

**Os Mecanismos de Propagação e
Atenuação de Ondas Sísmicas em
Rochas Reservatórios Baseados na
Dinâmica da Poroelasticidade**

FRANCISCO HENRY CABRERA ZAMBRANO

VIRTUTE SPIRITUS

SALVADOR – BAHIA
JULHO – 2009

Os Mecanismos de Propagação e Atenuação de Ondas Sísmicas em Rochas Reservatórios Baseados na Poroelasticidade Dinâmica

por

FRANCISCO HENRY CABRERA ZAMBRANO

Bacharel em Matemáticas (Universidad Nacional de Colombia – 1990)

Mestre em Computação (Universidad Industrial de Santander – 2002)

Orientador: Prof. Dr. Marco A Barsotelli Botelho

TESE DE DOUTORADO

Submetida em satisfação parcial dos requisitos ao grau de

DOUTOR EM CIÊNCIAS

EM

GEOFÍSICA

à

Câmara de Ensino de Pós-Graduação e Pesquisa

da

Universidade Federal da Bahia

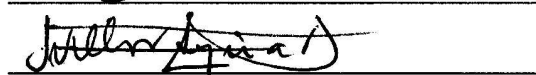
Comissão Examinadora



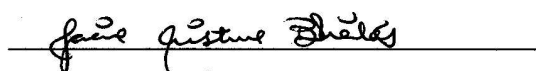
Dr. Marco A. Barsotelli Botelho - CPGG-UFBA



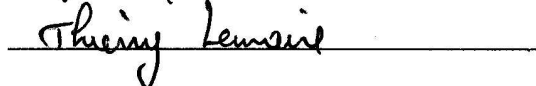
Dr. José M. Carcione - INOGS - OGS



Dr. Fredy Alex V. Artola - Schlumberger



Dr. Jacira C. B. de Freitas - CPGG-UFBA



Dr. Thierry Lemaire - UEFS

Aprovada em 31 de Julho de 2009

A presente pesquisa foi desenvolvida no Laboratório de Geofísica de Exploração de Petróleo no Centro de Pesquisa em Geofísica e Geologia da UFBA, com recursos próprios e do convênio Rede01 - Rede de Risco Exploratório, CTPETRO/FINEP/Petrobras

Z23 Cabrera Zambrano, Francisco Henry ,

Os Mecanismos de Propagação e Atenuação de Ondas Sísmicas em Rochas Reservatórios Baseados na Poroelasticidade Dinâmica / Francisco Henry Cabrera Zambrano. — Salvador, 2009.

ix, 32 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Marco A. Barsotelli Botelho.

Tese (Doutorado) - Pós-Graduação em Geofísica. Instituto de Geociências da Universidade Federal da Bahia, 2009.

1. Prospecção - métodos geofísicos (BA). 2. Teoria de Biot
3. Ondas sísmicas. 4. Viscoelasticidade. I. Botelho, Marco A. Barsotelli. II. Universidade Federal da Bahia. Instituto de Geociências. III. Título.

*Dedico a minha esposa
e aos meus filhos.*

Resumo

Um dos objetivos fundamentais da Geofísica de reservatórios é sua caracterização. Esta caracterização significa o conhecimento das propriedades petrofísicas das rochas e os fluidos contidos neles: a porosidade (capacidade de armazenamento de fluido), a viscosidade dos fluidos contidos e a permeabilidade da rocha. Em particular é de grande interesse o conhecimento dos valores da permeabilidade nas regiões do reservatório. A pergunta chave neste contexto é: Pode-se fazer uma estimativa da permeabilidade do reservatório a partir dos dados sísmicos? Um dos primeiros geofísicos que formulou esta pergunta foi o cientista Maurice Biot nos anos 50. Ele desenvolveu uma teoria sobre a propagação de ondas sísmicas em meios bifásicos ou porosos. Tal teoria é hoje aceita na comunidade científica e conhecida como a Teoria de Biot. Um dos resultados fundamentais desta teoria é demonstrar a existência de uma segunda onda compressional chamada de onda P lenta além da onda P normal, chamada no contexto da Teoria de Biot de onda P rápida. Biot introduz a idéia de que as ondas sísmicas induzem um fluxo de fluido nas rochas saturadas, que equilibra a pressão induzida pela onda. Baseado nesta idéia, Biot estabelece uma relação analítica, dependente da frequência da onda, entre a permeabilidade e a atenuação sísmica. Os experimentos de laboratório, de sonic log, crosswell, de VSP e da sísmica de superfície mostram que as predições de Biot frequentemente subestimam os níveis de atenuação, principalmente para medições nas frequências baixas. Além disso, na Teoria de Biot se deduz que o pico de atenuação desloca-se às altas frequências quando a viscosidade do fluido que satura a rocha aumenta. Em termos da permeabilidade, o pico desloca-se às altas frequências quando esta permeabilidade decresce, resultado que contradiz também os experimentos.

Nesta tese estuda-se os desenvolvimentos e extensões da Teoria de Biot, principalmente o chamado mecanismo mesoscópico desenvolvido recentemente, que concilia as abordagens de Biot com os dados experimentais. Os três mecanismos desenvolvidos são o de saturação parcial, sugerido inicialmente por White e formalizado nos trabalhos de Norris; o modelo de fraturas de Brajanoski e o modelo da dupla porosidade de Berryman et al. Mostra-se nesta tese a equivalência destes três enfoques por meio de experimentos numéricos. Estes mecanismos são também equivalentes ao desenvolvimento das equações de Biot num meio

transversalmente isotrópico. Neste trabalho obtém-se expressões analíticas das velocidades das ondas de Biot, que propagam-se fundamentalmente nas duas direções principais: paralela ao eixo de simetria e perpendicular a este eixo. Os resultados mostram que a onda P lenta tem um comportamento muito diferente nas duas direções, isto mostra o caráter difusivo desta onda, principalmente nas baixas frequências, contribuindo com as perdas da onda P normal. Os resultados em todos os casos são similares.

Foram implementados algoritmos numéricos que resolvem numericamente as equações de Biot em sua forma original e também as equações que incluem os mecanismos de perdas por viscoelasticidade e por heterogeneidades na escala mesoscópica. Dois tipos de metodologia foram utilizadas para resolver as derivadas espaciais das equações de movimento: o método das diferenças finitas e o chamado método pseudospectral. Compara-se as duas metodologias em relação aos erros numéricos da discretização. Observa-se que o método pseudospectral fornece melhores resultados que o método das diferenças finitas, no sentido de atenuar os erros da dispersão numérica.

As equações de movimento são escritas como um sistema de primeira ordem, ou seja, num esquema esforço-pressão-velocidade da partícula. No caso da dupla porosidade se deduz as relações constitutivas dos esforços e as pressões nas duas porosidades com respeito às velocidades da partícula nas fases sólida e fluida, o que permite escrever as equações de movimento como um sistema hiperbólico de primeira ordem. Para as três ondas compressionais foram encontradas expressões analíticas para as velocidades com respeito aos volumes das porosidades primária e secundária (fraturas). Além disso deduz-se que a atenuação da onda P rápida depende da fração de volume da porosidade secundária (fraturas); quanto maior as fraturas, maior a atenuação da onda P rápida, mostrando também que ao contrário do modelo da porosidade simples (a Teoria de Biot original) a onda P rápida tem atenuação maior que a onda S. Finalmente mostra-se que a atenuação da onda S neste modelo é quase independente do volume das fraturas.

Abstract

In Geophysics of reservoirs the knowledge of the petrophysical properties of rocks, such as porosity and permeability, as well as viscosity of the contained fluids in the rocks, is fundamental na characterization of the reservoir. Of particular interest is the knowledge of permability in reservoir regions. The key question in this context is: Can permeability be determined from seismic data? One of the first geophysicist to formulate this question, in the fifties, was the scientific Maurice Biot. He developed a theory about the propagation of seismic waves in biphasic or porous media, this theory is today accepted by the scientific community and is known as Biot´s Theory. One of principal results of the Biot´s Theory is demonstrate the existence of a second compressional wave called P slow wave, besides as the normal P wave, called P fast wave in the context of Biot´s Theory. Biot introduce the idea that seismic waves induce a flow of fluid in saturated rock and that this flow balances the pressure induced by the wave. Based on this idea, Biot establishes an analytical relationship, depending on the wave frequency, between permeability and seismic attenuation. Laboratory experiments, Sonic log, Crosswell, VSP and seismic surface show that Biot´s predictions underestimate attenuation levels, mainly for low frequency measurements. On the other hand, Biot´s Theory predict that the attenuation peak is shifted to high frequencies when the viscosity of fluid that saturates the rock take more higher values, in terms of permeability, the peak shifts to high frequencies when a permeability decreases, this result also contradicts the experiments.

This thesis develop the extensions of Biot´s Theory, mainly so- called mesoscopic mechanics recent developed. The aforesaid mechanism reconciles Biot´s formulation with experimental data. The three mechanisms analyzed in this work are those of partial saturation, initially developed by White and formalized by the works of Norris, the fractures model of Brajanosky and the double porosity model of Berrymann et al. The equivalence of these mechanisms to the development of Biot´s equations in a transversally isotropic media is too showed. Analytical expressions are obtained from speed of Biot´s waves which are propagated in two main directions: parallel to the symmetry axis and perpendicular to it. The results show that the slow P wave behaves very differently in both directions, this illustrates

the diffusive character of this wave, mainly at low frequencies, contributing to the losses of the normal P wave.

The equivalence of these methodologies is demonstrated through numerical experiments based on implemented algorithms to solve numerically the Biot's equations in their original form, as well as equations that include loss mechanism by viscoelasticity and loss due to heterogeneity on the mesoscopic scale.

The movement equations are written as a first-order system, that is to say in a scheme effort-pressure-particle velocity. In the case of double porosity the constitutive relationship of the effort and pressure of the two porosities is deduced with respect to particle velocity of solid and fluid phases which allows the movement equations to be written as a first order hyperbolic system. For the three compressional waves of this model, analytical expressions were found for the propagation velocity of the waves in relation to primary and secondary porosity volumes. Moreover it is deduced that the attenuation of the first P wave depends on the volume fraction of the secondary porosity (fractures); the bigger the fractures, the bigger the attenuation of the fast P wave, at the same time showing that on the contrary to the simple porosity model (Biot's original Theory) the fast P wave has higher attenuation than the S wave. Finally, it is shown that the attenuation of the S wave is almost independent of the volume of the fractures.

Two types of methodologies were used to resolve the spatial derivatives of movement equations: the method of finite difference and pseudospectral method. The two methodologies are compared in relation to numerical errors of discretization. The results show that the pseudospectral method gives better results than the finite difference method, in the sense of attenuating the errors of numerical dispersion.

Índice

Resumo	iv
Abstract	vi
Índice	viii
Índice de Figuras	x
Introdução	1
1 A Teoria de Biot	7
1.1 A poroelasticidade e a teoria de consolidação	7
1.2 Propagação de ondas num meio poroso e as Equações de Biot	11
1.3 As equações de Biot como um sistema hiperbólico de primeira ordem	17
1.4 Propriedades das ondas de Biot e as relações de dispersão	20
2 Extensões da Teoria de Biot	31
2.1 A Teoria Poroviscoelástica de Biot	31
2.2 Propagação de ondas num meio poroso transversalmente isotrópico	34
2.3 Propagação de ondas num meio poroso com heterogeneidades na escala mesoscópica	42
2.3.1 Modelo de saturação de White - Desenvolvimento de Norris	42
2.3.2 Modelo mesoscópico de fraturas - Desenvolvimento de Brajanovski	48
2.3.3 Modelo mesoscópico da dupla porosidade. Desenvolvimento de Berryman et al	50
3 Modelagem numérica das Equações de Biot	62
3.1 Solução numérica de equações diferenciais utilizando DF e o método PS	62
3.2 Solução numérica das equações de Biot utilizando diferenças finitas e o método pseudospectral	66

4	Os modelos mesoscópicos: saturação parcial, dupla porosidade e o modelo de anisotropia(VTI).	82
4.1	O modelo de saturação parcial de White	83
4.2	O modelo de dupla porosidade	90
4.2.1	Obtenção das equações de movimento e constitutivas para o modelo de dupla porosidade	91
4.3	A anisotropia(VTI) como mecanismo mesoscópico	109
5	Conclusões	116
	Agradecimentos	119
	Referências	120
A	Coefficientes elásticos do modelo da dupla porosidade	124

Índice de Figuras

1.1	Distribuição das velocidades em função da porosidade	24
1.2	As duas ondas P para viscosidade zero	24
1.3	Esquerda: As duas ondas P para água salgada. Direita: As duas ondas P para óleo.	25
1.4	Deslocamento do sólido e do fluido para a onda P rápida.	25
1.5	Deslocamento do sólido e do fluido para a onda P lenta.	26
1.6	Dispersão das três ondas quando o fluido é água (esquerda) ou gás (direita).	29
1.7	Atenuação das ondas compressoriais P rápida (esquerda) e P lenta (direita).	29
1.8	Atenuação da onda S para os fluidos saturantes água e gás.	30
2.1	Dispersão das três ondas de corpo presentes num meio poro-visco-elástico isotrópico, considerando o fluido saturante como água (esquerda) e gás (direita)	33
2.2	Atenuação das ondas P. Esquerda: P rápida . Direita: P lenta	33
2.3	Dispersão das ondas de Biot no caso TI: vermelho 0^0 , azul 90^0	37
2.4	Atenuação da onda P rápida e S no caso TI; onde o traçado vermelho corresponde a 0^0 e o azul corresponde a 90^0	38
2.5	Atenuação da onda P rápida e S no caso TI; onde o traçado vermelho corresponde a 0^0 e o azul corresponde a 90^0	38
2.6	Atenuação da onda P rápida em função do ângulo de propagação para duas frequências diferentes.	39
2.7	Atenuação da onda P lenta em função do ângulo de propagação para duas frequências diferentes.	40
2.8	Frente de onda para as ondas P rápida e S, considerando um meio isotrópico (vermelho), e transversalmente isotrópico (azul).	40
2.9	Frente de onda para a onda P lenta, considerando um meio isotrópico (vermelho), e transversalmente isotrópico (azul).	41
2.10	Frente de onda para a onda P lenta, transversalmente isotrópico para diferentes frequências.	41

2.11	Modelo de saturação parcial de White.	43
2.12	Velocidade de fase (esquerda) e atenuação (direita) quando muda-se uma propriedade do meio 2. A1 porosidade; A2 módulo volumétrico da matriz; A3 módulo volumétrico do sólido; A4 módulo volumétrico do fluido.	47
2.13	Velocidade de fase (esquerda) e atenuação (direita). O meio 2 preenchido com óleo. C_1 ; $\eta = 0.001$ cp, (C_2) $\eta = 0.01$ cp, (C_3) $\eta = 0.1$ cp.	47
2.14	Meio poroso fraturado e sua representação	48
2.15	Velocidade de fase para diferentes valores de δ_N	51
2.16	Atenuação para diferentes valores de δ_N	51
2.17	Representação da dupla porosidade	52
2.18	Curva de dispersão da onda P rápida	55
2.19	Curva de dispersão da onda P1 lenta	55
2.20	Curva de dispersão da onda P2 lenta	56
2.21	Curva de dispersão da onda S	56
2.22	Curvas de atenuação da onda P e da onda S	57
2.23	Curva de atenuação da onda P lenta 1	57
2.24	Curva de atenuação da onda P lenta 2	58
2.25	Picos de atenuação da onda P rápida e a onda S para valores de volume da porosidade primaria $\epsilon^{(1)}$	60
3.1	Calculo da derivada da função U utilizando DF e PS	65
3.2	Erro absoluto no calculo da derivada utilizando DF e PS com respeito ao número de pontos da malha	66
3.3	Geometria do modelo para as simulações	68
3.4	Instantânea da propagação das três ondas no tempo de 0.5 s.	68
3.5	Instantânea das três ondas no caso em que o fluido que preenche a rocha é gás no instante 0.48 s DF(esquerda) PS(direita).	71
3.6	Sismograma obtido no caso em que o fluido que preenche a rocha é gás. DF(esquerda) PS(direita).	71
3.7	Instantânea das duas ondas P no tempo 0.27 s para uma rocha preenchida com água salgada para uma rocha isotrópica, porém com tortuosidade e permeabilidade diferentes nas duas direções.	73
3.8	Instantânea das três ondas no caso que o fluido que preenche a rocha é água salgada no instante 0.27 s Isotrópico (esquerda) VTI (direita) ($c_{33} = 0.9c_{11}$).	73
3.9	Instantânea da propagação da onda P rápida num meio VTI ($c_{33} = 0.5c_{11}$) no instante 0.27 s	74

3.10	Instantânea no tempo 0.27 s das quatro ondas num meio de dupla porosidade preenchido com água salgada.	75
3.11	Sismograma obtido para um meio de dupla porosidade preenchido com água salgada.	76
4.1	Geometria das bolhas preenchidas de diferente fluido para o modelo de saturação parcial de White.	84
4.2	Geometria de camadas planas e paralelas preenchidas de diferentes fluidos para o modelo de saturação parcial de White.	85
4.3	A frequência de relaxação ω_c em função da fração de volume $V^{(1)}$	104
4.4	Magnitude do fluxo de fluido γ em função da frequência para diferentes valores da fração de volume $V^{(1)}$ do meio poroso 1.	104
4.5	Valor máximo da magnitude do fluxo de fluido em função da fração de volume $V^{(1)}$ do meio poroso 1.	105
4.6	Atenuação da onda P rápida em função da frequência para uma fração de volume do meio poroso 1 $V^{(1)} = 0.99$	106
4.7	Atenuação da onda P rápida em função da frequência para uma fração de volume $V^{(1)} = 0.95$ do meio poroso 1.	106
4.8	Atenuação da onda P rápida em função da frequência para diferentes valores da fração de volume $V^{(1)}$ do meio poroso 1.	107
4.9	Dispersão da onda P rápida em função da frequência para diferentes valores da fração de volume $V^{(1)}$ do meio poroso 1.	107
4.10	Atenuação da onda P rápida em função da frequência para três fluidos diferentes e uma fração de volume 0.95 do meio poroso 1. $V^{(1)}$	108
4.11	Representação do modelo de duas camadas de espessuras d_1 e d_2	110
4.12	Atenuação da onda P rápida quando propaga-se na direção perpendicular às camadas em função da frequência para quatro valores da fração de volume do meio poroso 1.	113
4.13	Atenuação da onda P rápida quando propaga-se numa direção que forma 15° com o eixo de simetria (z) em função da frequência para quatro valores da fração de volume do meio poroso 1.	113
4.14	Atenuação da onda P rápida quando propaga-se numa direção que forma 30° com o eixo de simetria (z) em função da frequência para quatro valores da fração de volume do meio poroso 1.	114
4.15	Atenuação da onda P rápida quando propaga-se numa direção que forma 60° com o eixo de simetria (z) em função da frequência para quatro valores da fração de volume do meio poroso 1.	115

Introdução

Entre os objetivos fundamentais da sismica estão a caracterização e o monitoramento dos reservatórios de hidrocarbonetos. A caracterização significa quantificar os valores dos parâmetros petrofísicos principais como a porosidade e a permeabilidade da rocha e também a viscosidade do fluido. O conhecimento destes três parâmetros além de outros como a pressão de confinamento, a pressão dos poros, as falhas e fraturas, o tipo de rocha e as condições de temperatura permitem a caracterização e o monitoramento no tempo da evolução do reservatório (sismica 4D).

A resposta sísmica do reservatório pode ser estudada e avaliada por meio da modelagem numérica, simulando a propagação das ondas sísmicas em seu interior, considerando que as rochas que compõem o reservatório são meios complexos, isto é, meios poroelásticos ou poro-viscoelásticos. Neste tipo de modelagem estão envolvidos todos os parâmetros petrofísicos mencionados acima. A modelagem sísmica é uma ferramenta fundamental para a interpretação e reconhecimento das anomalias de amplitude associadas à presença de hidrocarbonetos.

A propagação das ondas sísmicas em meios complexos é objeto de estudo há um longo tempo. Terzaghi (1936) e Gassmann (1951) fornecem resultados da propagação de ondas sísmicas em meios porosos no caso de baixas frequências (0-100 Hz), considerando a fase sólida e fluida como única; Biot (1956a, 1956b, 1962a, 1962b) estabelece uma formulação matemática deste fenômeno, agregando à formulação de Gassmann o efeito da viscosidade e a análise da propagação para todo o espectro de frequências. O resultado fundamental do trabalho de Biot é que no meio poroso geram-se três tipos de onda de corpo, duas ondas P e uma onda S. A primeira onda P conhecida como **onda P rápida**; a segunda onda P possui uma velocidade muito menor que a primeira, e denomina-se de **onda P lenta**, esta última onda é altamente atenuada e sua propagação é análoga ao fenômeno de condução de calor (Biot, 1956a). Na faixa das baixas frequências, o meio não pode suportar a onda P lenta em virtude de que o processo é difusivo e o efeito da viscosidade é dominante sobre os efeitos inerciais (Biot, 1956a). A existência da onda P lenta foi sujeita a muitas especulações durante vários anos, até obter registro em laboratório sob condições experimentais controladas (Plona, 1980).

No caso de materiais naturais como as rochas areníticas ou argilas, a teoria de Biot não consegue explicar as discrepâncias dos valores preditos com os valores observados de atenuação das ondas P rápida e S (Gist, 1994). Essas discrepâncias acontecem devido à microestrutura complexa dos poros das rochas, que geram mecanismos de atenuação não previstos pela poro-elasticidade de Biot.

Os chamados mecanismos intrínsecos de atenuação que são aceitos na atualidade são: o **mecanismo de Biot**, o **mecanismo de fluxo local (squirt flow)** e o **mecanismo mesoscópico**. O mecanismo de Biot é devido à defasagem do movimento do fluido com respeito ao sólido Biot (1956a, 1956b). Tal mecanismo implica num fluxo global numa escala macroscópica. É significativo na faixa das altas frequências (ultra-som), sendo desprezível na faixa das baixas frequências.

O mecanismo de fluxo local (squirt flow) foi proposto inicialmente por Mavko e Nur (1975, 1979) e O'Connell e Budiansky (1977); este mecanismo acontece numa escala microscópica quando a onda comprime os grãos produzindo um fluxo de fluido entre eles, explicando melhor as medições experimentais de atenuação na faixa de frequências de ultra-som, embora este mecanismo não consiga explicar a atenuação nas frequências da sísmica (Pride et al., 2004).

O chamado mecanismo mesoscópico acontece numa escala intermediária entre as escalas micro e macroscópica, assumindo que nessa escala apresentam-se heterogeneidades litológicas ou nos fluidos contidos nos poros do material. Os modelos de atenuação na escala mesoscópica classificam-se na atualidade em duas categorias (Pride et al., 2004): de variação no conteúdo do fluido (saturação parcial) e de variação litológica.

White (1975), apresenta um modelo de saturação parcial formado por bolhas de gás rodeado por anéis de fluido, mostrando que a atenuação pode estar relacionada ao módulo efetivo da mistura. Este módulo é encontrado a partir da resposta da amostra representativa a uma força oscilatória. Devido à heterogeneidade, o módulo efetivo é complexo o que significa que tem-se atenuação e dispersão das ondas. O trabalho de White et al. (1975), apresenta também o modelo para uma geometria de interfaces planas alternadas de gás e fluido, obtendo um resultado similar ao modelo anterior.

Os trabalhos de Dutta e Odé (1979a, 1979b), estudam o modelo de White no contexto da teoria de Biot. O problema da oscilação da amostra representativa do modelo de White, é levado às equações de Biot como uma condição de fronteira, obtendo-se resultados similares aos de White.

Norris (1993), estuda o modelo de White para um sistema de camadas alternadas de

gás e líquido, ou seja dois meios porosos alternados periodicamente, a conclusão principal do trabalho de Norris é que as heterogeneidades na escala mesoscópica são o mecanismo principal de perdas de energia das ondas compressivas na faixa das frequências sísmicas. Carcione e Picotti (2006) e Picotti et al. (2007), baseados nos trabalhos de Norris (1993), fornecem uma análise completa das diferentes situações nas quais apresentam-se heterogeneidades entre dois meios porosos, onde os parâmetros poroelásticos e as propriedades dos fluidos podem mudar.

Outros trabalhos, como o de Jhonson (2001), modelam a saturação parcial por meio de "patches" do fluido de qualquer geometria, distribuídos uniformemente ou de forma aleatória na rocha (Toms et al., 2006).

No modelo de heterogeneidades litológicas tem-se um só fluido nos poros e nas descontinuidades (fraturas) da fase sólida. Neste tipo de modelo está a denominada dupla porosidade. A dupla porosidade pode ser entendida como um sistema de três fases: o sólido componente da matriz da rocha, o fluido que preenche os poros e o fluido existente nas fraturas. O meio fraturado identifica-se com duas porosidades diferentes: a porosidade da rocha chamada de porosidade primária e a porosidade que induz o fraturamento chamada de porosidade secundária. A porosidade primária é maior que a porosidade secundária, no entanto se considera que a permeabilidade nas fraturas é muito maior que a permeabilidade da matriz.

Para uma descrição do meio poroso precisa-se de duas escalas, a primeira é a escala macroscópica, correspondente às dimensões do volume elementar representativo para o caso da sísmica, ao comprimento da onda que se propaga; a segunda escala corresponde às dimensões dos poros e é a escala microscópica. No caso da dupla porosidade tem-se três escalas: a macroscópica, a microscópica e a escala dos tamanhos das aberturas das fraturas, esta é uma escala intermediária entre as duas anteriores, denominada de mesoscópica.

Um meio poroso fraturado pode-se entender como um sólido (na escala macroscópica) fragmentado, cujas fraturas dividem o meio em blocos (escala mesoscópica) e cada bloco por sua vez está constituído pela matriz na fase sólida e os espaços dos poros (escala microscópica). Wilson e Afantis (1982) desenvolveram a teoria de consolidação para a dupla porosidade e pesquisaram a propagação em rochas porosas fraturadas, eles assumem o modelo da dupla porosidade, com o meio saturado por um único fluido, mostrando a existência de uma terceira onda compressional. Esta onda é altamente atenuada, tem velocidade muito baixa e apresenta-se principalmente no fluido das fraturas. Tuncay e Corapcioglu (1996a, 1996b) discutem a propagação de ondas num meio poroso fraturado baseado também no conceito da dupla porosidade, neste caso o meio é saturado por dois fluidos. Os autores mostram a existência de quatro ondas compressivas: as duas primeiras são as ondas compressivas

da teoria de Biot da porosidade simples; a terceira onda é associada com as fraturas, similar à de Wilson e Ainfantis; a quarta onda é associada com a diferença de pressão entre as fases de fluido nos blocos de rocha porosa. As duas ondas P adicionais da dupla porosidade são altamente atenuadas em toda a faixa de frequências.

Berryman e Wang (1995) discutem amplamente o processo de consolidação para a dupla porosidade, numa maneira similar ao trabalho de Biot e Willis (1957), eles obtêm as expressões dos coeficientes elásticos que precisa a dupla porosidade e obtêm as relações constitutivas para as três fases. Berryman e Wang (2000) generalizam a abordagem de Biot (1956a) definindo as funções de energia T e dissipação D e obtendo as equações de movimento resolvendo as equações de Euler-Lagrange obtidas da formulação variacional. A análise de Berryman é fenomenológica ou macroscópica da mesma maneira da abordagem de Biot no caso de porosidade simples. O resultado fundamental do trabalho de Berryman e Wang é mostrar a existência de uma segunda onda lenta. Esta segunda onda lenta é altamente atenuada em toda a faixa de frequências da mesma maneira do resultado de Wilson e Afantis (1984).

Nesta tese se apresenta a modelagem numérica da propagação de ondas sísmicas em meios complexos, no contexto da Teoria de Biot na sua forma mais geral e nas extensões das teorias mencionadas acima. A tese concentra-se principalmente nos modelos mesoscópicos de saturação parcial e de dupla porosidade. Sobre estes modelos geram-se sismogramas sintéticos com o objetivo de avaliar a influência das diferentes propriedades petrofísicas na dispersão e atenuação dos campos de onda. Todas as equações desenvolvidas tomaram como ponto de partida as equações constitutivas e de movimento de Biot (1962a, 1962b) em sua versão anisotrópica.

Numa primeira etapa foram obtidas as equações constitutivas e de movimento de Biot num esquema esforço-pressão-velocidade de partícula, sendo estas equações expressas como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, e foram implementados algoritmos que resolvem numericamente estas equações.

Numa segunda etapa são desenvolvidos os mecanismos de saturação parcial, o modelo de fraturas de Brajanoski e o modelo da dupla porosidade. Estes mecanismos são também equivalentes ao desenvolvimento das equações de Biot num meio transversalmente isotrópico, onde se obtêm expressões analíticas das velocidades das ondas de Biot, que se propagam fundamentalmente nas duas direções principais: paralela ao eixo de simetria e perpendicular a tal eixo. Os resultados mostram que a onda P lenta tem um comportamento muito diferente nas duas direções, isto mostra o caráter difusivo desta onda, principalmente, nas baixas frequências, contribuindo com as perdas da onda P normal.

Os algoritmos numéricos que resolvem as equações de propagação estão baseados nos esquemas de **diferenças finitas (DF)** de segunda ordem para as derivadas temporais e de quarta ordem para as derivadas espaciais. As derivadas espaciais são também calculadas utilizando o **método pseudospectral (PS)**. Os esquemas de DF e PS são comparados em relação à diminuição dos erros devidos à dispersão numérica para diferentes situações que exemplificam a propagação das ondas nos meios acima descritos.

O documento está organizado de forma que ao longo de todos os capítulos são apresentados resultados numéricos obtidos. No Capítulo 1, apresenta-se a chamada Teoria de Biot da poroelasticidade e são discutidas as conseqüências que dela podem ser obtidas. Também são apresentadas as propriedades das ondas que se propagam nos meios porosos saturados e são calculadas as relações de dispersão. No Capítulo 2, são desenvolvidas as extensões da teoria de Biot, como é a denominada dupla porosidade e outros modelos de heterogeneidades na escala mesoscópica. No Capítulo 3, apresenta-se os métodos de solução numérica das equações diferenciais da Teoria de Biot e das equações de suas diferentes extensões. Os algoritmos numéricos deste trabalho tem como base os esquemas de diferenças finitas de alta ordem em malhas diferenciadas (staggered grid) e os métodos pseudo espectrais. No Capítulo 4, apresenta-se comparações da propagação de ondas para modelos de heterogeneidades na escala mesoscópica tais como: o modelo da dupla porosidade e o modelo de camadas de meios porosos alternados, avaliando o comportamento das ondas nas diferentes situações. No fim as conclusões, dificuldades e trabalhos futuros são discutidos.

A principal contribuição deste trabalho é a análise dos mecanismos de perdas devido às heterogeneidades na escala mesoscópica. Mostra-se a equivalência dos mecanismos mesoscópicos de saturação parcial, a modelagem das fraturas como um meio bifásico de alta porosidade e a modelagem das fraturas utilizando a dupla porosidade. No caso da dupla porosidade escreveu-se as equações do movimento e as relações constitutivas como um sistema hiperbólico de primeira ordem em um esquema velocidade de partícula-esforços na matriz e pressões do fluido na porosidade da matriz e nas fraturas.

No desacoplamento das equações de movimento foram deduzidas expressões para as velocidades das três ondas compressoriais com relação aos volumes das porosidades primária e secundária (fraturas). Por meio de experimentos numéricos mostra-se que a onda P rápida é fortemente influenciada pelo volume das fraturas e a onda S neste modelo quase não é afetada por tal volume. Além disso, mostra-se que a anisotropia, especificamente no caso de meios transversalmente isotrópicos, é um fator que influencia a propagação das ondas nos meios porosos.

Foram deduzidas expressões analíticas para a atenuação e dispersão das ondas de Biot.

Baseando-se nestas expressões, mostra-se que as atenuações deslocam-se às baixas frequências enquanto as ondas P e S propagam-se na direção paralela ao eixo de simetria. Para a onda P lenta mostra-se sua natureza difusiva devido ao comportamento radicalmente diferente nas direções paralela e perpendicular ao eixo de simetria, implicando, além disso, perdas e atenuações nas outras duas ondas.

Finalmente foram implementados códigos computacionais para resolver numericamente as equações de Biot e suas extensões como sistemas hiperbólicos de primeira ordem, utilizando o método das diferenças finitas (DF) e Pseudospectral para resolver estas equações.

1

A Teoria de Biot

Há décadas a sismica de exploração tem evoluído daquele objetivo inicial que era a obtenção de imagens em tempo, que representam os aspectos estruturais da subsuperfície, até chegar nos dias atuais, quando se tenta estimar as propriedades petrofísicas dos componentes: sólido e fluido baseado na informação de poços e na análise das amplitudes e formas das ondas sísmicas. A chamada Teoria de Biot ou Teoria de Biot-Gassmann ocupa-se da relação entre as propriedades físicas das rochas e dos fluidos com os parâmetros sísmicos. Neste capítulo se discute os aspectos fundamentais da Teoria de Biot, tendo como ponto de partida os conceitos de Consolidação e a poro-elasticidade para obter as relações constitutivas dos esforços e pressões nas fases sólida e fluida das rochas e os deslocamentos dos dois componentes. Baseado nestas relações e utilizando uma formulação variacional para as energias e as perdas por dissipação, obtêm-se as equações de movimento. Estas equações de movimento identificam fundamentalmente a existência de três modos de ondas de Corpo: duas ondas P e uma onda S.

1.1 A poroelasticidade e a teoria de consolidação

Meios porosos, também chamados de matéria granulada, representam tipos de meios muito freqüentes nas rochas sedimentares e sua composição está formada por agregados de partículas devido à erosão, à sedimentação e à consolidação dos grãos, as quais são denominadas rochas clásticas, tais como os arenitos. A estrutura interna dos meios é comparável a um sólido homogêneo embora em sua formação os grãos não se encaixem totalmente, deixando espaços vazios. Os espaços podem estar cheios parcialmente ou totalmente por algum fluido como água, gás ou óleo.

Os meios porosos são compostos por um meio sólido (grãos consolidados e cimentados) chamado de matriz e os espaços vazios chamados de poros. Um meio poroso tem volume definido o qual pode dividir-se em dois: o volume da matriz e o volume correspondente aos poros. A porosidade se define pela relação entre o volume dos poros e o volume total.

Na atualidade existem diferentes técnicas (no nível de laboratório) para avaliar os diferentes volumes a fim de determinar o valor da porosidade. Para uma descrição destas técnicas vide (Bourbié et al., 1987).

A porosidade pode ser classificada como porosidade conectada e porosidade não conectada. A primeira significa que os poros estão conectados entre si por meio de pequenos canais e a não conectada se assume como parte da matriz.

No contexto da teoria de Biot precisa-se supor que a parte sólida e a parte porosa são contínuas de forma que as ondas podem se propagar devido ao fato que a parte do fluido que participa do movimento da onda P lenta é aquela contida na porosidade conectada.

A consolidação é um processo pelo qual um material (rocha porosa) decresce no volume pela aplicação de um esforço. A presença de um fluido nos poros de uma rocha modifica suas propriedades mecânicas. Dois mecanismos são fundamentais na interação do fluido nos poros e a rocha: (i) o incremento da pressão de fluido (ou pressão de poro) induz uma dilatação na rocha, e (ii) a compressão da rocha causa um incremento na pressão do fluido no caso de que o fluido fique aprisionado. Estes mecanismos faz com que as propriedades mecânicas das rochas sejam temporalmente dependentes. É claro que uma rocha é mais rígida no caso em que o fluido fica aprisionado do que o caso em que a pressão de poro seja nula. A Teoria poroelástica de Biot é construída (Biot, 1941) utilizando um modelo conceitual constituído por uma matriz da rocha (fase sólida) e um fluido que preenche os poros da rocha, supondo além disso as seguintes hipóteses: (a) que todos os poros sejam interconectados, (b) que o material é isotrópico, (c) que as relações esforço-deformação sejam lineares, (d) que as deformações sejam infinitesimais, (e) que os fatores termodinâmicos sejam desprezados e finalmente, (f) que o fluxo do fluido através dos poros satisfaça a chamada **Lei de Darcy** (Biot, 1941).

Se τ_{ij} é o usual tensor de esforços da teoria da elasticidade e e_{ij} o tensor de deformação, Biot define o conteúdo de fluido ϵ expreso em termos dos esforços como:

$$\epsilon = a_1\tau_{11} + a_2\tau_{22} + a_3\tau_{33} + aP, \quad (1.1)$$

note-se que os esforços cortantes não aparecem na equação anterior, além disso, pela hipótese da isotropia do meio, tem-se que $a_1 = a_2 = a_3$ (Biot,1941). Pode-se escrever as relações constitutivas nas quais relaciona-se os esforços τ , a pressão no fluido P com a deformação

volumétrica do sólido e e o conteúdo de fluido ζ , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} e &= a_{11}\tau + a_{12}P \\ \epsilon &= a_{21}\tau + a_{22}P. \end{aligned} \quad (1.2)$$

O significado físico dos coeficientes a_{ij} se obtém tomando a relação da variação da variável dependente relativa à variação em uma variável independente mantendo a outra variável constante. Assim, definimos os coeficientes a_{ij} da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left. \frac{\delta e}{\delta \tau} \right|_{P=0} = \frac{1}{K} \\ a_{12} &= \left. \frac{\delta e}{\delta P} \right|_{\tau=0} = \frac{1}{H} \\ a_{21} &= \left. \frac{\delta \epsilon}{\delta \tau} \right|_{P=0} = \frac{1}{H_1} \\ a_{22} &= \left. \frac{\delta \epsilon}{\delta P} \right|_{\tau=0} = \frac{1}{R}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

o coeficiente $\frac{1}{K}$ é a incompressibilidade volumétrica da rocha tendo a pressão de poro constante, esta condição é conhecida como condição de drenagem (drained).

O coeficiente $\frac{1}{H}$ não aparece na teoria da elasticidade, este coeficiente significa a variação da deformação volumétrica do sólido para variações da pressão de poro mantendo o esforço constante, o coeficiente $\frac{1}{H_1}$ tem igual significado. O coeficiente $\frac{1}{H}$ é chamado coeficiente específico de armazenagem, obtido em condições de esforço nulo.

Partindo da existência de uma energia potencial de deformação:

$$W = \frac{1}{2}(\tau e + P\epsilon), \quad (1.4)$$

que satisfaz $\frac{\partial W}{\partial e} = \tau$ e $\frac{\partial W}{\partial \epsilon} = P$,

as derivadas cruzadas $\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial e}$ e $\frac{\partial^2 W}{\partial e \partial \epsilon}$ precisam ser iguais obtendo-se então que

$$\frac{\partial \tau}{\partial \epsilon} = \frac{\partial P}{\partial e}. \quad (1.5)$$

Resolvendo as equações (1.2) para τ e P :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{ea_{22} - \epsilon a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ P &= \frac{-a_{21}e + a_{11}\epsilon}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Substituindo estas expressões na equação (1.5) obtém-se que $a_{12} = a_{21}$ ou seja $H = H_1$. Esta igualdade significa que a poroelasticidade satisfaz **uma relação de Reciprocidade: O volume de fluido expulso pelo incremento no esforço, mantendo a pressão do fluido constante, é igual à expansão volumétrica do sólido devido ao incremento da pressão de poro, mantendo o esforço de compressão constante** (Wang e Nur, 1990).

O coeficiente $\frac{1}{R}$ é chamado de armazenamento específico (sem restrições) e corresponde à relação da mudança no volume de fluido e a mudança na pressão de poro.

Os três coeficientes anteriores caracterizam o fenômeno de consolidação, embora, na literatura da poroelasticidade também utiliza-se outros dois parâmetros adicionais: O parâmetro de Skempton $B = -\frac{\delta P}{\delta \tau}|_{\epsilon=0}$ e o coeficiente de armazenamento específico (com restrições) $\frac{1}{M} = \frac{\delta \epsilon}{\delta P}|_{\epsilon=0}$. Pode-se mostrar que $B = \frac{R}{H}$ e $\frac{1}{M} = \frac{1}{R} - \frac{K}{H^2}$.

A relação K/H é conhecida como o coeficiente Biot-Willis (Wang, 2001) e significa a relação do volume adicional ao volume armazenado dividido pela variação na deformação volumétrica do sólido.

Para determinar os parâmetros poroelásticos tem-se três experimentos: (i) Teste de drenagem (drained test) no qual um incremento na pressão de confinamento é aplicado, permitindo que a pressão de fluido esteja em equilíbrio com a pressão atmosférica (Detournay e Cheng, 1993), (ii) Teste de encapsulamento (unjacketed test) no qual um incremento na pressão de confinamento e de pressão de fluido são aplicados simultaneamente, e (iii) Teste de drenagem nulo (undrained test) no qual um incremento na pressão de confinamento é aplicado porém sem permitir fluxo de fluido para o exterior da amostra. Neste teste, o parâmetro fundamental é o módulo volumétrico do composto K_{sat} (módulo undrained) o qual caracteriza o composto sólido-fluido. O módulo K_{sat} pode ser expresso em termos dos módulos volumétricos dos componentes K_s e K_f e a porosidade ϕ da rocha:

$$K_{sat} = \frac{\phi[1/K_s - 1/K_f] + 1/K_s - 1/K_{dry}}{\phi/K_{dry}[1/K_s - 1/K_f] + 1/K_s[1/K_s - 1/K_{dry}]}, \quad (1.7)$$

esta equação é conhecida como **A equação de Gassmann**. Gassmann (1951) obtém esta expressão por simples considerações da teoria da elasticidade. Esta fórmula tem um papel fundamental na Teoria de Biot da propagação de ondas em meios porosos. Para uma demonstração no contexto da Teoria de Biot desta fórmula vide trabalho de Berryman (1999).

1.2 Propagação de ondas num meio poroso e as Equações de Biot

Para obter as equações de movimento num meio poroso, Biot (1956a) tem-se como ponto de partida algumas hipóteses em relação às propriedades do meio poroso:

1. O comprimento de onda é muito maior em comparação com as dimensões do volume elementar macroscópico além disso, as dimensões do volume são maiores que as dimensões dos canais onde acontece o fluxo microscópico do fluido.

2. Os deslocamentos da matriz e do fluido são considerados pequenos a fim de supor que os tensores de esforço e deformação são infinitesimais, de forma que o tensor de deformação tenha relação linear com os deslocamentos.

3. A fase de fluido contida é contínua, portanto, a matriz está constituída pelo sólido e os poros não conectados. Ademais se assume que a porosidade é isotrópica e uniforme e o meio é totalmente saturado.

4. A matriz é considerada elástica e isotrópica, embora esta condição possa ser removida, estendendo assim a teoria ao caso anisotrópico.

5. O fator termodinâmico é desprezível.

Biot obtém as equações de movimento a partir de uma formulação variacional. Para isto precisa-se das expressões das energias potencial W , cinética T e um potencial de dissipação D . A energia potencial, a qual é dependente dos deslocamentos, toma valores positivos quando o sistema se afasta do estado de mínima energia. Neste caso, a energia potencial W será então a forma quadrática positiva definida:

$$2W = 2\tau_{11}e_{11} + 2\tau_{22}e_{22} + 2\tau_{33}e_{33} + \tau_{12}e_{12} + \tau_{13}e_{13} + \tau_{23}e_{23} + s\epsilon \quad (1.8)$$

Se os fatores termodinâmicos são desconsiderados a forma diferenciável é exata, logo:

$$dW = \tau_{ij}de_{ij} \rightarrow \tau_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} \quad (1.9)$$

$$s = \frac{\partial W}{\partial \epsilon}. \quad (1.10)$$

A energia cinética T pode ser escrita como uma forma quadrática positiva definida pelas velocidades das partículas do sólido e do fluido:

$$2T = \rho_{11}(\dot{u}_i\dot{u}_i) + 2\rho_{12}(\dot{u}_i\dot{U}_i) + \rho_{22}(\dot{U}_i\dot{U}_i) \quad (1.11)$$

u_i e U_i são os deslocamentos do sólido e do fluido respectivamente, \dot{u}_i e \dot{U}_i são as derivadas com respeito ao tempo de u_i e U_i . Os coeficientes ρ significam que o fluxo relativo do fluido nos poros não é uniforme (Biot, 1956a). Na teoria de Biot, a dissipação deve-se principalmente ao movimento relativo entre a matriz e o fluido (Carcione, 2007). O potencial de dissipação D se define:

$$2D = b[(\dot{u}_x - \dot{U}_x)^2 + (\dot{u}_y - \dot{U}_y)^2 + (\dot{u}_z - \dot{U}_z)^2] \quad (1.12)$$

b é uma constante chamada de fricção. Observe que a dissipação depende apenas do movimento relativo do fluido com respeito ao sólido por isso, a dissipação desaparece quando não se tem o movimento relativo. Assim as equações de Lagrange com a função de dissipação são expressas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{u}_i} &= \frac{\partial W}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^3 \tau_{i,j} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{U}_i} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{U}_i} &= \frac{\partial W}{\partial U_i} = \sum_{j=1}^3 s_{,j} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Para obter as equações de movimento precisa-se das relações constitutivas entre o esforço τ , a pressão de fluido s e as deformações no sólido e e no fluido ϵ . Biot (1956a) introduz os parâmetros poroelásticos N , A , Q e R . As relações constitutivas são:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= 2Ne_{11} + Ae + Q\epsilon \\ \tau_{22} &= 2Ne_{22} + Ae + Q\epsilon \\ \tau_{33} &= 2Ne_{33} + Ae + Q\epsilon \\ \tau_{12} &= Ne_{12} \\ \tau_{13} &= Ne_{13} \\ \tau_{23} &= Ne_{13}, \\ s &= Qe + R\epsilon, \end{aligned} \quad (1.14)$$

ou mais brevemente:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= 2Ne_{ij} + \delta_{ij}(Ae + Q\epsilon) \\ s &= Qe + R\epsilon, \end{aligned} \quad (1.15)$$

onde δ_{ij} é o delta de Krocneker e lembrando que $e = e_{11} + e_{22} + e_{33} = \nabla \cdot u$ e $\epsilon = \nabla \cdot U$

Substituindo (1.14) em (1.13) obtm-se:

$$N\nabla^2 \vec{u} + \nabla[(A + N)e + Q\epsilon] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{11}\vec{u} + \rho_{12}\vec{U}) + b\frac{\partial}{\partial t}(\vec{u} - \vec{U})$$

(1.16)

$$\nabla[Qe + R\epsilon] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{12}\vec{u} + \rho_{22}\vec{U}) - b\frac{\partial}{\partial t}(\vec{u} - \vec{U}).$$

O fator b é expresso em termos da viscosidade η , a porosidade ϕ e a permeabilidade κ :

$$b = \frac{\eta\phi^2}{\kappa}. \quad (1.17)$$

Os parâmetros N , A , Q , R são (Biot, 1962a):

$N = \mu$, $A = \lambda + M(\alpha - \phi)^2$, $Q = \phi(\alpha - \phi)M$, $R = \phi^2M$ (vide secção anterior). As equações de propagação (1.16) são válidas na faixa de baixas frequências. Considera-se que o fluxo do fluido nos poros é do tipo laminar (Biot, 1956a; Biot, 1956b).

Estas equações constituem a **Teoria de Biot para baixas frequências**. A frequência limite é encontrada quando as forças de viscosidade se equilibram com as forças inerciais ou, em forma equivalente, quando o comprimento de onda da onda que excita o meio é da ordem do tamanho dos poros:

$$f_c = \pi \frac{\eta}{\rho_f A d^2}. \quad (1.18)$$

onde d é o diâmetro dos poros. Se consideramos um meio isotrópico e homogêneo pode-se desacoplar as ondas P da onda S . Tomando a divergência nas equações (1.16) obtemos as equações de propagação das ondas compressãois ou ondas P :

$$\nabla^2(Pe + Q\epsilon) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{11}e + \rho_{12}\epsilon) + b\frac{\partial}{\partial t}(e - \epsilon) \quad (1.19)$$

$$\nabla^2(Qe + R\epsilon) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{12}e + \rho_{22}\epsilon) - b\frac{\partial}{\partial t}(e - \epsilon).$$

Da mesma maneira, tomando o rotacional nas equações (1.16) obtemos as equações de propagação da onda S

$$N\nabla^2\vec{\omega} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{11}\vec{\omega} + \rho_{12}\vec{\Psi}) + b\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\omega} - \vec{\Omega}) \quad (1.20)$$

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{12}\vec{\omega} + \rho_{22}\vec{\Psi}) - b\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\omega} - \vec{\Omega}).$$

As equações anteriores foram obtidas supondo fundamentalmente que o fluxo de fluido no interior dos poros é do tipo **fluxo de Poiseuille** ou fluxo laminar. Uma característica destes fluxos é que o chamado número de Reynolds $Re \propto \frac{\rho}{\eta}$ é pequeno.

A relação $\frac{\rho}{\eta}$ indica neste caso que as forças viscosas são dominantes com respeito às forças inerciais. Este fato está ligado com as frequências de oscilação da onda que excita

o meio poroso. O fluxo de Poiseuille é interrompido quando o comprimento de onda é da ordem do diâmetro dos poros. Esta frequência é:

$$f_t = \pi \frac{\eta}{\rho_f 4d^2} \quad (1.21)$$

Biot (1956b) estende a teoria da propagação para toda a faixa de frequências. As equações obtidas por Biot no caso de altas frequências são similares às equações (1.16) acrescentando uma função de variável complexa $F(\kappa)$ a qual representa o desvio do fluxo de Poiseuille quando a frequência aumenta. Sendo $\kappa = a(\frac{\omega}{\nu})^{1/2}$ uma nova variável adimensional ligada à frequência ω e ao parâmetro de viscosidade η e à densidade do fluido ρ_f , a um fator geométrico e $\nu = \eta/\rho_f$. A função F satisfaz $F(0) = 1$, o que significa o regime de baixas frequências. As equações de movimento são então:

$$N\nabla^2 \vec{u} + \nabla[(A + N)e + Q\epsilon] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{11}\vec{u} + \rho_{12}\vec{U}) + bF(k)\frac{\partial}{\partial t}(\vec{u} - \vec{U}) \quad (1.22)$$

$$\nabla^2[Qe + R\epsilon] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{12}\vec{u} + \rho_{22}\vec{U}) - bF(k)\frac{\partial}{\partial t}(\vec{u} - \vec{U}).$$

Outros dois trabalhos fundamentais de Biot são aqueles do ano 1962 (Biot, 1962a; Biot, 1962b), nos quais ele reescreve suas equações, introduzindo novas variáveis. No lugar do deslocamento no fluido \vec{U} , Biot define o vetor de deslocamento relativo:

$$\vec{W} = \phi(\vec{U} - \vec{u}) \quad (1.23)$$

Além desta variável, ele também define outra

$$\zeta = \nabla \cdot \vec{W} \quad (1.24)$$

que no caso homogêneo é

$$\zeta = \phi \nabla \cdot (\vec{U} - \vec{u}) \quad (1.25)$$

Esta variável representa o incremento (decremento) no conteúdo de fluido nos poros, além disso as constantes elásticas das primeiras equações tais como P, Q, R são substituídas pelas constantes elásticas H, C, M .

Assim como nos trabalhos de 1956 (Biot, 1956a; Biot, 1956b), em seus artigos de 1962 (Biot, 1962a; Biot, 1962b) obtém as equações de movimento a partir de uma formulação variacional. Para isto precisa-se das expressões da energia de deformação, energia cinética e da dissipação, assumindo também que os efeitos termodinâmicos são desprezados. Se o tensor de deformação do meio é $[e_{ij}]$, a energia de deformação $W = W(e_{ij}, \zeta)$ para o tensor $[e_{ij}]$ tem

os invariantes (Biot, 1962a): $I_1 = e_{ii} = e$, $I_2 = e_{22}e_{33} + e_{33}e_{11} + e_{22}e_{11} - \frac{1}{2}(e_{23}^2 + e_{13}^2 + e_{12}^2)$. Definindo o invariante $I'_2 = -4I_2$ então

$$2W = He^2 + \mu I'_2 - 2Ce\zeta + M\zeta^2 \quad (1.26)$$

Se W é uma forma quadrática exata: $\tau_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}}$, tem-se a relação esforço-deformação:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= He - 2\mu(e_{yy} + e_{zz}) - C\zeta \\ \tau_{yy} &= He - 2\mu(e_{xx} + e_{zz}) - C\zeta \\ \tau_{zz} &= He - 2\mu(e_{yy} + e_{xx}) - C\zeta \\ \tau_{yz} &= \mu e_{yz} \\ \tau_{zx} &= \mu e_{zx} \\ \tau_{yx} &= \mu e_{yx} \\ p_f &= -Ce + M\zeta \end{aligned} \quad (1.27)$$

O parâmetro C é dado por $C = \alpha M$. Na forma abreviada escreve-se a equação anterior como:

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}((K_{sat} + \frac{4}{3}\mu)e + \alpha M\zeta) \quad (1.28)$$

$$p_f = -Ce + M\zeta$$

K_{sat} é o módulo volumétrico do meio saturado. Pode-se expressar este módulo em termos do módulo volumétrico da rocha seca K_{dry} , utilizando a chamada equação de Gassmann

$$K_{sat} = K_{dry} + \alpha^2 M \quad (1.29)$$

$$\alpha = 1 - \frac{K_{dry}}{K_{sol}}$$

em que α é conhecido como o parâmetro de Biot-Willis e assim

$$M = \frac{\phi}{K_{fluid} + \frac{\alpha - \phi}{K_{grao}}}. \quad (1.30)$$

No caso de se ter um sólido perfeito ($\phi = 0$), é claro que $K_{dry} = K_{sol}$ e $\alpha = 0$. Para um fluido ($\phi = 1$), $K_{dry} = 0$ e $\alpha = 1$. A propagação de uma onda no meio poroso induz um gradiente de pressão no fluido, o que induz por sua vez um fluxo de fluido nos poros. Este fluxo é caracterizado por $\frac{\partial \vec{w}}{\partial t}$. O fluxo traz como consequência uma dissipação de energia. Biot (1962a) define uma função de dissipação D que no caso isotrópico é

$$D = \frac{\eta}{2\kappa} \sum \dot{w}_i^2 \quad (1.31)$$

Tendo também a expressão da energia cinética e da energia potencial, as equações de Euler-Lagrange são:

$$\sum \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \right) \quad (1.32)$$

$$-\frac{\partial p_f}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{w}_i} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{w}_i}.$$

Tendo em vista as relações de esforço-deformação das equações (1.27) se obtém:

$$2 \sum \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu e_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_c e - \alpha M \zeta) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho u_i + \rho_f w_i) \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha M e - M \zeta) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_f u_i + m w_i) + \frac{\eta}{\kappa} \frac{\partial w_i}{\partial t}$$

com $\lambda_c = K_{sat} + \frac{4}{3}\mu$. Para um meio homogêneo as equações expressam-se por

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\mu + \lambda_c) \nabla e - \alpha M \nabla \zeta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho \vec{u} + \rho_f \vec{W}) \quad (1.34)$$

$$\nabla (\alpha M e - M \zeta) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_f \vec{u} + \rho \vec{W}) + \frac{\eta}{\kappa} \frac{\partial \vec{W}}{\partial t}$$

As equações (1.33) podem ser escritas como:

$$\sum \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \rho \ddot{u}_i + \rho_f \ddot{w}_i \quad (1.35)$$

$$-\frac{\partial p_f}{\partial x_i} - \rho_f \ddot{u}_i = m \frac{\partial}{\partial t} (\dot{w}_i) + \frac{\eta}{\kappa} \dot{w}_i = \left(m \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\eta}{\kappa} \right) \dot{w}_i$$

Biot chama $(m \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\eta}{\kappa})$ de operador viscodinâmico $Y(d)$, onde d é dado por $\frac{d}{dt}$.

O operador $Y(d)$ descreve os tipos de forças atuantes no meio, isto é, as forças viscosas $\frac{\eta}{\kappa}$ e forças inerciais mp . No domínio da frequência o operador é dado por $d = \frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow i\omega$. No caso de $\omega = 0$ ($d = 0$) o operador $Y(d) \equiv \frac{\eta}{\kappa}$ e a segunda equação (35) é escrita como

$$-\frac{\partial p_f}{\partial x_i} - \rho_f \ddot{u}_i = \frac{\eta}{\kappa} \dot{w}_i$$

o que corresponde à chamada Lei de Darcy.

Na teoria poroelástica de Biot, o único fator de atenuação é o movimento relativo do fluido viscoso com respeito às paredes do sólido $b \frac{\partial}{\partial t} (\vec{U} - \vec{u})$ ou $bF(k) \frac{\partial}{\partial t} (\vec{U} - \vec{u})$. O movimento relativo do fluido é conhecido como fluxo global ou fluxo de Biot sendo que o fluxo global

é na direção de propagação da onda. Nos materiais naturais como as rochas sedimentares, a heterogeneidade microscópica induz a mecanismos complexos que não estão incluídos na formulação elástica de Biot.

A viscoelasticidade é introduzida nas equações de Biot levando-se em conta que na interação sólido-fluído aparecem mecanismos de dissipação tais como o da fricção entre os grãos; na área de contato entre eles produz-se deslocamento de fluído dentro e fora desta área. Este mecanismo é chamado de fluxo local do fluído (squirt-flow). Pela viscosidade do fluído o movimento do fluído não é instantâneo e se tem dissipação de energia (Carcione e Quiroga, 1996). Alguns autores (Dvorkin e Nur, 1993), (Dvorkin et al., 1994) e (Parra, 1997) incluem o mecanismo de fluxo local nas equações poroelásticas. Outros como Biot (1962a, 1962b), Carcione (1998) adicionam o fenômeno na formulação de Biot, assumindo que a matriz da rocha é um material de natureza viscoelastica. A característica fundamental dos materiais viscoelásticos (Carcione, 2007) é a função da relaxação que é dependente do tempo. Esta função mostra que os materiais viscoelásticos não dão resposta imediata a uma perturbação. No próximo capítulo discute-se acerca das equações poro-viscoelásticas de Biot e as conseqüências que delas podem se obter.

As equações de Biot tal como ele as desenvolveu e as quais foram mostradas neste capítulo se baseiam na mecânica do contínuo em uma escala macroscópica utilizando argumentos heurísticos usados para especificar as constantes elásticas e os termos inerciais de acoplamento. Uma derivação mais rigorosa das equações de Biot foi feita nos anos 80 por Burridge e Keller, eles obtém as equações constitutivas e de movimento desde a escala microscópica (tamanho dos poros) até o macroscópico usando o chamado método de homogeneização. Esta derivação está baseada na teoria linear da elasticidade do sólido e da equação linearizada de Navier Stokes para o fluxo de fluido nos poros com condições de fronteira entre o sólido e o fluído (Burridge e Keller, 1981).

1.3 As equações de Biot como um sistema hiperbólico de primeira ordem

Na modelagem sísmica, as equações elasto-dinâmicas e de onda podem ser escritas numa forma equivalente aos esquemas usuais de esforço-deslocamento, isto é, como um sistema hiperbólico de primeira ordem (Aki e Richards, 1980) ou seja num esquema esforços-velocidade da partícula. Baseado nesta metodologia escreve-se as equações de Biot num esquema esforço-pressão-velocidade da partícula. O esquema esforços-pressão-velocidade da partícula é utilizado neste trabalho para as implementações numéricas que serão apresentados nos

capítulos 3 e 4 do documento.

As equações de Biot do movimento no esquema esforços-pressão-velocidade da partícula estão formado por três conjuntos de equações (Carcione, 1998):

1. Equações de Biot-Newton

$$\begin{aligned}\tau_{xx,x} + \tau_{xz,z} &= \rho v_{x,t} + \rho_f q_{x,t} \\ \tau_{xz,x} + \tau_{zz,z} &= \rho v_{z,t} + \rho_f q_{z,t}\end{aligned}\tag{1.36}$$

2. Lei de Darcy

$$\begin{aligned}-P_{,x} &= \rho_f v_{x,t} + m q_{x,t} + (\eta/\kappa) q_x \\ -P_{,z} &= \rho_f v_{z,t} + m q_{z,t} + (\eta/\kappa) q_z\end{aligned}\tag{1.37}$$

3. Equações constitutivas

$$\begin{aligned}\tau_{xx,t} &= E v_{x,x} + (E - 2\mu) v_{z,z} + \alpha M \epsilon \\ \tau_{zz,t} &= E v_{z,z} + (E - 2\mu) v_{x,x} + \alpha M \epsilon \\ \tau_{xz,t} &= \mu (v_{x,z} + v_{z,x}) \\ p_{,t} &= -M \epsilon \\ \epsilon &= \alpha (v_{x,x} + v_{z,z}) + q_{x,x} + q_{z,z},\end{aligned}\tag{1.38}$$

onde $\vec{v} = \dot{\vec{u}}$ e $\vec{q} = \dot{\vec{W}}$.

Das equações de Biot-Newton e da Lei de Darcy obtém-se:

$$\begin{aligned}v_{x,t} &= \frac{m(\tau_{xx,x} + \tau_{xz,z}) + \rho_f(P_{,x} + \eta/\kappa q_x)}{\rho m - \rho_f^2} \\ q_{x,t} &= \frac{-\rho_f(\tau_{xx,x} + \tau_{xz,z}) - \rho_f(P_{,x} + \eta/\kappa q_x)}{\rho m - \rho_f^2} \\ v_{z,t} &= \frac{m(\tau_{xz,x} + \tau_{zz,z}) + \rho_f(P_{,z} + \eta/\kappa q_z)}{\rho m - \rho_f^2} \\ q_{z,t} &= \frac{-\rho_f(\tau_{xz,x} + \tau_{zz,z}) - \rho_f(P_{,z} + \eta/\kappa q_z)}{\rho m - \rho_f^2}\end{aligned}\tag{1.39}$$

Definindo o vetor $\vec{V} = [v_x, v_z, q_x, q_z, \tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz}, P_f]^T$, $D = \rho m - \rho_f^2$ e a matriz M :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & (-\rho_f \eta / \kappa) / D & 0 & (m \partial_x) / D & 0 & (m \partial_z) / D & (\rho_f \partial_x) / D \\ 0 & 0 & 0 & (\rho_f \eta / \kappa) / D & 0 & (m \partial_x) / D & (m \partial_z) / D & (\rho_f \partial_z) / D \\ 0 & 0 & (-\rho_f \eta / \kappa) / D & 0 & (-\rho_f \partial_x) / D & 0 & -\rho_f \partial_z / D & (-\rho_f \partial_x) / D \\ 0 & 0 & 0 & (-\rho_f \eta / \kappa) / D & 0 & (-\rho_f \partial_x) / D & (-\rho_f \partial_z) / D & (-\rho_f \partial_z) / D \\ (E + \alpha^2 M) \partial_x & (E - 2\mu + \alpha^2 M) \partial_z & \alpha M \partial_x & \alpha M \partial_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (E - 2\mu + \alpha^2 M) \partial_x & (E + \alpha^2 M) \partial_z & \alpha M \partial_x & \alpha M \partial_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu \partial_x & \mu \partial_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -M \alpha \partial_x & -M \alpha \partial_z & -M \partial_x & -M \alpha \partial_z & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde ∂_x , ∂_z significam as primeiras derivadas com respeito a x e z . Escreve-se o sistema de equações de Biot como:

$$\dot{\vec{V}} = M \vec{V} \quad (1.40)$$

A matriz M tem toda a informação dos parâmetros elásticos e as variações espaciais das variáveis dependentes.

No caso acústico ($\mu = 0$) pode-se escrever as equações de Biot como (Carcione e Quiroga, 1996):

$$-\nabla p = \rho \ddot{u} + \rho_f \ddot{w} \quad (1.41)$$

$$-\nabla p_f = \rho_f \ddot{u} + \left(m \frac{d}{dt} + \frac{\eta}{\kappa}\right) \dot{w}$$

onde p é a pressão no sólido, p_f a pressão no fluido, u é o deslocamento do sólido e w o deslocamento relativo do fluido em relação ao sólido. Definindo $v = \dot{u}$, $q = \dot{w}$ pode-se escrever as equações anteriores para as componentes como:

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho v_i + \rho_f q_i \quad (1.42)$$

$$-\frac{\partial p_f}{\partial x_i} = \rho_f v_i + \frac{\eta}{\kappa} q_i + m \dot{q}_i.$$

Resolvendo para \dot{v} e \dot{q} temos

$$\dot{v}_i = \frac{-m \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho_f \frac{\partial p_f}{\partial x_i} + \rho_f \frac{\eta}{\kappa} q_i}{\rho m - \rho_f^2} \quad (1.43)$$

$$\dot{q}_i = \frac{-m \frac{\partial p_f}{\partial x_i} + \rho_f \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho_f \frac{\eta}{\kappa} q_i}{\rho m - \rho_f^2}.$$

Pelas relações constitutivas para as pressões e os deslocamentos:

$$p = -H\nabla \cdot u + C\nabla \cdot w \quad (1.44)$$

$$p_f = -C\nabla \cdot u + M\nabla \cdot w$$

Derivando em relação a t as equações anteriores, temos:

$$\dot{p} = -H\nabla \cdot v + C\nabla \cdot q \quad (1.45)$$

$$\dot{p}_f = -C\nabla \cdot v + M\nabla \cdot q.$$

As equações (1.43) e (1.45) constituem um sistema de primeira ordem. Definindo o vetor $\vec{V} = [v_1, v_2, q_1, q_2, p, p_f]^T$ e a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\rho_f \eta}{D\kappa} & 0 & \frac{-m\partial_x}{D} & \frac{\rho_f \partial_x}{D} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_f \eta}{D\kappa} & -\frac{m\partial_z}{D} & \frac{\rho_f \partial_z}{D} \\ 0 & 0 & -\frac{\rho_f \eta}{D\kappa} & 0 & \frac{\rho_f \partial_x}{D} & -\frac{\rho \partial_x}{D} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho \eta}{D\kappa} & \frac{\rho_f \partial_z}{D} & -\frac{\rho \partial_z}{D} \\ -H\partial_x & -H\partial_z & C\partial_x & C\partial_z & 0 & 0 \\ -C\partial_x & -C\partial_z & M\partial_x & M\partial_z & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $D = \rho m - \rho_f^2$, pode-se então escrever o sistema de Biot revelado nas equações (1.43,1.45) em forma compacta:

$$\dot{\vec{V}} = M\vec{V} \quad (1.46)$$

O sistema das equações (1.43,1.45) ou 1.46 corresponde à versão acústica 2D das equações de Biot. Para o caso elástico tridimensional a dimensão do vetor \vec{v} é 13 (variáveis) e a matriz M tem dimensão 13x13.

1.4 Propriedades das ondas de Biot e as relações de dispersão

Em alguns casos particulares, as equações de Biot podem ser resolvidas analiticamente como se mostra a seguir. O desenvolvimento analítico que se apresenta neste trabalho está baseado no artigo de Carcione e Quiroga (1996).

A versão acústica das equações de Biot no caso homogêneo e isotrópico pode ser escrita como:

$$-\nabla(p - s) = \rho\ddot{u} + \rho_f\ddot{w}$$

e

$$-\nabla(p_f - s_f) = \rho_f\ddot{u} + Y(d)\ddot{w}, \quad (1.47)$$

onde u é o deslocamento no sólido, w o deslocamento relativo do fluido, p a pressão no sólido, p_f a pressão do poro e $Y(d)$ o operador viscodinâmico ($d = \frac{d}{dt}$) o qual no regime de baixas frequências é

$$Y(d) = md + \frac{\eta}{\kappa}.$$

Tomando a transformada de Fourier do sistema de equações (1.47) obtemos

$$\nabla(\mathbf{P} - \mathbf{S}) = \omega^2 \mathbf{\Gamma} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

onde $\mathbf{P} = [\mathbf{p}, \mathbf{p}_f]^T, \mathbf{S} = [\mathbf{s}, \mathbf{s}_f]^T$, s e s_f as partes da fonte no sólido e no fluido respectivamente e $\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} -\rho & \rho_f \\ -\rho_f & Y/i\omega \end{pmatrix}$.

Tomando o divergente na equação (1.48) temos:

$$\nabla^2(\mathbf{P} - \mathbf{S}) = \omega^2 \mathbf{\Gamma} \mathbf{E} \quad (1.49)$$

onde $\mathbf{E} = \mathbf{div} \begin{bmatrix} u \\ -w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ \zeta \end{bmatrix}$. Têm-se também as relações constitutivas entre as pressões e as dilatações volumétricas:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p \\ p_f \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -H & C \\ -C & M \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \zeta \end{bmatrix}$$

ou abreviadamente $\mathbf{P} = \mathbf{M}\mathbf{E}$ então $\mathbf{E} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}$ substituindo esta expressão na equação (1.49) obtém-se:

$$\nabla^2(\mathbf{P} - \mathbf{S}) = -\omega^2 \mathbf{D}\mathbf{P}, \quad (1.50)$$

onde $\mathbf{D} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{M}^{-1}$.

O sistema de equações é acoplado. O passo seguinte é fazer uma mudança de variáveis para desacoplar as equações. Para isto, diagonaliza-se $\mathbf{D} = \mathbf{A}\mathbf{\Lambda}\mathbf{A}^{-1}$, sendo \mathbf{A} uma matriz cujas colunas são os vetores próprios de \mathbf{D} e $\mathbf{\Lambda}$ a matriz diagonal dos valores próprios.

Definindo os vetores $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]^T = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}$ e $\mathbf{F} = [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2]^T = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{S}$. Substituindo \mathbf{D} nas equações de movimento e premultiplicando por \mathbf{A}^{-1} tem-se o sistema equivalente desacoplado:

$$\nabla^2 v_k + \omega^2 \lambda_k v_k = \nabla^2 f_k, \quad k = 1, 2 \quad (1.51)$$

A solução da equação 1.51 é a convolução(*) da função de Green da equação (1.51) e $\nabla^2 f_k$.

No caso 3D a função de Green (fonte pontual) é: (Pilant, 1979)

$$g(r, \omega) = \frac{1}{r} \exp[-i\omega r \sqrt{\lambda(\omega)}]$$

e no caso 2D (fonte linear) é (Pilant, 1979)

$$g(r, \omega) = -2iH_0^2(\omega r \sqrt{\lambda(\omega)})$$

r é a distância fonte receptor. Tem-se que $g * \nabla^2 f_k = f_k * \nabla^2 g$. A função g satisfaz a equação:

$$\nabla^2 g + \omega^2 \lambda g = -8\delta(r), \quad (1.52)$$

então $\nabla^2 g = G(\lambda_k) = -(\omega^2 \lambda_k g_k + 8\delta(r))$ e por tanto a solução de (1.51) é

$$\nabla^2 g_k * f_k = G(\lambda_k) * f_k$$

Lembrando que $F = [f_1, f_2]^T = A^{-1}S$. Se $S = [s_1, s_2]^T \delta(x)h(t)$ (fonte pontual no espaço), $h(t)$ a wavelet. Definindo a matriz $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}$, a solução de (1.50) pode ser escrita como:

$$\mathbf{G} * \mathbf{F} = \mathbf{G} * \mathbf{A}^{-1}[\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2]^T \delta(\mathbf{x})\mathbf{h}(\omega) = \begin{pmatrix} G_1 * \delta(x)f_1 \\ G_2 * \delta(x)f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \mathbf{h}(\omega). \quad (1.53)$$

Substituindo $\mathbf{F} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{S}$ escreve-se a solução (1.53) como:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, \omega) = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]^T = \mathbf{GA}^{-1}\mathbf{Sh}(\omega). \quad (1.54)$$

Finalmente, como $\mathbf{P} = \mathbf{AV}$ temos que:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{AGA}^{-1}\mathbf{Sh}(\omega). \quad (1.55)$$

Para obter a solução no domínio (r, ω) toma-se a transformada inversa de Fourier de $\mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega)$ com a condição $\mathbf{P}(\mathbf{r}, -\omega) = \mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega)$. No caso da atenuação não nula, a matriz Γ é dependente da frequência ω . Caso contrário, a matriz Γ não é dependente da frequência e portanto a matriz D e seus valores próprios não dependem da frequência e são constantes. Neste caso, as velocidades das ondas de Biot são

$$V_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}, \quad k = 1, 2.$$

No caso 3D pode-se obter a solução completamente analítica:

$$P(r, t) = \frac{1}{r} A \begin{pmatrix} \lambda_1 f_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 f_2 \end{pmatrix} \mathfrak{S}^{-1} \begin{pmatrix} -\omega^2 h(\omega) \exp(-i\omega r \sqrt{\lambda_1}) \\ -\omega^2 h(\omega) \exp(-i\omega r \sqrt{\lambda_2}) \end{pmatrix} \quad (1.56)$$

definindo os tempos $t_k = r/V_k$, $k = 1, 2$ a expressão (1.56) é no domínio (r, t)

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}} \mathbf{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 f_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h''(t - t_1) \\ h''(t - t_2) \end{pmatrix}. \quad (1.57)$$

Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ escreve-se (1.57)

$$p(r, t) = \frac{a_{11} \lambda_1 f_1 h''(t - t_1) + a_{12} \lambda_2 f_2 h''(t - t_2)}{r} \quad (1.58)$$

$$p_f(r, t) = \frac{a_{21} \lambda_1 f_1 h''(t - t_1) + a_{22} \lambda_2 f_2 h''(t - t_2)}{r}$$

pode-se mostrar que a_{11} e a_{21} tem sinais iguais, o que significa que as componentes sólido e fluido da onda P rápida estão em fase, pelo contrário a_{12} e a_{22} , os coeficientes da onda P lenta no sólido e no fluido, respectivamente, tem sinais contrários, o que significa que os movimentos do sólido e fluido estão fora de fase, estes fatos são previstos nas equações de Biot.

No caso 2D, como a função de Green é a função de Hankel $-2iH_0^2(\omega r \sqrt{\lambda(\omega)})$ é impossível se obter uma expressão totalmente analítica do vetor \mathbf{P} no domínio (r, t) . A expressão $\mathbf{P}(r, \omega)$ tem que ser invertida utilizando algum algoritmo FFT para achar a transformada inversa de Fourier.

A seguir mostramos os resultados da implementação da solução analítica das equações de Biot, para que assim possamos visualizar algumas propriedades das ondas de Biot.

Em primeiro lugar mostra-se a influência da porosidade nas velocidades das duas ondas P no caso de um fluido perfeito ($\eta = 0$)

Da figura 1.1 conclui-se a forte dependência das velocidades com a porosidade das duas ondas compressoriais. No caso da onda P rápida, quanto maior for a porosidade, menor será sua velocidade; já no caso da onda P lenta ocorre o contrário, isto explica-se devido ao fato de que a onda P lenta apresenta-se principalmente no fluido, o qual aumenta sua participação na composição do meio bifásico se a porosidade aumenta.

Nas figuras 1.2 e 1.3 apresenta-se a influência da viscosidade na amplitude da onda P lenta em três casos diferentes: $\eta = 0$ (fluido ideal), $\eta = 0.1cp$ (rocha preenchida com água salgada) e $\eta = 264cp$ (rocha preenchida com óleo)

Das figuras 1.2 e 1.3 pode-se concluir que a viscosidade do fluido é um mecanismo fundamental de atenuação da onda P lenta, além disso conclui-se que a amplitude da onda

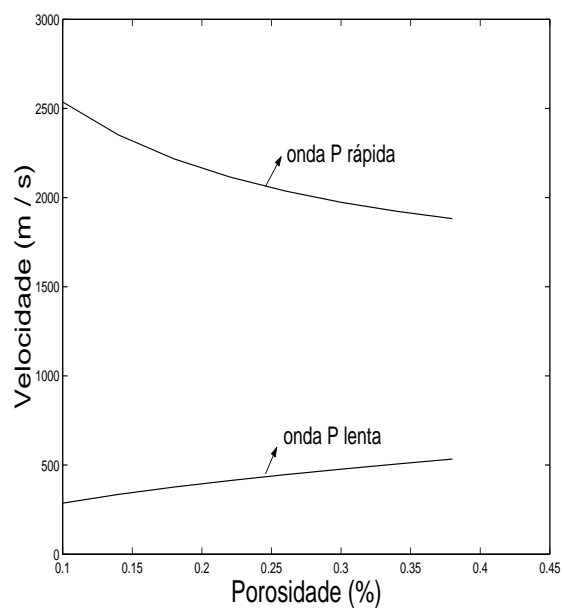


Figura 1.1: Distribuição das velocidades em função da porosidade

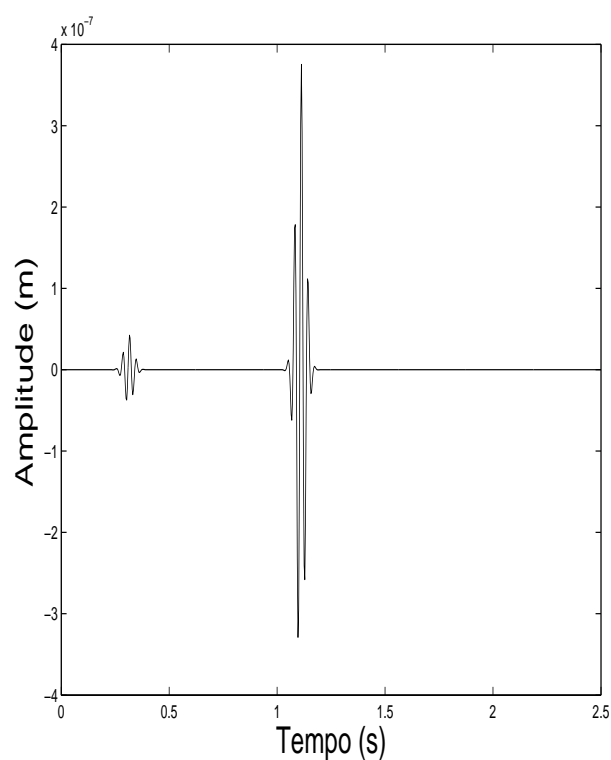


Figura 1.2: As duas ondas P para viscosidade zero

P rápida quase não é afetada pelo valor da viscosidade. Uma análise similar pode ser feita com respeito à permeabilidade da matriz da rocha.

Outro fato previsto pela Teoria de Biot e que pode ser visualizado utilizando a solução

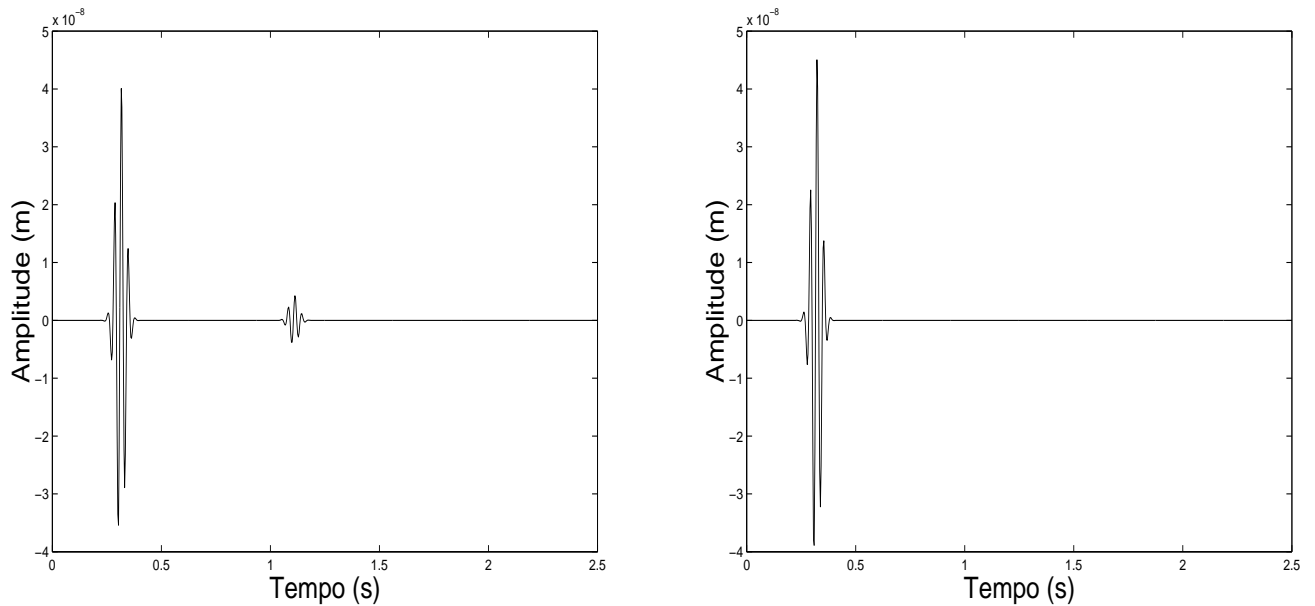


Figura 1.3: Esquerda: As duas ondas P para água salgada. Direita: As duas ondas P para óleo.

analítica, é a forma do deslocamento nas partes sólida e fluida do meio bifásico pelas duas ondas P. Para a onda P rápida os deslocamentos das duas componentes estão em fase, e para a onda P lenta o deslocamento do sólido e do fluido estão fora de fase. Além disso, observa-se que a maior parte da energia da onda P lenta propaga-se através do fluido. Nas figuras 1.4 e 1.5 pode-se comprovar estas afirmações.

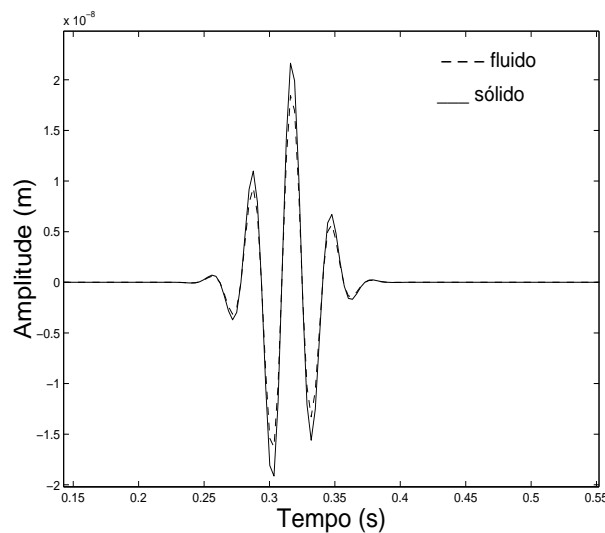


Figura 1.4: Deslocamento do sólido e do fluido para a onda P rápida.

Outra maneira de obter a última propriedade da onda P lenta é através da análise qualitativa das equações de Biot. Para isso tomamos as equações de movimento para as ondas P:

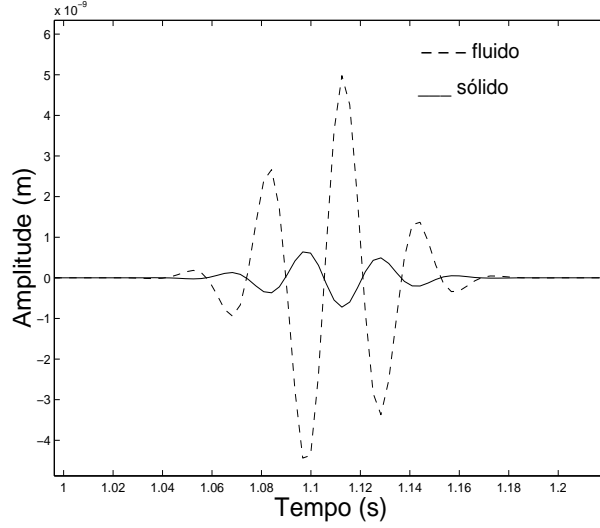


Figura 1.5: Deslocamento do sólido e do fluido para a onda P lenta.

$$\begin{aligned}
 N\nabla^2\vec{u} + (A + N)\nabla e + Q\nabla\epsilon &= \frac{\partial^2(\rho_{11}\vec{u} + \rho_{12}\vec{U})}{\partial t^2} \\
 \nabla^2(Qe + R\epsilon) &= \frac{\partial^2(\rho_{12}\vec{u} + \rho_{22}\vec{U})}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{1.59}$$

Definindo a matriz de massas \mathbf{M}

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{pmatrix}$$

Pode-se escrever (1.59) em forma matricial:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [M \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{U} \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} N\nabla^2 u + \nabla(A + N)e + Q\epsilon \\ \nabla(Qe + R\epsilon) \end{pmatrix} \tag{1.60}$$

As equações (1.59) ou (1.60) representam um sistema para as seis componentes dos deslocamentos \mathbf{u} e \mathbf{U} . Se o meio é estatisticamente isotrópico, a onda S é desacoplada das ondas compressoriais P . Se

$$\begin{aligned}
 \text{div}(\mathbf{u}) &= e, \quad \text{div}(\mathbf{U}) = \epsilon \\
 \nabla^2(Qe + R\epsilon) &= \frac{\partial^2(\rho_{12}\vec{u} + \rho_{22}\vec{U})}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{1.61}$$

então aplicando a operação divergente em (1.59) obtemos:

$$\begin{aligned}
 \nabla^2(Pe + Q\epsilon) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{11}e + \rho_{12}\epsilon) \\
 \nabla^2(Qe + R\epsilon) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{12}e + \rho_{22}\epsilon)
 \end{aligned} \tag{1.62}$$

As equações (1.62) governam a propagação das ondas compressonais ou ondas P. Definindo a matriz $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} P & Q \\ Q & R \end{pmatrix}$ e o vetor $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} e \\ \epsilon \end{pmatrix}$ pode-se escrever (1.62) em notação vetorial:

$$\mathbf{T}\nabla^2\mathbf{Z} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{Z}} \quad (1.63)$$

Pré-multiplicando (1.63) por \mathbf{T}^{-1} obtemos:

$$\nabla^2\mathbf{Z} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Z}} \quad (1.64)$$

A matriz $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{M}$ é positiva definida e simétrica, portanto seus valores próprios são positivos, chamando esta matriz de \mathbf{D} , obtemos

$$\nabla^2\mathbf{Z} = \mathbf{D}\ddot{\mathbf{Z}}. \quad (1.65)$$

Tomando uma solução de (1.65) da forma de ondas planas:

$$\mathbf{Z} = \vec{\nu} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} \quad (1.66)$$

Substituindo (1.66) em (1.65) obtemos:

$$D\vec{\nu} = \frac{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}{\omega^2} \vec{\nu} \quad (1.67)$$

definindo

$$v_p^2 = \frac{\omega^2}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} \quad (1.68)$$

Isto corresponde à velocidade de fase da onda compressional, portanto (1.67) é um problema de valores próprios:

$$\mathbf{D}\vec{\nu} = \frac{1}{v_p^2} \vec{\nu} \quad (1.69)$$

A equação (1.69) tem duas soluções que correspondem a duas ondas P , de velocidades definidas pelos valores próprios de \mathbf{D} : v_{p+} e v_{p-} . Se cada valor próprio corresponde a um vetor próprio, então (1.69) pode ser escrito para cada valor e vetor próprio em termos da matriz $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{M}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{M}\cdot\vec{\nu}_+ &= \frac{1}{v_{p+}^2}\vec{\nu}_+ \\ \nabla^2(Qe + R\epsilon) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{12}e + \rho_{22}\epsilon) \end{aligned} \quad (1.70)$$

ou na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\vec{\nu}_+ &= v_{p+}^2 \mathbf{M}\vec{\nu}_+ \\ \mathbf{T}\vec{\nu}_- &= v_{p-}^2 \mathbf{M}\vec{\nu}_- \end{aligned} \quad (1.71)$$

Pré-multiplicando a primeira equação (1.71) por ν_- e a segunda por ν_+ temos:

$$\begin{aligned}\vec{\nu}_- \mathbf{T} \vec{\nu}_+ &= v_{p+}^2 \vec{\nu}_- \mathbf{M} \vec{\nu}_+ \\ \vec{\nu}_+ \mathbf{T} \vec{\nu}_- &= v_{p-}^2 \vec{\nu}_+ \mathbf{M} \vec{\nu}_-\end{aligned}\quad (1.72)$$

Subtraindo as equações (1.72):

$$(v_{p+}^2 - v_{p-}^2) \vec{\nu}_- \mathbf{M} \vec{\nu}_+ = 0 \quad (1.73)$$

ou seja,

$$\vec{\nu}_- \mathbf{M} \vec{\nu}_+ = 0 \quad (1.74)$$

Da mesma forma, se deduz que

$$\vec{\nu}_+ \mathbf{M} \vec{\nu}_- = 0 \quad (1.75)$$

Definindo os vetores $\vec{\nu}_+ = \begin{pmatrix} \nu_{m+} \\ \nu_{f+} \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_- = \begin{pmatrix} \nu_{m-} \\ \nu_{f-} \end{pmatrix}$ e desenvolvendo (1.75) obtemos:

$$\nu_{m-}(P\nu_{m+} + Q\nu_{f+}) + \nu_{f-}(Q\nu_{m+} + R\nu_{f+}) = 0 \quad (1.76)$$

Como P , Q e R são positivos, se ν_{m+} e ν_{f-} possuem mesmo sinal, isso significa que para o primeiro modo a parte sólida e a parte fluída estão em fase. De (1.76) se deduz que ν_{m-} e ν_{f-} (segundo modo) estão defasadas. Pode-se mostrar (Carcione, 2007) que as velocidades correspondentes aos dois modos são:

$$\nu_{p\pm} = \frac{P\nu_{m\pm}^2 + 2Q\nu_{m\pm}\nu_{f\pm} + R\nu_{f\pm}^2}{\rho_{11}\nu_{m\pm}^2 + 2\rho_{12}\nu_{m\pm}\nu_{f\pm} + \rho_{22}\nu_{f\pm}^2} \quad (1.77)$$

Finalmente, para obter as relações de dispersão das três ondas toma-se uma solução de ondas planas das equações de Biot (Carcione, 1998); estas relações são representadas por um polinômio de quarta ordem para as duas ondas P:

$$-(\rho_f^2 + i/\omega \tilde{Y} \rho) V_c^4 + [i/\omega \tilde{Y} (K_G + 4/3\mu) + M(2\alpha\rho_f - \rho)] V_c^2 + M(K_m + 4/3\mu) = 0. \quad (1.78)$$

onde $\tilde{Y}(\omega) = i\omega m + \eta/\kappa$ é o operador viscoelástico. Resolvendo o polinômio anterior obtém-se duas velocidades complexas V_c^2 que correspondem às duas ondas, definindo $A = -(\rho_f^2 + i/\omega \tilde{Y} \rho)$, $B = (i/\omega \tilde{Y} (K_G + 4/3\mu) + M(2\alpha\rho_f - \rho))$, $C = M(K_m + 4/3\mu)$ temos:

$$V_{p\pm}^2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (1.79)$$

As velocidades de fase e os coeficientes de atenuação são:

$$c_{p\pm} = \frac{1}{Re(\frac{1}{V_{p\pm}})}, \quad \alpha_{p\pm} = 17.372\pi \frac{imag(V_{p\pm})}{Re(V_{p\pm})}, \quad (1.80)$$

e um polinômio de grau dois para a onda S para a qual obtemos a sua velocidade complexa:

$$V_S^2 = \frac{\mu}{\rho - i\omega\rho_f^2\tilde{Y}^{-1}}, \quad (1.81)$$

e a velocidade de fase e o coeficiente de atenuação

$$c_s = \frac{1}{\text{Re}(\frac{1}{V_s})}, \quad \alpha_s = 17.372\pi \frac{\text{imag}(V_s)}{\text{Re}(V_s)}. \quad (1.82)$$

Nas Figuras 1.6, 1.7 e 1.8, apresentam-se as curvas de dispersão e atenuação para as três ondas, obtidas através do mecanismo de Biot quando o tipo de fluido é água salgada ou gás.

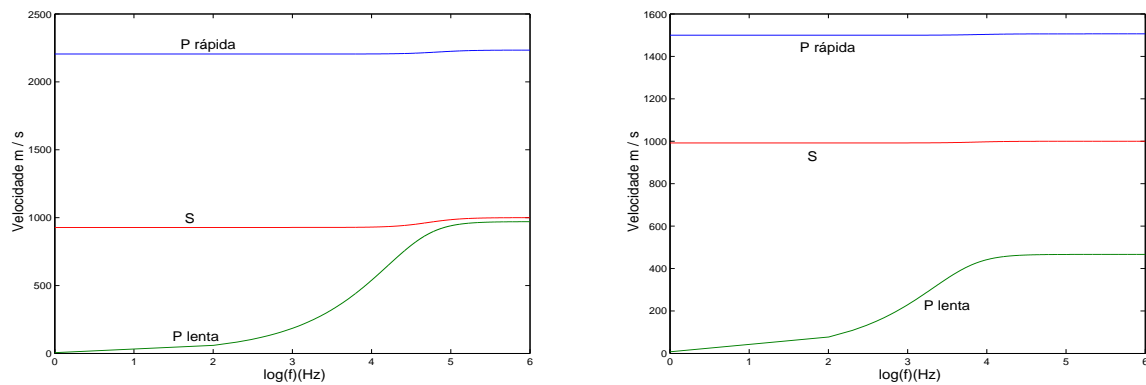


Figura 1.6: Dispersão das três ondas quando o fluido é água (esquerda) ou gás (direita).

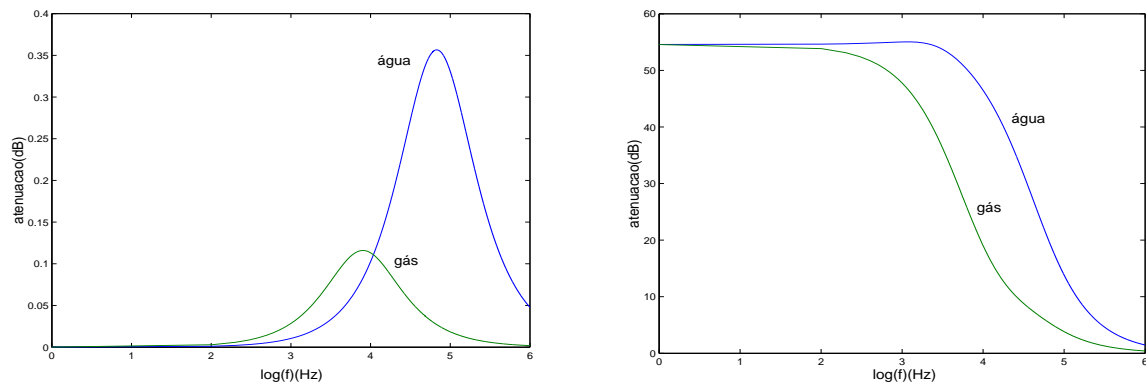


Figura 1.7: Atenuação das ondas compressoriais P rápida (esquerda) e P lenta (direita).

O desenvolvimento apresentado neste capítulo tem como hipótese fundamental, que o meio bifásico é isotrópico, esta hipótese foi removida por Biot em seus trabalhos de 1962 (Biot, 1962a; Biot, 1962b). Nestes artigos as equações constitutivas e as de movimento são apresentadas num marco de anisotropia total; é claro que na prática, pela complexidade das equações como é usual, modela-se somente para certo tipo de anisotropia: transversal ou ortorrômbica, pelo fato de que muitas rochas sedimentares (arenitos) adaptam-se muito bem

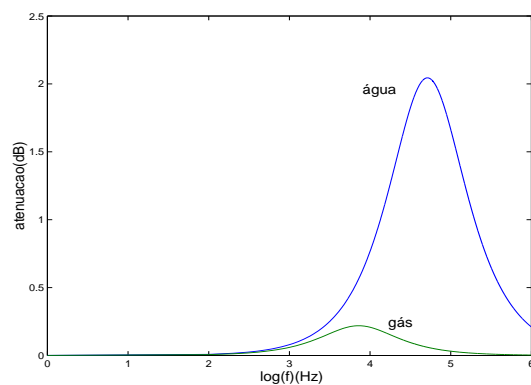


Figura 1.8: Atenuação da onda S para os fluidos saturantes água e gás.

a estas anisotropias (Carcione, 2007). A anisotropia é na atualidade uma área de estudo muito importante a nível da sísmica e petrofísica. Muitos reservatórios de hidrocarbonetos são fechados por rochas impermeáveis (shale rock) as quais são intrinsecamente anisotrópicas (Wang, 2001). Nos levantamentos sísmicos, as ondas viajam pelas camadas mais superficiais antes de entrar no reservatório, além disso devido também a sobrecarga, a rocha do reservatório pode-se fraturar gerando uma anisotropia induzida. É claro, a importância do estudo da propagação de ondas em meios porosos anisotrópicos está no fato que simulam melhor as características dos reservatórios. Esta anisotropia tem que ser modelada de tal maneira que reflita o fraturamento ou seja as direções preferenciais do fluido no interior do reservatório. Este trabalho pretende dar algumas contribuições nesta direção. No capítulo 2 discute-se os principais avanços no contexto da Teoria de Biot para conciliar tal teoria e a experimentação, principalmente nas medidas de atenuação e dispersão das ondas. Se enfatiza o estudo das perdas na escala mesoscópica. Quatro modelos são discutidos: Anisotropia (VTI), saturação parcial, fraturas horizontais e dupla porosidade. O resultado fundamental desta análise é mostrar sua equivalência para explicar as atenuações principalmente nas baixas frequências.

2

Extensões da Teoria de Biot

Neste capítulo estuda-se as principais extensões da formulação da poroelasticidade de Biot. Em primeiro lugar, acrescentar a esta formulação o conceito de viscoelasticidade nas equações constitutivas e de movimento, depois a anisotropia e principalmente um tipo particular de anisotropia denominada de meios transversalmente isotrópicos; finalmente estuda-se os mecanismos mesoscópicos de saturação parcial e dupla porosidade.

2.1 A Teoria Poroviscoelástica de Biot

Nos trabalhos de Biot (1962a, 1962b), se introduz o conceito de viscoelasticidade com o objetivo de modelar mecanismos de atenuação que na poroelasticidade não são levados em conta. Estes mecanismos são relativos à energia potencial da deformação (stiffness dissipation) e a energia cinética (viscodynamic dissipation). A primeira forma de dissipação está descrita pela relação esforço-deformação e a dissipação viscodinâmica corresponde a permeabilidade dinâmica a qual é dependente da frequência.

Depois que Plona demonstrou experimentalmente a existência da segunda onda compressional de Biot (Plona, 1980) para um material poroso sintético, tem-se certeza que a teoria de Biot da propagação de ondas tem validade, pelo menos para materiais sintéticos. No caso de materiais naturais, como as rochas areníticas ou argilas, a teoria de Biot não consegue explicar as discrepâncias nos dados reais de atenuação das ondas. Essas discrepâncias acontecem devido à microestrutura complexa dos poros das rochas. As complexidades geram mecanismos de atenuação não previstas pela poroelasticidade de Biot. Para a poroelasticidade a matriz da rocha é considerada completamente elástica. Na realidade as rochas de qualquer

tipo são materiais anelásticos e esta anelasticidade gera diversos fatores de atenuação tais como a fricção entre os grãos, fluxo local de fluido (squirt flow), forças de capilaridade e efeitos termicos, entre outros.

Para acrescentar os fenômenos de dissipação assume-se que o parâmetro de acoplamento M nas equações (1.27-1.29) é uma função dependente do tempo no sentido da função de relaxação e os parâmetros K e μ são dependentes da frequência. Derivando as equações (1.27) com respeito ao tempo obtém-se as equações constitutivas. Para melhor compreensão no caso 2D (Carcione e Quiroga, 1996) temos

$$\begin{aligned}\tau_{xx,t} &= E v_{x,x} + (E - 2\mu)v_{z,z} + \alpha M \epsilon \\ \tau_{zz,t} &= E v_{z,z} + (E - 2\mu)v_{x,x} + \alpha M \epsilon \\ \tau_{xz,t} &= \mu(v_{x,z} + v_{z,x}) \\ p_{,t} &= -M \epsilon \\ \epsilon &= \alpha(v_{x,x} + v_{z,z}) + w_{x,x} + w_{z,z}\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde

$$\begin{aligned}E &= K_{dry} + \frac{4}{3}\mu \\ M &= \frac{K_s^2}{D - K_{dry}} \\ D &= K_s(1 + \phi(K_s K_f^{-1} - 1)) \\ \alpha &= 1 - \frac{K_{dry}}{K_s}\end{aligned}\tag{2.2}$$

O termo $M\epsilon$ é substituído pela expressão $\Psi * \epsilon_{,t}$ (Carcione e Quiroga, 1996). $\Psi*$ é a função de relaxação:

$$\Psi(t) = M[1 + \frac{1}{L} \sum \varphi_l]^{-1} [1 + \frac{1}{L} \sum \varphi_l e^{-t/\tau_{\sigma l}}] H(t)\tag{2.3}$$

H é a função de Heaviside, $\varphi_l = \frac{\tau_{el}}{\tau_{\sigma l}}$, em que τ_{el} e $\tau_{\sigma l}$ são os termos de relaxação da deformação e do esforço respectivamente. Para evitar a operação de convolução $*$, (Carcione e Quiroga, 1996) introduz variáveis de memória

$$e_{l,t} = -\frac{1}{\tau_{\sigma l}} [M(L + \sum \varphi_m)^{-1} \varphi_l \epsilon + e_l]\tag{2.4}$$

para $l = 1, \dots, L$. L significa que se tem L mecanismos do modelo de viscosidade de Zener. As equações (2.1) expressam-se:

$$\begin{aligned}\tau_{xx,t} &= E v_{x,x} + (E - 2\mu)v_{z,z} + \alpha(M\epsilon + \sum e_l) \\ \tau_{zz,t} &= E v_{z,z} + (E - 2\mu)v_{x,x} + \alpha(M\epsilon + \sum e_l)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz,t} &= \mu(v_{x,z} + v_{z,x}) \\ p_{,t} &= -\alpha(M\epsilon + \sum e_l) \\ \epsilon &= \alpha(v_{x,x} + v_{z,z}) + w_{x,x} + w_{z,z} \end{aligned} \tag{2.5}$$

No caso limite quando $\omega \rightarrow \infty$ e $\psi \rightarrow M$, o regime de relaxamento coincide com o regime elástico, para a onda P lenta, a introdução de viscoelasticidade não muda seu caráter de onda difusiva e nenhum efeito para a onda S, devido a esta propagar-se totalmente na parte sólida do composto.

Para a onda P rápida tem-se algumas mudanças com respeito a dispersão (vide figura 2.1), o nível de atenuação aumenta (vide figura 2.2). Além disso, em concordância com os experimentos, o pico de atenuação desloca-se para frequências menores em relação ao pico de atenuação para o mecanismo de Biot (vide figura 1.7 e 2.2). Isto significa que a frequência correspondente ao pico de atenuação é função da razão $\frac{\kappa}{\eta}$, contrário ao mecanismo de atenuação de Biot.

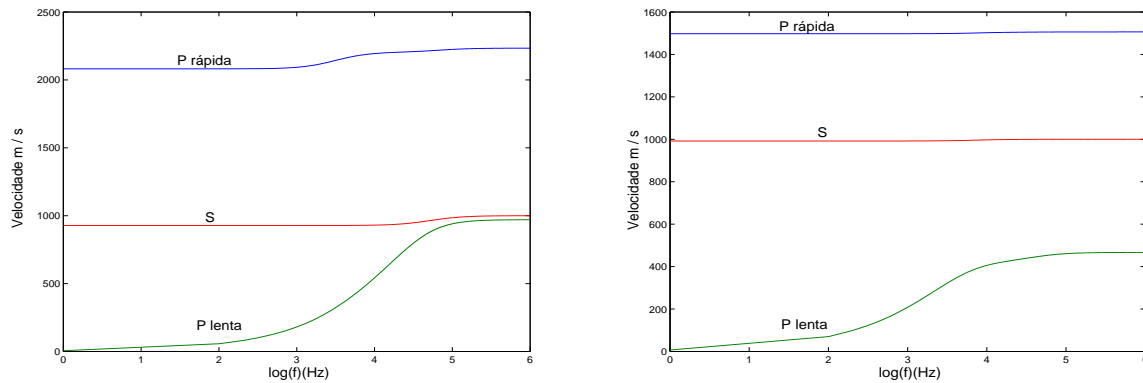


Figura 2.1: Dispersão das três ondas de corpo presentes num meio poro-viscoelástico isotrópico, considerando o fluido saturante como água (esquerda) e gás (direita)

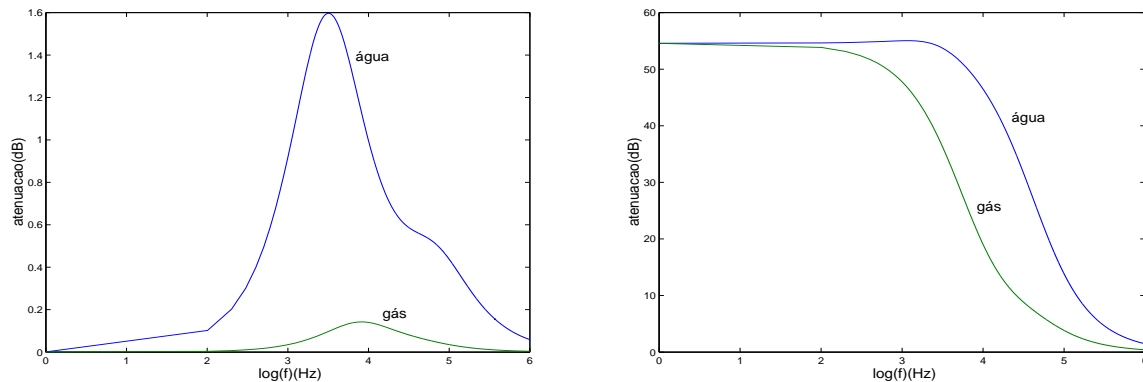


Figura 2.2: Atenuação das ondas P. Esquerda: P rápida . Direita: P lenta

A mudança do modelo poroelástico das equações originais de Biot (1956a, 1956b) para um modelo poroviscoelástico (Biot, 1962a; Biot, 1962b), (Carcione e Quiroga, 1996) dá uma representação mais realística para explicar os fenômenos de dispersão e atenuação das ondas em meios reais. Nesta formulação, dois mecanismos de atenuação são incorporados: fluxo local e contato dos grãos. O mecanismo de fluxo local é fundamental somente na faixa de alta frequência. Na faixa de baixa frequência, como é o caso da exploração sísmica, este mecanismo é desprezado e portanto necessita-se procurar outros mecanismos que expliquem os dados de atenuação nas medidas da exploração sísmica. É claro que na faixa das baixas frequências a teoria de Biot prediz uma atenuação quase nula para as ondas P rápida e S, e uma atenuação grande para a onda P lenta, onda esta que não é observada por sua natureza difusiva nestas frequências, embora deva ser levada em conta no momento de fazer a análise de dados sísmicos.

2.2 Propagação de ondas num meio poroso transversalmente isotrópico

Na exploração de reservatórios de gás ou óleo, o objetivo principal é prever as direções preferenciais do fluxo de fluido. Estas direções estão ligadas à permeabilidade do meio e à geometria da matriz; é claro que se a matriz é anisotrópica então a permeabilidade também o é. Um dos fatores que induz anisotropia é o fraturamento da rocha. A orientação das fraturas define os valores da permeabilidade nas diferentes direções. Nesta secção mostra-se por meio de experimentos numéricos a dependência das dispersões e as atenuações das ondas de Biot com respeito à direção de propagação no caso de um meio poroso transversalmente isotrópico.

As equações constitutivas para meios porosos anisotrópicos foram fornecidos por Biot (1962a, 1962b) e (Biot e Willis, 1957). Estas equações são introduzidas nas equações de movimento, obtendo as equações de propagação. A formulação das equações de movimento para um meio transversalmente isotrópico está ligada ao modelo de saturação parcial, dado por um conjunto de camadas preenchidas com diferentes fluidos.

As equações constitutivas numa formulação esforço-pressão- velocidade da partícula para um meio poroso transversalmente isotrópico no caso 2D são:

$$\partial_t \tau_{xx} = c_{11}^u \partial_x v_x + c_{13}^u \partial_z v_z + \alpha_1 M (\partial_x q_x + \partial_z q_z)$$

$$\partial_t \tau_{zz} = c_{13}^u \partial_x v_x + c_{33}^u \partial_z v_z + \alpha_3 M (\partial_x q_x + \partial_z q_z)$$

$$\partial_t \tau_{xz} = c_{55}^u (\partial_x v_z + \partial_z v_x)$$

$$\partial_t P = -\alpha_1 M \partial_x v_x - \alpha_3 M \partial_x q_x - \partial_z q_z v_z - M(\partial_x q_x + \partial_z q_z). \quad (2.6)$$

As equações de Biot-Newton e a Lei de Darcy são:

$$\begin{aligned} \partial_x \tau_{xx} + \partial_z \tau_{xz} &= \rho \partial_t v_x + \rho_f \partial_t q_x \\ \partial_x \tau_{xz} + \partial_z \tau_{zz} &= \rho \partial_t v_z + \rho_f \partial_t q_z \\ -\partial_x P &= \rho_f \partial_t v_x + m_1 \partial_t q_x + (\eta/\kappa_1) q_x \\ -\partial_z P &= \rho_f \partial_t v_z + m_3 \partial_t q_x + (\eta/\kappa_3) q_x, \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde τ_{ij} são os esforços, P é a pressão no fluido, v e q as velocidades relativas de partícula, η , κ_i a viscosidade de fluido e as permeabilidades nas duas direções, m_i e α_i os fatores de massa e os parâmetros de Biot-Willis nas duas direções e finalmente c_{ij}^u os parâmetros poroelásticos não drenados (undrained). Estes parâmetros podem ser escritos em termos dos parâmetros poroelásticos drenados (Carcione, 1996) c_{ij} :

$$\begin{aligned} c_{11}^u &= c_{11} + \alpha_1^2 M, \\ c_{33}^u &= c_{33} + \alpha_3^2 M, \\ c_{13}^u &= c_{13} + \alpha_1 \alpha_3 M \\ c_{55}^u &= c_{55} = \mu. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Os coeficientes de Biot-Willis são:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 - \frac{c_{11} + c_{12} + c_{13}}{3K_s} \\ \alpha_3 &= 1 - \frac{2c_{13} + c_{33}}{3K_s}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

No caso de isotropia tem-se que $c_{11} = c_{33}$, $c_{12} = c_{13}$ e por tanto $c_{11}^u = c_{33}^u$ e $c_{12}^u = c_{13}^u$, tendo também que as permeabilidades κ_i e os fatores de massa m_i são iguais nas duas direções.

Levando as equações (2.6) e (2.7) ao domínio de Fourier, definindo o vetor de onda $\mathbf{K} = k(k_x, k_z)$, onde k é a magnitude do vetor de onda e k_x, k_z os cossenos diretores: $k_x = \text{sen}(\theta)$ e $k_z = \text{cos}(\theta)$, sendo θ o ângulo que o vetor \mathbf{K} forma com o eixo de simetria(z). Definindo a matriz:

$$L = \begin{pmatrix} k_x & 0 & k_z & 0 \\ 0 & k_z & k_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_x \\ 0 & 0 & 0 & k_z \end{pmatrix},$$

a matriz

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} k_x c_{11}^u & k_z c_{13}^u & \alpha_1 M k_x & \alpha_1 M k_z \\ k_x c_{13}^u & k_z c_{33}^u & \alpha_3 M k_x & \alpha_3 M k_z \\ k_z c_{55}^u & k_x c_{55}^u & 0 & 0 \\ \alpha_1 M k_x & \alpha_3 M k_z & M k_x & M k_z \end{pmatrix},$$

então as equações no domínio (\mathbf{K}, ω) podem ser escritas como:

$$-\omega \mathbf{T} = k \mathbf{C} \mathbf{V}, \quad (2.10)$$

onde $\mathbf{T} = (\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz}, -P)^T$ e $\mathbf{V} = (v_x, v_z, q_x, q_z)^T$.

Para as equações de movimento tem-se:

$$-k \mathbf{L} \mathbf{T} = \omega \Gamma \mathbf{V}, \quad (2.11)$$

onde

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \rho & 0 & \rho_f & 0 \\ 0 & \rho & 0 & \rho_f \\ \rho_f & 0 & m_1 + (\eta/\omega\kappa_1)i & 0 \\ 0 & \rho_f & 0 & m_3 + (\eta/\omega\kappa_3)i \end{pmatrix}.$$

Biot chama o termo $m_j + (\eta/\omega\kappa_j)i$ de operador viscoelástico Y_j . Das equações (2.10) e (2.11) obtém-se a relação de dispersão:

$$|\Gamma^{-1} LC - \frac{\omega^2}{k^2} I| = 0, \quad (2.12)$$

onde

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{iY_1}{\rho i Y_1 - \rho_f^2} & 0 & \frac{-\rho_f}{\rho i Y_1 - \rho_f^2} & 0 \\ 0 & \frac{iY_3}{\rho i Y_3 - \rho_f^2} & 0 & \frac{-\rho_f}{\rho i Y_3 - \rho_f^2} \\ \frac{-\rho_f}{\rho i Y_1 - \rho_f^2} & 0 & \frac{-\rho_f}{\rho i Y_1 - \rho_f^2} & 0 \\ 0 & \frac{-\rho_f}{\rho i Y_1 - \rho_f^2} & 0 & \frac{\rho}{\rho i Y_3 - \rho_f^2} \end{pmatrix}.$$

A equação (2.12) é a relação de dispersão para as ondas de Biot no caso de um meio efetivo transversalmente isotrópico. Desta relação obtém-se as ondas qP (ondas quasicompressionais) e a onda qS (quasi S). Redefinindo a matriz Γ^{-1} como:

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} A & 0 & B & 0 \\ 0 & C & 0 & D \\ B & 0 & E & 0 \\ 0 & D & 0 & F \end{pmatrix}.$$

A seguir analisa-se a relação de dispersão (2.12) em dois casos: $k_z = 0$ e $k_x = 0$. No primeiro caso tem-se uma propagação na direção x e no outro caso, na direção z . No primeiro caso a relação (2.12) pode ser escrita como:

$$\lambda(Cc_{55}^u - \lambda) \begin{vmatrix} Ac_{11}^u + B\alpha_1 M - \lambda & A\alpha_1 M + BM \\ Bc_{11}^u + E\alpha_1 M & B\alpha_1 M + EM - \lambda \end{vmatrix}, \quad (2.13)$$

no segundo caso tem-se:

$$\lambda(Ac_{55}^u - \lambda) \begin{vmatrix} Cc_{33}^u + D\alpha_3 M - \lambda & C\alpha_3 M + DM \\ Dc_{33}^u + F\alpha_3 M & D\alpha_3 M + FM - \lambda \end{vmatrix}, \quad (2.14)$$

onde $\lambda = \frac{\omega^2}{k^2}$. Nos dois casos ou em qualquer outro (θ arbitrário), $\lambda = 0$ sempre é um valor próprio. Nestes dois casos especiais identifica-se a onda S pelo fator $Cc_{55}^u - \lambda$ no primeiro caso e $Ac_{55}^u - \lambda$ no segundo. No caso isotrópico as duas velocidades nas duas direções são iguais ($A=C$). As outras raízes de (2.12) ou (2.13, 2.14) identificam as ondas qP: a onda qP rápida e a onda qP lenta. Nas figuras 2.3-2.10 mostram-se os resultados analíticos correspondentes à propagação das ondas de Biot num meio transversalmente isotrópico formado por uma rocha tipo arenito preenchida com fluido de água ou gás. Na tabela a seguir os valores dos parâmetros poroelásticos

Sólido: $k_s = 35$ GPa, $\rho_s = 2650$ kg/m³

Matriz: $k_m = 1.7$ GPa, $\mu = 1.855$ GPa, $\phi = 0.3$, $\kappa_1 = 10^{-12}$, $\kappa_3 = 10^{-12}$ Darcy, $T_1 = 1$, $T_3 = 3.6$, $c_{11} = 4.1733$ GPa, $c_{33} = 2.0867$ GPa, $c_{13} = 4.6333$ GPa

Fluido:

Gás: $k_f = 0.022$ GPa, $\rho_f = 100$ kg/m³, $\eta = 0.000015$.

Água: $k_f = 2.4$, GPa, $\rho_f = 100$ kg/m³, $\eta = 0.001$

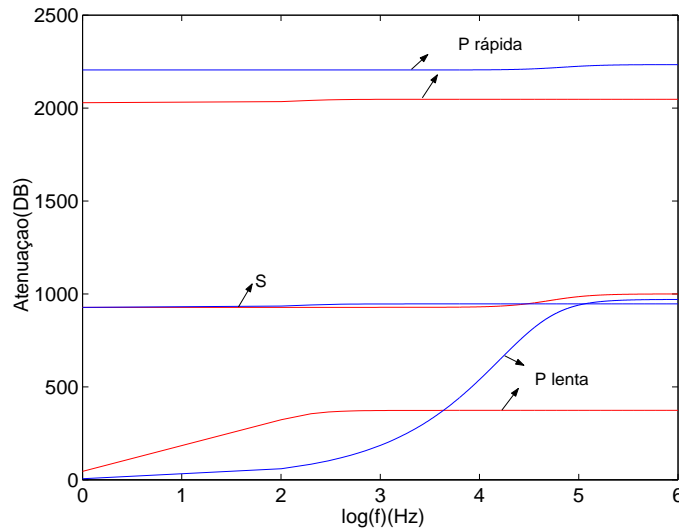


Figura 2.3: Dispersão das ondas de Biot no caso TI: vermelho 0^0 , azul 90^0 .

Da figura 2.3 pode-se deduzir que a onda P rápida tem maior dispersão no caso em que sua propagação é na direção do eixo de simetria (eixo z, $\theta = 0$) e as velocidades são diferentes para as duas direções: (do eixo e perpendicular ao eixo de simetria). Para a onda S têm-se uma pequena variação nos dois casos. O comportamento da onda P lenta é contrário ao da onda P rápida, para uma direção de propagação de $\theta = 0$, esta onda tende a comportar-se como uma onda normal (não dispersiva). Quando a frequência é superior aos 1000 Hz tem o comportamento da onda P lenta do caso isotrópico, quando a direção de propagação é

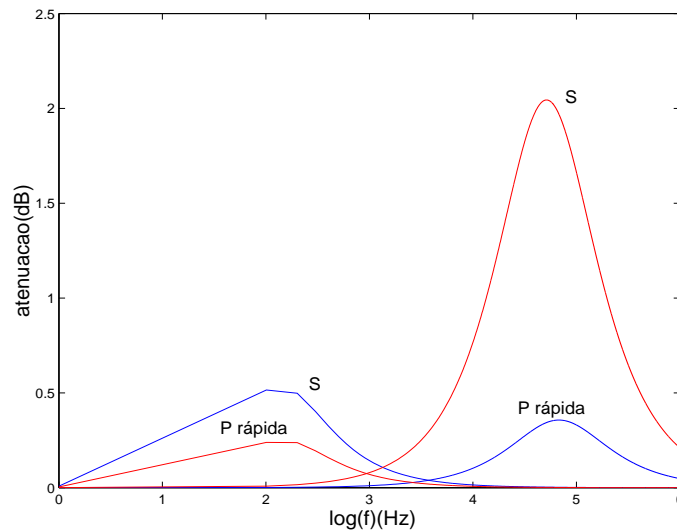


Figura 2.4: Atenuação da onda P rápida e S no caso TI; onde o traçado vermelho corresponde a 0^0 e o azul corresponde a 90^0 .

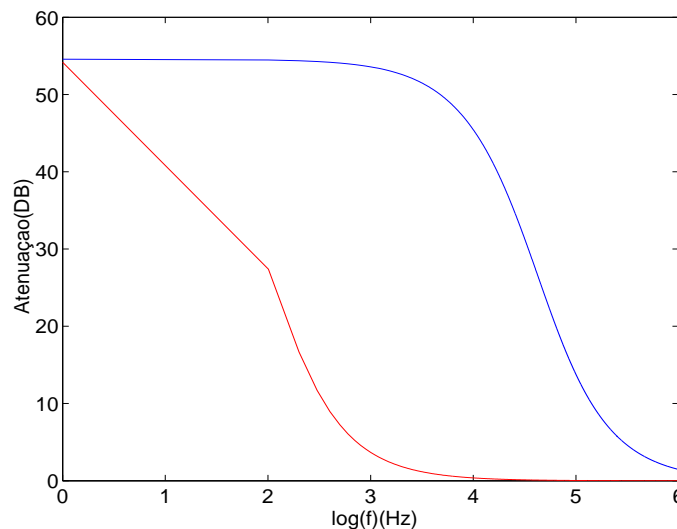


Figura 2.5: Atenuação da onda P rápida e S no caso TI; onde o traçado vermelho corresponde a 0^0 e o azul corresponde a 90^0 .

perpendicular ao eixo z . No caso da onda S as duas direções são equivalentes (com respeito à velocidade de fase) e pode-se demonstrar que as maiores variações desta onda acontecem para ângulos de 45^0 (vide figura 2.6).

Para a onda P rápida o pico de atenuação desloca-se das altas frequências para uma direção de propagação de 90^0 (ou isotrópico) até as frequências baixas no caso de uma direção de propagação de 0^0 (vide figura 2.4); o contrário acontece com a onda S e a onda P lenta. Da figura 2.5 deduz-se que o comportamento da onda P lenta é contrário ao da onda P rápida. Este fato concorda com os modelos mesoscópicos que explicam as perdas de energia para onda P rápida num meio com heterogeneidades na escala mesoscópica, o qual segundo o Teorema de Backus é equivalente ao meio transversalmente isotrópico. O

comportamento da onda P lenta para uma direção de propagação que faz 0° com o eixo de simetria faz com que a onda P rápida experimente perdas quando propaga-se nessa direção. O comportamento das ondas P rápida e lenta no caso VTI é diferente para frequências baixas e para frequências altas e também para o ângulo de propagação. Calculando as atenuações das ondas em função do ângulo de propagação para duas frequências diferentes: 50 Hz (caso sísmico) e para 10000 Hz (caso sônico) se comprova o fato de que a onda P rápida tem atenuação maior na direção do eixo de simetria (ou na direção das heterogeneidades do meio) e a onda P lenta atenua-se principalmente na direção perpendicular ao eixo de simetria, isto no caso que a frequência seja de 50 Hz. Já para uma frequência sônica, para a onda P rápida, a atenuação é menor na direção do eixo, assumindo que o meio VTI é o meio equivalente efetivo de um meio heterogêneo de camadas horizontais (Teorema de Backus). O último resultado significa que o fluxo de fluido entre camadas é desprezível (Gelinsky e Shapiro, 1997). Na próxima seção analisa-se o caso de heterogeneidades no contexto da teoria de Biot e os resultados são similares aos obtidos no caso de um meio VTI.

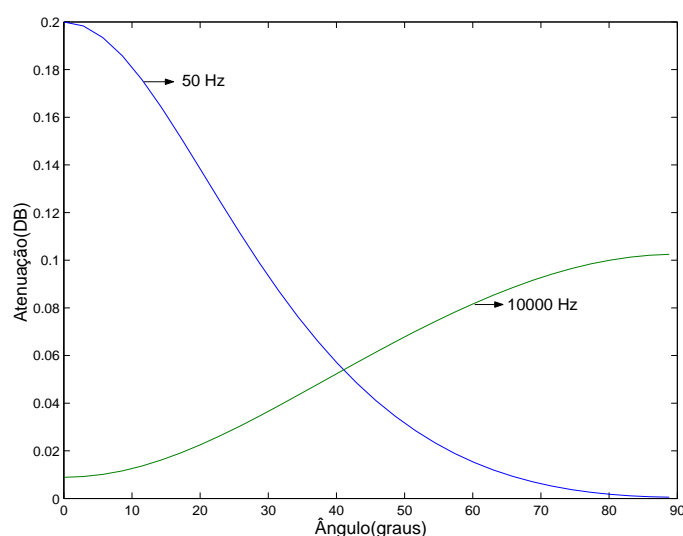


Figura 2.6: Atenuação da onda P rápida em função do ângulo de propagação para duas frequências diferentes.

No experimento a seguir observa-se as frentes de onda das três ondas, fixando a frequência da onda, tomando como exemplo uma frequência representativa das frequências sísmicas (40 Hz), para um tempo de propagação de 1 s, comparando o caso isotrópico com o TI. Da figura 2.8 comprova-se o que foi dito anteriormente das três ondas com respeito à direção de propagação. Finalmente mostra-se o comportamento da onda P lenta quando a frequência da propagação aumenta desde a faixa sísmica até a faixa sônica. Conclui-se que a onda P lenta passa desde um processo difusivo até ter um comportamento propriamente ondulatório.

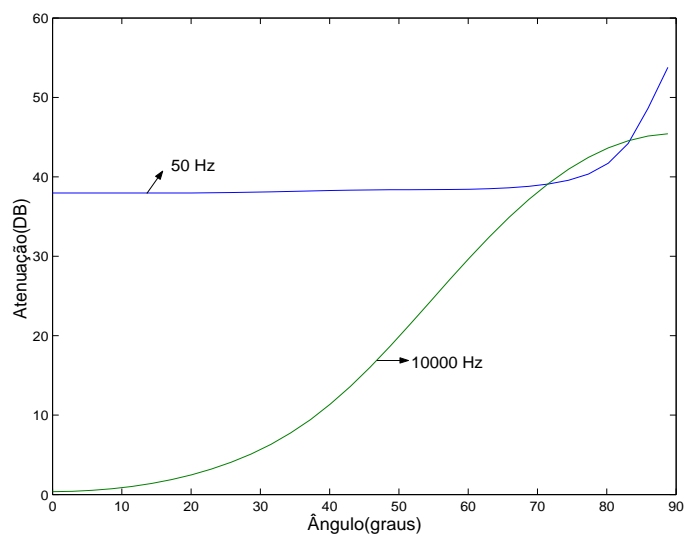


Figura 2.7: Atenuação da onda P lenta em função do ângulo de propagação para duas frequências diferentes.

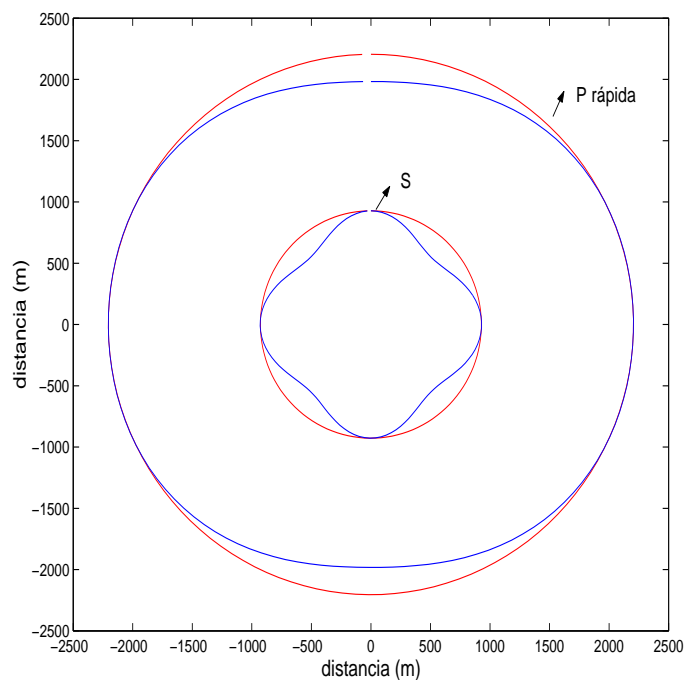


Figura 2.8: Frente de onda para as ondas P rápida e S, considerando um meio isotrópico (vermelho), e transversalmente isotrópico (azul).

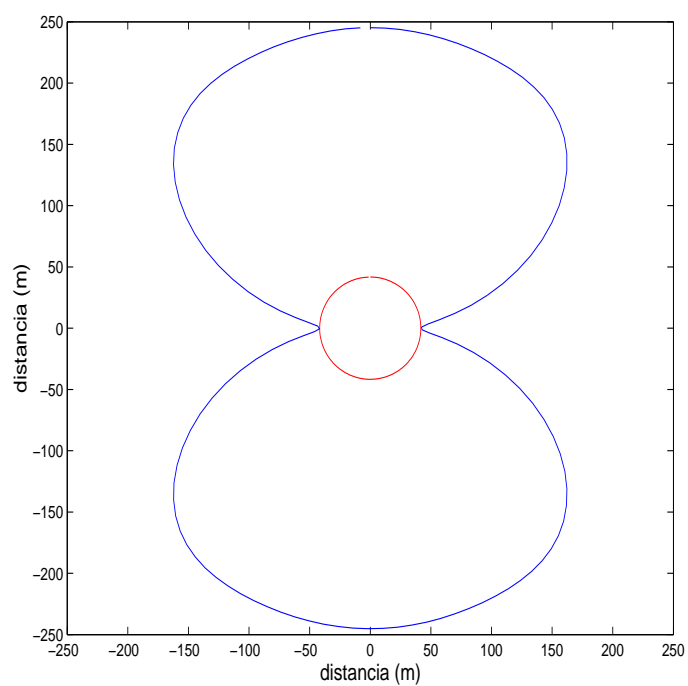


Figura 2.9: Frente de onda para a onda P lenta, considerando um meio isotrópico (vermelho), e transversalmente isotrópico (azul).

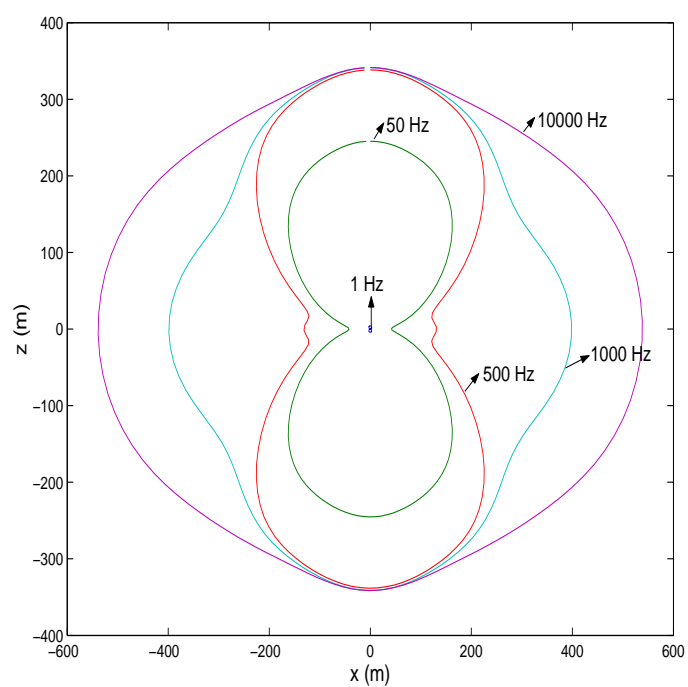


Figura 2.10: Frente de onda para a onda P lenta, transversalmente isotrópico para diferentes frequências.

2.3 Propagação de ondas num meio poroso com heterogeneidades na escala mesoscópica

A escala mesoscópica significa uma escala intermediária entre o macro (comprimento de onda sísmica) e o micro (o diâmetro dos poros). A heterogeneidade pode-se entender de diferentes maneiras: pelos diferentes fluidos que preenchem os poros (saturação parcial), pelos diferentes minerais que compõem a matriz da rocha e pela heterogeneidade da rocha devida às fraturas. Este último modelo de heterogeneidade chama-se de dupla porosidade. Nesta seção analisa-se os diferentes modelos mesoscópicos e suas conseqüências na propagação das ondas de Biot, principalmente para a onda P rápida.

Quando uma onda mecânica desloca-se através de uma rocha porosa, gradientes de pressão no fluido originam um fluxo do fluido, ocasionando perdas de energia. Se a rocha é homogênea, o gradiente de pressão no fluido é desprezível, e a atenuação devido ao fluxo do fluido é quase nula. Caso contrário, heterogeneidades associadas a uma saturação misturada de um líquido (água ou óleo) e gás, geram gradientes de pressão que podem ser muito grandes, ocasionando perdas de energia, atingindo níveis de atenuação consideráveis.

White (1975), apresenta um modelo de saturação parcial formado por bolhas de gás rodeado por anéis de fluido, mostrando que a atenuação pode-se ligar ao módulo efetivo da mistura, que é encontrado a partir da resposta da amostra representativa de uma força oscilatória. Devido à heterogeneidade o módulo efetivo é complexo o que significa que tem-se atenuação e dispersão das ondas. O trabalho de White (1975), apresenta também o modelo para uma geometria de interfaces planas alternadas de gás e fluido, obtendo um resultado similar ao modelo anterior.

Os trabalhos de Dutta e Odé (1979a, 1979b), estudam o modelo de White no contexto da teoria de Biot. O problema da oscilação da amostra representativa do modelo de White, é levado as equações de Biot como uma condição de fronteira, obtendo-se resultados similares aos de White.

2.3.1 Modelo de saturação de White - Desenvolvimento de Norris

Norris (1993), estuda o modelo de White para um sistema de camadas alternadas de gás e líquido, ou seja dois meios porosos alternados periodicamente, e descreve quatro tipos de escalas diferentes que correspondem a diferentes bandas de freqüências: a escala do comprimento de onda $\lambda = v/f$, onde v a velocidade de propagação e f a freqüência; a escala do comprimento dos poros $L_p = (8F\kappa)^{\frac{1}{2}}$, onde F é o fator de formação da rocha e κ a perme-

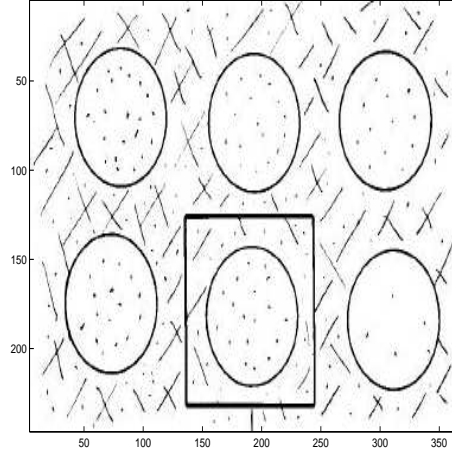


Figura 2.11: Modelo de saturação parcial de White.

abilidade; a escala da capa da viscosidade $L_v = (\frac{2\eta}{\omega\rho})^{\frac{1}{2}}$, onde η é a viscosidade de fluido e ω a frequência. A escala de difusão de poro $L_d = (\frac{D_0}{\omega})^{\frac{1}{2}}$, onde $D_0 = \kappa K_f / \eta\phi$, K_f é o módulo volumétrico do fluido. Todas as escalas com exceção de L_p são dependentes da frequência.

Os comprimentos das diferentes escalas são $\lambda \sim 10^1$ m, $L_d \sim 10^{-2}$ m, $L_v \sim 10^{-5}$ m e $L_p \sim 10^{-7}$ m. Assume-se que se satisfaça $\lambda \gg L_d \gg L_v \gg L_p$. No caso em que $L_p \gg L_v$, o processo difusivo nos poros é substituído pela onda P lenta (as forças inerciais dominam as forças de viscosidade).

Norris (1993), considera um meio constituído por camadas horizontais com periodicidade $L = L_1 + L_2$, cada uma delas sendo um meio poroso saturado por algum fluido. Este modelo corresponde a um meio poroso transversalmente isotrópico. Em cada camada satisfaz-se as equações constitutivas:

$$\tau = T_c e - \alpha M \zeta I, p = -\alpha M e + M \zeta, \tag{2.15}$$

onde T_c é o tensor da rigidez dependente do módulo volumétrico saturado K_c e do módulo de rigidez μ . Considerando uma onda que se desloca normal as camadas, com dependência temporal da forma $e^{-i\omega t}$, e sob a condição de que o deslocamento relativo do sólido \mathbf{u} e o fluido \mathbf{w} estão polarizados em z e, definindo o vetor $\mathbf{V} = (\dot{u}, \dot{w}, \tau_{zz}, p)$, as equações constitutivas e de movimento podem ser escritas como um sistema de primeira ordem:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dz} = i\omega \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{S} \\ \mathbf{R} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{V}(z) - \mathbf{E}(z)\mathbf{V}(z), \tag{2.16}$$

$$\text{onde } \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \rho & \rho_f \\ \rho_f & m \end{pmatrix}, \text{ e } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{K + \frac{4}{3}\mu} & -\frac{\alpha}{K + \frac{4}{3}\mu} \\ -\frac{\alpha}{K + \frac{4}{3}\mu} & \frac{1}{M(K + \frac{4}{3}\mu)} \end{pmatrix}.$$

\mathbf{E} é definido como $E_{ij} = \eta/\kappa$ se $i=4$ e $j=2$, e 0 nos outros casos (Norris, 1993).

No meio efetivo equivalente (homogêneo), associado ao meio transversalmente isotrópico, uma onda da forma e^{ikz} tem uma velocidade complexa V^* , dada pela expressão

$$V^* = (C^* / \langle \rho \rangle)^{1/2}.$$

C^* , o modulo volumétrico complexo do meio efetivo, é dado pela expressão

$$C^* = \langle \frac{1 - \alpha P}{K + 4/3\mu} \rangle^{-1}.$$

O simbolo $\langle \rangle$, significa o valor médio tomado em um período L , P é a pressão do fluido que, como W , satisfaz o seguinte sistema de equações obtido do sistema (2.16):

$$\frac{dP}{dz} = -(\eta/\kappa)W(z), \tag{2.17}$$

$$\frac{dW}{dz} = \frac{i\omega\alpha}{K + 4/3\mu}(R^{-1}P - 1),$$

com as condições de borda $P(L)=P(0)$, $W(L)=W(0)$, $R(z) = \frac{\alpha M}{K+4/3\mu}$.

Das equações anteriores se deduz que no caso em que o fluxo relativo W é nulo, então P é constante; da segunda equação (2.17) obtém-se $R=P$, portanto R é constante. Nesse caso o módulo volumétrico $C^*(\omega) = \langle \frac{1}{K_c+4/3\mu} \rangle^{-1}$ é real. Para que C^* seja complexo, é condição necessária que R seja uma quantidade variável. (Carcione e Picotti, 2006), (Picotti et al., 2007), estudam de forma analítica e numérica a influência da variabilidade dos parâmetros poroelásticos no valor de C^* . Norris (1993) considera que os parâmetros que mais influenciam para obter um C^* complexo são a variabilidade da porosidade ϕ , o parâmetro de Biot-Willis α , o módulo cizalhante μ , e principalmente K_f , o módulo volumétrico do fluido, coincidindo com as análises de Carcione e Picotti (2006) e Picotti et al. (2007).

A condição da nulidade do fluxo de fluido para obter um valor real de C^* , é a mesma obtida por (White, 1975), no caso do modelo heterogêneo das bolhas de gás rodeadas por um fluido (vide figura 2.8). Norris, considera o caso em que a matriz da rocha é relativamente rígida: $K_m \gg K_f$, então R é aproximadamente $R \approx \frac{\alpha}{\phi} \frac{K_f}{K_m+4/3\mu}$. Embora esta expressão seja pequena (pela alta rigidez K_m), pode mudar drasticamente no caso que K_f mude abruptamente. Esse fato implica que C^* é complexo ocasionando então perdas de atenuação.

Para obter a expressão de C^* e, conseqüentemente, as expressões de velocidade da fase e do fator de atenuação, é necessário resolver o sistema (2.17).

Derivando a primeira equação do sistema (2.17):

$$\frac{d^2P}{dz^2} = -(\eta/\kappa)\frac{dW}{dz},$$

substituindo a expressão da derivada de W da segunda equação, obtém-se uma equação de segunda ordem em z :

$$\frac{d^2P}{dz^2} + AR^{-1}P = A, \quad (2.18)$$

onde A e R são constantes em cada camada: $A_j = (\eta_j/\kappa_j)\frac{i\omega}{K_{m_j}+4/3\mu_j}$ e $R_j(z) = \frac{\alpha_j M_j}{K_{c_j}+4/3\mu_j}$, para $j=1,2$.

Resolvendo para P_j da equação $\frac{dP_j}{dz} = -(\eta/\kappa)W_j(z)$, obtém-se $W_j = -\kappa_j/\eta_j \frac{dP_j}{dz}$. A solução da equação (2.18) é igual à solução geral da equação homogênea associada mais uma solução particular de (2.18). A solução particular da equação é encontrada por simples inspeção: $P_p(z) = R$. A solução geral da equação homogênea é dada pela seguinte expressão:

$$P_h(z) = c_1 \cos\sqrt{AR^{-1}}z + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{AR^{-1}}z,$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Portanto a solução geral da equação (2.17) ou (2.18) é:

$$P(z) = c_1 \cos\sqrt{AR^{-1}}z + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{AR^{-1}}z + R. \quad (2.19)$$

Substituindo A , R , $\sqrt{i} = e^{i\pi/4}$, e o coeficiente de difusão $D = \frac{\kappa}{\eta} M \frac{K_m+4/3\mu}{K_c+4/3\mu}$, podemos escrever a solução como:

$$P(z) = c_1 \cos\left\{\sqrt{\frac{\omega}{D}}ze^{i\pi/4}\right\} + c_2 \operatorname{sen}\left\{\sqrt{\frac{\omega}{D}}ze^{i\pi/4}\right\} + R.$$

O problema da difusão representado pela equação (2.18) é dado para dois meios nos quais os parâmetros poroelásticos são constantes em cada meio, por tanto escrevemos as soluções de P e W para cada meio:

$$P_j(z) = c_{1j} \cos(d_j/L_j z) + c_{2j} \operatorname{sen}(d_j/L_j z) + R_j, \quad (2.20)$$

$$W_j(z) = (1/Z_j)c_{1j} \operatorname{sen}(d_j/L_j z) - (1/Z_j)c_{2j} \cos(d_j/L_j z),$$

onde o sub índice j indica a camada, $j=1,2$, $d = (\frac{\omega}{D})^{1/2} L e^{i\pi/4}$ e $Z = \frac{\eta}{\kappa} (\frac{D}{\omega})^{1/2} e^{-i\pi/4}$, sendo L_j a espessura da camada j e $L = L_1 + L_2$.

Finalmente o sistema é resolvido se as constantes c_{1j} e c_{2j} são encontradas. Para isto utiliza-se as condições de fronteira (continuidade) e de periodicidade das variáveis P e W, com $j=1,2$ e precisa-se apenas de quatro equações, as de periodicidade

$$P_1(0) = P_2(L), W_1(0) = W_2(L),$$

e as de continuidade na interface que separa as camadas

$$P_1(L_1) = P_2(L_1), W_1(L_1) = W_2(L_1).$$

Depois de fazer alguns cálculos, e como o módulo complexo efetivo C^* é dado pela expressão $C^* = 1/S^*$, $S(\omega) = \langle \frac{1-\alpha P}{K+4/3\mu} \rangle$, obtém-se:

$$1/C^* = 1/C_\infty + \frac{2}{i\omega L} (R_1 - R_2)^2 (Z_1 \cot \frac{d_1}{2} + Z_2 \cot \frac{d_2}{2})^{-1}. \quad (2.21)$$

O módulo $C_\infty = \langle 1/(K_c + 4/3\mu) \rangle^{-1}$ é o módulo efetivo axial do meio transversalmente isotrópico equivalente e o sub índice ∞ significa o limite de altas frequências. Para baixas frequências, ou no estado quasiestacionario, o módulo C^* identifica-se como C_0 , o qual é dado pela seguinte expressão

$$1/C_0 = \langle \frac{1}{K_m + 4/3\mu} \rangle - \langle \frac{\alpha}{K_m + 4/3\mu} \rangle^2 \langle \frac{\alpha}{R(K_m + 4/3\mu)} \rangle^{-1}. \quad (2.22)$$

Na escala das heterogeneidades ou escala mesoscópica e na faixa das baixas frequências, é fundamental o papel da difusão principalmente nas interfaces entre meios diferentes, lembrando que o coeficiente de difusão $D_0 = \kappa K_f / \eta \phi$. Este coeficiente é obtido da chamada Lei de Darcy para fluxos de fluido através de um sólido incompressível no regime quasi-estático:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = -\frac{\kappa}{\eta} \nabla P,$$

Além disso, assumindo que a deformação volumétrica do fluido satisfaz a lei de Hooke:

$$-\nabla \cdot \mathbf{W} = \frac{\phi}{K_f} P,$$

tomando o divergente na equação de Darcy e substituindo o divergente da última equação obtém-se: $-\phi/K_f \frac{\partial}{\partial t} P = -\frac{\kappa}{\eta} \nabla^2 P$, ou seja, a conhecida equação de difusão:

$$\frac{K_f \kappa}{\eta \phi} \nabla^2 P = \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (2.23)$$

O coeficiente da última equação coincide com D_0 e o coeficiente de difusão das equações (2.18) é $D = \frac{\kappa}{\eta} M \frac{K_m + 4/3\mu}{K_c + 4/3\mu}$. Quando a matriz é muito mais rígida que o fluido tem-se $D \approx D_0$.

A seguir mostram-se as curvas de dispersão e atenuação que se obtém utilizando a equação (2.22) a qual identifica as heterogeneidades, e com ela se faz alguns experimentos numéricos onde é mudada uma variável a cada vez e se avalia os resultados. Carcione e Picotti (2006) fornece uma análise completa das diferentes situações nas quais apresenta-se heterogeneidade entre dois meios porosos onde os parâmetros poroelásticos e as propriedades dos fluidos podem mudar. Neste trabalho mostra-se apenas algumas poucas situações. Considerando dois meios porosos cada um deles com suas propriedades poroelásticas. No primeiro caso consideramos os dois meios similares e mudamos a porosidade do segundo meio (A_1), depois mudamos o módulo volumétrico da matriz (A_2), em terceiro lugar muda-se o módulo volumétrico do sólido (A_3) e finalmente muda-se o módulo volumétrico do fluido (A_4). Pode-se observar na figura 2.12, que os fatores que influenciam mais fortemente na

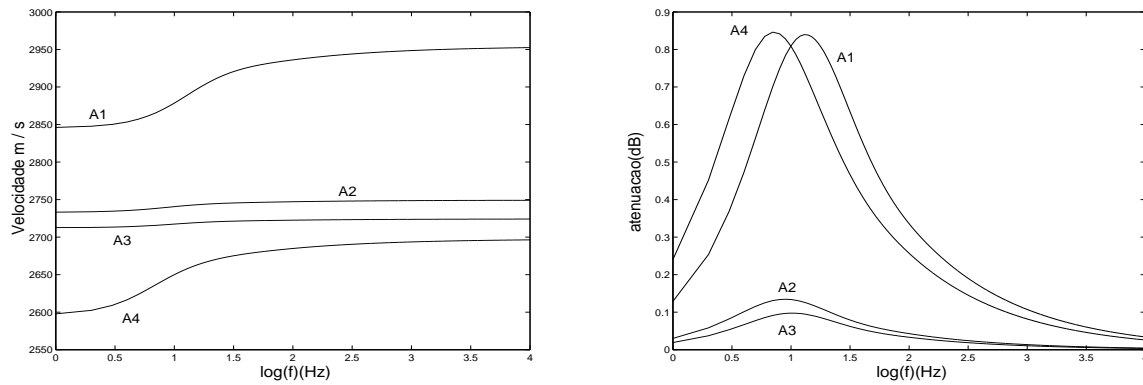


Figura 2.12: Velocidade de fase (esquerda) e atenuação (direita) quando muda-se uma propriedade do meio 2. A1 porosidade; A2 módulo volumétrico da matriz; A3 módulo volumétrico do sólido; A4 módulo volumétrico do fluido.

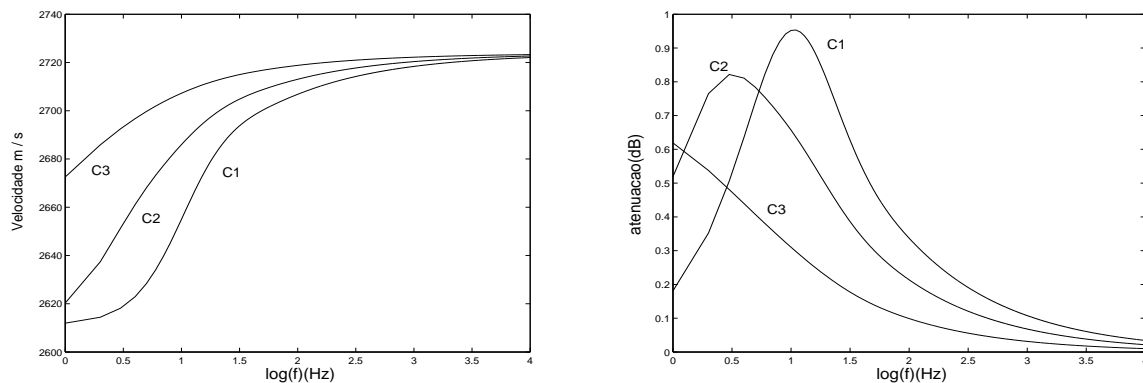


Figura 2.13: Velocidade de fase (esquerda) e atenuação (direita). O meio 2 preenchido com óleo. C1 ; $\eta = 0.001$ cp, (C₂) $\eta = 0.01$ cp, (C₃) $\eta = 0.1$ cp.

dispersão e atenuação são a mudança na porosidade e no módulo volumétrico no fluido. No experimento numérico toma-se os dois meios porosos similares, o segundo meio preenchido

com óleo e muda-se o valor da viscosidade: $(C_1) \eta = 0.001$ cp, $(C_2) \eta = 0.01$ cp, $(C_3) \eta = 0.1$ cp. Na figura 2.13, observa-se claramente que o pico de relaxação desloca-se para as baixas frequências enquanto a viscosidade aumenta em concordância com a expressão $\frac{\kappa}{\eta}$. Experimentos similares podem ser realizados para avaliar a resposta do meio heterogêneo às mudanças dos diferentes parâmetros poro-viscoelásticos, por exemplo, mudar o valor da permeabilidade da rocha. Neste caso o efeito é contrário ao obtido mudando a viscosidade.

2.3.2 Modelo mesoscópico de fraturas - Desenvolvimento de Brajanovski

Uma outra maneira de analisar o mecanismo mesoscópico é baseado nos resultados de Norris e consiste em introduzir como inclusões, fraturas horizontais superpostas periodicamente no meio poroso. Brajanovski et al. (2005) modela as fraturas como um meio de alta porosidade. O resultado fundamental é obter uma expressão analítica da relação de dispersão para a onda P rápida que propaga-se num meio periódico alternado de meios porosos. A seguir descreve-se brevemente o modelo de Brajanovski:

O modelo geométrico do trabalho de Brajanovski consiste num meio poroso fraturado, ou seja, um sistema alternado e periódico de camadas de material poroso de constantes elásticas: ϕ_b , $K_b, K_{b(dry)}$ e μ_b , a porosidade, o módulo volumétrico da matriz, o módulo volumétrico da matriz seca e o módulo cisalhante da matriz, finalmente uma espessura h_b . A camada do material fraturado caracterizado pelas constantes elásticas: ϕ_c , K_c , $K_{c(dry)}$, μ_c , e uma espessura h_c , de maneira que $h_b + h_c = 1$ e $h_b \gg h_c$. O sub índice "b" indica o meio poroso e "c" indica a fratura. A seguir mostra-se uma representação esquemática do modelo

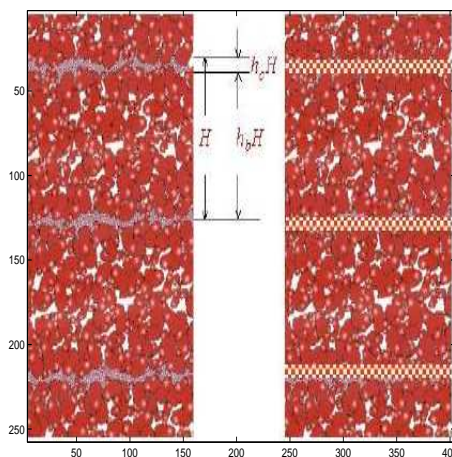


Figura 2.14: Meio poroso fraturado e sua representação

Define-se um período espacial H tal que $h_b + h_c = 1$, também $L = K + 4/3\mu$ e o parâmetro $\gamma = \mu/L$, ou seja, a relação entre a velocidade da onda S e a onda P. No limite das baixas

freqüências o meio de camadas horizontais é equivalente ao sólido elástico transversalmente isotrópico cuja matriz de "compliance" (Brajanovski et al., 2005) S é:

$$S^{dry} = \begin{pmatrix} \frac{1-\langle\gamma\mu\rangle/\langle\mu\rangle}{3\langle\mu\rangle-4\langle\gamma\mu\rangle} & -\frac{1-2\langle\gamma\mu\rangle/\langle\mu\rangle}{2(3\langle\mu\rangle-4\langle\gamma\mu\rangle)} & -\frac{1-\langle\gamma\rangle}{2(3\langle\mu\rangle-4\langle\gamma\mu\rangle)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1-2\langle\gamma\mu\rangle/\langle\mu\rangle}{2(3\langle\mu\rangle-4\langle\gamma\mu\rangle)} & \frac{1-\langle\gamma\mu\rangle/\langle\mu\rangle}{3\langle\mu\rangle-4\langle\gamma\mu\rangle} & -\frac{1-\langle\gamma\rangle}{2(3\langle\mu\rangle-4\langle\gamma\mu\rangle)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1-2\langle\gamma\mu\rangle/\langle\mu\rangle}{2(3\langle\mu\rangle-4\langle\gamma\mu\rangle)} & -\frac{1-\langle\gamma\rangle}{2(3\langle\mu\rangle-4\langle\gamma\mu\rangle)} & \langle\frac{1}{L}\rangle + \frac{(1-2\langle\gamma\rangle)^2}{3\langle\mu\rangle-4\langle\gamma\mu\rangle} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle\frac{1}{\mu}\rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \langle\frac{1}{\mu}\rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \langle\frac{1}{\mu}\rangle \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

onde o símbolo $\langle \rangle$ significa a média ponderada: $\langle q \rangle = h_b q_b + h_c q_c$. No limite $h_c \rightarrow 0$, e $\mu_c, L_c \rightarrow 0$ de maneira que a razão γ permaneça constante, nesse caso tem-se que $\langle \mu \rangle \rightarrow \mu_b$, $\langle \gamma \rangle \rightarrow \gamma_b$, $\langle \gamma \mu \rangle \rightarrow \gamma_b \mu_b$. Além disso, tem-se que $\langle \frac{1}{\mu} \rangle \rightarrow \langle \frac{1}{\mu_b} \rangle + \lim_{h_c \rightarrow 0} \frac{h_c}{L_c}$, lembrando que o módulo de Young E e a razão de Poisson, são $E_b = \frac{3-4\gamma_b}{1-\gamma_b}$ e $\nu_b = \frac{1/2-\gamma_b}{1-\gamma_b}$. Substituindo estes valores na equação (2.24) obtém-se:

$$S^{dry} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_b} & -\frac{\nu_b}{E_b} & -\frac{\nu_b}{E_b} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_b}{E_b} & \frac{1}{E_b} & -\frac{\nu_b}{E_b} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_b}{E_b} & -\frac{\nu_b}{E_b} & \frac{1}{E_b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_b} \end{pmatrix} + \lim_{h_c \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_c}{L_c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h_c}{\mu_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h_c}{\mu_c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_c}{\mu_c} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

onde a primeira matriz é a *compliance* da rocha seca e a segunda matriz é o excesso de *compliance* devido às fraturas. Pode-se escrever a equação (2.24) como:

$$\mathbf{S}^{dry} = \mathbf{S}_b^{dry} + \mathbf{S}_c^{dry}. \quad (2.26)$$

Esta equação corresponde ao modelo da *compliance* exposto pela teoria das deformações de deslizamentos lineares (Schoenberg e Sayers, 1995). Os limites da equação (2.25) correspondem aos excessos de *compliance* na direção normal(N) e na direção tangencial(T):

$$\lim_{h_c \rightarrow 0} \frac{h_c}{L_c} = Z_N, \quad \lim_{h_c \rightarrow 0} \frac{h_c}{\mu_c} = Z_T \quad (2.27)$$

No caso da rocha seca tem-se um modelo completamente elástico sem perdas; no caso da rocha saturada, o modelo exibe dispersão e atenuação, devido principalmente ao chamado fluxo de fluido (vide seção anterior). Brajanovski obtém o módulo complexo efetivo (vide equação 2.22) utilizando uma aproximação baseada no método da matriz propagadora (Brajanovski, Gurevich e Shoenberg, 2005), a expressão para este módulo é:

$$\frac{1}{C^*} = \frac{1}{C_b} + \frac{(\alpha_b M_b / C_b - 1)^2}{M_b / C_b \sqrt{i\omega / D_b H / 2} \cot(\sqrt{i\omega / D_b H / 2}) + 1 / Z_N}. \quad (2.28)$$

Esta equação significa que o módulo complexo efetivo é expresso em termos da frequência, das propriedades do meio poroso não fraturado e do excesso de *compliance* normal (devido às fraturas). Tendo o módulo C^* , pode-se obter a velocidade de propagação da onda P rápida na direção perpendicular às fraturas, por meio da expressão:

$$V_{Pz} = \sqrt{\frac{C^*}{\rho_b}}, \quad (2.29)$$

onde $\rho_b = \rho_s(1 - \phi_b) + \phi_b\rho_f$ é a densidade efetiva do meio poroso não fraturado. Definindo o parâmetro adimensional de fraturas fracas, expresso pela seguinte equação:

$$\delta_N = \frac{Z_N L_b}{1 + Z_N L_b}, \quad (2.30)$$

pode-se expressar a equação (2.28) da seguinte maneira:

$$\frac{1}{C^*} = \frac{1}{C_b} + \delta_N \frac{(\alpha_b M_b / C_b - 1)^2}{1 - \delta_N + \delta_N M_b / C_b H / 2 \sqrt{i\omega / D_b} \cot(\sqrt{i\omega / D_b} H / 2)}. \quad (2.31)$$

É claro, quanto maior for o nível das fraturas (Z_N) maior será o nível de atenuação e dispersão da onda. Pode-se fazer uma comparação do modelo mesoscópico de Norris e o modelo proposto por Brajanovski. No modelo de Norris, o principal é o contraste dos parâmetros dos dois meios porosos, já para o modelo de Brajanovski, no caso limite quando a comprimento da fratura é muito pequeno, os valores da velocidade de fase e o coeficiente de atenuação dependem dos parâmetros poroelásticos do meio poroso principal e do valor do parâmetro da fraqueza da fratura.

A seguir apresentam-se as curvas de dispersão e atenuação para a onda P rápida que propaga-se na direção perpendicular às fraturas utilizando a equação (2.31), para diferentes valores do parâmetro δ_N . Pela definição deste parâmetro (equação 2.30) seus valores estão na faixa entre zero e um.

Das Figuras 2.15 e 2.16 pode-se concluir que quanto maior for o fraturamento, ou seja, quanto maior o parâmetro δ_N , maior é a atenuação e a dispersão da onda P. Além disso, o pico de atenuação desloca-se à baixas frequências.

2.3.3 Modelo mesoscópico da dupla porosidade. Desenvolvimento de Berryman et al

Uma maneira de modelar uma rocha porosa fraturada é utilizando o conceito de dupla porosidade. A dupla porosidade pode ser entendida como um sistema de três fases: O sólido componente da matriz da rocha, o fluido que preenche os poros e o fluido existente nas

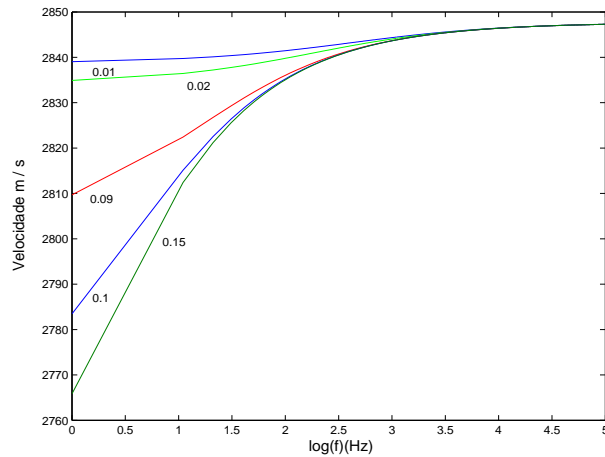


Figura 2.15: Velocidade de fase para diferentes valores de δ_N

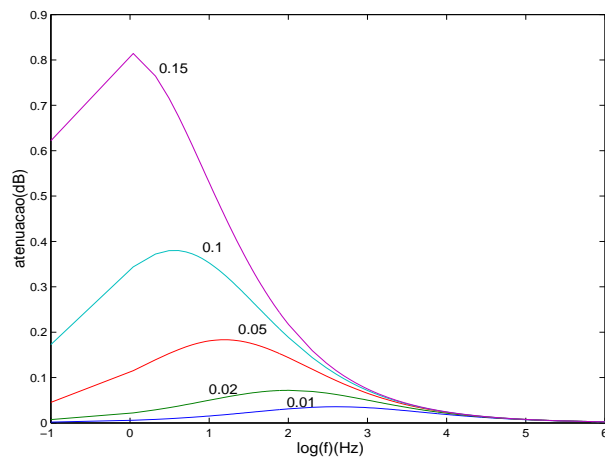


Figura 2.16: Atenuação para diferentes valores de δ_N

fraturas. O meio fraturado identifica-se com duas porosidades diferentes: a porosidade da rocha, chamada de porosidade primária, e a porosidade que induz o fraturamento, chamada de porosidade secundária. A porosidade primária é maior que a porosidade secundária, embora considere-se que a permeabilidade nas fraturas seja muito maior que a permeabilidade da matriz. Para uma descrição rigorosa do meio poroso precisa-se de duas escalas, a primeira é a escala macroscópica, correspondente às dimensões do volume elementar representativo ou, para o caso da sismica, ao comprimento da onda que se propaga; a segunda escala corresponde às dimensões dos poros e é a escala microscópica. No caso da dupla porosidade tem-se três escalas: a macroscópica, a microscópica e a escala dos tamanhos das aberturas das fraturas. Esta é uma escala intermediária entre as duas anteriores e chamada de mesoscópica. Um meio poroso fraturado pode-se entender como um sólido (na escala macroscópica) fragmentado, cujas fraturas dividem o meio em blocos (escala mesoscópica) e cada bloco por sua vez está constituído pela matriz na fase sólida e os espaços dos poros (escala microscópica). Na figura 2.17 ilustra-se o conceito da dupla porosidade.

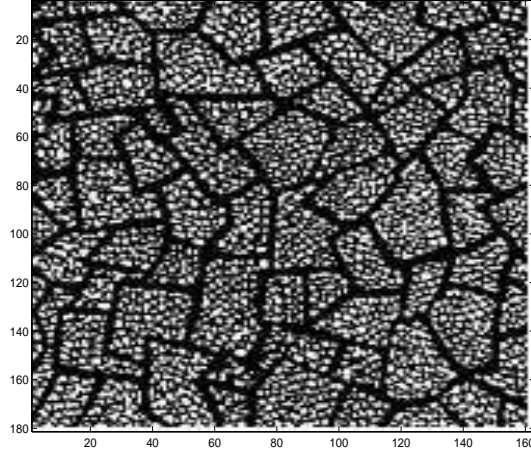


Figura 2.17: Representação da dupla porosidade

A maneira de analisar a propagação de ondas nos meios descritos pela dupla porosidade neste trabalho é o desenvolvido por Berryman e Wang (2000) e o trabalho de Dai e Kanasevich (1995). Berryman e Wang generalizam a abordagem de Biot (1956a) definindo as funções de energia T e dissipação D e obtendo as equações de movimento, resolvendo as equações de Euler-Lagrange obtidas da formulação variacional. A análise de Berryman é fenomenológica ou macroscópica da mesma maneira da abordagem de Biot, no caso de porosidade simples. Da análise de Berryman e Wang (1995) obtém-se, como resultado principal, a existência de uma segunda onda P lenta, cujas características são similares à onda P lenta de Biot, embora a nova onda P lenta da dupla porosidade seja difusiva para toda a faixa de frequências. Na prática isto significa que esta onda é um mecanismo de atenuação na escala das heterogeneidades.

As equações de movimento são obtidas a partir de uma formulação variacional. Para isto precisa-se das expressões das funções de energia, T , e dissipação D :

$$2T = \rho_{11} \dot{\mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} + \rho_{22} \dot{\mathbf{U}}^{(1)} \dot{\mathbf{U}}^{(1)} + \rho_{33} \dot{\mathbf{U}}^{(2)} \dot{\mathbf{U}}^{(2)} + 2\rho_{12} \dot{\mathbf{u}} \dot{\mathbf{U}}^{(1)} + 2\rho_{13} \dot{\mathbf{u}} \dot{\mathbf{U}}^{(2)} + 2\rho_{23} \dot{\mathbf{U}}^{(1)} \dot{\mathbf{U}}^{(2)}, \quad (2.32)$$

$$2D = b_{12}(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{U}}^{(1)}) \cdot (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{U}}^{(1)}) + b_{13}(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{U}}^{(2)}) \cdot (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{U}}^{(2)}) + b_{23}(\dot{\mathbf{U}}^{(1)} - \dot{\mathbf{U}}^{(2)}) \cdot (\dot{\mathbf{U}}^{(1)} - \dot{\mathbf{U}}^{(2)}) \quad (2.33)$$

onde \mathbf{u} , $\mathbf{U}^{(1)}$ e $\mathbf{U}^{(2)}$ são os deslocamentos do sólido, do fluido nos poros e do fluido nas fraturas, respectivamente; os parâmetros ρ de massa, similares aos introduzidos por Biot (1956a) no caso de porosidade simples, e os parâmetros b_{ij} são de fricção. Da formulação variacional obtém-se as equações de movimento:

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & \rho_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_i \\ \dot{U}_i^{(1)} \\ \dot{U}_i^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{12} + b_{13} & -b_{12} & -b_{13} \\ -b_{12} & b_{12} + b_{23} & -b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & b_{13} + b_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{U}_i^{(1)} \\ \dot{U}_i^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{ij,j} \\ -\bar{p}_{,i}^{(1)} \\ -\bar{p}_{,i}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Berryman e Wang (1995) descrevem a maneira de obter os termos inerciais e os parâmetros de fricção. Estes últimos são expressos em termos das porosidades $\phi^{(1)}$, $\phi^{(2)}$, das permeabilidades e das frações dos volumes das duas porosidades $v^{(1)}$ e $v^{(2)}$, utilizando a conhecida lei de Darcy (Berryman e Wang, 2000). De maneira similar às equações constitutivas da porosidade simples, para a dupla porosidade tem-se as respectivas equações constitutivas:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p_c \\ -p^{(1)} \\ -p^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ -\zeta^{(1)} \\ -\zeta^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

onde e é a deformação volumétrica da matriz, $\zeta^{(1)}$ e $\zeta^{(2)}$ são as variações do conteúdo de fluido nos poros e a fratura, respectivamente. Os coeficientes a_{ij} são expressos em termos dos parâmetros poroelásticos. Chamando de A a matriz da equação anterior e chamando $C = [c_{ij}] = A^{-1}$, pode-se escrever as equações constitutivas como:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ -\zeta^{(1)} \\ -\zeta^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_c \\ -p^{(1)} \\ -p^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Berryman e Wang (1995) fornecem uma expressão para o termo $\tau_{ij,j}$ da equação (2.34):

$$\tau_{ij,j} = (K_u + \frac{1}{3}\mu)e_{,i} + \mu u_{i,jj} + K_u[B^{(1)}\zeta_{,i}^{(1)} + B^{(2)}\zeta_{,i}^{(2)}], \quad (2.37)$$

com esta expressão e utilizando a equação (2.35) pode-se escrever as equações de movimento como:

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & \rho_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_i \\ \dot{U}_i^{(1)} \\ \dot{U}_i^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{12} + b_{13} & -b_{12} & -b_{13} \\ -b_{12} & b_{12} + b_{23} & -b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & b_{13} + b_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{U}_i^{(1)} \\ \dot{U}_i^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (K_u + \frac{1}{3}\mu) \nabla e + K_u \nabla [B^{(1)}\zeta^{(1)} + B^{(2)}\zeta^{(2)}] \\ v^{(1)} \phi^{(1)} \nabla (c_{12}e - c_{22}\zeta^{(1)} - c_{23}\zeta^{(2)}) \\ v^{(2)} \nabla (c_{13}e - c_{23}\zeta^{(1)} - c_{33}\zeta^{(2)}) \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Este sistema de equações prediz a existência de ondas compressoriais P e cizalhantes S. Considerando um meio homogêneo e isotrópico pode-se desacoplar as ondas P da onda S, para isto define-se os seguintes potenciais (Dai e Kanasevich, 1995):

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi_s + \nabla \times \boldsymbol{\psi}_s, \mathbf{U}^{(1)} = \nabla \varphi_1 + \nabla \times \boldsymbol{\psi}_1, \mathbf{U}^{(2)} = \nabla \varphi_2 + \nabla \times \boldsymbol{\psi}_s. \quad (2.39)$$

Substituindo (2.39) em (2.38) e aplicando o divergente obtemos as equações que descrevem a propagação das ondas P:

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & \rho_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_s \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{12} + b_{13} & -b_{12} & -b_{13} \\ -b_{12} & b_{12} + b_{23} & -b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & b_{13} + b_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_s \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} K_u + \frac{4}{3}\mu + K_u(v^{(1)}\phi^{(1)}B^{(1)} + v^{(2)}B^{(2)}) & -K_u v^{(1)}\phi^{(1)}B^{(1)} & -K_u v^{(2)}B^{(2)} \\ v^{(1)}\phi^{(1)}(c_{12} - c_{22}v^{(1)}\phi^{(1)} - c_{23}v^{(2)}) & c_{22}(v^{(1)}\phi^{(1)})^2 & c_{23}v^{(1)}\phi^{(1)}v^{(2)} \\ v^{(2)}(c_{13} - c_{23}v^{(1)}\phi^{(1)} - c_{33}v^{(2)}) & c_{23}v^{(1)}\phi^{(1)}v^{(2)} & c_{33}(v^{(2)})^2 \end{pmatrix} \nabla^2 \begin{pmatrix} \varphi_s \\ \varphi_1 \\ \varphi_2, \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

e aplicando o rotacional obtemos as equações da propagação da onda S:

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & \rho_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\psi}_s \\ \ddot{\psi}_1 \\ \ddot{\psi}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{12} + b_{13} & -b_{12} & -b_{13} \\ -b_{12} & b_{12} + b_{23} & -b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & b_{13} + b_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi}_s \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \nabla^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \nabla^2 \begin{pmatrix} \psi_s \\ \psi_1 \\ \psi_2, \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Para obter as velocidades de fase e as atenuações das ondas com respeito às frequências precisa-se das relações de dispersão. Para isto tomamos soluções da onda plana:

$$\begin{pmatrix} \varphi_s \\ \varphi_1 \\ \varphi_2, \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_s e^{i(\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ A_{f1} e^{i(\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ A_{f2} e^{i(\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

na equação (2.40) para as ondas P e

$$\begin{pmatrix} \psi_s \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_s e^{i(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{B}_{f1} e^{i(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{B}_{f2} e^{i(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

para a onda S. Daqui obtém-se sistemas de equações lineares homogêneas para as amplitudes A_k e \mathbf{B}_k ($k = s, f_1, f_2$). As amplitudes são não nulas se os determinantes das matrizes dos respectivos sistemas são nulos. Para as ondas P:

$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad (2.44)$$

e para as ondas S:

$$\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad (2.45)$$

Expandindo os determinantes (2.44) e (2.45) obtém-se o polinômio característico de grau 6 em k_p (ou de grau 3 em k_p^2) para as ondas P e um polinômio de grau 2 em k_s para as ondas S. Isto significa a existência de três ondas P e uma onda S. Para as ondas P:

$$H_6 k_p^6 + H_4 k_p^4 + H_2 k_p^2 + H_0 = 0 \quad (2.46)$$

e para a onda S:

$$R_1 k_s^2 + R_0 = 0 \quad (2.47)$$

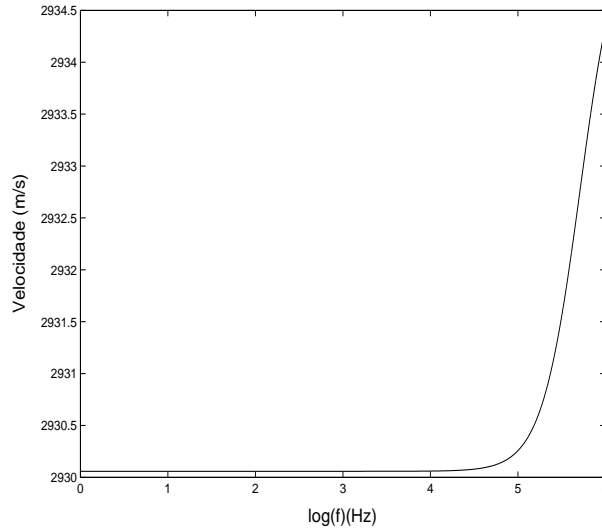


Figura 2.18: Curva de dispersão da onda P rápida

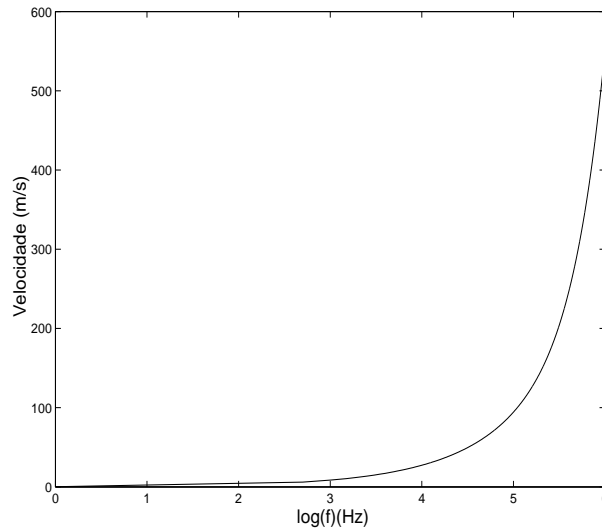


Figura 2.19: Curva de dispersão da onda P1 lenta

No caso das ondas P, a solução de (2.46) fornece as três raízes principais que correspondem às três ondas compressoriais, chamando estas raízes de k_{p+} , k_{p1-} e k_{p2-} para a onda P rápida, a primeira onda P lenta e a segunda P lenta, respectivamente. Para a onda S da equação (2.47) a raiz principal representada simplesmente por k_s . Estes valores são dependentes da frequência ω . As velocidades de fase e as atenuações das ondas são:

$$v_i = \frac{\omega}{|Re(k_i)|}, \quad i = p+, p1-, p2-, s \tag{2.48}$$

$$\alpha_i = \frac{17.372\pi Im(k_i)}{|Re(k_i)|}, \quad i = p+, p1-, p2-, s. \tag{2.49}$$

As curvas de dispersão e atenuação são mostradas a seguir.

Das figuras anteriores pode-se deduzir algumas informações com respeito aos modos de

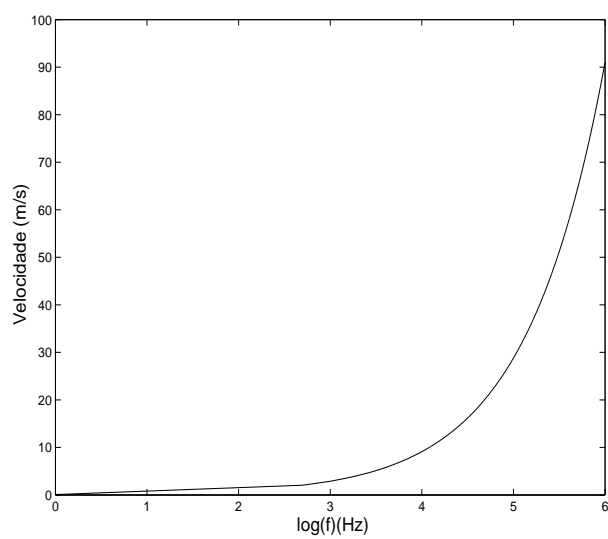


Figura 2.20: Curva de dispersão da onda P2 lenta

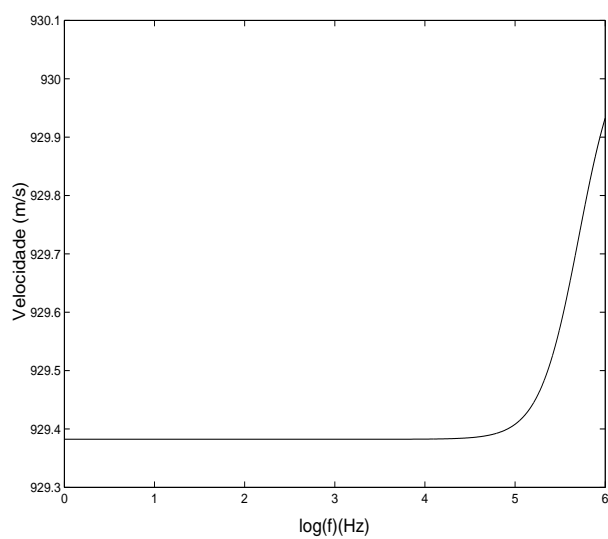


Figura 2.21: Curva de dispersão da onda S

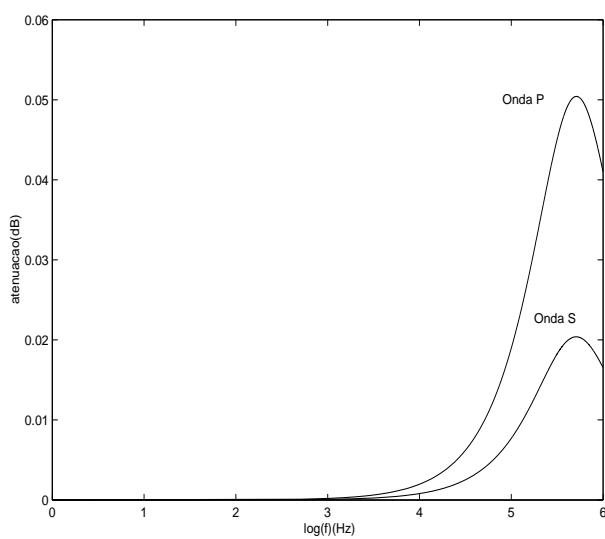


Figura 2.22: Curvas de atenuação da onda P e da onda S

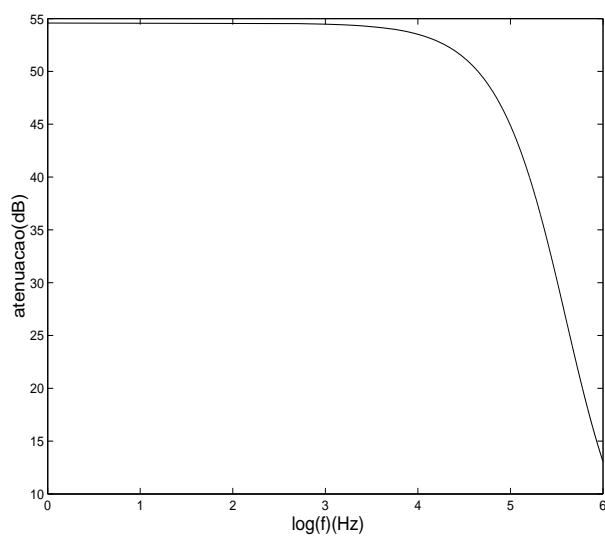


Figura 2.23: Curva de atenuação da onda P lenta 1

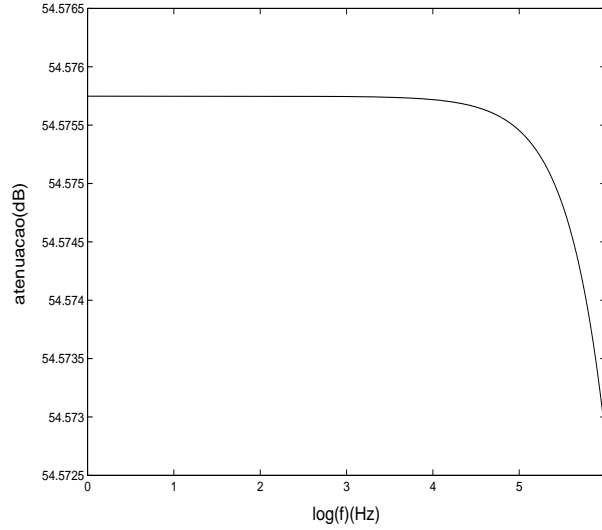


Figura 2.24: Curva de atenuação da onda P lenta 2

propagação na dupla porosidade; aparece uma segunda onda lenta de natureza difusiva em toda a faixa de frequências e com uma velocidade de propagação muito pequena mesmo comparado com a primeira onda lenta. As atenuações da onda P rápida e da onda S são contrárias ao caso da porosidade simples. Neste caso a onda P rápida tem uma atenuação maior que a onda S; uma possível explicação deste fato é a existência da segunda onda lenta, a qual tira energia da onda P rápida, supondo que esta segunda onda P lenta propaga-se principalmente no fluido das fraturas.

O sistema de equações (2.38) descreve as ondas compressoriais, um sistema acoplado para os potenciais definidos na equação (2.39), supondo o caso que a viscosidade do fluido é nulo. Nesse caso os termos de atenuação b , b_{12} e b_{13} são nulos. Pode-se então desacoplar o sistema (2.38) supondo, além disso, que os termos inerciais $\rho_{ij} \equiv 0$ para $i \neq j$. Nesse caso pode-se escrever o sistema (2.38) como:

$$\begin{aligned}
 \rho_{11}\ddot{\varphi}_s &= \tilde{K}\nabla^2\varphi_s \\
 \rho_{22}\ddot{\varphi}_1 &= \tilde{K}_1\nabla^2\varphi_1 \\
 \rho_{33}\ddot{\varphi}_2 &= \tilde{K}_2\nabla^2\varphi_2
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

As equações (2.50) representam três ondas P independentes. A primeira corresponde à onda P rápida, a qual se propaga na parte sólida do composto (matriz + poros primários + fraturas); a segunda corresponde à primeira onda P lenta, a qual se propaga na porosidade primária, a terceira, à segunda onda P lenta que se propaga nas fraturas.

As velocidades das ondas são:

$$\begin{aligned} v_{p+} &= \sqrt{\frac{\tilde{K}_s}{\rho_{11}}} \\ v_{p1-} &= \sqrt{\frac{\tilde{K}_1}{\rho_{22}}} \\ v_{p2-} &= \sqrt{\frac{\tilde{K}_2}{\rho_{33}}} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Precisa-se achar \tilde{K}_s, \tilde{K}_1 e \tilde{K}_2 .

Pelas hipóteses, para ter as ondas desacopladas deve-se ter $B^{(1)} = B^{(2)} = 0$ (os parâmetros skeptom). Portanto;

$$\tilde{K}_s = K + \frac{4}{3}\mu. \quad (2.52)$$

Por outro lado, se as três tortuosidades $\tau, \tau_1, \tau_2 = 1$, obtém-se $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0$ e $\rho_{11} = (1 - \phi)\rho_s$, $\rho_{22} = (1 - v^{(2)})\phi^{(1)}\rho_f$ e $\rho_{33} = v^{(2)}\rho_f$. Lembrando que $v^{(1)} + v^{(2)} = 1$ e que $\phi = \phi^{(1)}v^{(1)} + v^{(2)}$.

De acordo com a (2.38) tem-se que: $c_{23} = 0$, $c_{12} = c_{22}v^{(1)}$, $c_{13} = c_{33}v^{(2)}$ e então:

$$\tilde{K}_1 = c_{22}(v^{(1)}\phi^{(1)})^2 \quad (2.53)$$

$$\tilde{K}_2 = c_{33}(v^{(2)})^2 \quad (2.54)$$

Utilizando as equações (2.52-2.54) tem-se as velocidades:

$$\begin{aligned} v_{p+} &= \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{(1 - \phi)\rho_s}} \\ v_{p1-} &= \sqrt{\frac{c_{22}\phi^{(1)}v^{(1)}}{\rho_f}} \\ v_{p2-} &= \sqrt{\frac{c_{33}v^{(2)}}{\rho_f}}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Destas três últimas equações pode-se deduzir:

Se $\phi = 0 \rightarrow \phi^{(1)} = 0$, $v^{(2)} = 0$ que corresponde ao caso de uma rocha totalmente sólida (não tem poros e nem fraturas) e, portanto, existe uma única onda P.

Se $v^{(2)} = 0$ e $\phi = \phi^{(1)}$, ou seja, que não tem fraturas porém tem porosidade primária; isto corresponde à Teoria de Biot Clássica, existem duas ondas P .

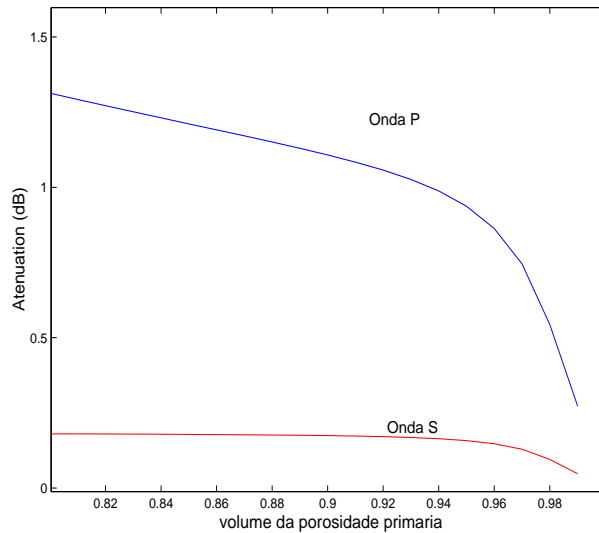


Figura 2.25: Picos de atenuação da onda P rápida e a onda S para valores de volume da porosidade primária $\epsilon^{(1)}$

Se $v^{(1)} = 0$, ou seja, a rocha não é porosa, porém está fraturada, existe então duas ondas P, a primeira propagando-se na matriz e a segunda propagando-se no fluido existente nas fraturas.

Para outros casos existem as três ondas P. A análise anterior é irreal embora explique a fenomenologia da propagação das ondas compressionais no meio de dupla porosidade. Para a onda S a situação é similar e sua equação é

$$\rho_{11}\ddot{\psi}_s = \mu\nabla^2\psi_s \quad (2.56)$$

e a velocidade:

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_{11}}} \quad (2.57)$$

Teoricamente, pode-se afirmar que, se a fração de volume das fraturas é nula o modelo da dupla porosidade se reduz à Teoria original de Biot; no caso que tal volume é considerável, o processo difusivo da segunda lenta é crescente, o que explicaria que a atenuação da onda P rápida é maior quando o fraturamento é maior, o que concorda com o análise de Brajanoski (vide secção anterior). Na figura 2.25 ilustra-se tal afirmação, nela mostram-se os picos de atenuação para a onda P rápida e a onda S com respeito ao volume da porosidade primária $v^{(1)}$.

O modelo da dupla porosidade como mecanismo mesoscópico explica as perdas para a onda P rápida igual aos outros modelos do mecanismo mesoscópico (White-Norris-Brajanoski etc). No caso da onda S os modelos mesoscópicos como o da dupla porosidade não explicam satisfatoriamente suas perdas.

Neste capítulo descreveu-se amplamente as extensões da teoria de Biot; No caso da viscoelasticidade ou modelo de fluxo local, é possível explicar as atenuações na faixa sônica. Além disso deduz-se que o pico de atenuação desloca-se às frequências sônicas, quando a viscosidade aumenta em concordância com os experimentos (Jones, 1986). Deduz-se expressões analíticas para a dispersão e atenuação das três ondas para um meio transversalmente isotrópico (vide equações 2.13 e 2.14). A anisotropia do meio faz com que o comportamento das ondas seja diferente e dependente da direção de propagação e da frequência, ou seja, o comportamento contrário das duas ondas P (rápida e lenta). Para uma direção de propagação paralela ao eixo de simetria (z), a onda P rápida atenua-se e seu pico de atenuação aparece nas baixas frequências (sísmicas), o contrário acontece com a onda P lenta. Essa onda mostra um comportamento "anormal" diferente de um processo de propagação, mais parecido com os processos difusivos (vide figura 2.7). O comportamento da onda P lenta na direção paralela ao eixo é muito diferente do comportamento desta onda na direção perpendicular: a atenuação desta onda é menor na direção paralela que na direção perpendicular (vide figura 2.5). Este fato pode ser uma explicação das perdas da onda P rápida que a Teoria de Biot na sua versão isotrópica não pôde obter.

Devido ao chamado Teorema de Backus levado ao caso da poroelasticidade, um material bifásico heterogêneo (as heterogeneidades na direção z) é equivalente, em baixas frequências, (comprimento de onda maior que a escala mesoscópica das heterogeneidades) ao meio homogêneo transversalmente isotrópico. Este resultado permite relacionar o mecanismo da anisotropia e os mecanismos mesoscópicos de saturação parcial (modelo de White) formalizado por Norris (1993), com o modelo do mecanismo das fraturas de Brajanovski et al. (2005) e o modelo da dupla porosidade, mecanismos explicados amplamente neste capítulo.

3

Modelagem numérica das Equações de Biot

Neste capítulo resolve-se numericamente as equações de propagação de ondas em meios bifásicos, as equações de Biot, com o objetivo de avaliar espacial e temporalmente as propriedades das ondas de Biot. A primeira parte deste capítulo descreve brevemente os métodos usuais para resolver uma equação diferencial parcial, isto é, o método das diferenças finitas (DF) e os métodos Pseudospectrais (PS). Os operadores de DF e PS substituem os operadores contínuos das derivadas temporais e espaciais. Na substituição dos operadores contínuos pelos operadores discretos aparecem erros óbvios da discretização como a chamada dispersão numérica e problemas como as reflexões de borda. Devido a isso é necessário impor condições de fronteira para resolver equações para um meio infinito. Neste trabalho não se discute este problema e este artefato é minimizado utilizando um algoritmo simples de atenuação de bordas.

3.1 Solução numérica de equações diferenciais utilizando DF e o método PS

Dada uma função U , os métodos de diferenças finitas (DF) significam aproximar a função U utilizando um polinômio local de interpolação (Hesthaven et al., 2005). A derivada é então aproximada pela derivada de tal polinômio. Neste contexto o termo `local` significa o uso de pontos vizinhos da malha. Por exemplo um polinômio quadrático local que interpola uma

função $U(x)$ na vizinhança de x_j é:

$$\frac{1}{2\Delta x^2}(x-x_j)(x-x_{j+1})U(x_{j-1}) - \frac{1}{\Delta x^2}(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})U(x_j) + \frac{1}{2\Delta x^2}(x-x_{j-1})(x-x_j)U(x_{j+1}),$$

derivando obtém-se:

$$\frac{du}{dx}|_{x_j} = \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2\Delta x}, \quad (3.1)$$

esta equação é a aproximação da primeira derivada utilizando um esquema de segunda ordem, de maneira análoga, a aproximação da derivada mediante um esquema de quarta ordem é:

$$\frac{du}{dx}|_{x_j} = \frac{1}{12\Delta x}(U_{j-2} - 8U_{j-1} + 8U_{j+1} - U_{j+2}). \quad (3.2)$$

Uma maneira geral de obter a derivada numérica utilizando um número arbitrário de pontos vizinhos é expressa na seguinte forma (Hesthaven et al., 2005):

$$\frac{dU}{dx}|_{x_j} = \sum_{n=1}^p \alpha_n^p D_n U(x_j), \quad (3.3)$$

onde

$$D_n U(x_j) = \frac{U_{j+n} - U_{j-n}}{2n\Delta x}, \quad (3.4)$$

e os pesos α_n^p , são

$$\alpha_n^p = -2(-1)^n \frac{(p!)^2}{(p-n)!(p+n)!} \quad (3.5)$$

A equação (3.3) significa um esquema de diferenças finitas de ordem p . Como exemplo se toma a equação:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = c \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (3.6)$$

Se a condição inicial para esta equação tem a forma

$$U(x, 0) = e^{ikx},$$

e condições de fronteira periódicas (Fornberg, 1987), então a solução é

$$U(x, t) = e^{ik(x+ct)}. \quad (3.7)$$

Substituindo na equação (3.6) a derivada espacial por um esquema de diferenças finitas de segunda ordem obtém-se a velocidade de fase numérica (Hesthaven et al., 2005)

$$c(k) = c \left(1 - \frac{(k\Delta x)^2}{6} + O((k\Delta x)^4) \right), \quad (3.8)$$

ou, para um esquema de quarta ordem

$$c(k) = c \left(1 - \frac{(k\Delta x)^4}{30} + O((k\Delta x)^6) \right). \quad (3.9)$$

O fato de que $c(k) \leq c$ chama-se de *dispersão numérica*; quanto maior a ordem do esquema de DF, menor a dispersão numérica como ilustram as equações (3.8-3.9). Uma alternativa aos esquemas de diferenças finitas são os métodos pseudospectrais (Fornberg, 1990; Ozdenvar e McMechan, 1997). Ao contrário do método das diferenças finitas, que aproxima a derivada localmente, os métodos pseudospectrais utilizam todos os valores da função para construir a aproximação da derivada. Quando se fala de *Métodos pseudospectrais* isto significa que as funções são representadas por funções de base $\psi(x)$, funções ortogonais. Em particular, para fenômenos periódicos, são utilizadas as funções trigonométricas e^{ikx} . O algoritmo básico pseudospectral, utilizando a Transformada de Fourier no cálculo das derivadas é o seguinte

$$U(x, t) \rightarrow \mathfrak{F}(U) = U(k_x, t) \rightarrow ik_x U(k_x, t) \rightarrow \mathfrak{F}^{-1}(U) = \partial_x U(x, t)$$

onde \mathfrak{F} significa a transformada de Fourier com relação a x e \mathfrak{F}^{-1} é a Transformada de Fourier inversa. Pode-se demonstrar que a derivada pseudospectral (de Fourier) corresponde ao caso limite das diferenças finitas. O argumento é o seguinte, se a derivada de uma função U é expressa como:

$$d_x U|_{x_j} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{\infty} \frac{U_{j+n} - U_{j-n}}{2n\Delta x}, \quad (3.10)$$

para determinar os coeficientes α_n^{∞} considera-se a função e^{ikx} , neste caso os coeficientes satisfaz:

$$\begin{aligned} ike^{ikx} &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{\infty} \frac{e^{i(x+n\Delta x)k} - e^{i(x-n\Delta x)k}}{2n\Delta x} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{\infty} \frac{e^{in\Delta x k} - e^{-in\Delta x k}}{2n\Delta x} e^{ikx} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{\infty} \frac{2isen(nk\Delta x)}{2n\Delta x} e^{ikx}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

ou seja,

$$k = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{\infty} \frac{sen(nk\Delta x)}{n\Delta x}. \quad (3.12)$$

Chamando de $\varepsilon = k\Delta x$ então α_n^{∞}/n são os coeficientes de Fourier da expansão em $sen \varepsilon$, portanto:

$$\alpha_n^{\infty} = 2(-1)^{n+1}, \quad (3.13)$$

Se na equação (3.5) se faz $p \rightarrow \infty$, o que significa um esquema de DF de ordem infinita, tendo que $\lim_{p \rightarrow \infty} -2(-1)^n \frac{(p!)^2}{(p-n)!(p+n)!} = \alpha_n^{\infty}$. Este resultado indica que **a derivada pseudospectral corresponde a um esquema de DF de ordem infinita**. Supondo uma

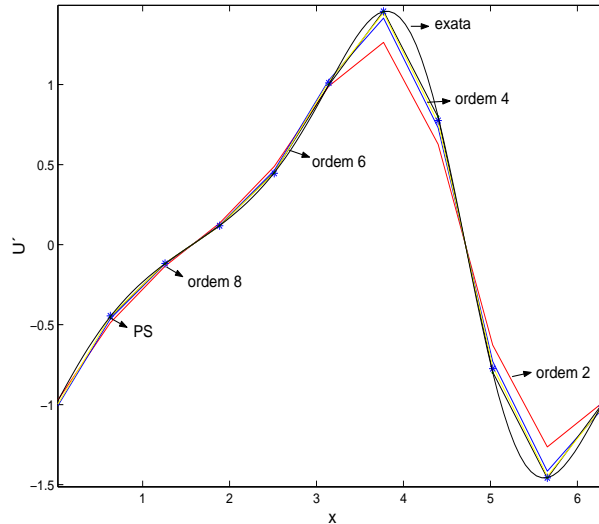


Figura 3.1: Cálculo da derivada da função U utilizando DF e PS

função de domínio $[0, 2\pi]$ e $\Delta x = \frac{2\pi}{N+1}$, neste caso tem-se

$$d_x U|_{x_j} = \frac{N+1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{U_{j+n}}{n}, \tag{3.14}$$

além disso, $U(x,t)$ é 2π periódica se satisfaz que $U_{j+n} = U_{j+n+s(N+1)}$, para $s = 0, 1, 2, \dots$ pode-se demonstrar que neste caso (Hesthanven et al 2003)

$$d_x U|_{x_j} = \sum_{i=0}^N 0.5(-1)^{j+i} \left[\text{sen}\left(\frac{\pi}{N+1}\right) \right]^{-1} U_i. \tag{3.15}$$

Esta equação é conhecida como a fórmula de diferenciação matricial (pseudospectral) de uma função U conhecida nos pontos de malha x_j , para $j = 0, 1, \dots, N$.

A seguir se mostra como exemplo o cálculo da derivada de uma função, utilizando DF e PS. Considere-se a função $u(x) = e^{-\sin(x)}$ cuja derivada é $u' = -\cos(x)e^{-\sin(x)}$

A figura 3.1 mostra o resultado do cálculo da derivada numérica da função U, utilizando um número de pontos $N=15$. O cálculo foi feito com DF de ordens 2,4,6 e 8 e utilizando o método PS. É claro que para obter uma melhor aproximação no cálculo pode-se aumentar o número de pontos da malha. A figura 3.2 ilustra as vantagens do método PS com relação ao DF; comparando o erro para DF de ordem 2 e o PS, tem-se que precisa-se um número de pontos de malha pelo menos 8 vezes o número de pontos de malha no método PS para obter um erro da mesma ordem (vide figura 3.2); comparando DF de ordem 4 e PS, se tem que neste caso o método DF precisa de uma malha três vezes o que precisa o PS. Em todos os casos o método PS supera, na precisão, o DF de qualquer ordem.

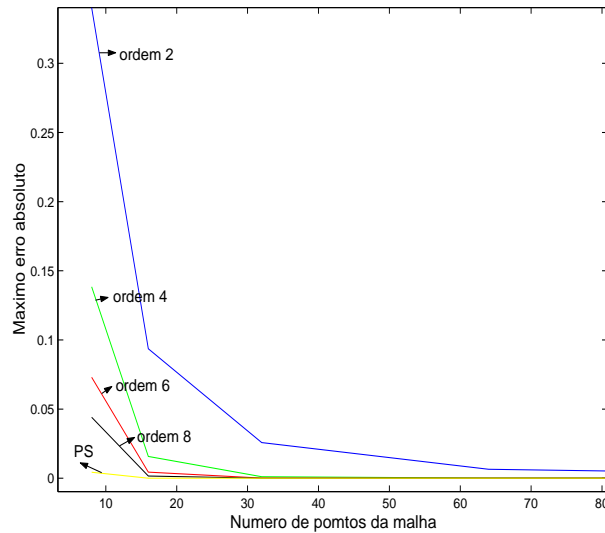


Figura 3.2: Erro absoluto no cálculo da derivada utilizando DF e PS com respeito ao número de pontos da malha

3.2 Solução numérica das equações de Biot utilizando diferenças finitas e o método pseudospectral

Lembrando que no caso mais simples: homogêneo e isotrópico, as equações de Biot estão dadas pelas equações (1.19) para as ondas P e (1.20) para a onda S. Estas equações são de segunda ordem para as derivadas espaciais e temporais. Lembrando as matrizes:

$M = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} P & Q \\ Q & R \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & -b \\ -b & b \end{pmatrix}$ e o vetor $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} e \\ \epsilon \end{pmatrix}$ então pode-se escrever a equação (19) na seguinte forma:

$$M\ddot{\mathbf{Z}} + B\dot{\mathbf{Z}} = T\nabla^2\mathbf{Z}. \quad (3.16)$$

À esquerda estão as derivadas temporais e à direita as derivadas espaciais. Quando se diz que o método é o método das diferenças finitas significa que as derivadas espaciais são calculadas utilizando um esquema de diferenças finitas de ordem dois, quatro etc. No caso que as derivadas são calculadas utilizando a transformada de Fourier (Fornberg, 1987) se diz que o método é o método pseudospectral.

Neste trabalho, as derivadas temporais são substituídas pela aproximação de segunda ordem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &\approx \frac{f(x, z, t_{n+1}) - f(x, z, t_{n-1})}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &\approx \frac{f(x, z, t_{n-1}) - 2f(x, z, t_n) + f(x, z, t_{n+1})}{(\Delta t)^2}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde Δt é o passo do tempo. Substituindo as derivadas temporais na equação (3.16) e se

$\Omega^{(n)}$ é o valor dessa variável no tempo n , pode-se definir as variáveis $F^{(n)}$ e $G^{(n)}$ como:

$$\begin{pmatrix} F^{(n)} \\ G^{(n)} \end{pmatrix} = [\Delta t^2 T \nabla^2 + 2M] \mathbf{Z}^{(n)} - [M - 0.5 \Delta t B] \mathbf{Z}^{(n-1)}$$

Também, definindo os seguintes valores:

$$a_{11} = \rho_{11} + 0.5b\Delta t,$$

$$a_{12} = \rho_{12} - 0.5b\Delta t,$$

$$a_{22} = \rho_{22} + 0.5b\Delta t,$$

$$det = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

então, os valores das variáveis e e ϵ no tempo $(n + 1)$ é dada por:

$$e^{(n+1)} = (F^{(n)}a_{22} - G^{(n)}a_{12})/det$$

$$\epsilon^{(n+1)} = (G^{(n)}a_{11} - F^{(n)}a_{12})/det. \quad (3.18)$$

De maneira análoga, se discretiza as equações correspondentes à onda P (vide equação 1.21), obtendo-se um esquema similar ao das ondas P. A escolha do passo de tempo Δt se baseia no critério de estabilidade:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{2}V_p},$$

onde Δx é o passo da malha na direcção x ($\Delta x = \Delta z$) e V_p é a velocidade da onda P rápida. Este esquema de propagação é similar ao proposto por Hassanzadeh (1991). A seguir apresentam-se os resultados resolvendo o sistema de Biot como um sistema de segunda ordem dado pelas equações (3.16) e sua discretização dada pelas equações (3.18). Como geometria considera-se um modelo de 2300 m (vide figura 3.3) nas direcções x e z (modelo 2D). Suponha-se como material, um arenito de porosidade 0.3, preenchido com água salgada. Neste caso o sistema é resolvido numericamente utilizando diferenças finitas para calcular as derivadas temporais e as derivadas espaciais. Para diminuir a dispersão numérica escolhe-se um passo de malha ($\Delta x = \Delta z$) de 2 m. Na figura 3.4 mostra-se uma instantânea da propagação das três ondas.

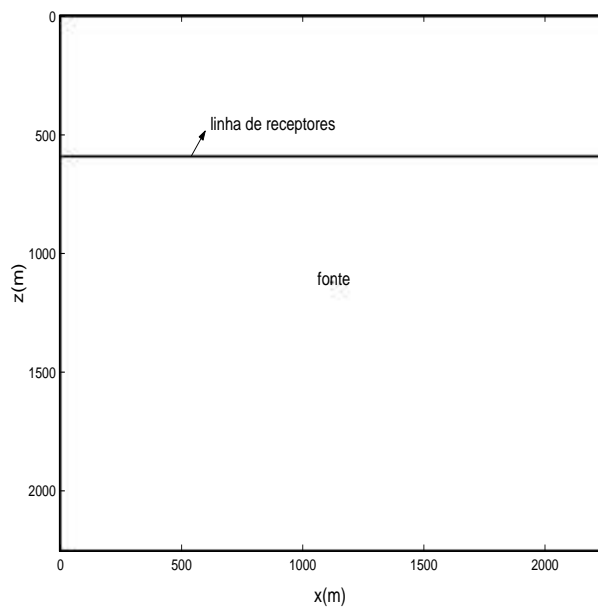


Figura 3.3: Geometria do modelo para as simulações

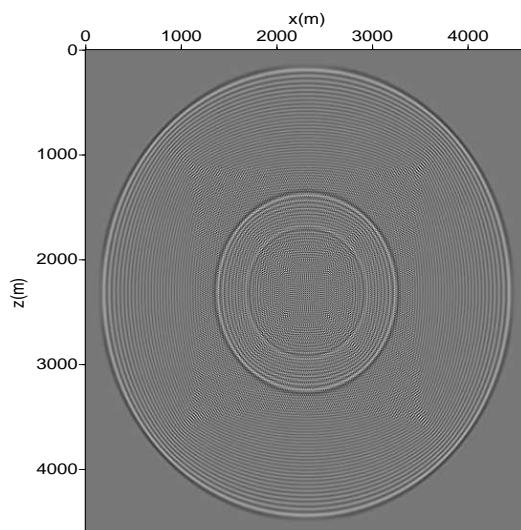


Figura 3.4: Instantânea da propagação das três ondas no tempo de 0.5 s.

Para evitar as derivadas de segunda ordem no tempo e no espaço escreve-se as equações de movimento como um sistema hiperbólico de primeira ordem, ou seja, as variáveis a serem resolvidas são as velocidades das partículas, os esforços e a pressão no fluido (ou as pressões no caso da dupla porosidade). O sistema do tipo hiperbólico de primeira ordem é o dado pelas equações (1.38-1.40), e pode ser escrito na forma matricial:

$$\dot{\vec{V}} = M\vec{V}, \quad (3.19)$$

onde \vec{V} é o vetor $(v_x \ v_z \ q_x \ q_z \ t_{xx} \ t_{zz} \ t_{xz} \ P)^T$, as v 's são as velocidades da partícula do sólido, as q 's são as velocidades (relativa) da partícula do fluido, τ os esforços na matriz e P a pressão no fluido. Na matriz M da equação (3.19) estão contidas as derivadas espaciais das variáveis e as propriedades poroelásticas dos materiais. A derivada temporal é calculada por um esquema de diferenças centradas de segunda ordem:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f[x_i, z_j, t^{(n+1)}] - f[x_i, z_j, t^{(n-1)}]}{2\Delta t}.$$

As derivadas espaciais são calculadas por um esquema de diferenças finitas de quarta ordem ou utilizando a derivada de Fourier. A seguir ilustra-se brevemente os dois métodos e suas conseqüências na solução das equações de Biot expressa pela equação (3.19).

O sistema geral a ser resolvido numericamente agregando os termos da fonte é:

$$\dot{\vec{V}} = M\vec{V} + \mathbf{S}, \quad (3.20)$$

onde $\mathbf{S} = [0, 0, 0, 0, s_{xx}, s_{zz}, s_{xz}, s_f]^T$. Os termos s_{ij} correspondem às perturbações normais, tangencial na matriz e s_f a perturbação no fluido.

Carcione e Quiroga (1996) mostram que o sistema de Biot é um sistema "rígido" (**stiff**) para os quais os esquemas numéricos explícitos (Kelly, Ward, Treitel e Alford, 1976) são estáveis se o passo de tempo Δt é muito pequeno, o que significa um custo computacional elevado. Os autores desenvolvem dois algoritmos equivalentes, os quais são incondicionalmente estáveis (Carcione e Quiroga, 1996) um deles particiona o sistema de Biot em dois subsistemas: o primeiro da conta da parte "stiff" do problema a qual é resolvida analiticamente levando esta solução em outro sistema com os dados iniciais de um algoritmo de Runge Kutta de quarta ordem. Este algoritmo foi implementado neste trabalho, os autores chamam de partição $(4, \infty)$. e as equações rígidas são:

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \frac{\eta}{\kappa} \beta_{12} q_x \\ \dot{v}_z &= \frac{\eta}{\kappa} \beta_{12} q_z \end{aligned}$$

(3.21)

$$\begin{aligned}\dot{q}_x &= -\frac{\eta}{\kappa}\beta_{22}q_x \\ \dot{q}_z &= -\frac{\eta}{\kappa}\beta_{22}q_z,\end{aligned}$$

o qual pode-se ser resolvido analiticamente:

$$\begin{aligned}v_x^* &= v_x^n - \frac{\beta_{12}}{\beta_{22}}[\exp(\lambda_s dt) - 1]q_x^n, \\ v_z^* &= v_z^n - \frac{\beta_{12}}{\beta_{22}}[\exp(\lambda_s dt) - 1]q_z^n,\end{aligned}\tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}q_x^* &= \exp(\lambda_s dt)q_x^n \\ q_z^* &= \exp(\lambda_s dt)q_z^n,\end{aligned}$$

onde $\lambda_s = (\eta/\kappa)\beta_{22}$. Forma-se o vetor $V^* = [v_x^*, v_z^*, q_x^*, q_z^*, p^n, p_f^n]^T$, o qual é uma entrada para o algoritmo de Runge Kutta de alto ordem (Carcione e Quiroga, 1996). O passo iterativo é:

$$V^{n+1} = V^* + (dt/6)(\Delta_1 + 2\Delta_2 + 2\Delta_3 + \Delta_4),\tag{3.23}$$

onde

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= MV^* + S^n \\ \Delta_2 &= M(V^* + dt/2\Delta_1)S^{n+1/2} \\ \Delta_3 &= M(V^* + dt/2\Delta_2)S^{n+1/2} \\ \Delta_4 &= M(V^* + dt\Delta_3)S^{n+1}\end{aligned}\tag{3.24}$$

A seguir mostram-se os resultados quando se resolve o sistema (3.20) utilizando diferenças finitas e o método pseudospectral (PS). No caso das diferenças finitas (DF) foi necessário de um passo de malha $\Delta x(\Delta z) = 3$ m para obter um resultado similar ao caso pseudospectral no qual tomou-se um passo de malha de 10 m.

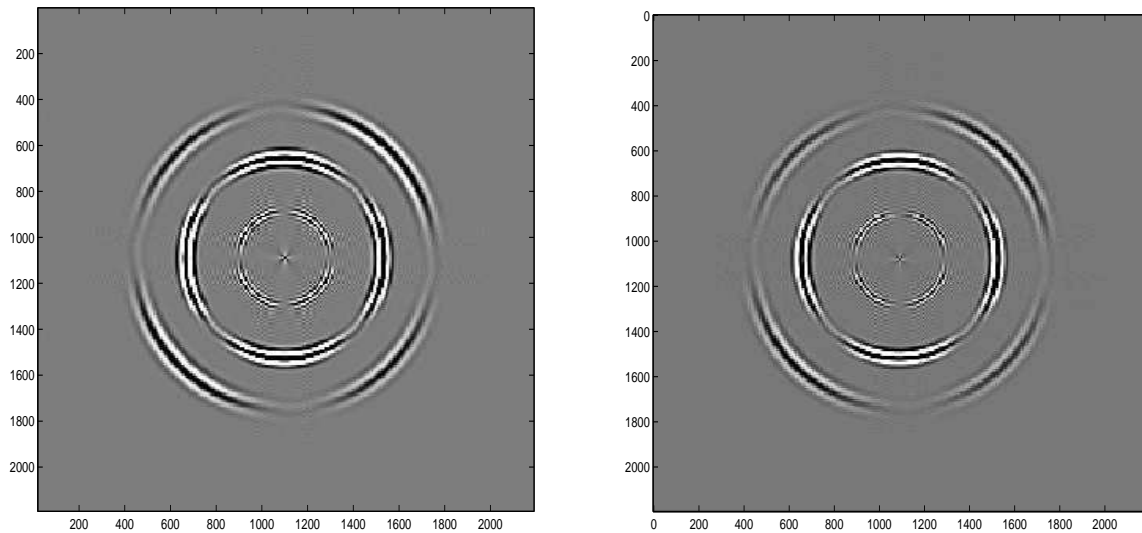


Figura 3.5: Instantânea das três ondas no caso em que o fluido que preenche a rocha é gás no instante 0.48 s DF(esquerda) PS(direita).

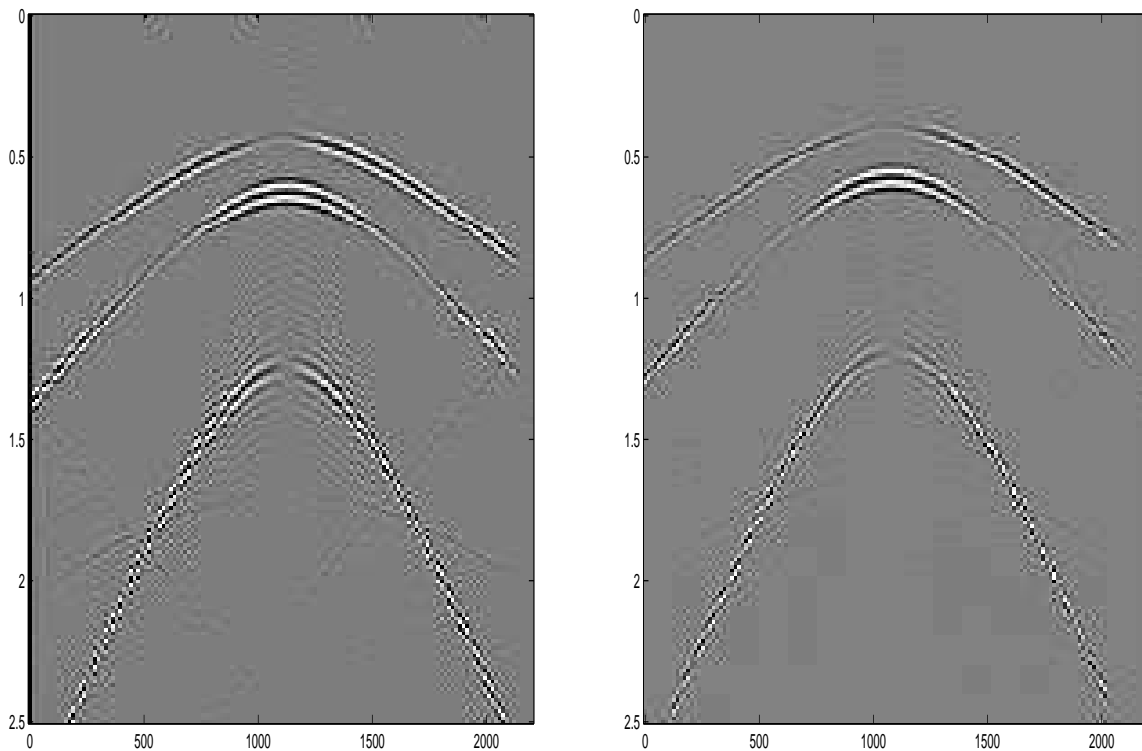


Figura 3.6: Sismograma obtido no caso em que o fluido que preenche a rocha é gás. DF(esquerda) PS(direita).

Dos experimentos numéricos anteriores conclui-se as vantagens do método pseudospectral com relação ao modelamento numérico utilizando as diferenças finitas. No seguinte experimento numérico mostra-se a solução numérica das equações de Biot no caso de um material transversalmente isotrópico (VTI), os resultados apresentados a seguir foram obtidos utilizando-se o modelamento numérico utilizando o método pseudospectral. As equações

constitutivas são as equações 2.6 e as equações de movimento e Lei de Darcy são as equações 2.7. Lembrando o resultado obtido na secção 2.2 da solução por ondas planas das equações de Biot, destaca-se o carácter singular (vide figuras 2.9 e 2.10) da onda P lenta, a qual, no caso de baixas frequências, mostra claramente seu carácter difusivo. As equações constitutivas e de movimento podem ser escritas na forma $\dot{\vec{V}} = M\vec{V} + S$. As equações de movimento e a Lei de Darcy são, para o caso VTI dadas por:

$$\begin{aligned} v_{x,t} &= \beta_{11}^{(1)}(\tau_{xx,x} + \tau_{xz,z}) - \beta_{12}^{(1)}(P_{,x} + \frac{\eta}{\kappa_1}q_x) \\ v_{z,t} &= \beta_{11}^{(3)}(\tau_{xz,x} + \tau_{zz,z}) - \beta_{12}^{(3)}(P_{,z} + \frac{\eta}{\kappa_3}q_z) \\ q_{x,t} &= \beta_{21}^{(1)}(\tau_{xx,x} + \tau_{xz,z}) - \beta_{22}^{(1)}(P_{,x} + \frac{\eta}{\kappa_1}q_x) \\ q_{z,t} &= \beta_{21}^{(3)}(\tau_{xz,x} + \tau_{zz,z}) - \beta_{22}^{(3)}(P_{,z} + \frac{\eta}{\kappa_3}q_z), \end{aligned} \quad (3.25)$$

sendo

$$\begin{pmatrix} \beta_{11}^{(i)} & \beta_{12}^{(i)} \\ \beta_{12}^{(i)} & \beta_{22}^{(i)} \end{pmatrix} = (\rho_f^2 - \rho m_i)^{-1} \begin{pmatrix} -m_i & \rho_f \\ \rho_f & -\rho \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

para $i=1,3$. O modelamento numérico permite visualizar vários tipos de anisotropia. O carácter da anisotropia nestas equações são dadas pelos valores diferentes das permeabilidades nas duas direcções: x e z e as tortuosidades expressas nos valores $m_i = T_i\rho_f/\phi$, sendo T_i a tortuosidade na direcção i . Se nas equações constitutivas dadas pelas equações 2.6 assume-se que os coeficientes de "compliance" c_{ij} correspondem a um material isotrópico ($c_{11} = c_{33}$, $c_{12} = c_{13}$ e $\alpha_1 = \alpha_3$); as ondas P rápida e S se propagam como se o meio fosse isotrópico, porém a onda P lenta apresenta uma propagação anisotrópica. Este fato é ilustrado na figura 3.7 onde apresenta-se uma instantânea da propagação das ondas compressionais num meio poroso saturado com água. Se o material sólido é isotrópico e lembrando que a onda S propaga-se no sólido, para a onda P rápida, embora ela propaga-se nas duas fases (sólida e fluida), é na fase sólida que tem maior presença (vide figura 1.5).

No último experimento deste capítulo mostra-se a propagação de ondas num meio com dupla porosidade, lembrando que este modelo significa que o meio é bifásico e fraturado. Uma consequência fundamental de tal modelo é a presença de uma segunda onda P lenta, com velocidade muito menor que a primeira onda P lenta. As equações de movimento neste caso são as equações (2.40-2.41) e, na versão de um sistema desacoplado, dadas pelas equações (2.50):

$$\begin{aligned} \rho_{11}\ddot{\varphi}_s &= \tilde{K}\nabla^2\varphi_s \\ \rho_{22}\ddot{\varphi}_1 &= \tilde{K}_1\nabla^2\varphi_1 \end{aligned}$$

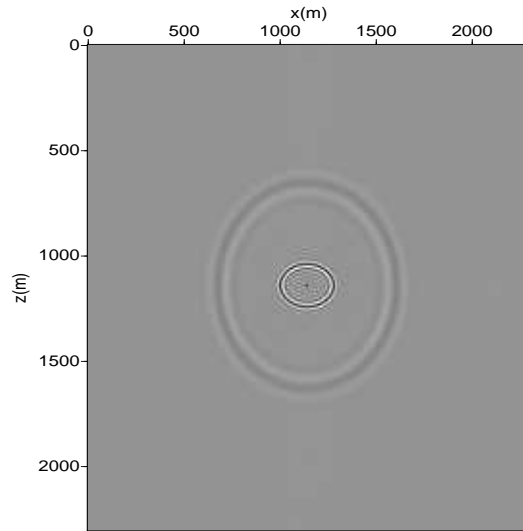


Figura 3.7: Instantânea das duas ondas P no tempo 0.27 s para uma rocha preenchida com água salgada para uma rocha isotrópica, porém com tortuosidade e permeabilidade diferentes nas duas direções.

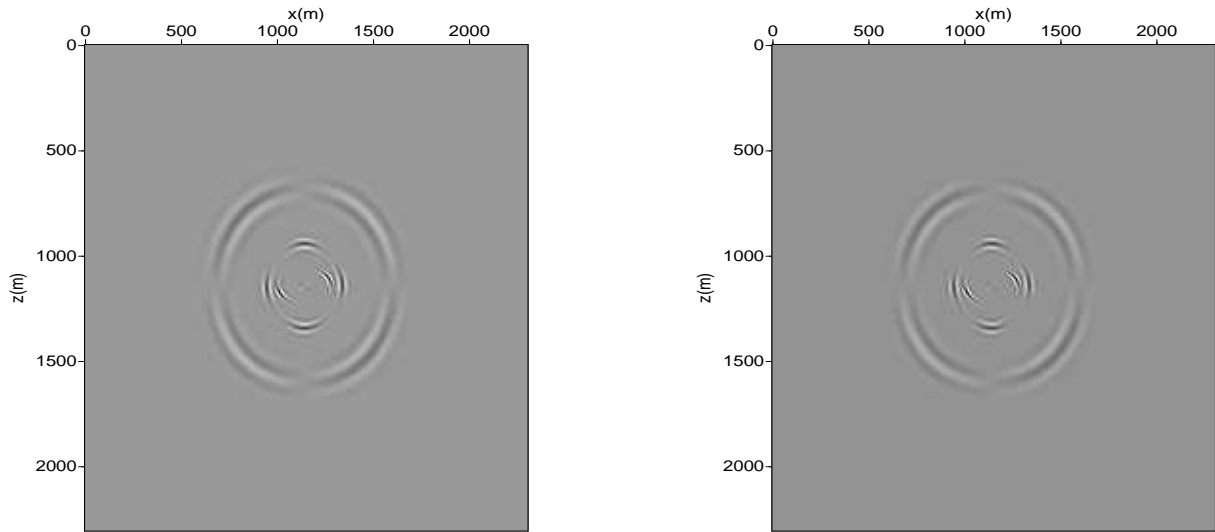


Figura 3.8: Instantânea das três ondas no caso que o fluido que preenche a rocha é água salgada no instante 0.27 s Isotrópico (esquerda) VTI (direita) ($c_{33} = 0.9c_{11}$).

$$\rho_{33}\ddot{\varphi}_2 = \tilde{K}_2\nabla^2\varphi_2$$

para as três ondas P e

$$\rho_{11}\ddot{\psi}_s = \mu\nabla^2\psi_s$$

para a onda S. Os parâmetros de incompressibilidade K , K_i dependem das porosidades e dos volumes de tais porosidades $v^{(1)}$ e $v^{(2)}$. Das equações (2.55) se deduz que as velocidades das

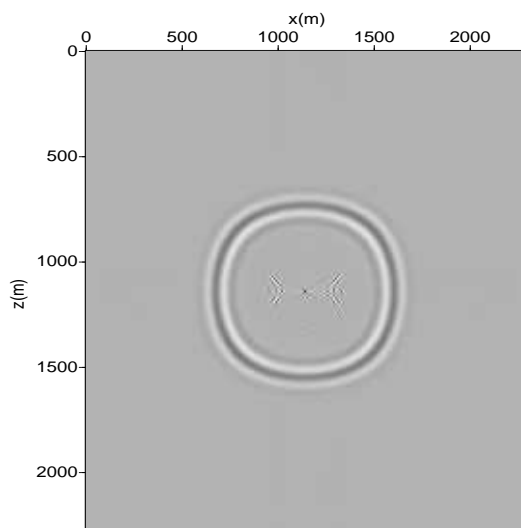


Figura 3.9: Instantânea da propagação da onda P rápida num meio VTI ($c_{33} = 0.5c_{11}$) no instante 0.27 s

ondas compressoriais são 2450 m/s , 1000 m/s e 60 m/s para a onda P rápida, a primeira onda P lenta e a segunda onda P lenta, respectivamente. A velocidade da onda S é 930 m/s . Na figura 3.10 mostra-se uma instantânea da propagação das quatro ondas num meio de dupla porosidade, preenchido por água salgada, e na figura 3.11 o sismograma respectivo, quando os receptores foram colocados numa linha horizontal, cuja distância menor é de 100 m da fonte (colocada no centro).

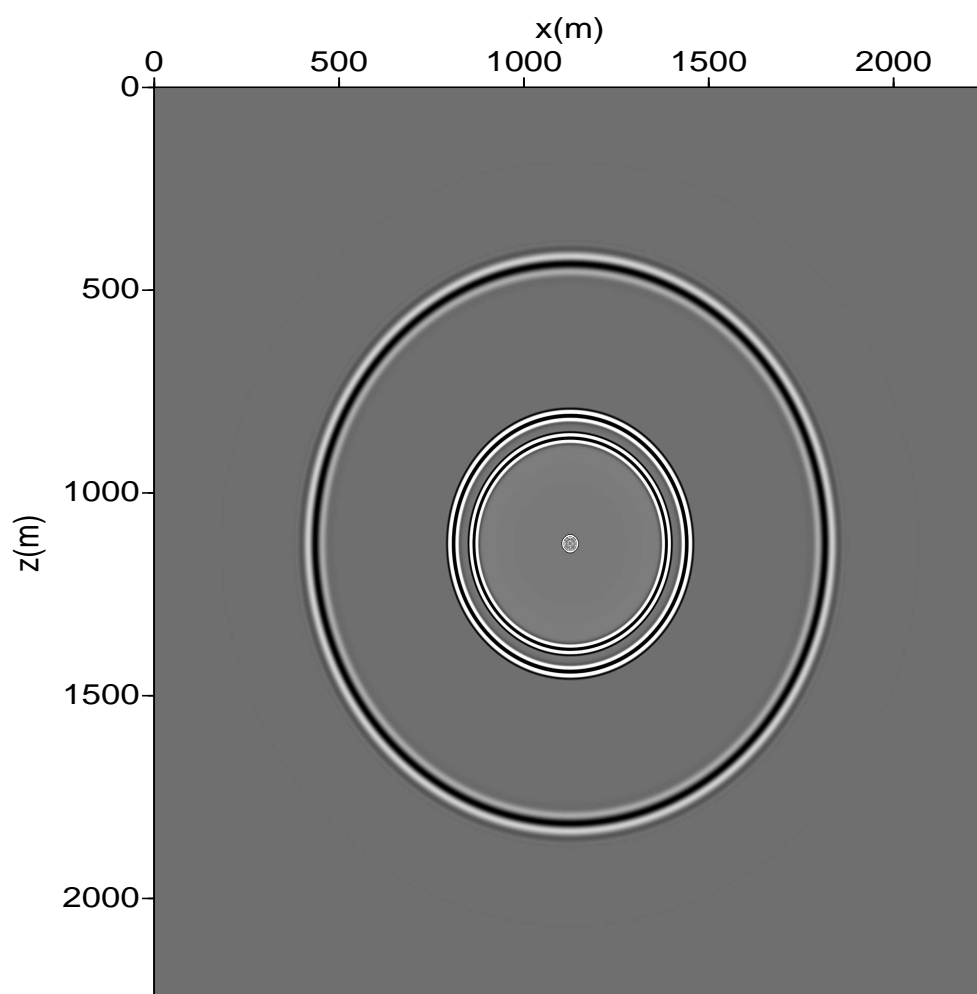


Figura 3.10: Instantânea no tempo 0.27 s das quatro ondas num meio de dupla porosidade preenchido com água salgada.

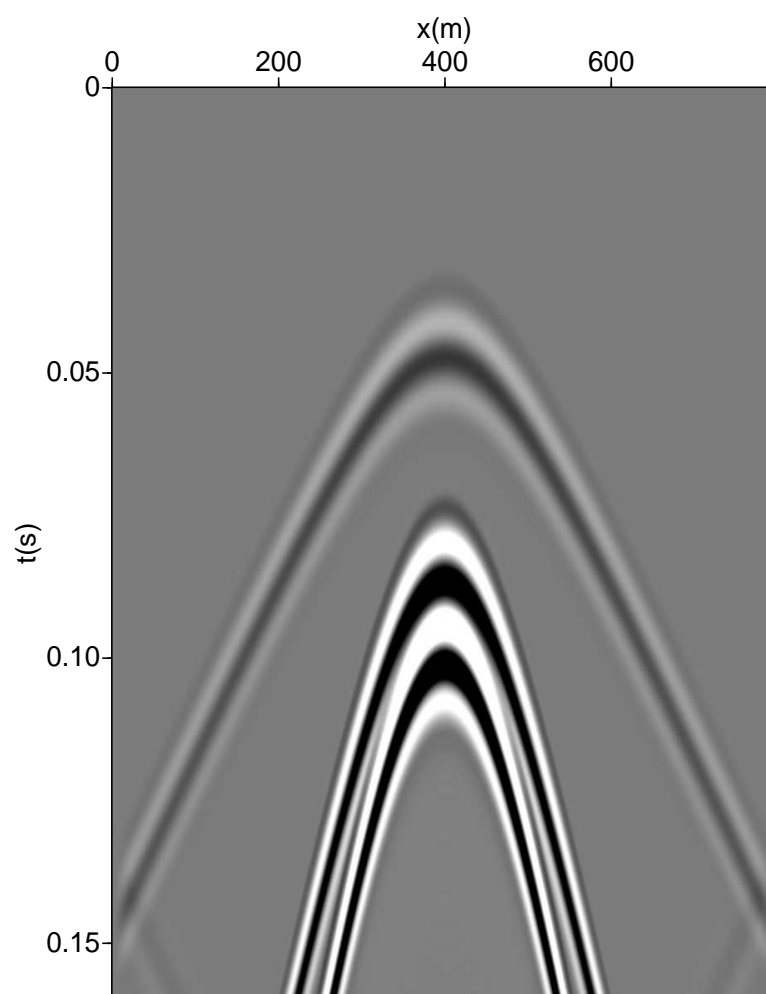


Figura 3.11: Sismograma obtido para um meio de dupla porosidade preenchido com água salgada.

O último experimento numérico apresentado neste capítulo mostrou as implementações das equações de movimento para o modelo da dupla porosidade. Estas equações de movimento são de segunda ordem no tempo e de segunda ordem no espaço. Com o objetivo (a futuro) de implementar numericamente as soluções das equações de propagação de ondas para meios porosos fraturados modelados por dupla porosidade, descreve-se a seguir as equações de movimento e as relações constitutivas num esquema esforços-velocidade da partícula.

No caso da porosidade simples (Biot, 1962a; Biot, 1962b), definindo as funções de energia cinética T e de dissipação D :

$$T = \frac{1}{2}\rho\dot{\mathbf{u}}.\dot{\mathbf{u}} + \rho_f\dot{\mathbf{u}}.\dot{\mathbf{w}} + \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{w}}.\dot{\mathbf{w}} \quad (3.27)$$

e

$$D = \frac{\eta}{\kappa}\dot{\mathbf{w}}.\dot{\mathbf{w}}, \quad (3.28)$$

substituindo estas expressões nas equações de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} \tau_{ij,j} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i}\right) \\ -P_{f,i} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{w}_i}\right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{w}_i} \end{aligned} \quad (3.29)$$

obtem-se

$$\begin{aligned} \tau_{ij,j} &= \rho\dot{v}_i + \rho_f\dot{q}_i, \\ -P_{f,i} &= \rho_f\dot{v}_i + m\dot{q}_i + \frac{\eta}{\kappa}q_i \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde \mathbf{u} é o deslocamento do fluido, \mathbf{w} o deslocamento relativo do fluido em relação ao sólido e P_f a pressão de fluido, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$ e $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{w}}$. As equações (3.30) junto às relações constitutivas dos esforços com respeito aos deslocamentos (ou às velocidades da partícula $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$, $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{w}}$) formam um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, este sistema foi amplamente estudado e para o qual existem na atualidade vários algoritmos numéricos para obter sua solução, destacando os trabalhos de Carcione e Quiroga (1996) e Dai e Kanasevich (1995).

Para dupla porosidade, define-se as funções de energia cinética T e dissipação D da mesma maneira que o caso de porosidade simples:

$$T = \frac{1}{2}\rho\dot{\mathbf{u}}.\dot{\mathbf{u}} + \rho_f\dot{\mathbf{u}}.\dot{\mathbf{w}}^{(1)} + \rho_f\dot{\mathbf{u}}.\dot{\mathbf{w}}^{(2)} + \frac{1}{2}m^{(1)}\dot{\mathbf{w}}^{(1)}.\dot{\mathbf{w}}^{(1)} + \frac{1}{2}m^{(2)}\dot{\mathbf{w}}^{(2)}.\dot{\mathbf{w}}^{(2)} \quad (3.31)$$

e

$$2D = b_{12}\dot{\mathbf{w}}^{(1)}.\dot{\mathbf{w}}^{(1)} + b_{13}\dot{\mathbf{w}}^{(2)}.\dot{\mathbf{w}}^{(2)} + b_{23}\dot{\mathbf{w}}^{(1)}.\dot{\mathbf{w}}^{(2)}, \quad (3.32)$$

onde os b_{ij} são coeficientes de fricção que dependem das permeabilidades nos poros e nas fraturas (Berryman, 1999). As equações de Euler neste caso são:

$$\begin{aligned}\tau_{ij,j} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \right) \\ -P_{f,i}^{(k)} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{w}_i^{(k)}} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{w}_i^{(k)}}, k = 1, 2\end{aligned}\quad (3.33)$$

Substituindo as expressões de T e D as equações (3.33) ficam:

$$\begin{aligned}\tau_{ij,j} &= \rho v_{i,t} + \rho_f q_{i,t}^{(1)} + \rho_f q_{i,t}^{(2)}, \\ -P_{f,i}^{(1)} &= \rho_f v_{i,t} + m^{(1)} q_{i,t}^{(1)} + b_{12} q_{i,t}^{(2)} \\ -P_{f,i}^{(2)} &= \rho_f v_{i,t} + m^{(2)} q_{i,t}^{(2)} + b_{13} q_{i,t}^{(1)}.\end{aligned}\quad (3.34)$$

Os parâmetros $m^{(k)}$ são parâmetros de massa, similares ao parâmetro m de Biot: $m^{(1)} = \frac{T^{(1)} \rho_f}{\phi^1}$ e $m^{(2)} = T^{(2)} \rho_f$.

Para completar o sistema de equações (3.34) precisa-se das equações constitutivas do meio poroso-fraturado. Berryman e Wang (2000) fornecem a seguinte relação dos deslocamentos com respeito aos esforços:

$$\begin{aligned}s_{11}\tau_{11} + s_{12}\tau_{22} + s_{12}\tau_{33} + \beta^{(1)}P^{(1)} + \beta^{(2)}P^{(2)} &= e_{11} \\ s_{12}\tau_{11} + s_{11}\tau_{22} + s_{12}\tau_{33} + \beta^{(1)}P^{(1)} + \beta^{(2)}P^{(2)} &= e_{22} \\ s_{12}\tau_{11} + s_{12}\tau_{22} + s_{11}\tau_{33} + \beta^{(1)}P^{(1)} + \beta^{(2)}P^{(2)} &= e_{33} \\ -\beta^{(1)}\tau_{11} - \beta^{(1)}\tau_{22} - \beta^{(1)}\tau_{33} - a_{22}P^{(1)} - a_{23}P^{(2)} &= \zeta^{(1)} \\ -\beta^{(2)}\tau_{11} - \beta^{(2)}\tau_{22} - \beta^{(2)}\tau_{33} - a_{23}P^{(1)} - a_{33}P^{(2)} &= \zeta^{(2)} \\ \frac{1}{2\mu}\tau_{23} &= e_{23} \\ \frac{1}{2\mu}\tau_{31} &= e_{31} \\ \frac{1}{2\mu}\tau_{12} &= e_{12},\end{aligned}\quad (3.35)$$

onde s_{11} e s_{12} são as constantes poroelásticas (*compliances*) medidas em condições nas quais as pressões dos fluidos são nulas (matriz seca) e os $\beta^{(k)}$ são parâmetros similares ao parâmetro de Biot-Willis (Biot e Willis, 1957). Berryman e Wang (1995) fornecem também as relações constitutivas para as pressões, as quais definem os parâmetros a_{ij} :

$$-a_{11}P_c - a_{12}P^{(1)} - a_{13}P^{(2)} = e$$

$$\begin{aligned} -a_{12}P_c - a_{22}P^{(1)} - a_{23}P^{(2)} &= -\zeta^{(1)} \\ -a_{13}P_c - a_{23}P^{(1)} - a_{33}P^{(2)} &= -\zeta^{(2)}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde $e = e_{11} + e_{22} + e_{33}$, $P_c = -\frac{\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}}{3}$. Igualando (3.35₄) e (3.36₂) obtém-se que $\beta^{(1)} = \frac{a_{12}}{3}$. De maneira análoga, igualando (3.35₅) e (3.36₃) tem-se que $\beta^{(2)} = \frac{a_{13}}{3}$. Berryman (1999) fornece os valores dos parâmetros s_{11} e s_{12} :

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{1}{9K_{dry}} + \frac{1}{3\mu_{dry}} \\ s_{12} &= \frac{1}{9K_{dry}} - \frac{1}{6\mu_{dry}}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Finalmente, pode-se inverter as equações (3.35) para expressar os esforços e as pressões em termos dos deslocamentos, escrevendo o sistema algébrico (3.35) em forma matricial, definindo o vetor

$$\Upsilon = [e_{11}, e_{22}, e_{33}, -\zeta^{(1)}, -\zeta^{(2)}, e_{23}, e_{31}, e_{12}]^T$$

e vetor

$$\Pi = [\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}, P^{(1)}, P^{(2)}, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{12}]^T$$

pode-se escrever (3.35) como:

$$\mathbf{C}\Pi = \Upsilon. \quad (3.38)$$

Definindo $\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$ pode-se expressar os esforços e as pressões em termos dos deslocamentos:

$$\Pi = \mathbf{S}\Upsilon. \quad (3.39)$$

Chamando S_{ij} as componentes de \mathbf{S} , tem-se:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= S_{11}e_{11} + S_{12}e_{22} + S_{13}e_{33} - S_{14}\zeta^{(1)} - S_{15}\zeta^{(2)} \\ \tau_{22} &= S_{21}e_{11} + S_{22}e_{22} + S_{23}e_{33} - S_{24}\zeta^{(1)} - S_{25}\zeta^{(2)} \\ \tau_{33} &= S_{31}e_{11} + S_{32}e_{22} + S_{33}e_{33} - S_{34}\zeta^{(1)} - S_{35}\zeta^{(2)} \\ P^{(1)} &= S_{41}e_{11} + S_{42}e_{22} + S_{43}e_{33} - S_{44}\zeta^{(1)} - S_{45}\zeta^{(2)} \\ P^{(2)} &= S_{51}e_{11} + S_{52}e_{22} + S_{53}e_{33} - S_{54}\zeta^{(1)} - S_{55}\zeta^{(2)} \\ \tau_{23} &= 2\mu e_{23} \\ \tau_{31} &= 2\mu e_{31} \\ \tau_{12} &= 2\mu e_{12}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

No modelo da dupla porosidade, para um volume elementar V de uma rocha porosa fraturada, tem-se duas frações de volume, correspondentes aos volumes das porosidades primária e secundária:

$$\begin{aligned}\nu^{(1)} &= \frac{V^{(1)}}{V^{(1)} + V^{(2)}} \\ \nu^{(2)} &= \frac{V^{(2)}}{V^{(1)} + V^{(2)}},\end{aligned}\tag{3.41}$$

onde $V^{(1)}$ é o volume correspondente à rocha porosa (não fraturada) e $V^{(2)}$ o volume correspondente às fraturas. Assume-se que $V^{(2)} \ll V^{(1)}$, ou seja, $\nu^{(2)} \ll \nu^{(1)}$. Além disso entende-se que as fraturas são totalmente uma fase de fluido (Berryman e Wang, 1995; Berryman, 1999). Se $\phi^{(1)}$ é a porosidade primária, $\phi^{(2)} = 1$.

Lembrando que as componentes do tensor \mathbf{e} são

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

e

$$\begin{aligned}\zeta^{(1)} &= -(1 - \nu^{(2)})\phi^{(1)}\nabla \cdot \mathbf{w}^{(1)}, \\ \zeta^{(2)} &= -\nu^{(2)}\nabla \cdot \mathbf{w}^{(2)},\end{aligned}$$

derivando com relação ao tempo(t) as equações (3.40) tem-se:

$$\begin{aligned}\tau_{11,t} &= S_{11}v_1 + S_{12}v_2 + S_{13}v_3 + S_{14}(1 - \nu^{(2)})\phi^{(1)}\nabla \cdot \mathbf{q}^{(1)} + S_{15}\nu^{(2)}\nabla \cdot \mathbf{q}^{(2)} \\ \tau_{22,t} &= S_{21}v_1 + S_{22}v_2 + S_{23}v_3 + S_{24}(1 - \nu^{(2)})\phi^{(1)}\nabla \cdot \mathbf{q}^{(1)} + S_{25}\nu^{(2)}\nabla \cdot \mathbf{q}^{(2)} \\ \tau_{33,t} &= S_{31}v_1 + S_{32}v_2 + S_{33}v_3 + S_{34}(1 - \nu^{(2)})\phi^{(1)}\nabla \cdot \mathbf{q}^{(1)} + S_{35}\nu^{(2)}\nabla \cdot \mathbf{q}^{(2)} \\ P_{,t}^{(1)} &= S_{41}v_1 + S_{42}v_2 + S_{43}v_3 + S_{44}(1 - \nu^{(2)})\phi^{(1)}\nabla \cdot \mathbf{q}^{(1)} + S_{45}\nu^{(2)}\nabla \cdot \mathbf{q}^{(2)} \\ P_{,t}^{(2)} &= S_{51}v_1 + S_{52}v_2 + S_{53}v_3 + S_{54}(1 - \nu^{(2)})\phi^{(1)}\nabla \cdot \mathbf{q}^{(1)} + S_{55}\nu^{(2)}\nabla \cdot \mathbf{q}^{(2)} \\ \tau_{23,t} &= \mu(v_{2,3} + v_{3,2}) \\ \tau_{31,t} &= \mu(v_{3,1} + v_{1,3}) \\ \tau_{12,t} &= \mu(v_{1,2} + v_{2,1}).\end{aligned}\tag{3.42}$$

As equações (3.34) e (3.42) constituem o sistema de equações diferenciais de primeira ordem onde as variáveis que tem que ser resolvidas são: as velocidades da partícula \mathbf{v} , \mathbf{q} , as componentes do tensor de esforços τ , a pressão do fluido nos poros($P_f^{(1)}$) e a pressão do fluido nas fraturas ($P_f^{(2)}$).

Estas equações tem a vantagem em relação ao sistema de segunda ordem equivalente (2.38), pois os artefatos numéricos, como a dispersão numérica, é diminuída significativamente. No caso de porosidade simples, quando se escreve as equações de Biot como um

sistema de primeira ordem (vide equação (3.30)) e como mostra Carcione e Quiroga (1996) a presença do modo difusivo (a onda P lenta) faz com que o sistema de equações seja do tipo "rígido" (*stiff*); sistemas para os quais os esquemas numéricos, chamados de explícitos, precisam de um passo de tempo muito pequeno para satisfazer a condição de estabilidade do esquema numérico. Carcione e Quiroga (1996) propõem dois esquemas numéricos explícitos, porém com as características dos esquemas implícitos. No caso da dupla porosidade, onde aparecem dois modos difusivos, espera-se que o sistema de equações seja também do tipo rígido.

4

Os modelos mesoscópicos: saturação parcial, dupla porosidade e o modelo de anisotropia(VTI).

Neste capítulo retoma-se a discussão do mecanismo mesoscópico; quatro modelos mesoscópicos foram analisados no capítulo 2: Anisotropia, saturação parcial, modelos de fraturas e dupla porosidade. No capítulo 2 mostrou-se que os três primeiros modelos são equivalentes no sentido de que explicam as perdas da onda P rápida na faixa de frequências baixas. O modelo mesoscópico com anisotropia (VTI) corresponde a supor que o meio é homogêneo, embora, pelo Teorema de Backus, este modelo é equivalente a um meio heterogêneo, cuja escala das heterogeneidades é muito menor que o comprimento de onda que propaga-se no meio. Um dos objetivos deste capítulo é expressar os modelos de saturação parcial (White-Norris) e do fraturamento (Brajanosky) como um meio efetivo transversalmente isotrópico, isto simplifica o modelamento numérico de tais modelos. Outro objetivo deste capítulo é reescrever as equações do modelo de dupla porosidade, lembrando que tal modelo prediz a existência de uma segunda P lenta, com velocidade muito baixa e altamente atenuada em toda a faixa de frequências. O modelo de dupla porosidade apresentado no capítulo 2 é baseado nos trabalhos de Berrymann et al (2000), Berrymann et al (1995). Esse modelo não consegue explicar as perdas da onda P rápida na faixa das baixas frequências (vide figura 2.22). Um resultado correto deste modelo é que a onda P rápida tem uma atenuação maior que a onda S, resultado contrário ao predito pelas equações de Biot para a porosidade simples (Biot 1956 a). As equações constitutivas e de movimento para a dupla porosidade são reescritas como um problema variacional com condições de fronteira, definindo a dupla porosidade como a superposição de dois meios porosos simples, os dois satisfazendo as equações de Biot (Pride et al 2003).

4.1 O modelo de saturação parcial de White

Na teoria clássica de Biot, um meio poroso é homogêneo na escala macroscópica e na escala mesoscópica. Quando uma onda compressional propaga-se através do meio, gera-se um gradiente de pressão do fluido entre os pontos onde o material é mais suave (maior pressão) aos pontos onde o material é mais rígido (menor pressão). O fluido tenta restabelecer o equilíbrio gerando um fluxo de fluido entre estes pontos. Tal fluxo (macroscópico) significa perdas de energia e atenuação da onda. O fluxo macroscópico como mecanismo de atenuação (chamado de Biot) não consegue explicar as perdas e as atenuações nos experimentos de ultrassom e na faixa das baixas frequências. O tempo necessário para restabelecer o equilíbrio, τ , chamado de tempo de relaxação, é o tempo corresponde ao período da onda propagada no meio. Para um processo difusivo $\tau = L^2/D$ (Pride 2005), é o tempo para que o processo difusivo atinga uma distância L; assumindo que L é a metade do comprimento de onda (λ), ou seja, a distância entre os pontos de maior diferença de pressão: $L \approx \lambda/\sqrt{2\pi}$ e aproxima-se do comprimento de onda pela expressão $\lambda \simeq \sqrt{\frac{H}{\rho}}/f$, onde f é a frequência da onda, D é a chamada difusividade do meio e é expressa por $D \approx M\kappa/\eta$. Conclui-se que a frequência f_B para a qual

$$1/f_B = \tau = \frac{\lambda^2}{2\pi D} = \frac{H}{2\pi D\rho f_B^2},$$

por tanto

$$\omega_B = 2\pi f_B = \frac{H\eta}{M\rho\kappa}. \quad (4.1)$$

A equação (4.1) significa que o pico de atenuação acontece na frequência ω_B , se a viscosidade η do fluido aumenta (ou a permeabilidade da rocha diminui); o pico de atenuação desloca-se às altas frequências, isto significa que a atenuação nas baixas frequências é desprezível (vide figuras 1.8 e 2.2). Esta conclusão contradiz a experiência. O tempo de relaxação τ é: $\tau = \frac{H\pi}{D\rho\omega_B^2}$, onde H é o módulo (undrained) da onda P expresso como: $H = K_u + 4/3\mu$, o que significa que, para baixas frequências, o material tem o tempo suficiente para equilibrar a diferença de pressão por meio do fluxo de fluido; o contrário acontece para altas frequências. Para explicar as perdas na faixa de baixas frequências o mecanismo aceito é o mecanismo das heterogeneidades na escala mesoscópica. White(1975) modela as heterogeneidades da escala mesoscópica, da saturação parcial, por meio de uma geometria de duas bolhas concêntricas de diferentes fluidos (vide figura 4.1). Assume-se que a bolha interna (raio a) está saturada com gás e a externa, de raio b, com outro fluido muito menos compressível que o gás. Para obter as expressões analíticas para a velocidade de fase e a atenuação em termos das frequências, White faz a diferença entre duas situações: quando não existe fluxo de fluido entre as duas bolhas e quando existe este fluxo. No primeiro caso obtém-se um módulo efetivo $M_0 = k_0 + (4/3)\mu_0$, uma densidade do composto $\rho_0 = S_G\rho_1 + (1 - S_G)\rho_2$, de tal

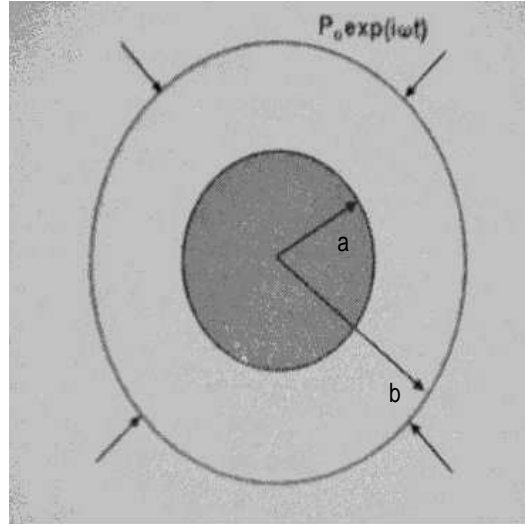


Figura 4.1: Geometria das bolhas preenchidas de diferente fluido para o modelo de saturação parcial de White.

maneira que a velocidade da onda P rápida é:

$$C_{P0} = \sqrt{M_0/\rho_0},$$

e a velocidade da onda S é:

$$C_{S0} = \sqrt{\mu_0/\rho_0}.$$

O módulo k_0 corresponde ao módulo (undrained) do composto, expresso pelo valor $k_0 = (S_G/K_1 + (1 - S_G)/K_2)^{-1}$, onde $S_G = (a/b)^3$ é o volume de gás e $1 - S_G$ o volume do outro fluido contido no anel externo entre as duas bolhas, K_1 o módulo (undrained) do meio poroso preenchido com gás e K_2 o módulo (undrained) do meio poroso preenchido com o outro fluido. No modelo de White se uma pressão P_0 é exercida na superfície exterior, esta pressão gera pressões P_1 e P_2 no interior dos dois corpos, sendo os valores das pressões diferentes, e proporcionais à pressão P_0 . A diferença de pressão gera na interface dos materiais um fluxo de fluido cuja velocidade (White 1975) é:

$$v = \frac{P_1 - P_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (4.2)$$

Z_1 e Z_2 são as impedâncias correspondentes às duas ondas difusivas (ondas lentas: refletida e transmitida) as quais são geradas na interface. Se o fluxo é desde a bolha interior (gás), acontece uma descarga (unloading) e o volume da rocha decresce; no outro meio acontece o contrário. A expansão ou a contração da rocha saturada por um fluido, depende do tipo de fluido. O volume de fluido que passa pela interface entre os dois meios é $4\pi a^2 v/i\omega$, lembrando que a é o raio da esfera interior (saturada de gás) e v a velocidade do fluxo de fluido. Define-se D como uma mudança fracional de volume:

$$D = 4\pi a^2 v/i\omega(Q_2 - Q_1)/(4\pi b^3/3), \quad (4.3)$$

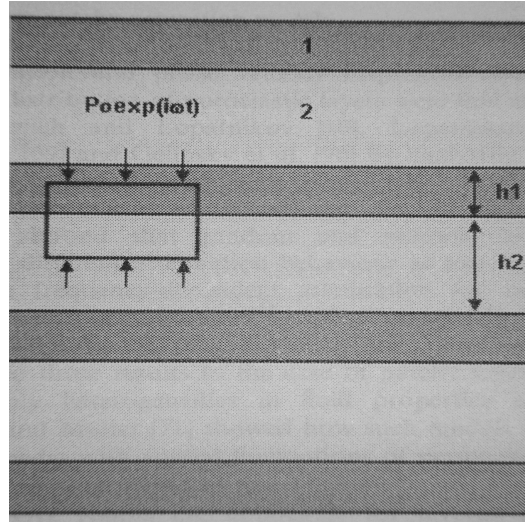


Figura 4.2: Geometria de camadas planas e paralelas preenchidas de diferentes fluidos para o modelo de saturação parcial de White.

A diferença de pressão entre os dois meios é expresso como:

$$\Delta P_0 = k^* D, \quad (4.4)$$

neste caso o módulo volumétrico do composto k^* é complexo, diferenciado-se do módulo k_0 o qual é real e está definido quando não apresenta fluxo de fluido e este módulo é real. O modulo efetivo M^* é complexo no caso da presença de fluxo de fluido: $M^* = k^* + (4/3)\mu^*$. White (1975) mostra que a diferença de pressão ΔP_0 é:

$$\Delta P_0 = \frac{k * (R_1 - R_2) 4\pi a^2 (Q_2 - Q_1) P_0}{(Z_1 + Z_2) i\omega i\omega 4\pi b^3 / 3}, \quad (4.5)$$

definindo

$$W = 3 \frac{(R_1 - R_2) 3a^2 (Q_2 - Q_1) P_0}{(Z_1 + Z_2) i\omega i\omega b^3}$$

pode-se escrever a equação constitutiva anterior como:

$$\Delta P_0 = k^* W P_0 \quad (4.6)$$

As constantes R_1 e R_2 correspondem às constantes de proporcionalidade das pressões induzidas P_1 e P_2 com respeito à pressão P_0 . Elas representam as dilatações (contrações) quando acontece o fluxo de fluido. Z_1 e Z_2 são as impedâncias das ondas difusivas nos dois meios. No caso de homogeneidade os valores R_i são iguais e a diferença de pressão é nula, e portanto o fluxo de fluido é nulo, isto significa que $k^* = k_0$.

Baseando-se nas metodologias de White (1975), Dutta e Odé (1979) e Carcione (2007), encontram-se as expressões para as impedâncias Z_1 e Z_2 para duas geometrias diferentes: bolhas concêntricas saturadas com diferentes fluidos (gás e líquido) e camadas paralelas

de meios porosos saturados com diferentes fluidos (vide figura 4.2). No caso das bolhas concêntricas, a dependência das variáveis como a pressão, os deslocamentos (ou as velocidades da partícula) e os parâmetros poroelásticos são dependentes da distância radial r e, no caso das camadas paralelas, a variável independente é a profundidade z . A ley de Darcy no primeiro caso é expressa como:

$$v = -\frac{\kappa}{\eta} \frac{\partial p_f}{\partial r} \quad (4.7)$$

ou no caso das camadas:

$$v = -\frac{\kappa}{\eta} \frac{\partial p_f}{\partial z}. \quad (4.8)$$

A ley de Hooke para o fluido é:

$$\frac{\partial p_f}{\partial t} = -K_E \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (4.9)$$

derivando a equação 4.7 ou 4.8 em relação à variável independente (r ou z) obtém-se

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\kappa}{\eta} \frac{\partial^2 p_f}{\partial z^2}, \quad (4.10)$$

substituindo $\frac{\partial v}{\partial z}$ obtém-se uma equação de difusão:

$$\frac{\partial^2 p_f}{\partial z^2} = \frac{\eta}{\kappa K_E} \frac{\partial p_f}{\partial t}. \quad (4.11)$$

Uma solução de onda plana desta equação é:

$$p_f(z, t) = A e^{-\gamma z} e^{i\omega t},$$

onde $\gamma = \sqrt{\frac{i\omega\eta}{\kappa K_E}}$ e por tanto $v(z, t) = A(\kappa\gamma/\eta) e^{-\gamma z} e^{i\omega t}$. A relação da pressão com a velocidade da partícula v é a impedancia

$$Z = \sqrt{\eta K_E / i\omega\kappa}. \quad (4.12)$$

Este resultado corresponde ao caso homogêneo, similar ao obtido nos capítulos 1 e 2. Para a geometria das bolhas concêntricas, além da Lei de Darcy, precisa-se resolver o problema de valor de fronteira que devem satisfazer a pressão de fluido e o fluxo de fluido. Dutta e Ode (1979) propõem as seguintes condições para estas variáveis, as quais são dependentes da variável r :

$$\begin{aligned} v(0) &= 0 & p_f(0) &< \infty \\ p_{f1}(a) &= p_{f2}(a) & v_1(a) &= v_2(a) \\ p_{f2}(b) &= -P_0 & v_2(b) &= 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde a é o raio interior da esfera e b o raio da esfera (vide figura 4.1). Os sub índices 1 e 2 significam a bolha interna (1) preenchida com gás ou o anel (2) preenchido de um

líquido. Destas equações pode-se obter as pressões nos dois meios (1 e 2) e as velocidades de fluido (velocidade da partícula) e obter as duas impedâncias Z_1 e Z_2 . Estas impedâncias correspondem às duas ondas P lentas que são geradas na fronteira: uma onda refletida e a outra transmitida (White 1987). A equação de movimento para o fluxo radial é:

$$\frac{\partial p_f}{\partial t} = -K_E \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2}{r}v \right). \quad (4.14)$$

Utilizando a Lei de Darcy (equação 4.7), obtém-se a seguinte equação de movimento para a pressão p_f :

$$\frac{\partial^2 p_f}{\partial r^2} + 2/r \frac{\partial p_f}{\partial r} = \frac{\eta}{\kappa K_E} \frac{\partial p_f}{\partial t}. \quad (4.15)$$

A constante K_E é o módulo volumétrico efetivo, o qual é expresso da seguinte maneira (White 1987):

$$K_E = (\phi/K_f + (1 - \phi)/K_s - \tilde{K}/K_s^2)^{-1}, \quad (4.16)$$

onde os termos correspondem à compressão do fluido, à compressão do sólido devido ao fluido e à compressão da matriz, respectivamente. Supondo, para a equação (4.15), que a dependência funcional do tempo é da forma $e^{i\omega t}$, a equação (4.15) é:

$$\frac{\partial^2 p_f}{\partial r^2} + 2/r \frac{\partial p_f}{\partial r} = \frac{\eta}{\kappa K_E} i\omega p_f. \quad (4.17)$$

A solução desta equação tem a forma $A/re^{\gamma r}$ ou $A/re^{-\gamma r}$. Utilizando as condições de fronteira (4.13) obtém-se a pressão $p_{f1}(r)$, $p_{f2}(r)$, $v_1(r)$ e $v_2(r)$. Destes resultados seguem-se as duas impedâncias Z_1 e Z_2 :

$$Z_1 = \frac{\eta_1 a}{\kappa_1} \left[\frac{1 - e^{-2\gamma_1}}{\gamma_1 a - 1 + (\gamma_1 a + 1)e^{-2\gamma_1 a}} \right] \quad (4.18)$$

$$Z_2 = -\frac{\eta_2 a}{\kappa_2} \left[\frac{\gamma_2 b + 1 + (\gamma_2 b - 1)e^{-2\gamma_1(b-a)}}{(\gamma_2 b + 1)(\gamma_2 a - 1) - (\gamma_2 b - 1)(\gamma_2 a + 1)e^{-2\gamma_2(b-a)}} \right]. \quad (4.19)$$

Estas equações significam que nas interfaces, ao incidir a onda P rápida, aparece a conversão da onda P lenta (uma refletida e a outra transmitida). Este fenômeno, para muitas interfaces gás-líquido, produz atenuação considerável da onda P rápida (White 1987). A seguir se faz a análise do caso de uma geometria de camadas horizontais de meios porosos saturados (vide figura 4.2). White (1976) mostra que as duas situações são equivalentes, no sentido de que o pico de atenuação apresenta-se na faixa das frequências sísmicas. No parágrafo seguinte deduz-se a expressão analítica da frequência correspondente ao pico de atenuação, baseado na dedução da expressão para o módulo volumétrico

$$E = K + 4/3\mu.$$

. Tomando um volume elementar cujas dimensões são o comprimento das camadas d_1 e d_2 , como no caso anterior, aplica-se um esforço vertical no topo e na base do volume elementar

(vide figura 4.2). Assume-se que tal esforço é da forma $\sigma_0 e^{i\omega t}$, o módulo é neste caso

$$E_U = \frac{\sigma_0}{\epsilon}, \quad (4.20)$$

onde ϵ é a deformação vertical e supondo que as deformações nas outras direções são nulas. A deformação ϵ é obtida como a soma de duas deformações: quando não existe fluxo do fluido (ϵ_0) na interface e quando existe fluxo (ϵ_f):

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_f. \quad (4.21)$$

Quando não existe o fluxo a deformação é a media geométrica ponderada pelos comprimentos das camadas (Carcione 2007) :

$$E_0 = \left(\frac{s_1}{E_{U1}} + \frac{s_2}{E_{U2}} \right)^{-1}, \quad (4.22)$$

onde $s_i = \frac{d_i}{d_1+d_2}$, para $i=1,2$ e cada módulo $E_{Gi} = K_{Ui} + (4/3)\mu_i$. Nas baixas frequências, e por que as forças de viscosidade são dominantes sobre as inerciais, o sólido e o fluido movimenta-se conjuntamente, isto significa que o fluxo relativo é nulo (o conteúdo de fluido $\zeta = 0$). Neste caso a Lei de Hooke toma a forma simples:

$$\sigma_0 = E_U \epsilon_{33},$$

onde ϵ é a deformação da matriz. A pressão de fluido p_f é dada por:

$$p_f = M(\zeta + \alpha \epsilon_{33}),$$

se $\zeta = 0$, esta equação é:

$$p_f = M\alpha \epsilon_{33}, \quad (4.23)$$

a relação pressão de fluido-esforço é:

$$-p_f/\sigma_0 = \alpha M/E_u. \quad (4.24)$$

Este quociente tem um valor para cada meio: $r_i = \alpha_i M_i/E_{ui}$, para $i=1,2$. Se ocorre heterogeneidade, temos, pela equação anterior, que existem duas pressões:

$$-p_{fi} = r_i \sigma_0, \quad (4.25)$$

as pressões correspondem à onda P rápida, isto significa que a onda P lenta está ligada ao fluxo de fluido (White 1987, Carcione 2007). Na interfase, se as duas pressões são diferentes, o gradiente de pressão gera fluxo de fluido ($\zeta \neq 0$) e a onda P lenta (difusiva) desloca-se nos dois meios. O fluxo do fluido ocasiona a expansão da matriz (na direção vertical z) e, além disso, na interface o esforço $\sigma_{33} = 0$, ou seja,

$$\sigma_{33} = 0 = E_U \epsilon_{33} - \alpha M \zeta, \quad (4.26)$$

da equação (4.26) obtém-se ζ :

$$\zeta = \frac{E_U \epsilon_{33}}{\alpha M}. \quad (4.27)$$

Baseado nesta equação temos que:

$$p_f/\zeta = M(1 - \alpha^2 M/E_U) = K_E, \quad (4.28)$$

onde K_E é o módulo efetivo do composto.

A equação de difusão obtida acima tem solução geral:

$$p_f = [A_i e^{\gamma z} + B_i e^{-\gamma z}], \quad (4.29)$$

para $i=1,2$. A_i e B_i são constantes em cada camada e seus valores são obtidos das condições de fluxo nulo nos centros das duas camadas (Carcione 2007), ou seja, $\dot{w}(d_1/2) = \dot{w}(-d_2/2) = 0$, onde \dot{w} é a velocidade v do fluxo de fluido e é expressa pela equação (4.8). Substituindo p_f nesta equação obtém-se:

$$v = -\frac{\kappa \gamma}{\eta} [A_i e^{\gamma z} + B_i e^{-\gamma z}] e^{i\omega t} \quad (4.30)$$

Se $v(d_1/2) = 0$, então $B_1 = A_1 e^{\gamma d_1}$ e se $v(-d_2/2) = 0$, então $B_2 = A_2 e^{-\gamma d_2}$. Com estes valores acha-se as duas impedâncias:

$$Z_i = \frac{\eta_i}{\kappa_i \gamma_i}, \quad (4.31)$$

para $i=1,2$. Para estas impedâncias tem-se:

$$p_{f1}^- = Z_1 v$$

e

$$p_{f2}^- = -Z_2 v, \quad (4.32)$$

onde o super índice indica a presença da onda P lenta. Na interface as pressões totais $p_{f1} + p_{f1}^-$ e $p_{f2} + p_{f2}^-$ devem ser iguais e utilizando a equação 4.24 obtém-se a velocidade da partícula

$$v = \dot{w} = \frac{r_2 - r_1}{Z_1 + Z_2} \sigma_0. \quad (4.33)$$

Esta equação é similar à equação (4.2) para a geometria das bolhas concêntricas. Se existe fluxo de fluido do meio 1 para o meio 2, o comprimento da camada 1 decresce e o comprimento da camada 2 aumenta. A quantidade de fluido que flui na fronteira é $U_3^{(m)} = -rv/i\omega$, isto significa uma descarga no meio 1 e uma carga no meio 2. Para cada meio tem-se:

$$U_1 = -r_1 v/i\omega \quad U_2 = r_2 v/i\omega, \quad (4.34)$$

Finalmente o termo ϵ_f da equação (4.21) é:

$$\epsilon_f = 2\left(\frac{U_1 + U_2}{d_1 + d_2}\right) = 2\frac{(r_1 - r_2)^2\sigma_0}{i\omega(d_1 + d_2)(Z_1 + Z_2)}, \quad (4.35)$$

e substituindo em (4.20) obtém-se:

$$E_U = \left[\frac{1}{E_0 + \frac{2(r_2 - r_1)^2}{i\omega(d_1 + d_2)(Z_1 + Z_2)}}\right]^{-1}. \quad (4.36)$$

A equação (4.36) é similar às equações (2.21) e (2.28). A velocidade complexa é então:

$$V = \sqrt{\frac{E_U}{\rho_G}}, \quad (4.37)$$

desta equação obtém-se a velocidade de fase e a atenuação da onda P rápida. Os resultados são similares aos modelos de Norris e Brajanoski mostrados no capítulo dois (vide figuras 2.13, 2.15 e 2.16).

No caso de altas frequências ($\omega \rightarrow \infty$) na equação (4.36) obtém-se $E_{U\infty} = E_0$, ou seja, é um regime de fluxo nulo. Para o regime quasiestático ($\omega \rightarrow 0$) tem-se:

$$E_{U0} = \left[\frac{1}{E_0} + \frac{i(r_1 - r_2)^2}{d_1 + d_2}(d_1/\eta_1 + d_2/\eta_2)\right]^{-1}. \quad (4.38)$$

Finalmente, para obter a frequência que corresponde ao pico de atenuação, seguindo Landau (1983), para um processo difusivo define-se o comprimento l , que é da ordem da dimensão do volume elementar, que, neste caso, são as dimensões das camadas. Se este volume está sujeito ao esforço σ_0 de uma maneira não uniforme, então o tempo requerido para que tal esforço seja uniforme no volume é:

$$\tau = l^2/D, \quad (4.39)$$

Assumindo $\tau = 1/f_c = \frac{l^2}{M\kappa/\eta_1}$ e portanto:

$$f_c \simeq \frac{M\kappa}{l^2\eta_1}. \quad (4.40)$$

Comparando este resultado com a equação (4.1), que corresponde à frequência do pico de atenuação do mecanismo de Biot (fluxo global), observa-se que para o mecanismo de Biot, quando aumenta-se a viscosidade (ou diminui-se a permeabilidade da rocha) o pico desloca-se para altas frequências. Para o mecanismo mesoscópico acontece o contrário (vide figura 1.8 para o mecanismo de Biot, e 2.2 para o mecanismo mesoscópico).

4.2 O modelo de dupla porosidade

Nesta seção aborda-se de novo a discussão do modelo de dupla porosidade como um caso particular dos modelos de heterogeneidade na escala mesoscópica. Uma primeira análise da

dupla porosidade foi feita no capítulo 2 deste trabalho baseado nos trabalhos de Berryman et.al (1995) e Berryman et.al (2000). O resultado fundamental foi a existência de uma segunda onda P lenta, cuja diferença da primeira onda lenta da porosidade simples (Biot 1956 a,b), é que esta onda é dispersiva, altamente atenuada e com velocidade muito menor que a primeira onda P lenta em toda a faixa de frequências (vide figuras 2.20 e 2.24).

As principais objeções à teoria de Biot na sua versão original (Biot 1956 a,b, 1962 a,b) é que a teoria não consegue explicar a atenuação das ondas P e S na faixa de baixas frequências. Além disso, a frequência do pico de relaxação desloca-se às altas frequências quando a viscosidade aumenta ou a permeabilidade diminui. Devido a este fato, nas frequências baixas a atenuação é desprezível. Os modelos que constituem uma extensão da Teoria de Biot procuram dar respostas a estas perguntas; alguns destes modelos foram estudados no capítulo 2 e fornecem respostas satisfatórias: O modelo de saturação parcial de White e desenvolvido por Norris, o modelo de saturação parcial e de fraturas desenvolvido por Brajanosky, o modelo homogêneo embora anisotrópico(VTI). O modelo de dupla porosidade desenvolvido no capítulo 2 não fornece uma resposta satisfatória às objeções. O modelo está baseado na idéia de se ter duas porosidades: primária na escala microscópica e secundária na escala mesoscópica (vide figura 2.17). Nas equações de Biot são acrescentadas duas novas variáveis: uma segunda pressão de poro p_{f2} e uma variação de conteúdo de fluido ζ_2 , variáveis que correspondem à porosidade secundária. No modelo de dupla porosidade como extensão da porosidade simples de Biot, a heterogeneidade mesoscópica é determinada pela litologia (propriedades de partes sólidas diferentes) e os poros saturados por um único fluido (Pride 2005).

4.2.1 Obtenção das equações de movimento e constitutivas para o modelo de dupla porosidade

O modelo de dupla porosidade que é apresentado nesta seção é similar ao apresentado no capítulo 2, embora sua formulação seja um pouco diferente. As equações de movimento e as equações constitutivas são deduzidas como um problema de valor de fronteira. O esquema geral desta formulação é o seguinte:

1. Num volume elementar (V) existem dois meios porosos: Ω_1 , Ω_2 , os quais satisfazem as equações de Biot.
2. Obtém-se a função de Variação de fluxo de energia \dot{E} através das fronteiras dos dois meios. As fronteiras dos meios denota-se como $\partial\Omega_i$, para $i=1,2$ e uma fronteira comum $\partial\Omega_{12}$.
3. Na fronteira comum $\partial\Omega_{12}$ existirá um fluxo de fluido, cuja variação temporal representa-

se como $\dot{\zeta}$. Este fluxo é causado pela diferença de pressão na interface. Este fluxo não é considerado na formulação apresentada no capítulo 2.

4. A função de variação de energia \dot{E} é dividida na energia mecânica reversível: A energia cinética, a energia de deformação \dot{R} e a energia que é dissipada. No contexto do modelo de White (White 1976) é a conversão da onda P lenta na interface.

5. Obtém-se as relações constitutivas do esforço, as pressões em relação às deformações e a variação de conteúdo de fluido, como variáveis macroscópicas.

Seja u_i o deslocamento do sólido no meio poroso i , σ_i o tensor de esforços da fase sólida no meio i , W_i a variação de conteúdo de fluido no meio i e p_{fi} a pressão de fluido. A variação temporal de fluxo de energia é:

$$V\dot{E} = \sum_{i=1}^{i=2} \int_{\partial\Omega_i} [\mathbf{n} \cdot \sigma_i \cdot \mathbf{u}_i - \mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}_i p_{fi}] ds, \quad (4.41)$$

onde $\mathbf{Q}_i = \dot{W}_i$, \mathbf{n} é o vetor normal à superfície $\partial\Omega$ e V o volume elementar total. Quando uma onda de frequência ω incide no meio o efeito na parte sólida é um deslocamento rígido \mathbf{v} e uma deformação $\mathbf{x} \cdot \nabla \mathbf{v}$ (Pride et al 2003 a), portanto

$$\dot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{v} + \mathbf{x} \cdot \nabla \mathbf{v}. \quad (4.42)$$

Para a fase fluida têm-se que a pressão de fluido no meio i é o valor médio de pressão \bar{p}_f e uma variação das forças que atuam nos dois meios: \mathbf{f}_i :

$$p_{fi} = \bar{p}_f + \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}_i, \quad (4.43)$$

onde $\mathbf{f}_i = -\nabla p_{fi} - \rho_f \dot{\mathbf{v}}$, substituindo 4.42 e 4.43 em 4.41 obtém-se

$$V\dot{E} = \sum_{i=1}^{i=2} [\dot{\mathbf{v}} \cdot \int_{\partial\Omega_i} \mathbf{n} \cdot \sigma_i ds + \dot{e} : \int_{\partial\Omega_i} \mathbf{n} \cdot \sigma_i \mathbf{x} ds - p_{fi} \int_{\partial\Omega_i} \mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}_i ds - \nabla p_{fi} \cdot \int_{\partial\Omega_i} \mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}_i \mathbf{x} ds], \quad (4.44)$$

onde

$$\dot{e} = [\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T]/2 \quad (4.45)$$

e : significa a operação de contração de tensores (Pride et.al 2003a). A expressão da variação da energia \dot{E} é agora expressa em termos de variáveis macroscópicas. Pride e Berryman (2003a) mostram que se os volumes relativos dos meios porosos são

$$v_i = V_i/(V_1 + V_2),$$

então pode-se definir um esforço médio dos dois meios porosos:

$$\tilde{\sigma} = v_1 \tilde{\sigma}_1 + v_2 \tilde{\sigma}_2. \quad (4.46)$$

Além disso,

$$\sum_{i=1}^2 \nabla \cdot (v \tilde{\sigma}_i) = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^2 \int_{\partial\Omega_i} \mathbf{n} \cdot \sigma_i ds, \quad (4.47)$$

o primeiro termo da equação (4.45) é então $\mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma})$. Para o segundo termo se as dimensões da heterogeneidade L é tal que $L \ll \lambda$, onde λ é o comprimento de onda, nesse caso tem-se (Pride et.al 2003a):

$$\frac{1}{V} \sum_{i=1}^2 \int_{\partial\Omega_i} \mathbf{n} \cdot \sigma_i \mathbf{x} ds \approx \bar{\sigma}. \quad (4.48)$$

Utilizando a equação 4.48, o segundo termo da equação 4.44 é $\dot{e} : \sigma/2$. Define-se o fluxo macroscópico \mathbf{q}_i como:

$$\mathbf{q}_i = \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega_i} \mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}_i \mathbf{x} ds \quad (4.49)$$

com a hipótese $L \ll \lambda$ pode-se mostrar (Pride et.al 2003a) que

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_i = \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega_i} \mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}_i ds. \quad (4.50)$$

Se existe um gradiente de pressão na fronteira comum $\partial\Omega_{12}$, da mesma maneira que o modelo de White (vide secção anterior), tal gradiente origina um fluxo de fluido; **a diferença dos dois modelos está em que para o modelo de White cada meio é saturado por um fluido diferente e para o modelo de dupla porosidade a heterogeneidade está na litologia, porém os meios são saturados por um mesmo fluido** (Pride 2005).

Define-se a variação de conteúdo de fluido ou o incremento no conteúdo de fluido para o meio 2, supondo que o fluxo é desde o meio 1 até o meio 2 (Pride et al 2003a,b), denominando tal variação como $\dot{\zeta}_{12}$. O ponto acima da variável indica derivada temporal. Esta variável é definida como:

$$\dot{\zeta}_{12} = \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega_{12}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}_1 ds \quad (4.51)$$

A variável acima definida não aparece na primeira formulação da dupla porosidade (vide capítulo 2). Se é aceito o fato da atenuação da onda P (e S) devido a este fluxo de fluido mesoscópico nas fronteiras dos meios porosos diferentes, espera-se que em concordância com os modelos de perdas mesoscópicas de White, Norris, Brajanosky e de anisotropia (VTI) (apresentados no capítulo 2 e na seção anterior deste capítulo), o novo modelo da dupla porosidade apresente resultados similares para a dispersão e atenuação, principalmente da onda P rápida.

O passo seguinte na nova formulação é substituir as definições anteriores na equação (4.44) para obter a expressão da variação da energia em termos de variáveis macroscópicas:

$$\dot{E} = \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}) + \dot{e} : \sigma/2 - (\nabla \cdot \mathbf{q}_1 + \dot{\zeta}_{12}) p_{f1} - (\nabla \cdot \mathbf{q}_2 - \dot{\zeta}_{12}) p_{f2} + \dot{\zeta}_{12} (p_{f1} - p_{f2}) + \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{f}_1 + \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{f}_2, \quad (4.52)$$

O primeiro termo da equação 4.52 corresponde à taxa de variação da energia cinética, o terceiro e quarto termos fazem parte da taxa de variação da energia de deformação (reversível), se existe dissipação de energia pela conversão de modos (onda P rápida em onda P lenta ou fluxo de fluido na interface dos meios porosos) o sexto e sétimo termos significam uma parte da taxa de perda de energia. Se as pressões forem iguais, o termo $\dot{\zeta}_{12}(p_{f1} - p_{f2})$ é nulo. Além disso o fluxo de fluido interno, $\dot{\zeta}$, é, também, nulo e portanto, a taxa de variação de energia é:

$$\dot{E} = \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \bar{\sigma}) + \dot{e} : \sigma / 2 - \nabla \cdot \mathbf{q}_1 p_{f1} - \nabla \cdot \mathbf{q}_2 p_{f1} + \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{f}_1 + \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{f}_2. \quad (4.53)$$

Isto significa que se não existe o fluxo de fluido interno $\dot{\zeta}_{12}$, as perdas de energia são menores.

Para o segundo termo da equação (4.52), o tensor de esforços σ pode ser decomposto em sua parte hidrostática $-p_c \mathbf{I}$ e sua parte antisimétrica (*deviatoric*) σ^D (Pujol 2003), ou seja,

$$\sigma = -p_c \mathbf{I} + \sigma^D, \quad (4.54)$$

e se o tensor σ^D é decomposto na parte elástica σ_e^D e na parte de perdas (viscoelasticidade) σ_v^D (Pride et.al 2003a), isto é,

$$\sigma^D = \sigma_e^D + \sigma_v^D, \quad (4.55)$$

e, fazendo o mesmo para o tensor e (parte isotrópica e deviatoric), temos que:

$$\dot{e} = 1/3 \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{I} + \dot{e}^D,$$

$$\dot{e}^D = 1/2 (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) - 2/3 \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{I}. \quad (4.56)$$

Das definições anteriores, na equação (4.52) pode-se identificar a energia de deformação R (reversível) de maneira que:

$$\dot{R} = \frac{d}{dt} (\bar{\sigma}_e^D : \mathbf{e}^D - \bar{p}_c \nabla \cdot \mathbf{u} - p_{f1} (\nabla \cdot \mathbf{W}_1 + \zeta_{12}) - p_{f2} (\nabla \cdot \mathbf{W}_2 - \zeta_{12})), \quad (4.57)$$

A energia de deformação R é expressa como um potencial escalar de maneira que dR seja uma diferencial exata (Biot 1962a) e, por conseguinte:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_e^D &= \frac{\partial R}{\partial \mathbf{e}^D}, & \bar{p}_c &= \frac{\partial R}{\partial (\nabla \cdot \mathbf{u})}, \\ \bar{p}_{f1} &= \frac{\partial R}{\partial (\nabla \cdot \mathbf{W}_1 + \zeta_{12})}, & \bar{p}_{f2} &= \frac{\partial R}{\partial (\nabla \cdot \mathbf{W}_2 - \zeta_{12})}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

A partir dessas equações são obtidas as relações constitutivas da dupla porosidade:

$$\dot{\sigma}_e^D = \frac{1}{2} G \dot{e}, \quad (4.59)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{p}}_c \\ \dot{\bar{p}}_{f1} \\ \dot{\bar{p}}_{f2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \nabla \cdot \mathbf{q}_1 + \dot{\zeta}_{12} \\ \nabla \cdot \mathbf{q}_2 - \dot{\zeta}_{12} \end{pmatrix}. \quad (4.60)$$

Dos termos que constituem a equação da energia total E , na equação 4.52, identifica-se a taxa de dissipação de energia:

$$D = \dot{\zeta}_{12}(\bar{p}_{f1} - \bar{p}_{f2}) + \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{f}_1 + \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{f}_2 + \bar{\sigma}_v^D : \dot{\mathbf{e}}^D > 0. \quad (4.61)$$

Da análise anterior, ainda precisa-se conhecer a natureza do fluxo de fluido interno ζ_{12} , os fluxos \mathbf{q}_1 , \mathbf{q}_2 e o tensor de viscosidade $\bar{\sigma}_v^D$. No trabalho de Pride et.al (2003b), desenvolve-se a natureza do fluxo de fluido interno e concluem que tal fluxo tem a mesma natureza do fluxo de fluido do modelo de White (vide seção anterior) no sentido de que o fluxo aparece se existe uma diferença de pressão na fronteira dos dois meios; a expressão funcional é :

$$\dot{\zeta} = \Gamma(t) * (p_{f1} - p_{f2}), \quad (4.62)$$

ou, expressa no domínio da frequência:

$$-i\omega\zeta = \Gamma(\omega)(p_{f1} - p_{f2}). \quad (4.63)$$

Para os fluxos \mathbf{q}_1 , \mathbf{q}_2 Berryman et.al (1995) mostram que satisfazem uma Lei de Darcy generalizada, expressa no domínio da frequência:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\eta} \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{12} & \kappa_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla p_{f1} - i\omega\rho_f\mathbf{v} \\ \nabla p_{f2} - i\omega\rho_f\mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (4.64)$$

No caso do tensor de viscosidade $\bar{\sigma}_v^D$, como ele representa perdas de energia ou dissipação, no domínio da frequência, é uma variável complexa, expressa como:

$$\bar{\sigma}_v^D(\omega) = F(\omega)\dot{\mathbf{e}}, \quad (4.65)$$

onde F é uma função de variável complexa (Pride et.al 2003a).

Da equação (4.60) obtém-se que:

$$\begin{pmatrix} \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \nabla \cdot \mathbf{q}_1 \\ \nabla \cdot \mathbf{q}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\bar{p}}_c \\ \dot{\bar{p}}_{f1} \\ \dot{\bar{p}}_{f2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\zeta}_{12} \\ \dot{\zeta}_{12} \end{pmatrix}. \quad (4.66)$$

O termo G da equação (4.59) é o conhecido parâmetro de Lamé μ . Na teoria da poroelasticidade de Biot (Biot 1941), tal parâmetro é independente do fluido que preenche os poros do material: $\mu = \mu_{dry} = \mu_s$; na teoria da dupla porosidade (Pride et.al 2003a,b) este parâmetro é dependente da frequência, devido ao tipo de fluido: $\mu(\omega) \neq \mu_{dry} = \mu_s$. No trabalho de Pride et.al (2003a), afirma-se (embora não demonstre-se) que as funções complexas $F(\omega)$

e $G(\mu)(\omega)$ são uma a Transformada de Hilbert da outra. Os parâmetros poroelásticos a_{ij} são expressos em termos dos módulos de incompressibilidade K , K_i e dos coeficientes de Biot Willis α_i . Para completar o conjunto de equações que descrevem o modelo da dupla porosidade, precisa-se da equação da conservação do momento linear:

$$\nabla \cdot \bar{\sigma}^D - \nabla \bar{p}_c = \rho \dot{\mathbf{v}} + \rho_f \dot{\mathbf{q}}_1 + \rho_f \dot{\mathbf{q}}_2, \quad (4.67)$$

onde o efeito da gravidade é desprezado. A equação (4.67) expressa no domínio da frequência é:

$$\nabla \cdot \bar{\sigma}^D - \nabla \bar{p}_c = -i\omega(\rho \mathbf{v} + \rho_f \mathbf{q}_1 + \rho_f \mathbf{q}_2), \quad (4.68)$$

onde ρ é a densidade média do composto (sólido-fluido) nos dois meios porosos e ρ_f a densidade do único fluido que preenche os dois meios.

O modelo de dupla porosidade está representado pelas seguintes equações no domínio da frequência:

Equações de movimento e Lei de Darcy:

$$\nabla \cdot \bar{\sigma}^D - \nabla \bar{p}_c = -i\omega(\rho \mathbf{v} + \rho_f \mathbf{q}_1 + \rho_f \mathbf{q}_2), \quad (4.69)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\eta} \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{12} & \kappa_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla p_{f1} - i\omega \rho_f \mathbf{v} \\ \nabla p_{f2} - i\omega \rho_f \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad (4.70)$$

as equações constitutivas:

$$\begin{pmatrix} \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \nabla \cdot \mathbf{q}_1 \\ \nabla \cdot \mathbf{q}_2 \end{pmatrix} = i\omega \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{p}_c \\ \bar{p}_{f1} \\ \bar{p}_{f2} \end{pmatrix} + i\omega \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_{12} \\ -\zeta_{12} \end{pmatrix}, \quad (4.71)$$

e as equações (4.59) e (4.65) que podem ser escritas como:

$$-i\omega \bar{\sigma}^D = [G - i\omega F][\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T - 2/3 \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{I}], \quad (4.72)$$

onde \mathbf{I} é o tensor unidade isotrópico.

A seguir, baseado nestas equações, obtém-se as relações de dispersão para o modelo da dupla porosidade e, a partir destas relações, determina-se a dispersão e atenuação das ondas que propagam-se no meio.

O primeiro passo consiste em escrever a equação (4.71) da seguinte maneira, no domínio do tempo:

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{p}}_c \\ \dot{\bar{p}}_{f1} \\ \dot{\bar{p}}_{f2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \nabla \cdot \mathbf{q}_1 + \dot{\zeta}_{12} \\ \nabla \cdot \mathbf{q}_2 - \dot{\zeta}_{12} \end{pmatrix}, \quad (4.73)$$

onde $[c_{ij}] = [a_{ij}]^{-1}$.

Desta equação obtém-se:

$$\dot{\tilde{p}}_c = -c_{11}\nabla\cdot\mathbf{v} - c_{12}\nabla\cdot\mathbf{q}_1 - c_{13}\nabla\cdot\mathbf{q}_2 + (c_{13} - c_{12})\dot{\zeta}_{12}. \quad (4.74)$$

Além disso, o tensor *deviatoric* σ^D é:

$$\sigma^D = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - p_c & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{zz} - p_c \end{pmatrix},$$

e portanto

$$\nabla\cdot\sigma^D = [\sigma_{xx,x} - p_{c,x} + \sigma_{xz,z}, \sigma_{zz,z} - p_{c,z} + \sigma_{xz,x}]^T$$

obtendo-se então:

$$\nabla\cdot\sigma^D - \nabla p_c = [\sigma_{xx,t} + \sigma_{xz,z}, \sigma_{zz,z} + \sigma_{xz,x}]^T. \quad (4.75)$$

Baseando-se nestas equações pode-se escrever a equação (4.72) no domínio do tempo como:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx,t} - \dot{p}_c & \sigma_{xz,t} \\ \sigma_{xz,t} & \sigma_{zz,t} - \dot{p}_c \end{pmatrix} = H(t) * \begin{pmatrix} 4/3v_{x,x} - 2/3v_{z,z} & v_{x,z} + v_{z,x} \\ v_{x,z} + v_{z,x} & 4/3v_{z,z} - 2/3v_{x,x} \end{pmatrix}. \quad (4.76)$$

Substituindo (4.74) em (4.76), obtém-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx,t} &= H * (4/3v_{x,x} - 2/3v_{z,z}) - c_{11}\nabla\cdot\mathbf{v} - c_{12}\nabla\cdot\mathbf{q}_1 - c_{13}\nabla\cdot\mathbf{q}_2 + (c_{13} - c_{12})\dot{\zeta}_{12} \\ \sigma_{zz,t} &= H * (4/3v_{z,z} - 2/3v_{x,x}) - c_{11}\nabla\cdot\mathbf{v} - c_{12}\nabla\cdot\mathbf{q}_1 - c_{13}\nabla\cdot\mathbf{q}_2 + (c_{13} - c_{12})\dot{\zeta}_{12} \\ \sigma_{xz,t} &= H * (v_{x,z} + v_{z,x}) \\ p_{f1,t} &= -c_{12}\nabla\cdot\mathbf{v} - c_{22}\nabla\cdot\mathbf{q}_1 - c_{23}\nabla\cdot\mathbf{q}_2 + (c_{23} - c_{22})\dot{\zeta}_{12} \\ p_{f2,t} &= -c_{13}\nabla\cdot\mathbf{v} - c_{23}\nabla\cdot\mathbf{q}_1 - c_{33}\nabla\cdot\mathbf{q}_2 + (c_{33} - c_{23})\dot{\zeta}_{12}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

O passo seguinte é levar as equações (4.77) para o domínio (ω, \mathbf{K}) , onde $\mathbf{K} = (k_x, k_z)$ é o vetor de onda, definir os vetores: $\mathbf{T} = [\sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}, p_{f1}, p_{f2}]^T$, o vetor $\mathbf{V} = [v_x, v_z, q_x^{(1)}, q_z^{(1)}, q_x^{(2)}, q_z^{(2)}]^T$, e as matrizes:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\varsigma(\omega)(c_{13}-c_{12})}{i\omega} & \frac{\varsigma(\omega)(c_{12}-c_{13})}{i\omega} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\varsigma(\omega)(c_{13}-c_{12})}{i\omega} & \frac{\varsigma(\omega)(c_{12}-c_{13})}{i\omega} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{\varsigma(\omega)(c_{23}-c_{22})}{i\omega} & \frac{\varsigma(\omega)(c_{22}-c_{23})}{i\omega} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\varsigma(\omega)(c_{33}-c_{23})}{i\omega} & 1 + \frac{\varsigma(\omega)(c_{23}-c_{33})}{i\omega} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} (\frac{4}{3}H - c_{11})k_x & -(\frac{2}{3}H + c_{11})k_z & -c_{12}k_x & -c_{12}k_z & -c_{13}k_x & -c_{13}k_z \\ -(\frac{2}{3}H + c_{11})k_z & (\frac{4}{3}H - c_{11})k_x & -c_{12}k_x & -c_{12}k_z & -c_{13}k_x & -c_{13}k_z \\ Hk_z & Hk_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_{12}k_x & -c_{12}k_z & -c_{22}k_x & -c_{22}k_z & -c_{23}k_x & -c_{23}k_z \\ -c_{13}k_x & -c_{13}k_z & -c_{23}k_x & -c_{23}k_z & -c_{33}k_x & -c_{33}k_z \end{pmatrix},$$

então as equações constitutivas (4.77) no domínio (ω, \mathbf{K}) são:

$$-\omega \mathbf{RT} = k \mathbf{CV}. \quad (4.78)$$

Utilizando a equação (4.75), e definindo as matrizes \mathbf{S} e \mathbf{M} :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & \rho_f & 0 & \rho_f & 0 \\ 0 & \rho & 0 & \rho_f & 0 & \rho_f \\ -\rho_f & 0 & \frac{\eta \kappa_{22}}{Di\omega} & 0 & -\frac{\eta \kappa_{12}}{Di\omega} & 0 \\ 0 & -\rho_f & 0 & \frac{\eta \kappa_{22}}{Di\omega} & 0 & -\frac{\eta \kappa_{12}}{Di\omega} \\ -\rho_f & 0 & -\frac{\eta \kappa_{12}}{Di\omega} & 0 & \frac{\eta \kappa_{11}}{Di\omega} & 0 \\ 0 & -\rho_f & 0 & -\frac{\eta \kappa_{12}}{Di\omega} & 0 & \frac{\eta \kappa_{11}}{Di\omega} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} k_x & 0 & k_z & 0 & 0 \\ 0 & k_z & k_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa_{11} k_x}{\eta} & \frac{\kappa_{12} k_x}{\eta} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa_{11} k_z}{\eta} & \frac{\kappa_{12} k_z}{\eta} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa_{12} k_x}{\eta} & \frac{\kappa_{22} k_x}{\eta} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa_{12} k_z}{\eta} & \frac{\kappa_{22} k_z}{\eta} \end{pmatrix},$$

onde $D = \kappa_{11} \kappa_{22} - \kappa_{12}^2$, as equações de movimento e Lei de Darcy (4.69, 4.70) podem ser escritas como:

$$-\omega \mathbf{SV} = k \mathbf{MT}. \quad (4.79)$$

Das equações (4.78) e (4.79) pode-se obter a relação de dispersão expressa como:

$$|\mathbf{S}^{-1} \mathbf{MR}^{-1} \mathbf{C} - \lambda^2 \mathbf{I}| = 0, \quad (4.80)$$

onde $\lambda = \frac{\omega}{k}$. A relação de dispersão é um polinômio em λ^2 de ordem 6 (a dimensão do vetor \mathbf{V}). Utilizando a hipótese de que o meio de dupla porosidade é isotrópico, pode-se simplificar a expressão da relação de dispersão como se mostra a seguir. Se \mathbf{K} é o vetor de onda e se todas as direções são equivalentes, pode-se tomar uma em particular $\mathbf{K} = (k_x, 0)$. Assim, as matrizes \mathbf{C} e \mathbf{M} são simplificadas:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 \\ c_4 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & c_6 & 0 & c_7 & 0 \\ c_3 & 0 & c_7 & 0 & c_8 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 & m_2 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 & m_2 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & m_3 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & m_3 \end{pmatrix},$$

onde $c_1 = 4/3H - c_{11}$, $c_2 = -c_{12}$, $c_3 = -c_{13}$, $c_4 = -(2/3H + c_{11})$, $c_5 = H$, $c_6 = -c_{22}$, $c_7 = -c_{23}$, $c_8 = -c_{33}$.

Além disso:

$m_1 = \frac{\kappa_{11}}{\eta}$, $m_2 = \frac{\kappa_{12}}{\eta}$, $m_3 = \frac{\kappa_{22}}{\eta}$, e reescrevendo as matrizes \mathbf{R} , \mathbf{S} como:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & A & -A \\ 0 & 1 & 0 & A & -A \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B & D \\ 0 & 0 & 0 & E & F \end{pmatrix}$$

onde $A = \frac{\varsigma(\omega)(c_{13}-c_{12})}{i\omega}$, $B = 1 + \frac{\varsigma(\omega)(c_{23}-c_{22})}{i\omega}$, $E = \frac{\varsigma(\omega)(c_{33}-c_{23})}{i\omega}$ e $F = 1 + \frac{\varsigma(\omega)(c_{23}-c_{33})}{i\omega}$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & \rho_f & 0 & \rho_f & 0 \\ 0 & \rho & 0 & \rho_f & 0 & \rho_f \\ -\rho_f & 0 & s_1 & 0 & s_2 & 0 \\ 0 & -\rho_f & 0 & s_1 & 0 & s_2 \\ -\rho_f & 0 & s_2 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & -\rho_f & 0 & s_2 & 0 & s_3 \end{pmatrix}$$

sendo $s_1 = \frac{\eta\kappa_{22}}{Di\omega}$, $s_2 = -\frac{\eta\kappa_{12}}{Di\omega}$ e $s_3 = \frac{\eta\kappa_{11}}{Di\omega}$.

Na matriz \mathbf{R} eliminando a linha 3 e a coluna 3, isso significa eliminar o termo σ_{xz} do vetor \mathbf{T} . Na matriz \mathbf{C} eliminando a linha 3 e a coluna 4, o que significa eliminar as componentes "z" do vetor \mathbf{V} . As operações anteriores redefinem as matrizes \mathbf{R}_p e \mathbf{C}_p :

$$\mathbf{R}_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & A & -A \\ 0 & 1 & A & -A \\ 0 & 0 & B & D \\ 0 & 0 & E & F \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_p = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_6 & c_7 \\ c_3 & c_7 & c_8 \end{pmatrix}.$$

e os vetores \mathbf{T}_p e \mathbf{V}_p como:

$$\mathbf{T}_p = \left(\sigma_{xx} \quad \sigma_{zz} \quad p_{f1} \quad p_{f2} \right)^T,$$

$$\mathbf{V}_p = \left(v_x \quad q_x^{(1)} \quad q_x^{(2)} \right)^T.$$

Assim pode-se escrever as relações constitutivas (4.78) como:

$$-\omega \mathbf{R}_p \mathbf{T}_p = k \mathbf{C}_p \mathbf{V}_p. \quad (4.81)$$

Da mesma maneira, reescrevendo as equações de movimento e Lei de Darcy (4.79) como:

$$-\omega \mathbf{S}_p \mathbf{V}_p = k \mathbf{M}_p \mathbf{T}_p, \quad (4.82)$$

onde

$$\mathbf{S}_p = \begin{pmatrix} \rho & \rho_f & \rho_f \\ -\rho_f & s_1 & s_2 \\ -\rho_f & s_2 & s_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & m_2 \\ 0 & 0 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}.$$

O sub índice p faz referência às ondas compressoriais P. Portanto, desacopla-se o sistema de equações nas componentes compressoriais e a componente de cisalhamento S. Para uma onda que propaga-se na direção x , obtém-se as relações de dispersão para as componentes x das velocidades da partícula. Finalmente pode-se escrever as relações de dispersão para as ondas compressoriais como:

$$|\mathbf{S}_p^{-1} \mathbf{M}_p \mathbf{R}_p^{-1} \mathbf{C}_p - \lambda^2 \mathbf{I}| = 0, \quad (4.83)$$

esta relação de dispersão é um polinômio em λ^2 de ordem 3.

Três modos ou três soluções de (4.83) existem; as duas primeiras soluções desta equação correspondem às ondas compressoriais da Teoria de Biot Clássica (a onda P rápida e a onda P lenta) e a terceira é a segunda onda P lenta. Neste caso a formulação do modelo da dupla porosidade coincide com o modelo de dupla porosidade desenvolvido no capítulo 2. A diferença principal entre as duas formulações é o chamado fluxo interno ζ_{12} (vide equação 4.63). No trabalho de Pride et.al (2003b) encontra-se a expressão deste termo:

$$-i\omega\zeta = \varsigma(\omega)(p_{f1} - p_{f2}), \quad (4.84)$$

onde

$$\varsigma(\omega) = \Upsilon_0 \sqrt{1 - i \frac{\omega}{\omega_c}}. \quad (4.85)$$

Pride et.al (2003b) demonstram que o fator Υ_0 depende da geometria mesoscópica, isto é, da forma das duas fases porosas, supondo que a fase porosa 2 é uma inclusão esférica de raio r no interior da fase porosa 1, que, por sua vez, é uma esfera de raio R . Nesse caso Pride et.al encontram que:

$$\Upsilon_0 = \frac{\nu^{(1)} \kappa_1}{\eta L_1}. \quad (4.86)$$

Para a geometria das duas esferas concêntricas a fração de volume da inclusão é:

$$\nu^{(2)} = \left(\frac{r}{R}\right)^3, \quad (4.87)$$

e $\nu^{(1)} + \nu^{(2)} = 1$. O parâmetro L_1 é uma distância sobre a qual existe o gradiente de pressão na fase porosa 1 e é expressa como (Pride et.al 2003b):

$$L_1 \approx \frac{9}{14} r^2 (\nu^{(2)})^{-2/3} \left[1 - \frac{7}{6} r^2 (\nu^{(2)})^{1/3} \right]. \quad (4.88)$$

Finalmente, a frequência ω_c na equação (4.85) corresponde à frequência de relaxação no regime de altas frequências para a qual a difusão da pressão de fluido é pequena relativa à escala da heterogeneidade mesoscópica (Pride 2005) e é dada por (Pride et.al 2003b):

$$\omega_c = \frac{\eta B_1 K_1}{\kappa_1 \alpha_1} \left(\frac{V \Upsilon_0}{S} \right)^2 \left(1 + \sqrt{\frac{\kappa_1 B_2 K_2 \alpha_1}{\kappa_2 B_1 K_1 \alpha_2}} \right)^2, \quad (4.89)$$

onde

$$\frac{V}{S} = \frac{R^3}{3r^2}.$$

A expressão (4.85) no domínio temporal (t) deve ser uma função causal ou seja: $\Gamma(t) = 0$ quando $t < 0$, o que significa que $\Gamma(\omega)^* = \Gamma(-\omega)$, o que é satisfeita pela equação (4.85).

O interesse fundamental deste trabalho e, especificamente do modelo de dupla porosidade apresentado nesta seção, é obter as perdas e a dispersão da onda P rápida mesmo que o modelo da dupla porosidade prediga a existência da segunda onda P lenta. Do conjunto de equações constitutivas e de movimento (Biot-Newton) pode-se obter um meio efetivo de porosidade simples. Isto é possível supondo que o meio poroso 2 está completamente contido no meio 1, significando que o fluxo \mathbf{q}_2 é nulo no exterior do volume da fase 2. Na equação (4.73) pode-se obter p_{f2} e as equações constitutivas e de movimento que são expressas em termos das variáveis \mathbf{v} , σ , \mathbf{q}_1 e p_{f1} que correspondem às variáveis da porosidade simples. Se $\mathbf{q}_2 = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{q}_2 = 0$, as equações de movimento e equações constitutivas são (vide equações 4.69-4.71):

$$\nabla \cdot \bar{\sigma}^D - \nabla \bar{p}_c = -i\omega(\rho \mathbf{v} + \rho_f \mathbf{q}_1), \quad (4.90)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\eta} \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{12} & \kappa_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla p_{f1} - i\omega \rho_f \mathbf{v} \\ \nabla p_{f2} - i\omega \rho_f \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad (4.91)$$

e as equações constitutivas:

$$\begin{pmatrix} \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \nabla \cdot \mathbf{q}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = i\omega \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{p}_c \\ \bar{p}_{f1} \\ \bar{p}_{f2} \end{pmatrix} + i\omega \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_{12} \\ -\zeta_{12} \end{pmatrix}. \quad (4.92)$$

Da segunda equação (4.91) pode-se obter:

$$\nabla p_{f2} = \frac{\kappa_{12}}{\kappa_{22}} (\nabla p_{f1} - i\omega \rho_f \mathbf{v}) + i\omega \rho_f \mathbf{v}, \quad (4.93)$$

e da terceira equação (4.92) obtém-se:

$$p_{f2} = \frac{-a_{13} \bar{p}_c - a_{23} \bar{p}_{f1} + \zeta_{12}}{a_{33}}. \quad (4.94)$$

Substituindo (4.93) na primeira equação (4.91) e (4.94) nas duas primeiras equações (4.92) obtém-se um meio efetivo de porosidade simples embora os módulos poroelásticos sejam dependentes da frequência. Estes módulos são o módulo de Gassman K_u , o módulo Skempton B e o módulo volumétrico de drenagem K_{dry} . As expressões destes módulos são (Pride et.al 2004):

$$K_{dry} = (a_{11} - \frac{a_{13}^2}{a_{33} - \gamma/i\omega})^{-1}, \quad (4.95)$$

$$B = \frac{-a_{12}(a_{33} - \gamma/i\omega) + a_{13}(a_{23} - \gamma/i\omega)}{(a_{22} - \gamma/i\omega)(a_{33} - \gamma/i\omega) - (a_{23} + \gamma/i\omega)^2} \quad (4.96)$$

$$K_u = (\frac{1}{K_{dry}} + B(a_{12} - \frac{a_{13}(a_{23} + \gamma/i\omega)}{a_{33} - \gamma/i\omega}))^{-1} \quad (4.97)$$

Uma consequência das equações anteriores é o parâmetro de Biot-Willis α que é também dependente da frequência:

$$\alpha(\omega) = [1 - K_{dry}/K_u(\omega)]/B(\omega). \quad (4.98)$$

Ao final o sistema de equações de movimento, a Lei de Darcy, e as equações constitutivas para o meio efetivo de porosidade simples é:

$$\nabla \cdot \bar{\sigma}^D - \nabla \bar{p}_c = -i\omega(\rho \mathbf{v} + \rho_f \mathbf{q}_1), \quad (4.99)$$

$$\mathbf{q}_1 = -\frac{\kappa(\omega)}{\eta} (\nabla \bar{p}_{f1} - i\omega \rho_f \mathbf{v}), \quad (4.100)$$

$$\begin{pmatrix} \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \nabla \cdot \mathbf{q}_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{i\omega K_{dry}} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ -\alpha & \alpha/B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{p}_c \\ \bar{p}_{f1} \end{pmatrix} \quad (4.101)$$

$$-i\omega \zeta_{12} = \gamma(\omega)(\bar{p}_{f1} - \bar{p}_{f2}), \quad (4.102)$$

onde \bar{p}_{f2} é expressa pela equação (4.94) e

$$-i\omega \bar{\sigma}^D = [G - i\omega F][\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T - 2/3 \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{I}]. \quad (4.103)$$

O conjunto de equações (4.94 - 4.103) constituem as equações de Biot levando em conta o fluxo de fluido interno ζ_{12} . Para obter as relações de dispersão para as ondas que propagam-se no meio equivalente efetivo, precisa-se dos parâmetros poroelásticos H , C e M (vide capítulo 1) com relação aos parâmetros K_u , K_{dry} e B :

$$H(\omega) = K_u(\omega) + \frac{4}{3}G, \quad (4.104)$$

$$C(\omega) = B(\omega)K_u(\omega), \quad (4.105)$$

$$M(\omega) = \frac{B^2}{1 - K_{dry}/K_u} K_u(\omega). \quad (4.106)$$

Levando as equações (4.99 - 4.103) ao domínio (ω, \mathbf{K}) obtém-se a expressão da velocidade (complexa) para as ondas P:

$$V^2 = \frac{1}{b \pm \sqrt{b^2 - \frac{\rho \tilde{\rho}}{MH - C^2}}}, \quad (4.107)$$

onde

$$\begin{aligned} b &= \frac{\rho M + \tilde{\rho} H - 2\rho_f}{2(MH - C^2)}, \\ \rho &= (1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f, \\ \tilde{\rho} &= -\frac{\eta}{i\omega\kappa(\omega)}. \end{aligned} \quad (4.108)$$

Na formulação da dupla porosidade, o fluxo interno ζ tem um papel fundamental na dispersão e atenuação, principalmente da onda P rápida. Pela equação (4.84), este fluxo depende da diferença de pressão entre os meios, ou seja, do contraste na litologia e da função de variável complexa γ , a qual depende da frequência ω_c . Do valor da frequência ω_c depende a natureza do fluxo de fluido γ . Da equação (4.89) pode-se deduzir que esta frequência depende principalmente de duas coisas: o contraste na litologia, expresso pelo quociente $\frac{\kappa_1 B_2 K_2 \alpha_1}{\kappa_2 B_1 K_1 \alpha_2}$ e da relação Volume - Área, $V/S = R^3/3r^2$, quando o modelo de dupla porosidade é constituído de duas esferas concêntricas, na qual a esfera interna de raio r representa o meio poroso 2, que é assumido muito menos consolidado que o meio 1 (Pride et.al 2004) e o anel externo de raio R representa o meio poroso 1. A seguir mostra-se graficamente a dependência funcional da frequência ω_c e a variável γ com respeito ao quociente V/S ; o quociente V/S pode ser expresso em termos da magnitude do raio R da esfera externa e da fração do volume elementar $V^{(1)}$. No caso limite, quando $r \rightarrow 0$, todos os parâmetros dependentes da frequência tomam um valor constante. Isto representa **um modelo de porosidade simples e parâmetros independentes da frequência** ou seja a **a Teoria de Biot Clássica**. Se $r \rightarrow 0$ implica que $V/S \rightarrow \infty$ o que significa que $\omega_c \rightarrow \infty$, o que na prática corresponde ao pico de relaxação de Biot nas altas frequências. Finalmente pode-se afirmar que no limite quando desaparece a inclusão (o meio poroso 2), desaparece o fluxo de fluido γ . Nas figuras seguintes são mostradas estas afirmações.

A forte dependência da frequência ω_c e, portanto, do fluxo de fluido da fração V/S é clara. Quanto maior for o quociente V/S ou seja, $V^{(1)} \rightarrow 1$ ($V^{(2)} \rightarrow 0$), a frequência ω_c faz-se muito grande e a amplitude do fluxo de fluido tende a zero (vide figuras 4.3 - 4.5). Isto traz como consequência que para as ondas de Biot, e em particular da onda P rápida, vai haver perdas. Quanto maior o fluxo de fluido, ou seja, quando a inclusão que corresponde ao meio poroso 2 aumenta, maior são as perdas da onda P rápida. Além disso esta onda será também dispersiva.

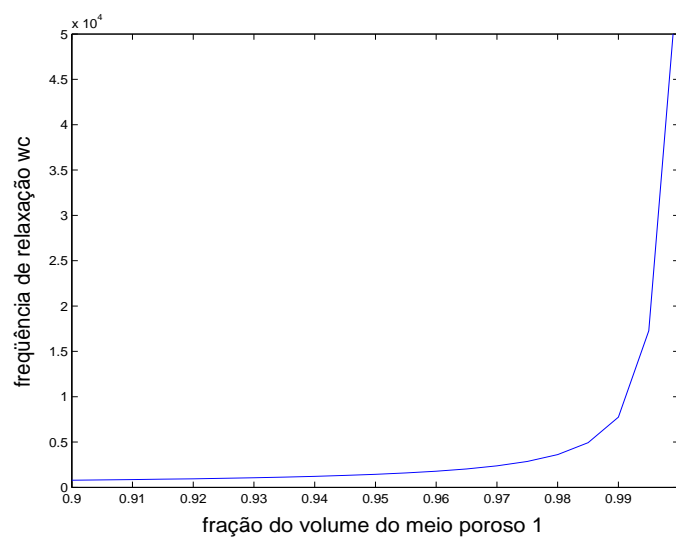


Figura 4.3: A frequência de relaxação ω_c em função da fração de volume $V^{(1)}$.

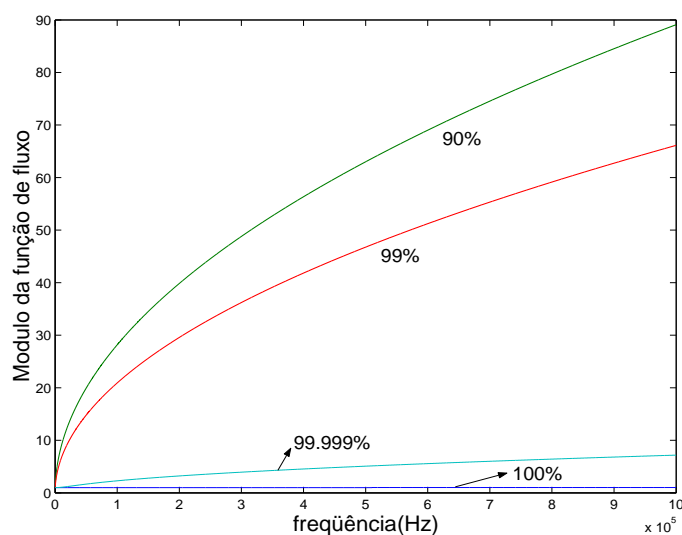


Figura 4.4: Magnitude do fluxo de fluido γ em função da frequência para diferentes valores da fração de volume $V^{(1)}$ do meio poroso 1.

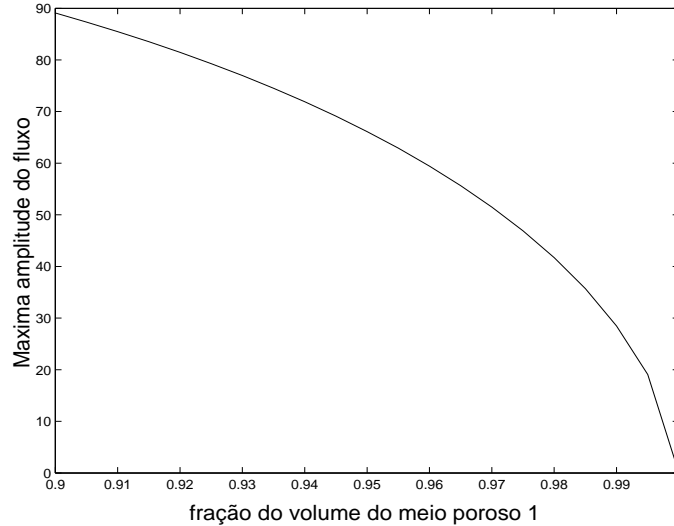


Figura 4.5: Valor máximo da magnitude do fluxo de fluido em função da fração de volume $V^{(1)}$ do meio poroso 1.

Faz-se necessário esclarecer que a geometria utilizada para a formulação da dupla porosidade é de duas bolhas concêntricas de raios R e r (vide figura 4.1). O volume correspondente ao meio poroso 1 (muito mais consolidado) é o volume do anel exterior cujo volume é $\frac{4\pi}{3}(R^3 - r^3)$ e o volume do meio poroso (a inclusão) 2 é $\frac{4\pi}{3}(r^3)$ e $\frac{4\pi}{3}(R^3)$. O volume total representativo, e portanto, a escala mesoscópica, neste caso, é o raio R da esfera exterior. Então temos que:

$$V^{(1)} = \frac{(R^3 - r^3)}{R^3}$$

$$V^{(2)} = \frac{r^3}{R^3}.$$

Destas equações obtém-se r em termos do raio R e a fração de volume do meio poroso 1:

$$r = R\sqrt[3]{1 - V^{(1)}}. \quad (4.109)$$

Em todos os experimentos numéricos desta seção utiliza-se a relação anterior. Nas figuras a seguir mostra-se o resultado de vários experimentos numéricos nos quais o valor da fração de volume $V^{(1)}$ varia na faixa de 0.95 (exagero no volume da inclusão) até 1 (apenas um meio poroso). Os resultados obtidos para a dispersão e a atenuação em função do volume $V^{(1)}$ é apenas para as ondas compressionais. Para a onda S, cuja natureza depende do tensor $\sigma^{(D)} = \sigma_e^{(D)} + \sigma_v^{(D)}$ (vide equações 4.55 e 4.65), a componente "viscosa" depende da variabilidade na frequência do parâmetro de Lamé μ . Neste trabalho assume-se que $\mu = \mu_{dry}$, isto significa que a variável $F(\omega)$ da equação (4.65) é nula. Das figuras 4.6 a 4.8 deduz-se que o modelo da dupla porosidade com fluxo interno prediz as perdas na escala mesoscópica e as perdas do fluxo global ou fluxo de Biot. Comparando as figuras 4.6 e 4.7 para os dois casos extremos no valor da fração de volume $V^{(1)}$, o pico de Biot permanece quase fixo para todos

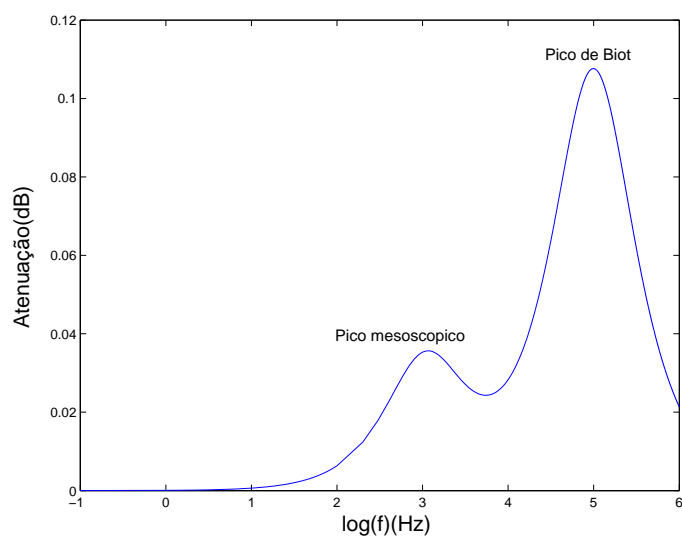


Figura 4.6: Atenuação da onda P rápida em função da frequência para uma fração de volume do meio poroso 1 $V^{(1)} = 0.99$.

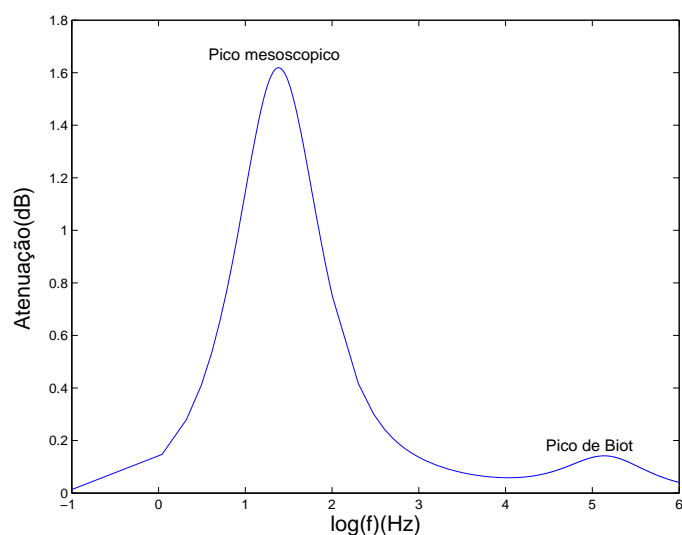


Figura 4.7: Atenuação da onda P rápida em função da frequência para uma fração de volume $V^{(1)} = 0.95$ do meio poroso 1.

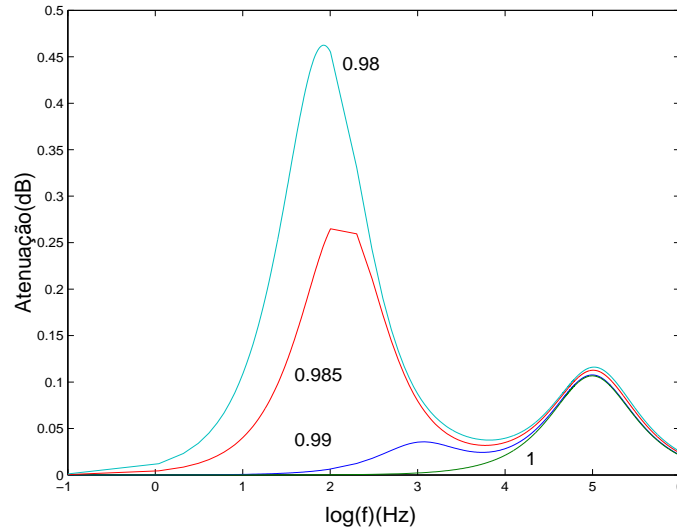


Figura 4.8: Atenuação da onda P rápida em função da frequência para diferentes valores da fração de volume $V^{(1)}$ do meio poroso 1.

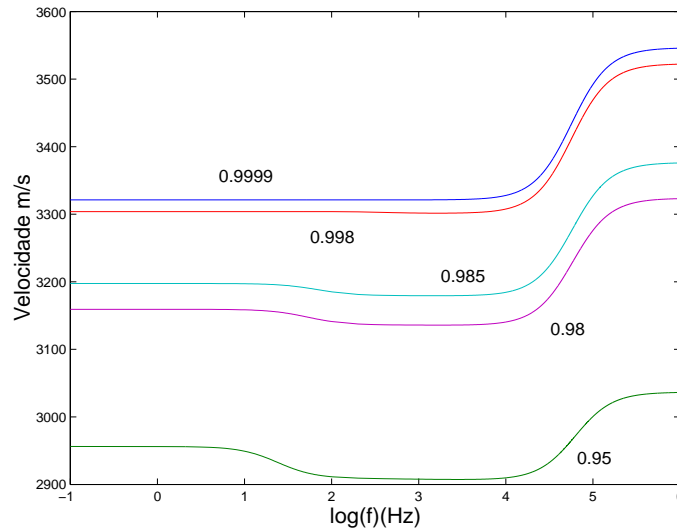


Figura 4.9: Dispersão da onda P rápida em função da frequência para diferentes valores da fração de volume $V^{(1)}$ do meio poroso 1.

os valores de $V^{(1)}$ (vide figura 4.8), já para o pico mesoscópico, o mesmo desloca-se às baixas frequências quando $V^{(1)}$ diminui. Além disso o valor do pico mesoscópico é crescente quando desloca-se à baixas frequências. Na figura 4.9 mostra-se o efeito produzido na dispersão da velocidade da onda P rápida. Quanto maior o volume da inclusão ($V^{(2)}$) o qual é menos consolidado que a fase 1, a velocidade do meio efetivo diminui, e a onda que propaga-se neste meio é crescentemente dispersiva, quando o volume da inclusão aumenta.

A outra questão é que para a Teoria de Biot Clássica o pico de relaxação, que corresponde ao tempo (τ) necessário para restabelecer o equilíbrio do meio, é o tempo para que o processo difusivo atinga uma distância L , que é da ordem do comprimento de onda (λ) (vide seção 4.1). A frequência de relaxação $\omega_B = 1/\tau$ é expressa pela equação (4.1), cujo significado

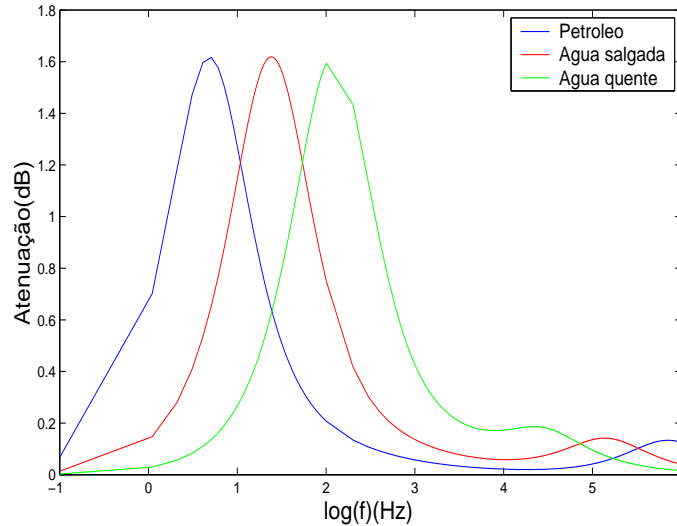


Figura 4.10: Atenuação da onda P rápida em função da frequência para três fluidos diferentes e uma fração de volume 0.95 do meio poroso 1. $V^{(1)}$.

é, para as baixas frequências ($\omega \ll \omega_B$) a atenuação da onda (P rápida) é desprezível, e quanto maior a viscosidade do fluido que preenche o material, a frequência de relaxação ω_B desloca-se para as frequências maiores, ou seja, se $\eta_1 < \eta_2$ então $\omega_{B1} < \omega_{B2}$ concluindo que, quanto maior a viscosidade (η) do fluido, menor será a atenuação da onda P rápida. Para os mecanismos mesoscópicos como o de White, a frequência de relaxação ω_B é inversamente proporcional à viscosidade do fluido (vide equação 4.40). Para o modelo de dupla porosidade apresentado nesta seção, obtém-se a mesma conclusão que o modelo de White: quanto maior é a viscosidade, o pico de relaxação desloca-se às baixas frequências. Esta afirmação é apresentada graficamente na figura 4.10, tomando três fluidos: Água salgada ($\eta = 10^{-3}$), água quente ($\eta = 2.10^{-4}$) e óleo ($\eta = 5.10^{-3}$), fixando o valor da fração de volume $V^{(1)} = 0.95$ do meio poroso 1 .

Da figura 4.8 pode-se deduzir que para valores da fração de volume do meio poroso 1 menores que 0.985, as atenuações apresentam-se nas frequências da faixa de interesse da geofísica de exploração (0-1000 Hz). O meio poroso 2, que representa um meio pouco consolidado, pode também representar uma fratura, ou seja, um material para o qual seus parâmetros poroelásticos, por exemplo, o módulo de incompressibilidade, K_{dry2} , seja menor que o correspondente módulo K_{dry} do meio 1. Todos os modelos mesoscópicos apresentados neste trabalho, que são extensões da Teoria de Biot, podem ser uma ferramenta útil para dar resposta à pergunta formulada por Biot e que na atualidade tem muita relevância: Pode a permeabilidade de uma região ser determinada se os dados da velocidade e atenuação são conhecidos? Para o modelo da dupla porosidade apresentado nesta seção, a atenuação e a dispersão da onda P rápida dependem do chamado fluxo mesoscópico entre os dois meios porosos e, o chamado tempo de equilíbrio ou relaxação, depende da permeabilidade do meio

poroso principal (vide equação 4.89). Se fosse possível medir o fator de qualidade Q para diferentes valores da frequência, pode-se, em princípio, obter-se informação da permeabilidade da rocha portadora (o meio poroso 1). Neste processo faz-se necessário um processo de inversão dos dados sísmicos para obter $Q(\omega)$. Isto pode ser obtido de experimentos sísmicos como, por exemplo, da inversão de tomografia crosswell (Pride 2005). Em resumo, a pergunta de M.Biot se bem é certo que no momento ainda não tem resposta definitiva, entretanto os novos resultados obtidos dos mecanismos mesoscópicos de atenuação e dispersão no contexto da Teoria de Biot, tendo como precursor White (1975) e na atualidade os diferentes mecanismos mesoscópicos (Norris(1993), Brajanoski(2005), Pride et.al(2003 a,b)) fornecem respostas satisfatórias às objeções feitas à Teoria de Biot na sua versão original (Biot 1956 a,b,1962 a,b).

4.3 A anisotropia(VTI) como mecanismo mesoscópico

Os modelos mesoscópicos desenvolvidos neste trabalho referem-se a duas categorias principais: O modelo de saturação parcial ou modelo de White e o modelo de heterogeneidade na litologia; o desenvolvimentos de Norris, em princípio, pertence à primeira categoria, embora permita-se sua aplicação para a segunda. O modelo representativo da segunda categoria é o modelo da dupla porosidade apresentado nas duas versões no capítulo 2 (seção 2.3.3) e neste capítulo (seção 4.2). No modelo de White assume-se principalmente as variações do tipo de fluido, e na escala mesoscópica, tem-se a heterogeneidade do fluido. Na outra categoria supõe-se que existe apenas um fluido saturante. No capítulo 2 (seção 2.2) deste trabalho, apresentou-se e discutiu-se amplamente as equações de Biot para um meio transversalmente isotrópico. Uma das conclusões da análise é referente à atenuação das ondas P rápida, P lenta e S. Para a onda P rápida conclui-se que a atenuação tem um pico nas baixas frequências quando a direção de propagação é na direção do eixo de simetria (vide figura 2.4). O contrário acontece com a onda P lenta, para a qual a atenuação decresce rapidamente nas baixas frequências. Isto pode significar que quando a onda P rápida propaga-se na direção do eixo de simetria, a outra onda P "tira" energia dela. As figuras 2.6 e 2.7 ratificam a afirmação e conclui-se que nas baixas frequências a atenuação da onda P é máxima na direção do eixo de simetria e anula-se quando a direção de propagação é perpendicular ao eixo de simetria. Na terminologia dos mecanismos mesoscópicos, a afirmação significa a conversão de modos (Carcione et.al 2006) quando a onda P rápida atravessa a interface de dois meios diferentes.

Fundamentado na hipótese anterior, pretende-se nesta secção relacionar o mecanismo de anisotropia e o mecanismo mesoscópico do modelo de White, tendo como base fundamental a análise formal de Norris apresentado no capítulo 2 (seção 2.3.1). A relação dos dois

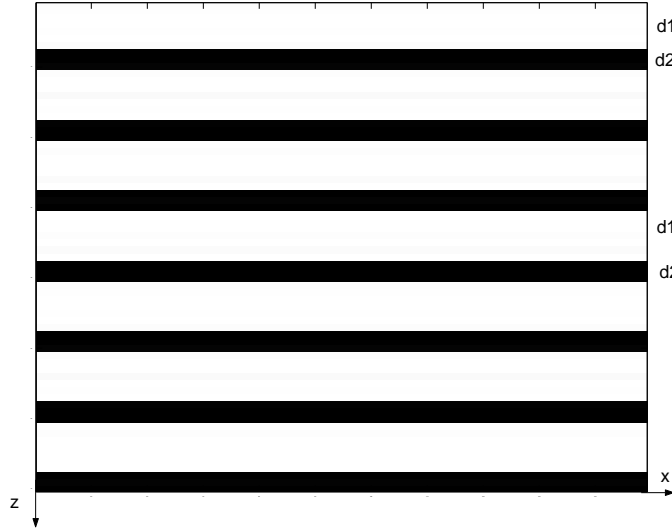


Figura 4.11: Representação do modelo de duas camadas de espessuras d_1 e d_2 .

mecanismos faz-se utilizando o chamado Teorema de Backus (Backus 1962), o qual estabelece que um composto formado de camadas horizontais, na qual cada camada é um sólido com seus correspondentes parâmetros elásticos e de certa espessura, e a condição de que a espessura das camadas é muito menor que o comprimento de onda, o composto é equivalente ao meio efetivo transversalmente isotrópico, cujo eixo de simetria é perpendicular às camadas. Generalizando este resultado para materiais poroelásticos, afirma-se que o meio composto de camadas horizontais, as quais são materiais poro-elásticos de espessura muito menor que o comprimento de onda, é equivalente a um meio efetivo poroso transversalmente isotrópico (Berryman 1979). As equações de movimento, a Lei de Darcy e as equações constitutivas para um meio poroso transversalmente isotrópico são expressas pelas equações (2.6). Para as equações constitutivas, as *compliances* são os termos c_{ij}^u , e os parâmetros poroelásticos não drenados (undrained). Estes parâmetros podem ser escritos em termos dos parâmetros poroelásticos drenados (Carcione 1996):

$$c_{11}^u = c_{11} + \alpha_1^2 M,$$

$$c_{33}^u = c_{33} + \alpha_3^2 M,$$

$$c_{13}^u = c_{13} + \alpha_1 \alpha_3 M$$

$$c_{55}^u = c_{55} = \mu.$$

Os coeficientes de Biot-Willis são:

$$\alpha_1 = 1 - \frac{c_{11} + c_{12} + c_{13}}{3K_s}$$

$$\alpha_3 = 1 - \frac{2c_{13} + c_{33}}{3K_s}.$$

Para um meio composto por dois meios porosos, cada um com seus parâmetros poroelásticos, e pela generalização do Teorema de Backus para a poroelasticidade, encontra-se os parâmetros c_{ij}^u do meio efetivo transversalmente isotrópico da seguinte forma: Para duas camadas, cada uma com espessura d_1 e d_2 , define-se a média ponderada de uma quantidade como:

$$\langle a \rangle = p_1 a_1 + p_2 a_2, \text{ onde } p_1 = \frac{d_1}{d_1+d_2} \text{ e } p_2 = \frac{d_2}{d_1+d_2}.$$

Definindo os valores médios (Norris 1993):

$$A = \left\langle \frac{1}{M} + \frac{\alpha^2}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \langle 2\mu\alpha/(\lambda + 2\mu) \rangle,$$

$$B = \left\langle \frac{1}{M} + \frac{\alpha^2}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \langle \alpha/(\lambda + 2\mu) \rangle.$$

Os parâmetros não drenados c_{ij}^u do meio efetivo transversalmente isotrópico são (Norris 1993):

$$\begin{aligned} c_{33}^u &= \left\langle \frac{1 - \alpha B}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1}, \\ c_{13}^u &= \left\langle \frac{\lambda + \alpha A}{\lambda + 2\mu} \right\rangle c_{33}^u, \end{aligned} \tag{4.110}$$

$$c_{11}^u = \frac{c_{13}^{u2}}{c_{33}^u} + \langle 2\mu \rangle + \langle 2\mu \frac{\lambda + \alpha A}{\lambda + 2\mu} \rangle.$$

A influência do fluido nos poros é determinada por meio do parâmetro M , o qual é expresso pela equação (1.30). Na formulação do mecanismo de saturação parcial de White, desenvolvido por Norris (1993), com as equações (4.110) obtém-se o meio efetivo VTI. Tais expressões podem ser escritas numa forma alternativa, quando um dos meios porosos (camadas) representam inclusões finas de fraturas horizontais, como é a formulação de Brajanovski et.al (2005) apresentada na seção (2.3.2). Os parâmetros c_{ij}^u podem ser escritos em relação aos excessos de *compliance* normal e tangencial Z_N e Z_T (vide equações 2.25-2.27) da seguinte maneira:

$$\frac{1}{c_{33}^u} = \frac{1}{c_1} + \frac{(\alpha_1 M_1/c_1 - 1)^2}{M_1/c_1 \sqrt{i\omega/D_1 H/2} \cot(\sqrt{i\omega/D_1 H/2}) + 1/Z_N}, \tag{4.111}$$

onde os parâmetros c_{13}^u e c_{11}^u são calculados pelas equações (4.110₂) e (4.110₃).

O passo seguinte é obter o módulo efetivo M e os parâmetros de Biot Willis os quais são expressos em termos das *compliances* c_{ij} da matriz. O módulo M é expresso pela expressão (Carcione 1996):

$$M = \frac{K_s^2}{D - (2c_{11} + c_{13} + 2c_{12} + 4c_{13})/9},$$

onde

$$D = \frac{K_s}{1 + \phi(K_s/K_f - 1)},$$

as *compliances* c_{ij} são calculadas utilizando o Teorema de Backus para a elasticidade (Carcione 2007):

$$\begin{aligned} c_{11} &= \langle c_{11} - c_{13}^2 c_{33}^{-1} \rangle + \langle c_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle c_{33}^{-1} c_{13} \rangle^2, \\ c_{33} &= \langle c_{33}^{-1} \rangle^{-1}, \\ c_{13} &= \langle c_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle c_{33}^{-1} c_{13} \rangle \\ c_{55} &= \langle c_{55}^{-1} \rangle^{-1}. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Fundamentado na análise anterior, obtém-se o meio efetivo VTI nos dois casos que representam os mecanismos mesoscópicos das duas categorias: Saturação parcial (modelo de White) e o modelo de heterogeneidade na litologia e um único fluido saturante (modelo da dupla porosidade). No primeiro caso as camadas são iguais na sua fase sólida e é a matriz, e apenas o fluido é diferente nas camadas. No segundo caso as duas camadas tem fluidos iguais.

No primeiro caso, obtém-se um meio efetivo transversalmente isotrópico, onde a anisotropia é devido, principalmente, à variação do fluido nas camadas. Os parâmetros de *compliance* c_{ij}^u efetivos são expressos pelas equações (4.110). O parâmetro c_{33}^u pode ser escrito na seguinte forma (Norris 1993):

$$1/c_{33}^u = \left\langle \frac{1}{K_{dry} + 4/3\mu} \right\rangle - \left\langle \frac{\alpha}{K_{dry} + 4/3\mu} \right\rangle^2 \left\langle \frac{\alpha}{R(K_{dry} + 4/3\mu)} \right\rangle^{-1}, \quad (4.113)$$

onde $R = \frac{\alpha M}{(K_u + 4/3\mu)}$ e K_u é o módulo volumétrico saturado (undrained). Se o material(sólido e a matriz) é igual nas duas camadas, a equação (4.113) pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{c_{33}^u} = \frac{1}{K_{dry} + 4/3\mu} - \frac{\alpha}{K_{dry} + 4/3\mu} \left\langle \frac{1}{R} \right\rangle^{-1}, \quad (4.114)$$

as equações (4.110₂) e (4.110₃) reduz-se às seguintes expressões:

$$\begin{aligned} c_{13}^u &= \frac{c_{33}^u}{\lambda + 2\mu} \langle \lambda + \alpha A \rangle \\ c_{11}^u &= \frac{c_{33}^u}{(\lambda + 2\mu)^2} \langle \lambda + \alpha A \rangle^2 + \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \langle \lambda + \alpha A \rangle + 2\mu. \end{aligned} \quad (4.115)$$

A anisotropia que induz a heterogeneidade só no fluido é resultado da influência dos fluidos nas expressões dos c_{ij}^u , no caso de c_{33}^u por meio do termo R na equação (4.114) e para c_{11}^u e c_{13}^u , no termo A , nas equações (4.115₁) e (4.115₂). A seguir mostra-se a atenuação da onda P rápida em função da frequência. Como um primeiro exemplo mostra-se a atenuação desta onda, quando a direção de propagação é perpendicular às camadas, para diferentes valores da fração de volume (p_1) do meio poroso 1 (vide figura 4.12). Utilizando os resultados da seção 2.2 e, particularmente, a relação de dispersão (2.12) pode-se calcular as atenuações

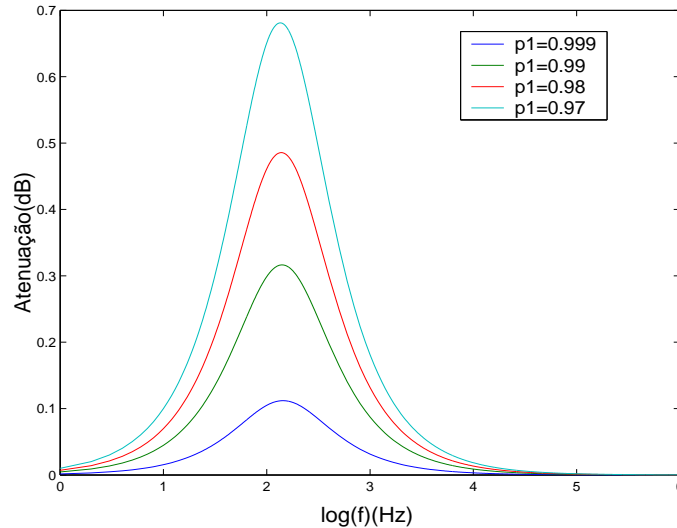


Figura 4.12: Atenuação da onda P rápida quando propaga-se na direção perpendicular às camadas em função da frequência para quatro valores da fração de volume do meio poroso 1.

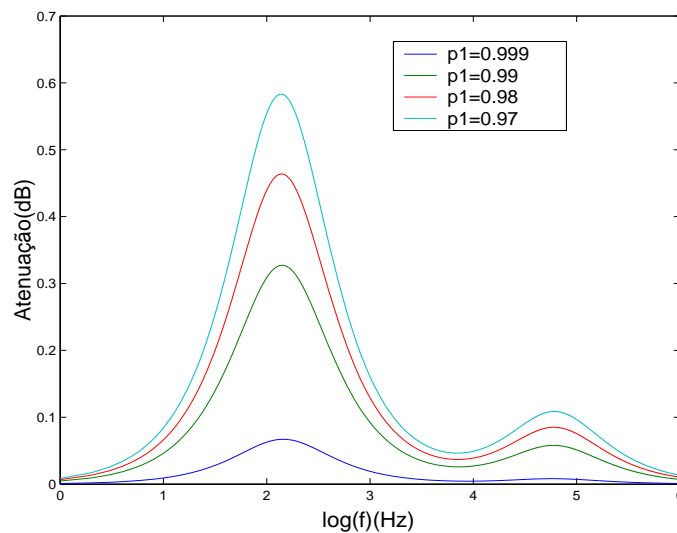


Figura 4.13: Atenuação da onda P rápida quando propaga-se numa direção que forma 15° com o eixo de simetria (z) em função da frequência para quatro valores da fração de volume do meio poroso 1.

das três ondas (P rápida, P lenta e S) em qualquer direção de propagação. Baseado nestes resultados mostra-se a atenuação da onda P rápida em função da frequência para diferentes valores da fração de volume (p_1 do meio poroso 1 e para diferentes direções de propagação). Nas figuras (4.13) e (4.14) mostram-se os resultados da atenuação para a onda P rápida para uma direção de propagação que forma um ângulo de 15° e 30° , respectivamente.

Baseado nos resultados das figuras (4.13-4.14) pode-se concluir que o mecanismo de anisotropia vislumbra os dois mecanismos estudados: mesoscópico e o mecanismo de Biot, resultado que também mostra o mecanismo da dupla porosidade (vide figuras 4.6-4.8). Além

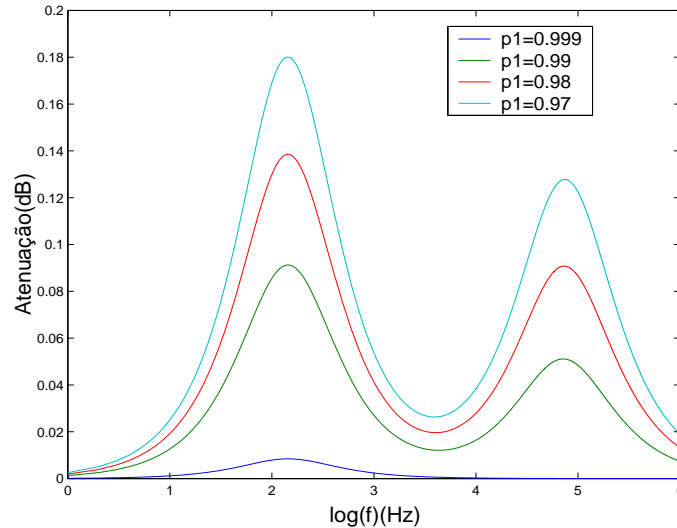


Figura 4.14: Atenuação da onda P rápida quando propaga-se numa direção que forma 30° com o eixo de simetria (z) em função da frequência para quatro valores da fração de volume do meio poroso 1.

disso, comparando as figuras 4.12, 4.13 e 4.14 conclui-se que a maior atenuação acontece quando é maior a fração do volume secundário 2 (preenchido com gás) e quando a direção de propagação é perpendicular às camadas. Quando o ângulo que a direção de propagação forma com o eixo de simetria (z) aumenta, a atenuação devida ao mecanismo mesoscópico diminui e a atenuação devida ao mecanismo de Biot torna-se mais importante. Na figura (4.15) mostra-se a atenuação da onda P rápida em função da frequência, quando o ângulo é de 60° , torna-se mais importante o mecanismo de atenuação de Biot. Se o ângulo que a direção de propagação forma com o eixo de simetria é 90° , ou seja, uma propagação paralela às camadas de heterogeneidade, isto significa uma propagação da onda P rápida num meio de Biot clássico (vide capítulo 1) e se o ângulo é 0° , ou seja a onda atravessa as heterogeneidades do meio de acordo com as formulações das extensões da Teoria de Biot, a onda que é convertida na outra onda P lenta perde energia num processo difusivo para as baixas frequências. Para um ângulo de propagação entre 0° e 90° pode-se entender a propagação como a composição de dois movimentos: um na direção perpendicular às camadas (mecanismo mesoscópico) e o outro na direção paralela a estas (mecanismo de Biot).

Nos experimentos numéricos feitos anteriormente, para o qual foram resolvidas as equações de Biot para um meio efetivo transversalmente isotrópico no domínio (ω, \mathbf{k}) , os parâmetros poroelásticos correspondem a uma rocha arenito (sandstone) a qual é considerada isotrópica. Para o outro caso considera-se um conjunto de camadas alternadas de arenitos e outro material chamado de Epoxy-glass (Carcione 1996). Considera-se os dois meios preenchidos com o mesmo tipo de fluido. Os resultados neste caso são similares aos obtidos no caso de um único material sólido e apenas variação no tipo de fluido. Estes resultados confirmam a hipótese

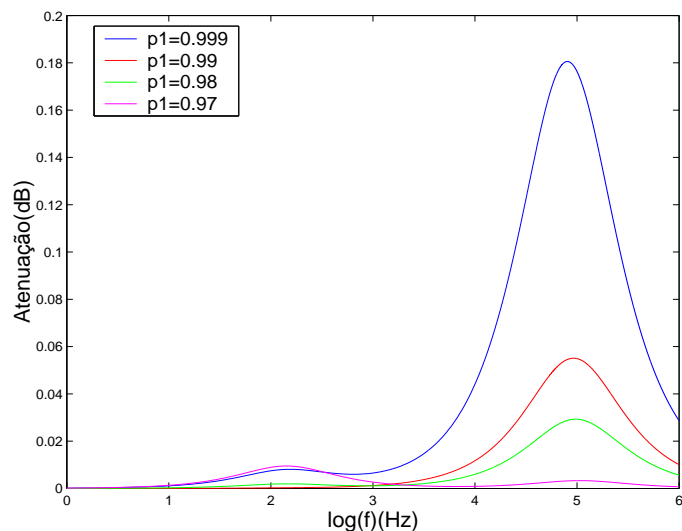


Figura 4.15: Atenuação da onda P rápida quando propaga-se numa direção que forma 60° com o eixo de simetria (z) em função da frequência para quatro valores da fração de volume do meio poroso 1.

assumida neste trabalho de considerar a anisotropia como um mecanismo mesoscópico, que explica as perdas na faixa de baixas frequências.

5

Conclusões

Neste trabalho foram estudadas amplamente as extensões da Teoria de Biot para explicar no contexto desta teoria o comportamento das ondas sísmicas, principalmente a chamada onda P rápida, concluindo-se que o fator fundamental de perdas da onda P rápida na faixa de baixas frequências são as heterogeneidades na escala mesoscópica. Quatro mecanismos de perdas foram analisados: A anisotropia VTI, a saturação parcial na análise de Norris e na análise de Brajanovski e finalmente, o modelo da dupla porosidade, tendo este modelo sido estudado em duas formulações: como uma extensão simples das equações de Biot e como um problema de valor de fronteira entre dois meios porosos. Nesta formulação o mecanismo fundamental de perdas é o chamado fluxo de fluido entre os dois meios. Se o fluxo de fluido é desprezível, as duas formulações da dupla porosidade são similares.

Mostrou-se que a anisotropia, particularmente a anisotropia VTI, é um fator que influencia a propagação das ondas nos meios bifásicos ou porosos. As expressões analíticas que foram deduzidas no capítulo 2 mostram que a onda P lenta é um processo difusivo no regime de baixas frequências. As frentes de ondas, da onda P lenta mostradas no capítulo 2 indica que só nas altas frequências, a onda P lenta tem um comportamento ondulatório. O papel que a onda P lenta exerce consiste em "tirar energia" das outras ondas (P rápida e S). A existência da onda P lenta é sinônimo de perdas para outras ondas. A propagação da onda P rápida na direção ortogonal ao eixo de simetria é equivalente à propagação desta onda num meio isotrópico homogêneo. Para uma direção de propagação paralela ao eixo de simetria a onda P rápida experimenta atenuação, o que significa que a outra onda P "pega" as perdas. correspondentes às perdas da onda P rápida.

O mecanismo fundamental das perdas na escala mesoscópica são as heterogeneidades;

tais heterogeneidades podem estar contidas nos fluidos dos poros, ou seja, a saturação parcial, a qual é descrita pelo chamado modelo de White. Para este modelo mostrou-se que o chamado fluxo de fluido entre os meios porosos é o responsável pela atenuação da onda P rápida nas baixas frequências. A versão do modelo de White que foi apresentado neste trabalho está baseada nos trabalhos de Norris (1993) e Brajanoski (2006). Estes modelos servem para simular fraturas (horizontais) como inclusões num meio poroso primário. O contraste entre estes meios produz um gradiente na pressão do fluido o qual induz o fluxo de fluido. A frequência de relaxação (pico mesoscópico) é proporcional à escala das heterogeneidades, ao contrário do mecanismo de Biot, que é proporcional ao comprimento da onda. O mecanismo mesoscópico na totalidade de suas versões, apresentadas neste trabalho, mostram que a frequência de relaxação desloca-se às baixas frequências quando a viscosidade do fluido aumenta, resultado que é coerente com os experimentos.

O outro modelo mesoscópico estudado neste trabalho foi o chamado modelo da dupla porosidade, e foi estudado em duas versões. Na primeira demonstrou-se que se as equações de movimento são desacopladas (para certas condições ideais). Pode-se obter expressões das velocidades de propagação das quatro ondas previstas pelo modelo: a onda P rápida, a primeira onda P lenta, a segunda onda P lenta e a onda S. Além disso, as expressões das velocidades diz qual é o meio onde cada um delas se propaga: A onda P rápida e a onda S na matriz da rocha, a primeira onda P lenta no fluido contido na porosidade primária e a segunda onda P lenta no fluido contido na porosidade secundária (ou fraturas). Esta formulação inicial da dupla porosidade constitui uma extensão simples da formulação inicial de Biot e não responde às objeções da teoria. A formulação da dupla porosidade apresentada no capítulo 4 fornece as respostas às objeções. Para esta formulação o chamado fluxo de fluido é o mecanismo fundamental para as perdas da onda P rápida. Para o modelo da dupla porosidade foram obtidas expressões analíticas no domínio (ω, \mathbf{k}) ; para a velocidade complexa da onda P rápida foi feito o desacoplamento das relações de dispersão obtidas no domínio (ω, \mathbf{k}) .

Finalmente mostrou-se, utilizando o Teorema de Backus aplicado à proelasticidade, que para o meio VTI equivalente a um meio heterogêneo de camadas de espessura menor que o comprimento de onda, as equações de Biot para o meio refletia os dois mecanismos de atenuação: Fluxo global ou mecanismo de Biot e o mecanismo mesoscópico. Quanto maior for o ângulo que a direção de propagação da onda forma com e o eixo de simetria (z) a propagação parece ocorrer num meio bifásico homogêneo; caso contrário, se o ângulo tende a zero, o mecanismo mesoscópico é o predominante. Pode-se entender isto como uma composição ou superposição de dois movimentos ponderados.

A pergunta formulada por Biot na década de 50 ainda não tem resposta. Mesmo assim, os avanços feitos pelas extensões da Teoria de Biot, podem fornecer ferramentas para trabalhos de modelamento com inversão utilizando o conhecimento do fator de qualidade (Q) na escala sísmica ou em escalas menores (sônico e ultrasônico) para determinar os valores da permeabilidade, por exemplo, de uma rocha de reservatório.

Uma outra questão que pode ser estudada no futuro é relacionada às perdas da onda S. Na segunda formulação da dupla porosidade apresentada neste trabalho está explícita, nas relações de dispersão. A relação entre a onda S e o chamado fluxo de fluido por meio do tensor σ_d o qual tem dois componentes: o componente elástico e o componente viscoso, para a formulação de Biot e para todas suas extensões o parâmetro de Lamé μ é igual em todos os casos: $\mu_{dry} = \mu_u$. Para obter as perdas da onda S precisa-se de expressões de μ dependentes da frequência e assim determinar-se as funções F e G, e as componentes do tensor "deviatoric" (vide equação 4.65).

Finalmente, um outro trabalho no futuro, é estudar e modelar o mecanismo mesoscópico, e outros tipos gerais de anisotropia. Neste caso precisa-se definir a permeabilidade como um tensor (matriz 3x3) nas equações constitutivas e de movimento, levar as equações para o domínio (ω, \mathbf{k}) para obter a relação de dispersão e dela obter as velocidades e as atenuações em qualquer direção.

Agradecimentos

A minha Família: Flor Alba, Juana, Luz de Luna e Miguel Angel.

Ao meu orientador, Dr. Marco A Barsotelli Botelho por me introduzir no tema desta pesquisa, pelo incentivo e valiosa orientação.

Ao Dr. José Maria Carcione por suas inestimáveis sugestões no desenvolvimento desta tese.

A professora Jacira Freitas pela participação na banca e pela ajuda nas correções no texto definitivo do trabalho de tese.

Aos professores do CPGG por me introduzir no mundo da Geofísica.

À Vânia, Juseline e o Jair, que com sua solidariedade me fizeram pensar em muitas ocasiões que a solidariedade é a ternura dos povos.

Aos colegas do CPGG pelo companheirismo, em especial: Fabiane, Rosangela, Juarez, Eduardo, Michelângelo, Gary, Antônio, Izaias, Marcelo, Roberto e Michael.

Aos funcionários do CPGG: Joaquim, Zenilda, Lene e Fernanda pela atenção e o apoio.

Ao povo colombiano que tenta construir um país melhor para sair das trevas de séculos.

Dou meu agradecimento à CAPES pelo apoio através da bolsa de estudo nos quatro anos do curso, e à Universidade de Pamplona (Colômbia) pelo apoio durante o curso de Doutorado.

Referências

- Aki, K. e Richards, P. G. (1980) Quantitative seismology, W. H. Freeman and Co.
- Berryman, J. G. (1999) Origin of gassmann's equations, Stanford Exploration Project Report, **102**:187–192.
- Berryman, J. G. e Wang, H. F. (1995) The elastic coefficients of double-porosity models for fluid transport in jointed rock, *J. Geo. Res.*, **100**:24611–24627.
- Berryman, J. G. e Wang, H. F. (2000) Elastic wave propagation and attenuation in double porosity dual permeability media, *Int. J. Rock Mech. Mining Sci.*, **37**:63–78.
- Biot, M. A. (1941) General theory of three-dimensional consolidation, *J. Appl. Phys.*, **12**:155–164.
- Biot, M. A. (1956a) The theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, i. low-frequency range, *J. Acoustic. Soc. Am.*, **28**:168–178.
- Biot, M. A. (1956b) The theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, ii. higher-frequency range, *J. Acoustic. Soc. Am.*, **28**:179–191.
- Biot, M. A. (1962a) Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous medium, *J. Appl. Phys.*, **33**:1482–1498.
- Biot, M. A. (1962b) Generalized theory of acoustic propagation dissipative media, *J. Acoustic. Soc. Am.*, **34**:1256–1264.
- Biot, M. A. e Willis, D. G. (1957) The elastic coefficients of the theory of consolidation, *J. Appl. Mech*, **24**:594–601.
- Bourbié, T.; Coussy, O. e Zinsner, B. (1987) Acoustic of porous media, Gulf Publ.Co.
- Brajanovski, M.; Gurevich, B. e Shoenberg, M. (2005) A model for p-wave attenuation in porous medium permeated by aligned fractures, *Geophys. J int*, **163**:372–384.
- Burridge, R. e Keller, J. (1981) Poroelasticity equations derived from microstructure, *J. Acoustic. Soc. Am.*, **70**:1140–1146.
- Carcione, J. M. (1996) Wave propagation in anisotropic, saturated porous media: plane wave theory and numerical simulation, *J. Acoust. Soc.*, **99**:2655-2666.

- Carcione, J. M. (1998) Viscoelastic effective rheologies for modeling wave propagation in porous media, *Geophysical Prospecting*, **46**:249–270.
- Carcione, J. M. (2007) *Wave fields in real media*, Pergamon Press, Oxford.
- Carcione, J. M. e Picotti, S. (2006) P-wave seismic attenuation by slow-wave diffusion: Effects of inhomogeneous rock properties, *Geophysics*, **71**:01–08.
- Carcione, J. M. e Quiroga, G. (1996) Some aspects of physics and numerical modeling of biot compressional waves, *J. Computational. Acoustic*, **3**:261–280.
- Dai, A. e Kanasevich, E. R. (1995) Wave propagation in heterogeneous, porous medium: A velocity-stress, finite difference method, *Geophysics*, **60**:327–340.
- Detournay, E. e Cheng, A. (1993) *Fundamentals of poroelasticity*, Chapter 5, vol. 2, Pergamon Press.
- Dutta, N. C. e Odé, H. (1979a) Attenuation and dispersion of compressional waves in fluid-filled porous rocks with partial gas saturation (white model)—part i: Biot theory, *Geophysics*, **44**:1777–1780.
- Dutta, N. C. e Odé, H. (1979b) Attenuation and dispersion of compressional waves in fluid-filled porous rocks with partial gas saturation (white model)—part ii: Results, *Geophysics*, **44**:1789–1805.
- Dvorkin, J. e Nur, A. (1993) Dynamic poroelasticity: A unified model with the squirt and the biot mechanisms, *Geophysics*, **58**:524–533.
- Dvorkin, J.; Nolen, R. e Nur, A. (1994) The squirt-flow mechanism: Macroscopic description, *Geophysics*, **59**:428–438.
- Fornberg, B. (1987) The pseudospectral method: Comparisons with finite difference for the elastic wave equation, *Geophysics*, **52**:483–501.
- Fornberg, B. (1990) High-order finite differences and pseudo-spectral method on staggered grids, *SIAM J*, **27**:904–910.
- Gassmann, F. (1951) über die elastizität poröser medien, *Vierteljahrsschrift der naturforschenden*, **96**:1–23.
- Gelinsky, S. e Shapiro, S. (1997) *Poroelastic Backus averaging for anisotropic layered fluid- and gas-saturated sediments*, vol. 62.
- Gist, G. A. (1994) Fluid effects on velocity and attenuation in sandstones, *J. Acoustic. Soc. Am.*, **96**:1158–1173.
- Hassanzadeh, S. (1991) Acoustic modeling in fluid-saturated porous media, *Geophysics*, **56**:422–435.

- Hesthaven, J.; Gottlieb, S. e Gottlieb, D. (2005) Spectral methods for time-dependens problems.
- Jhonson, D. L. (2001) Theory of frequency dependent acoustics of patchy-satured porous media, *Journal of the Acoustic Society of America*, **110**:682–694.
- Jones, T. (1986) Pore-fluids and frequency dependent-wave propagation rocks, vol. 51.
- Kelly, K. R.; Ward, R. W.; Treitel, S. e Alford, R. M. (1976) Synthetic seismograms: A difference approach, *Geophysics*, **41**:2–27.
- Mavko, G. M. e Nur, A. (1975) Melt squirt in the asthenosphere, *J. Geophys Res.*, **80**:1444–1448.
- Mavko, G. M. e Nur, A. (1979) Wave attenuation in partially saturated, *Geophysics*, **44**:161–178.
- Norris, A. (1993) Low-frequency dispersion and attenuation in partially saturated rocks, *J. Acoustic. Soc. Am.*, **94**:359–370.
- O’Connell, R. J. e Budiansky, B. (1977) Viscoelastic properties of fluid-satured cracked solids, *Journal of Geophysical Research*, **82**:5719–5736.
- Ozdenvar, T. e McMechan, G. (1997) Algoritms for staggered-grid computations for poroelastic, elastic, acoustic and scalar wave equationns, *Geophysical Prospecting*, **45**:403–420.
- Parra, J. (1997) The transversely isotropic poroelastic wave equation including the biot and the squirt mechanism: Theory and aplication, *Geophysics*, **62**:309–318.
- Picotti, S.; Carcione, J. M.; Rubino, J. G. e Santos, J. E. (2007) P-wave seismic attenuation by slow-wave diffusion: Numerical experiments in partially saturated rocks, *Geophysics*, **72**:N11–N21.
- Pilant, W. L. (1979) *Elastic Waves in the Earth*, Elsevier Science Publishing Co.
- Plona, T. J. (1980) Observation of a second bulk compresional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies, *Appl. Phys. Lett.*, **36**:259–261.
- Pride, S.; Berryman, J. G. e Harris, J. M. (2004) Seismic attenuation due to to wave-induced flow, *Journal of Geophysical Research*, **109**:B01201.
- Schoenberg, M. e Sayers, C. (1995) *Seismic Anisotropy of fractured rock*, vol. 60.
- Terzaghi, K. (1936) The shearing resistance of satured soils and the angle between the planes of shear, *Procedings of International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, pp. 54–56.

- Toms, J.; Muller, T. M.; Ciz, R. e Gurevich, B. (2006) Comparative review of theoretical models for elastic wave attenuation and dispersion in partial saturated rocks, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, **26**:548–565.
- Tuncay, K. e Corapcioglu, Y. (1996a) Body waves in fractured porous media saturated by two immiscible fluids, *Transport in porous media*, **23:33**:259–273.
- Tuncay, K. e Corapcioglu, Y. (1996b) Wave propagation in fractured porous media, *Transport in porous media*, **23:33**:273–258.
- Wang, Z. (2001) Fundamentals of seismic rock physics, *Geophysics*, **66**:398–412.
- Wang, Z. e Nur, A. (1990) Dispersion analysis of acoustic velocities in rocks, *J. Acoustic. Soc. Am.*, **87**:2384–2395.
- White, J. E. (1975) Computed seismic speeds and attenuation in rocks with partial gas saturation, *Geophysics*, **40**:224–232.
- White, J. E.; Mikhaylova, N. G. e Lyakhovitsky, F. M. (1975) Low frequency seismic waves in fluid saturated layered rocks, *Phys. Solid Earth*, **11**:654–659.
- Wilson, R. K. e Afantis, E. C. (1982) On the theory of consolidation with double porosity, *Int. J. Engng. Sci.*, **20**:1009–1035.
- Wilson, R. K. e Afantis, E. C. (1984) A double porosity model for acoustic wave propagation in fractured-porous rock, *Int. J. Engng Sci.*, **22**:1209–1217.

A

Coeficientes elásticos do modelo da dupla porosidade

Considerando dois meios porosos com fronteira comum ∂_{12} , os coeficientes de rigidez do composto efetivo são:

$$\begin{aligned}a_{11} &= \frac{1}{K} \\a_{22} &= \frac{\nu^{(1)}\alpha_1}{K_1^d} \left(\frac{1}{B_1} - \frac{\alpha_1(1-Q_1)}{1-K_1^d/K_2^d} \right) \\a_{33} &= \frac{\nu^{(2)}\alpha_2}{K_2^d} \left(\frac{1}{B_2} - \frac{\alpha_2(1-Q_2)}{1-K_2^d/K_1^d} \right) \\a_{12} &= -\nu^{(1)}Q_1\alpha_1/K_1^d \\a_{13} &= -\nu^{(2)}Q_2\alpha_2/K_2^d \\a_{23} &= \frac{-\alpha_1\alpha_2K_1^d/K_2^d}{(1-K_1^d/K_2^d)^2} (1/K - \nu^{(1)}/K_1^d - \nu^{(2)}/K_2^d).\end{aligned}\tag{A.1}$$

Q_1 e Q_2 são constantes auxiliares as quais são expressas como:

$$\begin{aligned}Q_1 &= \frac{1 - K_2^d/K}{\nu^{(1)}(1 - K_2^d/K_1^d)} \\Q_2 &= \frac{1 - K_1^d/K}{\nu^{(2)}(1 - K_1^d/K_2^d)}.\end{aligned}\tag{A.2}$$

K é o módulo de incompressibilidade volumétrico (drained) do composto. Tal módulo é calculado utilizando o resultado de Hashin e Shtrickman(1963):

$$\frac{1}{K + 4/3G_i} = \frac{\nu^{(1)}}{K_1^d + 4/3G_i} + \frac{\nu^{(2)}}{K_2^d + 4/3G_i}$$

$$\frac{1}{G_i + \xi_i} = \frac{\nu^{(1)}}{G_i + \xi_i} + \frac{\nu^{(2)}}{G_2 + \xi_i}, \quad (\text{A.3})$$

onde ξ_i é definido como:

$$\xi_i = \frac{G_i 9K_i^d + 8G_i}{6 K_i^d + 2G_i},$$

G_i é o módulo cisalhante do meio poroso i , K_i^d o módulo de incompressibilidade volumétrico (drained) do meio poroso i .