



**EQUAÇÕES  
PSEUDO-ACÚSTICAS PARA  
MODELAGEM E MIGRAÇÃO  
REVERSA NO TEMPO EM MEIOS  
COM ANISOTROPIA POLAR**

DIEGO FERNANDO BARRERA PACHECO

SALVADOR – BAHIA  
MARÇO – 2012

Documento preparado com o sistema L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.



# Equações Pseudo-acústicas para Modelagem e Migração Reversa no Tempo em Meios com Anisotropia Polar

por

DIEGO FERNANDO BARRERA PACHECO

Geólogo (Universidad Industrial de Santander – 2009)

Orientador: Dr. Reynam Da Cruz Pestana

Co-orientador: Dr. Flor Alba Vivas

DISERTAÇÃO DE MESTRADO

Submetida em satisfação parcial dos requisitos ao grau de

MESTRE EM CIÊNCIAS

EM

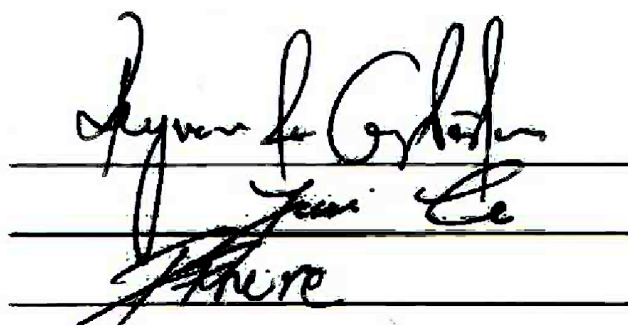
GEOFÍSICA

à

Câmara de Ensino de Pós-Graduação e Pesquisa

da

Universidade Federal da Bahia



Comissão Examinadora

Dr. Reynam da Cruz Pestana

Dr. Jessé Carvalho Costa

Dr. Raimundo Mesquita de Luna Freire

Aprovada em 30 de março de 2012

A presente pesquisa foi desenvolvida no Centro de Pesquisa em Geofísica e Geologia da UFBA, com recursos próprios, da CAPES, da CNPq, CTPETRO, ANP

Q999 Barrera Pacheco, Diego Fernando,

Equações Pseudo-acústicas para Modelagem e Migração Reversa no Tempo em Meios com Anisotropia Polar / Diego Fernando Barrera Pacheco. — Salvador, 2012.

48 f.: il., mapas, fotos.

Orientador: Dr. Reynam Da Cruz Pestana

Co-orientador: Dr. Flor Alba Vivas

Dissertação (Mestrado) - Pós-Graduação em Geofísica. Instituto de Geociências da Universidade Federal da Bahia, 2012.

1. Bahia - Geofísica. I. Título.

911.6(813.8)(043)

Caballeros, ¿debo recordarles que  
mis probabilidades de éxito  
aumentan en cada nuevo intento?

*John Nash*

Este trabalho é dedicado a Amy  
Alejandra Barrera Ramirez.

# Resumo

Nos últimos anos, com a necessidade de se aperfeiçoar a exploração e o processamento dos dados sísmicos, tem havido um crescente interesse no uso da equação da onda com anisotropia no imageamento dos dados sísmicos. Estudos em laboratório têm indicado que intercalações de folhelho em camadas delgadas introduzem no meio uma anisotropia polar, dependendo da inclinação das camadas com respeito a um eixo de simetria. Se o efeito da anisotropia é desprezado, a imagem sísmica irá apresentar erro no posicionamento dos refletores.

Visando incorporar os efeitos da anisotropia na imagem sísmica, muitos algoritmos de migração baseados na teoria de raios e também na solução da equação da onda têm sido adaptados, a partir do caso isotrópico. Portanto, os métodos convencionais de migração que não levam em consideração a anisotropia do meio, inclusive a migração reversa no tempo, estão sujeitos a erros, produzindo imagens sísmicas de baixa resolução e refletores mal posicionados. Assim sendo, para se produzir imagens que serão usadas, por exemplo, para o delineamento de reservatórios, devem ser empregados métodos de migração que levem em consideração a anisotropia do meio.

Neste trabalho derivamos equações para meios com anisotropia TTI, para a onda  $P$ , partindo da equação de dispersão para meios TTI proposta por Tsvankin (1996). Estas novas relações de dispersão são válidas para  $\delta$  maior que  $\epsilon$  (parâmetros de Thomsen) e anisotropia forte. Usando as novas equações da onda  $P$  pura, para meios TTI, migramos com a técnica RTM com o método de expansão rápida (REM) os dados sintéticos Hess e BP-TTI, melhorando significativamente as seções migradas, quando comparadas com migrações que não levam em consideração a anisotropia do meio.

# Abstract

In recent years there has been a growing interest in the use of the wave equations with anisotropy in the imaging of seismic data due to the need to improve the exploration and seismic data processing. Laboratory studies have indicated with convincing evidence that thin layers of shale introduces in the media a polar anisotropy, depending on the dip of the layers with respect to a symmetry axis. If the effect of the anisotropy is not taken in account in the imaging procedure, the migrated section will mispositioned reflectors.

To incorporate the effects of the anisotropy in the seismic imaging, many migration algorithms based on ray theory and the solution of the wave equation have been adapted, from the isotropic case. Therefore, conventional methods of migration, including the reverse time migration, are prone to errors with some kind of anisotropy in the media, thus producing low resolution images and seismic with mispositioned reflectors. Consequently, to produce images used to delineate reservoirs, for example, migration methods that take the anisotropy of media into account must be implemented.

In this work we derive  $P$  wave equations for TTI media, starting from the exact dispersion equation for TTI media proposed by Tsvankin (1996). This new dispersion equations are valid for  $\delta > \epsilon$  (Thomsen's parameters) and strong anisotropy. Using the new equations for pure  $P$  wave for TTI media, we migrated the Hess and BP-TTI synthetic data set with RTM technique with rapid expansion method (REM). It significantly improved the migrated sections when compared with migrations that did not considered the anisotropy of the media.



# Índice

<b>Resumo</b> . . . . .	4
<b>Abstract</b> . . . . .	5
<b>Índice</b> . . . . .	6
<b>Índice de Figuras</b> . . . . .	8
<b>Introdução</b> . . . . .	11
<b>1 Fundamentos Teóricos</b> . . . . .	13
1.1 Anisotropia Polar . . . . .	13
1.2 Teoria de Anisotropia Polar . . . . .	15
1.3 Equações Pseudo-acústicas para Meios VTI . . . . .	20
1.3.1 Relação de Dispersão de Tsvankin (1996) . . . . .	21
1.3.2 Equações Pseudo-acústicas de Alkhalifah (2000) . . . . .	21
1.3.3 Equações Pseudo-acústicas de Du et al. (2008) . . . . .	22
1.3.4 Equações Pseudo-acústicas de Liu et al. (2009) . . . . .	24
1.3.5 Equações Pseudo-acústicas de Pestana et al. (2011) . . . . .	25
1.4 Equações Pseudo-acústicas para Meios TTI . . . . .	27
1.4.1 Equação de Tsvankin para meios com anisotropia TTI . . . . .	27
1.4.2 Aproximação de anisotropia fraca para meios TTI . . . . .	28
1.4.3 Aproximação de anisotropia fraca para meios TTI de ordem superior . . . . .	28
1.4.4 Aproximação de Alkhalifah para meios com anisotropia TTI . . . . .	29
1.4.5 Aproximação de Zhan et al. (2012) para meios com anisotropia TTI . . . . .	29
1.4.6 Equações Acopladas para Meios com Anisotropia TTI de Zhou et al. (2006b) . . . . .	30
1.5 Migração Reversa no Tempo (RTM) . . . . .	31
1.5.1 Diferenças Finitas . . . . .	33
1.6 Método de Expansão Rápida (REM) . . . . .	35

---

<b>2</b>	<b>Relação de dispersão para meios com anisotropia TTI . . . . .</b>	<b>37</b>
2.1	Aproximação por série de Taylor . . . . .	38
2.2	Aproximação por série de Muir e aproximação de Padé . . . . .	39
2.3	Análise das equações da velocidade de fase em meios TTI . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Modelagem numérica . . . . .</b>	<b>45</b>
3.1	Aproximação no denominador da equação da onda P em meios TTI . . . . .	46
3.2	Estabilidade . . . . .	49
3.3	Exemplo Numérico: Modelo da cunha . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Aplicação em dados sintéticos . . . . .</b>	<b>58</b>
4.1	Modelo Hess . . . . .	58
4.2	Modelo BP-TTI . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Conclusões e recomendações . . . . .</b>	<b>79</b>
5.1	Conclusões . . . . .	79
5.2	Recomendações . . . . .	80
	<b>Referências Bibliográficas . . . . .</b>	<b>81</b>
	<b>Agradecimentos . . . . .</b>	<b>85</b>

# Índice de Figuras

1.1	(a) Meio com isotropia transversal vertical (VTI), (b) meio com isotropia transversal horizontal (HTI) e (c) meio com isotropia transversal inclinada (TTI). . . . .	14
1.2	(a) Frente de onda circular, que corresponde à propagação de uma onda em um meio isotrópico e (b) frente de onda não circular, que corresponde a um meio com anisotropia. . . . .	20
1.3	Modelagem das equações de Du et al. (2008), onde temos os campos (a) $q$ e (b) $P$ . Segundo Du et al. (2008), o campo $q$ atenua o efeito da onda SV, ficando a maior parte deste no campo $P$ . . . . .	24
1.4	Modelagem das ondas P e SV a partir das equações de Liu et al. (2009), onde se pode separar os dois campos de onda P e SV. Na onda P não se vê o efeito de diamante da onda SV, visto na modelagem com as equações de Du et al. (2008). Já a onda SV fica de uma forma que não corresponde a uma onda propagante. . . . .	25
1.5	Modelagem dos campos de onda P e SV com as equações de Pestana et al. (2011), onde é feita a separação da ondas P e SV, mas nesta situação a onda S fica com a forma de onda propagante, diferente da onda S de Liu et al. (2009). . . . .	27
1.6	Resposta impulsiva dos campos de onda (a) $p$ e (b) $q$ , considerando o meio com $\epsilon = 0.2$ , $\delta = 0.1$ e $\phi = 45$ (Zhou et al., 2006b). . . . .	31
1.7	Esquema do campo de onda da fonte ou propagação (vermelho) e do receptor ou depropagação (amarelo), quando os dois campos de onda coincidem no tempo e é formada a condição de imagem para um ponto do refletor. . . . .	32
2.1	Velocidade de fase para meios TTI com ângulos dos eixos de simetria de (a) $0^\circ$ , (b) $30^\circ$ , (c) $60^\circ$ , (d) $90^\circ$ para a onda $P$ . A velocidade do meio para a onda $P$ é de 3000 m/s e da onda SV de 1500 m/s na direção paralela ao eixo de simetria com os parâmetros de Thomsen $\epsilon = 0,25$ e $\delta = -0,075$ . . . . .	41

2.2	Velocidade de fase para meios TTI com ângulos dos eixos de simetria de (a) $0^\circ$ , (b) $30^\circ$ , (c) $60^\circ$ , (d) $90^\circ$ para a onda $P$ . A velocidade do meio para a onda $P$ é de 3000 m/s e da onda $SV$ de 1500 m/s na direção paralela ao eixo de simetria com os parametros de Thomsen $\epsilon = 0,135$ e $\delta = 0,205$ . . . . .	42
2.3	Velocidade de fase para meios TTI com ângulos dos eixos de simetria de (a) $0^\circ$ , (b) $30^\circ$ , (c) $60^\circ$ , (d) $90^\circ$ para a onda $P$ . A velocidade do meio para a onda $P$ é de 3000 m/s e da onda $SV$ de 1500 m/s na direção paralela ao eixo de simetria com os parametros de Thomsen $\epsilon = 0,8$ e $\delta = 0,5$ . . . . .	43
2.4	Velocidade de fase para meios TTI com ângulos dos eixos de simetria de (a) $0^\circ$ , (b) $30^\circ$ , (c) $60^\circ$ , (d) $90^\circ$ para a onda $P$ . A velocidade do meio para a onda $P$ é de 3000 m/s e da onda $SV$ de 1500 m/s na direção paralela ao eixo de simetria com os parametros de Thomsen $\epsilon = 0,5$ e $\delta = 0,8$ . . . . .	44
3.1	Respostas impulsivas com $\epsilon = 0.25$ , $\delta = 0.25$ e $\phi = 45^\circ$ , (a) é o TTI da equação (2.10), (b) é o TTI da equação (3.1) e (c) diferença entre (a) e (b). .	47
3.2	Respostas impulsivas com $\epsilon = 0.25$ , $\delta = 0.25$ e $\phi = 45^\circ$ , (a) é o TTI da equação (2.13), (b) é o TTI da equação (3.2) e (c) diferença entre (a) e (b). .	47
3.3	Velocidade de fase para meios TTI com ângulos dos eixos de simetria de (a) $0^\circ$ , (b) $30^\circ$ , (c) $60^\circ$ e (d) $90^\circ$ para a onda $P$ . A velocidade do meio para a onda $P$ é de 3000 m/s e da onda $SV$ de 1500 m/s na direção paralela ao eixo de simetria com os parâmetros de Thomsen $\epsilon = 0.2$ e $\delta = 0.1$ . . . . .	48
3.4	Velocidade de fase para meios TTI com ângulos dos eixos de simetria de (a) $0^\circ$ , (b) $30^\circ$ , (c) $60^\circ$ e (d) $90^\circ$ para a onda $P$ . A velocidade do meio para a onda $P$ é de 3000 m/s e da onda $SV$ de 1500 m/s na direção paralela ao eixo de simetria com os parâmetros de Thomsen $\epsilon = 0.8$ e $\delta = 0.5$ . . . . .	49
3.5	Modelo de duas camadas e uma cunha, onde (a) é o campo de velocidade (m/s), (b) é o campo de $\theta$ ( $^\circ$ ), (c) é o campo de $\epsilon$ , (d) é o campo de $\delta$ e (e) e (f) são os campos de $\epsilon$ e $\delta$ considerando valores de anisotropia forte. . . . .	52
3.6	Snapshots da propagação do campo da onda da equação (1.80) considerando o meio com anisotropia fraca nos tempos (a) 0.6s, (b) 0.8s, (c) 1.6s e (d) 5.4s. . . . .	53
3.7	Snapshots da propagação do campo da onda da equação (1.80) considerando anisotropia forte nos tempos (a) 0.6s, (b) 0.8s, (c) 1.6s e (d) 5.4s. . . . .	54
3.8	Snapshots da propagação do campo da onda da equação (3.1) considerando anisotropia fraca e $\epsilon > \delta$ , nos tempos (a) 0.6s, (b) 0.8s, (c) 1.6s e (d) 5.4s. . . . .	55
3.9	Snapshots da propagação do campo da onda da equação (3.1) considerando anisotropia fraca e $\delta > \epsilon$ , nos tempos (a) 0.6s, (b) 0.8s, (c) 1.6s e (d) 5.4s. . . . .	56

3.10	Snapshots da propagação do campo da onda da equação (3.1) considerando anisotropia forte, nos tempos (a) 0.6s, (b) 0.8s, (c) 1.6s e (d) 5.4s. . . . .	57
4.1	Campo de velocidade do modelo para meios com anisotropia VTI Hess . . . . .	59
4.2	Campo de $\epsilon$ do modelo para meios com anisotropia VTI Hess . . . . .	60
4.3	Campo de $\delta$ do modelo para meios com anisotropia VTI Hess . . . . .	60
4.4	Migração do modelo Hess sem levar em consideração os parâmetros de anisotropia $\epsilon$ e $\delta$ . . . . .	61
4.5	Migração do modelo Hess com a equação (3.1) . . . . .	61
4.6	Migração do modelo Hess com a equação (3.2) . . . . .	62
4.7	Campo de velocidade da parte 2 do modelo para meios com anisotropia TTI BP-TTI. . . . .	64
4.8	Campo de $\epsilon$ da parte 2 do modelo para meios com anisotropia TTI BP-TTI. . . . .	65
4.9	Campo de $\delta$ da parte 2 do modelo para meios com anisotropia TTI BP-TTI. . . . .	66
4.10	Campo do parâmetro $\phi$ da parte 2 do modelo BP-TTI. . . . .	67
4.11	Campo do parâmetro $\phi$ da parte 2 do modelo BP-TTI com filtro de suavização de comprimento 5x5 pontos. . . . .	68
4.12	Campo do parâmetro $\phi$ da parte 2 do modelo BP-TTI com filtro de suavização de comprimento 7x7 pontos. . . . .	69
4.13	Campo do parâmetro $\phi$ da parte 2 do modelo BP-TTI com filtro de suavização de comprimento 10x10 pontos. . . . .	70
4.14	Resultado da migração do modelo BP-TTI no caso isotrópico. . . . .	71
4.15	Resultado da migração do modelo BP-TTI no caso VTI ( $\phi = 0$ ) usando a equação (3.1). . . . .	72
4.16	Resultado da migração do modelo BP-TTI com a equação (3.1) usando o campo do parâmetro $\phi$ sem suavização. . . . .	73
4.17	Resultado da migração do modelo BP-TTI com a equação (3.1) usando o campo de $\phi$ com filtro de suavização de comprimento 5x5 pontos. . . . .	74
4.18	Resultado da migração do modelo BP-TTI com a equação (3.1) usando o campo de $\phi$ com filtro de suavização de comprimento 7x7 pontos. . . . .	75
4.19	Resultado da migração do modelo BP-TTI com a equação (3.1) usando o campo de $\phi$ com filtro de suavização de comprimento 10x10 pontos. . . . .	76
4.20	Resultado da migração do modelo BP-TTI com a equação (3.2) usando o campo de $\phi$ com filtro de suavização de comprimento 10x10 pontos. . . . .	77

# Introdução

O processamento sísmico convencional quando aplicado em dados sísmicos provenientes de regiões de alta complexidade geológica, por exemplo, cinturões de falhas, estruturas imbricadas e camadas com ângulos de inclinação relativamente altos, não consegue produzir imagens em profundidade adequadas para a interpretação sísmica. Desta forma, para se produzir imagens sísmicas de boa qualidade, faz-se necessário a aplicação de técnicas de migração sísmica pré-empilhamento em profundidade. A migração é definida como a etapa do processamento que move as reflexões para suas posições espaciais verdadeiras e também colapsa as difrações, levando-as a seus pontos de dispersão (Gray et al., 2001). Na migração pré-empilhamento o operador de migração faz a correção NMO (normal moveout), movendo os refletores para as posições verdadeiras e colapsando difrações, se o campo de velocidade é estimado com boa precisão. Portanto, quando os dados são provenientes de uma região com uma geologia mais complexa estruturalmente, os métodos de migração pré-empilhamento, baseados em soluções da equação da onda, se convertem numa ferramenta importante para o processamento sísmico e conseguem produzir, na maioria das vezes, seções sísmicas em profundidade de boa qualidade (Yilmaz, 1987).

Se considerarmos que a geologia não apresenta apenas variações na sua complexidade estrutural, mas também nas suas propriedades físicas e sua variação direcional, então temos que considerar a anisotropia sísmica que é definida como a variação direcional das propriedades sísmicas, por exemplo, a velocidade, a amplitude, a polarização, etc (Li et al., 2007). Essas variações podem se apresentar por fraturamento das rochas, tipo de rocha (geralmente as camadas de folhelho induzem anisotropia (Li et al., 2007)), trocas laterais e verticais de facies (fatores na deposição da rocha), entre outras. Cada um dos casos precisa ser abordado de uma forma especial no processamento sísmico pré-empilhamento, a depender do tipo de anisotropia presente no meio. Para representar o meio geológico mais corretamente, vários autores como Thomsen (1986), Tsvankin (1996), Alkhalifah (2000), Zhou et al. (2006a) e Du et al. (2008) desenvolveram equações da onda que simulam com melhor precisão a propagação de ondas sísmicas em meios com isotropia transversal vertical e inclinada (em inglês VTI e TTI, respectivamente), tendo em conta que nestas simulações há uma dependência

da velocidade com o ângulo de propagação.

Neste trabalho, apresentamos duas novas relações de dispersão para meios com anisotropia TTI, partindo da equação de onda de Tsvankin (1996), após aplicar uma rotação no ângulo de fase. A implementação computacional das novas equações foi feita com a técnica migração reversa no tempo (RTM em inglês), usando o método de expansão rápida (REM). Com base nos gráficos de velocidade de fase versus ângulo de fase, comparamos as novas relações de dispersão com a equação de Tsvankin (1996) e as aproximações de Pestana et al. (2011), Alkhalifah (2000) e de anisotropia fraca, notando que as novas relações de dispersão são as mais próximas à equação de Tsvankin (1996). Também estudamos a instabilidade dos algoritmos baseados em sistemas de equações acopladas e comparamos suas respostas com as produzidas pelas equações de onda  $P$  pura deduzidas neste trabalho. Verificamos que as equações acopladas tendem a ser mais instáveis que as equações de onda  $P$  pura. Também fizemos a migração dos dados sintéticos Hess e BP-TTI, notando neste último que, quanto mais se suaviza o campo de rotação das camadas ( $\phi$ ), mais estável fica o algoritmo de migração.

No primeiro capítulo, apresentamos os fundamentos teóricos da anisotropia polar, equações para meios com anisotropia VTI e TTI, a migração reversa no tempo e o método REM. No segundo capítulo, apresentamos a dedução das novas relações de dispersão. No terceiro capítulo, realizamos a modelagem numérica usando as equações propostas neste trabalho e testamos sua estabilidade em comparação com os resultados apresentados com o sistema de equações acopladas. No quarto capítulo, apresentamos a implementação das novas relações de dispersão nos dados sintéticos Hess e BP-TTI e finalmente as conclusões e recomendações.

# 1

## Fundamentos Teóricos

### 1.1 Anisotropia Polar

Geralmente na exploração sísmica se assume que a velocidade de propagação das ondas se comporta como se a Terra fosse isotrópica, isto quer dizer que as propriedades elásticas do meio não mudam em função da direção de propagação do campo de onda. As camadas da subsuperfície não correspondem a casos ideais, portanto, é necessário levar em conta a dependência das propriedades físicas com a direção de propagação do campo de onda. Estas mudanças têm sido bem estudadas por autores como Jones e Wang (1981), Banik (1984), Crampin (1985), Johnston e Christensen (1995), Vernik e Liu (1997), Leslie e Lawton (1999), entre outros, onde é provado que as intercalações de folhelho ou arenitos em camadas delgadas introduzem no meio uma anisotropia polar, que pode ser do tipo VTI, HTI ou TTI (Figuras 1.1a, 1.1b e 1.1c, respectivamente), dependendo da orientação do eixo de simetria.

Se o eixo de simetria é vertical, a anisotropia é do tipo VTI, mas se este eixo não é vertical o tipo de anisotropia é TTI. O caso onde o eixo de simetria das camadas é horizontal é chamado anisotropia HTI, assumindo que o eixo de simetria para todos os casos é perpendicular às camadas. A direção do eixo pode mudar por mecanismos geológicos como intrusões de corpos salinos ou corpos magmáticos, mas também podem se inclinar as camadas de rochas por ação de falhas ou deformações como dobras. Dependendo do tipo do ambiente sedimentar a deposição pode se apresentar com alguma inclinação, conservando-se nos processos de litificação. É muito importante então ter em conta na migração com anisotropia polar a inclinação das camadas para ter certeza de que metodologia usar, dependendo do ambiente onde seja desejado fazer o processamento.



Em meios como os descritos anteriormente, se o efeito da anisotropia é desprezado, a imagem sísmica irá apresentar erro no posicionamento dos refletores, como tem sido indicado por vários autores como Larner e Cohen (1993), Alkhalifah e Larner (1994), Isaac e Lawton (1999), entre outros. Assim sendo, visando incorporar os efeitos da anisotropia na imagem sísmica, muitos algoritmos de migração baseados na teoria de raios e também na solução da equação da onda têm sido adaptados, a partir do caso isotrópico, para corrigir os efeitos devidos à anisotropia do meio.

Portanto, os métodos convencionais de migração, inclusive a migração reversa no tempo, estão sujeitos a erros em meios com isotropia transversal vertical (VTI) ou isotropia transversal inclinada (TTI). Isso produz imagens sísmicas de baixa resolução e refletores mal posicionados. Assim sendo, para se produzir imagens que serão usadas, por exemplo, para o delineamento de reservatórios, devem ser empregados métodos de migração que levem em consideração a anisotropia do meio.

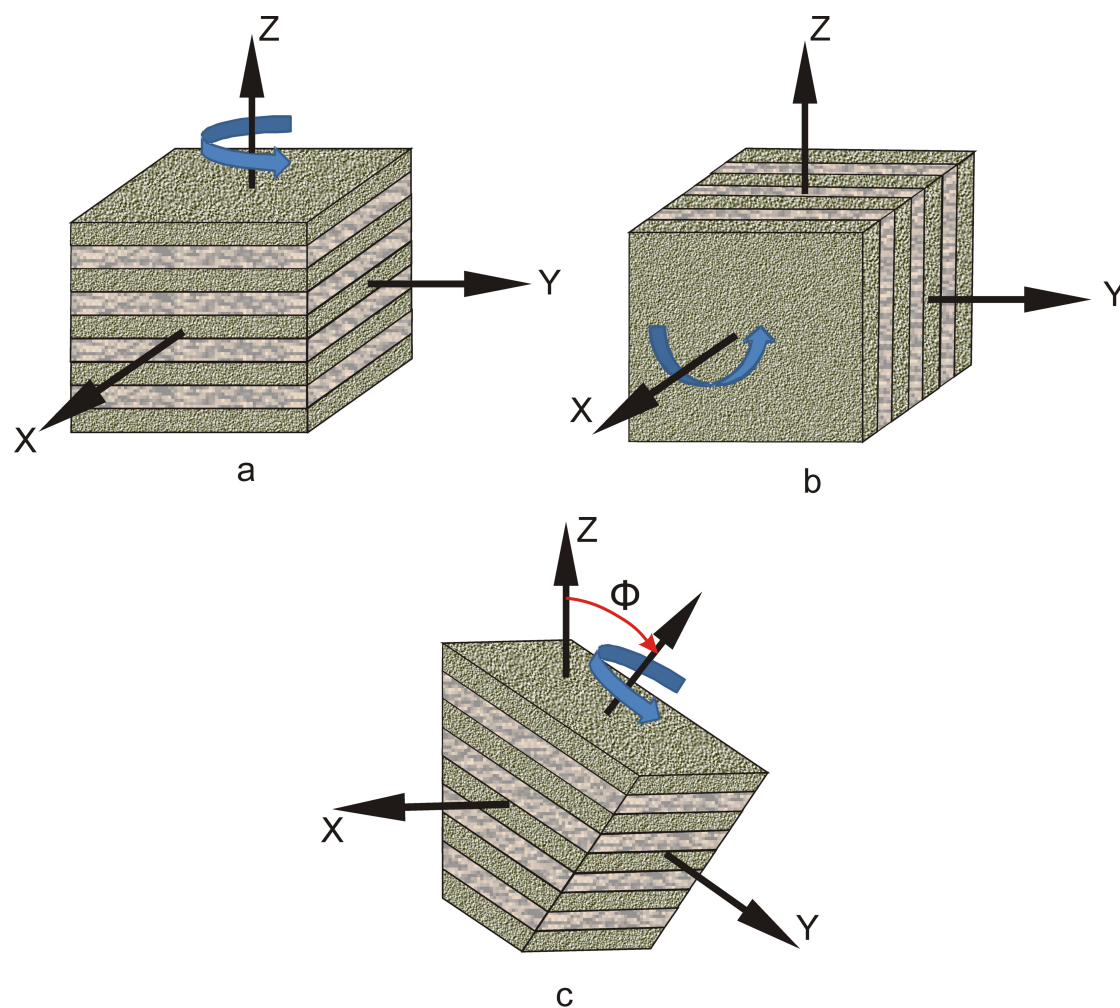


Figura 1.1: (a) Meio com isotropia transversal vertical (VTI), (b) meio com isotropia transversal horizontal (HTI) e (c) meio com isotropia transversal inclinada (TTI).

## 1.2 Teoria de Anisotropia Polar

A lei de Hooke permite expressar os componentes do tensor de esforços  $\sigma_{ij}$  como uma combinação linear das componentes do tensor de deformação  $\epsilon_{ij}$ , usando a seguinte equação:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\epsilon_{kl}, \quad (1.1)$$

onde  $c_{ijkl}$  é o tensor de elasticidade ou tensor de rigidez. Dado que  $i, j, k, l$  variam de 1 a 3, o número de elementos do tensor de elasticidade é  $3^4 = 81$ , mas nem todos os componentes são diferentes. A simetria dos tensores de esforço ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ) e deformação ( $\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$ ), além de ser a propagação um fenômeno adiabático ( $c_{ijkl} = c_{klij}$ ), implica que o número de constantes elásticas independentes possa ser reduzido a 21 (Love, 1927).

Desta forma, é possível representar o tensor de constantes elásticas como uma matriz  $6 \times 6$ , se são tomados pares dos quatro sub-índices de  $c_{ijkl}$ , expressando isso como  $c_{mn}$ , fazendo corresponder os pares  $i, j$  com  $m$  e  $k, l$  com  $n$ , da seguinte forma, segundo a notação de Voigt (Thomsen, 2002):

$$(1,1) \rightarrow 1, (2,2) \rightarrow 2, (3,3) \rightarrow 3, (2,3) \rightarrow 4, (1,3) \rightarrow 5, (1,2) \rightarrow 6$$

A equação (1.1) pode ser expressa na forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & & & & & \\ & C_{22} & & & & \\ & & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & & & & C_{55} & \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ 2\epsilon_4 \\ 2\epsilon_5 \\ 2\epsilon_6 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

**SIMÉTRICA**

O modelo mais geral de um meio completamente anisotrópico é representado então por 21 componentes independentes, como temos no sistema de equações (1.2). Um meio com anisotropia polar é caracterizado por ter 5 constantes independentes,  $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{33}$  e  $C_{44}$  (Love, 1927), onde:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

com  $C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$ . Num meio isotrópico a matriz (1.3) depende dos coeficientes elásticos  $C_{11}$  e  $C_{44}$ , os quais são expressos em termos dos parâmetros de Lamé,  $\lambda$  e  $\mu$  (Slawinski, 2003), os quais são definidos da seguinte forma:

$$\lambda = C_{11} - 2C_{44},$$

$$\mu = C_{44}.$$

De acordo com as definições anteriores, a matriz (1.3) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$C = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

A partir das equações de movimento de Cauchy para um elemento infinitesimal de um meio contínuo (Aki e Richards, 2002):

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad (1.5)$$

onde  $\rho$  é a densidade do meio,  $u_i$  são os componentes do vetor deslocamento,  $f_i$  são as forças de corpo,  $t$  é o tempo e  $x_j$  são as coordenadas cartesianas. Substituindo a equação (1.1) na equação (1.5) obtemos:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial c_{ijkl} \epsilon_{kl}}{\partial x_j} = f_i, \quad i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}, \quad (1.6)$$

onde o tensor deformação  $\epsilon_{kl}$  é definido por (Slawinski, 2003):

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right); \quad k, l \in \{1, 2, 3\}. \quad (1.7)$$

Na equação (1.6), desprezando as forças de corpo ( $f_i = 0$ ) e considerando o tensor de elasticidade como uma constante, temos que:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} = 0. \quad (1.8)$$

Para encontrar a solução da equação (1.8) é usada uma onda plana de tipo harmônica:

$$u_k = U_k e^{i\omega \left( \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{v} - t \right)}, \quad (1.9)$$

onde  $U_k$  são os componentes do vetor polarização  $\mathbf{u}$ ,  $\omega$  é a frequência angular,  $v$  é a velocidade de propagação da onda (chamada velocidade de fase),  $\mathbf{n}$  é o vetor normal unitário, que é ortogonal ao plano da frente da onda.

Usando (1.9) nas equações (1.8), obtemos a equação de Christoffel para a velocidade de fase  $v$  e o vetor polarização  $\mathbf{U}$  (Du, 2007):

$$\begin{pmatrix} G_{11} - \rho v^2 & G_{12} & G_{13} \\ G_{12} & G_{22} - \rho v^2 & G_{23} \\ G_{13} & G_{32} & G_{33} - \rho v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = 0, \quad (1.10)$$

onde  $G_{ik}$  é a matriz de Christoffel, que depende das propriedades elásticas do meio e da direção de propagação:

$$G_{ik} = c_{ijkl} n_j n_l. \quad (1.11)$$

Usando as relações das equações de movimento obtemos uma equação de onda com três soluções independentes, uma quasi longitudinal ( $qP$ ), uma quasi transversal ( $qSV$ ) e uma transversal ( $SH$ ). As três ondas são polarizadas em direções ortogonais. Daley e Hron (1977) obtiveram as relações de dispersão para esses três tipos de onda, as quais serão apresentadas em seguida:

$$\rho v_p^2(\theta) = \frac{1}{2} [C_{33} + C_{44} + (C_{11} - C_{33}) \sin^2 \theta + D(\theta)], \quad (1.12)$$

$$\rho v_{sv}^2(\theta) = \frac{1}{2} [C_{33} + C_{44} + (C_{11} - C_{33}) \sin^2 \theta - D(\theta)], \quad (1.13)$$

e

$$\rho v_{sh}^2(\theta) = C_{66} \sin^2(\theta) + C_{44} \cos^2(\theta), \quad (1.14)$$

onde  $\rho$  é a densidade,  $\theta$  é o ângulo entre a frente de onda normal e o eixo vertical e  $D(\theta)$  é uma notação compacta para a combinação quadrática, dada por:

$$D(\theta) \equiv \{(C_{33} - C_{44})^2 + 2[2(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})(C_{11} + C_{33} - 2C_{44})] \sin^2(\theta) + [(C_{11} + C_{33} - 2C_{44})^2 - 4(C_{13} + C_{44})^2] \sin^4(\theta)\}^{\frac{1}{2}}. \quad (1.15)$$

As equações (1.12), (1.13) e (1.14) representam as velocidades de fase das ondas  $P$ ,  $SV$  e  $SH$ . Quando a onda é propagada na direção vertical, paralela ao eixo de simetria ( $\theta = 0^\circ$ ) e na direção horizontal, perpendicular ao eixo de simetria ( $\theta = 90^\circ$ ), a velocidade da onda  $P$  é dada pelas seguintes expressões:

$$v_p(0^\circ) = v_{p0} = \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}, \quad (1.16)$$

$$v_p(90^\circ) = v_{p90} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}, \quad (1.17)$$

onde  $v_{p0}$  é a velocidade da onda  $P$  paralela ao eixo de simetria de um meio VTI e  $v_{p90}$  é a velocidade da onda  $P$  perpendicular ao eixo de simetria de um meio VTI. Para a onda  $S$  é feita uma análise similar, obtendo-se:

$$v_{sv}(0^\circ) = v_{sv0} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}, \quad (1.18)$$

$$v_{sv}(90^\circ) = v_{sv90} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}. \quad (1.19)$$

As velocidades da onda  $SV$  paralela ao eixo de simetria ( $v_{s0}$ ) e perpendicular ( $v_{sv90}$ ) são iguais.

Para a onda  $SH$  temos que:

$$v_{sh}(0^\circ) = v_{sh0} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}, \quad (1.20)$$

$$v_{sh}(90^\circ) = v_{sh90} = \sqrt{\frac{C_{66}}{\rho}}. \quad (1.21)$$

As velocidades da onda  $SH$  paralela ao eixo de simetria ( $v_{sh0}$ ) e perpendicular ao eixo de simetria ( $v_{sh90}$ ) são diferentes. Se consideramos um meio isotrópico, os componentes do tensor de rigidez serão:  $C_{44}=C_{66}$  e  $C_{11}=C_{33}$ , e assim teremos que:  $v_{sh0}=v_{sh90}$  e  $v_{p0}=v_{p90}$ , ou seja, a velocidade não depende da direção de propagação.

As equações da velocidade de fase foram simplificadas por Thomsen (1986), que introduziu três parâmetros:  $\epsilon$ ,  $\gamma$  e  $\delta$ , os quais também podem ser escritos como combinações

dos coeficientes elásticos, definindo-os como adimensionais, de tal forma que se reduzem a zero para o caso isotrópico. Alguns materiais com valores pequenos de anisotropia ( $\epsilon$ ,  $\gamma$  e  $\delta \ll 0.2$ ) são chamados materiais com anisotropia fraca (ver tabela 1 de Thomsen, 1986), os parâmetros  $\epsilon$  e  $\gamma$  são definidos da seguinte forma (Thomsen, 1986):

$$\epsilon \equiv \frac{C_{11} - C_{33}}{2C_{33}}, \quad (1.22)$$

$$\gamma \equiv \frac{C_{66} - C_{44}}{2C_{44}}, \quad (1.23)$$

Na equação (1.22) e (1.23) os parâmetros  $\epsilon$  e  $\gamma$  permitem descrever diferenças entre as velocidades da onda  $P$  e da onda  $SH$  na direção paralela e perpendicular ao eixo de simetria do meio. O terceiro parâmetro  $\delta$  não tem significado físico, Thomsen (1986) o define como:

$$\delta = \frac{(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})^2}{2C_{33}(C_{33} - C_{44})}. \quad (1.24)$$

As relações de dispersão (1.12), (1.13) e (1.14), foram escritas por Thomsen (1986), incluindo os três parâmetros  $\epsilon$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  da forma:

$$v_p^2 = v_{p0}^2 [1 + \epsilon \sin^2(\theta) + D^*(\theta)], \quad (1.25)$$

$$v_{sv}^2(\theta) = v_{sv0}^2 \left[ 1 + \frac{v_{p0}^2}{v_{sv0}^2} \epsilon \sin^2(\theta) - \left( \frac{v_{p0}^2}{v_{sv0}^2} \right) D^*(\theta) \right], \quad (1.26)$$

$$v_{sh}^2(\theta) = v_{sv0}^2 [1 + 2\gamma \sin^2(\theta)], \quad (1.27)$$

onde o fator  $D^*(\theta)$  é dado pela seguinte expressão (Thomsen, 1986):

$$D^*(\theta) \equiv \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{v_{sv0}^2}{v_{p0}^2} \right) \left\{ \left[ 1 + \frac{4\delta^* \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)}{\left( 1 - \frac{v_{sv0}^2}{v_{p0}^2} \right)^2} + \frac{4\epsilon \sin^4(\theta) \left( 1 - \frac{v_{sv0}^2}{v_{p0}^2} + \epsilon \right)}{\left( 1 - \frac{v_{sv0}^2}{v_{p0}^2} \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right\}, \quad (1.28)$$

onde  $\delta^* \equiv \frac{2(C_{13}+C_{44})^2 - (C_{33}-C_{44})(C_{11}+C_{33}-2C_{44})}{2C_{33}^2}$ .

É importante notar a diferença entre os ângulos  $\theta$  e  $\phi$ . O ângulo  $\theta$  refere-se ao ângulo que forma o vetor de onda ( $\mathbf{k}$ ) com o eixo de simetria, enquanto o ângulo  $\phi$  representa o ângulo entre o vetor da velocidade e o eixo de simetria. O vetor de propagação  $\mathbf{k}$  aponta na direção da máxima taxa de aumento da fase e a velocidade de fase  $v$  mede a velocidade da frente de onda ao longo de  $\mathbf{k}$ . No caso isotrópico os ângulos  $\theta$  e  $\phi$  coincidem, resultando frentes de onda circulares (Figura 1.2a). Para o caso anisotrópico, existem diferenças entre a direção da velocidade de fase e a velocidade do raio e, assim, a frente de onda não é mais circular (Figura 1.2b).

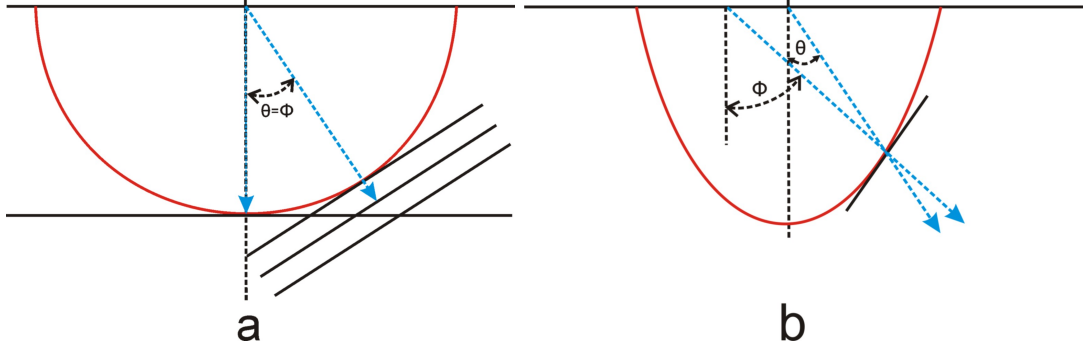


Figura 1.2: (a) Frente de onda circular, que corresponde à propagação de uma onda em um meio isotrópico e (b) frente de onda não circular, que corresponde a um meio com anisotropia.

Em alguns casos é necessário expressar a relação de dispersão em termos da frequência ( $\omega$ ) e do número de onda ( $k$ ). Para isto introduzimos o vetor de número de onda  $\mathbf{k}$  na forma:

$$\vec{k} = k_x \hat{x} + k_z \hat{z}, \quad (1.29)$$

com seus componentes em duas dimensões, temos que:

$$k_x = k(\theta) \sin(\theta) \quad \text{e} \quad k_z = k(\theta) \cos(\theta), \quad (1.30)$$

onde a magnitude é dada por:

$$k(\theta) = \sqrt{k_x^2 + k_z^2} = \frac{\omega}{v(\theta)}. \quad (1.31)$$

Na equação (1.31),  $\omega$  determina a frequência angular da onda e  $v(\theta)$  a velocidade de fase. A velocidade de grupo para o meio dispersivo corresponde a:

$$\vec{V} = \frac{\partial(kv)}{\partial k_x} \hat{x} + \frac{\partial(kv)}{\partial k_z} \hat{z}, \quad (1.32)$$

e a magnitude de  $V$  é expressada em termos da magnitude da velocidade de fase  $v$  na forma:

$$V^2(\psi(\theta)) = v^2(\theta) + \left( \frac{\partial(v)}{\partial \theta} \right)^2 \quad (1.33)$$

Para  $\theta = 0^\circ$  e  $\theta = 90^\circ$  o segundo termo do lado direito da equação (1.33) desaparece, de tal forma que a velocidade de grupo é equivalente à velocidade de fase, o qual é uma característica de um meio não dispersivo.

### 1.3 Equações Pseudo-acústicas para Meios VTI

Nesta seção apresentamos as equações pseudo-acústicas para meios VTI propostas por Alkhalifah (2000), Du et al. (2008), Liu et al. (2009) e Pestana et al. (2011). Alkhalifah (2000)

propõe uma equação pseudo-acústica para meios com isotropia VTI, mas a equação é de quarta ordem no tempo e no espaço, sendo mais difícil de ser implementada computacionalmente. Du et al. (2008), partindo das equações de Alkhalifah (2000) e usando uma função auxiliar, obtêm duas equações diferenciais parciais de segunda ordem, portanto mais simples de serem implementadas.

As equações de Alkhalifah (2000), como as de Du et al. (2008), apresentam o efeito da onda SV. Liu et al. (2009) propõem um método de separação das ondas P e SV das equações pseudo-acústicas para meios VTI, usando as equações de Alkhalifah (2000). Porém, a equação para a onda SV obtida por Liu et al. (2009) não corresponde fisicamente a uma onda propagante. Grechka et al. (2004) fazem uma discussão sobre as ondas S nas equações em meios acústicos com anisotropia. Alkhalifah (2000) propõe que posicionando a fonte numa camada isotrópica pode-se reduzir o efeito diamante da onda S, mas essa proposta impõe limitações na modelagem e em etapas avançadas do processamento de dados sísmicos. Pestana et al. (2011) propõem um método de separação das ondas P e SV a partir das equações de Tsvankin (1996), resultando em equações para as ondas P e SV separadas e estáveis, como se observa ao longo deste capítulo.

### 1.3.1 Relação de Dispersão de Tsvankin (1996)

A relação de dispersão para meios VTI de Tsvankin (1996) é:

$$\frac{v^2(\theta)}{v_{p0}^2} = 1 + \epsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2} \pm \frac{f}{2} \left[ \left( 1 + \frac{2\epsilon \sin^2 \theta}{f} \right)^2 - \frac{2(\epsilon - \delta) \sin^2 2\theta}{f} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.34)$$

onde  $f = 1 - (v_{s0}/v_{p0})^2$ ,  $v_{p0}$  e  $v_{s0}$  são as velocidades da onda P e S na vertical, respectivamente, e  $\epsilon$  e  $\delta$  são parâmetros de Thomsen.

### 1.3.2 Equações Pseudo-acústicas de Alkhalifah (2000)

A partir do trabalho de Tsvankin (1996), Alkhalifah (2000) introduz uma aproximação pseudo-acústica na equação de onda para meios VTI, fazendo  $v_{s0} = 0$ , obtendo a seguinte equação:

$$\frac{d^2 P(k_x, k_y, z, \omega)}{dz^2} = -\frac{v_n^2}{v_{p0}^2} \left( \frac{\omega^2}{v_n^2} - \frac{\omega^2(k_x^2 + k_y^2)}{\omega^2 - 2v_n^2 \eta(k_x^2 + k_y^2)} \right) P(k_x, k_y, z, \omega), \quad (1.35)$$

onde  $v_n$  é a velocidade de *normal moveout* (NMO) ( $v_n = v_{p0} \sqrt{1 + 2\delta}$ ),  $v_{p0}$  é a velocidade na vertical da onda P,  $k_x$  e  $k_y$  são os números de onda,  $\omega$  é a frequência e  $\eta$  é o coeficiente de



anisotropia. Aplicando a transformada inversa de Fourier em  $k_x$  e  $k_y$  ( $k_x \rightarrow -i\partial/\partial x$ ,  $k_y \rightarrow -i\partial/\partial y$ ), na equação (1.35), obtemos a seguinte equação:

$$v_{p0}^2 \omega^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + 2\eta v_n^2 v_{p0}^2 \left( \frac{\partial^4 P}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 P}{\partial y^2 \partial z^2} \right) + (1+2\eta) v_n^2 \omega^2 \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) + \omega^4 P(x, y, z, \omega) = 0 \quad (1.36)$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier na frequência ( $\omega \rightarrow i\partial/\partial t$ ) na equação acústica da onda para meios VTI, resulta na seguinte equação:

$$\frac{\partial^4 P}{\partial t^4} - (1+2\eta) v_n^2 \left( \frac{\partial^4 P}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 P}{\partial y^2 \partial t^2} \right) = v_{p0}^2 \frac{\partial^4 P}{\partial z^2 \partial t^2} - 2\eta v_n^2 v_{p0}^2 \left( \frac{\partial^4 P}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 P}{\partial y^2 \partial z^2} \right). \quad (1.37)$$

A equação (1.37) é uma equação diferencial parcial de quarta ordem no tempo. Para  $\eta = 0$ , obtemos a equação:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - v_n^2 \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) - v_{p0}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right] = 0, \quad (1.38)$$

e fazendo, agora,  $\hat{P} = \partial^2 P / \partial t^2$ , obtemos

$$\frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial t^2} = v_n^2 \left( \frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial y^2} \right) + v_{p0}^2 \frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial z^2}. \quad (1.39)$$

que é a equação acústica da onda de segunda ordem para meios com anisotropia elíptica com eixo de simetria vertical (Alkhalifah, 2000). Para meios isotrópicos,  $v_{p0}$  é igual a  $v_n$ , e a equação (1.39) se reduz à equação de onda acústica para meios isotrópicos (Alkhalifah, 2000), ou seja:

$$\frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial t^2} = v_n^2 \left( \frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial z^2} \right). \quad (1.40)$$

### 1.3.3 Equações Pseudo-acústicas de Du et al. (2008)

A partir da equação acústica para meios com anisotropia VTI, no domínio do espaço e do tempo (equação 1.35), Du et al. (2008) propõem uma equação diferencial parcial para ondas  $P$  com anisotropia transversal para meios com eixo de simetria vertical (VTI).

Tendo em conta a relação do coeficiente de anisotropia  $\eta$  com as velocidades horizontal ( $v_x$ ) ( $v_x = v_{p0} \sqrt{1+2\epsilon}$ ) e NMO ( $v_n$ ), ou seja:

$$\eta = \frac{1}{2} \left( \frac{v_x^2}{v_n^2} - 1 \right), \quad (1.41)$$

então podemos reescrever a equação (1.35) como:

$$\frac{\partial^4 P}{\partial t^4} - v_x^2 \left( \frac{\partial^4 P}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 P}{\partial y^2 \partial t^2} \right) = v_{p0}^2 \frac{\partial^4 P}{\partial z^2 \partial t^2} + v_{p0}^2 (v_n^2 - v_x^2) \left( \frac{\partial^4 P}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 P}{\partial y^2 \partial z^2} \right). \quad (1.42)$$

Segundo Alkhalifah (2000), é possível derivar um sistema acoplado de segunda ordem para as equações diferenciais parciais no tempo para o de campo de onda  $P(x, y, z, t)$ , usando a função auxiliar  $q(x, y, z, t)$ , ou seja:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = q, \quad (1.43)$$

então:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - v_x^2 \left( \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \right) = v_{p0}^2 \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} + v_{p0}^2 (v_n^2 - v_x^2) \left( \frac{\partial^4 P}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 P}{\partial y^2 \partial z^2} \right). \quad (1.44)$$

A equação (1.42) pode ser reescrita da seguinte forma, tendo em conta a relação (1.41) e a transformada de Fourier:

$$\omega^4 - \omega^2 [v_x^2(k_x^2 + k_y^2) + v_{p0}^2 k_z^2] - v_{p0}^2 k_z^2 (v_n^2 - v_x^2)(k_x^2 + k_y^2) = 0 \quad (1.45)$$

Multiplicando a equação (1.45) pelo campo de onda  $q(\omega, k_x, k_y, k_z)$  e introduzindo a nova função auxiliar:

$$P(k_x, k_y, k_z, \omega) = \frac{\omega^2 + (v_n^2 - v_x^2)(k_x^2 + k_y^2)}{\omega^2} q(k_x, k_y, k_z, \omega). \quad (1.46)$$

Temos que a equação (1.45) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\omega^2 q(k_x, k_y, k_z, \omega) = v_x^2(k_x^2 + k_y^2)q(k_x, k_y, k_z) + v_{p0}^2 k_z^2 P(k_x, k_y, k_z, \omega). \quad (1.47)$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier no tempo às equações (1.46) e (1.47), a equação pseudo-acústica VTI final pode ser escrita através do seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = v_x^2 \left( \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \right) + v_{p0}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}, \quad (1.48)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = v_n^2 \left( \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \right) + v_{p0}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}. \quad (1.49)$$

Vimos então que usando a função auxiliar  $q$  obtemos um sistema de equações de onda de segunda ordem (1.48 e 1.49), o qual é mais conveniente e mais simples de ser implementado computacionalmente. No entanto, quando modelamos a propagação das frentes de onda usando as equações anteriores, podemos ver um efeito em forma de diamante o qual é resultado da onda SV no meio VTI (Du et al., 2008).

Na Figura (1.3) se apresentam as respostas da modelagem através das equações (1.48) e (1.49). Observa-se o efeito de diamante da onda SV na modelagem, tanto do campo  $q$  como do campo  $P$ . No entanto, no campo  $q$  esse efeito aparece mais atenuado (Du et al., 2008).

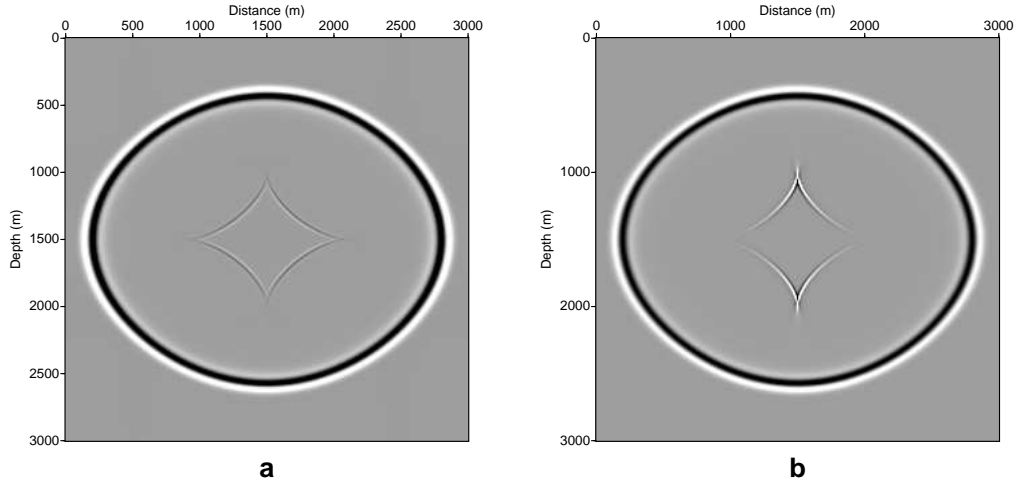


Figura 1.3: Modelagem das equações de Du et al. (2008), onde temos os campos (a)  $q$  e (b)  $P$ . Segundo Du et al. (2008), o campo  $q$  atenua o efeito da onda SV, ficando a maior parte deste no campo  $P$ .

### 1.3.4 Equações Pseudo-acústicas de Liu et al. (2009)

Com o objetivo de eliminar o efeito da onda SV, autores como Du et al. (2008), Etgen e Brandsberg-Dahl (2009), Liu et al. (2009) propõem outras metodologias. Liu et al. (2009) fatoram a relação de dispersão de Alkhalifah (2000) e obtêm relações de dispersão para as ondas P e SV.

Partindo da equação de Alkhalifah (2000):

$$\omega^2 = \frac{1}{2} [v_x^2(k_x^2 + k_y^2) + v_{p0}^2 k_z^2] \pm \frac{1}{2} [v_x^2(k_x^2 + k_y^2) + v_{p0}^2 k_z^2] \left[ 1 + \frac{4v_{p0}^2(v_n^2 - v_x^2)(k_x^2 + k_y^2)k_z^2}{[v_x^2(k_x^2 + k_y^2) + v_{p0}^2 k_z^2]^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.50)$$

e fazendo a expansão da raiz quadrada  $\left( \sqrt{1+X} \approx 1 + \frac{1}{2}X; X \ll 1 \right)$  obtemos:

$$\omega^2 = v_{p0}^2 k_z^2 + v_x^2(k_x^2 + k_y^2) + \frac{(v_n^2 - v_x^2)(k_x^2 + k_y^2)k_z^2}{k_z^2 + F(k_x^2 + k_y^2)} \quad (\text{para a onda P}), \quad (1.51)$$

e

$$\omega^2 = -\frac{(v_n^2 - v_x^2)(k_x^2 + k_y^2)k_z^2}{k_z^2 + F(k_x^2 + k_y^2)} \quad (\text{para a onda SV}), \quad (1.52)$$

onde  $F = \frac{v_x^2}{v_{p0}^2} = 1 + 2\epsilon$ . Para que a equação da onda SV seja estável, deve satisfazer a seguinte relação:  $v_x^2 - v_n^2 \geq 0$  ou  $\epsilon \geq \delta$ . A modelagem, através da equação (1.52), não fornece uma forma de onda propagante para a onda SV, já a onda P (equação 1.51), aparece sem a componente não desejada da onda SV.

Pestana et al. (2011) propõem outra forma de separação partindo das equações de Tsvankin (1996), como veremos a seguir.

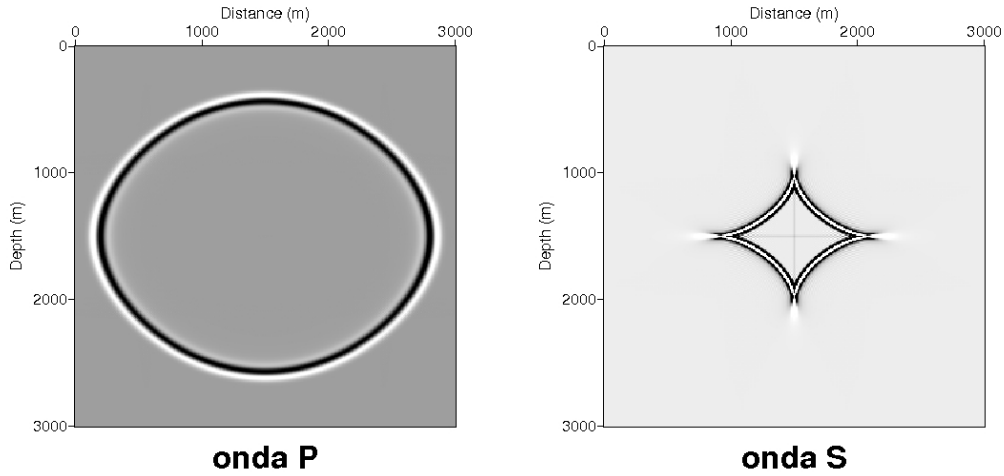


Figura 1.4: Modelagem das ondas P e SV a partir das equações de Liu et al. (2009), onde se pode separar os dois campos de onda P e SV. Na onda P não se vê o efeito de diamante da onda SV, visto na modelagem com as equações de Du et al. (2008). Já a onda SV fica de uma forma que não corresponde a uma onda propagante.

### 1.3.5 Equações Pseudo-acústicas de Pestana et al. (2011)

A equação (1.34) pode ser expressa da seguinte forma:

$$\frac{v^2(\theta)}{v_{p0}^2} = 1 + \epsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2} \pm \frac{f}{2} \left( 1 + \frac{2\epsilon \sin^2 \theta}{f} \right) \left[ 1 - \frac{2(\epsilon - \delta) \sin^2 2\theta}{f(1 + \frac{2\epsilon \sin^2 \theta}{f})^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.53)$$

onde  $f = 1 - \left( \frac{v_{s0}}{v_{p0}} \right)^2$ ,  $v_{p0}$  e  $v_{s0}$  são as velocidades das ondas P e S na vertical, respectivamente, e  $\epsilon$  e  $\delta$  são os parâmetros de Thomsen. O sinal mais na equação (1.53) corresponde à onda P e o menos à onda SV.

Para obter as equações das ondas P e SV, fazemos a expansão da raiz quadrada ( $\sqrt{1+X} \approx 1 + \frac{1}{2}X$ ;  $X \ll 1$ ) e obtemos as seguintes equações:

$$\frac{v^2(\theta)}{v_{p0}^2} = 1 + 2\epsilon \sin^2 \theta - \frac{(\epsilon - \delta) \sin^2 2\theta}{2 \left( 1 + \frac{2\epsilon \sin^2 \theta}{f} \right)} \quad (\text{para onda P}), \quad (1.54)$$

e

$$\frac{v^2(\theta)}{v_{p0}^2} = 1 - f + \frac{(\epsilon - \delta) \sin^2 2\theta}{2 \left( 1 + \frac{2\epsilon \sin^2 \theta}{f} \right)} \quad (\text{para onda SV}). \quad (1.55)$$

As equações (1.54) e (1.55) podem ser expressas em função da componente horizontal da velocidade ( $v_x$ ) e da velocidade NMO ( $v_n$ ) da onda P, com as seguintes relações:

$$v_x^2 = v_{p0}^2(1 + 2\epsilon), \quad (1.56)$$

$$v_n^2 = v_{p0}^2(1 + 2\delta). \quad (1.57)$$

Também fazendo  $\sin(\theta) = \frac{v(\theta)k_x}{\omega}$  e  $\cos(\theta) = \frac{v(\theta)k_z}{\omega}$  de forma que:

$$v^2(\theta) = \frac{\omega^2}{k_x^2 + k_z^2}. \quad (1.58)$$

Introduzindo a relação (1.58) nas equações (1.54) e (1.55) e estendendo as equações para o caso 3D, substituindo  $k_x^2$  por  $(k_x^2 + k_y^2)$ , obtemos as seguintes expressões para as ondas P e SV, respectivamente:

$$\omega^2 = v_{p0}^2 k_z^2 + v_x^2 (k_x^2 + k_y^2) - \frac{(v_x^2 - v_n^2)(k_x^2 + k_y^2)k_z^2}{k_z^2 + F(k_x^2 + k_y^2)} \quad (\text{Para onda P}), \quad (1.59)$$

$$\omega^2 = v_{p0}^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) + \frac{(v_x^2 - v_n^2)(k_x^2 + k_y^2)k_z^2}{k_z^2 + F(k_x^2 + k_y^2)} \quad (\text{Para onda SV}). \quad (1.60)$$

onde  $F = \frac{v_x^2 + v_{s0}^2}{fv_{p0}^2} = \frac{1 + 2\epsilon + \gamma^2}{1 - \gamma^2}$  e  $\gamma^2 = \frac{v_{s0}^2}{v_{p0}^2}$ .

As novas equações (1.59) e (1.60) são válidas se

$$\left| \frac{2(\epsilon - \delta) \sin^2 2\theta}{f(1 + \frac{2\epsilon \sin^2 \theta}{f})^2} \right| \ll 1. \quad (1.61)$$

Esta condição ainda pode ser escrita da seguinte forma:

$$\left| \frac{2(1 - \delta^2)(\epsilon - \delta) \sin^2 2\theta}{(1 - \delta^2 + 2\epsilon \sin^2 \theta)^2} \right| \ll 1 \quad (1.62)$$

Quando consideramos  $v_{s0} = 0$  (ou  $f = 1$ ), as equações (1.59) e (1.60) são reduzidas às equações (1.51) e (1.52), respectivamente.

Se consideramos  $\epsilon = 0$ , temos que  $F = 1$ , a equação (1.59) se reduz a:

$$\omega^2 = v_{p0}^2 k_z^2 + v_x^2 (k_x^2 + k_y^2) - \frac{(v_x^2 - v_n^2)(k_x^2 + k_y^2)k_z^2}{k_z^2 + (k_x^2 + k_y^2)}, \quad (1.63)$$

que corresponde à relação de dispersão usada por Etgen e Brandsberg-Dahl (2009) e Crawley et al. (2010).

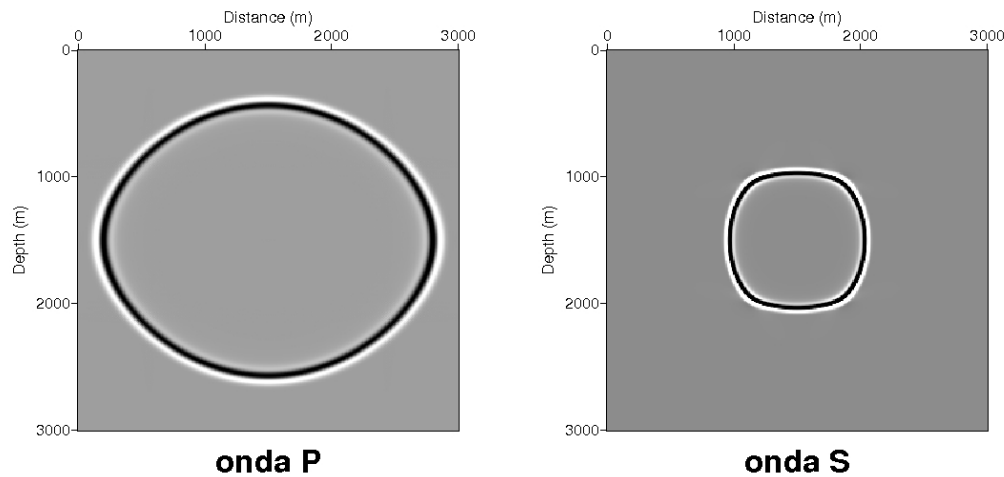


Figura 1.5: Modelagem dos campos de onda P e SV com as equações de Pestana et al. (2011), onde é feita a separação das ondas P e SV, mas nesta situação a onda S fica com a forma de onda propagante, diferente da onda S de Liu et al. (2009).

## 1.4 Equações Pseudo-acústicas para Meios TTI

Nesta seção iremos apresentar as equações para meios com isotropia transversal inclinada (TTI), onde o ângulo do eixo de simetria das camadas varia, sendo o caso da anisotropia VTI uma particularidade da anisotropia TTI. Alkhalifah (2000) propõe uma equação de onda acústica fazendo a velocidade da onda SV igual a 0 ( $v_{s0} = 0$ ), mostrando assim que a nova equação acústica para meios com isotropia VTI tem uma aproximação cinemática aceitável para a propagação da onda P. Zhang et al. (2005) estendem a equação acústica de Alkhalifah (2000) para meios com anisotropia VTI para meios TTI, deduzindo que ao fazer  $v_{s0} = 0$  apenas desprezam a componente no eixo principal da onda S e introduz o efeito diamante nas respostas impulsivas. As equações de Pestana et al. (2011) para meios com anisotropia VTI podem ser estendidas para meios TTI, onde se obtém as equações para a onda P e a onda SV, partindo das equações de Tsvankin (1996), como vimos na seção anterior.

### 1.4.1 Equação de Tsvankin para meios com anisotropia TTI

Partindo da equação para meios com anisotropia VTI (Tsvankin, 1996, equação (1.34)), podemos chegar à equação com o eixo de simetria rotacionado do ângulo  $\phi$  e obtemos a

equação para a velocidade de fase para meios com anisotropia TTI:

$$\frac{v^2(\theta, \phi)}{v_{p0}^2} = 1 + \epsilon \sin^2(\theta - \phi) - \frac{f}{2} \pm \frac{f}{2} \left[ \left( 1 + \frac{2\epsilon \sin^2(\theta - \phi)}{f} \right)^2 - \frac{2(\epsilon - \delta) \sin^2 2(\theta - \phi)}{f} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.64)$$

onde  $\theta$  é o ângulo de fase,  $f = 1 - \frac{v_{s0}^2}{v_{p0}^2}$ ,  $\epsilon$  e  $\delta$  são os parâmetros de Thomsen. Esta equação é exata e com respeito a ela faremos a seguir uma análise comparando as diferentes aproximações.

### 1.4.2 Aproximação de anisotropia fraca para meios TTI

Partindo da equação (1.64) e fazendo a expansão em série de Taylor da raiz, conservando os termos lineares nos parâmetros  $\epsilon$  e  $\delta$ , obtemos as equações para as ondas P e SV para meios como anisotropia TTI:

$$\frac{v^2(\theta, \phi)}{v_{p0}^2} = 1 + 2\delta \sin^2(\theta - \phi) \cos^2(\theta - \phi) + 2\epsilon \sin^4(\theta - \phi) \quad (\text{Onda P}), \quad (1.65)$$

$$\frac{v^2(\theta, \phi)}{v_{p0}^2} = 1 - f + 2(\epsilon - \delta) \sin^2(\theta - \phi) \cos^2(\theta - \phi) \quad (\text{Onda SV}). \quad (1.66)$$

As equações (1.65) e (1.66) são chamadas de aproximação de anisotropia fraca.

### 1.4.3 Aproximação de anisotropia fraca para meios TTI de ordem superior

Se queremos manter uma maior precisão na aproximação da equação (1.64), mantendo os termos quadráticos de  $\epsilon$  e  $\delta$  na aproximação em série de Taylor para a raiz quadrada, obtemos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \frac{v^2(\theta, \phi)}{v_{p0}^2} = & 1 + 2\delta \sin^2(\theta - \phi) \cos^2(\theta - \phi) + 2\epsilon \sin^4(\theta - \phi) + \\ & \frac{4}{f}(\epsilon - \delta)[\epsilon \sin^2(\theta - \phi) + \delta \cos^2(\theta - \phi)] \sin^4(\theta - \phi) \cos^2(\theta - \phi) \quad (\text{Onda P}), \end{aligned} \quad (1.67)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{v^2(\theta, \phi)}{v_{p0}^2} = & 1 - f + 2(\epsilon - \delta) \sin^2(\theta - \phi) \cos^2(\theta - \phi) - \\ & \frac{4}{f}(\epsilon - \delta)[\epsilon \sin^2(\theta - \phi) + \delta \cos^2(\theta - \phi)] \sin^4(\theta - \phi) \cos^2(\theta - \phi) \quad (\text{Onda S}). \end{aligned} \quad (1.68)$$

#### 1.4.4 Aproximação de Alkhalifah para meios com anisotropia TTI

Para obter a equação acústica com anisotropia TTI de Alkhalifah (2000), temos que considerar que a velocidade da onda  $SV$  é igual a 0 ( $v_{s0} = 0$ ), ou seja, temos que  $f = 1$ . A equação de velocidade de fase para um meio TTI fica da seguinte forma:

$$\frac{v^2(\theta, \phi)}{v_{p0}^2} = \frac{1}{2} + \epsilon \sin^2(\theta - \phi) \pm \frac{1}{2} \left[ (1 + 2\epsilon \sin^2(\theta - \phi))^2 - 2(\epsilon - \delta) \sin^2 2(\theta - \phi) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.69)$$

Nesta aproximação não conseguimos separar a onda  $SV$  da onda  $P$ , como foi mostrado para o caso de anisotropia VTI, pois utilizando esta equação temos o efeito na forma de diamante, causado pela componente da onda  $SV$ . Fazendo  $v_{s0} = 0$  só tiramos a componente vertical da onda  $SV$  (Grechka et al., 2004).

#### 1.4.5 Aproximação de Zhan et al. (2012) para meios com anisotropia TTI

Considerando as equações (1.54) e (1.55) podemos obter as equações para meios com anisotropia TTI. Assim, rotacionado o eixo vertical de simetria de um ângulo  $\phi$ , obtendo as seguintes equações:

$$\frac{v^2(\theta, \phi)}{v_{p0}^2} = 1 + 2\epsilon \sin^2(\theta - \phi) - \frac{(\epsilon - \delta) \sin^2 2(\theta - \phi)}{2 \left( 1 + \frac{2\epsilon \sin^2(\theta - \phi)}{f} \right)} \quad (\text{para onda P}), \quad (1.70)$$

e

$$\frac{v^2(\theta, \phi)}{v_{p0}^2} = 1 - f + \frac{(\epsilon - \delta) \sin^2 2(\theta - \phi)}{2 \left( 1 + \frac{2\epsilon \sin^2(\theta - \phi)}{f} \right)} \quad (\text{para onda SV}). \quad (1.71)$$

Essas aproximações propostas por Zhan et al. (2012) são novas equações para meios TTI, partindo da equação de Tsvankin (1996).

Expressando as equações (1.70) e (1.71) no domínio da transformada de Fourier e fazendo  $F = 1$ , para simplificar o denominador (Zhan et al., 2012), obtemos as seguintes equações:

$$\omega^2 = v_{p0}^2 \left[ (1 + 2\epsilon) \hat{k}_r^2 + \hat{k}_z^2 - \frac{2(\epsilon - \delta) \hat{k}_r^2 \hat{k}_z^2}{\hat{k}_r^2 + \hat{k}_z^2} \right], \quad (1.72)$$

$$\omega^2 = v_{p0}^2 \left[ \frac{v_{s0}^2}{v_{p0}^2} (\hat{k}_r^2 + \hat{k}_z^2) + \frac{2(\epsilon - \delta) \hat{k}_r^2 \hat{k}_z^2}{\hat{k}_r^2 + \hat{k}_z^2} \right], \quad (1.73)$$

onde  $\hat{k}_r = \sqrt{\hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2}$ , e  $\hat{k}_x^2$ ,  $\hat{k}_y^2$  e  $\hat{k}_z^2$  são os números de onda em  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, num sistema de coordenadas rotacionado. Introduzindo o sistema de rotação (Zhan et al.,



2012):

$$\begin{pmatrix} \hat{k}_x \\ \hat{k}_y \\ \hat{k}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ -\sin \theta \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}, \quad (1.74)$$

obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\hat{k}_r^2 = k_r^2 - \sin^2 \theta (\cos^2 \phi k_x^2 + \sin^2 \phi k_y^2 - k_z^2 + \sin 2\phi k_x k_y) + \sin 2\theta (\cos \phi k_x k_z + \sin \phi k_y k_z), \quad (1.75)$$

$$\hat{k}_z^2 = k_z^2 + \sin^2 \theta (\cos^2 \phi k_x^2 + \sin^2 \phi k_y^2 - k_z^2 + \sin 2\phi k_x k_y) - \sin 2\theta (\cos \phi k_x k_z + \sin \phi k_y k_z). \quad (1.76)$$

Também temos que:

$$\hat{k}_r^2 + \hat{k}_z^2 = k_r^2 + k_z^2. \quad (1.77)$$

Substituindo e aplicando a rotação dada por (1.74) nas equações (1.72) e (1.73) e depois de algumas manipulações algébricas, obtemos as relações de dispersão para meios com anisotropia TTI para as ondas  $P$  e  $SV$ . As relações de dispersão para o caso 2D são dadas por:

$$\begin{aligned} \omega^2 = v_{p0}^2 \left\{ k_x^2 + k_z^2 + (2\epsilon \cos^4 \theta + 2\delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \frac{k_x^4}{k_x^2 + k_z^2} + (2\epsilon \sin^4 \theta + 2\delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \frac{k_z^4}{k_x^2 + k_z^2} \right. \\ \left. + (-4\epsilon \sin 2\theta \cos^2 \theta + \delta \sin 4\theta) \frac{k_x^3 k_z}{k_x^2 + k_z^2} + (-4\epsilon \sin 2\theta \sin^2 \theta - \delta \sin 4\theta) \frac{k_x k_z^3}{k_x^2 + k_z^2} \right. \\ \left. + (3\epsilon \sin^2 2\theta - \delta \sin^2 2\theta + 2\delta \cos^2 2\theta) \frac{k_x^2 k_z^2}{k_x^2 + k_z^2} \right\}, \quad (1.78) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega^2 = v_{p0}^2 \left\{ \frac{v_{s0}^2}{v_{p0}^2} (k_x^2 + k_z^2) + (\epsilon - \delta) \left[ 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \frac{k_x^4}{k_x^2 + k_z^2} + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \frac{k_z^4}{k_x^2 + k_z^2} + \sin 4\theta \frac{k_x^3 k_z}{k_x^2 + k_z^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \sin 4\theta \frac{k_x k_z^3}{k_x^2 + k_z^2} + (\cos^2 2\theta + \cos 4\theta) \frac{k_x^2 k_z^2}{k_x^2 + k_z^2} \right] \right\}. \quad (1.79) \end{aligned}$$

onde as equações (1.78) e (1.79) representam equações de onda para os campos  $P$  e  $SV$ , respectivamente.

#### 1.4.6 Equações Acopladas para Meios com Anisotropia TTI de Zhou et al. (2006b)

Zhou et al. (2006a) deduziram sistemas de equações acopladas para meios com anisotropia VTI. Em Zhou et al. (2006b) se apresenta um sistema de equações acopladas para meios com anisotropia TTI, partindo da equação de Tsvankin (2001) (equação (1.64)), e considerando que  $SV = 0$  (Alkhalifah, 2000).

O sistema de equações acopladas obtidas por Zhou et al. (2006b) ainda tem o problema da presença da onda  $SV$ . A onda  $SV$  aparece nos campos  $p$  e  $q$ , como se pode ver na Figura (1.6), mas sua energia fica mais concentrada no campo  $q$ . Numa migração com este sistema de equações só pode se levar em consideração o campo  $p$  (Zhou et al., 2006b), mas com o risco de ter artefatos na imagem sísmica migrada. As equações apresentadas por Zhou et al. (2006b) são dadas por:

$$\frac{1}{v_{p0}^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - (1 + 2\delta)Hp - H_0p = (1 + 2\delta)Hq, \quad (1.80)$$

$$\frac{1}{v_{p0}^2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - 2(\epsilon - \delta)Hq = 2(\epsilon - \delta)Hp, \quad (1.81)$$

Com os operadores diferenciais  $H$  e  $H_0$  definidos como:

$$H = \cos^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sin^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \sin 2\phi \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}, \quad (1.82)$$

$$H_0 = \sin^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \cos^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \sin 2\phi \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}. \quad (1.83)$$

A Figura (1.6) mostra a resposta impulsiva dos campos de onda  $p$  e  $q$  a partir das equações (1.80) e (1.81), respectivamente.

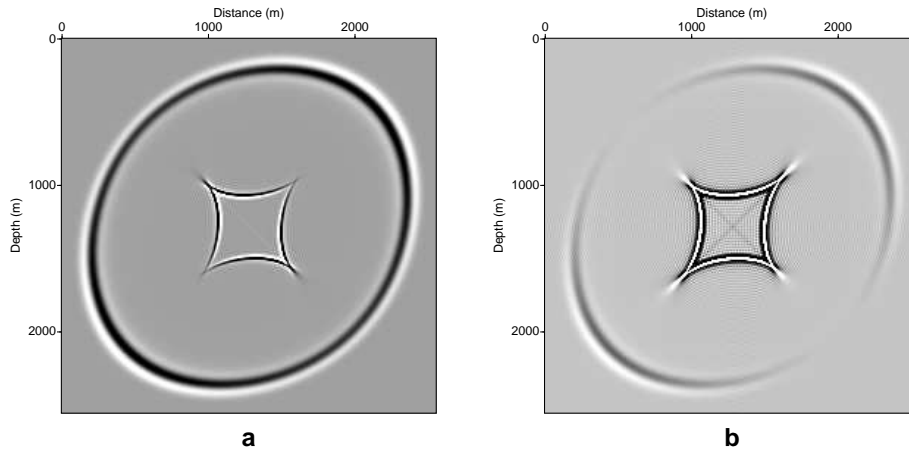


Figura 1.6: Resposta impulsiva dos campos de onda (a)  $p$  e (b)  $q$ , considerando o meio com  $\epsilon = 0.2$ ,  $\delta = 0.1$  e  $\phi = 45$  (Zhou et al., 2006b).

## 1.5 Migração Reversa no Tempo (RTM)

A migração reversa no tempo é definida como uma técnica que permite posicionar os refletores de uma forma mais precisa. Tendo como base o modelo do refletor explosivo e a solução numérica da equação de onda acústica, esse método foi proposto inicialmente para seções

zero-offset (Kosloff e Baysal, 1983; Baysal et al., 1983). A migração RTM foi estendida para dados não empilhados, utilizando o conceito de condição de imagem proposto por Claerbout (1971), onde a correlação do campo de onda da fonte e dos receptores é aplicada para formar a imagem do refletor nos pontos onde os campos convergem no tempo e no espaço, gerando uma resposta de amplitude máxima (Figura 1.7).

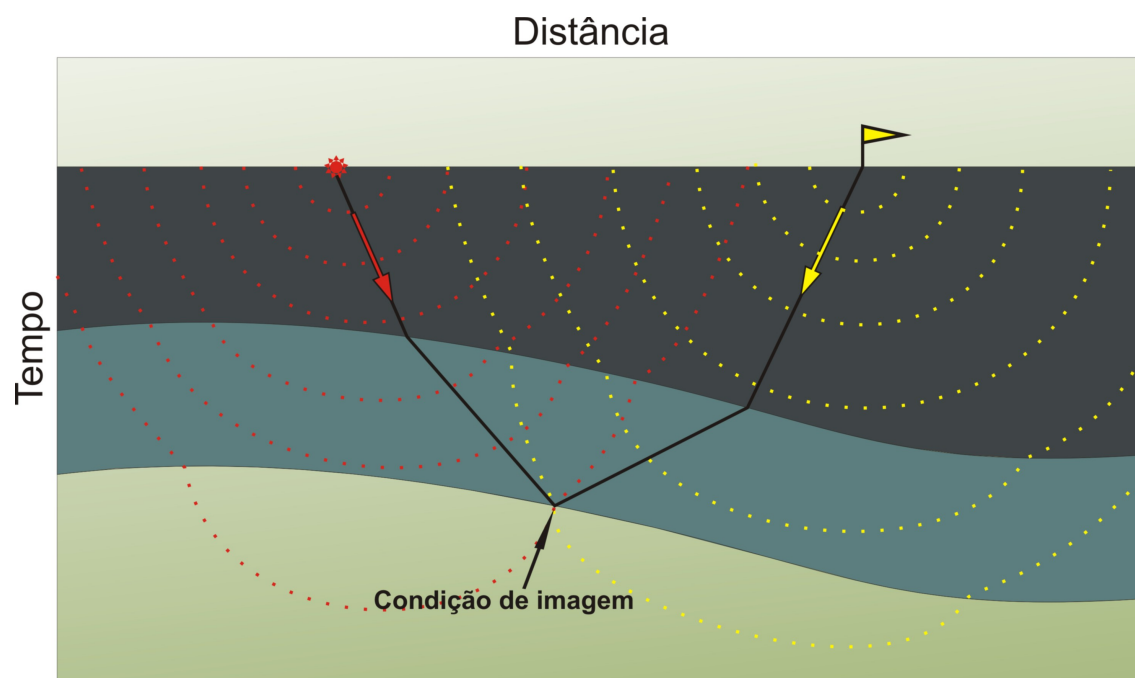


Figura 1.7: Esquema do campo de onda da fonte ou propagação (vermelho) e do receptor ou depropagação (amarelo), quando os dois campos de onda coincidem no tempo e é formada a condição de imagem para um ponto do refletor.

A migração reversa no tempo pode ser resumida em 3 etapas:

1. Modelagem da propagação da fonte com a equação completa da onda,
2. Depropagação do campo de onda registrado com a equação completa da onda,
3. Aplicação da condição de imagem.

Para calcular o campo reverso ou campo depropagado, para o caso acústico, partimos da seguinte equação de onda:

$$\frac{\partial^2 P(\bar{x}, t)}{\partial t^2} = c^2(\bar{x}) \nabla^2 P(\bar{x}, t) \quad (1.84)$$

onde  $c(\bar{x})$  é a velocidade de propagação,  $\bar{x} = (x, y, z)$ , e  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

A equação (1.84) pode ser reescrita de forma mais simples, usando o operador diferencial  $L$ , na forma:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -L^2 P \quad (1.85)$$

onde  $L^2 = -c^2 \nabla^2$ . Para a solução desta equação, partimos de um campo inicial  $P_0$  e da derivada do campo avaliado no tempo:

$$P_0 = P(\bar{x}, t)|_{t=0},$$

$$\dot{P} = \frac{\partial P(x, t)}{\partial t}|_{t=0}.$$

Tendo em conta as condições anteriores, para a solução da equação de onda, obtemos a seguinte expressão:

$$P(\bar{x}, t) = \cos(Lt)P_0 + \frac{1}{L} \sin(Lt)\dot{P}_0 \quad (1.86)$$

Para obter os campos de onda por extrapolação direta e reversa no tempo, escrevemos a equação (1.86) na seguinte forma:

$$P(\bar{x}, t + \Delta t) = \cos[L(t + \Delta t)] P_0 + \frac{1}{L} \sin[L(t + \Delta t)] \dot{P}_0, \quad (1.87)$$

$$P(\bar{x}, t - \Delta t) = \cos[L(t - \Delta t)] P_0 + \frac{1}{L} \sin[L(t - \Delta t)] \dot{P}_0. \quad (1.88)$$

Somando as equações (1.87) e (1.88), obtemos a seguinte expressão:

$$P(\bar{x}, t + \Delta t) + P(\bar{x}, t - \Delta t) = 2 \cos(L\Delta t) P_t. \quad (1.89)$$

Se expandimos a função coseno por série de Taylor, da seguinte forma:

$$\cos(L\Delta t) = 1 - \frac{(L\Delta t)^2}{2!} + \frac{(L\Delta t)^4}{4!} - \dots,$$

e tomando a aproximação de segunda ordem, obtemos as seguintes expressões para o campo extrapolado na direção direta e reversa no tempo, respectivamente:

$$P(x, t + \Delta t) = 2P(x, t) - P(x, t - \Delta t) + c^2(x)\Delta t^2 \nabla^2 P(x, t) + S(x, t) \quad (1.90)$$

$$P(x, t - \Delta t) = 2P(x, t) - P(x, t + \Delta t) + c^2(x)\nabla^2 P(x, t) \quad (1.91)$$

onde  $S(x, t)$  é a função fonte, incluída para gerar o campo de onda, para a modelagem direta.

### 1.5.1 Diferenças Finitas

As diferenças finitas é uma das técnicas mais usadas na implementação computacional da equação de onda, devido à sua vantagem em custo computacional, mas para implementá-la é

necessário ter um critério de estabilidade adequado para o bom funcionamento do algoritmo. Dependendo da exatidão que se deseja é possível usar diferentes ordens de aproximação com diferenças finitas, as quais podem ser de primeira, segunda, terceira, quarta ordem, etc. Entretanto, o importante é ter em conta que cada vez que precisamos aumentar a ordem da aproximação, para resolver a equação de onda com diferenças finitas, devemos avaliar o critério de estabilidade do método para assim garantir que os resultados representem de forma mais precisa a realidade da propagação da onda no meio.

Para fazer a computação numérica estável, através de esquemas de diferenças finitas explícitas, o intervalo de tempo é normalmente pequeno e deve satisfazer uma condição de estabilidade. De acordo com Lines et al. (1999), a condição de estabilidade para o RTM isotrópico é dado por:

$$\Delta t \leq \frac{\min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)}{v_{max}} \frac{2}{\sqrt{a}}, \quad (1.92)$$

onde

$$a = \sum (|W_x| + |W_y| + |W_z|),$$

e  $|W_x|$ , por exemplo, é a soma dos valores absolutos dos coeficientes da aproximação de diferenças finitas (FD) de ordem M em  $x$  e  $v_{max}$  é a máxima velocidade no modelo.

Usando a aproximação FD de segunda ordem, onde  $W_x = W_z = W_y = [1, -2, 1]$ ,  $a = 12$  e temos que, no caso 3D, a condição de estabilidade é dada por:

$$\Delta t \leq \frac{\min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)}{v_{max}} \frac{2}{\sqrt{12}}.$$

Para esquemas FD de quarta ordem, considerando  $W_x = \frac{1}{12}(-1, 16, -30, 16, -1)$  e tendo  $a = 16$ , assim:

$$\Delta t \leq \frac{\min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)}{v_{max}} \frac{2}{\sqrt{16}}.$$

Finalmente, para a aproximação de FD de sexta ordem, considerando  $W_x = \frac{1}{180}(2, -27, 270, -490, 270, -27, 2)$  e tendo  $a = 18,4$ , obtém-se:

$$\Delta t \leq \frac{\min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)}{v_{max}} \frac{2}{\sqrt{18,4}}.$$

A condição de estabilidade para meios VTI com RTM é similarmente derivada (Jin et al., 2010) como:

$$a = \sum \frac{1}{3} \left[ |W_x| + |W_y| + |W_z| (2 + 4\epsilon + \sqrt{1 + 2\delta}) \right], \quad (1.93)$$

onde  $\epsilon$  e  $\delta$  são os parâmetros de Thomsen.

## 1.6 Método de Expansão Rápida (REM)

Tendo em vista a equação (1.84) e usando-se uma forma conveniente de calcular a derivada segunda no tempo, por exemplo, a aproximação por diferenças finitas de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 P(t)}{\partial t^2} \approx \frac{1}{\Delta t^2} [P(t + \Delta t) - 2P(t) + P(t - \Delta t)] , \quad (1.94)$$

que resulta da soma de duas series de Taylor e é expressa por:

$$\frac{1}{\Delta t^2} [P(t + \Delta t) - 2P(t) + P(t - \Delta t)] = 2 \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P(t)}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^2}{4!} \frac{\partial^4 P(t)}{\partial t^4} + \frac{\Delta t^4}{6!} \frac{\partial^6 P(t)}{\partial t^6} + \dots \right] . \quad (1.95)$$

Desta forma, os termos de segunda e ordens superiores das derivadas no tempo  $\frac{\partial^{2n} P}{\partial t^{2n}}$  são agora substituídos pelo operador  $A^2 = -c^2 \nabla^2$ , ficando a equação (1.95) da seguinte forma:

$$\frac{1}{\Delta t^2} [P(t + \Delta t) - 2P(t) + P(t - \Delta t)] = 2 \left[ -\frac{1}{2} A^2 + \frac{\Delta t^2}{4!} A^4 - \frac{\Delta t^4}{6!} A^6 + \dots \right] P(t) . \quad (1.96)$$

Como o termo do lado direito da equação (1.96) representa a aproximação da função coseno, então, temos que:

$$2 [\cos(A\Delta t) - 1] = 2 \left[ -\frac{\Delta t^2}{2} A^2 + \frac{\Delta t^4}{4!} A^4 - \frac{\Delta t^6}{6!} A^6 + \dots \right] \quad (1.97)$$

Assim, a solução formal para o campo de onda  $P(t + \Delta t)$  é obtida da equação (1.95), para melhorar a aproximação no tempo, e é dada por:

$$P(t + \Delta t) = -P(t - \Delta t) + 2 \cos(A\Delta t) P(t) . \quad (1.98)$$

A função coseno pode ser aproximada por uma série finita com polinômios modificados de Chebychev como foi usado por Tal-Ezer et al. (1987)

$$\cos(A\Delta t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k} J_{2k}(R\Delta t) Q_{2k} \left( \frac{iA}{R} \right) , \quad (1.99)$$

onde  $C_{2k} = 1$  para  $k = 0$  e  $C_{2k} = 2$  para  $k > 0$ .  $R$  é escolhido como o maior autovalor da matriz associada à equação da onda (1.84).  $J_k$  é a função de Bessel de primeira ordem e  $Q_k$  é o polinômio de Chebychev modificado de ordem  $k$  que satisfaz a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned} Q_0 \left( \frac{iA}{R} \right) &= I \quad (\text{operador identidade}) \\ Q_2 \left( \frac{iA}{R} \right) &= I - \frac{A^2}{R^2} \\ Q_{2k+2} \left( \frac{iA}{R} \right) &= \left( -\frac{4A^2}{R} + 2I \right) Q_{2k} - Q_{2k-2} \end{aligned}$$

Para o caso 3D, considerando o caso onde a velocidade é constante, o valor de  $R$  é  $R = \pi v \sqrt{1/\Delta x^2 + 1/\Delta y^2 + 1/\Delta z^2}$ . Em geral,  $v$  tem que ser substituída por  $v_{max}$ , a maior velocidade no modelo.

O somatório na expressão (1.99) converge exponencialmente para  $k > R\Delta t$ , portanto a somatória pode ser truncada usando um valor de  $k$  um pouco maior que  $R\Delta t$  (Tal-Ezer et al., 1987).

# 2

## Relação de dispersão para meios com anisotropia TTI

Neste capítulo apresentamos o desenvolvimento de duas novas equações de onda para meios com anisotropia TTI, utilizando aproximações em séries de Taylor e Padé para a raiz quadrada presente na equação derivada por Tsvankin (1996). Partindo da equação (1.64) (Tsvankin, 1996) e considerando as seguintes expressões para o seno e cosseno,

$$\sin^2 \theta = \frac{v^2(\theta, \phi)k_x^2}{\omega^2},$$
$$\cos^2 \theta = \frac{v^2(\theta, \phi)k_z^2}{\omega^2}.$$

onde  $v(\theta, \phi)$  é a velocidade de fase e  $k_x$  e  $k_z$  são os números de onda em  $x$  e  $z$ , respectivamente. Tomando  $f = 1$ , substituindo os termos anteriores na equação (1.64) tem-se que:

$$v_{p0}^4(\epsilon - \delta) \left( \frac{1}{2} \sin^2 2\phi k_z^4 - \sin 4\phi k_x k_z^3 - \sin^2 2\phi k_x^2 k_z^2 - 2 \cos^2 2\phi k_x^2 k_z^2 + \sin 4\phi k_x^3 k_z + \frac{1}{2} \sin^2 2\phi k_x^4 \right) + v_{p0}^2 \omega^2 [2\epsilon \sin 2\phi k_x k_z - (1 + 2\epsilon \sin^2 \phi)k_z^2 - (1 + 2\epsilon \cos^2 \phi)k_x^2] + \omega^4 = 0. \quad (2.1)$$

Esta equação também foi apresentada no trabalho de Zhang et al. (2005). A equação (2.1) é uma equação de quarta ordem no tempo apresentando a mesma dificuldade com a presença do artefato da onda SV ("efeito diamante"), como mostrado nos trabalhos de Du et al. (2008) e Zhou et al. (2006a).

No intuito de fazer uma análise das raízes da equação (2.1), introduzimos os termos  $a$  e  $b$  em função de  $\epsilon$ ,  $\delta$ ,  $\phi$ ,  $k_x$  e  $k_z$ , na forma:

$$a = (\epsilon - \delta) \left( \frac{1}{2} \sin^2 2\phi k_z^4 - \sin 4\phi k_x k_z^3 - \sin^2 2\phi k_x^2 k_z^2 + 2 \cos^2 2\phi k_x^2 k_z^2 + \sin 4\phi k_x^3 k_z + \frac{1}{2} \sin^2 2\phi k_x^4 \right),$$



$$b = 2\epsilon \sin 2\phi k_x k_z - (1 + 2\epsilon \sin^2 \phi) k_z^2 - (1 + 2\epsilon \cos^2 \phi) k_x^2.$$

A equação (2.1) pode ser ainda simplificada na seguinte forma:

$$av_{p0}^4 + bv_{p0}^2 \omega^2 + \omega^4 = 0. \quad (2.2)$$

Observa-se que somente as potências pares de  $\omega$  aparecem na equação (2.2) e podemos ainda simplificá-la com a troca da variável  $x$  por  $\omega^2$ , ou seja:

$$av_{p0}^4 + bv_{p0}^2 x + x^2 = 0. \quad (2.3)$$

Da equação (2.2) e levando em consideração a simplificação da potência de  $\omega$  na equação (2.3) obtemos as seguintes raízes:

$$\omega_1 = + \sqrt{\frac{-bv_{p0}^2 + \sqrt{b^2 v_{p0}^4 - 4av_{p0}^4}}{2}}, \quad (2.4)$$

$$\omega_2 = - \sqrt{\frac{-bv_{p0}^2 + \sqrt{b^2 v_{p0}^4 - 4av_{p0}^4}}{2}}, \quad (2.5)$$

$$\omega_3 = + \sqrt{\frac{-bv_{p0}^2 - \sqrt{b^2 v_{p0}^4 - 4av_{p0}^4}}{2}}, \quad (2.6)$$

$$\omega_4 = - \sqrt{\frac{-bv_{p0}^2 - \sqrt{b^2 v_{p0}^4 - 4av_{p0}^4}}{2}}. \quad (2.7)$$

A expressão introduzida para  $a$  torna-se zero no caso de anisotropia elíptica, isto é,  $\epsilon = \delta$ , fazendo com que as frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sejam sempre nulas, o que fisicamente é improvável, também fazendo uma análise para o fator  $b$ , podemos ver que este fator é sempre negativo.

Em relação às raízes  $\omega_3$  e  $\omega_4$ , pode-se mostrar que ambas permitem ser reduzidas ao caso VTI, quando  $\phi = 0$ . Portanto, selecionamos as expressões de  $\omega_3$  e  $\omega_4$ , pois estas conseguem modelar de forma correta a propagação da onda P em meios com anisotropia TTI.

$$\omega_3^2 = \omega_4^2 = -\frac{v_{p0}^2 b}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{4a}{b^2}} \right] \quad (2.8)$$

## 2.1 Aproximação por série de Taylor

Fazendo a expansão por série de Taylor da raiz quadrada da equação (2.8), tomando-se os termos até segunda ordem:

$$(1 - X)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}X + \dots,$$

a equação (2.8) fica da seguinte forma:

$$\omega^2 = v_{p0}^2 \left( \frac{a - b^2}{b} \right), \quad (2.9)$$

e agora substituindo os termos  $a$  e  $b$  na equação (2.9), obtemos a seguinte expressão:

$$\omega^2 = v_{p0}^2 \left\{ (\epsilon - \delta) \left[ \frac{1}{2} \sin^2 2\phi k_z^4 - \sin 4\phi k_x k_z^3 - \sin^2 2\phi k_x^2 k_z^2 + 2 \cos^2 2\phi k_x^2 k_z^2 + \sin 4\phi k_x^3 k_z + \frac{1}{2} \sin^2 2\phi k_x^4 \right] - \left[ 2\epsilon \sin 2\phi k_x k_z - (1 + 2\epsilon \sin^2 \phi) k_z^2 - (1 + 2\epsilon \cos^2 \phi) k_x^2 \right]^2 \right\} / [2\epsilon \sin 2\phi k_x k_z - (1 + 2\epsilon \sin^2 \phi) k_z^2 - (1 + 2\epsilon \cos^2 \phi) k_x^2]. \quad (2.10)$$

Assim, a equação (2.10) é uma equação de segunda ordem no tempo e se reduz ao caso VTI, como esperado da expressão de  $\omega_3$ , para  $\phi = 0$  (Barrera et al., 2011), ou seja:

$$\omega^2 = v_{p0}^2 \left\{ \frac{-2(\epsilon - \delta) k_x^2 k_z^2}{k_z^2 + k_x^2 + 2\epsilon k_x^2} + (k_z^2 + k_x^2 + 2\epsilon k_x^2) \right\}, \quad (2.11)$$

Se comparamos a equação (2.11) com a equação (1.59) (Pestana et al., 2011), vemos que são exatamente iguais, provando assim que nossa nova equação para meios TTI é redutível a meios com anisotropia VTI.

A expressão a seguir em função da velocidade de fase  $v(\theta, \phi)$  é:

$$\frac{v^2(\theta, \phi)}{v_{p0}^2} = 1 + 2\epsilon \sin^2 \theta - \frac{2(\epsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{1 + 2\epsilon \sin^2 \theta}. \quad (2.12)$$

que é a expressão VTI deduzida da equação (2.10).

## 2.2 Aproximação por série de Muir e aproximação de Padé

Partindo da equação (2.8), fazemos uma aproximação da raiz quadrada usando a expansão de Padé:

$$(1 - X)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + \dots \approx 1 - \frac{\frac{1}{2}X}{1 - \frac{1}{4}X},$$

e obtemos uma nova relação de dispersão para meios com anisotropia TTI:

$$\omega^2 = v_{p0}^2 b \left( \frac{2a - b^2}{b^2 - a} \right). \quad (2.13)$$

Agora, fazendo  $\phi = 0$ , em  $a$  e  $b$ , e usando as seguintes relações para  $k_x$  e  $k_z$ :

$$k_x = \frac{\omega \sin \theta}{v(\theta, \phi)},$$

$$k_z = \frac{\omega \cos \theta}{v(\theta, \phi)}.$$

obtemos a seguinte equação para meios com anisotropia VTI em função da velocidade de fase, que é dada por:

$$\frac{v^2(\theta, \phi)}{v_{p0}^2} = (1 + 2\epsilon \sin^2 \theta) \left( 1 - \frac{2(\epsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(1 + 2\epsilon \sin^2 \theta)^2 - 2(\epsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \right). \quad (2.14)$$

A relação de dispersão (2.13) também pode ser obtida usando uma aproximação por série de Muir para a raiz quadrada da equação (2.8). A aproximação de Muir, ou de frações continuadas, geralmente inicia com  $R_0 = 1$ , e a aproximação da raiz em forma geral é:

$$R_\infty = 1 - \frac{X}{1 + R_\infty},$$

Temos então a seguinte relação para aproximar a raiz quadrada, iniciando com  $R_0 = 1$ :

$$R_{n+1} = 1 - \frac{X}{1 + R_n}. \quad (2.15)$$

Usando (2.15), para  $R_2$ , temos que:

$$R_2 = 1 - \frac{\frac{1}{2}X}{1 - \frac{1}{4}X}, \quad (2.16)$$

Aplicando a relação (2.16) na equação (2.8) obtemos também a equação (2.13) para meios com anisotropia TTI.

## 2.3 Análise das equações da velocidade de fase em meios TTI

Considerando os tipos de anisotropia fraca ( $\epsilon$  e  $\delta < 0,25$ ) e forte ( $\epsilon$  e  $\delta > 0,25$ ) (Thomsen, 1986), vamos analisar qual das equações de velocidade de fase apresentam uma melhor aproximação à equação de Tsvankin, variando as propriedades físicas do meio representadas por  $\epsilon$ ,  $\delta$  e variando  $\phi$  de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ .

Nas Figuras (2.1), (2.2), (2.3) e (2.4) a linha vermelha corresponde à equação da velocidade de fase de Tsvankin (1996), a linha verde corresponde à equação da velocidade de fase da onda  $P$  de Zhan et al. (2012), a linha azul é da equação de velocidade de fase de Alkhalifah (2000), a linha rosa corresponde à aproximação de anisotropia fraca, a linha azul claro corresponde à equação (2.12) e a linha amarela corresponde à equação (2.14).

Vamos considerar a seguir o caso em que  $\epsilon$  é maior que  $\delta$ , com anisotropia fraca ( $\epsilon$  e  $\delta < 0,25$ )

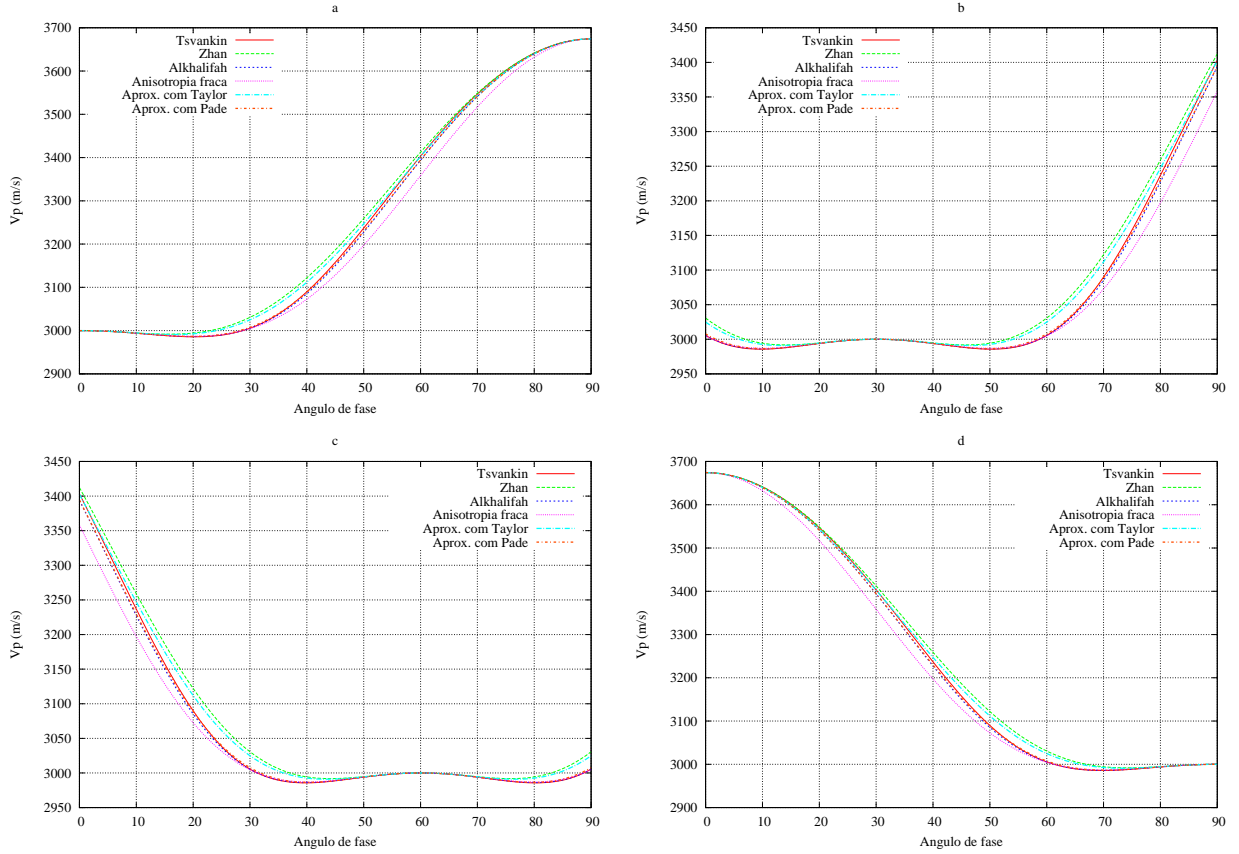


Figura 2.1: Velocidade de fase para meios TTI com ângulos dos eixos de simetria de (a)  $0^\circ$ , (b)  $30^\circ$ , (c)  $60^\circ$ , (d)  $90^\circ$  para a onda  $P$ . A velocidade do meio para a onda  $P$  é de  $3000$  m/s e da onda  $SV$  de  $1500$  m/s na direção paralela ao eixo de simetria com os parâmetros de Thomsen  $\epsilon = 0,25$  e  $\delta = -0,075$ .

Da Figura (2.1) podemos notar que das equações de velocidade de fase da onda  $P$ , para meios com anisotropia TTI, a equação com aproximação por serie de Padé (equação (2.14)) é mais precisa, ficando assim mais próxima ao gráfico da equação de Tsvankin (1996), mas a equação de Alkhalifah (2000) pode ser considerada também uma boa aproximação, devido à proximidade deste gráfico com a aproximação por série de Padé. A aproximação de anisotropia fraca de primeira ordem tem uma boa aproximação à de Tsvankin (1996). As equações de Zhan et al. (2012) e a aproximação com série de Taylor (equação (2.12)) também oferecem boas aproximações à exata, mas são as mais afastadas em relação às outras aproximações.

Agora vamos considerar que  $\delta$  é maior que  $\epsilon$ :

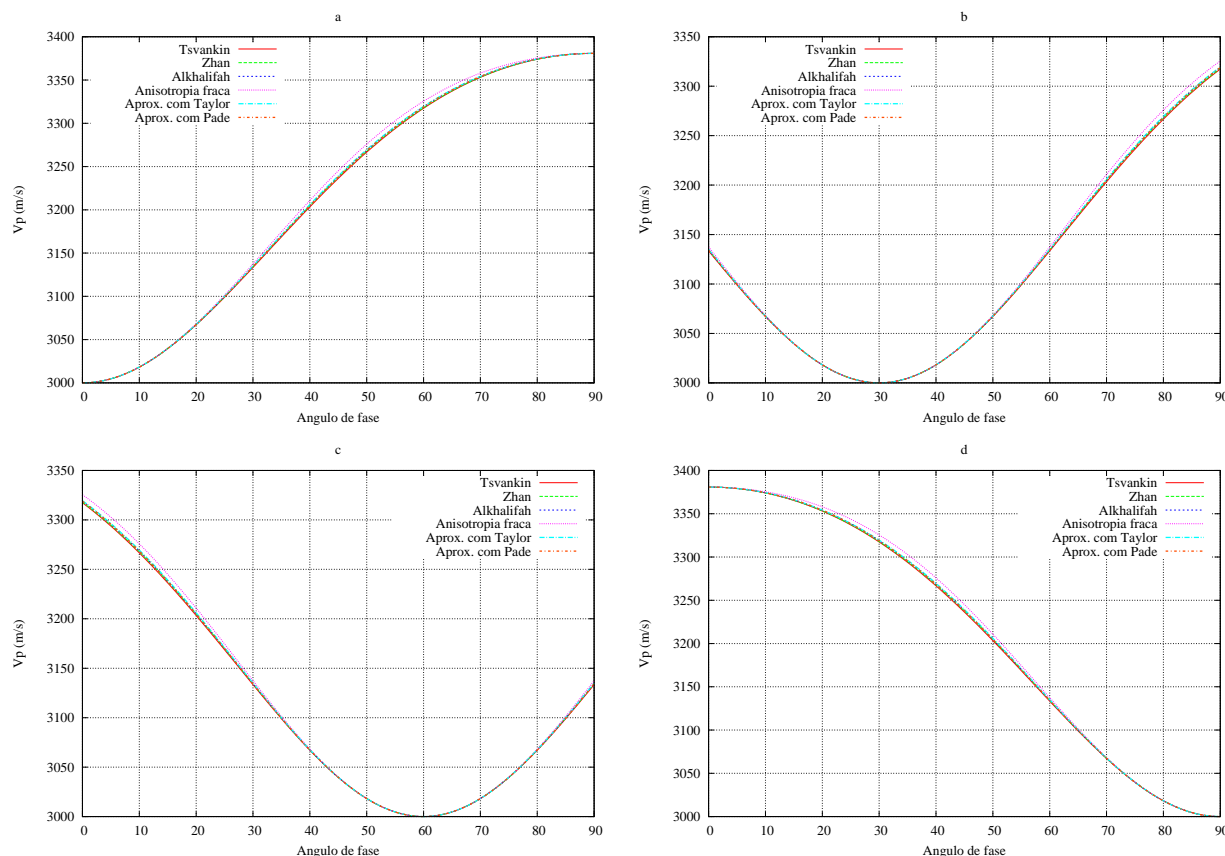


Figura 2.2: Velocidade de fase para meios TTI com ângulos dos eixos de simetria de (a)  $0^\circ$ , (b)  $30^\circ$ , (c)  $60^\circ$ , (d)  $90^\circ$  para a onda  $P$ . A velocidade do meio para a onda  $P$  é de 3000 m/s e da onda  $SV$  de 1500 m/s na direção paralela ao eixo de simetria com os parâmetros de Thomsen  $\epsilon = 0,135$  e  $\delta = 0,205$ .

Da Figura (2.2) podemos observar que das equações de velocidade de fase da onda  $P$ , para meios com anisotropia TTI, as aproximações de Alkhalifah (2000), de anisotropia fraca, de Zhan et al. (2012) e as aproximações por série de Taylor e Padé ficam bastante próximas da equação exata de Tsvankin (1996). Esta figura foi feita com valores de  $\epsilon$  e  $\delta$  positivos e menores que 0,25.

Nas Figuras (2.3) e (2.4) vamos considerar meios com anisotropia forte ( $\epsilon$  e  $\delta > 2,5$ ) para analisar o comportamento das equações da velocidade de fase para meios com anisotropia TTI, comparando os resultados com a equação de Tsvankin (1996).

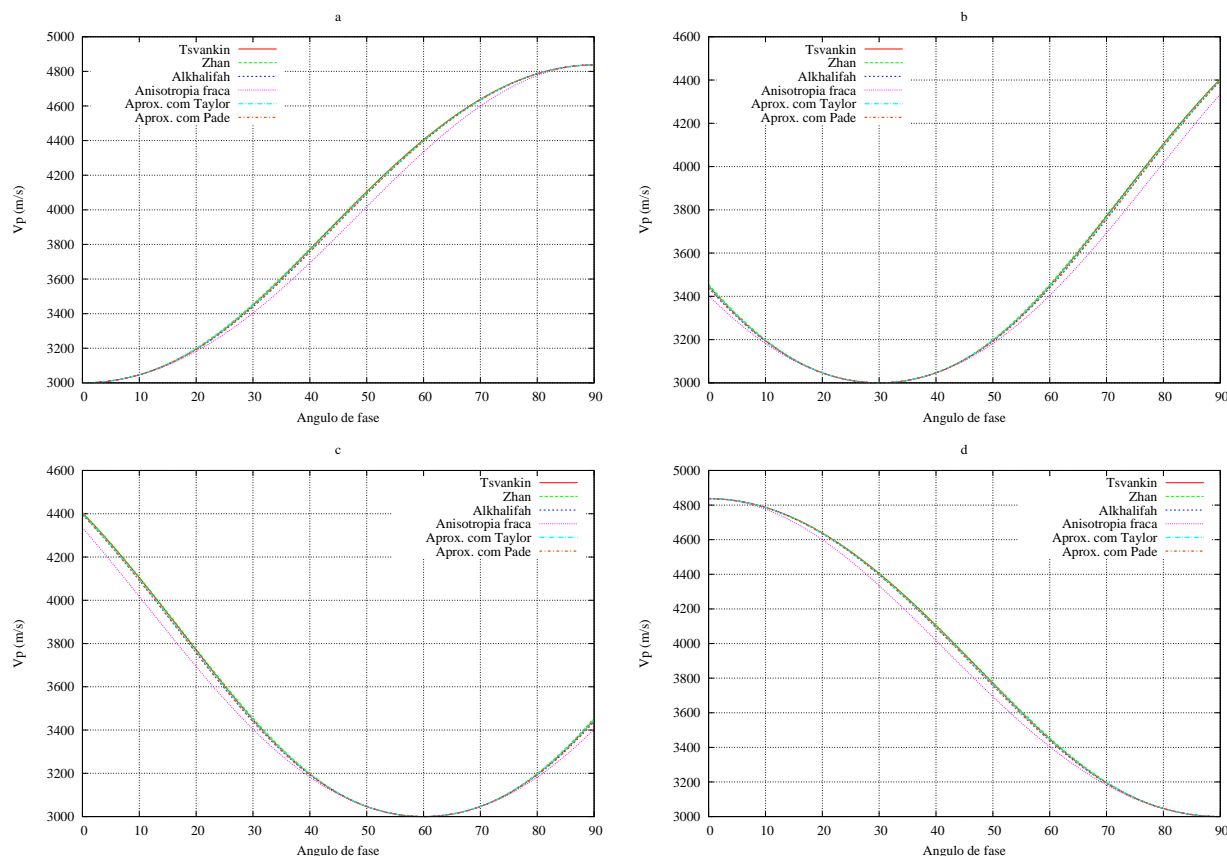


Figura 2.3: Velocidade de fase para meios TTI com ângulos dos eixos de simetria de (a)  $0^\circ$ , (b)  $30^\circ$ , (c)  $60^\circ$ , (d)  $90^\circ$  para a onda  $P$ . A velocidade do meio para a onda  $P$  é de 3000 m/s e da onda  $SV$  de 1500 m/s na direção paralela ao eixo de simetria com os parâmetros de Thomsen  $\epsilon = 0,8$  e  $\delta = 0,5$ .

Da Figura (2.3) fica claro que a aproximação de anisotropia fraca não pode ser considerada neste tipo de situações, por seu grande afastamento do resultado apresentado pela equação exata de Tsvankin (1996), comparada com as outras aproximações. A aproximação por série de Taylor é a mais próxima à equação de Tsvankin (1996), pois numericamente é melhor que as outras aproximações. A aproximação de Zhan et al. (2012) também pode ser considerada uma boa aproximação pelo fato de ter uma grande proximidade à equação exata e as aproximações de Alkhalifah (2000) e por série de Padé são as mais afastadas.

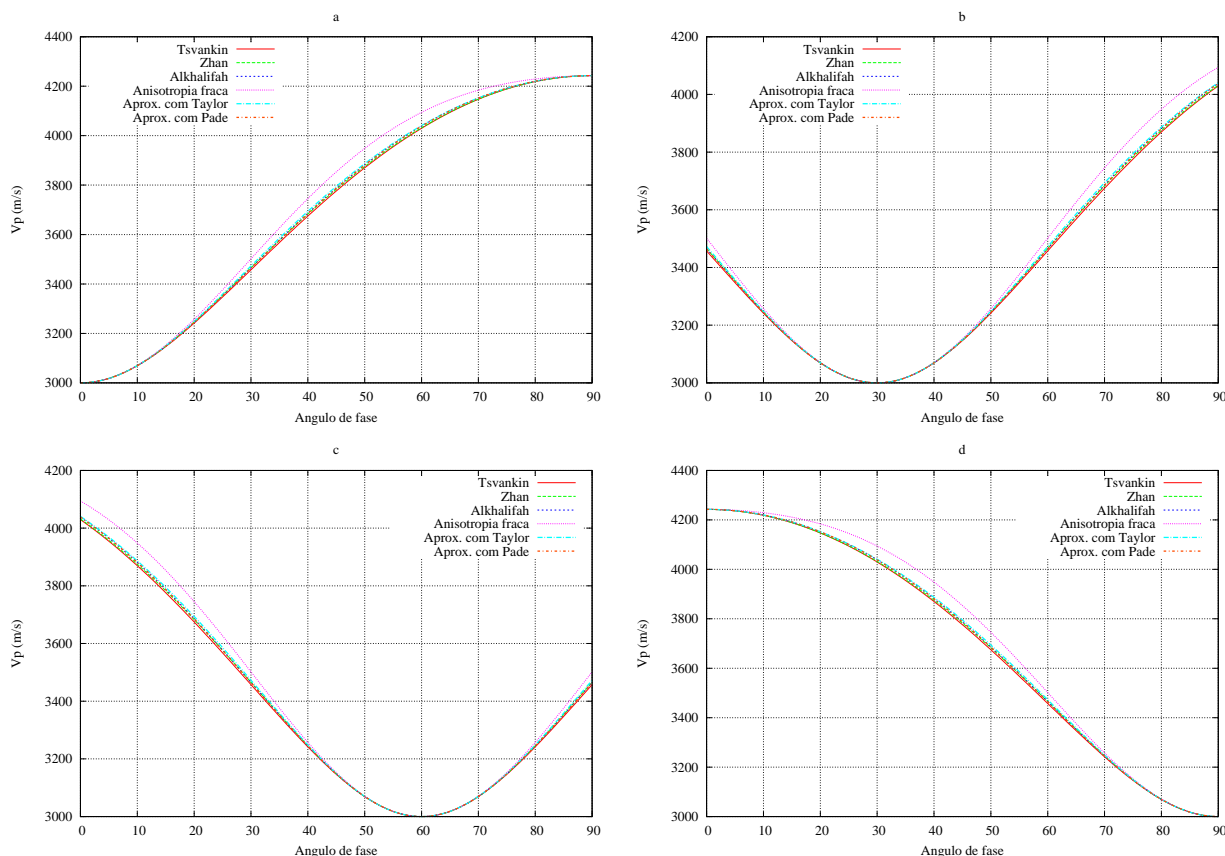


Figura 2.4: Velocidade de fase para meios TTI com ângulos dos eixos de simetria de (a)  $0^\circ$ , (b)  $30^\circ$ , (c)  $60^\circ$ , (d)  $90^\circ$  para a onda  $P$ . A velocidade do meio para a onda  $P$  é de 3000 m/s e da onda  $SV$  de 1500 m/s na direção paralela ao eixo de simetria com os parâmetros de Thomsen  $\epsilon = 0,5$  e  $\delta = 0,8$ .

Na Figura (2.4), onde é considerado que  $\epsilon < \delta$ , caso de anisotropia forte, vemos que no comportamento numérico das equações de velocidade de fase as aproximações de Alkhalifah (2000) e por série de Padé são as mais próximas à de Tsvankin (1996) na maior parte da variação do ângulo de fase. A aproximação de Zhan et al. (2012) fica mais próxima à exata em poucas regiões do gráfico. A aproximação de anisotropia fraca é mostrada também neste gráfico, entretanto não é uma boa opção para meios com anisotropia forte.

# 3

## Modelagem numérica

A modelagem numérica utilizando as equações apresentadas no capítulo 2 são implementadas através do Método de Expansão Rápida (em inglês, REM). O método REM, para migração, foi proposto por Pestana e Stoffa (2010) e consiste em obter uma solução exata para a equação da onda no tempo, utilizando-se a expansão em polinômios de Chebychev (Tal-Ezer et al., 1987). Através do REM, o campo de onda pode ser calculado, a partir do campo de onda registrado, para qualquer tempo de propagação e com qualquer ordem de aproximação para a derivada segunda no tempo. Neste método as derivadas espaciais são calculadas pelo método pseudo-espectral.

Neste capítulo apresentamos os resultados numéricos obtidos para o caso de anisotropia TTI, onde fizemos a modelagem através das novas equações propostas neste trabalho (2.10 e 2.13) e de suas respectivas aproximações no denominador (equações 3.1 e 3.2). A aproximação no denominador das equações (2.10) e (2.13) permitem facilitar sua implementação computacional, mas o custo de fazer isso é que se afastam numericamente da equação de Tsvankin (1996).

Fazendo um modelo simples de uma cunha e duas camadas com contrastes altos de anisotropia, testamos o comportamento das equações acopladas para meios com anisotropia TTI (Zhou et al., 2006b) e a equação TTI (3.1), proposta em este trabalho, e verificamos a estabilidade que oferecem as equações não acopladas em meios com diferentes combinações de  $\epsilon$  e  $\delta$ , junto com valores altos de  $\phi$ .



### 3.1 Aproximação no denominador da equação da onda P em meios TTI

A equação de onda para meios com anisotropia TTI (2.10) pode ser modelada normalmente em meios com  $v_{p0}$ ,  $\epsilon$ ,  $\delta$  e  $\phi$  constantes. Quando consideramos um meio com variação dos parâmetros acima, temos que aproximar o denominador de forma que o mesmo só dependa do número de onda, como pode se ver nas equações (3.1) e (3.2). Isto porque computacionalmente é mais conveniente trabalhar no domínio misto Fourier-espaço no numerador, porque facilita a solução numérica do algoritmo (Zhan et al., 2012).

Se fazemos  $\epsilon = 0$  no denominador das equações (2.10) e (2.13), obtemos as equações (3.1) e (3.2), respectivamente. Este tipo de aproximação altera a amplitude da resposta impulsiva, sem fazer mudança no posicionamento da frente de onda (Zhan et al., 2012), como podemos observar nas Figuras (3.1) e (3.2).

Para simplificar as equações (3.1) e (3.2), introduzimos os termos  $A, B, C, D, E, F, G, H$  e  $I$ , na forma:

$$A = \frac{1}{2} \sin^2 2\phi, \quad B = \sin 4\phi, \quad C = \sin^2 2\phi, \quad D = 2 \cos^2 2\phi, \quad E = \sin 4\phi, \quad F = \frac{1}{2} \sin^2 2\phi$$

$$G = 2\epsilon \sin 2\phi, \quad H = 1 + 2\epsilon \sin^2 \phi, \quad I = 1 + 2\epsilon \cos^2 \phi.$$

As equações (2.10) e (2.13), após a simplificação no denominador, ficam na forma:

$$\omega^2 = -v_{p0}^2 \left\{ [B(\epsilon - \delta) - G]k_x k_z^3 + [C(\epsilon - \delta) - D(\epsilon - \delta) + H + I]k_x^2 k_z^2 + [H - A(\epsilon - \delta)]k_x^4 \right. \\ \left. - [E(\epsilon - \delta) + G]k_x^3 k_z + [I - F(\epsilon - \delta)]k_x^4 \right\} / (k_x^2 + k_z^2), \quad (3.1)$$

e

$$\omega^2 = -v_{p0}^2 \left\{ [G - (\epsilon - \delta)(AG + BH)]k_x k_z^5 - [H - (\epsilon - \delta)AH]k_z^6 - [2H + I \right. \\ - (\epsilon - \delta)(AI + BG + H(D - C))]k_x^2 k_z^4 + [2G - (\epsilon - \delta)(BI + G(D - C) - EG)]k_x^3 k_z^3 \\ \left. - [H + 2I + (\epsilon - \delta)(EG - I(D - C) - FH)]k_x^4 k_z^2 + [G - (\epsilon - \delta)(FG - EI)]k_x^5 k_z \right. \\ \left. - [I - (\epsilon - \delta)FI]k_x^6 \right\} / (k_z^4 + 2k_x^2 k_z^2 + k_x^4). \quad (3.2)$$

Considerando as equações (3.1) e (3.2), para um meio com os parâmetros constantes, notamos que a forma da resposta impulsiva se conserva ao fazer a aproximação no denominador, comparadas com a resposta impulsiva das equações originais. A diferença na amplitude parece ser mais predominante que a posição da frente de onda das respostas impulsivas. Na

Figura (3.1) temos as respostas impulsivas usando as equações (2.10) e (3.1) e também a diferença entre estas respostas.

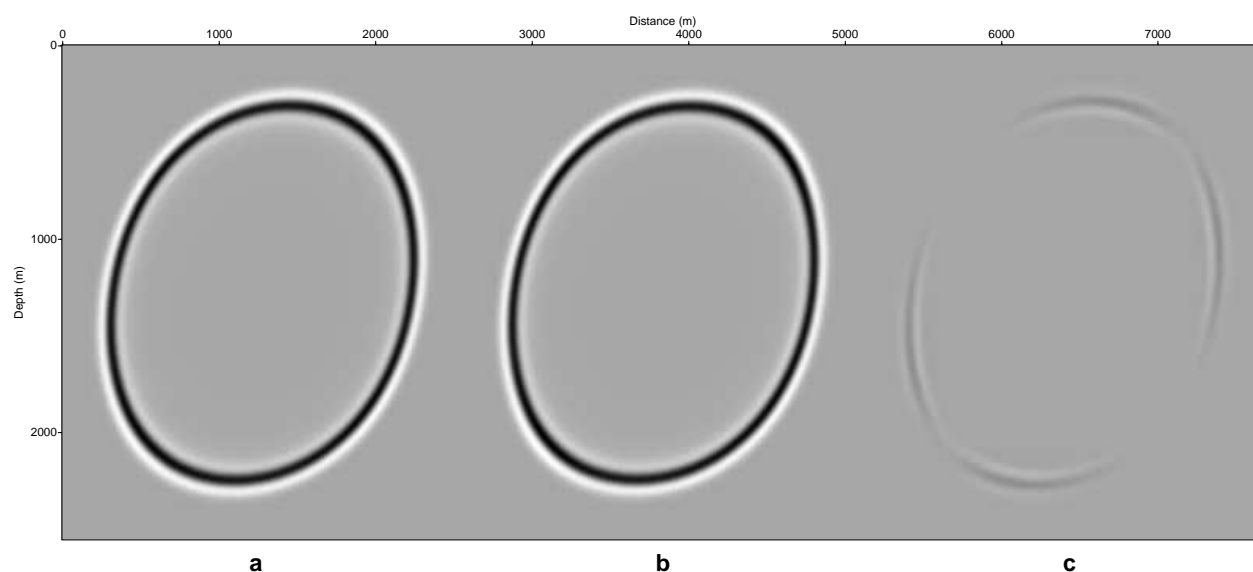


Figura 3.1: Respostas impulsivas com  $\epsilon = 0.25$ ,  $\delta = 0.25$  e  $\phi = 45^\circ$ , (a) é o TTI da equação (2.10), (b) é o TTI da equação (3.1) e (c) diferença entre (a) e (b).

Na Figura (3.2) temos também a diferença das respostas impulsivas usando as equações (2.13) e (3.2).

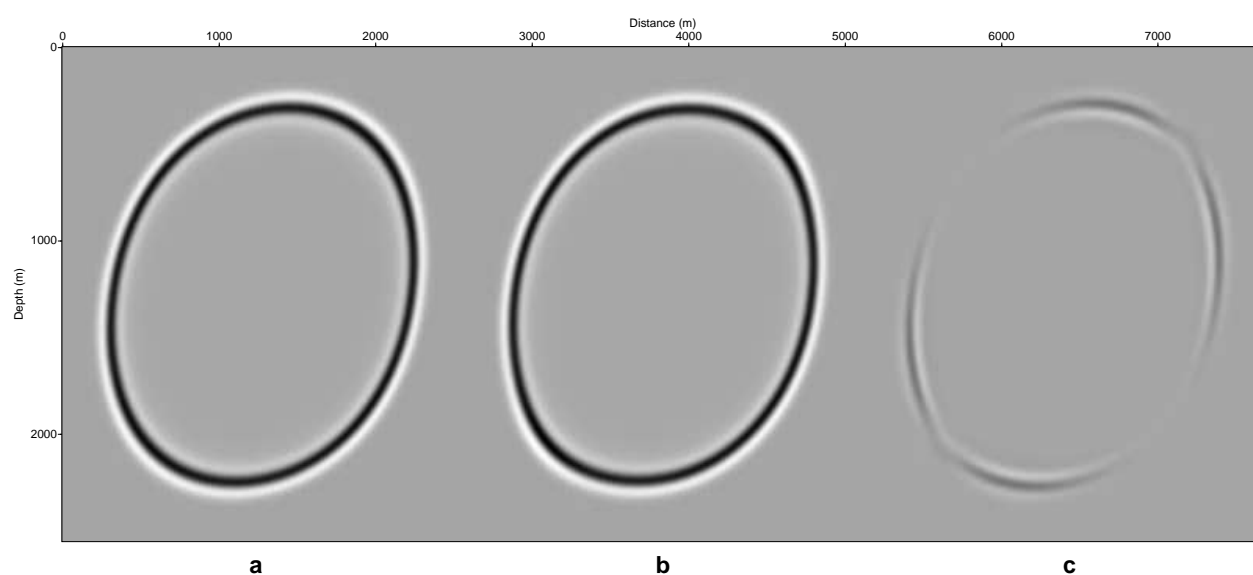


Figura 3.2: Respostas impulsivas com  $\epsilon = 0.25$ ,  $\delta = 0.25$  e  $\phi = 45^\circ$ , (a) é o TTI da equação (2.13), (b) é o TTI da equação (3.2) e (c) diferença entre (a) e (b).

Nas Figura (3.3) e (3.4) mostramos as respostas das equações (3.1) (linha rosa) e (3.2) (linha azul claro) em função da velocidade de fase, ao fazer aproximação no denominador para os casos de anisotropia fraca e forte, respectivamente. As equações propostas neste trabalho (2.10) (linha verde) e (2.13) (linha azul escuro), são comparadas com a equação de Tsvankin (1996) (1.64) (linha vermelha).

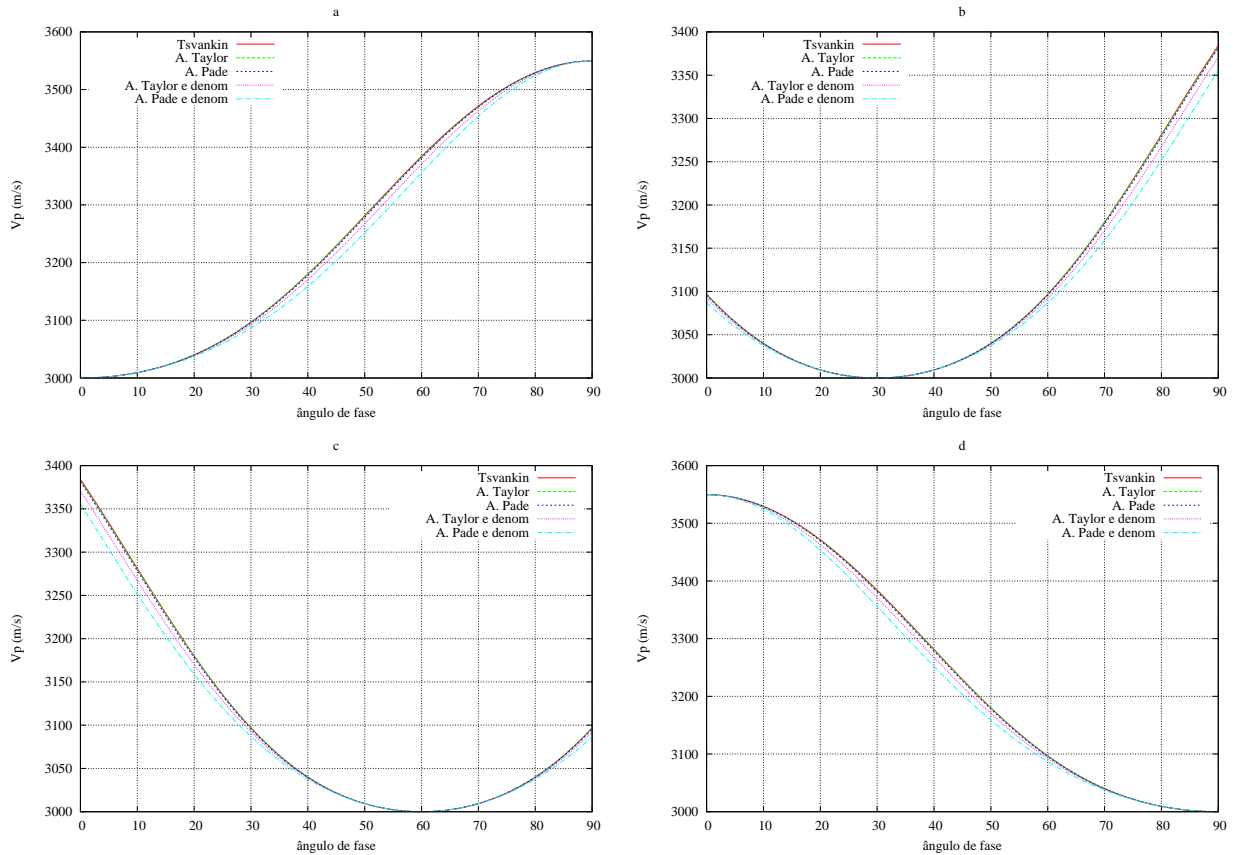


Figura 3.3: Velocidade de fase para meios TTI com ângulos dos eixos de simetria de (a)  $0^\circ$ , (b)  $30^\circ$ , (c)  $60^\circ$  e (d)  $90^\circ$  para a onda P. A velocidade do meio para a onda P é de 3000 m/s e da onda SV de 1500 m/s na direção paralela ao eixo de simetria com os parâmetros de Thomsen  $\epsilon = 0.2$  e  $\delta = 0.1$ .

Da figura acima pode-se ver que quando é feita a aproximação no denominador com  $\epsilon = 0$  nas equações (2.10) e (2.13), essas equações tendem a ficar mais afastadas da equação de Tsvankin (1996).

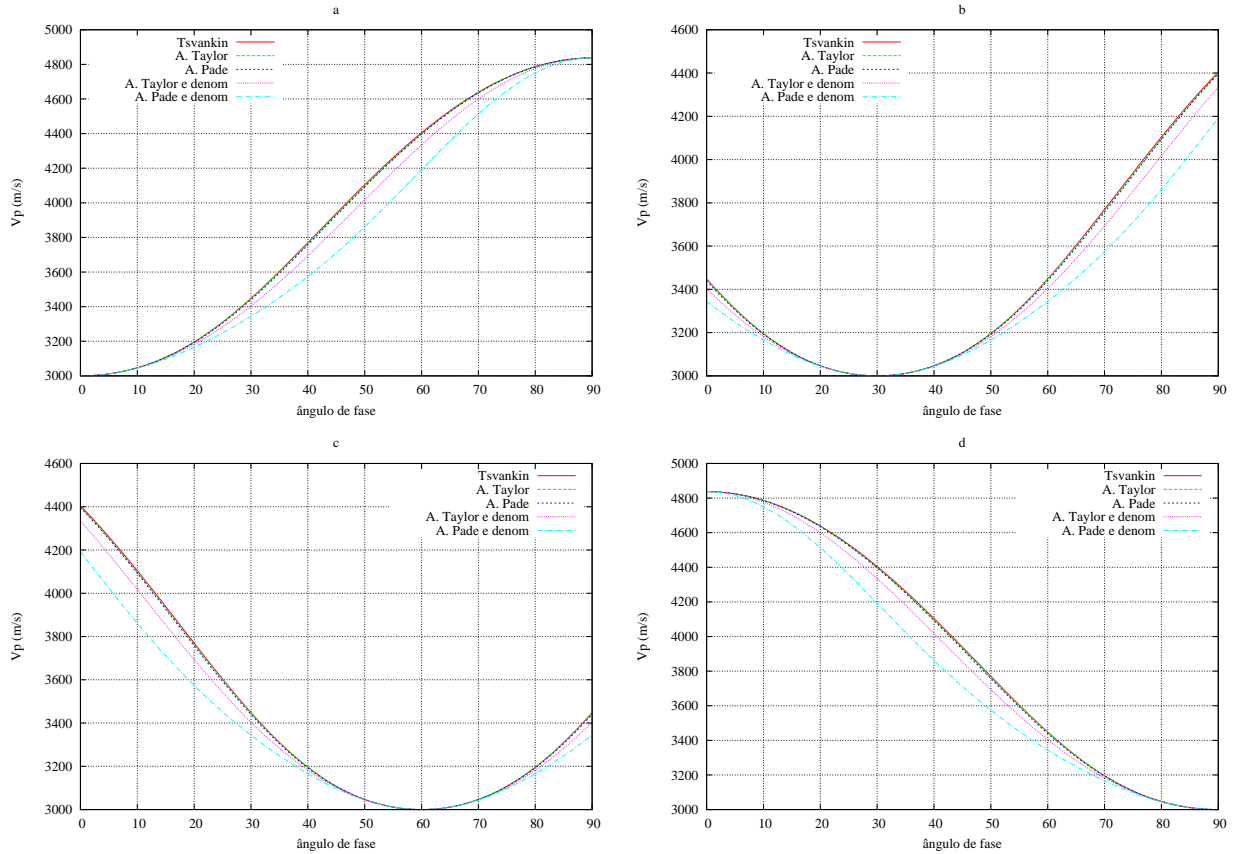


Figura 3.4: Velocidade de fase para meios TTI com ângulos dos eixos de simetria de (a)  $0^\circ$ , (b)  $30^\circ$ , (c)  $60^\circ$  e (d)  $90^\circ$  para a onda P. A velocidade do meio para a onda P é de 3000 m/s e da onda SV de 1500 m/s na direção paralela ao eixo de simetria com os parâmetros de Thomsen  $\epsilon = 0.8$  e  $\delta = 0.5$ .

Da Figura (3.4) notamos que quando consideramos o caso de anisotropia forte, o afastamento das equações (3.1) e (3.2) com relação à equação de Tsvankin (1996) é maior que no caso de anisotropia fraca. A diferença entre as equações (3.1) e (3.2) com (2.10) e (2.13), respectivamente, é mais importante no caso de anisotropia forte.

## 3.2 Estabilidade

Modelagem e migração baseados em equações da onda para meios com anisotropia TTI geralmente são instáveis em meios heterogêneos, especialmente em áreas onde o eixo de simetria muda abruptamente (Zhang et al., 2011). Equações de onda para meios com anisotropia TTI que conseguem separar as ondas  $P$  e  $SV$  são mais estáveis que os sistemas convencionais de equações acopladas, as quais, não conseguem separar de forma eficiente a onda  $P$  da  $SV$  e se limitam a condições de estabilidade do meio, como por exemplo  $\delta \geq \epsilon$ , onde  $\epsilon$  e  $\delta$  (Zhan

et al., 2012). Artefatos no campo de onda, a presença de derivadas espaciais mistas e fortes contrastes dos parâmetros anisotrópicos, particularmente nos eixos de simetria, parecem ser a causa da instabilidade dos algoritmos que tentam validar novas equações da onda em meios com anisotropia TTI (Zhan et al., 2012).

Yoon et al. (2010) propuseram uma alternativa para estabilizar a implementação do sistema de equações acopladas para meios com anisotropia TTI de Zhou et al. (2006b) baseado num gradiente da função  $\phi$ . O método consiste em alterar as regiões onde a instabilidade pode ocorrer, ou seja, em zonas com alto contraste de anisotropia, em especial no ângulo  $\phi$ , fazendo-se nessas regiões  $\epsilon = \delta$ , para assim tornar o algoritmo estável.

Uma causa da instabilidade pode ser a triplicação da frente de onda, que pode ser suprimida introduzindo a relação  $\sigma = V_{pz}(\epsilon - \delta)/V_{sz}$ , onde  $V_{pz}$  e  $V_{sz}$  são as velocidades das ondas  $P$  e  $S$  ao longo do eixo de simetria (Tsvankin, 2001; Fletcher et al., 2009), no lugar de grandes  $V_{sz}$ , considera  $\epsilon = \delta$  em torno dos pontos de alto gradiente nos seus eixos de simetria  $\phi$ .

Outra alternativa para estabilizar computacionalmente equações de onda acopladas foi proposta por Zhang et al. (2011), onde partindo das equações de Thomsen (1986) deriva um sistema de equações VTI que é equivalente a sua contraparte elástica. Eles introduzem um operador diferencial do tipo *self-adjoint* nas coordenadas rotacionadas para estabilizar o sistema de equações acopladas da onda acústica para meios com anisotropia TTI de Zhou et al. (2006b).

Considerando que as equações acopladas, além de precisar de tratamentos especiais na sua implementação, também tem limitações que dependem do meio. Quando o meio de propagação da onda num meio anisotrópico tem regiões onde  $\delta$  seja maior que  $\epsilon$ , as equações acopladas não são aplicadas, pelo fato de elas terem como condição numérica que  $\epsilon \geq \delta$ .

As equações separadas para as ondas  $P$  e  $SV$  em meios com anisotropia TTI são mais estáveis e podem considerar meios onde  $\delta$  seja maior que  $\epsilon$ . O problema na implementação de equações da onda  $P$  pura são suas derivadas mistas e os altos contrastes do  $\phi$ . Isso introduz uma instabilidade nos algoritmos, que segundo Zhan et al. (2012) pode se resolver aplicando um filtro corta-altas aos operadores das derivadas espaciais no domínio de Fourier.

Neste trabalho consideramos a alternativa de suavizar o campo do parâmetro  $\phi$ . Este procedimento tem a mesma eficiência que a filtragem proposta por Zhan et al. (2012) e no capítulo 4 mostramos a implementação desta metodologia no dado sintético BP-TTI.

### 3.3 Exemplo Numérico: Modelo da cunha

Para validar as equações propostas neste trabalho é necessário modelar sua propagação em meios com anisotropia TTI e avaliar seu comportamento comparando com as equações de forma acoplada. Utilizando o modelo da cunha (Figura 3.5a) mostramos o resultado da modelagem comparando a equação de forma acoplada (1.80) e a equação da onda  $P$  pura (3.1). A análise da propagação da frente do campo de onda  $P$  para os tempos 0.6s, 0.8s, 1.6s e 5.4s, no modelo da cunha.

O modelo 2D da cunha apresenta fortes contrastes em todos os parâmetros (Figura 3.5). Este modelo é muito semelhante ao proposto por Duveneck e Bakker (2011), que originalmente é feito para comparar diferentes abordagens que lidam com o problema da instabilidade em meios com anisotropia TTI. O modelo original tem uma camada isotrópica no topo, para evitar que apareçam as ondas SV, a qual não acontece originalmente na natureza e nosso algoritmo não precisa desta condição para ser estável. Neste caso decidimos não considerar a camada isotrópica no mesmo modelo.

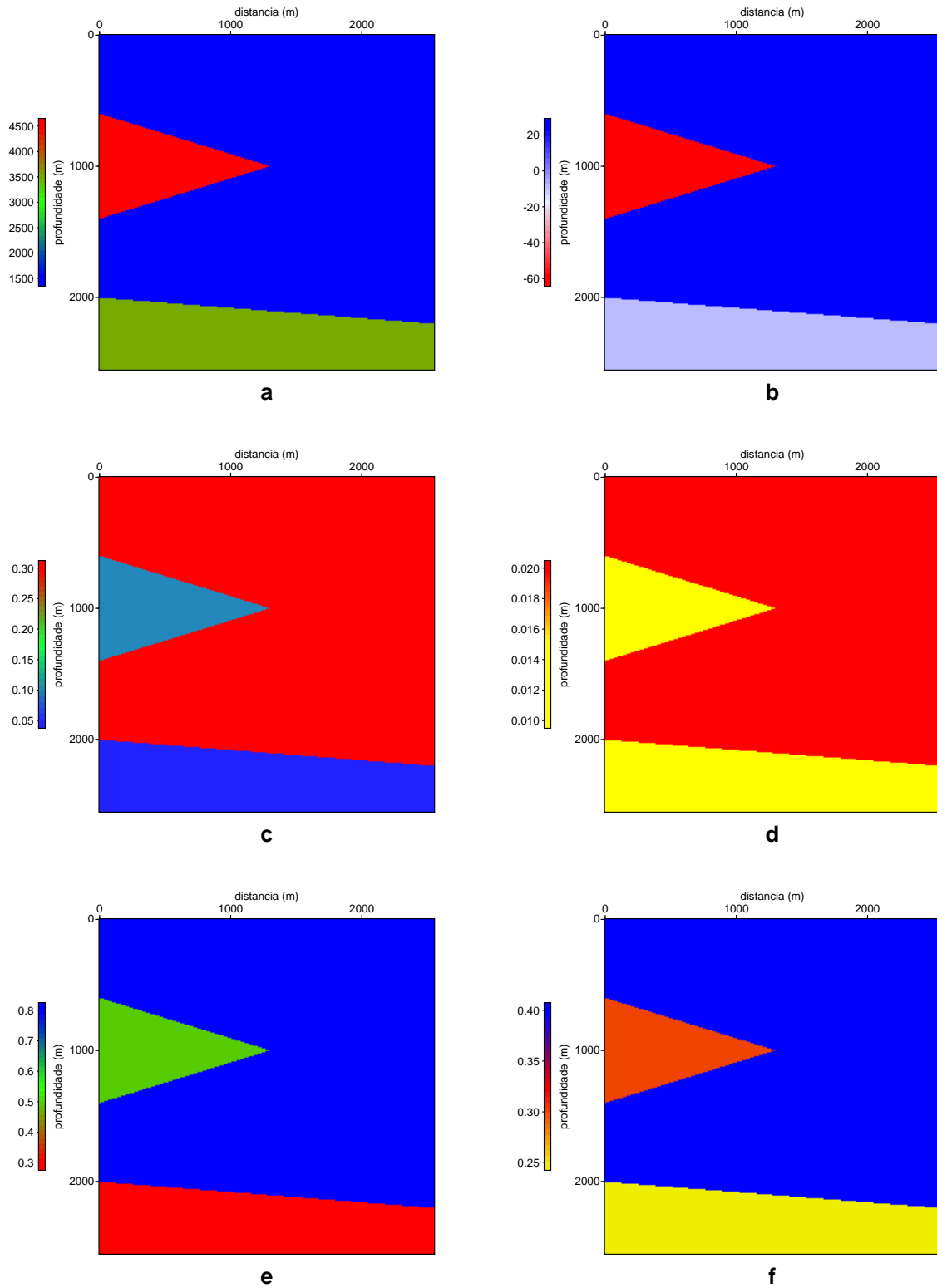


Figura 3.5: Modelo de duas camadas e uma cunha, onde (a) é o campo de velocidade (m/s), (b) é o campo de  $\theta$  ( $^\circ$ ), (c) é o campo de  $\epsilon$ , (d) é o campo de  $\delta$  e (e) e (f) são os campos de  $\epsilon$  e  $\delta$  considerando valores de anisotropia forte.

Na Figura (3.6) temos a resposta impulsiva modelada através da equação da onda acoplada para meios com anisotropia TTI (1.80), considerando o meio com anisotropia fraca. Na Figura (3.6a), no tempo 0,6s, estão presentes a onda  $P$  e o artefato devido à onda  $SV$ . Na Figura (3.6b), no tempo 0,8s, a onda  $P$  entra na primeira interface, que corresponde com a cunha do modelo, ainda com o artefato da onda  $SV$ . Na Figura (3.6c), no tempo 1,6s, a onda  $P$  está na camada inferior do modelo, também aparece a onda  $SV$ , sendo ainda estável a modelagem. Na Figura (3.6d), no tempo 5.4s, a energia da onda  $SV$  não consegue sair do modelo, reverberando e causando instabilidade.

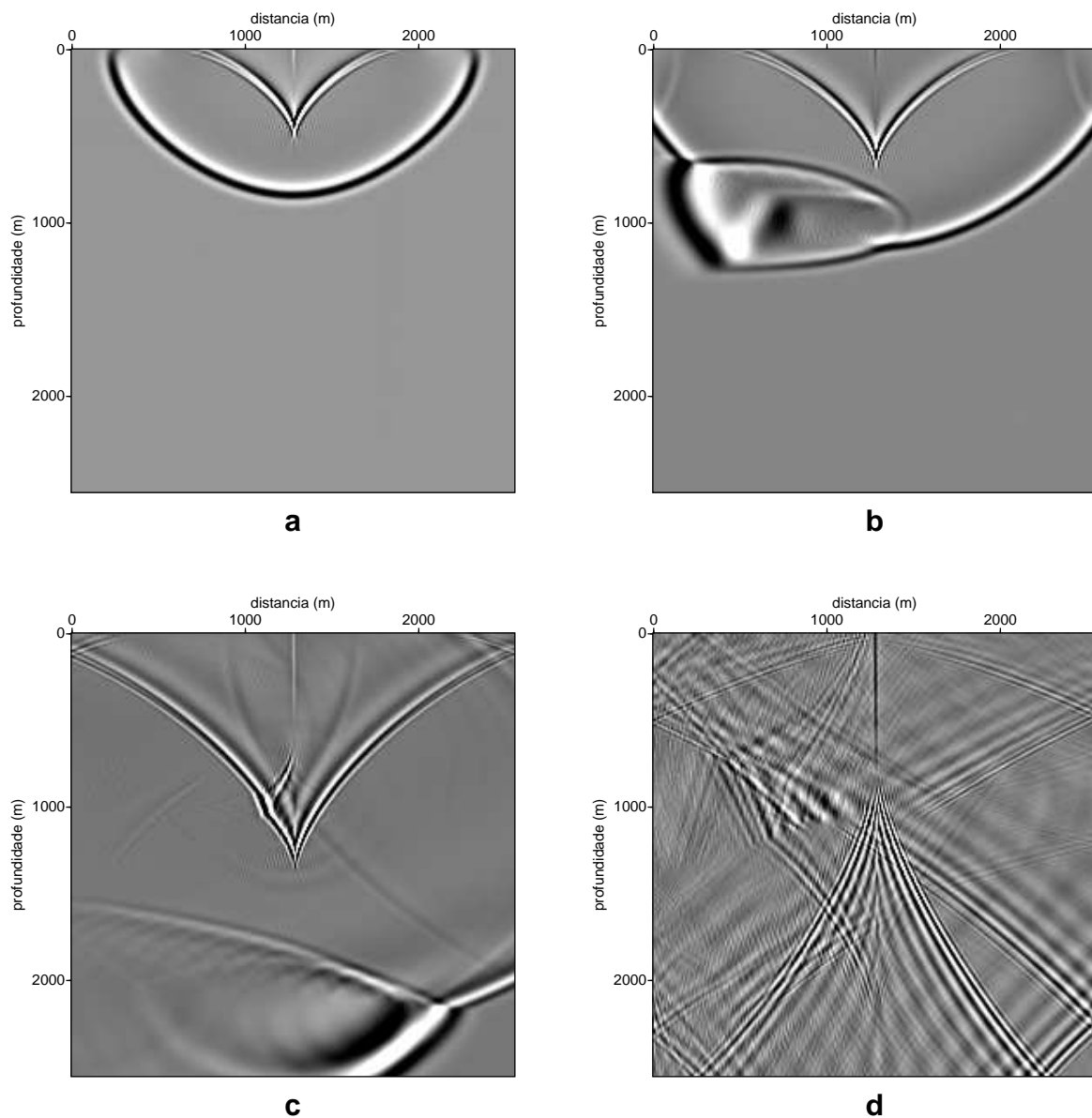


Figura 3.6: Snapshots da propagação do campo da onda da equação (1.80) considerando o meio com anisotropia fraca nos tempos (a) 0.6s, (b) 0.8s, (c) 1.6s e (d) 5.4s.



Na Figura (3.7) temos a resposta impulsiva através da modelagem da equação da onda acoplada para meios TTI (1.80). Neste caso, consideramos o meio com anisotropia forte. Na Figura (3.7a), no tempo 0.6s, a frente da onda  $P$  e o artefato da onda  $SV$  apresentam um caráter dispersivo. Na Figura (3.7b), no tempo 0.8s, notamos que a propagação da frente da onda  $P$  entra na cunha, mas com uma amplitude bastante grande. Notamos também a dispersão presente na onda  $SV$ . Na Figura (3.7c), no tempo 1.6s, a frente da onda  $P$  fica muito dispersa e o efeito da onda  $SV$  parece estar causando instabilidade. Na Figura (3.7d), no tempo 5.4s, a reverberação da onda  $SV$  faz com que a modelagem fique instável.

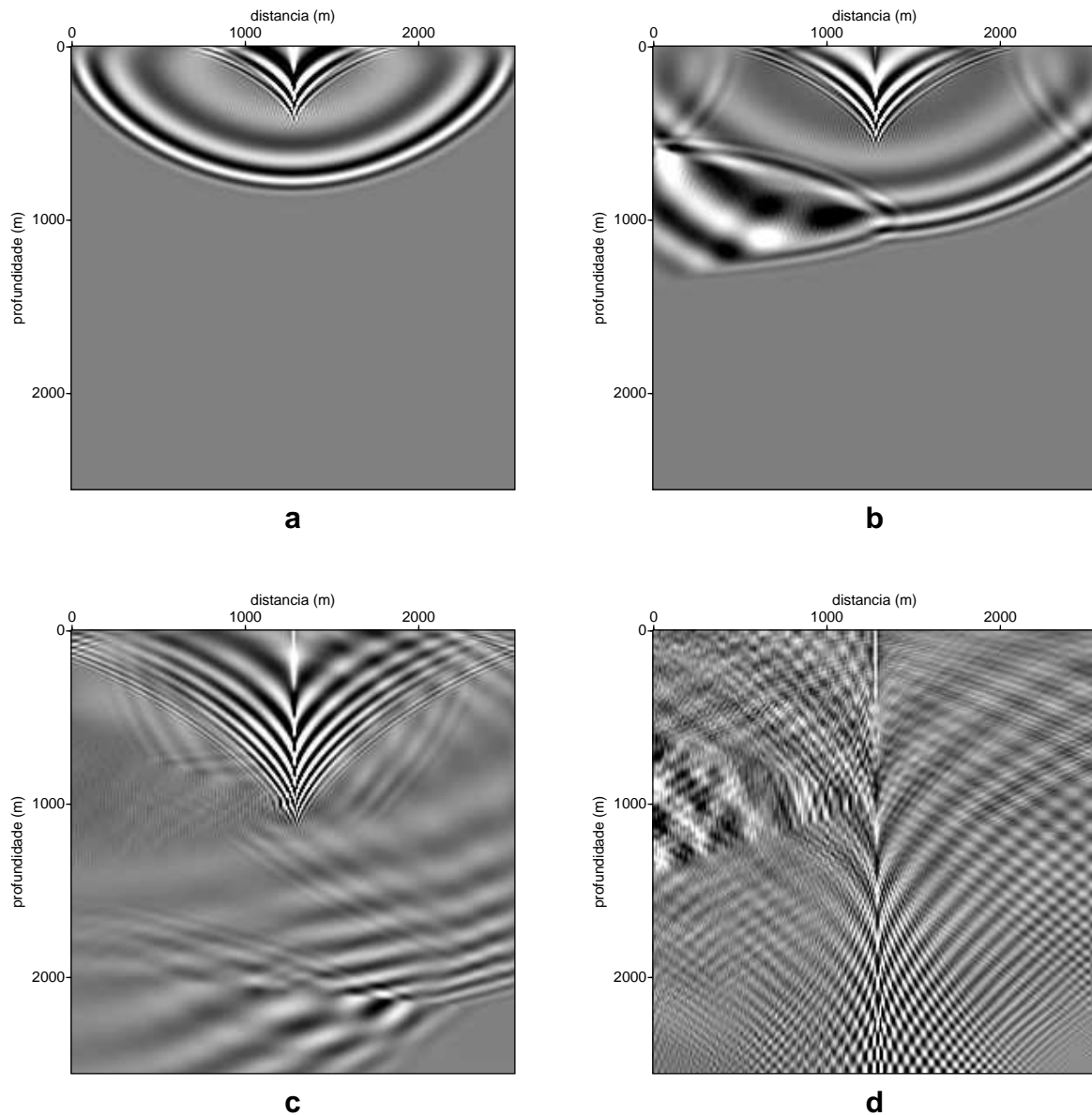


Figura 3.7: Snapshots da propagação do campo da onda da equação (1.80) considerando anisotropia forte nos tempos (a) 0.6s, (b) 0.8s, (c) 1.6s e (d) 5.4s.

Agora na Figura (3.8) temos a modelagem da onda  $P$  pura da equação (3.1), considerando o meio com anisotropia fraca ( $\epsilon > \delta$ ). Na Figura (3.8a), no tempo  $0.6s$ , notamos que a frente da onda se propaga com normalidade no modelo, mas com a grande diferença que o artefato da onda  $SV$  já não está presente, como se podia ver nas Figuras (3.6) e (3.7), usando as equações da onda acopladas. Na Figura (3.8b), no tempo  $0.8s$ , nota-se que a onda  $P$  pura entra na cunha e se propaga por ela. Na Figura (3.8c), no tempo  $1.6s$ , a onda  $P$  pura se propaga pela camada inferior do modelo e na Figura (3.8d), no tempo  $5.4s$ , a energia da onda  $P$  sai quase em sua totalidade do modelo.

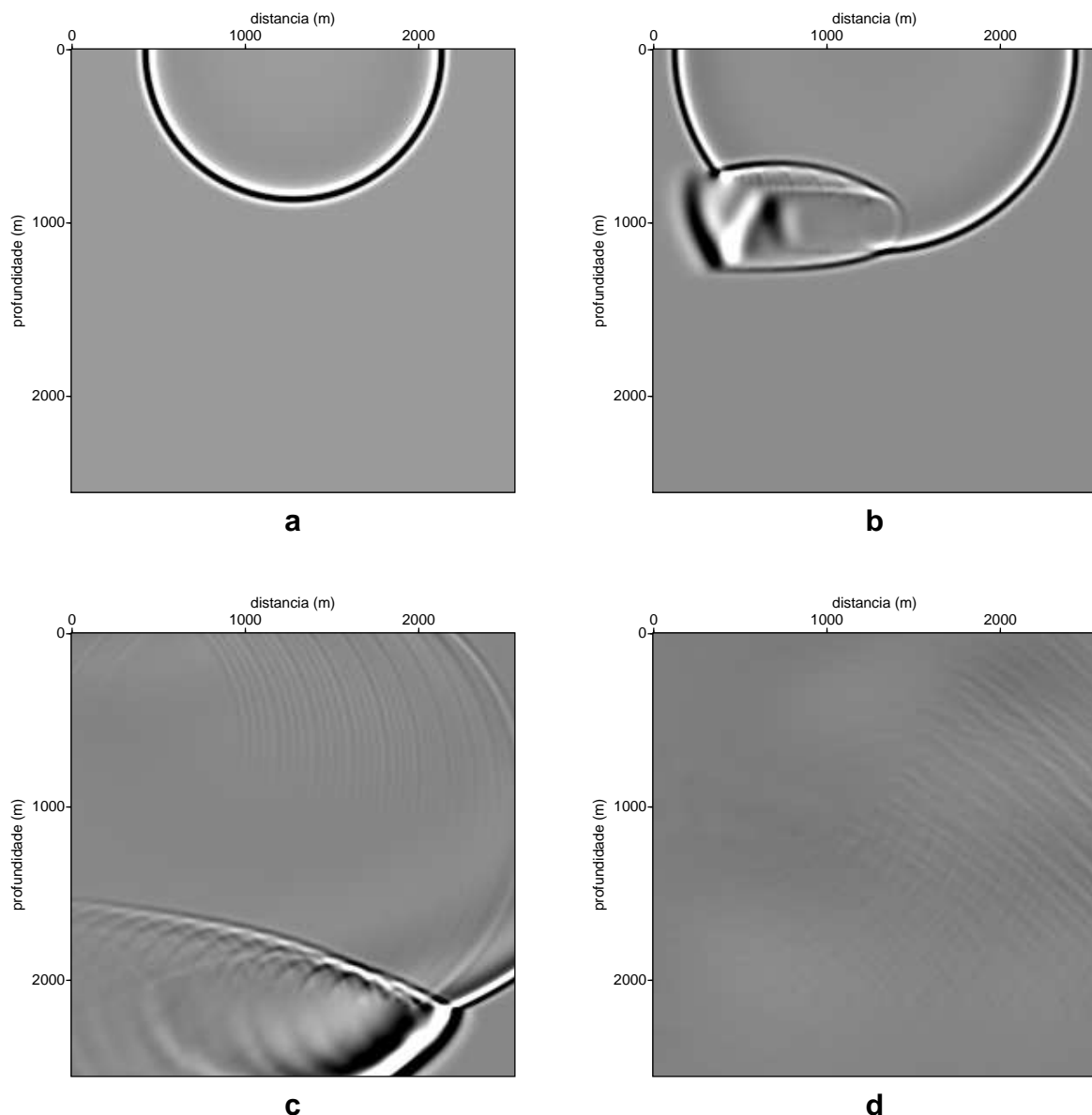


Figura 3.8: Snapshots da propagação do campo da onda da equação (3.1) considerando anisotropia fraca e  $\epsilon > \delta$ , nos tempos (a)  $0.6s$ , (b)  $0.8s$ , (c)  $1.6s$  e (d)  $5.4s$ .

Na Figura (3.9) temos a modelagem da onda  $P$  pura (equação 3.1), considerando o meio com anisotropia fraca, isto é,  $\delta > \epsilon$ . Para fazer esta modelagem, trocamos o  $\epsilon$  por o  $\delta$  e vice-versa, no modelo mostrado na Figura (3.5). Na Figura (3.9a), no tempo  $0.6s$ , a onda  $P$  se propaga pela primeira camada do modelo de forma normal. Na Figura (3.9b), no tempo  $0.8s$ , a frente da onda  $P$  entra na cunha e se propaga de forma normal. Na Figura (3.9c), no tempo  $1.6s$ , a onda  $P$  se propaga pela camada inferior do modelo. Finalmente, na Figura (3.9d), no tempo  $5.4s$ , a energia da onda  $P$  pura sai quase em sua totalidade do modelo, o que valida que a equação (3.1) é estável em meios onde  $\delta > \epsilon$ .

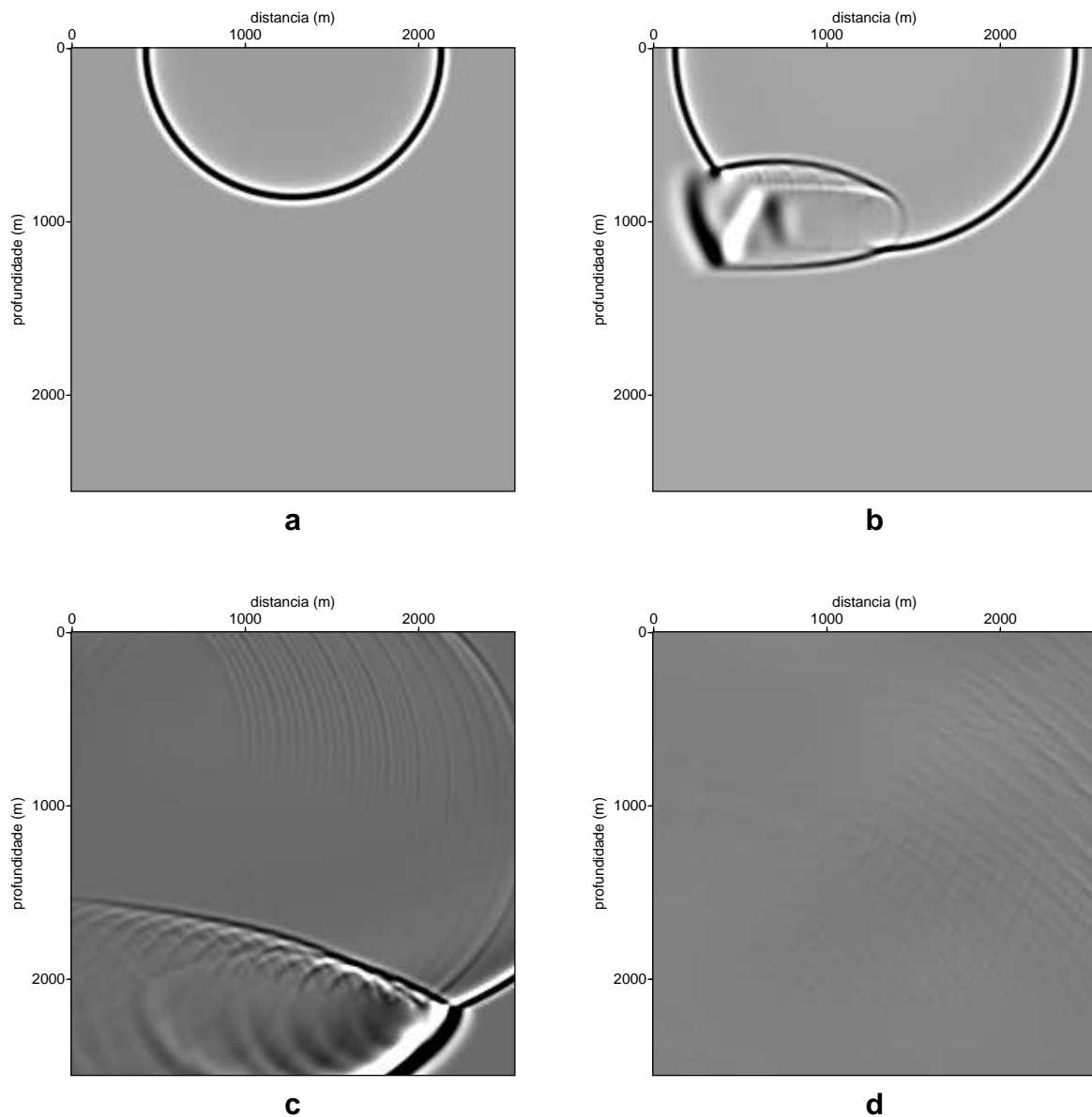


Figura 3.9: Snapshots da propagação do campo da onda da equação (3.1) considerando anisotropia fraca e  $\delta > \epsilon$ , nos tempos (a)  $0.6s$ , (b)  $0.8s$ , (c)  $1.6s$  e (d)  $5.4s$ .

Na Figura (3.10) temos a modelagem da onda  $P$  pura (equação 3.1) considerando o meio com anisotropia forte. Na Figura (3.10a), no tempo  $0.6s$ , a frente da onda é propagado de forma normal. Na Figura (3.10b), no tempo  $0.8s$ , a frente da onda  $P$  entra na cunha e se propaga de forma estável dentro dela. Na Figura (3.10c), no tempo  $1.6s$ , a frente da onda  $P$  se propaga na camada inferior do modelo de forma estável e, finalmente, na Figura (3.10d), no tempo  $5.4s$ , a energia da onda  $P$  sai quase em sua totalidade, comportando-se, assim, de forma estável em meios com anisotropia forte.

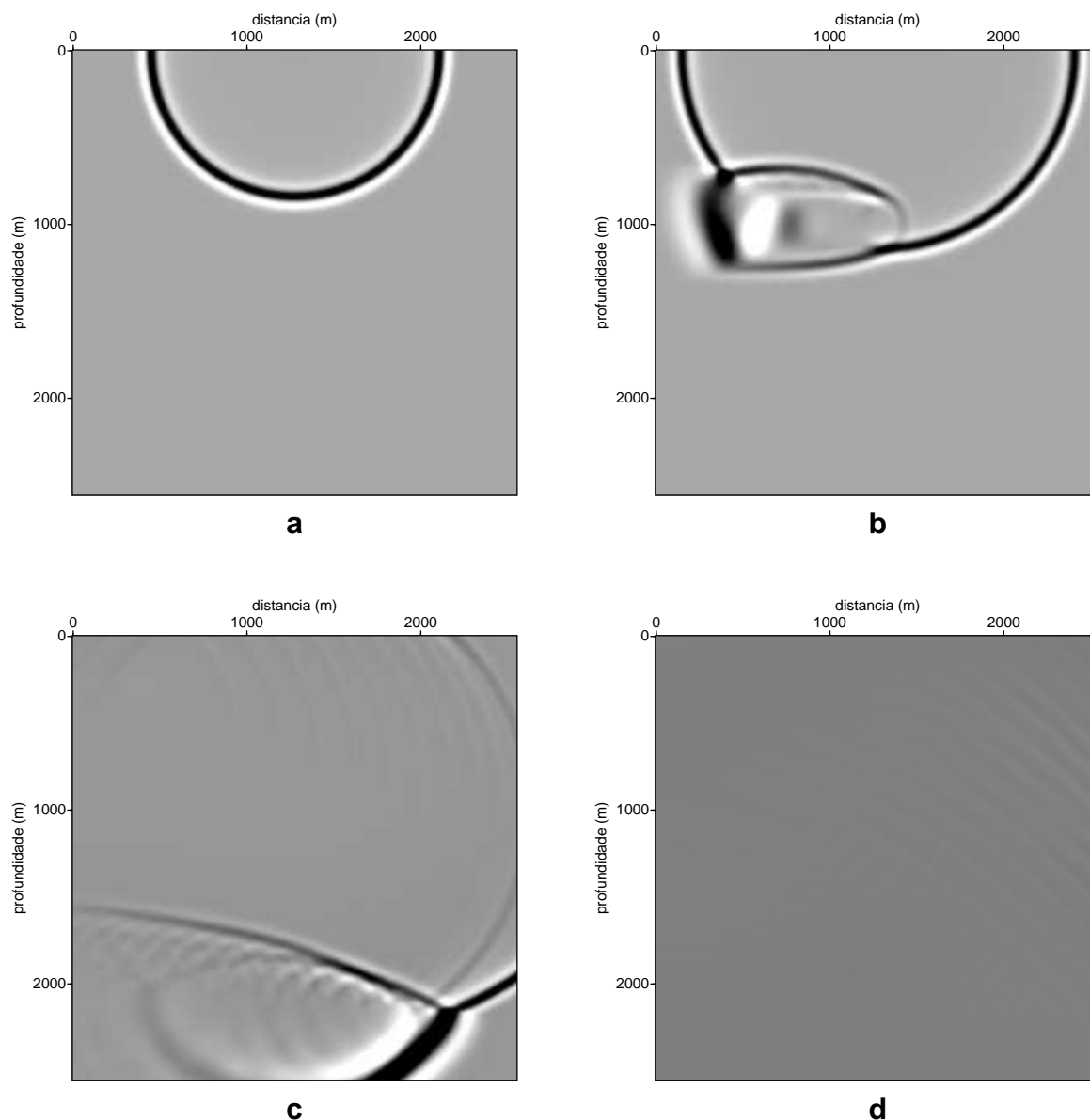


Figura 3.10: Snapshots da propagação do campo da onda da equação (3.1) considerando anisotropia forte, nos tempos (a)  $0.6s$ , (b)  $0.8s$ , (c)  $1.6s$  e (d)  $5.4s$ .

# 4

## Aplicação em dados sintéticos

Para validar as equações da onda para meios com anisotropia TTI propostas neste trabalho, migramos com a técnica RTM os dados sintéticos Hess e BP-TTI. Estes dados permitem ter grandes contrastes dos parâmetros de anisotropia,  $\epsilon$  e  $\delta$ , e no caso do BP-TTI, grandes contrastes do ângulo  $\phi$ . Além da natureza das equações da onda para meios com anisotropia TTI, a influência desses parâmetros servem para testar a estabilidade do algoritmo de migração (Zhan et al., 2012) e determinar uma possível solução ao problema.

Neste capítulo apresentamos a implementação na migração das equações para meios com anisotropia TTI com aproximação por séries de Taylor (equação 3.1) e Padé (equação 3.2), respectivamente. Para o caso da migração do modelo BP-TTI, suavizamos o campo do parâmetro  $\phi$  de forma a tornar o algoritmo estável, conseguindo uma boa seção migrada com um comprimento do filtro de suavização de 10x10 pontos. A estabilidade do algoritmo permitiu obter uma seção migrada do BP-TTI onde se pode interpretar de forma mais simples as mudanças estruturais e estratigráficas do meio.

### 4.1 Modelo Hess

O modelo Hess foi desenvolvido internamente pela companhia de petróleo Amerada Hess usando diferenças finitas. Os parâmetros de aquisição são os seguintes:

- Número de tiros: 720
- Espaçamento entre tiros: 100 ft
- Espaçamento entre receptores: 40 ft

- Afastamento mínimo: 0 ft
- Afastamento máximo: 26200 ft
- Comprimento do traço: 7992 s
- Taxa de amostragem: 6 ms

As dimensões do modelo são as seguintes:

- Amostras em  $x$ ,  $nx$  : 1808
- Amostras em  $z$ ,  $nz$  : 750
- Tamanho da célula em  $x$ ,  $dx$  : 40 ft
- Tamanho da célula em  $z$ ,  $dz$  : 40 ft

Nas Figuras (4.1), (4.2) e (4.3) temos os campos de velocidade,  $\epsilon$  e  $\delta$  do modelo Hess, respectivamente.

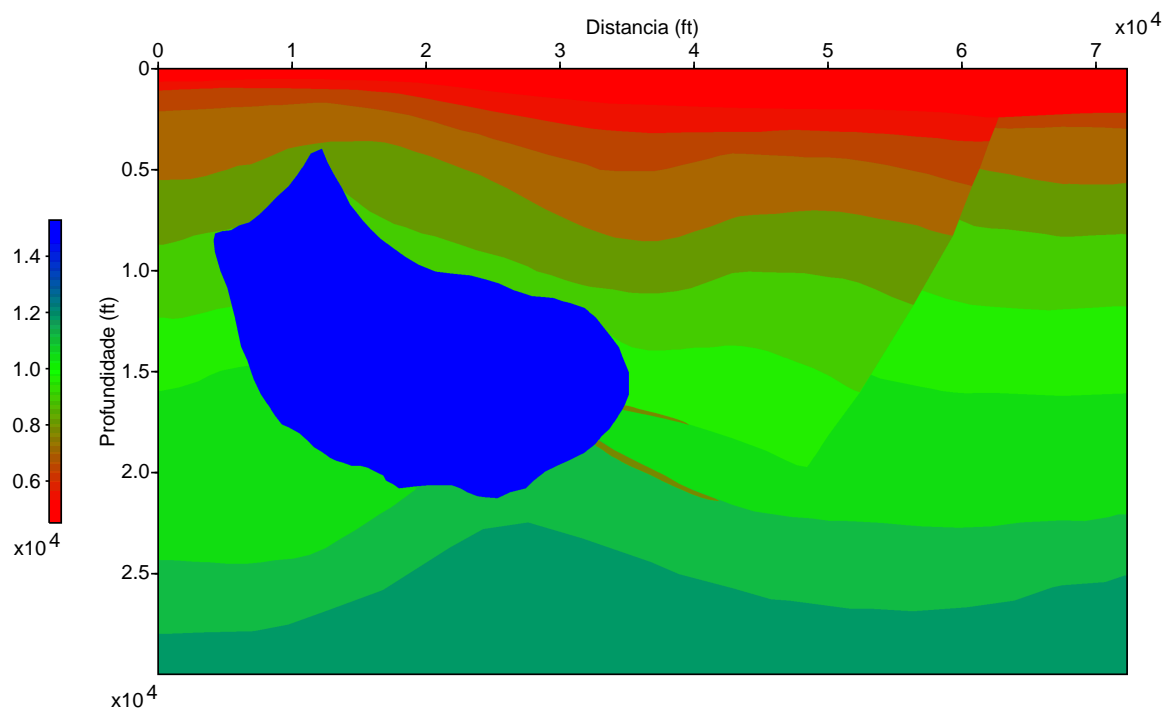


Figura 4.1: Campo de velocidade do modelo para meios com anisotropia VTI Hess

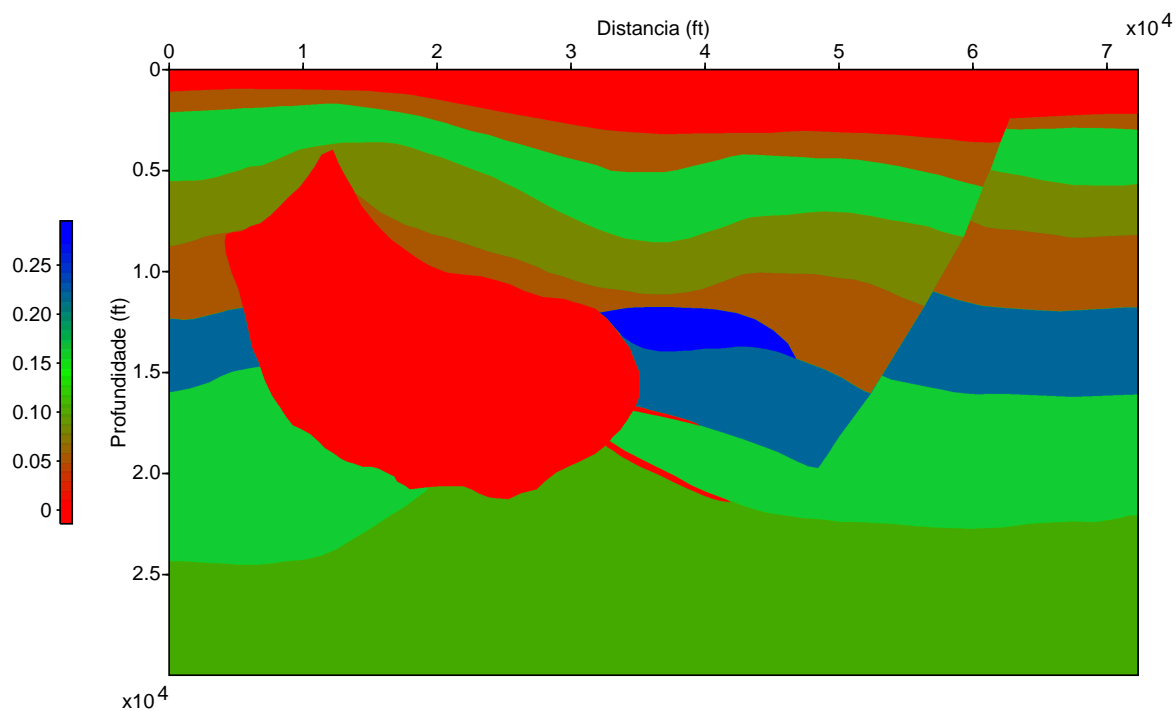


Figura 4.2: Campo de  $\epsilon$  do modelo para meios com anisotropia VTI Hess

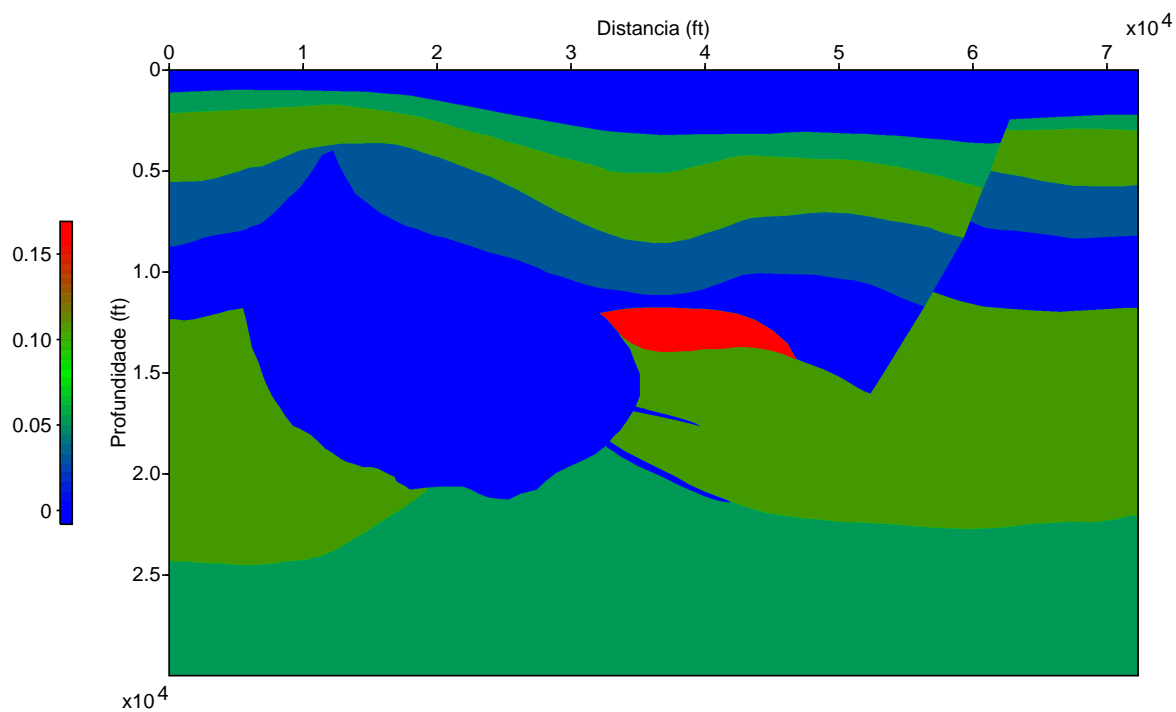


Figura 4.3: Campo de  $\delta$  do modelo para meios com anisotropia VTI Hess

Nas Figuras (4.4), (4.5) e (4.6) temos os resultados das migrações para o caso isotrópico, com aproximação por série de Taylor (equação 3.1) e com aproximação por série de Padé (equação 3.2), respectivamente.

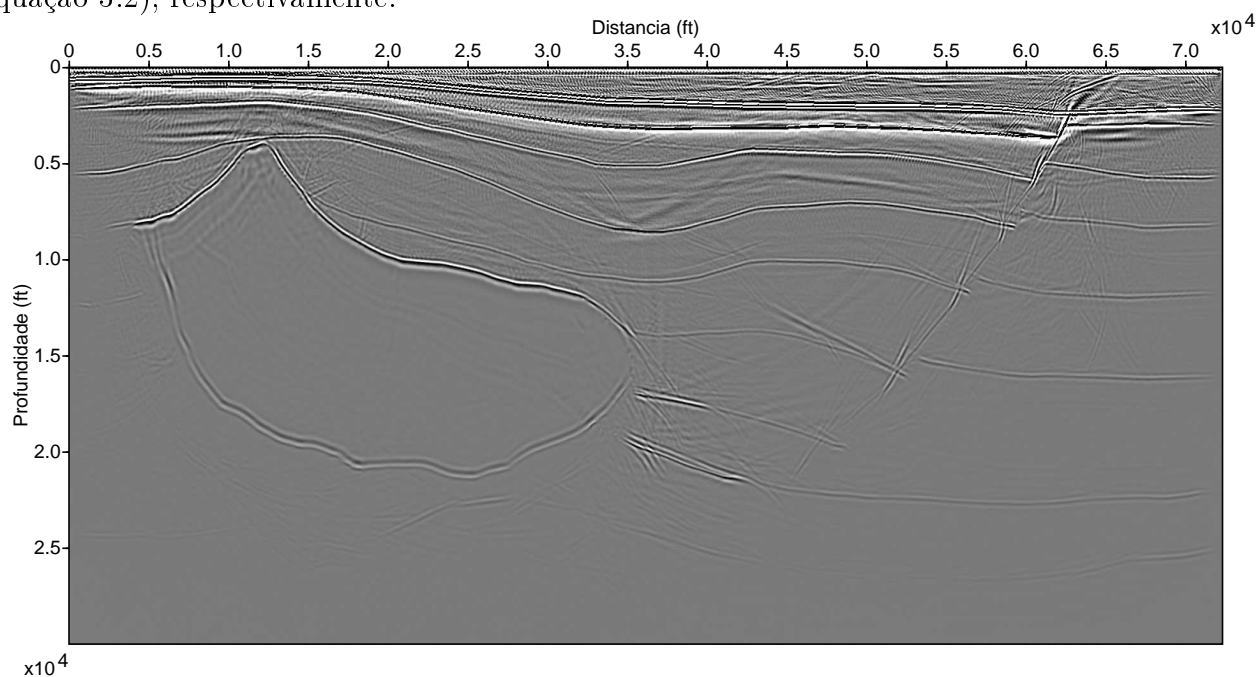


Figura 4.4: Migração do modelo Hess sem levar em consideração os parâmetros de anisotropia  $\epsilon$  e  $\delta$ .

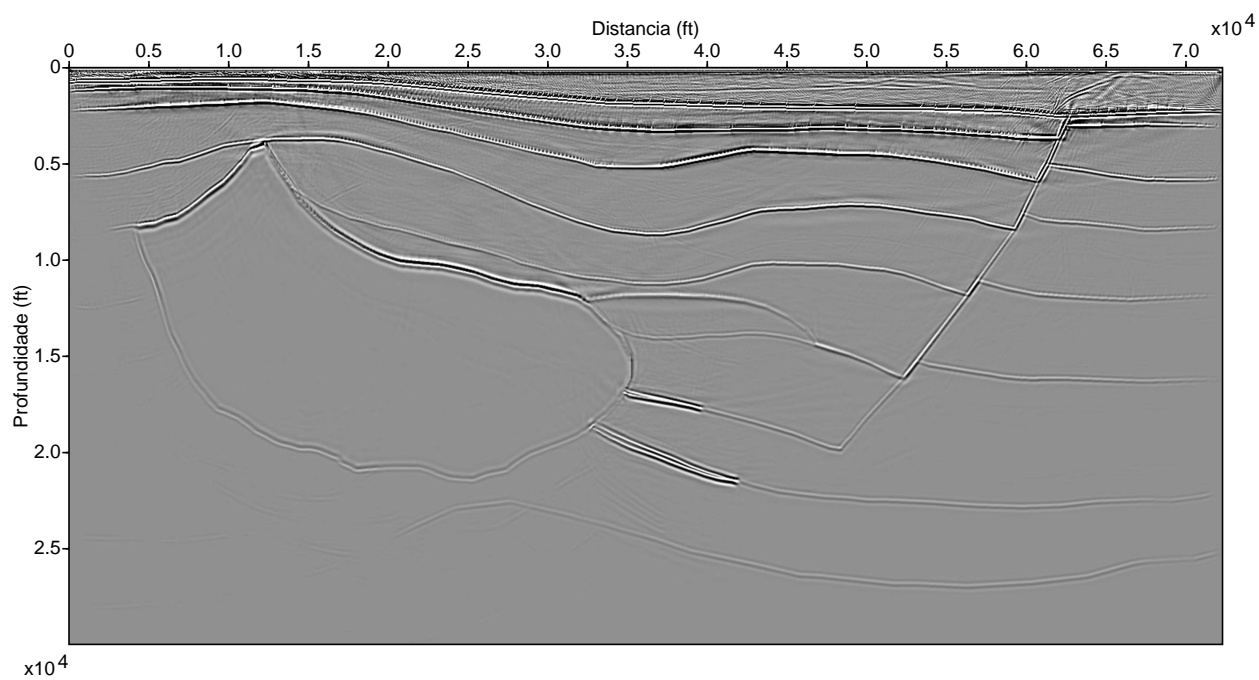


Figura 4.5: Migração do modelo Hess com a equação (3.1)



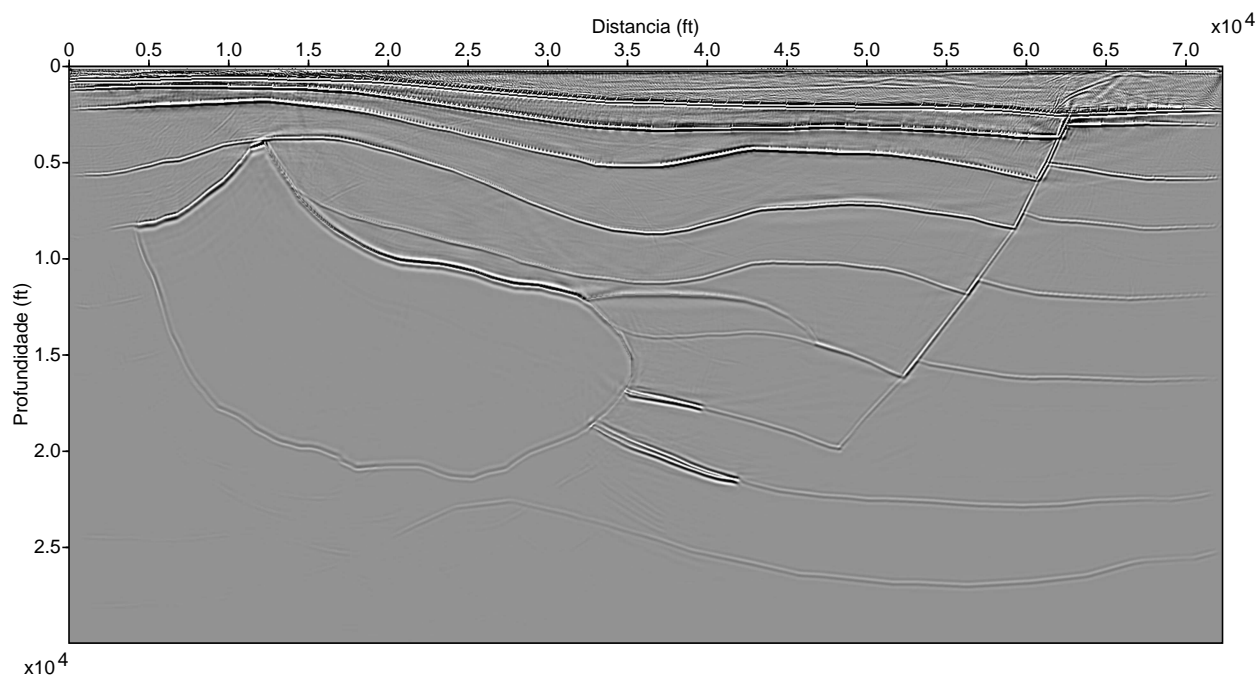


Figura 4.6: Migração do modelo Hess com a equação (3.2)

Da Figura (4.4) podemos notar que, quando não é levada em consideração a anisotropia do meio, os refletores não são bem posicionados e suas terminações no corpo salino não podem ser interpretadas claramente. A falha (Figura 4.4) não apresenta uma boa continuidade para sua interpretação. Das Figuras (4.5) e (4.6), os refletores com terminação nas bordas do corpo de sal são mais evidentes e permitem ser delimitados e interpretados de forma mais precisa que os refletores apresentados na Figura (4.4). A continuidade do corpo de sal é mais bem definida, também a falha normal fica mais contínua e com a terminação de seus refletores de forma mais precisa.

## 4.2 Modelo BP-TTI

O modelo BP-TTI foi criado no Centro Internacional de Negócios e Pesquisa de BP em 2007 por Hemang Shah. O estilo estrutural da geologia é baseado em áreas em que a BP operava na época, no entanto, os parâmetros de velocidade e de anisotropia são completamente inventados pelo autor do modelo.

O modelo é puramente 2D e foi criado por um código de modelagem elástica de diferenças finitas. Esta modelagem não considera reflexões múltiplas, mas é considerado como um dado muito parecido a dados reais. Para este trabalho foi usada só a parte 2 do modelo BP-TTI. Os parâmetros de aquisição são os seguintes:

- Número de tiros: 1641
- Espaçamento entre tiros: 50 m
- Profundidade da fonte: 6 m
- Número de receptores: 800
- Separação de receptores: 12.5 m
- Afastamento mínimo: 37.5 m
- Afastamento máximo: 10025 m
- Profundidade do receptor: 8 m
- Comprimento do traço: 9.2 s
- Taxa de amostragem: 8 ms

As dimensões do modelo são as seguintes:

- Amostras em  $x$ ,  $n_x$  : 1400
- Amostras em  $z$ ,  $n_z$  : 451
- Tamanho da célula em  $x$ ,  $dx$  : 25 m
- Tamanho da célula em  $z$ ,  $dz$  : 25 m

Nas Figuras (4.7), (4.8), (4.9) e (4.10), temos os campos de velocidade,  $\epsilon$ ,  $\delta$  e  $\phi$ , respectivamente, da parte 2 do modelo sintético BP-TTI. Nas Figuras (4.11), (4.12) e (4.13), temos os campos do parâmetro  $\phi$  após a suavização com filtros de comprimento  $5 \times 5$ ,  $7 \times 7$  e  $10 \times 10$ , respectivamente.

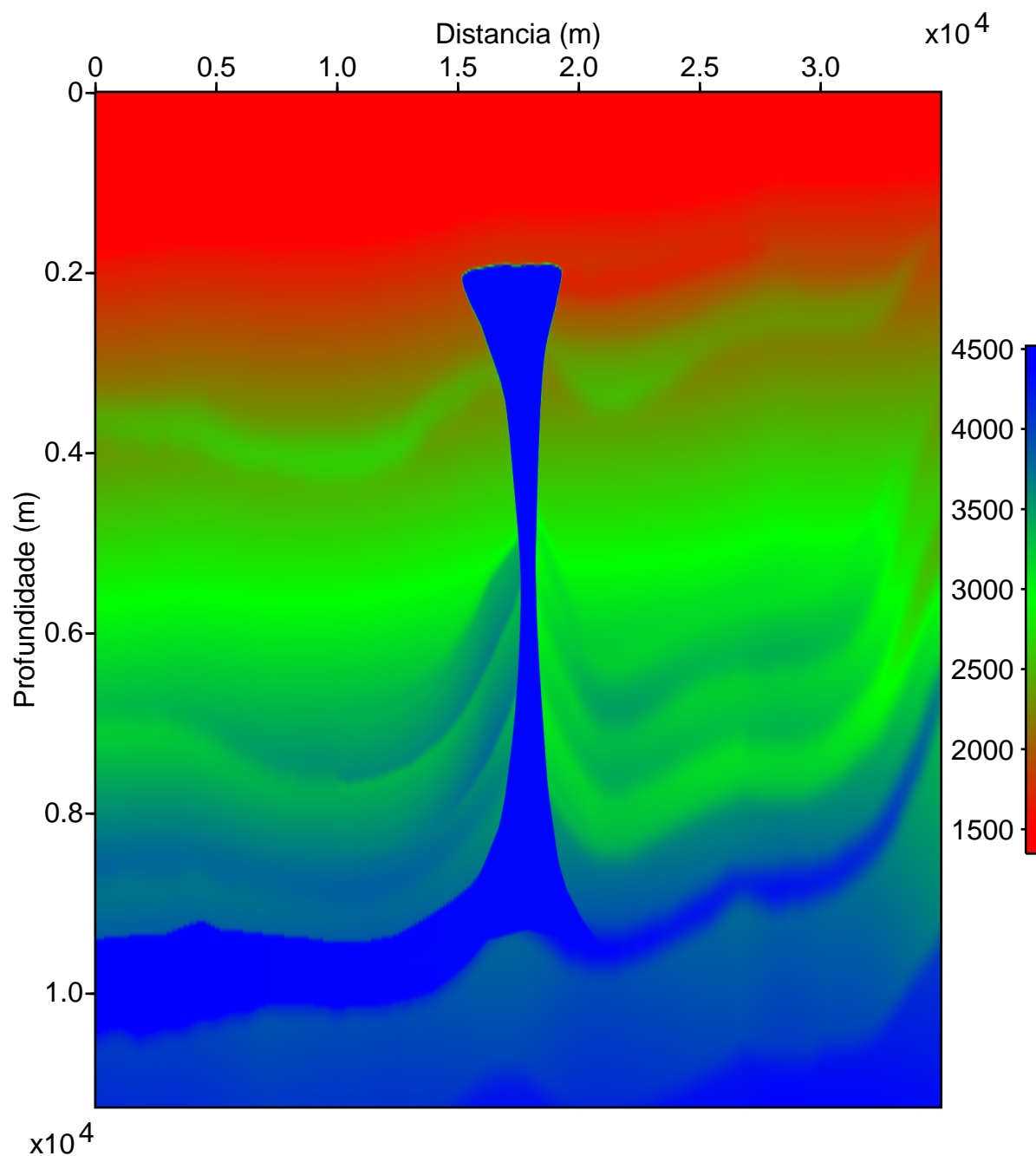


Figura 4.7: Campo de velocidade da parte 2 do modelo para meios com anisotropia TTI BP-TTI.

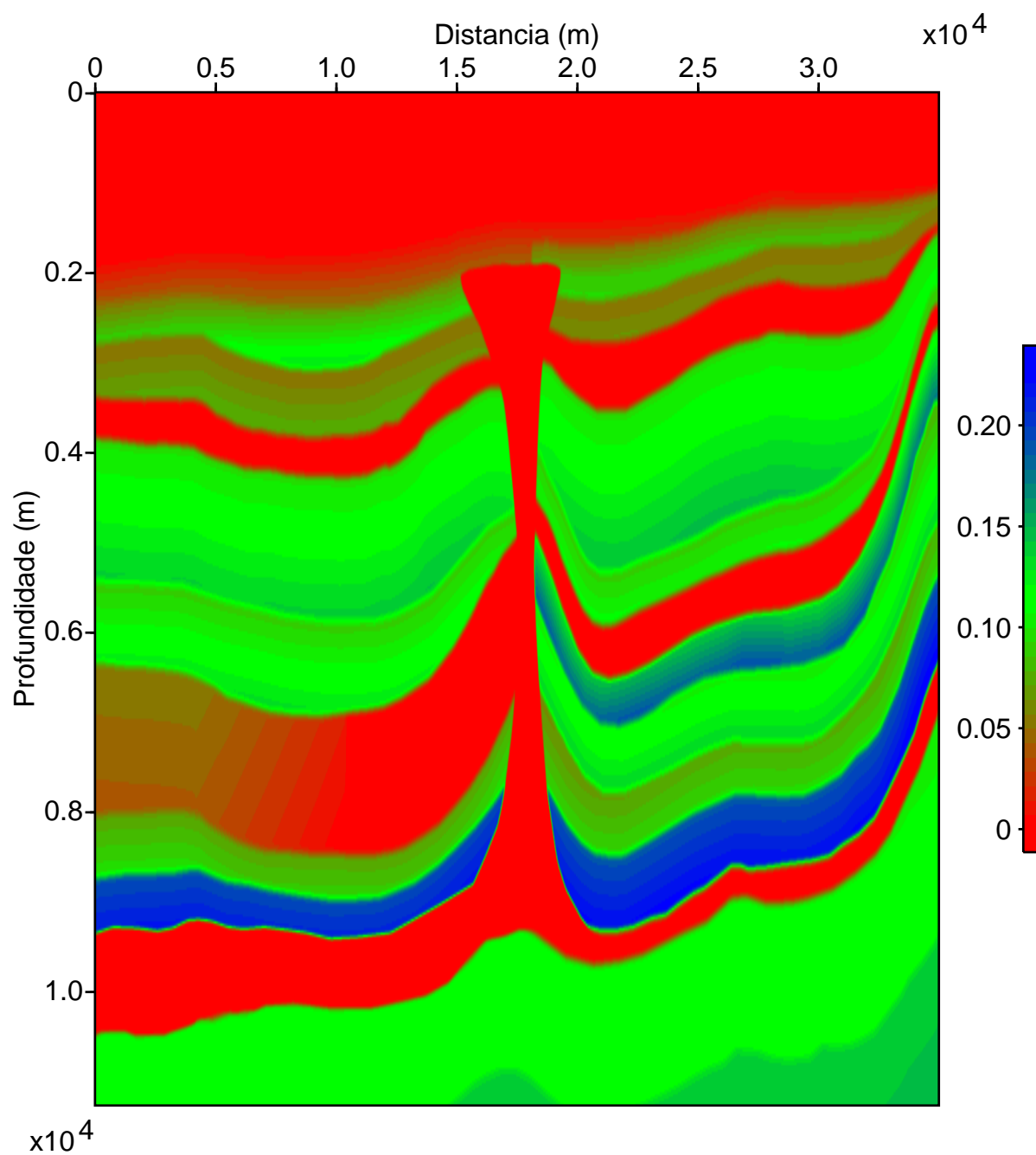


Figura 4.8: Campo de  $\epsilon$  da parte 2 do modelo para meios com anisotropia TTI BP-TTI.

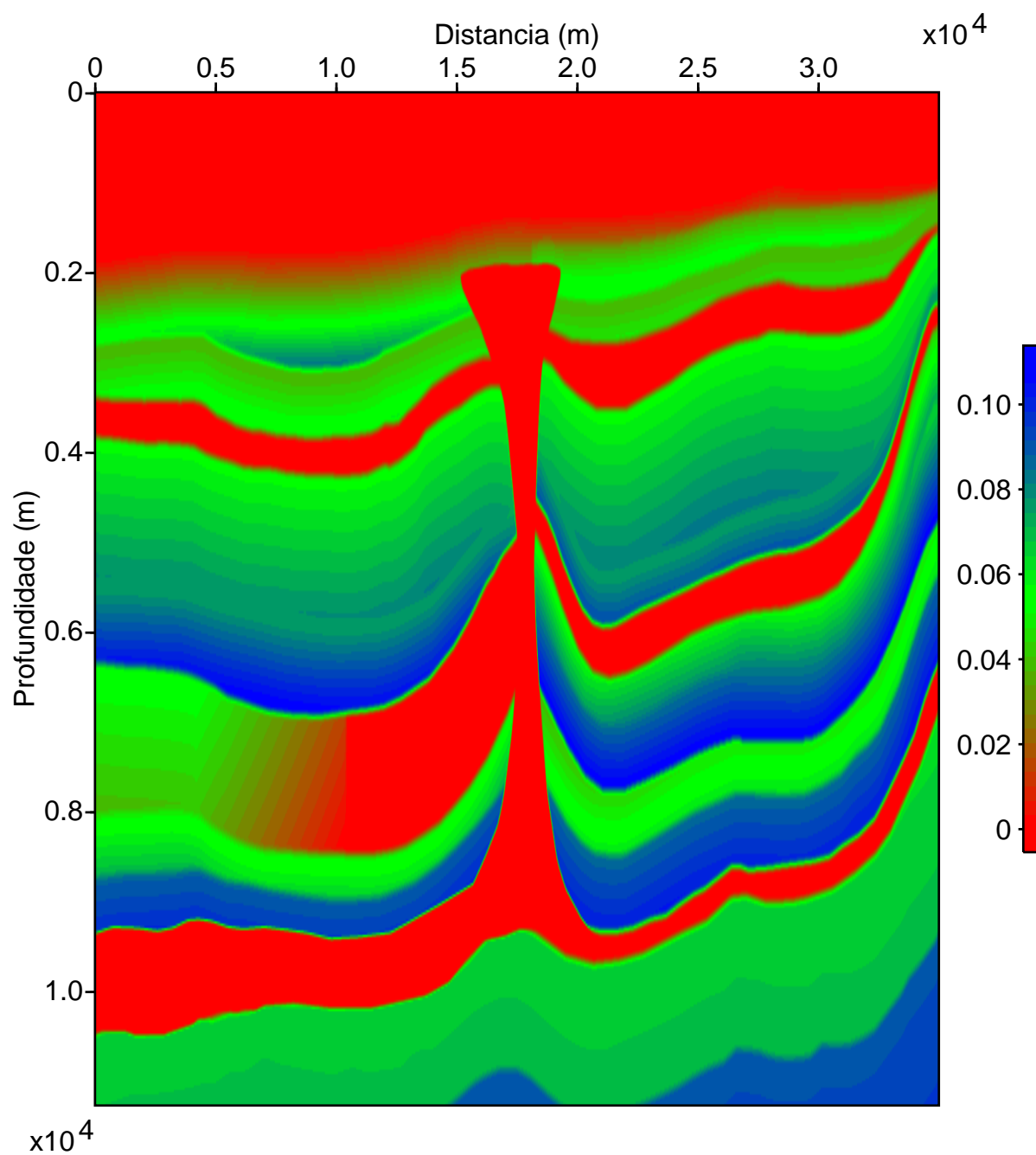


Figura 4.9: Campo de  $\delta$  da parte 2 do modelo para meios com anisotropia TTI BP-TTI.

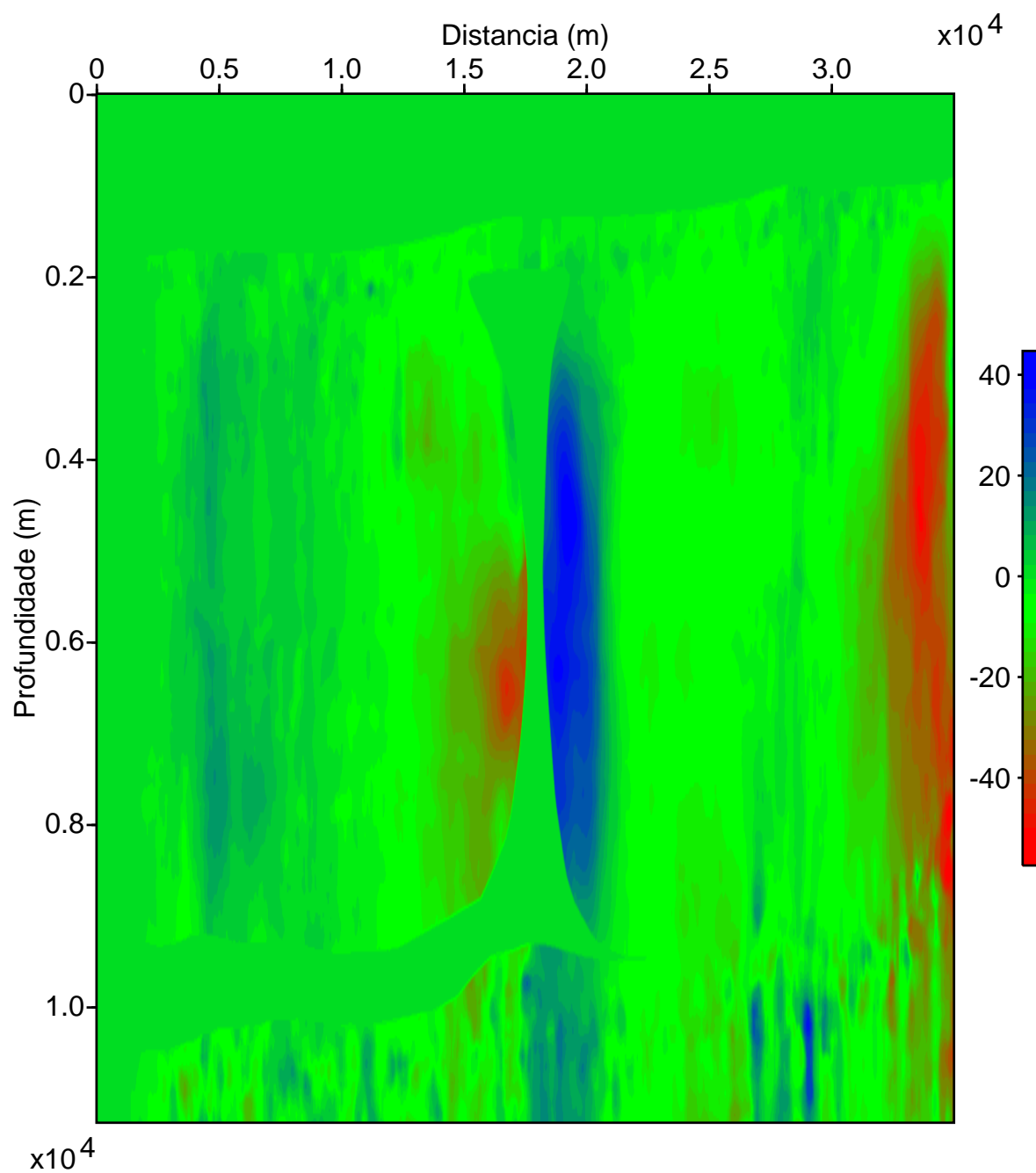


Figura 4.10: Campo do parâmetro  $\phi$  da parte 2 do modelo BP-TTI.

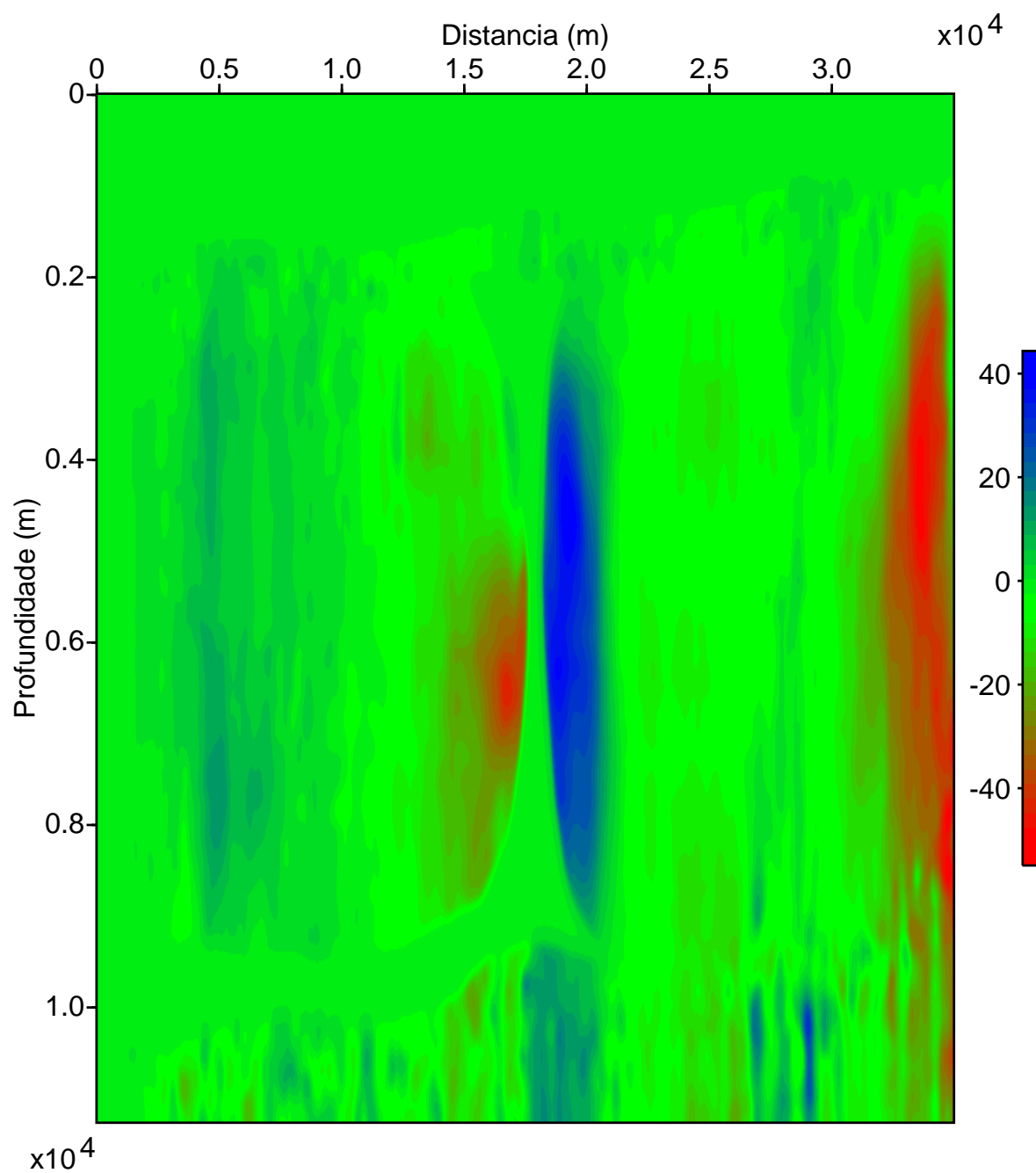


Figura 4.11: Campo do parâmetro  $\phi$  da parte 2 do modelo BP-TTI com filtro de suavização de comprimento  $5 \times 5$  pontos.

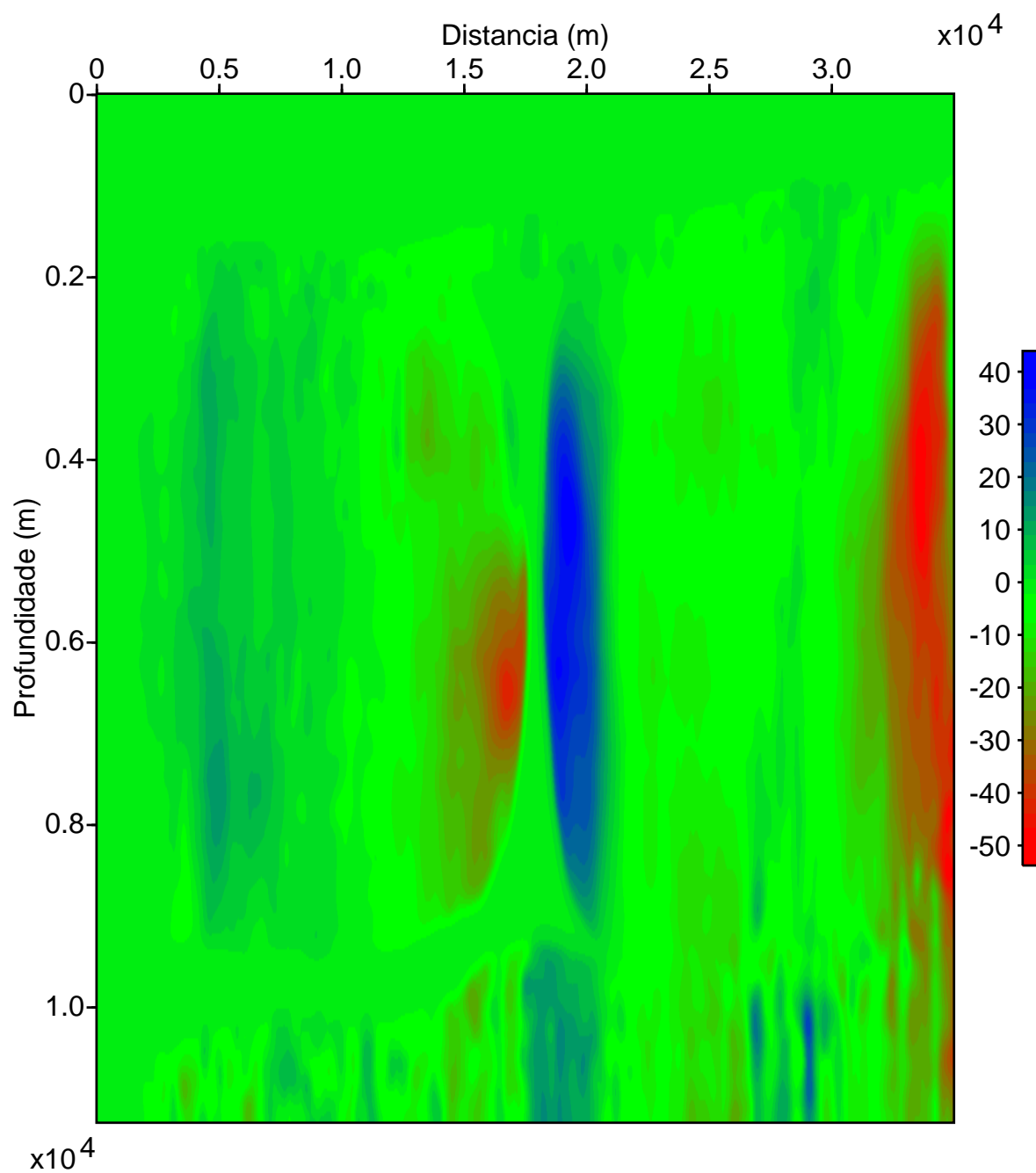


Figura 4.12: Campo do parâmetro  $\phi$  da parte 2 do modelo BP-TTI com filtro de suavização de comprimento  $7 \times 7$  pontos.



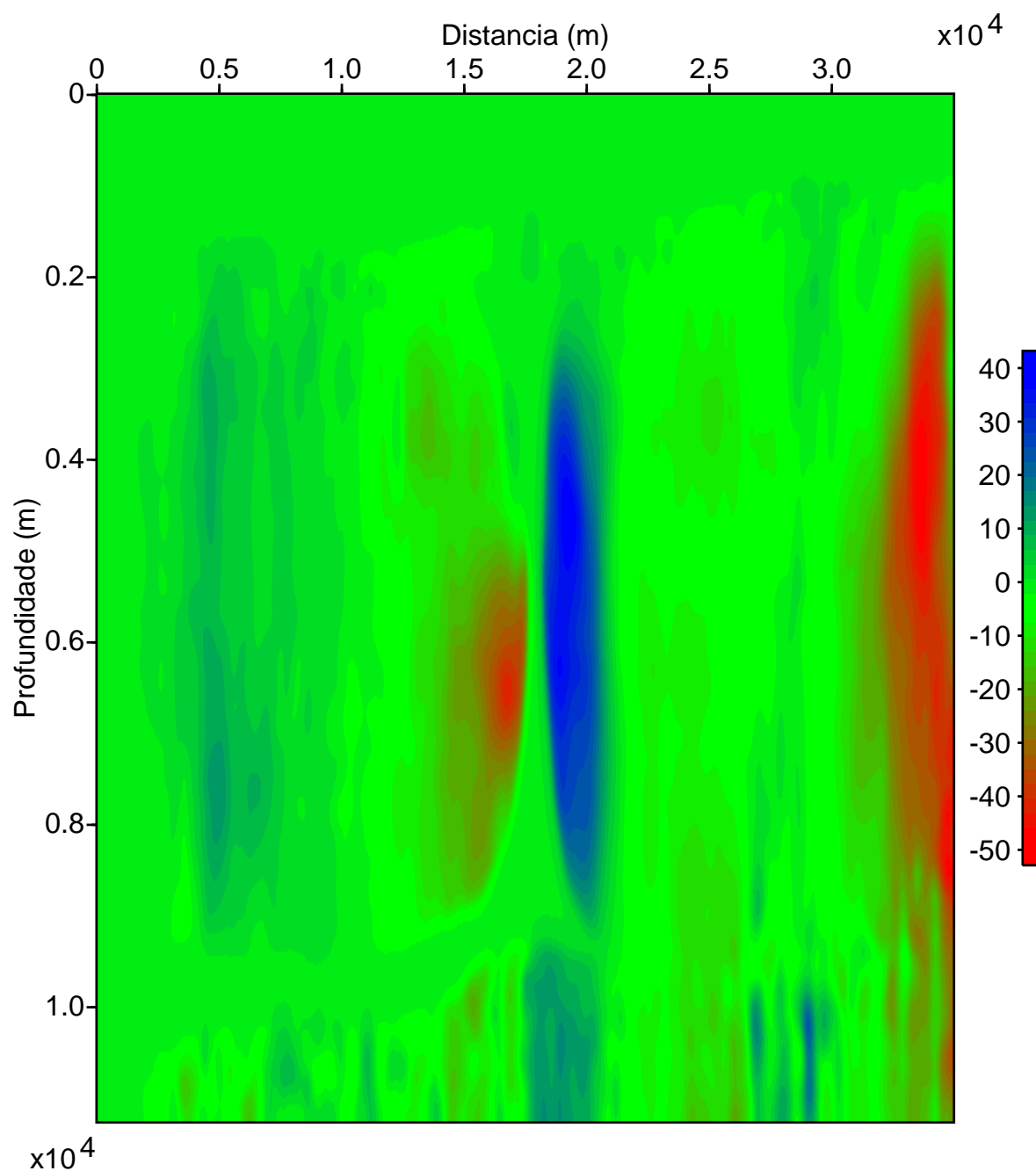


Figura 4.13: Campo do parâmetro  $\phi$  da parte 2 do modelo BP-TTI com filtro de suavização de comprimento 10x10 pontos.

Nas Figuras (4.14) e (4.15) temos as migrações do modelo BP-TTI para os casos isotrópico e VTI, respectivamente. Nas Figuras (4.16), (4.17), (4.18) e (4.19) temos os resultados das migrações para os casos do parâmetro  $\phi$  sem suavizar e com filtro de suavização de tamanho 5x5, 7x7 e 10x10, respectivamente, utilizando a equação (3.1), para meios com

anisotropia TTI. Na Figura (4.20) temos o resultado da migração para o caso de  $\phi$  suavizado com filtro de 10x10 pontos, usando a equação (3.2) para meios com anisotropia TTI.

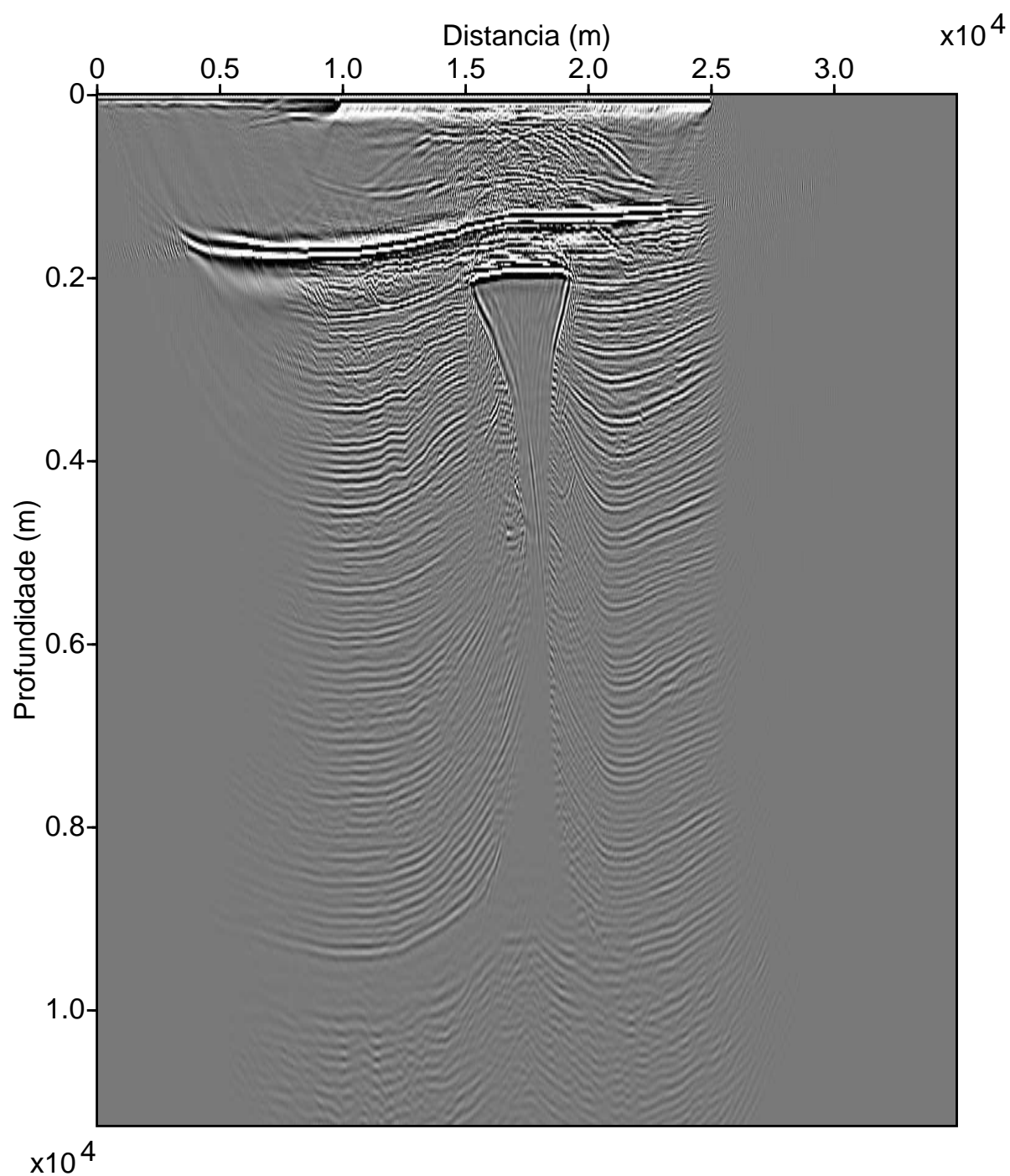


Figura 4.14: Resultado da migração do modelo BP-TTI no caso isotrópico.

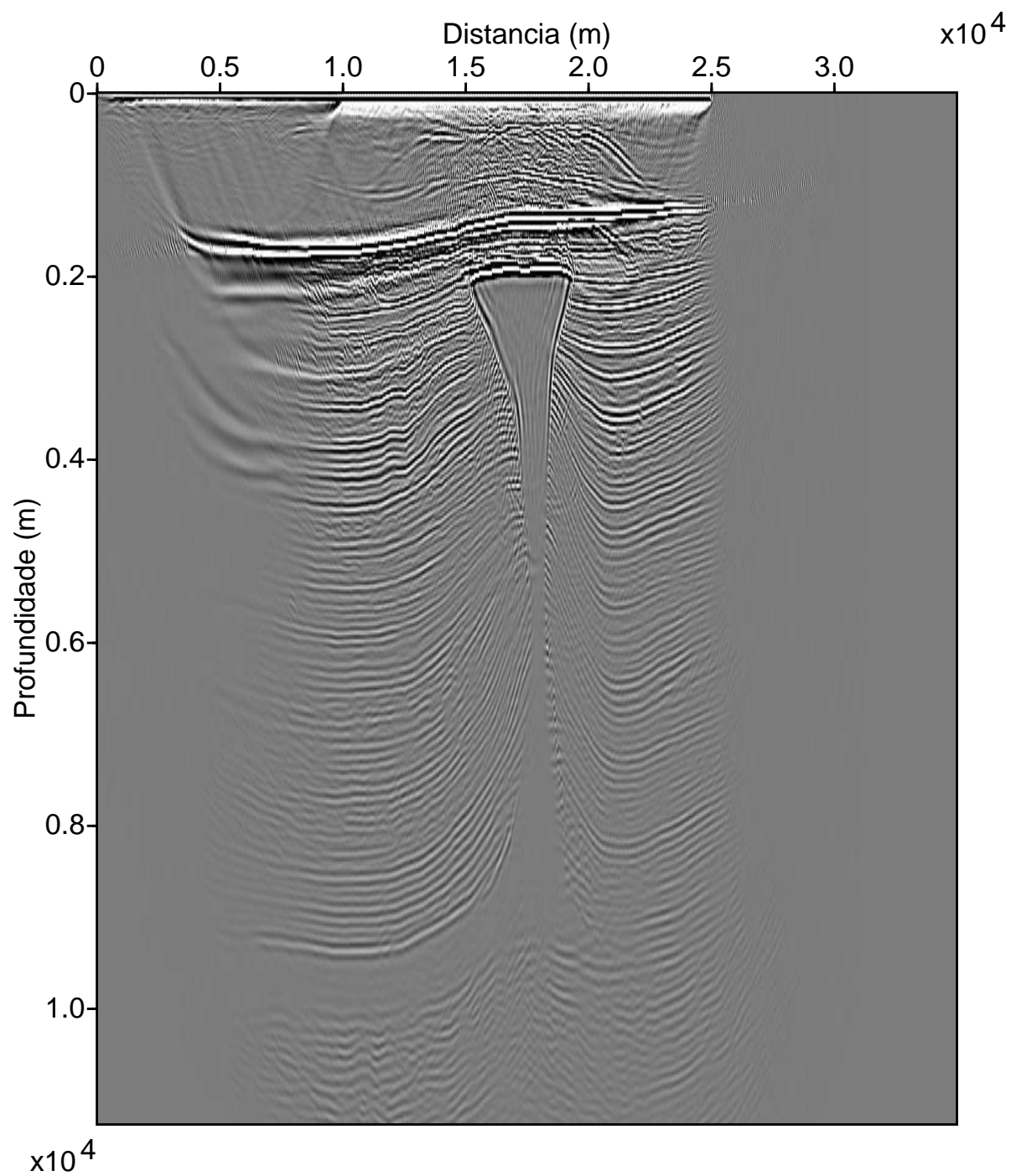


Figura 4.15: Resultado da migração do modelo BP-TTI no caso VTI ( $\phi = 0$ ) usando a equação (3.1).

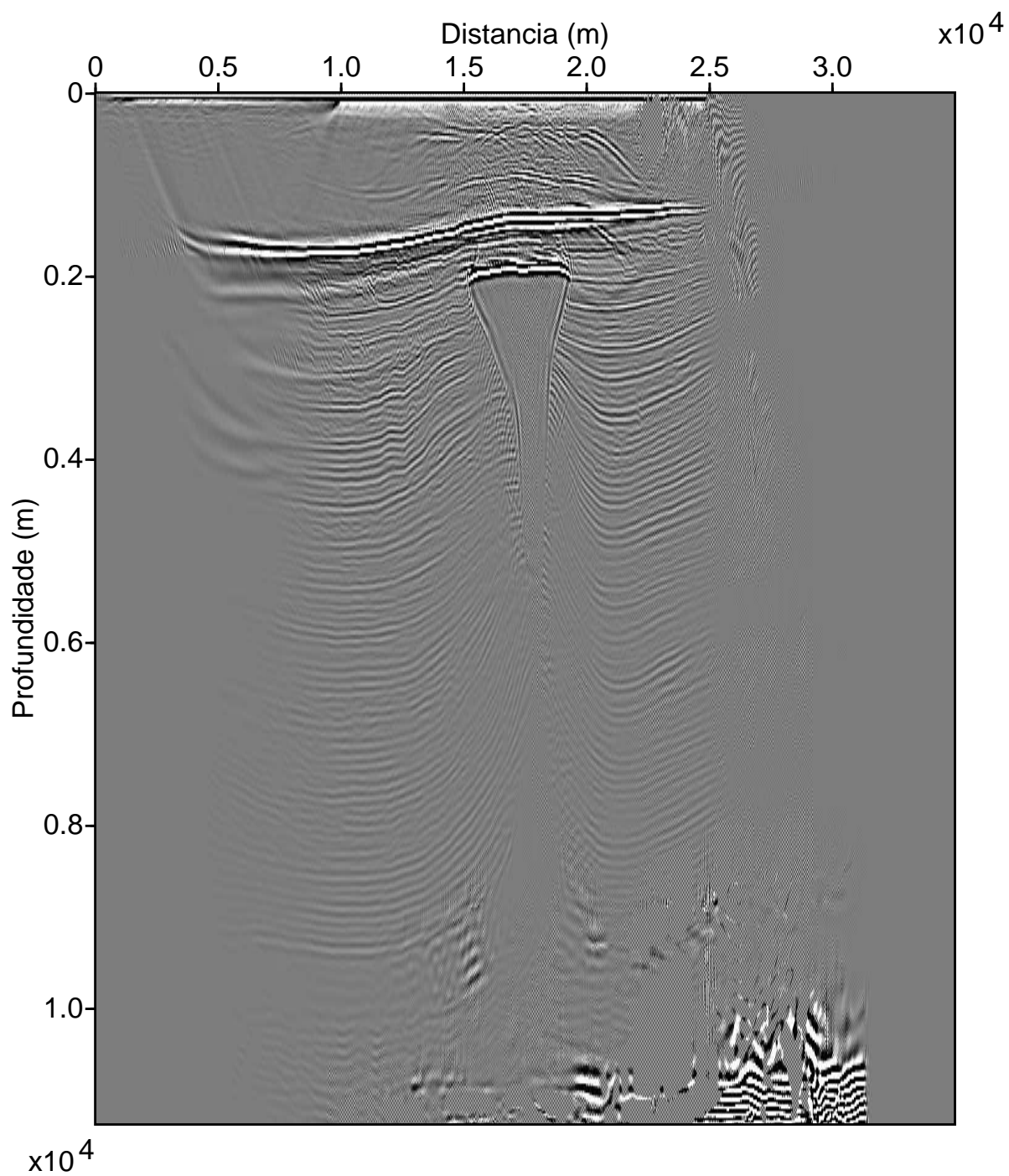


Figura 4.16: Resultado da migração do modelo BP-TTI com a equação (3.1) usando o campo do parâmetro  $\phi$  sem suavização.

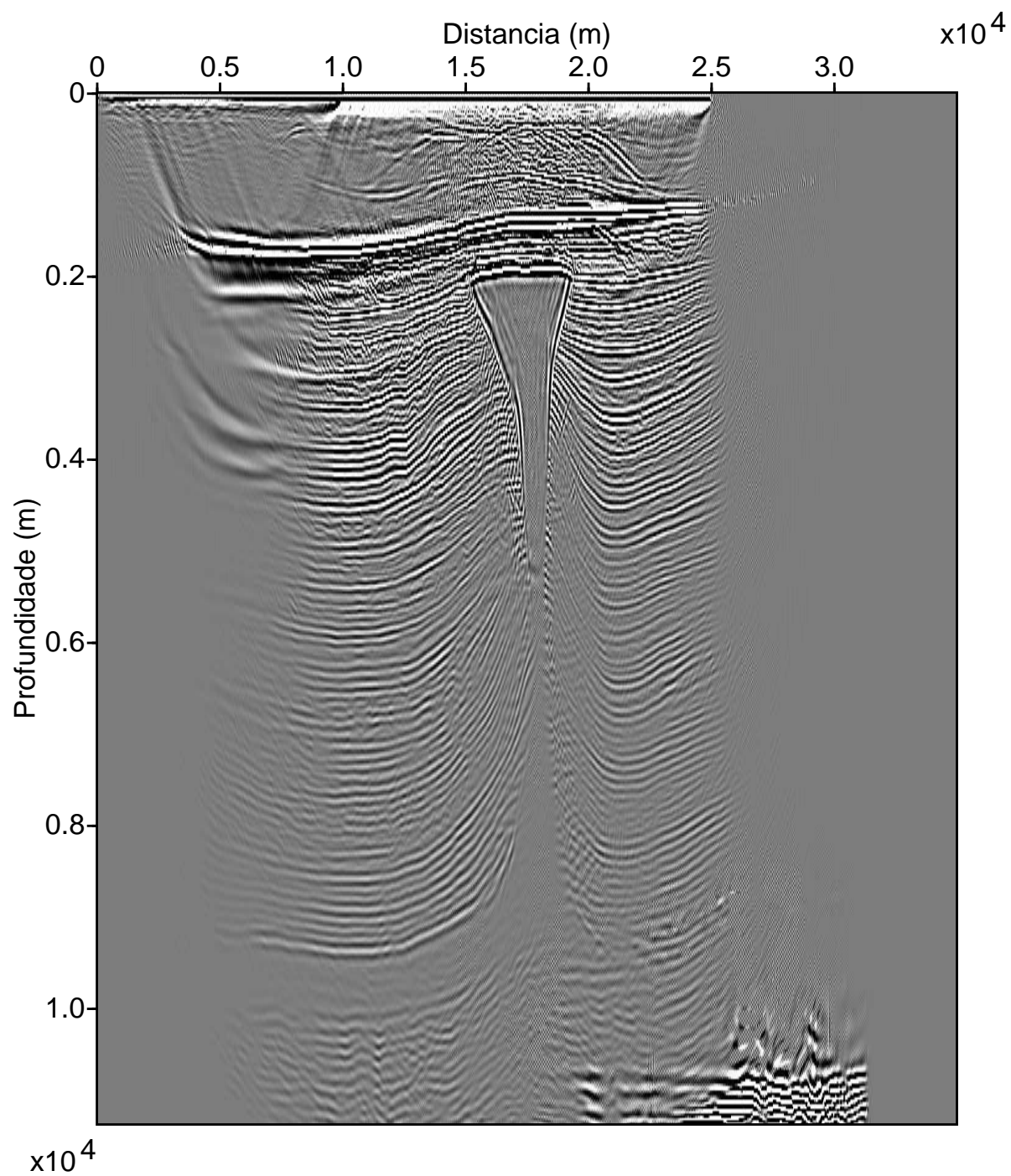


Figura 4.17: Resultado da migração do modelo BP-TTI com a equação (3.1) usando o campo de  $\phi$  com filtro de suavização de comprimento  $5 \times 5$  pontos.

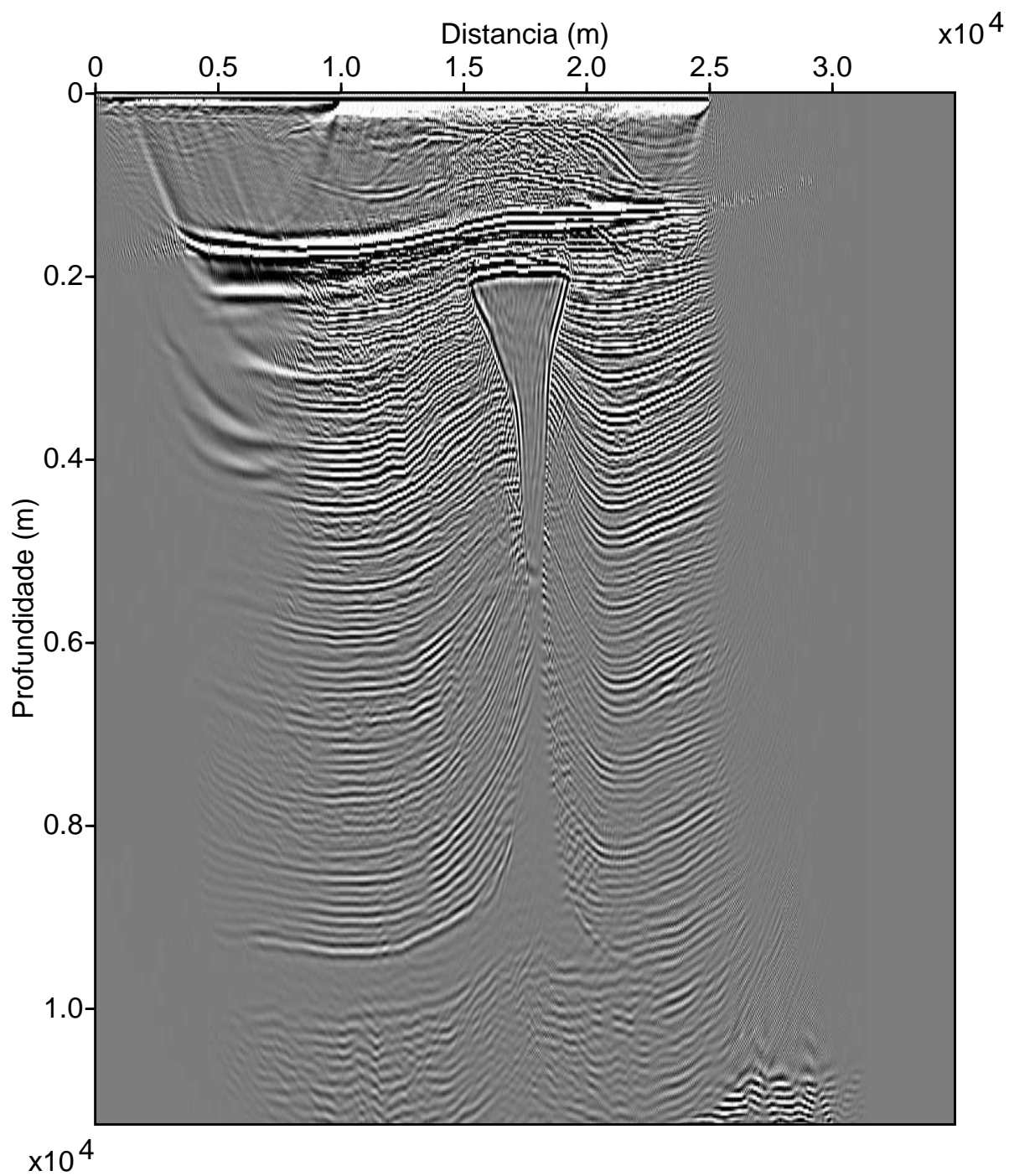


Figura 4.18: Resultado da migração do modelo BP-TTI com a equação (3.1) usando o campo de  $\phi$  com filtro de suavização de comprimento 7x7 pontos.

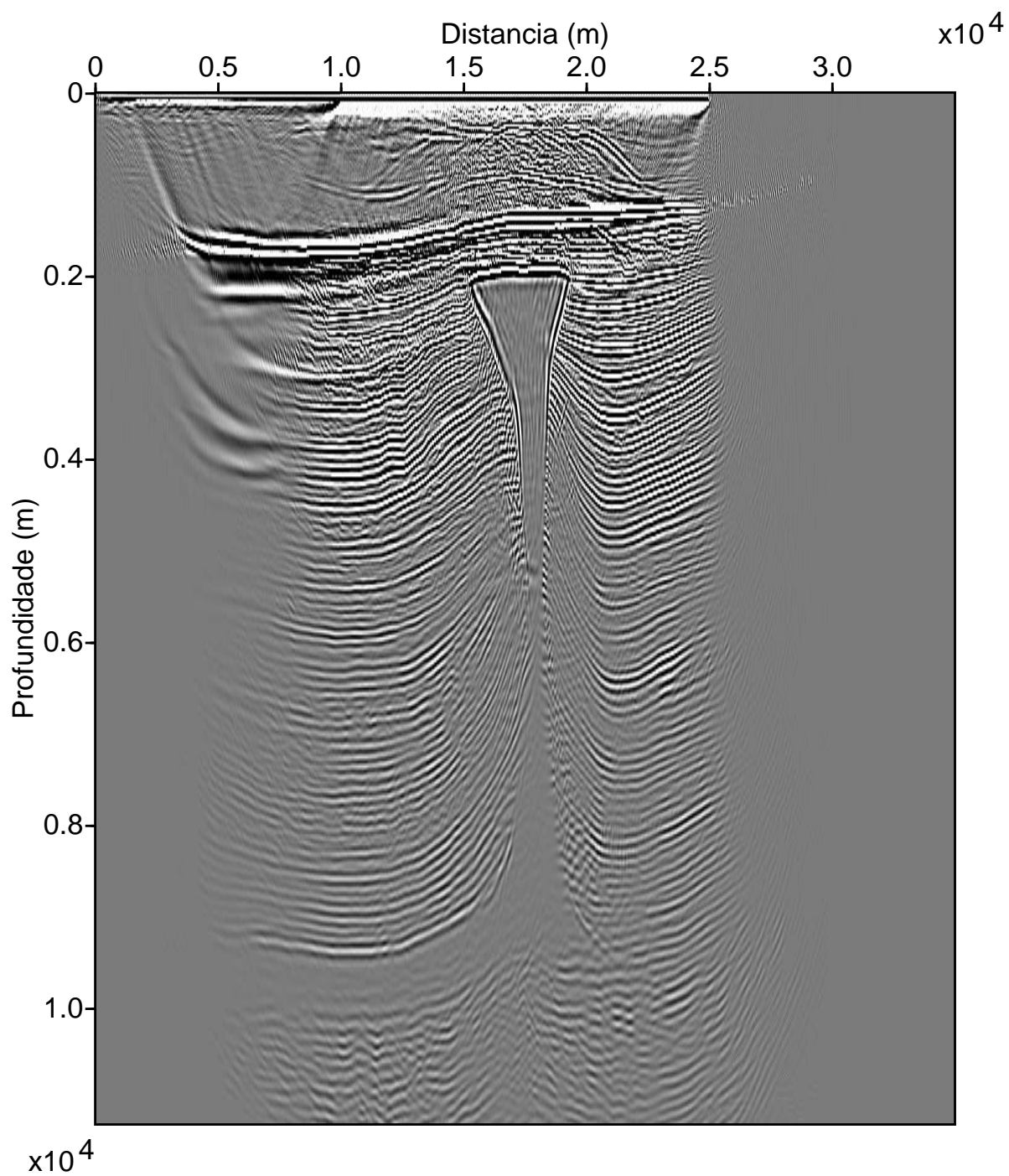


Figura 4.19: Resultado da migração do modelo BP-TTI com a equação (3.1) usando o campo de  $\phi$  com filtro de suavização de comprimento 10x10 pontos.

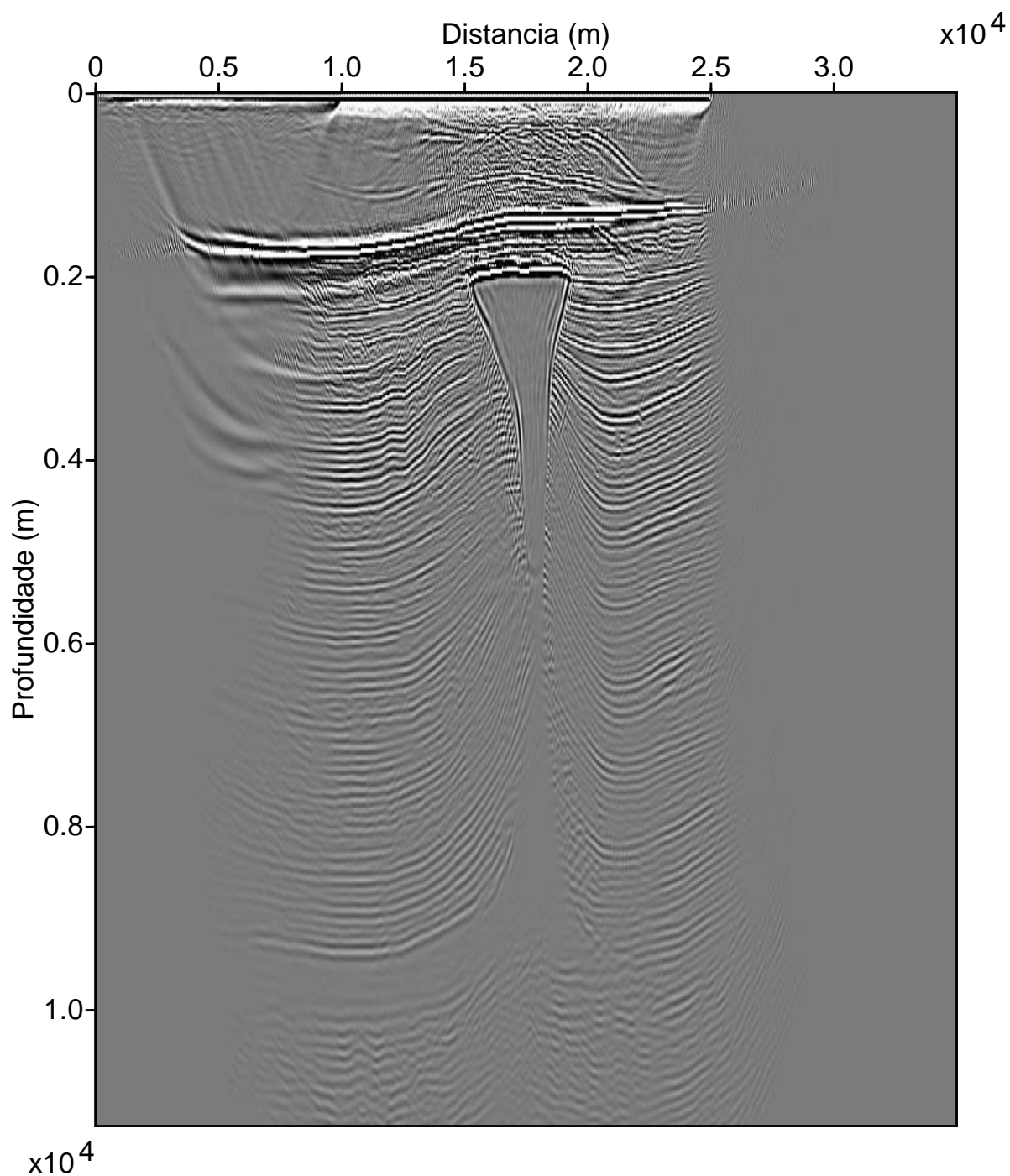


Figura 4.20: Resultado da migração do modelo BP-TTI com a equação (3.2) usando o campo de  $\phi$  com filtro de suavização de comprimento 10x10 pontos.

Na Figura (4.14) observa-se que os refletores que terminam na borda do domo de sal apresentam pouca continuidade lateral em algumas regiões e desconsiderando a anisotropia



do meio faz com que os refletores fiquem mal posicionados. Também o limite do domo de sal não é claro e contínuo. Na Figura (4.15) temos uma melhoria na continuidade lateral dos refletores com terminação no domo de sal. Os limites do domo de sal são mais bem definidos que na Figura (4.14), facilitando assim sua delimitação espacial na seção.

As migrações feitas para a parte 2 do dado BP-TTI, com a equação (3.1), foram testadas com diferentes porcentagens na suavização do campo  $\phi$ , encontrando assim que sem a suavização do campo de  $\phi$  a imagem sísmica fica muito ruidosa e não é possível reconhecer horizontes, especialmente na parte inferior da seção e nas bordas do domo de sal (Figura 4.16). Quando é feita uma suavização do campo de  $\phi$  de 5x5 pontos a seção migrada melhora significativamente, mas ainda tem regiões onde a migração é instável, especialmente na parte inferior e no domo de sal, dificultando a interpretação estrutural e estratigráfica da seção (Figura (4.17)). Com uma suavização de 7x7 pontos do campo de  $\phi$ , a seção migrada melhora ainda mais, comparada com a anterior, mas ainda tem regiões onde é um pouco instável (Figura 4.18). Com uma suavização de 10x10 pontos a seção migrada já não apresenta instabilidade, e a seção resulta ótima para ser interpretada estrutural e estratigraficamente (Figura 4.19).

Na Figura (4.20) temos a migração da parte 2 do modelo BP-TTI usando a equação para meios com anisotropia TTI (3.2), com o parâmetro  $\phi$  suavizado, ou seja, após a aplicação de um filtro de 10x10 pontos, onde se pode observar que os refletores têm uma continuidade lateral clara e suas terminações na borda do domo de sal são fáceis de interpretar.

# 5

## Conclusões e recomendações

### 5.1 Conclusões

Apresentamos duas novas equações para modelagem e migração da onda  $P$  em meios com anisotropia TTI. Estas duas novas equações tem a vantagem de ser de segunda ordem na derivada temporal, são mais estáveis numericamente que as equações de forma acoplada e separam completamente a onda  $P$  da onda  $SV$ .

Levando em conta as curvas de velocidade de fase, concluímos que as equações com aproximação por séries de Taylor e Padé propostas neste trabalho são as mais próximas à equação de Tsvankin (1996) nos casos de anisotropia forte, fraca,  $\epsilon > \delta$  e  $\delta > \epsilon$ , comparadas com as aproximações de anisotropia fraca de primeira ordem, Zhan et al. (2012) e Alkhalifah (2000).

Concluímos que as equações com aproximação por séries de Taylor e Padé, quando são aproximadas no seu denominador com  $\epsilon = 0$ , com a finalidade de facilitar sua implementação computacional, as respostas impulsivas só mudam a amplitude, mas não a posição da frente da onda, o que significa que na migração fazer esta aproximação não vai ter implicações no posicionamento dos refletores, mas sim na sua amplitude.

As equações propostas neste trabalho foram resolvidas com a metodologia REM para a derivada temporal e o método pseudo-espectral para as derivadas espaciais, obtendo resultados precisos e sem dispersão numérica.

Na modelagem da equação da onda para meios com anisotropia TTI, com aproximação por série de Taylor, nos casos de anisotropia fraca,  $\epsilon > \delta$  e  $\delta > \epsilon$ , a anisotropia forte,

apresenta maior estabilidade numérica comparada com a modelagem da equação acoplada de Zhou et al. (2006b).

A estabilidade numérica no algoritmo de migração TTI foi conseguida através da suavização do parâmetro  $\phi$  da seção sísmica. No caso da parte 2 do modelo BP-TTI usamos um filtro de suavização de comprimento 10x10 pontos aplicado ao campo  $\phi$  para obter uma seção migrada de boa qualidade.

## 5.2 Recomendações

Recomendamos as seguintes atividades futuras:

Fazer um análise da onda  $S$ , seguindo a metodologia proposta neste trabalho.

Trabalhar mais a fundo no problema de instabilidade dos algoritmos de modelagem e migração para o caso TTI.

Usar as equações para a onda  $P$  pura com anisotropia TTI na migração de dados sísmicos reais.

# Referências Bibliográficas

- Aki, K. e Richards, P. (2002) - Quantitative seismology, second edition, University Science Books.
- Alkhalifah, T. (2000) - An acoustic wave equation for anisotropic media, *Geophysics*, **65**:1239–1250.
- Alkhalifah, T. e Larner, K. (1994) - Migration error in transversely isotropic media, *Geophysics*, **59**:1405–1418.
- Banik, N. C. (1984) - Velocity anisotropy of shales and depth estimation in the north sea basin, *Geophysics*, **49**:1411–1419.
- Barrera, D. F.; Vivas, F. A. e Pestana, R. C. (2011) - Modelagem acústica da onda P em meios TTI usando uma nova equação diferencial de segunda ordem no tempo, Congresso Internacional da Sociedade Brasileira de Geofísica, Rio de Janeiro, Brazil.
- Baysal, E.; Kosloff, D. D. e Sherwood, J. W. C. (1983) - Reverse-time migration, *Geophysics*, **48**:1514–1524.
- Claerbout, J. (1971) - Toward a unified theory of reflector mapping, *Geophysics*, **36**:467–481.
- Crampin, S. (1985) - Evaluation of anisotropy by shear-wave splitting, *Geophysics*, **50**:142–152.
- Crawley, S.; Brandsberg-Dahl, S.; McClean, J. e Chemingui, N. (2010) - TTI reverse time migration using the pseudo-analytic method, *The Leading Edge*, **29**:1379–1384.
- Daley, P. e Hron, F. (1977) - Reflection and transmission coefficients for transversely isotropic media, *Geophysics*, **67**:661–675.
- Du, X. (2007) - Prestack depth migration for isotropic and polar anisotropic media, Tese de Doutorado, University of Calgary, Calgary, Canada.
- Du, X.; Fletcher, R. P. e Fowler, P. J. (2008) - A new pseudo-acoustic wave equation for vti media, EAGE 70 Conference & Exhibition - Rome, Italy, **H033**.
- Duveneck, E. e Bakker, P. M. (2011) - Stable P-wave modeling for reverse time migration in tilted TI media, *Geophysics*, **76**:S65–S75.

- Etgen, J. e Brandsberg-Dahl (2009) - The pseudo-analytical method: Application of pseudo-laplacian to acoustic and acoustic anisotropic wave propagation, 79th Annual Inter. Meeting, SEG, Expanded Abstracts, pp. 2552–2555.
- Fletcher, R. P.; Du, X. e Fowler, P. J. (2009) - Reverse time migration in tilted transversely isotropic (TTI) media, *Geophysics*, **74**:WCA179–WCA187.
- Gray, S. H.; Etgen, J.; Dellinger, J. e Whitmore, D. (2001) - Seismic migration problems and solutions, *Geophysics*, **66**:1622–1640.
- Grechka, V.; Zhang, L. e Rector, J. W. (2004) - Shear waves in acoustic anisotropic media, *Geophysics*, **69**:576–582.
- Isaac, J. H. e Lawton, D. C. (1999) - Image mispositioning due to dipping ti media: A physical seismic modeling study, *Geophysics*, **7**:158–182.
- Jin, S.; Jiang, F. e Ren, Y. (2010) - Comparison of isotropic, VTI and TTI reverse time migration: an experiment on bp anisotropic benchmark dataset, 80th Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts.
- Johnston, J. E. e Christensen, N. I. (1995) - Seismic anisotropy of shales, *Journal of Geophysical Prospecting*, **7**:158–182.
- Jones, L. E. A. e Wang, H. F. (1981) - Ultrasonic velocities in cretaceous shales from williston basin, *Geophysics*, **46**:288–297.
- Kosloff, D. D. e Baysal, E. (1983) - Migration with the full acoustic wave equation, *Geophysics*, **48**:677–687.
- Larner, K. e Cohen, J. K. (1993) - Migration error in transversely isotropic media with linear velocity variation with depth, *Geophysics*, **58**:1454–1467.
- Leslie, J. M. e Lawton, D. C. (1999) - A refraction-seismic field study to determine the anisotropic parameters of shales, *Geophysics*, **64**:1247–1252.
- Li, X. Y.; Liu, E. e Chapman, M. (2007) - Practical aspects of seismic anisotropy.
- Lines, L. R.; Slawinski, R. e Bording, P. (1999) - A recipe for stability of finite-difference wave-equation computations, *Geophysics*, **64**:967–969.
- Liu, F.; Morton, S. A.; Ni, L. e Leveille, J. P. (2009) - Decoupled wave equations for p and sv waves in a acoustic vti media, 79th Annual Inter. Meeting, SEG, Expanded Abstracts, pp. 2844–2848.
- Love, A. E. H. (1927) - A treatise on the mathematical theory of elasticity, Cambridge University Press.

- Pestana, R. C. e Stoffa, P. L. (2010) - Time evolution of the wave equation using rapid expansion method, *Geophysics*, **75**:T121–T131.
- Pestana, R. C.; Ursin, B. e Stoffa, P. L. (2011) - Separate p and sv wave equations for vti media, SEG expanded Abstract.
- Slawinski, M. (2003) - Seismic wave rays in elastic media, *Handbook of Geophysical Exploration*, Elsevier Science Publ. Co. Inc., **34**.
- Tal-Ezer, H. D.; Kosloff e Koren, Z. (1987) - An accurate scheme for forward seismic modeling, *Geophysical Prospecting*, **35**:479–490.
- Thomsen, L. (1986) - Weak elastic anisotropy, *Geophysics*, **51**:1954–1966.
- Thomsen, L. (2002) - Understanding seismic anisotropy in exploration and exploitation, *SEG-EAGE*, **41**.
- Tsvankin, I. (1996) - P-wave signatures and notation for transversely isotropic media: An overview, *Geophysics*, **61**:467–483.
- Tsvankin, I. (2001) - *Seismic signatures and analysis of reflection data in anisotropic*, Elsevier Science Publishing Co.
- Vernik, L. e Liu, X. (1997) - Velocity anisotropy in shales: A petrophysical study, *Geophysics*, **62**:521–532.
- Yilmaz, O. (1987) - *Seismic data processing*, Society of Exploration Geophysicists, Tulsa - Oklahoma.
- Yoon, K.; Sang, S.; Jean, J.; James, C. e Bin, W. (2010) - Stability and speedup issues in TTI RTM implementation, 80th Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, pp. 3221–3225.
- Zhan, G.; Pestana, R. C. e Stoffa, P. L. (2012) - Decoupled equations for reverse time migration in tilted transversely isotropic media, *Geophysics*, **77**:T37–T45.
- Zhang, L.; Rector, J. W. e Hoversten, G. M. (2005) - An acoustic wave equation for modeling in tilted ti media, 73rd Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, pp. 153–156.
- Zhang, Y.; Zhang, H. e Zhang, G. (2011) - A stable TTI reverse time migration and its implementation, *Geophysics*, **76**:WA3–WA11.
- Zhou, H.; Zhang, G. e Bloor, R. (2006a) - An anisotropic acoustic wave equation for vti media, EAGE 68 Conference & Exhibition - Vienna, Austria, **H033**.

---

Zhou, H.; Zhang, G. e Bloor, R. (2006b) - An anisotropic acoustic wave equation for modeling and migration in 2D TTI media, SEG Thecnical Program Expanded Abstracts, **25**:194–198.

# Agradecimentos

Agradeço a Deus por me ajudar a ter sempre a vontade de melhorar como pessoa, estudante e profissional.

Agradeço a bolsa de estudos da Agência Nacional do Petróleo (PRH-8/ANP).

Agradeço ao INCT-GP e ao CPGG pelo apoio na realização deste trabalho.

Agradeço à minha família, por sempre ter uma palavra para me encorajar nos momentos que mais precisei.

A minha mãe Gloria Isabel Pacheco, meu pai Gustavo Barrera Rios, minha avó Zoraida, sem vocês eu não teria as oportunidades que tenho na minha vida.

A meus amigos na Colômbia, porque mesmo distantes sempre me incentivaram a seguir em frente nos momentos de fraqueza.

A meus amigos no Brasil, Oscar Mojica e Michelangelo Silva, não encontro palavras para agradecer o que fizeram por mim nos momentos que mais precisei, só posso dizer **OBRIGADO** meus caros.

Agradeço a meu orientador Reynam da Cruz Pestana, por me ajudar a crescer na minha formação como geofísico, mas também por sempre ter palavras de amizade, espero ter correspondido a suas expectativas como seu aluno.

A minha co-orientadora Flor Alba Vivas, por me mostrar o caminho a seguir na minha pesquisa, e também por ter sempre palavras sinceras para me orientar no meu trabalho e em decisões importantes na minha carreira profissional.

Agradeço ao professor Milton Porsani, por sempre ter a vontade de me ajudar no que eu precisei no LAGEP.

Finalmente agradeço especialmente a Adriano Wagner, por sua grande ajuda na parte computacional deste trabalho.