2 \left[\frac{1}{1+s} \frac{\partial}{\partial z} |_{z=0} F^2(v + zw) \right] \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} |_{s=0} (1+s) \frac{\partial}{\partial z} |_{z=0} F^2(v + zw) = \frac{\partial}{\partial z} |_{z=0} F^2(v + zw), \end{aligned}$$

onde fizemos $z = \frac{t}{1+s}$. □

Observação 1.1.4. *O fato de o tensor fundamental da métrica Finsler ser positivo definido e o item (i) da proposição acima nos diz que, ao fixarmos $v \neq 0$, g_v é um produto interno em $T_p M$, ou seja, a métrica Finsler nos dá uma família de produtos internos que dependem da direção.*

Por definição uma métrica Finsler, é contínua em 0. E em geral não é diferenciável em 0. Por exemplo, qualquer norma Euclidiana não é diferenciável em 0, como podemos testar facilmente no exemplo $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Porém o quadrado da norma é suave, por exemplo

$$\|(x_1, x_2)\|^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

Assim, somos levados ao seguinte questionamento: se F é uma métrica Finsler, F^2 é suave? Veremos a seguir que F^2 é de classe C^1 , porém se F^2 for de classe C^2 , então F é uma norma euclidiana.

Lema 1.1.3. *Se F é uma métrica Finsler, então F^2 é de classe C^1 em 0.*

Demonstração. Dado $v \in TM$, temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{F^2(tv) - F^2(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{F^2(tv)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{t^2 F^2(\pm v)}{t} = 0,$$

implicando que F^2 é diferenciável em 0 e $dF_0^2 = 0$. Por outro lado, pelo item (iv) do Lema 1.1.2, $dF_v^2(u) = 2g_v(v, u)$. E pelo item (ii) do mesmo Lema

$$\lim_{t \rightarrow 0} g_{tv}(tv, u) = \lim_{t \rightarrow 0} t g_v(v, u) = 0,$$

implicando que $v \mapsto d(F)_v^2$ é contínua em 0. □

Lema 1.1.4. *Se F é uma métrica Finsler tal que F^2 é de classe C^2 , então F é uma norma Euclidiana.*

Demonstração. Suponha que F^2 é de classe C^2 em 0. Como $F \geq 0$ e $F^2(v) = 0$ se, e somente se, $v = 0$, segue que 0 é um ponto de mínimo de F^2 . Em particular, $d(F^2)_0 = 0$. Logo, se F^2 é de classe C^2 em 0 temos que

$$F^2(v) = F^2(0) + d(F^2)_0(v) + \frac{1}{2}Hess_0(F^2)(v, v) + o(\|v\|) = \frac{1}{2}Hess_0(F^2)(v, v) + o(\|v\|),$$

para qualquer v suficientemente próximo de 0. Logo dado $v \in \mathbb{R}^2$ qualquer

$$F(v) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(tv)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\frac{1}{2}Hess_0(F^2)(tv, tv) + o(\|tv\|)}}{t} = \sqrt{\frac{1}{2}Hess_0(F^2)(v, v)}.$$

Logo F^2 satisfaz a restrição quadrática, implicando que F é uma norma Euclidiana. \square

Na geometria de Finsler, o tensor de Cartan é usado para descrever como a métrica Finsler depende da direção. Em geometria Riemanniana, onde não há essa dependência, temos que tal tensor é sempre nulo. Ele é obtido ao diferenciar a métrica F^2 três vezes. Tal objeto será útil para, ulteriormente, definir a Conexão de Chern (1911-2004), matemático chinês que reinterpretou a antiga teoria de conexão adaptando-a ao contexto Finsler [21].

Definição 1.1.3. *Seja um tensor trilinear C_v dado por*

$$C_v(w_1, w_2, w_3) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g_{v+sw_1}(w_2, w_3)|_{s=0} = \frac{1}{4} \frac{\partial^3}{\partial s_3 \partial s_2 \partial s_1} F^2(v + \sum_{i=1}^3 s_i w_i)|_{s_1, s_2, s_3=0}, \quad (1.2)$$

para quaisquer $v, w_1, w_2, w_3 \in T_p M$ com v não nulo. Tal família $C = \{C_v; v \in TM \setminus 0\}$ é denominada **tensor de Cartan**.

Observação 1.1.5. *A grosso modo, o tensor de Cartan nos diz quando uma métrica Finsler é Riemanniana, ou seja, F é Riemanniana se, e somente se, $C_v = 0$, para todo $v \in TM \setminus 0$.*

O tensor de Cartan goza das seguintes propriedades:

Lema 1.1.5. *Dado $v \in T_p M \setminus 0$, temos*

(i) C_v é trilinear e simétrico;

(ii) C_v é positivo homogêneo de grau -1 , isto é, $C_{\lambda v} = \frac{1}{\lambda} C_v$, para qualquer $\lambda > 0$;

(iii) $C_v(v, w_1, w_2) = C_v(w_1, v, w_2) = C_v(w_1, w_2, v) = 0$, $w_1, w_2 \in T_p M$.

Demonstração. item i Primeiro, mostremos a simetria do tensor de Cartan. Por definição, temos:

$$C_v(w_1, w_2, w_3) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g_{v+sw_1}(w_2, w_3)|_{s=0} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g_{v+sw_1}(w_3, w_2)|_{s=0} = C_v(w_1, w_3, w_2).$$

Além disso, note que

$$\begin{aligned} C_v(w_1, w_2, w_3) &= \frac{1}{4} \frac{\partial^3}{\partial s_3 \partial s_2 \partial s_1} F^2(v + s_1 w_1 + s_2 w_2 + s_3 w_3)|_{s_1, s_2, s_3=0} \\ &= \frac{1}{4} \frac{\partial^3}{\partial s_3 \partial s_2 \partial s_1} F^2(v + s_1 w_2 + s_2 w_1 + s_3 w_3)|_{s_1, s_2, s_3=0} \\ &= C_v(w_2, w_1, w_3). \end{aligned}$$

Da linearidade de g_v , temos que $C_v(w_1, \lambda a + b, w_3) = \lambda C_v(w_1, a, w_3) + C_v(w_1, b, w_3)$. Por simetria, temos então que C_v é linear em todas as entradas. Provemos agora o item ii: Dado $\lambda > 0$, como $g_{\lambda v} = g_v$, temos que

$$\begin{aligned} C_{\lambda v}(w_1, w_2, w_3) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g_{\lambda v+sw_1}(w_2, w_3)|_{s=0} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g_{v+\frac{s}{\lambda}w_1}(w_2, w_3)|_{s=0} \\ &= \frac{1}{\lambda} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} g_{v+zw_1}(w_2, w_3)|_{z=0} = \frac{1}{\lambda} C_v(w_1, w_2, w_3). \end{aligned}$$

Por fim, o item iii segue usando a 0-homogeneidade de g . Assim,

$$\begin{aligned} C_v(v, w_1, w_2) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g_{v+sv}(w_1, w_2)|_{s=0} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g_{(1+s)v}(w_1, w_2)|_{s=0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g_v(w_1, w_2)|_{s=0} = 0. \end{aligned}$$

□

Observação 1.1.6. *Sejam α, β e γ curvas suaves em $T_p M$. Então, usando a definição do tensor de Cartan e propriedade (iii) do Lema 1.1.5, juntamente com a bilinearidade do tensor fundamental, temos:*

$$\frac{d}{dt} g_{\gamma(t)}(\alpha(t), \beta(t)) = g_{\gamma(t)}(\alpha'(t), \beta(t)) + g_{\gamma(t)}(\alpha(t), \beta'(t)) + 2C_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \alpha(t), \beta(t)).$$

Apesar do produto interno depender da direção, ainda, na Geometria Finsler, podemos enunciar duas famosas desigualdades: a desigualdade triangular e a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Lema 1.1.6 (Desigualdade triangular). *Para quaisquer $u, v \in T_p M$ tem-se*

$$F(u + v) \leq F(u) + F(v).$$

E a igualdade é verificada se, e somente se, $u = \lambda v$ para algum $\lambda \geq 0$.

Demonstração. Dados $u, v \in T_p M \setminus 0$, defina

$$\theta(t) = F^2(tu_0 + (1-t)v_0) = F^2(v_0 + t(u_0 - v_0)),$$

onde $u_0 = \frac{u}{F(u)}$ e $v_0 = \frac{v}{F(v)}$ e $t \in [0, 1]$. Observe que $\theta''(t) = g_{tu_0+(1-t)v_0}(u_0 - v_0, u_0 - v_0) \geq 0$. Para verificar isso primeiro calculemos $\theta'(t)$:

$$\begin{aligned} \theta'(t) &= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \theta(t+s) = 2 \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \left(\frac{1}{2} F^2 \right) (v_0 + t(u_0 - v_0) + s(u_0 - v_0)) \\ &= 2g_{v_0+t(u_0-v_0)}(v_0 + t(u_0 - v_0), u_0 - v_0). \end{aligned}$$

Logo, usando o item (iii) do Lema 1.1.5 e a observação 1.1.6 obtemos a afirmação:

$$\begin{aligned} \theta''(t) &= 2 \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \theta'(t+s) = 2 \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} g_{v_0+(t+s)(u_0-v_0)}(v_0 + (t+s)(u_0 - v_0), u_0 - v_0) \\ &= 2g_{v_0+t(u_0-v_0)}(u_0 - v_0, u_0 - v_0) + 4C_{v_0+t(u_0-v_0)}(u_0 - v_0, v_0 + t(u_0 - v_0), u_0 - v_0) \\ &= 2g_{v_0+t(u_0-v_0)}(u_0 - v_0, u_0 - v_0) > 0, \end{aligned}$$

já que o tensor fundamental é positivo definido. Note que como $\theta(0) = \theta(1) = 1$, temos que $\theta(t) \leq 1$ para qualquer $t \in [0, 1]$. Com efeito, de $\theta'' > 0$, temos que θ é convexa, i.e., $\theta(tx + (1-t)y) \leq t\theta(x) + (1-t)\theta(y)$, quaisquer que sejam $x, y, t \in [0, 1]$, e fazendo $x = 1, y = 0$ o resultado segue. Em particular, para $t_0 = \frac{F(u)}{F(u)+F(v)} \in (0, 1)$ o vetor $z = t_0u_0 + (1-t_0)v_0$ satisfaz $\theta(t_0) = F^2(z) \leq 1$. E como $z = \frac{u+v}{F(u)+F(v)}$, obtemos que $F(u+v) \leq F(u) + F(v)$, pela homogeneidade de F .

Observe que $F(u+v) = F(u) + F(v)$ se, e somente se, $\theta(t_0) = 1$ e neste caso $\theta''(t_0) = 0$ implicando que $u_0 = v_0$ e portanto $u = \frac{F(u)}{F(v)}v$. \square

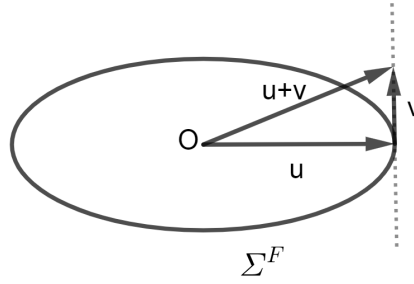
Lema 1.1.7. *Se $v \in T_p M$ tal que $F(v) = 1$, então $F(v) \leq F(v+w)$, para todo $w \in T_p M$ com $g_v(v, w) = 0$. A igualdade é válida se, e somente se, $w = 0$.*

Demonstração. Defina $\theta(t) = F^2(v+tw)$, com $t \in [0, 1]$. Analogamente aos cálculos feitos no Lema 1.1.6 supracitado, temos: $\theta'(t) = 2g_{v+tw}(v+tw, w)$, $\theta''(t) = 2g_{v+tw}(w, w) > 0$, pois o tensor fundamental é positivo definido. Daí, $\theta'(0) = 2g_v(v, w) = 0$, por hipótese. Logo, 0 é ponto crítico de θ . Além disso, note que $\theta''(t) \geq 0$, para todo $t \in [0, 1]$. Assim, $t = 0$ é um ponto de mínimo global e temos:

$$F^2(v) = \theta(0) \leq \theta(1) = F^2(v+w).$$

Portanto, $F(v) \leq F(v+w)$. Ademais, como $\theta''(t) = 2g_{v+tw}(w, w) \geq 0$, temos que $\theta''(t) = 0$ se, e somente se, $\theta''(0) = 0$, se e somente se, $w = 0$, já que o tensor fundamental é positivo definido. \square

Lema 1.1.8 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Para quaisquer $u, v \in T_p M$ com $v \neq 0$, temos que $g_v(v, u) \leq F(v)F(u)$. A igualdade é verificada se, e somente se, $u = \lambda v$ para algum $\lambda > 0$.*

Figura 1.1: $F(u) \leq F(u + v)$.

Demonstração. Como a conta é feita na fibra de T_pM , o vetor u admite decomposição na direção v somado com um vetor no subespaço ortogonal a v em relação a g_v , que é o produto interno em T_pM . Então, se $u = \lambda v + w$, temos:

$$g_v(v, u) = g_v(v, w + \lambda v) = \lambda F^2(v). \quad (1.3)$$

Se $\lambda \leq 0$, a equação acima implica que $g_v(v, u) \leq 0 \leq F(v)F(u)$. Se $\lambda > 0$, então

$$g_v(v, u) = \lambda F(v)F(v) \leq \lambda F(v)F(v + \frac{1}{\lambda}w) = F(v)F(u),$$

onde usamos o Lema 1.1.7. A igualdade é verificada apenas quando $w = 0$, ou equivalentemente, $u = \lambda v$. \square

Lema 1.1.9. *Se $u, v \in T_pM \setminus 0$ tais que $g_u(u, w) = g_v(v, w)$ para qualquer $w \in T_pM$, então $u = v$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.1.8 e usando a hipótese, temos:

$$F^2(u) = g_u(u, u) = g_v(v, u) \leq F(v)F(u). \quad (1.4)$$

Assim $F(u) \leq F(v)$. Analogamente, provamos que $F(v) \leq F(u)$ e portanto $F(v) = F(u)$. Dessarte, a equação (1.4) nos dá $g_v(v, u) = F(v)F(u)$ e portanto $u = \lambda v$ (Lema 1.1.8). Por outro lado, $F(u) = F(\lambda v) = \lambda F(v) = \lambda F(u) \implies \lambda = 1$. Logo, segue o desejado. \square

1.2 (α, β) -métricas

Em seções anteriores, trabalhamos com uma métrica particular, a métrica Randers. Tal métrica pertence a uma classe maior de métricas, as (α, β) -métricas, onde α uma norma Riemanniana e β uma 1-forma sobre a variedade. É fato que tais métricas aparecem pela primeira vez com Randers [35], mas, à época, ainda era desconhecida a natureza de tais métricas. A métrica Randers foi reconhecida pela primeira vez como um

tipo de métrica Finsler em 1957, pelo físico polonês Roman Stanislaw Ingarden (1920-2011), o qual propôs a noção de (α, β) -métrica [29]. Durante um tempo, elas ficaram adormecidas, até que em 1969, em uma carta dirigida a Finsler, o matemático japonês Makoto Matsumoto considera o seguinte problema [11]: *Suponha que uma pessoa esteja caminhando em um plano horizontal com velocidade c , enquanto a força da gravitacional atua perpendicularmente a esse plano. (...) Imagine agora que a pessoa esteja caminhando com a mesma velocidade em um plano inclinado com ângulo ϵ em relação ao nível horizontal do mar. Sob a influência das forças gravitacionais, qual seria a trajetória que a pessoa deveria seguir para alcançar um determinado destino no menor tempo possível?* Matsumoto [28] encontrou uma métrica da forma (1.7) ao solucionar o problema, e tal métrica foi denominada de métrica de Matsumoto ou métrica da inclinação da montanha. Ela ganhou destaque no contexto dos incêndios florestais, pois ao considerarmos a inclinação do terreno, obtemos uma métrica de Matsumoto (reversa) [23]. A métrica de inclinação é um dos modelos matemáticos mais recentes para prever a evolução dos incêndios florestais. Portanto, o estudo matemático delas pode se tornar no futuro vital para prever, controlar e combater os incêndios florestais.

Definição 1.2.1. *Sejam α e β respectivamente uma norma Riemanniana e uma 1-forma em uma variedade diferenciável M . Uma (α, β) -**métrica** é uma métrica Finsler da forma*

$$F(v) = \alpha(v) \phi\left(\frac{\beta(v)}{\alpha(v)}\right) \quad (1.5)$$

para alguma função suave positiva $\phi : (-b_0, b_0) \rightarrow \mathbb{R}_+$ e $v \neq 0$.

Deve-se a Shen [37], que uma métrica da forma (1.5) é Finsler se, e somente se, $\phi > 0$ e

$$(\phi(s) - s\phi'(s)) + (b^2 - s^2)\phi''(s) > 0. \quad (1.6)$$

onde $b := \|\beta\|_\alpha = \sup_{\alpha(v)=1} |\beta(v)| < b_0 \in \mathbb{R}$ e $|s| < b < b_0$.

Uma (α, β) -métrica importante no nosso trabalho é a métrica de Matsumoto (1969), ou a métrica da inclinação da Montanha. Matsumoto estava interessado em estudar os caminhos que minimizam distância de um caminhante descendo uma montanha, com velocidade constante e sob a influência da gravidade, descrevia.

Uma **métrica de Matsumoto** é uma (α, β) -métrica com $\phi(s) = \frac{1}{1-s}$, $s \neq 1$, mais precisamente é uma métrica Finsler da forma

$$F(v) = \frac{\alpha(v)^2}{\alpha(v) - \beta(v)}, \quad (1.7)$$

para qualquer $0 \neq v$.

Lema 1.2.1. *Seja $A_0 \subset TM$ aberto cônico (i.e., A é aberto, não vazio e que satisfaz $v \in A_0$ e $\lambda > 0 \implies \lambda v \in A_0$). Uma função da forma $F = \frac{\alpha^2}{\alpha - \beta}$, com α e β norma Riemanniana e 1-forma respectivamente, é fortemente convexa em*

$$A^* = \{v \in A_0 : (\alpha(v) - 2\beta(v))(\alpha(v) - \beta(v)) > 0\}.$$

Demonstração. Vide [24]. □

Observação 1.2.1. *A métrica acima (1.7) está na sua forma simplificada, pois, originalmente, a métrica de Matsumoto é dada por:*

$$F(v) = \frac{\alpha(v)^2}{c\alpha(v) - \frac{g}{2}\beta(v)}, \quad (1.8)$$

para qualquer $0 \neq v$, onde c é a velocidade constante do caminhante e g é a aceleração de gravidade da Terra.

Observação 1.2.2. *Tomando $s = \frac{\beta}{\alpha}$ em (1.5) quando $\phi(s) = 1 + s$ e $b_0 = 1$, obtemos a métrica Randers.*

Lema 1.2.2. *Se $F = \alpha\phi\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ é uma métrica Finsler, então*

$$\begin{aligned} g_v^F(v, w) &= F(v) \left\langle \rho(v) \frac{v}{\alpha(v)} + \phi' \left(\frac{\beta(v)}{\alpha(v)} \right) B, w \right\rangle_\alpha \\ &= \left\langle \phi \left(\frac{\beta(v)}{\alpha(v)} \right) \rho(v) v + F(v) \phi' \left(\frac{\beta(v)}{\alpha(v)} \right) B, w \right\rangle_\alpha \end{aligned}$$

para qualquer $v \neq 0$, onde B é o campo vetorial α -dual a β e $\rho(v) = \phi \left(\frac{\beta(v)}{\alpha(v)} \right) - \phi' \left(\frac{\beta(v)}{\alpha(v)} \right) \frac{\beta(v)}{\alpha(v)} > 0$.

Demonstração. Como F é uma métrica Finsler, podemos fazer $s = b$ na equação (1.6) e concluir que $\rho(v) = \phi \left(\frac{\beta(v)}{\alpha(v)} \right) - \phi' \left(\frac{\beta(v)}{\alpha(v)} \right) \frac{\beta(v)}{\alpha(v)}$ é estritamente positivo. Agora dado $v \neq 0$ temos que

$$\begin{aligned} g_v^F(v, w) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} F^2(v + tw) \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \alpha^2(v + tw) \phi^2 \left(\frac{\beta(v + tw)}{\alpha(v + tw)} \right) \Big|_{t=0} \\ &= \phi^2 \left(\frac{\beta(v)}{\alpha(v)} \right) \langle v, w \rangle + \alpha^2(v) \phi \left(\frac{\beta(v)}{\alpha(v)} \right) \phi' \left(\frac{\beta(v)}{\alpha(v)} \right) \frac{\alpha(v)\beta(w) - \beta(v) \frac{\langle v, w \rangle}{\alpha(v)}}{\alpha^2(v)} \\ &= \phi^2 \left(\frac{\beta(v)}{\alpha(v)} \right) \langle v, w \rangle + \phi \left(\frac{\beta(v)}{\alpha(v)} \right) \phi' \left(\frac{\beta(v)}{\alpha(v)} \right) \left(\alpha(v)\beta(w) - \frac{\beta(v)}{\alpha(v)} \langle v, w \rangle \right) \\ &= \phi \left(\frac{\beta(v)}{\alpha(v)} \right) \left(\phi \left(\frac{\beta(v)}{\alpha(v)} \right) \langle v, w \rangle + \phi' \left(\frac{\beta(v)}{\alpha(v)} \right) \left(\alpha(v)\langle B, w \rangle - \frac{\beta(v)}{\alpha(v)} \langle v, w \rangle \right) \right) \\ &= \phi \left(\frac{\beta(v)}{\alpha(v)} \right) \left\langle \left\{ \phi \left(\frac{\beta(v)}{\alpha(v)} \right) - \phi' \left(\frac{\beta(v)}{\alpha(v)} \right) \frac{\beta(v)}{\alpha(v)} \right\} v + \phi' \left(\frac{\beta(v)}{\alpha(v)} \right) \alpha(v) B, w \right\rangle \\ &= F(v) \left\langle \left\{ \phi \left(\frac{\beta(v)}{\alpha(v)} \right) - \phi' \left(\frac{\beta(v)}{\alpha(v)} \right) \frac{\beta(v)}{\alpha(v)} \right\} \frac{v}{\alpha(v)} + \phi' \left(\frac{\beta(v)}{\alpha(v)} \right) B, w \right\rangle. \end{aligned}$$

□

1.3 Indicatriz

Um dos objetos geométricos fundamentais da Geometria Finsler é a indicatriz, a qual determina a métrica Finsler e vice-versa. Em problemas de modelagem de fenômenos naturais, a indicatriz é crucial para descrever a anisotropia do ambiente. Diferentemente do contexto Riemanniano, cujas indicatrizes são elipsoides, no contexto Finsleriano, as indicatrizes possuem diferentes formatos e são elas que contêm todas as informações geométricas da métrica Finsler.

Definição 1.3.1. A *indicatriz de F* de raio $r > 0$ em p é o conjunto

$$\Sigma_p^F(r) = \{v \in T_p M : F(v) = r\} = F^{-1}(r).$$

Quando $r = 1$ diremos apenas *indicatriz* e a denotaremos por Σ_p^F .

Definição 1.3.2. A *indicatriz Σ* de uma métrica Finsler F é dita **fortemente convexa** em $v \in \Sigma$ quando $T_v \Sigma \cap \Sigma = \{v\}$ e Σ está contida em um lado de $T_v \Sigma$.

Definição 1.3.3. A *bola fechada de F* de raio $r > 0$ em p é o conjunto

$$B_p^F(r) = \{v \in T_p M : F(v) \leq r\}.$$

Quando $r=1$, denotaremos apenas por B_p^F .

Lema 1.3.1. A bola fechada B_p^F de uma métrica Finsler é convexa se, e somente se, F satisfizer a desigualdade triangular.

Demonstração. (\Rightarrow) Sejam B_p^F convexa, $u, v \in T_p M \setminus 0$, então $\frac{u}{F(u)}, \frac{v}{F(v)} \in B_p^F$, e a combinação

$$\frac{F(u)}{F(u) + F(v)} \frac{u}{F(u)} + \frac{F(v)}{F(u) + F(v)} \frac{v}{F(v)} = \frac{u + v}{F(u) + F(v)} \in B_p^F.$$

Como $\frac{F(u)}{F(u)+F(v)} + \frac{F(v)}{F(u)+F(v)} = 1$, então $F(u + v) \leq F(u) + F(v)$.

(\Leftarrow) $F(u + v) \leq F(u) + F(v) \Leftrightarrow F\left(\frac{F(u)}{F(u)+F(v)} \frac{u}{F(u)} + \frac{F(v)}{F(u)+F(v)} \frac{v}{F(v)}\right) < 1$. Portanto, B_p^F é convexa. □

Lema 1.3.2. A indicatriz $\Sigma_p^F(r)$ é uma hipersuperfície fechada em TM , cujo espaço tangente em v coincide com

$$\{w \in T_p M; g_v(v, w) = 0\}.$$

Demonstração. Basta observar que r é valor regular de F . Com efeito, usando a propriedade (iii) e (iv) do Lema 1.1.2, temos $dF_v^2(v) = 2g_v(v, v) = 2F^2(v) \neq 0$, para todo $v \in T_p M \setminus 0$. Ademais, como $T_v \Sigma_p^F = \text{Ker } d(F^2)_v = \{w \in T_p M : g_v(v, w) = 0\}$, uma vez que $dF_v^2(w) = 2g_v(v, w)$, completando a prova. \square

Lema 1.3.3. *Se F é uma métrica Finsler, então*

1. $0 \in B_p^F$;
2. B_p^F e Σ_p^F são compactas;
3. para qualquer $v \in T_p M$ o raio $\gamma_v(t) = tv, t > 0$ cruza Σ_p^F apenas em $\frac{v}{F(v)}$;
4. γ_v cruza Σ_p^F transversalmente.

Demonstração. Como $F(v) \neq 0$ para qualquer $0 \neq v \in S$, onde S é a esfera euclidiana unitária, $F|_{v \in S}$ é contínua e S é compacta, existem $m, M > 0$ tais que

$$m \leq F\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \leq M.$$

Ora, mas pela 1-homogeneidade da F , segue que

$$m\|v\| \leq F(v) \leq M\|v\| \quad (1.9)$$

e assim

$$B_p^{\|\cdot\|}\left(\frac{1}{M}\right) \subset B_p^F \subset B_p^{\|\cdot\|}\left(\frac{1}{m}\right). \quad (1.10)$$

De fato, tome $y \in B_p^{\|\cdot\|}$. Daí, $\|y\| \leq \frac{1}{M} \implies F(y) \leq M\|y\| \leq 1$, onde usamos a segunda desigualdade (1.9) acima. Logo, $y \in B_p^F$. Vamos provar a segunda inclusão: Tome $z \in B_p^F$. Assim, usando a primeira desigualdade (1.9), temos $m\|z\| \leq F(z) \leq 1$. Portanto, $z \in B_p^{\|\cdot\|}\left(\frac{1}{m}\right)$. Da primeira inclusão em (1.10) concluímos que $0 \in B_p^F$. E da segunda inclusão concluímos que B_p^F e Σ_p^F são compactos, pois são fechados e limitados.

Note que $\gamma_v\left(\frac{1}{F(v)}\right) \in \Sigma_p^F$. Suponha que exista $s > 0$ tal que $\gamma_v(s) \in \Sigma_p^F$. Nesse caso $1 = F(\gamma_v(s)) = F(sv)$ e assim $s = \frac{1}{F(v)}$.

Se γ_v tangencia Σ_p^F em $\frac{v}{F(v)}$, então $0 = g_{\frac{v}{F(v)}}\left(\frac{v}{F(v)}, v\right)$, implicando que $F(v) = 0$, o que é um absurdo. Portanto o raio γ_v é transversal a Σ_p^F . \square

Observação 1.3.1. *Como vimos acima, dado $v \in T_p M$, o valor $F(v)$ pode ser caracterizado como o único número real positivo tal que $\frac{v}{F(v)} \in \Sigma_p^F$. Isso nos permite definir uma métrica Finsler a partir de sua indicatriz.*

Lema 1.3.4. Σ_p^F é difeomorfa a S .

Demonstração. De fato, considere as aplicações suaves $H : S \rightarrow \Sigma_p^F$ e $G : \Sigma_p^F \rightarrow S$ dadas abaixo

$$H(v) = \frac{v}{F(v)} \quad \text{e} \quad G(v) = \frac{v}{\|v\|}.$$

Primeiro note que H está bem definida, pois para qualquer $0 \neq v \in S$ a quantidade $F(v)$ é o único número positivo tal que $\frac{v}{F(v)} \in \Sigma_p^F$ (item 3 do Lema 1.3.3). Observe que $H = G^{-1}$. Com efeito,

$$G \circ H(v) = G\left(\frac{v}{F(v)}\right) = \frac{\frac{v}{F(v)}}{\left\|\frac{v}{F(v)}\right\|} = \frac{v}{\|v\|} = v,$$

pois $v \in S$. Analogamente provamos que $H \circ G = Id$. □

Lema 1.3.5. *Seja F_1 e F_2 duas métricas Finsler em M e $\Sigma_p^{F_1}$ e $\Sigma_p^{F_2}$. Se para todo $p \in M$*

$$\Sigma_p^{F_1} = \Sigma_p^{F_2},$$

então as métricas são as mesmas.

Demonstração. De acordo com o fato

$$\{v \in T_p M : F_1(v) = 1\} = \Sigma_p^{F_1} = \Sigma_p^{F_2} = \{v \in T_p M : F_2(v) = 1\},$$

temos que as métricas coincidem nas indicatrizes. Assim, para cada $v \in T_p M$, podemos escrever

$$\begin{aligned} F_1(v) &= F_1\left(F_2(v) \frac{v}{F_2(v)}\right) = F_2(v) F_1\left(\frac{v}{F_2(v)}\right) \\ &= F_2(v) F_2\left(\frac{v}{F_2(v)}\right) = F_2\left(F_2(v) \frac{v}{F_2(v)}\right) = F_2(v). \end{aligned}$$

□

Lema 1.3.6. *A indicatriz de uma métrica Finsler é fortemente convexa.*

Demonstração. Suponha que Σ_p^F não seja fortemente convexa em algum $v \in \Sigma_p^F$. Logo existe $w \in T_v \Sigma_p^F$ (em particular $g_v(v, w) = 0$) tal que o vetor $z = v + w \in \Sigma_p^F$. Isso quer dizer que $F(v) = F(v + w)$. Mas pelo Lema 1.1.7, $w = 0$. □

1.4 Comprimento de uma curva e a distância

Nesse seção definiremos o modo de medir distância e calcular comprimento de uma curva em uma variedade Finsleriana.

Em um espaço vetorial de dimensão finita V uma função d é uma distância (generalizada) quando

1. $d(u, v) \geq 0$ e $d(u, v) = 0$ se, e somente se, $u = v$; e
2. $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.

Adicionalmente se $d(u, v) = d(v, u)$, dizemos que a função distância d é simétrica.

Definição 1.4.1. Dada uma variedade Finsleriana (M, F) define-se uma estrutura de comprimento considerando o **funcional comprimento** que associa a cada curva suave por partes $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ o número real

$$L(\gamma) = L_F(\gamma) = \int_a^b F(\gamma'(s)) ds.$$

Como F é positiva homogênea, L é invariante por mudanças de parâmetros positivas, ou seja, se $\lambda : [c, d] \rightarrow [a, b]$ é um difeomorfismo tal que $\lambda' > 0$ (em particular, $\lambda(c) = a$ e $\lambda(d) = b$), então $L(\gamma) = L(\gamma \circ \lambda)$. De fato, pela regra da Cadeia, pela homogeneidade de F e pelo teorema de mudança de variável temos que

$$L(\gamma \circ \lambda) = \int_c^d F(\lambda'(t)\gamma'(\lambda(t))) dt = \int_c^d F(\gamma'(\lambda(t))\lambda'(t)) dt = \int_{\lambda(c)}^{\lambda(d)} F(\gamma'(s)) ds = L(\gamma).$$

Porém, ao contrário do caso Riemanniano, se $\lambda' < 0$, em geral $L(\gamma) \neq L(\gamma \circ \lambda)$, conforme o contraexemplo abaixo.

Exemplo 1.4.1. Em \mathbb{R}^2 considere a métrica $F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{y}{2}$ e as curvas $\gamma(t) = (0, t)$, $t \in [0, 1]$ e $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(-s) = (0, -s)$ $s \in [-1, 0]$. Verifica-se diretamente que $\tilde{\gamma}$ é uma reparametrização negativa de γ e que $L(\gamma) = \frac{1}{2}$ e $L(\tilde{\gamma}) = \frac{3}{2}$.

Definição 1.4.2. A **distância** entre p e q dois pontos quaisquer em (M, F) é definida por

$$d(p, q) = d_F(p, q) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \in C(p, q)\}, \quad (1.11)$$

onde o ínfimo é tomado sobre $C(p, q)$ espaço das curvas suave por partes ligando p a q .

Observe que esta distância não necessariamente é simétrica, ou seja, em geral, $d(p, q) \neq d(q, p)$, $\forall p, q \in (M, F)$. Conseqüentemente para cada $p \in M$ e $r > 0$ temos dois tipos de bola: a bola futura $B^+(p, r) := \{q \in M : d(p, q) < r\}$ e a bola passada $B^-(p, r) := \{q \in M : d(q, p) < r\}$. Nesse caso, (M, d) não é necessariamente um espaço métrico, e as noções de completude diferem um pouco das noções topológicas e geométricas usuais. Não obstante, existe o equivalente ao Teorema de Hopf-Rinow no contexto Finsleriano (ver [10]).

1.5 Aplicação de Legendre e métrica dual

Sabemos que \mathbb{R}^n e $(\mathbb{R}^n)^*$ são espaços vetoriais isomorfos. Porém quando munimos \mathbb{R}^n com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ganhamos uma isomorfismo linear entre tais espaços que associa a cada $v \in \mathbb{R}^n$ o funcional linear $l_v(u) = \langle u, v \rangle$. Ademais, considerando a norma dual $\alpha = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ em $(\mathbb{R}^n)^*$, a aplicação l se torna uma isometria linear. Nessa seção, definiremos uma aplicação análoga, substituindo o produto interno por uma métrica Finsler. Tal aplicação é denominada de aplicação de Legendre.

A aplicação $\ell : TM \setminus 0 \rightarrow TM^* \setminus 0$ que associa a cada $v \in T_p M \setminus 0$ o funcional linear $\ell(v) := \ell_v : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $w \mapsto \ell_v(w) := g_v(v, w)$ é denominada **aplicação de Legendre**. A homogeneidade do tensor fundamental implica que ℓ é positivo homogêneo de grau 1, ou seja, $\ell_{\lambda v} = \lambda \ell_v$ para qualquer $\lambda > 0$. Porém, ao contrário do caso Riemanniano, em geral $\ell|_{T_p M}$ não é linear.

Abaixo definiremos norma F^* -dual e mostraremos que a aplicação de Legendre preserva as normas.

Definição 1.5.1. *Dada métrica Finsler F considera a aplicação $F^* : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$F_p^*(\zeta) = \sup_{v \in T_p M} \frac{\zeta(v)}{F(v)} = \sup_{v \in \Sigma_p} \zeta(v), \quad \zeta \in T_p M^*.$$

*é denominada **métrica dual**.*

Lema 1.5.1. *A aplicação de Legendre preserva normas, ou seja, $F = F^* \circ \ell$.*

Demonstração. Seja $v \in T_p M \setminus 0$

$$F(v) = \frac{g_v(v, v)}{F(v)} = \frac{\ell_v(v)}{F(v)} \leq F^*(\ell_v).$$

Por outro lado, $\ell_v(u) = g_v(v, u) \leq F(v)F(u)$ (1.1.8), logo

$$F^*(\ell_v) = \sup_{F(u)=1} \ell_v(u) \leq F(v).$$

E portanto $F(v) = F^*(\ell_v)$. □

1.6 Métrica de Zermelo

O *problema de navegação de Zermelo* [7] consiste em encontrar a trajetória que minimiza o tempo de viagem de uma partícula em uma variedade Riemanniana (M, h) sob a ação de um campo W cuja a norma Riemanniana não excede uma unidade. Existe uma única solução para o problema de navegação de Zermelo com data (h, W) que é a

métrica Finsleriana $Z : TM \rightarrow \mathbb{R}$, chamada de *métrica de Zermelo*, dada implicitamente pela equação

$$\left\| \frac{v}{Z(v)} - W \right\| = 1, \quad v \in TM \setminus 0,$$

onde $\| \cdot \| = \sqrt{h(\cdot, \cdot)}$.

Shen [39] mostrou que dada uma variedade Riemanniana (M, h) e um campo vetorial W tal que $h(W, W) < 1$, então existe um tipo de métrica Finsler que é chamada de métrica Randers cuja norma é dada pela Proposição 1.6.1. Ademais, em [7] é mostrado que toda métrica Randers surge como solução para o problema de navegação de Zermelo com dados de navegação (M, h, W) .

Nesta seção vamos introduzir a métrica de Zermelo admitindo uma data Finsleriana, vamos calcular seu tensor fundamental e por fim mostraremos que a família das métricas de Zermelo com data Riemanniana coincide com a família das métricas Randers.

Definição 1.6.1. *Se $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ é uma métrica Finsleriana e W um campo suave em M com $F(-W) < 1$. Define-se a translação de F por W como a aplicação $Z : TM \rightarrow [0, \infty)$ dada implicitamente pela equação*

$$F\left(\frac{v}{Z(v)} - W\right) = 1, \quad (1.12)$$

para $v \in TM \setminus 0$, chamada de **métrica de Zermelo** (generalizada) com data de navegação (F, W) . Equivalentemente, (1.12) pode ser escrita como $F(v - Z(v)W) = Z(v)$. O campo W será referido como o vento. A tripla (M, h, W) é chamada de dados de navegação de Zermelo. Denotaremos $Z = F_W$ a deformação de Zermelo de F por W .

Abaixo veremos como relacionar as indicatrizes de uma métrica de Zermelo e de uma métrica Finsler.

Lema 1.6.1. *As indicatrizes de uma métrica Finsler F e de uma métrica de Zermelo Z com data (F, W) de uma mesma variedade M são relacionadas por :*

$$\Sigma_p^Z(r) = \Sigma_p^F(r) + rW,$$

para qualquer $r > 0$ e $p \in M$.

Demonstração. De fato, dado $v \in T_p M$, temos:

$$v \in \Sigma_p^Z(r) \Leftrightarrow Z(v) = r \Leftrightarrow F(v - rW(p)) = r \Leftrightarrow v - rW(p) \in \Sigma_p^F(r) \Leftrightarrow v \in \Sigma_p^F(r) + rW(p).$$

□

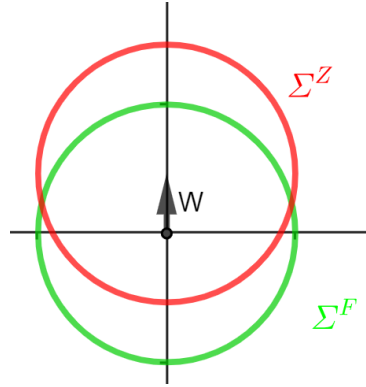


Figura 1.2: Translação de Σ^F por W .

Observação 1.6.1. *Segue do lema anterior que $T_v \Sigma_p^F(r)$ é paralelo à $T_{v+rW(p)} \Sigma_p^Z(r)$, ou seja, os espaços tangentes às indicatrizes das métricas F e Z são paralelos. Com efeito, se $\beta : [a, b] \rightarrow \Sigma_p^F(r)$ é curva suave tal que $\beta'(0) = u \in T_v \Sigma_p^F(r)$, então $\gamma(s) = \beta(s) + rW(p)$ é curva suave em $\Sigma_p^Z(r)$ e $\gamma'(0) = \beta'(0) = u$, donde segue que $u \in T_{v+rW(p)} \Sigma_p^Z(r)$.*

Observação 1.6.2. *Se o vento W é “forte”, isto é, $F(-W) \geq 1$, a origem não pertencerá ao interior da região limitada por $Z^{-1}(1)$ e Z não é uma norma Finsler. Nesse contexto, surgirão outros tipos de métricas: Pseudofinsler e cônicas. No caso cônico, muito da teoria aqui apresentada também vale. No entanto, em Pseudofinsler, surgirão notáveis diferenças, pois o tensor fundamental não necessariamente precisa ser positivo definido. Nessa última geometria, por exemplo, temos a desigualdade triangular inversa (ver [24, 26]).*

Exemplo 1.6.1 (Métrica Funk). *Considere B a bola aberta unitária de \mathbb{R}^n e o campo vetorial $W(p) = -p$. A métrica de Zermelo com data de navegação $(\langle \cdot, \cdot \rangle, W)$ é denominada métrica Funk.*

Exemplo 1.6.2 (Métrica de Katok). *Considere a esfera unitária S^2 de \mathbb{R}^3 , um número real $\epsilon \in (0, 1)$ e o campo suave $W(x, y, z) = (-y, x, 0)$. A métrica de Zermelo com data de navegação $(h, \epsilon W)$, onde h é a primeira forma fundamental de S^2 , é denominada métrica de Katok. Quando ϵ é irracional, apenas as duas geodésicas que percorrem o equador são fechadas [30].*

O teorema seguinte nos permite relacionar os tensores da métrica de Zermelo com os da métrica Finsler através da equação (1.13).

Teorema 1.6.1. *Seja Z a métrica de Zermelo com data (F, W) , onde F é uma métrica Finsleriana e W campo com $F(-W) < 1$. Se g^F e g^Z denotam respectivamente os tensores fundamentais de F e Z , então*

$$g_v^Z(v, u) = \lambda g_{v-Z(v)W}^F(v - Z(v)W, u), \quad (1.13)$$

para quaisquer $u, v \in T_p M$ e $p \in M$ com $v \neq 0$, onde $\lambda = \lambda(v)$ é uma função positiva em M dada por $\lambda(v) = 1 - \frac{g_v^Z(v, W)}{Z(v)}$.

Demonstração. Seja $v \in T_p M$. Pela observação 1.6.1, os hiperplanos afins $T_v \Sigma_p^Z(Z(v))$ e $T_{v-Z(v)W} \Sigma_p^F(Z(v))$ são paralelos para qualquer $v \in T_p M \setminus 0$. Consequentemente os funcionais lineares não nulos $\ell^Z(v)$ e $\ell^F(v - Z(v)W)$ possuem o mesmo núcleo e portanto existe uma constante $\lambda(v) > 0$ tal que $\ell^Z(v) = \lambda(v)\ell^F(v - Z(v)W)$. Ou seja,

$$g_v^Z(v, u) = \lambda g_{v-Z(v)W}^F(v - Z(v)W, u), \quad (1.14)$$

para quaisquer $u, v \in T_p M$ com $v \neq 0$. Fazendo $u = v - Z(v)W$ na equação (1.14), obtemos que

$$\begin{aligned} \lambda(v) &= \frac{g_v^Z(v, v - Z(v)W)}{g_{v-Z(v)W}^F(v - Z(v)W, v - Z(v)W)} = \frac{g_v^Z(v, v) - Z(v)g_v^Z(v, W)}{F^2(v - Z(v)W)} \\ &= \frac{Z^2(v) - Z(v)g_v^Z(v, W)}{Z^2(v)} = 1 - \frac{g_v^Z(v, W)}{Z(v)}. \end{aligned}$$

Vamos verificar que $\lambda(v) > 0$. Com efeito, pelo Lema 1.1.8, temos:

$$\lambda(v) \geq 1 - Z(W).$$

Note que $Z(W) \neq 1$. De fato, pois caso contrário $F(W - W) = F(0) = 1$ (Absurdo!) Ademais, se $Z(W) > 1$, teríamos:

$$1 = F\left(\frac{W}{Z(W)} - W\right) = \left(1 - \frac{1}{Z(W)}\right)F(-W),$$

o que implicaria que $1 - \frac{1}{Z(W)} > 1$, já que $F(-W) < 1$. □

Observação 1.6.3. *Seja Z é uma métrica de Zermelo com data (F, W) . Então segue diretamente do Teorema anterior que*

$$\ell_v^Z = \lambda(v)\ell_{v-Z(v)W}^F,$$

para qualquer $v \in TM \setminus 0$, onde λ é dado pelo Teorema supracitado.

O próximo resultado nos diz que uma métrica de Zermelo com data Riemanniana coincide com a família de métrica Randers.

Proposição 1.6.1. *Sejam (M, h) uma variedade Riemanniana e W um campo tal que $h(W, W) < 1$. Uma aplicação $Z : TM \rightarrow \mathbb{R}$ é uma métrica de Zermelo com data (h, W) se, e somente se,*

$$Z = \alpha + \beta,$$

onde a e β são respectivamente métrica Riemanniana e 1-forma dadas por

$$a(u, v) = \frac{\lambda h(u, v) + h(u, W)h(v, W)}{\lambda^2} \quad e \quad \beta(v) = -\frac{h(v, W)}{\lambda}, \quad (1.15)$$

com $\lambda = 1 - h(W, W)$. Além disso,

$$h(v, u) = \lambda(a(v, u) - a(B, v)a(B, u)), \quad (1.16)$$

onde B é o campo definido por $W = -\frac{B}{\lambda}$ com $\lambda = 1 - a(B, B)$.

Demonstração. Suponha que Z é uma métrica de Zermelo. Seja $u \in TM$ tal que $h(u, u) = 1$. Escreva $u = \frac{v}{Z(v)} - W$. Por definição, $h(\frac{v}{Z(v)} - W, \frac{v}{Z(v)} - W) = 1$, logo, denotando $\lambda = 1 - h(W, W)$ e usando apenas a bilinearidade de h , obtém-se que

$$Z(v)^2 + \frac{2h(v, W)}{\lambda}Z(v) - \frac{h(v, v)}{\lambda} = 0. \quad (1.17)$$

E resolvendo esta equação do segundo grau em termos de $Z(v)$, conclui-se que

$$Z(v) = \sqrt{\frac{\lambda h(v, v) + h^2(v, W)}{\lambda^2}} - \frac{h(v, W)}{\lambda}.$$

Definindo

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \frac{h(u, W)h(v, W) + \lambda h(u, v)}{\lambda^2} \\ \beta(v) &= -\frac{h(v, W)}{\lambda}, \end{aligned}$$

para quaisquer $u, v \in T_pM$, temos que $Z(v) = \sqrt{a(v, v)} + \beta(v)$. Reciprocamente, dada uma métrica Randers $Z = \alpha + \beta$, defina a métrica Riemanniana h pela equação (1.16) e o campo $W = -\frac{B}{\lambda}$, onde $\alpha = \sqrt{a}$, B é o campo a -dual a β (ou seja, $\beta = a(B, \cdot)$) e $\lambda = 1 - a(B, B)$. Como R e Z são positivas 1-homogêneas, basta provar que $Z(v) = R(v)$, para qualquer $v \in \Sigma^R$.

$$\begin{aligned} h(v - W, v - W) &= h(v, v) - 2h(v, W) + h(W, W) \\ &= \lambda\{a(v, v) - a(B, v)^2 - 2(a(v, W) + a(B, v)a(B, W)) + a(W, W) \\ &\quad - a^2(W, B)\} \\ &= \lambda\{\alpha(v)^2 - \beta(v)^2 - 2(\frac{1}{\lambda}(-\beta(v) + \beta(v)a(B, B))) + a(W, W) - a^2(W, B)\} \\ &= \lambda\{(\alpha(v) - \beta(v)) + 2\beta(v) + a(W, W) - a^2(W, B)\} \\ &= \lambda\{1 + a(W, W) - a^2(B, W)\}. \end{aligned}$$

Usando que $W = -\frac{B}{\lambda}$ e $\lambda = 1 - a(B, B)$, temos que $a(W, W) - a^2(B, W) = \frac{a(B, B)}{\lambda}$. Logo, $h(v - W, v - W) = 1$. Como, por definição, temos que $h(v - Z(v)W) = Z(v)$, segue que $Z(v) = 1$ e, portanto, $R(v) = Z(v)$ para todo $v \in \Sigma^R$. Portanto, $R = Z$.

□

O lema a seguir relaciona a aplicação de Legendre de uma métrica Randers $Z = h_W$ com a aplicação de Legendre da métrica Riemanniana h . Isso permite relacionar o cone ortogonal com o subespaço h -ortogonal e Z -gradiente de uma função com o h -gradiente como veremos futuramente.

Lema 1.6.2. *Seja $Z(\cdot) = \alpha(\cdot) + \beta(\cdot)$ uma métrica Randers com data (h, W) sobre uma variedade M . Então, dado $v \in T_p M \setminus 0$ obtemos as seguintes expressões para a aplicação de Legendre:*

$$\ell_v(u) = g_v(v, u) = Z(v) \left(\frac{a(u, v)}{\alpha(v)} + \beta(u) \right) \quad (1.18)$$

$$= \frac{Z(v)}{\lambda \alpha(v)} h(v - Z(v)W, u), \quad (1.19)$$

para qualquer $u \in T_p M$.

Demonstração. Pela definição de tensor fundamental e pela regra da cadeia, segue que

$$\begin{aligned} g_v(v, u) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} Z^2(v + tu) \Big|_{t=0} = Z(v) \frac{\partial}{\partial t} Z(v + tu) \Big|_{t=0} \\ &= Z(v) \frac{\partial}{\partial t} [\alpha(v + tu) + \beta(v + tu)] \Big|_{t=0} = Z(v) \left[\frac{\partial}{\partial t} \alpha(v + tu) \Big|_{t=0} + \beta(u) \right] \\ &= Z(v) \left[\frac{1}{2\alpha(v)} \frac{\partial}{\partial t} a(v + tu, v + tu) \Big|_{t=0} + \beta(u) \right] = Z(v) \left(\frac{a(u, v)}{\alpha(v)} + \beta(u) \right). \end{aligned}$$

Por outro lado, usando estas mesmas contas e a relação entre a , β e h presentes no Lema 1.6.1, temos que

$$\begin{aligned} g_v(v, u) &= \frac{Z(v)}{\lambda \alpha(v)} \left[h(v, u) + \frac{1}{\lambda} h(v, W) h(u, W) - \alpha(v) h(u, W) \right] \\ &= \frac{Z(v)}{\lambda \alpha(v)} h \left(v + \left(\frac{1}{\lambda} h(v, W) - \alpha(v) \right) W, u \right) \\ &= \frac{Z(v)}{\lambda \alpha(v)} h(v - Z(v)W, u). \end{aligned}$$

□

Corolário 1.6.1. *O tensor fundamental de uma métrica Randers $Z(\cdot) = \alpha(\cdot) + \beta(\cdot)$ é dado pela seguinte expressão:*

$$g_v(w, u) = \frac{Z(v)}{\alpha(v)} \left(a(w, u) - \frac{a(v, w)a(v, u)}{\alpha^2(v)} \right) + \left(\frac{a(v, w)}{\alpha(v)} + \beta(w) \right) \left(\frac{a(v, u)}{\alpha(v)} + \beta(u) \right),$$

para $u, v, w \in T_p M$, com $v \neq 0$.

Demonstração. Com efeito, usando a equação (1.18), obtemos:

$$\begin{aligned}
g_v(u, w) &:= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2(v + su + tw) \Big|_{s,t=0} = \frac{\partial}{\partial s} g_{v+su}(v + su, w) \Big|_{s=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial s} \left[Z(v + su) \left(\frac{a(v + su, w)}{\alpha(v + su)} + \beta(w) \right) \right] \Big|_{s=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial s} Z(v + su) \Big|_{s=0} \left(\frac{a(v, w)}{\alpha(v)} + \beta(w) \right) + Z(v) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{a(v + su, w)}{\alpha(v + su)} + \beta(w) \right) \Big|_{s=0} \\
&= \frac{Z(v)}{\alpha(v)} \left[a(w, u) - \frac{a(v, w)a(v, u)}{\alpha^2(v)} \right] + \left(\frac{a(v, w)}{\alpha(v)} + \beta(w) \right) \left(\frac{a(v, u)}{\alpha(v)} + \beta(u) \right),
\end{aligned}$$

pois $\frac{\partial}{\partial s} Z(v + su) \Big|_{s=0} = \frac{a(v, u)}{\alpha(v)} + \beta(u)$. □

1.7 Cone Ortogonal

Dada uma subvariedade L de M um vetor $v \in T_p M \setminus 0$ é *ortogonal* (figura 1.3) a L quando $p \in L$ e $g_v(v, w) = 0$ para qualquer $w \in T_p L$. Quando $g_v(v, w) = 0$ diremos que v é F -ortogonal a w , ou seja, $v \perp_F w$. O espaço dos vetores ortogonais a L em p é denominado **cone ortogonal** a L em p e será denotado por $\nu_p(L)$.

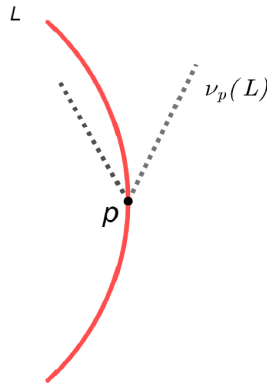


Figura 1.3: Cone ortogonal.

Observação 1.7.1. Em geral, o cone ortogonal não é um subespaço vetorial. Por exemplo não necessariamente é verdade que $g_{-v} = g_v$. Ademais por definição 0 não pertence a $\nu_p(L)$. Porém como $g_{\lambda v} = g_v$ para qualquer $\lambda > 0$, $\nu_p(L)$ tem uma estrutura de cone, ou seja, se $v \in \nu_p(L)$ e $\lambda > 0$, então $\lambda v \in \nu_p(L)$. Por isso chamá-lo-emos de cone ortogonal.

O lema seguinte é útil, pois nos permite encontrar, para um vetor v não nulo, o cone ν_v usando a métrica Riemanniana h . A demonstração é imediata e segue da equação em (1.19).

Lema 1.7.1. *Com a data de Zermelo (h, W) nós temos que para quaisquer vetores não nulos $u, v \in T_p M$, $g_v(v, u) = 0 \iff h(u, \frac{v}{F(v)} - W) = 0$.*

Em outras palavras, v está no cone se, e somente se, $\frac{v}{F(v)} - W$ está no subespaço ortogonal com respeito a h . Ver figura 1.4.

Lema 1.7.2. *Seja (M, F) uma variedade Finsleriana. Se $v \in \Sigma_p^F(r)$, então todo $w \in T_v \Sigma_p^F(r)$ satisfaz $g_v(v, w) = 0$, ou seja, $v \in \nu_v(\Sigma_p^F(r))$.*

Demonstração. De fato, dada uma curva suave $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma_p^F(r)$ com $\gamma(0) = v$, temos que $F(\gamma(t)) = r$. Logo,

$$0 = \frac{d}{ds} F^2(\gamma(s))|_{s=0} = dF_v^2(\gamma'(0)) = \frac{d}{dt} F^2(v + t\gamma'(0)) = g_v(v, \gamma'(0)),$$

e isso mostra, pela generalidade da curva $\gamma \subset \Sigma_p^F(r)$, que v está no cone ortogonal à $\Sigma_p^F(r)$ em v . \square

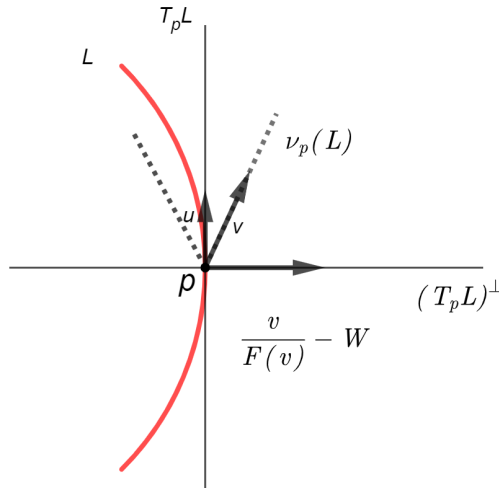


Figura 1.4: $v \in \nu_p(L) \iff \frac{v}{F(v)} - W \in (T_p L)^\perp$.

Lema 1.7.3. *Assuma que (M, F) é uma variedade Finsler de dimensão n . Dada uma subvariedade k -dimensional L de (M, F) , para todo $p \in L$,*

1. $\nu_p(L)$ é uma subvariedade de $T_p M$ de dimensão $n - k$ e, em particular, $\nu(L) := \cup_{p \in L} \nu_p(L)$ é uma subvariedade de TM de dimensão n ,

2. Se $\nu_p^1(L) = \nu_p(L) \cap \Sigma_p^F$, então $\nu_p^1(L)$ é uma subvariedade de $\nu_p(L)$ de dimensão $n - k - 1$ e, em particular, $\nu^1(L) := \cup_{p \in L} \nu_p^1(L)$ é uma subvariedade de dimensão $n - 1$.

Demonstração. Seja $p \in L$. Vamos primeiro provar que $\nu_p(L)$ é uma subvariedade de dimensão $n - k$ de T_pM . Considere uma base $\{u_1, \dots, u_k\}$ de T_pL e defina a aplicação

$$\begin{aligned} \lambda : T_pM \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ v &\mapsto (g_v(v, u_1), \dots, g_v(v, u_k)). \end{aligned}$$

Observe que λ é suave e $\lambda^{-1}(0) = \nu_p(L)$. Vamos mostrar que 0 é um valor regular de λ . Isso é suficiente para mostrar que $d\lambda_v : T_v(T_pM \setminus 0) \rightarrow \mathbb{R}^k$ é sobrejetiva para todo $v \in \nu_p(L)$. Dado $v \in \nu_p(L)$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, temos

$$\begin{aligned} d\lambda_v(u_i) &= \left. \frac{d}{dt} \lambda(v + tu_i) \right|_{t=0} \\ &= \left(\left. \frac{d}{dt} g_{v+tu_i}(v + tu_i, u_1) \right|_{t=0}, \dots, \left. \frac{d}{dt} g_{v+tu_i}(v + tu_i, u_k) \right|_{t=0} \right) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{d}{ds} F^2(v + tu_i + su_1), \dots, \frac{1}{2} \frac{d}{ds} F^2(v + tu_i + su_k) \right) \right|_{s=t=0} \\ &= (g_v(u_i, u_1), \dots, g_v(u_i, u_k)). \end{aligned}$$

Considere o conjunto $\{d\lambda_v(u_1), \dots, d\lambda_v(u_k)\}$. Agora, como os vetores $\{u_1, \dots, u_k\}$ são linearmente independentes, o determinante de Gram

$$G(u_1, \dots, u_k) = \left| \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle & \cdots & \langle u_1, u_k \rangle \\ \langle u_2, u_1 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle & \cdots & \langle u_2, u_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_k, u_1 \rangle & \langle u_k, u_2 \rangle & \cdots & \langle u_k, u_k \rangle \end{pmatrix} \right|,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle = g_v(\cdot, \cdot)$ é não nulo. Isso significa que $\{d\lambda_v(u_1), \dots, d\lambda_v(u_k)\}$ é um conjunto linearmente independente em \mathbb{R}^k e, portanto, uma base dele. Em particular, isso implica que $d\lambda_v$ é sobrejetiva. Assim, de acordo com o Teorema da Função Implícita, $\nu_p(L)$ é uma subvariedade mergulhada de dimensão $n - k$. Agora, como $\nu(L)$ pode ser visto localmente como um produto de $L \times \nu_p(L)$, é uma subvariedade de dimensão $(n - k) + k = n$. Vamos mostrar que $C_p^1(L)$ é uma subvariedade. Defina

$$\begin{aligned} \beta : \nu_p(L) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto F(v). \end{aligned}$$

Então $\beta^{-1}(1) = \nu_p^1(L)$. De acordo com o Teorema da Função Implícita, isso é suficiente para mostrar que 1 é um valor regular de β . Ou seja, $d\beta_v : T_v(C_p(L)) \rightarrow \mathbb{R}$, para todo

$v \in \nu_p^1(L)$, é sobrejetiva. Note que

$$d\beta_v(v) = \left. \frac{d}{dt} \beta(v + tv) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} F(v + tv) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (1+t)F(v) \right|_{t=0} = F(v) = 1.$$

Portanto, $d\beta_v$ é sobrejetiva e, conseqüentemente, $\nu_p^1(L)$ é uma subvariedade mergulhada de $\nu_p(L)$ de dimensão $n - k - 1$. Como $\nu^1(L)$ pode ser visto localmente como um produto de $L \times \nu_p^1(L)$, é uma subvariedade de dimensão $(n - k - 1) + k = n - 1$. \square

Lema 1.7.4. *Dada uma subvariedade $L \subset M$, sejam $\nu_p(L)$ e $\tilde{\nu}_p(L)$ os cones ortogonais de F e $\tilde{F} := F(-v)$, com $0 \neq v \in T_p M$. Então $v \in \nu_p(L) \Leftrightarrow -v \in \tilde{\nu}_p(L)$.*

Demonstração. É imediato da definição de tensor fundamental que $\tilde{g}_v = g_{-v}$, onde \tilde{g} e g são os tensores fundamentais da métrica \tilde{F} e F , respectivamente. Assim:

$$v \in \nu_p(L) \Leftrightarrow g_v(v, u) = 0 \Leftrightarrow \tilde{g}_{-v}(-v, u) = 0 \Leftrightarrow -v \in \tilde{\nu}_p(L).$$

\square

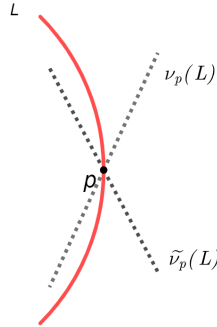


Figura 1.5: Os cones de F e \tilde{F} .

1.8 Campo gradiente

Considere uma função suave f sobre uma variedade Finsleriana (M, F) e $U = U_f = \{p \in M : df_p \neq 0\}$ o conjunto dos valores regulares de f . O F -gradiente de f , denotado por ∇f , é o campo vetorial definido no aberto U por

$$g_{\nabla f}(\nabla f, \cdot) = df(\cdot),$$

ou, equivalentemente, $\nabla f = \ell^{-1}(df)$. Estendemos ∇f para M definindo $\nabla f(q) = 0$, se $q \notin U_f$. O gradiente é suave em U_f e contínuo em $M \setminus U_f$. Quando não houver risco de confusão diremos apenas que ∇f é o gradiente de f .

Observação 1.8.1. *Em uma variedade Riemanniana, o operador gradiente, que associa a cada função suave um campo vetorial, é um operador linear, ou seja, se $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves e $a, b \in \mathbb{R}$, então $\nabla(af + bg) = a\nabla f + b\nabla g$. Entretanto o operador F -gradiente de uma métrica Finsler em geral não é linear.*

Lema 1.8.1. *O gradiente de uma função suave em uma variedade Finsler está no cone ortogonal aos conjuntos de níveis regulares, ou seja, $\nabla f(p) \in \nu_p(f^{-1}(c))$, para todo $p \in f^{-1}(c)$ e c valor regular de f . Além disso, a função cresce na direção do gradiente e é a direção de maior crescimento.*

Demonstração. A demonstração é completamente análoga ao caso Riemanniano. De fato, sejam $p \in f^{-1}(c)$ e $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow f^{-1}(c)$ curva suave tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v \in T_p(f^{-1}(c))$. Então, temos:

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f \circ \gamma(t) = df_p(\gamma'(0)) = g_{\nabla f}(\nabla f, \gamma'(0)),$$

implicando que o gradiente é ortogonal a $f^{-1}(c)$, pela generalidade da curva.

Resta agora mostrar que f cresce na direção do gradiente, e isso pode ser feito considerando γ curva integral de ∇f e observar que $\frac{d}{dt} f \circ \gamma(t) = F^2(\nabla f(\gamma(t))) > 0$. Por fim, pelo Lema 1.1.8 verificamos que o gradiente é a direção que mais cresce. □

Lema 1.8.2. *Dado uma variedade Finsler (M, F) , para todo $0 \neq v \in T_p M$,*

$$\nabla F(v) = \frac{v}{F(v)}.$$

Ou seja, o gradiente é um vetor unitário que está na direção do vetor posição.

Demonstração. Para todo $u \in T_p M$, temos que

$$\begin{aligned} g_{\frac{v}{F(v)}}\left(\frac{v}{F(v)}, u\right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} F^2\left(\frac{v}{F(v)} + su\right)\Big|_{s=0} = F\left(\frac{v}{F(v)}\right) \cdot dF(u) = \frac{F(v)}{F(v)} \cdot dF(u) \\ &= g_{\nabla F}(\nabla F, u). \end{aligned}$$

Aqui usamos a definição do gradiente de F e o fato F ser positiva-homogênea. Por meio do Lema 1.1.9, concluímos que

$$\nabla F(v) = \frac{v}{F(v)}.$$

□

Lema 1.8.3. *Sejam f função suave em M e ∇f seu F -gradiente. Defina em U_f a métrica Riemanniana $\tilde{g} = g_{\nabla f}$. Então*

$$\nabla f = \tilde{\nabla} f, \tag{1.20}$$

onde $\tilde{\nabla}f$ é o \tilde{g} -gradiente de f . Além disso,

$$F(\nabla f) = \|\tilde{\nabla}f\|, \quad (1.21)$$

onde $\|\cdot\| = \sqrt{\tilde{g}}$.

Demonstração. Dado $v \in T_pM$, por definição

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}f, v) = df(v) = g_{\nabla f}(\nabla f, v) = \tilde{g}(\nabla f, v),$$

portanto $\nabla f = \tilde{\nabla}f$. Para verificar a segunda equação basta considerar $v = \nabla f$. \square

Proposição 1.8.1. *Sejam $f : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave sem pontos críticos em U , Z uma métrica de Zermelo (generalizada) com data (F, W) e ∇f e $\tilde{\nabla}f$ os gradientes com respeito a Z e F . Então*

$$(a) \quad \frac{\nabla f}{Z(\nabla f)} - W = \frac{\tilde{\nabla}f}{F(\tilde{\nabla}f)}$$

$$(b) \quad Z(\nabla f) = F(\tilde{\nabla}f) + df(W).$$

Demonstração. Por definição, dado $u \in T_pM$, temos $g_{\nabla f}(\nabla f, u) = df(u) = g_{\tilde{\nabla}f}(\tilde{\nabla}f, u)$. Da equação (1.13), segue que:

$$g_{\nabla f}^Z(\nabla f, u) = g_{\tilde{\nabla}f}^F(\tilde{\nabla}f, u) = \lambda g_{\nabla f - Z(v)W}^F(\nabla f - Z(v)W, u) = g_{\lambda(\nabla f - Z(v)W)}^F(\lambda(\nabla f - Z(v)W), u),$$

uma vez que $\lambda > 0$. Assim,

$$\tilde{\nabla}f = \lambda(\nabla f - Z(\nabla f)W). \quad (1.22)$$

Aplicando F de ambos os lados, temos:

$$F(\tilde{\nabla}f) = \lambda Z(\nabla f).$$

Assim $\lambda = \frac{F(\tilde{\nabla}f)}{Z(\nabla f)}$, e a conclusão do item (a) segue da equação (1.22). Além disso, como $\lambda = 1 - \frac{g_{\nabla f}^Z(\nabla f, W)}{Z(\nabla f)}$, segue que

$$F(\tilde{\nabla}f) = \lambda Z(\nabla f) = Z(\nabla f) - g_{\nabla f}^Z(\nabla f, W) = Z(\nabla f) - df(W) \implies Z(\nabla f) = F(\tilde{\nabla}f) + df(W).$$

\square

Exemplo 1.8.1. *Considere a função $f(p) = \|p\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Seu gradiente com respeito à norma Euclidiana é*

$$\nabla f_p = \frac{p}{\|p\|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y).$$

Em particular, $\|\nabla f\| = 1$. No que se segue, usaremos o lema anterior para calcular o gradiente da função f em duas normas de Zermelo. Seja Z norma de Zermelo com data de navegação \langle, \rangle , $W(x, y) = (-y, x)$. Logo, pelo segundo item do lema acima,

$$Z(\nabla^Z f) = \|\nabla f\| + df(W) = \|\nabla f\| = 1,$$

pois $df(W) = 0$, e, conseqüentemente,

$$\nabla^Z f_p = \left(\frac{p}{\|p\|} + (-y, x) \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(x - y\sqrt{x^2 + y^2}, y + x\sqrt{x^2 + y^2} \right),$$

pelo primeiro item do lema acima. Agora suponha que $W = (0, \frac{1}{2})$, então,

$$Z(\nabla^Z f_p) = 1 + df(W) = 1 + \frac{y}{2\|p\|}$$

e, conseqüentemente,

$$\nabla^Z f_p = \frac{2\|p\|}{2\|p\| + y} \left(\frac{p}{\|p\|} + (0, \frac{1}{2}) \right) = \frac{2}{2\sqrt{x^2 + y^2} + y} \left(x, y + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} \right).$$

Proposição 1.8.2. *Seja $Z = h_W$ métrica Randers sobre M . Dada função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, denote por $\tilde{\nabla} f$ e ∇f respectivamente o h -gradiente e Z -gradiente de f . Logo*

$$\tilde{\nabla} f = \frac{Z(\nabla f)}{\lambda Z(\nabla f) + h(\nabla f, W)} (\nabla f - Z(\nabla f)W) \quad e \quad (1.23)$$

$$\nabla f = (1 + h(\frac{\tilde{\nabla} f}{\|\tilde{\nabla} f\|}, W)) (\tilde{\nabla} f + \|\tilde{\nabla} f\|W), \quad (1.24)$$

onde $\lambda = 1 - h(W, W)$ e $\|\cdot\| = \sqrt{h}$.

Demonstração. Pelo Lema 1.6.2 e pela hipótese de que ∇f é o Z -gradiente de f

$$\frac{Z(\nabla f)}{\lambda \alpha(\nabla f)} h(\nabla f - Z(\nabla f)W, v) = g_{\nabla f}(\nabla f, v) = df(v) = h(\tilde{\nabla} f, v), \quad (1.25)$$

implicando a primeira equação da proposição, pois $\lambda \alpha(\cdot) = \lambda Z(\cdot) + h(\cdot, W)$.

Provemos a segunda equação da proposição. Denote por $\tilde{v} = (\tilde{\nabla} f + \|\tilde{\nabla} f\|W)$ e observe que $Z(\tilde{v}) = \|\tilde{\nabla} f\|$. Agora note que

$$k := \frac{\lambda \|\tilde{\nabla} f\| + h(\tilde{v}, W)}{\|\tilde{\nabla} f\|} = 1 + h(\frac{\tilde{\nabla} f}{\|\tilde{\nabla} f\|}, W) = \frac{\lambda \alpha(\tilde{v})}{Z(\tilde{v})} > 0.$$

Logo, usando o Lema 1.6.2 e o fato de que $\tilde{\nabla} f$ é o h -gradiente de f , temos que

$$\begin{aligned} g_{k\tilde{v}}(k\tilde{v}, u) &= k g_{\tilde{v}}(\tilde{v}, u) = k \frac{Z(\tilde{v})}{\lambda \alpha(\tilde{v})} h(\tilde{v} - Z(\tilde{v})W, u) \\ &= h(\tilde{\nabla} f, u) = df(u) = g_{\nabla f}(\nabla f, u). \end{aligned}$$

para qualquer $u \in TM$. Logo, o resultado segue. \square

1.9 Conexão de Chern

Seja (M, F) uma variedade Finsleriana n -dimensional. Ao contrário do caso Riemanniano, não existe uma única conexão canonicamente associada ao tensor fundamental, mas uma família de conexões, denominada conexão de Chern. Ele propôs uma conexão livre de torção e quase-compatível com a métrica. Muitas outras conexões foram utilizadas para o estudo de variedades Finslerianas, por exemplo, a conexão de Cartan, Berwald, Hashiguchi, entre outras [19]. Trabalharemos nessa dissertação apenas com a conexão de Chern.

Definição 1.9.1. *Sejam (M, F) uma variedade Finsler $U \subset M$ aberto e $V \in \Gamma(TU)$ campo suave sem singularidades. Considere uma conexão linear ∇^V em TU . Nós dizemos que*

1. ∇^V é livre de torção se $[X, Y] = \nabla_X^V Y - \nabla_Y^V X$,
2. ∇^V é quase-compatível com a métrica se $Xg_V(Y, Z) = g_V(\nabla_X^V Y, Z) + g_V(Y, \nabla_X^V Z) + 2C_V(\nabla_X^V V, Y, Z)$ para todos $X, Y, Z \in \Gamma(TU)$.

O teorema abaixo garante a existência de uma família de conexões livre de torção e quase-compatível com a métrica. A saber:

Teorema 1.9.1 (Conexão de Chern). *Dado $V \in \Gamma(TU)$ sem singularidades, onde $U \subset M$ aberto. Em uma variedade Finsler (M, F) existe uma única conexão ∇^V , livre de torção e quase-compatível com a métrica, que é determinada por uma fórmula tipo Koszul-Finsler*

$$\begin{aligned} 2g_V(\nabla_X^V Y, Z) &= Xg_V(Y, Z) - Zg_V(X, Y) + Yg_V(Z, X) \\ &+ g_V([X, Y], Z) + g_V([Z, X], Y) - g_V([Y, Z], X) \\ &+ 2(-C_V(\nabla_X^V V, Y, Z) - C_V(\nabla_Y^V V, Z, X) + C_V(\nabla_Z^V V, X, Y)). \end{aligned}$$

Demonstração. A estratégia da prova é análoga ao caso Riemanniano. Supõe-se a existência da conexão ∇^V desejada e obtém-se uma fórmula implícita que não depende de ∇^V , implicando a unicidade e a existência. Para isso primeiro verificaremos que ∇^V satisfaz a fórmula tipo Koszul do enunciado do Teorema.

Suponha que exista uma conexão ∇ livre de torção e quase-compatível com a métrica. Pela quase compatibilidade segue que

$$Xg_V(Y, Z) = g_V(\nabla_X^V Y, Z) + g_V(Y, \nabla_X^V Z) + 2C_V(\nabla_X^V V, Y, Z), \quad (1.26)$$

$$Yg_V(Z, X) = g_V(\nabla_Y^V Z, X) + g_V(Z, \nabla_Y^V X) + 2C_V(\nabla_Y^V V, Z, X), \quad (1.27)$$

$$Zg_V(X, Y) = g_V(\nabla_Z^V X, Y) + g_V(X, \nabla_Z^V Y) + 2C_V(\nabla_Z^V V, X, Y). \quad (1.28)$$

Somando (1.26) e (1.27) e subtraindo (1.28), usando a bilinearidade de g_V e que ∇^V é livre de torção, obtemos:

$$\begin{aligned} Xg_V(Y, Z) + Yg_V(X, Z) - Zg_V(X, Y) &= g_V([X, Z], Y) + g_V([Y, Z], X) + g_V(\nabla_X^V Y, Z) \\ + g_V(\nabla_Y^V X, Z) + 2C_V(\nabla_X^V V, Y, Z) + 2C_V(\nabla_Y^V V, X, Z) - 2C_V(\nabla_Z^V V, X, Y). \end{aligned}$$

Note que

$$g_V(\nabla_Y^V X, Z) = g_V(\nabla_X^V Y - [X, Y], Z) = g_V(\nabla_X^V Y, Z) - g([X, Y], Z).$$

Daí, temos a seguinte fórmula tipo Koszul-Finsler:

$$\begin{aligned} 2g_V(\nabla_X^V Y, Z) &= Xg_V(Y, Z) + Yg_V(X, Z) - Zg_V(X, Y) + g_V([X, Y], Z) + g_V([Z, X], Y) \\ - g_V([Y, Z], X) + 2C_V(\nabla_Z^V V, X, Y) - 2C_V(\nabla_X^V V, Z, X) - 2C_V(\nabla_Y^V V, X, Z). \end{aligned}$$

Porém ao contrário do caso Riemanniano esta fórmula não determina a conexão, pois aparece o termo $\nabla^V V$. No que se segue escreveremos $g_V(\nabla_X^V Y, Z)$ sem a dependência de ∇^V . Aplicando a fórmula tipo Koszul a $\nabla^V V$, temos que

$$\begin{aligned} 2g_V(\nabla_X^V V, Z) &= Xg_V(V, Z) - Zg_V(X, V) + Vg_V(Z, X) \\ &+ g_V([X, V], Z) + g_V([Z, X], V) - g_V([V, Z], X) \\ &- 2C_V(\nabla_V^V V, Z, X), \end{aligned}$$

escrevemos $\nabla^V V$ com uma fórmula que depende de $\nabla_V^V V$. Em seguida, aplique última fórmula a $\nabla_V^V V$:

$$2g_V(\nabla_V^V V, Z) = 2Vg_V(V, Z) - Zg_V(V, V) + g_V([Z, V], V) - g_V([V, Z], V).$$

Assim juntando a fórmula de Koszul com as duas fórmulas anteriores é possível escrever uma fórmula para $2g_V(\nabla_X^V Y, Z)$ que não depende de ∇^V , implicando a unicidade e existência de ∇^V . □

A família de conexões dada pelo Teorema acima é chamada de **conexão de Chern**. Verifica-se que $\nabla^{\lambda V} = \nabla^V$ para qualquer $\lambda > 0$ e que $(\nabla_X^V Y)_p$ depende apenas de $X(p)$, de $v = V(p)$ e do valor de Y em uma vizinhança de p para qualquer $p \in U$. Com efeito, se (x_i) é um sistema de coordenadas em U aberto de M , e assim escrevendo $X = \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = \sum_i y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, segue então

$$\nabla_X^V Y = \sum_k (X(y_k) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(V) x_i y_j) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

onde $\Gamma_{ij}^k : TU \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves, chamadas de *Símbolos de Christoffel*, definidas por

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}^V \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(V) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

para quaisquer $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$. Ao contrário do caso Riemanniano os símbolos de Christoffel não são funções em U e sim em $TU \setminus 0$.

Definição 1.9.2. Um **campo** suave V sem singularidades definido em um aberto M é **geodésico** quando $\nabla_V^V V = 0$.

Lema 1.9.1. Seja (M, F) uma variedade Finsleriana. Se V é um campo geodésico definido em um aberto U de M , então

$$\tilde{\nabla}_V = \nabla_V^V,$$

onde ∇^V é a conexão de Chern e $\tilde{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita da métrica Riemanniana $\tilde{g} = g_V$.

Demonstração. Pela fórmula do tipo Koszul-Finsler, usando o fato de que V é campo geodésico, e propriedades do tensor de Cartan, temos:

$$\begin{aligned} 2g_V(\nabla_X^V Y, V) &= Xg_V(Y, V) - Vg_V(X, Y) + Yg_V(V, X) \\ &+ g_V([X, Y], V) + g_V([V, X], Y) - g_V([Y, V], X) \\ &+ 2(-C_V(\nabla_X^V V, Y, V) - C_V(\nabla_Y^V V, V, X) + C_V(\nabla_V^V V, X, Y)) \\ &= Xg_V(Y, V) - Vg_V(X, Y) + Yg_V(V, X) \\ &+ g_V([X, Y], V) + g_V([V, X], Y) - g_V([Y, V], X) = 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, V), \end{aligned}$$

para quaisquer campos suaves X e Y definidos em $\Gamma(TU)$, onde usamos a fórmula de Koszul Riemanniana na última igualdade. □

Lema 1.9.2. Sejam F métrica Finsler, \tilde{F} sua métrica reversa, ou seja, $\tilde{F}(v) = F(-v)$, e ∇ e $\tilde{\nabla}$ as respectivas conexões de Chern. Então

$$\tilde{\nabla}^V = \nabla^{-V},$$

para qualquer $V \in \Gamma(TU)$.

Demonstração. Pela unicidade da conexão de Chern, é suficiente mostrar que ∇^{-V} é livre de torção e quase-compatível com a métrica. É imediato verificar que $\tilde{g}_V = g_{-V}$ e $\tilde{C}_V = -C_{-V}$, onde \tilde{g} e \tilde{C} são o tensor fundamental e de Cartan da métrica reversa. Como ∇^V é livre de torção, em particular, para $-V$, temos:

$$\nabla_X^{-V} Y - \nabla_Y^{-V} X = [X, Y],$$

isto significa que ∇^{-V} é livre de torção. Ademais,

$$\begin{aligned} X(\tilde{g}_V(Y, Z)) &= X(g_{-V}(Y, Z)) = g_{-V}(\nabla_X^{-V}Y, Z) + g_{-V}(Y, \nabla_X^{-V}Z) + 2C_{-V}(\nabla_X^{-V}(-V), Y, Z) \\ &= \tilde{g}_V(\nabla_X^{-V}Y, Z) + \tilde{g}_V(Y, \nabla_X^{-V}Z) + 2\tilde{C}_V(\nabla_X^{-V}V, Y, Z). \end{aligned}$$

Portanto, ∇^{-V} é a conexão de Chern de \tilde{F} . \square

1.10 Derivada covariante

Dada uma curva suave $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ denotamos por γ^*TM o fibrado pull-back, ou seja, o fibrado cujo o espaço total é o conjunto $\gamma^*TM := \cup_{t \in [a, b]} T_{\gamma(t)}M$, a base é o traço da curva $\gamma[a, b]$ e a projeção é a restrição da projeção canônica a γ^*TM . O conjunto $\Gamma(\gamma^*TM)$ denota as seções do fibrado pull-back, ou seja, o conjuntos das aplicação suaves $X : [a, b] \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ X = \gamma$.

Proposição 1.10.1. *Sejam (M, F) variedade Finsler, $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ curva suave e $V \in \Gamma(\gamma^*TM)$ campo suave sem singularidades. Então, existe uma única aplicação*

$$\begin{aligned} D_\gamma^V : \Gamma(\gamma^*TM) &\rightarrow \Gamma(\gamma^*TM) \\ X &\mapsto D_\gamma^V X \end{aligned}$$

tal que

1. $D_\gamma^V(cX + dY) = cD_\gamma^V(X) + dD_\gamma^V(Y)$, para quaisquer $c, d \in \mathbb{R}$ e $X, Y \in \Gamma(\gamma^*TM)$;
2. $D_\gamma^V(fX)(t_0) = f'(t_0)X(t_0) + f(t_0)D_\gamma^V X(t_0)$, onde $f \in C^\infty([a, b])$, $X \in \Gamma(\gamma^*TM)$, $t_0 \in [a, b]$ e $V \in T_{\gamma(t_0)}M \setminus 0$; e
3. se $\tilde{X} \in \Gamma(TM)$ e $X(t) = \tilde{X}(\gamma(t))$, então $D_\gamma^V X = \nabla_{\gamma'}^V X$.

Tal aplicação é denominada **derivada covariante** de X ao longo de γ , tendo V como vetor de referência.

Demonstração. Dado $v \in T_{\gamma(t_0)}M \setminus 0$ considere um campo vetorial V sem singularidades tal que $V(\gamma(t_0)) = v$. Considere $\{E_i\}$ um referencial local associado a uma carta em torno de $\gamma(t_0)$. Dado $X \in \Gamma(\gamma^*TM)$, escreva $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ e $X = \sum x_i E_i \circ \gamma$. Logo se existir a derivada covariante D , temos que pelas propriedades desejadas

$$D_\gamma^V X = \sum_k \left(x'_k(t_0) + \sum_{ij} x_i(t_0) \gamma'_j(t_0) \Gamma_{ij}^k(V(t_0)) \right) E_k \circ \gamma, \quad (1.29)$$

onde Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel de ∇ . Essa fórmula determina unicamente a derivada covariante, bem como a define, implicando a existência e unicidade. \square

Lema 1.10.1. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é uma curva suave $\lambda > 0$ e $v \in T_{\gamma(t_0)}M \setminus 0$, então $D_\gamma^{\lambda v} = D_\gamma^v$.

Demonstração. Como os símbolos de Christoffel são positivos 0-homogêneos ($\Gamma_{ij}^k(\lambda v) = \Gamma_{ij}^k(v)$ para $\lambda > 0$) o resultado segue da equação (1.29). \square

Se $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é uma curva suave, os campos γ' e $D_\gamma^{\gamma'}\gamma'$ são respectivamente o campo velocidade e o campo aceleração. E as quantidades $F(\gamma')$ e $F(D_\gamma^{\gamma'}\gamma')$ são respectivamente a velocidade e a aceleração.

Lema 1.10.2. Sejam $H : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ uma aplicação suave a dois parâmetros e V um campo vetorial suave ao longo $H(D)$ sem singularidades. Defina as seguintes curvas: $t \mapsto \gamma_s(t) := H(t, s)$ e $s \mapsto \beta_t(s) := H(t, s)$. Então

$$(D_{\gamma_{s_0}}^V \beta'_t)(s_0) = (D_{\beta_{t_0}}^V \gamma'_s)(s_0). \quad (1.30)$$

Demonstração. Em coordenadas em torno de um ponto $H(t_0, s_0)$ escreva a aplicação H como $H(t, s) = (H_1(t, s), \dots, H_n(t, s))$. Logo pelo equação (1.29), o Teorema de Schwarz e a simetria dos símbolos de Christoffel, temos que

$$\begin{aligned} D_{\gamma_{s_0}}^V \beta'_t &= \sum_k \left(\frac{\partial^2 H_k}{\partial t \partial s} + \sum_{ij} \frac{\partial H_i}{\partial s} \frac{\partial H_j}{\partial t} \Gamma_{ij}^k(V) \right) E_k \circ \gamma \\ &= \sum_k \left(\frac{\partial^2 H_k}{\partial s \partial t} + \sum_{ij} \frac{\partial H_i}{\partial t} \frac{\partial H_j}{\partial s} \Gamma_{ij}^k(v) \right) E_k \circ \gamma = D_{\beta_{t_0}}^V \gamma'_s. \end{aligned}$$

\square

Definição 1.10.1. Um campo X ao longo de uma curva regular $\gamma : [a, b] \rightarrow (M, F)$ é dito **paralelo** quando $D_\gamma^{\gamma'} X = 0$.

Dado $v \in T_{\gamma(a)}M \setminus 0$ existe um único campo paralelo $X = X_v$ ao longo de γ tal que $X(a) = v$, pois localmente a equação $D_\gamma^{\gamma'} X = 0$ é equivalente a um sistema de equações diferenciais ordinária de primeira ordem com valor inicial, implicando a existência e unicidade localmente. Cobrindo a curva por vizinhanças coordenadas e usando a unicidade da solução para garantir que na interseção das vizinhanças coordenadas o campo está bem definido, obtemos um campo paralelo X tal que $X(a) = v$.

Uma *geodésica* é uma curva cujo campo vetorial velocidade γ' é paralelo ao longo de γ . Dado $v \in TM$ existe uma única geodésica γ tal que $\gamma'(0) = v$. Em seções futuras, voltaremos nosso olhar a esse objeto que desempenha um papel importante na geometria diferencial.

1.11 Geometria Lorentz-Finsler

Nesta breve seção, veremos algumas ferramentas essenciais no que concerne ao espaço-tempo Finsleriano.

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e g uma aplicação bilinear em V . Dizemos que g é **não-degenerada** quando $g(u, v) = 0$ para qualquer $v \in V$ se, e somente se, $u = 0$. Do contrário, dizemos que g é **degenerada**. Um produto escalar em M é uma aplicação bilinear simétrica não degenerada em V .

Dizemos que g é **positivamente definida** se $g(u, u) \geq 0$ para qualquer u , valendo a igualdade se, e somente se, $u = 0$. Analogamente definimos *negativamente definida*.

O **índice** de um produto escalar g é a quantidade

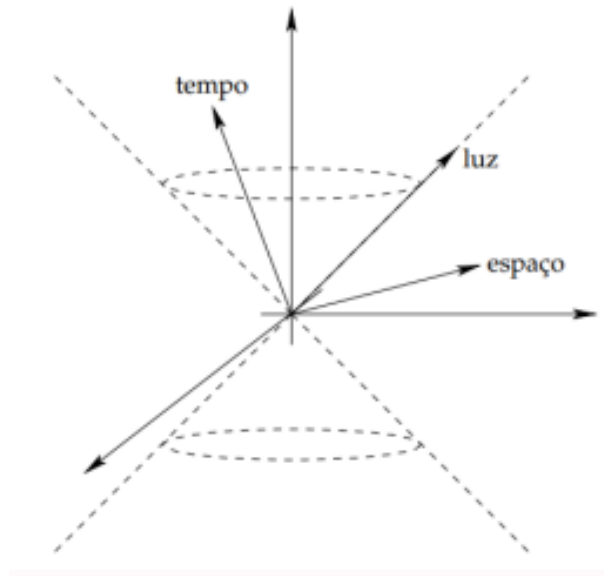
$$ind(g) = \max_W \{\dim W; g_{W \times W} \text{ é negativamente definida}\},$$

onde o max é tomado sobre todos os subespaços vetoriais W de V cuja restrição de g a W é negativamente definida.

Seja (V, g) um espaço com produto escalar. Um vetor v não nulo em (V, g) é

- **tipo-espaço** se $g(v, v) > 0$,
- **tipo-tempo** se $g(v, v) < 0$,
- **causal** se $g(v, v) \leq 0$,
- **tipo-luz** se $g(v, v) = 0$.

O vetor nulo por convenção é tipo-espaço.



Seja W um subespaço vetorial de V . Dizemos que W é tipo-espaço se a restrição de g a W é positivamente definida; W é tipo-tempo se a restrição de g a W é negativamente definida; e W é tipo-luz se a restrição de g a W é degenerada.

Uma **variedade Lorentziana** é um par (M, g) , onde M é uma variedade suave e g é uma métrica Lorentziana tal que g atribui a cada ponto $p \in M$ uma forma bilinear simétrica não degenerada g_p de índice 1 em T_pM . Em cada ponto $p \in M$, o cone causal é o subconjunto de vetores causais em T_pM , que possui exatamente duas componentes conexas. Uma **orientação temporal** é uma escolha suave de um cone causal em cada ponto, que será chamado de **cone causal futuro** – em oposição ao cone não escolhido ou cone causal passado. Um **espaço-tempo** é uma variedade Lorentziana (M, g) suave conexa dotada de uma orientação temporal. Esta última pode ser determinada por um campo vetorial temporal T que define a **orientação futura** e, assim, um vetor causal $v \in TM$ é apontando para o futuro (resp. apontando para o passado) se $g(v, T) < 0$ (resp. $g(v, T) > 0$). Os espaços-tempos são usados na Relatividade Geral como modelos de (regiões do) Universo. Os pontos de M também são chamados de eventos (eles representam todos os possíveis “aqui-agora”) e partículas massivas (resp. sem massa) são descritas por curvas temporais apontando para o futuro (resp. luz). Para mais detalhes da Geometria de Lorentz, recomendamos inicialmente [13], que traz paralelos da teoria de curvas e superfícies com a geometria de Lorentz. Para um maior aprofundamento ler [8]. Dada a discussão acima, dizemos que o par (M, L) é um **espaço-tempo Lorentz-Finsler** quando L é uma métrica de Lorentz-Finsler de índice $n - 1$ (Ver Definição 1.11.6).

No contexto dos espaços vetoriais definimos cone como segue abaixo. Essa definição, quando transportada para as variedades gera o que chamamos de estrutura cônica.

Definição 1.11.1. *Uma hipersuperfície suave C_0 mergulhada em $V \setminus \{0\}$ é um **cone** se satisfizer as seguintes propriedades:*

1. *Cônica: para todo $v \in C_0$, $\{\lambda v : \lambda > 0\} \subset C_0$.*
2. *Saliente: se $v \in C_0$, então $-v \notin C_0$.*
3. *Interior convexo: C_0 é a fronteira em $V \setminus 0$ de um subconjunto aberto $A_0 \subset V \setminus 0$ (o interior de C_0) que é convexo, no sentido de que, para quaisquer $v, u \in A_0$, o segmento $\{\lambda v + (1 - \lambda)u : 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset V$ está inteiramente incluído em A_0 .*

Definição 1.11.2. *Uma **estrutura cônica** C é uma hipersuperfície mergulhada de TM tal que, para cada $p \in M$:*

1. *C é transversal às fibras do fibrado tangente, ou seja, se $v \in C_p := T_pM \cap C$, então $T_v(T_pM) + T_{(p,v)}C = T_{(p,v)}(TM)$, e*

2. C_p é um cone em T_pM .

Denotamos por A_p o interior de C_p , e $A := \bigcup_{p \in M} A_p$.

Observe que mesmo que C seja suave, a condição de transversalidade (1) é necessária para garantir que as fibras C_p variem suavemente com $p \in M$. Uma estrutura cônica fornece algumas classes de vetores privilegiados, que podem ser usados para definir as noções usuais sobre causalidade. A saber:

Definição 1.11.3. Dada uma estrutura cônica C em M , dizemos que um vetor $v \in T_pM$ é

- **temporal ou tipo-tempo** se v ou $-v$ pertence a A_p ,
- **tipo-luz ou luminoso** se v ou $-v$ pertence a C_p ,
- **causal** se é temporal ou luminoso, ou seja, se v ou $-v$ pertence a $\overline{A_p} \setminus 0$,
- **espacial** se não é causal.

Além disso, um vetor causal é futuro-dirigido se $v \in \overline{A_p} \setminus 0$ e passado-dirigido se $-v \in \overline{A_p} \setminus 0$.

Analogamente, dizemos que uma curva suave por partes $\gamma : I \rightarrow M$ é futuro-dirigida (passado-dirigida) tipo-tempo, tipo-luz ou causal se seu vetor tangente $\gamma'(t)$ (ou tanto $\gamma'(t_0^+)$ quanto $\gamma'(t_0^-)$ em qualquer ponto de quebra $t_0 \in I$) é tipo-tempo, tipo-luz ou causal futuro-dirigido (passado-dirigido).

Ou seja, o tipo causal de uma curva é definido a partir da causalidade dos seus vetores velocidades. Fisicamente, curvas do tipo-tempo representam linhas no universo de partículas com massa positiva. Curvas tipo-luz representam trajetórias de partículas sem massa, como fótons, neutrinos e grávitons [33]. Por fim, as curvas do tipo-espaço não têm significado físico explícito, já que nada viaja mais rápido que a luz.

Além disso, dizemos que dois pontos, ou eventos, $p, q \in M$ estão relacionados **cronologicamente**, denotado por $p \ll q$ (p precede q cronologicamente), se existe uma curva temporal futuro-dirigida de p a q ; e relacionados **causalmente**, denotado por $p \leq q$ (p precede q casualmente), se $p = q$ ou existe uma curva causal futuro-dirigida de p a q . Isso nos permite definir os seguintes conjuntos:

Definição 1.11.4. Dado $p \in M$, definimos:

- **futuro cronológico de p** : $I^+(p) := \{q \in M : p \ll q\}$,
- **passado cronológico de p** : $I^-(p) := \{q \in M : q \ll p\}$,

- **futuro causal de p** : $J^+(p) := \{q \in M : p \leq q\}$,
- **passado causal de p** : $J^-(p) := \{q \in M : q \leq p\}$, e a relação horismótica: $p \rightarrow q$ quando $q \in J^+(p) \setminus I^+(p)$.

Em estruturas cônicas temos a seguinte definição de geodésica:

Definição 1.11.5. *Seja C uma estrutura cônica. Uma curva contínua $\gamma : I \rightarrow M$ é uma **geodésica cônica** se for localmente horismótica, ou seja, para cada $t_0 \in I$ e qualquer vizinhança V de $\gamma(t_0)$, existe uma vizinhança menor $U \subset V$ de $\gamma(s_0)$ tal que, se $I_\epsilon := [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \cap I$ satisfaz $\gamma(I_\epsilon) \subset U$ para algum $\epsilon > 0$, então*

$$t_1 < t_2 \iff \gamma(t_1) \rightarrow_U \gamma(t_2), \quad \forall t_1, t_2 \in I_\epsilon,$$

onde \rightarrow_U é a relação horismótica para a restrição natural C_U da estrutura cônica a U .

A definição de espaços-tempos de Lorentz-Finsler tem sido um tanto incerta desde o início. Assim, há várias definições presentes desde então, como se vê no apêndice de [25]. A razão de considerar várias definições são os exemplos (ou a falta deles). Existem algumas questões que dificultam uma definição uniforme:

1. A generalidade inerente às métricas de Finsler, já que se tem um produto interno diferente para cada direção em cada espaço tangente;
2. a possível não-reversibilidade da métrica Finsler torna a distinção entre futuro e passado mais difícil;
3. Existem muitos exemplos com problemas de suavidade, ou que têm índice Lorentziano apenas em algumas direções.

Definição 1.11.6. *Seja M uma variedade. Uma **métrica Lorentz-Finsler** em M é uma função suave $L : A \subseteq TM \setminus 0 \rightarrow (0, +\infty)$ que satisfaz:*

1. *A é um subconjunto aberto cônico de $TM \setminus 0$ tal que cada $A_p := A \cap T_p M$ é convexo e saliente. Além disso, $\partial A \setminus 0$ é uma hipersuperfície suave;*
2. *L é homogênea positiva de grau dois, ou seja, $L(\lambda v) = \lambda^2 L(v)$ e se estende suavemente para $\partial A \setminus 0$, definindo $L|_{\partial A \setminus 0} = 0$;*
3. *Existe um vizinhança de $\partial A \setminus 0$ em $TM \setminus 0$ onde L é suave;*
4. *O tensor fundamental, que é definido por*

$$g_v(u, w) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \Big|_{t=s=0} L(v + tu + sw) \quad \forall u, w \in T_p M$$

para qualquer $v \in A$ tem índice $n - 1$.

Diremos que (M, L) é um **espaço-tempo Lorentz-Finsler**.

Definição 1.11.7. Um espaço-tempo (M, L) é dito **globalmente hiperbólico** quando dados $p, q \in M$, temos que $J^+(p) \cap J^-(q)$ é compacto.

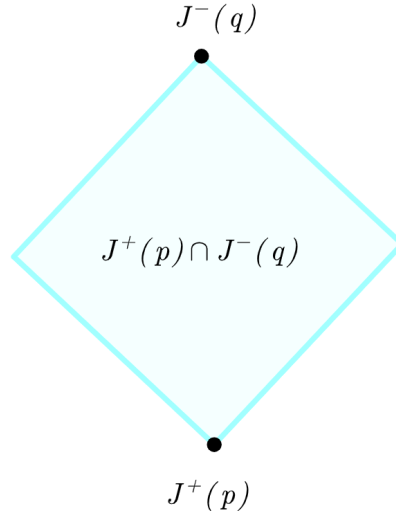


Figura 1.6: Diamante causal.

Observação 1.11.1. Na literatura, é comum dizermos que um espaço-tempo é globalmente hiperbólico quando o diamante causal é um subconjunto compacto de M . Ver figura 1.6.

Exemplo 1.11.1. Sejam M variedade suave, F métrica Finsler e ω uma 1-forma sobre M que nunca se anula tal que $\omega_p^{-1}(1) \cap \Sigma_p$ é transversal para qualquer $p \in M$, então $L(v) = \omega(v)^2 - F(v)^2$ é uma métrica de Lorentz-Finsler na região $A = \{w \in TM : \omega(w) \geq F(w)\}$ para todo $v \in A$.

Proposição 1.11.1. Seja (M, L) um espaço-tempo Finsler. Então, existe um campo vetorial suave $X \in \Gamma(TM)$ satisfazendo $X_p \in A_p$ para todo $p \in M$.

Demonstração. Vide [1]. □

Proposição 1.11.2. Dada uma estrutura de cone C , pode-se encontrar em M :

- (i) uma 1-forma temporal Ω (ou seja, $\Omega(v) > 0$ para qualquer vetor causal futuro-dirigido v),
- (ii) um campo vetorial temporal Ω -unitário T (onde T é temporal e $\Omega(T) = 1$).

Demonstração. Vide [25]. □

Teorema 1.11.1. *Seja \mathcal{C} uma estrutura cônica. Para qualquer escolha de uma 1-forma temporal Ω e um campo vetorial temporal unitário T , existe uma única métrica Finsler F em $\text{Ker}(\Omega) \subset TM$ tal que, para qualquer $v \neq 0$ em T_pM , $p \in M$,*

$$v \in \mathcal{C} \iff v = F(\pi^\Omega(v))T_p + \pi^\Omega(v). \quad (1.31)$$

Além disso, a indicatriz de F é $\Sigma = \pi^\Omega(\Omega^{-1}(1) \cap \mathcal{C})$. Por outro lado, para qualquer cone triplo (Ω, T, F) composto por uma 1-forma não nula Ω , um campo vetorial unitário T e uma métrica de Finsler F em $\text{Ker}(\Omega)$, existe uma única estrutura cônica \mathcal{C} , que satisfaz 1.31.

Demonstração. Vide [25]. □

O teorema seguinte versa sobre a equivalência entre geodésicas cônicas e pre-geodésicas luminosas, reparametrizações positivas de geodésicas luminosas, para uma estrutura cônica.

Teorema 1.11.2. *A curva $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica cônica para uma estrutura cônica \mathcal{C} se, e somente se, γ é uma pré-geodésica luminosa para uma (e, então, para todas) métrica Lorentz-Finsler L com estrutura cônica \mathcal{C} .*

Demonstração. Vide [25]. □

Definição 1.11.8. *Seja $\hat{\gamma}(t) = (t, \gamma(t))$, $t \in I$ uma curva causal partindo de S_0 . Nós dizemos que $\hat{\gamma}$ é estritamente a primeira a chegar se, para cada $t_0 \in I$, $a = \gamma(t_0)$, e qualquer outra curva causal $\hat{\alpha}$ partindo de S_0 com $\alpha(t_1) = a$ satisfaz $t_1 > t_0$.*

Teorema 1.11.3. *Seja P uma subvariedade tipo-espaço¹ de um espaço-tempo de Finsler (M, L) . Se $\sigma : [0, b] \rightarrow M$ é uma curva causal suave por partes futuro-dirigida de $\sigma(0) \in P$ até $\sigma(b) = q \in J^+(P) \setminus I^+(P)$, então σ deve ser uma geodésica luminosa futuro-dirigida, que é ortogonal a P em $\sigma(0)$ e não possui pontos focais de P estritamente antes de q .*

Demonstração. Vide [31]. □

Proposição 1.11.3. *Seja (M, L) um espaço-tempo Finsler e $\sigma : [0, b] \rightarrow M$ uma curva causal suave por partes futuro-dirigida e que não é uma pré-geodésica tipo-luz. Então, há uma curva tipo-tempo suave por partes futuro-dirigida de $\sigma(0)$ a $\sigma(b)$ arbitrariamente próxima de σ .*

Demonstração. Ver [1]. □

¹Uma subvariedade $P \subset M$ é tipo-espaço se $T_pP \subset T_pM$ é tipo-espaço para todo $p \in P$, ou seja, todos vetores de T_pP são tipo-espaço.

Capítulo 2

Geodésicas e Função Transnormal

Etimologicamente, a palavra *geodésica* tem sua origem na Grécia Antiga, onde já se sabia que a Terra (“*geo*”) não era plana. Encontrar o caminho mais curto entre dois lugares era uma questão importante, principalmente para os navegadores. Daí em diante, as curvas de menor comprimento entre dois pontos numa determinada superfície ficaram conhecidas como geodésicas. Ulteriormente, sua noção foi formalizada com rigor a partir do século XVIII, com o surgimento do cálculo diferencial. No início do século XX, a teoria da relatividade geral veio definitivamente reforçar a importância dessas curvas.

No espaço euclidiano, sabemos que o caminho mais curto entre dois pontos é o segmento de reta que os liga. Em outras geometria, como a Geometria Finsler, encontrar as geodésicas não é uma tarefa tão simples. Geometricamente, uma geodésica é uma curva cujo vetor velocidade é paralelo ao longo dela. Dito de outra forma, geodésicas são curvas sem aceleração. Também, podemos interpretá-las como pontos críticos do funcional energia. Ademais, dados dois pontos p e q não necessariamente a geodésica ligando p a q coincide com a geodésica ligando q a p como no caso Riemanniano.

As geodésicas podem também ter aplicação no contexto dos incêndios florestais. Em [14], foi observado que as partículas do fogo são F -geodésicas que cruzam ortogonalmente as fibras de uma função especial, a função transnormal. Uma função transnormal é uma função cuja norma do gradiente é constante nas fibras regulares. No contexto Finsler, os níveis dessa função são paralelos na direção do seu vetor gradiente. Esse resultado generaliza o Teorema de Wang (ver [3]).

Neste capítulo daremos algumas interpretações às geodésicas. Veremos que elas são curvas cujo campo velocidade é paralelo ao longo da curva. Também, veremos que elas são pontos críticos do funcional energia, logo são soluções de um problema variacional. Ademais, ver-se-á que as geodésicas minimizam distância localmente. Apresentaremos uma versão parcial do Teorema de Wang e, com hipóteses adicionais, podemos generalizá-lo. Por fim, este capítulo apresenta os pontos de corte que são, a grosso modo, pontos até

onde as geodésicas são minimizantes [9]. Para a discussão do presente capítulo, utilizamos principalmente [3, 4, 9, 34, 38].

2.1 Geodésicas

Seja (M, F) uma variedade Finsler n -dimensional. Uma curva suave $\gamma : I \rightarrow M$ é uma **geodésica** de F quando γ' é um **campo paralelo** ao longo de γ , ou seja,

$$D_{\gamma'}^{\gamma'} \gamma' = \nabla_{\gamma'}^{\gamma'} \gamma' = 0.$$

Temos assim que uma geodésica é uma curva cujo campo velocidade é paralelo ao longo da curva (uma curva que transporta paralelamente o seu próprio vetor tangente). Equivalientemente, uma geodésica é uma curva cujo campo aceleração é nulo. Em coordenadas, temos que a equação anterior se escreve como

$$\gamma_k'' + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma') \gamma_i' \gamma_j' = 0, \forall k = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

onde Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel.

Este sistema linear de E.D.O's de segunda ordem pode se transformado em um de primeiro ordem definido $y = \gamma'$. Logo, pela teoria padrão de E.D.O, para qualquer $v_p \in TM$ existe um intervalo I contendo 0 e uma geodésica $\gamma_v : I \rightarrow M$ tal que $\gamma_v'(0) = v$ e o intervalo é maximal.

Dada (M, F) uma variedade Finsler, definimos o **funcional energia** E que associa a cada curva suave por partes $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ o número real

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b F^2(\gamma'(t)) dt.$$

Considere $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma curva suave por partes e $a = t_0 < \dots < t_k = b$ uma partição de $[a, b]$ tal que $\gamma|_{(t_{i-1}, t_i)}$ é suave, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Uma **variação** de γ é uma aplicação $H : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tal que:

1. H é contínua em $[a, b] \times (-\epsilon, \epsilon)$;
2. $H \Big|_{(t_{i-1}, t_i) \times (-\epsilon, \epsilon)}$ é suave, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$;
3. $H(t, 0) = \gamma(t)$, $t \in [a, b]$.

Para cada t fixado, a curva $H(t, s) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é chamada de uma **curva longitudinal** da variação, enquanto que, fixado s , a curva $H(t, s) : [a, b] \rightarrow M$ é chamada de uma **curva transversal da variação**. Note que $s \mapsto \gamma_s := H(\cdot, s)$ é uma curva suave

por partes em M que passa por γ no instante $s = 0$. O vetor velocidade de H é definido por

$$V(t) = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} H(t, s) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \gamma_s(t),$$

e é denominado campo variacional associado a H . Assim, $E_H(s) := E(\gamma_s)$ é uma função de \mathbb{R} em \mathbb{R} e dizemos que γ é ponto crítico de E se

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} E_H(s) = 0,$$

para qualquer variação H de γ . Em vias da discussão acima, podemos introduzir a seguinte proposição:

Proposição 2.1.1 (Fórmula da primeira variação da energia). *Se H é uma variação de uma curva suave por partes $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ e V seu campo variacional, então*

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} E_H(s) &= - \int_a^b g_{\gamma'}(V, D_{\gamma'}^{\gamma'} \gamma') dt + g_{\gamma'}(V, \gamma') \Big|_a^b \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-1} g_{\gamma'}(\gamma'(t_i^+) - \gamma'(t_i^-), V(t_i)), \end{aligned}$$

onde $t_0 = a < t_1 < \dots < t_k = b$ é a partição tal que $\gamma|_{(t_{i-1}, t_i)}$ é suave e D é a derivada covariante associada à conexão de Chern.

Demonstração. Suponha que γ é suave. Denotando por $\beta_t(s) := H(t, s)$, temos que $\beta'_t(0) = V(t)$. Pela quase-compatibilidade com a métrica, pelo Lema 1.10.2 e pelo teorema fundamental do cálculo

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} E_H(s) &= \frac{1}{2} \int_a^b \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} g_{\gamma'_s}(\gamma'_s, \gamma'_s) dt \\ &= \int_a^b g_{\gamma'_0}(D_{\beta_t}^{\gamma'_0(t)} \gamma'_s, \gamma'_0) dt = \int_a^b g_{\gamma'_0}(D_{\gamma'_0}^{\gamma'_0(t)} \beta'_t(0), \gamma'_0) dt \\ &= \int_a^b g_{\gamma'}(D_{\gamma'}^{\gamma'} V(t), \gamma') dt = \int_a^b \left(\frac{d}{dt} g_{\gamma'}(V(t), \gamma') - g_{\gamma'}(V(t), D_{\gamma'}^{\gamma'} \gamma') \right) dt \\ &= - \int_a^b g_{\gamma'}(V(t), D_{\gamma'}^{\gamma'} \gamma') + g_{\gamma'}(V(b), \gamma'(b)) - g_{\gamma'}(V(a), \gamma'(a)). \end{aligned}$$

Agora, suponha γ é suave por partes. Então:

$$\frac{d}{ds} E_H(s) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} F^2(\gamma'_s(t)) dt.$$

Daí, como para cada $i \in 1, \dots, k$, $\gamma|_{(t_{i-1}, t_i)}$ é suave, basta aplicar o caso anterior e, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} E_H(s) &= \sum_{i=1}^k [g_{\gamma'}(V(t_i), \gamma'(t_i^-)) - g_{\gamma'}(V(t_{i-1}), \gamma'(t_{i-1}^+))] - \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} g_{\gamma'}(V(t), D_{\gamma'}^{\gamma'} \gamma') \\ &= - \int_a^b g_{\gamma'}(V, D_{\gamma'}^{\gamma'} \gamma') dt + g_{\gamma'}(V, \gamma') \Big|_a^b + \sum_{i=1}^{k-1} g_{\gamma'}(\gamma'(t_i^+) - \gamma'(t_i^-), V(t_i)). \end{aligned}$$

□

O próximo corolário dá uma caracterização variacional das geodésicas, isto é, geodésicas são pontos críticos do funcional energia.

Corolário 2.1.1. *Uma curva suave por partes $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é geodésica em M se, e somente se, γ é ponto crítico do funcional energia, qualquer que seja a variação própria H de γ .*

Demonstração. Se γ é geodésica, então $\gamma'(t_j^-) = \gamma'(t_j^+)$ e $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$. Além disto, se H é própria, então $V(a) = V(b) = 0$. Assim, substituindo esses dados na fórmula da primeira variação de energia, temos:

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E_H(s) = 0$$

para toda variação própria H de γ .

Suponha agora que $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E_H(s) = 0$ para qualquer variação própria H da curva γ . Seja $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função suave por partes com $h(t_j) = 0$ para qualquer j e $h|_{(t_j, t_{j+1})} > 0$. Defina $V(t) = h(t)\nabla_{\gamma'}\gamma'$ e seja H uma variação própria de γ tendo $V(t)$ como campo variacional. Temos então, pela fórmula da primeira variação de energia que:

$$-\int_a^b h(t)g_{\gamma'}(V, \nabla_{\gamma'}\gamma')dt = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E_H(s) = 0,$$

o que implica que γ é geodésica por partes. Considere agora um outro campo \tilde{V} tal que $\tilde{V}(t_j) = \gamma'(t_j^+) - \gamma'(t_j^-)$ e $V(a) = 0 = V(b)$. Considere uma variação \tilde{H} que tenha \tilde{V} como vetor velocidade. Usando o fato já demonstrado que γ é geodésica por partes, junto com a primeira fórmula da variação de energia, temos que:

$$0 = E'_{\tilde{H}}(0) = \sum_{i=1}^k F^2(\gamma'(t_j^+) - \gamma'(t_j^-)).$$

Logo, $\gamma'(t_j^+) = \gamma'(t_j^-)$. Como γ é geodésica por partes, concluímos que γ é geodésica por continuidade.

□

Exemplo 2.1.1. *Se $M = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, onde $\|\cdot\|$ é a norma canônica de \mathbb{R}^n , então a derivada covariante de uma curva γ é dada por*

$$D_\gamma\gamma'(t) = \gamma''(t) = (\gamma''_1(t), \dots, \gamma''_n(t)).$$

Logo, γ é geodésica se, e somente se,

$$\gamma''_i(t) = 0, \quad \text{para todo } i \in \{1, \dots, n\},$$

ou ainda,

$$\gamma_i(t) = p_i + tv_i.$$

Portanto, as geodésicas de \mathbb{R}^n são retas, isto é, curvas da forma

$$\gamma(t) = p + tv, \quad \text{onde } p \in M \text{ e } v \in T_p M.$$

O próximo resultado nos diz que a conexão de Chern é g-compatível na direção da geodésica. Mais precisamente,

Lema 2.1.1. *Se $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é uma geodésica e X, Y são campos ao longo de γ , então*

$$\frac{d}{dt} g_{\gamma'}(X, Y) = g_{\gamma'}(D_{\gamma'}^{\gamma'} X, Y) + g_{\gamma'}(X, D_{\gamma'}^{\gamma'} Y). \quad (2.2)$$

Demonstração. O resultado segue diretamente da quase-compatibilidade da conexão de Chern e da definição de geodésica. \square

Corolário 2.1.2. *Se $\gamma : [a, b] \rightarrow (M, F)$ é geodésica, então $F(\gamma'(t))$ é constante.*

Demonstração. Ora, o resultado segue imediatamente do lema acima, pois

$$\frac{d}{dt} F^2(\gamma'(t)) = 2g_{\gamma'}(D_{\gamma'}^{\gamma'} \gamma', \gamma') = 0.$$

\square

Corolário 2.1.3. *Considere duas curvas suaves por partes $t \rightarrow \gamma(t)$ e $t \rightarrow \tilde{\gamma}(t) := \gamma(-t)$ em M . Então, γ é geodésica com respeito à F se, e somente se, $\tilde{\gamma}$ é geodésica com respeito à métrica reversa \tilde{F} . Em particular, elas têm as mesmas velocidades.*

Demonstração. Como $\tilde{\gamma} = \gamma(-t)$, temos que $\tilde{\gamma}' = -\gamma'(t)$, e então pelo Lema 1.9.2, temos

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}'}^{\tilde{\gamma}} \tilde{\gamma}' = \nabla_{\tilde{\gamma}'}^{-\tilde{\gamma}} \tilde{\gamma}' = \nabla_{\gamma'}^{\gamma} \gamma'.$$

Em particular, $\tilde{F}(\tilde{\gamma}') = F(-\tilde{\gamma}') = F(\gamma')$. \square

Lema 2.1.2. *Seja (M, F) uma variedade Finsleriana. Se V é um campo suave definido em um aberto $U \subset M$ sem singularidades, então*

$$\nabla_V^V V = \tilde{\nabla}_V V,$$

onde $\tilde{\nabla}$ é conexão Levi-Civita da métrica $\tilde{g} = g_V$. Em particular, uma curva regular $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é uma geodésica de F se, e somente se, for uma geodésica da métrica Riemanniana g_V , para qualquer V extensão local de γ' sem singularidades.

Demonstração. Pelas fórmulas de Koszul Finsleriana e Riemanniana e pelas propriedades do tensor de Cartan segue que

$$\begin{aligned} 2g_V(\nabla_V^V V, Z) &= Vg_V(V, Z) - Zg_V(V, V) + Vg_V(Z, V) \\ &+ g_V([V, V], Z) + g_V([Z, V], V) - g_V([V, Z], V) = 2g_V(\tilde{\nabla}_V V, Z), \end{aligned}$$

para qualquer campo suave Z definido em U , onde $\tilde{\nabla}$ é a conexão Levi-Civita de g_V . Em particular, se V é extensão local de γ' , então $\nabla_{\gamma'}^{\gamma'} \gamma' = \nabla_V^V V = \tilde{\nabla}_V V$. Logo, γ é geodésica de F se, e só se, for geodésica de g_V . \square

Lema 2.1.3 (de Homogeneidade). *Sejam $\gamma_v : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ geodésica e $\lambda > 0$. Então $\gamma_{\lambda v} : (-\frac{\delta}{\lambda}, \frac{\delta}{\lambda}) \rightarrow M$ é geodésica e satisfaz $\gamma_{\lambda v}(t) = \gamma_v(\lambda t)$.*

Demonstração. Considere a curva $\gamma : (-\frac{\delta}{\lambda}, \frac{\delta}{\lambda}) \rightarrow M$ dada por $\gamma(t) = \gamma_v(\lambda t)$. Primeiro observe que $\gamma'(t) = \lambda \gamma'_v(\lambda t)$ e em particular $\gamma'(0) = \lambda v$. No que se segue provaremos que γ é uma geodésica e com isso o resultado segue da unicidade de geodésicas das condições iniciais. Ora, usando que $\nabla^{\lambda \gamma'_v} = \nabla^{\gamma'_v}$, para $\lambda > 0$, temos:

$$\nabla_{\gamma'}^{\gamma'} \gamma' = \lambda^2 \nabla_{\gamma'_v}^{\gamma'_v} \gamma'_v = 0.$$

Logo, γ é geodésica. \square

2.2 Geodésicas de uma métrica de Zermelo

Nesta breve subseção, através do Teorema 2.2.1 iremos ver como se relacionam as geodésicas de uma métrica de Zermelo Z com as geodésicas da métrica Finsler F quando estabelecemos uma condição sobre o vento W .

Definição 2.2.1. *Sejam W um campo suave em uma variedade Finsler (M, F) e φ^W seu fluxo. Dizemos que W é F -homotético com coeficiente de dilatação c quando*

$$(\varphi_t^W)^* F = e^{2ct} F,$$

para qualquer t .

Teorema 2.2.1. *Sejam (M, Z) uma variedade de Zermelo com data de navegação (F, W) ($F(-W) < 1$) com W F -homotético com coeficiente de dilatação c . Então $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é uma Z -geodésica unitária se, e somente se,*

$$\gamma(t) = \varphi_t^W(\rho(s(t))), \quad (2.3)$$

φ^W é o fluxo de W , s é a função dada por

$$s(t) = \begin{cases} \frac{e^{2ct} - 1}{2c}, & \text{se } c \neq 0 \\ t, & \text{se } c = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

e $\rho : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é uma F -geodésica unitária.

Demonstração. Vide [20]. □

Abaixo, um exemplo que ilustra o teorema acima. Essencialmente, dada uma piscina circular com peixes, estamos interessados em saber qual trajeto, sob ação de um vento W , minimiza distância a fim do peixe obter comida no menor tempo possível.

Exemplo 2.2.1. *Seja $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \|(x, y)\|^2 < 1\}$ a bola unitária no espaço euclidiano, onde $\|\cdot\|$ é a norma canônica induzida de \mathbb{R}^2 . Considere $W(x, y) = (-y, x)$ campo vetorial em M , cujo fluxo é*

$$\phi_t^W(x, y) = \|(x, y)\|(\cos(t + t_0), \sin(t + t_0)),$$

onde t_0 é o ângulo em radianos entre (x, y) e o eixo Ox . O campo W é $F := \|\cdot\|$ -homotético com coeficiente de dilatação $c = 0$, pois ϕ_t^W é uma isometria de $\|\cdot\|$ para qualquer t .

Assim, se R é métrica Randers em M com data (F, W) , então, pelo Teorema anterior, temos que $s(t) = t$ e as geodésicas de R com velocidade inicial $v \in T_p M$ são dadas por

$$\tilde{\gamma}_v(t) = \phi_t^W(p + tv) = \|(p + tv)\|(\cos(t + t_0), \sin(t + t_0)),$$

onde $\rho_v(t) = p + tv$ é geodésica de F com velocidade inicial $v \in T_p M$.

O shen denomina esse tipo de métrica como a métrica do “peixe na piscina”, pois o caminho que o peixe tem de seguir para minimizar o tempo de viagem em uma piscina circular com um campo W é uma geodésica da métrica Randers. Pela Proposição 1.6.1, a métrica Randers com data (F, W) é dada por

$$R(v) = \frac{\sqrt{(-yu + xv)^2 + (u^2 + v^2)(1 - x^2 - y^2)}}{(1 - x^2 - y^2)} - \frac{-yu + xv}{1 - x^2 - y^2}.$$

Um peixe partindo da origem e que deseja atingir a comida no menor tempo possível deve percorrer uma geodésica arrastada pelo vento da métrica F , que corresponde a uma espiral [39].

2.3 Aplicação Exponencial

Geodésicas são projeções de um campo de vetores em $TM \setminus 0$ que dependem suavemente das condições iniciais. Além disso, as geodésicas satisfazem uma condição de homogeneidade, mais precisamente, se γ_v é uma geodésica com velocidade $\gamma'(0) = v$, então $\gamma_{\lambda v}(t) = \gamma_v(\lambda t)$ para qualquer $\lambda > 0$. Esses fatos nos permitem definir para qualquer $p \in M$ em uma vizinhança apropriada $U_p \subset T_p M$ de 0_p a **aplicação exponencial**: $exp : U_p \setminus 0 \rightarrow M$ por

$$exp_p(v) = \gamma_v(1).$$

Tal aplicação é suave em $U_p \setminus 0$ e se estende para uma aplicação de classe C^1 em U_p definindo $exp_p 0 = p$. Geometricamente, $exp_p(v)$ é o ponto de M obtido percorrendo a partir de p a geodésica com velocidade inicial v durante um intervalo de tempo unitário.

Além disso, pelo Lema de Homogeneidade para qualquer $t \geq 0$

$$exp_p(tv) = \gamma_v(t). \quad (2.5)$$

Porém, ao contrário do caso Riemanniano, essa equação pode não ser verdadeira para $t < 0$ e em geral $exp_p(v) = \gamma_v \neq \gamma_{-v} = exp_p(-v)$. Por outro lado a exponencial da métrica reversa ($\tilde{F}(v) := F(-v)$) coincide com $v \mapsto exp(-v)$.

Mesmo assim ainda é verdade que $d(exp)_{0_p} = Id|_{T_p M}$, e a demonstração desse fato é análoga ao caso Riemanniano, conforme garante o lema abaixo.

Lema 2.3.1. *Se exp é a aplicação exponencial de uma variedade Finsleriana (M, F) , então $d(exp_p)_0$ é a aplicação identidade. Além disso, exp_p é um difeomorfismo local em uma vizinhança do 0.*

Demonstração. Dados $p \in M$ e $v \in T_p M$, seja $\gamma_v : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ geodésica tal que $\gamma'(0) = v$. Derivando à direita $exp_p(tv) = \gamma_v(t)$ em $t = 0$ temos pela regra da cadeia que $d(exp_p)_0(v) = \gamma'_v(0) = v$. Assim, pelo Teorema da Função Inversa, existe U_p vizinhança aberta de 0_p em $T_p M$ tal que $exp_p : U_p \rightarrow V$ é um difeomorfismo em sua imagem $V = exp_p(U_p)$. \square

Neste caso, V é denominado **vizinhança normal** de p . Se V é uma vizinhança normal para todos os pontos os pontos de M , diremos que V é uma vizinhança **totalmente normal**.

Definição 2.3.1. *Dado $\epsilon > 0$ tal que $\{v \in T_p M; F(v) \leq \epsilon\} \subset U_p$, definimos a **bola normal** de raio ϵ e centro p por*

$$B_\epsilon(p) = \{exp_p v; v \in T_p M: F(v) < \epsilon\},$$

e seu bordo

$$S_\epsilon(p) = exp_p(\Sigma_p^F(\epsilon))$$

é a **esfera geodésica** de raio ϵ e centro p .

Assim como no caso Riemanniana, para algum ϵ definimos um referencial local

$$f : (0, \epsilon) \times \Sigma_p^F \rightarrow M$$

dado por

$$f(r, v) = exp_p(rv) = \gamma_v(r).$$

Assim, temos a seguinte versão do Lema de Gauss-Finsler:

Teorema 2.3.1 (Lema de Gauss). *Dados $p \in M$, $v \in T_p M$, a geodésica γ_v é ortogonal a qualquer $S_\epsilon(p)$ esfera geodésica que encontrar.*

Demonstração. Considere uma variação $H(r, s) = \exp_p(r\alpha(s))$ com α curva suave em $\Sigma_p^F(1)$, com $\alpha(0) = v$ e $\alpha'(0) \in T_v \Sigma_p^F$. Defina

$$h(r) = g_{\gamma'_v(r)}(\gamma'_v(r), \frac{\partial}{\partial s} H(r, 0)) = g_{\frac{\partial}{\partial r} H(r, 0)}(\frac{\partial}{\partial r} H(r, 0), \frac{\partial}{\partial s} H(r, 0)),$$

que é suave em $(0, \epsilon)$ e se estende continuamente para $r = 0$ definindo $h(0) = g_v(v, \alpha'(0))$, que é identicamente nulo, pois o vetor posição v é F -ortogonal à indicatriz. Como $r \mapsto H(r, s)$ é uma geodésica para qualquer s , usando os Lemas 1.10.2 e 2.1.1, obtemos para $r \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} h &= g_{\gamma'_v(r)}(D_{\gamma_0}^\gamma \gamma'_v(r), \frac{\partial}{\partial s} |_{s=0} H(r, s)) + g_{\gamma'_v(r)}(\gamma'_v(r), D_{\gamma_0}^{\gamma'} \frac{\partial}{\partial s} |_{s=0} H(r, s)) \\ &= g_{\gamma'_v(r)}(\gamma'_v(r), D_{\beta_r}^{\gamma'} \frac{\partial}{\partial r} H(r, 0)) \\ &= g_{\frac{\partial}{\partial r} H(r, 0)}(\frac{\partial}{\partial r} H(r, 0), D_{\beta_r}^{\gamma'} \frac{\partial}{\partial r} H(r, 0)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{ds} |_{s=0} g_{\frac{\partial}{\partial r} H(r, 0)}(\frac{\partial}{\partial r} H(r, s), \frac{\partial}{\partial r} H(r, s)) = 0. \end{aligned}$$

A última igualdade segue do fato de que a velocidade da geodésica $r \mapsto H(r, s)$ é constante igual a 1 para qualquer s . Por continuidade h é constante igual a $h(0) = g_v(v, \alpha'(0)) = 0$. E como \exp é um difeomorfismo local em torno de 0_p , que aplica indicatrizes de $(T_p M, F_p)$ suficientemente pequenas em esferas geodésicas, segue que γ_v é ortogonal às esferas geodésicas. \square

Proposição 2.3.1 (Minimização Local das Geodésicas). *Seja $B := B_\epsilon(p)$ uma bola normal centrada em p . Dado $q \in B$ considere a geodésica $\gamma_{v_0} : [0, 1] \rightarrow M$ com $v_0 = \exp_p^{-1}(q)$. Então*

$$L(\gamma_v) \leq L(\alpha),$$

para qualquer curva suave por partes $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ ligando p a q . E a igualdade acontece se, e somente se, $\alpha([0, 1]) = \gamma([0, 1])$.

Demonstração. Primeiro suponha que $\alpha([0, 1]) \subset B$. Nesse caso, como \exp_p é um difeomorfismo em torno da origem, podemos escrever

$$\alpha(t) = \exp_p(r(t)v(t)) = f(r(t), v(t)),$$

com $r(t) = F(\exp_p^{-1}(\alpha(t)))$ e $v(t) = \frac{\exp_p^{-1}(\alpha(t))}{r(t)}$ é uma curva na indicatriz Σ_p^F . Note que $r(0) = 0$, $r(1) = F(v_0)$ e $v(1) = v_0$, pois $\alpha(1) = q$. Logo

$$\alpha'(t) = r'(t) \frac{\partial f}{\partial r} + v'(t) \frac{\partial f}{\partial v} = r'(t) \gamma'_v(r(t)) + v'(t) \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Note que $\frac{\partial f}{\partial v}$ é um vetor tangente a esfera geodésica passando por $\alpha(t)$. Portanto pelo Lema de Gauss

$$g_{\gamma'_v(r(t))}(\gamma'_v(r(t)), \frac{\partial f}{\partial v}) = 0.$$

E pelo Lema 1.1.8

$$F(\alpha') \geq \frac{1}{F(\gamma'_v \circ r)} g_{\gamma'_v \circ r}(\gamma'_v \circ r, \alpha') = \frac{1}{F(\gamma'_v)} g_{\gamma'_v \circ r}(\gamma'_v \circ r, r' \gamma'_v \circ r) = \frac{r' F^2(\gamma'_v \circ r)}{F(\gamma'_v \circ r)} = r' F(\gamma'_v \circ r) = r',$$

pois $F(\gamma'_v \circ r) = 1$ dado que γ_v geodésica e $v \in \Sigma_p^F$. Logo

$$L(\alpha) \geq \int_0^1 r' dt = r(1) = F(v_0) = L(\gamma_{v_0}).$$

Observe que $L(\alpha) = L(\gamma_{v_0})$ se, e somente se, $F(\alpha')F(\gamma'_v \circ r) = g_{\gamma'_v \circ r}(\gamma'_v \circ r, \alpha')$. E essa igualdade acontece se, e somente se, α' é um múltiplo positivo de $\gamma'_v \circ r$. Consequentemente $v' \frac{\partial f}{\partial v} = 0$ e assim v é constante igual a v_0 e portanto α é uma reparametrização de γ_{v_0} .

Se α não está contida em B , considere $t_0 \in (0, 1)$ tal que $\alpha(t_0) \in \partial B = S_p(\epsilon)$ e $\alpha(0, t_0) \subset B$. Pelo caso anterior e por continuidade $L(\alpha) > L(\alpha|_{(0, t_0)}) \geq \epsilon \geq L(\gamma)$. \square

Pelo lema de minimização das geodésicas, temos que a função distância $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, em uma vizinhança totalmente normal U se escreve como

$$d(p, q) = F(\exp_p^{-1}(q)),$$

para quaisquer $p, q \in U$. Em particular, d é uma função contínua em $U \times U$ e suave em $\{(p, q) \in U \times U; p \neq q\}$. Já a função d^2 é de classe C^1 e suave em $\{(p, q) \in U \times U; p \neq q\}$. No caso Riemanniana d^2 é suave em $U \times U$. A próxima proposição garante que se d^2 for suave em vizinhanças totalmente normal, então F é Riemanniana. Mas antes, verificaremos um lema técnico.

Lema 2.3.2. *Se $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow M$ é uma curva em uma variedade Finsleriana (M, F) , então*

$$F(\gamma'(0)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} d(\gamma(0), \gamma(t)).$$

Demonstração. Seja U uma vizinhança normal de $p = \gamma(0)$. Assim podemos escrever $\gamma(t) = \exp_p(v(t))$ onde $v(t)$ é uma curva em $T_p M$. Pela regra da cadeia e por $d(\exp_p)_0 = Id$, temos que $v'(0) = \gamma'(0)$. Além disso,

$$d(\gamma(0), \gamma(t)) = F(v(t))$$

para $t > 0$ suficientemente pequeno, pelo Teorema 2.3.1. Portanto esse dois últimos fatos, a homogeneidade e continuidade de F implicam que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} d(\gamma(0), \gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} F(v(t)) = F(\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (v(t))) = F(v'(0)) = F(\gamma'(0)).$$

\square

Lema 2.3.3. *Sejam (M, F) variedade Finsler e $\rho(q) = d_F^2(p, q)$ para algum $p \in M$ fixado. Então ρ é de classe C^2 em p se, e somente se, $F_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ é norma Euclidiana.*

Demonstração. Se ρ é de Classe C^2 , então o Lema 2.3.2 implica que F_p^2 é de classe C^2 e portanto uma norma Euclidiana pelo Lema 1.1.4. \square

2.4 Hessiano

Definição 2.4.1. *Seja $f : (M, F) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave em uma variedade Finsler M e $U = \{ p \in M : \nabla f_p \neq 0 \}$. Nós definimos o **hessiano** de f , $Hess^F f$, em U como*

$$\begin{aligned} Hess^F f : \Gamma(TU) \times \Gamma(TU) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto g_{\nabla f}(\nabla_X^{\nabla f} \nabla f, Y). \end{aligned}$$

Lema 2.4.1. *Sejam $f : (M, F) \rightarrow \mathbb{R}$ e U dado como na definição acima. Então*

$$Hess^F f(X, Y) = X(Y(f)) - df(\nabla_X^{\nabla f} Y). \quad (2.6)$$

Em particular, $Hess^F f$ é uma forma $C(U)$ -bilinear simétrica.

Demonstração. Pela compatibilidade com a métrica e pela definição do gradiente, temos que

$$\begin{aligned} XY(f) &= X(df(Y)) = Xg_{\nabla f}(\nabla f, Y) \\ &= g_{\nabla f}(\nabla_X^{\nabla f} \nabla f, Y) + g_{\nabla f}(\nabla f, \nabla_X^{\nabla f} Y) + 2C_{\nabla f}(\nabla_X^{\nabla f} \nabla f, \nabla f, Y) \\ &= g_{\nabla f}(\nabla_X^{\nabla f} \nabla f, Y) + g_{\nabla f}(\nabla f, \nabla_X^{\nabla f} Y) \\ &= Hess^F f(X, Y) - d(\nabla_X^{\nabla f} Y). \end{aligned}$$

Por continuidade concluímos o resultado para pontos críticos de f .

Verifiquemos a segunda afirmação. A $C(U)$ -bilineariadade segue imediatamente por $v \mapsto \nabla_v^{\nabla f} \nabla f$ e $g_{\nabla f}$ serem $C(U)$ -linear e $C(U)$ -bilinear respectivamente. Para verificar a simetria, note que, pela equação (2.6), temos

$$Hess^F f(X, Y) - Hess^F f(Y, X) = (XY(f) - YX(f)) + (df(\nabla_Y^{\nabla f} X) - df(\nabla_X^{\nabla f} Y)).$$

Como df é linear, temos que $df(\nabla_Y^{\nabla f} X) - df(\nabla_X^{\nabla f} Y) = df(YX - XY) = YX(f) - XY(f)$. Portanto, o resultado segue. \square

Lema 2.4.2. *Sejam (M, F) uma variedade Finsler e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave tal que $F^2(\nabla f) = 1$. Então ∇f é um campo geodésico. Em particular, as curvas integrais do ∇f são geodésicas, e ainda, $Hess^F f(\nabla f, v) = 0$, para todo $v \in TM \setminus 0$.*

Demonstração. Como $g_{\nabla f}(\nabla f, \nabla f) = F^2(\nabla f) = 1$, temos

$$0 = Xg_{\nabla f}(\nabla f, \nabla f) = 2g_{\nabla f}(\nabla_X^{\nabla f} \nabla f, \nabla f),$$

donde segue que $g_{\nabla f}(\nabla_X^{\nabla f} \nabla f, \nabla f) = 0$ para todo $X \in \Gamma(TM)$ campo sem singularidades. Em particular, se $X = \nabla f$, então $g_{\nabla f}(\nabla_{\nabla f}^{\nabla f} \nabla f, \nabla f) = 0$. Logo, pelo Lema 1.8.1, concluímos que $\nabla_{\nabla f}^{\nabla f} \nabla f$ é tangente às fibras. Tomando $V \in \Gamma(TM)$ campo sem singularidade e tal que $g_{\nabla f}(\nabla f, V) = 0$ e usando a simetria do hessiano, temos que

$$g_{\nabla f}(\nabla_{\nabla f}^{\nabla f} \nabla f, V) = g_{\nabla f}(\nabla_V^{\nabla f} \nabla f, V) = 0.$$

Como V foi tomado arbitrário, o resultado segue. Logo, $\nabla_{\nabla f}^{\nabla f} \nabla f = 0$. Por fim, perceba que se $\gamma'(t) = \nabla f(\gamma(t))$, temos então $\nabla_{\gamma'}^{\gamma'} \gamma' = 0$. Portanto, γ é geodésica. \square

2.5 Função Transnormal

Definição 2.5.1. Uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave sobre uma variedade Finsler (M, F) é *F-transnormal* se existir uma função $b : f(M) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que

$$F^2(\nabla f) = b \circ f.$$

Em particular, se $b \equiv 1$, então dizemos que f é a função F -distância.

Exemplo 2.5.1. Por definição, qualquer função distância em uma variedade Finsler (M, F) , que seja suave fora da pré-imagem do zero, é F -transnormal.

Exemplo 2.5.2. Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \|(x, y)\| < 1\}$ disco unitário, onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana em \mathbb{R}^2 . Considere $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$. Como $\|\nabla f\|^2 = 4f$, f é $\|\cdot\|$ -transnormal, com $b(t) = 4t$.

Lema 2.5.1. Seja (M, F) uma variedade Finsleriana. Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função F -transnormal, então com $F^2(\nabla f) = b \circ f$, então

$$\text{Hess}^F f(\nabla f, \nabla f) = \frac{1}{2}b'(f)b(f),$$

para qualquer $v \in TM$.

Demonstração. Por definição e pela quase-compatibilidade, temos

$$\text{Hess}^F f(\nabla f, \nabla f) = g_{\nabla f}(\nabla_{\nabla f}^{\nabla f} \nabla f, \nabla f) = \frac{1}{2}\nabla f(F^2(\nabla f)). \quad (2.7)$$

Como $F^2(\nabla f) = b \circ f$, então

$$\begin{aligned} \text{Hess}^F f(\nabla f, \nabla f) &= \frac{1}{2}\nabla f(b \circ f) = \frac{1}{2}b'(f)df(\nabla f) \\ &= \frac{1}{2}b'(f)g_{\nabla f}(\nabla f, \nabla f) = \frac{1}{2}b'(f)F^2(\nabla f) \\ &= \frac{1}{2}b'(f)b(f). \end{aligned}$$

\square

Definição 2.5.2. Uma função $f : (M, h) \rightarrow \mathbb{R}$ suave sobre uma variedade (M, h) , h métrica Riemanniana é **h -transnormal** se existir uma função $b : f(M) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que

$$h(\nabla f, \nabla f) = \|\nabla f\|^2 = b \circ f.$$

Definição 2.5.3. Sejam L, N subvariedades de uma variedade Finsleriana. Dizemos que N é paralela a L quando para qualquer $p, q \in N$ verifica-se que $d(p, L) = d(q, L)$. Quando adicionalmente L for paralela a N , dizemos que L e N são equidistantes.

No caso Riemanniana, paralelismo e equidistância assim definidos são equivalentes. E quando nos restringimos aos níveis de uma função transnormal obtemos equidistância. Mais precisamente vale o célebre Teorema de Wang no contexto Riemanniano:

Teorema 2.5.1 (Teorema de Wang). *Sejam (M, g) variedade Riemanniana e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função transnormal. Então*

1. *Os níveis críticos são subvariedades.*
2. *As fibras são equidistantes e*

$$d(f^{-1}(c), f^{-1}(d)) = d(f^{-1}(c), p) = \int_c^d \frac{ds}{\sqrt{b(s)}}, \quad (2.8)$$

para qualquer $p \in f^{-1}(d)$ e $b : f(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|\nabla f\|^2 = b \circ f$.

3. *Se $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é uma reparametrização pelo comprimento de arco de uma curva integral do gradiente, então γ é uma geodésica e $L(\gamma) = d(f^{-1}(c), f^{-1}(d))$, onde $\gamma(a) \in f^{-1}(c)$ e $\gamma(b) \in f^{-1}(d)$.*

Demonstração. Vide [41]. □

Lema 2.5.2. *Sejam (M, F) uma variedade Finsleriana, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função F -transnormal e $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma reparametrização de uma curva integral do F -gradiente tal que $F(\gamma') = 1$. Então γ é uma geodésica.*

Demonstração. Por hipótese, temos que $\gamma'(t) = \frac{1}{F(\nabla f(\gamma'(t)))} \nabla f(\gamma(t))$, $\gamma \subset M_0 = \{p \in M; \nabla f(p) \neq 0\}$. Defina em M_0 a métrica Riemanniana $\tilde{g} := g_V$, onde $V(p) = \frac{\nabla f(p)}{F(\nabla f(p))}$ que é uma extensão de γ' . Pelo Lema 1.8.3, temos que $\nabla f = \tilde{\nabla} f$ e $F(\nabla f) = \|\tilde{\nabla} f\|$. Por hipótese, f é F -transnormal. Então:

$$\sqrt{b \circ f} = F(\nabla f) = \|\tilde{\nabla} f\|.$$

Assim, f é \tilde{g} -transnormal. Como $\nabla f = \tilde{\nabla} f$, temos também que γ é uma reparametrização de $\tilde{\nabla} f$, o \tilde{g} -gradiente de f , tal que $\sqrt{\tilde{g}(\gamma', \gamma')} = \sqrt{g_V(\gamma', \gamma')} = \sqrt{g_{\gamma'}(\gamma', \gamma')} = F(\gamma') = 1$. Pelo Teorema de Wang 2.5.1, γ é uma geodésica de \tilde{g} e portanto, pelo Lema 2.1.2, é uma geodésica de F . □

Lema 2.5.3. *Seja (M, F) variedade Finsler. Se $L, S \subset M$ são subvariedades e $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é curva suave por partes tal que $L(\gamma) = d(L, S)$, então γ é geodésica, $\gamma'(a) \in \nu(L)$ e $\gamma'(b) \in \nu(S)$.*

Demonstração. Segue da fórmula da primeira variação de energia. \square

Definição 2.5.4. *Dizemos que (M, F) é **completa para frente** (respectivamente **completa para trás**) quando qualquer geodésica de F (respectivamente de $\hat{F} := F(-v)$) está definida em \mathbb{R} . Diremos que (M, F) é completa quando for completa para frente e para trás.*

Embora os níveis de uma função transnormal não sejam equidistantes, verificaremos que tais níveis são paralelos na direção do vetor gradiente, generalizando parcialmente o Teorema de Wang.

Teorema 2.5.2. *Seja $f : (M, F) \rightarrow \mathbb{R}$ função F -transnormal em (M, F) variedade Finsleriana conexa e completa para frente. Se $c, d \in f(M)$ tais que $c < d$, então $f^{-1}(c)$ é paralelo a $f^{-1}(d)$ com distância*

$$d_F(f^{-1}(c), f^{-1}(d)) = d_F(f^{-1}(c), p) = \int_c^d \frac{ds}{\sqrt{b(s)}}, \quad (2.9)$$

para qualquer $p \in f^{-1}(d)$. Além disso, esta distância é realizada por qualquer curva integral do gradiente (que é uma geodésica ortogonal aos níveis regulares) partindo de $f^{-1}(c)$ e alcançando $f^{-1}(d)$. Em particular, $f^{-1}(c)$ é paralelo a $f^{-1}(d)$.

Demonstração. Considere a métrica Riemanniana $\tilde{g} := g_{\nabla f}$ definida no aberto $M_r := \{p \in M; df_p \neq 0\}$. Pelo Lema 1.8.3, $f|_{M_r}$ é \tilde{g} -transnormal com $\|\tilde{\nabla} f\|^2 = F^2(\nabla f) = b \circ f$, onde $\|\cdot\| = \sqrt{\tilde{g}}$. Logo, pelo Teorema de Wang 2.5.1

$$\tilde{d}(f^{-1}(c), f^{-1}(d)) = \tilde{d}(f^{-1}(c), p) = \int_c^d \frac{ds}{\sqrt{b(s)}}, \quad (2.10)$$

para qualquer $p \in f^{-1}(d)$, onde \tilde{d} é a função distância induzida por \tilde{g} . Além disso, esta distância é realizada por $\gamma_p : [0, t] \rightarrow M_r$ curva integral de $\nabla f = \tilde{\nabla} f$ tal que $\gamma_p(t) = p$ e $\gamma_p(0) \in f^{-1}(c)$ para qualquer $p \in f^{-1}(d)$. Pelos Lemas 2.5.2 e 1.8.3, tal curva, a menos de reparametrização, é geodésica ortogonal aos níveis regulares com relação a F e

$$L_F(\gamma_p) = \int_0^1 F(\gamma_p'(t)) dt = \int_0^1 \|\gamma_p'(t)\| dt = \int_c^d \frac{ds}{\sqrt{b(s)}} = L_{\tilde{g}}(\gamma_p).$$

Por fim, resta provar que para qualquer $p \in f^{-1}(d)$ a distância Finsleriana de $f^{-1}(c)$ a p é realizada por γ_p , ou seja,

$$d_F(f^{-1}(c), p) = L(\gamma_p). \quad (2.11)$$

Seja $\beta : [0, b] \rightarrow M$ uma geodésica minimizante que realiza a F -distância de $f^{-1}(c)$ a p . Note que, pelo Lema 2.5.3 $\beta'(0) \in \nu(f^{-1}(c))$. Como $f^{-1}(c)$ é um hipersuperfície existem apenas duas possibilidades:

1ª possibilidade $\beta'(0)$ é um múltiplo do gradiente e, conseqüentemente, β é uma reparametrização positiva de uma curva integral de ∇f . Daí,

$$L_F(\beta) = L_{\tilde{g}}(\beta) = L_{\tilde{g}}(\gamma_p) = L_F(\gamma_p).$$

2ª possibilidade $\beta'(0)$ está do lado oposto de $(\nabla f)_{\beta(0)}$ com relação ao hiperplano $T_{\beta(0)}f^{-1}(c) \subset T_{\beta(0)}M$. No segundo caso, β passa por uma singularidade e depois novamente por $f^{-1}(c)$ em um tempo $t_0 \in (0, 1)$ antes de alcançar $x = \beta(1)$. Isto implica que $\beta|_{[t_0, 1]}$ possui F -comprimento estritamente menor do que β , contrariando a minimalidade de β . Portanto a única possibilidade é a primeira mencionada, ou seja, β é uma reparametrização positiva de γ_p . \square

Com hipóteses adicionais, tais como compacidade e analiticidade da variedade, o teorema de Wang pode ser generalizado para o caso Finsler.

Teorema 2.5.3. *Sejam (M, F) variedade Finsler conexa, compacta analítica e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ função F -transnormal e analítica com $f(M) = [a, b]$. Suponha que os conjuntos de níveis de f sejam conexos e a, b sejam os únicos valores singulares. Então,*

1. *os conjuntos de níveis críticos $f^{-1}(a)$ e $f^{-1}(b)$ são subvariedades.*
2. *os conjuntos de níveis regulares são equidistantes.*

Demonstração. vide [3]. \square

2.6 Pontos de corte

Sabemos que toda geodésica é localmente minimizante. Em variedades (M, F) completas, as geodésicas estarão definidas para todo parâmetro. Diante disso, uma pergunta natural seria: até que ponto uma geodésica em uma variedade Finsler completa é minimizante? Essa é a motivação para introduzir o conceito de ponto de corte. Nesta seção, (M, F) é uma variedade Finsler completa.

Definição 2.6.1. *Dados um ponto $p \in M$ e um vetor unitário $v \in T_pM$, considere a geodésica unitária $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$. Se o conjunto dos instantes $t \in (0, +\infty)$ tais que γ_v é minimizante em $[0, t]$ for um intervalo da forma $[0, t_0]$, onde*

$$t_0 = \sup\{t \mid \gamma_v|_{[0, t]} \text{ é minimizante}\} < +\infty,$$

diremos que $\gamma_v(t_0)$ é o **ponto de corte** de p ao longo de γ na direção v . O conjunto dos pontos de corte de $p \in M$, em alguma direção, será denotado por $Cut(p)$ e chamado de o **cut locus** de $p \in M$.

Definição 2.6.2. Seja $N \subset M$ uma subvariedade de M . Uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ suave por partes com $\gamma(a) \in N$ é chamada de **N -geodésica** se γ é um ponto crítico do funcional energia restrito ao espaço das curvas suave por partes que partem de N .

Definição 2.6.3. Seja $N \subset M$ uma subvariedade de uma variedade M . Uma N -geodésica unitária $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ é chamada de um **N -segmento** ligando N a $\gamma(t)$ se $d(N, \gamma(t)) = L(\gamma|_{[0, t]}) = t$.

Proposição 2.6.1. Uma N -geodésica unitária $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ é um N -segmento se, e somente se, $d(N, \gamma(t)) = t$ para todo $t \in [0, l]$.

Demonstração. (\Rightarrow) Segue imediatamente da definição de N -geodésica.

(\Leftarrow) Para provar que γ é um N -segmento, o artifício é mostrar que não há outra curva que consiga ir de N até $\gamma(t)$ percorrendo uma distância menor que t . Seja γ um N -segmento e suponha, por contradição, que existe algum $0 < T < l$ tal que $d(N, \gamma(T)) < T = L(\gamma|_{[0, T]})$. Então, existe algum N -segmento $\beta : [0, T_0] \rightarrow M$ ligando N a $q = \gamma(T) = \beta(T_0)$, tal que $L(\beta) = d(N, \gamma(T)) < L(\gamma|_{[0, T]})$. Considere a curva quebrada ζ obtida pela concatenação de β e $\gamma|_{[0, T]}$. Segue que:

$$L(\zeta) = L(\beta) + L(\gamma|_{[T, l]}) < L(\gamma|_{[0, T]}) + L(\gamma|_{[T, l]}) = L(\gamma) = l = d(N, \gamma(l)),$$

contradição. □

Definição 2.6.4. Dada uma subvariedade $N \subset M$, **$Cut(N)$** consiste de pontos $q \in M$ tais que existe um N -segmento unindo N a q , cuja extensão não é um N -segmento.

A proposição seguinte versa sobre a extensão de N -segmentos geodésicos além de seu comprimento máximo de minimização, mostrando que se eles forem estendidos além do seu comprimento, deixarão de ser uma curva minimizante.

Proposição 2.6.2. $q \in Cut(N)$ se, e somente se, para qualquer N -segmento γ unindo N a q , uma extensão de γ não é um N -segmento.

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha $q \in Cut(N)$. Temos então um N -segmento $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ com $l = d(N, q)$ e $q = \gamma(l)$, cuja extensão não é um N -segmento. Suponha $\eta : [0, l] \rightarrow M$ outro N -segmento unindo N a $q = \eta(l)$, que permanece um N -segmento quando estendido para $\eta : [0, l + \epsilon] \rightarrow M$ para algum $\epsilon > 0$. Como γ, η são distintos, temos $\dot{\gamma}(l) \neq \dot{\eta}(l)$. Assim, temos uma curva quebrada ζ obtida da concatenação de γ e $\eta|_{[l, l+\epsilon]}$.

Agora, $L(\zeta) = L(\gamma) + L(\eta|_{[l, l+\epsilon]}) = l + \epsilon = d(N, \eta(l + \epsilon))$, ou seja, ζ alcança a distância mínima. Mas então ζ deve ser uma curva suave, o que é uma contradição.

(\Leftarrow) Segue imediatamente da definição. \square

Definição 2.6.5. Dada uma subvariedade $N \subset M$, um ponto $p \in M$ é dito ser um **ponto separador** de N se existem dois N -segmentos distintos unindo N a p . A coleção de todos os pontos separadores de N é chamada de conjunto separador (ou estratos de Maxwell) de N , denotado por $Se(N)$.

Proposição 2.6.3. Seja N uma subvariedade de uma variedade Finsler (M, F) . Então, $Se(N) \subset Cut(N)$.

Demonstração. Seja $q \in Se(N)$, e tome dois N -segmentos $\gamma_1, \gamma_2 : [0, l] \rightarrow M$ unindo, respectivamente, $p_1, p_2 \in N$ a q . Se possível, suponha que $q \notin Cut(N)$. Então, uma extensão suficientemente pequena de γ_2 , digamos, $\gamma_2 : [0, l + \epsilon] \rightarrow M$, permanece um N -segmento (Proposição 2.6.2), e, portanto, $d(N, \gamma_2(l + \epsilon)) = l + \epsilon$.

Por outro lado, $\dot{\gamma}_1(l) \neq \dot{\gamma}_2(l)$, já que são geodésicas distintas, e assim temos uma curva quebrada $\eta : [0, l + \epsilon] \rightarrow M$ obtida da concatenação de γ_1 e $\gamma_2|_{[l, l+\epsilon]}$. Assim,

$$\eta = L(\gamma_1) + L(\gamma_2|_{[l, l+\epsilon]}) = l + \epsilon = d(N, \eta(l + \epsilon)).$$

Mas então η teria que ser suave, contradição. Portanto, $q \in Cut(N)$. \square

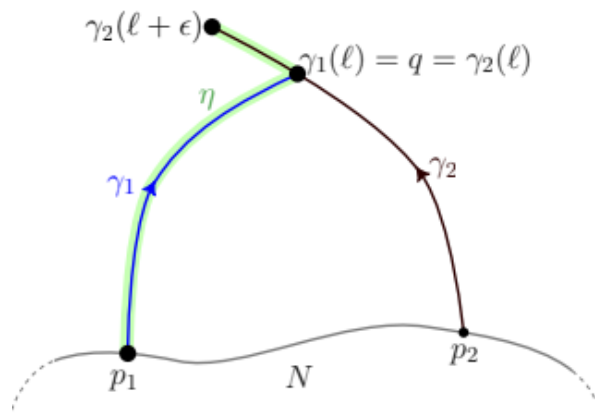


Figura 2.1: $Se(N)$.

Corolário 2.6.1. Seja N uma subvariedade de uma variedade Finsler (M, F) . Seja $q \in Cut(N)$ e $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ um N -segmento unindo $p \in N$ a q . Então, para qualquer $0 < t_0 < l$, $\gamma|_{[0, t_0]}$ é o único N -segmento unindo N a $\gamma(t_0)$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que exista outro N -segmento $\eta : [0, t_0] \rightarrow M$ unindo N a $\eta(t_0) = q_0 = \gamma(t_0)$, que é distinto de $\gamma|_{[0, t_0]}$. Então $q_0 \in Se(N) \subset Cut(N)$ pela Proposição 2.6.3. Todavia, γ permanece um N -segmento além de $\gamma(t_0)$, e assim $q_0 \notin Cut(N)$ pela Proposição 2.6.2. Isso é uma contradição. \square

Definição 2.6.6. Dado $N \subset M$, a **aplicação exponencial normal**

$$\exp^\nu : \nu(N) \rightarrow M$$

é definida como a restrição da aplicação exponencial à $\nu(N)$.

Definição 2.6.7. Dada uma subvariedade $N \subset M$, um vetor $v \in \nu(N)$ é dito ser um **ponto focal tangente** de N se

$$d(\exp^\nu)|_v : T_v\nu \rightarrow T_{\exp^\nu(v)}M$$

é degenerado, ou seja, se v é um ponto crítico de $\exp^\nu|_{\nu(N)}$. A nulidade do mapa é conhecida como o índice do ponto focal tangente v . A coleção de todos esses vetores é chamada de locus focal tangente de N .

Capítulo 3

Incêndios Florestais

Todo ano os incêndios florestais causam danos significativos à vida selvagem, às pastagens, à agricultura e aos recursos naturais, ameaçando infraestruturas e vidas humanas. Às vezes, a recuperação de áreas destruídas é quase impossível. De fato, os incêndios florestais têm efeitos ecológicos extremamente negativos, sem mencionar que contribuem ainda mais para o aquecimento global. Nesse cenário, fornecer uma modelagem mais precisa e confiável para prever a propagação dos incêndios no tempo desempenha um papel fundamental no combate aos efeitos desastrosos do fogo.

Entender o comportamento do fogo é um dos interesses de estudiosos do mundo inteiro desde os últimos 60 anos. Fazer uso de simuladores de comportamento de incêndios, como FARSITE [16], é uma técnica que alguns pesquisadores empregam para prever o comportamento das chamas. Tal programa estadunidense de propagação de incêndio faz uso do princípio de Huygens, bem como das equações de Richard Rothermel [36] para prever o comportamento do fogo. Outro sistema de simulação do fogo é o Prometheus, em homenagem ao deus grego do fogo.

Muitos matemáticos deram contribuições significativas no contexto dos incêndios florestais. Andersen (1983) propôs uma propagação elíptica (portanto, determinada pela posição do seu centro e pela orientação e comprimento dos seus eixos) e sob condições constantes de vento, mais precisamente, ele propõe como modelo uma espécie de semielipse dupla para a propagação do fogo, a qual também aparece na presente dissertação. Precipuamente, essa modelagem considera que a velocidade do fogo em cada ponto é dada por uma elipse, escolhida de tal maneira que o eixo maior esteja alinhado com a direção do vento. O matemático Van Wagner (1977) também já considerava o aspecto elíptico da propagação do fogo. Para mais informações, ver [18].

Relacionar o comportamento do fogo com uma métrica Finsler é recente e esse feito deve-se ao matemático nórdico Steen Markvorsen (2016) [27], o qual levou em conta a inclinação do relevo e o efeito do vento constante ao longo do tempo, fatores já introduzidos

em outros modelos. Ele ataca as equações de Richard (1990), EDPs para a propagação elíptica do fogo, reduzindo-as a um EDO, que é interpretada como as equações geodésicas para uma métrica Finsler do tipo Randers.

Javaloyes (2023), por outro lado, generaliza o modelo do Markvorsen, ao considerar, além da inclinação do relevo, a contribuição do vento variando no tempo. As contribuições dele diferem essencialmente das anteriores, pois as frentes de onda não estão restritas a serem elípticas, dando ênfase também aos pontos de cruzamento do fogo. Ademais, as trajetórias de propagação mais rápidas do fogo aparecem como geodésicas tipo-luz para uma métrica de Lorentz-Finsler.

Neste capítulo, apresentamos um modelo mais sofisticado para a propagação do fogo, que pode servir como uma base inicial para um modelo ainda mais complexo, fundamentado em dados experimentais. Dentre os várias avanços, destacamos que este modelo elimina a restrição quadrática (ou seja, a propagação elíptica), resultando em efeitos da inclinação e do vento que são qualitativamente distintos. Vale ressaltar que, por exemplo, programas como FARSITE tratam o vento e a inclinação da mesma natureza. Em síntese, temos que a influência da inclinação é modelada por uma métrica de Matsumoto; e em condições de vento, a propagação infinitesimal assume a forma de uma semi-elipse dupla. O presente capítulo baseia-se fortemente nos resultados de [22, 23, 27].

3.1 Incêndio florestal em uma superfície

Seja $\hat{N} \subset \mathbb{R}^3$ a superfície onde o incêndio florestal ocorre, (x, y, z) as coordenadas locais em \mathbb{R}^3 e $N \subset \mathbb{R}^2$ a projeção de \hat{N} no plano xy (figura 3.1). Em outras palavras, estamos selecionando um gráfico de coordenadas (global) (N, \hat{z}^{-1}) , onde \hat{z} é um gráfico:

$$\begin{aligned} \hat{z} : N \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \hat{N} \subset \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto \hat{z}(x, y) := (x, y, z(x, y)). \end{aligned}$$

Essas coordenadas (x, y) serão chamadas de coordenadas aéreas de \hat{N} . No modelo, trabalharemos principalmente nelas, transferindo todas as informações da superfície \hat{N} para N via \hat{z} para calcular a propagação do incêndio florestal de forma mais fácil, e depois de volta para \hat{N} para observar a propagação real.

Para incluir o tempo t no modelo, definimos o espaço-tempo $M := \mathbb{R} \times N$, sendo $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ a projeção natural. Em cada ponto $(t, p) \in M$, o fogo se espalha sobre N em todas as direções, onde o espaço das velocidades do fogo em $(t, p) \in M$ será dado pela indicatriz $\Sigma_{(t,p)}$ no espaço vetorial $\text{Ker}(dt_{(t,p)}) = T_{(t,p)}(\{t\} \times N) := T_p N$, ou seja, $\text{Ker}(dt_{(t,p)})$ é composto de cópias de $T_p N$ em diferentes tempos. Isso significa que um vetor $v \in \text{Ker}(dt_{(t,p)})$ representa a velocidade da frente de fogo na direção definida por

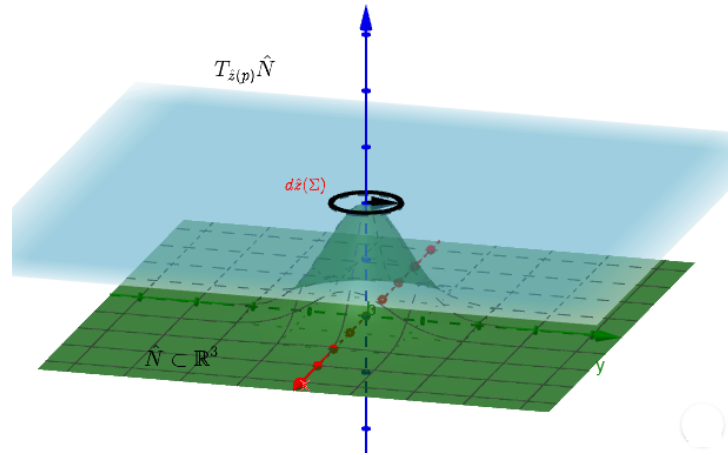


Figura 3.1: Superfície onde ocorre o incêndio.

$v \in T_p N$ no tempo $t \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $v \in \Sigma_{(t,p)}$.

Neste cenário, assumiremos que o incêndio florestal começa a partir de uma curva fechada simples $S_0 = \partial B_0$, fronteira da área inicial $B_0 \subset M$ queimada em $\{t = 0\} := \{0\} \times N$, com B_0 compacta. Ou seja, S_0 é a frente de fogo inicial. Assim, nosso objetivo neste contexto é encontrar a métrica F que melhor se ajusta às velocidades do fogo.

3.2 Efeito da inclinação

Considere que o incêndio florestal se espalha sobre uma superfície $\hat{N} \subset \mathbb{R}^3$. Vamos estudar a velocidade do fogo s_{fogo} como uma função positiva em $\mathbb{R} \times N \times \mathbb{S}^1$. Em outras palavras, dado um tempo $t \in \mathbb{R}$, um ponto $p = (x, y) \in N$ e uma direção (orientada) $\theta \in [0, 2\pi) \cong \mathbb{S}^1$ em p , a velocidade do fogo é dada por:

$$s_{fogo}(t, p, \theta) = a(t, p) + h(t, p)[1 + \cos(\delta(p, \theta))], \quad (3.1)$$

em que:

- $a(t, p)$ e $h(t, p)$ são funções reais positivas em $M = \mathbb{R} \times N$: $h(t, p)$ é a chama do fogo, enquanto a soma $a(t, p) + h(t, p)$ refere-se à velocidade total de espalhamento do fogo sobre um plano sem inclinação ($\delta = \frac{\pi}{2}$). Fixando um instante de tempo, ambas as funções podem variar devido à mudança nas condições de vegetação e solo de um ponto a outro; fixando um ponto, a variação delas depende da temperatura, umidade, chuva etc. Portanto, $a(t, p)$ e $h(t, p)$ podem variar no espaço e no tempo, refletindo tanto as condições de combustível (vegetação) como as meteorológicas.
- $\delta(p, \theta) \in (0, \pi)$ é o ângulo de inclinação, ou seja, o ângulo entre o eixo Oz e a superfície \hat{N} na direção θ , isto é,

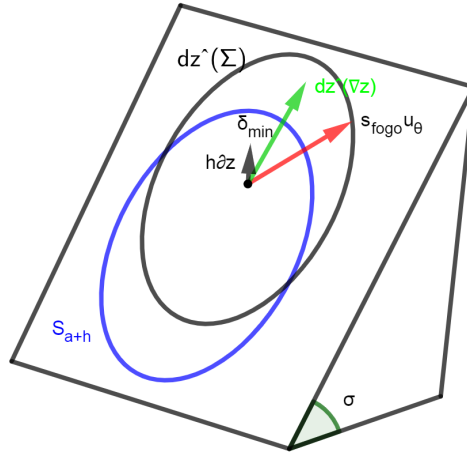


Figura 3.2: Propagação do fogo em uma superfície.

$$\cos(\delta(p, \theta)) = \frac{\langle d\hat{z}_p(\cos \theta, \sin \theta), \partial z|_p \rangle}{\|d\hat{z}_p(\cos \theta, \sin \theta)\|}. \quad (3.2)$$

Dessarte, o termo $h \cos \delta$ é a projeção da frente de chama no plano tangente à superfície, representando a contribuição da inclinação para a propagação do fogo. Fisicamente, o fogo se move mais rápido para cima do que para baixo, uma vez que a chama (vertical) está mais próxima do solo na direção ascendente. Aqui, esse fato é modelado através do vetor vertical $h\partial_z$, cuja contribuição é maior ao mover-se para cima, ou seja, quando δ é menor (ver figura 3.2). Note que $s_{fogo} > 0$.

3.3 Construção da métrica de Matsumoto

Dado qualquer $\theta \in [0, 2\pi)$, $u_\theta|_p$ é o vetor unitário correspondente em $T_{\hat{z}(p)}\hat{N}$, ou seja,

$$u_\theta|_p := \frac{d\hat{z}_p(\cos \theta, \sin \theta)}{\|d\hat{z}_p(\cos \theta, \sin \theta)\|} = \frac{(\cos \theta, \sin \theta, \cos \theta \partial_x z|_p + \sin \theta \partial_y z|_p)}{\sqrt{1 + (\cos \theta \partial_x z|_p + \sin \theta \partial_y z|_p)^2}}. \quad (3.3)$$

Assim, $v_{fogo}(t, p, \theta) := s_{fogo}(t, p, \theta)u_\theta|_p \in T_{\hat{z}(p)}\hat{N}$ modela o vetor velocidade real do fogo em (t, p) na direção θ . Por outro lado, dado qualquer $v \in T_p N$, θ_v denotará sua direção angular, determinada por $\tan \theta_v = \frac{v_2}{v_1}$. Usando $u_\theta|_p$ dado como acima, (3.1) torna-se

$$s_{fogo}(t, p, \theta) = a(t, p) + h(t, p)(1 + \langle u_\theta|_p, \partial_z|_p \rangle), \quad (3.4)$$

ou, multiplicando por s_{fogo} em ambos os lados, a equação anterior resulta em :

$$s_{fogo}(t, p, \theta)^2 = a(t, p)s_{fogo}(t, p, \theta) + h(t, p)(s_{fogo}(t, p, \theta) + \langle s_{fogo}(t, p, \theta)u_\theta|_p, \partial_z|_p \rangle). \quad (3.5)$$

Nosso objetivo é construir uma métrica Finsler F em $\text{Ker}(dt) \equiv T_p N$ cujos vetores unitários representam os vetores velocidades do fogo, ou seja,

$$\begin{aligned} F_{(t,p)}(v) = 1 &\Leftrightarrow d\hat{z}_p(v) = s_{fogo}(t, p, \theta_v)u_{\theta_v}|_p \Leftrightarrow \|d\hat{z}_p(v)\| = s_{fogo}(t, p, \theta_v) \Leftrightarrow \\ \alpha_p(v)^2 &= a(t, p)\alpha_p(v) + h(t, p)(\alpha_p(v) + \langle d\hat{z}_p(v), \partial_z|_p \rangle) \\ &= a(t, p)\alpha_p(v) + h(t, p)(\alpha_p(v) + \beta_p(v)), \end{aligned}$$

onde na última equivalência usamos (3.5) e a notação

$$\beta_p(v) := dz_p(v) = v_1 \partial_x z|_p + v_2 \partial_y z|_p, \quad (3.6)$$

$$\alpha_p(v) := \|d\hat{z}_p(v)\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \beta_p(v)^2}, \quad (3.7)$$

para qualquer $v = (v_1, v_2) \in T_p N$.

Portanto, a indicatriz Σ de F em um tempo $t \in \mathbb{R}$ e um ponto $p \in N$ deve ser

$$\Sigma_{(t,p)} = \{v \in \text{Ker}(dt_{(t,p)}) : Q_{(t,p)}(v) = 0\}, \quad (3.8)$$

onde

$$Q_{(t,p)}(v) := \alpha_p(v)^2 - a(t, p)\alpha_p(v) - h(t, p)(\alpha_p(v) + \beta_p(v)). \quad (3.9)$$

Dessa maneira, o candidato à métrica F é dado por

$$F_{(t,p)}(v) = \frac{\alpha_p(v)^2}{a(t, p)\alpha_p(v) + h(t, p)(\alpha_p(v) + \beta_p(v))}. \quad (3.10)$$

Observação 3.3.1. Para cada t , a fórmula em (3.10) fornece uma métrica da forma (1.8), ou seja, uma métrica de Matsumoto. Fazendo $c = (a + h)$ e $\frac{g}{2} = h$ em (1.8), obtemos:

$$\hat{F}_{(t,p)}(v) = \frac{\alpha_p(v)^2}{a(t, p)\alpha_p(v) + h(t, p)(\alpha_p(v) - \beta_p(v))}. \quad (3.11)$$

A sutil diferença entre F e \hat{F} dadas por (3.10) e (3.11) é o sinal \pm na frente de β . O sinal $-$ na expressão de \hat{F} significa que para o caminhante é mais vantajoso descer, enquanto que o sinal em $+$ em F indica que para o fogo é mais vantajoso subir.

Em síntese, o modelo supracitado para a propagação do fogo sobre uma superfície é análogo ao modelo de Matsumoto, mas trocando as direções para cima e para baixo. Sob esse viés, $(a + h)$ desempenha o papel da velocidade inicial c , enquanto h (ou g) representa a razão pela qual é mais eficaz ir para cima (ou para baixo).

Investigaremos se a métrica dada em (3.10) é de fato uma métrica Finsler. Para isso, precisamos definir a função inclinação.

Definição 3.3.1. A *função de inclinação* σ é a função real positiva em N tal que, para cada $p = (x, y) \in N$, $\sigma(p)$ é o ângulo de inclinação, ou seja, o ângulo entre o plano tangente $T_{\hat{z}(p)}\hat{N}$ e o plano horizontal $z = 0$ (veja a figura 3.2). Ela é dada por

$$\cos(\sigma(p)) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x z|_p)^2 + (\partial_y z|_p)^2}}.$$

Observação 3.3.2. A função de inclinação σ está relacionada a δ . De fato, observe que

$$\sigma(p) = \frac{\pi}{2} - \delta_{\min}(p),$$

onde $\delta_{\min}(p) := \min\{\delta(p, \theta_v) : v \in T_p N\} = \delta(p, \theta_{\nabla z})$, com $\nabla z = (\partial_x z, \partial_y z)$, ou seja, δ atinge seu mínimo na direção da máxima inclinação $d\hat{z}(\nabla z)$. Na direção oposta $d\hat{z}(-\nabla z)$, obtemos δ_{\max} ou seja, $\delta_{\max}(p) = \delta(p, \theta_{-\nabla z}) = \pi - \delta_{\min}(p)$.

Para garantir que uma métrica de Matsumoto seja uma métrica Finsler, é necessária a imposição de uma restrição. A proposição seguinte fornece uma condição necessária e suficiente para que a métrica em (3.10) seja Finsler.

Proposição 3.3.1. $F : \text{Ker}(dt) \rightarrow [0, \infty)$, definido pontualmente por (3.2) com $F(0) := 0$, é uma métrica de Finsler em cada $t \in \mathbb{R}$ se, e somente se, a função de inclinação satisfaz

$$2 \sin(\sigma(p)) < \frac{a(t, p) + h(t, p)}{h(t, p)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, p \in N. \quad (3.12)$$

Como condição suficiente, isso vale se $a(t, p) > h(t, p)$ para todo $t \in \mathbb{R}, p \in N$.

Demonstração. Como as funções $\hat{z}(p)$, $a(t, p)$ e $h(t, p)$ variam suavemente com t e p , basta verificar as condições sob as quais $F_{(t,p)}$ é uma métrica Finsler para todo $t \in \mathbb{R}, p \in N$. Com efeito,

1 $F_{(t,p)}$ é sempre positiva. Com efeito, perceba que

$$\cos(\delta(p, \theta_v)) = \frac{\langle d\hat{z}_p(v), \partial_z|_p \rangle}{\|d\hat{z}_p(v)\|} = \frac{\beta_p(v)}{\alpha_p(v)} \quad (3.13)$$

e, assim, a partir de (3.10), $F_{(t,p)}$ é positiva em $\text{Ker}(dt_{(t,p)}) \setminus 0$ se, e somente se,

$$\cos(\delta(p, \theta_v)) > -\frac{a(t, p) + h(t, p)}{h(t, p)},$$

$\forall v \in \text{Ker}(dt_{(t,p)}) \setminus 0$, que sempre vale, posto que

$$0 < \frac{s_{fogo}}{h(t, p)} = \frac{a(t, p) + h(t, p) + h(t, p)\langle u_\theta, \partial_z \rangle}{h(t, p)} = \frac{a(t, p) + h(t, p)}{h(t, p)} + \cos(\delta(p, \theta_v)).$$

Além disso, como α_p e β_p são ambos suaves, $F_{(t,p)}$ também é suave em $\text{Ker}(dt_{(t,p)}) \setminus 0$. Também, a hipótese de que $F_{(t,p)}(0) := 0$ torna F contínua e $F_{(t,p)}(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

2] $F_{(t,p)}$ é positiva 1-homogênea, uma vez que $\alpha_p(\lambda v) = \lambda \alpha_p(v)$ e $\beta_p(\lambda v) = \lambda \beta_p(v)$ para todo $\lambda > 0$.

3] Aplicando o Lema 1.2.1 e fazendo $\tilde{\alpha} = (a+h)\alpha$, $\tilde{\beta} = h\beta$, o tensor fundamental de $F_{(t,p)}$ é positivo definido em todas as direções ou, equivalentemente, a indicatriz $\Sigma_{(t,p)}$ é fortemente convexa se, e somente se,

$$(a(t,p) + h(t,p))\alpha_p(v) + 2h(t,p)\beta_p(v) > 0, \quad \forall v \in \text{Ker}(dt_{(t,p)}) \setminus 0,$$

o que é equivalente a

$$2 \cos(\delta(p, \theta v)) > -\frac{a(t,p) + h(t,p)}{h(t,p)}, \quad \forall v \in \text{Ker}(dt_{(t,p)}) \setminus 0. \quad (3.14)$$

Observe que essa condição é mais restritiva quanto maior for δ , com $\delta \in (0, \pi)$. De fato, a partir da observação 3.3.2, $\delta_{max} = \pi - \delta_{min} = \frac{\pi}{2} + \sigma$ e usando que $\cos(\frac{\pi}{2} + \sigma) = -\sin \sigma$, (3.14) é equivalente à desigualdade em (3.12). Ademais, se $a(t,p) > h(t,p)$, então $\frac{a(t,p)+h(t,p)}{h(t,p)} > 2 > 2 \sin(\sigma(p))$, que sempre vale, pois $\sigma \in (0, \frac{\pi}{2})$. \square

Observação 3.3.3. Quando $a > h$, temos que a trajetória do fogo é mais focada a favor do vento. Se $a > h$, o crescimento do fogo será governado pela inclinação, e a propagação do fogo foca nas regiões mais íngremes do terreno.

3.4 Efeito do vento nos incêndios

Essencialmente neste modelo o vento induz uma espécie de crescimento semielíptico duplo do fogo, como na abordagem do Andersen. Sendo assim, nesse novo contexto, a velocidade do fogo é dada por:

$$s_{fogo}(t, p, \theta) = \frac{a(t,p) [1 - \varepsilon(t,p)^2]}{1 - \varepsilon(t,p) \cos(\tilde{\theta}(p, \theta) - \tilde{\phi}(t,p))} + h(t,p)(1 + \cos(\delta(t,p))), \quad (3.15)$$

onde

- $\varepsilon \in [0, 1)$ é a excentricidade da elipse $E \subset \mathbb{R}^2$ centrada em um de seus focos, com seu semieixo maior a orientado na direção $\phi \in [0, 2\pi)$ (ângulo em relação ao eixo x). Então $\frac{a(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon \cos(\theta-\phi)}$ é o comprimento do vetor do foco até E na direção θ .
- Quando $E \subset T_{\hat{z}(p)}\hat{N} \subset \mathbb{R}^3$, trocamos os ângulos ϕ, θ , que medem a direção em $T_p N \subset \mathbb{R}^2$ em relação ao eixo x , por $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\theta}$, que medem a direção em $T_{\hat{z}(p)}\hat{N}$ em relação a $d\hat{z}(\partial_x)$. Usando (3.3), note que

$$\cos \tilde{\phi} = \frac{\langle u_\phi|_p, d\hat{z}_p(\partial_x) \rangle}{\|d\hat{z}_p(\partial_x)\|} = \frac{\cos \phi + \cos \phi (\partial_x z|_p)^2 + \sin \phi \partial_x z|_p \partial_y z|_p}{\sqrt{1 + (\cos \phi \partial_x z|_p + \sin \phi \partial_y z|_p)^2} \sqrt{1 + (\partial_x z|_p)^2}}$$

$$\sin \tilde{\phi} = \frac{\langle u_\phi|_p, d\hat{z}_p(\partial_y) \rangle}{\|d\hat{z}_p(\partial_y)\|} = \frac{\sin \phi + \sin \phi (\partial_x z|_p)^2 + \cos \phi \partial_x z|_p \partial_y z|_p}{\sqrt{1 + (\cos \phi \partial_x z|_p + \sin \phi \partial_y z|_p)^2} \sqrt{1 + (\partial_y z|_p)^2}}$$

(as mesmas equações também se aplicam a $\tilde{\theta}$ e θ). Então, o primeiro termo do lado direito de (3.15) é o comprimento do vetor da origem até E na direção θ .

- Quando o termo elíptico é adicionado ao termo h em (3.15) (desconsiderando $\cos \delta$), então a forma obtida torna-se a soma direcional da elipse E e da esfera S_h de raio h centrada na origem, ou seja, para cada direção orientada θ , somamos os vetores que vão da origem até E e S_h . Isso se assemelha a uma semi-elipse dupla¹ (veja $E + S_h$ na figura 3.3) com semieixo maior $a + h$, que seria a indicatriz sem inclinação.
- O termo $h \cos \delta$ representa a contribuição da inclinação como no caso anteriormente discutido.

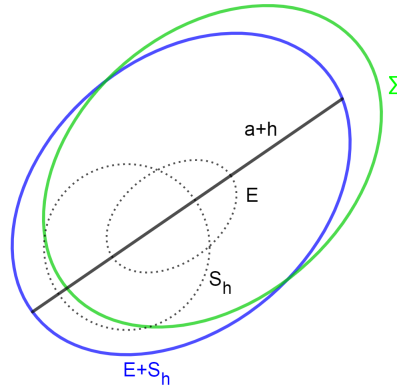


Figura 3.3: Semi-elipse dupla $E + S_h$.

Usando (3.4), e a identidade trigonométrica $\cos(\tilde{\theta} - \tilde{\phi}) = \cos \tilde{\theta} \cos \tilde{\phi} + \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi}$, (3.15) é equivalente à:

$$s_{fogo}(t, p, \theta) = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 - \varepsilon(\cos \tilde{\theta} \cos \tilde{\phi} + \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi})} + h(1 + \langle u_\theta, \partial_z \rangle). \quad (3.16)$$

e, portanto, procedendo de maneira análoga como na seção anterior, um vetor $v \in T_p N$ representa a velocidade do fogo, i.e., $\|d\hat{z}_p(v)\| = s_{fogo}(t, p, \theta_v)$, se, e somente se ,

$$\alpha(v)^2 = \alpha(v) \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 - \varepsilon(\cos \tilde{\theta}_v \cos \tilde{\phi} + \sin \tilde{\theta}_v \sin \tilde{\phi})} + h(\alpha(v) + \beta(v)), \quad (3.17)$$

onde α e β são dados por (3.6) e (3.7), e $\tilde{\theta}_v$ é o ângulo entre $d\hat{z}_p(v)$ e $d\hat{z}_p(\partial_x)$, ou seja,

¹Originalmente, o termo semi-elipse dupla (ou elipse dupla) referia-se especificamente à figura obtida pela união de duas semi-elipses com um eixo menor comum.

$$\cos \tilde{\theta}_v = \frac{\langle d\hat{z}_p(v), d\hat{z}_p(\partial_x) \rangle}{\alpha_p(v) \|d\hat{z}_p(\partial_x)\|} = \frac{v_1 + \partial_x z|_p \beta_p(v)}{\alpha_p(v) \sqrt{1 + (\partial_x z|_p)^2}},$$

$$\sin \tilde{\theta}_v = \frac{\langle d\hat{z}_p(v), d\hat{z}_p(\partial_y) \rangle}{\alpha_p(v) \|d\hat{z}_p(\partial_y)\|} = \frac{v_2 + \partial_y z|_p \beta_p(v)}{\alpha_p(v) \sqrt{1 + (\partial_y z|_p)^2}}.$$

Portanto, nós definimos uma 1-forma

$$\omega_{(t,p)}(v) := \frac{v_1 + \partial_x z|_p \beta_p(v)}{\alpha_p(v) \sqrt{1 + (\partial_x z|_p)^2}} \cos \tilde{\phi}(t,p) + \frac{v_2 + \partial_y z|_p \beta_p(v)}{\alpha_p(v) \sqrt{1 + (\partial_y z|_p)^2}} \sin \tilde{\phi}(t,p),$$

então (3.17) se reduz a

$$\alpha(v)^2 = \alpha(v)^2 \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 - \varepsilon\omega(v)} + h(\alpha(v) + \beta(v))$$

Seguindo os mesmos passos vistos anteriormente, chegamos a uma expressão semelhante para a indicatriz $\Sigma_{(t,p)}$:

$$Q_{(t,p)}(v) := \alpha_p(v)^2 \left(1 - \frac{a(t,p)(1 - \varepsilon(t,p)^2)}{\alpha_p(v) - \varepsilon(t,p)\omega_{(t,p)}(v)} \right) - h(t,p)(\alpha_p(v) + \beta_p(v)),$$

e para a métrica F :

$$F_{(t,p)}(v) = \frac{\alpha_p(v)^2}{\alpha_p(v)^2 \frac{a(t,p)(1 - \varepsilon(t,p)^2)}{\alpha_p(v) - \varepsilon(t,p)\omega_{(t,p)}(v)} + h(t,p)(\alpha_p(v) + \beta_p(v))} \quad (3.18)$$

para todo $v \in \text{Ker}(dt_{(t,p)}) \setminus 0$.

Observação 3.4.1. Note que (3.18) se reduz a uma métrica de Matsumoto quando $\varepsilon = 0$. Isso garante que enquanto a desigualdade presente na Proposição 3.3.1 valer, a métrica anterior é uma métrica Finsler para ε suficientemente pequeno, já que como $\frac{1}{2}\text{Hess}F^2$ depende suavemente de ε , ele é positivo definido para $\varepsilon = 0$. Segue que ele é positivo definido em uma vizinhança do 0.

3.5 Cálculo da frente de fogo

Considere a região $B_0 \subset \{t = 0\}$ o foco do incêndio (região onde se inicia o incêndio) que está delimitada por uma curva fechada S_0 . Futuramente, ele se propagará para alguma região $J^+(B_0) \subset M = \mathbb{R} \times N$, o futuro causal de B_0 . Note que $\partial J^+(B_0)$ fornece duas frentes de fogo: a que se dirige para fora de B_0 e a que se dirige para dentro. Como B_0 já é uma área queimada, a frente de onda de interesse é que aponta para fora, ou seja, $\partial J^+(B_0)$, a qual fornece as trajetórias mais externas do fogo em cada $t_0 > 0$.

Em outras palavras, $\partial J^+(B_0) \cap \{t = t_0\}$ é a frente de fogo em t_0 (princípio anisotrópico reonômico de Huygens ²). A aplicação do fogo

$$\hat{f} : [0, +\infty) \times S_0 \rightarrow M, (t, s) \mapsto \hat{f}(t, s) = (t, f(t, s))$$

é definida da seguinte maneira: para cada $s \in S_0$, $t \mapsto \hat{f}(t, s)$ é a geodésica cônica (ou prégeodésica tipo-luz) parametrizada por t do espaço-tempo de Finsler $(M, G := dt^2 - F^2)$, assumido aqui como globalmente hiperbólico, com velocidade inicial sendo o único vetor tipo-luz G -ortogonal a S_0 e apontando para fora de S_0 , ou seja, a projeção do vetor velocidade em TN é F -ortogonal a S_0 e aponta para fora de S_0 (figura 3.5). Então, a curva $t \mapsto \hat{f}(t, s_0) = (t, f(t, s_0))$ representa a trajetória do fogo no espaço-tempo a partir de $s_0 \in S_0$, sendo sua projeção $t \mapsto f(t, s_0)$ a trajetória espacial em N . Cada uma dessas curvas permanece inteiramente em $\partial J^+(B_0)$ e minimiza o tempo de propagação no domínio de sua função de corte

$$c : S_0 \rightarrow [0, \infty], s \mapsto c(s) := \max\{t : \hat{f}(t, s) \in \partial J^+(B_0)\}.$$

Se $c(s_0) = t_0 < \infty$ para algum $s_0 \in S_0$, então t_0 e $\hat{f}(t_0, s_0)$ são, respectivamente, o instante de corte e o ponto de corte da trajetória correspondente do incêndio florestal.

Sabe-se que sempre existe um tempo $\epsilon > 0$ tal que $[0, \epsilon]$ não admite ponto de corte (Teorema 3.6.1). Logo, dado $t_0 \in [0, \epsilon]$ a aplicação $s \in S_0 \mapsto \hat{f}(t_0, s)$ define uma curva suave, denotada por S_{t_0} , que coincide com a frente de chamas no instante t_0 . Assim podemos determinar diretamente como o fogo evolui até $t = \epsilon$.

A partir de agora, no que tange ao cálculo da frente do fogo, usaremos a seguinte identificação:

- $\partial_t \hat{f}(t, s) := (1, \partial_t f(t, s))$ e $\partial_s \hat{f}(t, s) := (0, \partial_s f(t, s))$ são os vetores tangentes das curvas $t \mapsto \hat{f}(t, s)$ e S_t , respectivamente, com $t \in [0, \epsilon]$.
- $(x^0, x^1, x^2) := (t, x, y)$, onde (t, x, y) são as coordenadas locais em $M = \mathbb{R} \times N$.
- $g_{ij}(\hat{v}) := g_{\hat{v}}^G(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ para qualquer $\hat{v} \in TM \setminus \text{Span}(\frac{\partial}{\partial t})$, onde g^G é o tensor fundamental de $G = dt^2 - F^2$. Em particular, escolheremos $\hat{v} = \partial_t \hat{f}$, caso em que a relação entre os coeficientes de $G_{\partial_t \hat{f}}^G$ e aqueles de $G_{\partial_t \hat{f}}^F$ é

$$\{g_{ij}(\partial_t \hat{f})\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -g_{11}^F(\partial_t f) & -g_{12}^F(\partial_t f) \\ 0 & -g_{12}^F(\partial_t f) & -g_{22}^F(\partial_t f) \end{pmatrix}.$$

- $g^{ij}(\hat{v})$ são os coeficientes da matriz inversa de $\{g_{ij}(\hat{v})\}$.

²Cada ponto da frente do fogo $\text{front}(t_0)$ no tempo $t = t_0$ torna-se a fonte de uma frente secundária.

A partir daqui estaremos usando a convenção da soma de Einstein.

Proposição 3.5.1. *Para cada $(s, u) \in S \times \mathbb{S}^{r-1}$, o mapa de onda $\hat{f}(t, s, u) = (t, f(t, s, u)) = (x^0, x^1(t, s, u), \dots, x^n(t, s, u))$ é dado pelo seguinte sistema de EDO:*

$$\partial_t^2 x^k = -\gamma_{ij}^k(\partial_t \hat{f}) \partial_t x^i \partial_t x^j + \gamma_{ij}^0(\partial_t \hat{f}) \partial_t x^i \partial_t x^j \partial_t x^k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Portanto, as trajetórias espaciais da onda são as soluções $f(t, s, u) = (x^1(t, s, u), \dots, x^n(t, s, u))$ cujas condições iniciais satisfazem:

1. $f(0, s, u) = (x_0^1(s, u), \dots, x_0^n(s, u)) = s$,
2. $\partial_t f(0, s, u) = (\partial_t x_1(0, s, u), \dots, \partial_t x_n(0, s, u)) = u$.

Demonstração. Vide [22]. □

Para obter o mapa de fogo, precisamos calcular as geodésicas tipo-luz de (M, G) , ou seja, resolver o sistema de EDO dado pelas equações geodésicas (Teorema 3.5.1). Note que nessas equações aparecem os símbolos de Christoffel de G , que são definidos como

$$\gamma_{ij}^k(\hat{v}) := \frac{1}{2} g^{kr}(\hat{v}) \left(\frac{\partial g_{rj}}{\partial x^i}(\hat{v}) + \frac{\partial g_{ri}}{\partial x^j}(\hat{v}) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r}(\hat{v}) \right), \quad i, j, k = 0, 1, 2.$$

para qualquer $\hat{v} = (\tau, v) = (\tau, v^1, v^2) \in TM \setminus \text{Span} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$ [32].

Alternativamente, o mapa de fogo também é caracterizado em $[0, \varepsilon] \times S_0$ pelo sistema de EDP dado pelas seguintes condições de ortogonalidade:

$$\begin{cases} F(\partial_t f(t, s)) = 1, \text{ com } \partial_t f(t, s) \text{ apontando para fora,} \\ \partial_t f(t, s) \perp_F \partial_s f(t, s). \end{cases} \quad (3.19)$$

Ou seja, as trajetórias das chamas são curvas F -unitárias que se propagam ortogonalmente às frentes de chamas a partir de S_0 .

Note que, se S_0 estiver parametrizada no sentido anti-horário, para que $\partial_t f(t, s)$ aponte para fora, precisamos apenas garantir que

$$\det \begin{pmatrix} \partial_t x(0, s) & \partial_s x(0, s) \\ \partial_t y(0, s) & \partial_s y(0, s) \end{pmatrix} > 0 \quad (3.20)$$

em algum $s \in S_0$.

Dadas as condições (3.19) e (3.20), somos levados ao seguinte resultado:

Teorema 3.5.1. *O mapa de incêndio $\hat{f}(t, s) = (t, f(t, s))$ para um incêndio florestal dado pela métrica (3.18) é determinado em $t \in [0, \varepsilon]$ pelo seguinte sistema de EDP para*

as derivadas parciais $\partial_t f(t, s)$ e $\partial_s f(t, s)$, com condição inicial $f(0, s) = s \in S_0$:

$$\begin{cases} 0 = \alpha (\partial_t f)^2 \left(1 - \frac{a(1-\varepsilon^2)}{\alpha (\partial_t f) - \varepsilon \omega (\partial_t f)} \right) - h(\alpha (\partial_t f) + \beta (\partial_t f)) \\ 0 = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{[\alpha (\partial_t f) - \varepsilon \omega (\partial_t f)]^2} [\varepsilon (2 \langle d\hat{z}(\partial_t f), d\hat{z}(\partial_s f) \rangle \omega (\partial_t f) \\ - \alpha (\partial_t f)^2 \omega (\partial_s f)) - \alpha (\partial_t f) \langle d\hat{z}(\partial_t f), d\hat{z}(\partial_s f) \rangle] \\ + 2 \langle d\hat{z}(\partial_t f), d\hat{z}(\partial_s f) \rangle - h \left(\frac{\langle d\hat{z}(\partial_t f), d\hat{z}(\partial_s f) \rangle}{\alpha (\partial_t f)} + \beta (\partial_s f) \right) \end{cases} \quad (3.21)$$

com $\partial_t f$ apontando para fora (i.e., satisfazendo (3.20). Alternativamente, $\hat{f}(t, s) = (t, x^1(t, s), x^2(t, s))$, com $x^0 = t$, é determinado em $t \in [0, \infty)$ pelo seguinte sistema de EDO:

$$\partial_t^2 x^k = -\gamma_{ij}^k (\partial_t \hat{f}) \partial_t x^i \partial_t x^j + \gamma_{ij}^0 (\partial_t \hat{f}) \partial_t x^i \partial_t x^j \partial_t x^k, \quad k = 1, 2 \quad (3.22)$$

com condições iniciais

- $f(0, s) = s \in S_0$,
- $\partial_t f(0, s)$ é o único F -vetor unitário F -ortogonal a $\partial_s f(0, s)$ e apontando para fora, isto é, ele é dado respectivamente por (3.21) e (3.20).

Demonstração. A condição de ortogonalidade $F(\partial_t f) = 1$ aplicada em (3.18) nos dá a primeira equação do sistema acima. Ademais, calculando o tensor fundamental g^F de (3.18), temos:

$$\begin{aligned} g_v^F(v, u) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} F^2(v + su) \Big|_{s=0} = F(v) \frac{\partial}{\partial s} F(v + su) \Big|_{s=0} \\ &= \frac{\alpha(v)^2}{\left[\frac{\alpha(v)^2 a(1-\varepsilon^2)}{\alpha(v) - \varepsilon \omega(v)} + h(\alpha(v) + \beta(v)) \right]^3} \\ &\quad \left\{ 2 \langle d\hat{z}(v), d\hat{z}(u) \rangle \left[\alpha(v)^2 \frac{a(1-\varepsilon^2)}{\alpha(v) - \varepsilon \omega(v)} + h(\alpha(v) + \beta(v)) \right] \right. \\ &\quad + \frac{a(1-\varepsilon^2)}{[\alpha(v) - \varepsilon \omega(v)]^2} [\varepsilon \alpha(v)^2 (2 \langle d\hat{z}(v), d\hat{z}(u) \rangle \omega(v) - \alpha(v)^2 \omega(u)) \\ &\quad \left. - \alpha(v)^3 \langle d\hat{z}(v), d\hat{z}(u) \rangle] - h \alpha(v)^2 \left(\frac{\langle d\hat{z}(v), d\hat{z}(u) \rangle}{\alpha(v)} + \beta(u) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Aplicando a segunda condição de ortogonalidade $\partial_t f \perp_F \partial_s f$, e fazendo $u = \partial_s f$, $v = \partial_t f$ acima, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{a(1-\varepsilon^2)}{[\alpha(\partial_t f) - \varepsilon\omega(\partial_t f)]^2} [\varepsilon(2\langle d\hat{z}(\partial_t f), d\hat{z}(\partial_s f) \rangle \omega(\partial_t f) - \alpha(\partial_t f)^2 \omega(\partial_s f)) \\
&\quad - \alpha(\partial_t f) \langle d\hat{z}(d\hat{z}(\partial_t f), d\hat{z}(\partial_s f)) \rangle] \\
&\quad + 2 \frac{\langle d\hat{z}(\partial_t f), d\hat{z}(\partial_s f) \rangle}{(\alpha(\partial_t f))^2} \left[\frac{\alpha(\partial_t f)^2 a(1-\varepsilon^2)}{\alpha(\partial_t f) - \varepsilon\omega(\partial_t f)} + h(\alpha(\partial_t f) + \beta(\partial_t f)) \right] \\
&\quad - h \left(\frac{\langle d\hat{z}(\partial_t f), d\hat{z}(\partial_s f) \rangle}{\alpha(\partial_t f)} + \beta(\partial_s f) \right),
\end{aligned}$$

a qual se reduz à segunda equação de (3.21) ao aplicar $F(\partial_t f) = 1$. A parte dois do teorema segue diretamente da Proposição 3.5.1. \square

Observação 3.5.1. *Seja $S_0^{\perp G}$ (resp. $S_0^{\perp F}$) o conjunto de vetores em TM (rep. TN) que são G -ortogonal (resp. F -ortogonal) a S_0 . Note as seguintes equivalências entre trabalhar com G e F : para qualquer $\hat{v} = (1, v) \in T_p M \setminus \text{Span}(\frac{\partial}{\partial t}|_p)$, $\hat{w} = (0, w) \in T_p M$,*

$$\hat{v} \text{ é tipo-luz} \iff G(\hat{v}) = 0 \iff F(v) = 1,$$

$$\hat{v} \perp_G \hat{w} \iff g_v^G(\hat{v}, \hat{w}) = 0 \iff g_v^F(v, w) = 0 \iff v \perp_F w.$$

tal que

$$\begin{aligned}
\nu(S_0) &:= \{ \hat{u} = (1, u) \in T_p M : p \in S_0, G(\hat{u}) = 0, \hat{u} \in S_0^{\perp G} \} \\
&= \{ \hat{u} = (1, u) \in T_p M : p \in S_0, F(u) = 1, u \in S_0^{\perp F} \}
\end{aligned}$$

é o cone tipo-luz ortogonal unitário a S_0 .

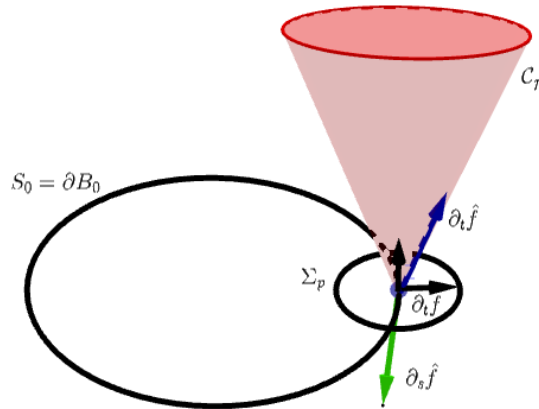


Figura 3.4: Cone luminoso.

Lema 3.5.1. *Qualquer $u \in \Sigma^F(0, s) \cap S_F^\perp$ (ou seja, u é F -unitário e F -ortogonal a S_0 , de modo que $\hat{u} = (1, u) \in \nu(S_0)_{(0,s)}$) pode ser escrito como*

$$u = v + W(0, s), \quad (3.23)$$

onde $h(v, v) = 1$, $v \in S_h^\perp$, ou seja, $v \in T_s N$ é h -unitário e h -ortogonal a S_0 .

Demonstração. Colocando $v := u - W(0, s)$, temos que $F(u) = 1$ é equivalente a $h(v, v) = 1$ (Proposição 1.6.1). Agora, observe que para qualquer $w \in T_s N$, $u \perp_F w$ significa que w é tangente à indicatriz Σ^F em u , ou equivalentemente, w é tangente a $\Sigma^h = \Sigma^F - W$ em $u - W(0, s)$, ou seja, $u - W(0, s) \perp_h w$. \square

Corolário 3.5.1. *No caso de incêndios florestais com data de Zermelo (h, W) , a condição (3.19) é equivalente à*

$$\begin{aligned} h(W, W) - 2h(\partial_t f, W) + h(\partial_t f, \partial_t f) &= 1 \\ h(\partial_t f - W, \partial_s f) &= 0, \end{aligned}$$

com $\partial_t f$ apontando para fora.

Demonstração. Com efeito, pelo Lema 3.5.1, temos que

$$\begin{aligned} F(\partial_t f) = 1 &\Leftrightarrow h(\partial_t f - W, \partial_t f - W) = 1, \\ \partial_t f \perp_F \partial_s f &\Leftrightarrow \partial_t f - W \perp_h \partial_s f. \end{aligned}$$

\square

3.6 Detectando o abraço do urso: os pontos de corte do incêndio florestal

Definição 3.6.1. *Dizemos que uma **trajetória** do fogo $t \mapsto f(t, s_0)$ é **minimizadora de tempo** no instante $\epsilon > 0$ se, para qualquer t_0 fixo em $(0, \epsilon]$, qualquer outra trajetória $t \mapsto f(t, s_1)$ tal que $f(t_0, s_0) = f(t_1, s_1)$ satisfaz $t_0 \leq t_1$.*

Quando uma trajetória no espaço-tempo encontra seu ponto de corte $(t_0, p_0) \in M$, ela não minimiza mais o tempo de propagação após t_0 (ou, equivalentemente, não permanece mais em $\partial J^+(B_0)$) e, portanto, não deve ser considerada para calcular a frente de fogo além desse tempo, pois sobreposições de regiões queimadas começam a aparecer após o primeiro ponto de corte, e o sistema de EDP pode não conseguir distinguir áreas queimadas de não queimadas. No entanto, o mapa de incêndio ainda pode ser calculado através do sistema de EDO (3.22) em qualquer $t \geq 0$, método que se mostra mais vantajoso do ponto de vista prático, pois o que obtemos agora, no lugar das frentes do fogo, são as trajetórias do fogo em cada momento.

Existem dois tipos de pontos de corte: a interseção de duas trajetórias no espaço-tempo e os pontos focais da frente de fogo inicial. Ambos os tipos são importantes ao enfrentar um incêndio florestal: pontos de corte não focais, quanto menos se espera, podem deixar para trás regiões completamente cercadas pelo fogo, enquanto que os pontos focais

marcam as regiões onde várias trajetórias de fogo se encontram, envolvendo o terreno como um abraço de urso, aumentando a intensidade do calor. No caso dos incêndios florestais, essas regiões podem se tornar extremamente perigosas para os bombeiros, por isso é importante detectá-las de antemão [32].

Teorema 3.6.1. *A função de corte $c : S_0 \rightarrow [0, +\infty)$ satisfaz $c > \varepsilon$ para algum $\varepsilon > 0$.*

Demonstração. Vide [22]. □

Considere a trajetória no espaço-tempo $\hat{\gamma} : t \rightarrow \hat{f}(t, s_0)$. Como o incêndio florestal está limitado a uma região compacta, isso implica que um ponto de corte $\hat{f}(t_0, s_0) = (t_0, p_0)$ só aparecerá quando uma segunda trajetória minimizadora no espaço-tempo chegar a (t_0, p_0) , ou quando houver trajetórias no espaço-tempo começando próximas à direção $\partial_t \hat{f}(0, s_0)$ e chegando a $\hat{f}(t, s_0)$ para $t > t_0$ próximo a t_0 . Mais precisamente:

Proposição 3.6.1. *Seja $(t_0, p_0) \in M$ o ponto de corte de $\hat{\gamma} : t \mapsto \hat{f}(t, s_0)$. Então, ou*
 (a) *$\hat{\gamma}(t_0) = (t_0, p_0)$ é o primeiro ponto de interseção de $\hat{\gamma}$ com outra trajetória do fogo no espaço-tempo, ou*
 (b) *(t_0, p_0) é o primeiro ponto focal de S_0 ao longo de $\hat{\gamma}$ (é possível que ambas as condições se mantenham concomitantemente).*

Demonstração. Se $\hat{\gamma}(t_0) = (t_0, p_0)$ é o ponto de corte de $\hat{\gamma}$, por definição $\hat{\gamma}(t_0) \in \partial J^+(B_0)$ e $\hat{\gamma}(t_0 + \epsilon) \notin \partial J^+(B_0)$ para todo $\epsilon > 0$. Assim, como $(M, G = dt^2 - F)$ é globalmente hiperbólico, podemos construir uma sequência de geodésicas tipo-tempo $\{\hat{\phi}_\epsilon\}$, tal que cada $\hat{\phi}_\epsilon$ parte ortogonalmente de S_0 e chega em $\hat{\gamma}(t_0 + \epsilon)$. Suponha que elas estão normalizadas com respeito a qualquer métrica Riemanniana h em M . Daí, as velocidades iniciais de $\{\hat{\phi}_\epsilon\}$ estão no fibrado tangente h -unitário de S_0 , $T_1 M = \{v \in TM : \|v\| = 1\}$, que é compacto, pois S_0 é compacto. Assim, $\{\hat{\phi}_\epsilon\}$ converge para uma velocidade causal, cuja geodésica causal correspondente $\hat{\phi}$ chega em $(t_0, p_0) \in \partial J^+(B_0)$. Pelo Teorema 1.11.3, $\hat{\phi}$ é uma geodésica tipo-luz G -ortogonal a S_0 com sua velocidade inicial apontando para fora, ou seja, é uma trajetória do fogo no espaço-tempo. Existem duas possibilidades:

1^a possibilidade Se $\hat{\gamma} \neq \hat{\phi}$, então (t_0, p_0) é o ponto de interseção de duas trajetórias do fogo no espaço-tempo, necessariamente o primeiro. De fato, suponha que $\hat{\gamma}$ interseccione outra trajetória $\hat{\alpha}$ no espaço-tempo em $\tau < t_0$. Então podemos definir, para qualquer $\epsilon > 0$, a curva

$$\hat{\rho}(t) := \begin{cases} \hat{\alpha}(t), & t \in [0, \tau], \\ \hat{\gamma}(t), & t \in [\tau, \tau + \epsilon], \end{cases}$$

que é uma curva causal suave por partes de S_0 e, assim, pela Proposição 1.11.3, existe uma curva tipo-tempo futuro-dirigida de $\hat{\rho}(0) \in S_0$ até $\hat{\gamma}(\tau + \epsilon)$ para todo

$\epsilon > 0$. Concluimos assim que $\hat{\gamma}(t_0) \notin \partial J^+(B_0)$, o que é uma contradição.

2ª possibilidade Se $\hat{\gamma} = \hat{\phi}$, então podemos tomar uma geodésica normal $\hat{\phi}_\epsilon$, $\epsilon > 0$, de velocidade v_ϵ e que intersecta $\hat{\gamma}_v$ em $\hat{\gamma}_v(t_0 + \epsilon)$, cujos vetores velocidades v e v_ϵ estão arbitrariamente próximos, ou seja, a aplicação exponencial normal não é um difeomorfismo local em torno de t_0v . De fato, como as curvas são distintas, temos que: $v_\epsilon \neq v \implies t_\epsilon v_\epsilon \neq (t_0 + \epsilon)v$. Por outro lado,

$$\exp^\nu(t_\epsilon v_\epsilon) = \hat{\phi}_{\epsilon v_\epsilon}(t_\epsilon) = \hat{\gamma}_v(t_0 + \epsilon) = \exp^\nu((t_0 + \epsilon)v),$$

onde na segunda igualdade usamos o fato delas se encontrarem (figura 3.6). Assim, a aplicação exponencial normal não é injetiva em qualquer vizinhança de t_0v . Logo, pelo teorema da função inversa, temos que $d(\exp^\nu)|_{t_0v}$ é degenerado, ou seja, $\hat{\gamma}(t_0) = (t_0, p_0)$ é um ponto focal de S_0 ao longo de $\hat{\gamma}$, necessariamente o primeiro, já que a aplicação exponencial normal é um difeomorfismo antes de t_0 .

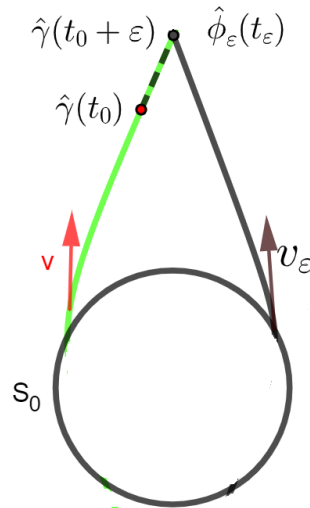


Figura 3.5: Encontro das geodésicas γ e ϕ_ϵ .

□

A proposição acima dá os mecanismos que conduzem à formação dos pontos de corte num incêndio florestal. Ou seja, de acordo com ela, os pontos de corte são classificados em dois grupos: primeiros pontos focais, que são pontos de encontro (ou quase encontro) de diferentes geodésicas iniciadas próximas de um ponto da frente do fogo; e os não focais, onde duas trajetórias do fogo, as primeiras a chegar, vindas de diferentes direções se encontram.

Referências

- [1] A. B. Aazami and M. Á. Javaloyes. Penrose’s singularity theorem in a finsler space-time. *Classical and Quantum Gravity*, 33(2):025003, 2015.
- [2] A. Abdallah, A. Navlekar, K. Ghadle, and B. Hardan. Fundamentals and recent studies of finsler geometry. *International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 10(2):27–38, 2022.
- [3] M. M. Alexandrino, B. O. Alves, and H. R. Dehkordi. On finsler transnormal functions. *Differential Geometry and its Applications*, 65:93–107, 2019.
- [4] B. O. Alves. *Sobre folheações Finslerianas singulares*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2017.
- [5] P. L. Antonelli. *Handbook of Finsler geometry. 2 (2003)*, volume 2. Springer Science & Business Media, 2003.
- [6] D. Bao, S.-S. Chern, and Z. Shen. *An introduction to Riemann-Finsler geometry*, volume 200. Springer Science & Business Media, 2012.
- [7] D. Bao, C. Robles, and Z. Shen. Zermelo navigation on riemannian manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 66(3):377–435, 2004.
- [8] J. K. Beem. *Global lorentzian geometry*. Routledge, 2017.
- [9] A. Bhowmick and S. Prasad. On the cut locus of submanifolds of a finsler manifold. *The Journal of Geometric Analysis*, 34(10):308, 2024.
- [10] E. Caponio, M. Á. Javaloyes, and M. S. Caja. On the interplay between lorentzian causality and finsler metrics of randers type. *Revista Matemática Iberoamericana*, 27(3):919–952, 2011.
- [11] P. Chansagiam, P. Chansri, and S. V. Sabau. Surfaces of revolution admitting strongly convex slope metrics. *arXiv preprint arXiv:2101.12466*, 2021.

- [12] S.-S. Chern. Finsler geometry is just riemannian geometry without the quadratic equation. *Notices of the American Mathematical Society*, 43(9):959–963, 1996.
- [13] I. T. Couto and A. Lyberopoulos. *Introduction to Lorentz geometry: curves and surfaces*. Chapman and Hall/CRC, 2021.
- [14] H. R. Dehkordi. Mathematical modeling the wildfire propagation in a randers space. *arXiv preprint arXiv:2012.06692*, 2020.
- [15] M. P. do Carmo. Geometria riemanniana, projeto euclides. *IMPA—1979*, 1979.
- [16] M. A. Finney. *FARSITE, Fire Area Simulator—model development and evaluation*. Number 4. US Department of Agriculture, Forest Service, Rocky Mountain Research Station, 1998.
- [17] P. Finsler. *Über Kurven und Flächen in der projektiven Geometrie*. PhD thesis, Universität Zürich, Zürich, 1918.
- [18] H. Hagelin and M. Cluzel. Applying farsite and prometheus on the västmanland fire, sweden (2014): Fire growth simulation as a measure against forest fire spread: A model suitability study. *Student thesis series INES*, 2016.
- [19] S. Heefer. Finsler geometry, spacetime & gravity—from metrizable spaces to exact vacuum solutions in finsler gravity. *arXiv preprint arXiv:2404.09858*, 2024.
- [20] L. Huang and X. Mo. On geodesics of finsler metrics via navigation problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 139(8):3015–3024, 2011.
- [21] M. Á. Javaloyes. Chern connection of a pseudo-finsler metric as a family of affine connections. *arXiv preprint arXiv:1303.6263*, 2013.
- [22] M. Á. Javaloyes, E. Pendás-Recondo, and M. Sánchez. Applications of cone structures to the anisotropic rheonomic huygens’ principle. *Nonlinear Analysis*, 209:112337, 2021.
- [23] M. Á. Javaloyes, E. Pendás-Recondo, and M. Sánchez. A general model for wildfire propagation with wind and slope. *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry*, 7(2):414–439, 2023.
- [24] M. Á. Javaloyes and M. Sanchez. On the definition and examples of finsler metrics. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa- Classe di Scienze*, 13(3):813–858, 2014.

- [25] M. Á. Javaloyes and M. Sánchez. On the definition and examples of cones and finsler spacetimes. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 114(1):30, 2020.
- [26] M. Á. Javaloyes and H. Vitória. Some properties of zermelo navigation in pseudo-finsler metrics under an arbitrary wind. *Houston Journal of Mathematics*, 44(4):1147–1179, 2018.
- [27] S. Markvorsen. A finsler geodesic spray paradigm for wildfire spread modelling. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 28:208–228, 2016.
- [28] M. Matsumoto. A slope of a mountain is a finsler surface with respect to a time measure. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 29(1):17–25, 1989.
- [29] M. Matsumoto. Theory of finsler spaces with (α, β) -metric. *Reports on mathematical physics*, 31(1):43–83, 1992.
- [30] A. K. d. Oliveira. *Geometria dos exemplos de Katok*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2016.
- [31] B. O’Neill. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic Press, 1983.
- [32] E. Pendás-Recondo. On the application of lorentz-finsler geometry to model wave propagation. *arXiv preprint arXiv:2408.03206*, 2024.
- [33] R. Penrose. *Techniques in differential topology in relativity*. SIAM, 1972.
- [34] H. Raeisidehkordi. *Finsler Transnormal Functions and Singular Foliations of Codimension 1*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2018.
- [35] G. Randers. On an asymmetrical metric in the four-space of general relativity. *Physical Review*, 59(2):195, 1941.
- [36] R. C. Rothermel. A mathematical model for predicting fire spread in wildlands fuel. *Research Paper INT*, 30:1–40, 1972.
- [37] Y.-B. Shen and Z. Shen. *Introduction to Modern Finsler Geometry*. Higher Education Press Limited Company and World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2016.
- [38] Z. Shen. *Lectures on Finsler geometry*. World Scientific, 2001.
- [39] Z. Shen. Finsler metrics with $k=0$ and $s=0$. *Canadian Journal of Mathematics*, 55(1):112–132, 2003.

- [40] S. S. d. Sousa. Funções isoparamétricas em variedades randers. Master's thesis, Universidade Federal da Bahia, 2024.
- [41] Q.-M. Wang. Isoparametric functions on riemannian manifolds. *Mathematische Annalen*, 277:639–646, 1987.
- [42] D. Y. Won. On the history of the birth of finsler geometry at göttingen. *Journal for History of Mathematics*, 28(3):133–149, 2015.

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Programa de pós-graduação em Matemática

Av. Milton Santos, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA

CEP: 40170-110

<<http://www.pgmat.ufba.br>>