

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
Curso de Pós-graduação em Geofísica

TESE DE DOUTORADO



MIGRAÇÃO
PRÉ-EMPILHAMENTO ATRAVÉS
DAS EQUAÇÕES DE ONDAS
UNIDIRECIONAIS COM
AMPLITUDE VERDADEIRA

FLOR ALBA VIVAS MEJIA

SALVADOR – BAHIA
AGOSTO – 2008

Documento preparado com o sistema L^AT_EX.

Migração pré-empilhamento através das equações de ondas unidirecionais com amplitude verdadeira

por

FLOR ALBA VIVAS MEJIA

Bacharel em Física (Universidad Industrial de Santander – 1997)

Mestre em Física ((Universidad Industrial de Santander – 2001)

Orientador: Prof. Dr. Reynam da Cruz Pestana

TESE DE DOUTORADO

Submetida em satisfação parcial dos requisitos ao grau de

DOUTOR EM CIÊNCIAS

EM

GEOFÍSICA

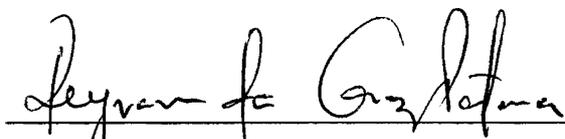
à

Câmara de Ensino de Pós-Graduação e Pesquisa

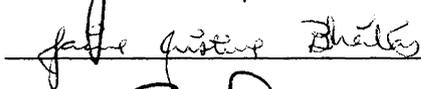
da

Universidade Federal da Bahia

Comissão Examinadora



Dr. Reynam da Cruz Pestana - UFBA



Dra. Jacira C. Batista de Freitas - UFBA



Dr. Jörg D. Wilhelm Schleicher - UNICAMP



Dr. Jessé Carvalho Costa - UFBA



Dr. Milton José Porsani

Aprovada em 1 de agosto de 2008

A presente pesquisa foi desenvolvida no Laboratório de Geofísica de Exploração de Petróleo no Centro de Pesquisa em Geofísica e Geologia da UFBA, com recursos próprios e do convênio Rede01–Rede de Risco Exploratório, CTPETRO/FINEP/Petrobras

V856 Mejia, Flor Alba Vivas,

Migração pré-empilhamento através das equações de ondas unidirecionais com amplitude verdadeira / Flor Alba Vivas Mejia.

— Salvador, 2008.

xi, 98 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Reynam da Cruz Pestana

Tese (Doutorado) - Pós-Graduação em Geofísica. Instituto de Geociências da Universidade Federal da Bahia, 2008.

1. Geofísica Aplicada 2. Prospecção sísmica 3. Método sísmico de reflexão 4. Processamento de dados sísmicos I. Pestana, Reynam da Cruz II. Título

550.834.5(043)

*Dedico a Francisco, Luz de Luna e
Miguel Angel.*

Resumo

A migração em profundidade baseada nas equações das ondas unidirecionais (OWWE - de suas iniciais em inglês) é utilizada com sucesso no imageamento de estruturas complexas, associadas com corpos de sal, com um custo computacional muito menor que a migração reversa no tempo (RTM - de suas iniciais em inglês). No entanto, pode-se mostrar de diferentes formas que as equações de ondas unidirecionais não são equivalentes à equação de onda acústica o que produz erros de fase e de amplitude nos campos de onda unidirecionais em relação aos campos de onda completa, embora o comportamento cinemático do campo de onda seja correto. Os erros de amplitude nos campos de onda unidirecionais estão relacionados ao fato que as equações de ondas unidirecionais não obedecem aos princípios de reciprocidade e conservação da energia, duas propriedades fundamentais satisfeitas pela equação acústica da onda.

As informações dinâmicas do campo de onda, isto é, informações de fase e de amplitude são necessárias quando, além da posição do refletor, se está interessado em realizar estudos, tais como AVA (variação de amplitude versus ângulo) após a migração. Uma abordagem utilizada para melhorar o comportamento dinâmico das equações consiste em fazer modificações nos operadores OWWE através da introdução de um termo extra que tem dependência explícita da derivada vertical da velocidade $v_z(x, y, z)$, assim como a modificação do operador Laplaciano transversal, que inclui termos com dependência explícita das derivadas laterais da velocidade $(v_x(x, y, z), v_y(x, y, z))$, passando esse novo conjunto de equações a ser chamado de equações de ondas unidirecionais com amplitude verdadeira (TA-OWWE).

Num campo de velocidades que varia suavemente com a profundidade, $v = v(z)$, as equações de ondas unidirecionais com amplitude verdadeira proporcionam as mesmas amplitudes que a equação da onda acústica, como pode ser demonstrado através da aproximação WKBJ. Os termos de correção das amplitudes podem ser aplicados no domínio número de onda global.

Nesta tese é apresentada uma análise das equações de ondas unidirecionais com ampli-

tude verdadeira, uma descrição em detalhe dos novos termos nos operadores que garantem sua equivalência, numa aproximação assintótica, com a equação de onda completa. Em seguida, descreve-se como os algoritmos de migração convencionais no domínio misto, tais como deslocamento de fase mais interpolação (PSPI), deslocamento de fase em duas etapas (SS) e Fourier diferenças finitas (FFD), devem ser ajustados para incluir correções de fase e amplitude, de acordo com as novas equações unidirecionais com amplitude verdadeira para meios completamente heterogêneo, onde o campo de velocidades tem variação lateral, além de vertical. Também experimentos numéricos em dados sintéticos de tiro comum 2D são apresentados, bem como as comparações das amplitudes recuperadas sobre os refletores, usando-se os esquemas de migração convencional e os esquemas com correções de amplitude propostos.

Abstract

Depth migration based on one-way wave equations (OWWE) has been used as a powerful tool for imaging complex structures, associated with salt bodies, with less computational cost than reverse time migration. Unfortunately, the OWWE are not equivalent to the acoustic wave equation whose behavior they are designed to mimic, leading to a migrated wavefield that lacks correct amplitude and phase behavior, even though it is kinematically correct. The amplitude errors in one-way wave equations are related to the fact that one way wave equations fail to conserve energy and reciprocity, two widely recognized fundamental properties of the two-way wave equation.

When dynamic information after migration is required, such as amplitudes to AVA studies, or more correct amplitudes along the reflectors in the zero offset image are needed, it is necessary modify the OWWE to explicitly include derivatives of the medium velocity through both, the introduction of an extra term with explicit dependence of vertical velocity variation $v_z(x, y, z)$, and the modification of the transverse Laplacian operator to include terms with explicit dependence of transverse velocity variations ($v_x(x, y, z), v_y(x, y, z)$). The resulting new equations are called true-amplitude one-way wave equations (TA-OWWE).

In a vertically smoothly varying $v(z)$ medium, the true-amplitude one-way wave equations give the same amplitude as the acoustic wave equation up to the first order in the WKBJ approximation. The necessary amplitude correction can be applied in the global wavenumber domain.

In this thesis, the true-amplitude one-way wave equations (TA-OWWE) are analyzed in detail, moreover, it is described how the conventional migration algorithms in the mixed domain, such as phase shift plus interpolation (PSPI), split step (SS), and Fourier finite difference (FFD), can be adjusted to make corrections in the amplitudes in agreement with the true-amplitude one-way wave equations for laterally varying media. 2D numerical experiments with common-shot synthetic data are presented and the amplitudes recovered along the reflectors with conventional and true-amplitude one-way wave equations migration are compared.

Índice

Resumo	iv
Abstract	vi
Índice	vii
Índice de Figuras	ix
Introdução	1
1 Migração pré-empilhamento por continuação dos campos de onda em profundidade	5
1.1 Introdução	5
1.2 Princípios básicos	5
1.3 Equações de ondas unidirecionais (OWWE)	13
1.4 Solução numérica das equações de ondas unidirecionais	16
1.5 Obtenção dos CIGs na migração de tiro comum	20
2 Equações de ondas unidirecionais com amplitude verdadeira	23
2.1 Introdução	23
2.2 Equações iconal e de transporte	24
2.2.1 Motivação	24
2.2.2 Meio com variação lateral da velocidade	26
2.3 Migração/inversão Kirchhoff versus migração através das OWWE	27
2.3.1 Refletividade num campo de velocidades variando com a profundidade	27
2.3.2 Campo de velocidades com variação lateral	31
3 Condição de imagem tipo deconvolução	33
3.1 Introdução	33
3.2 Técnicas de estabilização	34
3.3 Testes numéricos	36

4	Operadores de continuação no domínio misto com correção de amplitude	43
4.1	Introdução	43
4.2	Operador <i>phase shift</i> com amplitude verdadeira	44
4.3	Operador PSPI com amplitude verdadeira	51
4.4	Operadores SS e FFD com amplitude verdadeira	60
5	Conclusões	81
	Agradecimentos	83
	Referências	84
A	Equação Iconal e de transporte	88
B	Aproximação assintótica das OWWE com amplitude verdadeira	91

Índice de Figuras

1.1	Aproximação linear de primeira ordem para o campo espalhado.	8
1.2	Modelo em profundidade. Os refletores estão dispostos sobre um campo de velocidade constante ($v = 2000$ m/s).	9
1.3	Seção de tiro comum. Os receptores e fonte ao longo da superfície, com a fonte na posição $x = 10000$ m.	9
1.4	(a) Espectro dos dados $(x; \omega)$ na profundidade $z = 1500$ m do campo descendente P_D , (b) do campo ascendente P_U e (c) a imagem migrada até a profundidade máxima de 1500 m.	10
1.5	(a) Espectro dos dados $(x; \omega)$ na profundidade $z = 2500$ m do campo descendente P_D , (b) do campo ascendente P_U e (c) a imagem migrada até a profundidade máxima de 2500 m.	11
1.6	(a) Espectro dos dados migrados $(x; \omega)$ na profundidade $z = 3500$ m do campo descendente P_D , (b) do campo ascendente P_U e (c) a imagem migrada até a profundidade máxima de 3500 m.	12
1.7	Campo de velocidades variando com a profundidade: $v(z) = 2000 + 0.3z$. . .	21
1.8	Seção de imagem de ponto comum, dados no domínio do afastamento em subsuperfície (ODCIG), na posição $x = 4000$ m.	22
1.9	Seção de imagem de ponto comum, dados no domínio do parâmetro de raio p_{h_x} , associado ao afastamento em subsuperfície h_x , na posição $x = 4000$ m. .	22
2.1	Parâmetros envolvidos na função peso da migração/inversão Kirchhoff em um meio $v(z)$	29
2.2	Relação do vetor de onda k_s com o ângulo α para um raio num meio $v(z)$. .	30
3.1	Modelo de quatro refletores planos inseridos no campo de velocidades $v(z) = 2000 + 0,3z$ m/s.	38
3.2	Mapas de iluminação $I_{pobre}(x, z)$ para os pontos com pobre iluminação (o valor zero indica um ponto com boa iluminação): $\epsilon = 1.0$ (a); $\epsilon = 0.5$ (b) e $\epsilon = 0.1$ (c).	39
3.3	Imagens migradas: $\epsilon = 1.0$ (a); $\epsilon = 0.5$ (b) e $\epsilon = 0.1$ (c).	40

3.4	Mapas de iluminação $I(x; \omega)$ na profundidade $z = 1000$ m: sem estabilização (a); estabilização por um parâmetro constante, $\delta = 0, 1$ (b); estabilização por uma função média na frequência, $\delta = 0, 1$ (c); estabilização por suavização - Filtro com 100 amostras (d) e estabilização por critério de iluminação, $\epsilon = 1, 0$ (e).	41
3.5	Coeficiente de reflexão recuperado na imagem migrada através da estabilização: eq. 3.5 e $\lambda = 0, 1$ (a); eq. (3.6) e $\lambda = 0, 1$ (b); eq. (3.8) e suavização com filtro triangular de 100 amostras (c) e critério de iluminação eq. (3.10) e $\epsilon = 1, 0$ (d).	42
4.1	Resultado da migração usando o operador <i>phase shift</i> convencional.	48
4.2	Resultado da migração usando-se o operador <i>phase shift</i> com amplitude verdadeira.	48
4.3	Amplitudes recuperadas ao longo dos refletores da imagem migrada (Figura 4.1).	49
4.4	Amplitudes recuperadas ao longo dos refletores da imagem migrada (Figura 4.2).	49
4.5	Imagem ODCIG obtida através da migração “phase shift” com amplitude verdadeira, posição $x = 4000$ m.	50
4.6	Imagem de ponto comum no domínio do parâmetro de raio p_{h_x} obtida através da migração “phase shift” com amplitude verdadeira, posição $x = 4000$ m.	50
4.7	Primeira e segunda ordem da aproximação do operador $(1 + X^2)^{-1/4}$	52
4.8	Modelo de quatro refletores planos inseridos num campo de velocidades $v(x) = 2000 + 0.2x$ m/s.	54
4.9	Dado gerado através do modelamento tipo Kirchhoff para um meio $v(x)$	54
4.10	Resultado da migração através do algoritmo PSPI convencional.	55
4.11	Resultado da migração usando o algoritmo PSPI com correção de amplitude.	55
4.12	Amplitudes recuperadas ao longo dos refletores - algoritmo PSPI convencional (Figura 4.10).	56
4.13	Amplitudes recuperadas ao longo dos refletores - algoritmo PSPI com correção de amplitude (Figura 4.11).	56
4.14	Resultado da migração com o algoritmo PSPI convencional.	58
4.15	Resultado da migração com o algoritmo PSPI com correção de amplitude.	58
4.16	Imagem da estrutura falhada obtida através do método PSPI convencional (à esquerda) e PSPI com correção de amplitude (à direita).	59
4.17	Imagem do reservatório profundo obtida através do método PSPI convencional (à esquerda) e PSPI com correção de amplitude (à direita).	59

4.18 Imagem obtida através do método SS convencional.	67
4.19 Imagem obtida através do método SS com correção de amplitude.	67
4.20 Amplitudes recuperadas ao longo dos refletores da seção migrada através do método SS convencional.	68
4.21 Amplitudes recuperadas ao longo dos refletores da seção migrada através do método SS com correção de amplitude.	68
4.22 Resultado da migração SS convencional	69
4.23 Resultado da migração SS com correção de amplitude	69
4.24 Detalhe da parte rasa, até 1 km, do resultado da migração com o método SS convencional (Figura 4.22).	70
4.25 Detalhe da parte rasa, até 1 km, do resultado da migração com o método SS com correção de amplitude (Figura 4.23).	70
4.26 Aproximação do operador $(1 + X^2)^{1/4}$ com termos de primeira e segunda ordens.	72
4.27 Imagem obtida através do algoritmo FFD convencional.	73
4.28 Imagem obtida através do algoritmo FFD com correção de amplitude e fase.	73
4.29 Amplitudes recuperadas ao longo dos refletores do resultado da migração FFD convencional (Figura 4.27).	74
4.30 Amplitudes recuperadas ao longo dos refletores do resultado da migração FFD com correção de amplitude (Figura 4.28).	74
4.31 Modelo de quatro refletores planos e o campo de velocidades $v(x, z) = 2000 + 0, 2x + 0, 3z$ m/s.	75
4.32 Dado obtido através de modelagem tipo Kirchhoff com o campo de velocidades mostrado na Figura 4.31.	75
4.33 Imagem obtida através do algoritmo FFD convencional.	76
4.34 Imagem obtida através do algoritmo FFD com correções de amplitude e fase.	76
4.35 Amplitudes recuperadas ao longo dos refletores do resultado da migração FFD convencional (Figura 4.33).	77
4.36 Amplitudes recuperadas ao longo dos refletores do resultado da migração FFD com correção de amplitude (Figura 4.34).	77
4.37 Imagem obtida através do método FFD convencional.	79
4.38 Imagem obtida através do método FFD com correção de amplitude.	79
4.39 Imagem da estrutura falhada: Método FFD convencional (à esquerda) e FFD com correção de amplitude (à direita)	80
4.40 Imagem do reservatório profundo no modelo Marmousi obtido através do método FFD convencional (à esquerda) e FFD com correção de amplitude (à direita).	80

Introdução

A sísmica de superfície utilizada na exploração de óleo e gás pode ser interpretada como um problema inverso de espalhamento com múltiplas fontes e receptores localizados na superfície da terra. As fontes emitem energia que é propagada como ondas sísmicas em subsuperfície, e os receptores registram a energia que consegue chegar à superfície da terra, após complexos processos de dispersão e espalhamento do campo de onda causados pelas heterogeneidades do meio. As mudanças na direção de propagação da energia e os processos de partição de energia, associados aos fenômenos de reflexão, transmissão, conversão de modo e difração do campo de onda, junto com uma correta descrição do espalhamento geométrico e das perdas de energia por atenuação, dão uma descrição cinemática e dinâmica correta da propagação dos campos de onda sísmicos.

O problema inverso, conhecido como imageamento estrutural ou migração, consiste em determinar a posição dos refletores em subsuperfície, utilizando dados sísmicos registrados associados às reflexões primárias do campo de onda compressional, onda P, junto com um macro-modelo de velocidades da onda P. Para isto, somente os tempos de percurso das ondas sísmicas são de interesse.

Se além da imagem estrutural, também se tem interesse na determinação da função refletividade, com o objetivo de obter informação litológica através de processos de inversão, as amplitudes sísmicas devem ser levadas em conta. Especificamente, o estudo conhecido como análise de variação de amplitude versus ângulo (AVA) permite determinar parâmetros físicos através da inversão das curvas de variação do coeficiente de reflexão com o ângulo, num ponto determinado do refletor. Convencionalmente, a análise de variação de amplitude versus ângulo (AVA) é feita nas famílias de ponto médio comum (CMP), após as correções de sobre tempo normal (NMO) e espalhamento geométrico, o que leva a suposição implícita de um modelo de camadas plano-paralelas (Resnick et al., 1987). Por isto, continua sendo um desafio o desenvolvimento de técnicas de migração que forneçam amplitudes corretas para análise de AVA após a migração (Deng and McMechan, 2007), em meios estruturalmente complexos.

Nesta direção, os estudos de migração conhecidos como “migração com amplitude verdadeira” ou “migração/inversão” têm apontado para o desenvolvimento de técnicas que, além de posicionar corretamente o refletor, proporcionem um coeficiente de reflexão num determinado ângulo que não dependa do espalhamento geométrico dos campos de onda. Desta forma, o termo “migração com amplitude verdadeira” se traduz na correção do efeito do espalhamento geométrico, estando fora do alcance desta tese as correções de amplitude por transmissão e as perdas por atenuação.

A escolha do modelo direto, assim como do método de solução das equações que governam a propagação das ondas, são etapas fundamentais da inversão. Para o problema de migração/inversão de dados associados às reflexões primárias de ondas PP (reflexão de onda P para P) tratado nesta tese, a equação da onda acústica modela de forma correta a propagação da onda compressional no macromodelo de velocidades.

Se a aproximação assintótica da equação acústica da onda é utilizada para a formulação da migração/inversão, as soluções das equações iconal e de transporte se fazem necessárias, e essa técnica é conhecida como migração/inversão Kirchhoff, a qual tem sido estudada extensivamente nas últimas décadas (Bleistein et al., 2001; Schleicher et al., 2007). Em meios geológicos complexos as migrações Kirchhoff têm problemas para levar em conta os múlti-caminhos, além das limitações decorrentes da aproximação assintótica. Em razão disso, as técnicas de imageamento baseadas na continuação dos campos de ondas no tempo ou em profundidade têm sido amplamente desenvolvidas.

Uma extensão da migração reversa no tempo (do inglês RTM) que compensa o espalhamento geométrico, as perdas por atenuação e por transmissão foi apresentada por Deng and McMechan (2007). No entanto, o alto custo computacional continua a ser uma grande limitação desta técnica de migração.

Alternativamente, a migração por continuação dos campos de ondas em profundidade, baseada nas equações de ondas unidirecionais (OWWE, do inglês One-Way Wave Equations), para descrever a propagação de campos de onda ascendentes e descendentes (Claerbout, 1971), está transformando-se numa melhor opção frente aos métodos integrais Kirchhoff, por sua capacidade de levar em conta, de forma natural os múlti-caminhos, melhorando assim o imageamento de estruturas complexas com fortes contrastes de velocidade (Biondi, 2006), tais como os associados a corpos de sal com interfaces irregulares e pelo fato de proporcionar uma solução aproximada em toda a faixa de frequências do dado sísmico, além de ter um custo computacional menor que a migração RTM.

No entanto, é conhecido que as equações de ondas unidirecionais falham em conservar energia e reciprocidade (Godin, 1999; Wapenaar, 1996; Wapenaar, 1998), duas propriedades

fundamentais da equação da onda completa e, portanto, criam erros nas amplitudes dos campos propagados. Um novo conjunto de equações unidirecionais, conhecidas como equações unidirecionais com amplitude verdadeira, são apresentadas nos trabalhos de Zhang (1993) e Zhang et al. (2001a), mostrando que com base na aproximação da teoria do raio as soluções deste novo conjunto de equações satisfazem as mesmas equações iconal e de transporte que a equação da onda completa.

Nos trabalhos de Zhang et al. (2003) e Zhang et al. (2005), é demonstrado que as soluções, usando-se a aproximação da teoria do raio, das novas equações de ondas unidirecionais com amplitude verdadeira, utilizando-se também uma nova condição inicial para o campo descendente (Wapenaar, 1990), quando substituídas na condição de imagem, produzem a mesma fórmula integral da migração/inversão Kirchhoff (Keho and Beydoun, 1988). Desta forma, novas técnicas de migração/inversão, baseadas nas novas equações de ondas unidirecionais, precisam ser desenvolvidas e avaliadas em relação às aproximações numéricas dos operadores pseudo-diferenciais envolvidos.

Entre as diferentes técnicas de aproximação numérica do operador pseudo-diferencial raiz quadrada, envolvido nas equações de ondas unidirecionais, são eficientemente utilizadas aproximações que fazem um primeiro deslocamento de fase com velocidade constante (*Phase shift*, PS, (Gazdag, 1978)) no domínio da frequência temporal-número de onda, junto com correções no domínio espacial, que levam em conta as variações laterais da velocidade.

O propósito desta tese é estender os esquemas de deslocamento de fase mais interpolação (*Phase shift plus interpolation*, PSPI, (Gazdag and Sguazzero, 1984)), deslocamento de fase em duas etapas (*Split-step*, SS, (Stoffa, Fokkema, de Luna Freire and Kessinger, 1990)) e Fourier diferenças finitas (*Fourier finite difference*, FFD, (Ristow and Rühl, 1994)), para esquemas baseados nas novas equações unidirecionais com amplitude verdadeira, analisando para cada caso que tipo de correção de amplitude pode ser obtido e que modificação nos operadores se faz necessária. Desta forma, se apresenta um novo cenário para geração de imagens de ponto comum (*Common image gathers*, CIGs, (Sava and Fomel, 2000; Rickett and Sava, 2002)) que proporcione amplitudes mais precisas para análise de AVA após a migração.

Esta tese está organizada na seguinte forma: No Capítulo 1, discute-se a migração pré-empilhamento em profundidade através da continuação dos campos de ondas unidirecionais, com operadores convencionais. Os algoritmos PS, PSPI, SS e FFD que serão estendidos para as novas equações de ondas unidirecionais com amplitude verdadeira são brevemente apresentados. No Capítulo 2, são apresentadas as equações de ondas unidirecionais com amplitude verdadeira e, também, verifica-se que a partir da aproximação da teoria do raio são

obtidas as mesmas equações iconal e de transporte, que seriam obtidas a partir da equação da onda completa. Utilizando a aproximação assintótica, demonstra-se também a equivalência entre a função refletividade, obtida através da aplicação da condição de imagem aos campos unidirecionais com amplitude verdadeira, com a função refletividade obtida através da formulação integral da migração/inversão Kirchhoff. Também se discute a importância da representação correta da fonte, como condição de fronteira para a extrapolação do campo descendente. No Capítulo 3, discute-se o problema da instabilidade da condição de imagem tipo deconvolução, incluindo-se uma comparação de diferentes técnicas de estabilização. Os novos esquemas de migração propostos PS, PSPI, SS e FFD, baseados nas equações de ondas unidirecionais com amplitude verdadeira, são introduzidos no Capítulo 4, sendo apresentados os resultados dos experimentos numéricos em dados sintéticos, para apenas um único tiro, bem como em dados sintéticos padrões utilizados na área de migração em profundidade. Finalmente no Capítulo 5 são apresentadas as conclusões. Também são discutidas dificuldades encontradas no trabalho e perspectivas de trabalhos futuros.

Um resumo da aproximação assintótica da teoria do raio e um detalhamento da obtenção das equações iconal e de transporte a partir das equações das ondas unidirecionais com amplitude verdadeira num meio completamente heterogêneo são apresentados nos Apêndice A e B, respectivamente.

1

Migração pré-empilhamento por continuação dos campos de onda em profundidade

1.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos os princípios básicos da migração por continuação dos campos de onda em profundidade, a qual está baseada nas equações das ondas unidirecionais, que descrevem a propagação do campo de onda ascendente e descendente. Uma derivação das equações das ondas unidirecionais e dos métodos para a solução numérica, enfatizando os algoritmos *phase shift* (PS), *phase shift plus interpolation* (PSPI), *split-step* (SS) e *Fourier finite difference* (FFD), são apresentados. Finalmente se discute como o princípio de imageamento, proposto por Claerbout (1971), pode ser estendido para se obter as imagens de ponto comum (CIGs) para análise de variação de amplitude com o ângulo (Sava and Fomel, 2000; Rickett and Sava, 2001; Rickett and Sava, 2002).

1.2 Princípios básicos

Os métodos de migração pré-empilhamento por continuação dos campos de onda são baseados na aplicação consecutiva de dois passos:

- continuação numérica dos campos de onda, isto é, propagação do campo de onda da fonte e propagação reversa do campo de onda registrado em superfície.

- formação da imagem através da aplicação de uma condição de imagem aos campos de onda propagados.

A continuação numérica dos campos de onda pode ser feita na dimensão temporal, utilizando-se a equação da onda completa, conhecida como migração reversa no tempo. Neste caso, o campo de onda da fonte é propagado no tempo direto (modelamento), enquanto o campo registrado é propagado no tempo reverso (propagação reversa).

Se os dados são migrados tomando cada tiro como um experimento simples e independente, o domínio de migração dos dados é conhecido como migração de tiro comum. Neste caso, representamos o campo de onda registrado em superfície como $P_g^{s_i}(x, y, z = 0; t)$ e o campo que modela a função fonte $P_s^{s_i}(x, y, z = 0; t)$, onde s_i representa a localização do i -ésimo tiro. Segundo o princípio de imageamento de Claerbout (1971), o refletor existe nos pontos da subsuperfície onde a onda depropagada coincide no tempo e no espaço com a onda modelada, e pode ser representada através dos campos de onda continuados na forma (Biondi, 2006):

$$I(x_\eta, y_\eta, z_\eta) = \sum_i \sum_t P_s^{s_i}(x, y, z; t) P_g^{s_i}(x, y, z; t), \quad (1.1)$$

onde distingue-se entre as coordenadas no espaço imagem (x_η, y_η, z_η) e as coordenadas do espaço físico (x, y, z) , embora estes dois espaços usualmente coincidam. É importante ressaltar que a condição de imagem (1.1) é feita para proporcionar uma imagem estrutural correta, isto é, representar apenas a parte cinemática.

A migração por continuação dos campos de onda unidirecional em profundidade tem vantagens e limitações em relação à continuação dos campos no tempo. Entre as vantagens podemos citar:

- A continuação do campo de onda pode ser feita no domínio da frequência temporal (ω) com redução da demanda de tempo e memória no computador em relação a migração RTM;
- As descontinuidades no modelo de velocidade não criam os artefatos criados na migração RTM na condição de imagem;
- O campo de onda é separado em campos ascendentes e descendentes tornando mais intuitiva a representação das reflexões.

Como desvantagens podem ser citadas:

- O não imageamento com ondas de retorno de forma direta devido à supressão da propagação para cima;

- Dificuldades no imageamento de refletores de grande inclinação devido a aproximação necessária do operador raiz quadrada;
- Fornece informações de amplitude incorretas.

Entretanto, a migração RTM não sofre de nenhum destes problemas, por utilizar a equação acústica da onda completa para continuar os campos.

Na migração por continuação dos campos de onda em profundidade, o campo de onda da fonte é propagado como um campo de onda descendente $P_D^{s_i}(x, y, z; \omega)$, enquanto o campo registrado é depropagado como um campo ascendente $P_U^{s_i}(x, y, z; \omega)$. Esses dois campos são continuados para baixo em profundidade de forma recursiva. As seguintes expressões, para um meio com velocidade constante, são utilizadas para ilustrar como a continuação do campo de onda em profundidade é feito como um processo de extrapolação recursiva para baixo:

$$\begin{cases} P_D^{s_i}(k_x, k_y, z + \Delta z; \omega) = P_D^{s_i}(k_x, k_y, z; \omega) \exp(-ik_z \Delta z), \\ P_U^{s_i}(k_x, k_y, z + \Delta z; \omega) = P_U^{s_i}(k_x, k_y, z; \omega) \exp(ik_z \Delta z), \end{cases} \quad (1.2)$$

onde k_z expressa a relação de dispersão, também chamado de operador raiz-quadrada

$$k_z = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2} (k_x^2 + k_y^2)}. \quad (1.3)$$

Claerbout (1971) mostra que a posição do refletor corresponde ao “lag” zero da correlação cruzada na dimensão temporal dos campos de onda descendente e ascendente, que equivale no domínio da frequência com:

$$I(x_\eta, y_\eta, z_\eta) = \sum_i \sum_\omega P_U^{s_i}(x, y, z; \omega) P_D^{s_i*}(x, y, z; \omega), \quad (1.4)$$

onde $*$ representa o complexo conjugado.

Uma condição de imagem dinâmica pode ser derivada a partir do seguinte raciocínio. Partindo de uma aproximação linear de primeira ordem para o campo espalhado, então, a partir dos campos ψ_{inc} e ψ_{refl} associados ao tiro s_i , Figura 1.1, temos

$$\psi_{refl}^{s_i}(x, y, z; t_{inc}) = R^{s_i}(x, y, z) \psi_{inc}^{s_i}(x, y, z; t_{inc}), \quad (1.5)$$

então podemos expressar a condição de imagem como uma estimativa da função refletividade na forma

$$R^{s_i}(x, y, z) = \frac{\psi_{refl}^{s_i}(x, y, z; t_{inc})}{\psi_{inc}^{s_i}(x, y, z; t_{inc})}, \quad (1.6)$$

ou no domínio da frequência como

$$R^{s_i}(x, y, z) = \sum_\omega \frac{\psi_{refl}^{s_i}(x, y, z; \omega)}{\psi_{inc}^{s_i}(x, y, z; \omega)}. \quad (1.7)$$

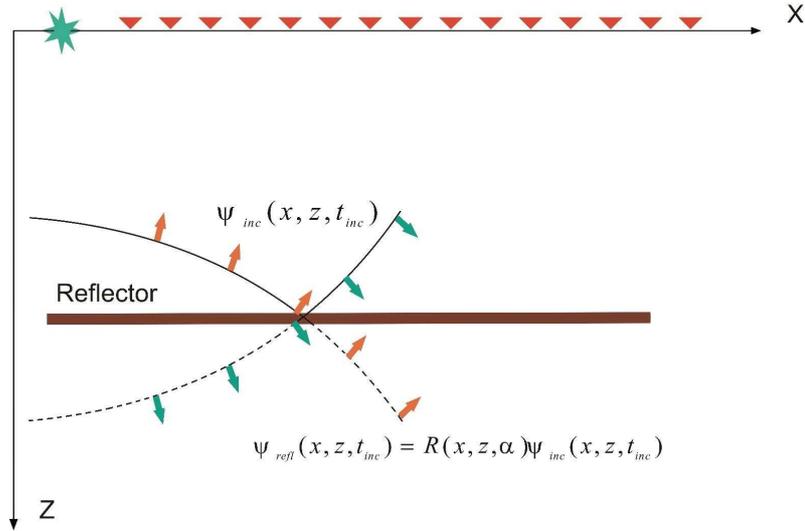


Figura 1.1: Aproximação linear de primeira ordem para o campo espalhado.

Na migração por continuação do campo de onda em profundidade estamos associando o campo de onda $\psi_{inc}^{s_i}(x, y, z; \omega)$ com $P_D^{s_i}(x, y, z; \omega)$ e $\psi_{refl}^{s_i}(x, y, z; \omega)$ com $P_U^{s_i}(x, y, z; \omega)$. Assim, uma outra forma de escrever a condição de imagem dada pela equação (1.7) é

$$R^{s_i}(x, y, z) = \sum_{\omega} \frac{P_U^{s_i}(x, y, z; \omega)}{P_D^{s_i}(x, y, z; \omega)}, \quad (1.8)$$

ou

$$R^{s_i}(x, y, z) = \sum_{\omega} \frac{P_U^{s_i}(x, y, z; \omega) P_D^{s_i*}(x, y, z; \omega)}{P_D^{s_i}(x, y, z; \omega) P_D^{s_i*}(x, y, z; \omega)}, \quad (1.9)$$

conhecida como condição de imagem tipo deconvolução. Esta condição de imagem proporciona uma estimativa da posição do refletor e do coeficiente de reflexão associado a uma posição determinada da fonte s_i , isto é, fornece uma medida do coeficiente de reflexão dependente do ângulo.

O produto $P_D^{s_i}(x, y, z; \omega) P_D^{s_i*}(x, y, z; \omega)$ é conhecido como espectro de amplitude do campo descendente e a função $I^{s_i}(x, y, z)$ definida como

$$I^{s_i}(x, y, z) = \sum_{\omega} P_D^{s_i}(x, y, z; \omega) P_D^{s_i*}(x, y, z; \omega),$$

é chamada de função iluminação total do tiro (Biondi, 2006).

No intuito de ilustrar graficamente estes conceitos, é apresentado um experimento numérico de migração por continuação do campo de onda em profundidade para um perfil de tiro comum. A Figura 1.2 ilustra um modelo 2D com refletores num campo de velocidade constante, $v = 2000$ m/s. A Figura 1.3 representa o dado sísmico modelado para um experimento numérico de um único tiro em superfície na posição 10000 m, com receptores ao longo de todo o eixo x , com afastamentos de -10 km a 10 km com espaçamento de 20 m. As Figuras

1.4a-1.6a, 1.4b-1.6b representam os espectros de amplitude dos campos de onda descendente e ascendente no domínio $(x; \omega)$ nas profundidades $z = 1500, 2500, 3500$, respectivamente, obtidos por continuação recursiva ao longo do eixo z . As Figuras 1.4c-1.6c mostram como a construção da imagem dos refletores vai progredindo em profundidade pela aplicação da condição de imagem (1.4), em cada nível z de extrapolação até o nível z_{max} , enquanto na migração reversa no tempo a construção dos refletores vai progredindo das porções dos refletores mais afastados da fonte às porções mais próximas da fonte (Biondi, 2006).

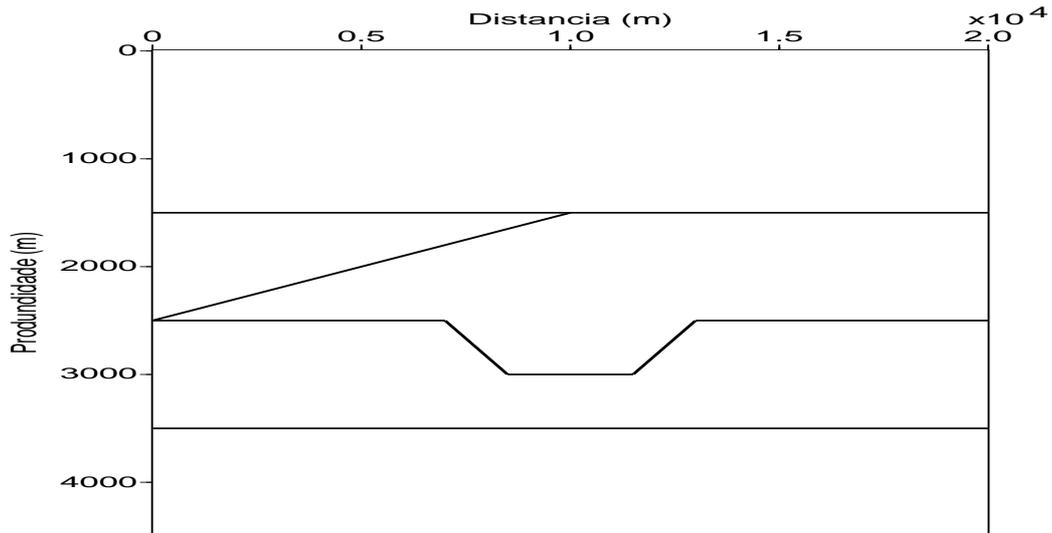


Figura 1.2: Modelo em profundidade. Os refletores estão dispostos sobre um campo de velocidade constante ($v = 2000$ m/s).

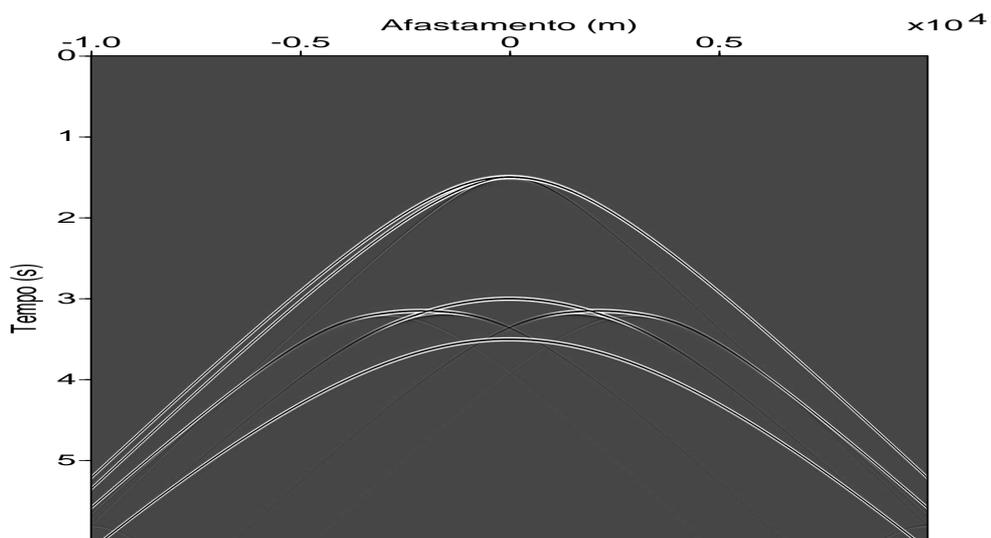


Figura 1.3: Seção de tiro comum. Os receptores e fonte ao longo da superfície, com a fonte na posição $x = 10000$ m.

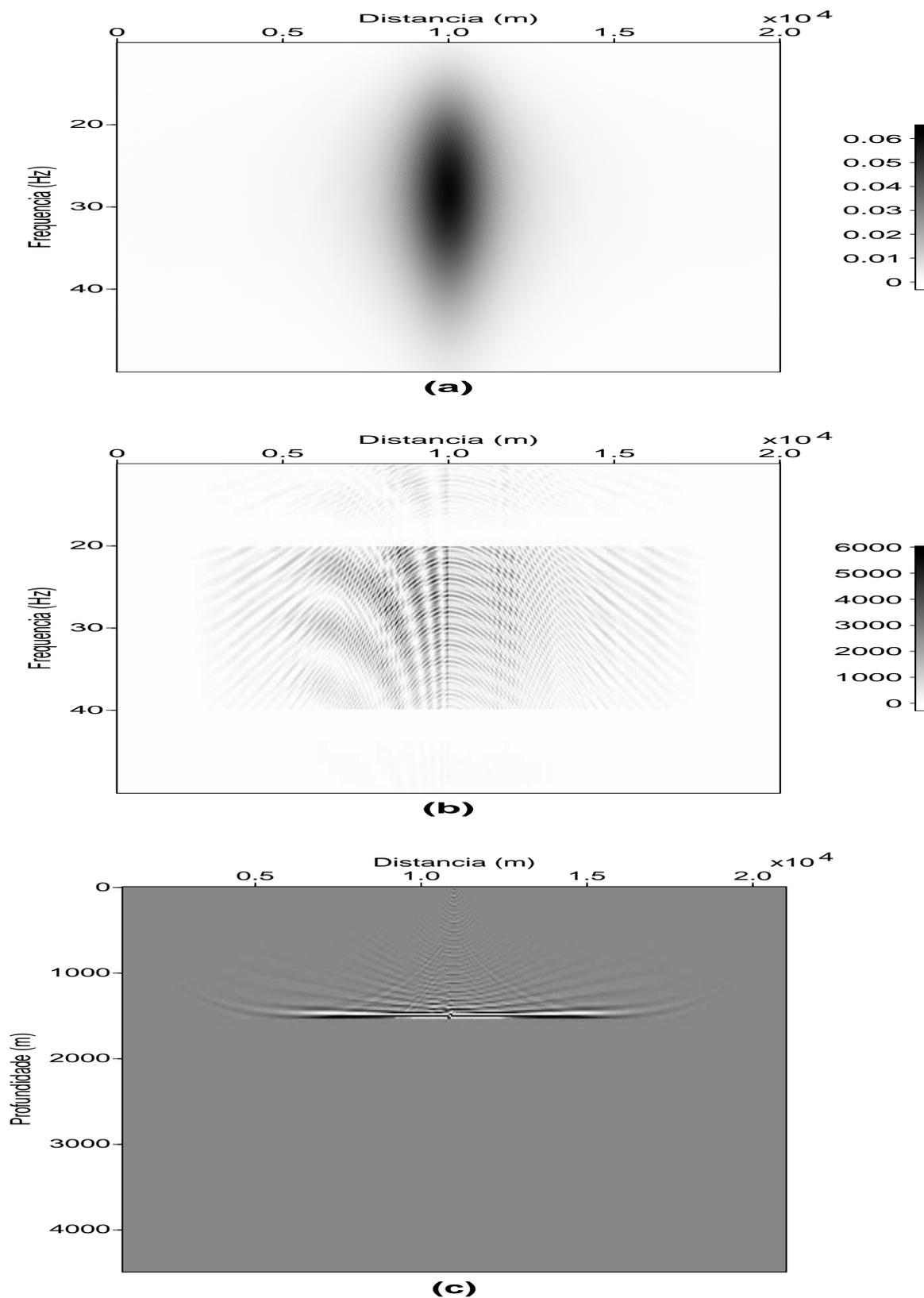


Figura 1.4: (a) Espectro dos dados $(x; \omega)$ na profundidade $z = 1500$ m do campo descendente P_D , (b) do campo ascendente P_U e (c) a imagem migrada até a profundidade máxima de 1500 m.

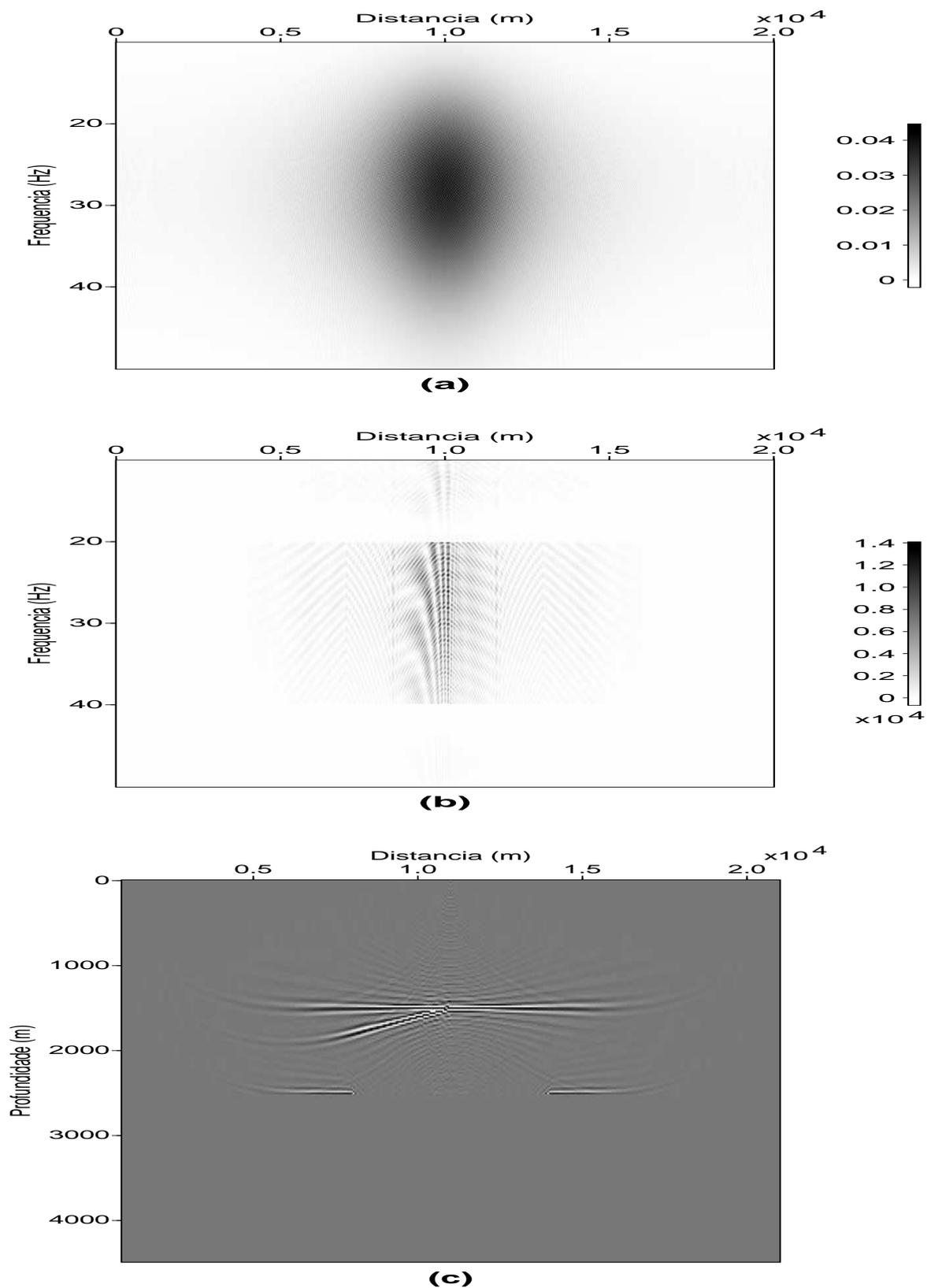


Figura 1.5: (a) Espectro dos dados $(x; \omega)$ na profundidade $z = 2500$ m do campo descendente P_D , (b) do campo ascendente P_U e (c) a imagem migrada até a profundidade máxima de 2500 m.

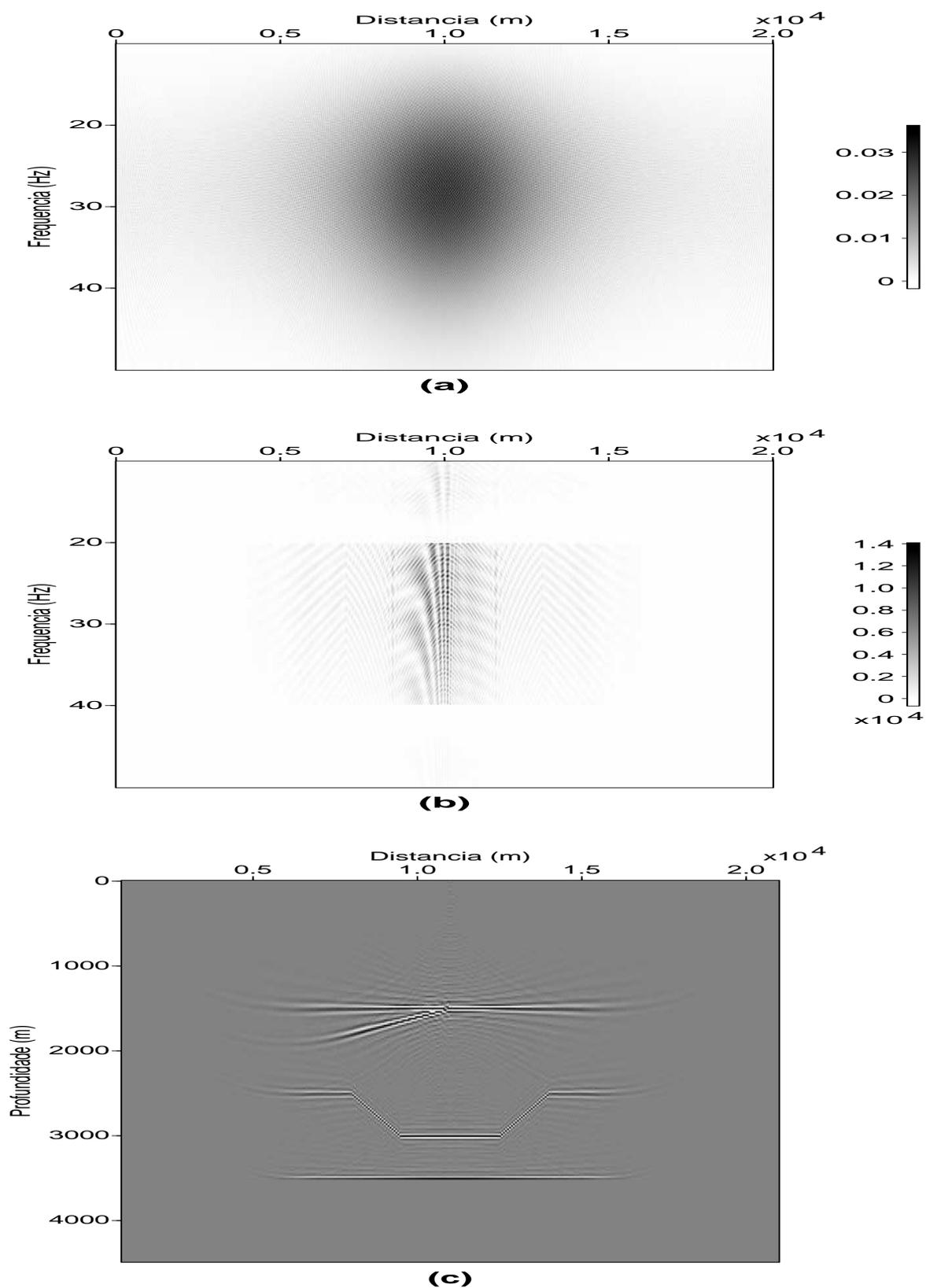


Figura 1.6: (a) Espectro dos dados migrados ($x; \omega$) na profundidade $z = 3500$ m do campo descendente P_D , (b) do campo ascendente P_U e (c) a imagem migrada até a profundidade máxima de 3500 m.

1.3 Equações de ondas unidirecionais (OWWE)

Nesta seção é apresentada uma dedução das equações das ondas unidirecionais, baseada na decomposição do campo de onda acústico em ondas planas (Psencik, 1994). Considera-se que o campo da onda sísmica, registrada na superfície, corresponde à onda compressional que satisfaz a seguinte equação da onda acústica num meio de densidade constante

$$\nabla^2 p = \frac{1}{v^2(x, y, z)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (1.10)$$

O método de Fourier de separação de variáveis procura uma solução da equação (1.10) na forma

$$p(x, y, z; t) = S(x, y, z)T(t),$$

produzindo as equações

$$v^2(x, y, z) \frac{1}{S} \nabla^2 S = -\omega^2, \quad (1.11)$$

$$\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\omega^2, \quad (1.12)$$

onde $-\omega^2$ representa o valor próprio que dá soluções fisicamente aceitáveis do problema, isto é, temporalmente oscilantes. As soluções da equação (1.12), equação do oscilador harmônico, são expressas como

$$T(t) = T_1(\omega)e^{i\omega t} + T_2(\omega)e^{-i\omega t}.$$

Uma solução particular, ou função própria, da equação da onda acústica tem então a forma

$$p_\omega(x_m; t) = S(x_m; \omega) [T_1(\omega)e^{i\omega t} + T_2(\omega)e^{-i\omega t}],$$

para um valor fixo de ω .

Utilizando a propriedade de linearidade da equação acústica, a solução geral pode ser escrita na forma integral

$$p(x_m; t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x_m; \omega) T(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Para aplicar com sucesso o método de Fourier de separação das variáveis espaciais na equação de Helmholtz (1.11), deve-se assumir uma função velocidade dependente só de uma variável espacial. O modelo de uma função velocidade, variando com a profundidade, ou seja, $v = v(z)$, é a representação inicial mais adequada para um modelo da subsuperfície da Terra.

Escrevendo-se

$$S(x_m; \omega) = X(x; \omega)Y(y; \omega)Z(z; \omega),$$

e inserindo esta solução na equação (1.11), obtemos as três equações:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2, \quad (1.13)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2, \quad (1.14)$$

e

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\frac{\omega^2}{v^2(z)} + k_x^2 + k_y^2 = -k_z^2, \quad (1.15)$$

onde $-k_x^2$ e $-k_y^2$ são os valores próprios correspondentes às funções próprias em x e y , respectivamente.

As equações (1.13 e 1.14) correspondem de novo à equação do oscilador harmônico e têm como solução

$$X(x; \omega) = X_1 e^{ik_x x} + X_2 e^{-ik_x x},$$

$$Y(y; \omega) = Y_1 e^{ik_y y} + Y_2 e^{-ik_y y}.$$

Entretanto, a solução da equação (1.15), só pode ser determinada de forma analítica para alguns casos particulares da função velocidade $v(z)$.

No caso de um meio com velocidade constante, a equação diferencial (1.15) se reduz também à equação do oscilador harmônico com solução

$$Z(z) = Z_1(k_x, k_y; \omega) e^{ik_z z} + Z_2(k_x, k_y; \omega) e^{-ik_z z},$$

e k_z é determinado pela relação de dispersão:

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - k_x^2 - k_y^2 > 0, \quad (1.16)$$

onde o sinal na relação de dispersão (1.16) garante que as ondas não são ondas evanescentes.

A solução geral no caso de velocidade constante, corresponde à expansão em ondas planas, na forma:

$$p(x, y, z; t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y W_1(k_x, k_y; \omega) e^{i\omega t - ik_x x - ik_y y - ik_z z} + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y W_2(k_x, k_y; \omega) e^{i\omega t - ik_x x - ik_y y + ik_z z}. \quad (1.17)$$

ou, em termos do vetor vagarosidade $\vec{p} = \vec{k}/\omega$,

$$p(x, y, z; t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y W_1(k_x, k_y; \omega) e^{i\omega(t - p_x x - p_y y - p_z z)} + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y W_2(k_x, k_y; \omega) e^{i\omega(t - p_x x - p_y y + p_z z)}. \quad (1.18)$$

O primeiro termo da expansão em ondas planas (1.17), corresponde aos campos de onda com componente vertical do vetor de onda k_z só com o sinal do k_z definido positivo, isto é, campos se propagando no sentido descendente, enquanto o segundo termo corresponde às ondas se propagando no sentido ascendente, k_z negativo. A decomposição em ondas planas permite assim a separação do campo de onda total, na direção z , em campos ascendente e descendente.

Tomando a expressão do campo de onda descendente no nível z_0 ,

$$p(x, y, z_0; t) = \int d\omega \int dk_x \int dk_y W_1(k_x, k_y; \omega) e^{i\omega t - ik_x x - ik_y y - ik_z z_0}, \quad (1.19)$$

e reescrevendo na forma de uma transformada de Fourier inversa, temos

$$p(x, y, z_0; t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\omega \int dk_x \int dk_y P_D(k_x, k_y, z_0; \omega) e^{i\omega t - ik_x x - ik_y y},$$

onde

$$\frac{1}{(2\pi)^3} P_D(k_x, k_y, z_0; \omega) = W_1(k_x, k_y; \omega) e^{-ik_z z_0},$$

ou

$$W_1(k_x, k_y; \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} P_D(k_x, k_y, z_0; \omega) e^{ik_z z_0}. \quad (1.20)$$

Da mesma forma podemos avaliar o campo de onda descendente no nível z_1 , com $z_1 > z_0$,

$$p(x, y, z_1; t) = \int d\omega \int dk_x \int dk_y W_1(k_x, k_y; \omega) e^{i\omega t - ik_x x - ik_y y - ik_z z_1}, \quad (1.21)$$

e utilizando a expressão obtida para W_1 (1.20), obtém-se:

$$p(x, y, z_1; t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\omega \int dk_x \int dk_y P_D(k_x, k_y, z_0; \omega) e^{i\omega t - ik_x x - ik_y y - ik_z(z_1 - z_0)}. \quad (1.22)$$

Assim, o campo de onda descendente no nível z_1 pode ser obtido de forma recursiva, através de um deslocamento de fase $e^{-ik_z(z_1 - z_0)}$, a partir do campo num nível anterior z_0 no domínio (k_x, k_y, ω) . Isto é

$$P_D(k_x, k_y, z_1; \omega) = P_D(k_x, k_y, z_0; \omega) e^{-ik_z(z_1 - z_0)}. \quad (1.23)$$

Da mesma forma, utilizando o segundo termo da expansão de ondas planas (1.17), correspondente às ondas ascendentes P_U , pode-se mostrar que o campo de onda no nível z_1 é obtido através de um deslocamento de fase $e^{ik_z(z_1 - z_0)}$ do campo no nível z_0 :

$$P_U(k_x, k_y, z_1; \omega) = P_U(k_x, k_y, z_0; \omega) e^{ik_z(z_1 - z_0)}. \quad (1.24)$$

Desta forma é mostrado que para um meio homogêneo os campos P_D e P_U são soluções das equações de primeira ordem

$$\frac{\partial}{\partial z} P_D(k_x, k_y, z; \omega) + ik_z P_D(k_x, k_y, z; \omega) = 0, \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} P_U(k_x, k_y, z; \omega) - ik_z P_U(k_x, k_y, z; \omega) = 0, \quad (1.26)$$

conhecidas como equações das ondas unidirecionais.

Diferenciando as equações (1.25) e (1.26), com relação à variável z e somando-as, obtemos que elas são equivalentes à equação completa para o campo de onda $P(k_x, k_y, z; \omega)$:

$$\frac{\partial^2 P(k_x, k_y, z; \omega)}{\partial z^2} + k_z^2 P = 0, \quad (1.27)$$

onde $P = P_D + P_U$.

O princípio da decomposição do campo de onda acústico, em campos descendentes e ascendentes, obtido para meios homogêneos, pode ser estendido para meios heterogêneos utilizando as equações (1.25) e (1.26) no domínio transformado $(x, y, z; \omega)$, onde o operador k_z se transforma no operador pseudo-diferencial raiz quadrada. Na migração de dados no domínio de tiro comum, a condição de fronteira para o campo descendente P_D^{si} será a função fonte, enquanto a condição de fronteira para o campo ascendente P_U^{si} será o dado registrado nos receptores. Desta forma, os campos de onda unidirecionais são continuados em profundidade através das equações (Claerbout, 1971):

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial z} + i\frac{\omega}{v} \sqrt{1 + \frac{v^2}{\omega^2} \Delta} \right) P_D^{si} = 0, \\ P_D^{si}(x, y, z = 0; \omega) = \delta(x - x_s, y - y_s, z), \end{cases} \quad (1.28)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial z} - i\frac{\omega}{v} \sqrt{1 + \frac{v^2}{\omega^2} \Delta} \right) P_U^{si} = 0, \\ P_U^{si}(x, y, z = 0; \omega) = Q(x, y, \omega), \end{cases} \quad (1.29)$$

onde o operador Δ é o Laplaciano transversal

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

e $Q(x, y; \omega)$ é a transformada de Fourier do dado registrado na superfície.

1.4 Solução numérica das equações de ondas unidirecionais

Os campos de onda da fonte e dos receptores, decompostos em ondas planas, podem ser extrapolados em profundidade no domínio frequência - número de onda $(\omega - \mathbf{k})$, mediante as

equações (1.23) e (1.24), supondo que em cada nível de extrapolação a velocidade é constante. Este método de migração conhecido como *phase-shift* (Gazdag, 1978), é eficiente e bem preciso, quando as velocidades variam somente com a profundidade, migrando corretamente refletores com mergulhos até 90 graus.

Por outro lado, os métodos de migração usando diferenças finitas diretamente nas equações (1.28) e (1.29) no domínio $(\omega - \mathbf{x})$, onde o operador pseudo-diferencial é aproximado por uma série de Taylor ou por frações continuadas, propostas por Muir (Claerbout, 1985), permitem variações arbitrárias da velocidade tanto na vertical como lateralmente. No entanto, a depender do grau de aproximação do operador raiz quadrada, os refletores com grandes mergulhos serão atenuados (Claerbout, 1985; Ristow and Rühl, 1994).

Este trabalho se concentra principalmente nos métodos de migração no domínio misto $(\omega - \mathbf{k}; \omega - \mathbf{x})$, os quais fazem uma primeira mudança de fase no domínio $(\omega - \mathbf{k})$, com um campo de velocidade de referência constante em cada nível de extrapolação, e posteriormente corrige a fase para as variações laterais da velocidade no domínio $(\omega - \mathbf{x})$.

Em Gazdag e Squazzero (1984) foi proposto o primeiro método de extrapolação em domínio misto. Basearam-se na idéia de que as variações laterais podem ser levadas em conta interpolando-se os campos P_1 e P_2 , no domínio $(\omega - \mathbf{x})$, onde P_1 e P_2 são os campos extrapolados pelo operador *phase shift* no domínio $(\omega - \mathbf{k})$, usando duas velocidades de referência, v_{ref1} e v_{ref2} . Este método é conhecido como PSPI (*phase shift plus interpolation*).

Para o caso de duas velocidades de referência (v_{ref1}, v_{ref2}) em cada nível z , com $v_{ref2} > v_{ref1}$, tem-se

$$P_1(x, z + \Delta z, \omega) = A_1 e^{i\theta_1},$$

e

$$P_2(x, z + \Delta z, \omega) = A_2 e^{i\theta_2}.$$

O módulo e a fase obtidos por interpolação serão

$$A = \frac{A_1(v_{ref2} - v(x)) + A_2(v(x) - v_{ref1})}{v_{ref2} - v_{ref1}}$$

e

$$\theta = \frac{\theta_1(v_{ref2} - v(x)) + \theta_2(v(x) - v_{ref1})}{v_{ref2} - v_{ref1}},$$

de onde

$$P(x, z + \Delta z, \omega) = A e^{i\theta}.$$

Ou interpolando-se diretamente nos campos para fazer o processo linear (Etgen, 1994),

$$P(x, z + \Delta z, \omega) = \alpha P_1(x, z + \Delta z, \omega) + (1 - \alpha) P_2(x, z + \Delta z, \omega), \quad (1.30)$$

onde

$$\alpha = \frac{v_{ref2} - v(x)}{v_{ref2} - v_{ref1}}.$$

Neste método o número de velocidades de referência necessárias aumenta quanto maior é a diferença entre as velocidades máxima e mínima em cada nível z . É recomendado utilizar a entropia como medida da dispersão das velocidades (Bagaini et al., 1995), para determinar o número e as velocidades de referência ótimas em cada nível de extrapolação.

O método *split step* (SS) (Stoffa et al., 1990), é uma outra forma de introduzir a correção para variação lateral da velocidade no operador *phase-shif*. O operador de correção SS corresponde à primeira ordem de uma expansão em série de Taylor do operador raiz quadrada, em termos de perturbação da função vagarosidade. O operador raiz quadrada na aproximação SS se expressa como

$$k_z \approx \underbrace{\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{v_{ref}^2} - k^2} \right)}_{\omega-k} + \underbrace{\left(\frac{\omega}{v(x, y, z)} - \frac{\omega}{v_{ref}} \right)}_{\omega-x}, \quad (1.31)$$

onde v_{ref} é o valor médio da velocidade em cada nível de profundidade.

Uma extensão do método *split-step* (SS), para tratar fortes variações laterais da velocidade foi proposta por Kessinger (1992), onde basicamente é aplicada a migração SS utilizando várias velocidades de referência e, em seguida, os campos são então interpolados de acordo com a velocidade local. O método é conhecido como *split-step* estendido ou *split-step* PSPI (SS-PSPI).

Quando a função velocidade no nível de extrapolação não pode ser representada por alguns poucos valores discretos da velocidade, o método SS-PPSI requer várias velocidades de referência para produzir uma imagem de qualidade. Nestes casos são consideradas aproximações de mais alta ordem da série de Taylor do operador raiz quadrada. O método aproximado mais eficiente neste grupo é a migração *Fourier diferenças finitas* (FFD) - (Ristow and Rühl, 1994). Este método se baseia numa aproximação por série de Taylor do erro, que é obtido da diferença entre o valor exato do operador raiz quadrada com a velocidade verdadeira $v(x, z)$ e o valor avaliado usando uma velocidade de referência constante, na forma

$$d = k_z - k_z^{ref} = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2 k_x^2}{\omega^2}} - \frac{\omega}{v_{ref}} \sqrt{1 - \frac{v_{ref}^2 k_x^2}{\omega^2}}, \quad (1.32)$$

onde nas aproximações é utilizada a condição $v_{ref} \leq v$, no intervalo $(z, z + \Delta z)$, de tal forma que a variável $p = \frac{v_{ref}}{v}$ seja menor que a unidade.

O erro d pode ser escrito na forma (Ristow and Rühl, 1994)

$$d = \frac{\omega}{v_{ref}}(p-1) + \frac{\omega}{v_{ref}}p(1-p) \left\{ 1 - \frac{\delta_1}{2}u^2 - \frac{\delta_2}{8}u^4 - \frac{\delta_3}{16}u^6 - \frac{5\delta_4}{128}u^8 + \dots \right\} - \frac{\omega}{v_{ref}}p(1-p), \quad (1.33)$$

onde

$$u^2 = \left(\frac{vk_x}{\omega} \right)^2,$$

e

$$\delta_n = \sum_{l=0}^{2n-2} p^l,$$

tal que a sucessão dos δ_n converge somente se $p < 1$.

A aproximação de ordem zero da equação (1.33), equivale à aproximação *split-step* (1.31).

A aproximação de segunda ordem

$$d \approx \frac{\omega}{v_{ref}}(p-1) - \frac{\omega}{v_{ref}}p(1-p) \left\{ \frac{1}{2}u^2 + \frac{\delta_2}{8}u^4 \right\},$$

é reescrita utilizando a expressão racional

$$\frac{u^2}{a_1 - b_1 u^2} \approx \frac{1}{a_1} u^2 + \frac{b_1}{a_1^2} u^4,$$

onde

$$a_1 = 2,$$

e

$$b_1 = \frac{\delta_2}{2} = \frac{1}{2}(p^2 + p + 1).$$

Desta forma,

$$d \approx \frac{\omega}{v_{ref}}(p-1) - \frac{\omega}{v_{ref}}p(1-p) \frac{u^2}{2 - b_1 u^2}.$$

Por fim, utilizando a equivalência dos operadores k_x^2 e $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, a aproximação FFD de segunda ordem do operador raiz quadrada, pode ser escrita como

$$k_z \approx \underbrace{\sqrt{\frac{\omega^2}{v_{ref}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}}}_I + \underbrace{\left(\frac{\omega}{v} - \frac{\omega}{v_{ref}} \right)}_{II} + \underbrace{\frac{\omega}{v} \left(1 - \frac{v_{ref}}{v} \right) \left(\frac{v^2}{a_1 + b_1 \frac{v^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \right)}_{III}, \quad (1.34)$$

onde o termo I corresponde ao deslocamento de fase aplicado no domínio $(\omega - \mathbf{k})$. Os termos II e III correspondem às aproximações SS e FFD de segunda ordem, respectivamente, os quais são aplicados no domínio $(\omega - \mathbf{x})$.

Vale ressaltar que, embora a aproximação FFD forme uma sucessão convergente, quando a condição $p \leq 1$ é satisfeita, problemas de instabilidade numérica podem aparecer em meios com forte contraste lateral de velocidade, exigindo modificações no método FFD que garantam a sua estabilidade (Biondi, 2002).

1.5 Obtenção dos CIGs na migração de tiro comum

Para análise de velocidade e de amplitude na migração de tiro comum é necessário utilizar a redundância dos dados sísmicos através da introdução de variáveis adicionais às coordenadas espaciais utilizadas na condição de imagem convencional. A introdução de variáveis adicionais permite gerar imagens parciais associadas a uma localização em subsuperfície fixa. Essas imagens são chamadas de imagens de ponto de reflexão comum (CRPs do inglês common-reflection-point) ou famílias de imagem comum (CIGs do inglês common-image gathers). Se a imagem parcial é função do afastamento em superfície do dado, ela é chamada de ODCIG (do inglês offset-domain common-image gather), se é função do ângulo, é chamada de ADCIG (do inglês angle-domain common-image gather). A geração de ADCIGs é mais natural na migração por continuação do campo de onda, dado que a informação de afastamento em superfície é perdida no processo de extrapolação dos campos de onda, enquanto as direções de propagação dos campos incidente (P_D) e refletido (P_U) estão disponíveis em profundidade (Biondi, 2006).

A variável adicional, introduzida na migração de tiro comum por continuação em profundidade, é chamada de afastamento em subsuperfície (h_x, h_y) e corresponde a um deslocamento horizontal nos campo de onda descendente e ascendente na condição de imagem, na forma

$$I(x, y, z, h_x, h_y) = \sum_i \sum_{\omega} P_U^{s_i}(x - h_x, y - h_y, z; \omega) P_D^{s_i^*}(x + h_x, y + h_y, z; \omega). \quad (1.35)$$

Aplicando uma transformação *slant stack*, ao longo do eixo do afastamento em subsuperfície em cada nível de extrapolação (Prucha, Biondi and Symes, 1999), se obtém as famílias nas variáveis parâmetro do raio (p_{h_x}, p_{h_y}), associado ao afastamento em subsuperfície. Para cada ponto-médio (x, y), podemos extrair a imagem $I_{xy}(p_{h_x}, p_{h_y}, z)$, conhecida como imagem de ponto comum no domínio do parâmetro de raio.

A partir das imagens $I_{xy}(p_{h_x}, p_{h_y}, z)$, se obtém as imagens de ponto comum no domínio de ângulo (ADCIG), utilizando as relações

$$k_{h_x} = p_{h_x} \omega, \quad (1.36)$$

e

$$k_{h_x} = -k_z \tan(\gamma), \quad (1.37)$$

onde γ representa o ângulo de abertura no ponto de reflexão.

As famílias de ADCIGs obtidas com as equações de onda unidirecionais e com os métodos Kirchhoff fornecem resultados similares, já que eles descrevem a refletividade como uma

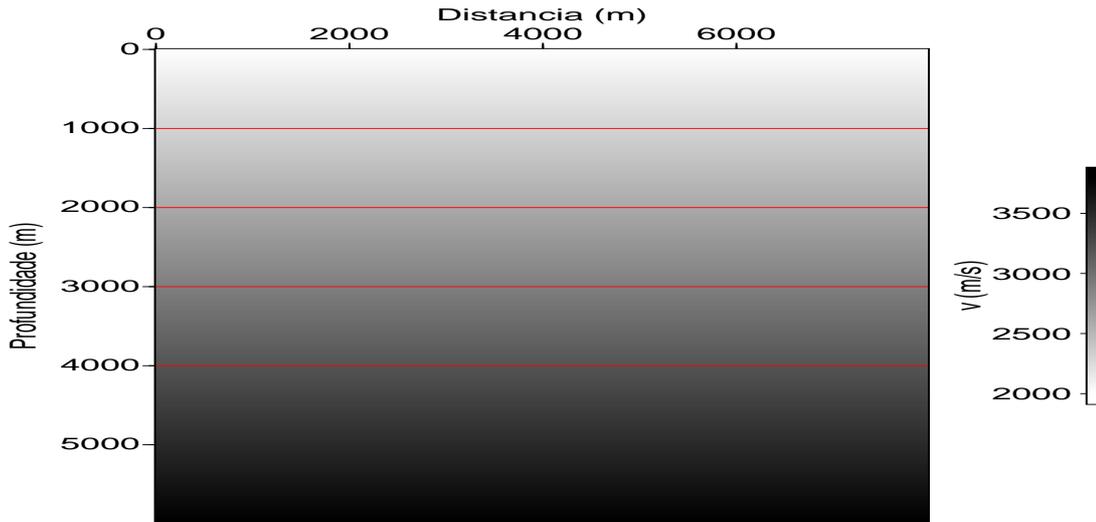


Figura 1.7: Campo de velocidades variando com a profundidade: $v(z) = 2000 + 0.3z$.

função do ângulo de incidência no refletor (Rickett and Sava, 2002). No entanto, as imagens ODCIG não são equivalentes com as obtidas por migração Kirchhoff, onde o afastamento é medido na superfície. Os ODCIGs obtidos mediante a equação da onda focalizam os eventos no afastamento zero, enquanto os ODCIGs obtidos por migração Kirchhoff horizontalizam os eventos.

Para ilustrar graficamente como se comportam as imagens de ponto comum (CIG) no domínio afastamento em subsuperfície e no domínio do parâmetro de raio, foi gerado um dado sísmico, usando-se um campo de velocidades variando com a profundidade $v(z) = 2000 + 0.3z$ m/s, através do modelamento tipo Kirchhoff do pacote SU (Cohen and Stockwell, 2006). O dado contém 300 tiros, desde a posição 1000 m, com espaçamento de 20 m e receptores com afastamentos de -1000 m a 1000 m. Foram simulados refletores com coeficiente de reflexão unitário nas profundidades $z = 1000, 2000, 3000$ e 4000 m, a partir do campo de velocidades mostrado na Figura 1.7.

Os afastamentos em subsuperfície h_x foram calculados para os valores de -800 m a 800 m, com intervalo $dh_x = 8$ m. A Figura 1.8 representa a imagen ODCIG para a posição $x = 4000$ onde toda a energia se concentra no afastamento zero, como esperado por esse processo de imageamento, uma vez que a velocidade de migração foi correta.

Para construir imagens de ponto comum no domínio de parâmetro do raio, foi realizada a transformação *slant stack* ao longo do eixo do afastamento, com valores de -50 s/km a 50 s/km para os parâmetros de raio na transformada $\tau - p$. Na Figura 1.9 se pode observar como os refletores aparecem horizontalizados. Quanto maior a profundidade menor a

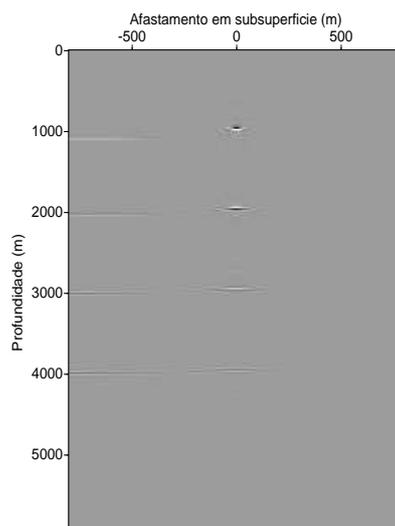


Figura 1.8: Seção de imagem de ponto comum, dados no domínio do afastamento em subsuperfície (ODCIG), na posição $x = 4000$ m.

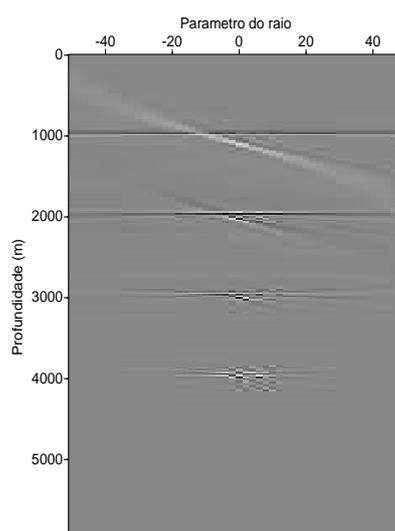


Figura 1.9: Seção de imagem de ponto comum, dados no domínio do parâmetro de raio p_{h_x} , associado ao afastamento em subsuperfície h_x , na posição $x = 4000$ m.

abertura dos ângulos (menor faixa de parâmetros de raio) na seção de imagem comum.

Utilizando-se as relações (1.36) e (1.37) é possível obter as imagens ADCIG que serão de utilidade nos estudos de AVO após o processo de migração. Os artefatos numéricos da Figura 1.8 são causados pela transformação *slant stack* da energia não focalizada no afastamento zero, como se observa na Figura 1.9.

2

Equações de ondas unidirecionais com amplitude verdadeira

2.1 Introdução

Neste Capítulo se utiliza uma metodologia indutiva, a fim de estabelecer as modificações que se fazem necessárias introduzir nas equações das ondas unidirecionais convencionais, no intuito de melhorar a precisão nas fases e nas amplitudes estimadas dos campos de onda unidirecionais, melhorando desta forma a estimativa dos coeficientes de reflexão.

Dois enfoques serão apresentados. No primeiro, se demonstra a equivalência das equações iconal e de transporte, deduzidas das novas equações unidirecionais (Apêndice B), em relação à equação iconal e de transporte, deduzida a partir da equação da onda completa (Apêndice A). Num segundo enfoque, são comparadas as funções refletividades obtidas através de um processo de migração em profundidade baseado nas novas OWWE com amplitude verdadeira, com a obtida através de um processo de migração/inversão Kirchhoff, considerando neste sentido que a migração/inversão Kirchhoff proporciona os valores corretos dos coeficientes de reflexão na aproximação da teoria do raio. Para estabelecer esta última equivalência, a função fonte nas equações de ondas unidirecionais deve ser modificada, como proposto por Wapenaar (1990).

2.2 Equações iconal e de transporte

2.2.1 Motivação

Como apresentado por Zhang et al. (2003), para o caso de um campo de velocidades variando com a profundidade, $v = v(z)$, é possível mostrar de forma simples, que a aproximação de primeira ordem WKBJ das amplitudes, obtida através das equações de ondas unidirecionais, não corresponde com a obtida através da equação da onda completa. Desta forma, pode-se deduzir que tipo de modificação deve ser feita nas equações de ondas unidirecionais.

A equação da onda completa para o caso $v(z)$, no domínio transformado número de onda (k_x, k_y) , tem a forma

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + k_z^2 W = 0,$$

onde

$$k_z = \frac{\omega}{v(z)} \sqrt{1 - \frac{v^2(z)|\mathbf{k}_T|^2}{\omega^2}},$$

com

$$\mathbf{k}_T = (k_x, k_y).$$

Introduzindo o vetor vagarosidade transversal \mathbf{p}_T como

$$\mathbf{p}_T = \frac{\mathbf{k}_T}{\omega},$$

$$p_z = \frac{k_z}{\omega} = \frac{1}{v(z)} \sqrt{1 - (v(z)\mathbf{p}_T)^2},$$

a equação pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \omega^2 p_z^2 W = 0. \quad (2.1)$$

Substituindo a primeira ordem da aproximação assintótica de W (Apêndice A)

$$W = A(z, \mathbf{p}_T) e^{-i\omega\tau(z, \mathbf{p}_T)}, \quad (2.2)$$

na equação (2.1), obtém-se

$$\left\{ -\omega^2 \left[\left(\frac{d\tau}{dz} \right)^2 - p_z^2 \right] A - i\omega \left[2 \frac{d\tau}{dz} \frac{dA}{dz} + \frac{d^2\tau}{dz^2} A \right] + O(1) \right\} e^{-i\omega\tau} = 0. \quad (2.3)$$

O primeiro termo da equação (2.3) corresponde à equação iconal

$$\left[\left(\frac{d\tau}{dz} \right)^2 - p_z^2 \right] = 0,$$

de onde

$$\frac{d\tau}{dz} = \pm p_z. \quad (2.4)$$

Para o segundo termo, temos

$$2 \frac{d\tau}{dz} \frac{dA}{dz} + \frac{d^2\tau}{dz^2} A = 0,$$

como

$$\frac{d^2\tau}{dz^2} = \frac{dp_z}{dz} = -\frac{1}{v^3(z)p_z^2} \frac{dv(z)}{dz},$$

obtemos

$$2p_z \frac{dA}{dz} + \frac{1}{v^3(z)p_z} \frac{dv(z)}{dz} A = 0,$$

ou

$$\frac{dA}{dz} - \frac{1}{2v^3(z)p_z^2} \frac{dv(z)}{dz} A = 0, \quad (2.5)$$

que corresponde à equação de transporte.

Consideremos a mesma aproximação assintótica, equação (2.2), agora para as soluções das equações dos campos de onda unidirecionais

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} \pm ik_z \right\} A_{\pm} e^{\mp ik_z z} = 0, \quad (2.6)$$

ou em termos de p_z

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} \pm i\omega p_z \right\} A_{\pm} e^{-i\omega\tau_{\pm}} = \left\{ i\omega \left[-\frac{d\tau_{\pm}}{dz} \pm p_z \right] A_{\pm} + \frac{dA_{\pm}}{dz} \right\} e^{-i\omega\tau_{\pm}} = 0, \quad (2.7)$$

onde A_+ corresponde à solução para o campo descendente e A_- à solução para o campo ascendente. Da equação (2.7) obtemos a mesma equação iconal que a obtida com a equação completa da onda (eq. (A.5)).

$$\frac{d\tau_{\pm}}{dz} = \pm p_z,$$

garantindo desta forma a equivalência cinemática da equação da onda completa com as equações das ondas unidirecionais.

No entanto, a equação de transporte obtida para as amplitudes

$$\frac{dA_{\pm}}{dz} = 0,$$

não tem a mesma correspondência com a equação (2.5). No intuito de lograr a equivalência dinâmica da equação da onda completa com as equações das ondas unidirecionais, se faz necessário introduzir um novo termo na equação (2.7), que passa a ter a seguinte forma:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} \pm i\omega p_z - \frac{1}{2v^3(z)p_z^2} \frac{dv(z)}{dz} \right\} W = 0, \quad (2.8)$$

para a qual se obtém agora a equação de transporte

$$\frac{dA_{\pm}}{dz} - \frac{1}{2v^3(z)p_z^2} \frac{dv(z)}{dz} A_{\pm} = 0,$$

enquanto a equação iconal permanece sem modificação. Desta forma, as equações unidirecionais modificadas (equação (2.8)), produzem ondas ascendentes e descendentes tanto com tempos de percurso como amplitudes corretas, em comparação às obtidas com a equação da onda completa, tomando-se como solução a aproximação assintótica da teoria do raio.

2.2.2 Meio com variação lateral da velocidade

A extensão do novo termo incluído nos operadores de ondas unidirecionais, para meios heterogêneos, $v = v(x, y, z)$, deve ser feita no domínio (x, y, z) . Para isso é mais conveniente escrever a equação (2.8) na forma

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} \pm ik_z - \frac{\omega^2}{2v^3(z)k_z^2} \frac{dv(z)}{dz} \right\} W = 0, \quad (2.9)$$

ou

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} \pm ik_z - \frac{v_z}{2v(z)} \left[1 + \frac{(v\mathbf{k}_T)^2}{\omega^2 - (v\mathbf{k}_T)^2} \right] \right\} W = 0, \quad (2.10)$$

onde $v_z = \frac{dv(z)}{dz}$, e $(v\mathbf{k}_T)^2$ deve ser interpretado como

$$(v\mathbf{k}_T)^2 = - \left[v \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \cdot \left[v \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] = -\Delta_T.$$

A equação (2.10) pode então ser escrita no domínio (k_x, k_y, z) como

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} \pm i\lambda - \gamma \right\} W = 0, \quad (2.11)$$

com

$$\lambda = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \frac{(v\mathbf{k}_T)^2}{\omega^2}},$$

e

$$\gamma = \frac{v_z}{2v} \left[1 + \frac{(v\mathbf{k}_T)^2}{\omega^2 - (v\mathbf{k}_T)^2} \right].$$

Levando a equação (2.11) para o domínio (x, y, z) , assim como os operadores λ e γ , obtém-se

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} \pm i\Lambda - \Gamma \right\} W = 0, \quad (2.12)$$

onde

$$\Lambda = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 + \frac{\Delta_T}{\omega^2}},$$

e

$$\Gamma = \frac{v_z}{2v} \left[1 - \Delta_T (\omega^2 + \Delta_T)^{-1} \right],$$

com

$$v_z = \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Agora, o campo de velocidades corresponde a um meio completamente heterogêneo, isto é, $v = v(x, y, z)$.

As novas equações de ondas unidirecionais, equação (2.12)), expressas em termos dos operadores pseudo-diferenciais Λ e Γ , proporcionam as mesmas equações iconal e de transporte, num meio heterogêneo $v(x, y, z)$, que aquelas obtidas a partir da equação completa da onda. Neste sentido, as equações (2.12) são denominadas equações das ondas unidirecionais com amplitude verdadeira. Uma demonstração detalhada dessa equivalência, baseada na demonstração apresentada em Zhang et al. (2005), e que ressalta a importância do novo operador Laplaciano transversal Δ_T é desenvolvida em detalhes no Apêndice B.

2.3 Migração/inversão Kirchhoff versus migração através das OWWE

A comparação das expressões da refletividade, obtidas através da migração por extrapolação com as equações unidirecionais convencionais, com as obtidas através de um processo de migração Kirchhoff com amplitude verdadeira, permite deduzir a existência de erros de fase e de amplitude na refletividade estimada através das equações unidirecionais convencionais. Esses erros podem ser corrigidos através da modificação das condições de fronteira e da redefinição dos campos de ondas unidirecionais (Zhang et al., 2001a; Zhang et al., 2001b; Zhang et al., 2002; Zhang et al., 2003).

Nesta seção descreve-se como a modificação das condições de fronteira, junto ao novo conjunto de equações unidirecionais com amplitude verdadeira, produzem uma refletividade equivalente à estimada através da migração/inversão Kirchhoff.

2.3.1 Refletividade num campo de velocidades variando com a profundidade

Nos trabalhos de Schleicher et al. (1993) e Bleistein et al. (1999) estão apresentadas de forma geral as funções peso para se obter a migração Kirchhoff com amplitude verdadeira. A migração Kirchhoff pré-empilhamento em 3D com essas funções peso tem a expressão

integral

$$R(\mathbf{x}) \sim \iiint W(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) e^{i\omega(\tau_s + \tau_r)} Q_s(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s, \omega) i\omega d\boldsymbol{\xi} d\omega, \quad (2.13)$$

onde

$$W(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{|h(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})|}{A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)A(\mathbf{x}_r, \mathbf{x})|\nabla(\tau_s + \tau_r)|^2}, \quad (2.14)$$

é a função peso.

$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)$ e $A(\mathbf{x}_r, \mathbf{x})$ são as amplitudes das funções de Green com fonte em \mathbf{x}_s e ponto de observação \mathbf{x} e fonte em \mathbf{x} e ponto de observação em \mathbf{x}_r , respectivamente. τ_s e τ_r são os tempos de percurso desde a fonte e o receptor ao ponto imagem \mathbf{x} . E

$$|h(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})| = \det \begin{vmatrix} \nabla(\tau_s + \tau_r) \\ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \nabla(\tau_s + \tau_r) \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \nabla(\tau_s + \tau_r) \end{vmatrix} \quad (2.15)$$

é o determinante de Beylkin (1985), que corresponde ao Jacobiano da transformação das coordenadas em subsuperfície nas coordenadas em superfície.

Winbow and Schneider (1999) e Zhang et al. (2000) calcularam e simplificaram as funções peso para meios $v(z)$ para o caso 3D. A função peso para dados no domínio de tiro comum fica expressa como:

$$W = \frac{\sqrt{\cos \alpha_{s0} \cos \alpha_{r0}}}{v_0} \sqrt{\frac{\psi_s}{\psi_r}} \sqrt{\frac{\sigma_s}{\sigma_r}}, \quad (2.16)$$

onde ψ e σ são os termos do espalhamento geométrico no plano e fora do plano, α_{s0} e α_{r0} são os ângulos que formam os raios da fonte e do receptor relativos a vertical na superfície, e θ é o ângulo de reflexão, como é indicado na Figura 2.1.

Substituindo-se a equação (2.16) na equação (2.13), obtemos a expressão integral de Kirchhoff para um meio $v(z)$ na forma

$$R(x, y, z) \sim \iiint \frac{\sqrt{\cos \alpha_{s0} \cos \alpha_{r0}}}{v_0} \sqrt{\frac{\psi_s \sigma_s}{\psi_r \sigma_r}} e^{i\omega(\tau_s + \tau_r)} Q_s(x_r, y_r; \omega) i\omega dx_r dy_r d\omega. \quad (2.17)$$

Na migração convencional, através das equações das ondas unidirecionais num meio $v(z)$, os campos de onda U e D são extrapolados em profundidade tanto para os tiros como para os receptores através das equações

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial z} + i\lambda \right) D = 0, \\ D(k_x, k_y, z = 0; \omega) = e^{k_x x_s + k_y y_s}, \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial z} - i\lambda \right) U = 0, \\ U(k_x, k_y, z = 0; \omega) = Q_s(k_x, k_y; \omega), \end{cases} \quad (2.19)$$

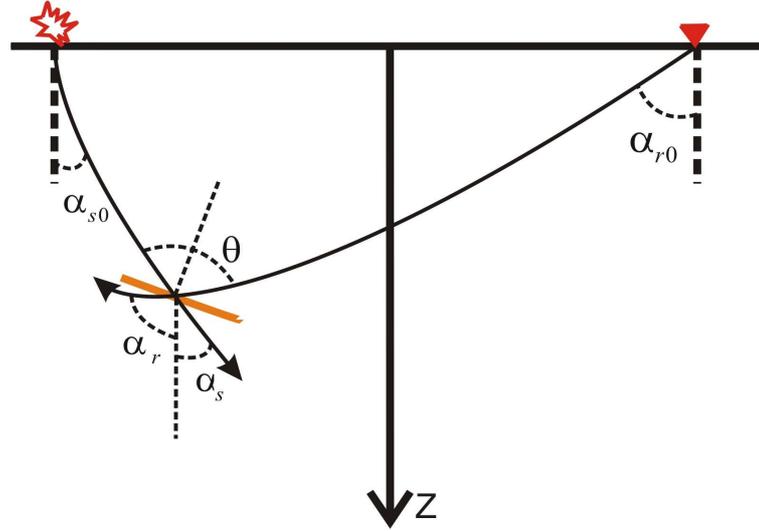


Figura 2.1: Parâmetros envolvidos na função peso da migração/inversão Kirchhoff em um meio $v(z)$.

onde

$$\lambda = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2} (k_x^2 + k_y^2)}.$$

Em Zhang et al. (2001b) são apresentadas expressões assintóticas para os campos de ondas unidirecionais num meio $v(z)$, ou seja, soluções para as equações (2.18) e (2.19), nas formas:

$$D(x, y, z; \omega) \sim \frac{i\omega}{2\pi} e^{-i\omega\tau_s} \sqrt{\frac{\cos \alpha_s}{\psi_s \sigma_s}} \quad (2.20)$$

$$U(x, y, z; \omega) \sim \iint \frac{i\omega}{2\pi} e^{i\omega\tau_r} \sqrt{\frac{\cos \alpha_r}{\psi_r \sigma_r}} Q(x_r, y_r; \omega) dx_r dy_r, \quad (2.21)$$

onde α_s e α_r são os ângulos que formam os raios da fonte e do receptor relativos à vertical na subsuperfície, isto é, no ponto de reflexão, ver Figura 2.1.

Utilizando as expressões (2.20) e (2.21) na condição de imagem da migração por extrapolação recursiva

$$R(x, y, z) = \int \frac{U(x, y, z; \omega)}{D(x, y, z; \omega)} d\omega, \quad (2.22)$$

obtemos uma estimativa da função refletividade na forma

$$R(x, y, z) \sim \iiint \sqrt{\frac{\cos \alpha_r}{\cos \alpha_s}} \sqrt{\frac{\psi_s \sigma_s}{\psi_r \sigma_r}} e^{i\omega(\tau_s + \tau_r)} Q_s(x_r, y_r; \omega) dx_r dy_r d\omega. \quad (2.23)$$

Comparando-se a equação (2.23) com a equação (2.17), conclui-se que a migração através das equações de ondas unidirecionais é correta na parte cinemática, mas contém erros de fase associados ao termo $i\omega$ e erros de amplitude, em relação à migração/inversão Kirchhoff.

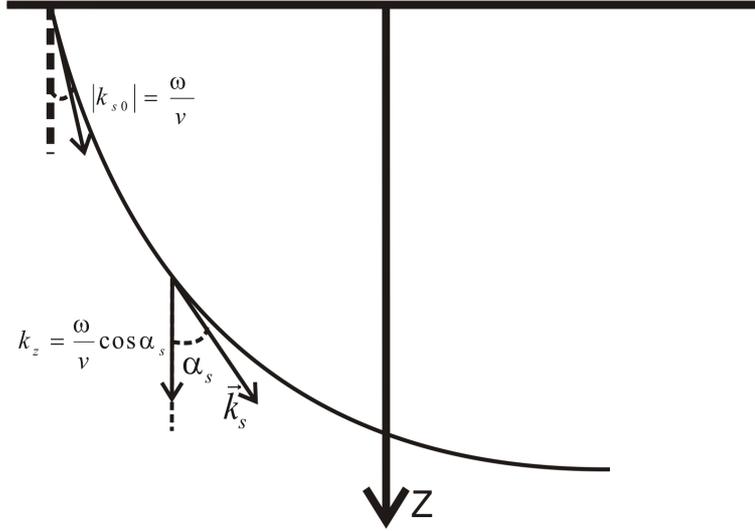


Figura 2.2: Relação do vetor de onda k_s com o ângulo α para um raio num meio $v(z)$.

Introduzindo nas equações (2.18) e (2.19) as condições de fronteira para um modelo mais correto da fonte, como proposto em Wapenaar (1990), obtemos

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial z} + i\lambda \right) D = 0, \\ D(k_x, k_y, z = 0; \omega) = \frac{1}{2i\lambda^{1/2}} e^{k_x x_s + k_y y_s}, \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial z} - i\lambda \right) U = 0, \\ U(k_x, k_y, z = 0; \omega) = \lambda^{1/2} Q_s(k_x, k_y; \omega), \end{cases} \quad (2.25)$$

onde a condição de imagem é aplicada aos novos campos de ondas unidirecionais p_D e p_U , redefinidos por $p_D = \lambda^{-1/2} D$ e $p_U = \lambda^{-1/2} U$. Nota-se que os campos p_D e p_U são equivalentes aos campos p^+ e p^- , introduzidos por Wapenaar (1998) para garantir as propriedades de reciprocidade dos propagadores unidirecionais.

Repetindo a análise assintótica para as equações (2.24) e (2.25) e, observando que $\lambda = \frac{\omega}{v} \cos \alpha$ (ver Figura 2.2), obtemos as expressões

$$D(x, y, z; \omega) \sim \frac{i\omega}{2\pi} e^{-i\omega\tau_s} \sqrt{\frac{\cos \alpha_s}{\psi_s \sigma_s}} \frac{1}{2i\sqrt{\frac{\omega}{v}} \cos \alpha_{s0}}, \quad (2.26)$$

$$U(x, y, z; \omega) \sim \iint \frac{i\omega}{2\pi} e^{i\omega\tau_r} \sqrt{\frac{\cos \alpha_r}{\psi_r \sigma_r}} Q_s(x_r, y_r; \omega) \sqrt{\frac{\omega}{v} \cos \alpha_{r0}} dx_r dy_r. \quad (2.27)$$

Aplicando a condição de imagem

$$R(x, y, z) = \int \frac{p_U(x, y, z; \omega)}{p_D(x, y, z; \omega)} d\omega = \int \frac{\sqrt{\frac{\omega}{v} \cos \alpha_s} U(x, y, z; \omega)}{\sqrt{\frac{\omega}{v} \cos \alpha_r} D(x, y, z; \omega)} d\omega, \quad (2.28)$$

com D e U dado pelas equações (2.26) e (2.27), obtemos a mesma função refletividade derivada pela migração/inversão Kirchhoff conforme equação (2.17).

Pode-se mostrar que os novos campos de onda p_D e p_U satisfazem as equações das ondas unidirecionais com amplitude verdadeira para meios $v(z)$, dados na seção 2.2 através da equação (2.11). Assim, o esquema de migração em profundidade com amplitude verdadeira em meios $v(z)$ assume a forma

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} + i\lambda - \gamma \right) \tilde{p}_D &= 0, \\ \tilde{p}_D(k_x, k_y, z = 0; \omega) &= \frac{1}{2i\lambda} e^{i(k_x x_s + k_y y_s)}, \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} - i\lambda - \gamma \right) \tilde{p}_U &= 0, \\ \tilde{p}_U(k_x, k_y, z = 0; \omega) &= Q(k_x, k_y; \omega), \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

onde \tilde{p}_D e \tilde{p}_U correspondem a transformada de Fourier dos campos p_D e p_U , respectivamente.

Portanto, conclui-se que garantir o princípio da reciprocidade (Wapenaar, 1998) e uma correta representação da fonte nos propagadores unidirecionais, implica na obtenção de amplitudes corretas na imagem migrada de forma equivalente à obtida através da aproximação assintótica da teoria do raio para um meio $v(z)$.

2.3.2 Campo de velocidades com variação lateral

Para um meio heterogêneo, $v = v(x, y, z)$, as equações de ondas unidirecionais com amplitude verdadeira para os campos p_D e p_U são dados por

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} + i\Lambda \right) p_D - \Gamma p_D &= 0, \\ p_D(x, y, z = 0; \omega) &= \frac{1}{2i} \Lambda^{-1} \delta(x - x_s, y - y_s, z), \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} - i\Lambda \right) p_U - \Gamma p_U &= 0, \\ p_U(x, y, z = 0; \omega) &= Q(x, y; \omega). \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

Desenvolvendo-se as representações em termos da função de Green dos campos p_D e p_U (Zhang et al., 2003) nas formas

$$p_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s; \omega) = A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s) e^{-i\omega\tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)}, \quad (2.33)$$

$$p_U(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r; \omega) = 2i\omega \iint \frac{\cos \alpha_r}{v(\mathbf{x}_r)} A(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}) e^{i\omega\tau(\mathbf{x}_r, \mathbf{x})} dx_r dy_r. \quad (2.34)$$

Aplicando a condição de imagem

$$R(\mathbf{x}) = \int \frac{p_U(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r; \omega)}{p_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s; \omega)} d\omega,$$

obtemos a expressão da refletividade

$$R(\mathbf{x}) \sim \iiint i\omega \frac{\cos \alpha_r}{v_r} \frac{A(\mathbf{x}_r, \mathbf{x})}{A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)} e^{i\omega(\tau(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}) + \tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s))} dx_r dy_r d\omega. \quad (2.35)$$

A função refletividade, obtida através das novas equações de ondas unidirecionais, tem a mesma expressão da função refletividade obtida pelo processo de migração/inversão Kirchhoff (Keho and Beydoun, 1988; Bleistein et al., 2001), confirmando que a formulação apresentada, através das equações (2.31) e (2.32), proporciona um novo cenário para se desenvolver algoritmos baseados em campos de ondas unidirecionais com amplitude verdadeira, isto é, com amplitudes corretas compatíveis com as obtidas com a teoria do raio.

3

Condição de imagem tipo deconvolução

3.1 Introdução

Os algoritmos baseados nas equações de ondas unidirecionais com amplitude verdadeira (Zhang et al., 2003; Zhang et al., 2005) precisam de uma condição de imagem tipo deconvolução, onde a razão dos campos de onda ascendente e descendente é utilizado como uma estimativa direta do coeficiente de reflexão especular, associado ao par de raios fonte/receptor, na aproximação linear de primeira ordem do campo espalhado.

Quando o objetivo é somente a parte cinemática do campo de onda, isto é, a determinação da posição dos refletores, a condição de imagem tipo correlação é utilizada sem problemas de estabilidade. A razão da correlação e a densidade espectral do campo de onda descendente $p_D(x, z; \omega)p_D^*(x, z; \omega)$, proposto por Claerbout (1971), fornece uma estimativa do coeficiente de reflexão.

Nos pontos onde a densidade espectral $p_D(x, z; \omega)p_D^*(x, z; \omega)$, também chamada de função iluminação, é zero ou quase zero, a condição de imagem tipo deconvolução se transforma em um processo computacionalmente instável. Diferentes técnicas de estabilização da condição de imagem tem sido propostas, modificando-se a densidade espectral do campo descendente, a fim de evitar a divisão por pequenas quantidades. No entanto, qualquer modificação da densidade espectral do campo de onda descendente modificará os valores estimados do coeficiente de reflexão.

Neste capítulo são comparadas quatro técnicas de estabilização para a condição de im-

agem tipo deconvolução. A primeira técnica soma um valor constante à densidade espectral e é chamada *estabilização por um parâmetro constante*, (Claerbout, 1971). A segunda técnica soma um valor médio na frequência multiplicado por um parâmetro de amortecimento (Valenciano and Biondi, 2003) e é chamada de *estabilização por uma função média na frequência*.

A terceira técnica de estabilização substitui os zeros no mapa da densidade espectral do campo de onda descendente pelos valores dos pontos da vizinhança, através de um processo de suavização (Guitton, Valenciano, Bevc and Claerbout, 2007). Neste caso, o ruído é eficientemente reduzido mas as amplitudes são modificadas a depender do comprimento do filtro utilizado no processo de suavização. Este processo de estabilização será referido como *estabilização por suavização*.

Através da análise do mapa de iluminação do campo de onda descendente em diferentes níveis de extrapolação z , é possível identificar regiões onde a iluminação é muito baixa comparada com o valor médio da iluminação transversal $\langle P_D(x; \omega) P_D^*(x; \omega) \rangle_x$, isto para cada valor ω da frequência. Um critério de estabilização, chamado *estabilização por critério de iluminação*, baseado na relação da iluminação no ponto $(x, z; \omega)$ e o valor médio da iluminação na direção transversal foi proposto em Vivas e Pestana (2007a). Utilizando este novo critério, os zeros no espectro do campo de onda descendente são preenchidos pelo valor médio transversal da iluminação, e os pontos com boa iluminação permanecem inalterados.

Os resultados de um experimento numérico, que faz a migração baseada nas equações dos campos de onda com amplitude verdadeira num meio $v(z)$, através do esquema PS com correções de amplitude (ver seção 4.2), permitirão ilustrar as comparações das quatro técnicas de estabilização descritas.

3.2 Técnicas de estabilização

A condição de imagem tipo deconvolução utiliza a razão dos campos de onda continuados em profundidade p_U and p_D na forma

$$R(x, z) = \sum_{\omega} \frac{p_U(x, z; \omega)}{p_D(x, z; \omega)}, \quad (3.1)$$

ou

$$R(x, z) = \sum_{\omega} \frac{p_U(x, z; \omega) p_D^*(x, z; \omega)}{p_D(x, z; \omega) p_D^*(x, z; \omega)}, \quad (3.2)$$

para obter uma estimativa do coeficiente de reflexão.

A condição de imagem para migração de tiro comum com amplitude verdadeira dada pela equação (3.2) é instável para valores pequenos da densidade espectral do campo de onda

descendente

$$I(x, z; \omega) = P_D(x, z; \omega)P_D^*(x, z; \omega). \quad (3.3)$$

Para evitar a divisão por zero, a condição de imagem deve ser modificada para:

$$R(x, z) = \sum_{\omega} \frac{P_U(x, z; \omega)P_D^*(x, z; \omega)}{P_D(x, z; \omega)P_D^*(x, z; \omega) + V}, \quad (3.4)$$

onde V é uma constante ou uma função das coordenadas espaciais e/ou da frequência que varia suavemente (Claerbout, 1971).

A primeira técnica de estabilização considera V como uma constante δ , ou seja,

$$I_1(x, z; \omega) = P_D(x, z; \omega)P_D^*(x, z; \omega) + \delta, \quad (3.5)$$

onde o valor de δ na prática é determinado de forma empírica.

A segunda técnica de estabilização consiste na seleção de uma função V (Valenciano and Biondi, 2003) que corresponde ao valor médio na frequência da densidade espectral do campo descendente multiplicado pelo parâmetro de amortecimento δ , dado por:

$$I_2(x, z; \omega) = P_D(x, z; \omega)P_D^*(x, z; \omega) + \delta \langle P_D(x, z; \omega)P_D^*(x, z; \omega) \rangle_{\omega}. \quad (3.6)$$

Nos pontos (x, z) onde a densidade espectral do campo descendente tem um valor pequeno para todos os valores de frequência, imagens muito ruidosas são obtidas, independente do valor do parâmetro δ utilizado.

A terceira técnica de estabilização (Guitton, Valenciano, Bevc and Claerbout, 2007) utiliza um processo de suavização na direção transversal da densidade espectral do campo descendente, isto é, suavização nas coordenadas espaciais. Este procedimento preenche os zeros do mapa de densidade espectral com a energia dos pontos na vizinhança e a condição de imagem dada pela equação (3.2) é aplicada na forma:

$$R(x, z) = \sum_{\omega} \frac{P_U(x, z; \omega)P_D^*(x, z; \omega)}{I_3(x, z; \omega)}, \quad (3.7)$$

onde

$$I_3(x, z; \omega) = \lll P_D(x, z; \omega)P_D^*(x, z; \omega) \ggg_x, \quad (3.8)$$

e $\lll \cdot \ggg_x$, corresponde a um filtro triangular na direção x . Quanto maior o comprimento do filtro utilizado no processo de suavização, mais fortemente as amplitudes da densidade espectral serão afetadas e, em consequência disso, os valores dos coeficientes de reflexão serão também afetados.

Uma quarta técnica de estabilização foi apresentada por Vivas e Pestana (2007a). Utilizando o valor médio da iluminação na direção transversal, definido como

$$I_M(z; \omega) = \frac{1}{N_x} \sum_x I(x, z; \omega), \quad (3.9)$$

estabelece o seguinte critério para determinar pontos com boa ou pobre iluminação

$$\begin{cases} I_{boa}(x, z; \omega) < \epsilon I_M(z; \omega), \\ I_{pobre}(x, z; \omega) \geq \epsilon I_M(z; \omega), \end{cases} \quad (3.10)$$

onde o valor da constante ϵ está entre zero e um e deve ser determinado para cada campo de velocidades.

Em pontos com boa iluminação, como definido na equação (3.10), a condição de imagem dada pela equação (3.2) pode ser aplicada de forma direta, enquanto nos pontos com pobre iluminação o valor será preenchido por ϵI_M . Desta forma, um novo mapa de iluminação é obtido na forma

$$I_4(x, z; \omega) = \begin{cases} I(x, z; \omega) & \text{se } I(x, z; \omega) > \epsilon I_M(z; \omega), \\ \epsilon I_M(z; \omega) & \text{se } I(x, z; \omega) \leq \epsilon I_M(z; \omega). \end{cases} \quad (3.11)$$

Definindo o mapa I_{pobre} de pontos com pobre iluminação através de

$$I_{pobre}(x, z) = \sum_{\omega} I_{pobre}(x, z; \omega), \quad (3.12)$$

O valor do parâmetro ϵ pode ser determinado por um critério de análise gráfica, dado que diferentes valores do parâmetro permitem visualizar quais as regiões que serão modificadas na sua iluminação original.

3.3 Testes numéricos

Apresentamos um teste numérico que nos permite a análise de forma simples do efeito da técnica de estabilização utilizada sobre o valor estimado do coeficiente de reflexão. Para isto, tomamos um modelo com campo de velocidades que varia com a profundidade, na forma: $v(z) = 2000 + 0.3z$ m/s (Figura 3.1), onde inserimos quatro refletores horizontais nas profundidades $z = 1000, 2000, 3000, 4000$. Dado que os quatro refletores têm um contraste de densidade unitário, então, os coeficientes de reflexão a serem recuperados devem ter valor unitário, para todas as profundidades e ângulos.

Para ilustrar como o critério de iluminação é utilizado, equação (3.10), determinamos o mapa de pontos com pobre iluminação, utilizando a equação (3.12), para diferentes valores

de ϵ . As Figuras 3.2 e 3.3 correspondem aos mapas de pontos com pobre iluminação e suas respectivas imagens migradas para diferentes valores do parâmetro ϵ .

A imagem migrada utilizando o valor $\epsilon = 1.0$, Figura 3.3a, embora seja a menos ruidosa, apresenta problemas na recuperação das amplitudes no reflector mais profundo, dado que as amplitudes do campo descendente nessa profundidade são tão baixas quanto o valor médio transversal. A imagem migrada utilizando o valor $\epsilon = 0.5$ indica os pontos que produzem instabilidade sem modificar muito o mapa de densidade espectral na região dos refletores, Figura 3.2b.

Como estamos especialmente interessados no coeficiente de reflexão obtido sobre o reflector, o dado sísmico foi migrado e as quatro técnicas de estabilização descritas foram aplicadas. Em seguida, em cada caso foi analisada a modificação apresentada no mapa de iluminação pelo processo de estabilização. A Figura 3.4 apresenta os mapas de iluminação para a profundidade de extrapolação $z = 1000$ m.

Na Figura 3.4a observa-se o complexo padrão de pontos com valores nulos ou quase nulos, na densidade espectral do campo descendente no domínio $(x, z; \omega)$. As regiões indicadas com a letra A correspondem a valores muito baixos de amplitude espectral para todas as frequências. Por esta razão, a técnica de estabilização dada pela equação (3.6) (Figura 3.4c) continua a ter problemas nestas áreas e produz imagens muito ruidosas. As regiões indicadas com a letra B correspondem a pontos com pobre amplitude espectral do campo descendente, mas neste caso, eles estão numa vizinhança de pontos com boa iluminação. Nesta situação, o algoritmo de suavização ao longo da direção x reduz as altas amplitudes, sobrestimando o coeficiente de reflexão. Esta conclusão é confirmada através dos resultados apresentados na Figura 3.5, onde se observam as amplitudes recuperadas sobre os refletores com as quatro técnicas de estabilização discutidas neste trabalho.

Das quatro técnicas de estabilização apresentadas, a estabilização seguindo o critério de iluminação foi a que manteve, da melhor maneira, as amplitudes espectrais do campo descendente, preenchendo os valores nulos ou quase nulos com o valor médio das amplitudes na direção transversal. As imagens migradas, com uma correta seleção do parâmetro ϵ , ficaram livres de ruído e as amplitudes recuperadas para o coeficiente de reflexão com os valores esperados. Pelas razões citadas, este critério foi utilizado na condição de imagem tipo deconvolução, aplicada durante a obtenção das imagens migradas, que serão apresentadas no capítulo a seguir.

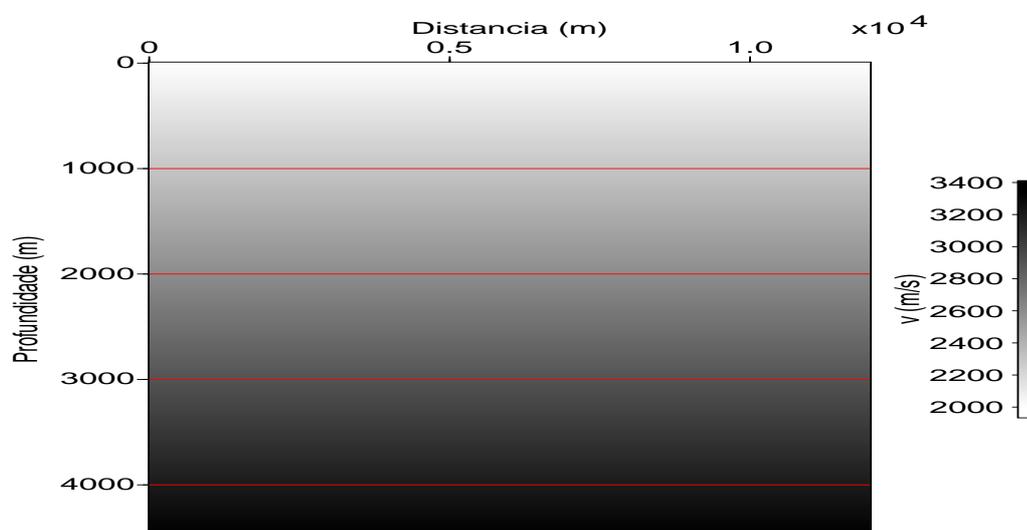


Figura 3.1: Modelo de quatro refletores planos inseridos no campo de velocidades $v(z) = 2000 + 0,3z$ m/s.

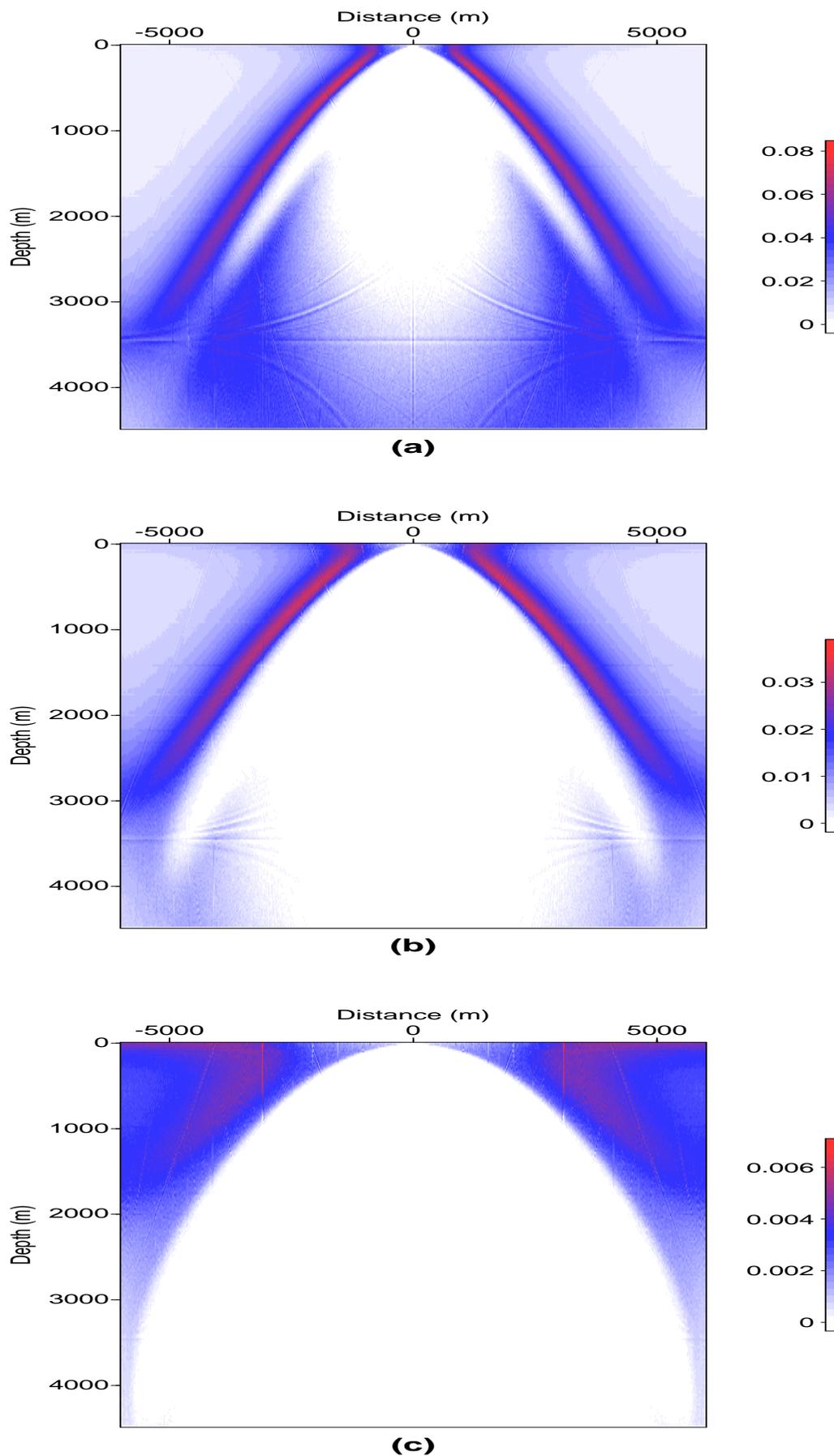


Figura 3.2: Mapas de iluminação $I_{pobre}(x, z)$ para os pontos com pobre iluminação (o valor zero indica um ponto com boa iluminação): $\epsilon = 1.0$ (a); $\epsilon = 0.5$ (b) e $\epsilon = 0.1$ (c).

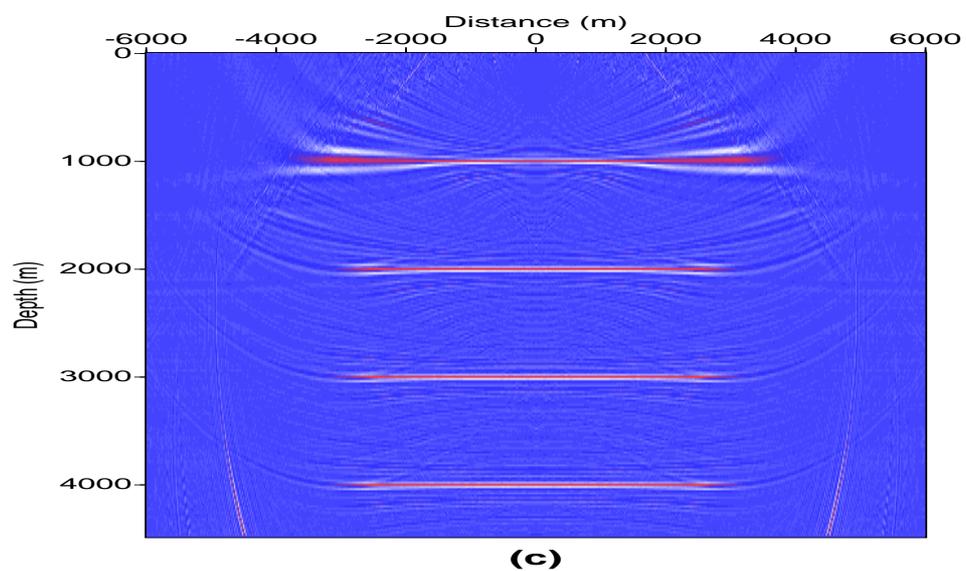
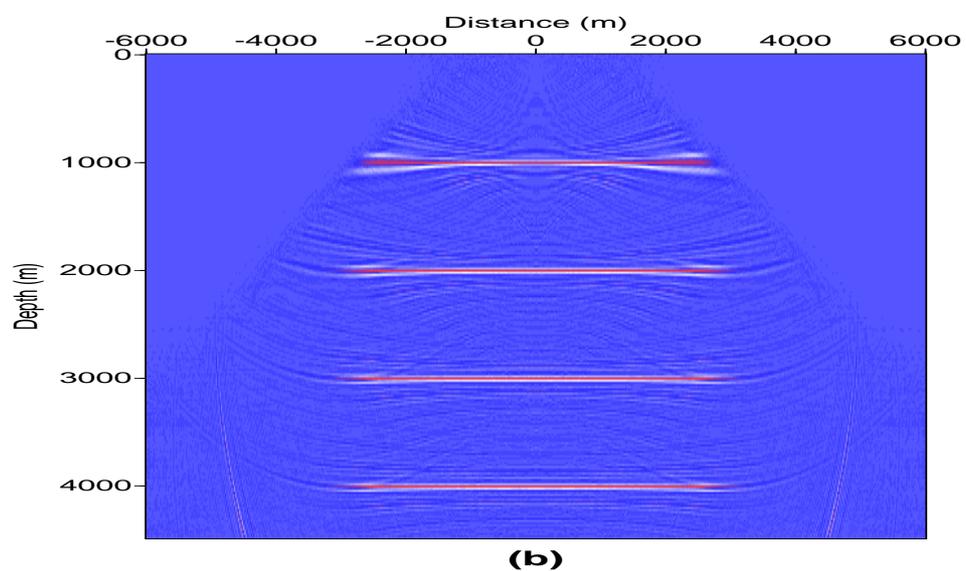
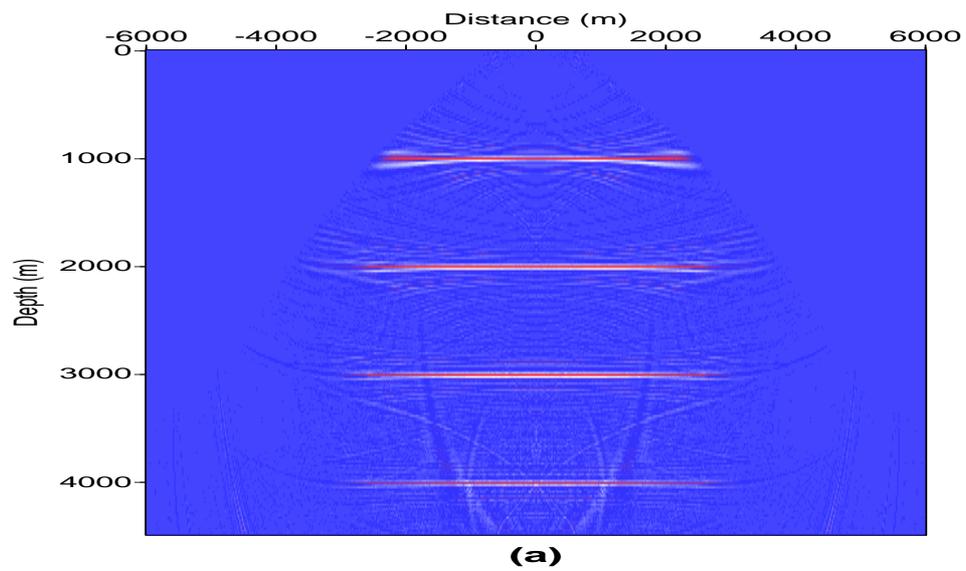


Figura 3.3: Imagens migradas: $\epsilon = 1.0$ (a); $\epsilon = 0.5$ (b) e $\epsilon = 0.1$ (c).

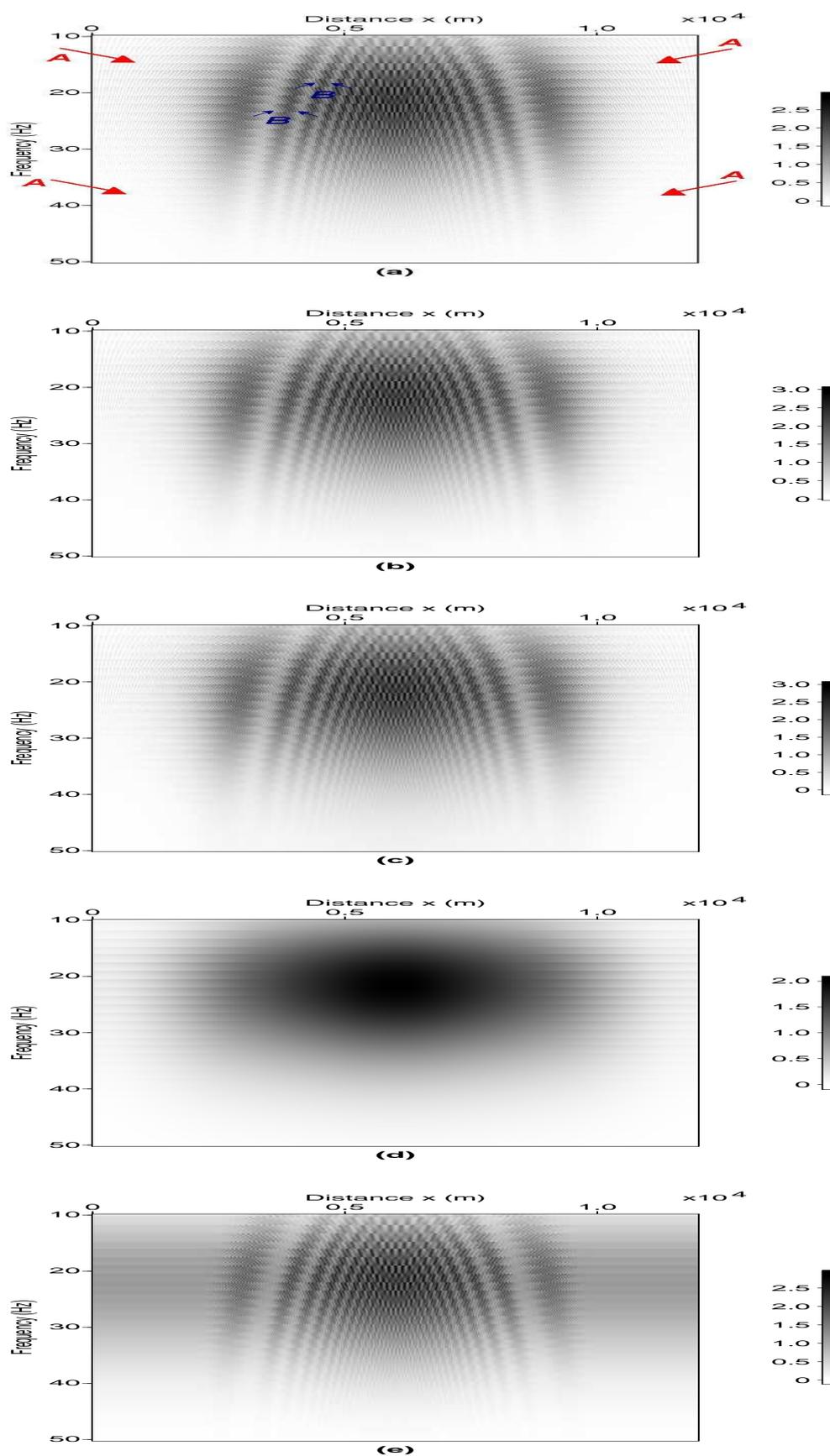


Figura 3.4: Mapas de iluminação $I(x; \omega)$ na profundidade $z = 1000$ m: sem estabilização (a); estabilização por um parâmetro constante, $\delta = 0,1$ (b); estabilização por uma função média na frequência, $\delta = 0,1$ (c); estabilização por suavização - Filtro com 100 amostras (d) e estabilização por critério de iluminação, $\epsilon = 1,0$ (e).

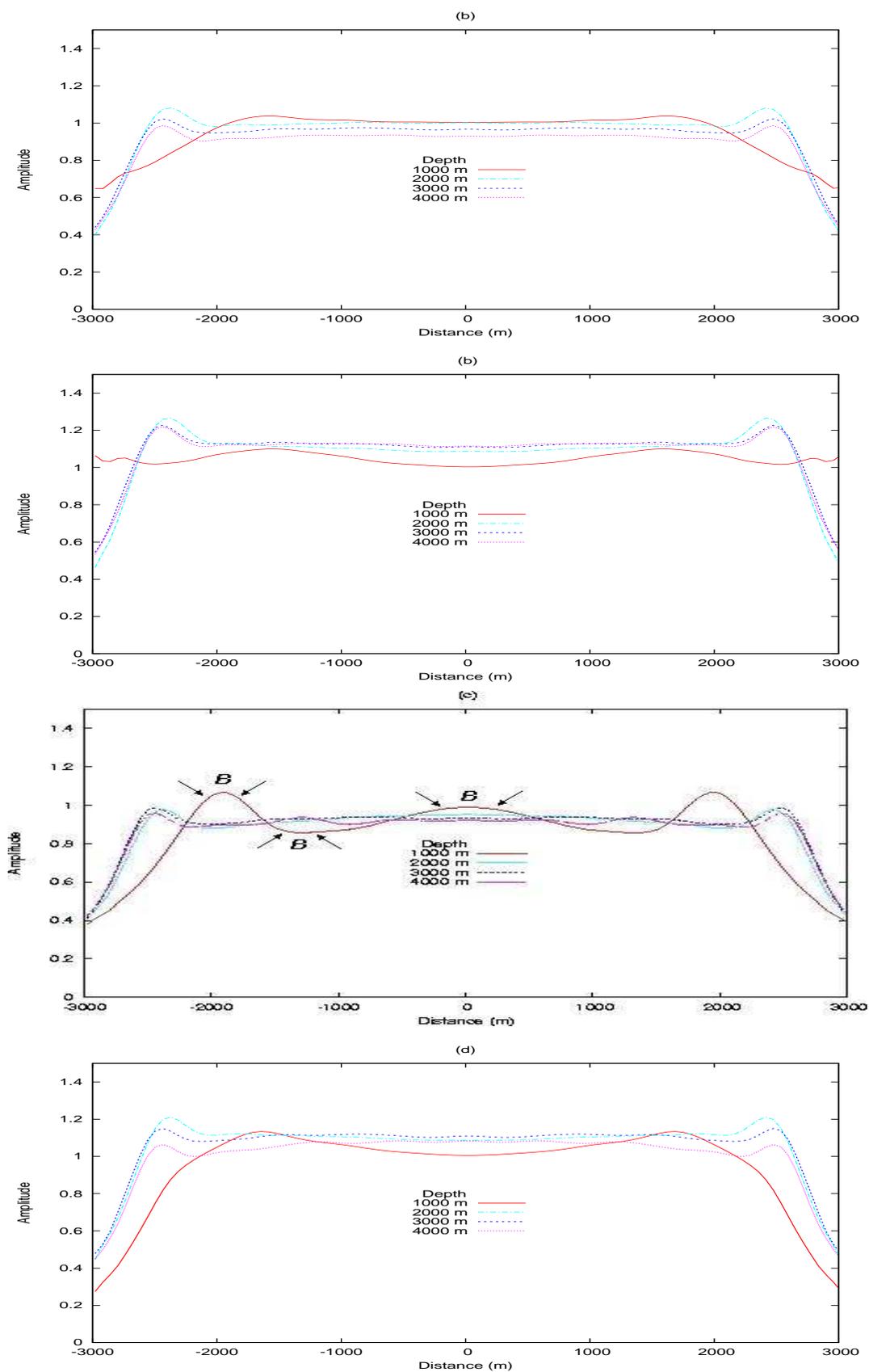


Figura 3.5: Coeficiente de reflexão recuperado na imagem migrada através da estabilização: eq. 3.5 e $\lambda = 0, 1$ (a); eq. (3.6) e $\lambda = 0, 1$ (b); eq. (3.8) e suavização com filtro triangular de 100 amostras (c) e critério de iluminação eq. (3.10) e $\epsilon = 1, 0$ (d).

4

Operadores de continuação no domínio misto com correção de amplitude

4.1 Introdução

No Capítulo 2 foi mostrado que o esquema de migração apresentado por Zhang et al. (2005) gera um novo cenário para o desenvolvimento de algoritmos de migração por continuação do campo de onda em profundidade, proporcionando amplitudes equivalentes às obtidas através da aproximação da teoria do raio e, por isso, equivalentes às obtidas através de um processo de migração/inversão Kirchhoff. Nesta direção, as duas etapas da migração por continuação do campo da onda em profundidade devem ser reformuladas no intuito de ter uma correspondência com a teoria apresentada.

Em relação à continuação numérica dos campos de onda, são apresentadas neste capítulo as extensões dos algoritmos *phase shift* (PS), *phase shift plus interpolation* (PSPI), *split-step* (SS) and *Fourier finite difference* (FFD), para levar em conta correções de amplitude em concordância com as equações de ondas unidirecionais com amplitude verdadeira em meios 2D.

São discutidas duas estratégias para a solução das equações unidirecionais. A primeira está relacionada com uma mudança de variáveis dos campos ascendentes e descendentes que permite eliminar o operador Γ das equações. A segunda utiliza a abordagem de particionamento da equação diferencial, solucionando primeiro a equação que contém o operador Λ , e utilizando esta solução como condição inicial para a equação que contém o operador Γ .

A segunda estratégia foi utilizada com sucesso no caso de um modelo com variação vertical de velocidade. No entanto, sua implementação no caso de modelos com variação lateral implica na avaliação de derivadas laterais do campo de velocidade, que podem introduzir instabilidades adicionais nos algoritmos.

Em relação à formação de imagem, uma condição de imagem tipo deconvolução deve ser aplicada, cujos detalhes sobre este item foram apresentados no Capítulo 3.

Para a validação numérica dos algoritmos propostos é feita uma comparação das imagens migradas e das amplitudes recuperadas ao longo dos refletores, para uma seção de um único tiro, com as amplitudes obtidas através dos algoritmos baseados nas equações de ondas unidirecionais convencionais.

Ao fim deste capítulo é apresentada uma avaliação da qualidade das imagens migradas para o dado sintético Marmousi, o qual ainda continua sendo um dado sísmico padrão para a validação de algoritmos na área de migração em profundidade.

4.2 Operador *phase shift* com amplitude verdadeira

Os algoritmos 2D de migração por continuação do campo de onda em profundidade, que levam em conta as amplitudes e fases de forma mais correta, devem estar baseados nas equações

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} + i\Lambda \right) p_D - \Gamma p_D &= 0, \\ p_D(x, z = 0; \omega) &= \frac{1}{2i\Lambda} \delta(x - x_s, z), \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} - i\Lambda \right) p_U - \Gamma p_U &= 0, \\ p_U(x, z = 0; \omega) &= Q(x; \omega), \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

com os operadores

$$\Lambda = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 + \frac{\Delta_T}{\omega^2}}, \quad \Gamma = \frac{v_z}{2v} [1 - (\omega^2 + \Delta_T)^{-1} \Delta_T], \quad (4.3)$$

onde

$$v_z = \frac{\partial v(x, z)}{\partial z}, \quad \Delta_T = \left(v \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + v v_x \frac{\partial}{\partial x},$$

e aplicar a condição de imagem tipo deconvolução

$$R(x, z) = \sum_{\omega} \frac{p_U(x, z; \omega)}{p_D(x, z; \omega)}. \quad (4.4)$$

Para um meio que depende somente da profundidade, $v = v(z)$, podemos aplicar a transformada de Fourier em x e escrever os operadores λ e γ no domínio número de onda global $(k_x, z; \omega)$ na forma

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2 k_x^2}{\omega^2}}, \\ \gamma &= \lambda^{1/2} \frac{\partial \lambda^{-1/2}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\ln \frac{1}{\lambda^{1/2}} \right) = \frac{v_z}{2v} \left(1 + \frac{v^2 k_x^2}{\omega^2 - v^2 k_x^2} \right),\end{aligned}\tag{4.5}$$

e assim as equações (4.1) e (4.2) são escritas no domínio $(k_x, z; \omega)$ como

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} + i\lambda - \gamma \right) \tilde{p}_D &= 0, \\ \tilde{p}_D(k_x, z = 0; \omega) &= \frac{1}{2i\lambda} e^{i(k_x x_s)}, \end{aligned} \right\}\tag{4.6}$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} - i\lambda - \gamma \right) \tilde{p}_U &= 0, \\ \tilde{p}_U(k_x, z = 0; \omega) &= Q(k_x; \omega). \end{aligned} \right\}\tag{4.7}$$

Introduzindo-se os novos campos de onda \tilde{q}_D and \tilde{q}_U dados por:

$$\begin{aligned}\tilde{q}_D &= \lambda^{1/2} \tilde{p}_D, \\ \tilde{q}_U &= \lambda^{1/2} \tilde{p}_U,\end{aligned}\tag{4.8}$$

o termo γ , presente nas equações (4.6) e (4.7), é eliminado, reduzindo as equações a

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} + i\lambda \right) \tilde{q}_D &= 0, \\ \tilde{q}_D(k_x, z = 0; \omega) &= \frac{1}{2i\lambda^{1/2}} e^{ik_x x_s}, \end{aligned} \right\}\tag{4.9}$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} - i\lambda \right) \tilde{q}_U &= 0, \\ \tilde{q}_U(k_x, z = 0; \omega) &= \lambda^{1/2} Q(k_x; \omega), \end{aligned} \right\}\tag{4.10}$$

as quais podem ser solucionadas pelo tradicional esquema de migração *phase shift*.

Para a aplicação da condição de imagem (4.4) é necessário retornar aos campos de onda \tilde{p}_D e \tilde{p}_U , em cada nível de extrapolação, através das expressões:

$$\begin{aligned}\tilde{p}_D &= \lambda^{-1/2} \tilde{q}_D, \\ \tilde{p}_U &= \lambda^{-1/2} \tilde{q}_U.\end{aligned}\tag{4.11}$$

Assim, a primeira estratégia, relacionada com a introdução da mudança de variáveis (4.8), permite estender o algoritmo de migração *phase-shift* convencional para migração com amplitude verdadeira, através das equações (4.9) e (4.10) com as seguintes etapas:

- Nível $z = 0$, modificação da condição de fronteira na fonte pelo fator $\frac{1}{2i\lambda^{1/2}}$.
- Nível $z = 0$, modificação da condição de fronteira dos dados registrados nos receptores pelo fator $\lambda^{1/2}$.
- Nível $z = 0$, recuperação dos campos $\tilde{p}_D(z = 0)$ e $\tilde{p}_U(z = 0)$ através das relações (4.11) e aplicação da condição de imagem (4.4).
- Extrapolação em profundidade dos campos q_D e q_U do nível z ao nível $z + \Delta z$, através do deslocamento de fase $\exp[\pm i\lambda(z)\Delta z]$.
- Recuperação dos campos $\tilde{p}_D(z + \Delta z)$ e $\tilde{p}_U(z + \Delta z)$ através das relações (4.11) e aplicação da condição de imagem (4.4) em $z + \Delta z$.

A segunda estratégia utiliza o particionamento da equação diferencial, solucionando primeiro a equação que contém o operador λ , associado às correções de fase, e utilizando esta solução como condição inicial da equação que contém o operador γ associado às correções de amplitude. Para um meio $v(z)$, as correções de fase e amplitude podem ser expressas na forma (Silva, 2006)

$$\begin{aligned}\tilde{p}_D^{z_{j+1}} &= \left(\frac{\lambda_{z_j}}{\lambda_{z_{j+1}}}\right)^{1/2} \exp^{-i\omega\lambda_{z_j}(z_{j+1}-z_j)} \tilde{p}_D^{z_j}, \\ \tilde{p}_U^{z_{j+1}} &= \left(\frac{\lambda_{z_j}}{\lambda_{z_{j+1}}}\right)^{1/2} \exp^{i\omega\lambda_{z_j}(z_{j+1}-z_j)} \tilde{p}_U^{z_j},\end{aligned}\tag{4.12}$$

onde a continuação dos campos de onda no domínio $(k_x, z; \omega)$ é feita através do produto de dois fatores, um associado à correção de fase e o outro associado à correção de amplitude. O fator associado à amplitude depende da mudança da velocidade na direção vertical e é igual ao obtido através da aproximação WKBJ para um meio que varia suavemente com a profundidade (Stolt, 1986).

Nas duas estratégias apresentadas, a avaliação direta da derivada vertical da velocidade, v_z , no operador γ é desnecessária uma vez que o termo pode ser eliminado ou avaliado de forma direta.

Apresentamos aqui os resultados obtidos para o mesmo exemplo numérico usado no trabalho de Zhang et al. (2005). O modelo consiste de quatro refletores horizontais nas profundidades $z = 1000, 2000, 3000, 4000$ m com um campo de velocidades $v(z) = 2000 + 0,3z$ m/s (ver Figura 3.1). Foi gerada uma seção de um único tiro com os receptores nos afastamentos de -6 km a 6 km, através do modelamento tipo Kirchhoff, utilizando o pacote Seismic Un*x (Cohen and Stockwell, 2006), para uma fonte linear.

Os quatro refletores foram modelados com um contraste de densidade unitário e, assim, os coeficientes de reflexão recuperados devem ser iguais a um, independente do ângulo e da profundidade dos refletores. Nas Figuras 4.1 e 4.2 apresentamos as imagens obtidas através da migração *phase shift* convencional e *phase shift* com amplitude verdadeira, respectivamente. As amplitudes obtidas nos refletores na migração convencional têm valores mais altos no refletor menos profundo, assim como para ângulos de incidência maiores, enquanto a migração com amplitude verdadeira consegue corrigir os valores do coeficiente de reflexão pelo ângulo, bem como pela profundidade (Figuras 4.3 e 4.4).

Foram geradas as imagens de ponto comum (CIG) no domínio afastamento em subsuperfície (ODCIG) e no domínio do parâmetro de raio através da migração *phase shift* com amplitude verdadeira, no intuito de estabelecer uma comparação com as imagens obtidas através da migração *phase shift* convencional. Para isto foi utilizado o mesmo dado sintético da seção 1.5, o qual contém 300 tiros, desde a posição 1000 m, com espaçamento de 20 m e receptores com afastamentos de -1000m a 1000 m . Foram simulados refletores com coeficiente de reflexão unitário nas profundidades $z = 1000, 2000, 3000$ e 4000 m , a partir do campo de velocidades $v(z) = 2000 + 0.3z\text{ m/s}$. A condição de imagem tipo deconvolução foi aplicada na forma

$$R(x, z, h_x) = \sum_i \sum_{\omega} \frac{P_U^{s_i}(x - h_x, z; \omega) P_D^{s_i^*}(x + h_x, z; \omega)}{P_D^{s_i}(x + h_x, z; \omega) P_D^{s_i^*}(x - h_x, z; \omega)}, \quad (4.13)$$

onde a variável adicional h_x , correspondente ao afastamento em subsuperfície na direção x , foi calculada para os valores de -800 m a 800 m , com intervalo $dh_x = 8\text{ m}$. A Figura 4.5, em relação à Figura 1.8, apresenta uma melhor distribuição da energia com a profundidade além da atenuação dos artefatos numéricos.

A imagem de ponto comum no domínio do parâmetro de raio, foi obtida através de uma transformação *slant stack* ao longo do eixo do afastamento, com valores de -50 s/km a 50 s/km para os parâmetros de raio. A atenuação de artefatos numéricos na Figura 4.6, em relação à Figura 1.9, é notória e deve ser mais estudada para dados sintéticos e reais.

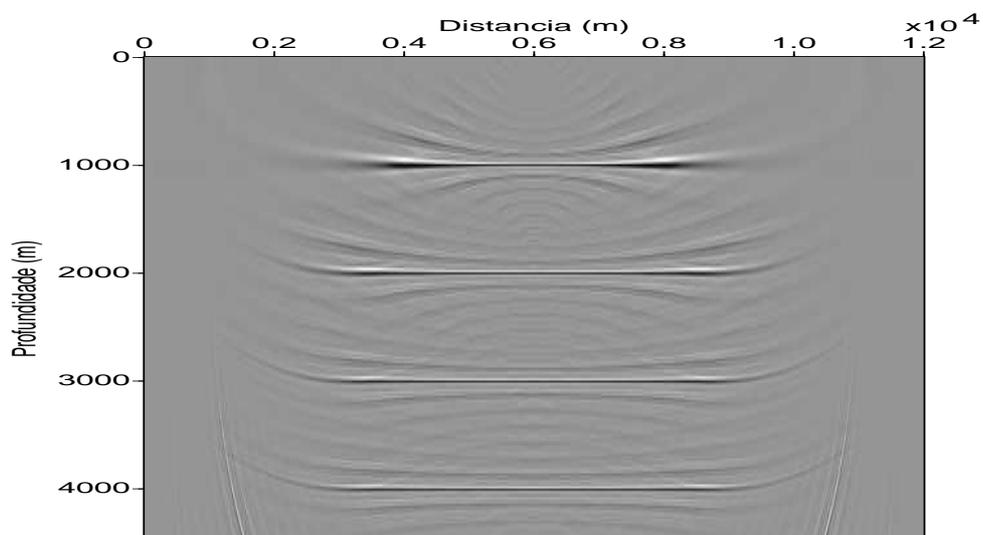


Figura 4.1: Resultado da migração usando o operador *phase shift* convencional.

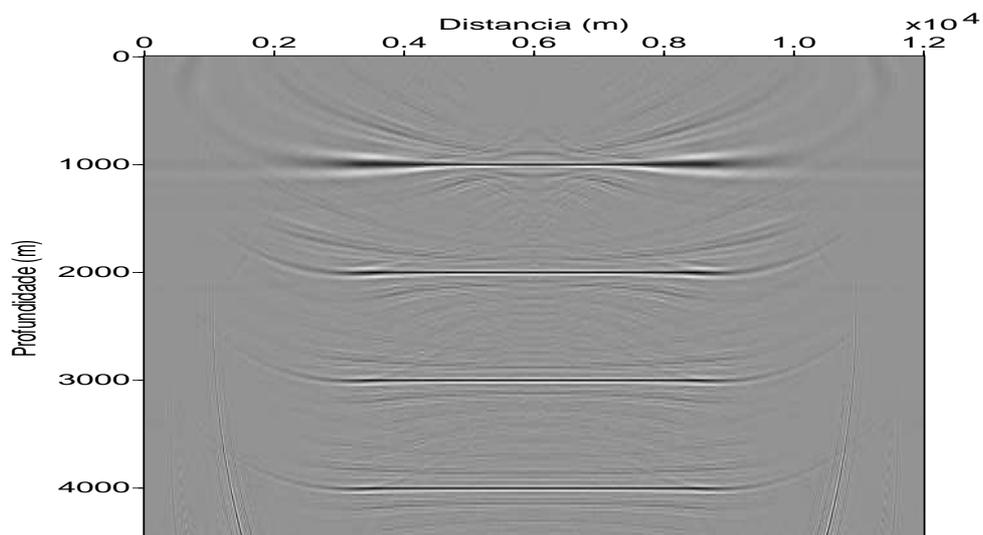


Figura 4.2: Resultado da migração usando-se o operador *phase shift* com amplitude verdadeira.

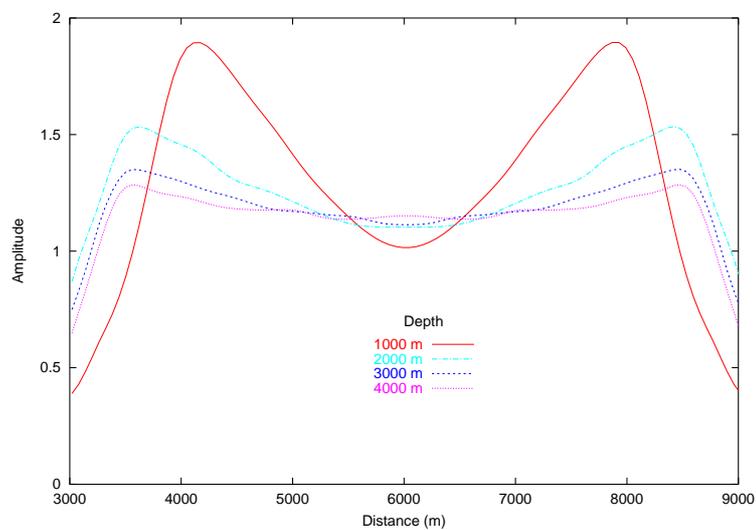


Figura 4.3: Amplitudes recuperadas ao longo dos refletores da imagem migrada (Figura 4.1).

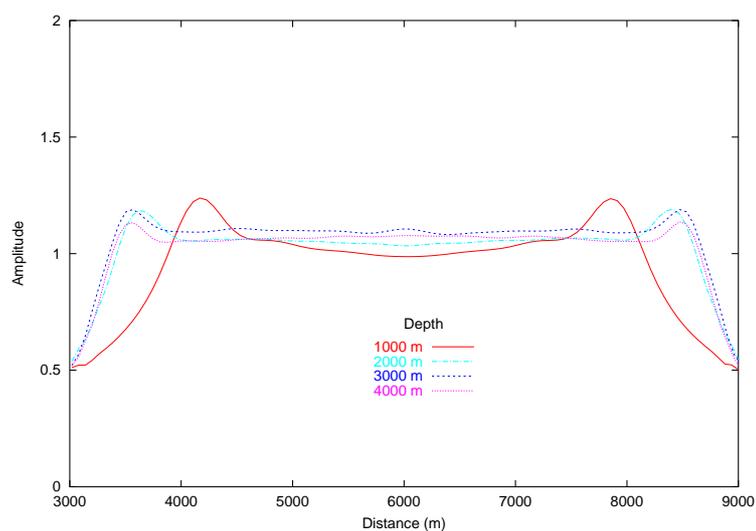


Figura 4.4: Amplitudes recuperadas ao longo dos refletores da imagem migrada (Figura 4.2).

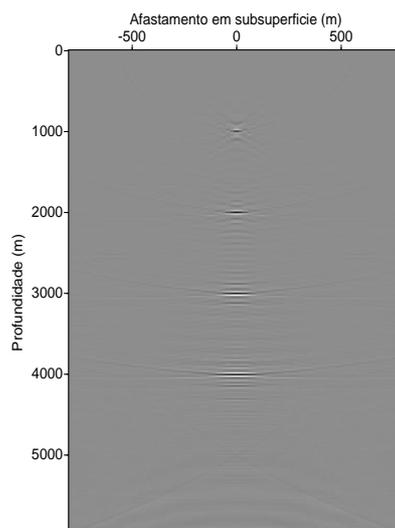


Figura 4.5: Imagem ODCIG obtida através da migração "phase shift" com amplitude verdadeira, posição $x = 4000$ m.

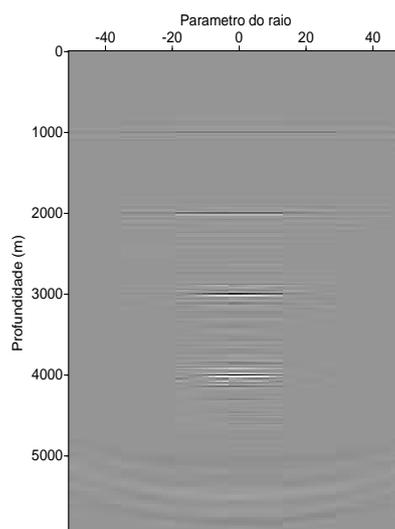


Figura 4.6: Imagem de ponto comum no domínio do parâmetro de raio p_{h_x} obtida através da migração "phase shift" com amplitude verdadeira, posição $x = 4000$ m.

4.3 Operador PSPI com amplitude verdadeira

O esquema de migração PSPI trabalha no domínio misto $(\omega - k; \omega - x)$ fazendo a primeira mudança de fase no domínio $(\omega - k)$, através do método *phase-shift* para várias velocidades de referência. As variações laterais de velocidade são introduzidas no domínio $(\omega - x)$ interpolando-se os campos obtidos por *phase-shift* para as diferentes velocidades de referência, segundo o valor da velocidade local (ver descrição deste método no Capítulo 1).

Para introduzir correções de amplitude no esquema de migração PSPI, baseado no algoritmo *phase-shift* de amplitude verdadeira descrito, se deve fazer a extrapolação em profundidade dos campos \tilde{q}_D e \tilde{q}_U do nível z ao nível $z + \Delta z$, através do deslocamento de fase $\exp[\pm i\lambda(z)\Delta z]$, onde o operador $\lambda(z)$ é avaliado nas n_j velocidades de referência selecionadas no nível z . O problema neste método se apresenta no momento de fazer a mudança de variável, que permite recuperar os campos $\tilde{p}_D(z + \Delta z)$ e $\tilde{p}_U(z + \Delta z)$ através das relações (4.11), dado que neste caso o operador $\lambda^{-1/2}(z + \Delta z)$ deverá também ser avaliado para as n_l velocidades de referência no nível $z + \Delta z$, gerando um conjunto de $n_j \cdot n_l$ campos que deverão ser transformados para o domínio (ω, x) para posterior interpolação.

Em vista do alto custo computacional do procedimento descrito (Vivas and Pestana, 2007b), propõe-se fazer diretamente a interpolação dos campos $q_D(z + \Delta z)$ e $q_U(z + \Delta z)$, obtendo desta forma as fases corretas segundo a técnica PSPI. Enquanto para as amplitudes devemos supor que as relações (4.11) continuam sendo válidas no domínio (ω, x) , de tal forma que a mudança de variável

$$\begin{aligned} p_D &= \Lambda^{-1/2} q_D, \\ p_U &= \Lambda^{-1/2} q_U, \end{aligned} \quad (4.14)$$

nos permitirá recuperar os campos p_D e p_U , sobre os quais deve ser aplicada a condição de imagem (4.4), enquanto a extrapolação continua sendo feita sobre os campos q_D e q_U . Desta forma, espera-se que a informação na fase seja interpolada com a mesma aproximação do esquema PSPI convencional, enquanto as amplitudes serão corrigidas.

Uma aproximação por séries de Taylor será utilizada para a avaliação numérica do operador $\Lambda^{-1/2}$ em (4.14), na forma

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1/2} &= \left(\frac{\omega}{v}\right)^{-1/2} \left[1 + \frac{\Delta_T}{\omega^2}\right]^{-1/4} = \left(\frac{\omega}{v}\right)^{-1/2} \\ &\quad \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{v^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{vv_x}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{5}{32} \left(\frac{v^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{vv_x}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \dots\right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Na Figura 4.7 são apresentados o primeiro e segundo termos da aproximação do operador $(1 + X^2)^{-1/4}$, onde $X^2 = \frac{\Delta_T}{\omega^2}$. Os termos de ordens maiores da aproximação não devem ser

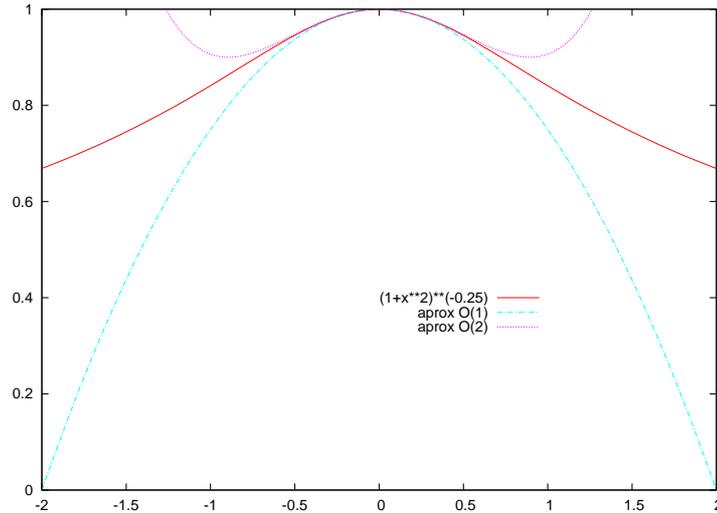


Figura 4.7: Primeira e segunda ordem da aproximação do operador $(1 + X^2)^{-1/4}$.

levados em conta, pois contêm derivadas de alta ordem do campo de velocidades e derivadas de alta ordem dos campos de onda. Nos testes numéricos somente os dois primeiros termos da série (4.15) foram utilizados.

O algoritmo de migração PSPI com amplitude verdadeira é implementado mediante as seguintes etapas:

- Transformada de Fourier da fonte e dos dados registrados para o domínio (k_x, ω) .
- Seleção do número ótimo de velocidades de referência em cada nível de profundidade.
- Modificação das condições de fronteira no nível $z = 0$.
- Extrapolação em profundidade dos campos q_D^j e q_U^j do nível z ao nível $z + \Delta z$, através do deslocamento de fase $\exp[\pm i\lambda_j(z)\Delta z]$, com as n_j velocidades de referência.
- Interpolação dos campos q_D^j e q_U^j no domínio $(x; \omega)$ segundo a velocidade local.
- Obtenção dos campos p_D e p_U , através das relações (4.14) utilizando os campos q_D e q_U obtidos da interpolação e a aproximação do operador $\Lambda^{-1/2}$ avaliado no nível de extrapolação $z + \Delta z$.
- Aplicação da condição de imagem (4.4) utilizando os campos p_D e p_U .

O custo computacional do método PSPI 2D convencional relacionado ao número de FFTs (Fast Fourier Transform) é de

$$N = 2 \cdot (n_t \cdot \log n_t) + 2 \cdot n_z \cdot (n_x \cdot \log n_x) + 2 \cdot n_z \cdot n_j(z) \cdot (n_{k_x} \cdot \log n_{k_x}),$$

onde n_t é o número de amostras no tempo, n_x e n_z são os números de amostras do campo de velocidades, n_{k_x} os números de onda na direção x e $n_j(z)$ o número de velocidades de referência determinado no nível de extrapolação z .

O método PSPI com amplitude verdadeira, aqui proposto, somente tem um custo adicional relacionado com a avaliação da mudança de variável dos campos, utilizados na extrapolação q_D e q_U para os campos utilizados no imageamento p_D e p_U . A mudança de variáveis é feita através do operador $\Lambda^{-1/2}$.

É também importante mencionar que a modificação das condições iniciais dos campos q_D e q_U no nível $z = 0$ foi feita no domínio de Fourier.

São apresentados dois exemplos numéricos que permitem avaliar as correções de amplitude obtidas com o método PSPI proposto. Primeiro, apresentamos um teste para um meio 2D que possui somente variação lateral da velocidade. Usando-se uma técnica baseada na correção de amplitude no domínio do número de onda, ver equação (4.12), e, como não existe variação vertical da velocidade, o termo de correção de amplitude é igual a um. Portanto, nenhuma correção de amplitude é realizada neste tipo de modelo. Já o método PSPI com correções de amplitude proposto, leva em conta a variação lateral da velocidade através da introdução do operador $\Lambda^{-1/2}$, que inclui a derivada lateral do campo de velocidades no operador Laplaciano transversal. O dado usado como teste corresponde a um único tiro na posição $x_s = 6000$ m, com os receptores nos afastamentos -6 km a 6 km, num campo de velocidades dado por $v(x) = 2000 + 0.2x$ m/s. Os refletores têm as mesmas profundidades, que as do modelo anterior, com apenas variação vertical, e com um contraste de densidade unitário (Figura 4.8). A Figura 4.9 representa o dado sísmico gerado a partir deste modelo.

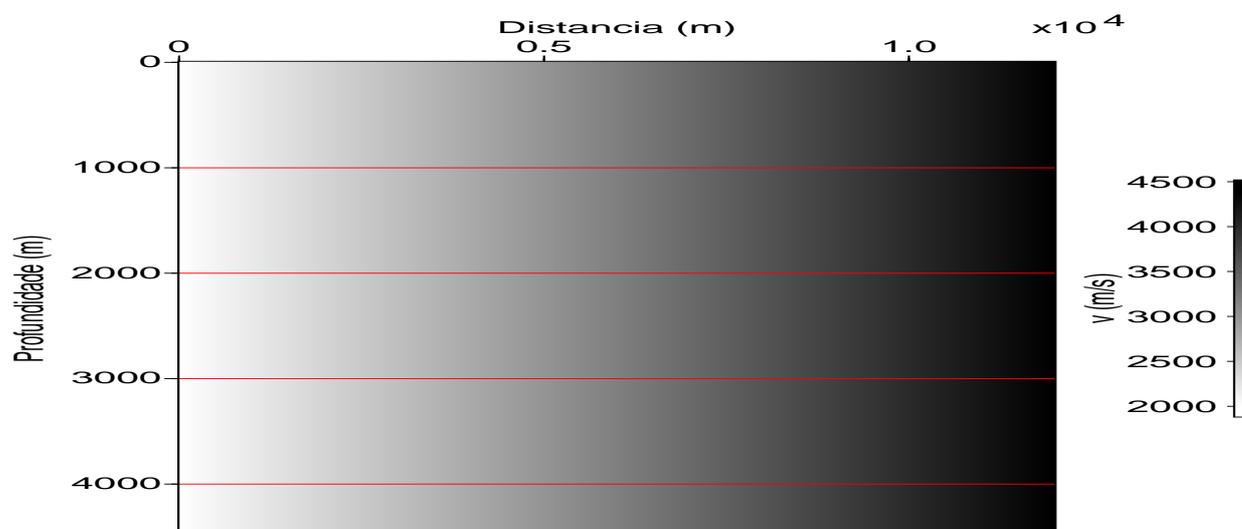


Figura 4.8: Modelo de quatro refletos planos inseridos num campo de velocidades $v(x) = 2000 + 0.2x$ m/s.

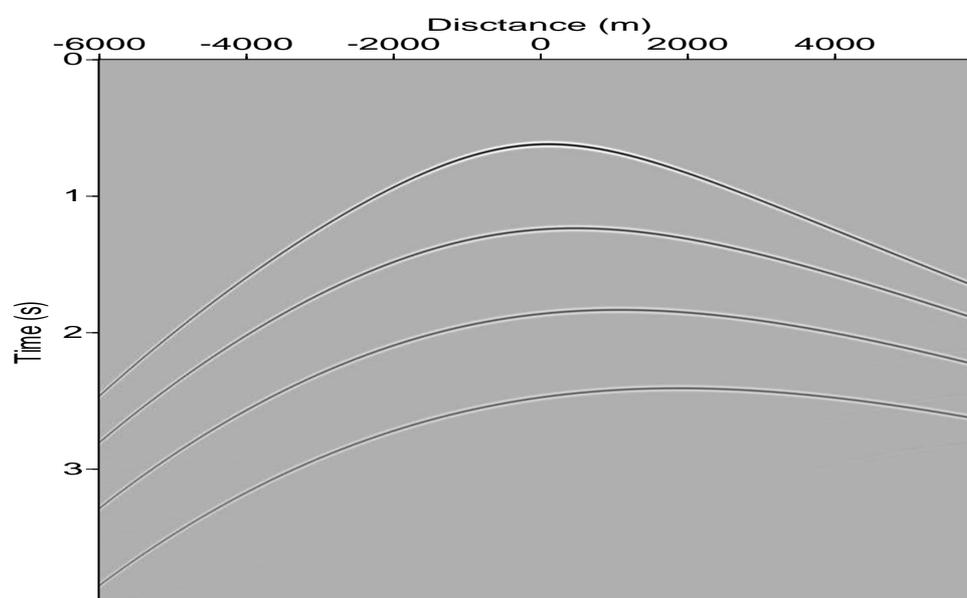


Figura 4.9: Dado gerado através do modelamento tipo Kirchhoff para um meio $v(x)$.

As Figuras 4.10 e 4.11 representam as imagens obtidas através dos algoritmos de migração PSPI convencional e PSPI com correções de amplitude. As Figuras 4.12 e 4.13 representam as amplitudes recuperadas sobre os reflectores nas respectivas imagens. Observa-se que as amplitudes obtidas usando-se o método PSPI com correção de amplitude, se aproximam mais do valor um, ao longo dos quatro refletores. Em todos os experimentos numéricos algum critério de estabilização na condição de imagem do tipo deconvolução deve ser utilizado (Vivas and Pestana, 2007a).

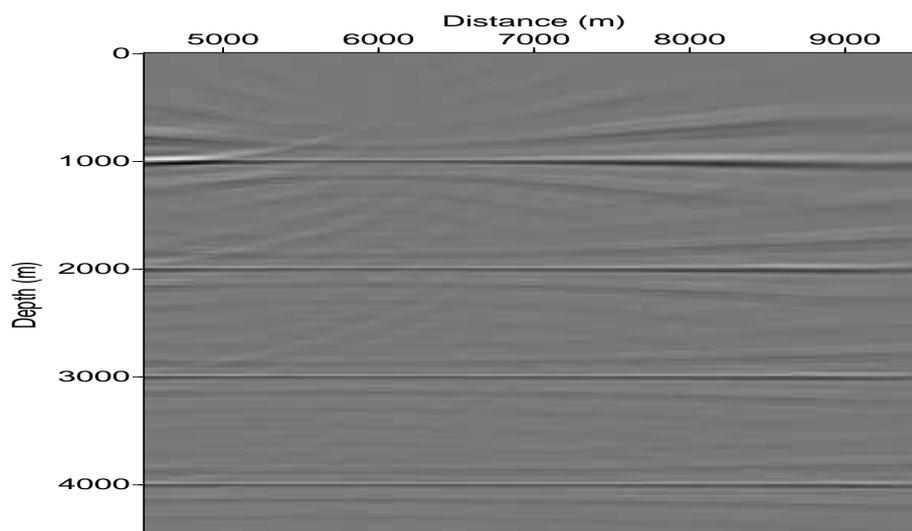


Figura 4.10: Resultado da migração através do algoritmo PSPI convencional.

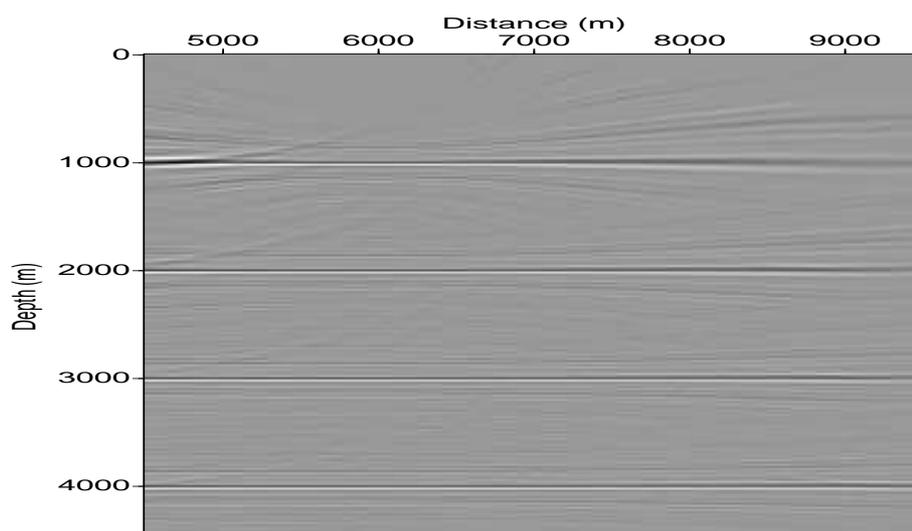


Figura 4.11: Resultado da migração usando o algoritmo PSPI com correção de amplitude.

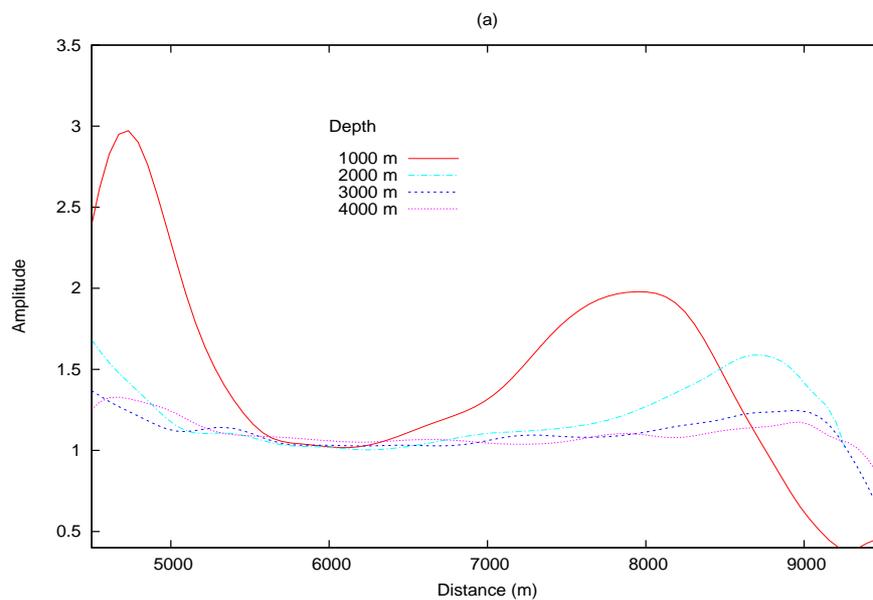


Figura 4.12: Amplitudes recuperadas ao longo dos refletores - algoritmo PSPI convencional (Figura 4.10).

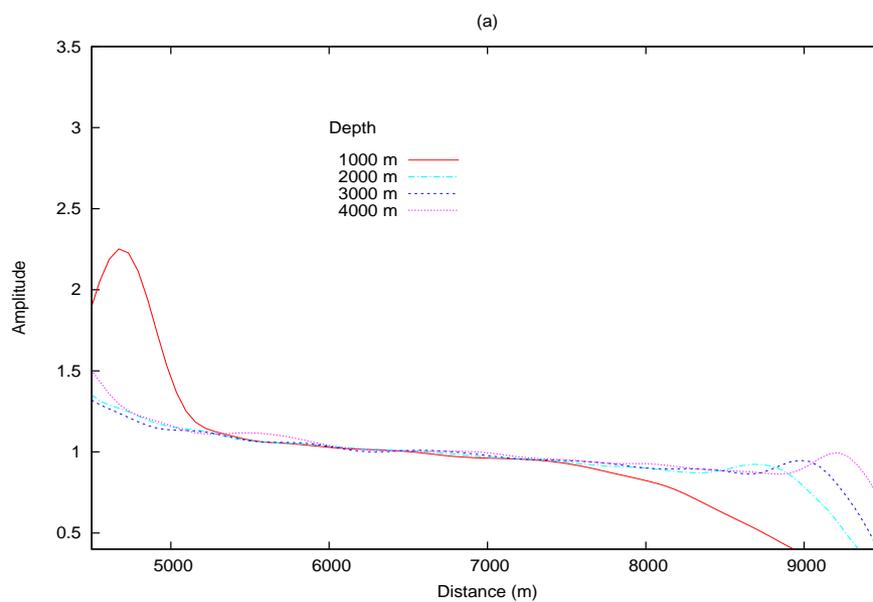


Figura 4.13: Amplitudes recuperadas ao longo dos refletores - algoritmo PSPI com correção de amplitude (Figura 4.11).

Como segundo experimento numérico, são apresentados os resultados obtidos para a migração do dado sintético Marmousi, o qual é um modelo padrão para testes de algoritmos de migração pré-empilhamento. As Figuras 4.14 e 4.15 apresentam os resultados das migrações com os algoritmos PSPI convencional e PSPI com correção de amplitude, respectivamente, utilizando-se a mesma condição de imagem tipo deconvolução. Maior continuidade e melhor definição dos refletores é obtida através da migração PSPI com correções de amplitude, consequência de uma melhor preservação das altas frequências na imagem obtida através da migração com o algoritmo PSPI com correção de amplitude. As Figuras 4.16 e 4.17 representam detalhes das estruturas profundas do modelo, onde melhores amplitudes são recuperadas, observando-se também uma melhor definição dos refletores.

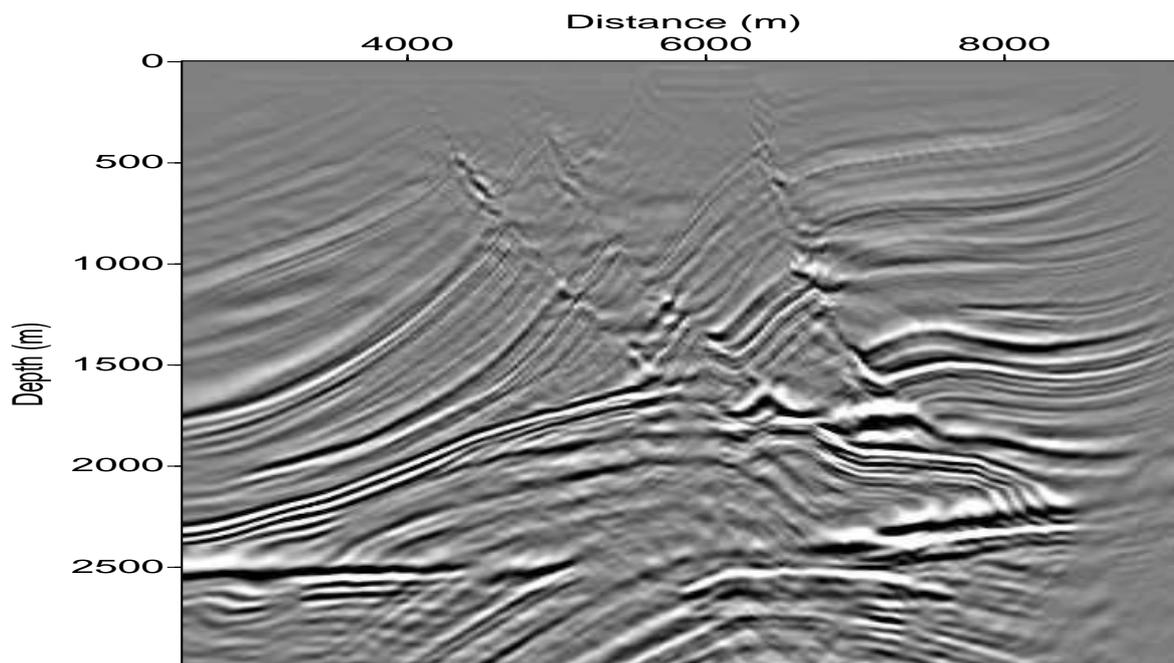


Figura 4.14: Resultado da migração com o algoritmo PSPI convencional.

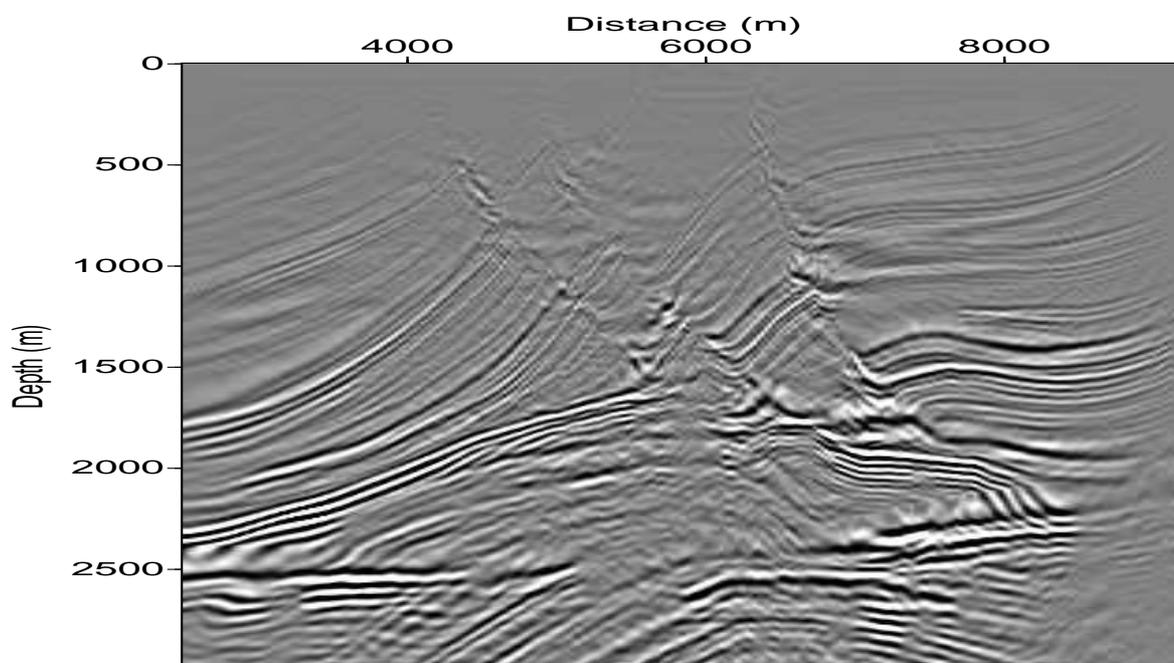


Figura 4.15: Resultado da migração com o algoritmo PSPI com correção de amplitude.

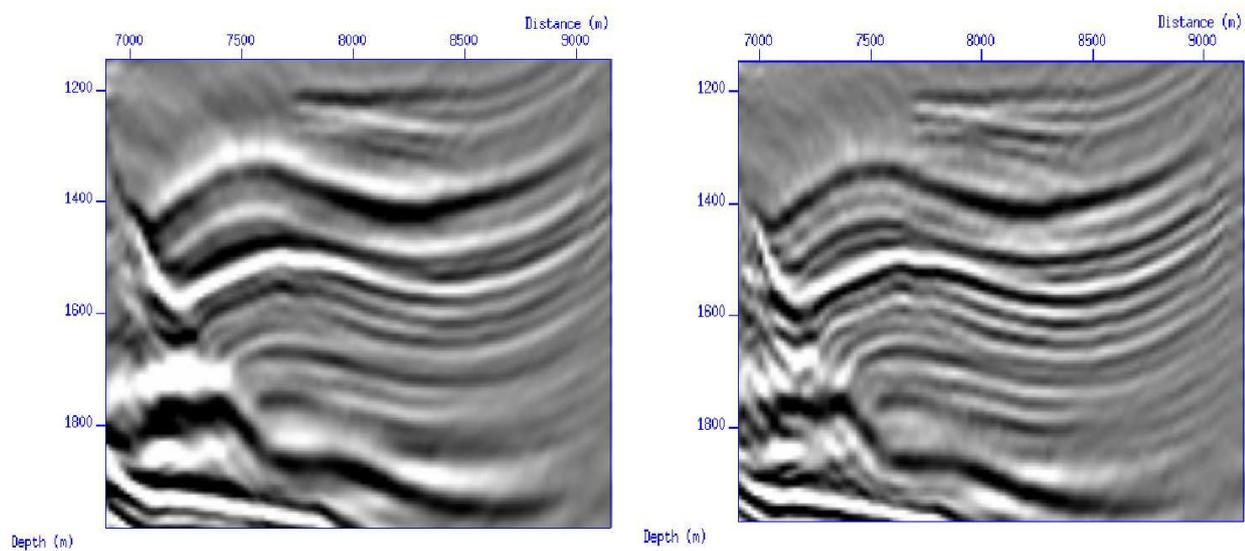


Figura 4.16: Imagem da estrutura fallada obtida através do método PSPI convencional (à esquerda) e PSPI com correção de amplitude (à direita).

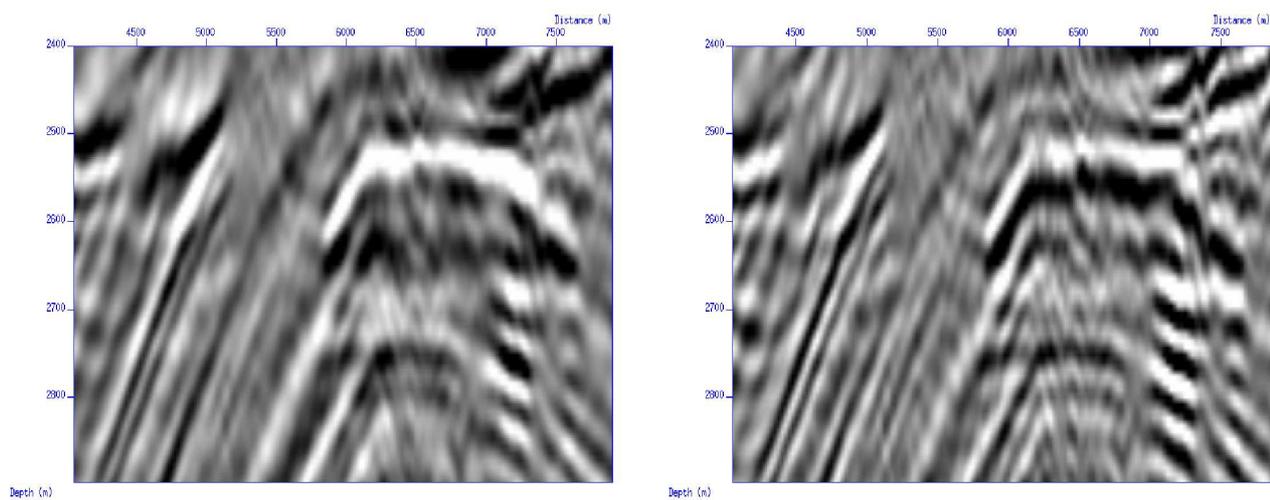


Figura 4.17: Imagem do reservatório profundo obtida através do método PSPI convencional (à esquerda) e PSPI com correção de amplitude (à direita).

4.4 Operadores SS e FFD com amplitude verdadeira

No intuito de estender os esquemas de migração SS e FFD para levar em conta correções de amplitude de acordo com as equações (4.1) e (4.2) num meio $v(x, z)$, introduzimos de novo a seguinte mudança de variáveis no domínio $(x, z; \omega)$ (Zhang et al., 2005):

$$q_D = \Lambda^{1/2} p_D,$$

$$q_U = \Lambda^{1/2} p_U,$$

que permite eliminar o termo Γ das equações (4.1) e (4.2).

O novo sistema de equações a resolver se reduz a

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} + i\Lambda \right) q_D(x, z; \omega) &= 0, \\ q_D(x, z = 0; \omega) &= \frac{1}{2i\Lambda^{1/2}} \delta(x - x_s, z), \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} - i\Lambda \right) q_U(x, z; \omega) &= 0, \\ q_U(x, z = 0; \omega) &= \Lambda^{1/2} Q(x; \omega), \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

onde o operador

$$\Lambda = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 + \frac{\Delta_T}{\omega^2}}, \quad (4.18)$$

e

$$\Delta_T = \left(v \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + v v_x \frac{\partial}{\partial x}.$$

Os novos campos de onda q_D e q_U , obtidos por extrapolação recursiva da fase nas equações (4.16) e (4.17), podem ser representados na forma

$$\begin{aligned} q_D(x, z_{j+1}; \omega) &= \exp^{-i\Lambda z_j (z_{j+1} - z_j)} q_D(x, z_j; \omega), \\ q_U(x, z_{j+1}; \omega) &= \exp^{i\Lambda z_j (z_{j+1} - z_j)} q_U(x, z_j; \omega), \end{aligned} \quad (4.19)$$

e a condição de imagem, aplicada aos campos p_D e p_U , toma agora a forma

$$R(x, z_{j+1}) = \sum_{\omega} \frac{p_U(x, z_{j+1}; \omega)}{p_D(x, z_{j+1}; \omega)} = \sum_{\omega} \frac{\Lambda_{z_{j+1}}^{-1/2} q_U(x, z_{j+1}; \omega)}{\Lambda_{z_{j+1}}^{-1/2} q_D(x, z_{j+1}; \omega)}. \quad (4.20)$$

Observa-se que a extrapolação recursiva da fase, através do operador Λ no domínio $(x, z; \omega)$, leva em conta o novo termo no operador Laplaciano transversal, garantindo desta forma novas correções nas fases, além das correções nas amplitudes.

Duas classes de linearizações dos operadores Λ , $\Lambda^{-1/2}$ e $\Lambda^{1/2}$, envolvidos nas equações (4.16), (4.17) e (4.20), podem ser desenvolvidas. Na primeira linearização se utiliza uma

aproximação baseada na seleção de uma velocidade de referência para a avaliação dos operadores no domínio $(k_x, z; \omega)$ e posteriormente se introduz uma correção por variação lateral da velocidade no domínio $(x, z; \omega)$.

Numa segunda aproximação, a extrapolação da fase através do operador Λ é feita da forma convencional no domínio misto sobre os campos q_D e q_U , e para a recuperação dos campos p_D e p_U , os operadores $\Lambda^{-1/2}$ e $\Lambda^{1/2}$ são avaliados através de uma aproximação direta por séries de Taylor no domínio $(x, z; \omega)$. Para introduzir melhorias nas estimativas das fases, um termo associado à variação lateral da velocidade pode ser adicionado na avaliação do operador Λ de extrapolação da fase.

Inicialmente propõe-se uma linearização dos operadores Λ , $\Lambda^{-1/2}$ e $\Lambda^{1/2}$ que possa ser implementada no domínio misto, isto é, incluindo um primeiro termo, que corresponde ao operador avaliado numa velocidade de referência constante, no domínio $(k_x, z; \omega)$, e os termos de correção no domínio $(x, z; \omega)$ que permitam levar em conta as variações laterais da velocidade. Para isto, utiliza-se a mesma estratégia apresentada por Ristow and Rühl (1994) (Capítulo 1), onde a aproximação por série de Taylor é feita sobre o erro d , que é obtido da diferença do operador Λ , calculado com a velocidade verdadeira, com o operador Λ_{ref} , avaliado com a velocidade de referência v_{ref} , ou seja:

$$d = \Lambda - \Lambda_{ref},$$

ou

$$d = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 + \frac{\Delta_T}{\omega^2}} - \frac{\omega}{v_{ref}} \sqrt{1 + \frac{v_{ref}^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}}.$$

Utilizando-se no primeiro termo a expressão da série de Taylor

$$f(x) = \sqrt{1 + X^2},$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{8}X^4 + \frac{1}{16}X^6 - \frac{5}{128}X^8 + \dots,$$

com $X^2 = \frac{\Delta_T}{\omega^2}$, e passando ao domínio transformado $(k_x, z; \omega)$, temos

$$d = \frac{\omega}{v} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{-k_x^2 v^2}{\omega^2} + i \frac{k_x v v_x}{\omega^2} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{-k_x^2 v^2}{\omega^2} + i \frac{k_x v v_x}{\omega^2} \right)^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{-k_x^2 v^2}{\omega^2} + i \frac{k_x v v_x}{\omega^2} \right)^3 + \dots \right] - \frac{\omega}{v_{ref}} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{k_x^2 v_{ref}^2}{\omega^2} - \frac{1}{8} \frac{k_x^4 v_{ref}^4}{\omega^4} - \frac{1}{16} \frac{k_x^6 v_{ref}^6}{\omega^6} - \dots \right], \quad (4.21)$$

desprezando os termos de ordem $O(v_x^2)$, que envolvem potências da derivada lateral v_x , a

expressão (4.21) pode ser reescrita como

$$d = \frac{\omega}{v} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{k_x^2 v^2}{\omega^2} - \frac{1}{8} \frac{k_x^4 v^4}{\omega^4} - \frac{1}{16} \frac{k_x^6 v^6}{\omega^6} - \dots \right] - \frac{\omega}{v_{ref}} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{k_x^2 v_{ref}^2}{\omega^2} - \frac{1}{8} \frac{k_x^4 v_{ref}^4}{\omega^4} - \frac{1}{16} \frac{k_x^6 v_{ref}^6}{\omega^6} - \dots \right] + \frac{ik_x v_x}{\omega} \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{8} \frac{k_x^2 v^2}{\omega^2} + \frac{3}{16} \frac{k_x^4 v^4}{\omega^4} + \frac{5 \cdot 4}{128} \frac{k_x^6 v^6}{\omega^6} + \dots \right]. \quad (4.22)$$

Os dois primeiros termos da equação (4.22) correspondem à aproximação padrão FFD e podem ser reescritos em termos da variável $p = \frac{v_{ref}}{v}$. O terceiro termo corresponde à correção do operador Λ , que permite levar em conta a modificação do operador Laplaciano transversal, relacionado com a derivada lateral da velocidade v_x . A equação (4.22) pode então ser reescrita como

$$d = \frac{\omega}{v_{ref}} (p - 1) + \frac{\omega}{v_{ref}} p(1 - p) \left\{ 1 - \frac{\delta_1}{2} u^2 - \frac{\delta_2}{8} u^4 - \frac{\delta_3}{16} u^6 - \frac{5\delta_4}{128} u^8 + \dots \right\} - \frac{\omega}{v_{ref}} p(1 - p) + \frac{ik_x v_x}{\omega} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2}{8} u^2 + \frac{3}{16} u^4 + \frac{5 \cdot 4}{128} u^6 + \dots \right\}, \quad (4.23)$$

onde

$$u^2 = \left(\frac{vk_x}{\omega} \right)^2.$$

Desta forma, a aproximação FFD de segunda ordem do operador Λ , que inclui o novo termo associado à derivada lateral da velocidade, pode ser escrito como

$$\Lambda \approx \underbrace{\sqrt{\frac{\omega^2}{v_{ref}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}}}_I + \underbrace{\left(\frac{\omega}{v_{ref}} \right)^{1/2} (p^{1/2} - 1)}_{II} + \underbrace{\frac{\omega}{v} \left(1 - \frac{v_{ref}}{v} \right) \left(\frac{\frac{v^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}}{a_1 + b_1 \frac{v^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \right)}_{III} + \underbrace{\frac{v_x}{\omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{8} \frac{v^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{3}{16} \frac{v^4}{\omega^4} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right)}_{IV}, \quad (4.24)$$

onde o termo I corresponde a um deslocamento de fase no domínio $(\omega - \mathbf{k})$ e os termos II e III à aproximação split-step e FFD de segunda ordem, respectivamente. O termo IV corresponde à correção de fase associada à derivada lateral do campo de velocidades.

Para a aproximação do erro, associado ao operador $\Lambda^{-1/2}$ em relação ao operador avaliado na velocidade de referência, v_{ref} , temos:

$$d = \Lambda^{-1/2} - \Lambda_{ref}^{-1/2},$$

ou

$$d = \left(\frac{\omega}{v} \right)^{-1/2} \left(1 + \frac{\Delta_T}{\omega^2} \right)^{-1/4} - \left(\frac{\omega}{v_{ref}} \right)^{-1/2} \left(1 + \frac{v_{ref}^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1/4}.$$

Utilizando agora a expressão da série de Taylor

$$f(x) = (1 + X^2)^{-1/4},$$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{5}{32}X^4 - \frac{15}{128}X^6 + \frac{195}{2048}X^8 - \dots,$$

onde $X^2 = \frac{\Delta_T}{\omega^2}$. Em seguida, passando ao domínio transformado $(k_x, z; \omega)$ temos que

$$d = \left(\frac{\omega}{v}\right)^{-1/2} \left[1 - \frac{1}{4} \left(-\frac{k_x^2 v^2}{\omega^2} + i \frac{k_x v v_x}{\omega^2} \right) + \frac{5}{32} \left(-\frac{k_x^2 v^2}{\omega^2} + i \frac{k_x v v_x}{\omega^2} \right)^2 - \frac{15}{128} \left(-\frac{k_x^2 v^2}{\omega^2} + i \frac{k_x v v_x}{\omega^2} \right)^3 + \dots \right] - \left(\frac{\omega}{v_{ref}}\right)^{-1/2} \left[1 + \frac{1}{4} \frac{k_x^2 v_{ref}^2}{\omega^2} + \frac{5}{32} \frac{k_x^4 v_{ref}^4}{\omega^4} + \frac{15}{128} \frac{k_x^6 v_{ref}^6}{\omega^6} + \dots \right]. \quad (4.25)$$

Reorganizando os termos na equação (4.25) e desprezando termos da ordem $O(v_x^2)$, obtemos

$$d = \left(\frac{\omega}{v}\right)^{-1/2} \left[1 + \frac{1}{4} \frac{k_x^2 v^2}{\omega^2} + \frac{5}{32} \frac{k_x^4 v^4}{\omega^4} + \frac{15}{128} \frac{k_x^6 v^6}{\omega^6} + \dots \right] - \left(\frac{\omega}{v_{ref}}\right)^{-1/2} \left[1 + \frac{1}{4} \frac{k_x^2 v_{ref}^2}{\omega^2} + \frac{5}{32} \frac{k_x^4 v_{ref}^4}{\omega^4} + \frac{15}{128} \frac{k_x^6 v_{ref}^6}{\omega^6} + \dots \right] - \left(\frac{\omega}{v}\right)^{-1/2} \frac{i k_x v v_x}{\omega^2} \left[\frac{1}{4} + \frac{5 \cdot 2}{32} \frac{k_x^2 v^2}{\omega^2} + \frac{15 \cdot 3}{128} \frac{k_x^4 v^4}{\omega^4} + \dots \right]. \quad (4.26)$$

Organizando os termos na equação (4.26), e introduzindo a variável $p = \frac{v_{ref}}{v}$, obtemos

$$d \approx \left(\frac{\omega}{v_{ref}}\right)^{-1/2} (p^{-1/2} - 1) + \frac{1}{4} \left(\frac{\omega}{v_{ref}}\right)^{-1/2} p^{-1/2} (1 - p^{5/2}) u^2 + \frac{15}{32} \left(\frac{\omega}{v_{ref}}\right)^{-1/2} p^{-1/2} (1 - p^{9/2}) u^4 + \dots - \left(\frac{\omega}{v}\right)^{-1/2} \frac{i k_x v v_x}{\omega^2} \left[\frac{1}{4} + \frac{5 \cdot 2}{32} u^2 + \frac{15 \cdot 3}{128} u^4 + \dots \right]. \quad (4.27)$$

Conservando os termos correspondentes a uma aproximação FFD, o operador $\Lambda^{-1/2}$ pode ser descrito pela equação

$$\Lambda^{-1/2} \approx \underbrace{\left(\frac{\omega}{v_{ref}}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{v_{ref}^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1/4}}_I + \underbrace{\left(\frac{\omega}{v_{ref}}\right)^{-1/2} (p^{-1/2} - 1)}_{II} + \underbrace{\frac{1}{4} \left(\frac{\omega}{v_{ref}}\right)^{-1/2} p^{-1/2} (1 - p^{5/2}) w^2 + \frac{15}{32} \left(\frac{\omega}{v_{ref}}\right)^{-1/2} p^{-1/2} (1 - p^{9/2}) w^4}_{III} - \underbrace{\left(\frac{\omega}{v}\right)^{-1/2} \frac{v v_x}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{4} + \frac{5 \cdot 2}{32} w^2 + \frac{15 \cdot 3}{128} w^4 \right]}_{IV}, \quad (4.28)$$

onde

$$w^2 = -\frac{v^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Na equação (4.28) o termo I corresponde ao operador avaliado na velocidade de referência, o termo II a uma aproximação split-step, enquanto o termo III corresponde a uma aproximação FFD do operador $\Lambda^{-1/2}$. O termo IV corresponde de novo à correção do operador Laplaciano associado à derivada lateral da velocidade v_x .

Finalmente deve ser obtida uma aproximação no domínio misto do operador $\Lambda^{1/2}$, na forma

$$d = \Lambda^{1/2} - \Lambda_{ref}^{1/2},$$

ou

$$d = \left(\frac{\omega}{v}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\Delta_T}{\omega^2}\right)^{1/4} - \left(\frac{\omega}{v_{ref}}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{v_{ref}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}}{\omega^2}\right)^{1/4}.$$

Utilizando a expressão da série de Taylor

$$f(x) = (1 + X^2)^{1/4},$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{4}X^2 - \frac{3}{32}X^4 + \frac{7}{128}X^6 - \frac{77}{2048}X^8 + \dots,$$

com $X^2 = \frac{\Delta_T}{\omega^2}$, e passando ao domínio transformado $(k_x, z; \omega)$, temos

$$d = \left(\frac{\omega}{v}\right)^{1/2} \left[1 + \frac{1}{4} \left(-\frac{k_x^2 v^2}{\omega^2} + i \frac{k_x v v_x}{\omega^2}\right) - \frac{3}{32} \left(-\frac{k_x^2 v^2}{\omega^2} + i \frac{k_x v v_x}{\omega^2}\right)^2 + \frac{7}{128} \left(-\frac{k_x^2 v^2}{\omega^2} + i \frac{k_x v v_x}{\omega^2}\right)^3 + \dots\right] - \left(\frac{\omega}{v_{ref}}\right)^{1/2} \left[1 + \frac{1}{4} \frac{-k_x^2 v_{ref}^2}{\omega^2} - \frac{3}{32} \frac{k_x^4 v_{ref}^4}{\omega^4} + \frac{7}{128} \frac{-k_x^6 v_{ref}^6}{\omega^6} - \dots\right]. \quad (4.29)$$

Reorganizando os termos na equação (4.29) e desprezando termos da ordem $O(v_x^2)$, obtemos

$$d = \left(\frac{\omega}{v}\right)^{1/2} \left[1 - \frac{1}{4} \frac{k_x^2 v^2}{\omega^2} - \frac{3}{32} \frac{k_x^4 v^4}{\omega^4} - \frac{7}{128} \frac{k_x^6 v^6}{\omega^6} - \dots\right] - \left(\frac{\omega}{v_{ref}}\right)^{1/2} \left[1 - \frac{1}{4} \frac{k_x^2 v_{ref}^2}{\omega^2} - \frac{3}{32} \frac{k_x^4 v_{ref}^4}{\omega^4} - \frac{7}{128} \frac{k_x^6 v_{ref}^6}{\omega^6} - \dots\right] + \left(\frac{\omega}{v}\right)^{1/2} \frac{i k_x v v_x}{\omega^2} \left[\frac{1}{4} + \frac{3 \cdot 2}{32} \frac{k_x^2 v^2}{\omega^2} + \frac{7 \cdot 3}{128} \frac{k_x^4 v^4}{\omega^4} + \dots\right], \quad (4.30)$$

que pode ser também expresso pela equação

$$d \approx \left(\frac{\omega}{v_{ref}}\right)^{1/2} (p^{1/2} - 1) - \frac{1}{4} \left(\frac{\omega}{v_{ref}}\right)^{1/2} p^{1/2} (1 - p^{3/2}) u^2 - \frac{3}{32} \left(\frac{\omega}{v_{ref}}\right)^{1/2} p^{1/2} (1 - p^{7/2}) u^4 - \dots + \left(\frac{\omega}{v}\right)^{1/2} \frac{i k_x v v_x}{\omega^2} \left[\frac{1}{4} + \frac{3 \cdot 2}{32} u^2 + \frac{7 \cdot 3}{128} u^2\right]. \quad (4.31)$$

Por fim, a aproximação do operador fica

$$\Lambda^{1/2} \approx \underbrace{\left(\frac{\omega}{v_{ref}}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{v_{ref}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}}{\omega^2}\right)^{1/4}}_I + \underbrace{\left(\frac{\omega}{v_{ref}}\right)^{1/2} (p^{1/2} - 1)}_{II} - \underbrace{\frac{1}{4} \left(\frac{\omega}{v_{ref}}\right)^{1/2} p^{1/2} (1 - p^{3/2}) w^2 - \frac{3}{32} \left(\frac{\omega}{v_{ref}}\right)^{1/2} p^{1/2} (1 - p^{7/2}) w^4}_{III} + \underbrace{\left(\frac{\omega}{v}\right)^{1/2} \frac{v v_x}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{4} + \frac{3 \cdot 2}{32} w^2 + \frac{7 \cdot 3}{128} w^4\right]}_{IV}. \quad (4.32)$$

Nas expressões (4.24), (4.28) e (4.32), o termo *IV* contém, de forma explícita, a derivada lateral da velocidade, o que pode se tornar inconveniente em aplicações práticas, pois requer o conhecimento de um gradiente lateral homogêneo do campo de velocidades, ou o cálculo da derivada lateral a partir de uma estimativa do campo de velocidades, o qual pode nem sempre ser suave.

Apresentamos os resultados obtidos com a aproximação SS convencional na fase, na forma

$$\Lambda \approx \underbrace{\sqrt{\frac{\omega^2}{v_{ref}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}}}_I + \underbrace{\left(\frac{\omega}{v_{ref}}\right)^{1/2} (p^{1/2} - 1)}_{II}, \quad (4.33)$$

isto é, sem levar em conta o termo associado à derivada lateral da velocidade.

Em relação as correções de amplitude através dos operadores $\Lambda^{-1/2}$ e $\Lambda^{1/2}$, foram implementados os termos *I* e *II*, na forma

$$\Lambda^{-1/2} \approx \underbrace{\left(\frac{\omega}{v_{ref}}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{v_{ref}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}}{\omega^2}\right)^{-1/4}}_I + \underbrace{\left(\frac{\omega}{v_{ref}}\right)^{-1/2} (p^{-1/2} - 1)}_{II}, \quad (4.34)$$

$$\Lambda^{1/2} \approx \underbrace{\left(\frac{\omega}{v_{ref}}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{v_{ref}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}}{\omega^2}\right)^{1/4}}_I + \underbrace{\left(\frac{\omega}{v_{ref}}\right)^{1/2} (p^{1/2} - 1)}_{II}, \quad (4.35)$$

onde são incluídos dos termos de correção de amplitude sem precisar avaliar a derivada lateral da velocidade, denominamos este algoritmo *SS com correções de amplitude*.

O algoritmo foi testado com o mesmo dado de um único tiro apresentado na seção PSPI com correção de amplitude. As Figuras 4.18 e 4.19 apresentam as imagens obtidas para um modelo com variação lateral da velocidade, ou seja, $v(x) = 2000 + 0,2x$ m/s, através das migrações SS convencional e SS com correção de amplitude, respectivamente.

Amplitudes melhores balanceadas pelo ângulo são recuperadas na imagem obtida com o procedimento que faz correções de amplitude, ver Figuras 4.18 e 4.19. Isto também pode ser confirmado nas Figuras 4.20 e 4.21, onde é obtida uma pequena correção das amplitudes pelo ângulo e uma melhor estimativa da refletividade. Os valores estimados da refletividade para os quatro refletores são mais próximos do valor esperado na imagem obtida com o método SS com correções de amplitude, que a imagem obtida com o método SS convencional. No entanto, deve ser observado que nenhum dos dois métodos fornece o valor unitário para a refletividade. Isto pode ser atribuído ao fato de que a aproximação SS é válida somente para variações laterais da velocidade muito pequenas e, por isso, tanto a fase como as amplitudes não são estimadas corretamente para este modelo de velocidades.

O algoritmo SS proposto foi testado com o dado sintético Marmousi. Na implementação do algoritmo SS com correções de amplitude não é necessária a avaliação da derivada vertical nem lateral do campo de velocidades, pois o operador Γ não aparece nas equações e as aproximações dos operadores Λ , $\Lambda^{-1/2}$ e $\Lambda^{1/2}$ não consideram termos com derivada lateral, equações (4.33, 4.34 e 4.35).

As Figuras 4.22 e 4.23 correspondem às imagens obtidas com as técnicas SS convencional e SS com correções de amplitude proposta, respectivamente. Podemos observar uma melhor compensação da iluminação na parte rasa da seção através da técnica proposta, ver Figuras 4.24 e 4.25, que é atribuída a uma melhor representação da fonte nas equações, assim como um melhor balanceamento das amplitudes nas estruturas profundas, devido às correções de amplitude em cada nível de extrapolação.

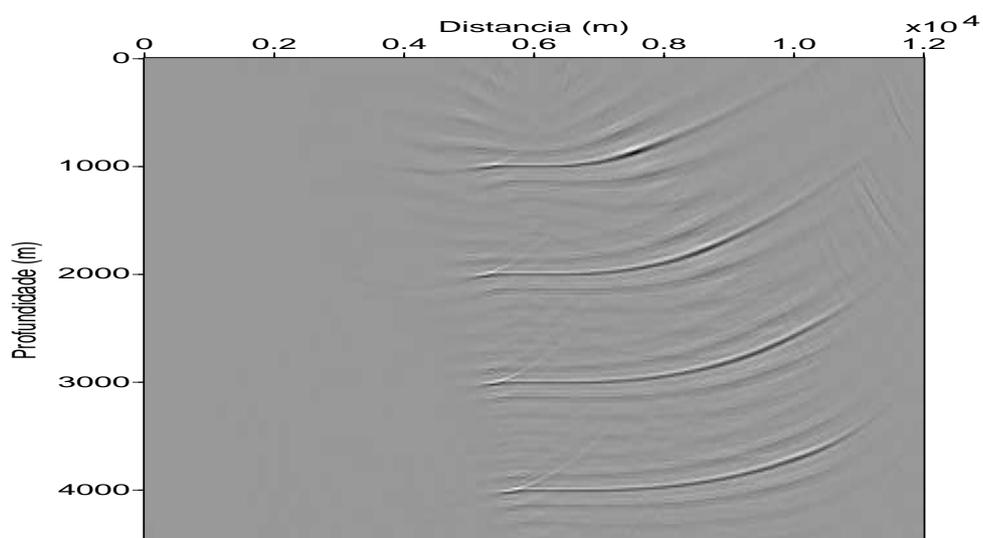


Figura 4.18: Imagem obtida através do método SS convencional.

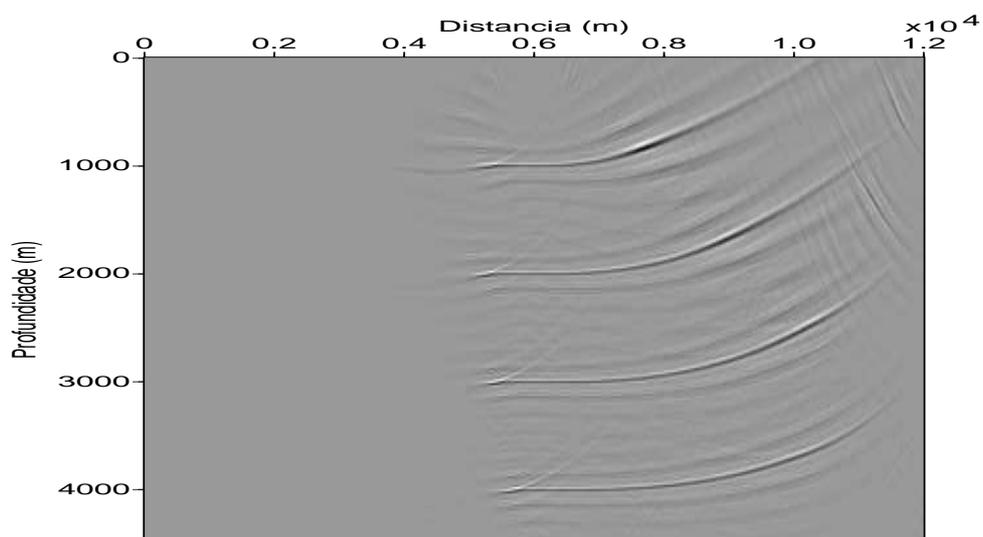


Figura 4.19: Imagem obtida através do método SS com correção de amplitude.

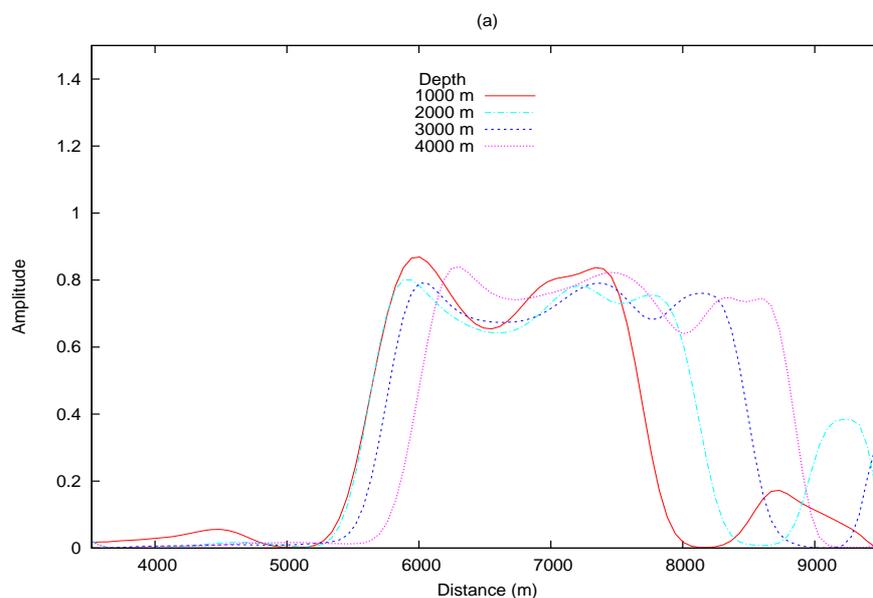


Figura 4.20: Amplitudes recuperadas ao longo dos refletores da seção migrada através do método SS convencional.

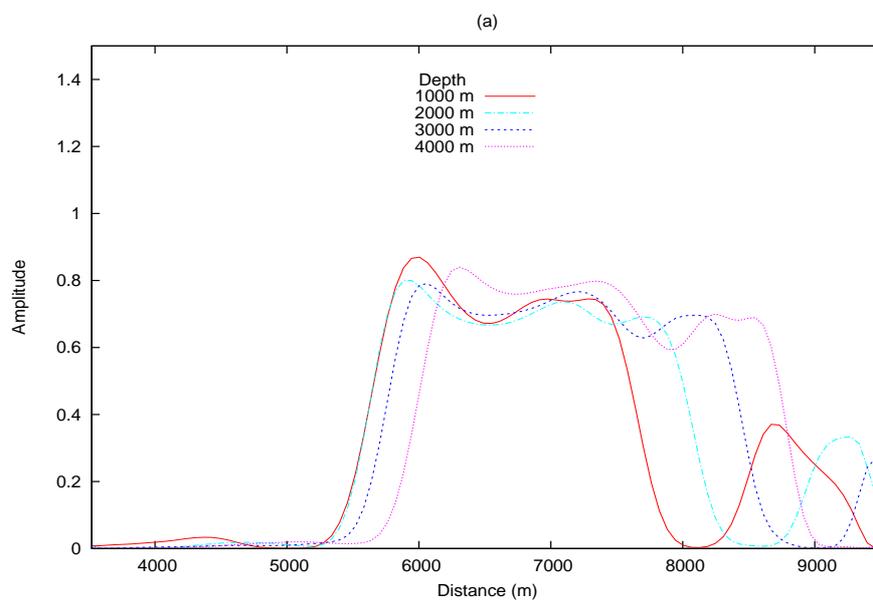


Figura 4.21: Amplitudes recuperadas ao longo dos refletores da seção migrada através do método SS com correção de amplitude.

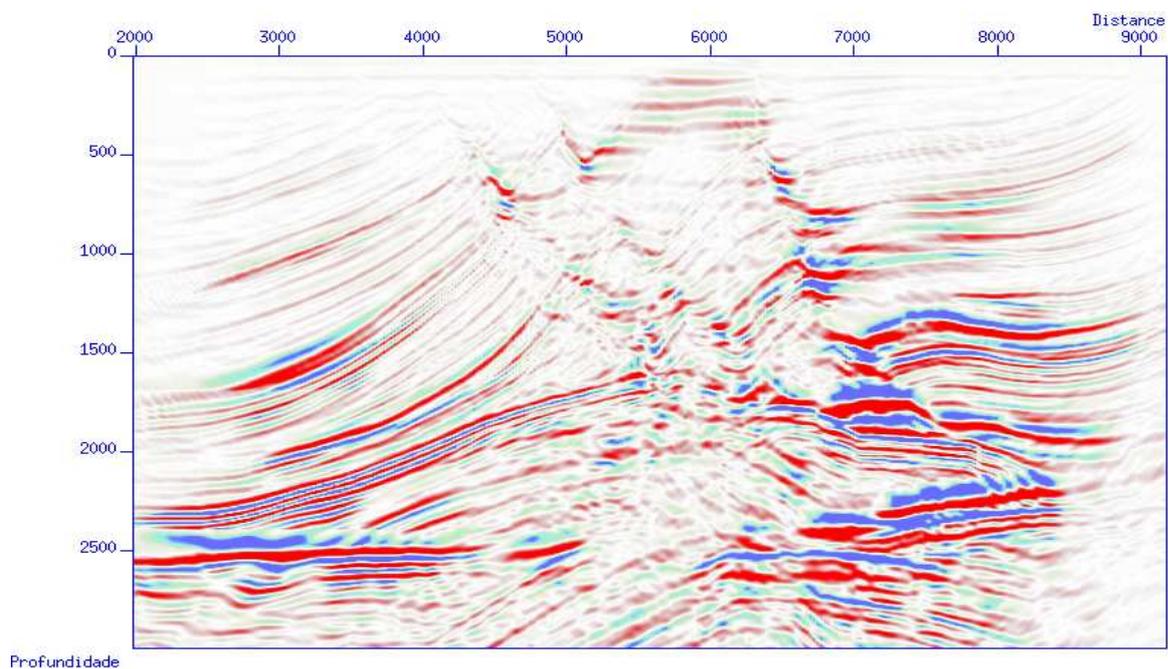


Figura 4.22: Resultado da migração SS convencional

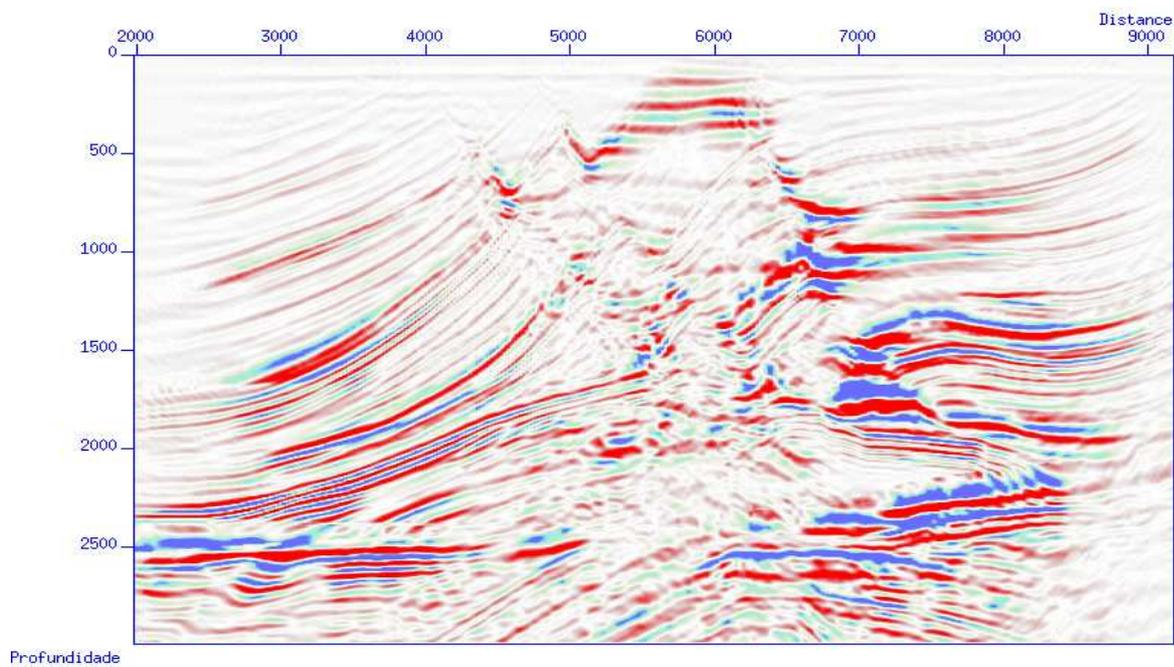


Figura 4.23: Resultado da migração SS com correção de amplitude

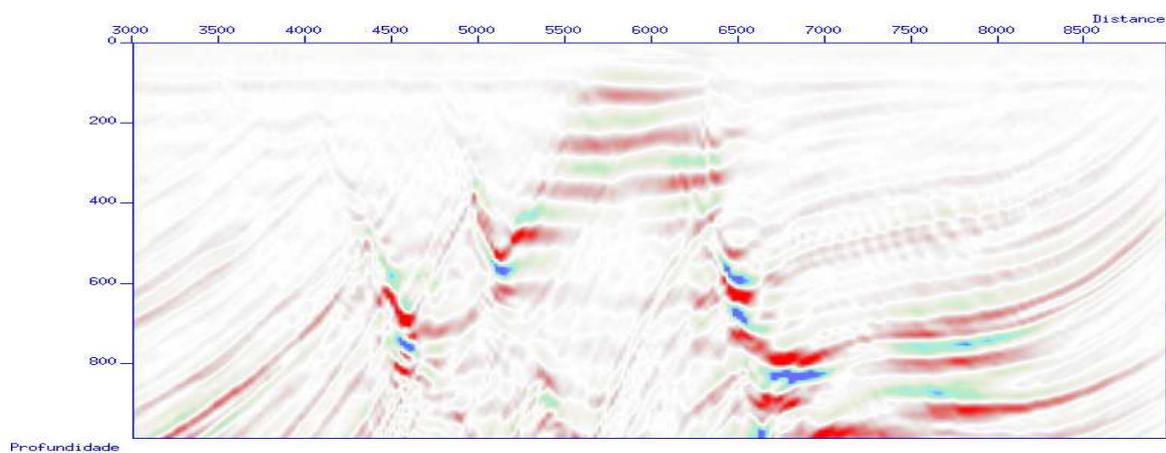


Figura 4.24: Detalhe da parte rasa, até 1 km, do resultado da migração com o método SS convencional (Figura 4.22).

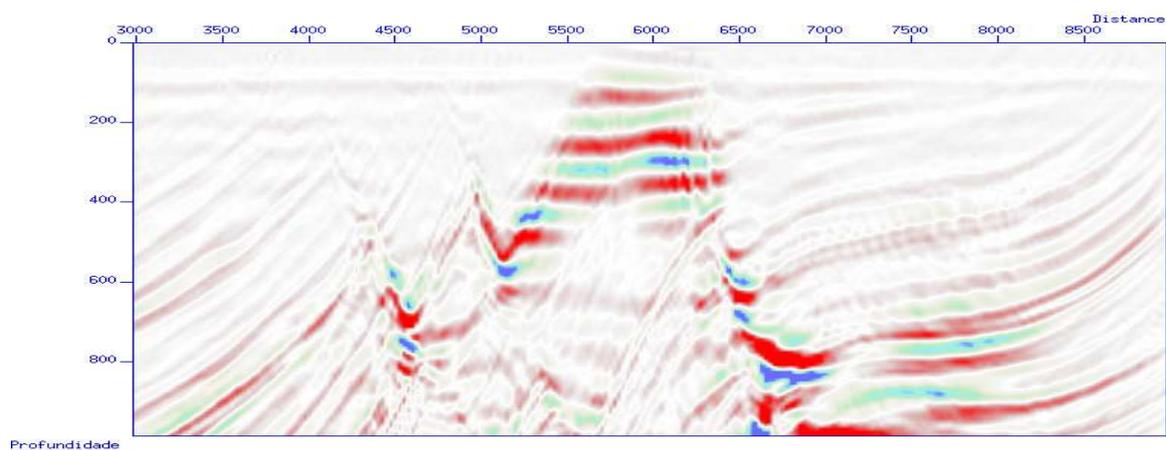


Figura 4.25: Detalhe da parte rasa, até 1 km, do resultado da migração com o método SS com correção de amplitude (Figura 4.23).

A implementação do algoritmo FFD com correções de amplitude implica desenvolver técnicas implícitas ou explícitas para solucionar as equações correspondentes aos termos *III* e *IV* nas aproximações apresentadas dos operadores Λ , $\Lambda^{-1/2}$ e $\Lambda^{1/2}$. Dado que estes termos levam a instabilidades em meios com fortes contrastes de velocidade, consideramos mais apropriado utilizar a linearização direta dos operadores $\Lambda^{-1/2}$ e $\Lambda^{1/2}$ por séries de Taylor. Quanto ao operador Λ , este continua sendo avaliado no domínio misto, porém, adicionando-se o novo termo $i \frac{v_x}{\omega} \frac{\partial}{\partial x}$ na aproximação FFD convencional, o que acarretará em correções de fase na migração associadas a variações laterais da velocidade além das correções de amplitude.

O esquema de migração FFD com correções de amplitude implementado, utiliza as seguintes aproximações dos operadores Λ e $\Lambda^{1/2}$:

$$\Lambda \approx \underbrace{\sqrt{\frac{\omega^2}{v_{ref}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}}}_I + \underbrace{\left(\frac{\omega}{v_{ref}}\right)^{1/2} (p^{1/2} - 1)}_{II} + \underbrace{\frac{\omega}{v} \left(1 - \frac{v_{ref}}{v}\right) \left(\frac{v^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)}_{III} + \underbrace{\frac{v_x}{2\omega} \frac{\partial}{\partial x}}_{IV}, \quad (4.36)$$

$$\Lambda^{1/2} = \left(\frac{\omega}{v}\right)^{1/2} \left[1 + \frac{\Delta_T}{\omega^2}\right]^{1/4} = \left(\frac{\omega}{v}\right)^{1/2} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{v^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{vv_x}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{3}{32} \left(\frac{v^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{vv_x}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \dots\right]. \quad (4.37)$$

Utilizando termos de segunda ordem na aproximação do operador $(1 + X^2)^{1/4}$, onde $X^2 = \frac{\Delta_T}{\omega^2}$, Figura 4.26, e a mesma ordem de aproximação para o operador $(1 + X^2)^{-1/4}$, somente a primeira derivada lateral do campo de velocidades e derivadas até de segunda ordem dos campos de onda são considerados.

Em relação ao operador $\Lambda^{-1/2}$, é utilizada a mesma aproximação por séries de Taylor apresentada na aproximação dada pela equação (4.15), utilizada na migração PSPI com correções de amplitude.

O algoritmo foi testado inicialmente em dois campos de velocidades com gradientes constantes nas direções x e z . O primeiro teste corresponde ao campo com variação lateral $v(x) = 2000 + 0,2x$ m/s, cujos resultados, com os algoritmos PSPI e SS com correções de amplitude, foram mostrados nas Figuras (4.10), (4.11), (4.18) e (4.19).

A imagem obtida através da técnica FFD proposta (Figura 4.28) tem uma ótima correção de amplitude, tanto pelo ângulo como pela profundidade, em relação à imagem fornecida pelo esquema FFD convencional. Em relação às amplitudes recuperadas nos refletores, observa-se

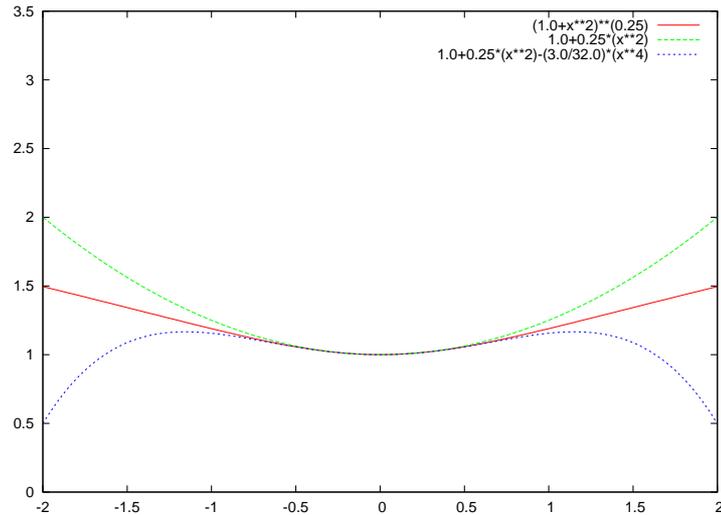


Figura 4.26: Aproximação do operador $(1 + X^2)^{1/4}$ com termos de primeira e segunda ordens.

que as amplitudes recuperadas com o método convencional, Figura 4.29, apresentam um erro que aumenta com a velocidade, devido ao fato do esquema FFD trabalhar com a velocidade mínima, como velocidade de referência. As amplitudes recuperadas pelo esquema proposto, Figura 4.30, estão corrigidas pelo ângulo e pela profundidade. O erro nas amplitudes, devido às altas velocidades, também foi corrigido pelo método FFD. Os valores de amplitudes recuperados pelo método FFD com correções de amplitude, estão muito próximos do valor unitário, ou seja, o valor esperado para a amplitude dos quatro refletores.

Um segundo teste, produzido com um dado sintético e que corresponde a um único tiro na posição $x_s = 6000$ m, num campo de velocidades que possui tanto variação lateral como vertical, $v(x) = 2000 + 0.2x + 0.3z$ m/s, e a mesma estrutura de quatro refletores planos nas profundidades $z = 1000, 2000, 3000, 4000$ m, Figura 4.31, permite conferir o bom desempenho do esquema proposto. As Figuras 4.33 e 4.34 correspondem às seções migradas do dado mostrado na Figura 4.32, com o esquema FFD convencional e o esquema FFD com correções de amplitude proposto.

A imagem da Figura 4.34 tem uma ótima correção de amplitude, como se observa também na Figura 4.36, em relação à imagem obtida pelo esquema FFD convencional. Assim, conclui-se que o algoritmo FFD com correções de amplitude proposto obtém bons resultados em modelos de velocidades com uma variação suave, tanto lateralmente quanto verticalmente.

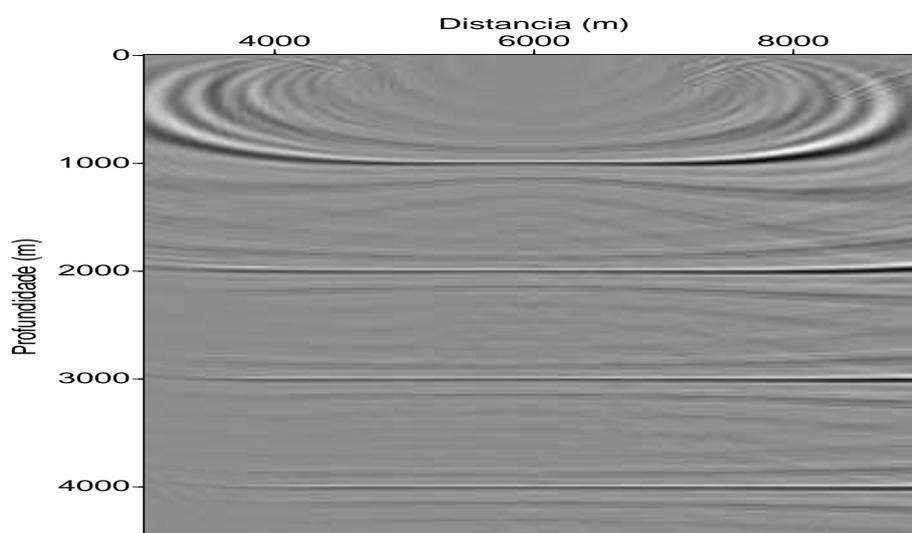


Figura 4.27: Imagem obtida através do algoritmo FFD convencional.

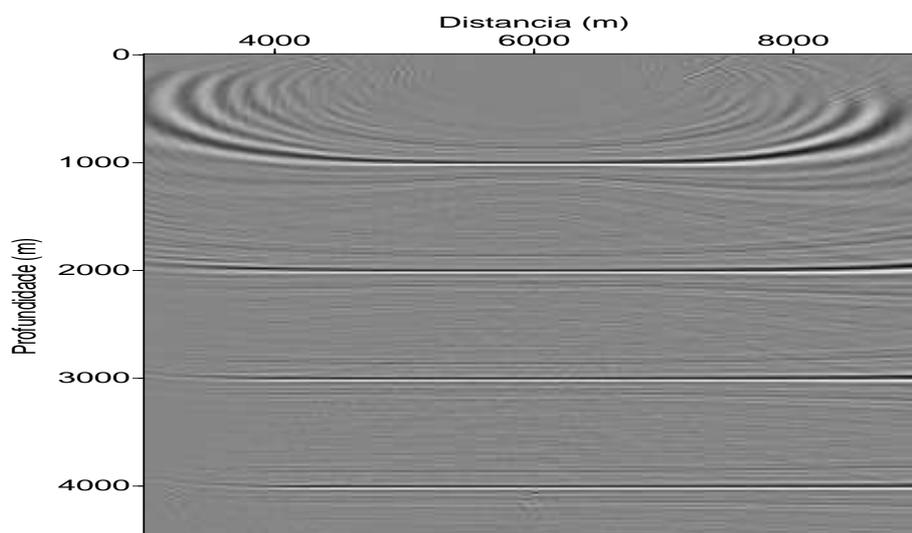


Figura 4.28: Imagem obtida através do algoritmo FFD com correção de amplitude e fase.

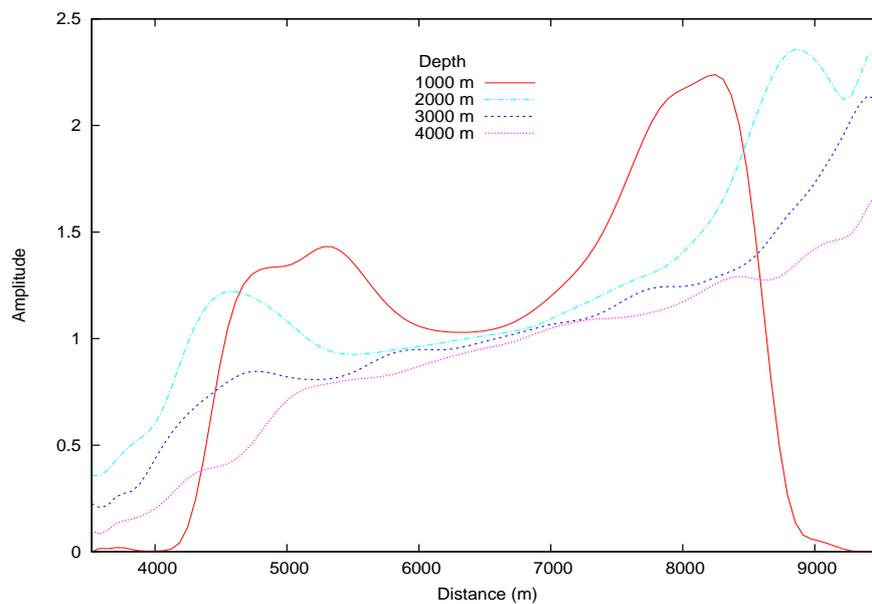


Figura 4.29: Amplitudes recuperadas ao longo dos refletores do resultado da migração FFD convencional (Figura 4.27).

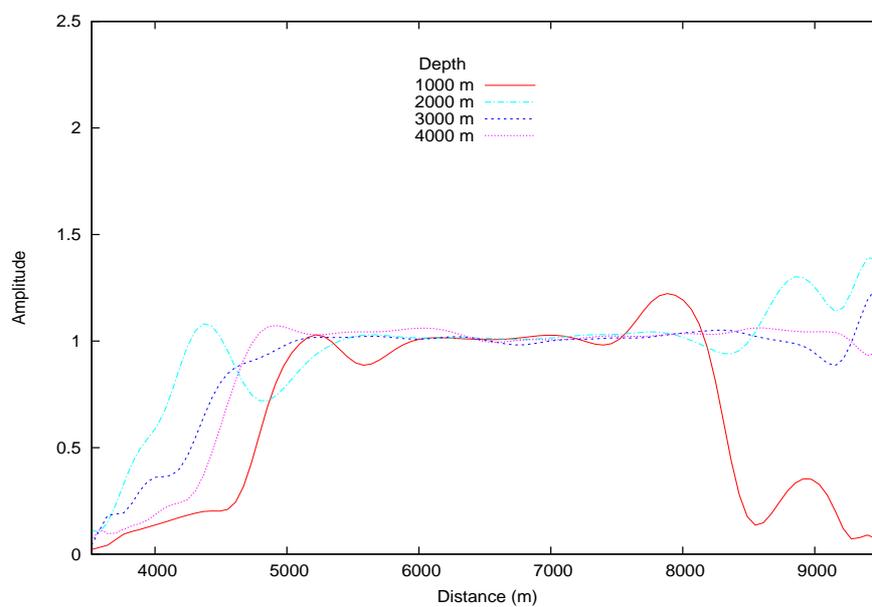


Figura 4.30: Amplitudes recuperadas ao longo dos refletores do resultado da migração FFD com correção de amplitude (Figura 4.28).

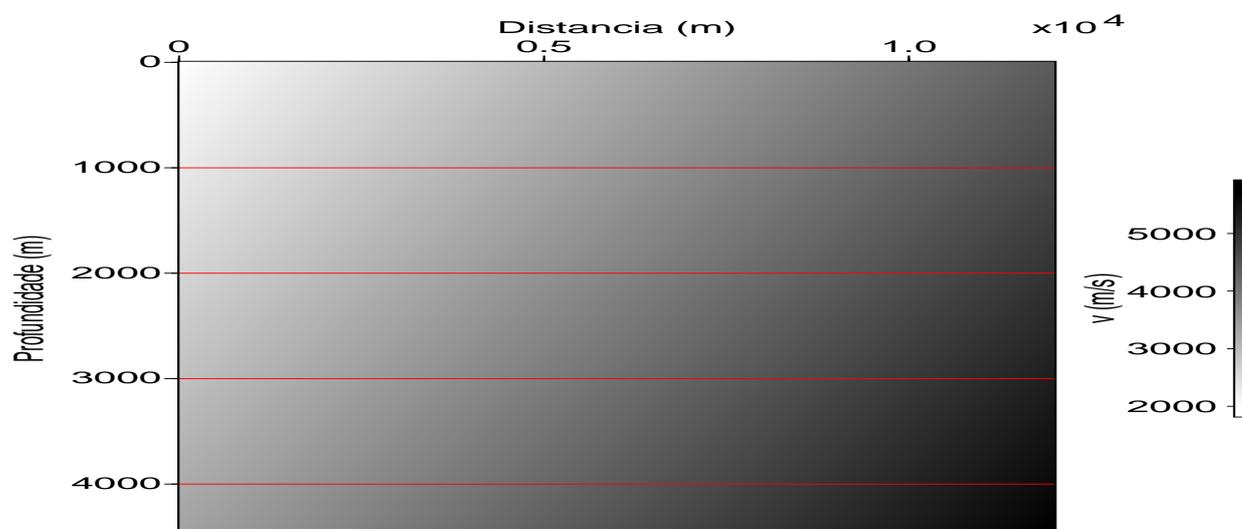


Figura 4.31: Modelo de quatro refletos planos e o campo de velocidades $v(x, z) = 2000 + 0,2x + 0,3z$ m/s.

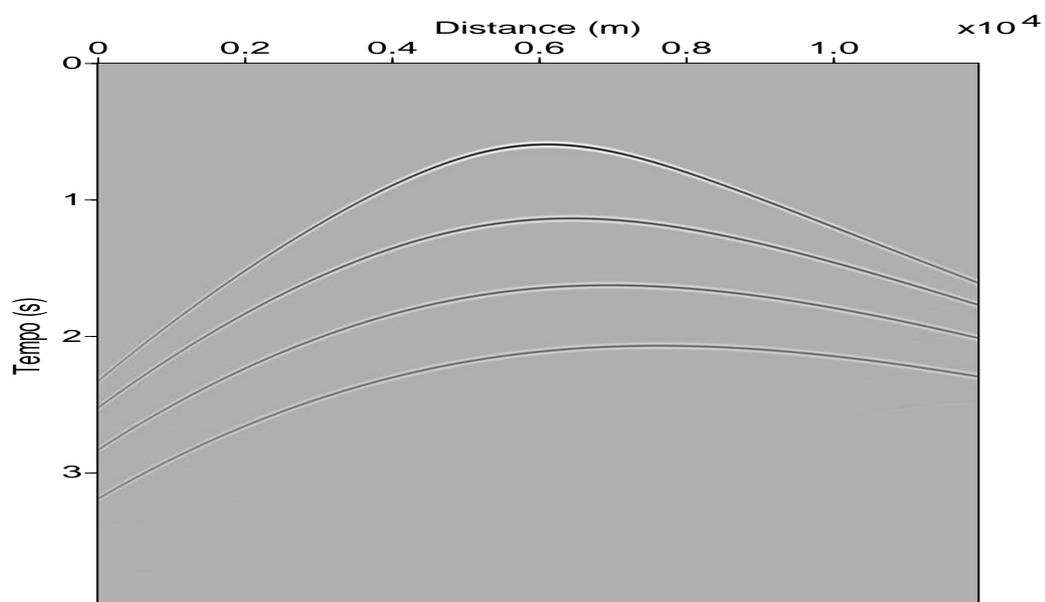


Figura 4.32: Dado obtido através de modelagem tipo Kirchhoff com o campo de velocidades mostrado na Figura 4.31.

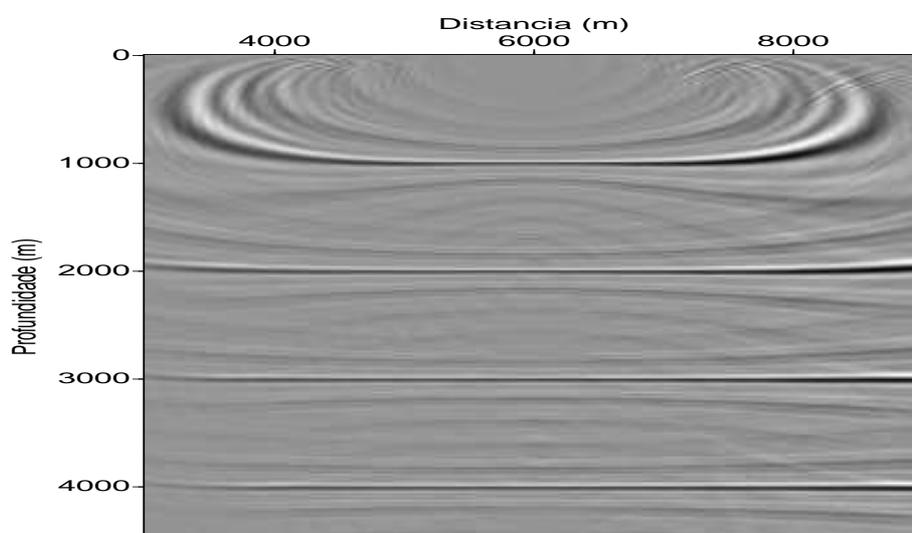


Figura 4.33: Imagem obtida através do algoritmo FFD convencional.

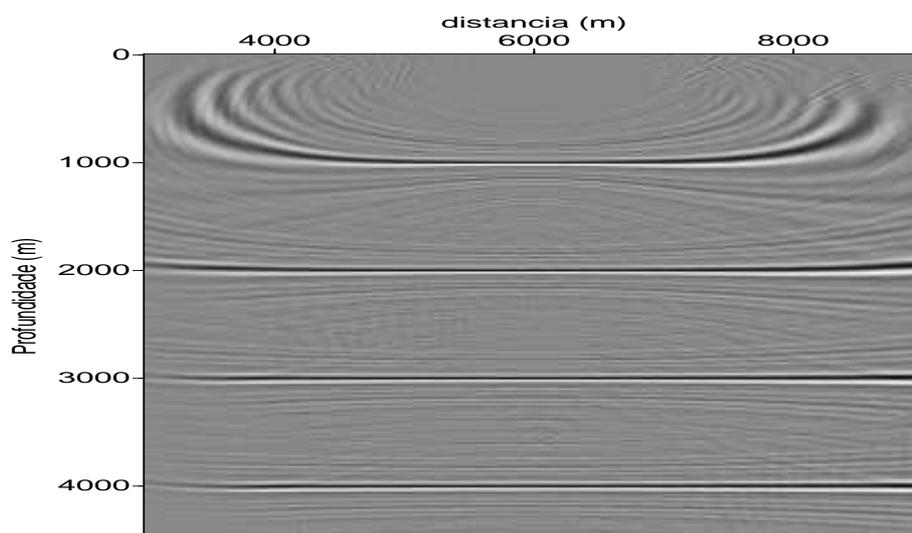


Figura 4.34: Imagem obtida através do algoritmo FFD com correções de amplitude e fase.

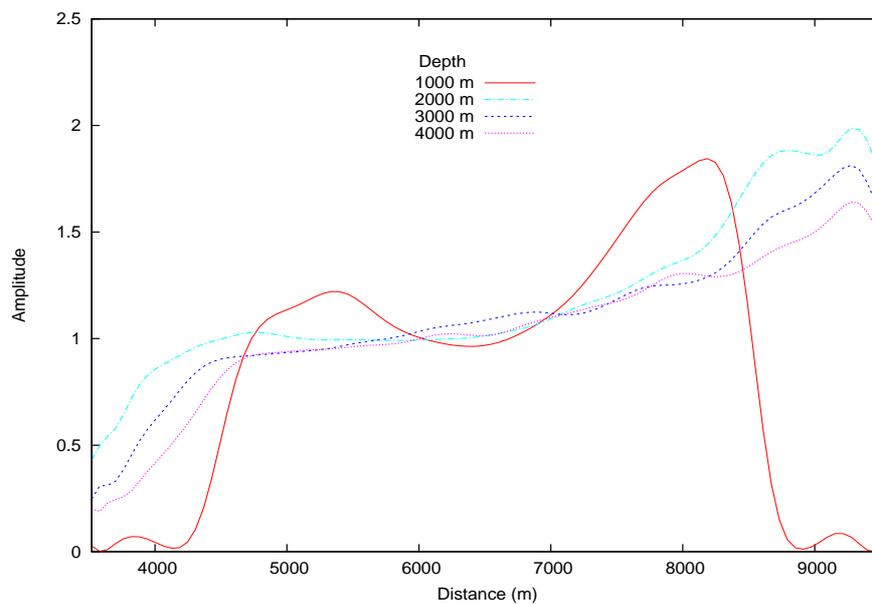


Figura 4.35: Amplitudes recuperadas ao longo dos refletores do resultado da migração FFD convencional (Figura 4.33).

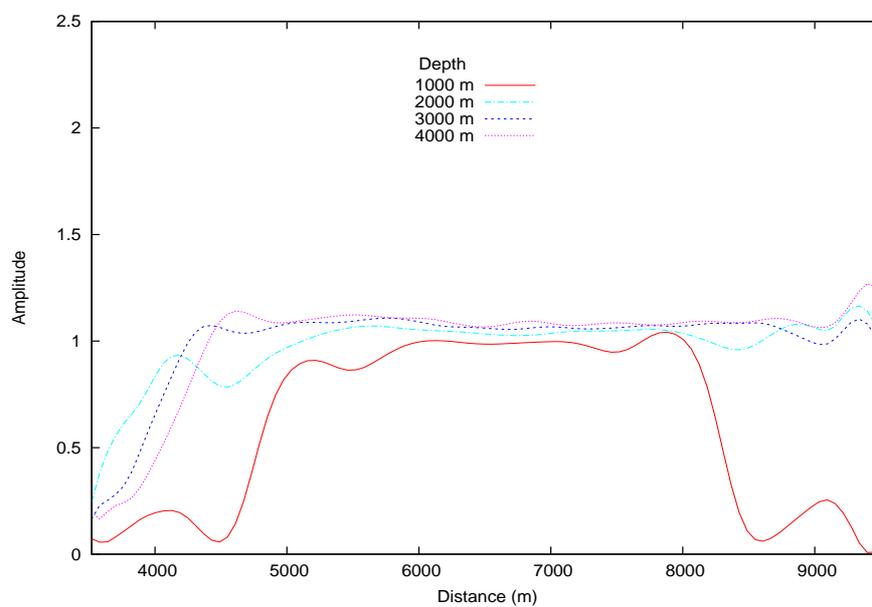


Figura 4.36: Amplitudes recuperadas ao longo dos refletores do resultado da migração FFD com correção de amplitude (Figura 4.34).

Testes do esquema FFD com correções de amplitude em modelos mais complexos, tais como o dado Marmousi, exigem a suavização do campo de velocidades para se calcular a derivada lateral v_x , que aparece em alguns termos dos operadores Λ (4.24), $\Lambda^{-1/2}$ (4.15) e $\Lambda^{1/2}$ (4.37). No algoritmo implementado, o esquema de extrapolação de fase trabalha com o campo de velocidades original, enquanto um campo suavizado é utilizado para calcular a derivada lateral, através de um esquema de diferenças finitas de quarta ordem.

Os resultados para o modelo Marmousi, testado também com as técnicas PSPI e SS com correções de amplitude, são aqui apresentados.

As Figuras 4.37 e 4.38 permitem concluir que uma melhor compensação da iluminação para os refletores superficiais e os refletores profundos é obtida com o método FFD com correções de amplitude proposto e, por isso, é obtida uma melhor definição dos refletores (Figuras 4.39 e 4.40).

Embora o método proposto FFD com correções de amplitude, melhore as amplitudes recuperadas, o fato de introduzir um novo termo de fase, associado com a derivada lateral do campo de velocidades, parece introduzir artefatos numéricos em regiões com forte contraste de velocidade, o que pode ser conferido nas Figuras 4.37 e 4.38. Por isto testes em modelos com fortes contrastes de velocidade, por exemplo, modelos com a presença de corpos de sal, podem conduzir a instabilidade e devem ser analisados em trabalhos posteriores, onde pode também se testar o resultado de utilizar uma correção de amplitude com a técnica *split step* proposta e cinemática do FFD convencional.

Entretanto, não é simples provar que a mudança de variáveis p_D e p_U para q_D e q_U , introduzida no domínio $(x, z; \omega)$, permite eliminar o termo associado ao operador Γ nas equações (4.1) e (4.2). Por esta razão, uma outra alternativa, que pode ser desenvolvida em trabalhos futuros, consiste em se trabalhar diretamente com as equações dos campos p_D e p_U e usando-se uma estratégia de particionamento da equação. Primeiro é resolvida a equação com o operador Λ e a solução é utilizada como entrada na equação que tem o operador Γ . Neste caso, aproximações dos operadores pseudodiferenciais Λ , Λ^{-1} e Γ nos domínios $(k_x, z; \omega)$ e $(x, z; \omega)$ precisam ser desenvolvidas.

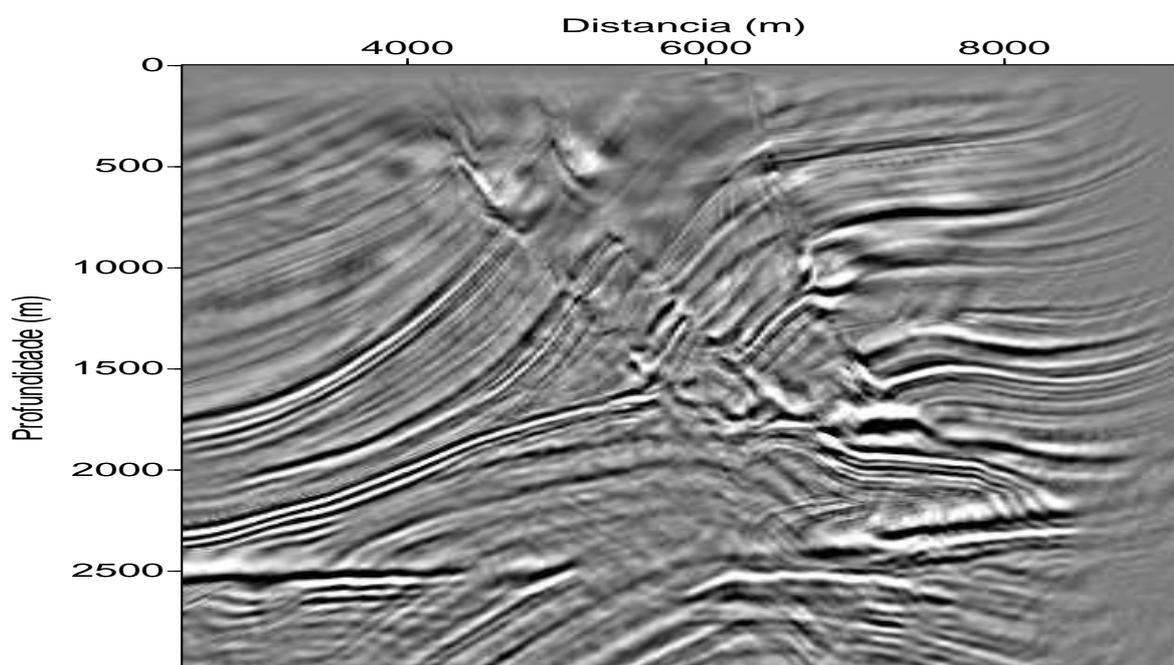


Figura 4.37: Imagem obtida através do método FFD convencional.

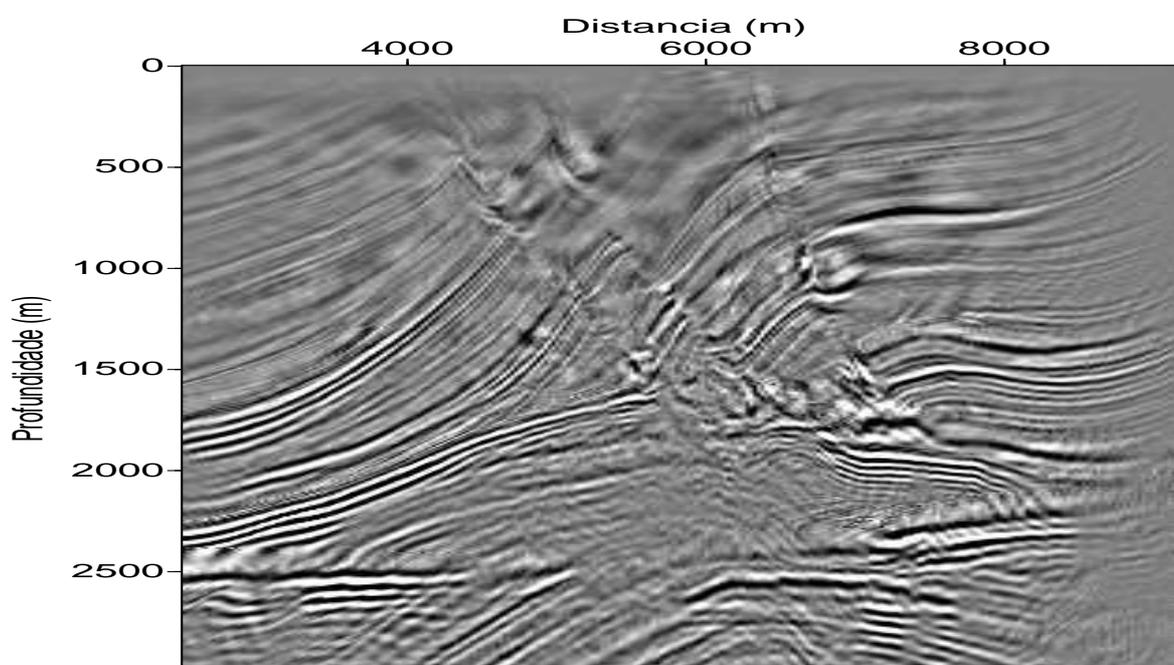


Figura 4.38: Imagem obtida através do método FFD com correção de amplitude.

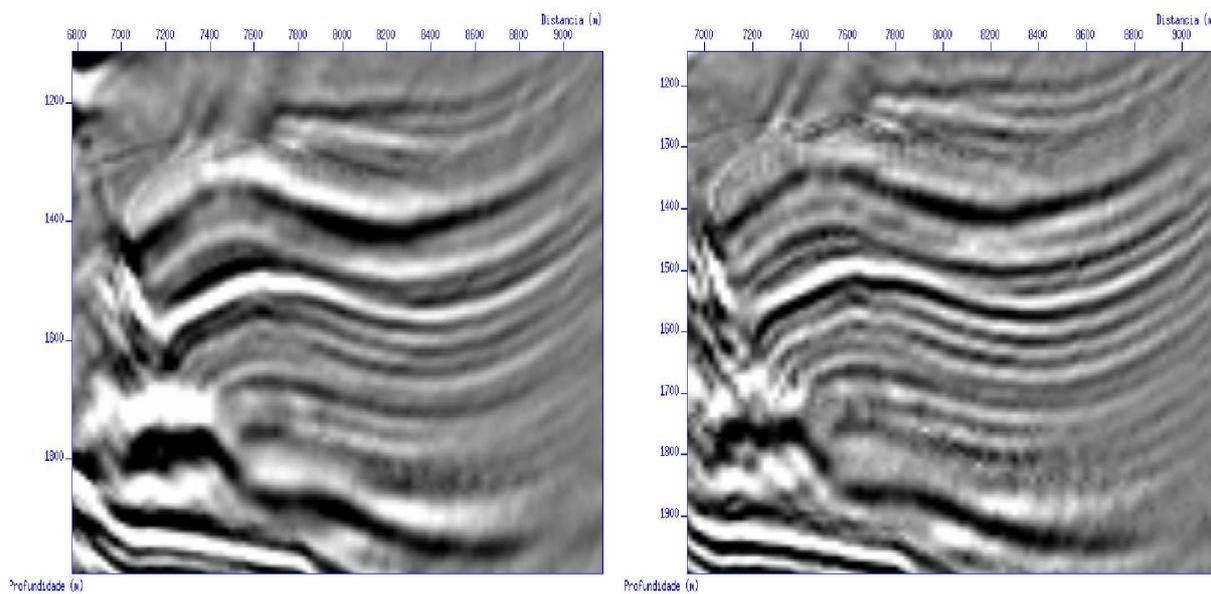


Figura 4.39: Imagem da estrutura falhada: Método FFD convencional (à esquerda) e FFD com correção de amplitude (à direita)

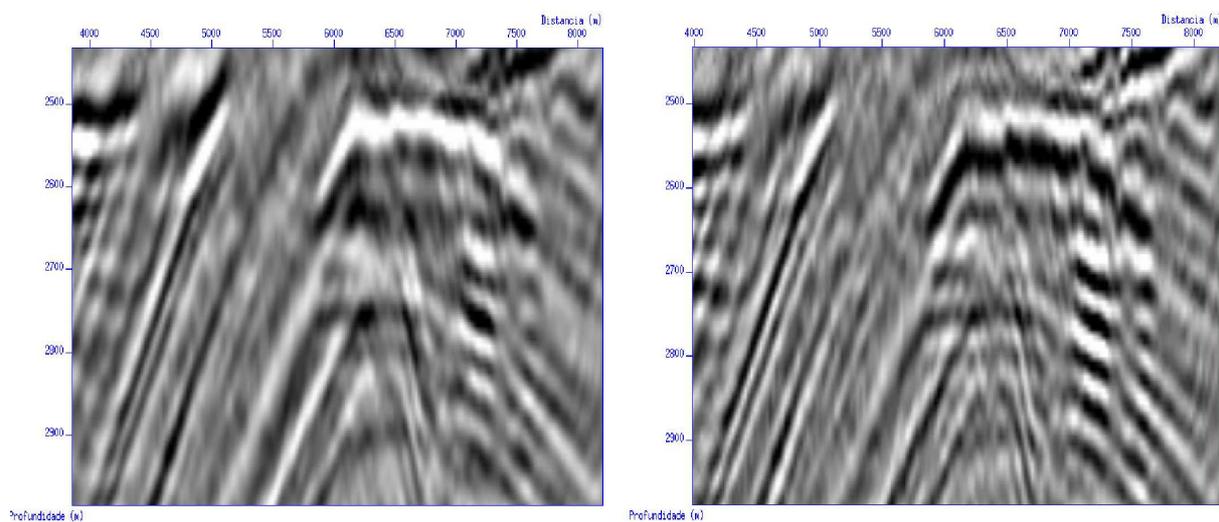


Figura 4.40: Imagem do reservatório profundo no modelo Marmousi obtido através do método FFD convencional (à esquerda) e FFD com correção de amplitude (à direita).

5

Conclusões

Neste trabalho foram estudadas as novas equações de ondas unidirecionais com amplitude verdadeiras, concluindo-se que modificações nos esquemas de migração que levem em conta os dois novos termos associados às derivadas vertical e transversal do campo de velocidades, assim como um novo modelo para a fonte e uma condição de imagem tipo deconvolução, devem ser adaptadas às técnicas convencionais de migração com o intuito de produzir imagens migradas com valores da refletividade equivalentes aos obtidos através da fórmula integral da migração/inversão Kirchhoff.

Quanto à fonte, implementamos e testamos o modelo para a fonte proposto por Wapenaar (1990), mostrando uma melhoria na iluminação e na diretividade do campo de onda descendente.

Em relação à condição de imagem tipo deconvolução, foram testadas várias técnicas de estabilização e notamos que todas elas modificam os valores de amplitude recuperados para o coeficiente de reflexão. Uma nova técnica de estabilização foi proposta neste trabalho. A técnica melhora a acurácia dos valores de refletividade recuperados a partir da imagem migrada, em relação as outras técnicas testadas, além de diminuir de forma considerável o ruído na imagem migrada.

As técnicas convencionais de migração no domínio misto: *Phase shift plus interpolation* (PSPI), *Split-step* (SS), e *Fourier finite difference* (FFD), foram adaptadas para levar em conta os novos termos associados às derivadas lateral e transversal do campo de velocidades. Dos resultados obtidos através da migração pré-empilhamento 2D de tiro comum, tanto para dados sintéticos de um único tiro, assim como para dados sintéticos com múltiplos tiros, conclui-se que os novos esquemas de migração propostos incluem fatores de correção

de amplitude e fase que melhoram a acurácia das amplitudes recuperadas sobre os refletores, melhoram a imagem estrutural e permitem um melhor balanceamento da iluminação na imagem migrada.

As técnicas SS e PSPI com correções de amplitude propostas não precisam da avaliação explícita das derivadas vertical e lateral do campo de velocidades, nem aumentam de forma relevante o custo computacional, em relação às técnicas convencionais, tornando-as de interesse para as aplicações em dados reais.

Na nova técnica FFD com correções de amplitude proposta, introduzimos um novo termo de fase associado com a derivada lateral do campo de velocidades, produzindo assim uma melhor correção das amplitudes em relação as técnicas SS e PSPI anteriormente citadas. No entanto, a dependência explícita do novo termo de fase com a derivada lateral da velocidade gera maior instabilidade em regiões com forte contraste de velocidade. Também deve ser observado que a avaliação explícita da derivada lateral da velocidade pode acarretar problemas práticos.

Para trabalhos futuros, recomenda-se testes com os novos algoritmos com correções de amplitude SS, PSPI e FFD em dados sintéticos, gerados a partir de campos com fortes contrastes de velocidade, e também em dados reais com o objetivo de verificar as melhorias das amplitudes obtidas nas imagens de ponto comum (ODCIGs e ADCIGs).

Vale ressaltar, ainda, que devido ao fato dos operadores dos campos de ondas unidirecionais não incluírem de forma explícita as derivadas laterais e verticais do campo de velocidade, isto pode estar relacionado com a violação do princípio de conservação da energia e da reciprocidade, duas propriedades fundamentais da equação da onda completa. Portanto, como trabalho futuro, sugerimos um estudo mais detalhado para a demonstração de que as novas equações de ondas unidirecionais com amplitude verdadeira, pelo fato de incluir esses novos termos explicitamente, satisfazem o princípio de conservação da energia e a reciprocidade.

Agradecimentos

A minha Família: Francisco, Luz de Luna e Miguel Angel, pela força que cada dia me dão para continuar sonhando.

Ao meu orientador, Dr. Reynam Pestana, por seu acompanhamento durante todo o desenvolvimento do meu curso de Doutorado.

Aos professores do CPGG por me introduzir no mundo da Geofísica, em especial ao professor Milton Porsani que continuamente me motivou com a pesquisa.

À Vânia, Juseline e o Jair, que com sua solidariedade me fizeram pensar em muitas ocasiões que as fronteiras entre os povos são imaginárias.

Aos colegas do CPGG pelo companheirismo, em especial: Fabiane, Rosangela, Juarez, Eduardo, Michelângelo, Michael, Gary, Antônio, Izaias, Jeferson, Paulo, e Roberto.

Aos funcionários do CPGG: Joaquim, Zenilda, Lene e Fernanda pela atenção e o apoio.

Ao povo brasileiro por sua música e sua simpatia.

Aos amigos da Colômbia que acreditam num país melhor e trabalham por sua construção.

Dou meu agradecimento à FAPESB pelo apoio através da bolsa de estudo nos dois últimos anos do curso, e à Universidade de Pamplona (Colômbia) pelo apoio durante o curso de Doutorado.

Referências

- Bagaini, C.; Burkhard, N.; Rocca, F. and Wyatt, K. (1995) Data parallel implementation of 3-D PSPI, pp. 188–191, 65th Ann. Internat. Mtg., Soc. of Expl. Geophys., Expanded Abstracts.
- Beylkin, G. (1985) Imaging of discontinuities in the inverse scattering problem by inversion of a causal generalized Radon transform, *J. Math. Phys.*, **26**:99–108.
- Biondi, B. (2002) Stable wide-angle Fourier finite-difference downward extrapolation of 3-D wavefields, *Geophysics*, **67**:872–882.
- Biondi, B. (2006) 3D Seismic Imaging, vol. 14 of *Investigations in Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, Oklahoma, USA.
- Bleistein, N.; Cohen, J. and Jaramillo, H. (1999) True-amplitude transformation to zero offset of data from curved reflectors, *Geophysics*, **64**:112–129.
- Bleistein, N.; Cohen, J. and Stockwell, J. (2001) Mathematics of multidimensional seismic imaging, migration, and inversion, *Interdisciplinary applied mathematics*, Springer-Verlag New York, Inc.
- Claerbout, J. (1971) Toward a unified theory of reflector mapping, *Geophysics*, **36**:467–481.
- Claerbout, J. (1985) *Imaging the earth's interior*, Blackwell Scientific Publications, Inc.
- Cohen, J. and Stockwell, J. (2006) *Seismic Un*x: a free package for seismic research and processing*, Center for Wave Phenomena, Colorado School of Mines, Release No. 39.
- Deng, F. and McMechan, G. (2007) True-amplitude prestack depth migration, *Geophysics*, **72**:S155–S166.
- Etgen, J. (1994) Stability of explicit depth extrapolation through laterally-varying media, pp. 1266–1269, 64th Ann. Internat. Mtg., Soc. of Expl. Geophys., Expanded Abstracts.
- Gazdag, J. (1978) Wave equation migration with the phase-shift method, *Geophysics*, **43**:1342–1351.
- Gazdag, J. and Sguazzero, P. (1984) Migration of seismic data by phase shift plus interpolation, *Geophysics*, **49**:124–131.

- Godin, O. (1999) Reciprocity and energy conservation within the parabolic approximation, *Wave Motion*, **29**:175–194.
- Guitton, A.; Valenciano, A.; Bevc, D. and Claerbout, J. (2007) Smoothing imaging condition for shot-profile migration, *Geophysics*, **72**:S149–S154.
- Keho, T. and Beydoun, W. (1988) Paraxial ray Kirchhoff migration, *Geophysics*, **53**:1540–1546.
- Prucha, M.; Biondi, B. and Symes, W. (1999) Angle-domain common-image gathers by wave-equation migration, pp. 824–827, 69th Ann. Internat. Mtg., Soc. of Expl. Geophys., Expanded Abstracts.
- Pencik, I. (1994) Introduction to seismic methods, Federal University of Bahia, Brazil., Lecture notes.
- Resnick, J.; Ng, P. and Larner, K. (1987) Amplitud versus offset analysis in the presence of dip, pp. 617–620, 57th Ann. Internat. Mtg., Soc. of Expl. Geophys., Expanded Abstracts.
- Rickett, J. and Sava, P. (2001) Offset and angle domain common-image gathers for shot-profile migration, pp. 1115–1119, 71th Ann. Internat. Mtg., Soc. of Expl. Geophys., Expanded Abstracts.
- Rickett, J. and Sava, P. (2002) Offset and angle-domain common image-point gathers for shot-profile migration, *Geophysics*, **67**:883–889.
- Ristow, D. and Rühl, T. (1994) Fourier finite-difference migration, *Geophysics*, **59**:1882–1893.
- Sava, P. and Fomel, S. (2000) Angle-gathers by Fourier transform, Tech. Rep. 103, Stanford Exploration Project.
- Schleicher, J.; Tygel, M. and Hubral, P. (1993) 3-D true-amplitude finite-offset migration, *Geophysics*, **58**:1112–1126.
- Schleicher, J.; Tygel, M. and Hubral, P. (2007) Seismic True-Amplitude Imaging, vol. 12 of *SEG Geophysical Developments*, Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, Oklahoma, USA.
- Silva, G. (2006) Amplitude preservation in wave equation migration, in portuguese.
- Stoffa, P.; Fokkema, J.; de Luna Freire, R. and Kessinger, W. (1990) Split-step Fourier migration, *Geophysics*, **55**:410–421.
- Stolt, R., A. B. (1986) Seismic migration: Theory and practice, vol. 5 of *Handbook of geophysical exploration*, Geophysical Press.

- Valenciano, A. and Biondi, B. (2003) 2-D deconvolution imaging condition for shot-profile migration, pp. 1059–1062, 73rd Ann. Internat. Mtg., Soc. of Expl. Geophys., Expanded Abstracts.
- Vivas, F. and Pestana, R. (2007a) Imaging condition to true amplitude shot-profile migration, pp. 2398–2402, 77th Ann. Internat. Mtg., Soc. of Expl. Geophys., Expanded Abstracts.
- Vivas, F. and Pestana, R. (2007b) PSPI migration based on true-amplitude one-way wave equations, *Revista Brasileira de Geofísica*, **25**:51–62, in portuguese.
- Vlad, I.; Tisserant, T. and Biondi, B. (2003) Improving the amplitude accuracy of downward continuation operators, Tech. Rep. 113, Stanford Exploration Project.
- Wapenaar, C. (1990) Representation of seismic sources in the one-way wave equations, *Geophysics*, **55**:786–790.
- Wapenaar, C. (1996) Reciprocity theorems for two-way and one-way wave vectors: A comparison, *J. Acoust. Soc. Am.*, **100**:3508–3518.
- Wapenaar, C. (1998) Reciprocity properties of one-way propagators, *Geophysics*, **63**:1795–1798.
- Winbow, G. and Schneider, W. (1999) Weights for 3-D controlled amplitude prestack time migration, pp. 1110–1113, 69th Ann. Internat. Mtg., Soc. of Expl. Geophys., Expanded Abstracts.
- Zhang, G. (1993) System of coupled equations for up-going and down-going waves, *Acta Math. Appl. Sinica*, **16**:251–263.
- Zhang, Y.; Gray, S. and Young, J. (2000) Exact and approximate weights for Kirchhoff migration, pp. 1036–1039, 70th Ann. Internat. Mtg., Soc. of Expl. Geophys., Expanded Abstracts.
- Zhang, Y.; Gray, S. and Young, Y. (2001a) True-amplitude common-offset, common-azimuth $v(z)$ migration, *Journal of seismic exploration*, **10**:225–244.
- Zhang, Y.; Sun, J.; Gray, S.; Notfors, C. and Bleistein, N. (2001b) Towards accurate amplitudes for one-way wavefield extrapolation of 3-D common shot records, 71rd Ann. Internat. Mtg., Soc. of Expl. Geophys. (Workshop).
- Zhang, Y.; Sun, J.; Notfors, C.; Gray, S.; Bleistein, N. and Zhang, G. (2002) True amplitude migration using common-shot one-way wavefield extrapolation, 64th EAGE Annual conference. Expanded Abstracts.
- Zhang, Y.; Zhang, G. and Bleistein, N. (2003) True amplitude wave equation migration arising from true amplitude one-way wave equations, *Inverse Problems*, **19**:1113–1138.

Zhang, Y.; Zhang, G. and Bleistein, N. (2005) Theory of true-amplitude one-way wave equations and true-amplitude common-shot migration, *Geophysics*, **70**:E1–E10.

A

Equação Iconal e de transporte

Nos Capítulos 1 e 2 se fez referência às soluções aproximadas da função de Green proporcionadas pela teoria do raio para a equação da onda completa e as equações de ondas unidirecionais. Entendendo-se que a “Teoria do raio é a coleção de resultados matemáticos obtidos através da solução das equações iconal e de transporte” (Bleistein et al., 2001), é importante se conhecer as condições sob as quais as equações iconal e de transporte são válidas. Neste apêndice se apresenta a forma como essas equações são obtidas a partir de substituição de uma solução teste na equação de Helmholtz.

A solução teste, também conhecida como solução WKBJ, série assintótica ou série de Debye, tem a forma:

$$U(x, y, z; \omega) = \omega^\beta e^{i\omega\tau(x,y,z)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j(x, y, z)}{(i\omega)^j}, \quad (\text{A.1})$$

onde $\tau(x, y, z)$ representa o tempo de percurso e as $A_j(x, y, z)$ representam as amplitudes, ambos sendo parâmetros independentes da frequência que devem ser calculadas no intuito de construir a solução assintótica.

O conceito de aproximação de alta frequência, associado a solução de teste (A.1), está relacionado com o fato de que a parte mais singular da solução (a componente mais brusca -“sharpest”- de uma função) está associada com as altas frequências, correspondendo assim à transformada inversa do primeiro termo da série, enquanto os termos de ordem maior representam suavizações sucessivas (contribuições de baixa frequência) obtidas através da divisão pelas potências do termo $i\omega$ (Bleistein et al., 2001). Assim, o resultado esperado para a série de Debye é uma série assintótica onde somente os primeiros termos são relevantes.

Sustituindo a solução teste (A.1) na equação de Helmholtz

$$\left[\nabla^2 + \frac{\omega^2}{v^2(x, y, z)} \right] U(x, y, z; \omega) = 0, \quad (\text{A.2})$$

e levando em conta que

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_l^2} = \omega^\beta e^{i\omega\tau} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(i\omega)^j} \left\{ \frac{\partial^2 A_j}{\partial x_l^2} + 2(i\omega) \frac{\partial \tau}{\partial x_l} \frac{\partial A_j}{\partial x_l} + (i\omega)^2 \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_l} \right)^2 A_j + (i\omega) A_j \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_l^2} \right\},$$

onde l toma os valores 1, 2 e 3, correspondendo às variáveis x, y, z , podemos escrever o operador Laplaciano em forma vetorial como

$$\nabla^2 U = \omega^\beta e^{i\omega\tau} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(i\omega)^j} \left\{ \nabla^2 A_j + 2(i\omega) \nabla \tau \cdot \nabla A_j + (i\omega)^2 (\nabla \tau)^2 A_j + (i\omega) A_j \nabla^2 \tau \right\}, \quad (\text{A.3})$$

substituindo (A.3) em (A.2) obtemos

$$\omega^\beta e^{i\omega\tau} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(i\omega)^j} \left\{ \nabla^2 A_j + i\omega (2\nabla \tau \cdot \nabla A_j + A_j \nabla^2 \tau) + \omega^2 \left(\frac{1}{v^2} - (\nabla \tau)^2 \right) A_j \right\} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Em geral, os termos de diferentes potências em ω , na equação (A.4), não podem ser cancelados. Logo, precisa-se cancelar os coeficientes de cada potência ω de forma independente. Por isso, se avalia a equação (A.4) para as diferentes ordens j , assim:

$j = 0$

$$\omega^{\beta+2} \left(\frac{1}{v^2} - (\nabla \tau)^2 \right) A_0 + \omega^{\beta+1} (2\nabla \tau \cdot \nabla A_0 + A_0 \nabla^2 \tau) + \omega^\beta \nabla^2 A_0,$$

$j = 1$

$$\omega^{\beta+1} \left(\frac{1}{v^2} - (\nabla \tau)^2 \right) A_1 + \omega^\beta (2\nabla \tau \cdot \nabla A_1 + A_1 \nabla^2 \tau) + \omega^{\beta-1} \nabla^2 A_1,$$

$j = 2$

$$\omega^\beta \left(\frac{1}{v^2} - (\nabla \tau)^2 \right) A_2 + \omega^{\beta-1} (2\nabla \tau \cdot \nabla A_2 + A_2 \nabla^2 \tau) + \omega^{\beta-2} \nabla^2 A_2,$$

\vdots

$j = n$

$$\omega^{\beta+2-n} \left(\frac{1}{v^2} - (\nabla \tau)^2 \right) A_n + \omega^{\beta+1-n} (2\nabla \tau \cdot \nabla A_n + A_n \nabla^2 \tau) + \omega^{\beta-n} \nabla^2 A_n.$$

Agrupando os termos de mesma potência, para a potência $\omega^{\beta+2}$ obtemos

$$\left(\frac{1}{v^2} - (\nabla \tau)^2 \right) A_0 = 0,$$

e lembrando que a série de Debye somente tem os primeiros termos relevantes, devemos assumir que o coeficiente $A_0 \neq 0$, chegando-se à equação iconal

$$\frac{1}{v^2} - (\nabla\tau)^2 = 0. \quad (\text{A.5})$$

Continuando com a potência $\omega^{\beta+1}$, obtemos:

$$\left(\frac{1}{v^2} - (\nabla\tau)^2\right) A_1 + 2\nabla\tau \cdot \nabla A_0 + A_0 \nabla^2 \tau = 0,$$

e como a equação (A.5) garante que o primeiro termo é nulo, então, temos que:

$$2\nabla\tau \cdot \nabla A_0 + A_0 \nabla^2 \tau = 0, \quad (\text{A.6})$$

que é a equação de transporte de ordem zero.

Para a potência ω^β , obtemos

$$\nabla^2 A_0 + 2\nabla\tau \cdot \nabla A_1 + A_1 \nabla^2 \tau + \left(\frac{1}{v^2} - (\nabla\tau)^2\right) A_2 = 0,$$

onde de novo o último termo é nulo, a partir da equação (A.5), então

$$\nabla^2 A_0 + 2\nabla\tau \cdot \nabla A_1 + A_1 \nabla^2 \tau = 0,$$

que corresponde à equação de transporte de ordem um.

De forma similar, para a potência $\omega^{\beta-n}$, se obtém a equação de transporte de ordem $n+1$:

$$\nabla^2 A_n + 2\nabla\tau \cdot \nabla A_{n+1} + A_{n+1} \nabla^2 \tau = 0. \quad (\text{A.7})$$

A solução das equações iconal (A.5) e de transporte da ordem zero (A.6) são o tema de estudo da teoria do raio. Após a solução destas duas equações, pode-se construir, de forma recursiva, as soluções para as amplitudes de outras ordens, através das equações de transporte de alta ordem (A.7).

B

Aproximação assintótica das OWWE com amplitude verdadeira

No Capítulo 2 foi mostrado, para o caso de um modelo de velocidade variando com a profundidade, que a equação de transporte derivada das equações de ondas unidirecionais não é equivalente à equação de transporte obtida a partir da equação da onda completa. O conjunto modificado de operadores unidirecionais, isto é, as denominadas equações OWWE com amplitude verdadeira, deve então proporcionar soluções aproximadas de amplitude com base na teoria do raio, assim como tempos de percurso mais corretos.

Neste apêndice mostra-se que as equações de ondas unidirecionais com amplitude verdadeira têm soluções que satisfazem as mesmas equações iconal e de transporte obtidas a partir da equação da onda completa (Apêndice A), também como demonstrado por Zhang et al. (2005). Para isto, se introduz a representação do operador raiz quadrada como uma integral (Zhang et al., 2003), e se faz a análise assintótica das equações de ondas unidirecionais resultantes. O resultado mais importante desta dedução é o fato de que a modificação do operador Laplaciano transversal Δ_T , para incluir termos que contém derivadas laterais do campo de velocidades, é fundamental para se obter a mesma equação de transporte obtida a partir da equação da onda completa.

Começamos com as novas equações de ondas unidirecionais propostas

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} \pm i\Lambda - \Gamma \right\} W(x, y, z; \omega) = 0, \quad (\text{B.1})$$

onde

$$\Lambda = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 + \frac{\Delta_T}{\omega^2}},$$

e

$$\Gamma = \frac{v_z}{2v} \left[1 - \Delta_T (\omega^2 + \Delta_T)^{-1} \right],$$

com $v_z = \frac{\partial v}{\partial z}$.

Utilizando técnicas de integração complexa se pode mostrar que (Zhang et al., 2003),

$$\Lambda = \frac{\omega}{v} \left[I + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2} (\omega^2 + s^2 \Delta_T)^{-1} \Delta_T ds \right], \quad (\text{B.2})$$

substituindo (B.2) na equação (B.1) obtemos

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \pm i \frac{\omega}{v} \right\} W(x, y, z; \omega) \mp i \frac{\omega}{\pi v} \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2} q(s; x, y, z; \omega) ds \\ - \frac{v_z}{2v} \{W(x, y, z; \omega) + q(1; x, y, z; \omega)\} = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

onde a função $q(s; x, y, z; \omega)$ é definida como solução da equação:

$$(\omega^2 + s^2 \Delta_T) q(s; x, y, z; \omega) = -\Delta_T W(x, y, z; \omega), \quad (\text{B.4})$$

e o sinal negativo na equação (B.4) é responsável pela modificação dos sinais na equação (B.3).

Procuramos, agora, uma aproximação assintótica de primeira ordem (A.1) para as funções W e q , ou seja, solução para as equações (B.3) e (B.4), na forma:

$$W(x, y, z; \omega) = \left\{ A_0(x, y, z) + \frac{A_1(x, y, z)}{i\omega} \right\} e^{i\omega\tau(x, y, z)}, \quad (\text{B.5})$$

$$q(s, x, y, z; \omega) = \left\{ A_{q0}(s, x, y, z) + \frac{A_{q1}(s, x, y, z)}{i\omega} \right\} e^{i\omega\tau(x, y, z)}. \quad (\text{B.6})$$

Para substituir as expressões anteriores na equação (B.3), vários cálculos devem ser feitos e começamos pelo cálculo da expressão

$$\Delta_T W = (v \nabla_T) \cdot (v \nabla_T W), \quad (\text{B.7})$$

onde o símbolo ∇_T representa o gradiente nas coordenadas transversais, isto é,

$$\nabla_T = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Desta forma, a expressão (B.7) é equivalente a

$$\begin{aligned} \Delta_T W &= v \nabla_T \cdot \left[\left\{ v \left(A_0 + \frac{A_1}{i\omega} \right) i\omega \nabla_T \tau + v \nabla_T \left(A_0 + \frac{A_1}{i\omega} \right) \right\} e^{i\omega\tau} \right] \\ &= v \left\{ v \left(A_0 + \frac{A_1}{i\omega} \right) i\omega \nabla_T \tau + v \nabla_T \left(A_0 + \frac{A_1}{i\omega} \right) \right\} e^{i\omega\tau} i\omega \cdot \nabla_T \tau \\ &\quad + \left\{ (v i\omega \nabla_T v \cdot \nabla_T \tau + v^2 i\omega \nabla_T^2 \tau) \left(A_0 + \frac{A_1}{i\omega} \right) + v^2 i\omega \nabla_T \tau \cdot \nabla_T \left(A_0 + \frac{A_1}{i\omega} \right) \right\} e^{i\omega\tau} \\ &\quad + \left\{ v^2 \nabla_T^2 \left(A_0 + \frac{A_1}{i\omega} \right) + v \nabla_T v \cdot \nabla_T \left(A_0 + \frac{A_1}{i\omega} \right) \right\} e^{i\omega\tau}, \end{aligned}$$

a qual, se agrupada em termos da mesma potência ($i\omega$), resulta em

$$\begin{aligned} \Delta_T W &= v^2 (\nabla_T \tau)^2 A_0 (i\omega)^2 e^{i\omega\tau} \\ &+ \left\{ v^2 (\nabla_T \tau)^2 A_1 + 2v^2 \nabla_T A_0 \cdot \nabla_T \tau + v \nabla_T v \cdot \nabla_T \tau A_0 + v^2 \nabla_T^2 \tau A_0 \right\} (i\omega) e^{i\omega\tau} \\ &+ \left\{ 2v^2 \nabla_T A_1 \cdot \nabla_T \tau + (v \nabla_T v \cdot \nabla_T \tau + v^2 \nabla_T^2 \tau) A_1 + v^2 \nabla_T^2 A_0 + v \nabla_T v \cdot \nabla_T A_0 \right\} (i\omega)^0 e^{i\omega\tau} \\ &\quad + \left\{ v^2 \nabla_T^2 A_1 + v \nabla_T v \cdot \nabla_T A_1 \right\} (i\omega)^{-1} e^{i\omega\tau}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Na equação (B.8) serão levados em conta somente os dois primeiros termos que acompanham as potências maiores $(i\omega)^2$ e $(i\omega)$, o que garante a consistência com a aproximação assintótica de primeira ordem utilizada em (B.5) e (B.6). Assim temos que

$$\begin{aligned} \Delta_T W &= v^2 (\nabla_T \tau)^2 A_0 (i\omega)^2 e^{i\omega\tau} \\ &+ \left\{ v^2 (\nabla_T \tau)^2 A_1 + 2v^2 \nabla_T A_0 \cdot \nabla_T \tau + v \nabla_T v \cdot \nabla_T \tau A_0 + v^2 \nabla_T^2 \tau A_0 \right\} (i\omega) e^{i\omega\tau} + O(1). \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Agora, passamos a avaliar a expressão do lado esquerdo da equação (B.4)

$$(\omega^2 + s^2 \Delta_T) q = \omega^2 q + s^2 \Delta_T q,$$

onde o termo

$$s^2 \Delta_T q = s^2 (v \nabla_T) \cdot (v \nabla_T q),$$

é avaliado utilizando o resultado da aproximação assintótica de primeira ordem obtida em (B.9), resultando em

$$\begin{aligned} (\omega^2 + s^2 \Delta_T) q &= -(i\omega)^2 \left(A_{q0} + \frac{A_{q1}}{i\omega} \right) e^{i\omega\tau} + s^2 v^2 (\nabla_T \tau)^2 A_{q0} (i\omega)^2 e^{i\omega\tau} \\ &\quad + s^2 \left\{ v^2 (\nabla_T \tau)^2 A_{q1} + 2v^2 \nabla_T A_{q0} \cdot \nabla_T \tau + v \nabla_T v \cdot \nabla_T \tau A_{q0} + v^2 \nabla_T^2 \tau A_{q0} \right\} (i\omega) e^{i\omega\tau}, \end{aligned}$$

que reagrupando em termos da mesma potencia em $(i\omega)$, conseguimos

$$\begin{aligned} (\omega^2 + s^2 \Delta_T) q &= \left\{ -1 + s^2 v^2 (\nabla_T \tau)^2 \right\} A_{q0} (i\omega)^2 e^{i\omega\tau} + \left\{ -1 + s^2 v^2 (\nabla_T \tau)^2 \right\} A_{q1} (i\omega) e^{i\omega\tau} \\ &\quad + s^2 \left\{ 2v^2 \nabla_T A_{q0} \cdot \nabla_T \tau + v \nabla_T v \cdot \nabla_T \tau A_{q0} + v^2 \nabla_T^2 \tau A_{q0} \right\} (i\omega) e^{i\omega\tau}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Substituindo as expressões (B.9) e (B.10) na equação (B.4) e igualando os coeficientes dos termos $(i\omega)^2$ e $(i\omega)$, obtemos

$$\left\{ -1 + s^2 v^2 (\nabla_T \tau)^2 \right\} A_{q0} = -v^2 (\nabla_T \tau)^2 A_0, \quad (\text{B.11})$$

e

$$\begin{aligned} \left\{ -1 + s^2 v^2 (\nabla_T \tau)^2 \right\} A_{q1} + s^2 \left\{ 2v^2 \nabla_T A_{q0} \cdot \nabla_T \tau + v \nabla_T v \cdot \nabla_T \tau A_{q0} + v^2 \nabla_T^2 \tau A_{q0} \right\} = \\ - \left\{ v^2 (\nabla_T \tau)^2 A_1 + 2v^2 \nabla_T A_0 \cdot \nabla_T \tau + v \nabla_T v \cdot \nabla_T \tau A_0 + v^2 \nabla_T^2 \tau A_0 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Da equação (B.11) se pode deduzir a relação dos termos A_{q0} e A_0 dada por:

$$A_{q0} = \frac{v^2(\nabla_T\tau)^2}{1 - s^2v^2(\nabla_T\tau)^2}A_0. \quad (\text{B.13})$$

Já da equação (B.12) se pode identificar uma relação similar entre os termos A_{q1} e A_1 mais um termo adicional relacionado com a ordem zero, desta forma se pode escrever

$$A_{q1} = A_{LH} + A_P, \quad (\text{B.14})$$

onde

$$A_{LH} = \frac{v^2(\nabla_T\tau)^2}{1 - s^2v^2(\nabla_T\tau)^2}A_1,$$

e

$$A_P = \frac{2v^2\nabla_T\tau \cdot \nabla_T(A_0 + s^2A_{q0}) + v\nabla_Tv \cdot \nabla_T\tau(A_0 + s^2A_{q0}) + v^2\nabla_T^2\tau(A_0 + s^2A_{q0})}{1 - s^2v^2(\nabla_T\tau)^2}. \quad (\text{B.15})$$

A expressão (B.15) também pode ser escrita como uma divergência na forma

$$A_P = \frac{v\nabla_T}{A_0} \cdot \left\{ \frac{vA_0^2\nabla_T\tau}{(1 - s^2v^2(\nabla_T\tau)^2)^2} \right\}. \quad (\text{B.16})$$

Com estas expressões prontas, podemos substituir as aproximações assintóticas (B.5) e (B.6) na equação (B.3) e obter

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \pm i\frac{\omega}{v} \right\} \left\{ \left(A_0(x, y, z) + \frac{A_1(x, y, z)}{i\omega} \right) e^{i\omega\tau(x, y, z)} \right\} \\ & \mp i\frac{\omega}{\pi v} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - s^2} \left\{ A_{q0}(s, x, y, z) + \frac{A_{q1}(s, x, y, z)}{i\omega} \right\} e^{i\omega\tau(x, y, z)} ds \\ & - \frac{v_z}{2v} \left\{ A_0(x, y, z) + \frac{A_1(x, y, z)}{i\omega} + A_{q0}(1, x, y, z) + \frac{A_{q1}(1, x, y, z)}{i\omega} \right\} e^{i\omega\tau(x, y, z)} = 0, \end{aligned}$$

e desenvolvendo o operador $\frac{\partial}{\partial z}$ temos:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(A_0(x, y, z) + \frac{A_1(x, y, z)}{i\omega} \right) + \left(A_0(x, y, z) + \frac{A_1(x, y, z)}{i\omega} \right) (i\omega) \frac{\partial\tau}{\partial z} \right\} e^{i\omega\tau(x, y, z)} \\ & \pm i\frac{\omega}{v} \left\{ \left(A_0(x, y, z) + \frac{A_1(x, y, z)}{i\omega} \right) e^{i\omega\tau(x, y, z)} \right\} \\ & \mp i\frac{\omega}{\pi v} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - s^2} \left\{ A_{q0}(s, x, y, z) + \frac{A_{q1}(s, x, y, z)}{i\omega} \right\} e^{i\omega\tau(x, y, z)} ds \\ & - \frac{v_z}{2v} \left\{ A_0(x, y, z) + \frac{A_1(x, y, z)}{i\omega} + A_{q0}(1, x, y, z) + \frac{A_{q1}(1, x, y, z)}{i\omega} \right\} e^{i\omega\tau(x, y, z)} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Na equação (B.17) pode-se observar que aparecem termos com potências da ordem $(i\omega)$, $(i\omega)^0$ e $(i\omega)^{-1}$. Levando em conta somente os termos de maior ordem, isto é, as potências de $(i\omega)$ e $(i\omega)^0$ têm seu termos igualados a zero, obtém-se as seguintes equações

$$\left(\frac{\partial\tau}{\partial z} \pm \frac{1}{v}\right) A_0 \mp \frac{1}{\pi v} \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2} A_{q0} ds = 0, \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{\partial A_0}{\partial z} + \left(\frac{\partial\tau}{\partial z} \pm \frac{1}{v}\right) A_1 \mp \frac{1}{\pi v} \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2} A_{q1} ds - \frac{v_z}{2v} \{A_0 + A_{q0}(1, x, y, z)\} = 0, \quad (\text{B.19})$$

para as potências $(i\omega)$ e $(i\omega)^0$, respectivamente.

Substituindo a expressão de A_{q0} (eq. B.13) na equação (B.18), obtemos

$$\left\{ \frac{\partial\tau}{\partial z} \pm \frac{1}{v} \mp \frac{1}{\pi v} \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2} \frac{v^2(\nabla_T\tau)^2}{1-s^2v^2(\nabla_T\tau)^2} ds \right\} A_0 = 0, \quad (\text{B.20})$$

como estamos procurando uma solução W não nula, $A_0 \neq 0$, então

$$\frac{\partial\tau}{\partial z} \pm \frac{1}{v} \mp \frac{1}{\pi v} \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2} \frac{v^2(\nabla_T\tau)^2}{1-s^2v^2(\nabla_T\tau)^2} ds = 0. \quad (\text{B.21})$$

A integral na equação (B.21) pode ser avaliada através da expressão (Zhang et al., 2003)

$$J_1(b^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-s^2}}{1-b^2s^2} ds = \frac{1 - (1-b^2)^{1/2}}{b^2}.$$

Desta forma a equação (B.21) se transforma em

$$\frac{\partial\tau}{\partial z} \pm \frac{1}{v} \mp \frac{1}{v} v^2 (\nabla_T\tau)^2 \left(\frac{1 - (1 - v^2 (\nabla_T\tau)^2)^{1/2}}{v^2 (\nabla_T\tau)^2} \right) = 0, \quad (\text{B.22})$$

simplificando os termos resulta em

$$\frac{\partial\tau}{\partial z} \pm \frac{1}{v} (1 - v^2 (\nabla_T\tau)^2)^{1/2} = 0, \quad (\text{B.23})$$

a qual corresponde exatamente à equação iconal (Apêndice A)

$$\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{v^2} \left(1 - v^2 \left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2 - v^2 \left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2\right). \quad (\text{B.24})$$

Observe que para se obter a parte cinemática correta, isto é, a mesma equação iconal, obtida para a equação da onda completa, nenhuma derivada nem lateral nem vertical do campo de velocidades esta envolvida (eq. B.18). Portanto, as equações de ondas unidirecionais convencionais também reproduzem a parte cinemática de forma correta.

A parte dinâmica das equações de ondas unidirecionais com amplitude verdadeira vem dada pela equação (B.19). Esta equação também tem envolvidos os termos A_0 e A_{q0} , mais

os termos A_1 e A_{q1} , que satisfazem as relações (B.14-B.16). Substituindo-se essas expressões na equação (B.19) obtemos

$$\frac{\partial A_0}{\partial z} + \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \pm \frac{1}{v} \right) A_1 \mp \frac{1}{\pi v} \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2} (A_{LH} + A_P) ds - \frac{v_z}{2v} \left(1 + \frac{v^2 (\nabla_T \tau)^2}{1-v^2 (\nabla_T \tau)^2} \right) A_0 = 0, \quad (\text{B.25})$$

e substituindo a expressão de A_{LH}

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A_0}{\partial z} + \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \pm \frac{1}{v} \right) A_1 \\ & \mp \frac{1}{\pi v} \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2} \left(\frac{v^2 (\nabla_T \tau)^2}{1-s^2 v^2 (\nabla_T \tau)^2} A_1 + A_P \right) ds - \frac{v_z}{2v} \left(1 + \frac{v^2 (\nabla_T \tau)^2}{1-v^2 (\nabla_T \tau)^2} \right) A_0 = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

e, agora, podemos agrupar uma equação para A_1 , equivalente à equação (B.20) obtida para A_0 , na forma

$$\left\{ \frac{\partial \tau}{\partial z} \pm \frac{1}{v} \mp \frac{1}{\pi v} \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2} \frac{v^2 (\nabla_T \tau)^2}{1-s^2 v^2 (\nabla_T \tau)^2} ds \right\} A_1 = 0, \quad (\text{B.27})$$

e a equação (B.26) se reduz a

$$\frac{\partial A_0}{\partial z} \mp \frac{1}{\pi v} \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2} A_P ds - \frac{v_z}{2v} \left(1 + \frac{v^2 (\nabla_T \tau)^2}{1-v^2 (\nabla_T \tau)^2} \right) A_0 = 0. \quad (\text{B.28})$$

Substituindo o valor de A_P , dado pela equação (B.16), em (B.28) resulta em

$$\frac{\partial A_0}{\partial z} \mp \frac{1}{\pi v} \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2} \frac{v \nabla_T}{A_0} \cdot \left\{ \frac{v A_0^2 \nabla_T \tau}{(1-s^2 v^2 (\nabla_T \tau)^2)^2} \right\} ds - \frac{v_z}{2v} \left(1 + \frac{v^2 (\nabla_T \tau)^2}{1-v^2 (\nabla_T \tau)^2} \right) A_0 = 0, \quad (\text{B.29})$$

em seguida, utilizamos a expressão integral (Zhang et al., 2003)

$$J_2(b^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-s^2}}{(1-b^2 s^2)^2} ds = \frac{1}{2(1-b^2)^{1/2}},$$

para avaliar a integral em (B.29).

Multiplicando toda a equação pelo valor $2A_0$ temos que:

$$2A_0 \frac{\partial A_0}{\partial z} \mp 2 \nabla_T \cdot \left\{ \frac{v A_0^2 \nabla_T \tau}{2\sqrt{1-v^2 (\nabla_T \tau)^2}} \right\} - 2 \frac{v_z}{2v} \frac{A_0^2}{1-v^2 (\nabla_T \tau)^2} = 0, \quad (\text{B.30})$$

ou

$$\frac{\partial A_0^2}{\partial z} \mp \nabla_T \cdot \left\{ \frac{v A_0^2 \nabla_T \tau}{\sqrt{1-v^2 (\nabla_T \tau)^2}} \right\} - \frac{v_z}{v} \frac{A_0^2}{1-v^2 (\nabla_T \tau)^2} = 0. \quad (\text{B.31})$$

Utilizando agora a equação iconal (B.23) na forma

$$\sqrt{1 - v^2 (\nabla_T \tau)^2} = \mp v \frac{\partial \tau}{\partial z},$$

e substituindo na equação equação (B.31)

$$\frac{\partial A_0^2}{\partial z} + \nabla_T \cdot \left\{ \frac{v A_0^2 \nabla_T \tau}{v \frac{\partial \tau}{\partial z}} \right\} - \frac{v_z}{v} \frac{A_0^2}{v^2 \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^2} = 0, \quad (\text{B.32})$$

ou

$$\frac{\partial A_0^2}{\partial z} + \nabla_T \cdot \left\{ A_0^2 \nabla_T \tau \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^{-1} \right\} - \frac{v_z}{v^3} A_0^2 \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^{-2} = 0, \quad (\text{B.33})$$

e desenvolvendo o operador divergência transversal no segundo termo da equação anterior, obtemos

$$\frac{\partial A_0^2}{\partial z} + \nabla_T A_0^2 \cdot \nabla_T \tau \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^{-1} + A_0^2 \nabla_T^2 \tau \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^{-1} + A_0^2 \nabla_T \tau \cdot \nabla_T \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^{-1} - \frac{v_z}{v^3} A_0^2 \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^{-2} = 0, \quad (\text{B.34})$$

ou

$$\frac{\partial A_0^2}{\partial z} + (\nabla_T A_0^2 \cdot \nabla_T \tau + A_0^2 \nabla_T^2 \tau) \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^{-1} + A_0^2 \nabla_T \tau \cdot (-1) \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^{-2} \nabla_T \frac{\partial \tau}{\partial z} - \frac{v_z}{v^3} A_0^2 \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^{-2} = 0, \quad (\text{B.35})$$

e simplificando

$$\frac{\partial A_0^2}{\partial z} \frac{\partial \tau}{\partial z} + \nabla_T A_0^2 \cdot \nabla_T \tau + A_0^2 \nabla_T^2 \tau - A_0^2 \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^{-1} \left(\nabla_T \tau \cdot \nabla_T \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{v_z}{v^3} \right) = 0. \quad (\text{B.36})$$

A equação (B.36) pode ainda ser escrita de uma forma mais conveniente como

$$\frac{\partial A_0^2}{\partial z} \frac{\partial \tau}{\partial z} + \nabla_T \cdot (A_0^2 \nabla_T \tau) - \frac{A_0^2}{2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left((\nabla_T \tau)^2 - \frac{1}{v^2} \right) = 0, \quad (\text{B.37})$$

utilizando de novo a equação iconal no termo

$$\frac{\partial}{\partial z} \left((\nabla_T \tau)^2 - \frac{1}{v^2} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(- \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^2 \right) = -2 \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2},$$

e substituindo na equação (B.37) temos que:

$$\frac{\partial A_0^2}{\partial z} \frac{\partial \tau}{\partial z} + \nabla_T \cdot (A_0^2 \nabla_T \tau) + A_0^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} = 0, \quad (\text{B.38})$$

ou

$$\nabla \cdot (A_0^2 \nabla \tau) = 0, \quad (\text{B.39})$$

onde é mais clara sua correspondência com a equação de transporte obtida através da equação da onda completa.

É importante notar aqui que a equação de transporte (B.39) somente é obtida levando-se em consideração os termos associados às derivadas laterais do campo de velocidades no operador Laplaciano transversal, equação (B.15), e a derivada vertical do campo de velocidades no novo termo incluído nas equações dos campos unidirecionais com amplitude verdadeira, equação (B.19). Isto coincide com as conclusões dos trabalhos de Wapenaar (1998, 1996) e Godin (1999), onde se enfatiza a necessidade de incluir as derivadas laterais dos campos de velocidades nos operadores unidirecionais no intuito de garantir a conservação de energia e o princípio de reciprocidade, duas propriedades fundamentais da equação da onda completa. Nos algoritmos de continuação no domínio misto com correção de amplitude (Vlad, Tisserant and Biondi, 2003) o termo associado à derivada vertical foi incluído, mas o termo associado à derivada lateral no Laplaciano transversal foi desprezado.