



Universidade Federal da Bahia  
Faculdade de Ciências Econômicas

Curso de Mestrado em Economia

**Investigando a Dinâmica da Assimetria  
nos preços da Gasolina Brasileira: uma  
Abordagem de Séries Temporais**

Carlos Frederico Azeredo Uchôa

Dissertação de Mestrado

Salvador  
23 de Outubro de 2006

Universidade Federal da Bahia  
Faculdade de Ciências Econômicas

Carlos Frederico Azeredo Uchôa

**Investigando a Dinâmica da Assimetria nos preços da  
Gasolina Brasileira: uma Abordagem de Séries Temporais**

*Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Economia da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Economia.*

Orientador: *Carlos Alberto Gentil Marques*

Salvador  
23 de Outubro de 2006



Universidade Federal da Bahia  
Faculdade de Ciências Econômicas

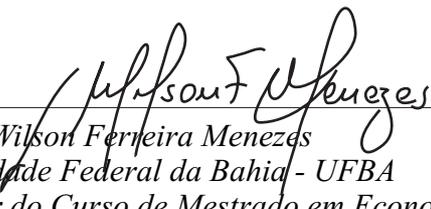
**Termo de Aprovação**

Carlos Frederico Azeredo Uchôa

**Investigando a Dinâmica da Assimetria nos preços da Gasolina  
Brasileira: uma Abordagem de Séries Temporais**

*Dissertação de Mestrado aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre  
em Economia pela seguinte banca examinadora:*

  
Orientador: *Carlos Alberto Gentil Marques*  
*Universidade Federal da Bahia - UFBA*  
*Professor do Curso de Mestrado em Economia*

  
*Antonio Wilson Ferreira Menezes*  
*Universidade Federal da Bahia - UFBA*  
*Professor do Curso de Mestrado em Economia*

  
*Sinézio Fernandes Maia*  
*Universidade Federal da Paraíba - UFPB*  
*Professor do Curso de Mestrado em Economia*

Salvador  
23 de Outubro de 2006

*Para Monalisa*

# Resumo

Este trabalho tem como objetivo desenvolver uma análise econométrica dos preços da gasolina brasileira, evidenciando uma relação de equilíbrio não-linear com os preços do petróleo no mercado internacional e com a taxa de câmbio. Na parte teórica são expostos os métodos de análise de variáveis cointegradas com modelos de correção de erros não-lineares *TAR* e *M-TAR*. Além disto, é mostrado que a estimação feita na forma tradicional não possibilita tal procedimento em virtude de suas limitações conceituais. Os resultados mostram que preços da gasolina recuperam, em média, 90% das discrepâncias negativas de um período para outro. No entanto, apenas 5% diferenças positivas são ajustadas, ou ainda não são recuperadas.

**Palavras-chave:** Co-integração, modelos não-lineares, preço da gasolina

# Abstract

This work has the objective to present an econometric analysis of the prices in the Brazilian retail gasoline market, highlighting a non-linear adjustment with the international oil prices and Brazilian exchange rate. In the theoretical part the co-integration analysis with asymmetric error correction models *TAR* and *M-TAR* are exposed. Besides, is shown that is not possible to develop an estimation based on the linear traditional form in virtue of conceptual limitations. The results show that prices of the gasoline recover, on average, 90% of the negative discrepancies from a period to other. However, only 5% positive differences are adjusted, or still are not recovered.

**Keywords:** Cointegration, nonlinear models, gasoline price

# Sumário

1	Introdução . . . . .	10
2	Evidências para a Assimetria . . . . .	16
3	Auto-regressão Vetorial Sob Co-integração . . . . .	20
4	Modelos de Séries Temporais Não-lineares . . . . .	29
5	Modelo de Correção de Erros Não-linear . . . . .	35
6	Análise Empírica . . . . .	41
7	Considerações Finais . . . . .	53
A	Apêndice . . . . .	58

# Lista de Figuras

6.1	Trajectoria das séries no tempo. Preços de revenda da gasolina ( $g_t$ ), Preços do petróleo ( $o_t$ ) e Taxa de câmbio nominal R\$/U\$ ( $c_t$ ), tomados com base no mês de maio de 2006. . . . .	42
6.2	Relação de co-integração entre as variáveis ( $g_t$ ), ( $o_t$ ) e ( $c_t$ ), obtida na equação 6.1	46
6.3	Análise dos resíduos . . . . .	51

## Lista de Tabelas

6.1	Testes de raiz unitária . . . . .	44
6.2	Testes de co-integração: $\lambda_{trace}$ e $\lambda_{max}$ . . . . .	44
6.3	Valores críticos para teste de co-integração linear . . . . .	47
6.4	$\Phi^m$ - Valores críticos para teste de co-integração <i>M-TAR</i> . . . . .	48
6.5	$\Phi$ - Valores críticos para teste de co-integração <i>TAR</i> . . . . .	49
6.6	Resumo dos Resultados da Estimação dos preços da gasolina . . . . .	50
A.1	Dados utilizados . . . . .	58
A.2	Dados utilizados (continuação) . . . . .	59

## CAPÍTULO 1

# Introdução

O comportamento dos preços do petróleo no comércio internacional influencia, de forma decisiva, os preços de seus derivados na maioria das nações. Mesmo num país como o Brasil, onde as importações em 2003 responderam por apenas 5% do que é consumido internamente, os preços da gasolina não ficam indiferentes às variações dos preços do petróleo no mercado mundial (Petrobrás, 2005).

Uma trajetória de alta nos preços do petróleo é acompanhada de perto por toda a sociedade, esperando seus reflexos imediatos no nível de preços dos combustíveis, sendo que, um dos impactos mais sentidos é, sem dúvida, sobre a gasolina. A questão que se coloca neste caso é a seguinte: O que ocorre quando o sentido é inverso, isto é, e quando há uma queda nos preços do petróleo?

Neste caso, após um período de alta em que seus preços bateram à casa dos US\$ 50 o barril, o recuo gerou o comentário de que "(...) as cotações deverão ficar entre US\$ 35 e US\$ 40 ao longo do ano. A previsão pode ser interpretada como um sinal de que os preços internos não cairão tão cedo (...)" (Gásbrasil, 2005).

A citação acima reflete bem a questão que se coloca sobre o tipo de ajustamento observado nos preços da gasolina e não é difícil perceber que estes não ocorrem de maneira simétrica. Uma piora no cenário econômico, ou seja, a elevação na cotação dos preços do petróleo e/ou desvalorização do câmbio, por exemplo, não demora muito para começar a pressionar por um aumento nos preços dos combustíveis no mercado interno. Porém, quando há uma melhora, o retorno ao nível anterior é lento e, na maioria das vezes, sequer ocorre.

O tanque do automóvel é abastecido constantemente, e os preços da gasolina são afixados em qualquer lugar onde haja um posto. Conseqüentemente, a maioria dos consumidores está ciente dos movimentos nos preços da gasolina e observam sua assimetria quando os preços do petróleo mudam. É comum, consumidores queixarem-se que a ascensão dos preços da gasolina ocorre mais rapidamente quando os preços do petróleo estão subindo do que quando ocorre o contrário. Este comportamento exibe uma relação de assimetria dinâmica que pode ser vista com facilidade pelas pessoas.

Sendo assim, para ratificar as suspeitas dos consumidores é possível desenvolver uma análise dos movimentos nos preços da gasolina que permita comprovar esta suspeita. Neste sentido, pesquisadores têm investigado este fenômeno e as conclusões variam de acordo com o país em questão e com o método de análise utilizado. Mesmo nos casos em que se analisa um mesmo país os resultados podem diferir em função da escolha dos dados e/ou do método de estimação.

Dentre as pesquisas precedentes que fornecem evidências empíricas para a assimetria nos preços da gasolina, o estudo de Borenstein, Cameron e Gilbert (1997) é, com certeza, um dos mais detalhados. Com um conjunto de dados de 1986 a 1992 (perfazendo 260 observações semanais) em uma série de modelos de correção de erros bivariados, os autores testam a existência de assimetria no movimento dos preços entre vários estágios da produção e da distribuição. Neste estudo concluem que há forte evidência de assimetria em todos os segmentos do mercado. Suas conclusões foram no sentido de que os preços no mercado de varejo da gasolina nos Estados Unidos respondiam a um aumento nos preços do petróleo em quatro semanas, mas demoravam mais de oito semanas para responder a uma queda de igual magnitude.

Da mesma maneira, Müller e Ray (2004) também encontraram evidências da presença de assimetria sistemática no ajustamento dos preços dos combustíveis no mercado americano. Neste trabalho, os autores utilizaram-se de dados semanais que totalizaram uma amostra de 210 observações entre 1989 e 1993.

Bachmeier e Griffin (2003) utilizaram dados diários no período de 1985 a 1998 para analisar o mesmo problema e concluíram, de forma oposta, que não era possível assegurar a existência de assimetria. No entanto, suas conclusões basearam-se num modelo de correção de erros padrão em dois estágios como proposto originalmente por Engle e Granger (1987). Neste mesmo trabalho também foi utilizado o método proposto por Borenstein, Cameron e Gilbert (1997), sendo que, neste caso, usando dados diários, encontrou-se evidência de assimetria porém, insignificante.

Balke, Brown e Yucel (1998) obtiveram resultados ambíguos para suas estimativas que variavam de acordo com o método usado. Suas conclusões foram fundamentadas em uma amostra de dados semanais cobrindo o período de janeiro de 1987 à agosto de 1996. Para o modelo com correção de erros, mas sem restrição ao equilíbrio de longo prazo, a assimetria mostrou-se alta. Já no modelo em que consideraram parâmetros para o comportamento de alta e de baixa dos preços, os resultados foram irrelevantes nos casos em que a assimetria mostrou-se estatisticamente significativa. De forma geral, o modelo com correção de erros ajustou-se melhor aos dados o que, segundo os autores, sugeriria que a assimetria estava relacionada à taxa de mudança dos preços. Contudo, em se aceitando esta hipótese seria, necessário admitir que os resultados teriam relação com o modelo escolhido.

Radchenko (2004), através de um modelo de ajustamento parcial estudou a relação entre a assimetria nos preços da gasolina e a volatilidade nos preços do petróleo mostrando que existe uma forte relação negativa entre os dois. Suas conclusões foram no sentido de que o grau de assimetria pode ser atribuído a uma rápida resposta dos preços da gasolina à mudança nos preços do petróleo quando há um aumento da sua volatilidade. Este estudo foi desenvolvido com base numa amostra de 480 observações semanais entre 1994 e 2003.

No mesmo sentido, para os mercados onde a taxa de câmbio do dólar exerce algum tipo de influência na composição dos preços da gasolina, as conclusões diferem significativamente entre si. Godby et al. (2000) usando dados semanais de janeiro de 1990 à dezembro de 1996 concluíram pela não existência de assimetria no mercado canadense. Suas conclusões basearam-se

num modelo de correção de erros assimétrico, na forma de um Threshold Auto-Regressive Model (*TAR*), para testar o ajustamento dos preços da gasolina.

Na Holanda, Bettendorf, van der Geest e Varkevisser (2003), não obtiveram um resultado preciso. Usando um modelo de correção de erros assimétrico, deduziram que a existência ou não de assimetria está ligada à data escolhida para a realização das observações. Com base numa amostra de observações semanais compreendendo o período de janeiro de 1996 à dezembro de 2001, a existência de assimetria nos preços da gasolina mostrou-se relacionada com o dia da semana escolhido para a realização da observação. Desta maneira, dependendo da estimativa das mudanças semanais e do dia escolhido, encontrou-se ou não evidências de um ajustamento assimétrico. Este resultado dúbio não encontrou uma explicação satisfatória na teoria econômica.

Galeotti, Lanza e Manera (2003), estudando o mercado internacional, concluíram que Itália, Alemanha e Inglaterra não apresentavam qualquer tipo de assimetria na variação dos preços da gasolina, enquanto que França e Espanha a tinham, tanto na comercialização quanto na distribuição de combustíveis. Para tanto se valeram de uma amostra compreendida entre janeiro de 1985 a junho de 2000, para França, Inglaterra, Itália e Espanha enquanto que, para o caso alemão, a amostra compreendia o período de janeiro de 1985 a fevereiro de 1997.

Investigando a assimetria no mercado de gasolina das Filipinas, Salas (2002) estimou a partir de uma amostra de 160 observações semanais (entre janeiro de 1999 e fevereiro de 2002) três modelos econométricos para o ajustamento dos preços da gasolina. As conclusões foram no sentido de que os preços nos postos de revenda respondiam, de forma significativa, mais rapidamente a aumentos nos preços do petróleo do que a reduções.

O objetivo deste trabalho vai na mesma direção dos trabalhos aqui mencionados e procura encontrar evidências de ajustamento assimétrico dos preços da gasolina no mercado brasileiro. Aqui optou-se por uma auto-regressão vetorial sob co-integração com um modelo de correção de erros não-linear. O motivo desta escolha reside no fato deste método constituir-se num

mecanismo relativamente estabelecido para análise de comportamentos assimétricos, além de oferecer formas menos discutíveis de analisar os resultados.

No que se segue o texto foi dividido da seguinte forma: No segundo capítulo são apresentadas algumas das teorias econômicas que procuram explicar os motivos para um comportamento assimétrico nos preços da gasolina. Dentre estas se destacam as teorias baseadas nos poder de mercado e nos custos de busca. Com base nestes modelos, pode-se esperar que haja um comportamento não linear dos preços do combustível, em resposta às variações nos preços do petróleo e/ou da taxa de câmbio.

No terceiro capítulo será apresentada uma breve descrição sobre processos estocásticos de raiz unitária e sobre estimação de vetores de variáveis não-estacionárias sob co-integração. Este será o ponto de partida para o desenvolvimento dos modelos de correção de erros assimétricos a serem utilizados nas estimações feitas neste trabalho.

O quarto capítulo é destinado à apresentação dos modelos de séries temporais não-lineares que servirão de base para a formulação do modelo de correção de erros. Além disto, pretende-se tornar claro o porquê da escolha dos modelos estocásticos e paramétricos e, em particular dos modelos estimados em tempo discreto pertencentes à classe *TAR* (Threshold Autoregressive).

O capítulo seguinte tem por objetivo utilizar os dois anteriores na exposição sobre como é possível uní-los na construção de um método de estimação dos vetores auto-regressivos sob co-integração com um mecanismo de ajustamento assimétrico. Além disto, são apresentadas algumas considerações sobre dificuldades práticas de sua estimação.

A seguir, no sexto capítulo, realiza-se a análise empírica e são apresentados os resultados. São estimados os modelos desenvolvidos, testadas as hipóteses sobre o tipo de ajustamento mais adequado (linear ou não) e as estatísticas sobre seus desempenhos, o que visa permitir um confronto dos resultados e uma discussão acerca do método apropriado.

A última parte será dedicada às considerações finais. Além do exame dos resultados al-

cançados discute-se o desempenho de cada um dos métodos de estimação utilizados, suas vantagens e desvantagens na análise e a forma como os preços da gasolina respondem a uma mudança nos preços do petróleo e/ou na taxa de câmbio.

## CAPÍTULO 2

# Evidências para a Assimetria

Conforme discutido anteriormente, vários estudos econométricos confirmam a suspeita de que os preços da gasolina respondem assimetricamente tanto a variações na taxa de câmbio quanto nos preços do petróleo.

Contudo deve-se ressaltar que, na análise dos mercados de combustíveis, e em particular no mercado da gasolina, não há consenso sobre um teste econométrico formal que permita testar, dentre as várias explicações, a que conduz aos melhores resultados. Na tentativa de evidenciar a existência da assimetria nos preços, em face dos dados e dos modelos econométricos disponíveis, as controvérsias são inevitáveis. As conclusões obtidas nas estimações devem ser utilizadas para determinar se a resposta dos preços da gasolina é de fato assimétrica.

Economistas propõem várias teorias para explicar este fenômeno. Dentre estas explicações incluem-se as que atribuem este comportamento ao poder do mercado, aos custos de transação, a resposta do consumidor à mudança de preços, os custos de ajuste na refinaria e o comportamento dos *markups* sobre os ciclos de negócios, para citar apenas as mais usadas.

O poder de mercado é provavelmente a explicação mais interessante para aqueles que observam a assimetria nos preços da gasolina. No entanto, embora a intuição possa atribuir a existência de assimetria ao poder de mercado, Peltzman (2000) mostrou que nos EUA este fenômeno ocorre independentemente de sua estrutura. Os custos que o consumidor tem na procura pelo menor preço e as vantagens de localização que alguns postos de revenda possuem, podem fornecer certo poder de mercado aos varejistas, mas tal fato também pode ser visto como custos de diferenciação do produto sob a hipótese de competição monopolística.

Considere-se, por exemplo, uma indústria com algumas firmas dominantes que agem em conluio para manter suas margens de lucro elevadas. Se as firmas avaliassem o acordo e tivessem o conhecimento imperfeito sobre os preços que seus concorrentes estão pagando às distribuidoras, cada uma delas enfrentaria uma função assimétrica de perda na qual estas se mostrariam mais relutantes em baixar seu preço de venda do que subí-lo. Sendo assim,

”This theory is based on the assumption that the observed asymmetry in the response of gasoline prices is evidence of imperfect competition among retailers. (...) In this case, price reduction occurs only if there is a significant drop in sales indicating price cutting by other retailers” (Radchenko, 2004).

Quando os preços das distribuidoras começam a subir, cada firma procura rapidamente levantar seu preço de venda sinalizando a seus concorrentes que está aderindo ao acordo tácito não diminuindo sua margem de lucro. Mas, quando o preço das distribuidoras cai, cada firma é lenta em reduzir seus preços de venda porque isto pode ser interpretado como um sinal, por seus concorrentes, que ela está diminuindo sua margem de lucro e assim procurando burlar o acordo.

Outra hipótese a ser levada em conta é a de que no mercado de varejo da gasolina, os custos de transação por parte do consumidor poderiam conduzir a um poder provisório de mercado pelos postos de revenda e a uma resposta assimétrica às mudanças no preço por atacado como sugerem Borenstein, Cameron e Gilbert (1997) e Peltzman (2000). Neste caso, cada posto de gasolina teria um pequeno monopólio local que é limitado pela capacidade de procura do consumidor.

Isto ocorreria uma vez que, quando os preços por atacado se levantam, os donos dos postos de combustível procuram manter suas margens de lucro e repassam rapidamente o aumento para os preços de revenda. Quando os preços por atacado caem, entretanto, cada estação mantém temporariamente suas margens de lucro repassando a diminuição lentamente aos clientes. O que ocorreria somente depois que os clientes efetuassem uma nova pesquisa para encontrar

preços menores. Somente neste estágio os postos de revenda seriam forçados a praticar preços a um nível competitivo o que levaria as margens de lucro em cada posto a se estabelecerem num nível normal.

Um fator que deve ser levado em conta nesta hipótese é que os custos de uma pesquisa por preços menores é provavelmente muito mais elevado para a maioria dos consumidores do que os ganhos correspondentes em se encontrar um preço mais barato para a gasolina.

”The key notion in this line of thinking is that asymmetric adjustment presents competitors an opportunity to undercut the retailer’s prices when costs go down.(...) High on the list of candidate explanations for such insulation are those of search and switching behaviors of customers. Even if the consumers knew that a cheaper price was available elsewhere, it may not be worthwhile for them to switch retailers because there are costs involved in the transaction of switching, and learning about the new alternative” (Müller e Ray, 2004).

Portanto, o montante de dinheiro economizado é uma parte muito pequena da renda do consumidor, de modo que os consumidores não estariam dispostos a procurar a menos que o diferencial de preço nesta tarefa gerasse uma economia muito elevada. Assim, restaria saber o quão grande é este diferencial para o consumidor médio a ponto de justificar uma intensa pesquisa. O valor resultante de uma procura detalhada pelo menor preço resultaria na economia de, no máximo, alguns reais, o que não justificaria o gasto de tempo e dinheiro despendido na pesquisa.

Além das explicações baseadas nos poder de mercado e nos custos de transação, há ainda outras hipóteses sobre o fenômeno em questão. Estas teorias incluem os *markups* que variam de acordo com os ciclos de negócios e os custos de ajuste na refinaria. Uma outra hipótese baseia-se na resposta do consumidor às mudanças nos preços da gasolina. Esta resposta pode contribuir para a assimetria entre os movimentos nos preços do petróleo e nos preços da gasolina do seguinte modo:

1. Se os consumidores aumentarem suas compras de gasolina para se antecipar a aumentos adicionais quando o preço da gasolina está subindo, então pode ocorrer um aumento da demanda que fará com que o preço suba mais rapidamente.
2. Se os consumidores não retardarem suas compras quando seu preço está caindo tanto quanto aceleraram suas compras quando os preços estavam aumentando então, o preço da gasolina cairá mais lentamente.

Ainda que algumas das teorias expostas acima tentem fornecer uma possível explicação para a assimetria nos preços da gasolina, não há consenso sobre a mais adequada. Sendo assim, o que interessa no presente trabalho é averiguar se este fenômeno ocorre no varejo de gasolina brasileiro.

Para investigar se existe de fato assimetria na resposta dos preços da gasolina a alterações nos preços do petróleo e/ou na taxa de câmbio será necessário o uso de uma ferramenta econométrica que seja aplicável neste caso. Como será visto adiante, as séries temporais possuem raiz unitária e, portanto, torna-se necessário o uso de um método adequado para o estudo de séries nestas condições. Sendo assim, os próximos capítulos servirão para apresentar os modelos de auto-regressão vetorial com modelo de correção de erros assimétrico, através do qual se pretende efetuar a análise.

## Auto-regressão Vetorial Sob Co-integração

Uma série temporal pode ser entendida como um conjunto de observações feitas sequencialmente no tempo e definida como uma função aleatória  $x$  de uma variável independente  $t$ . Assim, os valores possíveis das séries temporais em um dado tempo  $t$  são descritos por uma variável aleatória  $X_t$  e pela distribuição de probabilidades a ela associada.

O valor observado  $x_t$  da série temporal no tempo  $t$  é então considerado como um dos infinitos valores que a variável  $X_t$  pode assumir. Em outras palavras, o comportamento da série temporal é descrito por um conjunto de variáveis aleatórias em que  $t$  pode assumir qualquer valor entre  $-\infty$  e  $+\infty$ . Neste sentido, as propriedades estatísticas das séries podem ser descritas por distribuições de probabilidade em um conjunto de tempos  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$  com  $T = \mathbb{Z}$ .

A discussão a seguir está embasada no livro de Hamilton (1994). Tomando um espaço amostral definido como  $\Omega$ ,  $F$  uma  $\sigma$ -álgebra definida no espaço amostral e  $P$  a probabilidade mensurada em  $\Omega$ , denomina-se de processo estocástico, o conjunto ordenado de variáveis aleatórias  $X_t$  em associação com sua distribuição de probabilidades.

**Definição 3.1** (Processo estocástico). Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias  $\{X(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$  definida no espaço  $(\Omega, F, P)$ .

Em particular, para uma dada probabilidade,  $\omega$ ,  $X(t, \bar{\omega})$  é uma função de  $T$  em  $\mathfrak{R}$ , denominada de realização do processo estocástico. Analogamente, para um dado  $t$ , fixado, define-se a função  $X(\bar{t}, \omega)$  de  $\Omega$  em  $\mathfrak{R}$ . Uma série temporal pode então, ser gerada a partir de um processo estocástico tomando um conjunto de pontos em  $T$ . Representando a sequência  $\{X(\bar{t}, \omega)\}_{t=-\infty}^{+\infty}$  como pontos no espaço euclidiano de dimensão infinita  $\mathfrak{R}^\infty$  obtêm-se a

**Definição 3.2** (Seqüência aleatória). Uma seqüência aleatória é definida como uma função  $f : \Omega \longrightarrow \mathfrak{R}^\infty$  tal que  $f(\omega) = (\dots, X_{-2}(\omega), X_{-1}(\omega), X_0(\omega), X_1(\omega), X_2(\omega), \dots)$ , e  $X_t : \mathfrak{R}^\infty \longrightarrow \mathfrak{R}$  são as funções coordenadas de  $f(\omega)$ . Assim a seqüência  $\{X\}_{-\infty}^\infty$  é chamada de seqüência aleatória.

Para um dado  $\omega$ , denomina-se  $f(\omega)$  de realização da seqüência aleatória. Na prática, pode-se observar apenas uma realização de  $f(\omega)$  com um subconjunto finito de  $X_t$ , ou seja,  $\{X_t\}_{t=1}^n$ .

Neste caso, inferir sobre a natureza dessas distribuições de probabilidade a partir de uma única ou um pequeno número de séries torna-se um exercício de pouca significância prática. Sendo assim é necessário fazer algumas simplificações. Uma das mais importantes é admitir que o correspondente processo estocástico seja estacionário. Considera-se uma série estacionária aquela que está em equilíbrio estatístico, no sentido que não contém nenhuma tendência, enquanto que uma série não-estacionária é aquela cujas propriedades mudam com o tempo. Define-se então o conceito de estacionariedade como:

**Definição 3.3** (Estacionariedade forte). Uma seqüência aleatória  $\{X_t\}_{-\infty}^{+\infty}$  é estacionária em sentido forte se a distribuição de probabilidade conjunta de  $(\dots, X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, \dots)$  tomada em  $n$  observações é a mesma independentemente da origem em  $t \in T = \mathbb{Z}$ .

Este pressuposto é, portanto, mais forte que o de distribuição idêntica, pois necessita que a série tenha todas as suas distribuições marginais de probabilidade idênticas. Por este motivo, o termo estacionariedade é usualmente interpretado no sentido de “estacionariedade fraca” ou “covariância estacionaria”.

Uma série temporal fracamente estacionária pode ser adequadamente descrita pelos seus primeiros momentos. Nesses momentos estão incluídas a média, variância e também a covariância. Assim, uma aproximação alternativa é supor que o processo estocástico pode ser adequadamente descrito por meio de um modelo parametrizado, os quais podem ser estimados a partir dos dados. Além disso, a correlação entre variáveis em uma série estacionária é determinada apenas pela sua distância no tempo (ou seja, pelo lag de tempo) e não pela sua posição

no tempo.

**Definição 3.4** (Estacionaridade fraca). Uma série temporal  $\{X_t\}_{-\infty}^{+\infty}$  é dita ser fracamente estacionária (ou covariância estacionária) se

1.  $EX_t = c \forall t$  com  $c \in \mathfrak{R}$ ;
2.  $EX_t^2 < \infty \forall t$ ; e
3.  $Cov_{xx}(t, s) = Cov_{xx}(t + r, t + s) \forall r, t, s \in Z$

A estacionaridade fraca é uma suposição menos restritiva na qual se pressupõe que a distribuição total das variáveis na série não muda com o tempo. Neste sentido, estacionaridade implica que a média e a função de autocorrelação de uma série de dados não muda e, portanto, diferentes amostras de uma série de dados estacionária podem ser consideradas como tendo uma mesma média e variância.

Apesar de ser bastante útil, o conceito de estacionaridade não pode ser aplicado, ou admitido em todas as séries econômicas. É comum que as séries em estudo apresentem algum tipo de tendência na sua trajetória temporal. Usualmente define-se tendência com sendo de dois tipos distintos: determinística ou estocástica. Séries temporais que possuem algum tipo de tendência são comumente chamadas de series não-estacionárias. Com a emergência da literatura sobre regressões espúrias, sabe-se agora que as técnicas clássicas de regressão são inválidas quando aplicadas a variáveis que incluem um forte “movimento de tendência”.

Isto é porque a inferência estatística clássica foi desenhada apenas para variáveis que são estacionárias (isto é, com distribuições que não se alteram ao longo do tempo, mantendo ao menos média e variância constantes). Na análise de regressão tradicional se dá grande importância a medidas da qualidade do ajustamento (como o R-quadrado ou o erro médio da regressão) e as estatísticas  $t$ . Mas pode ocorrer o fenômeno da regressão espúria.

Regressões que envolvem processos com tendência estocástica podem dar resultados falsos. Se  $y_t$  e  $x_t$  são processos com tendência estocástica (também conhecidos por processos com raiz unitária, que serão definidos adiante) mutuamente independentes, ou seja,  $y_t$  é independente de  $x_{t-j}$  para todo  $t$  e  $j$ , então a regressão via MQO de  $y_t$  contra  $x_t$  para  $t = 1, \dots, n$ , com ou sem um intercepto, resultará uma estimativa estatisticamente significativa do parâmetro de inclinação. Se  $n$  for grande, o valor absoluto da estatística  $t$  converge em probabilidade para  $\infty$  se  $n \rightarrow \infty$ . Poderia-se concluir então que  $y_t$  depende de  $x_t$ , quando na verdade são independentes. Este fenômeno é chamado regressão espúria. Deve-se então tomar cuidado ao analisar séries temporais através de métodos clássicos de inferência. Se a série é um processo de raiz unitária, a aplicação ingênua de tais métodos pode render resultados sem qualquer sentido.

Isto ocorre particularmente quando as variáveis envolvidas são do tipo *random walk*. Um processo deste tipo é o exemplo mais comum de uma série que contém tendência estocástica e pode ser definido da seguinte forma:

**Definição 3.5** (*Random walk*). Seja uma seqüência  $\{U_t\}_{t=1}^n$  identicamente e independentemente distribuída de variáveis aleatórias com  $EU_t = 0$  e  $EU_t^2 < \infty$ . A seqüência  $S_t = \sum_{i=1}^t U_i$  é chamada de *random walk*.

Obviamente  $ES_t = 0$ , mas  $Var(S_t) = t\sigma^2$  o que torna a série não-estacionária. Uma série que apresenta estas características é dita seguir uma tendência estocástica. Tem-se ainda que pela transformação  $\Delta S_t = U_t$  pode-se obter uma série estacionária. Esse resultado pode ser generalizado de muitas maneiras, por exemplo, incluindo-se uma constante no processo de forma que se obtenha  $\Delta S_t = \mu + U_t$ .

Em geral, variáveis que podem ser tornadas estacionárias através de uma transformação, conforme mostrada acima, são denominadas variáveis integradas. Sendo assim, diz-se que uma variável  $X_t$  é integrada de ordem  $d$  e denota-se por  $X_t \sim I(d)$  se tiver que ser diferenciada  $d$  vezes para se tornar estacionária. Pode-se definir este conceito da seguinte forma:

**Definição 3.6** (Variáveis integradas ou com raiz unitária). Uma série  $X_t$  é dita integrada de pri-

meira ordem (e escreve-se  $I(1)$ ) se ela for não-estacionária, mas  $\Delta X_t$  é um processo fracamente estacionário.

Uma vez que esta variável pode se tornar estacionária através de uma transformação, pode-se argumentar que o problema relacionado à sua estimação deveria ser resolvido de forma simples. Bastaria para tanto, tomar sua primeira diferença obtendo uma série estacionária. No entanto, regredir séries não-estacionárias através de suas diferenças não é o modo mais adequado se existe a suspeita de que elas mantenham determinada relação ao longo do tempo.

Afim de definir o conceito de duas séries que, são integradas de mesma ordem e mantêm determinada relação ao longo do tempo, utiliza-se o termo co-integração. As formas adequadas de representação, estimação e testes de hipóteses, foram apresentadas no artigo seminal de Engle e Granger (1987).

Para entender o sentido que existe por trás do conceito de co-integração pode-se tomar o seguinte raciocínio: se duas ou mais séries não estacionárias estiverem ligadas por uma combinação de forma que exista uma relação de equilíbrio de longo prazo, então mesmo que isoladamente contenham uma tendência estocástica, elas manterão um percurso bastante próximo ao longo do tempo. Engle e Granger (1987) mostraram que quando é possível encontrar uma relação entre séries deste tipo que seja estacionária, uma forma adequada de estimação é efetuar uma auto-regressão vetorial em que estejam incluídos os desvios em relação ao equilíbrio de longo prazo. Pode-se então usar a seguinte definição:

**Definição 3.7** (Co-integração). Um vetor de séries temporais é dito co-integrado se,  $X_t$  é  $I(1)$  e existe algum vetor  $\alpha \neq 0$  tal que  $\alpha'X_t$  seja  $I(0)$ .

Com base nas definições acima pode-se agora definir formalmente o conceito de co-integração. A princípio, sabendo que as séries são não-estacionárias, esperamos que não haja uma representação na forma da decomposição de Wold<sup>1</sup>. No entanto pode-se obter uma decomposição de  $\Delta X_t$  já que esta série é por definição estacionária.

---

<sup>1</sup>Este teorema afirma que podemos decompor um processo estacionário com média zero e escrevê-lo na forma

Seja então  $y_t \in \Re$  um processo  $I(1)$ . Sua primeira diferença na forma da representação de Wold é dada por

$$\Delta y_t = C(L)\varepsilon_t \quad (3.1)$$

em que  $\varepsilon_t \in R^k$  é um ruído branco<sup>2</sup> com  $E(\varepsilon_t) = 0$  e  $\Sigma = E(\varepsilon_t, \varepsilon_t')$ . Assume-se ainda que  $\varepsilon_t$  seja Identicamente e Independente Distribuído (*iid*) e escreve-se o operador *lag* na forma matricial  $C(L) = \sum_j C_j L^j$  de ordem  $k \times k$ . A decomposição de Beveridge-Nelson (BN) diz que qualquer processo  $I(1)$  cuja primeira diferença satisfaz  $\psi(L) = \sum_j \psi_j \varepsilon_{t-j}$  e seja absolutamente somável de tal forma que  $\sum_j |C_j| |j|^{1/2}$ , com  $E(\varepsilon_t) = 0$  e  $\Sigma = E(\varepsilon_t, \varepsilon_t')$  pode ser escrito como uma soma ruídos brancos, condições iniciais, mais um processo estacionário.

Fazendo  $C(L) = C(1) + (L - 1)\tilde{C}(L)\varepsilon_t$  com  $\tilde{C} = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{C}_j L^j$  e  $\tilde{C}_j = \sum_{k=j+1}^{\infty} C_k$  tal que  $\tilde{\varepsilon}_{t-1} - \tilde{\varepsilon}_t = (L - 1)\tilde{C}(L)\varepsilon_t$  obtêm-se  $\Delta y_t = C(1)\varepsilon_t + \tilde{\varepsilon}_{t-1} - \tilde{\varepsilon}_t$ , o que implica que

$$y_t = C(1) \sum_{j=1}^t \varepsilon_j \tilde{\varepsilon}_0 - \tilde{\varepsilon}_t + y_0 \quad (3.2)$$

tal que  $\tilde{\varepsilon}_t$  e  $\tilde{\varepsilon}_0$  são estacionários. Sabe-se que  $y_t$  é um processo  $I(1)$  e que para haver co-integração deve haver algum  $\alpha'y_t$  com  $\alpha \neq 0$ , que seja  $I(0)$ . Por (3.2) percebe-se que isto ocorrerá no caso em que  $\alpha'C(1) = 0$ . Portanto, ainda que seja não-estacionário, se  $\alpha'C(1) = 0$  significa que  $\alpha'y_t = \alpha'(\tilde{\varepsilon}_0 - \tilde{\varepsilon}_t)$  e, por conseguinte,  $\alpha'y_t$  tem variância finita enquanto que  $E\alpha'y_t = 0$ . Assim, existe uma combinação  $\alpha'y_t$  que flutua em torno da média zero numa trajetória estacionária.

Considerando-se então a representação na forma (3.1), é possível afirmar que desde que o

---

de um componente previsível, um processo de Médias Móveis e com inovações na forma de ruídos brancos. A prova deste teorema está além do escopo deste trabalho, mas pode ser encontrada em textos como de Hamilton (1994)

<sup>2</sup>Uma seqüência aleatória é dita ser um ruído branco, se qualquer valor da seqüência possuir média zero, variância constante (homocedasticidade) e não existir autocorrelação serial.

processo seja não-estacionário torna-se impossível sua representação na forma de um *VAR* em primeira diferença, dado que  $C(L)$  é não invertível. Engle e Granger (1987) provaram que existe uma representação na forma de uma Auto-regressão Vetorial de Médias Móveis (*VARMA*) da forma

$$A(L)y_t = d(L)\varepsilon_t \quad (3.3)$$

em que  $A(L) = adj[C(L)](1-L)$  e  $d(L) = det[C(L)]$  tal que  $A(1)$  é finito, de posto reduzido, e  $d(1)$  seja finito.

Se for assumido que  $d(L) = 1$  e que  $A(L)$  tem ordem finita, pode-se exprimir (3.3) na forma de um *VAR* em nível. Sabendo-se que existe uma imposição sobre  $C(L)$  justifica-se a seguinte representação na forma de um *VAR*:

$$y_t = \pi_1 y_{t-1} + \pi_2 y_{t-2} + \dots + \pi_p y_{t-p} \quad (3.4)$$

ou

$$\pi(L)y_t = \varepsilon_t \quad (3.5)$$

Então, esta representação é equivalente a

$$\Delta y_t = \pi y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta y_{t-1} + \Gamma_2 \Delta y_{t-2} + \dots + \Gamma_{p-1} \Delta y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (3.6)$$

em que  $\pi = -I + \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_p$  e, portanto,  $\Gamma_i = -(\pi_i + \dots + \pi_p)$ . Isto implica, portanto, que a matriz tem posto reduzido. Seja  $\psi(L) = I - \sum_{k=1}^{p-1} \Gamma_k L^k$ . Desde que  $\pi = -\pi(1)$ , (3.6) pode

ser escrito como  $\psi(L)\Delta y_t = \pi y_{t-1} + \varepsilon_t$ . O que, considerando as implicações de (3.6) para o equilíbrio do sistema, significa que no longo prazo tem-se  $\varepsilon_t = 0$  e  $\Delta y_t = 0 \forall t$ . Logo, no longo prazo, os valores de  $y_t$  satisfazem  $\pi y_t = 0$  e a matriz  $\pi$  contém as relações que os elementos têm de manter no vetor  $y_t$  para o equilíbrio.

A forma (3.6) é chamada de Vetor de Correção de Erros do VAR e  $\pi y_t$  o modelo de correção de erros.

Generalizando, pode-se entender a equação (3.4) como um processo estocástico conjunto de  $y_t$ . Segue-se daí que  $y_t$  será estacionário se  $\pi$  for de posto pleno, de forma oposta será co-integrado com  $r$  vetores de co-integração se  $0 < \text{posto}(\pi) = r < k$ . Se  $y_t$  for  $I(1)$  sem nenhuma relação de co-integração então  $\pi = 0$ . Isto mostra como este fato foi muito bem observado por Johansen para construir seus testes destinados a averiguar existência de co-integração.

Na literatura são encontrados essencialmente dois métodos para realizar a estimação. O primeiro deles ocorre em dois estágios e começa com uma regressão por mínimos quadrados das variáveis, de forma a obter a equação de co-integração para então proceder à estimação da especificação dinâmica. Este foi o método desenvolvido originalmente no trabalho seminal de Engle e Granger (Metodologia de Engle-Granger). A segunda forma é conhecida como metodologia de Johansen, que é uma abordagem mais geral onde se utiliza um sistema dinâmico de equações. Esta metodologia é utilizada, em geral, quando se suspeita da existência de mais de um vetor de co-integração. Para investigar esta possibilidade, Johansen propõe dois tipos de estatísticas que testam a significância dos vários vetores de co-integração, definidas conforme abaixo:

1.  $\lambda_{\text{trace}}(r) = -T \sum_{i=r+1}^n \ln(1 - \hat{\lambda}_i)$
2.  $\lambda_{\text{max}}(r, r+1) = -T \ln(1 - \hat{\lambda}_{r+i})$

onde:  $T$  se refere ao número de observações e  $\hat{\lambda}$  são os autovalores estimados da matriz estimada  $\pi$ .

Os dois testes definidos acima são construídos a partir da matriz formada pelos coeficientes da regressão. O primeiro deles, conhecido com teste de traço, consiste em testar sucessivamente se  $r = 0$  (ou seja, a não existência de vetores de co-integração)  $r \leq 1$ ,  $r \leq 2$ , até que não se possa rejeitar  $H_0$ . O segundo tipo de teste, conhecido por teste do máximo autovalor, testa a hipótese de que existam no máximo  $r$  vetores de co-integração contra a alternativa de existirem  $r + 1$  vetores. O correspondente valor de  $r$  coincide com o número de vetores de co-integração. Ambos os testes têm distribuição assintótica cujos valores críticos foram obtidos por Johansen e Juselius (1990).

Deve-se ainda enfatizar que nas duas metodologias expostas acima estão pressupostos comportamentos lineares para as variáveis em análise. Na forma proposta por Engle e Granger (1987) a partir da regressão via mínimos quadrados ordinários (MQO) testa-se a existência de raiz unitária nos resíduos. Em caso de rejeição, a estacionariedade da série é admitida em torno da média zero. Já pelos testes de Johansen são utilizadas as matrizes dos coeficientes da regressão e, caso o posto desta matriz seja diferente de zero, admite-se a existência de um ajustamento simétrico, também em torno da média zero.

Desta forma, se as duas séries são  $I(1)$  e se for possível encontrar uma relação entre elas que seja estacionária, pode-se garantir que estas serão co-integradas. Além disto, o teorema de Granger afirma que existe um modelo de correção de erros, mas não há nada que possa garantir que este modelo deva ter um comportamento linear. No caso em que o vetor de co-integração ou o mecanismo de ajuste seja assimétrico, pode haver dificuldades na inferência. Ao invés disto pode-se utilizar outras formas de especificação para o comportamento de  $\pi y_t$  que possibilite uma melhoria na estimação das séries.

Para que isto seja possível será necessário escolher, dentre inúmeros modelos não-lineares existentes, aqueles que sejam apropriados para viabilizar a estimação do modelo de correção de erros na sua forma assimétrica. Assim, o próximo capítulo será destinado a definir uma forma adequada para seu comportamento.

## Modelos de Séries Temporais Não-lineares

A ciência das séries temporais tem avançado bastante nos últimos anos no campo dos modelos não-lineares. Algumas séries podem ser bem analisadas por uma aproximação linear de seu verdadeiro processo gerador; no entanto, nem sempre este tipo de procedimento traz bons resultados. De fato, alguns dos mais importantes fenômenos da ciência econômica apresentam trajetórias descontínuas e/ou assimétricas.

Os modelos não-lineares podem ser introduzidos em muitos dos campos de estudo da econometria das séries temporais. Sua utilização traz, muitas vezes, uma melhoria nas estimativas e na formulação de previsões. Dentre as vantagens no seu emprego pode-se citar, por exemplo, o fato de que os modelos não-lineares caracterizam assimetrias na dinâmica do ajustamento de curto prazo em relação ao equilíbrio de longo prazo. De forma análoga, podem ser utilizados para caracterizar assimetrias também no processo de ajustamento de longo prazo e ainda na melhoria de previsão de eventos raros, como, por exemplo, as recessões. Viabilizam também, a análise de assimetrias do processo estocástico de séries econômicas que apresentam ciclos, o que permite, portanto, um melhor estudo do seu comportamento. Além de permitirem a mensuração e análise de respostas a choques que dependem do seu tamanho, sinal e de sua história quando atingem o sistema.

No caso deste trabalho o que interessa mais de perto é a possibilidade que estas especificações abrem para verificar integração e/ou co-integração de séries tendo como uma das hipóteses um processo estacionário e a outra que seja um *random walk*. Neste caso, também é de extrema importância o fato de que tais modelos viabilizem um campo de análise onde é possível testar a hipótese de existência de relações de co-integração para casos em que um modelo linear não é adequado ou que não é capaz de evidenciar.

A classe de modelos não-lineares a serem utilizados no caso em estudo são aqueles com regimes determinados por variável observada da linha Threshold Autoregressive (*TAR*) que possuem transição discreta. Existem ainda outras especificações, determinadas de forma análoga como, por exemplo, o Smooth Transition Autoregressive (*STAR*), que admitem transição contínua. Para citar outros tipos de modelos não-lineares existentes, pode-se mencionar ainda os modelos baseados na equação da variância (conhecidos como especificações da família ARCH) e os modelos com regimes determinados por variável não-observada chamados Markov-Switching.

Dentre as possibilidades descritas acima, serão utilizados apenas os modelos estocásticos paramétricos em tempo discreto dado que possuem uso mais apropriado para os propósitos do presente trabalho. Este tipo de especificação (como exposto anteriormente conhecido por modelo *TAR*) foi introduzido originalmente por Tong (1983) e, as razões desta escolha podem ser justificadas a partir da observação de algumas das suas características em comparação com as abordagens alternativas.

Como primeiro aspecto deve-se ressaltar a escolha dos processos estocásticos. Essa escolha reside no fato de que as formulações baseadas nos processos caóticos deterministas, apesar de terem grande importância teórica e filosófica, em termos práticos têm uso extremamente reduzido. A não ser que seu tratamento seja realizado pela aplicação de técnicas de alguma forma associada a processos estocásticos. Ainda assim, os modelos *TAR* têm profunda relação com alguns dos processos caóticos deterministas, mas a discussão deste aspecto está além do escopo deste texto.

Em segundo lugar, não serão consideradas também as técnicas não paramétricas, de Neural Network, de variável não-observada (Markov-Switching) e demais modelos que não têm aplicação adequada para os propósitos deste texto. No entanto, vale ressaltar, que os modelos paramétricos e não lineares na média apresentam, algumas vezes, desempenho superior às abordagens tradicionais e alguns desses procedimentos poderiam ser utilizados para melhorar previsões, de forma análoga ao que já existe em outras ciências.

Por fim deve-se salientar a escolha dos modelos em tempo discreto. Sua utilização se faz em razão da sua simplicidade, principalmente de aplicação de estimação quando comparados às extensões de tempo contínuo (modelos STAR) e por ainda não existir uma literatura que aborde comparativamente estas duas classes de modelos. Em geral, os modelos *TAR* têm larga utilização, comparados com os demais e, por este motivo apresentam literatura bem mais desenvolvida e consolidada, o que permite maior segurança no seu manuseio.

Uma vez escolhida a classe de modelos que serão utilizados pode-se apresentá-los de maneira mais formal. Para detalhar como estas especificações funcionam consideremos, como na discussão desenvolvida em Enders (2000), um processo auto-regressivo simples de primeira ordem:

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4.1)$$

Se  $0 < a_1 < 1$ , define-se então  $\bar{y}$  como o valor de longo prazo  $\frac{a_0}{(1-a_1)}$  para reescrever o sistema (4.1) como  $y_t = \bar{y} + a_1(y_{t-1} - \bar{y}) + \varepsilon_t$ .

Sendo assim a equação acima é considerada em equilíbrio de longo prazo se  $y_t = \bar{y}$ . Caso contrário, o valor de  $a_1$  representa o percentual de desvios que tendem a permanecer do período corrente para o próximo.

Supondo-se que o valor que divide o comportamento do sistema seja o valor de longo prazo, ou seja,  $\bar{y}$  então nos períodos em que as observações estão acima deste valor, de forma que  $y_{t-1} - \bar{y} \geq 0$ , os desvios assumem um comportamento diverso daquele observado nos períodos em que as observações estão abaixo do parâmetro,  $y_{t-1} - \bar{y} < 0$ . Esta situação pode ser caracterizada da seguinte forma; supondo que  $|a_1| > |a_2|$  o sistema é agora reescrito como:

$$y_t = \begin{cases} \bar{y} + a_1(y_{t-1} - \bar{y}) + \varepsilon_{1t} & \text{se } y_{t-1} \geq 0 \\ \bar{y} + a_2(y_{t-1} - \bar{y}) + \varepsilon_{2t} & \text{se } y_{t-1} < 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Desta forma, e de acordo com a equação 4.2, quando o sistema está acima do equilíbrio exibe uma trajetória determinada pelo processo definido na parte superior. De forma análoga quando está abaixo do equilíbrio o processo será definido pela equação na parte inferior. Os valores de  $a_1$  e  $a_2$  determinam o percentual de desvios que permanecem de um período para outro e, como  $|a_1| > |a_2|$ , pode-se perceber que, quando o sistema está acima do equilíbrio tende a exibir um processo de ajustamento mais lento do que no caso alternativo.

Cada um dos regimes descritos acima é representado por um processo auto-regressivo, que pode ser caracterizado como uma equação à diferença linear com coeficiente constante, cuja solução é da forma  $y_t = \frac{a_0}{(1-a_1)} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon_{t-i}$ . Em muitas circunstâncias, no entanto, o valor que divide a séries nos dois regimes é desconhecido, *a priori*, o que faz com que seja necessário estimá-lo juntamente com os demais parâmetros da equação. Uma maneira adequada de encontrar este valor será discutida no capítulo 5. Por hora, é suficiente informar que o *threshold* ( $\tau$ ) pode ser obtido adequadamente através de uma estimativa superconsistente, que foi originalmente desenvolvida por Chan (1993).

De posse destas informações, e se for imposta a restrição de que  $var(\varepsilon_{1t}) = var(\varepsilon_{2t})$ , pode-se então definir formalmente um modelo *TAR* da seguinte forma:

**Definição 4.1** (Threshold Autoregressive Model). O processo  $Y_t$  é dito ser Threshold Autoregressive de primeira ordem se é estacionário de forma que  $y_t = a_1 I_t y_{t-1} + a_2 (1 - I_t) y_{t-1} + \varepsilon_t$ , onde  $I_t$  é uma função *booleana* que pode ser definida como  $I_t = f(y_{t-1} - \tau)$  e  $\tau$  é o parâmetro chamado *threshold*. Então,  $I_t$  assume os valores:

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{se } y_{t-1} \geq \tau \\ 0 & \text{se } y_{t-1} < \tau \end{cases}$$

e  $\varepsilon_t$  é um ruído branco, conforme anteriormente definido, independente de  $\tau$  e de  $y_t$ .

Neste mesmo sentido é possível também reescrever a formulação anterior de maneira al-

ternativa fazendo com que o threshold esteja relacionado com a taxa de variação no período anterior. Esta formulação é conhecida por Momentum Threshold Auto-Regressive Model (*M-TAR*) e foi introduzida por Enders e Granger (1998) ao mesmo tempo em que Caner e Hansen (1998). Assim, é possível que as séries exibam trajetórias mais prolongadas numa determinada direção do que em outra. Formalmente define-se este modelo conforme a seguir:

**Definição 4.2** (Momentum Threshold Autoregressive Model - (*M-TAR*)). O processo  $Y_t$  é dito ser Threshold Autoregressive de primeira ordem se é estacionário de forma que  $y_t = a_1 M_t y_{t-1} + a_2 (1 - M_t) y_{t-1} + \varepsilon_t$ , onde  $M_t$  é uma função *booleana* que pode ser definida como  $M_t = f(\Delta y_{t-1} - \tau)$  e  $\tau$  é o parâmetro chamado threshold. Então,  $M_t$  assume os valores:

$$M_t = \begin{cases} 1 & \text{se } \Delta y_{t-1} \geq \tau \\ 0 & \text{se } \Delta y_{t-1} < \tau \end{cases}$$

em que  $\tau$  é o parâmetro chamado threshold,  $\varepsilon_t$  é um ruído branco independente de  $\tau$  e de  $y_t$ .

De acordo com o argumento apresentado por Caner e Hansen (1998) na especificação do modelo *M-TAR*, se o processo tiver raiz próxima o bastante da unidade, sua especificação pode trazer resultados mais adequados que um modelo *TAR* tradicional.

O desenvolvimento destes dois modelos foi incorporado ao método de estimação de variáveis co-integradas por Enders e Granger (1998) e Enders e Siklos (2001) para testar a hipótese da existência de raiz unitária nos resíduos da equação de co-integração contra a hipótese alternativa de um ajustamento assimétrico (tipo *TAR* e *M-TAR*). Este estudo permitiu aos autores criar um método de estimação que permite definir o modelo de correção de erro na forma das equações definidas acima.

A exploração acima tem como intuito permitir o desenvolvimento de um modelo de correção de erros assimétrico (TVECM - Threshold Vector Error Correction Model, como é conhecido na literatura internacional) que permita sua utilização na análise da assimetria dos preços

da gasolina. Antes, porém, faz-se necessário explicitar, a partir da junção destes dois últimos capítulos, como é possível estabelecer esta ferramenta.

## Modelo de Correção de Erros Não-linear

No capítulo 3 foi apresentada a definição formal de co-integração. Retomando aquela discussão, foi mostrado que quando é possível encontrar uma relação entre variáveis  $I(1)$  que seja estacionária uma forma adequada de estimação é efetuar uma auto-regressão vetorial em que estejam incluídos os desvios em relação ao equilíbrio de longo prazo. A representação do sistema na forma de um modelo de correção de erros tem a seguinte forma:

$$\Delta y_t = \pi y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta y_{t-1} + \Gamma_2 \Delta y_{t-2} + \dots + \Gamma_{p-1} \Delta y_{t-p} + \mu_t \quad (5.1)$$

que é chamada de representação de correção de erros e  $\pi y_t$  o termo de correção de erros. Esta terminologia deve-se ao fato de que  $\pi y_t \neq 0$  mede os desvios em relação ao equilíbrio de longo prazo, induzindo a uma correção através de seus efeitos sobre  $\Delta y_t$ .

Se as séries componentes do sistema descrito acima forem co-integradas então, a regressão de uma delas contra as demais deve produzir uma série de resíduos estacionária. Então é possível usar testes de raiz unitária para verificar a ordem de integração da série de resíduos enquanto que as estimativas dos parâmetros podem ser obtidas através de MQO. Assim, deve-se verificar a ordem de integração dos resíduos enfatuando-se sua auto-regressão na forma abaixo:

$$\Delta \hat{\mu}_t = \rho \hat{\mu}_{t-1} + \gamma_1 \Delta \hat{\mu}_{t-1} + \dots + \gamma_p \Delta \hat{\mu}_{t-p} + v_t \quad (5.2)$$

Se for possível rejeitar a hipótese nula de que  $\rho = 0$ , pode-se concluir pela estacionariedade da série e, portanto pela existência de alguma relação de co-integração. No entanto não é

possível utilizar os valores tabelados de Dickey e Fuller para testar as hipóteses. Somente se os verdadeiros valores dos parâmetros da regressão fossem conhecidos de antemão seria possível utilizá-los.

O problema reside no fato de que os valores da seqüência  $\{\hat{\mu}_t\}$  são gerados através de uma regressão e, sendo assim, a verdadeira série de  $\mu_t$  é desconhecida, portanto, na prática pode-se utilizar apenas seus valores estimados. A regressão ajusta os valores de  $\beta$  minimizando a soma dos quadrados dos desvios e, em decorrência disto, a variância da série de resíduos é tornada a menor possível. Como conseqüência o procedimento é prejudicado uma vez que a estatística usada para testar o valor de  $\rho$  irá refletir este fato (Enders, 2000).

Para contornar este problema MacKinnon (1991) mostrou como desenvolver um experimento de Monte Carlo para gerar os valores críticos adequados ao teste. Eles dependem do tamanho da amostra e do número de variáveis incluídas na regressão. Sendo assim, é possível construir um algoritmo que gere esses valores críticos corretos.

Esta metodologia se aplica bem ao caso em que os resíduos da regressão apresentam um comportamento linear. No entanto, diante da possibilidade de existência de um ajustamento ao equilíbrio de longo prazo assimétrico é possível especificar um modelo para os desvios que permita captar melhor o seu comportamento. Caso contrário o teste para averiguar a estacionariedade estará severamente comprometido.

Além disto, deve-se ter certeza de que o mecanismo de ajustamento da série de resíduos obtidos em (5.1) seja o mais adequado. Não há, portanto, nenhuma garantia de que esta relação seja linear. Logo, a especificação de um mecanismo não-linear pode ser conveniente para detectar a estacionariedade. Enders e Granger (1998) e Enders e Siklos (2001) mostraram como investigar a possibilidade de que os desvios tenham um comportamento não-linear. O teste proposto tem como hipótese nula a possibilidade de que a série se comporte como um processo de raiz unitária e como hipótese alternativa um ajustamento assimétrico na forma *TAR* ou *M-TAR*. Desta maneira a velocidade de ajustamento da variável será determinada de

duas formas distintas. Uma para o caso em que estiver acima do parâmetro  $\tau$  e outra no caso contrário. (Clements e Galvão, 2004).

Para tanto, tomando-se, a série de resíduos na forma de um modelo Threshold Autoregressive (*TAR*) reescreve-se a equação (5.2) na forma abaixo:

$$\Delta\hat{\mu}_t = \rho_1 I_t \hat{\mu}_{t-1} + \rho_2 (1 - I_t) \hat{\mu}_{t-1} + \gamma_1 \Delta\hat{\mu}_{t-1} + \dots + \gamma_p \Delta\hat{\mu}_{t-p} + v_t \quad (5.3)$$

em que  $I_t$  é uma variável dummy da forma:

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{se } \hat{\mu}_{t-1} \geq \tau \\ 0 & \text{se } \hat{\mu}_{t-1} < \tau \end{cases}$$

Da mesma maneira que antes  $\tau$  é o parâmetro chamado *threshold* que divide o comportamento da série, com  $\mu_t$  sendo a série de resíduos obtidos em (5.1) e  $v_t$  o resíduo, independente de  $\mu_t$  e de  $\tau$  assumido ter média zero, variância constante e não apresentar autocorrelação serial. Neste tipo de especificação o vetor de co-integração é linear, mas o modelo de correção de erros assume a forma de (5.3), o que abre a possibilidade de que o ajustamento possa se dar de forma descontínua e não-linear (Seo, 2004).

Alternativamente pode-se tomar uma especificação de forma que a série possa exibir trajetórias mais prolongadas em determinadas direções do que em outras. Para isto reescreve-se o modelo para o comportamento da séries de resíduos na forma abaixo:

$$\Delta\hat{\mu}_t = \rho_1 M_t \hat{\mu}_{t-1} + \rho_2 (1 - M_t) \hat{\mu}_{t-1} + \gamma_1 \Delta\hat{\mu}_{t-1} + \dots + \gamma_p \Delta\hat{\mu}_{t-p} + v_t \quad (5.4)$$

em que  $M_t$  é uma variável dummy da forma:

$$M_t = \begin{cases} 1 & \text{se } \Delta\hat{\mu}_{t-1} \geq \tau \\ 0 & \text{se } \Delta\hat{\mu}_{t-1} < \tau \end{cases}$$

Para por em prática este procedimento, após obter os resíduos da estimação da relação de longo prazo deve-se testar a hipótese nula de raiz unitária na série contra a hipótese alternativa de um ajustamento estacionário não-linear. A condição necessária e suficiente para que a série seja estacionária foi demonstrada por Petruccelli e Woolford (1984) e consiste em garantir que  $-2 < (\rho_1, \rho_2) < 0$ .

Faz-se necessário então verificar se  $\rho_1 = \rho_2 = 0$  mas, neste caso, não é possível utilizar os valores tabelados de uma distribuição  $F$  padrão no teste como demonstraram Enders e Granger (1998). Os mesmos autores mostraram como generalizar a metodologia usada por Dickey e Fuller para testar a hipótese nula de raiz unitária contra a hipótese alternativa de um ajustamento assimétrico.

O procedimento também se baseia num experimento do tipo Monte Carlo, para gerar os valores críticos usados no teste. A princípio deve-se criar, por exemplo, 50.000 processos do tipo *random walk* da seguinte forma,

$$y_{kt} = y_{kt-1} + v_{kt} \quad (5.5)$$

com  $k = 1, \dots, K$  se referindo ao número de séries em análise e  $t = 1, \dots, T$  o tamanho da amostra. Os valores de  $v_{kt}$  são obtidos com conjuntos de tamanho  $T$  normalmente distribuídos, não-correlacionados com desvio padrão unitário. Então, tornando-se os valores iniciais de  $y_{kt}$  aleatórios, os demais  $T$  valores são gerados usando-se a especificação definida em (5.5).

O passo seguinte tem algumas questões que devem ser colocadas. Uma delas diz respeito a estimação do *threshold* ( $\tau$ ). Conforme discutido anteriormente, algumas vezes é possível saber

seu valor de antemão e, em muitos trabalhos tem-se informações suficientes para considerá-lo como zero. No entanto, neste trabalho, não há nenhuma razão para pressupor isto. Sendo assim, é necessário utilizar algum método para encontrar o seu valor, que é desconhecido *a priori*.

Um método para obter uma estimativa superconsistente dos valores de  $\tau$  foi introduzido por Chan (1993). Sua estimação consiste num processo de iteração para obter a minimização da soma dos quadrados dos resíduos de cada uma das equações estimadas de acordo com os modelos (5.3) ou (5.4), utilizando-se os valores observados como possíveis candidatos.

Para implementá-lo deve-se, a princípio, ordenar a seqüência dos valores de  $\{\mu_{t-1}\}$  em sentido crescente, considerando apenas aqueles contidos no intervalo que compreende os valores acima dos 15% menores e abaixo dos 15% maiores como os possíveis candidatos. O passo seguinte é estimar a especificação escolhida (de acordo com (5.3) ou (5.4)) com cada valor em potencial de  $\tau$ , para então selecionar o valor cuja equação geradora retornar a menor soma dos quadrados dos resíduos.

De posse de  $\hat{\tau}$ , estimam-se as regressões na forma dos modelos (5.3) ou (5.4) e, para cada uma delas, é reportado um valor para a estatística  $F$  sob a hipótese nula de que  $\rho_1 = \rho_2 = 0$ . Os valores resultantes das estatísticas  $F$  obtidos nas 50.000 replicações são tabelados em percentis e denominados  $\Phi$  quando o modelo utilizado é o  $TAR$  ou  $\Phi^m$  quando é o  $M-TAR$ . As tabelas 6.4 e 6.5 apresentam os valores críticos construídos através deste algoritmo.

Obviamente, os valores críticos dependem do tamanho da amostra e do número de variáveis incluídas na estimação. Somando-se a isto o fato de que os modelos assimétricos necessitam da inclusão de um coeficiente adicional, é de se esperar que haja uma perda de poder do teste nestes métodos. Ainda assim, é possível que estes problemas sejam minimizados utilizando-se uma especificação estimada corretamente.

O último passo antes da estimação do modelo de correção de erros é inferir sobre a hipótese do ajustamento ser simétrico ou não, ou seja, se  $\rho_1 = \rho_2$ . Não obstante, esta tarefa não é das mais fáceis, quando não se conhece o valor de  $\tau$ . Como é necessário estimá-lo através da auto-

regressão dos resíduos, as propriedades de uma distribuição normal multivariada não estão garantidas (Chan e Tong, 1989).

Felizmente, Chan e Tong (1989) mostraram que se  $\rho_1$  e  $\rho_2$  forem estimados de forma consistente, ou seja, através método de Chan, pode-se ter condições de normalidade assintoticamente garantidas e, neste caso utilizar o teste  $F$  padrão para testar a hipótese de que  $\rho_1 = \rho_2$ . Com isto testa-se a hipótese de um ajustamento simétrico contra a hipótese alternativa  $\rho_1 \neq \rho_2$ , ou seja, a possibilidade de que o ajustamento seja assimétrico. O número de defasagens adequado a ser utilizado nos testes pode ser obtido através do critério de AIC<sup>1</sup> ou SBC<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>*Akaike Information Criterion*, calculado através da fórmula:  $[T \cdot \ln.(SQR) + 2 \cdot n]$  sendo,  $n$  o número de parâmetros estimados e  $T$  o número de observações.

<sup>2</sup>*Schwartz Bayesian Criterion*, calculado através da fórmula:  $[T \cdot \ln.(SQR) + n \cdot \ln.T]$  sendo,  $n$  o número de parâmetros estimados e  $T$  o número de observações.

## CAPÍTULO 6

# Análise Empírica

Para desenvolver a análise dos preços da gasolina foram utilizados os seguintes dados: (i) a taxa de câmbio nominal R\$/U\$, (ii) o preço de revenda da gasolina e, (iii) o preço do petróleo no mercado internacional. Todas as séries estão compreendidas entre julho de 2001 e maio de 2006 perfazendo 59 observações mensais.

A série de preços para a gasolina é disponibilizada pela ANP como parte da análise de preços do mercado nacional. Os preços disponibilizados são uma média ponderada da pesquisa feita nos postos de revenda em cada cidade. A formação original é dada pelas refinarias, centrais petroquímicas, formuladores e importadores de Gasolina. A seguir, são incluídas as parcelas da Contribuição de Intervenção no Domínio Econômico (CIDE), instituída pela Lei nº. 10.336, de 19/12/2001, e alterada pelo Decreto nº. 4.565, de 01/01/2003, e dos Programas de Integração Social e de Formação do Patrimônio do Servidor Público (PIS/PASEP), além do Financiamento da Seguridade Social - COFINS, conforme a Lei nº. 9.990, de 21/07/2000. Atualmente, as parcelas da CIDE, do PIS/PASEP e do COFINS são regulamentadas pela Lei nº. 10.865, de 30/04/2004 e pelos Decretos nº. 9.059 e nº. 9.060, de 30/04/2004. Para se obter o preço final, acrescentam-se os valores do ICMS e da taxa de lucros dos postos revendedores. (ANP, 2005)

Os preços do petróleo no mercado internacional foram obtidos no website da Energy Information Administration (EIA)<sup>5</sup> do governo dos EUA e dizem respeito à média ponderada praticada no mês em questão para o barril de tipo *brent*.

A série do dólar refere-se à taxa de câmbio comercial nominal R\$/U\$, no ato da compra tomando-se sua média mensal ponderada. A fonte é o Banco Central do Brasil, através do

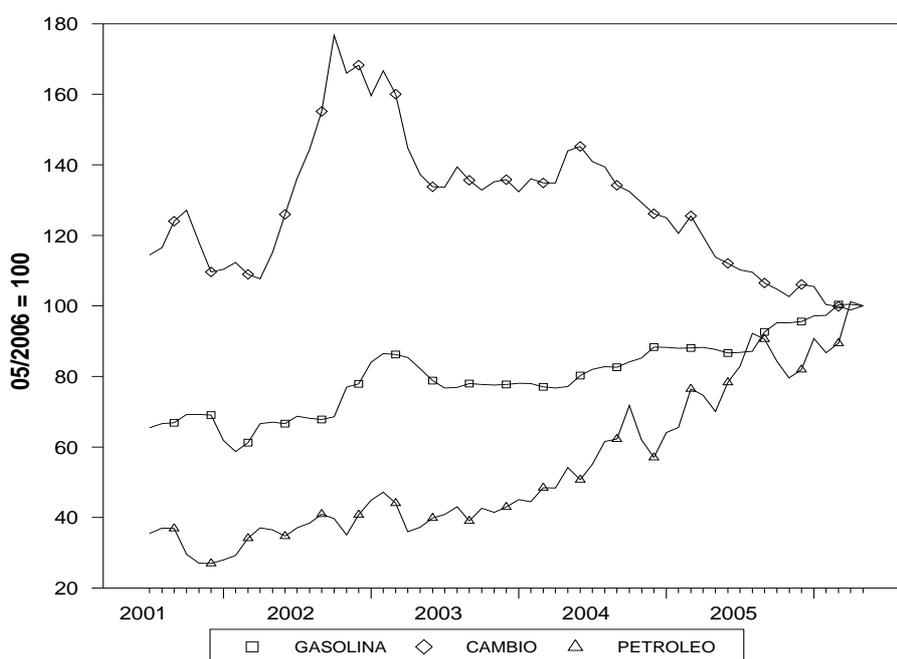
---

<sup>5</sup><http://tonto.eia.doe.gov/>

Boletim/BP, mas disponibilizada no website do Instituto de Pesquisas Econômicas Aplicadas (IPEA)<sup>6</sup>.

O número de observações, ainda que pequeno, é suficiente para garantir as propriedades assintóticas das estimações. Além disso, uma vez que a série de dados está limitada a este número de observações, a alternativa que se coloca é a de não realização da investigação. Então, para a estimação, as observações foram tomadas com base no mês de maio de 2006 fazendo  $\{g_t\}$  o logaritmo da série de preços de revenda da gasolina,  $\{o_t\}$  o logaritmo da série de preços do petróleo e  $\{c_t\}$  o logaritmo da série da taxa de câmbio. A figura 6.1 mostra a trajetória das três variáveis no período de tempo em questão.

**Figura 6.1** Trajetória das séries no tempo. Preços de revenda da gasolina ( $g_t$ ), Preços do petróleo ( $o_t$ ) e Taxa de câmbio nominal R\$/U\$ ( $c_t$ ), tomados com base no mês de maio de 2006.



Considerando-se um modelo simples para a formação dos preços da gasolina pode-se utili-

<sup>6</sup><http://www.ipeadata.gov.br/>

zar a seguinte especificação:

$$g_t = \alpha + \beta_1 o_t + \beta_2 c_t + \mu_t$$

Com  $\alpha$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  parâmetros a serem estimados e  $\mu_t$  o resíduo a ser obtido.

Aqui foram considerados apenas os preços do petróleo e a taxa de câmbio como componentes mais importantes para a variação dos preços da gasolina. Como é sabido o petróleo tem impacto direto na variação dos preços do combustível e a taxa de câmbio e, como argumentou Bacon (1991), pode contribuir de forma decisiva para a assimetria dos preços dos combustíveis. Além disso, de acordo com a teoria econômica, espera-se que os sinais de ambas as variáveis independentes sejam positivos. Isso porque aumentos no preço do petróleo ou desvalorizações na taxa de câmbio devem produzir um aumento nos preços da gasolina.

Os impostos não são ignorados como parcela importante na composição dos preços da gasolina. No entanto, suas alíquotas permanecem estáveis por períodos de tempo razoavelmente longos (ao menos em comparação com o período de tempo em análise). Portanto, não é de se esperar uma contribuição dos impostos para a assimetria nos preços da gasolina.

A princípio é preciso testar as séries para verificar sua ordem de integração. Os testes ADF<sup>7</sup> mostram que todas as séries possuem raiz unitária e são estacionárias em primeira diferença. Portanto, pode-se dizer, com um nível de confiança de 95% (usados nos testes), que todas as variáveis se comportam como processos integrados de primeira ordem. Os resultados são apresentados na tabela 6.1 e o número de defasagens foi escolhido de acordo com o critério SBC.

Pelos resultados acima, é possível perguntar se existe alguma relação de co-integração entre as séries. Para verificar esta possibilidade, num primeiro momento pode-se efetuar o teste de

---

<sup>7</sup>Augmented Dickey-Fuller. Este teste é uma versão ampliada da forma introduzida por Dickey e Fuller, que permite testar a presença de raiz unitária em séries de ordem mais alta. Pode-se escrevê-lo na forma de (5.2). Caso o parâmetro  $\rho$  seja igual a zero toda a equação é em primeira diferença e, portanto, existe raiz unitária.

**Tabela 6.1** Testes de raiz unitária

Variável	Est. do teste	Valor Crítico	Prob.
$g_t$	-1,0351	-2,9135	0,7349
$o_t$	-2,1093	-3,4970	0,5287
$c_t$	-1,2459	-2,9135	0,6485
$\Delta g_t$	-5,3274	-1,9467	0,0000
$\Delta o_t$	-2,6172	-1,9471	0,0098
$\Delta c_t$	-5,4152	-1,9467	0,0000

co-integração através do método de Johansen. No caso em estudo é de se esperar que haja apenas uma relação de co-integração entre as séries, uma vez que apenas a série de preços da gasolina deve depender das demais variáveis.

Como mostra a tabela 6.2 a estatística de traço reporta, sob a hipótese de não haver relação de co-integração, um valor de 26,54 contra 29,79 a 5% de significância. Na hipótese de haver ao menos uma relação, o valor da estatística de traço é de 7,53 contra 15,49. Para a hipótese de haver ao menos duas relações de co-integração, a estatística apresentada é de 0,02 contra um valor crítico de 3,84.

**Tabela 6.2** Testes de co-integração:  $\lambda_{trace}$  e  $\lambda_{max}$ 

Hip. nula	Hip. alternativa	Est. de teste	Valor crítico (5%)	Valor crítico (10%)
$\lambda_{trace}$		$\lambda_{trace}$		
$r = 0$	$r > 0$	26,5407	29,7971	27,0609
$r \leq 1$	$r > 1$	7,5306	15,4947	13,4287
$r \leq 2$	$r > 2$	0,0253	3,8415	2,7055
$\lambda_{max}$		$\lambda_{max}$		
$r = 0$	$r = 1$	19,0101	21,1316	18,8928
$r = 1$	$r = 2$	7,5053	14,2646	12,2965
$r = 2$	$r = 3$	0,0253	3,8415	2,7055

Utilizando agora a estatística de máximo autovalor apura-se que, para a hipótese de não haver nenhuma relação de co-integração, a estatística do teste é de 19,01 o que não ultrapassa o valor crítico de 20,13 a 5% de significância. Se a hipótese for a de que há ao menos uma relação de co-integração o valor retornado é de 7,50 e o valor crítico é de 14,26. Já para a

hipótese de haver duas relações de co-integração o teste apresenta 0,02 contra um valor crítico de 3,84. Nota-se ainda que, o teste  $\lambda_{max}$  acusa haver uma relação de co-integração no entanto, com um nível de confiança de 90%.

Tomando os resultados acima pode-se concluir que não existe relação de co-integração entre as séries. Isto não surpreende uma vez que, como foi argumentado por Enders e Siklos (2001), se as séries forem assimetricamente co-integradas, testes que pressupõem relações lineares entre as variáveis, são mal especificados. A despeito dos resultados obtidos, a intuição econômica diz que deve-se esperar por algum tipo de relação entre as séries. Isso porque o preço do petróleo é o principal componente da formação da gasolina e, portanto, deve influenciar o comportamento de seus preços de alguma forma, enquanto que a taxa de câmbio também responde por uma parcela importante das variações dos preços do combustível.

Adotando outra maneira de proceder à estimação pode-se utilizar o método de Engle e Granger para averiguar a existência de relações de co-integração. Assim, o próximo passo é regressar as variáveis para obter a relação de equilíbrio de longo prazo. Esta regressão apresenta o seguinte resultado:

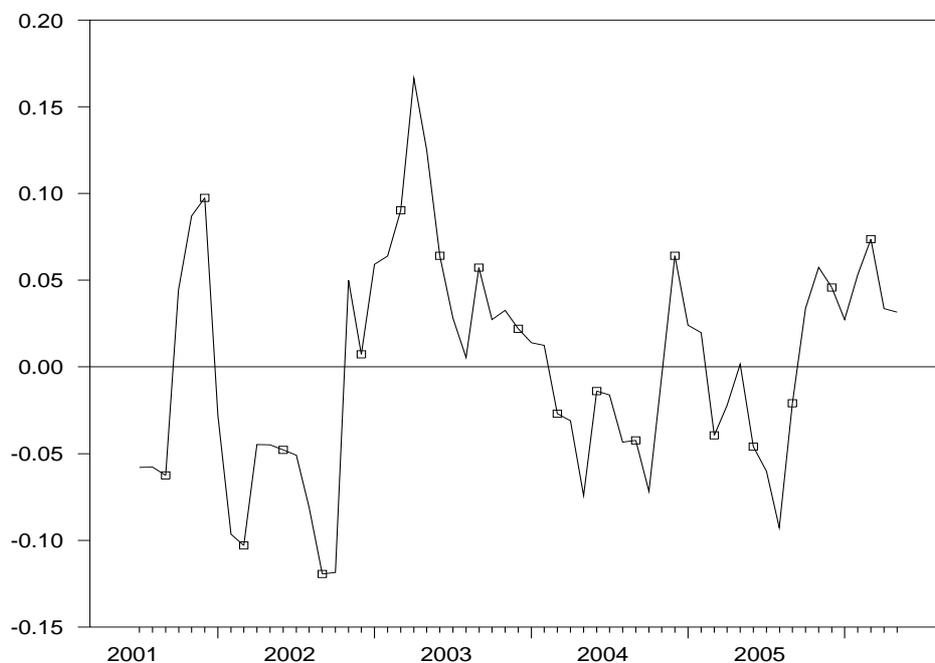
$$g_t = 2,265 + 0,343o_t + 0,157c_t + \hat{\mu}_t \quad (6.1)$$

(6,35)    (13,96)    (2,52)

com estatísticas  $t$  mostradas entre parênteses e  $\hat{\mu}_t$  o resíduo estimado. O  $R^2$  reportado é de 0,783 enquanto que a estatística de Durbin-Watson é de 0,580. A presença de auto-correlação serial nos resíduos revela a possibilidade da existência de cointegração entre as variáveis.

A hipótese de que, tanto o coeficiente estimado da gasolina quanto o do petróleo têm a mesma magnitude deve ser considerada. Isso porque, impactos das variações em cada um destes deveria provocar uma mudança de mesma ordem nos preços do petróleo. No entanto, ao tentar impor esta restrição à equação 6.1, obtém-se uma estatística de teste de 10,90 com um valor  $P$  de 0,001 o que faz com que deva-se rejeitar a hipótese que eles sejam iguais.

**Figura 6.2** Relação de co-integração entre as variáveis  $(g_t)$ ,  $(o_t)$  e  $(c_t)$ , obtida na equação 6.1



A próxima etapa é determinar a ordem de integração da série de resíduos. Para tanto deve-se efetuar a auto-regressão para determinar sua ordem de integração. A forma que respeita as propriedades desejáveis para os resíduos e que se mostrou a mais adequada tanto pelo critério AIC quanto pelo SBC foi a que inclui uma defasagem. Então a seguinte especificação parece ser apropriada:

$$\Delta \hat{\mu}_t = -0,365 \hat{\mu}_{t-1} + 0,220 \Delta \hat{\mu}_{t-1} + v_t \quad (6.2)$$

$(-3,63)$ 
 $(1,68)$

De acordo com a auto-regressão acima o valor da estatística t para o coeficiente de interesse é de -3,63. A partir destes resultados e com base nos valores críticos mostrados na tabela 6.3 não se pode rejeitar a hipótese nula de não-estacionariedade com um nível de confiança de 99% e 95%. Neste ponto, só seria possível concluir pela co-integração entre as séries se fosse aceito

um nível de confiança de 90%. Novamente é provável que esta dificuldade ocorra em razão da pressuposição de um comportamento linear.

**Tabela 6.3** Valores críticos para teste de co-integração linear<sup>8</sup>

Percentil	Valor crítico	Percentil	Valor crítico
Mínimo	-6,800855	Máximo	1,446120
01%	-4,531503	99%	-0,488035
05%	-3,873391	95%	-1,178953
10%	-3,551133	90%	-1,492615
25%	-3,028394	75%	-1,964571

[8] Os valores críticos incluem constante no vetor de co-integração e foram interpolados de acordo com a metodologia de Engle e Granger para três variáveis e 59 observações. Interpolados de acordo com o método proposto por MacKinnon (1991).

Como este nível não é aceitável para os propósitos deste trabalho, não há possibilidade de efetuar a estimação de um modelo de correção de erros. A possibilidade de que o ajustamento no longo prazo seja assimétrico torna-se uma opção para a análise. Sendo assim, como primeira alternativa, pode-se optar pelo modelo *M-TAR*.

Regredindo a série de desvios do equilíbrio de longo prazo na forma de (5.4) percebe-se que, pelos os valores de  $\rho_1$  e  $\rho_2$  (-0,407 e -0,180 respectivamente), a série é estacionária. No entanto, o teste para a hipótese de que os coeficientes sejam conjuntamente iguais a zero apresenta uma estatística *F* de 5,453, o que leva a conclusão, examinando a tabela 6.4, de que as séries não são co-integradas. Isso porque, não é possível rejeitar a hipótese nula de raiz unitária nos resíduos em favor de um ajustamento assimétrico já que o valor crítico é de 8,517 com um nível de confiança de 95%.

No teste para a hipótese de que  $\rho_1 = \rho_2$  a estatística reporta um valor de 1,858 com um *valor P.* de 0,178 o que implicaria na conclusão a favor de um ajustamento simétrico. Além disso, já foi visto que não é possível encontrar relação de co-integração entre as séries com um mecanismo de ajustamento linear.

**Tabela 6.4**  $\Phi^m$  - Valores críticos para teste de co-integração  $M-TAR^9$

Percentil	Valor crítico	Percentil	Valor crítico
Mínimo	0,143056	Máximo	23,030930
01%	0,764617	99%	11,656517
05%	1,339643	95%	8,516715
10%	1,753043	90%	7,246599
25%	2,593585	75%	5,439215

[9] Os valores críticos incluem constante no vetor de co-integração e foram interpolados de acordo com a metodologia de Enders e Granger para três variáveis e 59 observações.

Por fim, resta a especificação na forma de um modelo  $TAR$ . Neste caso, o valor reportado para o teste de raiz unitária nos resíduos é de 8,58 contra um valor crítico de 8,45 (com 95% de confiança como mostra a tabela 6.5). Neste caso, é possível concluir a favor da estacionariedade da série de resíduos com um mecanismo de ajustamento assimétrico. Sendo assim, pode-se agora reescrever a auto-regressão dos resíduos como

$$\Delta \hat{\mu}_t = -0,152 I_t \hat{\mu}_{t-1} - 1,214 (1 - I_t) \hat{\mu}_{t-1} + 0,203 \Delta \hat{\mu}_{t-1} + \hat{v}_t \quad (6.3)$$

(-2,03)
(-3,73)
(1,62)

em que  $I_t$  é uma variável dummy da forma:

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{se } \hat{\mu}_{t-1} \geq -0,0509 \\ 0 & \text{se } \hat{\mu}_{t-1} < -0,0509 \end{cases}$$

com estatísticas  $t$  entre parênteses e  $\hat{v}_t$  o resíduo. A análise dos valores de  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , indicam estacionariedade na série. Agora a estimativa aponta para convergência da séries de resíduos com uma velocidade de ajustamento que é mais rápida para discrepâncias positivas do que para as negativas a partir de  $\tau=-0,0509$ .

**Tabela 6.5**  $\Phi$  - Valores críticos para teste de co-integração  $TAR^{10}$ 

Percentil	Valor crítico	Percentil	Valor crítico
Mínimo	0.183897	Máximo	24.244584
01%	0.860878	99%	11.423222
05%	1.411957	95%	8.452506
10%	1.797435	90%	7.181874
25%	2.599235	75%	5.371948

[10] Os valores críticos incluem constante no vetor de co-integração e foram interpolados de acordo com a metodologia de Enders e Granger para três variáveis e 59 observações.

A tabela 6.6 resume os principais resultados das estimações feitas até aqui. Os resultados positivos encontrados com o modelo  $TAR$  possibilitam a formulação de um modelo de correção de erros. Assim, a seguinte especificação parece adequada:

$$\begin{aligned}
\Delta g_t &= -0,055I_t\hat{\mu}_{t-1} - 0,899(1-I_t)\hat{\mu}_{t-1} + A_{11}(L)\Delta g_{t-1} + A_{12}(L)\Delta o_{t-1} + A_{13}(L)\Delta c_{t-1} + v_{1t} \\
&\quad (-1,17) \quad (-4,39) \quad (F_{11} = 0,00) \quad (F_{12} = 0,14) \quad (F_{13} = 0,65) \\
\Delta o_t &= -0,101I_t\hat{\mu}_{t-1} + 0,052(1-I_t)\hat{\mu}_{t-1} + A_{21}(L)\Delta g_{t-1} + A_{22}(L)\Delta o_{t-1} + A_{23}(L)\Delta c_{t-1} + v_{2t} \\
&\quad (-1,22) \quad (0,14) \quad (F_{21} = 0,57) \quad (F_{22} = 0,14) \quad (F_{23} = 0,49) \\
\Delta c_t &= 0,137I_t\hat{\mu}_{t-1} - 0,079(1-I_t)\hat{\mu}_{t-1} + A_{31}(L)\Delta g_{t-1} + A_{32}(L)\Delta o_{t-1} + A_{33}(L)\Delta c_{t-1} + v_{3t} \\
&\quad (0,82) \quad (-0,11) \quad (F_{31} = 0,81) \quad (F_{32} = 0,10) \quad (F_{33} = 0,38)
\end{aligned} \tag{6.4}$$

em que as estatísticas  $t$  são apresentadas entre parênteses,  $A_{i,j}(L)$  é um polinômio de primeira ordem escrito sob a forma de operadores *lag* e  $F_{i,j}$  é o valor  $P$  para a hipótese nula de que todos os valores dos  $A_{i,j}$  sejam nulos.

Outro aspecto que deve ser comentado é que através da inspeção dos resíduos em (6.4) é possível verificar que não há sinais de autocorrelação serial. No exame dos valores da estatística

$Q$  do teste de Ljung-Box<sup>11</sup> ( $Q = 6,72$  com um valor  $P = 0,567$ ) percebe-se que estes não são significativos aos níveis exibidos nos resultados.

**Tabela 6.6** Resumo dos Resultados da Estimação dos preços da gasolina

	Engle e Granger	TAR	M-TAR
$\rho_1$ <sup>12</sup>	-0,365 (-3,63)	-0,152 (-2,03)	-0,478 (-3,20)
$\rho_2$ <sup>12</sup>	-	-1,214 (-3,72)	-0,229 (-2,02)
AIC	-124,96	-124,41	-121,51
SBC	-120,87	-120,23	-117,33
$\rho_1 = \rho_2 = 0$ <sup>15</sup>	-	8,579	6,814
$\Phi$ <sup>13</sup>	-3,873	8,452	8,516
$\rho_1 = \rho_2$ <sup>14</sup>	-	10,361 (0,002)	1,858 (0,178)

[12]Valor estimado com estatísticas  $t$  entre parênteses

[13]Refere-se tanto ao valor de  $\Phi$  quanto de  $\Phi^m$

[14]Refere-se a hipótese nula  $\rho_1 = \rho_2$ . Valor P entre parênteses

[15]Refere-se a hipótese nula  $\rho_1 = \rho_2 = 0$ .

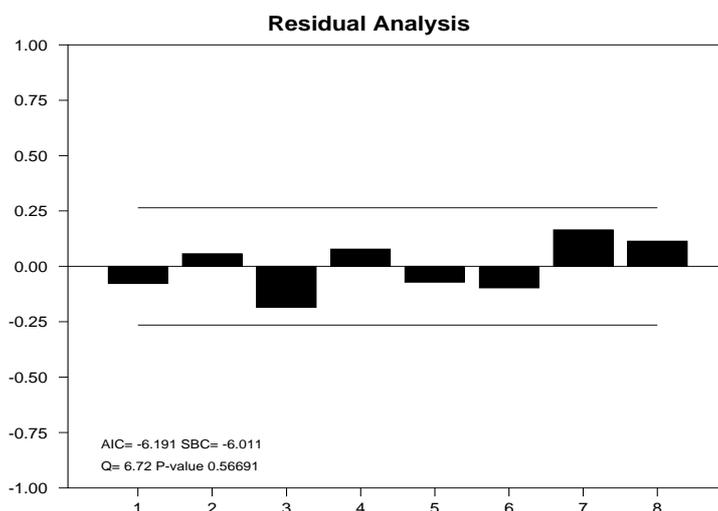
A equação (6.4) mostra que o ajuste na trajetória dos preços da gasolina é de tal forma que, quando os preços caem em relação ao nível de equilíbrio, ou seja  $\hat{\mu}_{t-1} < -0,0509$ , quase 90% da discrepância é corrigida para o próximo período.

Dado que o modelo escolhido foi da forma TAR, pode-se interpretar os resultados da seguinte maneira: quando ocorre uma realização negativa em  $\hat{\mu}_t$ , ou seja, os preços da gasolina estão abaixo do equilíbrio de longo prazo o retorno ocorrem uma velocidade quase dezoito ve-

<sup>11</sup>A estatística  $Q$  é calculada pela fórmula:  $Q = \frac{T(T+2)\sum_{k=1}^S r_k^2}{(T-K)}$  em que,  $n$  é o número de parâmetros estimados,  $T$  o número de observações e  $\hat{r}_k$  a autocorrelação estimada.

zes superior a de quando a discrepância é positiva. Alternativamente pode-se dizer que 90% das realizações negativas são corrigidas de um período para outro contra apenas 5% das positivas.

**Figura 6.3** Análise dos resíduos



Assim a tendência é que aumentos nos preços da gasolina advindos de alterações nos preços do petróleo ou da taxa de câmbio tendem a ocorrer mais rapidamente, enquanto que as quedas tendem a ocorrer mais lentamente. No mais, os valores de  $F_{i,j}$  informam que a trajetória de ajuste dos preços da gasolina não é influenciada na sua dinâmica de curto prazo por alterações nos preços do petróleo e na taxa de câmbio. Além do mais, dado que o coeficiente de ajustamento estimado para a correção de discrepâncias positivas ( $\hat{\mu}_{t-1} \geq -0,0509$ ) tem uma estatística  $t$  de apenas -1,17, pode-se dizer que os preços da gasolina não se ajustam quando ocorre uma realização positiva.

Estes resultados podem ser sintetizados da seguinte forma:

1. Se os preços do petróleo subirem ou a taxa de câmbio sofrer uma desvalorização de tal forma que haja uma realização negativa em  $\mu_{t-1}$  então é de se esperar que os preços da gasolina subam recuperando 90% da diferença existente no período subsequente;
2. Se os preços do petróleo caírem ou a taxa de câmbio sofrer uma valorização de tal forma

que haja uma realização positiva em  $\mu_{t-1}$  (quando seria de se esperar que os preços da gasolina caíssem) então, o ajustamento será de apenas 5% da diferença existente, ou nem ocorrerá.

Ainda de acordo com a equação (6.4) pode-se depreender que tanto os preços do petróleo quanto a taxa de câmbio são fracamente exógenos e não respondem a desvios do equilíbrio de longo prazo como era de se esperar. Além disto, não se pode rejeitar a hipótese de que seus coeficientes são, em conjunto iguais a zero, o que leva a conclusão que não são influenciados (no sentido da causalidade de Granger) pelas demais variáveis do sistema.

De forma geral esta última especificação mostrou ser a mais adequada tanto pelos resultados alcançados na sua estimação quanto pelos resultados práticos que concordam com a intuição econômica. A estimação por este método também viabilizou uma análise do comportamento dos preços da gasolina, tarefa esta que não foi possível pelo método tradicional e mostrou ter problemas com a especificação na forma de um modelo *M-TAR*.

## Considerações Finais

Este trabalho teve como finalidade apresentar dois aspectos da econometria. O primeiro deles foi mostrar como os avanços mais recentes na pesquisa e no desenvolvimento de novos modelos têm contribuído para a melhoria dos procedimentos de estimação dos fenômenos econômicos. O segundo teve como motivação fornecer uma aplicação prática destes conceitos, além de mostrar como a introdução das especificações não-lineares pode contribuir para a análise do comportamento dos preços da gasolina no país.

A formulação do modelo de correção de erros alternativo foi possível graças às contribuições recentes da ciência das séries temporais no campo da não-linearidade. De acordo com o caso em análise, os modelos paramétricos e estocásticos se mostraram mais adequados aos propósitos práticos e, especificamente para o tipo de análise escolhida como exemplo, sua introdução alcança resultados satisfatórios, tanto do ponto vista teórico quanto prático.

A consecução do objetivo de construir um modelo de ajustamento assimétrico para a estimação de séries sob co-integração apresenta alguns problemas. No entanto, estas dificuldades puderam ser resolvidas aplicando-se as precauções e os métodos propostos na literatura. A construção dos valores críticos utilizados para inferência sobre a existência ou não de raiz unitária na auto-regressão dos resíduos foi feita através da criação do algoritmo apropriado. No trabalho seminal de Enders e Granger estão apresentados apenas os valores tabelados para o caso ali analisado, além da disponibilidade dos valores referentes aos testes para estimação feita com três variáveis. Desta maneira, neste trabalho houve a preocupação da construção de uma tabela com os valores críticos calculados para o tamanho exato da estimação feita.

No desenvolvimento da análise empírica do comportamento dos preços da gasolina procurou-

se analisar seu ajustamento em resposta a desvios de sua trajetória de longo prazo para com os preços do petróleo no comércio internacional e a taxa de câmbio. Para isto utilizou-se um VAR sob co-integração com um modelo assimétrico de correção erros e, de acordo com os testes feitos, o modelo de mais adequado mostrou ser na forma de um TAR.

Assim, pela metodologia habitual, especificamente os testes de Johansen e o método clássico de Engle e Granger, não foi possível rejeitar a hipótese nula de não haver co-integração entre as séries. Isto pode estar ligado ao fato de que os modelos lineares são muito restritivos, se comparados aos não-lineares. Esta hipótese, no entanto, pode ser rejeitada utilizando-se os modelos de co-integração assimétrica.

Do ponto de vista da teoria econômica este fenômeno pode ser interpretado de várias maneiras. Dentre estas destacam-se, pelo lado da oferta, o fato de que isto ocorre em face da existência de poder do mercado. A existência de um conluio para manter as margens de lucro elevadas contribuiria para a assimetria nos preços da gasolina uma vez que, diante do conhecimento imperfeito sobre os preços que seus concorrentes estão pagando às distribuidoras, a firma seria mais relutante em baixar seu preço de revenda para evitar uma sinalização de que estaria tentando burlar o acordo.

Já pelo lado da demanda, os custos de transação seriam responsáveis por fornecer um poder provisório de mercado aos postos de revenda e, portanto, uma resposta assimétrica às mudanças nos preços. Neste caso, a assimetria estaria atrelada a existência de um monopólio local que cada posto de gasolina teria, limitado pela capacidade de procura do consumidor.

Pelos resultados apresentados comprovou-se a existência de um ajustamento não linear. Desvios da trajetória de equilíbrio mostraram ajustar-se mais rapidamente para discrepâncias negativas do que para as positivas, ou seja, os preços da gasolina, quando estão acima do equilíbrio, tendem a permanecer em média um período de tempo cerca de dezoito vezes maior do que quando estão abaixo deste.

## Referências Bibliográficas

- [1] ANP. Agência nacional do petróleo. *Notas Técnicas*, 2005. Disponível em: <[http://www.anp.gov.br/conheca/notas\\_tecnicas.asp](http://www.anp.gov.br/conheca/notas_tecnicas.asp)>. Acesso em: 15 set. 2005.
- [2] BACHMEIER, L. J.; GRIFFIN, J. M. New evidence on asymmetric gasoline price responses. *Review of Economics and Statistics*, 85(3):772–776, 2003.
- [3] BACON, R. W. Rockets and feathers: the asymmetric speed of adjustment of uk retail gasoline prices to cost changes. *Energy Economics*, 13(3):211–218, Julho 1991. Disponível em: <<http://ideas.repec.org/a/eee/eneeco/v13y1991i3p211-218.html>>. Acesso em 15 mar. 2005.
- [4] BALKE, N. S.; BROWN, S. P. A.; YUCEL, M. K. Crude oil and gasoline prices: an asymmetric relationship? *Federal Reserve Bank of Dallas Economic Review*, 11(First Quarter):2–11, 1998.
- [5] BETTENDORF, L.; VAN DER GEEST, S. A.; VARKEVISSER, M. Price asymmetry in the dutch retail gasoline market. *Energy Economics*, 25:669–689, 2003.
- [6] BORENSTEIN, S.; CAMERON, A. C.; GILBERT, R. Do gasoline prices respond asymmetrically to crude oil price changes? *The Quarterly Journal of Economics*, 112(1): 305–339, 1997.
- [7] CANER, M.; HANSEN, B. E. Threshold autoregression with a near unit root. *Working papers, Wisconsin Madison - Social Systems*, 1998.
- [8] CHAN, K.-S. Consistency and limiting distribution of the least squares estimator of a threshold autoregressive model. *Annals of Statistics*, 35(21):520–533, 1993.
- [9] CHAN, K.-S.; TONG, H. *A Survey of the Statistical Analysis of a Univariate Threshold Autoregressive Model*, pages 1–42. JAI Press Inc., Greenwich, Conn., 1989.
- [10] CLEMENTS, M. P.; GALVÃO, A. B. A comparison of tests of nonlinear cointegration with application to the predictability of us interest rates using the term structure. *International Journal of Forecasting*, 20(2):219–236, 2004.
- [11] ENDERS, W. *Applied Econometric Time Series*. John Wiley & Sons, Inc, 2000.
- [12] ENDERS, W.; GRANGER, C. W. J. Unit-root tests and asymmetric adjustment with an example using the term structure of interest rates. *Journal of Business & Economic Statistics*, 16(3):304–311, Julho 1998.

- [13] ENDERS, W.; SIKLOS, P. L. Cointegration and threshold adjustment. *Journal of Business & Economic Statistics*, 19(2):166–176, Abril 2001.
- [14] ENGLE, R. F.; GRANGER, C. W. J. Co-integration and error correction: representation, estimation and testing. *Econometrica*, 55(2):251–276, 1987.
- [15] GALEOTTI, M.; LANZA, A.; MANERA, M. Rockets and feathers revisited: an international comparison on european gasoline markets. *Energy Economics*, 25: 175–190, 2003.
- [16] GÁSBRASIL. Petrobrás: ao menos 10 us\$ do preço do petróleo é especulação. agosto 2005. Disponível em: <<http://www.gasbrasil.com.br/atualidades/noticias.asp?codigo=12029>>. Acesso em: 10 dez. 2005.
- [17] GODBY, R.; LINTNER, A. M.; STENGOS, T.; WANDSCHNEIDER, B. Testing for asymmetric pricing in the canadian retail gasoline market. *Energy Economics*, 22(3): 349–368, 2000.
- [18] HAMILTON, J. D. *Time Series Analysis*. Princeton University Press, 1994.
- [19] JOHANSEN, S.; JUSELIUS, K. Maximum likelihood estimation and inference on cointegration—with applications to the demand for money. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 52(2):169–210, Maio 1990.
- [20] MACKINNON, J. Critical values for cointegration tests. *University of California at San Diego, Economics Working Paper Series*, 4(90), 1991. Disponível em: <<http://ideas.repec.org/p/cdl/ucsdec/90-4.html>>. Acesso em: 15 set. 2005.
- [21] MÜLLER, G.; RAY, S. Asymmetric price adjustment: A retail perspective. 2004. Disponível em: <<http://www.ciras.com/research/wps.htm>>. Acesso em: abr. 2006.
- [22] PELTZMAN, S. Prices rise faster than they fall. *Journal of Political Economy*, 108(3): 466–502, Junho 2000.
- [23] PETROBRÁS. Destaques operacionais. agosto 2005. Disponível em: <[http://www2.petrobras.com.br/portal/frame\\_ri.asp?pagina=/ri/port/DestaquesOperacionais/Abastecimento/Abastecimento.asp](http://www2.petrobras.com.br/portal/frame_ri.asp?pagina=/ri/port/DestaquesOperacionais/Abastecimento/Abastecimento.asp)>. Acesso em: 10 set. 2005.
- [24] PETRUCCELLI, J. D.; WOOLFORD, S. W. A threshold ar(1) model. *Journal of Applied Probability*, 35(21):270–286, 1984.
- [25] RADCHENKO, S. Oil price volatility and the asymmetric response of gasoline prices to oil price increases and decreases. (0408001), Agosto 2004. Disponível em: <<http://ideas.repec.org/p/wpa/wuwpio/0408001.html>>. Acesso em 30 nov. 2005.

- [26] SALAS, J. M. I. S. Price adjustments and asymmetry in the philippine retail gasoline market. Setembro 2002. Disponível em: <<http://ideas.repec.org/p/wpa/wuwpio/0209001.html>>. Acesso em: 30 set. 2005.
- [27] SEO, B. Testing for nonlinear adjustment in smooth transition vector error correction models. *Econometric Society 2004 Far Eastern Meetings*, (749), 2004. Disponível em: <<http://ideas.repec.org/p/econ/feam04/749.html>>. Acesso em: 30 nov. 2005.
- [28] TONG, H. Threshold models in non-linear time series analysis. *Lecture Notes in Statistics*, 21, 1983.

APÊNDICE A

**Apêndice**

**Tabela A.1** Dados utilizados

Observação	Preço da gasolina	Taxa de câmbio	Preço do petróleo
07/2001	1,681	2,4652	24,610
08/2001	1,711	2,5098	25,680
09/2001	1,718	2,6709	25,620
10/2001	1,779	2,7394	20,540
11/2001	1,780	2,5423	18,800
12/2001	1,775	2,3619	18,710
01/2002	1,588	2,3771	19,420
02/2002	1,509	2,4188	20,280
03/2002	1,574	2,3458	23,700
04/2002	1,713	2,3196	25,730
05/2002	1,722	2,4796	25,350
06/2002	1,711	2,7132	24,080
07/2002	1,767	2,9338	25,740
08/2002	1,751	3,1093	26,650
09/2002	1,742	3,3412	28,400
10/2002	1,761	3,8051	27,540
11/2002	1,978	3,5756	24,340
12/2002	2,001	3,6251	28,330
01/2003	2,160	3,4376	31,180
02/2003	2,223	3,5900	32,770
03/2003	2,215	3,4461	30,610
04/2003	2,195	3,1179	25,000
05/2003	2,113	2,9549	25,860
06/2003	2,026	2,8824	27,650
07/2003	1,971	2,8790	28,350
08/2003	1,975	3,0017	29,890
09/2003	2,003	2,9220	27,110
10/2003	1,997	2,8607	29,610
11/2003	1,993	2,9130	28,750
12/2003	1,998	2,9245	29,810

**Tabela A.2** Dados utilizados (continuação)

Observação	Preço da gasolina	Taxa de câmbio	Preço do petróleo
01/2004	2,007	2,8510	31,280
02/2004	2,003	2,9295	30,860
03/2004	1,981	2,9047	33,630
04/2004	1,972	2,9052	33,590
05/2004	1,983	3,0996	37,570
06/2004	2,062	3,1283	35,180
07/2004	2,107	3,0360	38,220
08/2004	2,127	3,0021	42,740
09/2004	2,124	2,8903	43,200
10/2004	2,161	2,8521	49,780
11/2004	2,190	2,7852	43,110
12/2004	2,271	2,7174	39,600
01/2005	2,268	2,6922	44,510
02/2005	2,262	2,5970	45,480
03/2005	2,263	2,7039	53,100
04/2005	2,267	2,5784	51,880
05/2005	2,253	2,4520	48,650
06/2005	2,226	2,4127	54,350
07/2005	2,232	2,3727	57,520
08/2005	2,239	2,3598	63,980
09/2005	2,381	2,2936	62,910
10/2005	2,447	2,2557	58,540
11/2005	2,448	2,2100	55,240
12/2005	2,457	2,2847	56,860
01/2006	2,496	2,2731	62,990
02/2006	2,502	2,1611	60,210
03/2006	2,579	2,1512	62,060
04/2006	2,581	2,1285	70,260
05/2006	2,568	2,1773	69,780

# Índice Remissivo

- ARCH, 30
- Bachmeier, 12
- Balke, 12
- Bancon, 43
- Bettendorf, 13
- Borenstein, 11, 12, 17
- Brown, 12
- Cameron, 11, 12, 17
- Caner, 33
- Chan, 32, 39, 40
- Clements, 37
- co-integração, 13, 14, 24, 25, 27, 28
- Enders, 31, 33, 36, 38
- Engle, 12, 24, 26–28, 50
- Gás Brasil, 10
- Galeotti, 13
- Galvão, 37
- Gilbert, 11, 12, 17
- Godby, 12
- Granger, 12, 24, 26–28, 33, 36, 38, 50  
    Causalidade, 52
- Griffin, 12
- Hansen, 33
- Johansen, 28
- Juselius, 28
- Lanza, 13
- Lintner, 12
- M-TAR, 33, 36, 39, 47, 48, 50, 52
- MacKinnon, 36
- Manera, 13
- Markov-Switching, 30
- Monte Carlo, 36, 38
- MQO, 23, 28, 35
- Muller, 11, 18
- Neural Network, 30
- Peltzman, 16, 17
- Petrobrás, 10
- Petrucelli, 38
- Radchenko, 12, 17
- raiz unitária, 23, 33, 35, 38, 44
- random walk, 29, 38
- Ray, 11, 18
- ruído branco, 25
- Salas, 13
- Seo, 37
- Siklos, 33, 36
- STAR, 30
- Stengos, 12
- TAR, 13, 14, 30–33, 36, 37, 39, 48–50, 54
- Tong, 30, 40
- TVECM, 33
- van der Geest, 13
- VAR, 26, 27, 54
- Variáveis integradas, 23
- Varkevisser, 13
- VARMA, 26
- Wandschneider, 12
- Woolford, 38
- Yucel, 12